Universidad Nacional Autónoma de
México

Facultad de Ciencias

Módulos cuyas clases de pretorsión hereditarias son cerradas bajo productos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

R A M Ó N   A B U D   A L C A L Á

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

2011

Datos del Alumno:
Abud Alcalá, Ramón
56736679
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
303640576

Propietario (Tutor)
Dr. José Ríos Montes

Propietario
Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas

Propietario
Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Suplente
Dr. Alejandro Alvarado García

Suplente
Dr. Jaime Castro Pérez

Datos del trabajo escrito:
Módulos cuyas clases de pretorsión hereditarias son cerradas
bajo productos
66p
2011

A mi familia y amigos.

Índice general

Introducción

El presente trabajo da una visión detallada del artículo [11]. Un módulo *cerrado bajo productos* M es un módulo para el cual todas las clases de pretorsión hereditarias en $\sigma[M]$ son clases cerradas bajo productos. Beachy y Blair demuestran en [1] (Corolario 3.3) que ${}_RR$ es cerrado bajo productos si y solo si R es un anillo artiniano izquierdo, se pretende generalizar este hecho para el caso de módulos.

Durante el primer capítulo se desarrolla un material básico sobre la retícula de las clases de pretorsión hereditarias, pasando por sus biyecciones con topologías lineales y prerradicales exactos izquierdos, también considerando a las clases de pretorsión hereditarias como subcategorías plenas de la categoría de R-módulos izquierdos, mientras se les compara con las categorías de módulos $\sigma[M]$.

El segundo capítulo comienza dando varias equivalencias a la definición de módulo cerrado bajo productos y se continua mostrando propiedades de éstos relacionandolos con otras propiedades importantes como por ejemplo; ser localmente artiniano, semilocal, poliforme, proyectivo o semiartiniano. En particular, un resultado que repercute de manera importante es que todo módulo localmente artiniano es cerrado bajo productos, lo cual nos acerca al resultado de Beachy y Blair. En general el recíproco no es necesariamente cierto, en el capítulo tercero se hace un particular tratado sobre este hecho, encontrando un módulo cerrado bajo productos M tal que el zoclo de M es igual a cero, es decir, no es semiartiniano y consecuentemente tampoco es localmente artiniano.

Y finalmente en el último capítulo se demuestra que si M es un módulo cerrado bajo productos, finitamente generado, proyectivo en $\sigma[M]$ y toda clase de pretorsión hereditaria en $\sigma[M]$ es M-dominada entonces M es de longitud finita. Este Teorema, junto con el hecho de que todo módulo localmente artiniano es cerrado bajo productos, generaliza el resultado de Beachy y Blair.

Capítulo 1

Preliminares

Durante todo el texto $\subset$ denota contención propia y $\subseteq$ contenido o igual, R denotará un anillo asociativo con uno y $R-Mod$ la categoría de módulos izquierdos unitarios sobre el anillo R.

El símbolo de $\leq$ denotará la relación de submódulo en $R-Mod$, dado un R-módulo M denotaremos por $sub_R(M)$ a la retícula de submódulos del módulo M y escribimos $N \leq^{\oplus} M$ cuando $N \in sub_R(M)$ es un sumando directo de M y $N \leq_e M$ para denotar que N es un submódulo esencial de M.

OR será la clase de todos los ordinales.

1.1. Clases de Pretorsión Hereditarias

Definición 1.1. Sea $\mathcal{T}$ una subclase de $R-Mod$, decimos que $\mathcal{T}$ es una *Clase de Pretorsión Hereditaria* si es cerrada bajo: submódulos ($\leq$), cocientes ($\div$), isomorfismos ($\cong$) y sumas directas ($\oplus$).

A la colección de todas las clases de pretorsión hereditarias en $R-Mod$ la denotaremos $R-torsp$.

Definición 1.2. Diremos que un módulo $N \in R-Mod$ está *subgenerado* por otro módulo $M \in R-Mod$, si N es un submódulo de un módulo M-generado.

Definición 1.3. Sea $\mathscr{C}$ una clase no vacía en $R-Mod$, definimos la clase $\sigma[\mathscr{C}]$ como la colección de los módulos subgenerados por $\mathscr{C}$,i.e.

$$\sigma[\mathscr{C}] = \{M \in R-Mod \mid \exists I \ \exists C_i \in \mathscr{C},\ i \in I \ \exists X_i,\ i \in I \ \exists V \leq \bigoplus_{i \in I} C_i^{(X_i)} \text{ tales que } M \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I}(C_i^{(X_i)})/V\} \quad (1.1)$$

Si $\mathscr{C} = \{M\}$ escribimos $\sigma[M]$ en vez de $\sigma[\{M\}]$.

Lema 1.4. *$\sigma[\mathscr{C}]$ es la clase de pretorsión hereditaria más pequeña que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Primero veamos que $\sigma[\mathscr{C}] \in R - torsp$:

$\leq]$ Sea $M \in \sigma[\mathscr{C}]$ y sea $N \leq M$ entonces existe un morfismo

$$M \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V$$

en donde $C_i \in \mathscr{C}$ y $V \leq \bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})$ y como $N \hookrightarrow M$ entonces

$$N \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V$$

por tanto $N \in \sigma[\mathscr{C}]$.

$\div]$ Sea $M \in \sigma[\mathscr{C}]$ y sea $N \leq M$ entonces, igual que antes existe un morfismo $N \hookrightarrow M \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V$ y así

$$N \cong N'/V$$

con $V \leq N' \leq \bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})$ de modo que

$$\begin{aligned} M/N &\hookrightarrow (\bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V)/N \\ &\cong (\bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V)/(N'/V) \\ &\cong (\bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/N') \end{aligned}$$

por tanto $M/N \in \sigma[\mathscr{C}]$.

$\oplus]$ Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de objetos de $\sigma[\mathscr{C}]$ entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ existe un morfismo $M_\alpha \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I}(C_{i\alpha}^{(X_{i\alpha})})/V_\alpha$, así

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha &\hookrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(\bigoplus_{i\in I}(C_{i\alpha}^{(X_{i\alpha})})/V_\alpha) \\ &\cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(\bigoplus_{i\in I}(C_{i\alpha}^{(X_{i\alpha})}))/\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(V_\alpha) \end{aligned}$$

y se concluye que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \sigma[\mathscr{C}]$.

Ahora veamos que efectivamente $\sigma[\mathscr{C}]$ es la más pequeña, tomemos $\mathcal{T} \in R - torsp$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{T}$.

Sea $M \in \sigma[\mathscr{C}]$ por definición $M \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V$, pero como cada C_i esta en la clase $\mathcal{T}$ entonces $\bigoplus_{i\in I}(C_i^{(X_i)})/V$ también lo está pues $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas y cocientes, pero también es cerrada bajo submódulos, de modo que M también está en $\mathcal{T}$.

■

Lema 1.5. *Todo $\mathcal{T} \in R - torsp$ es de la forma $\sigma[M]$ para alguna $M \in R - Mod$.*

Demostración. Sea $\mathcal{T} \in R - torsp$, consideremos $\{X_i \mid i \in I\}$ un conjunto de clases de isomorfismo de cíclicos en $\mathcal{T}$, (es conjunto pues a lo más hay tantos como ideales izquierdos de R).

Ahora construimos
$$M = \bigoplus_{i\in I} X_i$$

Demostraremos que $\mathcal{T} = \sigma[M]$, así que si tomamos $T \in \mathcal{T}$ entonces $T = \sum_{x\in T} xR$, de modo que existe un epimorfismo
$$M^{(T)} \twoheadrightarrow \sum_{x\in T} xR$$

por tanto T es M-generado, y así $T \in \sigma[M]$.

Y si $N \in \sigma[M]$ entonces $N \leq H$ con H un módulo M-generado, y así tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M^{(T)} \arrow[r, two heads] & H \\ N \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Es claro que $M \in \mathcal{T}$ pues $M = \bigoplus_{i\in I} X_i$ con $X_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$, así $M^{(T)} \in \mathcal{T}$, como H es cociente de $M^{(T)}$ entonces $H \in \mathcal{T}$ y como N es submódulo de H entonces $N \in \mathcal{T}$.

De modo que $\mathcal{T} = \sigma[M]$.

■

Proposición 1.6. *$R - torsp$ es una gran retícula completa con la relación de inclusión.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $R - torsp$.

Note que el supremo de la familia queda descrito por el Lema 1.4, es decir, $\bigvee_{i\in I} \mathcal{T}_i$ es justamente $\sigma[\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i]$.

Ahora veamos que $\mathcal{T}' := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ se comporta como $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$, así que primero veamos que $\mathcal{T}' \in R - torsp$:

$\leq]$ Sea $M \in \mathcal{T}'$ y $N \leq M$, entonces $M \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$, por lo cual $N \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I$, y así $N \in \mathcal{T}'$.

$\div]$ Sea $M \in \mathcal{T}'$ y $N \leq M$, entonces $M \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I$, así $M/N \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I$, y así $M/N \in \mathcal{T}'$.

$\oplus]$ Sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de módulos en $\mathcal{T}'$, entonces $M_j \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I, \forall j \in J$, así $\bigoplus_{j\in J} M_j \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I$, por tanto $\bigoplus_{j\in J} M_j \in \mathcal{T}'$.

Y cualquier $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i \ \forall i \in I$ por definición satisface, que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

■

1.2. Filtros Topológicos

Definición 1.7. Una *topología lineal izquierda para* R (o un filtro topológico izquierdo de R), $\mathcal{F}$ es una familia de ideales izquierdos de R tales que:

(i) $I \in \mathcal{F}$ y $I \subseteq J$ con $J \leq R$ entonces $J \in \mathcal{F}$

(ii) $I, J \in \mathcal{F}$ entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$

(iii) $I \in \mathcal{F}$, $x \in R$ entonces $(I : x) \in \mathcal{F}$

Denotamos por $R - fil$ al conjunto de filtros topológicos izquierdos de R.

Ahora tenemos definidas dos familias de estructuras relacionadas con nuestro anillo R, las cuales están relacionadas de una muy buena manera.

Teorema 1.8. *Hay una biyección entre* $R - torsp$ *y* $R - fil$ *que conserva contenciones, así* $R - torsp$ *es una clase cardinable pues* $R - fil$ *es un conjunto y* $R - fil$ *hereda una estructura de retícula completa de* $R - torsp$.

Demostración. Definiremos dos asignaciones para cada $\mathcal{T} \in R - torsp$ y $\mathcal{F} \in R - fil$ así:

$$\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{F}_{\mathcal{T}} := \{I \leq R \mid R/I \in \mathcal{T}\} \tag{1.2}$$
$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathcal{F}} := \{M \in R - Mod \mid \forall x \in M, (0 : x) \in \mathcal{F}\} \tag{1.3}$$

Veamos que dado $\mathcal{T} \in R - torsp$, $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ está en $R - fil$.

(i) Sea $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ y $J \supseteq I$ un ideal izquierdo de R, entonces tenemos el epimorfismo canónico $R/I \twoheadrightarrow R/J$ y como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes $R/J \in \mathcal{T}$, por tanto $J \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

(ii) Sean $I, J \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ entonces tenemos el siguiente morfismo

$$R/I \cap J \longrightarrow R/I \oplus R/J$$

definido por

$$x + I \cap J \longmapsto (x + I, x + J)$$

el cual es inyectivo, pues si $(x + I, x + J) = 0$ entonces $x \in I$ y $x \in J$, por tanto $x + I \cap J = 0$ y así como $R/I \oplus R/J \in \mathcal{T}$, $R/(I \cap J) \in \mathcal{T}$ pues $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos, por lo tanto $I \cap J \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

(iii) Sean $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ y $x \in R$ entonces $R/I \in \mathcal{T}$ y como el morfismo

$$R/(I : x) \longrightarrow R/I$$

definido por

$$r + (I : x) \longmapsto rx + I$$

es monomorfismo, así se tiene que $R/(I : x) \in \mathcal{T}$ pues $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos, por tanto $(I : x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

concluimos así que $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} \in R - fil$.

Ahora demostremos que si $\mathcal{F} \in R - fil$ entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es una clase de pretorsión hereditaria.

$\leq]$ Sea $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y $N \leq M$ entonces $\forall x \in M$ el anulador $(0, x) \in \mathcal{F}$, en particular para toda x en N, por tanto $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

$\div]$ Sea $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y $N \leq M$, y tomemos $x + N \in M/N$ entonces:

$$\begin{aligned}(0 : x + N) &= \{r \in R \mid r(x + N) = 0\} \\ &= \{r \in R \mid rx \in N\} \\ &= (N : x)\end{aligned}$$

Pero como $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y $x \in M$ entonces $(0 : x) \in \mathcal{F}$, ahora observe que $(0 : x) \subseteq (N : x)$, lo cual implica que $(N : x) = (0 : x + N) \in \mathcal{F}$ para todos los $x + N \in M/N$.

$\oplus]$ Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos en la clase $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, tomemos $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ entonces

$$\begin{aligned}(0 : (x_i)_{i\in I}) &= \{r \in R \mid r(x_i)_{i\in I} = 0\}\\ &= \{r \in R \mid rx_i = 0, \forall i \in I\}\\ &= \bigcap_{i\in I}\{r \in R \mid rx_i = 0\}\\ &= \bigcap_{i\in I}(0 : x_i)\end{aligned}$$

pero como $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ entonces $x_i = 0$ para casi toda $i \in I$, de modo solo una cantidad finita de ideales $(0 : x_i)$ son distintos de R y así la intersección de arriba es finita, además cada intersecando $(0 : x_i)$ está en $\mathcal{F}$ entonces la intersección $\bigcap_{i\in I}(0 : x_i) = (0, (x_i)_{i\in I})$ está en $\mathcal{F}$ para cualquier elemento de la suma directa $(x_i)_{i\in I}$, concluimos así que $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Así nuestras asignaciones (1.2) y (1.3) están bien definidas pues a cada clase de pretorsión hereditaria la mandamos a un filtro topológico y viceversa.

Demostremos pues, que las asignaciones preservan el orden.

Sean $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ dos topologías lineales de R, entonces si tomamos $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ por definición para toda $x \in M$, $(0 : x) \in \mathcal{F}$, pero así para toda $x \in M$, $(0 : x) \in \mathcal{F}'$, de modo que $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}'}$.

Y si consideramos ahora $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ clases de pretorsión hereditarias de R, entonces cada $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ cumple que $R/I \in \mathcal{T}$, y por tanto $R/I \in \mathcal{T}'$ concluyendo que $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}'}$.

