



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**LA RELACIÓN DE TITIUS-BODE Y LOS SISTEMAS  
EXOPLANETARIOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICA**

**P R E S E N T A:**

**PATRICIA LARA CRUZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. RENAN ARCADIO POVEDA RICALDE  
2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Lara

Cruz

Patricia

56 94 24 13

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

401047329

2. Datos del tutor

Dr

Renan Arcadio

Poveda

Ricalde

3. Datos del sinodal 1

Dra

María Guadalupe

Cordero

Tercero

4. Datos del sinodal 2

Dra

Antígona

Segura

Peralta

5. Datos del sinodal 3

Dr

Leonardo Javier

Sánchez

Peniche

6. Datos del sinodal 4

Dra

Vicenta

Sánchez

Morales

7. Datos del trabajo escrito

La relación Titius-Bode y los sistemas exoplanetarios

89 p

2010

A mi familia

Silvia, Juan,

Ricardo y Octavio

A Alfredo

A mi prima Norma  
a todos mis amigos

## Agradecimientos

Quisiera agradecer de manera muy especial a la Mtra. Christine Allen, quien tuvo un papel muy importante en la realización de este trabajo, ya que gracias a su tiempo, trabajo y dedicación; fue posible la culminación de esta tesis.

Asimismo quisiera expresar mi más sincera gratitud al Dr. Arcadio Poveda, quien además de ser mi asesor en este trabajo, ha sido mi maestro y mentor; y al lado de la Mtra. Chris me ha guiado en este maravilloso camino que es la astronomía.

# Índice

	Página
1. Introducción	1
2. Contexto Histórico de la Relación Titius-Bode	3
3. Relación de Titius-Bode	8
3.1 Formulación matemática de la Relación Titius-Bode	8
3.2 Modificaciones a la Relación Titius-Bode	8
4. Teorías propuestas sobre la relación Titius-Bode	10
4.1 Trabajos de S. F. Dermott	10
4.2 El Modelo de Hills	12
4.3 El Principio de mínima acción de interacción	14
4.4 Trabajo de F. Graner y B. Dubrulle	17
4.5 El trabajo de Hayes & Tremaine	19
4.6 El trabajo de P. Lynch	21
4.7 El trabajo de L. Neslušan	23
4.8 Inestabilidad en los sistemas planetarios.	25
4.9 Trabajo de Bohr y Olsen	27
5. Relación Titius-Bode para el Sistema Solar	29
6. Relación Titius-Bode para sistemas exoplanetarios	40
6.1 Sistema exoplanetario 55 Cancri	40
6.2 Sistema exoplanetario HD 10180	45
6.3 Sistema exoplanetario Gliese 581	49
6.4 Sistema exoplanetario Gliese 876	56
6.5 Sistema exoplanetario $\mu$ Arae	61
7. Resonancias en el Sistema Solar	66
7.1 Resonancias en 55 Cancri	68
7.2 Resonancias en HD 10180	68
7.3 Resonancias en Gliese 581	69
7.4 Resonancias en Gliese 876	69
8. Discusión y Conclusiones	71
9. Anexo	
9.1 Métodos de Mínimos cuadrados	78
9.2 Artículo publicado	83
10. Referencias	87

## *La relación Titius-Bode y los sistemas exoplanetarios*

### 1. Introducción

La relación Titius-Bode (TB) es una simple progresión geométrica que relaciona el semieje mayor de la órbita de un planeta con el número de orden ascendente de su órbita respecto al Sol. A lo largo del tiempo, esta controvertida relación matemática ha tenido sus aciertos así como sus fallas cuando se aplica a nuestro sistema planetario.

Esta historia empieza en 1766 cuando Johann Daniel Titius, profesor alemán de la universidad de Wittenberg, enuncia una relación matemática empírica que seguían los planetas (conocidos en ese momento) del Sistema Solar. Esta la publica como un pie de página en la traducción al alemán del libro de Charles Bonnet "Contemplation de la Nature". Años después fue publicitada por el famoso astrónomo Johann E. Bode, en la segunda edición de su libro "Anleitung zur Kenntnis des gestirnten Himmels" (Introducción para el conocimiento de los cielos estrellados, 1772), donde muestra en una nota al pie de página, la misma relación que Titius había publicado. (29)

Bode, siendo un gran divulgador de esta relación, sugiere la existencia de un nuevo planeta y, aplicando la relación, calcula su distancia heliocéntrica. En 1781 William Herschel descubrió Urano para el cual la relación matemática de Titius se ajustaba muy bien. Es por este señalamiento y empeño de Bode, que se le conoce como la relación Titius-Bode. Esta relación ayudaría al descubrimiento de Neptuno.

En una formulación matemática moderna, la relación Titius-Bode puede expresarse así:

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n, \quad (1.1)$$

donde  $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots, 7$ , Mercurio corresponde a  $-\infty$ , Venus a 0 y así sucesivamente con los demás planetas.

