

**“VÓRTICES EN CONDENSADOS POLARITÓNICOS
EN MICROCAVIDADES SEMICONDUCTORAS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIA E INGENIERÍA
DE MATERIALES**

PRESENTA

MILLER TOLEDO SOLANO

TUTOR DR. YURIY RUBO





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a mi madre Zoila.

*Por toda su valentía, fortaleza, sabiduría
y amor incondicional para sus hijos.*

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de estudiar mis estudios de posgrado.

De manera especial al *Dr. Yuriy Rubo* por su disposición y tiempo en todas las asesorías, la revisión del trabajo escrito y demás. Por el financiamiento a través de sus proyectos de investigación, y sobre todo por su amistad y confianza.

A los miembros del comité tutorial, *Dr. Jesús Antonio del Río Portilla* y *Dr. José Fco. Récamier Angelíni* por las sugerencias realizadas durante el desarrollo del trabajo de investigación, así como por la revisión y crítica del manuscrito.

A los miembros que integran el jurado, *Dra. Julia Tagueña Parga*, *Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda*, *Dr. Chumin Wang Chen* y *Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos*, por la revisión y críticas que contribuyeron significativamente a mejorar este trabajo.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) por el apoyo otorgado a través de los proyectos IN107007 y IN112310.

Al Centro de Investigación en Energía (CIE) de la UNAM, por todas las facilidades otorgadas durante mi estadía en él.

Al *Dr. Miguel Robles* por su amistad y por toda su disposición en el apoyo técnico.

A la *Sria. Martha Hernández* por todas sus atenciones desde departamento de termociencias.

Quiero aprovechar la oportunidad para agradecer a mis compañeros y amigos, *Guillermo Barrios*, *José Antonio Castillo*, *Pablo Elías*, *Beatriz de la Mora*, *Alberto Beltran*, *Aldo Figueroa*, *José Nuñez*, *Saúl Delgado*, *Mauricio Escobar* y *Adelfo Espinosa*, por todo el apoyo y la amistad brindada incondicionalmente.

Deseo agradecer a toda mi familia por su cariño y apoyo, muy especialmente a mi padre *Lair Toledo* por todo su amor, sus motivaciones y por enseñarme la generosidad de la tierra. A mis hermanos *Alberto*, *Héctor Octavio*, *José*, *Rubén*, *Normita*, *David*, *Lair* y *Alejandro* a quienes amo, admiro y respeto. A todas mis cuñadas y sobrinos maravillosos.

A mi novia *Suzett Vázquez* por permitirme disfrutar la maravillosa experiencia de compartir mi vida con ella.

Resumen

Actualmente la condensación de Bose-Einstein (CBE) de polaritones se ha observado en microcavidades semiconductoras a temperaturas cercanas a la temperatura ambiente. Los polaritones de la cavidad son “cuasipartículas” producidas cuando fotones de un campo de luz localizados por la cavidad, se acoplan con electrones y huecos, en la forma de excitones, confinados dentro de la misma. De esta manera, los polaritones son parte materia y parte luz que heredan las cualidades de ambos. La observación de la CBE de polaritones en microcavidades semiconductoras proporciona una oportunidad excepcional para observar y estudiar la superfluidez polaritónica, considerada como un resultado de la transición de fase Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT).

Debido a la importancia de entender la superfluidez en materiales, en esta tesis se estudian la estructura y las propiedades de la polarización de los vórtices recientemente observados experimentalmente en los condensados polaritónicos. La disociación vórtice-antivórtice define la temperatura crítica T_{BKT} . En microcavidades con simetría cilíndrica, existen cuatro semi-vórtices (SVs) elementales, $(k, m) = (\pm 1/2, \pm 1/2)$, y se dividen en derechos e izquierdos (vórtices y antivórtices, dependiendo del signo del producto de los números de rotación k y m que definen los cambios en la polarización y en la fase después de rodear sus núcleos), que corresponden a singularidades en la componente circular derecha e izquierda de la función de onda del condensado, respectivamente. En esta simetría, la separación longitudinal-transversal (también conocido como la separación de energía TE-TM) en las bandas polaritónicas proporciona un acoplamiento entre los SVs derechos e izquierdos que de otra forma no interactúan. Además, ésta separación de energía deforma la textura de la polarización de los SVs.

Para microcavidades reales donde la simetría cilíndrica no se conserva, existe una pequeña separación de energía entre polarizaciones ortogonales por lo que la polarización se fija en una dirección preferencial. La fijación de la polarización tiene un efecto pronunciado en la textura de los SVs. Cuando se rodea al núcleo del SV, la polarización queda fija a una dirección en todas partes, excepto en una región estrecha donde rota por $\pm\pi$. Esta región define una cuerda (o solitón) que va desde un SV derecho a uno izquierdo, o a los límites del sistema. La presencia de la cuerda resulta en un incremento de la temperatura de la transición de la superfluidez.

Por otro lado, bajo la influencia de un campo magnético aplicado y en la ausencia de alguna separación de energía en las bandas, el condensado está elípticamente polarizado y hay dos tipos de SVs, profundos y poco profundos, que corresponden a singularidades en las componentes circular mayoritaria y minoritaria de la función de onda del condensado. Los SVs poco profundos desaparecen y los SVs profundos se transforman en vórtices enteros en el condensado circularmente polarizado cuando el campo magnético aplicado excede a un valor crítico.

Publicaciones

Las publicaciones producidas durante este trabajo de investigación fueron:

- 1) *Vortices in exciton-polariton condensates with polarization splitting*, M. Toledo-Solano y Y. G. Rubo, *Journal of Physics: Conference Series*, **210**, 012024, (2010).
- 2) *Comment on “Topological stability of the half-vortices in spinor exciton polariton condensates”*, M. Toledo-Solano y Y. G. Rubo, *Physical Review B*, **82**, 127301, (2010).
- 3) *Half-quantum vortices in exciton polariton condensates in applied magnetic field*, M. Toledo-Solano y Y. G. Rubo, *Superlattices and Microstructures*, doi:10.1016/j.spmi.2010.07.010.

Índice general

Introducción	3
1. Antecedentes	5
1.1. Excitones en semiconductores y en pozos cuánticos	5
1.2. Polaritones en microcavidades semiconductoras	10
1.3. Condensación de Bose-Einstein y superfluidez de polaritones	15
2. Teoría de campo medio	21
2.1. Parámetro de orden y hamiltoniano del sistema polaritónico	22
2.2. Polarización del condensado polaritónico uniforme	27
2.3. Espectro de excitaciones, vórtices y SVs	29
3. Efectos de un campo magnético aplicado	37
3.1. Semi-vórtices en campo magnético externo	37
3.2. Campo de polarización de los SVs	42
3.3. Energía de los SVs bajo un campo magnético	47
3.4. Interacción de vórtices	52
4. Efectos de separación de la polarización	57
4.1. Efectos de la separación TE-TM como perturbación	57
4.2. Efectos de la separación TE-TM: cálculos asintóticos exactos	61
4.3. Efectos de la fijación de la polarización	65
Conclusiones	75
Bibliografía	77

Introducción

La condensación de Bose-Einstein fue predicha en 1924 y generalizó la ley de distribución de fotones de Bose para un gas ideal de bosones no interactuantes [1]. Bajo la estadística de Bose-Einstein, la ocupación del estado base diverge en el límite de temperatura cero produciendo a una población macroscópica en ese estado. Este fenómeno se conoce como la condensación de Bose-Einstein (CBE). En un inicio, no se esperaba que la CBE ocurriera en sistemas reales no ideales debido a las interacciones entre las partículas. Sin embargo, hoy se sabe que ocurre en varias especies de gases atómicos [1], pero ningún análogo se ha establecido en sistemas de estado sólido. El principal problema para observar la CBE en un sistema de estado sólido es alcanzar un sistema en equilibrio para densidades suficientemente altas. Notables esfuerzos se han desarrollado para encontrar un sistema de estado sólido donde la condensación pueda llevarse a cabo [2]. Las microcavidades semiconductoras son altamente prometedoras, debido a que los fotones confinados interactúan fuertemente con excitaciones electrónicas para formar nuevas cuasi-partículas conocidas como polaritones. Los polaritones actúan como un gas de bosones débilmente interactuante con masas extremadamente reducidas del orden de 10^{-4} la masa del electrón libre m_e . Gracias a esto, los polaritones exhiben varias propiedades específicas y juegan un rol importante en un número de efectos muy interesantes incluyendo dispersión estimulada, amplificación paramétrica, condensación y superfluidez polaritónica [2]. El logro de la CBE [3, 4, 5, 6, 7] ha estimulado la búsqueda de una demostración experimental de los efectos de la superfluidez en estos sistemas polaritónicos. Dada la importancia que tienen los vórtices para entender dicha superfluidez, esta tesis explora las propiedades de los vórtices presentes en los condensados polaritónicos [8, 9]. En particular, se estudian las propiedades de los SVs recientemente observados de manera experimental [10] ya que se espera que definan la transición BKT de la superfluidez polaritónica.

Esta tesis se divide en cuatro Capítulos y una sección de conclusiones. En el primer Capítulo se hace una revisión de la literatura respecto a la teoría de los polaritones que forman este nuevo estado de la materia, fluido polaritónico, presente en las microcavidades semiconductoras. Se discuten las evidencias de la CBE de los polaritones. Se muestra la importancia del estudio de los vórtices que se forman en este tipo de condensado (caracterizado por una polarización lineal) para entender la superfluidez

polaritónica.

En el segundo Capítulo se describe el hamiltoniano del condensado polaritónico usado en el marco de trabajo de la ecuación de Gross-Pitaevskii. También se describen las propiedades de polarización y las excitaciones elementales de un condensado uniforme despreciando los efectos del potencial de desorden presente en la microcavidad.

El tercer Capítulo contiene en una mayor profundidad, y originalidad, el estudio de las propiedades de los vórtices presentes en el condensado polaritónico bajo un campo magnético. Se discute la textura de la polarización de los núcleos de SVs. Se muestra que existen dos transiciones de superfluidez tipo Berezinskii-Kosterlitz-Thouless que corresponden a la disociación de los SVs derechos e izquierdos, respectivamente.

El cuarto Capítulo presenta la teoría de la textura¹ de la polarización de los SVs bajo los efectos de la separación de energía TE-TM y bajo los efectos de una pequeña separación de energía entre las dos polarizaciones lineales. El primer caso resulta en el acoplamiento entre SVs derechos e izquierdos que de otra forma no interaccionan. Para el segundo caso, los SVs adquieren cuerdas² que conectan pares de SVs. Una cuerda indica una vecindad estrecha donde la polarización cambia por $\pm\pi$. Los SVs con cuerda pueden ser detectados mediante la observación de una dislocación tipo tenedor en las franjas de interferencia de la luz emitida desde la cavidad en dos polarizaciones circulares. Todos estos resultados son confirmados en los experimentos que han dado la evidencia de los SVs en los condensados polaritónicos [10]. Finalmente, se presenta un resumen de las conclusiones principales de la tesis.

¹La textura se refiere a la manera en la que se entreteje la polarización.

²Una cuerda es un solitón, ver figura 16.1 en [11].

Capítulo 1

Antecedentes

El estudio teórico y experimental de los polaritones ha venido incrementándose en las dos últimas décadas, debido a los avances en las técnicas de crecimiento y control de las heteroestructuras semiconductoras. Este desarrollo experimental ha permitido fabricar microcavidades e insertar en ellas pozos cuánticos, lo cual ha posibilitado el estudio del fuerte acoplamiento entre excitaciones de la materia (excitones) y la luz, evidenciando así la existencia de los polaritones. En este capítulo se presenta una visión general de las motivaciones y teorías sobre el estudio de la física de los polaritones.

1.1. Excitones en semiconductores y en pozos cuánticos

Las frecuencias y polarización de las transiciones ópticas en semiconductores, son gobernadas por las energías y dispersión de las bandas mas cercanas al nivel de Fermi¹, referidas como bandas de conducción BC (arriba del nivel de Fermi) y bandas de valencia BV (debajo del nivel de Fermi). Durante la transición, un electrón salta desde un estado inicial con energía E_i en la banda de valencia, hacia un estado final con energía E_f en la banda de conducción, mediante la absorción de un fotón de energía $\hbar\omega = E_f - E_i$. La excitación del electrón deja al estado inicial desocupado, equivalente a la creación de un hueco en ese estado. La interacción atractiva Coulombiana entre el electrón y el hueco da origen a la formación de excitaciones en el cristal conocidas como excitones. La formación de excitones incrementa la razón de las transiciones ópticas. La imagen más simple de un excitón puede ser concebida como aquella para un átomo de hidrógeno, donde un electrón está ligado a un protón. Los excitones son observados en muchos materiales cristalinos.

¹En semiconductores, el nivel de Fermi está situado dentro de la brecha de energía (“gap”).

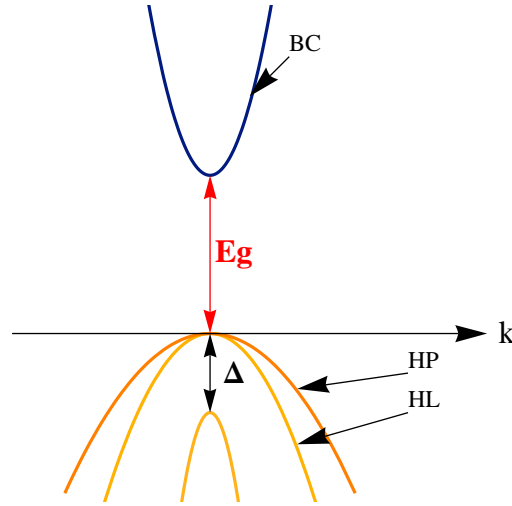


Figura 1.1: Estructura de bandas en un semiconductor tipo zincblenda con una banda de conducción BC, bandas de valencia BV degeneradas de huecos pesados HP y huecos ligeros HL, y la banda de “split-off” SO. E_g es la diferencia de energía entre la BC y las BV degeneradas. Δ es la diferencia de energía entre los estados con momento angular total $j = 3/2$ y $j = 1/2$.

Hay dos tipos básicos de excitones, los excitones Frenkel, también llamados excitones ligados, y los excitones Wannier-Mott, también conocidos como excitones libres. Los excitones Frenkel tienen un radio pequeño comparable al tamaño de la celda unitaria. La energía de enlace de los excitones de Frenkel es típicamente del orden de 100–300 meV. En la actualidad estos excitones son ampliamente discutidos en materiales orgánicos donde dominan la absorción óptica y el espectro de emisión. Por lo contrario, los excitones tipo Wannier-Mott tienen un tamaño típico de decenas de constantes de la red y son estados deslocalizados que pueden moverse libremente a través del cristal. Estos excitones tienen una energía de enlace relativamente pequeña del orden de pocos meV, y son observados en semiconductores como picos de absorción óptica debajo de la absorción fundamental. De ahora en adelante todas las discusiones hechas serán para los excitones Wannier-Mott.

Los excitones en semiconductores tipo zincblenda (como, por ejemplo, GaAs, CdTe, InSb) pueden clasificarse por los momentos del electrón y hueco. En estos semiconductores, la banda de valencia en el centro de la primera zona de Brillouin se divide en tres subbandas llamadas banda de huecos pesados (HP), banda de huecos ligeros (HL) y banda de “split-off” (SO) [ver figura 1.1]. En $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ las bandas de huecos pesados y ligeros son degeneradas en los cristales tridimensionales (“bulk”), aunque esta degeneración puede eliminarse por tensión o campos externos.

La banda de conducción y las bandas de valencia que se muestran en la figura 1.1, describen los niveles para átomos aislados que forman al cristal. En este sentido, la

banda de conducción se origina de los orbitales atómicos tipo s mientras que las tres bandas de valencia se originan desde los tres orbitales tipo p , p_x , p_y y p_z . Las funciones de Bloch correspondientes son $u_c = S$ para la banda de conducción, la cual tiene simetría esférica, y $u_x \sim x f_p(r)$, $u_y \sim y f_p(r)$ y $u_z \sim z f_p(r)$ para las bandas de valencia, donde $f_p(r)$ es la función radial asociada a los orbitales p y es la misma para las tres expresiones.

Al considerar los estados de espín hacia arriba \uparrow ($s = 1/2$) y los estados de espín hacia abajo \downarrow ($s = -1/2$), las amplitudes de Bloch del electrón en la banda de conducción se pueden escribir como

$$u_{c,1/2} = S \uparrow, \quad u_{c,-1/2} = S \downarrow. \quad (1.1)$$

Las amplitudes de Bloch del electrón en la banda de valencia $u_{v,j,m}$ se construyen a través de la combinación lineal de las seis funciones de Bloch $u_\alpha \uparrow$ y $u_\alpha \downarrow$ con $\alpha = x, y, z$. Las funciones $u_{v,j,m}$ son las funciones propias del momento angular total \mathbf{J} , donde j es el momento angular total y m es la proyección del momento angular a lo largo del eje \hat{z} . El momento angular total \mathbf{J} es resultado de la adición del momento angular orbital \mathbf{L} y el espín \mathbf{S} . Las funciones $u_{v,j,m}$ se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_{v,3/2,3/2} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (u_x + iu_y) \uparrow, & u_{v,3/2,-3/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_x - iu_y) \downarrow \\ u_{v,3/2,1/2} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} [(u_x + iu_y) \downarrow - 2u_z \uparrow], & u_{v,3/2,-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(u_x - iu_y) \uparrow + 2u_z \downarrow] \\ u_{v,1/2,1/2} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} [(u_x + iu_y) \downarrow + u_z \uparrow], & u_{v,1/2,-1/2} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} [(u_x - iu_y) \uparrow - u_z \downarrow]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

En la representación de huecos y electrones, en lugar de la proyección m del momento angular a lo largo del eje \hat{z} para el electrón en la banda de valencia, ahora se escribe $m_h = -m$ para el hueco, es decir, si antes de la transición el estado de espín para el electrón es m , después de la transición aparece el hueco con momento $-m$. Los estados de momento angular total $j = 3/2$ son 4 veces degenerados, y los estados con $j = 1/2$ son 2 veces degenerado. Para el momento angular total $j = 3/2$, los estados con $m_h = \pm 3/2$ se conocen como estados de huecos pesados (HP) y estados con $m_h = \pm 1/2$ como estados de huecos ligeros (HL), respectivamente.

Con el progreso en la tecnología del crecido de heteroestructuras cristalinas, principalmente mediante las técnicas de haces moleculares epitaxiales y epitaxia por fase gaseosa, se motivó el estudio de excitones en sistemas confinados incluyendo, pozos cuánticos, alambres y puntos cuánticos. La idea principal detrás del desarrollo de las

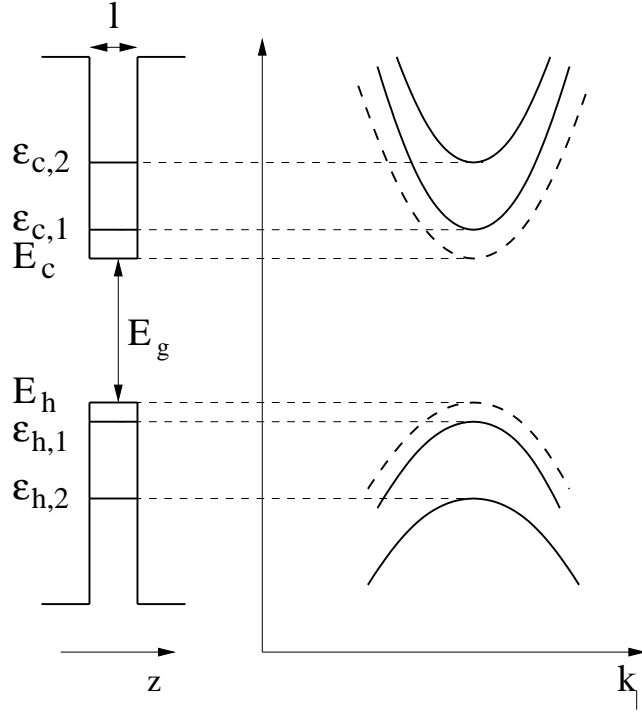


Figura 1.2: Diagrama esquemático de bandas y relaciones de dispersión en un pozo cuántico. Relaciones de dispersión parabólicas se muestran para ambas bandas de conducción y de valencia. $\varepsilon_{c,v}$ indica los niveles de energía dentro de pozo para electrones en la banda de conducción y huecos en la banda de valencia, respectivamente. La línea discontinua muestra la relación de dispersión en el interior del cristal.

heteroestructuras fue la creación de barreras y pozos de potencial para electrones y huecos, mediante la combinación de diferentes materiales semiconductores. Un pozo cuántico se forma de una capa delgada de un semiconductor que tiene una brecha más estrecha que las dos capas de materiales que lo encierran. En esta tesis vamos a considerar que el pozo cuántico es una heteroestructura tipo I² donde el confinamiento de electrones y huecos ocurre en la misma capa de material.

El espectro de energía en un pozo cuántico (PC) es diferente del espectro en el interior del cristal, ya que los movimientos de los electrones y huecos están confinados en la dirección perpendicular al plano del PC, la cual estará definida en la dirección del eje \hat{z} a lo largo de esta tesis (figura 1.2). La degeneración entre HL y HP se elimina en $\mathbf{k}_{||} = 0$. La banda de HP está más cerca de la banda de conducción que la banda

²La heteroestructura se forma de varias capas delgadas de diferentes tipos de semiconductores y tiene una brecha de energía que varía con la posición. En la heteroestructura tipo I, dos semiconductores encierran a otro de brecha de energía menor creándose una trampa de potencial para ambos electrones y huecos.

HL, con una masa ligera en el plano de $m_{HP}^* = m_e/(\gamma_1 - \gamma_2)$, donde γ_1 y γ_2 son los parámetros de Luttinger [12] cerca de $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$.

El efecto más importante del confinamiento cuántico se manifiesta en las transiciones ópticas de excitones en PC comparadas con el interior del cristal. El electrón y el hueco en el excitón forman un dipolo que interacciona con el campo electromagnético de la luz. En esta aproximación el término de interacción \bar{V} se escribe como

$$\bar{V} \propto \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (1.3)$$

donde $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ y \mathbf{A} es el potencial vectorial. De esta manera, los elementos matriciales interbandas $\bar{V}_{v,j,m_h;c,s}$ entre los estados de valencia (1.2) y de conducción (1.1) para las transiciones posibles en los casos de HP y HL son,

$$\begin{aligned} |\bar{V}_{HP,\mp 3/2;c,\pm 1/2}|^2 &\propto |e_x \pm ie_y|^2, \\ |\bar{V}_{HP,\pm 3/2;c,\pm 1/2}|^2 &\propto 0, \\ |\bar{V}_{HL,\mp 1/2;c,\pm 1/2}|^2 &\propto \frac{4}{3}|e_z|^2, \\ |\bar{V}_{HL,\pm 1/2;c,\pm 1/2}|^2 &\propto \frac{1}{3}|e_x \mp ie_y|^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

todos con el mismo coeficiente de proporcionalidad y en donde e_i son las proyecciones del vector de polarización de la onda. Estos resultados indican que la transición óptica permitida desde un HP a la banda de conducción es tres veces mayor que la probabilidad de transición desde un HL, cuando se ilumina al semiconductor con luz circularmente polarizada. Cuando el fotón es absorbido para excitar un excitón con los espines del electrón y hueco denotado como (s, m_h) , la polarización de la luz gobierna la regla de selección para el elemento de matriz de la transición. Esta regla toma la forma de la conservación del momento angular a lo largo del eje \hat{z} y se escribe como

$$s + m_h = m_f, \quad (1.5)$$

donde m_f toma valores de ± 1 para polarizaciones $\sigma\pm$, es decir, luz propagándose a lo largo del eje \hat{z} con polarización circular derecha e izquierda, respectivamente. Por otro lado, m_f toma el valor de cero para luz propagándose normal al eje \hat{z} con el vector eléctrico a lo largo de la dirección z . Estados excitónicos con $(s + m_h) = \pm 2$ se dicen ópticamente inactivos ya que no pueden crearse por la absorción de un simple fotón, mientras que los estados con $(s + m_h) = \pm 1$ son ópticamente activos.

Un parámetro que caracteriza el acoplamiento del excitón en un pozo cuántico con un fotón, es la fuerza del oscilador excitón f_{ex} . En el modelo simple [13], la función de onda del excitón es aproximada por el producto de la función envolvente $\chi_{c,v}(z)$ y la función de onda del excitón en el plano $\phi(r_e - r_h)$. De esta manera la fuerza del oscilador está dado como

$$f_{ex} = \frac{2}{m_e E_g} |\bar{V}_{v,j,m_h;c,s}|^2 \left| \int dz \chi_c(z) \chi_v(z) \right|^2 |\phi(0)|^2, \quad (1.6)$$

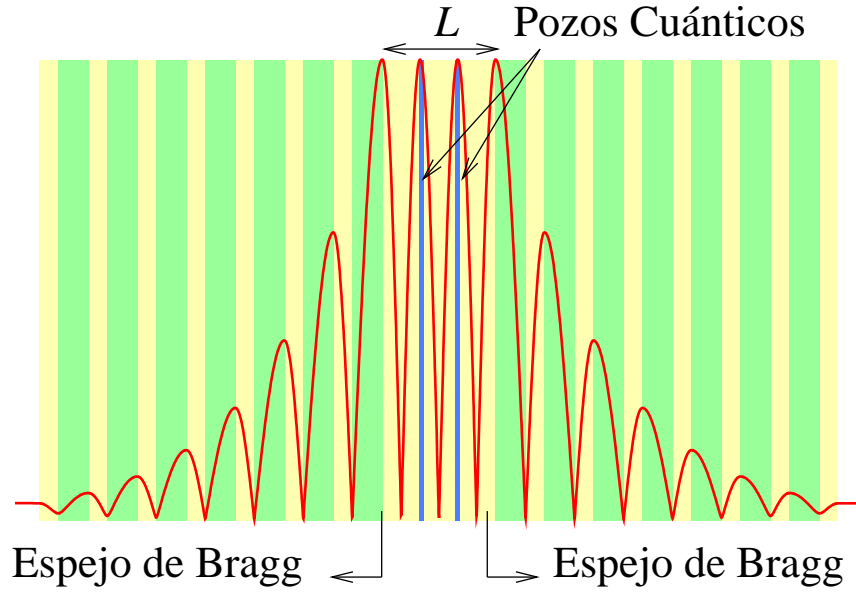


Figura 1.3: Una estructura típica de microcavidad. La cavidad central tiene un espesor L igual a un número entero de media longitud de onda del modo de luz resonante. Pozos cuánticos son colocados en los antinodos del modo para proporcionar un acoplamiento más fuerte a la luz. Estos se muestran como líneas sólidas en la región activa.

donde $\bar{V}_{v,j,m_h;c,s}$ está dado por (1.4) y E_g es la brecha de energía entre las bandas. El efecto de la dependencia en este parámetro será discutido más adelante.