Lo único que nos hace falta demostrar es que las asignaciones (1.2) y (1.3) son una inversa de la otra, lo cual haremos observando que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$ y que $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$ como sigue:

Sea $\mathcal{T} \in R\!-\!torsp$, si $M \in \mathcal{T}$ entonces para cualquier $x \in M$ el morfismo

$$R/(0 : x) \longrightarrow M$$

dado por

$$r + (0 : x) \longmapsto rx$$

es inyectivo (ergo $R/(0:x) \cong Rx$) , de modo que $R/(0:x) \in \mathcal{T}$ y así $(0:x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ para toda $x \in M$, por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}$.

Ahora sea $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}$ entonces $(0:x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ para toda $x \in M$, lo cual implica que $R/(0:x) \in \mathcal{T}$, pero $R/(0:x) \cong Rx$ por el morfismo de arriba, y tenemos así que $Rx \in \mathcal{T}$ para toda $x \in M$, entonces $\bigoplus_{x\in M} Rx \in \mathcal{T}$, pero se tiene el epimorfismo

$$\bigoplus_{x\in M} Rx \twoheadrightarrow M$$

por lo tanto $M \in \mathcal{T}$. Concluimos que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$.

Para la otra igualdad, sea $\mathcal{F} \in R-fil$, si tomamos $I \in \mathcal{F}$ entonces para cada $x+I \in R/I$ se tiene que $(0, x+I) = (I, x) \in \mathcal{F}$, así $R/I \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, por lo tanto $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}}$.

Sea $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}}$, entonces $R/I \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, así para cada $x+I \in R/I$ tenemos que $(0 : x+I) \in \mathcal{F}$, en particular $(0:1+I) = (I:1) = I \in \mathcal{F}$.

Y así tenemos ya que $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$, y por tanto el resultado que buscábamos.

■

Note que los ínfimos en $R-fil$ son las intersecciones, y para una familia de ideales izquierdos $\mathscr{A}$ denotamos por $\eta(\mathscr{A}) := \bigwedge\{\mathcal{F} \in R-fil \mid \mathscr{A} \subset \mathcal{F}\}$, y si $\mathscr{A} = \{A\}$ escribimos $\eta(A)$ en vez de $\eta(\{A\})$.

Observación 1.9. Sea $\mathcal{F}$ un filtro topológico izquierdo en R entonces $\bigcap \mathcal{F} = I$ es un ideal bilateral.

Puesto que si tomamos un elemento $r \in R$ y suponemos que $Ir \nsubseteq I$ entonces existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $Ir \nsubseteq J$, por lo tanto $r \notin J$. Pero $(J:r) \in \mathcal{F}$, de modo que $I \subseteq (J:r)$, por lo que concluimos que $Ir \subseteq J$, lo cual es una contradicción, así necesariamente I es un ideal bilateral.

Proposición 1.10. *Si $\mathcal{F}$ el filtro topológico asociado a la clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$ entonces son equivalentes:*

(1) $\mathcal{T}$ es cerrada bajo productos.

(2) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones.

(3) $\mathcal{F} = \eta(I)$ para algún ideal bilateral I de R.

Demostración.

(1) ⇒ (2) Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una familia de ideales izquierdos de R contenida en $\mathcal{F}$, entonces para cada $j \in J$ tenemos que $R/I_j \in \mathcal{T}$, así $\prod_{j\in J} R/I_j \in \mathcal{T}$.

Considere el morfismo $R \xrightarrow{f} \prod_{j\in J} R/I_j$ tal que $f(x) = (x + I_j)_{j\in J}$ entonces $\text{nuc}(f) = \bigcap_{j\in J} I_j$ de modo que

$$R/(\cap_{j\in J} I_j) = R/\text{nuc}(f) \hookrightarrow \prod_{j\in J} R/I_j$$

por tanto $R/(\cap_{j\in J} I_j) \in \mathcal{T}$, así $\bigcap_{j\in J} I_j \in \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias entonces considere $I = \bigcap \mathcal{F}$ el cual por la Observación 1.9 es un ideal bilateral en $\mathcal{F}$. Afirmamos que $\mathcal{F} = \eta(I)$.

Como $I \in \mathcal{F}$ esto implica que $\eta(I) \subseteq \mathcal{F}$. Si $J \in \mathcal{F}$ entonces $I \subseteq J$ de modo que $J \in \eta(I)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de R-módulos en $\mathcal{T}$, entonces si $j \in J$ y $x_j \in M_j$ el ideal $(0 : x_j) \in \mathcal{F} = \eta(I)$, así $I \subseteq (0 : x_j)$ ya que I es un ideal bilateral y si tomamos un elemento $(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} M_j$ se tiene que

$$I \subseteq \bigcap_{j\in J} (0 : x_j) = (0 : (x_j)_{j\in J})$$

es decir, $(0 : (x_j)_{j\in J}) \in \mathcal{F}$ para todo $(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} M_j$, por lo tanto $\prod_{j\in J} M_j \in \mathcal{T}$.

■

Diremos que un filtro topológico o una clase de pretorsión hereditaria es *Jansiana* si satisface las condiciones equivalentes de la Proposición 1.10.

1.3. Prerradicales Exactos Izquierdos

Ahora vamos a hablar un poco sobre otra estructura que se va a relacionar con las topologías lineales y con las clases de pretorsión hereditarias.

Definición 1.11. Sea $r : R - Mod \longrightarrow R - Mod$ un funtor, decimos que r es un *prerradical* si es un subfuntor del funtor identidad, es decir;

(i) Para todo R-módulo M se tiene que $r(M) \leq M$

(ii) Para todo homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ se tiene que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ r(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "r(f)"] & r(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde $r(f) = f|_{r(M)}$.

Denotamos por $R - pr$ a la clase de los prerradicales de $R - Mod$.

Vamos a darle estructura de orden a $R - pr$, así que si tenemos dos prerradicales r, r' decimos que $r \leq r'$ si r es un subfuntor de r', es decir, para todo R-módulo M se tiene que $r(M) \leq r'(M)$.

Definición 1.12. Decimos que un prerradical es *exacto izquierdo*, si como funtor es exacto izquierdo.

A la clase de los prerradicales exactos izquierdos sobre un anillo R la denotaremos $R - pei$.

Lema 1.13. *Sea $r \in R - pr$ entonces r es exacto izquierdo si y solo si para todo R-módulo M y submódulo N de M se tiene que $r(N) = r(M) \cap N$.*

Demostración. Considere primero el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\eta"] & M/N \arrow[r] & 0 \\ & r(N) \arrow[u, hook] \arrow[r, "r(i)"] & r(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "r(\eta)"] & r(M/N) \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Entonces como $r(i)$ y $r(\eta)$ son las restricciones de i y η tenemos que $r(i)$ es inyectiva, $\text{nuc}(r(\eta)) = r(M) \cap N$ e $\text{im}(r(i)) = r(N)$, y con todo esto es claro que

$$\begin{aligned} & r(N) = r(M) \cap N \\ \iff & \text{nuc}(r(\eta)) = \text{im}(r(i)) \\ \iff & \text{r es exacto izquierdo.} \end{aligned}$$

■

Note que del diagrama del lema anterior se puede deducir que para todo prerradical r se tiene la desigualdad:

$$(r(M) + N)/N = \eta(r(M)) = r(\eta)(r(M)) \leq r(M/N)$$

para todo módulo M y submódulo N. Y también se sigue que si r es exacto izquierdo entonces r es idempotente, es decir, $r(M) = r(r(M))$ para todo R-módulo M.

Teorema 1.14. *La retícula $R-torsp$ y la clase $R-pei$ están en correspondencia biyectiva, aparte tal correspondencia preserva el orden (en $R-torsp$ las contenciones y en $R-pei$ los subfuntores)*

Demostración. De modo similar que en el teorema anterior definiremos dos asignaciones:

$$\mathcal{T} \longmapsto r_{\mathcal{T}} : R-Mod \longrightarrow R-Mod \tag{1.4}$$
$$r_{\mathcal{T}}(M) = \sum_{\substack{N \leq M \\ N \in \mathcal{T}}} N$$
$$r \longmapsto \mathcal{T}_r := \{M \in R-Mod \mid r(M) = M\} \tag{1.5}$$

En primera es claro que $r_{\mathcal{T}}$ es un prerradical, pues $\sum_{\substack{N \leq M \\ N \in \mathcal{T}}} N$ es un submódulo de M, y si damos un morfismo $f : M \longrightarrow M'$ entonces

$$\begin{aligned} f(r_{\mathcal{T}}(M)) &= f(\sum_{\substack{N \leq M \\ N \in \mathcal{T}}} N) \\ &= \sum_{\substack{N \leq M \\ N \in \mathcal{T}}} f(N) \\ &\leq \sum_{\substack{N' \leq M' \\ N' \in \mathcal{T}}} N' \qquad \text{pues } \mathcal{T} \text{ es cerrada bajo imágenes homomorfas.} \\ &= r_{\mathcal{T}}(M') \end{aligned}$$

Así las restricciones son funciones de $r_{\mathcal{T}}(M)$ en $r_{\mathcal{T}}(M')$. Veamos que el prerradical es exacto izquierdo, sea $M \in R-Mod$ y $N \leq M$ entonces tenemos que $r_{\mathcal{T}}(N) \subseteq r_{\mathcal{T}}(M)$ y $r_{\mathcal{T}}(N) \subseteq N$, por tanto tenemos que $r_{\mathcal{T}}(N) \subseteq r_{\mathcal{T}}(M) \cap N$, por otro lado como $r_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es hereditaria, entonces $r_{\mathcal{T}}(M) \cap N \in \mathcal{T}$ y así $r_{\mathcal{T}}(M) \cap N \leq r_{\mathcal{T}}(N)$ pues $r_{\mathcal{T}}(N)$ es el submódulo más grande de N que pertenece a $\mathcal{T}$.

Ahora veamos que $\mathcal{T}_r$ es efectivamente una clase de pretorsión hereditaria:

$\leq]$ Sea $M \in \mathcal{T}_r$ y $N \leq M$ entonces $r(N) = r(M) \cap N = M \cap N = N$.

$\div]$ Sea $M \in \mathcal{T}_r$ y $N \leq M$ entonces $M/N \geq r(M/N) \geq (r(M) + N)/N = (M + N)/N = M/N$.

$\oplus]$ Sea $\{M_i\}_i \in I$ una familia de módulos en $\mathcal{T}$ entonces $r(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} r(M_i) = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

Falta demostrar que las asignaciones 1.4 y 1.5 son inversas. Sea $r \in R{-}pei$ entonces

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{T}_r}(M) &= \sum_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}_r}} N = \sum_{\substack{N\leq M\\ N=r(N)}} N \\ &= \sum_{N\leq M} r(N) \qquad\qquad \text{pues } r \text{ es idempotente.} \end{aligned}$$

pero como para cualquier $N \leq M$ tenemos que $r(N) \leq r(M)$, por tanto $\sum_{N\leq M} r(N) \leq r(M)$ y para la otra contención solo hace falta ver que $r(M)$ es un sumando de $\sum_{N\leq M} r(N)$.

Y ahora sea $\mathcal{T} \in R - torsp$ entonces $\mathcal{T}_{r_\mathcal{T}} = \{M \in R - Mod \mid r_\mathcal{T}(M) = M\}$, así si tomamos $M \in \mathcal{T}$ tenemos que:

$$r_\mathcal{T}(M) = \sum_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}}} N = \sum_{N\leq M} N = M$$

la segunda igualdad es porque $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos. Y si tomamos $M \in \mathcal{T}_{r_\mathcal{T}}$ entonces $M = r_\mathcal{T}(M) = \sum_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}}} N$ entonces la suma directa cubre a M, es decir;

$$\bigoplus_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}}} N \twoheadrightarrow \sum_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}}} N = M$$

y como la suma directa está en $\mathcal{T}$ entonces M está en $\mathcal{T}$.

Por lo tanto las asignaciones son inversas una de la otra, por último hay que ver que preservan el orden.

Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in R{-}torsp$ tales que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ y sea M un R-módulo, entonces

$$r_\mathcal{T}(M) = \sum_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}}} N \leq \sum_{\substack{N\leq M\\ N\in\mathcal{T}'}} N = r_{\mathcal{T}'}(M)$$

y así $r_\mathcal{T} \leq r_{\mathcal{T}'}$.

Asimismo sean $r, r' \in R - pei$ tales que $r \leq r'$ y sea $M \in \mathcal{T}_r$ entonces $M = r(M) \leq r'(M) \leq M$ ergo $r'(M) = M$, de modo que $M \in \mathcal{T}_{r'}$.

$\blacksquare$

Note que en la definición de 1.5 puede ser sustituida por:

$$r_{\mathcal{T}}(M) = \sum_{\substack{T\in\mathcal{T} \\ f\in Hom(T,M)}} \mathrm{im}(f) = Tr(\mathcal{T}, M)$$

que es justamente la $\mathcal{T} - traza$ de M y esto se debe a que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo imágenes homomorfas y bajo sumas directas.

Observación 1.15. Dado un prerradical r podemos construir el menor prerradical exacto izquierdo $\tilde{r}$ mayor o igual que r, que se calcula como $\tilde{r}(M) = r(E(M)) \cap M$, para ver que es exacto izquierdo lo calculamos en un submódulo N de M, $\tilde{r}(N) = r(E(N)) \cap N$:

Sabemos que como $E(N)$ es el mínimo inyectivo tal que N entra monomórficamente en él, entonces $E(N) \hookrightarrow E(M)$, así por ser $E(N)$ inyectivo el monomorfismo anterior se escinde, de modo que existe $K \leq E(M)$ tal que $E(N) \bigoplus K \cong E(M)$.

Aparte como $N \hookrightarrow E(N)$ tenemos que $N \cap K = \{0\}$, lo cual implica que $N \cap r(K) = \{0\}$.

Y así como r conmuta con sumas directas:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(M) \cap N &= r(E(M)) \cap M \cap N \\
&= (r(E(N)) \oplus r(K)) \cap N \\
&= r(E(N)) \cap N \\
&= \tilde{r}(N)
\end{aligned}$$

es decir, $\tilde{r}$ es exacto izquierdo.