Gracias al avance tecnológico, recientemente se ha descubierto un gran número de planetas fuera del Sistema Solar. Hasta el momento se han descubierto 5 sistemas exoplanetarios múltiples que contienen 4 o más planetas (dos con 5 exoplanetas y tres con 4 exoplanetas).

Tal es el caso del sistema exoplanetario de 55 Cancri para el cual, en noviembre del 2007, se descubrió su quinto planeta (11), convirtiéndolo en el primer sistema con el mayor número de planetas extrasolares descubiertos hasta el momento. En agosto del 2010, se anunció el descubrimiento de 7 exoplanetas (dos exoplanetas por confirmar) que giran alrededor de la estrella HD 10180. De ser confirmados los dos exoplanetas, lo convertirían en el sistema exoplanetario

con el mayor número de planetas descubiertos (19). De la misma manera, en abril del 2009 se anunció el descubrimiento del cuarto planeta en el sistema exoplanetario de Gliese 581 (24). El descubrimiento del cuarto planeta para los sistemas Gliese 876 y HD 160691 ( $\mu$  Arae) se reportaron en Junio del 2010 (37) y Agosto del 2006 (34) respectivamente.

Estos fueron estímulos suficientes para la elaboración de esta tesis, cuyo objetivo es el de verificar si existe una relación Titius-Bode aplicada a estos sistemas exoplanetarios, y hacer una generalización que en el futuro sirva de herramienta para encontrar nuevos exoplanetas, así como una posible justificación física a esta relación empírica.

Este trabajo mostrará un análisis detallado sobre la relación Titius-Bode aplicada a los planetas del Sistema Solar, a algunos satélites de los planetas mayores (Júpiter, Saturno y Urano) y, yendo mas lejos, a los sistemas exoplanetarios de 55 Cancri, HD 10180, Gliese 581, Gliese 876 y  $\mu$  Arae.

Primero se hará una introducción histórica sobre el desarrollo que ha tenido esta relación. A continuación, se encontrará una relación generalizada utilizando el método de mínimos cuadrados, la cual debería ser válida para la mayoría de los sistemas planetarios. La relación seguiría cierta progresión geométrica para el Sistema Solar (incluidos los satélites de Júpiter, Saturno y Urano); y después este cálculo se hará análogamente para los sistemas planetarios de 55 Cancri (5 planetas), HD 10180 (5 planetas), Gliese 581, Gliese 876 y  $\mu$  Arae (4 planetas), para comparar la aplicación de esta relación tipo Titius-Bode. Estos resultados servirán como herramienta para indagar la validez de la relación de Titius-Bode.

Desde el punto de vista de la mecánica celeste, se estudiará y profundizará en algunas preguntas como: ¿Es la relación TB consecuencia de las condiciones iniciales en el disco protoplanetario? ¿Es el reflejo de un proceso dinámico de relajación en un sistema de planetas sujeto a mutuas perturbaciones gravitacionales? ¿Es debida al azar?

Es fundamental recalcar la importancia de la relación Titius-Bode pues, como se mostró en el pasado, esta relación sirvió para poder predecir y descubrir cuerpos del Sistema Solar, así como algunos satélites de Júpiter y Saturno que se acoplan a esta relación.

Si la relación TB también se aplicara a los sistemas exoplanetarios, esto sería un gran avance para estudiar su creación y formular modelos teóricos para la formación planetaria. Además nos proporcionaría una pista para buscar nuevos exoplanetas, y para describir y analizar esta relación desde en punto de vista dinámico.

## 2. Contexto Histórico de la Relación de Titius-Bode

La idea de regularidad en el Sistema Solar ha inquietado a los científicos desde los inicios del estudio de la mecánica celeste. No se puede profundizar en el análisis de la relación Titius-Bode sin estudiar el origen y formación del Sistema Solar. El objetivo final sería que esta relación empírica fuera una consecuencia de la mecánica celeste, o de los procesos de formación del Sistema Solar. Estamos aún muy lejos de lograr ese objetivo, pero el establecimiento de una buena formulación empírica puede servir como guía a las teorías. Por otra parte, una relación empírica puede tener carácter predictivo, como ocurrió con la relación TB en el Sistema Solar, según veremos más adelante.

En este capítulo se expondrá en qué contexto histórico se formuló la relación TB y el papel que desempeñó en los descubrimientos de algunos de los planetas de nuestro sistema planetario.

La crónica sobre la relación Titius-Bode empieza con el suizo Charles Bonnet (1720 - 1793), filósofo natural, quien en 1764 publicó su libro "Contemplation de la Nature" (Contemplación de la naturaleza). Debido a la fama del autor, el trabajo fue traducido a cuatro idiomas: alemán, italiano, escocés e inglés; la traducción al alemán fue hecha por Johann Daniel Titius von Wittenberg.

Johann Daniel Titius (1729 – 1796) fue un astrónomo alemán. Creció al lado de su tío, un naturalista, quien impulsó su interés por la ciencia. Recibió su título de maestría de la Universidad de Leipzig y se convirtió en profesor en la Universidad de Wittenberg.