1.2. Polaritones en microcavidades semiconductoras

El rápido avance en la tecnología del crecimiento de cristales en el siglo pasado permitió realizar microestructuras cristalinas, con propiedades ópticas novedosas y controlables. Las microcavidades semiconductoras son materiales artificiales relativamente nuevos, crecidos mediante epitaxia de haces moleculares. Estos materiales han atraído la atención en los últimos años, ya que proporcionan un método para mejorar y controlar la interacción entre la luz y la materia. Las microcavidades semiconductoras son cavidades tipo Fabry-Perot entre dos espejos de Bragg y que pueden contener pozos cuánticos embebidos dentro de la región de activa [ver figura 1.3]. Un espejo de Bragg es una estructura periódica compuesta de dos semiconductores o materiales dieléctricos con índices de refracción diferentes. Cuando el espesor del pozo cuántico es comparable al radio de Bohr de un excitón, los estados excitónicos están cuantizados en la dirección de crecimiento, pero con la existencia de un continuo de vectores de onda en el plano de

la cavidad. Por otro lado, la cavidad lleva a la cuantización de los estados de los fotones en la dirección de crecimiento, pero, al igual que los estados excitónicos, los estados fotónicos en el plano no son afectados por la cavidad. La dispersión de los fotones de la cavidad se ve modificada fuertemente en relación a los fotones libres y se aproxima (en la región de pequeños vectores de onda) a una forma parabólica, caracterizada por una masa muy pequeña en el plano y que conduce a un número de propiedades, como las que se discuten abajo. Efectos muy interesantes fueron observados en el espectro de reflexión de una microcavidad, cuando existía una resonancia entre la frecuencia del excitón y la del fotón de la cavidad [14]. Cuando la magnitud del acoplamiento entre el excitón y el fotón es superior a la razón de escape de fotones y a la razón de decaimiento de los excitones, se producen dos nuevos estados propios del sistema que tienen energías diferentes a los estados de fotón y excitón solos. Éstos dos nuevos modos están asociados con partículas mezcladas de luz y materia llamados excitón-polaritones o polaritones [2].

El polaritón es visto como una cadena de procesos donde el excitón decae, emitiendo un fotón con la misma energía E y momento \mathbf{k} , el cual es reabsorbido por el medio, creando un nuevo excitón con los mismos valores de E y \mathbf{k} , y así sucesivamente hasta que la excitación se encuentra fuera de la cavidad (resultando en la aniquilación del polaritón), o el electrón o el hueco es dispersado. El hamiltoniano, en la imagen de la segunda cuantización, que describe al sistema interactuante de fotones y excitones se escribe como [2]

$$\begin{aligned}\hat{H}_{pol} &= \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{esc} + \hat{H}_I \\ &= \sum_{\mathbf{k}} E_C(\mathbf{k}) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} E_X(\mathbf{k}) \hat{X}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{X}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega (\hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{X}_{\mathbf{k}} + \hat{X}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}}),\end{aligned}\quad (1.7)$$

donde \hat{B} es el operador de aniquilación de un fotón y \hat{X} su contraparte excitónica. La cavidad de ancho L proporciona la relación de dispersión $E_C(\mathbf{k})$ para el fotón [2],

$$E_C(\mathbf{k}) = (\hbar c/n) \sqrt{k_{\parallel}^2 + (2\pi N/L)^2}, \quad (1.8)$$

donde \hbar es la constante de Planck, c la velocidad de la luz, n el índice de refracción de la cavidad, k_{\parallel} el vector de onda en el plano de la cavidad y N es el número de modos transversales en la cavidad. Para la situación en la figura 1.3, $N = 3$. Para pequeños k_{\parallel} , la energía puede ser escrita como

$$E_C(\mathbf{k}) \approx \hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{fo}}, \quad m_{fo} = \frac{nh}{cL}, \quad (1.9)$$

donde m_{fo} es la masa efectiva del fotón del orden de $10^{-4} - 10^{-5}$ veces la masa del electrón libre. La energía del excitón en el PC se escribe como

$$E_X(\mathbf{k}) = E_0 + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2M_{ex}}, \quad (1.10)$$

donde M_{exc} es la masa efectiva reducida del electrón y el hueco en el plano del PC, $E_0 = E_g + \varepsilon_c + \varepsilon_v$ y donde $\varepsilon_{c,v}$ indican los niveles de energía dentro del PC para electrones y huecos, respectivamente. La energía de la interacción dipolar excitón-fotón $\hbar\Omega$ está dada como [15]

$$\hbar\Omega \approx \hbar \left(\frac{2\pi e^2 c N_p f_{ex}}{n_c L_{efec}} \right)^2, \quad (1.11)$$

donde f_{ex} es la fuerza del oscilador excitón (1.6), N_p el número de pozos cuánticos en la cavidad, n_c el índice de refracción de cavidad, y L_{efec} la longitud efectiva de la cavidad debido a la penetración del modo de la cavidad sobre los espejos de Bragg.

El hamiltoniano (1.7) puede ser diagonalizado por la transformación

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^I = x_{\mathbf{k}} \hat{X}_{\mathbf{k}} - c_{\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}}, \quad (1.12)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^S = c_{\mathbf{k}} \hat{X}_{\mathbf{k}} + x_{\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}}, \quad (1.13)$$

donde $c_{\mathbf{k}}$ y $x_{\mathbf{k}}$ son conocidos como los coeficientes de Hopfield [16] y satisfacen $|x_{\mathbf{k}}|^2 + |c_{\mathbf{k}}|^2 = 1$, de tal manera que la transformación es canónica y los operadores \hat{a} obedecen un álgebra bosónica. Entonces el hamiltoniano (1.7) se reduce a términos libres únicamente

$$H_{pol} = \sum_{\mathbf{k}} E_S(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{S\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^S + \sum_{\mathbf{k}} E_I(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{I\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^I, \quad (1.14)$$

para las bandas superior e inferior de polaritones con los operadores de aniquilación \hat{a}^S y \hat{a}^I , respectivamente. Ya que ambos excitones y fotones son bosones, así lo son los polaritones. La relación de dispersión para las bandas es

$$E_{S,I}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[E_X(\mathbf{k}) + E_C(\mathbf{k}) \pm \sqrt{4\hbar^2\Omega^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \right], \quad (1.15)$$

donde el signo $+$ se asocia los polaritones de la banda superior (PS) y el signo $-$ se asocia a los polaritones de la banda inferior (PI). $\Delta_{\mathbf{k}}$ es la diferencia de energía entre el modo de la cavidad y el excitón, $\Delta_{\mathbf{k}} = E_C(\mathbf{k}) - E_X(\mathbf{k})$. Las fracciones de excitón y fotón para PI (y viceversa para PS) están dados por las amplitudes cuadradas de los coeficientes de Hopfield

$$|c_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{E_S(\mathbf{k})E_X(\mathbf{k}) - E_I(\mathbf{k})E_C(\mathbf{k})}{(E_C(\mathbf{k}) + E_X(\mathbf{k}))\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\hbar^2\Omega^2}}, \quad (1.16)$$

$$|x_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{E_S(\mathbf{k})E_C(\mathbf{k}) - E_I(\mathbf{k})E_X(\mathbf{k})}{(E_C(\mathbf{k}) + E_X(\mathbf{k}))\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\hbar^2\Omega^2}}. \quad (1.17)$$

En $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$, $|x_{\mathbf{k}}|^2 = |c_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2}$, los LP y los UP son exactamente mitad fotón y mitad excitón, y sus energías tienen una separación mínima de $2\hbar\Omega$, también conocida como

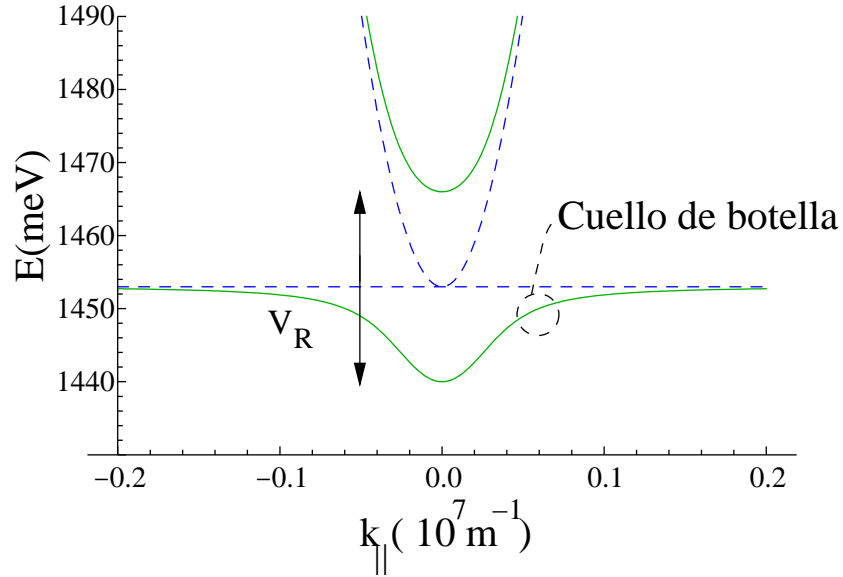


Figura 1.4: Relación de dispersión de los fotones y excitones desacoplados (líneas discontinuas), y la de los polaritones de la cavidad en el régimen de fuerte acoplamiento en líneas sólidas, que corresponden a los polaritones en la banda superior y a los polaritones en la banda inferior, respectivamente. El fotón de la cavidad y el excitón del pozo cuántico están en resonancia en $k_{||} = 0$. La región de cuello de botella se explica en el texto.

separación de Rabi V_R (“*Rabi splitting*”), representando dos veces la magnitud del acoplamiento entre excitones y fotones [ver figura 1.4].

La existencia de tales modos acoplados en las microcavidades fueron demostrados experimentalmente por Weisbuch [14] *et al.* en 1992. Houdré [18] *et al.* mostraron que la forma de las curvas de dispersión de los polaritones dependía fuertemente de la diferencia δ (“*detuning*”) entre la energía del modo fotónico de la cavidad $\hbar\omega_0$ y la del modo excitónico E_0 en el vector de onda $k_{||} = 0$. El vector de onda en plano $k_{||}$ está relacionado al ángulo de incidencia φ de la luz que ilumina la estructura por la relación

$$k_{||} = \frac{\omega}{c} \sin\varphi. \quad (1.18)$$

Al medir el ángulo de la resonancia en los espectros de reflexión o de transmisión de la microcavidad, se puede obtener la verdadera relación de dispersión de los polaritones.

El anticruzamiento (“*avoided crossing*”) de los modos polaritónicos, es resultado de la interacción excitón-fotón. Como ya hemos mencionado los polaritones son los modos del sistema, mientras que los modos de excitón y fotón son estados transitorios, al intercambiar energía con la frecuencia de Rabi Ω . En esta imagen sencilla del anticruzamiento, sin embargo, no tomaremos en cuenta que los fotones y excitones tienen un tiempo de vida finito en la microcavidad. Para hacer esto más preciso, se toma en

cuenta el ensanchamiento de las ramas del excitón y fotón, γ_X y γ_C , respectivamente. γ_X es causado por las interacciones excitónicas, mientras que γ_C indica la reflectividad finita de la cavidad. En $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$, la ecuación (1.15) viene a escribirse como

$$E_{S,I}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[E_X(\mathbf{k}) + E_C(\mathbf{k}) - i\gamma_X - i\gamma_C \pm \sqrt{4\hbar^2\Omega^2 - (\gamma_X - \gamma_C)^2} \right]. \quad (1.19)$$

Esta expresión depende crucialmente del signo del término dentro de la raíz, demostrando que el comportamiento físico del sistema depende de la interrelación entre la magnitud del acoplamiento excitón-fotón y la disipación. Si $\hbar\Omega > (\gamma_X - \gamma_C)$, $E_{S,I}$ exhibe la separación de energía ya mencionada, la separación de Rabi, que corresponde al régimen de acoplamiento fuerte, donde las correlaciones entre el excitón y fotón son importantes y su interacción no puede ser tratada como una perturbación. Las descripciones de las propiedades ópticas lineales del fuerte acoplamiento han sido propuestas independientemente en las referencias [15, 17]. Si $\hbar\Omega < |\gamma_X - \gamma_C|$, el resultado de la raíz cuadrada resulta imaginario y el anticruzamiento desaparece. Este es el régimen de acoplamiento débil donde el sistema puede ser descrito en términos de una interacción débil entre el excitón y el fotón.

En cavidades reales la masa efectiva de los polaritones en la banda inferior, que puede deducirse de la parte central de su relación de dispersión, es del orden de 10^{-4} la masa del electrón libre [2]. Una consecuencia de la presencia de la componente fotónica en los polaritones, es su corto tiempo de vida, del rango de picosegundos. Por otro lado, la presencia de la componente excitónica hace que interacciones posibles de polaritón-fonón y polaritón-polaritón sean eficientes [2]. Como resultado los polaritones actúan como un gas de bosones débilmente interactuante en contacto con un reservorio térmico. Gracias a esto, los polaritones exhiben varias propiedades específicas y juegan un papel importante en un número de efectos muy interesantes incluyendo dispersión estimulada, amplificación paramétrica, condensación y superfluidez [2].

En la actualidad, diversos grupos de investigación en todo el mundo están trabajando en la fabricación, espectroscopía óptica, teoría y aplicaciones de microcavidades. El avance en este campo interdisciplinario entre la óptica de semiconductores y la fotónica es extremadamente rápida. Desde un punto de vista práctico, las microcavidades semiconductoras parecen ser un sistema muy adecuado para la realización de una nueva generación de dispositivos optoelectrónicos, polaritónicos, incluyendo láseres polaritónicos, interruptores ópticos, etc. Un trabajo reciente muestra la fabricación de un diodo-microcavidad emisor de luz polaritónico basado en GaAs, operando a longitudes de onda cerca del infrarrojo a temperatura ambiente [19].

1.3. Condensación de Bose-Einstein y superfluidez de polaritones

La hipótesis para la posibilidad de la CBE de polaritones comenzó con Imamoglu *et al.* [20], en 1996, quienes propusieron usar el carácter bosónico de los polaritones para la construcción de un condensado polaritónico que debería emitir luz coherente espontáneamente. Aquí y en lo que sigue, por emisión de luz por polaritones se indica el escape de luz desde la cavidad debido a la probabilidad finita de tunelear los espejos de Bragg. La idea de Imamoglu fue crear una distribución de polaritones por bombeo óptico. La relajación de esta distribución vía su interacción con fonones acústicos era considerada capaz de proporcionar una acumulación eficiente de polaritones al estado base.

Sin embargo, un número de peculiaridades de los polaritones de la cavidad, principalmente su forma de dispersión inusual, no se tomó en cuenta en el modelo propuesto, lo cual, por lo tanto, omite mucho de la física de las microcavidades reales. Tassone *et al.* [21] desmostron teóricamente poco tiempo después a la predicción de Imamoglu que los fonones acústicos no pueden proporcionar una relajación eficiente de polaritones hacia el estado base, debido a la parte central inclinada de la relación de dispersión llamada cuello de botella [ver figura 1.4], donde su pendiente excede a la velocidad del sonido. La región de cuello de botella se origina por una competencia entre los fonones acústicos que asisten a la relajación de los polaritones y la razón de incremento de escape de los polaritones de la cavidad debido a sus características fotónicas con la disminución de $k_{||}$. Sin embargo, una dependencia cuadrática de la emisión sobre la potencia de bombeo no resonante fue observada experimentalmente en microcavidades tipo II-VI [22] y III-V [23]. Esto fue una prueba de que otros mecanismos de relajación permitían a una parte de los polaritones atravesar la región de cuello de botella. La propuesta principal de estos mecanismos adicionales fue la dispersión polaritón-polaritón [24].

Entre el 2000 y 2002 una serie de trabajos [25, 26, 27, 28, 29] reportaron la observación experimental de la dispersión estimulada de polaritones hacia el estado base. Todo esto, junto con el subsecuente entendimiento de la dinámica de espín de estos procesos [30], incrementó el interés sobre el efecto bosónico en microcavidades. A finales del 2002, un incremento en la coherencia de la luz emitida desde el estado base polaritónico contra la intensidad de bombeo no resonante, en una microcavidad basada en GaAs que contenía 12 pozos cuánticos, fue reportado [31]. Esta evidencia se obtuvo de la observación de un comportamiento no lineal de la intensidad de emisión I en el umbral de la potencia de bombeo, la relación de dispersión de los polaritones, y la disminución del tiempo de relajación hacia el estado base. La dependencia de I sobre la potencia de bombeo reveló un incremento lineal cerca del umbral [ver figura 1.5], lo cual indicaba el inicio de la dispersión estimulada polaritón-polaritón hacia el estado

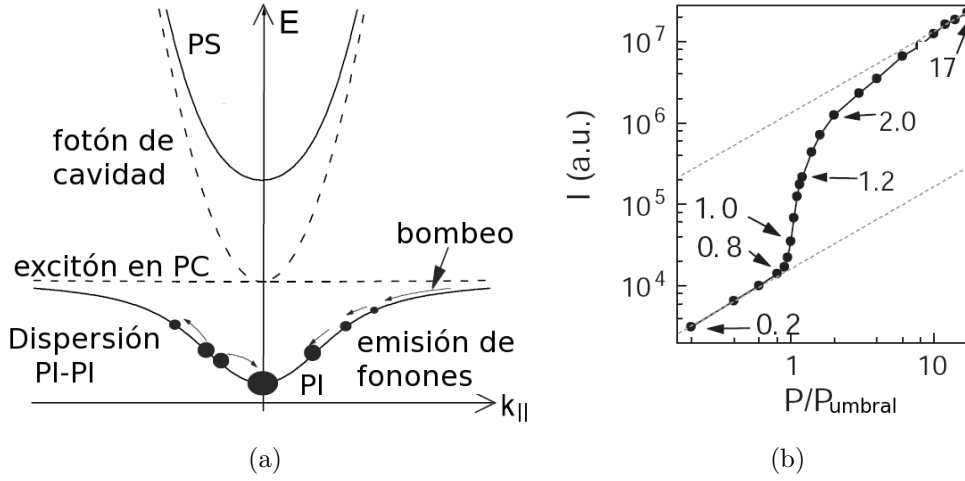


Figura 1.5: De [31]. (a) Relaciones de dispersión de excitones en pozos cuánticos, fotón de la cavidad, polaritones en la banda superior (PS) y en la banda inferior (PI). El fotón de la cavidad y el excitón del pozo cuántico están en resonancia en $\mathbf{k} = 0$. Los dos mecanismos de relajación, emisión de fonones y dispersión polaritón-polaritón también son mostrados. (b) Emisión de polaritones en la banda inferior contra la intensidad de bombeo normalizada. $P_{umbra} \approx 300 \text{ W/cm}^2$.

$k_{||} = 0$ en la banda inferior. Sin embargo, en este trabajo, no se hizo ninguna medición de la polarización o de la coherencia espacial.

Como se sabe, un sistema bidimensional infinito nunca tiene un verdadero orden de largo alcance [32]. Sin embargo, debido al tamaño finito del punto de excitación, el tamaño de la nube polaritónica es finita, y se puede alcanzar coherencia completa a través de la nube en temperaturas suficientemente bajas y ocupación macroscópica de un estado cuántico único. Los polaritones presentan fuertes interacciones aun en densidades bajas [33, 34], además tienen un tiempo de vida finita y deben ser bombeados desde el exterior para compensar las pérdidas de polaritones que decaen, por lo que un sistema polaritónico realista está siempre fuera del equilibrio. No obstante, las principales predicciones para la CBE como la condensación en el estado base de una población en equilibrio térmico y el desarrollo de la coherencia cuántica, indicado por la coherencia espacial de largo alcance, fueron recientemente obtenidas [3, 4, 5, 6, 7] las que han dado las evidencias de la CBE de polaritones en microcavidades cuánticas.

La microcavidad en [3] contenía 16 pozos cuánticos con una separación de Rabi de 26 meV. La energía de excitación estaba por arriba de la energía del estado base para asegurar que los polaritones inicialmente inyectados al sistema fueran incoherentes, condición necesaria para la demostración del CBE. En este trabajo se observó que al incrementar la intensidad de bombeo, la distribución de polaritones en el espacio recíproco se localizaba en el punto $k_{||} = 0$, por lo que la luz emitida por la microcavidad se generaba en un estado cuántico único, tal como se muestra en la figura 1.6.

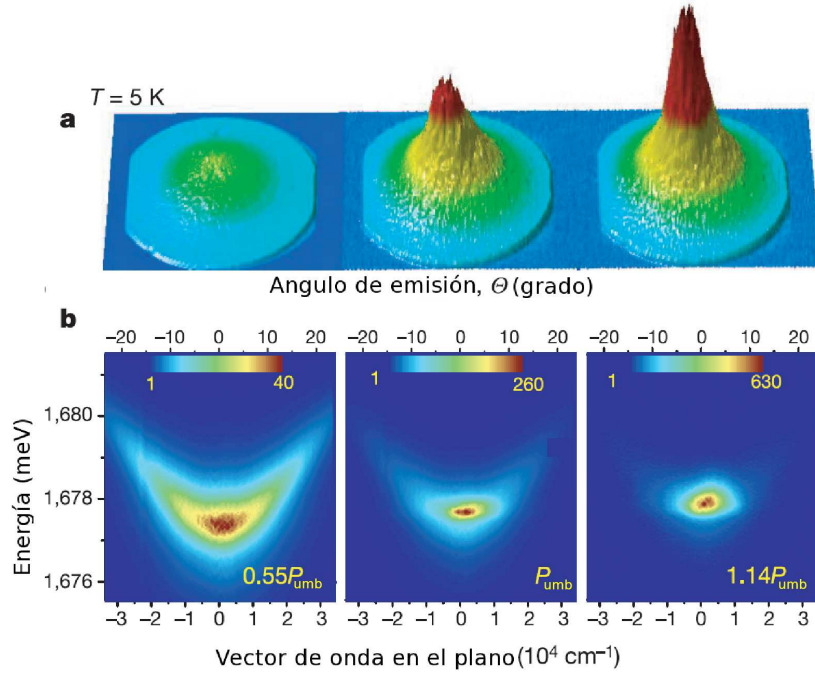


Figura 1.6: De [3]. Emisión de campo lejano en tres intensidades de excitación, donde $P_{umb} = 1.67 \text{ kW/cm}^2$ es la potencia umbral para la condensación. En (a) se muestra la intensidad de la emisión en el eje vertical dentro de un cono angular de $\pm 23^\circ$. En (b) se muestra lo mismo que en (a) pero resuelto en energía. Un pequeño corrimiento al azul de alrededor de 0.5 meV se observa para el estado base, como indicación de que la microcavidad está en el régimen de acoplamiento fuerte.

Del patrón de emisión de campo lejano se obtuvo la ocupación del estado base, así como su energía de emisión y su ancho de línea como función de la potencia de excitación [ver figura 1.7]. Con el incremento de la potencia de excitación, la ocupación del estado base se incrementa primero linealmente y de manera exponencial inmediatamente después de la potencia umbral. La temperatura efectiva del sistema polaritónico $T_{efec} = 19 \text{ K}$ fue estimada en la potencia umbral. La ocupación es cercana a la unidad en el umbral, consistente con el proceso de relajación estimulada de los polaritones por la población en el estado base, característica específica de los bosones. El notable estrechamiento espectral indica que, arriba de la potencia de estimulación umbral, el tiempo de coherencia de la población polaritónica en el estado base es más largo que el tiempo de vida polaritónico [5]. El corrimiento al azul se atribuye a la renormalización de la energía inducida por la interacción entre polaritones.

Los experimentos en las referencias [3, 4] mostraron además que la luz emitida desde el estado base es linealmente polarizada, lo cual está en excelente concordancia con las

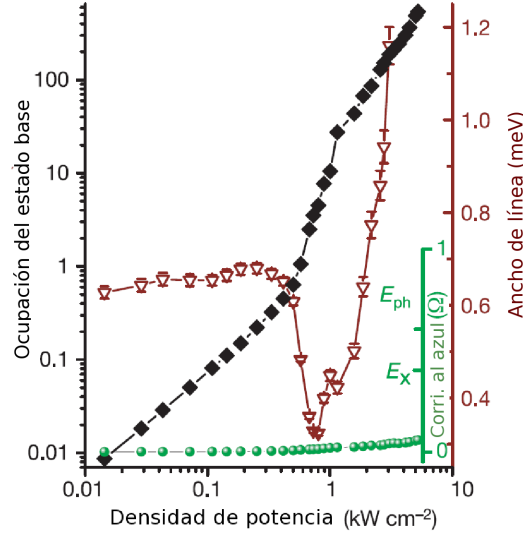


Figura 1.7: De [3]. Ocupación del estado base (cuadro negros), su corrimiento al azul (círculos verdes) y ancho de línea (triángulos rojos) como función de la potencia de excitación. Para densidades bajas, la ocupación se incrementa linealmente y después del umbral se incrementa exponencialmente antes de convertirse de nuevo lineal. Cerca del umbral, el ancho de línea del estado base disminuye debido a un incremento de la coherencia polaritónica, más aumenta debido a la interacción entre los polaritones en el condensado.

predicciones teóricas [35]. La formación de la polarización lineal fue explicada en [36] donde se muestra que el estado energéticamente preferente del condensado polaritónico superfluido es linealmente polarizado debido a que minimiza la densidad de energía libre del sistema. El trabajo [37] muestra que la dirección de la polarización lineal sobre un eje cristalino en particular se debe a la existencia de una separación (“*splitting*”) de energía en la dispersión de los polaritones. Esta energía resulta de la anisotropía óptica de la cavidad. Los experimentos en [3] también revelan esta separación de energía.

A pesar de que el efecto de la CBE de polaritones ha sido observado, todavía faltan cosas por entender desde un punto de vista teórico. Principalmente los aspectos desconocidos están relacionados con el hecho de que el sistema polaritónico está en la mayoría de los casos fuera del equilibrio térmico y que los polaritones tienen un tiempo de vida finito sujetos a un potencial de desorden. Otra diferencia importante con los sistemas bosónicos ordinarios es que los polaritones están caracterizados por su polarización (o su pseudo-espín) y como resultado, el parámetro de orden consiste de dos funciones complejas. La formación de una polarización espontánea del condensado polaritónico, no solamente sirve como huella digital de la CBE, sino también puede ser controlada y aprovechada en dispositivos de memoria óptica.

El ejemplo más antiguo de la CBE es la fase superfluida conocida como He II en

el líquido de ^4He por debajo de una temperatura crítica [38]. Este efecto fue interpretado [39] como una manifestación de la CBE de una fracción macroscópica de átomos de helio, a pesar de que este líquido de interacción fuerte está lejos del gas ideal de Einstein. Trabajos adicionales mostraron que el comportamiento superfluido podría ser descrito por una relación de dispersión lineal para momentos pequeños [40], y que un gas de Bose débilmente interactuante se ajustaba a tal ley de dispersión [41]. Estos trabajos fueron la base del modelo de la superfluidez en He II.

El logro de la CBE de polaritones proporciona una oportunidad excepcional para observar y estudiar la superfluidez polaritónica en un ambiente controlado, tal como lo muestran los experimentos en [42]. La posibilidad de la superfluidez de polaritones en microcavidades semiconductoras es comúnmente considerada como un resultado de la transición de fase Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) [44] (como se menciona abajo) en un líquido polaritónico bidimensional. La temperatura crítica T_{BKT} es inversamente proporcional a la masa de la partícula [45], por lo que la superfluidez de polaritones se espera que aparezca incluso a temperatura ambiente en algunas microcavidades [46].