Veamos que es el menor. Supongamos que existe otro prerradical exacto izquierdo r' tal que $r \leq r'$ de modo que si $M \in R - Mod$ entonces existe un monomorfismo

$$M \hookrightarrow E(M)$$

entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
& r(E(M)) \leq r'(E(M)) \\
\Rightarrow\ & r(E(M)) \cap M \leq r'(E(M)) \cap M \\
\Rightarrow\ & \tilde{r}(M) \leq r'(M) && \text{pues } r' \text{ es exacto izquierdo.}
\end{aligned}$$

es decir, $\tilde{r} \leq r'$.

En seguida se puede decir lo siguiente:

Corolario 1.16. *$R-pei$ tiene estructura de retícula completa, y sus operaciones supremo e ínfimo están dadas por;*

$$\Big(\bigwedge_{i\in I} r_i\Big)(M) = \bigcap_{i\in I} r_i(M)$$

y

$$\Big(\bigvee_{i\in I} r_i\Big)(M) = \widetilde{\Big(\sum_{i\in I} r_i\Big)}(M)$$

entendemos por el símbolo $\sum_{i\in I} r_i$ al prerradical que evaluado en un módulo M se calcula como $\sum_{i\in I} r_i(M)$.

Demostración. La estructura de retícula se sigue directamente del teorema anterior. También por el teorema anterior basta notar que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\bigwedge_{i\in I} r_i} &= \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i} \\
&= \{M \mid r_i(M) = M \ \forall i \in I\} \\
&= \{M \mid \bigcap_{i\in I} r_i(M) = M\} \\
&= \mathcal{T}_{\bigcap_{i\in I} r_i}
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que el ínfimo es $\bigwedge_{i\in I} r_i = \bigcap_{i\in I} r_i$.

Para el supremo veamos que $\widetilde{\big(\sum_{i\in I} r_i\big)}(M)$ efectivamente es el supremo en $R-pei$ con la relación de subfuntor.

Primero es claro que $r_j \leq \sum_{i\in I} r_i \leq \widetilde{\sum_{i\in I} r_i}$ para cualquier $j \in I$. Sea $r' \in R-pei$ tal que $r_j \leq r'$ para toda $j \in I$, entonces para cualquier R-módulo M, $r_j(M) \leq r'(M)$ para toda $j \in J$ implica que $\sum_{i\in I} r_j(M) \leq r'(M)$ y por la Observación 1.15 tenemos que $\widetilde{\sum_{i\in I} r_i} \leq r'$. Por tanto $\widetilde{\sum_{i\in I} r_i} = \bigvee_{i\in I} r_i$.

■

Daremos un ejemplo de que la suma de dos prerradicales exactos izquierdos no es un prerradical exacto izquierdo.

Considere el anillo $R = \mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, la extensión trivial de $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Podemos describir al anillo como:

$$R = \{\begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_2, (x,y) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2\}$$

Y su retícula de ideales está dada por:

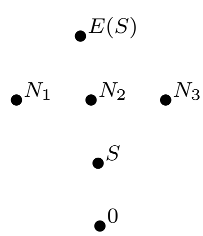
$$\begin{aligned}
I_1 &= \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \\
I_2 &= \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \\
I_3 &= \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \\
J &= \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}
\end{aligned}$$

Note que el elemento $\left(\begin{smallmatrix} 1 & (0,0) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es el uno de R, además cualquier elemento de la forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & (x,y) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es su propio inverso multiplicativo, de modo que no puede haber más ideales que los nombrados arriba y estos cumplen que I_1, I_2 e I_3 son simples isomorfos y J es el único ideal máximo de R.

Así la retícula de ideales de R es finita, por tanto R es artiniano. Como R solo tiene un ideal máximo entonces $R-Simp$ solo tiene un módulo simple, digamos S.

Entonces por [4] (Nota 2.7 y Teorema 2.13) existe un anti-isomorfismo de retículas entre la retícula de ideales de R y la retícula de submódulos totalmente invariantes de $E(S)$.

Llamemos N_1, N_2 y N_3 a los tres submódulos de $E(S)$ máximos con la propiedad de ser totalmente invariantes, como S es un submódulo totalmente invariante de $E(S)$ entonces la retícula de submódulos totalmente invariantes se ve de la siguiente manera:



Considere los prerradicales r_1 y r_2 que calculados en un módulo M son:

$$\begin{aligned}
r_1(M) &= \omega_{N_1}^{E(S)}(M) = \bigcap f^{-1}(N_1) \\
r_2(M) &= \omega_{N_2}^{E(S)}(M) = \bigcap f^{-1}(N_2)
\end{aligned}$$

en donde ambas intersecciones corren sobre los morfismos $f : M \longrightarrow E(S)$. Como $E(S)$ es inyectivo los prerradicales r_1 y r_2 son exactos izquierdos pues si tomamos R-módulos $N \leq M$, E inyectivo y $K \leq E$ totalmente invariante entonces cada $g \colon N \longrightarrow E$ se puede extender a una $f \colon M \longrightarrow E$ y así

$g^{-1}(K) = (f|_N)^{-1}(K)$ teniendo así la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} N \cap \omega_K^E(M) &= N \cap \bigcap f^{-1}(K) \\ &= \bigcap (f|_N)^{-1}(K) \\ &= \bigcap g^{-1}(K) \\ &= \omega_K^E(N) \end{aligned}$$

Donde las dos primeras intersecciones corren sobre morfismos $f : M \longrightarrow E$, la última intersección corre sobre morfismos $g : N \longrightarrow E$. De hecho se puede demostrar que la retícula de prerradicales exactos izquierdos es isomorfa a la retícula de submódulos totalmente invariantes de $E(S)$ [4] (Proposición 2.11).

Ahora observe que:

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)(E(S)) = r_1(E(S)) + r_2(E(S)) = N_1 + N_2 = E(S) \\ (r_1 + r_2)(N_3) = r_1(N_3) + r_2(N_3) = S + S = S \\ (r_1 + r_2)(E(S)) \cap N_3 = E(S) \cap N_3 = N_3 \end{aligned}$$

estos cálculos nos llevan a que $(r_1+r_2)(N_3) \neq (r_1+r_2)(E(S)) \cap N_3$, es decir, $r_1 + r_2$ no es un prerradical exacto izquierdo.

Ahora vamos a hacer notar dos hechos importantes sobre las tres retículas isomorfas que tenemos:

Lema 1.17. *Las retículas isomorfas $R - torsp$, $R - fil$ y $R - pei$:*

- *Son modulares.*
- *Son superiormente continuas.*

Demostración. Demostraremos estos hechos para la retícula $R - pei$.

- Sean $r, s, t \in R - pei$ tales que $r \leq t$ entonces, usando la modularidad en la retícula de submódulos de $E(M)$ y que $t(E(M)) \cap M = t(M)$, es decir, que t es exacto izquierdo, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}((r \vee s) \wedge t)(M) &= (\widetilde{r+s}(M)) \cap t(M)\\ &= (r+s)(E(M)) \cap M \cap t(M)\\ &= [r(E(M)) + s(E(M))] \cap M \cap t(M)\\ &= [r(E(M)) + s(E(M))] \cap t(E(M)) \cap M\\ &= [r(E(M)) + [s(E(M)) \cap t(E(M))]] \cap M\\ &= [r(E(M)) + (s \wedge t)(E(M))] \cap M\\ &= (r + (s \wedge t)(E(M)) \cap M\\ &= (\widetilde{r + (s \wedge t)}(M)\\ &= (r \vee (s \wedge t))(M)\end{aligned}$$

Por tanto la retícula es modular.

- Sean r_i con $i \in I$ una familia dirigida de prerradicales exactos izquierdos, M un R-módulo y $N \leq M$ entonces usando el hecho de que la retícula de submódulos de M satisface la condición AB5, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i\in I} r_i\Big)(N) &= \sum_{i\in I} r_i(N)\\ &= \sum_{i\in I}(r_i(M) \cap N)\\ &= \sum_{i\in I}(r_i(M)) \bigcap N\\ &= \Big(\sum_{i\in I} r_i\Big)(M) \bigcap N\end{aligned}$$

De modo que el prerradical $\sum_{i\in I} r_i$ es exacto izquierdo, pero

$$\sum_{i\in I} r_i \leq \widetilde{\sum_{i\in I} r_i}$$

de modo que en este caso se da la igualdad, por ser $\widetilde{\sum_{i\in I} r_i}$ el supremo de la familia de prerradicales exactos izquierdos $\{r_i\}_{i\in I}$.

■

Definición 1.18. Sean $r, r' \in R-pr$ definimos el *producto* de r con r' que calculado en un módulo es $(r \cdot r')(M) = r(r'(M))$ y el *coproducto* que se define en un módulo como $(r : r')(M)$ es el único submódulo de M que contiene a $r(M)$ y que $(r : r')(M)/r(M) = r'(M/r(M))$.

Decimos que un prerradical r es *idempotente* si $(r \cdot r) = r$ y decimos que es *radical* (o coidempotente) si $(r : r) = r$.

Los prerradicales exactos izquierdos se comportan bien con respecto a los productos y coproductos de prerradicales, es decir;

Proposición 1.19. *$R - pei$ es cerrada bajo productos y coproductos.*

Demostración. Sean $r, r' \in R - pei$ y N un submódulo de un R-módulo M, entonces $(r \cdot r')(N) = r(r'(N))$ pero como r' es exacto izquierdo y $N \leq M$ tenemos que $r(r'(N)) = r(r'(M) \cap N)$ y como r es exacto izquierdo y $r'(M) \cap N \leq r'(M)$ entonces $r(r'(M) \cap N) = r(r'(M)) \cap N \cap r'(M) = r(r'(M)) \cap N$ por tanto $(r \cdot r')$ es exacto izquierdo.

Para demostrar que el coproducto es exacto izquierdo considere las siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow r(N) \xrightarrow{f} (r : r')(M) \cap N \xrightarrow{g} \frac{(r:r')(M)}{r(M)} \bigcap \frac{N+r(M)}{r(M)} \longrightarrow 0$$

donde $f(x) = x$ y $g(x) = x + r(M)$ veamos que la sucesión es exacta.

Es claro que f es inyectiva y que como $r(N) \subseteq N$ y $r(N) \subseteq r(M) \subseteq (r : r')(M)$ tenemos que $\operatorname{im}(f) \subseteq (r : r')(M) \cap N$. También es claro que g es suprayectiva por que si $x + r(M) \in \frac{(r:r')(M)}{r(M)} \bigcap \frac{N+r(M)}{r(M)}$ entonces $x \in (r : r')(M) \cap N$.

Ahora veamos que $\operatorname{im}(f) = \operatorname{nuc}(g)$, sea $x \in r(N)$ entonces $g \circ f(x) = x + r(M) = r(M)$ pues $r(N) \subseteq r(M)$, ahora sea $x \in \operatorname{nuc}(g)$ entonces $x \in r(M)$ y $x \in (r : r')(M) \cap N$ por tanto $x \in r(M) \cap (r : r')(M) \cap N = r(M) \cap N = r(N)$ así $x \in \operatorname{im}(f)$.

De éste modo tenemos que como la sucesión es exacta entonces;

$$\begin{aligned}
\frac{(r : r')(M) \cap N}{r(N)} &= \frac{(r : r')(M)}{r(M)} \bigcap \frac{N + r(M)}{r(M)} \\
&= r'\Big(\frac{M}{r(M)}\Big) \bigcap \frac{N + r(M)}{r(M)} \\
&= r'\Big(\frac{N + r(M)}{r(M)}\Big) && \text{pues } r' \text{ es exacto izquierdo.} \\
&= r'\Big(\frac{N}{r(M) \cap N}\Big) \\
&= (r : r')(N)/r(N)
\end{aligned}$$

Por tanto $(r : r')(N) = (r : r')(M) \cap N$.

■

Definición 1.20. Para cada ordinal no cero $\alpha \in OR$ y cada prerradical exacto izquierdo r definimos recursivamente las *copotencias transfinitas de* r como:

$$r_1 = r$$

si $\alpha = \beta + 1$

$$r_\alpha = (r_\beta : r)$$

y si α es un ordinal límite

$$r_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} r_\beta$$

Note que si tenemos $\alpha \in OR$ un ordinal límite entonces la familia $\{r_\beta\}_{\beta\leq\alpha}$ es un conjunto dirigido (está linealmente ordenado) y por tanto por el Lema 1.17 $\bigvee_{\beta<\alpha} r_\beta = \sum_{\beta<\alpha} r_\beta$.

Proposición 1.21. *Sea $r \in R - pei$ entonces existe un $\alpha \in OR$ tal que $r_\alpha = r_{\alpha+1}$.*

Demostración. Ésto se debe al hecho de que $R-pei$ es una clase cardinable, y por tanto no puede pasar que $r_\alpha < r_{\alpha+1}$ para todo ordinal α, por que así tendríamos una clase no cardinable de prerradicales exactos izquierdos totalmente contenida en $R - pei$, lo cual no es posible.

■

De este hecho definimos como $\bar{r} := r_\alpha$ con α el mínimo ordinal que cumple que $r_\alpha = r_{\alpha+1}$, quien resulta ser el menor radical idempotente que es mayor o igual que r, y es radical por dos hechos:

- Si $r(M) = \{0\}$ para alguna $M \in R - Mod$ entonces

  $$(r : r)(M)/r(M) = r(M/r(M)) = r(M/\{0\}) = \{0\}$$

  y así por inducción transfinita $\bar{r}(M) = \{0\}$.

- Sea $M \in R - Mod$ entonces

  $$\{0\} = \bar{r}(M)/\bar{r}(M) = (\bar{r} : r)(M)/\bar{r}(M) = r(M/\bar{r}(M))$$

  por tanto

  $$\{0\} = \bar{r}(M/\bar{r}(M))$$

1.4. Otras Construcciones

Al ser una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$ una familia de módulos, podemos considerarla como una categoría completa, es decir, los objetos son los módulos de $\mathcal{T}$ y las flechas son todas los morfismos que ya existían en $R-Mod$.

Así por ser $\mathcal{T}$ cerrada bajo sumas directas, submódulos y cocientes podemos concluir fácilmente que los coproductos, subobjetos y objetos cociente en $\mathcal{T}$ son los mismos que en $R-Mod$.