En 1766, Titius se encargó de la traducción al alemán del libro de Bonnet y su gran contribución hacia la astronomía fue que no sólo elaboró la traducción sino que encontró una simple progresión geométrica para obtener las distancias de los planetas al Sol, según el número de orden de sus órbitas.



*Figura 2.1.  
Johann Daniel Titius*

Titius insertó esta relación en el libro de Bonnet, entre párrafos 6 y 8 de la primera parte. Esto fue lo que escribió:

*“Una vez que usted se fija en la separación entre cada uno de los planetas se dará cuenta que cada uno se incrementa al aumentar sus distancias al Sol. Si suponemos que la distancia del Sol a Saturno es de 100 unidades, entonces Mercurio dista 4 de esas unidades del Sol; Venus  $4+3=7$  del mismo; la Tierra  $4+6=10$ ; Marte  $4+12=16$ . Pero observe que entre Marte y Júpiter ocurre una desviación de esta tan exacta progresión. Después de Marte sigue el lugar de  $4+24=28$  unidades, que en la actualidad ningún planeta ocupa. Y ¿entonces el Creador habrá dejado este lugar vacío? ¡Nunca! Entonces apostemos con confianza que, sin duda, este lugar corresponde a un satélite de Marte todavía no descubierto; podríamos añadir que quizás Júpiter también tenga varios satélites que aún no se han visto con ningún cristal. Después de esta posición para nosotros aun inexplorada, surge la de Júpiter en  $4+48=52$ ; y la de Saturno en  $4+96=100$  unidades. ¡Que maravillosa relación!”*

En la primera edición de la traducción al alemán del libro de Bonnet, se insertó este párrafo entre el texto del libro, pero para las ediciones siguientes se pasó al pie de página. Años después, en 1772, el astrónomo Bode presentó esta misma fórmula empírica, obtenida años antes por Titius.

Johann Elert Bode, astrónomo alemán, (1747 – 1826) no tuvo una educación formal, fue educado por su padre para que se encargara del negocio familiar. Poco a poco fue interesándose por ciencias como matemáticas, geografía y, por último, en la astronomía.

Cuando su padre enfermó de gravedad en 1765, Bode conoció a Johann Georg Büsch (1728-1800) un profesor de matemáticas a nivel bachillerato en Hamburgo, quien se sorprendió del conocimiento y observaciones amateurs que Bode había realizado, y le permitió el uso de sus libros e instrumentos para que adquiriera mayor conocimiento científico.



Figura 2.2. Johann Elert Bode

La primera publicación de Bode versa sobre el eclipse solar del 5 de agosto de 1776. A la sazón, Bode tenía 19 años. En 1768 publicó su libro de astronomía "Anleitung zur Kenntnis des gestirnten Himmels" (Introducción al conocimiento de los cielos estrellados). La segunda edición de este libro (1772), incluye un nuevo capítulo y en un pie de página insertó una relación empírica sobre las distancias

planetarias que originalmente había formulado Titius, y que en adelante se conoció como “Ley de Bode”.

Bode se fue volviendo un astrónomo mundialmente famoso, fundador y editor del *Astronomische Jahrbuch*, además de ser responsable de observaciones importantes. Con el prestigio que tenía, Bode fue popularizando la relación, cada vez que tenía la oportunidad lo mencionaba en sus escritos. No fue sino hasta años después que Bode le dió crédito a Titius por esta relación.

La relación Titius-Bode no tuvo gran impacto sino hasta el descubrimiento de Urano en 1781. El 13 de marzo de 1781, William Herschel (1738 - 1822), astrónomo y músico alemán en la corte del rey Jorge III de Inglaterra, descubrió el planeta Urano utilizando un telescopio construido por él mismo. En un principio reportó que se trataba de un cometa pero observaciones posibles lo hicieron cambiar de opinión. Inicialmente le dio el nombre de *Georgium Sidus* (la estrella de Jorge) en honor al rey. Sin embargo, el nombre no perduró más allá de Gran Bretaña. Un astrónomo francés propuso llamarlo Herschel en honor de su descubridor, pero fue Bode quien propuso el nombre de Urano en honor al dios griego, padre de Cronos –cuyo equivalente romano daba nombre a Saturno.

Urano se ajustaba a la distancia pronosticada por la relación Titius-Bode. Con esto, suscitó un gran interés entre los científicos de la época a pesar de que no se podía mostrar que estuviera sustentada por alguna ley física. Sin embargo, todavía quedaba el espacio vacío entre las órbitas de Marte y Júpiter por lo que el descubrimiento de Urano provocó el inicio de la búsqueda por el planeta aún no descubierto en esa región.

Los astrónomos que hacia esfuerzos para encontrar el planeta entre Marte y Júpiter, eran conocidos como los “detectives de Lilienthal”. Los líderes eran Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1758 - 1840) y Baron von Zach, astrónomo húngaro. Pero fueron rebasados por Guiseppe Piazzi (1746 - 1826) monje Italiano, matemático y astrónomo.