La superfluidez como se sabe, es una propiedad profundamente asociada a la CBE y a primera vista parece que una no puede existir sin la otra. Pero esto no es exactamente cierto. La CBE indica la aparición de una fase homogénea en el espacio directo. Esta homogeneidad implica superfluidez. Las partículas pueden moverse a través del espacio con una fase coherente, sin disipación. La superfluidez indica que estadísticamente dos puntos en el espacio están conectados por una trayectoria de fase coherente, aun si el espacio entero no está cubierto por una función de fase coherente. Por lo que un estado superfluido puede existir sin la existencia estricta de la CBE. Esto es el tipo de estado que se origina en dos dimensiones donde estrictamente la CBE está prohibida.

Las dificultades para que aparezca la superfluidez provienen de la localización de polaritones por imperfecciones de la estructura. Dichas localizaciones en bajas densidades previenen la propagación de un superfluido. En un reciente artículo de Carusotto y Ciuti [47], se sugiere una descripción de la superfluidez polaritónica a través de la ecuación Gross-Pitaevskii modificada. Aun cuando dicho estudio es un paso importante hacia el entendimiento de la superfluidez de polaritones, el modelo desprecia la polarización de polaritones y la separación de los modos longitudinal-transversal. Se ha mostrado que estos últimos son extremadamente importantes para el entendimiento de la dinámica de polaritones interactuantes [48].

Dada a la importancia para entender la superfluidez polaritónica, se deben estudiar los vórtices en CBE de polaritones. Los vórtices desempeñan un papel importante en diversos fenómenos físicos, tanto a nivel macroscópico como microscópico. Si bien la formación de vórtices es muy importante para la descripción de los diferentes efectos en la mecánica de fluidos, en particular, en la aerodinámica y el movimiento de flujo turbulento, la comprensión de las propiedades de los vórtices cuantizados es crucial para la descripción de varias transiciones de fase en materia condensada.

Los ejemplos bien conocidos son las transiciones de fase en superconductores de tipo II en campos magnéticos aplicados, que se relacionan con la la formación y la fusión de redes de vórtices [49]. Es de suma importancia entender la estructura y las propiedades de la polarización de los vórtices en CBE de polaritones, ya que la disociación vórtice-antivórtice define la temperatura crítica T_{BKT} de la transición de fase BKT, y además, los vórtices son objetos topológicamente estables y pueden ser usados como memorias ópticas de larga vida. En un trabajo reciente [8] se logró la clasificación de los vórtices presentes en un condensado polaritónico. Este trabajo muestra que los vórtices en el condensado polaritónico en las microcavidades semiconductoras aplanadas están caracterizados por dos cargas topológicas (k, m) . Los vórtices producen rotación de la fase y de la polarización lineal del campo eléctrico del condensado. Las cargas pueden ser tanto enteras como semienteras simultáneamente. Los cuatro SVs, $(1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(1/2, -1/2)$ y $(-1/2, 1/2)$ tienen las energías más bajas. Estos SVs se separan en dos subsistemas, SVs derechos (con $km > 0$) y SVs izquierdos (con $km < 0$). Estos subsistemas son desacoplados y ambos están sujetos a las transiciones de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless independientemente.

Por otro lado, cuando la polarización del condensado no se fija en alguna dirección cristalográfica, los vórtices elementales son SVs caracterizados por cambios simultáneos en los ángulos de polarización y fase de $\pm\pi$ [8]. Para una selección fuerte de la polarización del condensado, solamente la fase puede cambiar por un número entero de 2π . Vórtices de fase entera han sido observados recientemente [9] y sugieren el efecto de la superfluidez polaritónica. Las propiedades de los SVs para el caso de una preparación débil de la polarización, debe ser estudiada para obtener información de la transición a la superfluidez.

En el siguiente capítulo se introduce el hamiltoniano del condensado polaritónico usado en el marco de trabajo de la ecuación de Gross-Pitaevskii usada a lo largo de esta tesis.

Capítulo 2

Teoría de campo medio para condensados polaritónicos

La búsqueda para la CBE de polaritones comenzó a finales de 1990 cuando la estimulación bosónica en la relajación de energía y la dispersión de polaritones fue observada experimentalmente bajo excitación resonante [27] y no resonante [50]. El argumento teórico en favor de la CBE de polaritones es su masa efectiva muy ligera, pero por otro lado, su tiempo de vida extramadamente corto, típicamente del orden de 1 ps, es el mayor obstáculo para alcanzar una población completamente termalizada. La característica esencial del condensado polaritónico es su naturaleza fuera del equilibrio. Los polaritones deben ser excitados en la microcavidad usando una fuente externa, ya sea por bombeo óptico o por una corriente eléctrica [19]. Además, los polaritones excitados no se quedan en la microcavidad para siempre, sino que escapan de ésta debido a la probabilidad finita de atravesar los espejos de Bragg. No obstante, se puede esperar que bajo excitación cw, con una intensidad por arriba de la condensación umbral, el sistema polaritónico alcance un equilibrio cuasi-térmico. El flujo de polaritones a través de los espejos de Bragg, se balancea por la llegada de los polaritones desde el bombeo incoherente, y este balance establece un potencial químico μ , para el sistema polaritónico.

Para equilibrio cuasi-térmico es necesario que el tiempo de vida de los polaritones sea suficientemente grande en el condensado, comparada con el tiempo de vida radiativo $\tau = \Gamma^{-1}$. La tasa de escape Γ debería ser comparada con la tasa de entrada W que define el número de polaritones entrando al condensado a partir de un reservorio incoherentemente excitado. El umbral para la condensación polaritónica está definido por la condición $W = \Gamma$ [51, 52]. Por arriba del umbral, donde $W \gg \Gamma$, el condensado se establece en equilibrio cuasi-térmico. Otra manera para alcanzar un equilibrio cuasi-térmico es considerar una temperatura y un rango de la diferencia δ (“*detuning*”) donde el tiempo de termalización espontánea de las partículas sea mucho mas corta que

su tiempo de vida. Este régimen puede lograrse experimentalmente para temperaturas suficientemente altas para la red y δ positivos. La ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), válida para el caso de un gas de bosones muy diluidos en temperatura cero [53], ha proporcionado una buena descripción de muchas propiedades estáticas y dinámicas de CBE diluidos a bajas temperaturas. En este capítulo se introduce la GP del condensado polaritónico y se discute el espectro de las excitaciones del condensado, incluyendo los vórtices.

2.1. Parámetro de orden y hamiltoniano del sistema polaritónico

Una propiedad importante de los polaritones es su (pseudo)espín \mathbf{S} , la cual está directamente conectada con la polarización de la luz absorbida o emitida por la microcavidad. Los polaritones heredan su pseudoespín desde el espín de un excitón en el pozo cuántico y del fotón de la cavidad. Los estados excitónicos tienen proyecciones de espín ± 1 y ± 2 sobre el eje de la estructura. Los estados con ± 1 forman el doblete polaritónico ópticamente activo, y pueden ser creados por luz polarizada circularmente, mientras que con luz polarizada linealmente se excita una combinación lineal con proyección de espín total igual a cero sobre el eje de la estructura. De esta manera, los polaritones son cuasi-partículas con dos proyecciones de espín [arriba (abajo) correspondiendo a polarización circular derecha (izquierda) de la luz emitida]. Por lo tanto, el parámetro de orden del condensado de polaritones $\boldsymbol{\psi}$ posee dos componentes, cada uno asociado con la funciones de onda complejas de los estados de espín arriba y abajo, respectivamente. El parámetro de orden $\boldsymbol{\psi}$ es un vector bidimensional complejo y define la dirección y fase de la componente del campo eléctrico en el plano de la microcavidad. El parámetro de orden del condensado puede escribirse como

$$\boldsymbol{\psi} = \{\psi_x, \psi_y\}, \quad (2.1)$$

donde ψ_x y ψ_y son funciones complejas de la posición y del tiempo, y describen las proyecciones de la polarización del condensado sobre los dos ejes correspondientes al plano de la cavidad. En microcavidades bombeadas por debajo del umbral, $|\boldsymbol{\psi}| = 0$, mientras que arriba del umbral, $\boldsymbol{\psi}$ se construye debido a la dispersión estimulada de los polaritones desde estados excitados al condensado [54], y sus fluctuaciones espaciales y temporales son pequeñas y pueden ser despreciadas [55].

La conservación del espín en la foto-absorción permite la orientación de los espines de los excitones por la luz polarizada, efecto que ha sido ampliamente estudiado. Como el espín de un polaritón define la polarización de los fotones emitidos, el análisis de los espectros de fotoluminiscencia polarizada de la microcavidad es una herramienta

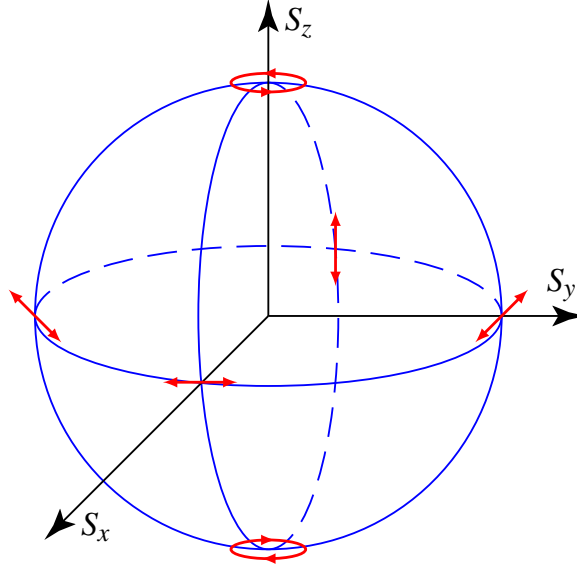


Figura 2.1: Representación tridimensional de la esfera de Poincaré. La dirección del vector pseudoespín $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}$ representa la polarización del estado con vector de onda \mathbf{k} . Si $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}$ se encuentra en el ecuador, correspondera a una polarización lineal mientras que si apunta a uno de los polos, correspondera a luz con polarización circular.

poderosa para la investigación experimental de la dinámica de espín de los polaritones [30, 56].

En óptica clásica, el pseudoespín \mathbf{S} corresponde al vector de Stokes para la luz parcialmente polarizada. Generalmente, se asocia a los estados que tienen S_z definida con los estados polaritónicos radiativos para quienes su proyección de momento angular sobre el eje de la estructura es ± 1 . Estos estados emiten luz circularmente polarizada a la derecha e izquierda, respectivamente. Sus combinaciones lineales corresponden a estados propios de S_x y S_y produciendo la emisión de luz linealmente polarizada. Si el estado emite con la dirección del pseudoespín paralela al eje \hat{x} la luz emitida será polarizada horizontalmente, mientras que la emisión desde el estado con la dirección opuesta del pseudoespín, lo hará con luz polarizada verticalmente. Los estados con el pseudoespín a lo largo del eje \hat{y} emiten luz diagonalmente polarizada. De esta manera, el estado de polarización se puede expresar en una base ortogonal y su proyección en un espacio tridimensional, conocido como esfera de Poincaré [ver figura 2.1]. Los puntos sobre la esfera del pseudoespín corresponden al caso general de luz con polarización elíptica.

Las componentes del vector pseudoespín \mathbf{S} se definen entonces en función del parámetro

de orden como

$$\begin{aligned} S_x &= (1/2)(|\psi_x|^2 - |\psi_y|^2), \\ S_y &= (1/2)(\psi_x\psi_y^* + \psi_x^*\psi_y), \\ S_z &= (i/2)(\psi_x\psi_y^* - \psi_x^*\psi_y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

De esta forma, es claro que existe una relación de estas componentes

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2 = (n/2)^2, \quad (2.3)$$

donde

$$n = (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^*) = |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2, \quad (2.4)$$

es el número de ocupación del condensado.

El grado de polarización absoluta del condensado P está ligado con los grados de polarización lineal P_l , diagonal P_d , y circular P_c ,

$$P = \sqrt{P_l^2 + P_d^2 + P_c^2}, \quad (2.5)$$

$$P_l = 2S_x/n, \quad P_d = 2S_y/n, \quad P_c = 2S_z/n. \quad (2.6)$$

La forma general del hamiltoniano polaritónico en términos del pseudoespín se escribe como

$$H = \mathfrak{T} - 2\boldsymbol{\Omega}_{ef} \cdot \mathbf{S}, \quad (2.7)$$

donde \mathfrak{T} es la energía cinética y $\boldsymbol{\Omega}_{ef}$ es un campo magnético efectivo de varios orígenes [2], y mezcla las diferentes componentes de polarización. Enseguida consideramos dos orígenes para este campo magnético y sus efectos sobre la polarización del condensado.

En pozos cuánticos con simetría cilíndrica y microcavidades en el régimen lineal, este campo efectivo es proporcionado por la separación longitudinal-transversal, lo cuál es la separación TE-TM de los modos ópticos para la estructura plana. El valor absoluto de esta separación crece, desde cero en $k_{||} = 0$, como una función que sigue una ley de raíz cuadrada en valores grandes de $k_{||}$ [57]. En microcavidades, la separación TE-TM de los estados polaritónicos se amplifica debido al acoplamiento del excitón con el fotón de la cavidad, esto es también la separación entre las polarizaciones de TE y TM de la luz [58]. La separación TE-TM puede estimarse como

$$\Omega_{ef} = |c_k|^2\Omega_{ex} + |x_k|^2\Omega_{fo}, \quad (2.8)$$

donde c_k y x_k son los coeficientes de Hopfield, Ω_{ex} y Ω_{fo} son las separaciones correspondientes para el excitón [59] y para fotón de la cavidad [58], respectivamente. El campo magnético efectivo Ω_{ef} entonces depende de la diferencia δ como se muestra en [56].

Con respecto a la configuración del campo eléctrico en el plano de la cavidad, definida por el vector bidimensional $\boldsymbol{\psi}$, y el vector de onda \mathbf{k} , los modos TE y TM son transversal y longitudinal, respectivamente. De esta manera la energía cinética \mathfrak{T} del condensado se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &= \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j=x,y} \left\{ \frac{1}{m_t} (\nabla_i \psi_j^*) (\nabla_i \psi_j) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) (\nabla_i \psi_i^*) (\nabla_i \psi_i) \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j=x,y} \left\{ \frac{1}{m_t} (\nabla_i \psi_j^*) (\nabla_i \psi_j) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) |\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}|^2 \right\},\end{aligned}\quad (2.9)$$

donde m_t y m_l son las masas efetivas transversal(TE) y longitudinal (TM). Aquí nos enfocaremos a la banda inferior de polaritones, donde uno puede considerar ya sea $m_l < m_t$ o $m_l > m_t$. Esta interrelación depende de la diferencia δ del modo de luz de la microcavidad desde el centro de la brecha para el espejo de Bragg [58]. Dado que $\boldsymbol{\nabla} \rightarrow i\mathbf{k}$, en el caso de $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ y los modos son puramente transversales (TE). En el caso de $\mathbf{k} \parallel \boldsymbol{\psi}$ los modos son puramente longitudinales (TM).

Otro campo magnético efectivo adicional que puede aparecer en el sistema, se debe a la debilidad en el plano de las tensiones uniaxiales, las cuales dan como resultado una birrefringencia ligera del medio de la cavidad, una separación de energía $2\Omega_x$ entre polarizaciones ortogonales x y y [3, 37, 60],

$$\Omega_x = -\frac{\Delta n_c}{n_c} \omega_c, \quad (2.10)$$

donde Δn_c es la diferencia en los índices de refracción en las direcciones x y y , y ω_c es la frecuencia del modo de luz resonante en la cavidad. Contrariamente al campo magnético efectivo proporcionado por la separación TE-TM, el campo magnético efectivo originado por la anisotropía óptica de la cavidad tiene una dirección fija independientemente del vector de onda de polarización (generalmente, orientado a lo largo de uno de los ejes del cristal). Además, ésta no es cero en $k_{\parallel} = 0$. Esto tiene como resultado la selección de la polarización lineal del condensado polaritónico en una dirección específica [37, 60, 61]. Otra separación de energía que también puede presentarse en los estados polaritónicos en $k_{\parallel} = 0$, se debe cuando el condensado está bajo un campo magnético aplicado perpendicularmente al plano de la cavidad ($\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{z}}$). Esta es la separación de Zeeman $2\Omega_z = g\mu_B$ entre las dos componentes polarizadas circularmente de la función de onda polaritónica, donde μ es el magnetón de Bohr y g es el factor de Landé. Como resultado, la contribución de esta separación de energía \mathfrak{H}_{sep} al condensado se escribe como

$$\mathfrak{H}_{sep} = -2(\Omega_z S_z + \Omega_x S_x) = -i\Omega_z(\psi_x \psi_y^* - \psi_x^* \psi_y) - \Omega_x(|\psi_x|^2 - |\psi_y|^2). \quad (2.11)$$

Ambos efectos de separación de energía en el condensado, originados por la polarización TE-TM y por la anisotropía óptica de la cavidad, tienen efectos muy pronunciados en

la textura de la polarización de los vórtices presentes en el condensado polaritónico. Tales efectos son considerados en detalle en el capítulo 4 de esta tesis.

La temperatura para la CBE de polaritones en equilibrio térmico puede ser estimada desde el modelo Berezinskii-Kosterlitz-Thouless y por la fórmula de Landau para la ocupación de los estados excitados. La temperatura crítica se incrementa con la intensidad de bombeo. Su máximo corresponde a la más alta intensidad de bombeo donde el régimen de acoplamiento fuerte en la microcavidad se mantiene. Uno puede esperar que la CBE en equilibrio de los polaritones tome lugar en varias decenas de grados Kelvin en las mejores microcavidades basadas en Ga-As, arriba de 200 K en microcavidades basadas en CdTe y a temperatura ambiente en microcavidades basadas en GAN o ZnO.

Sin embargo, la temperatura efectiva del sistema polaritónico, T^* , puede diferir de la temperatura de la red a causa de las diferentes interacciones polaritón-fonón y polaritón-polaritón. El enfriamiento del condensado polaritónico debido a la dispersión polaritón-polaritón y al subsecuente decaimiento no radiativo de los polaritones de más alta energía es posible, en principio. De hecho la misma tasa de entrada W define la temperatura del condensado, $T^* \propto W$. La temperatura efectiva proporcionada es todavía mucho más pequeña que la temperatura de condensación o transición superfluida, y el condensado polaritónico puede ser descrito en el marco de trabajo de la ecuación GP en equilibrio. A continuación se describen las propiedades de polarización y las excitaciones elementales de un condensado uniforme despreciando los efectos del potencial de desorden presente en la microcavidad.

La ecuación de GP en el cuasi-equilibrio se puede escribir generalmente como

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad (2.12)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema polaritónico expresado como un funcional del parámetro de orden $\psi(\mathbf{r}, t)$,

$$H = \int d^2r \{ \mathfrak{T} - \mu n + \mathfrak{H}_{int} + \mathfrak{T}_{sep} \}. \quad (2.13)$$

donde \mathfrak{T} es la energía cinética del condensado, μ el potencial químico, \mathfrak{H}_{int} la energía de interacción entre polaritones y \mathfrak{T}_{sep} la separación de energía en las bandas polaritónicas.

El hamiltoniano (2.13) describe los polaritones cerca de la parte más baja de las banda inferior de polaritones y desprecia la no-parabolicidad de la dispersión. Esto implica que las energías típicas de un condensado polaritónico, en particular, el potencial químico μ pueda ser medido por el corrimiento al azul de la línea de emisión del condensado, y las energías de las excitaciones elementarias se consideren mucho más pequeñas que la separación de Rabi.

El término de la interacción polaritón-polaritón en el integrando (2.13) se escribe

como [36]

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{int} &= \frac{1}{2}U_0(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi})^2 - \frac{1}{2}U_1|\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(U_0 - U_1)(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi})^2 + \frac{U_1}{2}|\boldsymbol{\psi}^* \times \boldsymbol{\psi}|^2,\end{aligned}\tag{2.14}$$

y es descrito por dos invariantes cuárticos que pueden ser contruidos desde un vector bidimensional complejo. Las constantes de interacción, U_0 y U_1 , pueden ser relacionadas a los elementos matriciales de la interacción de dos polaritones con la misma polarización circular $M_{\uparrow\uparrow}$ y con polarizaciones circulares opuestas $M_{\uparrow\downarrow}$. A saber, $U_0 = AM_{\uparrow\uparrow}$ y $U_1 = A(M_{\uparrow\uparrow} - M_{\uparrow\downarrow})/2$, donde A es el área de normalización (área del punto de excitación) [62]. Parece que hay un consenso de que polaritones con la misma misma polarización circular presentan una interacción repulsiva y aún cuando distintos tratamientos producen diferentes elementos $M_{\uparrow\uparrow}$, el valor de $6|x|^2E_Ba_B^2$ se utiliza con recurrencia [63], aquí E_B y a_B son la energía de enlace y el radio de Bohr del excitón, respectivamente, y x es la fracción excitónica en cada polaritón en la banda más baja. Las predicciones para la interacción de polaritones con polarizaciones circulares opuestas $M_{\uparrow\downarrow}$ son más diversas, van desde cero a la interacción atractiva de la misma magnitud que polaritones con el mismo estado de polarización [62, 64].

Cuando $M_{\uparrow\downarrow} = 0$, es decir, cuando la interacción de dos polaritones con polarizaciones circulares opuestas desaparece, $U_1 = U_0/2$. En el caso de débil atracción se tiene $U_0/2 < U_1 < U_0$. Los valores $U_0 = 2.4 \times 10^{-18}\text{eV m}^2$ y $U_1 = 0.55U_0$ se escogen preferentemente en [36].

2.2. Polarización del condensado polaritónico uniforme

El mínimo de la densidad de energía libre del sistema polaritónico se busca con el parámetro de orden $\boldsymbol{\psi}$ espacialmente uniforme e independiente del tiempo. En este caso, la densidad hamiltoniana toma la forma

$$\frac{H_{uni}}{A} = -\mu(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{2}(U_0 - U_1)(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi})^2 + \frac{U_1}{2}|\boldsymbol{\psi}^* \times \boldsymbol{\psi}|^2 + \mathfrak{H}_{sep}.\tag{2.15}$$

Para obtener una densidad finita de condensado polaritónico es necesario tener términos de interacción definidos positivos. De otra manera el condensado se colapsaría. En esta tesis, se consideraran los dos caso de estabilidad encontradas: $U_0 > 0$ y $U_1 < U_0$. Las regiones donde el condensado se encuentra estable y en donde se colapsa se muestran en la figura 2.2.

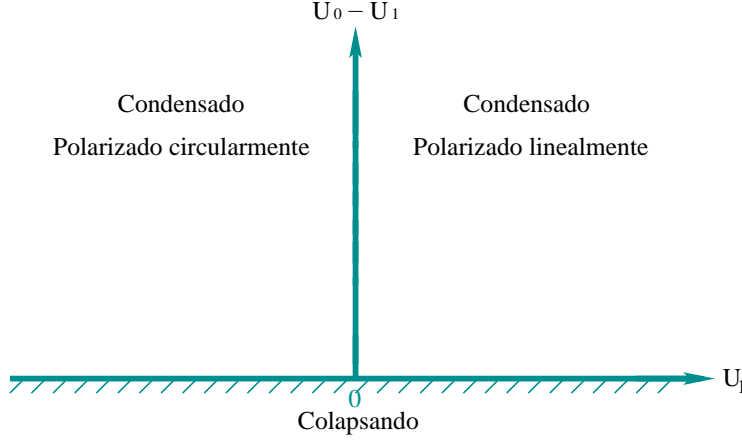


Figura 2.2: Se muestran los límites donde el sistema polaritónico se encuentra en regiones estables y en donde se colapsa en el caso de una separación de energía $\mathfrak{T}_{sep} = 0$. Cuando $U_1 > 0$ el condensado se encuentra lineal polarizado, mientras que cuando $U_1 < 0$ el condensado se encuentra circularmente polarizado. Cuando $U_1 = 0$ la polarización del condensado puede ser arbitraria ya que la energía es independiente de la polarización.

Cuando no se considera la separación de energía \mathfrak{H}_{sep} , es decir, cuando $\mathfrak{H}_{sep} = 0$, la polarización del condensado polaritónico está determinada por las interacciones polaritón-polaritón. El término U_0 en (2.15) no depende de la polarización. De hecho el término U_1 en (2.15), es quien define la polarización del sistema polaritónico. Para $U_1 > 0$ la energía se minimiza para una polarización lineal, es decir, cuando $|\boldsymbol{\psi}^* \times \boldsymbol{\psi}| = 2S_z = 0$. Este efecto puede ser entendido debido a la asignación de $+1$ ó -1 al pseudoespín de cada polaritón, lo cual corresponde a polarización circular derecha o izquierda, respectivamente. Los polaritones con el mismo pseudoespín se repelen uno con otro, mientras que existe una atracción débil entre los polaritones con pseudoespines opuestos. Como resultado, la energía de interacción del sistema polaritónico se minimiza cuando igual número de polaritones polarizados circularmente a la derecha e izquierda están presentes. La densidad hamiltoniana (2.15) entonces se escribe como

$$\frac{H_{uni}}{A} = -\mu n + \frac{1}{2}(U_0 - U_1)n^2, \quad (2.16)$$

dado que $n = (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^*)$. El potencial químico se obtiene por la minimización de la densidad hamiltoniana (2.16) sobre n , lo cual produce

$$\mu = (U_0 - U_1)n. \quad (2.17)$$

En el caso contrario de valores negativos de U_1 , el mínimo de la energía se alcanza cuando este término se anula, esto es para la polarización circular que implica $\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$.

El potencial químico es entonces $\mu = U_0 n$. La formación de la polarización lineal observada en el condensado [3, 4, 37] implica que $U_1 > 0$. En esos experimentos la dirección de la polarización lineal se orienta a una dirección cristalográfica específica debido a una separación de energía entre las polarizaciones lineales del condensado.

Por otro lado en $U_1 > 0$, en microcavidades perfectamente isotrópicas, es decir, con la separación de energía $\Omega_x = 0$, pero en la presencia de un campo magnético débil aplicado en la dirección z , la densidad hamiltoniana (2.15) se escribe como

$$\frac{H_{uni}}{A} = -\mu n + \frac{1}{2}(U_0 - U_1)n^2 + 2U_1 S_z^2 - 2\Omega_z S_z, \quad (2.18)$$

que minimizando con respecto al pseudoespín S_z conduce a

$$S_z = \frac{\Omega_z}{2U_1}. \quad (2.19)$$

En este caso, de la ecuación (2.6), el grado de polarización circular con la cual el condensado emite es

$$P_c = 2S_z/n = \frac{\Omega_z}{nU_1}. \quad (2.20)$$

De esta manera en el campo crítico

$$\Omega_c = nU_1, \quad (2.21)$$

el condensado es completamente polarizado circularmente, es decir, $S_z = \frac{1}{2}n$ y $P_c = 1$. El valor del campo magnético crítico B_c puede estimarse desde (2.21)

$$g\mu_B B_c/2 = nU_1 \sim 1\text{meV}. \quad (2.22)$$

Para una densidad del número de polaritones en el condensado $n \sim 10^{11}\text{cm}^{-2}$ [31], el campo magnético $B_c \sim 1\text{T}$.