Nos interesa calcular los productos y las cápsulas inyectivas. Suponga que M es el módulo tal que $\mathcal{T}=\sigma[M]$. Los productos los podemos calcular de la siguiente manera, si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos en $\mathcal{T}$ entonces:

$$\prod_{i\in I}^{\mathcal{T}} N_i = r_{\mathcal{T}}\Big(\prod_{i\in I} N_i\Big)$$

junto con los morfismos

$$p_j : \prod_{i\in I}^{\mathcal{T}} N_i \longrightarrow N_j$$

que son las restricciones de las proyecciones originales en $R-Mod$. Sea X un R-módulo en $\mathcal{T}$ junto con morfismos $q_j : X \longrightarrow N_j$, entonces por la propiedad universal del producto en $R-Mod$ existe un único morfismo

$$\varphi : X \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$$

Ahora le aplicamos el prerradical al morfismo φ y entonces tenemos el morfismo

$$\varphi|_{r_{\mathcal{T}}(X)} : r_{\mathcal{T}}(X) \longrightarrow \prod_{i\in I}^{\mathcal{T}} N_i$$

pero $r_{\mathcal{T}}(X)=X$ por tanto $\varphi|_{r_{\mathcal{T}}(X)}=\varphi$ y $\mathrm{im}(\varphi)\subseteq \prod_{i\in I}^{\mathcal{T}} N_i$. De modo que tenemos a $\prod_{i\in I}^{\mathcal{T}} N_i$ caracterizado por la propiedad universal del producto, en la subcategoría $\mathcal{T}$.

Similarmente se demuestra que:

$$E^{\mathcal{T}}(M) = r_{\mathcal{T}}(E(M)).$$

También nos interesa tomar clases de pretorsión hereditarias en nuestra nueva categoría $\mathcal{T}$, es claro que una de éstas es una clase pretorsión hereditaria que está contenida en $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}=\sigma[M]$ con M un R-módulo entonces denotamos por $M - torsp$ al segmento de retícula $[0, \mathcal{T}]$ de $R - torsp$, que justamente son las clases de pretorsión hereditarias en la categoría $\sigma[M]$.

Note que dado un prerradical exacto izquierdo $r \in R - pei$ entonces

$$r|_{\sigma[M]} := r_M : \sigma[M] \longrightarrow \sigma[M]$$

es un prerradical exacto izquierdo en $\sigma[M]$ y calculado en un R-módulo N en la categoría $\sigma[M]$ se ve de la forma:

$$r_M(N) = r(N) = r(N) \cap N = r(N) \wedge \sigma_M(N)$$

donde σ_M es el prerradical exacto izquierdo asociado a $\sigma[M]$, de modo que $r_M = r \wedge \sigma_M$.

Capítulo 2

Módulos Cerrados Bajo Productos

En éste capítulo vamos a estudiar más a fondo algunas propiedades la la retícula $M - torsp$ y de como éstas propiedades se relacionan con las clases de pretorsión hereditarias Jansianas, para intentar caracterizarlas.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{T} \in R - torsp$ y $N \in R - Mod$, diremos que un submódulo N' de N es $\mathcal{T}$-*denso* si

$$N/N' \in \mathcal{T}.$$

El conjunto de todos los submódulos $\mathcal{T}$-densos de N que lo denotamos $\mathcal{L}(N, \mathcal{T})$, es un filtro (en el sentido de teoría de retículas) en la retícula de submódulos de N, es decir;

(i) si $N' \in \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$ y $N' \leq N''$ entonces existe el epimorfismo canónico $N/N' \twoheadrightarrow N/N''$ por tanto $N/N'' \in \mathcal{T}$, así $N'' \in \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$,

(ii) si $N', N'' \in \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$ entonces tenemos el siguiente monomorfismo

$$N/(N' \cap N'') \rightarrowtail N/N' \bigoplus N/N''$$

que a cada $x + (N' \cap N'') \in N/N' \cap N''$ le asigna la pareja $(x + N', x + N'')$, así $N/(N' \cap N'') \in \mathcal{T}$, así $N \cap N'' \in \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$.

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{T}$ una clase de pretorsión hereditaria, y sea M un R-módulo libre de pretorsión, es decir; $r_{\mathcal{T}}(M) = \{0\}$.*

Si $N \leq M$ es un submódulo $\mathcal{T}$-denso entonces $N \leq_e M$.

Demostración. Sea K un submódulo no cero de M tal que $N \cap K = \{0\}$, consideremos el morfismo

$$M \longrightarrow M/N$$

entonces $K \rightarrowtail M/N$ pero por un lado $r_{\mathcal{T}}(K) \leq r_{\mathcal{T}}(M) = \{0\}$ y por otro como $M/N \in \mathcal{T}$ entonces $K \in \mathcal{T}$ y por tanto $r_{\mathcal{T}}(K) = K$, así que K no tiene otra opción más que ser el módulo $\{0\}$, concluyendo que N es esencial en M.

■

Adoptaremos la siguiente notación; $N^{\mathcal{T}} := \bigcap \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$. En general $N^{\mathcal{T}}$ no es un submódulo $\mathcal{T}$-denso de N, pero lo es justamente cuando $\mathcal{T}$ es Jansiano pues en ese caso tenemos el morfismo

$$\varphi : N \longrightarrow \prod_{N' \in \mathcal{L}(N,\mathcal{T})} N/N'$$

cuyo núcleo es

$$\operatorname{nuc}(\varphi) = \bigcap_{N' \in \mathcal{L}(N,\mathcal{T})} N' = N^{\mathcal{T}}$$

por tanto tenemos el monomorfismo $N/N^{\mathcal{T}} \rightarrowtail \prod_{N' \in \mathcal{L}(N,\mathcal{T})} N/N'$, de modo que $N^{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$.

Ahora daremos algunas equivalencias, de lo que en adelante llamaremos un *módulo cerrado bajo productos*, que justamente será el cual su clase de pretorsión hereditaria asociada sea cerrada bajo productos.

Teorema 2.3. *Para un R-Módulo izquierdo M, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) Para toda $\mathcal{T} \in M - torsp$ y cualquier familia $\{N_i\}_{i \in \Gamma} \subseteq \mathcal{T}$ se tiene que $\prod_{i \in \Gamma}^{\sigma[M]} N_i \in \mathcal{T}$.

(2) Para toda $\mathcal{T} \in M - torsp$ y $N \in \sigma[M]$ el conjunto de submódulos $\mathcal{T}$-densos de N es cerrado bajo intersecciones arbitrarias, o equivalentemente $N^{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(N, \mathcal{T})$.

(3) Para toda $\mathcal{T} \in M - torsp$ y $N \in \sigma[M]$ finitamente generado el conjunto de submódulos $\mathcal{T} -$ densos de N es cerrado bajo intersecciones arbitrarias.

(4) Si $\mathcal{F}$ es el filtro topológico de R asociado a $\sigma[M]$ entonces $\forall \mathcal{G} \in R-fil$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y cualquier subconjunto $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ se tiene que si $\bigcap \mathcal{G}' \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcap \mathcal{G}' \in \mathcal{G}$.

(5) Si r_M es el prerradical exacto izquierdo asociado a $\sigma[M]$ entonces para cualquier $r \in R-pei$ tal que $r \leq r_M$ y cualquier familia de módulos $\{N_i\}_{i\in\Gamma}$ en $\sigma[M]$ se tiene que $\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} r(N_i) = r(\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i)$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{T} \in M-torsp$ y $N \in \sigma[M]$, igual que en la observación anterior tenemos el monomorfismo

$$N/N^{\mathcal{T}} \rightarrowtail \prod_{N'\in\mathcal{L}(N,\mathcal{T})} N/N'$$

ahora como $N \in \sigma[M]$ entonces $N/N^{\mathcal{T}} \in \sigma[M]$ y por tanto

$$N/N^{\mathcal{T}} \rightarrowtail Tr_{\sigma[M]}\Big(\prod_{N'\in\mathcal{L}(N,\mathcal{T})} N/N'\Big) = \prod_{N'\in\mathcal{L}(N,\mathcal{T})}^{\sigma[M]} N/N'$$

así nuestra hipótesis (1) implica que $N/N^{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$, que es lo mismo que $N^{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(N,\mathcal{T})$.

(2) $\Rightarrow$ (3) (3) es un caso particular de (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) Sea $\mathcal{F} \in R-fil$ el filtro topológico asociado a $\sigma[M]$ y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ otro filtro topológico y un subconjunto $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\bigcap \mathcal{G}' \in \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{T}$ la clase de pretorsión hereditaria asociada a $\mathcal{G}$ y como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{T} \in M-torsp$.

Consideremos el módulo cíclico $N = R/\bigcap \mathcal{G}' \in \sigma[M]$, ahora para cada $K \in \mathcal{G}'$ el módulo $K/\bigcap \mathcal{G}'$ es $\mathcal{T}$-denso en N pues

$$N/(K/\bigcap \mathcal{G}') = (R/\bigcap \mathcal{G}')/(K/\bigcap \mathcal{G}') \cong R/K \in \mathcal{T}$$

así el módulo

$$\bigcap_{K\in\mathcal{G}'} K/\bigcap \mathcal{G}' \cong \bigcap \mathcal{G}'/\bigcap \mathcal{G}' = 0$$

por la hipótesis (3) es $\mathcal{T}$-denso en N, por tanto $N/0 = N \in \mathcal{T}$, así tenemos que $\bigcap \mathcal{G}' \in \mathcal{G}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathcal{F}$ el filtro topológico asociado a $\sigma[M]$, sea $\mathcal{T} \in M - torsp$ y $\mathcal{G}$ su filtro topológico asociado, y sea $\{N_i\}_{i\in\Gamma}$ una familia de módulos en $\mathcal{T}$.

Consideremos $x = (x_i)_{i\in\Gamma} \in \prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i$ y tomemos $\mathcal{G}' = \{(0 : x_i)\}_{i\in\Gamma}$, note que si $x_i \in N_i \in \mathcal{T}$ entonces $(0 : x_i) \in \mathcal{G}$, así $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ y note también que $\bigcap \mathcal{G}' = \bigcap_{i\in\Gamma}(0 : x_i) = (0 : x) \in \mathcal{F}$, lo cual nos deja usar nuestra hipótesis (4) concluyendo que $(0 : x) \in \mathcal{G}$ y como $x \in \prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i$ fue arbitraria tenemos que $\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i \in \mathcal{T}$.

Finalmente demostraremos (1) $\Leftrightarrow$ (5). Sean $\{N_i\}_{i\in\Gamma}$ y $r \leq r_M$ como en las hipótesis de (5) entonces podemos formar el siguiente cuadrado conmutativo al aplicar r a la proyección canónica η_j:

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i \arrow[r, "\eta_j"] & N_j \\
r\Big(\prod\limits_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i\Big) \arrow[u, hook] \arrow[r, "r(\eta_j)"] & r(N_j) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

en donde $r(\eta_j)(x_i)_{i\in\Gamma} = x_j$, por tanto por la propiedad universal del producto en $\sigma[M]$ existe un morfismo

$$r\Big(\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i\Big) \xrightarrow{\varphi} \prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} r(N_i)$$

pero como $r(\eta_j)$ es la proyección para toda j entonces φ es una inclusión, pero como cada $r(M_i) \in \mathcal{T}_r$ y $r\big(\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i\big)$ es el mayor submódulo de $\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i$ que está en $\mathcal{T}_r$ entonces tenemos la igualdad.

Recíprocamente sea $\mathcal{T} \in M - torsp$ y $\{N_i\}_{i\in\Gamma}$ módulos en $\mathcal{T}$, entonces calculamos:

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{T}}\Big(\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i\Big) &= \prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} r_{\mathcal{T}}(N_i) \\ &= \prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i \end{aligned}$$

por tanto $\prod_{i\in\Gamma}^{\sigma[M]} N_i \in \mathcal{T}$.

$\blacksquare$

Inmediatamente de este teorema podemos deducir lo siguiente.

Corolario 2.4. *Si $M \in R-Mod$ es cerrado bajo productos entonces también todo módulo N en $\sigma[M]$ lo es.*

Demostración. Si tomamos $\mathcal{T} \in N - torsp \subseteq M - torsp$ y $H \in \sigma[N] \subseteq \sigma[M]$ entonces por (2) tenemos que $H^{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$ y así N es cerrado bajo productos.

■

Una propiedad que nos va a interesar se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 2.5. *Sea $M \in R - Mod$ un módulo cerrado bajo productos, entonces todo cogenerador para $\sigma[M]$ es un subgenerador para $\sigma[M]$.*

Demostración. Sea C un cogenerador en $\sigma[M]$, primero note que como $C \in \sigma[M]$ entonces $\sigma[C] \subseteq \sigma[M]$, de modo que para cualquier $N \in \sigma[M]$ existe un conjunto X tal que

$$N \rightarrowtail \prod_{X}^{\sigma[M]} C$$

así que por el corolario anterior $\sigma[C]$ es cerrada bajo productos y por lo tanto $\prod_{X}^{\sigma[M]} C \in \sigma[C]$ y así $N \in \sigma[C]$, concluyendo lo que queríamos.

■

2.1. Módulos Localmente Artinianos

Ahora vamos a ver como se relacionan los módulos cerrados bajo productos con los módulos localmente artinianos, pero antes definiremos quienes son éstos últimos y daremos algunas propiedades y ejemplos.

Definición 2.6. Decimos que un módulo $M \in R - Mod$ es *localmente artiniano* (respectivamente *localmente neteriano*, respectivamente *localmente de longitud finita*) si todo submódulo finitamente generado de M es artiniano (respectivamente neteriano, respectivamente de longitud finita).

Note que si un módulo es artiniano entonces es localmente artiniano, pues todos sus submódulos son artinianos y el regreso no necesariamente es cierto.

Veamos ahora algunas propiedades de cerradura de módulos localmente artinianos.

Proposición 2.7. *La clase de módulos localmente artinianos (resp. localmente neterianos, resp. de longitud finita) es cerrada bajo submódulos, cocientes, sumas directas.*

Más aún, si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en* $R - Mod$ *tal que* M' *es artiniano (resp. neteriano, resp. de longitud finita) y* M'' *es localmente artiniano (resp. localmente neteriano, resp. localmente de longitud finita) entonces* M *es localmente artiniano (resp. localmente neteriano, resp. localmente de longitud finita).*

Demostración.

$\leq$] Sea $M \in R - Mod$ localmente artiniano y $N \leq M$ y sea $N' \leq N$ un submódulo finitamente generado de N entonces también lo es de M y así N' es artiniano.

$\div$] Sea $M \in R - Mod$ localmente artiniano y $N \leq M$ y sea $H/N \leq M/N$ un submódulo finitamente generado de M/N, digamos $H/N = \sum_{i=1}^{n} R(x_i + N)$, note que $H = N + \sum_{i=1}^{n} Rx_i$.