En el sitio predicho por la relación TB, el primero de enero de 1801 Piazzi encontró un pequeño cuerpo, desde el observatorio de Palermo en Sicilia, al cual llamó Ceres Ferdinandea en honor de la diosa de Ceres y del rey de Nápoles y Sicilia, Fernando IV.

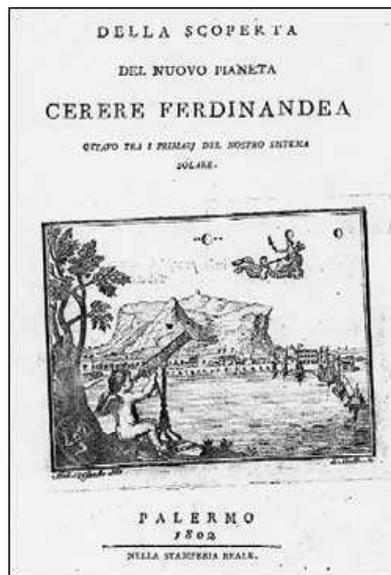


Figura 2.3. Portada de la publicación de Piazzi en 1802, titulado "Della scoperta del nuovo pianeta Cerere Ferdinanda"

A pesar de los datos que suministró Piazzi y de que se publicaron muchos artículos sobre Ceres, no se podía determinar su órbita. Ello tuvo que esperar hasta que Karl Friedrich Gauss desarrollara un nuevo método en mecánica celeste, el método de mínimos cuadrados\* que sirvió para que Von Zach y Olbers reencontraran independientemente a Ceres (un año después), gracias a que el mismo Gauss calculara su distancia media como ejemplo. La distancia media de Ceres, calculada por Gauss, es de 2.76 UA, mientras que la predicción de la relación Titius-Bode de 2.8 UA, ¡la relación era válida!

Ceres, con unos 1 020 Km. de diámetro, resultó ser demasiado pequeño para merecer el título de planeta. Ceres es unas 15 veces más pequeño que Mercurio, y menor que muchas de las lunas conocidas en ese momento. Este cuerpo, resultó ser uno de los primeros cuerpos pequeños que orbitan en esa región, que ahora se conoce como el cinturón principal de asteroides.

Poco tiempo después del descubrimiento de Ceres, el 28 de marzo de 1802, se descubrió un segundo asteroide, el cual se conoce hoy en día como Pallas. Posteriormente, descubrieron más de estos objetos, como Juno en 1804 y Vesta en 1807, este último fue descubierto por el astrónomo alemán Karl Ludwig Harding.

Una de las consecuencias del descubrimiento de Urano fue que los científicos empezaron a estudiar su movimiento. Conforme pasaban los años, se dieron cuenta que Urano no seguía exactamente la órbita que debería obedecer aplicando las leyes de Kepler, y llegaron a la conclusión que algo modificaba su órbita. En 1842 la Academia de Gotinga ofreció un premio a quien encontrara la solución al problema del movimiento de Urano.

En 1843, John Couch Adams (1819 – 1892) matemático y astrónomo inglés, calculó la órbita de un octavo planeta tomando en cuenta las anomalías observadas en la órbita de Urano. Envió sus cálculos a Sir George Airy, el Astrónomo Real, quien pidió más información. Adams comenzó a redactar una respuesta, pero nunca llegó a enviarla. Urbain Le Verrier (1811 - 1877), matemático francés, publicó en 1846 sus cálculos de la órbita independientemente de Adams. Por ello, se le otorga el título de codescubridor del nuevo planeta que fue llamado Neptuno.

Así, Adams y Le Verrier, de forma independiente, calcularon la posición de Neptuno, el cual fue encontrado por Johann Gottfried Galle, el 23 de septiembre de 1846, a menos de un grado de la posición calculada por Adams y Le Verrier.

Como muestra la Tabla 2.1, el semieje mayor de la órbita de Neptuno no se ajusta a la relación TB.

El 18 de febrero de 1930, el astrónomo estadounidense Clyde William Tombaugh (1906-1997) desde el Observatorio Lowell descubrió el ahora llamado “planeta enano”: Plutón. La órbita de Plutón es la más peculiar en el Sistema Solar, esta a una distancia de 39.48 UA, lejos de la posición prevista por la relación de Titius-Bode (77.20 UA). El posterior descubrimiento del Cinturón de Kuiper, y en particular de Eris, que es más grande que Plutón y que tampoco se ajusta a la relación Titius-Bode ha contribuido a desacreditar la relación TB.