En el régimen subcrítico $|\Omega_z| \leq \Omega_c$, el campo magnético únicamente cambia el grado de polarización y el condensado emite luz polarizada elípticamente. En este caso, el potencial químico aún está determinado por (2.17) y la separación Zeeman es completamente suprimida, tal como se muestra más adelante, por la interacción polaritón-polaritón [67]. En el régimen supercrítico $|\Omega_z| > \Omega_c$, el condensado queda circularmente polarizado y la separación Zeeman reaparece. En este caso el potencial químico exhibe un corrimiento al rojo, $\mu = U_0 n - |\Omega_z|$.

2.3. Espectro de excitaciones, vórtices y SVs

Las excitaciones elementales del condensado en cuasi-equilibrio pueden ser analizadas en términos del espectro de Bogoliubov [68]. Esto puede hacerse considerando

una pequeña perturbación del estado base del sistema polaritónico cerca de su valor medio constante \sqrt{n} ,

$$\psi = \sqrt{n}\mathbf{e} + \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{B}^*e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.23)$$

donde \mathbf{e} es el vector complejo unitario, $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = 1$ que define la polarización del estado base. \mathbf{A} y \mathbf{B} son amplitudes complejas consideradas pequeñas. Al sustituir esta expresión de ψ en la ecuación (2.12), linealizando, y separando términos con diferentes funciones exponenciales complejas, es posible obtener un sistema de dos ecuaciones lineales, complejas y homogéneas, que definen la dispersión de las excitaciones elementales del condensado y su polarización [36, 67]. Para un condensado polarizado linealmente ($U_1 > 0$), las soluciones a estas dos ecuaciones muestran que la frecuencia de las cuasi-partículas satisfacen la relación de dispersión

$$\omega^4 - [\omega_l^2 + \omega_t^2 + 2(u_0 - u_1)\omega_+ + 2u_1\omega_-]\omega^2 + [\omega_l\omega_t + 2(u_0 - u_1)\omega_-][\omega_l\omega_t + 2u_1\omega_+] = 0, \quad (2.24)$$

donde

$$\omega_{\pm} = [\omega_l + \omega_t \pm (\omega_l - \omega_t) \cos(2\varphi)]/2, \quad (2.25)$$

$$u_0 = \frac{U_0 n}{\hbar}, \quad u_1 = \frac{U_1 n}{\hbar}, \quad \omega_{l(t)} = \frac{\hbar k^2}{2m_{l(t)}}, \quad (2.26)$$

con φ el ángulo entre la polarización del condensado \mathbf{e} y el vector de onda \mathbf{k} . En la región de pequeños vectores de onda, donde $\omega_{l,t} \ll \min(u_0 - u_1), u_1$, las soluciones de (2.24) dan dos ramas tipo ondas de sonido del espectro de excitaciones. Estas dos ramas son anisotrópicas y están definidas por

$$\omega^2 \simeq 2(u_0 - u_1)\omega_+ \quad \omega^2 \simeq 2u_1\omega_-. \quad (2.27)$$

Ambas ramas son tipo Bogoliubov, con la frecuencia $\omega \propto |\mathbf{k}|$ en la región de pequeños vectores de onda. La anisotropía del espectro desaparece si se desprecia la separación TE-TM en la relación de dispersión de los polaritones [ver figura 2.3(a)].

Las dos ramas del espectro de excitaciones pueden ser caracterizadas por la velocidad del sonido en longitudes de onda larga

$$v = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=0}. \quad (2.28)$$

En el límite $m_l = m_t = m^*$, ambas ramas poseen polarizaciones bien definidas. En el caso cuando $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{e}$, una rama es co-polarizada con el condensado y tiene una velocidad de sonido

$$v_0 = [(U_0 - U_1)n/m^*]^{1/2}. \quad (2.29)$$

Cuando $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \perp \mathbf{e}$ la otra rama está polarizada perpendicularmente con el condensado y tiene una velocidad de sonido

$$v_1 = [U_1 n/m^*]^{1/2}. \quad (2.30)$$

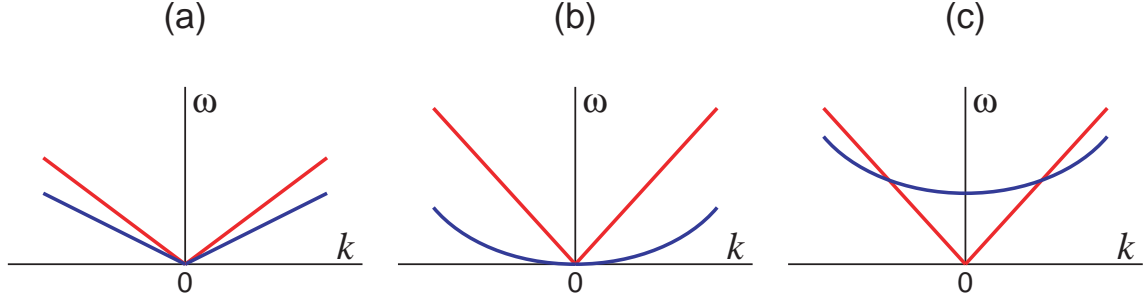


Figura 2.3: De [65]. Ramas de dispersión permitidas para las excitaciones elementales del condensado polaritónico. a) Las ramas de dispersión son tipo Bogoliubov, con la frecuencia $\omega \propto |\mathbf{k}|$, cuando el condensado está linealmente polarizado ($U_1 > 0$). b) Cuando $U_1 = 0$ una de las ramas viene a ser parabólica. c) Hay una brecha entre las ramas cuando el condensado viene a ser circularmente polarizado $U_1 < 0$. Las consecuencias para los diferentes casos son discutidos en el texto.

En el caso de $U_1 = 0$, la velocidad de sonido de una rama es cero, por lo que esta rama viene a ser parabólica en $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ [ver figura 2.3(b)]. En la ausencia del dicroísmo lineal-circular, la temperatura de transición se espera que cambie a $T = 0K$. En el caso cuando $U_1 < 0$, donde el condensado se forma con polarización circular ya sea σ^+ o σ^- , el estado está caracterizado por $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^2 = 0$. El espectro de excitaciones es como el que se muestra en la figura 2.3(c)]. Si se desprecia la separación TE-TM, las partículas que tienen la misma polarización como el condensado, con $A \propto \mathbf{e}$ y $B \propto \mathbf{e}^*$, son tipo Bogoliubov,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2u_0\omega_0, \quad \omega_0 = \hbar k^2/2m^*. \quad (2.31)$$

Las partículas con polarización circular opuesta al del condensado, con $A \propto \mathbf{e}^*$ y $B \propto \mathbf{e}$, presentan una brecha en su espectro de excitación

$$\omega = 2|u_1| + \omega_0. \quad (2.32)$$

Esta brecha se debe a un campo magnético efectivo creado por el condensado mismo que actúa sobre estas cuasi-partículas.

En el caso cuando un campo magnético es aplicado perpendicularmente al plano de la cavidad en el régimen subcrítico, es decir, cuando $|\Omega_z| < \Omega_c = U_1 n$ donde $U_1 > 0$, el espectro de las excitaciones es como el que se muestra en la figura 2.3(a), con dos ramas de Bogoliubov. El campo magnético cambia la polarización del condensado a polarización elíptica, y las cuasi-partículas también sufren este cambio de polarización, de tal manera, que ni coincide ni es ortogonal a la polarización del condensado. Las dos ramas tipo Bogoliubov ω_{\pm} del espectro de excitaciones, cuando se desprecia la separación TE-TM, obtenidas son [67]:

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0 n U_{\pm}, \quad (2.33)$$

$$U_{\pm} = \frac{1}{2} \left(U_0 \pm \left[(U_0 - 2U_1)^2 + 4U_1(U_0 - U_1) \frac{\Omega_z^2}{\Omega_c^2} \right]^{1/2} \right). \quad (2.34)$$

Como se puede observar estas dos ramas comienzan en el mismo punto $k = 0$, así que el efecto Zeeman resulta completamente suprimido en esta situación. Las dos ramas tienen velocidades que cambian fuertemente con el campo magnético aplicado, y se escriben como

$$v_{\pm}^2 = (nU_{\pm}/m^*)^{1/2}. \quad (2.35)$$

En el campo magnético crítico, $|\Omega_z| = \Omega_c$, la velocidad de sonido $v_- = 0$ y el espectro de excitaciones resulta el mostrado en la figura 2.3(b).

El espectro de excitaciones es diferente en el régimen supercrítico ($\Omega_z > \Omega_c$), donde el condensado es polarizado circulanamente. En este caso, únicamente una rama tipo Bogoliubov, independiente del campo magnético, se obtiene para las cuasi-partículas que tienen la misma polarización del condensado,

$$\omega_+^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0 n U_0, \quad (2.36)$$

mientras que para aquellas con polarización circular opuesta, forman una rama corrida al azul con respecto al condensado por un valor proporcional a $(|\Omega_z| - \Omega_c)$,

$$\omega_- = 2(|\Omega_z| - \Omega_c) + \omega_0. \quad (2.37)$$

De esta manera, el incremento del campo magnético abre la brecha y el espectro de excitaciones se transforma al mostrado en la figura 2.3(c).

Aun cuando el campo magnético sea cero, la brecha puede mantenerse si considera la separación de energía entre polarizaciones lineales x y y , es decir, Ω_x , efecto que resulta en la fijación de la polarización lineal del condensado. En este caso, el valor de la brecha en la frecuencia Δ está dado por [66]

$$\Delta^2 = (2\Omega_x)^2 + (u_0 + u_1)|\Omega_x|. \quad (2.38)$$

El valor de la brecha aumenta con la concentración del condensado, por lo que en el condensado polaritónico se mejora la fijación de la polarización.

Los vórtices son otro tipo de excitaciones elementales del condensado y son topológicamente diferente al estado base. A continuación se discuten sus propiedades y las características relacionadas a la transición BTK. La transición entre un estado normal y un estado superfluido, fue descrita en los artículos clásicos de Berezinskii [43] y Kosterlitz-Thouless [44]. En estos trabajos se muestran una variedad de sistemas bidimensionales que experimentaron transiciones de fase inusuales cuando había una singularidad en la susceptibilidad asociada con el parámetro de orden. En todos estos sistemas la transición de fase impulsada por la disociación de vórtices topológicos. Un vórtice define una

singularidad en el parámetro de orden. A baja temperatura, los vórtices están ligados en parejas pero una disociación de éstos ocurre cuando la temperatura se incrementa a través de la temperatura de transición T_{BKT} . Es por esta razón que los vórtices, característica esencial de los superfluidos, son ampliamente estudiados.

Los vórtices en superfluidos están caracterizados por una rotación de la fase (del parámetro de orden) con multiplo entero de 2π , comúnmente conocida como carga topológica del vórtice, y por la desaparición de la población superfluida en su núcleo. El concepto de vórtice cuantizado apareció por primera vez en conexión con el helio líquido en las ideas pioneras de Onsager y Feynman, y más tarde fueron detectados experimentalmente en el líquido ^4He [70]. Desde entonces, los vórtices han sido estudiados teórica [71] y experimentalmente [72, 73] en CBE en tres dimensiones de gases atómicos diluidos. En CBE cuasi-bidimensional los vórtices emergieron espontáneamente desde fluctuaciones térmicas [74, 75].

En un trabajo reciente [9], vórtices cuantizados han sido observados experimentalmente en CBE de polaritones formados en microcavidades basada en CdTe. Estos vórtices, fijados gracias al desorden estático presente en la microcavidad, fueron detectados por interfemometría de campo cercano así como una clara singularidad en el cambio de fase de 2π . En este trabajo, sin embargo, la polarización no fue medida, pero se sabe que la polarización de la luz emitida por el condensado polaritónico está orientada a un eje cristalino, como efecto de la anisotropía de la microcavidad. Resulta esencial entonces estudiar la estructura y las propiedades de la polarización de los vórtices para entender la superfluidez polaritónica en el marco de la teoría KT. Por otro lado, los vórtices son objetos topológicamente estables y pueden ser usados como memorias ópticas de larga vida.

En el caso de considerar una microcavidad plana ideal, es decir, sin ninguna separación de energía en banda de los polaritones de la rama inferior, un grado de libertad adicional debe aparecer ligado con la orientación de la polarización. En este caso, el parámetro de orden del condensado, ya sea polarizado linealmente o elípticamente, debe ser descrito por dos variables angulares, lo que define un toro (variedad engendrada por la rotación de una circunferencia en torno a un eje que no la toca en ninguno de sus puntos). De esta manera un ángulo define la fase común y el otro ángulo define la dirección de la polarización. Cuando la polarización del condensado está fija en una dirección ó cuando el condensado está circularmente polarizado, el parámetro de orden es la circunferencia de un círculo definida por un ángulo.

Las propiedades de los vórtices en el caso cuando la variedad de parámetro de orden es un toro fueron discutidas en [8]. En ese trabajo ningún efecto, originado de la separación de energía en el condensado o algún campo magnético externo, fue considerado en la textura de la polarización de los vórtices. El parámetro de orden del

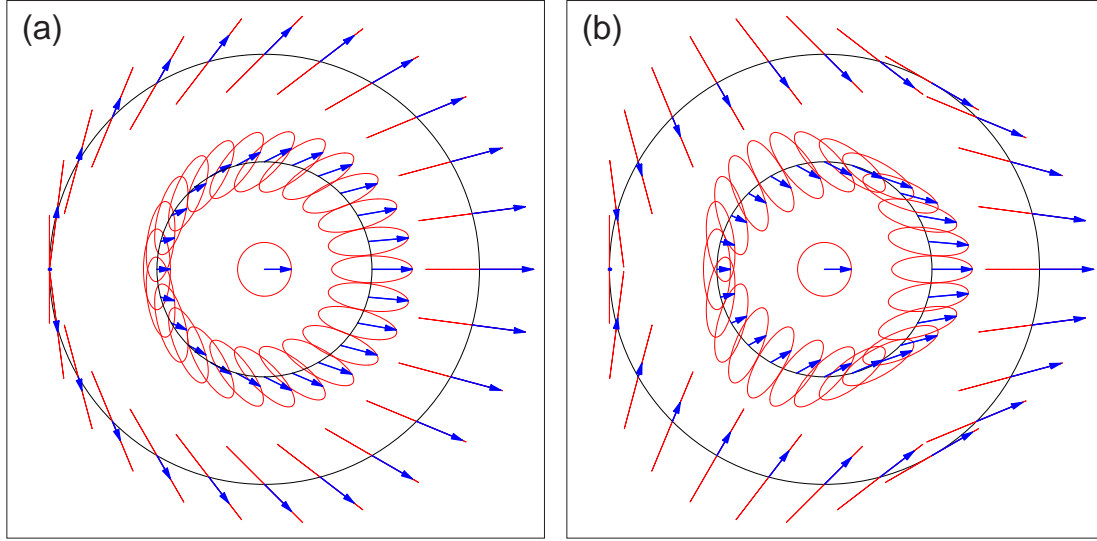


Figura 2.4: De [8]. Las diferentes texturas de polarización de los SVs. (a) para los SVs derecho $(1/2, 1/2)$ e izquierdo $(1/2, -1/2)$. (b) corresponde al caso de los SVs derecho $(-1/2, -1/2)$ e izquierdo $(-1/2, 1/2)$. Las fechas indican el campo eléctrico instantáneo en dos valores de $r=\text{cte}$ (círculos) y el centro del núcleo $r = 0$. El campo eléctrico cambia en el tiempo siguiendo las líneas sólidas.

condensado polarizado linealmente fue escrito como

$$\psi_{lin} = \{\psi_x, \psi_y\} = \sqrt{n}e^{i\theta} \{\cos \eta, \sin \eta\}, \quad (2.39)$$

donde $\theta(\mathbf{r})$ es la fase del fluido polaritónico coherente y $\eta(\mathbf{r})$ es el ángulo que caracteriza la orientación del campo eléctrico de los polaritones, es decir, el ángulo de polarización. Las rotaciones del vector real bidimensional $\{\cos \eta, \sin \eta\}$ en (2.39), en el sentido a favor o en contra de la manecillas del reloj, son topológicamente distintas, por lo que η proporciona la segunda carga topológica.

Los vórtices en esta notación son descritos por la rotación de la fase y la polarización como

$$\theta \rightarrow \theta + 2\pi m, \quad \eta \rightarrow \eta + 2\pi k, \quad (2.40)$$

cuando se rodea el núcleo del vórtice. Las dos cargas topológicas k y m , pueden ser tanto enteras como semienteras simultáneamente con la suma $k + m$ entera. Así los vórtices en los condensados polaritónicos están clasificados por dos números cuánticos. Para los vórtices enteros $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y para los SVs, conocidos de esta forma dado que, $k, m = \pm 1/2$. Estos valores semi-enteros están justificados ya que si la fase θ cambia por π al rodear el núcleo del vórtice, el signo menos en el parámetro de orden es compensado por el signo menos del vector bidimensional $\{\cos \eta, \sin \eta\}$. Los cuatro SVs elementales, $(1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(1/2, -1/2)$ y $(-1/2, 1/2)$, tienen las energías

más bajas. Estos SVs se separan en dos subsistemas, SVs derechos (con $km > 0$) y SVs izquierdos (con $km < 0$).

Los SVs con dos cargas topológicas ya han sido estudiados en la fase superfluida $^3\text{He-A}$ [81]. En general, aparecen en condensados de varios componentes [82]. El condensado de polaritones está formado por dos componentes, a saber, polaritones con polarización circular derecha e izquierda, es en este sentido que los SVs están presentes en el condensado polaritónico.

Para revelar la fenomenología específica de los SVs con respecto a los vórtices enteros, es conveniente escribir el parámetro de orden (2.39) en la base de polarización circular como

$$\psi_{lin} = \sqrt{\frac{n}{2}} (e^{i(\theta-\eta)} |\uparrow\rangle + e^{i(\theta+\eta)} |\downarrow\rangle), \quad (2.41)$$

$$|\uparrow\rangle = \frac{\{1, i\}}{\sqrt{2}}, \quad |\downarrow\rangle = \frac{\{1, -i\}}{\sqrt{2}}. \quad (2.42)$$

Como se puede ver, para $\theta \rightarrow \theta + \pi$, $\eta \rightarrow \eta + \pi$, una rotación de cero ocurre en una componente de polarización circular y una rotación completa de 2π se alcanza en la otra componente de polarización circular. Esto quiere decir que los SVs pueden verse como un vórtice entero en una de las componentes del parámetro de orden.

La textura de polarización de los SVs también fue mostrada en [8]. Estos tienen una polarización lineal lejos de sus núcleos $r \rightarrow \infty$, misma que convierte a elíptica cuando $r \sim a$ donde a es el tamaño del núcleo del SV, y finalmente viene a ser completamente circular en su núcleo y su signo está dado por el signo del producto de dos cargas topológicas.

En el siguiente capítulo se estudian las propiedades de los SVs bajo la influencia de un campo magnético aplicado y se discuten las modificaciones en las texturas de la polarización en los SVs.

Capítulo 3

Efectos de un campo magnético aplicado

Un campo magnético aplicado perpendicularmente al plano de la microcavidad ($\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{z}}$) se espera que tenga un efecto dramático sobre el condensado polaritónico [67], ya que su estado de polarización lineal en ausencia del campo magnético, pasa a un estado de polarización completamente circular cuando el campo alcanza el valor crítico \mathbf{B}_c , definido por la constante de interacción entre polaritones. En campos magnéticos débiles, es decir $\mathbf{B} < \mathbf{B}_c$, la polarización viene a ser elíptica como resultado de la competencia entre el campo magnético que trata de hacer al sistema polarizado circularmente y la interacción polaritón-polaritón que favorece la polarización lineal. En este caso existe una completa supresión de la separación de Zeeman en los estados más bajos de la banda inferior de polaritones, aunque reaparece en campos magnéticos por arriba del valor crítico. Sin embargo, la separación de Zeeman influye fuertemente en la polarización del condensado y la dispersión de los estados polaritónicos excitados.

En este capítulo se muestra que el condensado polaritónico formado por dos componentes (polarización circular derecha e izquierda) por debajo del campo crítico, viene a ser formado por sólo una componente arriba del campo crítico. El objetivo de este capítulo es estudiar la evolución de los SVs presentes en el condensado polaritónico por debajo del campo crítico, y su transformación a vórtices enteros una vez que el condensado queda polarizado circularmente arriba del campo crítico.

3.1. Semi-vórtices en campo magnético externo

Como hemos observado en la capítulo 2, los vórtices producen rotación de la fase y de la polarización lineal del campo eléctrico del condensado polaritónico. Los cuatro SVs

elementales, $(1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(1/2, -1/2)$ y $(-1/2, 1/2)$, se separan en dos subsistemas, SVs derechos (con $km > 0$) y SVs izquierdos (con $km < 0$). La simetría entre estos dos subsistemas se debería romper en un campo magnético aplicado normal al plano de la cavidad, por lo que los SVs derechos e izquierdos tienen diferentes energías. El grado de polarización elíptica del condensado es dependiente de la temperatura como es mostrado abajo, así que los dos subsistemas de SVs no evolucionan de manera independiente. Para mostrar lo anterior, vamos a suponer que los polaritones son polarizados en el plano de la cavidad. Como sabemos, el condensado puede ser descrito por el vector bidimensional ψ . La densidad de energía libre del sistema polaritónico en un campo magnético aplicado se lee como [67]

$$\begin{aligned} H &= H_{cin} + H_{\Omega_z} + H_{int} \\ &= \int d^2r \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} (\psi^* \cdot \Delta \psi) - \mu (\psi^* \cdot \psi) \right] + i\Omega_z [\psi^* \times \psi] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^2r \{ (U_0 - U_1) (\psi^* \cdot \psi)^2 + U_1 |\psi^* \times \psi|^2 \}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $2\Omega_z = g\mu_B B$ es la separación de Zeeman. En lo que sigue vamos a considerar campos magnéticos subcríticos, $|\Omega_z| < \Omega_c = nU_1$, caso cuando el condensado emite luz polarizada elípticamente. En este caso el potencial químico μ , el cual corresponde a la cantidad experimentalmente observada del corrimiento a frecuencias mayores de la línea de emisión debido a la formación del condensado, es independiente de Ω_z , $\mu = (U_0 - U_1)n$ [67].

Similar al caso $\Omega_z = 0$ [8], se buscan soluciones especiales de SVs de la ecuación Gross-Pitaevskii independiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi^*} = 0, \quad (3.2)$$

y se estudia la textura de la polarización en la región del núcleo del SV, bajo el mismo parámetro de orden [8] escrito en coordenadas cilíndricas como

$$\psi_{hv} = \sqrt{n} [\mathbf{A}(\phi) f(r/a) - i\mathbf{B}(\phi) g(r/a)], \quad (3.3)$$

donde $a = \hbar/\sqrt{2m^*\mu}$ es el radio del núcleo, m^* la masa efectiva de los polaritones y μ el potencial químico.

Las dependencias azimutal en (3.3) están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\phi) &= e^{im\phi} \{ \cos(k\phi), \sin(k\phi) \}, \\ \mathbf{B}(\phi) &= \text{sgn}(km) e^{im\phi} \{ \sin(k\phi), -\cos(k\phi) \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $k = \pm 1/2$ y $m = \pm 1/2$ son los dos números de rotación del SV.

Las funciones angulares (3.4) satisfacen las identidades

$$\mathbf{A}''(\phi) = \mathbf{iB}''(\phi) = -\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{iB}), \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{iB} = \{1, \text{sgn}(km)\mathbf{i}\}. \quad (3.5b)$$

En lo que sigue también usaremos las relaciones

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{z}}] &= \text{sgn}(km)\mathbf{B}, \\ [\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{z}}] &= -\text{sgn}(km)\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que son convenientes para tratar el término de campo magnético

$$\frac{\delta H_{\Omega_z}}{\delta \psi^*} = \mathbf{i}\Omega_z [\psi \times \hat{\mathbf{z}}], \quad (3.7)$$

el cual aparece en la ecuación de Gross-Pitaevskii (3.2).

Como resultado de la minimización de la energía del SV (3.2), las funciones radiales $f(\xi)$ y $g(\xi)$ con $\xi = r/a$ satisfacen las ecuaciones

$$f'' + \frac{1}{\xi}f' - \frac{1}{2\xi^2}(f - g) + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\omega g + [1 - f^2 - \gamma g^2] f = 0, \quad (3.8a)$$

$$g'' + \frac{1}{\xi}g' - \frac{1}{2\xi^2}(g - f) + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\omega f + [1 - g^2 - \gamma f^2] g = 0, \quad (3.8b)$$

donde

$$\gamma = \frac{U_0 + U_1}{U_0 - U_1}, \quad (3.9)$$

$$\omega = \text{sgn}(km) \frac{\Omega}{nU_1}. \quad (3.10)$$

Como puede observarse, las ecuaciones (3.8a) y (3.8b) son simétricas con respecto al intercambio de las funciones radiales f y g . De las ecuaciones (2.20) y (3.10) puede verse que ω puede reescribirse como

$$\omega = \text{sgn}(km)P_c \quad (3.11)$$

donde P_c es el grado de polarización circular con la cuál el condensado emite luz. El signo de ω puede ser positivo o negativo aun para un signo fijo de P_c . De esta manera, el condensado polaritónico emite luz polarizada linealmente para $\omega = 0$, luz polarizada elípticamente para $0 < |\omega| < 1$ y luz completamente polarizada circunamente en $|\omega| \geq 1$.

Para conocer la textura de la polarización del SV en todo el espacio, es necesario conocer las funciones radiales para todo valor de r a partir de (3.8). En el centro del SV

$\xi = 0$, se tiene la condición requerida que $f(0) = g(0)$, como en la ausencia de campo magnético, de tal manera que la divergencia producida por el término $(f - g)/2\xi^2$ sea removida. Por lo tanto, de las ecuaciones (3.3) y (3.5b), se observa que la polarización en el centro ($\xi = 0$) del SV es completamente circular y su signo viene dado por $\text{sgn}(km)$. Los comportamientos asintóticos de f y g en valores grande de ξ se pueden escribir como

$$f(\xi) \sim \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{-2i}, \quad (3.12a)$$

$$g(\xi) \sim \sum_{i=0}^{\infty} K_i r^{-2i}. \quad (3.12b)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.8) y expandiendo las expresiones resultantes en series de r , dejando que los coeficientes en potencias iguales de r sean cero, se obtienen los comportamientos asintóticos para f y g , mismos que se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi) + g(\xi)}{\sqrt{2}} &\simeq \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \left\{ 1 - \frac{\gamma-3}{4(\gamma-1)} \frac{1}{(1+\omega)\xi^2} \cdots \right\}, \\ \frac{f(\xi) - g(\xi)}{\sqrt{2}} &\simeq \sqrt{\frac{1-\omega}{2}} \left\{ 1 - \frac{\gamma+1}{4(\gamma-1)} \frac{1}{(1-\omega)\xi^2} \cdots \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

En el límite $r \rightarrow \infty$, las funciones f y g satisfacen

$$f(\infty)^2 + g(\infty)^2 = 1, \quad 2f(\infty)g(\infty) = \omega. \quad (3.14)$$

El parámetro γ dado por (3.9) relaciona a las constantes de interacción U_0 y U_1 , y por lo mismo resulta un parámetro indicativo para conocer la interacción entre polaritones con polarizaciones circulares opuestas. En el caso cuando no hay interacción $M_{\uparrow\downarrow} = 0$. En este caso el parámetro de interacción $\gamma = 3$. Si hay atracción $M_{\uparrow\downarrow} < 0$ entonces $\gamma > 3$, si hay repulsión $M_{\uparrow\downarrow} > 0$ y $\gamma < 3$.