Entonces la retícula de submódulos de H/N está en correspondencia biyectiva con el segmento de retícula de submódulos de H que contienen a N.

Pero $H = N + \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ por tanto tal segmento está a su vez en correspondencia biyectiva con la retícula de submódulos de $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ la cual es artiniana.

Y por tanto H/N es artiniano.

$\oplus$] Sea $\{M_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos localmente artinianos y sea $N = \sum_{k=1}^{n} Rx_k$ un submódulo de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ finitamente generado por los elementos $\{x_j \in \bigoplus_{i \in I} M_i \mid j \in \{1, ..., n\}\}$, ahora considera los índices $J = \{i \in I \mid (x_k)_i \neq 0 \text{ para algún } k \in \{1, ..., n\}\}$ en donde $(x_k)_i$ es la i-ésima coordenada de x_k, note que J es finito pues todos los elementos están en la suma directa y así casi todas sus coordenadas son cero, consecuentemente;

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{k=1}^{n} R(\sum_{i\in J}(x_k)_i) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in J} R(x_k)_i \\
&\cong \bigoplus_{i\in J}\sum_{k=1}^{n} R(x_k)_i
\end{aligned}$$

pero cada $\sum_{k=1}^{n} R(x_k)_i$ es un submódulo finitamente generado de M_i por tanto es artiniano, y sabemos que la suma directa finita de artinianos es artiniano, entonces $\bigoplus_{i\in J}\sum_{k=1}^{n} R(x_k)_i$ es artiniano, pero también sabemos que los submódulos de artinianos son artinianos, así N es artiniano, que es lo que queríamos.

-] Para ver el último punto de la proposición considere

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $R-Mod$.

Supongamos que M' es artiniano y M'' es localmente artiniano.

Sea $H \leq M$ un submódulo finitamente generado, entonces $f^{-1}(H)$ es artiniano pues N lo es y $g(H)$ es artiniano pues es finitamente generado, considere la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow f^{-1}(H) \longrightarrow H \longrightarrow g(H) \longrightarrow 0$$

ser artiniano es cerrado bajo extensiones y por tanto H es artiniano.

Y así M es localmente artiniano.

Y como ser neteriano y de longitud finita también es cerrado bajo submódulos, sumas directas finitas, cocientes y extensiones, entonces el resultado se sigue de sustituir la palabra artiniano en cada una de los incisos por neteriano o de longitud finita según sea el caso.

■

Ahora sí podemos ver fácilmente que si damos A un R-módulo artiniano, entonces la suma directa infinita de copias de A no es artiniano, pero sí es localmente artiniano. Otra cosa que es sencilla de ver a partir de ésta proposición es que si tenemos un módulo localmente artiniano M entonces su clase de pretorsión hereditaria $\sigma[M]$ está compuesta solamente por módulos localmente artinianos lo cual nos será útil más adelante.

También los módulos semisimples son localmente artinianos, pues si tomamos un submódulo finitamente generado de un semisimple, entonces él mismo es un semisimple con una descomposición que tiene un número finito de sumandos y por tanto artiniano.

Si consideramos un grupo abeliano de torsión G y un subgrupo finitamente generado H, entonces por el teorema fundamental de los grupos abelianos H es suma directa de cíclicos de torsión (que son precisamente $\mathbb{Z}_n$ con $n \geq 2$), pero esa suma es finita, aparte $\mathbb{Z}_n$ es artiniano para toda $n \geq 2$ y como la clase de módulos artinianos es cerrada bajo sumas directas finitas entonces H es artiniano.

De modo que los grupos abelianos de torsión son localmente artinianos

Una pregunta que puede surgir es: ¿Cómo se relacionan los módulos localmente artinianos con los módulos cerrados bajo productos? Una respuesta está en el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Todo R-módulo localmente artiniano es cerrado bajo productos.*

Demostración. Sean $M \in R-Mod$ un módulo localmente artiniano, $\mathcal{T} \in R-torsp$ y $N \in \sigma[M]$ un módulo finitamente generado. Como M es localmente artiniano entonces N es localmente artiniano por la observación de arriba, por tanto es artiniano ya que es finitamente generado, así cualquier conjunto no vacío de submódulos de N debe tener elementos mínimos, en particular la familia $\mathcal{L}(N, \mathcal{T})$ y entonces se cumple la condición (3) del Teorema 2.3 por ser un filtro. Y por tanto M es cerrado bajo productos.

■

De modo que ya hemos construido una algunas clases de módulos cerrados bajo productos y entre ellos están los módulos localmente artinianos, los módulos semisimples y los grupos abelianos de torsión.

2.2. Algunas Propiedades del Zoclo

Definición 2.9. Denotaremos por Zoc a la clase de pretorsión hereditaria que consiste de todos los módulos semisimples en $R-mod$.

Note que el prerradical asociado Zoc es justamente el zoclo, el cual se calcula en un módulo como $zoc(M) = \sum_\alpha N_\alpha$ donde la suma recorre todos los submódulos simples de M.

Definición 2.10. Dada una clase de pretorsión hereditaria $\sigma[M]$ denotaremos por Zoc_M a la clase de pretorsión hereditaria $\sigma[M] \wedge Zoc$ que consta de todos los R-módulos semisimples en $\sigma[M]$, a su prerradical asociado lo denotamos por zoc_M y los llamaremos M*-zoclo* haciendo hincapié cuando nos referimos a la clase o al prerradical.

Observación 2.11. Si $N \in \sigma[M]$ entonces $N^{Zoc_M} = J(N)$ el radical de Jacobson de N, pues primeramente; $N^{Zoc_M} = \bigcap\{N' \leq N \mid N/N' \in Zoc_M\}$ y si tomamos $N' \leq N$ un submódulo máximo entonces N/N' es simple y por tanto está en Zoc_M, así $N^{Zoc_M} \subseteq \bigcap\{N' \leq N \mid N' \text{ es máximo}\} = J(N)$.

Para la otra contención si tomamos N' un submódulo de N tal que $N/N' \in Zoc_M$ entonces $N/N' \cong \bigoplus_{i\in I} S_i$ con S_i módulos simples para toda $i \in I$, consideramos el morfismo:

$$f : N \xrightarrow{\eta_{N'}} N/N' \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in I} S_i$$

sabemos que $\text{nuc}(f) = \bigcap_{j\in I} \text{nuc}(f_j)$ donde

$$f_j : N \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in I} S_i \xrightarrow{p_j} S_j$$

pero podemos quitar los intersecandos que sean N es decir, consideramos J el subconjunto de I tal que $j \in J$ si $\text{nuc}(f_j) \neq N$; de modo que para toda $j \in J$ se tiene que $N/\text{nuc}(f_j) \cong S_j$ de modo que $\text{nuc}(f_j)$ es un submódulo máximo de N, así $N' = \text{nuc}(f) = \bigcap_{j\in J} \text{nuc}(f_j)$ por lo tanto $J(N) \subseteq N'$ y con lo que concluimos que $J(N) = N^{Zoc_M}$.

Esto nos da pie a probar la siguiente propiedad.

Proposición 2.12. *Todo módulo cerrado bajo productos M es semilocal, es decir, $M/J(M)$ es semisimple.*

Demostración. Por el Teorema 2.3 inciso (2) tenemos que $M/M^{Zoc_M} \in Zoc_M$, y por la observación anterior $M^{Zoc_M} = J(M)$ por tanto $M/J(M)$ es semisimple.

■

Definición 2.13. Un módulo $N \in \sigma[M]$ decimos que es *M-singular* si

$$N \cong L/K \text{ con } L \in \sigma[M] \text{ y } K \leq_e L$$

Denotamos a la clase de R-módulos M-singulares como $\mathcal{S}_M$.

Lema 2.14. *$\mathcal{S}_M \in M - torsp$.*

Demostración. Sea $N \in \mathcal{S}_M$ y $N' \leq N$, entonces $N \cong L/K$ con $L \in \sigma[M]$ y $K \leq_e L$ entonces:

$\leq]$ $N' \cong L'/K$ con $K \leq L' \leq L$ y como $K \leq_e L$ también $K \leq_e L'$.

$\div]$ y $N/N' \cong \frac{L}{K}/\frac{L'}{K} \cong L/L'$ y como $K \leq_e L$ entonces $L' \leq_e L$.

$\oplus]$ Para las sumas directas sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos en $\mathcal{S}_M$, entonces cada $N_i \cong L_i/K_i$ con K_i esencial en L_i y $L_i \in \mathcal{S}_M$ para toda $i \in I$ así tenemos que:

$$\bigoplus_{i \in I} K_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} L_i$$

y

$$\bigoplus_{i \in I} N_i \cong \frac{\bigoplus_{i \in I} K_i}{\bigoplus_{i \in I} L_i}$$

concluyendo así el lema.

■

Denotaremos al prerradical exacto izquierdo asociado a la clase de R-módulos M-singulares como $Z_M : R - Mod \longrightarrow R - Mod$.

Definición 2.15. Un R-módulo M es *poliforme* si $Z_M(M) = 0$, es decir; M es $\mathcal{S}_M$-libre de pretorsión.

Observación 2.16. Sea $N \in \sigma[M]$ es claro que la siguiente contención de conjuntos se cumple

$$\{N' \mid N' \leq_e N\} \subseteq \{N' \mid N/N' \in \mathcal{S}_M\} = \mathcal{L}(N, \mathcal{S}_M)$$

la cual es traducida en

$$\begin{aligned} N^{\mathcal{S}_M} &= \bigcap \mathcal{L}(N, \mathcal{S}_M) \\ &\subseteq \bigcap \{N' \mid N' \leq_e N\} = zoc_M N \end{aligned}$$

Lo cual nos ayuda para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.17. *Todo R-módulo poliforme cerrado bajo productos tiene zoclo esencial.*

Demostración. Como M es un módulo $\mathcal{S}_M$-libre de pretorsión entonces por el Lema 2.2 todo submódulo $\mathcal{S}_M$-denso es esencial en M.

Con lo que completamos la igualdad de la observación anterior, por tanto $zoc_M(M) = M^{\mathcal{S}_M}$ y como M es cerrado bajo productos $M^{\mathcal{S}_M}$ es un submódulo $\mathcal{S}_M$-denso de M, y por tanto esencial en M, es decir, $zoc(M) \leq_e M$.

■

2.3. Módulos Proyectivos e Inyectivos

Definición 2.18. Un R-módulo P se dice que es N-*proyectivo* para algún módulo $N \in R - Mod$ si el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

pueda ser levantado a un diagrama conmutativo por un morfismo $\hat{f}$.

Y decimos que P es *proyectivo en* $\sigma[M]$ si para todo módulo $N \in \sigma[M]$ se tiene que P es N-proyectivo.

Definición 2.19. Un R-módulo U se dice que es N-*inyectivo* para algún módulo $N \in R - Mod$ si el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

pueda ser extendido a un diagrama conmutativo por un morfismo $\hat{f}$.

Y decimos que U es *inyectivo en* $\sigma[M]$ si para todo módulo $N \in \sigma[M]$ se tiene que U es N-inyectivo.

Se puede ver en [12] que un módulo $U \in \sigma[M]$ es inyectivo en $\sigma[M]$ si y solamente si es M-inyectivo. A diferencia de los módulos M-proyectivos y proyectivos en $\sigma[M]$, en donde esta equivalencia no necesariamente se cumple.

Daremos un ejemplo de ello: considere al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

- $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Z}$-proyectivo pues cualquier morfismo de $\mathbb{Q}$ en algún cociente de $\mathbb{Z}$ es cero, por tanto levantable a todo $\mathbb{Z}$.

- Pero no es proyectivo en $\mathbb{Z} - Mod$, pues si suponemos que si, es decir, que $\mathbb{Q} \leq^{\oplus} \mathbb{Z}^{(X)}$, entonces podemos encontrar un morfismo no cero $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y es tal, que $\mathrm{im}(f)$ es un subgrupo divisible no cero de $\mathbb{Z}$, lo cual no es posible.

Observación 2.20. Sea $M \in R - Mod$ tal que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y considere un morfismo de R-módulos $\varphi : M \longrightarrow N$.

Si U es un submódulo totalmente invariante de M y $N \in \sigma[M/U]$, entonces $\varphi(U) = \{0\}$

Demostración. Como $N \in \sigma[M/U]$ entonces existe un conjunto Λ tal que $\iota : N \hookrightarrow (M/U)^{(\Lambda)}/V$. Así que haremos la demostración por partes;

- Si $f : M \longrightarrow M/U$ entonces consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\eta_U"] & M/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  Como M es proyectivo en $\sigma[M]$ el morfismo f se puede levantar a un morfismo $\hat{f}$ tal que $f = \eta_U \circ \hat{f}$ y por tanto $f(U) = \{0\}$.

- Si $g : M \longrightarrow (M/U)^{(\Lambda)}$ entonces $g = \sum \pi_\alpha \circ g$ y por el inciso anterior

$$M \xrightarrow{g} (M/U)^{(\Lambda)} \xrightarrow{\pi_\alpha} M/U$$

  cumple que $\pi_\alpha \circ g(U) = \{0\}$ para toda $\alpha \in \Lambda$, por tanto $g(U) = \{0\}$.

- Por último si tenemos $h : M \longrightarrow (M/U)^{(\Lambda)}/V$ entonces consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\hat{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\ (M/U)^{(\Lambda)} \arrow[r, "\eta_V"] & (M/U)^{(\Lambda)}/V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y de igual manera existe $\hat{h}$ tal que hace conmutar el diagrama, por tanto por el inciso anterior $h(U) = \eta_V \circ \hat{h}(U) = \{0\}$.

De modo que el morfismo $\iota \circ \varphi : M \longrightarrow N \hookrightarrow (M/U)^{(\Lambda)}/V$ es tal que $\iota \circ \varphi(U) = \{0\}$ pero como ι es inyectiva, por lo tanto $\varphi(U) = \{0\}$.

■

Proposición 2.21. *Cualquier R-módulo $U \in \sigma[M]$ inyectivo en $\sigma[M]$ está M-generado.*

Demostración. Como $U \in \sigma[M]$ entonces $U \hookrightarrow M^{(X)}/V$ para algún conjunto X y un submódulo $V \subseteq M^{(X)}$.