Planeta	$n$	Semieje mayor Observado (UA)	Semieje mayor Titius-Bode (UA)
Mercurio	$-\infty$	0.39	0.4
Venus	0	0.72	0.7
Tierra	1	1.00	1
Marte	2	1.52	1.6
Ceres	3	2.74	2.8
Júpiter	4	5.20	5.2
Saturno	5	9.54	10
Urano	6	19.22	19.6
Neptuno	7	30.06	38.8

*Tabla 2.1 Valores de los semiejes observados de los planetas de Sistema Solar y valores predichos por la relación Titius-Bode.*

### 3. Relación de Titius-Bode

#### 3.1 Formulación matemática de la Relación Titius-Bode

La relación de Titius-Bode (TB) es una simple sucesión en la cual se relaciona la distancia orbital del cuerpo planetario con el número de su órbita.

La relación original, tal como la describe Titius en la traducción alemán del libro de Bonnet, es de la siguiente forma:

$$a = \frac{n+4}{10}, \quad (3.1)$$

donde  $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, \dots$ , es decir, cada valor de  $n$  es dos veces el valor anterior, y  $a$  representa el semieje mayor de la órbita. En aquella época solo se conocían los planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno.

La forma moderna de expresar la relación TB es:

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n, \quad (1.1)$$

donde  $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots, 7$ . Mercurio corresponde a  $-\infty$ , 0 a Venus y así sucesivamente con los demás planetas.

#### 3.2 Modificaciones a la Relación Titius-Bode

Poco después de la formulación original de la relación TB, en 1795, el Barón von Zach, le señaló a Bode que hay una gran desviación para los planetas externos cuando el ajuste se hace con los dos primeros planetas, razón por la cual la relación se tenía que rectificar.

Dos años después, Johann Friedrich Wurm (1760-1833) logró un mejor ajuste. La expresión de Wurm considera una ecuación más general.

$$a = b + c \times 2^n, \quad (3.2)$$

donde  $b = 0.387$  y  $c = 0.293$  para  $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots, 7$ .

El siguiente cambio a la relación fue hecho en 1802, por Ludwing W. Hilbert quien obtuvo una progresión geométrica donde no necesariamente la base del exponente  $n$  debe ser igual a dos.

$$a = b + c \times d^n, \quad (3.3)$$

donde  $b = 0.38$  ,  $c = 0.0872$  y  $d = 2.08$  para  $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots, 7$  .

Pliny Earle Chase (1820-1886) propuso que la ley de distancias planetarias fuera de la siguiente forma:

$$a = \frac{\pi}{32} (1 + n\pi) . \quad (3.4)$$

Aquí  $n = 1, 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 97$  y los números se escogen arbitrariamente sin seguir algún cálculo dinámico.

Generalmente, las modificaciones de la relación TB son de la forma de la ecuación (3.3).

En 1880, Gaussin utilizó una relación sin término aditivo. Su fórmula, aplicable de Mercurio a Neptuno es

$$a = 0.2099 \times 1.7226^n . \quad (3.5)$$

Más adelante se dieron otras formulaciones de la relación TB, más minuciosas y fieles a los valores de Sistema Solar.

Recientemente, en 1978, Munini y Armellini sugirieron que la fórmula TB, válida desde Mercurio a Plutón, se puede escribir de la forma diferente

$$a = 0.283 \times 1.52^n , \quad (3.6)$$

con  $n = 1, 2, \dots, 12$

Para 1979, Basano y Hughes siguieron en la línea de la formulación de la relación TB sin el sumando, es decir, propusieron una ecuación con solo dos constantes independientes.

$$a = \varepsilon d^n . \quad (3.7)$$

Las constantes son  $\varepsilon = 0.285$  y  $d = 1.52$ , donde  $n = 1$  para Mercurio,  $n = 2$  para Venus, y así consecutivamente hasta Plutón.

## 4. Teorías propuestas sobre la relación Titius-Bode

Han pasado más de 250 años desde la publicación de la relación Titius-Bode, durante los cuales la relación ha estado sujeta a controversia y ha dividido la opinión de los científicos sobre su validez. Sin embargo, la relación sigue vigente; incluso en años recientes se han publicado un buen número de artículos con respecto a este tema.

Para el estudio actual de la relación Titius Bode se han usado diferentes enfoques, por ejemplo, de nuevos ajustes a partir de las órbitas de los planetas del Sistema Solar (30), la validación de la relación por métodos estadísticos (20) (8) (9) (28) o bien intentos de dar la explicación y validación física a esta relación (14) (8) (8) (15) (31). En este capítulo se tratará sobre algunos de estos.

### 4.1 Trabajos de S. F. Dermott

El objetivo los trabajos de Dermott (8) (9) es el de analizar si las conmensurabilidades cercanas en cualquier sistema son parte de alguna regularidad general, es decir, una progresión geométrica tipo Titius-Bode. El primer artículo se concentra en hacer un ajuste a los periodos orbitales aplicando mínimos cuadrados en el Sistema Solar y los satélites de Júpiter, Urano y Neptuno.

El análisis se aplica sólo a los cuerpos “regulares”. Define un satélite como “regular” si  $R < R_c$ , donde  $R$  es el radio crítico para el cual la fuerza que el planeta ejerce sobre el satélite es igual a la que él solo ejerce sobre él mismo.