En el caso sin interacción, es decir $\gamma = 3$, la suma directa de las ecuaciones (3.8a) y (3.8b) muestra que

$$f(\xi) + g(\xi) = \sqrt{1+\omega}, \quad (3.15)$$

mientras que la diferencia define a la función $h(\xi)$

$$f(\xi) - g(\xi) = h(\xi), \quad (3.16)$$

que mediante las condiciones límites (3.14) satisface

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = \sqrt{1-\omega}. \quad (3.17)$$

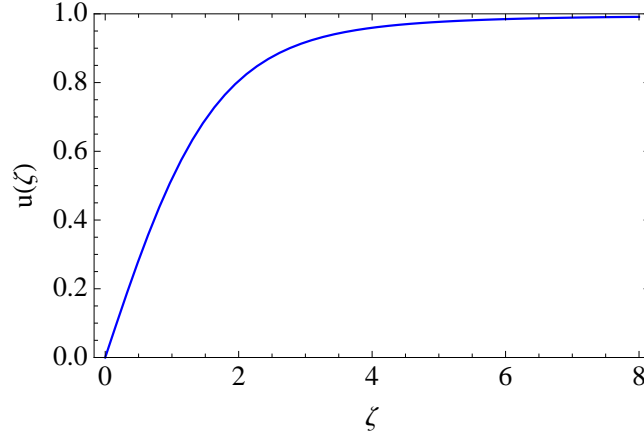


Figura 3.1: Dependencia de la función radial de vórtice con fase usual desde el centro del vórtice.

Por lo tanto es posible escribir a las funciones radiales f y g como

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \omega} + h(\xi) \right], \quad g(\xi) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \omega} - h(\xi) \right]. \quad (3.18)$$

Cuando al diferencia de las ecuaciones (3.8a) y (3.8b) se lleva a cabo, la ecuación para $h(\xi)$ se escribe como

$$h'' + \frac{1}{\xi} h' - \frac{1}{\xi^2} h - \omega h + h(1 - h^2) = 0, \quad (3.19)$$

y mediante el escalamiento $\zeta = \sqrt{1 - \omega} \xi$, $h = \sqrt{1 - \omega} u$ se transforma en la ecuación conocida para la función radial del vórtice de fase usual para un condensado sin espín [77]

$$u'' + \frac{1}{\zeta} u' - \frac{1}{\zeta^2} u + u(1 - u^2) = 0, \quad (3.20)$$

sujeta a las condiciones límites

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1, \quad (3.21)$$

y su solución puede obtenerse numéricamente y se muestra en la figura 3.2.

3.2. Campo de polarización de los SVs

Las funciones radiales $f(\xi)$ y $g(\xi)$ pueden ser expresadas ahora a través de la función radial $u(\xi)$,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1+\omega} + \sqrt{1-\omega} u(\sqrt{1-\omega}\xi) \right], \\ g(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1+\omega} - \sqrt{1-\omega} u(\sqrt{1-\omega}\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En la figura 3.2 se muestra la textura de la polarización de los SVs como función del parámetro ω . Estas texturas corresponden al SV izquierdo $(k, m) = (1/2, -1/2)$, donde la rotación del vector de polarización es en el sentido de la manecillas del reloj. Todas las figuras en 3.2 muestran al campo eléctrico dependiente del tiempo $\mathbf{E} \propto \text{Re} \{ \psi e^{-i\omega_1 t} \}$, donde ω_1 está dada por la frecuencia ω_0 de los polaritones de la banda inferior en la microcavidad, corrida al azul por el potencial químico μ debido a la repulsión polaritón-polaritón, $\omega_1 = \omega_0 + \mu$. Los vectores de campo eléctrico cambian en el tiempo siguiendo las líneas sólidas en rojo.

En general, el grado de polarización circular P_c puede describirse de acuerdo a las ecuaciones (2.4) y (2.20), como

$$P_c(\xi) = 2 \frac{S_z}{n} = 2 \text{sgn}(km) \frac{f(\xi)g(\xi)}{f^2(\xi) + g^2(\xi)}. \quad (3.23)$$

En el caso de $\gamma = 3$ y de acuerdo a (3.22), el grado de polarización circular resulta

$$P_{c,\gamma=3}(\xi) = \text{sgn}(km) \frac{1 + \omega + (\omega - 1)u^2(\sqrt{1-\omega}\xi)}{1 + \omega + (1 - \omega)u^2(\sqrt{1-\omega}\xi)}. \quad (3.24)$$

La figura 3.2(a) que corresponde al caso sin campo magnético $\omega = 0$, el condensado lejos del núcleo del SV emite luz linealmente polarizada. La figura 3.2(b) muestra el caso cuando $\omega = -0.3$. Aquí el condensado lejos del núcleo del SV emite luz elípticamente polarizado. La figura 3.2(c) corresponde al condensado circumentalmente polarizado en el valor crítico $\omega = -1$. En todos los casos el grado de polarización en cualquier punto del SV está determinado por la ecuación (3.24).

En los casos cuando $\omega = -1$, independientemente del valor de γ , se obtiene que

$$g(\xi) = -f(\xi). \quad (3.25)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (3.8a) se obtiene la ecuación para f

$$f'' + \frac{1}{\xi} f' - \frac{1}{\xi^2} f + \frac{1}{2}(\gamma - 1)f + f [1 - (1 + \gamma)f^2] = 0, \quad (3.26)$$

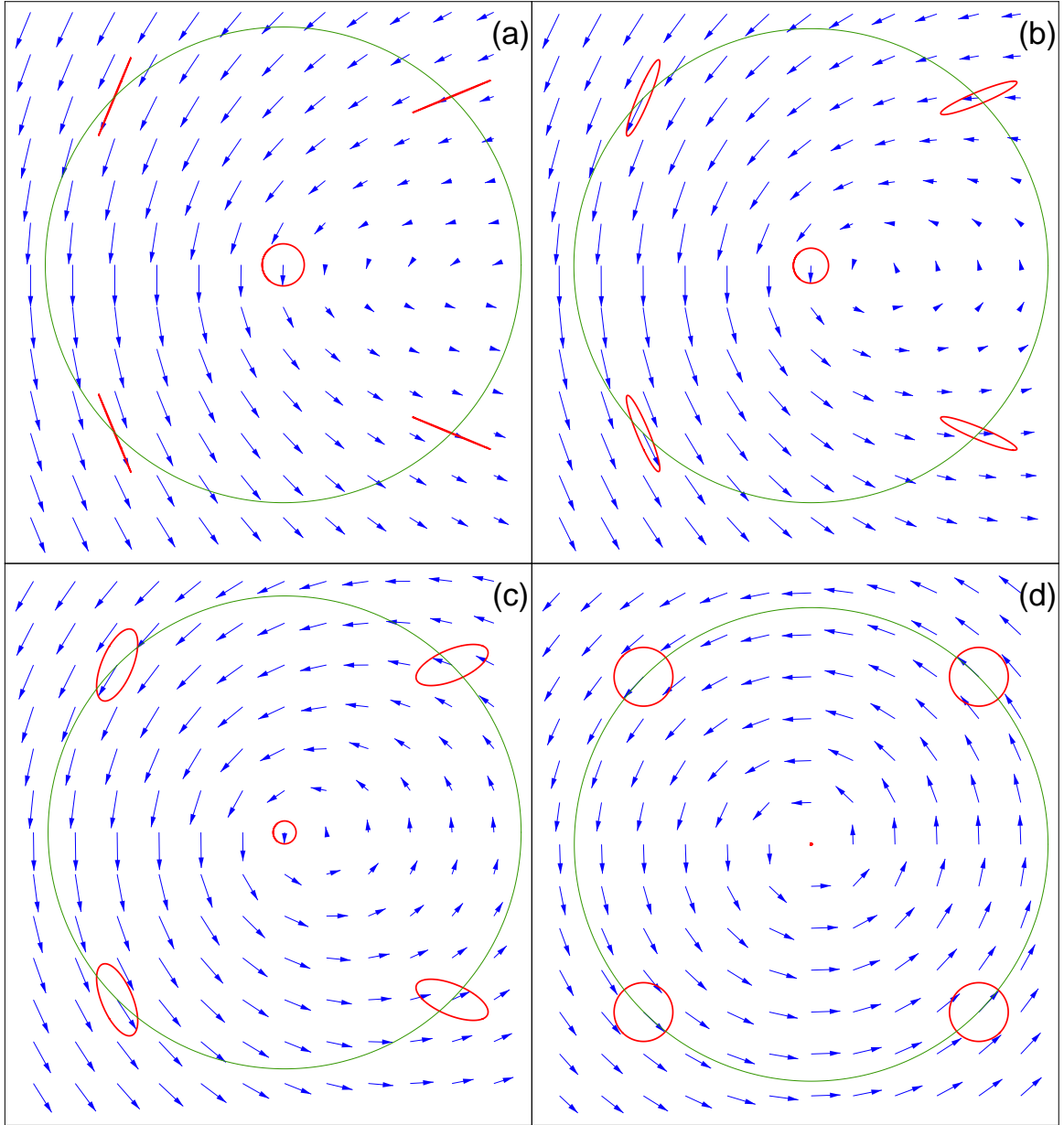


Figura 3.2: Muestra como un vórtice de fase semientera para $\Omega_z < \Omega_c$, se convierte en un vórtice de fase entera para $\Omega_z \geq \Omega_c$. Las diferentes texturas de polarización corresponden al SV izquierdo $(1/2, -1/2)$. Las flechas indican la dirección del campo eléctrico instantáneo. (a) Corresponde al caso cuando el campo magnético se encuentra ausente $\omega = 0$. Esta textura de la polarización es la misma al caso de la figura 2.4(a). (b) Corresponde al caso de un campo magnético subcrítico $\omega = -0.3$ y (c) en $\omega = -0.7$. (d) Corresponde al caso crítico $\omega = -1$. Se observa que lejos del núcleo del SM, la polarización pasa de lineal a circular como el campo magnético va de $\Omega_z = 0$ a $\Omega_z = \Omega_c$.

con los límites $f(0) = 0$ y $f(\infty) = 1/\sqrt{2}$. Esta ecuación tiene como solución

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} u \left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \xi \right), \quad (3.27)$$

donde u es la función de vórtice usual que satisface (3.20). Cuando $\omega = 1$

$$f(\xi) = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.28)$$

En ambos casos de $\omega = \pm 1$, las soluciones radiales de f y g están de acuerdo a las soluciones (3.22). En general, las propiedades de los SVs pueden entenderse mejor, como ya se ha mencionado, si se escribe al parámetro de orden (3.3) en la base de polarización circular. Las amplitudes de las componentes circular derecha R y circular izquierda L de $\psi = \{\psi_x, \psi_y\}$ están definidas como

$$L = \frac{\psi_x + i\psi_y}{\sqrt{2}}, \quad R = \frac{\psi_x - i\psi_y}{\sqrt{2}}. \quad (3.29)$$

y usando las ecuaciones (3.3) y (3.4) obtenemos

$$L = \sqrt{\frac{n}{2}} [f - \text{sgn}(km)g] e^{i(m+k)\phi}, \quad R = \sqrt{\frac{n}{2}} [f + \text{sgn}(km)g] e^{i(m-k)\phi}, \quad (3.30)$$

por lo que el parámetro de orden viene a escribirse

$$\psi_{hv} = R|\uparrow\rangle + L|\downarrow\rangle. \quad (3.31)$$

Como se sabe $f(0) = g(0)$ y de las ecuaciones (3.30) y (3.31), se observa que los SVs con $\text{sgn}(km) > 0$ pueden ser visualizados como un vórtice completo en la componente circular izquierda, acompañado de una perturbación en la componente circular derecha. Por otro lado, los SVs con $\text{sgn}(km) < 0$ corresponden a un vórtice completo en la componente circular derecha acompañado de una perturbación en la componente circular izquierda. Esta perturbación se consigue precisamente con la interacción entre polaritones con polarizaciones circulares opuestas, ya que cuando $\gamma = 3$ el SV se reduce a un vórtice de fase usual en una componente circular, ya que $f(\xi) + g(\xi) = \sqrt{1+\omega}$ y $(f(\xi) - g(\xi)) \propto u(\sqrt{1-\omega}\xi)$.

Una dificultad que surge al resolver el par de ecuaciones (3.8) para diferentes valores del parámetro de interacción γ y del campo magnético (diferentes valores de ω), es que las condiciones de frontera se dan en puntos finales y el valor de $f(0) = g(0)$ no se ha estimado y utilizado como valor inicial. Dado que se tiene un sistema de ecuaciones no lineales acopladas con condiciones a la frontera, el método de disparo

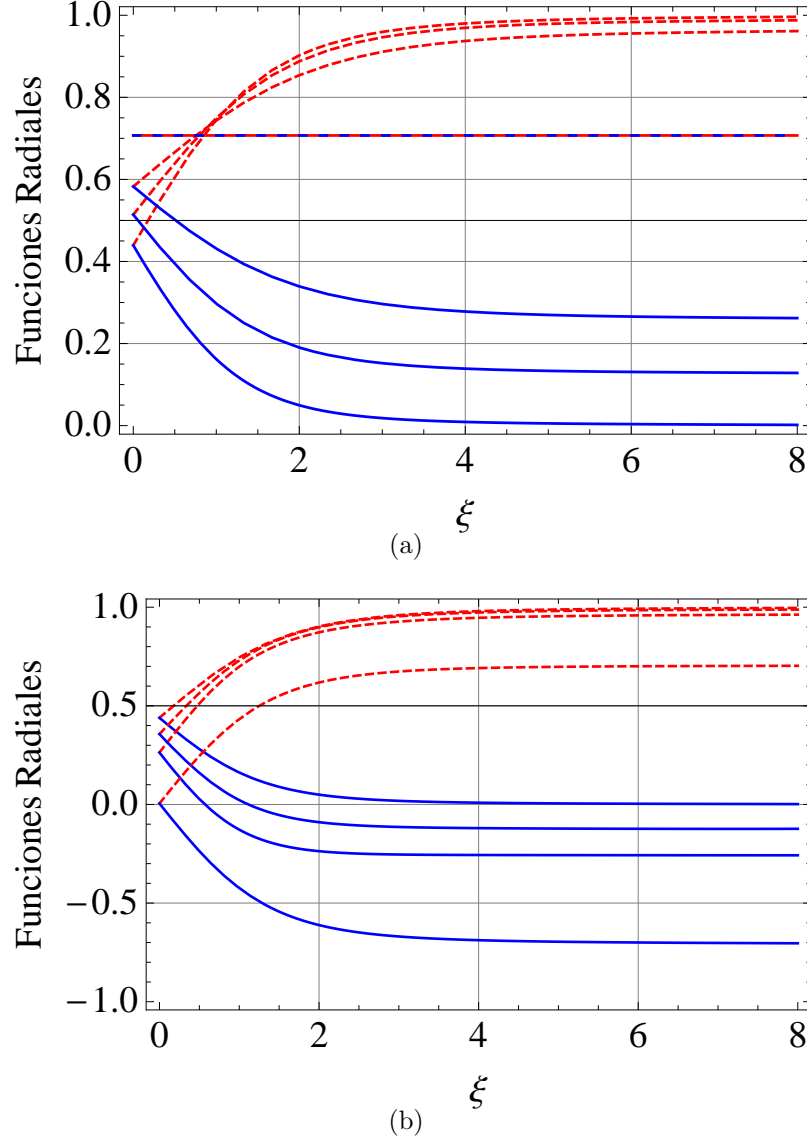


Figura 3.3: Se muestran las funciones radiales $f(\xi)$ (línea discontinua) y $g(\xi)$ (línea sólida) del SM para distintos valores de ω y $\gamma = 5$. (a) Muestra las funciones radiales en los casos cuando $\omega = 0, 0.25, 0.5, 1$. Cuando $\omega < 1$, la función radial f , para un valor fijo grande de ξ , disminuye como el valor de ω aumenta, mientras que la función radial g aumenta. En $\omega = 1$ ambas funciones se juntan y vienen a ser iguales. (b) Muestra las funciones radiales en los casos cuando $\omega = 0, -0.25, -0.5, -1$. En este caso las funciones radiales siempre tienen disminuir en cada valor de ξ conforme $|\omega|$ aumenta.

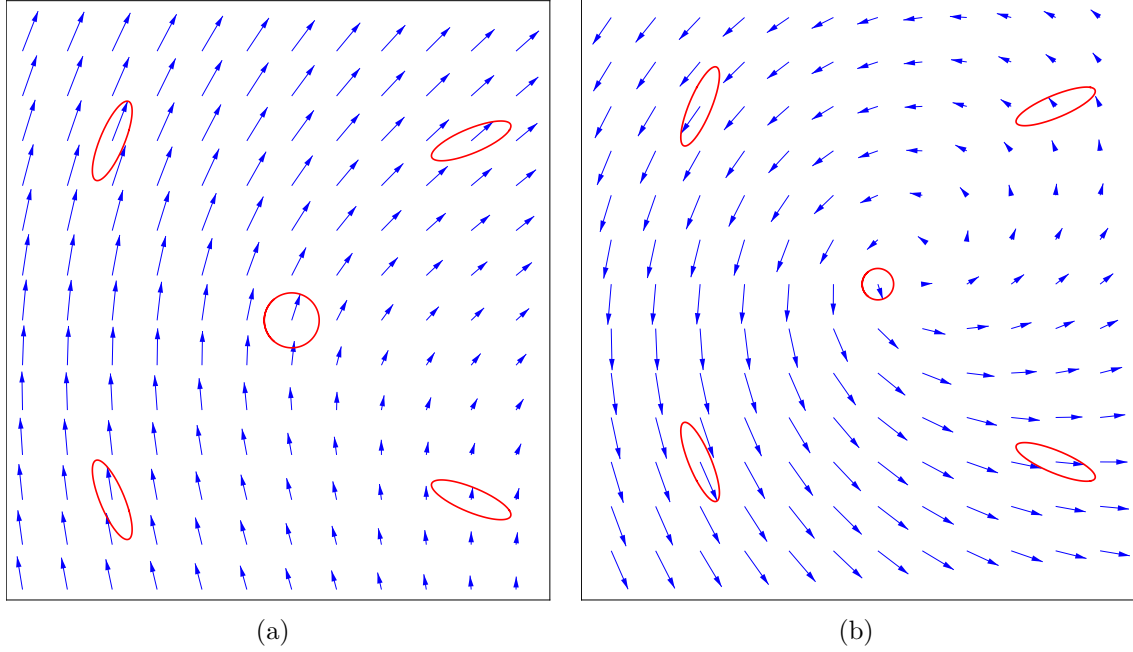


Figura 3.4: Se muestran las diferentes texturas de polarización para los SVs. (a) Corresponde al caso del SV derecho $(1/2, 1/2)$ en el valor de $\omega = 0.5$ y (b) al caso del SV izquierdo $(1/2, -1/2)$ en el valor de $\omega = -0.5$.

(“*shooting method*”) se convierte en el método más oportuno para conocer las funciones radiales $f(\xi)$ y $g(\xi)$ usando como parámetro de entrada algún valor de $f(0)$. Usando un programa numérico desarrollado para el método de disparo fue posible conocer estas funciones radiales.

En la figura 3.3 se presentan las soluciones numéricas para las funciones radiales f y g , a partir de sus ecuaciones diferenciales (3.8), para distintos valores de ω cuando el parámetro de interacción $\gamma = 5$. Las soluciones radiales $f(\xi)$ y $g(\xi)$ para $0 < \omega < 1$ describen SVs poco profundos [ver figura 3.4(a)] con $f(\xi)$ y $g(\xi)$ positivas, mientras que las soluciones para $-1 < \omega < 0$ describen SVs profundos [ver figura 3.4(b)] $f(\xi) > 0$, y $g(\xi)$ cambiando su signo de positivo en una región de ξ pequeños a negativos en valores grandes de ξ . Para $\text{sgn}(km) > 0$ la componente circular izquierda L es cero en $r = 0$, y para $\text{sgn}(km) < 0$ la componente circular derecha R es cero en $r = 0$. Para el condensado uniforme las poblaciones de las componentes circulares son

$$|R(\infty)|^2 = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right), \quad |L(\infty)|^2 = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right), \quad (3.32)$$

de tal suerte que en campos magnéticos positivos ($\Omega > 0$) se tiene que $|R|^2 > |L|^2$. Entonces, se puede ver que los SVs profundos con $\text{sgn}(km) < 0$ y $-1 < \omega < 0$ corresponden al agotamiento de la componente mayoritaria (circular derecha), y los SVs

poco profundos con $\text{sgn}(km) > 0$ y $0 < \omega < 1$ corresponden al agotamiento en la componente minoritaria (circular izquierda). Con el signo opuesto del campo magnético aplicado, las definiciones de los SVs profundos y poco profundos son invertidas.

3.3. Energía de los SVs bajo un campo magnético

La energía E_{hv} del SV bajo la influencia del campo magnético tiene dos partes, la energía del núcleo $E_{núcleo}$ y la energía elástica E_{el} . Esta última viene de la energía cinética lejos del centro del núcleo. En este caso, las funciones radiales del parámetro de orden (3.3) del condensado polaritónico, con grado de polarización circular (3.23), satisfacen las condiciones asintóticas (3.14). De esta manera, al sustituir el parámetro de orden (3.3) en (3.1) la parte cinética produce

$$E_{el}^s = \frac{1}{2}\rho_s \int d^2r \{(\nabla\eta)^2 + (\nabla\theta)^2 - 2P_c(\nabla\theta \cdot \nabla\eta)\}, \quad (3.33)$$

con la rigidez $\rho_s = \hbar^2 n / m^*$.

La energía elástica E_{el} del SV en aproximación logarítmica como en el modelo XY [78], puede encontrarse por integración sobre el plano de la microcavidad. La integral debería llevarse a cabo desde un valor pequeño de r correspondiente al radio del núcleo a del SV, hasta un valor grande de r correspondiente al tamaño del punto de excitación polaritónico $R \gg a$. Llevando a cabo la integral, la energía elástica resulta entonces

$$E_{el}^s = \pi \frac{\rho_s}{2} (1 - \omega) \ln(R/a). \quad (3.34)$$

La energía total del condensado polaritónico, una vez que sustituimos la expresión (3.3) del parámetro de orden en la ecuación (3.1) para el hamiltoniano del sistema polaritónico en campo magnético, se escribe como

$$E_{tot} = \pi \rho_s \int \xi d\xi \left[f'^2 + g'^2 + \frac{(f-g)^2}{2\xi^2} - (f^2 + g^2) + \frac{(f^2 + g^2)^2}{2} + (\gamma - 1)f^2g^2 - (\gamma - 1)\omega fg \right]. \quad (3.35)$$

En el caso uniforme $\psi = \sqrt{n}\mathbf{e}$, el mínimo de energía libre del sistema decrece cuadráticamente con el campo [67]

$$E_{min} = -\pi \frac{\rho_s}{4} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \omega^2 \right) A. \quad (3.36)$$

donde A es el área del punto de excitación. La energía total del SV E_{hv} es $E_{tot} - E_{min}$ y se puede escribir como

$$E_{hv} = \frac{\pi}{2} \rho_s [C(\gamma, \omega) + (1 - \omega) \ln(R/a)], \quad (3.37)$$

donde el primer término corresponde a la energía de núcleo del SV con $C(\gamma, \omega)$ dado por

$$C(\gamma, \omega) = 2 \int_0^\infty \xi d\xi \left\{ f'^2 + g'^2 + \frac{1}{2} \left[(1 - (f^2 + g^2))^2 + \frac{(\gamma - 1)}{2} (2fg - \omega)^2 \right] \right\} \\ + \int_0^1 d\xi \frac{(f - g)^2}{\xi} + \int_1^\infty d\xi \frac{(f - g)^2 - 1 + \omega}{\xi}. \quad (3.38)$$

Tabla 3.1: Valores de $C(\gamma, \omega)$ obtenidos mediante las ecuaciones (3.38) y (3.8). Los núcleos de los SVs derechos con $\text{sgn}(km) = 1$ ($\omega > 0$) presentan valores de energías inferiores comparadas ca las energías de los núcleos de los SVs izquierdos con $\text{sgn}(km) = -1$ ($\omega < 0$). En el caso cuando campo magnético está ausente, ambos núcleos de estos SVs tienen energías iguales [8].

γ	ω						
	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1
2.0	0.981	0.592	0.374	0.185	0.029	-0.083	0.0
2.5	1.082	0.763	0.521	0.305	0.121	-0.021	0.0
3.0	1.175	0.875	0.616	0.380	0.178	0.017	0.0
3.5	1.262	0.957	0.683	0.434	0.218	0.044	0.0
4.0	1.343	1.021	0.734	0.475	0.248	0.063	0.0
4.5	1.418	1.074	0.776	0.507	0.271	0.079	0.0
5.0	1.488	1.118	0.810	0.533	0.289	0.090	0.0
5.5	1.554	1.158	0.813	0.556	0.306	0.101	0.0

En la Tabla 3.1 se muestran algunos valores de $C(\gamma, \omega)$ como función del parámetro de interacción γ y de ω , donde las funciones radiales $f(\xi)$ y $g(\xi)$ fueron obtenidas mediante el método de disparo. En el caso sin campo magnético, el valor de $C(3, 0) \simeq 0.38$ fue reportado por Pitaevskii [79]. En caso cuando $\omega = 1$ el condensado se encuentra completamente polarizado circularmente y el parámetro de orden se escribe como

$$\psi_{cir, \omega=1} = \sqrt{n} |\uparrow\rangle. \quad (3.39)$$

Cuando $\omega = -1$, el condensado también está polarizado circularmente y su parámetro de orden describe un vórtice de fase usual

$$\psi_{cir, \omega=-1} = R |\uparrow\rangle. \quad (3.40)$$

donde la componente circular R está relacionada con la función radial simple $u(\xi)$.

El campo magnético afecta la concentraciones de polaritones con espín $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ en los SVs, ya sea derechos ($\text{sgn}(km) > 0$) o izquierdos ($\text{sgn}(km) < 0$). Las gráficas 3.5 y 3.6 muestran las dependencias de las concentraciones de los polaritones, en los casos de atracción ($\gamma = 5$) y repulsión ($\gamma = 2$), entre polaritones con polarizaciones opuestas. Las concentraciones están en función de la distancia al centro del SV ξ y en función del campo magnético hasta su valor crítico Ω_c .

Las gráficas 3.5(a,b) y las gráficas 3.5(c,d) presentan los caso para SVs derechos e izquierdos con $\gamma = 5$, respectivamente. Cuando $\Omega < \Omega_c$, en ambos casos, a medida que el campo se incrementa y lejos del centro de sus núcleos, aparece un aumento en la componente circular derecha [ver gráficas 3.5(b) y 3.5(d)], y una disminución de la componente circular izquierda [ver gráficas 3.5(a) y 3.5(c)]. Esto indica que habrá más polaritones con espín $|\uparrow\rangle$ que $|\downarrow\rangle$. Por ejemplo, en el caso cuando $\Omega/\Omega_c = 0.5$, aproximadamente un 75 % de polaritones tienen espín $|\uparrow\rangle$ y un 25 % tienen espín $|\downarrow\rangle$ lejos del centro del SV. En ausencia del campo magnético, hay mismo número de polaritones con polarización circular derecha que izquierda. En las gráficas 3.5(b) y 3.5(c), se observa que existe un agotamiento suave de polaritones hacia el centro, a medida que el campo magnético se incrementa a valor crítico. En las gráficas 3.5(a) y 3.5(d), el número de polaritones es cero en el centro porque estas componentes pueden verse, como se mencionó arriba, como vórtices completos. En $\Omega/\Omega_c = 1$ los SVs derechos desaparecen, mientras que los SVs izquierdos decaen al vórtice de fase usual. En ambos casos todos los polaritones tienen espín $|\uparrow\rangle$.