Consideremos la sucesión exacta en $\sigma[M]$:

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M^{(X)}/V$$

y como U es inyectivo en $\sigma[M]$ la sucesión se escinde, por tanto existe un epimorfismo de $M^{(X)}/V$ en U, pero entonces existe el morfismo:

$$M^{(X)} \twoheadrightarrow M^{(X)}/V \twoheadrightarrow U$$

testigo de que U es M-generado.

■

Lema 2.22. *Sea M un R-módulo que es proyectivo en $\sigma[M]$ y U un submódulo no cero totalmente invariante de M. Entonces:*

(1) M/U *es proyectivo en* $\sigma[M/U]$.

(2) $\sigma[M/U] \neq \sigma[M]$

Demostración. Para (1) considere una sucesión exacta en $\sigma[M/U]$

$$A \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

junto con un morfismo $f : M/U \longrightarrow C$, entonces cuando componemos con la proyección de M en M/U resulta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\eta_U"] \arrow[dl, dotted, "\bar{f}"'] & \\ & M/U \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\psi"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

así como $\sigma[M/U] \subseteq \sigma[M]$ todas las flechas están en $\sigma[M]$ y por tanto como M es proyectivo en su categoría asociada f se puede levantar a un morfismo $\bar{f}$ tal que $\psi \circ \bar{f} = f \circ \eta_U$.

Ahora, como $A \in \sigma[M/U]$ y U es totalmente invariante en M entonces por la Observación 2.20 $\bar{f}(U) = \{0\}$ y así podemos factorizar al morfismo $\bar{f} : M \longrightarrow A$ a través de M/U, es decir, existe un morfismo $\hat{f} : M/U \longrightarrow A$ tal que $\bar{f} = \hat{f} \circ \eta_U$, por tanto $\psi \circ \hat{f} = f$ que es lo que queríamos.

Para (2) Supongamos que $M \in \sigma[M/U]$, entonces por la Proposición 2.21 tenemos que la M/U-cápsula inyectiva de M está M/U-generada, así existe un conjunto Λ y un epimorfismo

$$f : (M/U)^{(\Lambda)} \twoheadrightarrow E^{\sigma[M/U]}(M)$$

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "e"] \arrow[dll, dotted, "h"'] & \\ M^{(\Lambda)} \arrow[r, two heads, "\eta_U^{(\Lambda)}"'] & (M/U)^{(\Lambda)} \arrow[r, two heads, "f"'] & E^{\sigma[M/U]}(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y como M es proyectivo en $\sigma[M]$ entonces el diagrama se puede completar con el morfismo h que es tal que $e = f \circ \eta_{U^{(\Lambda)}} \circ h$ y por la Observación 2.20 tenemos que $U \cong e(U) = f \circ \eta_U^{(\Lambda)} \circ h(U) = f(\{0\}) = \{0\}$ lo cual es una contradicción pues $U \neq \{0\}$.

■

Lema 2.23. *Sea M un R-módulo tal que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y sean U_1 y U_2 submódulos de M totalmente invariantes no cero tales que $U_1 \supset U_2$, entonces $\sigma[M/U_1] \subset \sigma[M/U_2]$.*

Demostración. Note que U_1/U_2 es un submódulo totalmente invariante de M/U_2, pues si consideramos un morfismo $f : M/U_2 \longrightarrow M/U_2$ tenemos el siguiente diagrama con renglón exacto en $\sigma[M]$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\eta_{U_2}"] \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] & \\ & M/U_2 \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\eta_{U_2}"] & M/U_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que puede ser completado a un diagrama conmutativo a partir de $\tilde{f}$, pues M es proyectivo en $\sigma[M]$, de modo que:

$$\begin{aligned} f(U_1/U_2) &= f \circ \eta_{U_2}(U_1) \\ &= \eta_{U_2} \circ \tilde{f}(U_1) \\ &\subseteq \eta_{U_2}(U_1) \qquad\qquad \text{pues } U_1 \leq M \text{ es totalmente invariante.} \\ &= U_1/U_2 \end{aligned}$$

Por el Lema 2.22 inciso (2) tenemos que M/U_2 es proyectivo en $\sigma[M/U_2]$, lo cual implica que por el inciso (1) del mismo lema, pero esta vez aplicado a $U_1/U_2 \leq M/U_2$,

$$\sigma[M/U_1] = \sigma\Big[\frac{M/U_2}{U_1/U_2}\Big] \subset \sigma[M/U_2].$$

■

2.4. Módulos Semiartinianos

Definición 2.24. Sea M un R-módulo, decimos que M es *semiartiniano* (o también llamado módulo de Loewy) si para algún $\alpha \in OR$ se tiene que $zoc_\alpha(M) = M$, equivalentemente si todo cociente no cero de M tiene zoclo no cero.

Lema 2.25. *Son equivalentes para $M \in R-Mod$*

(1) M es semiartiniano.

(2) M/U tiene zoclo no cero para toda U submódulo propio totalmente invariante de M.

Demostración.

(1) ⇒ (2) Es claro.

(2) ⇒ (1) Sea $\alpha = \text{mín}\{\gamma \in OR \mid zoc_\gamma(M) = zoc_{\gamma+1}(M)\}$ que se le llama la longitud de Loewy del módulo M.

Observe que $U = zoc_\alpha(M)$ es un submódulo totalmente invariante de M, de modo que:

$$\begin{aligned} zoc(M/U) &= zoc(M/zoc_\alpha(M)) \\ &= zoc_{\alpha+1}(M)/zoc_\alpha(M) = \{0\} \end{aligned}$$

entonces $M/U = \{0\}$ por (2) ergo $M = U = zoc_\alpha(M)$, por lo tanto M es semiartiniano.

■

Teorema 2.26. *Sea M un módulo cerrado bajo productos. Si M es proyectivo en $\sigma[M]$ entonces M es semiartiniano.*

Demostración. Consideramos el cogenerador para $\sigma[M]$

$$C = \bigoplus_{i \in \Gamma} E^{\sigma[M]}(S_i)$$

donde $\{S_i \mid i \in \Gamma\}$ es un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples en $\sigma[M]$. Por la Proposición 2.5 C es un subgenerador para $\sigma[M]$.

Como $\sigma[M] = \sigma[C]$ entonces M es un submódulo de un módulo C-subgenerado, y podemos formar el diagrama con renglón exacto:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted] \arrow[d, hook] & \\ C^{(\Lambda)} \arrow[r] & C^{(\Lambda)}/V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

el cual por la proyectividad de M en $\sigma[M]$ se extiende a un diagrama conmutativo a través de un monomorfismo pues a quien extendemos es una inclusión.

Supongamos ahora $M \neq \{0\}$ pues de lo contrario M ya es semiartiniano. Entonces $zoc(M) \neq \{0\}$ porque $C^{(\Lambda)}$ tiene zoclo esencial ya que C lo tiene.

Consideremos un submódulo U de M totalmente invariante no cero, por el Lema 2.22 M/U es proyectivo en $\sigma[M/U]$ y como también $M/U \in \sigma[M]$ entonces por el Corolario 2.4 M/U es cerrado bajo productos. Repitiendo todo el argumento para M/U concluimos que $zoc(M/U) \neq \{0\}$, y así por el Lema 2.25 M es semiartiniano.

■

Capítulo 3

Un Contraejemplo

3.1. El recíproco del Teorema 2.8 no es cierto

En esta sección daremos un ejemplo de un módulo M cerrado bajo productos tal que $zoc(M) = \{0\}$, es decir, un módulo cerrado bajo productos que no es semiartiniano, lo cual nos da un contraejemplo del recíproco del Teorema 2.8 ya que:

Lema 3.1. *Todo módulo localmente artiniano M es semiartiniano.*

Demostración. Es claro que $zoc(M) \neq \{0\}$, pues si tomamos un submódulo finitamente generado, entonces por ser artiniano tiene submódulos simples.

Sea α la longitud de Loewy de M, supongamos que $zoc_\alpha(M) \neq M$, entonces consideramos el submódulo cíclico de M generado por $x \notin zoc_\alpha(M)$ y así tenemos que

$$0 \neq \frac{Rx + zoc_\alpha(M)}{zoc_\alpha(M)} = \frac{Rx}{Rx \cap zoc_\alpha(M)}$$

pero como Rx es un módulo artiniano (por ser finitamente generado) y $Rx/(Rx \cap zoc_\alpha(M))$ es un cociente de Rx entonces también es artiniano, por tanto existen submódulos simples del cociente

$$\frac{Rx + zoc_\alpha(M)}{zoc_\alpha(M)} \leq \frac{M}{zoc_\alpha(M)}$$

de modo que

$$zoc\Big(\frac{M}{zoc_\alpha(M)}\Big) \neq \{0\}$$

y así $zoc_\alpha(M) \subset zoc_{\alpha+1}(M)$ lo cual es una contradicción a que α sea la longitud de Loewy de M.

Por tanto $zoc_\alpha(M) = M$, es decir M es semiartiniano.

■

Comenzaremos definiendo cierto tipo de anillos.

Definición 3.2. Decimos que un anillo R es un *anillo en cadena izquierdo*, si la retícula de ideales izquierdos está linealmente ordenada por la inclusión.

Lema 3.3. *Sea R un anillo en cadena izquierdo, entonces todo $\mathcal{F} \in R - fil$ es de la forma:*

$$\eta(I) = \{K \leq R \mid K \supseteq I\}$$

o

$$\hat{\eta}(I) := \eta(I) \setminus \{I\}$$

para algún ideal bilateral I de R.

Y así la retícula $R - fil$ es linealmente ordenada.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro topológico de R e $I = \bigcap \mathcal{F}$, por la Observación 1.9 I es un ideal bilateral de R.

Si $I \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F} = \eta(I)$. Ahora, si $I \notin \mathcal{F}$ considere $J \in \hat{\eta}(I)$, por definición $I \subset J$ por tanto existe $K \in \mathcal{F}$ tal que $J \nsubseteq K$ pero R es un anillo en cadena ergo $K \subseteq J$, de modo que $J \in \mathcal{F}$. Se sigue que $\hat{\eta}(I) \subseteq \mathcal{F}$ y la otra contención es sencilla, por tanto $\mathcal{F} = \hat{\eta}(I)$.

Para la segunda afirmación del lema considere dos filtros en $R - fil$, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ entonces existen ideales bilaterales I y J de R, tales que:

$$\mathcal{F}_1 \text{ es igual a } \hat{\eta}(I) \text{ o } \eta(I)$$

y

$$\mathcal{F}_2 \text{ es igual a } \hat{\eta}(J) \text{ o } \eta(J)$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer $I \subset J$, por ser R anillo en cadena y por que el caso $I = J$ es inmediato de la primera parte.

Y entonces es fácil ver que:

$$\hat{\eta}(J) \subseteq \eta(J) \subseteq \hat{\eta}(I) \subseteq \eta(I)$$

de modo que la retícula $R - fil$ resulta linealmente ordenada.

■

Ahora recordamos que un ideal bilateral I de un anillo R se dice *completamente primo* si cada vez que $ab \in I$ para dos elementos $a, b \in R$ entonces $a \in I$ o $b \in I$.

Observación 3.4. Un ideal bilateral I de un anillo de cadena izquierdo R es completamente primo si y solo si para todo $a \in R$ tal que $a^2 \in I$ entonces $a \in I$.

Demostración. La primera implicación es un caso particular de la definición, para hacer la implicación recíproca consideremos $a, b \in R$ tales que $ab \in I$ y entonces $Rab \subseteq I$, ahora comparamos los ideales izquierdos Ra y Rb. Como R es un anillo de cadena izquierdo entonces tenemos dos casos:

- $Rb \subseteq Ra$ lo cual implica que $Rb^2 \subseteq Rab \subseteq I$, así $b^2 \in I$ y por tanto $b \in I$.

- $Ra \subseteq Rb$ entonces $Ra^2 \subseteq Rba$, pero note que $(ba)^2 = b(ab)a \in I$ pues I es bilateral, por tanto $ba \in I$ de modo que $Rba \subseteq I$ y así $a^2 \in I$ y concluimos que $a \in I$.

■

Lema 3.5. *Todo ideal bilateral idempotente no cero de un anillo en cadena es completamente primo.*

Demostración. Sea I un ideal bilateral no cero tal que $I^2 = I$, supongamos que existe un elemento a en el anillo tal que $a^2 \in I$ y $a \notin I$, entonces como R es anillo de cadena tenemos que $Ra^2 \subseteq I$ e $I \subset Ra$. Así tenemos que:

$$I = I^2 \subseteq I(Ra) = Ia \subseteq Ra^2 \subseteq I$$

por tanto $Ra^2 = I$, entonces

$$I = I^2 = I(Ra^2) = Ia^2$$

de modo que existe un elemento $y \in I$ tal que $a^2 = ya^2$, por tanto $(1-y)a^2 = 0$. Pero ahora note que $(1 - y) \notin I$, como R es anillo en cadena entonces $I \subset R(1-y)$, así $y \in R(1-y)$ lo cual implica que $R(1-y) = R$, de modo que existe $x \in R$ tal que $x(1-y) = 1$. Concluimos que $a^2 = x(1-y)a^2 = x(0) = 0$, y por tanto $0 = Ia^2 = I$ lo cual es una contradicción.

■

Como el objetivo de este trabajo se centra en las clases de pretorsión hereditarias y para los siguientes resultados necesitamos ciertas nociones de clases de torsión hereditarias, referiremos al lector a [5] y [7], en donde se demuestra que hay una correspondencia biyectiva entre clases de torsión hereditarias[1], topologías de gabriel izquierdas[2] y radicales exactos izquierdos.

Ahora si podemos enunciar el lema siguiente:

Lema 3.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un ideal bilateral propio I de un anillo en cadena izquierdo R.*

(1) I *es completamente primo.*

(2) $\hat{\eta}(I) \in R - gab$

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean J, K ideales izquierdos de R, tales que $K \in \hat{\eta}(I)$ y $(J : k) \in \hat{\eta}(I)\ \forall\ k \in K$, para demostrar que $J \in \hat{\eta}(I)$ tenemos dos casos, $K \subseteq J$ y por tanto tenemos el resultado por ser $\hat{\eta}(I)$ filtro. Y el otro caso es $J \subset K$, así que supongamos $J \notin \hat{\eta}(I)$ entonces $J \subseteq I$. Como $I \subset K$ entonces tomamos un elemento $a \in K \setminus I$ y como $(J : a) \in \hat{\eta}(I)$ entonces podemos tomar $x \in (J : a) \setminus I$ de modo que $xa \in J \subset I$ lo cual es una contradicción pues ni x ni a están en I. Por tanto $J \in \hat{\eta}(I)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existe un elemento $a \in R$ tal que $a^2 \in I$ y $a \notin I$ entonces como R es anillo en cadena tenemos que $Ra^2 \subseteq I \subset Ra$, consideramos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Ra/I \longrightarrow R/I \longrightarrow R/Ra \longrightarrow 0$$

Note que $R/Ra, R/(I : a) \in \mathcal{T}_{\hat{\eta}(I)}$ y no es difícil ver que la función $\varphi : R/(I : a) \longrightarrow Ra/I$ que se calcula como $\varphi(x + (I : a)) = xa + I$ es un isomorfismo, por tanto como $\mathcal{T}_{\hat{\eta}(I)}$ es una clase de torsión hereditaria, $R/I \in \mathcal{T}_{\hat{\eta}(I)}$, lo cual es una contradicción pues $I \notin \hat{\eta}(I)$.