Dermott observa que la frecuencia entre pares de movimientos medios es mucho mayor que la esperada para una contribución al azar. Esta preferencia sugiere considerar una relación en los periodos de la forma

$$T_n = T_c A^n, \quad (4.1)$$

donde  $T_n$  es el periodo del cuerpo planetario,  $T_c$  y  $A$  son constantes del ajuste.

Los sistemas que considera son los satélites de los planetas jovianos (Júpiter, Saturno y Urano). Toma en cuenta la sugerencia de otros autores que han argumentado que es mejor concentrarse en los sistemas de satélites en vez del sistema planetario para obtener alguna conclusión teórica general sobre la formación planetaria porque esta puede ser confrontada con tres sistemas en vez de uno, aunque lo mejor sería considerar a todos.

Una vez que el sistema de satélites es regular, los numera 1, 2, 3...,  $s$  donde  $s$  es el número de satélites considerados, y entonces las constantes  $T_c$  y  $A$  en la ecuación (4.1) pueden determinarse por un simple método gráfico. Este método simple no puede tomar en consideración el hecho de que algunas órbitas estén

vacantes. Si esta posibilidad (que haya vacantes) se admite, hay que recurrir a la computadora para un posterior análisis.

Analizando todas las posibles relaciones, utilizando todas las condiciones para efectuar los ajustes para cada uno de los sistemas de satélites, se encuentra que para los sistemas de los planetas jovianos el número de órbitas vacantes en los ajustes es cero. El valor de  $A$  para Júpiter es 2.00, 1.417 (o  $2.007^{1/2}$ ) para Saturno y para Urano 1.753 ( $3.07^{1/2}$ ). En cada uno de los resultados se muestra la preferencia de conmensurabilidades en pares de periodos orbitales es decir a que los cocientes de los periodos de los satélites con órbitas adyacentes se pueden representar como fracciones de números enteros.

Los resultados muestran para los sistemas de satélites regulares de los planetas jovianos son altamente regulares, es decir, cada (estrella o planeta) primaria tiene un número de secundarias regulares girando alrededor de ella, en el mismo sentido que la primaria, con órbitas casi circulares y ecuatoriales. El análisis anterior muestra que la distribución de periodos orbitales en cualquiera de estos sistemas por ningún motivo es al azar y que los periodos se pueden representar en una relación tipo TB.

En un trabajo posterior, Dermott (9) demuestra que las regularidades en estos sistemas de satélites no pueden ser atribuidas a efectos de marea.

## 4.2 El Modelo de Hills

En 1970, el astrofísico norteamericano Jack Hills, publicó su teoría sobre la relación Titius-Bode (15). Este atribuye la relación Titius-Bode a la evolución dinámica, debida a interacciones gravitacionales de los planetas a partir de su posición inicial.

Hills observó que la relación de Titius-Bode se aplica a los satélites de Júpiter, Saturno y Urano así como a los planetas Sistema Solar. Como las condiciones iniciales de estos satélites probablemente fueran distintas a las del Sistema Solar, Hills sugiere que la relación Titius-Bode (que él menciona como la relación de Bode) es resultado de un proceso de relajación dinámica, es decir, que hubo un periodo de fuertes encuentros gravitacionales antes de que los planetas y los satélites se relajaran en las órbitas estables actualmente observadas.

Para comprobar esta hipótesis, Hills estudió numéricamente la evolución gravitacional de once sistemas planetarios hipotéticos, cada uno con una estrella central de una masa solar y con masas planetarias muy distintas, Hills hace las siguientes hipótesis:

- Los modelos numéricos son en dos dimensiones para simplificar los cálculos.
- Las semiejes y excentricidades iniciales fueron escogidas al azar.
- Los efectos de marea son despreciables.
- No se alcanza una estabilidad final en las órbitas.