En el caso de repulsión entre polaritones con polarizaciones circulares opuestas (caso $\gamma = 2$) y $\Omega < \Omega_c$, existe una acumulación en la componente circular derecha hacia el centro para los SVs derechos [ver gráfica 3.6(b)] y una acumulación en la componente circular izquierda hacia el centro en el caso de los SVs izquierdos ([ver gráfica 3.6(c)]).

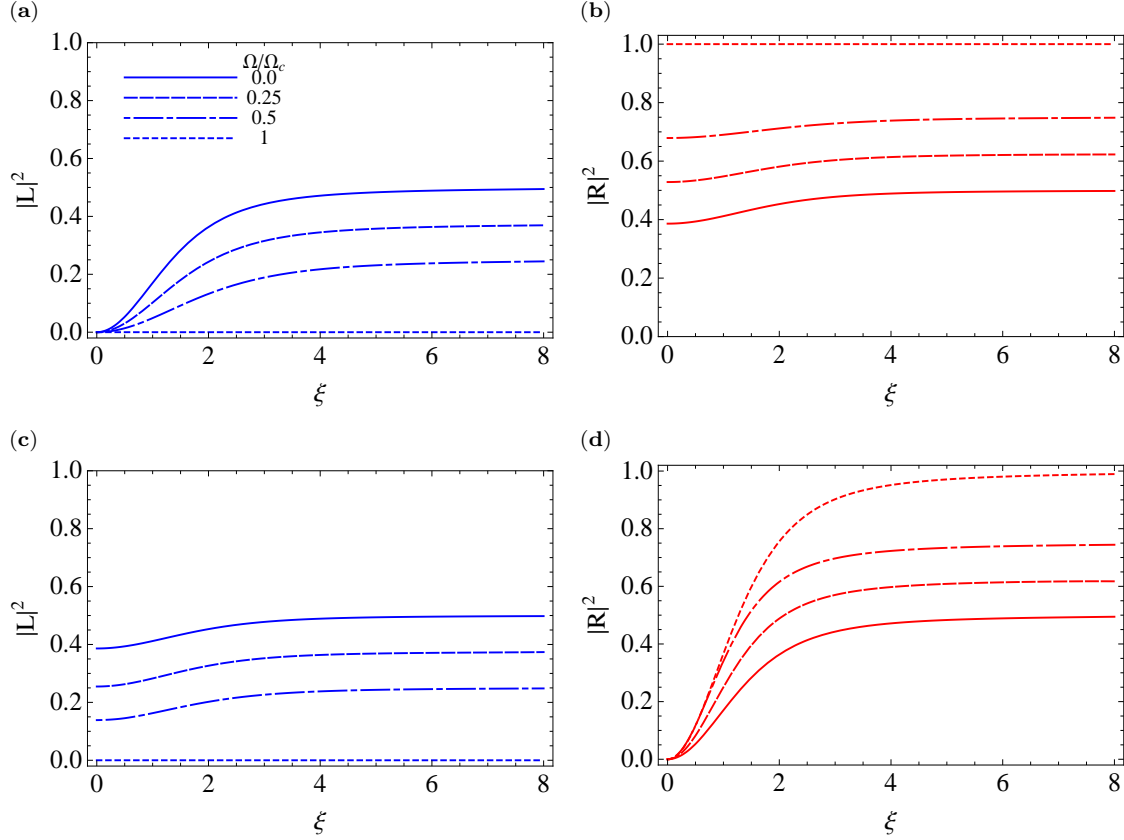


Figura 3.5: Dependencias de las componentes circulares del parámetro de orden que describe al SV, en presencia del campo magnético, como función de $\omega = \text{sgn}(km)\Omega/\Omega_c$ y ξ , cuando el parámetro de interacción $\gamma = 5$. Figuras (a),(b) y (c),(d) corresponden a los SVs derechos (SVs poco profundos con $\text{sgn}(km) > 0$) y los izquierdos (SVs profundos con $\text{sgn}(km) < 0$), respectivamente. En todos los casos se observa un agotamiento en las componentes circulares.

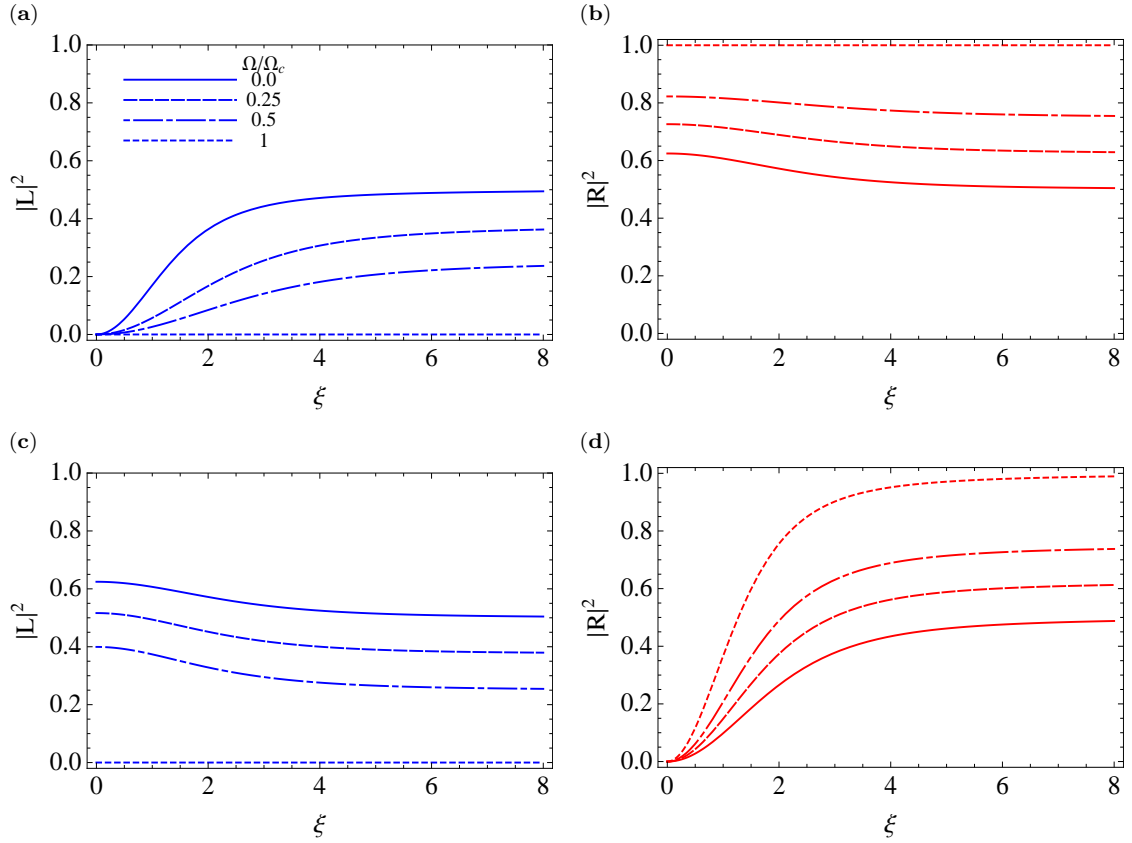


Figura 3.6: Dependencias de las componentes circulares de los SVs en presencia de campo magnético, como función de $\omega = \text{sgn}(km)\Omega/\Omega_c$ y de ξ , para parámetro de interacción $\gamma = 2$. Figuras (a),(b) y (c),(d) corresponden a los SVs poco profundos y los profundos, respectivamente. Existe una acumulación en la componente circular derecha hacia el centro para los SVs derechos (b) y una acumulación en la componente circular izquierda hacia el centro en el caso de los SVs izquierdos (c).

3.4. Interacción de vórtices

La transición de fase Berezinskii-Kosterlitz-Thouless es considerada como una transición de disociación de vórtices en sistemas bidimensionales con simetría XY desde una fase con un cuasi-orden de largo alcance en una temperatura baja, donde la mayoría de espines son alineados y la función de correlación decae con una ley de potencia, a una fase desordenada donde la función de correlación decae exponencialmente en una temperatura alta. Por abajo de la transición, los vórtices son confinados en pares neutros por una atracción logarítmica. A la temperatura donde los pares de vórtices-antivórtices comienzan a ser independientes y libres se le llama la temperatura de transición BKT T_{BKT} [44].

Para ver como esta transición puede ocurrir en un condensado polaritónico bidimensional, es necesario considerar los cuatro SVs elementales. La energía elástica de un par de SVs separados por una distancia r con $a \ll r \ll R$, en el caso cuando el campo magnético se encuentra presente, se puede escribir a partir de (3.33) como

$$E_{el}^{(p)} = \pi\rho_s[(k_1 + k_2)^2 + (m_1 + m_2)^2 - 2P_c(m_1 + m_2)(k_1 + k_2)] \ln(R/a) + 2\pi\rho_s[(k_1 k_2 + m_1 m_2) - P_c(m_1 k_2 + m_2 k_1)] \ln(a/r), \quad (3.41)$$

de donde se observa que solamente los SVs con el mismo signo del producto km interaccionan.

Para determinar la temperatura T_{BKT} en presencia de un campo magnético estimemos la energía libre de un SV. La energía libre está dada por la diferencia entre la energía y la entropía multiplicada por la temperatura $F = E_{tot} - TS$. La entropía se estima desde el número de lugares donde el SV puede ser colocado, es decir, $S = \ln(R^2/a^2)$ donde R es el radio del punto de excitación. La energía libre para un vórtice aislado es en aproximación logarítmica

$$F \approx [\pi \frac{\rho_s}{2} (1 - \omega) - 2T] \ln(R/r). \quad (3.42)$$

La energía libre diverge a más infinito como $R \rightarrow \infty$ cuando

$$T < \frac{\pi\rho_s(1 - \omega)}{4}. \quad (3.43)$$

En temperaturas

$$T > \frac{\pi\rho_s(1 - \omega)}{4}, \quad (3.44)$$

el sistema puede bajar su energía libre produciendo SVs ya que $F \rightarrow -\infty$ como $R \rightarrow \infty$. Este simple argumento heurístico señala que la dependencia logarítmica sobre el tamaño del sistema de la energía del SV, combinado con la dependencia de la entropía, produce la sutileza de la transición de disociación de vórtices. De esta manera se observa que

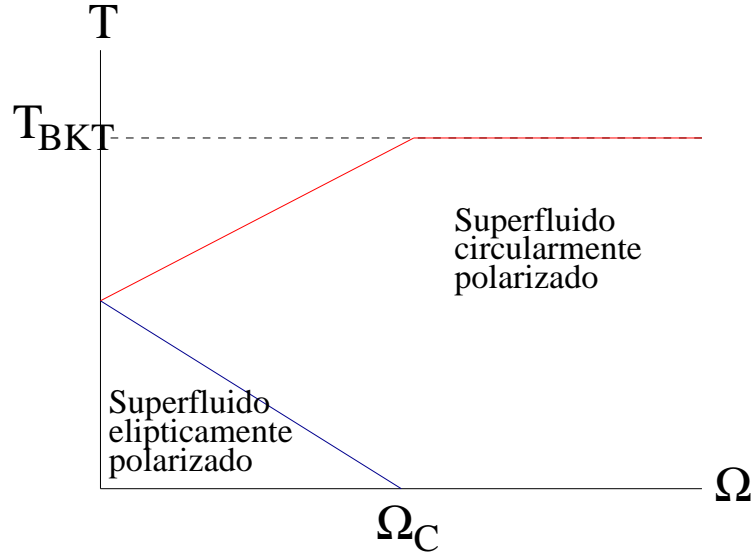


Figura 3.7: Diagrama de fase cualitativo del superfluido polaritónico bajo campo magnético (ver texto).

un SV aislado puede a parecer espontáneamente cuando la temperatura alcanza la temperatura crítica T_c ,

$$T_c = \frac{\pi \rho_s (1 - \omega)}{4}, \quad (3.45)$$

es decir, cuando pares de SVs se disocian como la temperatura de transición se aproxima desde abajo.

En la aproximación logarítmica (3.41) el par $(1/2, 1/2)$ y $(1/2, -1/2)$ no interacciona. Si los vórtices derechos e izquierdos no interaccionan, ellos están desacoplados y evolucionan independientemente con el incremento de la temperatura. Entonces existen dos transiciones de superfluidez tipo BKT que corresponden a la disociación de SVs derechos e izquierdos, respectivamente.

La figura 3.7 muestra un digrama de fase cualitativo del superfluido polaritónico bajo un campo magnético. En $\Omega = 0$, el condensado emite luz polarizada linealmente y ambos SVs, derechos e izquierdos, están sujetos a la temperatura de transición $T_c = (\pi/4)\rho_s$. Esta temperatura es dos veces más pequeña que la temperatura crítica T_{BKT} de bosones sin espín debido a la reducción de la energía del SV [8]. Para $\Omega < \Omega_c$, el condensado emite luz elípticamente polarizado [67] y la temperatura crítica cambia como $T_c = (\pi/4)\rho_s(1 - \omega)$ con $\omega = \pm\Omega/(nU_1)$ para semivórtices derechos e izquierdos, respectivamente. En $\Omega = \Omega_c$, la temperatura crítica para los SVs izquierdos se iguala a la temperatura T_{BKT} . Para $\Omega > \Omega_c$, el condensado emite luz circularmente polarizada y la temperatura de transición no cambia. Más discusiones de esta transición se presentan

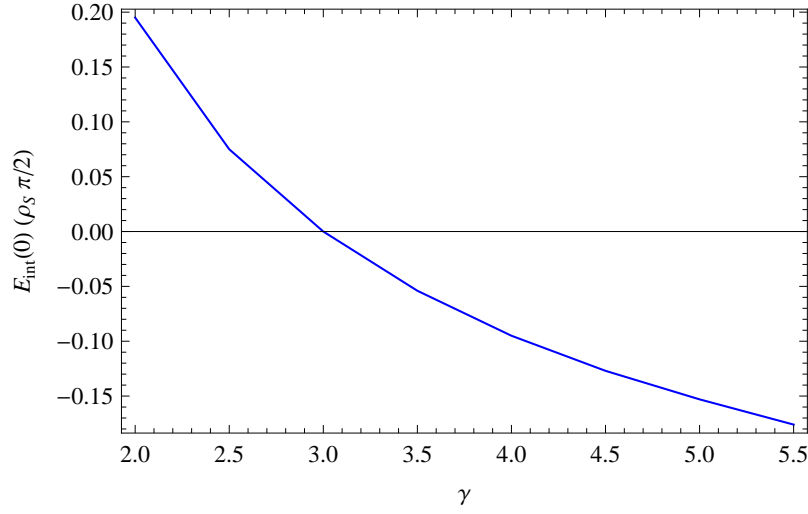


Figura 3.8: Energía de interacción del par de SVs derecho-izquierdo en el límite $r = 0$ como función del parámetro de interacción γ .

en el trabajo reciente de Keeling [80].

Una interacción entre los SVs derecho $(1/2, 1/2)$ e izquierdo $(1/2, -1/2)$ aparece cuando sus núcleos se translanan, es decir, cuando r se compara con a . En el límite $r \rightarrow 0$ este par formará el vórtice erizo $(1, 0)$, donde únicamente cambia la dirección de la polarización pero no la fase, descrito por el parámetro de orden

$$\psi_{\text{erizo}} = \sqrt{n}u(r/a) \{\cos \phi, \sin \phi\}, \quad (3.46)$$

donde $u(r/a)$ es la función radial del vórtice de fase usual (3.20). La energía del vórtice erizo está dada por

$$E_{\text{erizo}} = \pi\rho[C(3, 0) + \ln(R/a)], \quad (3.47)$$

y de acuerdo a la ecuación (3.37), esta energía es igual a la suma de las energías que tienen los SVs cuando $\gamma = 3$, por lo que no hay interacción entre los núcleos de los SV derecho e izquierdo en este caso.

En el límite $r \rightarrow \infty$, la energía del par es solamente la suma de los dos SVs aislados. La energía de interacción de los núcleos en el límite $r = 0$ como función del parámetro de interacción γ puede escribirse como

$$E_{\text{int}}(0) = E_{\text{erizo}}(0) - 2E_{\text{hv}}(0) = \pi\rho[C(3, 0) - C(\gamma, 0)], \quad (3.48)$$

y su gráfica se muestra en la figura 3.8. Se observa que en este límite, cuando $\gamma < 3$ la energía de este par de SVs es menor que la energía del vórtice erizo y para $\gamma > 3$ es mayor. En consecuencia existirá una atracción entre el par de SVs para el caso de $\gamma > 3$ y una repulsión para el caso $\gamma < 3$ cuando el par comienza a juntarse.

Si la interacción de SVs derechos e izquierdos es tomada en cuenta, la transición de fase debe ser diferente de la transición BKT. La energía de la interacción del par para cualquier distancia de separación r necesita ser estudiada con el fin de entender la superfluidez polaritónica.

Capítulo 4

Efectos de separación de la polarización en los SVs

Cuando la fijación de la polarización no es tomada en cuenta, los semivórtices vienen a ser las excitaciones de más bajas energías en los condensados polaritónicos en las microcavidades semiconductoras. Los SVs que se esperan que definan las transición de fase BKT en este sistema [8, 80], fueron observados experimentalmente recientemente [10]. Las observaciones experimentales [9, 10] revelaron la importancia de la separación de la polarización de las bandas polaritónicas. Los SVs se pueden observar sólo cuando esta separación de energía es suficientemente pequeña. En este capítulo se presenta una breve discusión teórica de los efectos de una débil fijación de la polarización en las propiedades de los SVs. Discutimos los tipos de separación, la separación TE-TM que depende en el vector de onda y la separación debida a la anisotropía de la cavidad que es independiente del vector de onda.

4.1. Efectos de la separación TE-TM como perturbación

En lo que sigue, analizaremos los efectos de la separación TE-TM sobre la estructura de la polarización de los vórtices. Nosotros mostramos que la separación TE-TM conduce al acomplamiento entre SVs derechos e izquierdos (vórtices en las componentes circulares derecha e izquierda del condensado), que de otra manera no interaccionan.

Cerca de la parte más baja de la rama inferior de polaritones, la densidad de energía

cinética es $(i, j = x, y)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &= \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_t} (\nabla_i \psi_j^*) (\nabla_i \psi_j) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) (\nabla_i \psi_i^*) (\nabla_j \psi_j) \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_t} (\nabla_i \psi_j^*) (\nabla_i \psi_j) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) |\nabla \cdot \psi|^2 \right\},\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde m_t y m_l son la masa efectiva transversal (TE) y la masa efectiva longitudinal (TM) de los polaritones. Para esta rama, usualmente se tiene que $m_l < m_t$, así que $(m_l^{-1} - m_t^{-1}) > 0$, pero también la diferencia puede ser negativa dependiendo de la sintonía del modo de la cavidad desde el centro de la brecha. La presencia de la división TE-TM no destruye a los SVs, pero deforma la textura de su polarización. Más importante, ésta cambia cualitativamente la energía de los SVs y las interacciones entre ellos. Nosotros consideramos estos efectos en lo que sigue para el caso de un condensado uniforme de polaritones sin un potencial de desorden.

En el caso general de un condensado elípticamente polarizado (como en la presencia de un campo magnético), en la región elástica, donde la concentración del condensado es constante, el parámetro de orden puede ser escrito como

$$\psi = \frac{\sqrt{n}}{2} \left\{ \sqrt{1 + P_c} e^{i\alpha} + \sqrt{1 - P_c} e^{i\beta}, i \left(\sqrt{1 + P_c} e^{i\alpha} - \sqrt{1 - P_c} e^{i\beta} \right) \right\}, \quad (4.2)$$

donde P_c es el grado de polarización circular y el parámetro de orden está definido por

$$\alpha = \theta - \eta, \quad \beta = \theta + \eta. \quad (4.3)$$

El primer término en la ecuación (4.1) al sustituir (4.2) da

$$(\nabla_i \psi_j^*) (\nabla_i \psi_j) = \frac{n}{2} \left[(1 + P_c) (\nabla \alpha)^2 + (1 - P_c) (\nabla \beta)^2 \right]. \quad (4.4)$$

La divergencia del parámetro de orden se escribe como

$$\nabla \cdot \psi = i\sqrt{n} \left[\sqrt{1 + P_c} e^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z^*} + \sqrt{1 - P_c} e^{i\beta} \frac{\partial \beta}{\partial z} \right], \quad (4.5)$$

donde $z = x + iy$ y

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (4.6)$$

En este caso, la densidad de energía cinética se escribe como ¹

$$\mathfrak{T} = \frac{\hbar^2 n}{4m^*} [(1 + P_c)(\nabla\alpha)^2 + (1 - P_c)(\nabla\beta)^2] + \frac{\hbar^2 n}{2} \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \sqrt{1 - P_c^2} \left\{ \left(\frac{\partial e^{-i\alpha}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial e^{i\beta}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial e^{i\alpha}}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial e^{-i\beta}}{\partial z^*} \right) \right\}. \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_t} \right). \quad (4.9)$$

En el caso de una pequeña diferencia entre las masas efectivas $|m_l - m_t|$, uno puede tomar los ángulos θ y η como en el caso no perturbado. En coordenadas polares (r, ϕ) estos ángulos dependen como $\theta = m\phi$ y $\eta = k\phi$ del ángulo azimutal ϕ . En este caso

$$\alpha = (m - k)\phi, \quad \beta = (m + k)\phi. \quad (4.10)$$

La energía de un simple vórtice en aproximación logarítmica se encuentra por integración de esta expresión sobre el plano de la microcavidad. La integral debería llevarse a cabo desde un valor pequeño de r correspondiente al radio del núcleo a del vórtice, hasta un valor grande de r correspondiente al tamaño del punto de excitación R . El radio del núcleo es $a = \hbar/\sqrt{2m^*\mu}$, donde μ es el potencial químico. Llevando a cabo la integral, el primer término en la ecuación (4.8) produce

$$\frac{\pi\hbar^2 n}{2m^*} [(1 + P_c)(k - m)^2 + (1 - P_c)(k + m)^2] \ln \left(\frac{R}{a} \right), \quad (4.11)$$

Para calcular la contribución del segundo término escribimos

$$e^{i\phi} = \left(\frac{z}{z^*} \right)^{1/2}, \quad e^{i\beta} = \left(\frac{z}{z^*} \right)^{(k+m)/2}, \quad e^{-i\alpha} = \left(\frac{z}{z^*} \right)^{(k-m)/2}, \quad (4.12)$$

lo cual conduce a

$$\left\{ \left(\frac{\partial e^{-i\alpha}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial e^{i\beta}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial e^{i\alpha}}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial e^{-i\beta}}{\partial z^*} \right) \right\} = \frac{(k^2 - m^2)}{2r^2} \cos[2(k - 1)\phi].$$

¹Para $P_c = 0$ en coordenadas $\{x, y\}$ la densidad de energía cinética es

$$\mathfrak{T} = \frac{\hbar^2 n}{2} \left\{ \left(\frac{\cos^2 \eta}{m_l} + \frac{\sin^2 \eta}{m_t} \right) (\theta_x^2 + \eta_y^2) + \left(\frac{\cos^2 \eta}{m_t} + \frac{\sin^2 \eta}{m_l} \right) (\theta_y^2 + \eta_x^2) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \sin(2\eta) (\theta_x \theta_y - \eta_x \eta_y) \right\}, \quad (4.7)$$

donde $\theta_x = \partial\theta/\partial x$, $\theta_y = \partial\theta/\partial y$, etc.

Debido al factor oscilante del coseno este término contribuye únicamente para el caso $k = 1$, este segundo término contribuye con

$$\frac{\pi\hbar^2 n}{2} \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \sqrt{1 - P_c^2} (1 - m^2) \ln \left(\frac{R}{a} \right), \quad (k = 1). \quad (4.13)$$

Al juntar las ecuaciones (4.11) y (4.13) obtenemos la energía elástica del vórtice simple como

$$E_{\text{el}}^{(s)} = \frac{\pi\hbar^2 n}{2} \left[\frac{2}{m^*} (k^2 + m^2 - 2P_c km) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \sqrt{1 - P_c^2} (1 - m^2) \delta_{1,k} \right] \ln \left(\frac{R}{a} \right). \quad (4.14)$$

En lo que sigue consideraremos el caso cuando $P_c = 0$, es decir, el condensado polarizado circularmente. Se ha visto que la energías de muchos de los vórtices están definidas por el promedio de la masa recíproca m^* , pero la energía de polarización del vórtice “erizo” $(1, 0)$ está definida sólo por la pura masa longitudinal m_l . Este resultado puede ser visto por la consideración de la textura de la polarización del vórtice entero mostrado en la figura 4.1. Para los vórtices (a-c), $(0, \pm 1)$ y $(-1, 0)$, el campo de polarización es longitudinal en algunas áreas y transversal en otras. Para el vórtice (d), $(1, 0)$, el campo es longitudinal en cualquier lugar.

Sin la separación TE-TM no hay interacción de largo alcance entre SVs derechos e izquierdos, es decir, entre SVs con el mismo signo del producto km [8]. La separación TE-TM conduce a un débil acoplamiento para el par de SVs, $(1/2, 1/2)$ y $(1/2, -1/2)$. Esto puede entenderse fácilmente ya que cuando estos SVs se juntan forman el vórtice erizo con la energía

$$E_{(1,0)} = (\pi\hbar^2 n / m_l) \ln(R/a). \quad (4.15)$$

Cuando este par está bien separado, la energía del sistema es igual al doble de la energía de un SM simple, es decir, igual a $(\pi\hbar^2 n / m^*) \ln(R/a)$. La energía de interacción de estos SVs separados por la distancia r_{12} es

$$V_{12} = \frac{\pi\hbar^2 n}{2} \left(\frac{1}{m_t} - \frac{1}{m_l} \right) \ln \left(\frac{r_{12}}{a} \right). \quad (4.16)$$

La interacción de largo alcance entre SVs izquierdos y derechos pueden ser importantes para el análisis de la transición Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) (sin esta interacción hay dos transiciones BKT desacopladas). Cabe señalar también que la interrelación entre m_t y m_l depende de la diferencia entre la frecuencia del fotón de la cavidad y la del centro de la brecha para el espejo de Bragg [58]. Por tanto, se puede tener la atracción o la repulsión débil de los SVs $(1/2, 1/2)$ y $(1/2, -1/2)$.