[1] A las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones se les llama *clases de torsión hereditarias*. A la colección de éstas se le denota por $R - tors$.

[2] Una *topología de Gabriel izquierda* $\mathcal{F}$ para R (también llamados filtros topológicos idempotentes izquierdos), es una topología lineal izquierda para R que además cumple:

(iv) Si I es un ideal izquierdo y existe $J \in \mathcal{F}$ tal que para todo $x \in J$, el ideal $(I : x) \in \mathcal{F}$ entonces $I \in \mathcal{F}$.

Y la colección de los filtros de gabriel izquierdos se denota por $R - gab$.

■

Proposición 3.7. *Supongamos que R es un anillo en cadena izquierdo y todo I ideal bilateral de R es idempotente.*

Entonces toda topología lineal izquierda $\mathcal{F}$ es una topología de gabriel izquierda (o equivalentemente toda clase de pretorsión hereditaria es una clase de torsión hereditaria).

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in R - fil$ entonces por el Lema 3.3 tenemos dos casos:

- $\mathcal{F} = \hat{\eta}(I)$. Y por los Lemas 3.5 y 3.6 $\mathcal{F}$ es una topología de gabriel izquierda.
- $\mathcal{F} = \eta(I)$. En este caso, como R es un anillo en cadena, basta demostrar que si J es un ideal izquierdo tal que para todo $x \in I$, $(J : x) \in \eta(I)$ entonces $J \in \eta(I)$. Pero si $(J : x) \in \eta(I)$ para algún $x \in I$ entonces $I \subseteq (J : x)$, por tanto $Ix \subseteq J$ y como x fue arbitrario tenemos que $I = I^2 \subseteq J$.

■

Ahora considere R un anillo en cadena izquierdo con $J(R)$ el único ideal bilateral no trivial y tal que $J(R)^2 = J(R)$.

Note que de este modo tenemos que $J(R)$ es un ideal izquierdo máximo entonces $\{R\} = \hat{\eta}(J(R))$, por tanto tenemos los siguientes elementos no triviales en $R - fil$ (que por la Proposición 3.7 es $R - gab$).

$$\mathcal{F}_1 = \eta(J(R)) = \{R, J(R)\}$$

y

$$\mathcal{F}_2 = \hat{\eta}(\{0\})$$

de modo que $R - fil$ resulta ordenada del siguiente modo:

$$\{R\} \subset \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subset sub_R(R)$$

Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ las clases de torsión hereditarias asociadas a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ respectivamente.

Observe que si $M \in \mathcal{T}_1$ entonces para cualquier $x \in M$ se tiene que $(0 : x) \in \mathcal{F}_1$ lo cual implica que $J(R) \leq (0 : x)$, es decir, $(0 : x)$ es R o es $J(R)$, de modo que:

$$M = \sum_{x \in M} Rx \cong \sum_{x \in M} R/(0 : x)$$

es un módulo semisimple. Y recíprocamente, si $M \in R-Mod$ es semisimple entonces $M = (R/J(R))^{(X)}$ para algún conjunto X y por tanto $M \in \mathcal{T}_1$. Es decir, $\mathcal{T}_1 = Zoc$.

Si $M \in \mathcal{T}_2$ entonces se satisface la condición (4) del Teorema 2.3, pues en los casos en que $\mathcal{F}_{\sigma[M]}$ es $\{R\}$ o es $\mathcal{F}_1$ se cumple trivialmente, y en el caso en el que $\mathcal{F}_{\sigma[M]} = \mathcal{F}_2$ entonces si tomamos $\mathcal{G}'$ un subconjunto de $\{R\}$ de nuevo el resultado es trivial y si $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{F}_1$ entonces $\bigcap \mathcal{G}'$ es un elemento de $\mathcal{F}_1$, pues $\mathcal{G}'$ no tiene más opción que ser $\{R\}$, $\{J(R)\}$ o $\{R, J(R)\}$. Así todos los elementos de $\mathcal{T}_2$ son cerrados bajo productos.

Así pues, sea $N \in \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{T}_1$, y $M = N/r_{\mathcal{T}_1}(N) = N/zoc(N) \neq \{0\}$. Entonces como $r_{\mathcal{T}_1}$ es un radical exacto izquierdo (pues $R-fil = R-gab$), $zoc(M) = zoc(N/zoc(N)) = \{0\}$.

De modo que construimos M un R-módulo que no es semiartiniano y por el Lema 3.1 tampoco es localmente artiniano, por tanto el recíproco del Teorema 2.8 no es cierto en general, así que en el siguiente capítulo nos centraremos en dar ciertas condiciones para que sí lo sea.

3.2. Un dominio en cadena con sólo un ideal no trivial idempotente

Ahora lo único que falta es encontrar un anillo en cadena izquierdo que solo tenga un ideal bilateral no trivial, idempotente.

Haremos la construcción según el artículo [9]. Sea $(E, \preceq)$ la cadena donde $E = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ y $\mathtt{0} \prec \mathtt{1}$. La retícula de ideales de orden de E es $Id(E) = \{\{\mathtt{0}\}, E\}$ que es justo como queremos que se vea la retícula de ideales propios de nuestro anillo a construir.

Sean $\Theta = \mathbb{Z}$, $D = \{\mathtt{1}\}$ y $(C, \trianglelefteq)$ la cadena donde $C = \Theta \times D$ y $\trianglelefteq$ es el orden lexicográfico.

Consideramos el grupo abeliano ordenado libre generado por C, es decir, $(\mathbb{Z}^{(C)}, \sqsubseteq)$ ordenado antilexicográficamente. Tomamos su cono positivo (el cual es un monoide abeliano ordenado) y lo llamamos

$$\begin{aligned} H =& \{f \in \mathbb{Z}^{(C)} \mid 0 \leq f\} \\ =& \{f_0\} \cup \{f \in \mathbb{Z}^{(C)} \mid 0 \leq f(c) \text{ si } c = max\{c' \mid f(c') \neq 0\}\} \end{aligned}$$

en donde f_0 es la función cero.

Lema 3.8. *H es un monoide en cadena, es decir, la retícula de ideales-monoide $\mathscr{M}(H)$ está linealmente ordenada.*

Demostración. Sean $f, g \in H$ basta demostrar que $f + H \subseteq g + H$ o $g + H \subseteq f + H$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \sqsubseteq g$, sean $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq C$ tales que $f(c_i) \neq 0$ o $g(c_i) \neq 0$ entonces existe un número $m \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $f(c_m) \leq g(c_m)$ y $f(c_t) = g(c_t)$ para toda $t \in \{m+1, \ldots, n\}$ considera $h \in \mathbb{Z}^{(C)}$ dada por $h(c_i) = g(c_i) - f(c_i)$ note que $h(c_m) \geq 0$ y $h(c_t) = 0$ para toda $t \in \{m+1, \ldots, n\}$, por tanto $h \in H$ y $f + h = g$, es decir, $g + H \subseteq f + H$.

∎

Definición 3.9. Definimos una acción de Θ en H, dada por

$$(m \cdot f)(c) = f(mc)$$

con $m \in \Theta$ y $f \in H$.

Llamamos a un ideal-monoide I *Θ-invariante* si para todo $m \in \Theta$ se tiene que $mI \subseteq I$.

Llamamos a un ideal-monoide I *absolutamente Θ-invariante* si para todo $m \in \Theta$, $f \in H$ se tiene que si $m \cdot f \in I$ entonces $f \in I$.

Sea K un campo cualquiera, construimos el anillo de series formales en H con coeficientes en K:

$$A = K[[H]] = \{\sum_{f \in H} x_f f \mid x_f \in K \text{ y la suma tiene soporte bien ordenado}\}$$

en donde la suma está dada coordenada a coordenada y la multiplicación por la regla $(\sum_{f \in H} x_f f)(\sum_{g \in H} x_g g) = \sum_{h \in H}(\sum_{fg=h} x_h)h$ y está bien definida por el hecho de que las sumas tienen soporte bien ordenado, Proposición 1.2.22 [6].

Lema 3.10. *A es un dominio conmutativo.*

Demostración. Corolario 1.2.23 [6].

∎

Proposición 3.11. *A es un anillo en cadena.*

Demostración. Se concluye de que hay un isomorfismo de retículas entre la retícula de ideales-monoide aumentada con el vacío como elemento menor, $\mathscr{M}(H)_\varnothing$ y la retícula de ideales de A, $\mathscr{I}(A)$, Proposición 1 [9]. Y de que H es un monoide en cadena (Lema 3.8).

∎

Así A tiene un único ideal máximo, el cual llamaremos B y está formado por todos los elementos en A que no son unidades, los cuales son precisamente los que tiene coeficiente en $f_0 \in H$ distinto del cero en K, Proposición 1.2.24 [6].

Definición 3.12. Θ actúa naturalmente en A del siguiente modo;

$$m \cdot (\sum_{f \in H} x_f f) = \sum_{f \in H} x_f (m \cdot f)$$

tomando $m \in \Theta$ y $\sum_{f \in H} x_f f \in A$.

De manera similar se puede hablar de ideales Θ-*invariantes* y *completamente* Θ-*invariantes.*

Lema 3.13. *B es un ideal Θ invariante de A.*

Demostración. Sea $m \in \Theta$ y $b = \sum_{f \in H} x_f f \in B$, entonces $x_{f_0} \neq 0$ pero como $mf_0 = f_0$ para toda m entonces x_{f_0} también es el coeficiente de f_0 en mb.

■

Construiremos ahora el anillo de monoide torcido izquierdo (Left Skew Group Ring).

$$R = A[\Theta] = \{\sum_{m \in \Theta} a_m m \mid a_m \in A \text{ y la suma tiene soporte finito}\}$$

donde la suma está dada coordenada a coordenada y la multiplicación está dada distributivamente por la regla $ma = (m \cdot a)m$ con $a \in A$ y $m \in \Theta$.

Proposición 3.14. *Considere el ideal $P = B[\Theta] = \{\sum x_f f \in R \mid x_f \in B\}$ de R. El conjunto $S = R \setminus P$ es un sistema de Ore izquierdo para R.*

Demostración. El Lema 3.13 nos asegura que podemos usar la Proposición 12 [10].

■

Por último consideramos al anillo $T = S^{-1}R$

Proposición 3.15. *T es un anillo en cadena derecho.*

Demostración. La retícula de ideales derechos de T es isomorfa a la retícula de ideales de A, Proposición 3 [9].

■

Proposición 3.16. *Los ideales de T son idempotentes.*

Demostración. Se sigue que todos los ideales-monoide de H son idempotentes de la última parte del Lema 6 [9] y por el Corolario 4 [9] los ideales de T lo son.

■

Proposición 3.17. *T tiene solamente tres ideales.*

Demostración. La retícula $\mathscr{I}(T)$ de ideales de T es isomorfa a la retícula de ideales Θ-invariantes de A $\mathscr{I}_\Theta(A)$, Proposición 3 [9].

La retícula de ideales Θ-invariantes de A $\mathscr{I}_\Theta(A)$ es isomorfa a la retícula de ideales-monoide Θ-invariantes de H aumentada por $\varnothing$ como elemento menor $\mathscr{M}_\Theta(H)_\varnothing$, Proposición 1 [9].

La retícula de ideales-monoide propios Θ-invariantes de H $\mathscr{M}_\Theta(H)\setminus\{H\}$ es isomorfa a la retícula de filtros de orden de D, $Fil(D)$, Corolario 7 [9].

Y solo basta decir que $Fil(D)$ consta de un solo elemento.

■

Se puede describir de una mejor manera al único ideal no trivial de T, la Proposición 13 [10] nos dice que éste es $S^{-1}P$.

Finalmente consideramos el anillo opuesto de T, T^{op} el cual resulta ser el anillo en cadena izquierdo con un solo ideal bilateral no trivial.

Capítulo 4

Resultados Finales

4.1. M-Dominancia y Compacidad

Definición 4.1. Sea M un R-módulo, llamaremos a una clase $\mathcal{T} \in M-torsp$ *M-dominada* si $\mathcal{T}$ tiene un subgenerador M-generado.

Observación 4.2. La colección de clases $\mathcal{T}_i \in M - torsp$ tales que son M-dominadas es cerrada bajo supremos arbitrarios, pues si N_i es el subgenerador M-generado de cada clase $\mathcal{T}_i$ entonces:

$$\bigvee_{i\in\Lambda} \mathcal{T}_i = \bigvee_{i\in\Lambda} \sigma[N_i] = \sigma[\bigoplus_{i\in\Lambda} N_i]$$

y como cada N_i es un módulo M-generado entonces $\bigoplus_{i\in\Lambda} N_i$ también lo es.

Note que si sucede que $M \in \sigma[M]$ es un generador para $\sigma[M]$ entonces toda clase de pretorsión hereditaria es M-dominada.

Proposición 4.3. *Sea M un R-módulo, si $\mathcal{T}$ es una clase de pretorsión hereditaria M-dominada entonces $\mathcal{T}$ está subgenerada por la clase de todos los cocientes de M de $\mathcal{T}$-pretorsión.*

Demostración. Sea N un subgenerador M-generado de $\mathcal{T}$, entonces existe un epimorfismo:

$$f : M^{(X)} \twoheadrightarrow N$$

Sean $\pi_i : M^{(X)} \longrightarrow M$ y $\kappa_i : M \longrightarrow M^{(X)}$ la proyección y la inclusión en la i-ésima coordenada, para cada $i \in X$.