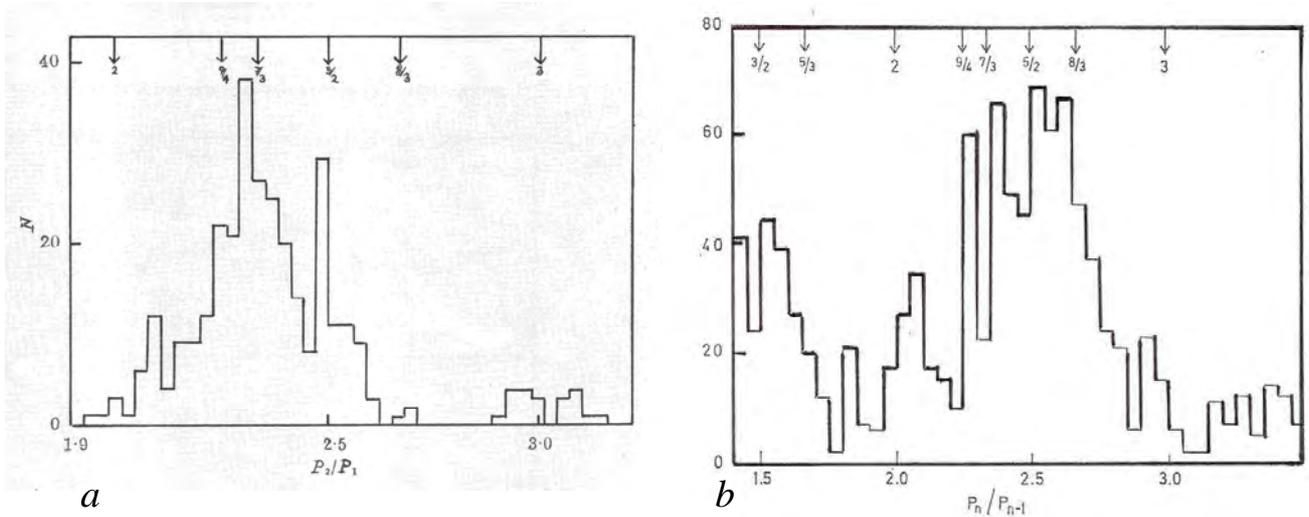
### Dos ejemplos de condiciones iniciales

Caso	Número de planetas	Masa planetas "hipotéticos"	Semiejes iniciales (UA)	Tiempo de evolución (años)
"Sistema 5"	4	10 veces la masa de Júpiter	≈ 6, 9, 22, 29	$4.2 \times 10^3$
"Sistema 11"	6	$5 \times 10^{-4}$ masa Solar	≈ 6 - 8	$12 \times 10^3$

A pesar de las grandes diferencias en las masas planetarias y en las condiciones iniciales, varios de estos sistemas tienden a estados estacionarios. En ellos es notable la tendencia a mostrar comensurabilidades en los movimientos medios es decir, que se muestra una tendencia entre los cocientes periodos orbitales a formar fracciones de números enteros. Como ejemplos representativos muestra tres sistemas: el "sistema 5", "sistema 11" y el sistema "9".

En los sistemas que él estudia, sigue la evolución solo sobre intervalos de tiempo limitados y ninguno llega a un equilibrio final. A pesar de eso, después de 1

a  $2 \times 10^3$  años se establece una tendencia hacia la estabilidad. La figura 4.1 ilustra la variación en el tiempo de los semiejes de los planetas de los casos "5" y "11".



Figuras 4.1. Se muestran los histogramas de los cocientes en los periodos de los "planetas" en el "sistema 5" (a) y el "sistema 11" (b).

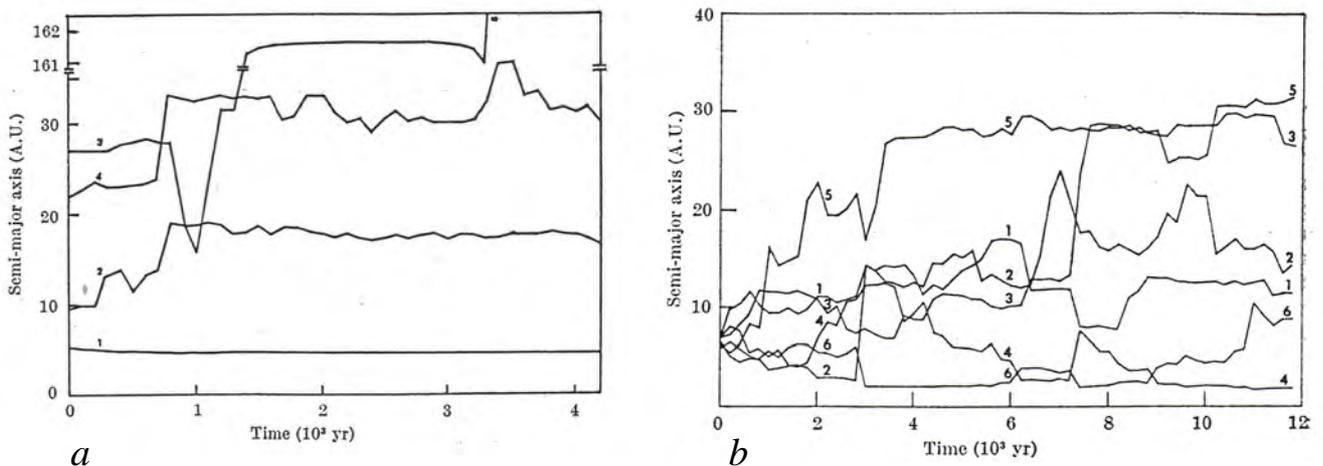


Figura 4.2. Cambio de los semiejes en el tiempo para los sistemas 5 (a) y 11 (b).

La figura 4.1(a) muestra la frecuencia de los cocientes de los periodos de los planetas 2 y 4 para el sistema 5. Estos cocientes fueron evaluados cada 10 años después de los primeros 1000 años de evolución. La figura 4.1(b) muestra lo mismo, pero para planetas más alejados del sistema 11. Son claros los picos correspondientes a las principales conmensurabilidades.