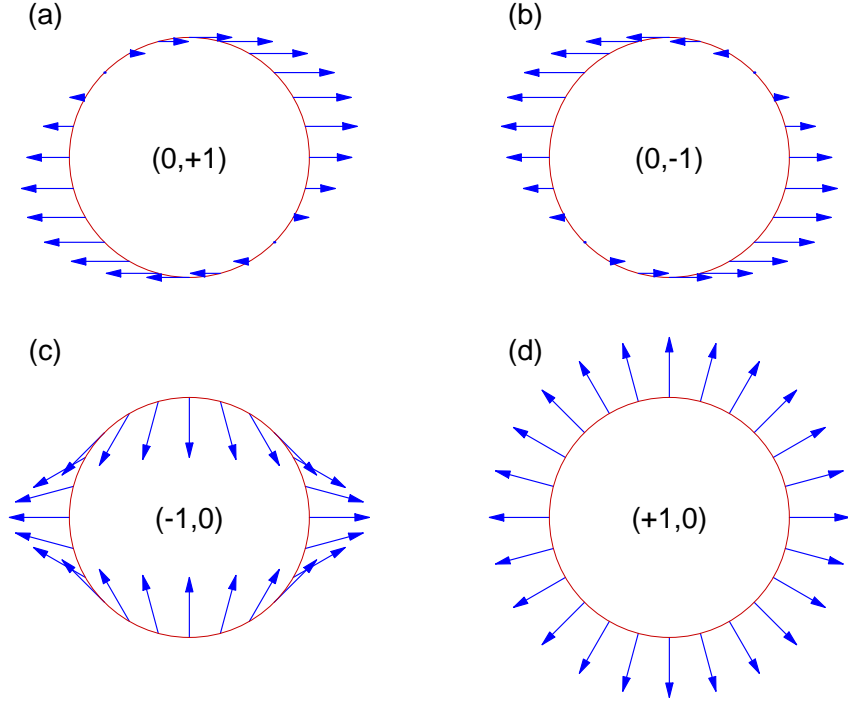


Figura 4.1: Se muestra la textura de la polarización para los diferentes vórtices enteros. Las flechas indican las direcciones instantáneas del parámetro de orden. Los valores de la fase es reflejada en la longitud de la flecha. El campo es una mezcla longitudinal-transversal para los vórtices (a-c), pero es puramente longitudinal para el vórtice erizo (d).

4.2. Efectos de la separación TE-TM: cálculos asintóticos exactos

Al considerar la separación TE-TM, es posible determinar las ecuaciones para $\theta(r, \phi)$ y $\eta(r, \phi)$. Mediante la variación de (4.8) en las coordenadas $\{z, z^*\}$ se tiene

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_t} \right) \Delta \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \left\{ (\ddot{\beta} + i\dot{\beta}^2) e^{i(\beta-\alpha)} + \text{c.c.} \right\} = 0, \quad (4.17a)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_t} \right) \Delta \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \left\{ (\ddot{\alpha} - i\dot{\alpha}^2) e^{i(\beta-\alpha)} + \text{c.c.} \right\} = 0, \quad (4.17b)$$

donde las derivadas sobre z son denotadas por puntos. De la ecuación (4.3), la ecuaciones para $\theta(r, \phi)$ y $\eta(r, \phi)$ pueden escribirse como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_t} \right) \Delta \theta + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \left\{ [\ddot{\theta} + 2i\dot{\eta}\dot{\theta}] e^{2i\eta} + \text{c.c.} \right\} = 0, \quad (4.18a)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_t} \right) \Delta \eta - \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \left\{ [\ddot{\eta} + i(\dot{\eta}^2 + \dot{\theta}^2)] e^{2i\eta} + \text{c.c.} \right\} = 0. \quad (4.18b)$$

Para encontrar el comportamiento asintótico de $\theta(r, \phi)$ y $\eta(r, \phi)$ para largas distancias desde el centro del SV, vamos a suponer que ambos ángulos dependen únicamente de la coordenada azimutal ϕ , de esta manera $\theta(\phi)$ y $\eta(\phi)$ y

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} e^{-i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Rightarrow -\frac{i}{2r} e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -\frac{1}{4r^2} e^{-2i\phi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4.19)$$

y de las ecuaciones (4.18a,b) se tiene

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sin^2 u}{m_l} + \frac{\cos^2 u}{m_t} \right) \frac{d\theta}{d\phi} = 0, \quad (4.20a)$$

$$\left(\frac{\cos^2 u}{m_l} + \frac{\sin^2 u}{m_t} \right) \frac{d^2 u}{d\phi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \sin(2u) \left[1 - \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 \right] = 0, \quad (4.20b)$$

donde $u = \eta(\phi) - \phi$.

Las ecuaciones (4.20) pueden reescribirse en forma más compacta como

$$[1 - \chi \cos(2u)] \theta'' + 2\chi \sin(2u) u' \theta' = 0, \quad (4.21a)$$

$$[1 + \chi \cos(2u)] u'' + \chi \sin(2u) (1 - u'^2 - \theta'^2) = 0, \quad (4.21b)$$

donde

$$\chi = \frac{m_t - m_l}{m_l + m_t}. \quad (4.22)$$

En el caso de un superfluido en movimiento, la ecuación de continuidad del vector corriente \mathbf{J} ,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4.23)$$

puede ser obtenida desde (4.1) y su complejo conjugado. La razón de cambio de $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi}$ se escribe a partir de

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2} \left\{ \frac{1}{m_t} \Delta \psi_i + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \nabla_i (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}) \right\}, \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial \psi_i^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2} \left\{ \frac{1}{m_t} \Delta \psi_i^* + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) \nabla_i (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}^*) \right\}. \quad (4.24b)$$

De esta manera, la componente J_i del vector de corriente se escribe como

$$J_i = \frac{i\hbar}{2} \left\{ (\psi_j \Delta_i \psi_j^* - \psi_j^* \Delta_i \psi_j) + \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_t} \right) (\psi_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}^* - \psi_i^* \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}) \right\}. \quad (4.25)$$

A partir del sistema de coordenadas cilíndricas

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.26a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.26b)$$

y considerando el grado de polarización circular $P_c = 0$, el parámetro de orden (4.2) puede reescribirse como

$$\boldsymbol{\psi} = \sqrt{n} e^{i\theta} \left(\cos u \hat{\mathbf{r}} + \sin u \hat{\boldsymbol{\phi}} \right), \quad (4.27)$$

por lo que la divergencia $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}$ se escribe como

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi} = \frac{\sqrt{n}}{r} e^{i\theta} \left(\cos u \frac{d\eta}{d\phi} + i \sin u \frac{d\theta}{d\phi} \right), \quad (4.28)$$

donde hemos despreciado $\partial/\partial r$. De esta manera al desarrollar la ecuación (4.25), las componentes radial y azimutal de las componentes de la corriente son

$$J_r = \frac{\hbar n}{m^* r} \chi \sin(2u) \frac{d\theta}{d\phi}, \quad (4.29a)$$

$$J_\phi = \frac{\hbar n}{m^* r} [1 - \chi \cos(2u)] \frac{d\theta}{d\phi}. \quad (4.29b)$$

Entonces, la corriente superfluida \mathbf{J} que corresponde a la densidad hamiltoniana (4.7) está dada por una expresión más complicada que la usual. La ecuación de continuidad de la corriente para las soluciones estática $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$, se reduce a la condición $dJ_\phi/d\phi = 0$ y al desarrollar esta expresión de nuevo se obtiene la ecuación (4.21a), lo cuál confirma que la fase del parámetro de orden del condensado, en el límite $r \rightarrow 0$, no cambia de manera lineal con el ángulo azimutal ϕ , como erróneamente fue considerado en [83] y por lo mismo recibió el comentario [84].

En lo que sigue se denotan las soluciones vórtices como (k, m) , con los números de polarización y fase k y m , respectivamente. Estas soluciones están definidas por $\eta(2\pi) - \eta(0) = 2\pi k$ y $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi m$, y como se pueden ser enteras o simientes simultáneamente con las suma $k + m$ entera [8]. Las ecuaciones (4.21a,b) tienen soluciones simples para $k = 1$ y para cualquier valor arbitrario de m ($\eta = \phi$, $\theta = m\phi$ y $u(\phi) = 0$). A parte de estas las soluciones triviales, las ecuaciones (4.21a,b) pueden ser resueltas para diferentes valores de las cargas topológicas (k, m) . Existen dos soluciones cualitativamente diferentes para los SVs elementales $k, m = \pm 1/2$. Abajo se presentan las series de estas soluciones obtenidas mediante iteraciones en potencias de χ , considerando que en las microcavidades reales la separación TE-TM es pequeña $\chi \ll 1$.

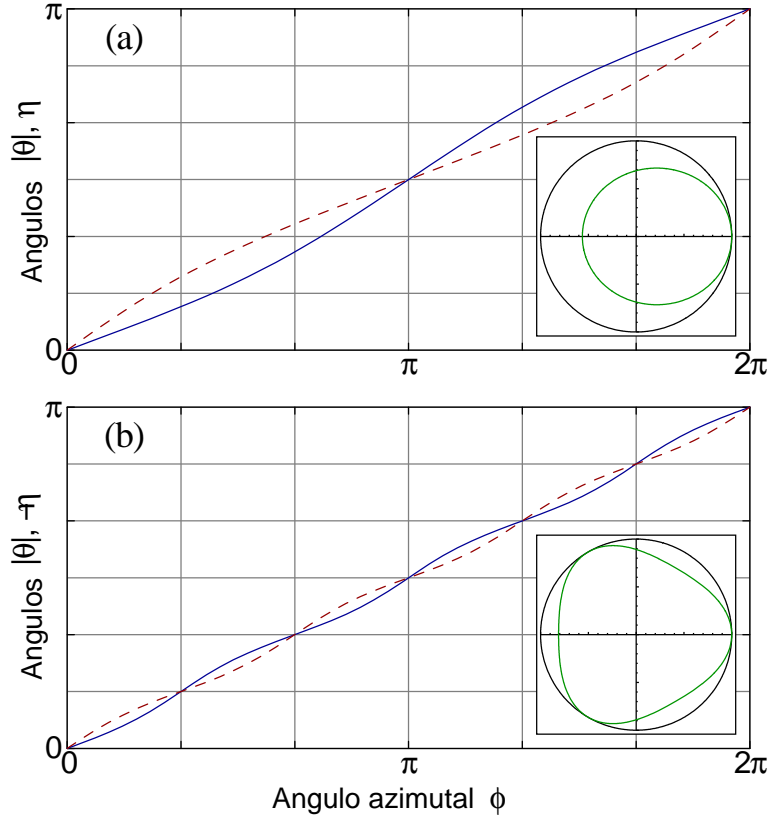


Figura 4.2: Se muestra el ángulo de polarización $\eta(\phi)$ (línea azul sólida) y el ángulo de fase $\theta(\phi)$ (línea roja discontinua). (a) Caso para los SVs $(1/2, \pm 1/2)$. (b) Caso para los SVs $(-1/2, \pm 1/2)$. Las figuras insertadas muestran la deformación de las líneas de corriente (líneas verdes densas) alrededor del núcleo del SV con respecto a los círculos perfectos (líneas negras delgadas).

Para los SVs $(1/2, \pm 1/2)$ las soluciones son

$$\theta(\phi) = \pm \left[\frac{1}{2}\phi + \frac{\chi}{2} \sin(\phi) + \frac{\chi^2}{4} \sin(2\phi) + \dots \right], \quad (4.30a)$$

$$\eta(\phi) = \frac{1}{2}\phi - \frac{\chi}{2} \sin(\phi) + \frac{\chi^2}{8} \sin(2\phi) + \dots. \quad (4.30b)$$

Para los SVs $(-1/2, \pm 1/2)$ las soluciones son

$$\theta(\phi) = \pm \left[\frac{1}{2}\phi + \frac{\chi}{6} \sin(3\phi) + \frac{\chi^2}{36} \sin(6\phi) + \dots \right], \quad (4.31a)$$

$$\eta(\phi) = -\frac{1}{2}\phi + \frac{\chi}{6} \sin(\phi) - \frac{\chi^2}{24} \sin(6\phi) + \dots. \quad (4.31b)$$

Las soluciones a las ecuaciones (4.21a,b) también pueden encontrarse numéricamente como se muestran en la figura 4.2. Estas soluciones se han obtenido con un valor grande del parámetro de separación TE-TM, $\chi = 0.3$, para ilustrar las características cualitativas del comportamiento de los ángulos de polarización y fase. El análisis de la corriente superfluida alrededor del núcleo del vórtice muestra que las líneas de corriente son deformadas con respecto a los círculos perfectos. Físicamente, la deformación de las líneas de corriente aparece debido al cambio de la masa polaritónica con la polarización. Usando las ecuaciones (4.21a,b) es posible encontrar las líneas de corriente definidas por la ecuación

$$\frac{d \ln(r)}{d\phi} = \frac{\chi \sin[2u(\phi)]}{1 - \chi \cos[2u(\phi)]} = \frac{J_r}{J_\phi}, \quad (4.32)$$

dado que $J_r \propto v_r$ y $J_\phi \propto v_\phi$, siendo \mathbf{v} la velocidad del superfluido. La deformación de las líneas de corriente se muestran en los cuadros insertados en la figura 4.2. El comportamiento asintótico encontrado arriba divide las soluciones de la ecuación de GP estática en clases topológicamente diferentes de acuerdo a los valores de los valores de las cargas k y m . Los SVs deben encontrarse mediante la minimización del hamiltoniano GP completo (2.13). Estas soluciones estáticas, mínimos del hamiltoniano, pueden encontrarse ya sea por la solución numérica de la ecuación GP con el comportamiento asintótico mostrado arriba, o por algún otro medio (por ejemplo, por método variacional).

Cuando $r \rightarrow 0$, una de las componentes del SV va a cero y es singular: el parámetro de orden se comporta como $re^{\pm i\phi}$ de tal suerte que el gradiente no está definido en $r = 0$. Por ejemplo, para el SV $(1/2, 1/2)$, la componente $L \propto re^{i\phi}$ y la componente $R = \text{cte}$. Las componentes circulares vienen a estar desacopladas en $r \rightarrow 0$ ya que $L \propto z$ y $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$. De esta manera se espera que la deformación de las líneas de corriente decrezcan con el decremento de r y desaparezcan dentro del núcleo del SV. Por otro lado, si un SV es creado por algún medio externo y evoluciona de acuerdo a la ecuación de GP dependiente del tiempo (2.12), esta singularidad en la solución estará presente todo el tiempo. Esto se debe a que la ecuación de GP es regular y la singularidad definida por el vórtice es rígida.

4.3. Efectos de la fijación de la polarización en la textura del SV

La predicción de que el condensado polaritónico debería emitir luz linealmente polarizada [35], fue comprobada en los experimentos que dieron evidencia de la condensación de Bose-Einstein(CBE) de excitones-polaritones en microcavidades basadas en GaAs [31] y en CdTe [3, 4]. La formación de la polarización lineal del condensado polaritónico fue explicada en [36]. En ese trabajo se muestra que la densidad de energía libre del sistema

se minimiza para la polarización lineal del condensado, es decir, cuando $\boldsymbol{\psi}^* \times \boldsymbol{\psi} = 0$. El caso de la fijación de la dirección de la polarización lineal sobre un eje cristalino fue descrita en [37]. Un examen cuidadoso de la emisión de la luz por abajo de cierto umbral reveló una separación de energía ϵ del orden de 0.1 meV entre polaritones polarizados en x y en y en $k = 0$. Esta energía ϵ que se debe a la anisotropía óptica de la cavidad, explicó porqué la luz se orienta a lo largo de una dirección bien definida. Los experimentos en [3] también revelan esta separación de energía.

En esta sección se consideran los efectos de la separación ϵ en las propiedades de los vórtices. En este caso la energía del condensado uniforme viene a ser dependiente de la orientación de la polarización. Cuando se toma en cuenta la separación de energía ϵ entre los estados polaritónicos polarizados linealmente, el hamiltoniano de sistema polaritónico puede escribirse como

$$\begin{aligned} H &= H_{cin} + H_\epsilon + H_{int} \\ &= \int d^2r \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} (\boldsymbol{\psi}^* \cdot \Delta \boldsymbol{\psi}) - \mu (\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi}) \right] - \frac{\epsilon}{2} (|\psi_x|^2 - |\psi_y|^2) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^2r \{ (U_0 - U_1) (\boldsymbol{\psi}^* \cdot \boldsymbol{\psi})^2 + U_1 |\boldsymbol{\psi}^* \times \boldsymbol{\psi}|^2 \}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

Es conviene ahora escribir el parámetro de orden en $\boldsymbol{\psi}$ como un vector real de cuatro componentes reales $\sqrt{n}\phi_i = (\text{Re}\{\psi_x\}, \text{Im}\{\psi_x\}, \text{Re}\{\psi_y\}, \text{Im}\{\psi_y\})$ con $i = 1, 2, 3, 4$. Con esta sustitución el hamiltoniano polaritónico ahora se escribe como

$$H = \frac{1}{2} \rho_s \int d^2r \left[\left(\sum_i \nabla \phi_i \right)^2 - \frac{1}{a^2} \sum_i \phi_i^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sum_i \phi_i^2 \right) + \frac{(\gamma - 1)}{a^2} S_z^2 - \frac{1}{2b^2} T \right], \quad (4.34)$$

con $S_z = \phi_1\phi_4 - \phi_2\phi_3$ el pseudoespín polaritónico y $T = \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 - \phi_4^2$. La primera longitud a sigue siendo el tamaño del núcleo del semivórtice y la segunda longitud $b = \hbar/\sqrt{2m^*\epsilon}$ definirá el ancho de la cuerda, como se ve abajo.

De nuevo estamos interesados en las soluciones tipo SVs de la ecuación Gross-Pitaevskii estática (3.2)

$$\frac{\delta H[\phi_i]}{\delta \phi_i} = 0, \quad (4.35)$$

la cual resulta en

$$\Delta \phi_i + \frac{1}{a^2} \phi_i \left(1 - \sum_k \phi_k^2 \right) - \frac{1}{a^2} \alpha_i \alpha_{5-i} (\gamma - 1) S_z \phi_i + \frac{1}{2b^2} \text{sgn}(5 - 2i) \phi_i = 0, \quad (4.36)$$

para cada componente $i = 1, 2, 3, 4$, donde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ y $\alpha_4 = 1$ y k corriendo de 1 a 4.

Para estudiar los efectos de la separación (“*splitting*”) en la dispersión de los polaritones libres en las propiedades de los vórtices (fijación de la polarización), escribimos el parámetro de orden en la base de la polarización circular.

$$\begin{aligned}\psi_{hv} &= \sqrt{n}(\phi_1 + i\phi_2, \phi_3 + i\phi_4) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2}[(f_1 + ig_1)\{1, i\} + (f_2 + ig_2)\{1, -i\}] \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2}[h_1\{1, i\} + h_2\{1, -i\}],\end{aligned}\tag{4.37}$$

donde

$$h_1 = f_1 + ig_1, \quad h_2 = f_2 + ig_2,\tag{4.38}$$

y en donde las funciones f_1 , g_1 , f_2 y g_2 se escriben como

$$\begin{aligned}f_1 &= \phi_1 + \phi_4, & f_2 &= \phi_1 - \phi_4, \\ g_1 &= \phi_2 - \phi_3, & g_2 &= \phi_2 + \phi_3.\end{aligned}\tag{4.39}$$

Las funciones ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 y ϕ_4 satisfacen al conjunto de ecuaciones dadas por (4.36). Usando estas relaciones podemos encontrar el sistema de ecuaciones para las funciones f_1 , g_1 , f_2 y g_2 .

Las funciones complejas h_1 y h_2 satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Delta h_1 + \frac{1}{2b^2}h_2 + \frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{1}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2)\right]h_1 + \frac{\gamma-1}{4a^2}(|h_2|^2 - |h_1|^2)h_1 &= 0, \\ \Delta h_2 + \frac{1}{2b^2}h_1 + \frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{1}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2)\right]h_2 + \frac{\gamma-1}{4a^2}(|h_1|^2 - |h_2|^2)h_2 &= 0.\end{aligned}\tag{4.40}$$

El sistema de ecuaciones (4.40) reproduce el caso conocido cuando $\gamma = 3$ y sin una separación de energía ($\epsilon = 0, b = \infty$), ya que las soluciones al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Delta h_1 + \frac{1}{a^2}(1 - |h_1|^2)h_1 &= 0, \\ \Delta h_2 + \frac{1}{a^2}(1 - |h_2|^2)h_2 &= 0.\end{aligned}\tag{4.41}$$

son $h_1 = 1$ y $h_2 = u(r/a)e^{i\phi}$ donde $u(r/a)$ es la función radial del vórtice de fase usual [77] en un condensado sin espín.

Consideremos ahora el caso, para cualquier valor de γ , de una pequeña separación de energía XY, es decir, $\epsilon \ll \mu$. Lo cual es razonable y que puede presentarse en el condensado, ya de otro modo el SV requeriría demasiada energía para ser excitado.

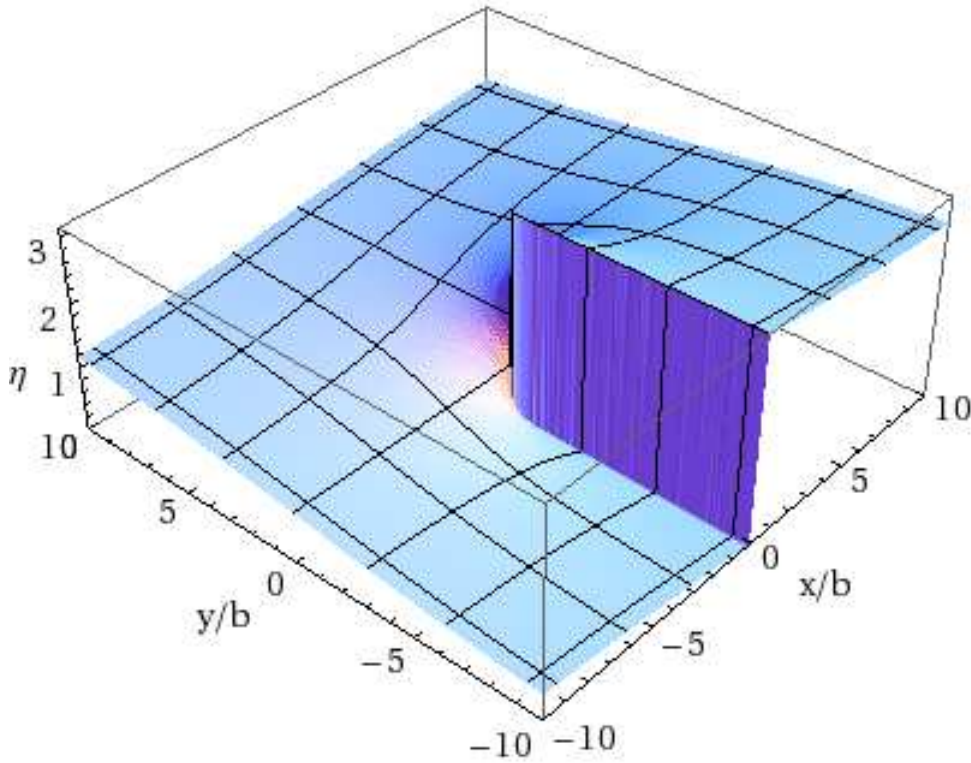


Figura 4.3: Perspectiva tridimensional de la solución para ambos θ y η en el caso cuando $\epsilon = 0$.

Así que vamos a suponer que $b \gg a$, donde a como ya sabemos, es el tamaño del núcleo SV.

En este caso la solución del parámetro de orden ψ_{hv} para distancias $r \sim a$, es decir, dentro del núcleo del SV, debería ser aproximadamente la solución sin separación de energía XY. Fuera del núcleo, cuando $r \gg a$, la concentración del condensado $n = \psi^* \cdot \psi$ es constante (región elástica) y el parámetro de orden en la base de polarización circular, como sabemos, puede escribirse como

$$\psi_{lin} = \frac{\sqrt{n}}{2} (e^{i(\theta-\eta)}\{1, i\} + e^{i(\theta+\eta)}\{1, -i\}), \quad (4.42)$$

donde $\theta(\mathbf{r})$ y $\eta(\mathbf{r})$ son los ángulos de fase y polarización y son funciones de la distancia al centro del núcleo r y del ángulo azimutal ϕ . El hamiltoniano (4.33) en la región elástica en este caso es

$$H_{el} = \frac{1}{2}\rho_s \int d^2r \{(\nabla\eta)^2 + (\nabla\theta)^2 - \frac{1}{2b^2} \cos(2\eta)\}, \quad (4.43)$$

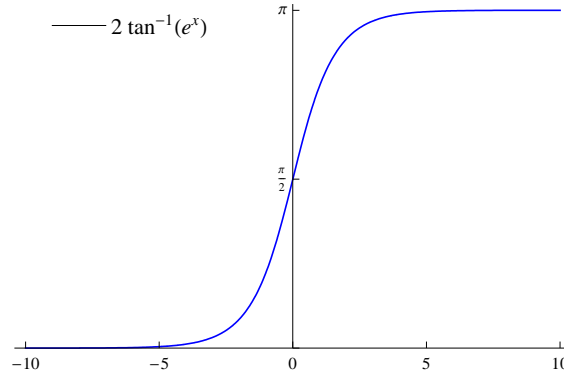


Figura 4.4: Solución tipo kink de la ecuación sen-Gordon (4.45b).

donde hemos omitido una constante de energía.

A partir de la ecuación (4.37) y de la última expresión para ψ_{lin} (4.42), las funciones complejas h_1 y h_2 se escriben como

$$h_1 = e^{i(\theta-\eta)}, \quad h_2 = e^{i(\theta+\eta)}, \quad (4.44)$$

y al sustituir estas funciones en la ecuación (4.40) se deduce que

$$\Delta\theta = 0, \quad (4.45a)$$

$$2b^2\Delta\eta = \sin(2\eta). \quad (4.45b)$$

La solución a la ecuación (4.45a) describe el cambio uniforme del ángulo de fase con $\theta = m\phi$ y $m = \pm 1/2$. En el caso cuando $\epsilon = 0$, ambos θ y η son funciones suaves de ϕ , tal como se muestra en la figura 4.3.

La ecuación (4.45b) es la conocida ecuación elíptica de sen-Gordon. El nombre de esta ecuación está inspirada por la presencia de término \sin al compararla con la ecuación Klein-Gordon. Esta ecuación ha sido usada en un amplio rango de fenómenos, incluyendo propagación de perturbaciones en cristales, de flujo magnético en líneas de Josephson, de movimiento de paredes de dominio en cristales magnéticos y de movimiento bidimensionales de partículas elementales [85].