Considere el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{i\in X}\left(\frac{M}{\mathrm{nuc}(f\circ\kappa_i)}\right) \arrow[d, "\pi_i'"] \\
M^{(X)} \arrow[rru, bend left, "\bigoplus_{i\in X} h_i"] \arrow[r, "\pi_i"] & M \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\kappa_i"'] & \frac{M}{\mathrm{nuc}(f\circ\kappa_i)} \arrow[dd, "g_i"] \\
 & M^{(X)} \arrow[dr, "f"] & \\
 & & N
\end{tikzcd}
$$

En donde π_i' es la proyección canónica en la i-ésima coordenada, h_i y g_i son la epimonofactorización de $f \circ \kappa_i$ para cada $i \in X$, de modo que h_i es epimorfismo y g_i es monomorfismo, como N está en $\mathcal{T}$ entonces $M/\mathrm{nuc}(f\circ\kappa_i)$ también.

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{i\in X} f \circ \kappa_i \circ \pi_i \\
&= \sum_{i\in X} g_i \circ h_i \circ \pi_i \\
&= \sum_{i\in X} (g_i \circ \pi_i' \circ \bigoplus_{i\in X} h_i) \\
&= \sum_{i\in X} (g_i \circ \pi_i') \circ \bigoplus_{i\in X} h_i
\end{aligned}
$$

Ahora como:

$$
\bigoplus_{i\in X}\Big(\frac{M}{\mathrm{nuc}(f\circ\kappa_i)}\Big) \cong \frac{M^{(X)}}{\bigoplus_{i\in X}\mathrm{nuc}(f\circ\kappa_i)} \cong \frac{M^{(X)}}{\mathrm{nuc}(f)} \cong N
$$

Así concluimos que

$$
\sigma[N] = \sigma\Big[\bigoplus_{i\in X}\Big(\frac{M}{\mathrm{nuc}(f\circ\kappa_i)}\Big)\Big] = \sigma[\{M/K \mid K \in \mathcal{L}(M,\mathcal{T})\}]
$$

■

Observación 4.4. Podemos decir ahora que si tenemos un módulo $M \in R - Mod$ y una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$ siempre se cumple que:

$$\sigma[M/M^{\mathcal{T}}] \supseteq \sigma[\{M/K \mid K \in \mathcal{L}(M, \mathcal{T})\}]$$

y la proposición anterior nos dice que la igualdad se da cuando $\mathcal{T}$ está M-dominada.

Corolario 4.5. *Sea M un R-módulo cerrado bajo productos, si $\mathcal{T}$ es una clase de pretorsión hereditaria M-dominada entonces $\mathcal{T} = \sigma[M/M^{\mathcal{T}}]$.*

Demostración. Se sigue directamente de la Observación 4.4 y de que si M es cerrada bajo productos entonces $\mathcal{T} \supseteq \sigma[M/M^{\mathcal{T}}]$.

■

Para lo siguiente necesitaremos algunas nociones puramente reticulares.

Definición 4.6. Una retícula $(L, \preceq, \vee, \wedge)$ completa es superiormente continua si

$$a \wedge \bigvee_{x \in X} x = \bigvee_{x \in X} a \wedge x$$

para todo elemento $a \in L$ y todo subconjunto dirigido $X \subseteq L$.

Definición 4.7. Sea $(L, \preceq, \vee, \wedge)$ una retícula superiormente continua.

Decimos que un elemento $c \in L$ es compacto si cada vez que $c \preceq \bigvee_{x \in X} x$ entonces $c \preceq \bigvee_{y \in Y} y$ donde $Y \subseteq X \subseteq L$ y Y es finito.

Lema 4.8. *En la retícula $R-torsp$ los elementos compactos son exactamente las clases de pretorsión hereditarias que tienen un subgenerador finitamente generado.*

Demostración. Sea $\sigma[M]$ con $M = \sum_{j=1}^{k} Rm_j$ finitamente generado y tal que

$$\sigma[M] \subseteq \bigvee_{i \in I} \sigma[N_i] = \sigma[\bigoplus_{i \in I} N_i]$$

entonces

$$M \xhookrightarrow{\varphi} (\bigoplus_{i \in I} N_i)^{(X)}/V$$

para algún conjunto X.

Tomamos $j \in \{1, \ldots, k\}$ y entonces $\varphi(m_j) = ((n_{ix})_{i \in I})_{x \in X} + V$, pero entonces existen $I_j \subseteq I$ y $X_j \subseteq X$ finitos tales que

$$\varphi(m_j) = ((n_{ix})_{i \in I_j})_{x \in X_j} + V$$

por lo que

$$\operatorname{im}(\varphi|_{Rm_j}) \subseteq \frac{(\bigoplus_{i\in I_j} N_i)^{(X_j)} + V}{V} = \frac{(\bigoplus_{i\in I_j} N_i)^{(X_j)}}{(\bigoplus_{i\in I_j} N_i)^{(X_j)} \cap V}$$

De modo que $Rm_j \in \sigma[\bigoplus_{i\in I_j} N_i]$ y como j fue arbitrariamente escogida entonces eso se cumple para todos los cíclicos que generan a M, al ser una cantidad finita entonces tenemos que $K = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ es un subconjunto finito de I y también:

$$\bigoplus_{j=1}^{k} Rm_j \in \sigma[\bigoplus_{i\in K} N_i]$$

lo cual implica que:

$$M \in \sigma[\bigoplus_{i\in K} N_i]$$

de modo que $\sigma[M]$ es un elemento compacto de $R - torsp$.

Suponga ahora que $\sigma[M]$ es un elemento compacto de $R - torsp$ y note que

$$\sigma[M] = \bigvee_{x\in M} \sigma[Rx]$$

consecuentemente por la compacidad existen $\{x_1, \ldots, x_k\}$ elementos de M tales que

$$\sigma[M] = \bigvee_{i=1}^{k} \sigma[Rx_i]$$

pero no es difícil ver que

$$\bigvee_{i=1}^{k} \sigma[Rx_i] = \sigma\big[\sum_{i=1}^{k} Rx_i\big]$$

con lo cual $\sigma[M]$ tiene un subgenerador finitamente generado.

■

Proposición 4.9. *Sea $M \in R - Mod$ un módulo cerrado bajo productos, si M es finitamente generado entonces todas las clases de pretorsión hereditarias M-dominadas en $\sigma[M]$ son compactas.*

Demostración. Sea $\mathcal{T} \in M{-}tosrp$ M-dominada, entonces por el Corolario 4.5 tenemos que $\mathcal{T} = \sigma[M/M^{\mathcal{T}}]$.

Y como M es finitamente generado entonces $M/M^{\mathcal{T}}$ es finitamente generado, por tanto $\mathcal{T}$ es compacto.

■

Observación 4.10. Note que dado M un R-módulo y una colección $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ de clases de pretorsión hereditarias M-dominadas en $\sigma[M]$, para cada $i \in I$ existen R-módulos M-generados N_i, tales que $\mathcal{T}_i = \sigma[N_i]$, entonces la clase

$$\mathcal{T} = \bigvee_{i\in I} T_i = \bigvee_{i\in I} \sigma[N_i] = \sigma[\bigoplus_{i\in I} N_i]$$

es una clase en $\sigma[M]$ M-dominada, pues $\bigoplus_{i\in I} N_i$ es M-generado.

Corolario 4.11. *Si $M \in R - Mod$ es un módulo cerrado bajo productos y finitamente generado entonces no existen cadenas estrictamente ascendentes de clases de pretorsión hereditarias M-dominadas en $\sigma[M]$.*

Demostración. Considere la siguiente cadena ascendente de clases de pretorsión hereditarias M-dominadas en $\sigma[M]$:

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{T}_n \subseteq \ldots$$

entonces por la Observación 4.10, $\mathcal{T} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ es una clase M-dominada y por tanto compacta (Proposición 4.9), de modo que $\mathcal{T} = \bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{T}_{n_i}$ así $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k+j}$ para todo número natural j.

■

Proposición 4.12. *Sea M un R-módulo cerrado bajo productos, finitamente generado, que cumple que M es proyectivo en $\sigma[M]$. Entonces M satisface la condición descendente de cadena en submódulos totalmente invariantes.*

Demostración. Considere una cadena estrictamente descendente de submódulos totalmente invariantes de M:

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_i \supset \ldots$$

entonces por el Lema 2.23 tenemos una cadena estrictamente ascendente de clases de pretorsión hereditarias:

$$\sigma[M/U_1] \subset \sigma[M/U_2] \subset \ldots \subset \sigma[M/U_i] \subset \ldots$$

observe que cada $\sigma[M/U_i]$ es M-dominada, pero M es finitamente generado y por el Corolario 4.11 no hay cadenas estrictamente ascendentes de clases de pretorsión hereditarias M-dominadas, lo cual es una contradicción.

■

Teorema 4.13. *Sea M un R-módulo finitamente generado, cerrado bajo productos, que cumple que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y toda clase de pretorsión hereditaria en $\sigma[M]$ es M-dominada. Entonces M es de longitud finita.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}_M$ la clase de módulos que son localmente de longitud finita en $\sigma[M]$, que por 2.7, es una clase de pretorsión hereditaria en $\sigma[M]$.

Por el Teorema 2.26 M es semiartiniano y entonces $M^{\mathcal{L}_M} \leq M$ también es semiartiniano.

Por otro lado $M - torsp$ es una retícula neteriana, pues M cumple las hipótesis del Corolario 4.11 y además toda clase en $M - torsp$ es M-dominada, por tanto para todo $\mathcal{T} \in M - torsp$ tenemos que $\overline{r_{\mathcal{T}}} = (r_{\mathcal{T}})_\alpha$ para algún $\alpha \in OR$ finito. Así en particular para el M-zoclo: $M^{\mathcal{L}_M} = (zoc_M)_n(M^{\mathcal{L}_M}) = zoc_n(M^{\mathcal{L}_M})$ donde $n \geq 0$, es finito y es la longitud de Loewy de $M^{\mathcal{L}_M}$.

Supongamos que $M^{\mathcal{L}_M} \neq 0$ entonces como la longitud de Loewy de $M^{\mathcal{L}_M}$ es finita, podemos formar la siguiente sucesión:

$$M^{\mathcal{L}_M} \twoheadrightarrow M^{\mathcal{L}_M}/zoc_{n-1}(M^{\mathcal{L}_M}) \twoheadrightarrow S \longrightarrow 0$$

en donde S es un submódulo simple de $M^{\mathcal{L}_M}/zoc_{n-1}(M^{\mathcal{L}_M})$, por tanto existe un submódulo máximo $L \leq M^{\mathcal{L}_M}$. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M^{\mathcal{L}_M}/L \longrightarrow M/L \longrightarrow M/M^{\mathcal{L}_M} \longrightarrow 0$$

y como $M^{\mathcal{L}_M}/L$ es simple entonces es un módulo de longitud finita en $\sigma[M]$ y como M es cerrado bajo productos entonces $M/M^{\mathcal{L}_M} \in \mathcal{L}_M$, de modo que por la última parte de la Proposición 2.7 se concluye que $M/L \in \mathcal{L}_M$ y por tanto $M^{\mathcal{L}_M} \leq L$ lo cual es una contradicción pues L era un submódulo propio de $M^{\mathcal{L}_M}$.

De modo que necesariamente $M^{\mathcal{L}_M} = 0$, es decir, $M = M/M^{\mathcal{L}_M} \in \mathcal{L}_M$, y como M es finitamente generado entonces M es de longitud finita.

■

Este teorema generaliza un resultado de Beachy y Blair [1] que en vez de pedir las hipótesis para un módulo M las pide para el anillo R.

Corolario 4.14. *Son equivalentes para un anillo R:*

(i) ${}_RR$ *es cerrado bajo productos.*

(ii) ${}_RR$ *es artiniano.*

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$ ${}_RR$ es finitamente generado, proyectivo y generador de $R - Mod$, es decir, es un *progenerador* de $R - Mod$ y entonces cumple las hipótesis del Teorema 4.13 y entonces ${}_RR$ tiene longitud finita y por tanto ${}_RR$ es artiniano.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Es una consecuencia inmediata del <teorema 2.8.

■

Teorema 4.15. *Sea R un anillo conmutativo, entonces para un R-módulo M son equivalentes:*

(i) M es cerrado bajo productos.

(ii) M es localmente artiniano.

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $N \leq M$ un submódulo cíclico, entonces $N \cong_R (R/I)$ para algún ideal bilateral I de R. Note que $\sigma[N] = \sigma[{}_R(R/I)]$, es decir, hay una correspondencia entre $\sigma[N]$ y $R/I - Mod$, por tanto N es un progenerador de $\sigma[N]$, y por tanto satisface las condiciones del Teorema 4.13 así N es de longitud finita y por tanto artiniano.

Así todo submódulo finitamente generado K de M es suma finita de cíclicos artinianos y por tanto K es artiniano.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.8.

■

Bibliografía

[1] John A. Beachy, William D. Blair, *Finitely Annihilated Modules and Orders in Artinian Rings*, Communications in Algebra, 6(1), 1-34 (1978).

[2] Ladislav Bican, Tomáš Kepka, Petr Němec, *Rings Modules and Preradicals*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics vol. 75, Marcel Dekker Inc., 1982.

[3] Jonathan S. Golan, Ana M. de Viola-Prioli, Jorge E. Viola-Prioli, *Ducompact filters and prime kernel funtors*, Communications in Algebra, 22(12), 4637-4651 (1994).

[4] Francisco Federico Raggi Cárdenas, José Ríos Montes, et. al., *Basic Preradicals and Main Injective Modules*, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 8, No. 1 (2009) 1–16.

[5] Araceli Reyes Morales, *Acerca de algunas dimensiones en categorías de módulos*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 2011.

[6] Louis Halle Rowen, *Ring Theory, Student Edition*, Academic Press, Inc., (1991).

[7] Bo Stenström, *Rings of Quotients*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 217, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[8] John E. van den Berg, *When every torsion preradical is a torsion radical*, Communications in Algebra, 27(11), 5527-5547 (1999).

[9] John E. van den Berg, James G. Raftery, *Every Algebraic Chain is the Congruence Lattice of a Ring*, Journal of Algebra, 162(1) (1993) 95-106.

[10] John E. van den Berg, James G. Raftery, *On rings (and chain domains) with restricted completeness conditions on topologizing filters*, Communications in Algebra 22(4) (1994) 1103–1113.

[11] John E. van den Berg, Robert Wisbauer, *Modules whose hereditary pretorsion classes are closed under products*, Journal of Pure and Applied Algebra, 209 (2007) 215-221.

[12] Robert Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.