Las soluciones tipo vórtice de la ecuación de sen-Gordon, son soluciones topológicas especiales en teoría de campo y tienen aplicaciones importantes en física de materia condensada. La solución vórtice más simple puede ser interpretada como una disminución (o incremento) de la amplitud del campo η como uno camina en la dirección positiva (con las manecillas del reloj) alrededor de la singularidad llamada centro del vórtice. Tal patrón está caracterizado por una carga topológica

$$k = \frac{1}{2\pi} \oint_c \nabla\eta \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.46)$$

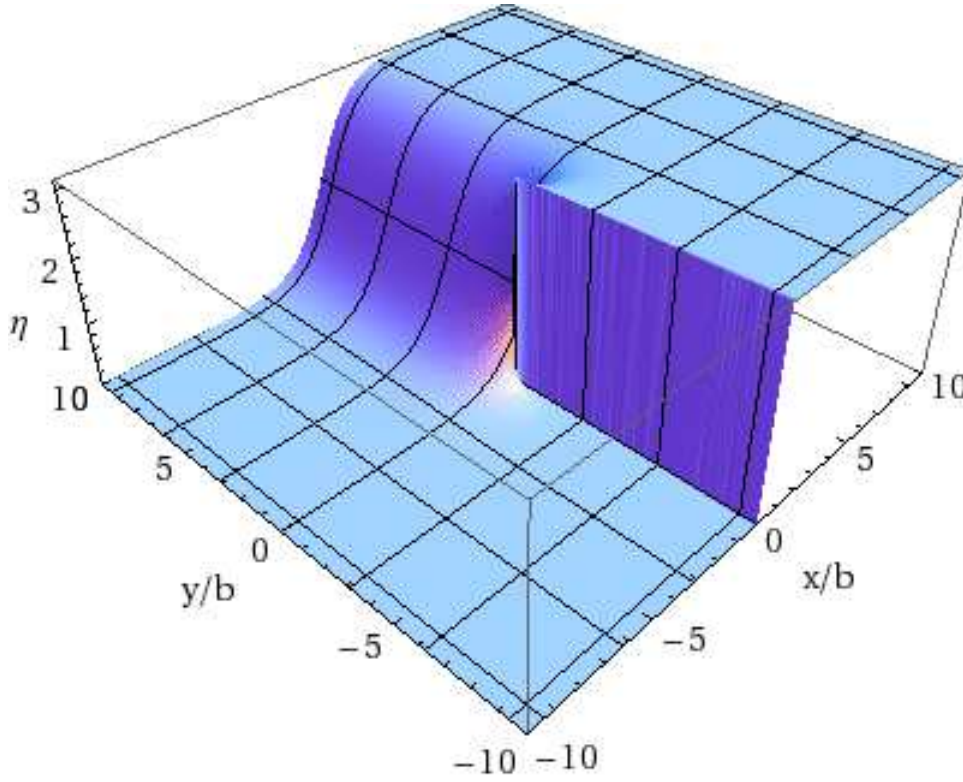


Figura 4.5: Configuración tipo vórtice descrita para la ecuación sen-Gordon (4.45b) para η .

donde c es el contorno arbitrario en plano XY rodeando el centro del vórtice. Soluciones numéricas tipo vórtice fueron reportadas en [86] para las cargas topológicas $k = \pm 1$.

Entonces buscamos soluciones tipo vórtice y aplicamos las condiciones límites para resolver la ecuación de sen-Gordon (4.45b) para η . Consideremos el SV $(1/2, 1/2)$. En este caso $\theta = \phi/2$ en cualquier lugar. La solución para η también debería comportarse como $\eta = \phi/2$ en la región $r \ll b$. En el límite opuesto de $r \gg b$, por efectos de minimización de la energía y debido a que la polarización debe cambiar por π , una región localizada (un “*kink*”) debe aparecer, por lo que una cuerda se forma donde la polarización se cambia rápidamente y de esta manera el ángulo de polarización η cambia únicamente en una vecindad estrecha del orden de b alrededor del eje de la cuerda. Fuera de esta cuerda, la polarización puede ser fijada a lo largo de una dirección, digamos \hat{y} . Entonces, para $y \gg b$ y $x \sim b$, la ecuación (4.45b) resulta unidimensional y puede escribirse como

$$2b^2 \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} = \sin(2\eta_0), \quad (4.47)$$

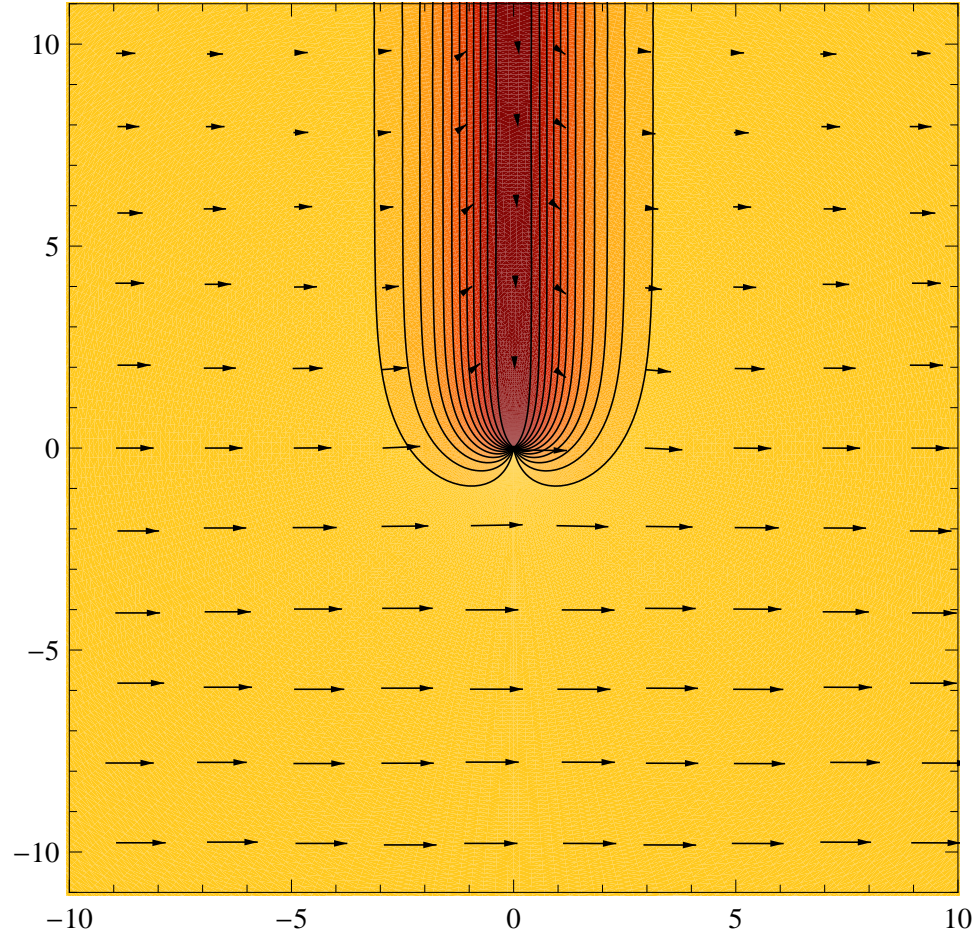


Figura 4.6: Perspectiva bidimensional de la solución tipo vórtice descrita para la ecuación sen-Gordon(4.45b). Las flechas indican la dirección local del vector de polarización.

con la solución (tipo “*kink*”))

$$\eta_0(x) = 2 \tan^{-1}(\exp\{x/b\}). \quad (4.48)$$

que se muestra en la figura 4.4.

De esta manera, para resolver numéricamente la ecuación (4.45b) en todo el espacio se consideran las siguientes condiciones límites.

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &\xrightarrow{y \rightarrow \infty} \eta_0(x) = 2 \tan^{-1}(\exp\{x/b\}), \\ \eta(x, y) &\xrightarrow{y \rightarrow -\infty} n\pi \begin{cases} n = 0, & x < 0 \\ n = 1, & x > 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

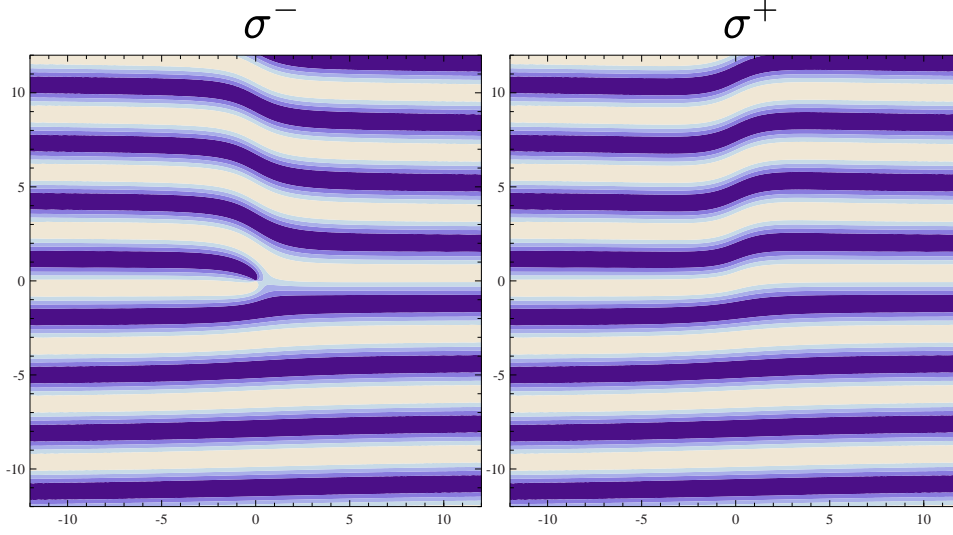


Figura 4.7: Se muestran las franjas de interferencia (ver texto) en las polarizaciones izquierda σ^- y derecha σ^+ , respectivamente.

y además

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, & \eta(x, y) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \pi, \\ \eta(-\delta, y) &\rightarrow 0, & \eta(\delta, y) &\rightarrow \pi, \quad (\delta \rightarrow 0, y < 0), \end{aligned} \quad (4.50)$$

en la región $R^2 - C$, donde el corte C representa la línea $\{(0, y) | 0 < y < \infty\}$ y asegura que $\eta(\mathbf{r})$ es univaluada.

Al usar un método numérico de relajación, junto con el conjunto de condiciones límites, se obtuvo la solución tipo vórtice para la ecuación sen-Gordon (4.45b) para η . Esta solución tipo vórtice se presenta en la figura 4.5. La región donde η cambia rápidamente define la cuerda o solitón unido al SV. La gráfica de contorno para η se muestra en la figura (4.6) donde la cuerda unida al SV, está definida por la línea donde la polarización es vertical. Las líneas continuas indican los valores del cambio del ángulo η de 0 a π con el paso de $\pi/12$.

En general, cualquier orientación de la cuerda es posible y los SVs orientados de manera diferente portan la misma energía. La presencia de la separación fija (4.6) conduce a la interacción de SVs izquierdos y derechos. Esta separación acopla $(1/2, 1/2)$ a $(-1/2, 1/2)$ y $(-1/2, -1/2)$ a $(1/2, -1/2)$. La energía de interacción es proporcional a la longitud de la cuerda que conecta estos SVs, y crece linealmente con la distancia.

El comportamiento de las franjas de interferencia en las dos polarizaciones circulares se muestra arriba para la cuerda conectada al semivórtice $(1/2, 1/2)$. Estas franjas aparecen cuando se observa el patrón de interferencia de la señal emitida desde el

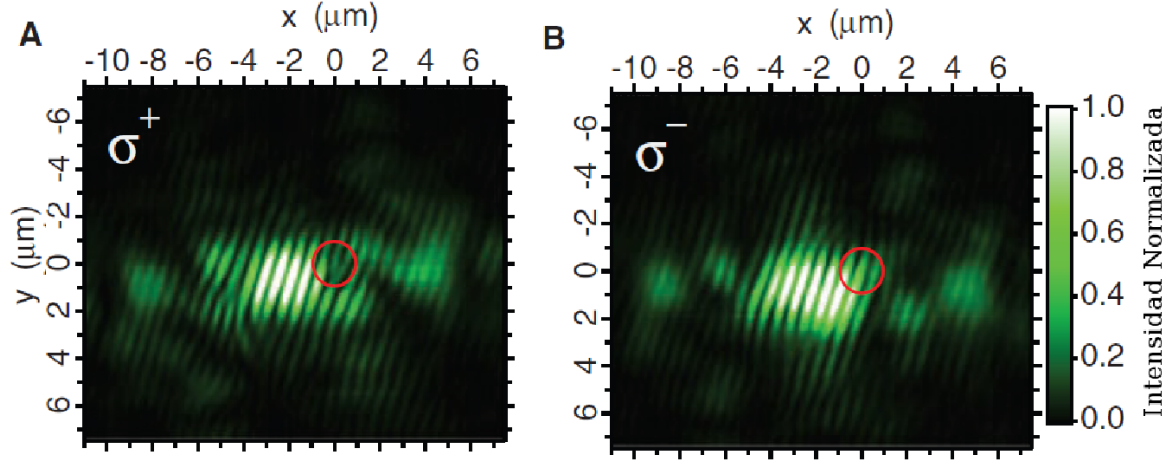


Figura 4.8: De [10]. Patrones de interferencia producidos cuando la emisión de luz del condensado polaritónico se envía a través de filtros de polarización derecha σ^+ e izquierda σ^- , respectivamente.

condensado polaritónico en una componente circular y una onda plana de la misma intensidad.

Experimentalmente [10][ver figura 4.8], esta onda plana se origina en el condensado, pero desde un lugar diferente, donde el parámetro de orden es aproximadamente constante (y esta señal de onda plana es atenuada y reflejada). Más precisamente, la señal emitida en la polarización σ^\pm es proporcional a $\exp\{i(\theta \mp \eta)\}$, respectivamente, y las franjas fueron calculadas como $|e^{i(\theta \mp \eta)} + e^{i\kappa y}|^2$ con $\kappa = 2/b$.

Como se puede observar, el SV con cuerda está caracterizado por una dislocación tipo tenedor en una polarización circular. Por otra parte, las franjas de interferencia se desplazan media longitud de onda al atrevesar la cuerda en ambas polarizaciones circulares. La mejor opción para observar la cuerda en el patrón de interferencia es cuando el vector de onda (onda plana) es colineal con la cuerda, con las franjas perpendiculares a la cuerda.

Conclusiones

En esta tesis hemos abordado el estudio de la estructura y las propiedades de los vórtices presentes en los condensados polaritónicos en microcavidades semiconductoras. Se desarrolló la teoría de las propiedades de los SVs bajo un campo magnético externo y en la presencia de una separación de energía por la polarización en las bandas polaritónicas. Se estudió como estos efectos modifican la transición de superfluidez en el sistema polaritónico.

Las principales conclusiones de estos estudios son las siguientes. Se observó que bajo un campo magnético crítico, definido por la constante de interacción entre polaritones, el condensado está elípticamente polarizado y existen dos tipos de semi-vórtices, profundos y poco profundos [87]. Se calculó la textura del campo de polarización y la energía de estos SVs como función del campo magnético y como función del parámetro de interacción entre los polaritones de polarización opuesta. Cuando existe atracción entre los polaritones, en ambos tipos de SVs, una polarización circular está acompañada de un agotamiento parcial de la otra polarización circular. Esto se debe a que los polaritones de una polarización circular tienden a moverse a regiones con altas concentraciones de polaritones con la otra polarización circular, así que los polaritones son empujados fuera del núcleo del vórtice. Por el contrario, en el caso de repulsión entre los polaritones con polarización opuesta, una polarización circular lleva a la acumulación de polaritones con la otra polarización circular hacia el núcleo. Como resultado, la concentración total de polaritones no decrece sustancialmente dentro del núcleo, aunque la acumulación disminuye a medida que el campo magnético se aproxima al valor crítico, y no hay polaritones con polarización circular opuesta para SVs profundos en el punto crítico. Es en este punto donde los SVs poco profundos desaparecen y los SVs profundos se transforman en vórtices enteros en el condensado circularmente polarizado. También se mostró que existen dos transiciones de superfluidez tipo BKT que corresponden a la disociación de SVs derechos e izquierdos, respectivamente.

Se estudió la modificación de la textura de la polarización de los SVs cuando se considera la separación de energía TE-TM en las bandas polaritónicas. Se demostró que esta separación tiene un efecto no trivial en el comportamiento asintótico de campo de polarización de los SVs [84]. En particular, aparece una deformación en las líneas

de corriente del superfluido cerca de los SVs con respecto a las líneas de corriente de círculos perfectos. Se desarrolló la teoría de esta deformación. Se mostró que la separación de energía TE-TM resulta en un acoplamiento de largo alcance entre los SVs derechos y izquierdos, $(1/2, 1/2)$ y $(1/2, -1/2)$, por lo que debe resultar en el acoplamiento de dos transiciones tipo BKT [88].

Consideramos también el efecto de la fijación de polarización lineal y mostramos que en este caso el SV está acompañado de la aparición de una cuerda que define la región donde la polarización esta rotando [88]. La teoría de la estructura de la cuerda fue desarrollada. La presencia de las cuerdas resulta en un incremento de la temperatura de la transición de la superfluidez.

Los resultados del estudio de la estructura y de las propiedades de los vórtices en los condensados polaritónicos presentados en esta tesis, deben considerarse para el análisis de la transición de fase de la superfluidez polaritónica, dado que se considera que esta transición es tipo BKT por la naturaleza bidimensional del condensado polaritónico, pero lo cierto es que los SVs derechos e izquierdos interaccionan de manera logarítmica con la distancia de separación, sólo en el caso cuando el efecto de la separación de energía TE-TM es tomada en cuenta, mientras que la energía de interacción de los SVs derechos e izquierdos unidos por la cuerda, crece linealmente con esta distancia. Entonces, en la consideración de la presencia de la cuerda unida a los SVs, la transición de fase es modificada de la transición BKT y debe ser estudiada adicionalmente. En este caso las dos transiciones tipo BKT están acopladas. Por otro lado, en esta tesis no se ha considerado el hecho de que el medio es desordenado y que los vórtices están atrapados por el mismo [9], evitando la conexión del superfluido. Todas estas consideraciones mencionadas son problemas de investigación en trabajos futuros.

Bibliografía

- [1] A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge University Press, Crambridge, England, 1995.
- [2] A. Kavokin, G. Malpuech, *Cavity Polaritons*, Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [3] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymónske, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, *Nature* **443**, 409, (2006).
- [4] Balili R, Hartwell V, Snoke D, Pfeiffer L, West K., *Science* **316**, 5827, (2007).
- [5] M. Richard, J. Kasprzak, R. André, R. Romestain, Le Si Dang, *Phys. Rev. B*, **72**, 202301, (2005).
- [6] C. W. Lai, N. Y. Kim¹, S. Utsunomiya, G. Roumpos, H. Deng, M. D. Fraser, T. Byrnes, P. Recher, N. Kumada, T. Fujisawa, Y. Yamamoto, *Nature* **450**, 529, (2007).
- [7] J. J. Baumberg, A. V. Kavokin, S. Christopoulos, A. J. D. Grundy, R. Butté, G. Christmann, D. D. Solnyshkov, G. Malpuech, G. Baldassarri Höger von Högersthal, E. Feltin, J.-F. Carlin, N. Grandjean, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 136409, (2008).
- [8] Y. G. Rubo, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 106401, (2007).
- [9] K. G. Lagoudakis, M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. André, L. S. Dang, B. Deveaud-Plédran, *Nat.Phys.* **4**, 706, (2008).
- [10] K. G. Lagoudakis, T. Ostatnický, A. V. Kavokin, Y. G. Rubo, R. André, and B. Deveaud-Plédran, *Science* **326**, 974, (2009).
- [11] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [12] A. M. Luttinger, W. Kohn, *Phys. Rev.* **97**, 869, (1955).

- [13] G. Bastard, *Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures*, Halstead, New York, 1988.
- [14] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, Y. Arakawa, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314, (1992).
- [15] V. Savona, L. C. Andreani, P. Scwendimann, A. Quattropani, *Solid State Commun* **93**, 733, (1995).
- [16] J. J. Hopfield, *Phys. Rev.* **112**, 1555, (1958).
- [17] A. Kavokin, M. A. Kaliteevski, *Solid State Commun* **95**, 859, (1995).
- [18] R. Houdré, C. Weisbuch, R. P. Stanley, U. Oesterle, P. Pellandini, M. Illegemd, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2043, (1994).
- [19] S. I. Tsintzos, N. T. Pelekanos, G. Konstantinidis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, *Nature* **453**, 372, (2008).
- [20] A. Imamoglu, J. R. Ram., *Phys. Lett. A* **214**, 193, (1996).
- [21] F. Tassone, C. Piermarocchi, V. Savona, A. Quattropani, P. Schwendimann, *Phys. Rev. B* **56**, 7554, (1997).
- [22] L. S. Dang, D. Heger, R. André, F. Boeuf, R. Romestain, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3920, (1998).
- [23] P. Senellart, J. Bloch., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1233, (1999).
- [24] F. Tassone, Y. Yamamoto, *Phys. Rev. B* **59**, 10830, (1999).
- [25] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547, (2000).
- [26] R. M. Stevenson, V. N. Astratov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismail, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3680, (2000).
- [27] P. G. Savvidis, C. Ciuti, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **64**, 0753111, (2001).
- [28] M. Saba, C. Ciuti, J. Bloch, V. Thierry-Meig, R. André, L. S. Dang, S. Kundermann, A. Mura, G. Bongiovanni, J. L. Staehli, B. Deveaud, *Nature* **730**, 74, (2001).
- [29] G. Messin, J.-Pah. Karr, A. Bass, G. Khitrova, R. Houdré, R. P. Stanley, U. Oesterle, E. Giacobino, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 127403, (2001).

- [30] P. G. Lagoudakis, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, P. R. Eastham, M. S. Skolnick, J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **65**, 161310, (2002).
- [31] H. Deng, G. Weihs, C. Santori, J. Bloch, Y. Yamamoto, *Science* **298**, 199, (2002)
- [32] N. D. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133, (1966).
- [33] J. Keeling, P. R. Eastham, M. H. Szymanska, and P. B. Littlewood, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 226403, (2004);
- [34] F. M. Marchetti, J. Keeling, M. H. Szymanska, y P. B. Littlewood, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 066405, (2006).
- [35] F. P. Laussy, I. A. Shelykh, G. Malpuech, A. Kavokin, *Phys. Rev. B* **73**, 035315, (2006).
- [36] I. A. Shelykh, Y. G. Rubo, G. Malpuech, D. D. Solnyshkov, and A. Kavokin, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 066402, (2006).
- [37] J. Krasprzak, R. André, Le Si Dang, I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, Y. G. Rubo, K. V. Kavokin, G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **75**, 045326, (2007).
- [38] P. Kapitza, *Nature* **141**, 74, (1938).
- [39] F. London, *Nature* **141**, 643, (1938).
- [40] L. D. Landau, *J. Phys.* **5**, 71, (1941).
- [41] N. N. Bogoliubov, *J. Phys.* **11**, 23 (1947).
- [42] A. Amo, D. Sanvitto, F.P. Laussy, D. Ballarini, E. del Valle, M.D.Martin, A. Lemaître, J. Bloch, D.N. Krizhanovskii, M.S. Skolnick, C. Tejedor, L. Viña, *Nature* **457**, 291, (2009).
- [43] V. L. Berezinskii, *Sov. Phys. JETP* **32**, 34, 610, (1970).
- [44] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6**, 1181, (1973).
- [45] D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1201, (1977).
- [46] G. Malpuech, Yuri G. Rubo, I. F. P. Laussy, P. Biegenwald, A. V. Kavokin, *Semicond. Sci. Technol.* **18**, S395, (2003).
- [47] I. Carusotto, C. Ciuti, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 166401, (2004).
- [48] K. V. Kavokin, I. A. Shelykh, G. Malpuech, P. Biegenwald, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 017401, (2004).

- [49] A. A. Abrikosov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 32 (1957) 1442 [Sov. Phys. JETP 5 (1957) 1174].
- [50] Le Si Dang, D. Heger, R. André, F. Boeuf, R. Romestain, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3920, (1998).
- [51] D. Porras, C. Tejedor, *Phys. Rev. B* **67**, 161310, (2003).
- [52] Y. G. Rubo, F. P. Laussy, G. Malpuech, A. Kavokin, P. Bigenwald, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 156403, (2003).
- [53] C. J. Pethick y H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [54] Y. G. Rubo, *Phys. State Solidi A* **201**, 641 (2004).
- [55] D. Read, P. J. Membry, T. C. H. Liew, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **80**, 195309, (2009).
- [56] M. D. Martin, G. Aichmayr, L. Viña, R. Andre, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 077402, (2002).
- [57] F. Tassone, F. Bassani, L.C. Andreani, *Phys. Rev. B* **45**, 6023, (1992).
- [58] G. Panzarini, L. C. Andreani, A. Armitage, D. Baxter, M. S. Skolnick, V. N. Astratov, J. S. Roberts, A. V. Kavokin, M. R. Vladimirova, M. A. Kaliteevski, *Phys. Rev. B* **59**, 5082, (1999).
- [59] M. Z. Maialle, E. A. de Andrada e Silva, L. J. Sham, *Phys. Rev. B* **47**, 15776, (1993).
- [60] L. Klotowski, A. Amo, M. D. Martín, L. Viña, I. A. Shelykh, M. M. Glazov, A. V. Kavokin, D. D. Solnyshkov, G. Malpuech, R. André, *Solid State Commun.* **139**, 51 (2006).
- [61] G. Malpuech, M. M. Glazov, I. A. Shelykh, K. V. Kavokin, p. Bigenwald. *Appl. Phys. Lett.* **88**, 111118 (2006).
- [62] C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schwendimann, *Phys. Rev. B* **58**, 7926 (1998).
- [63] F. Tassone, Y. Yamamoto, *Phys. Rev. B* **59**, 7554 (1999).
- [64] J. Inoue, T. Brnades, A. Shimizu, *Phys. Rev. B* **61**, 7926 (1999).
- [65] I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, Y. G. Rubo, T. C. H. Liew, G. Malpuech. *Semi-cond. Sci. Technol.* **25**, 013001, (2010).

- [66] I. A. Shelykh, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, *Superlattice. Microst.* **41**, 313, (2007).
- [67] Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, I. A. Shelykh, *Phys. Lett. A* **358**, 227, (2006).
- [68] N. N. Bogoliubov, *J. Phys.*, (USSR), **11**, 23, (1947).
- [69] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6**, 1181, (1973).
- [70] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc. A* **260**, 218, (1961).
- [71] A. L. Fetter, A. A. Svidzinsky, *J. Phys. Condens. Matter* **13**, R135–R194, (2001).
- [72] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [73] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [74] T. P. Simula, P. B. Blakie, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 020404, (2006).
- [75] L. Giorgetti, I. Carusotto, Y. Castin, *Phys. Rev. A* **76**, 013613, (2007).
- [76] Yu. E. Lozovik, I. V. Ovchinnikov, S. Yu. Volkov, L. V. Butov, D. S. Chemla, *Phys. Rev. B* **65**, 235304, (2002).
- [77] E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics*, parte 2, Cap. 30 (Pergamon Press, New York, 1980)
- [78] P.M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principios of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, Crambridge, England, 1995, Cap. 9.3.
- [79] L. P. Pitaevskii, *Sov Phys JETP* **13**, 451–54, (1961).
- [80] J. Keeling, *Phys. Rev. B* **7**, 2053156, (2008).
- [81] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Oxford University Press, New York, 2003, Chap. 15.3.
- [82] M. M. Salomaa and G. E. Volovik, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 533, (1987).
- [83] H. Flayac, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **81**, 045318, (2010).
- [84] M. Toledo-Solano, Y. G. Rubo, *Phys. Rev. B* **82**, 127301, (2010).
- [85] R. Rajaraman, *Solitons and instantons*. North-Holland Personal Library, (1989).

- [86] A. B. Bosisov, *Theoretical and Mathematical Physics*, **124**, No. 2, (2000).
- [87] M. Toledo-Solano, Y. G. Rubo, doi:10.1016/j.spmi.2010.07.010
- [88] M. Toledo-Solano, Y. G. Rubo, *J. Phys.: Conf. Ser.* **210**, 012024, (2010).