La interpretación de Hills es que la relación Titius-Bode es consecuencia de la tendencia gravitacional hacia las conmensurabilidades.

### 4.3 El Principio de mínima acción de interacción

En 1975, Michael W. Ovenden (1926-1987) publicó en forma detallada una posible explicación para la relación Titius-Bode. El trabajo de Ovenden se centra en realizar integraciones numéricas en el, encuentra que cualquier sistema planetario de  $n$ -cuerpos con masas puntuales pasa la mayor parte del tiempo en configuraciones donde las interacciones planetarias son mínimas. Esta es la idea que lo llevó a enunciar su Principio de mínima acción de interacción. (31) (32)

El principio de mínima acción de interacción menciona que un sistema habitualmente se mantendrá en una configuración en la cual la acción asociada con las interacciones mutuas de los planetas tiene un mínimo local.

En la recapitulación de trabajos previos que Ovenden realiza, menciona los trabajos que dan un enfoque cosmogónico a la relación de Titius-Bode, como los de Schmidt y von Weizsäcker, quienes utilizan la relación para darle un significado a sus teorías. Además, toma en cuenta los trabajos de Dermott y Hills (1970). Resalta que Dermott encuentran resonancias entre ciertos asteroides y Marte, con esto ellos interpretan que su historia en la escala de tiempo del Sistema Solar no ha cambiado significativamente, pero esa conclusión no queda avalada por una teoría cosmogónica convincente del Sistema Solar. Hills reporta integraciones numéricas de sistemas planetarios ficticios y también encuentra una tendencia a las conmensurabilidades cercanas.

Siguiendo esta línea de estudio, Ovenden sugiere que la preferencia hacia las conmensurabilidades cercanas en los sistemas satelitales y en el Sistema Solar se debe a los efectos de perturbaciones mutuas, lo cual formaliza en el Principio de mínima acción de interacción.

La energía de un sistema compuesto por una estrella primaria, de masa  $M_s$ , y un planeta sencillo, de masa  $m_p$ , está dada por

$$E = -GM_s m_p / 2a, \quad (4.2)$$

donde  $a$  es el semieje mayor osculante del planeta con respecto a la primaria. Para un sistema de  $n$  planetas, podemos generalizar esta expresión incluyendo la energía potencial de la interacción mutua, es decir:

$$E = -GM_s \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2a_i} - R, \quad (4.3)$$

donde  $a_i$  es el semieje mayor del planeta  $i$  con respecto a la estrella primaria y

$$R = \sum_{i=1}^n Gm_i \sum_{j=i+1}^n m_j / \rho_{ij}, \quad (4.4)$$

donde  $\rho_{ij}$  es la distancia entre el  $i$ -ésimo planeta y el  $j$ -ésimo planeta.

Como la energía  $E$  se mantiene constante y  $\rho_{ij}$  varía con el tiempo, el semieje  $a$  debe de cambiar en el tiempo. Ahora suponemos que los cambios seculares son despreciables en un periodo orbital. Entonces puede escogerse formalmente un conjunto de semiejes  $\alpha_i$  que definimos como constantes y escribimos

$$E = -GM_s \sum_{i=1}^n m_i / 2\alpha_i - R + V^2, \quad (4.5)$$

donde  $V^2$  es una energía cinética, que toma en cuenta la energía cinética no incluida en la definición de las  $\alpha_i$ 's. En principio no se conoce los valores de las  $\rho_{ij}$  y  $V^2$  en cualquier tiempo dado. Sin embargo, si sabemos que

1. Puesto que el sistema es cuasi-estático, el teorema del virial es válido para el sistema como un todo (es decir, si  $\bar{T}$  es el promedio temporal de la energía cinética total y  $\bar{\Omega}$  el de la energía potencial, entonces  $\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{\Omega}$ ). El teorema del virial es aplicable por separado para el primer termino, como lo implica en la definición de las  $\alpha_i$ 's. Entonces el teorema de Virial se aplica para los dos últimos términos, y podemos escribir los promedios temporales de éstos como,  $\bar{V}^2 = +\frac{1}{2}\bar{R}$ . Entonces:

$$E = -GM_s \sum_{i=1}^n m_i / 2\alpha_i - \frac{1}{2}\bar{R} \quad (4.6)$$

La acción asociada a la interacción de los planetas que interactúan mutuamente durante un tiempo  $T$  esta dada por

$$\mathcal{F} = \int_0^T -2\overline{V^2} dt = R \quad (4.7)$$

El promedio sobre el tiempo  $T$  de la acción de interacción es:

$$\mathcal{F} = \left( \int_0^T 2V^2 dt \right) / \int_0^T dt = \overline{2V^2} = R \quad (4.8)$$

Se formula en forma precisa el “principio de mínima acción de interacción”: los sistemas planetarios con masas puntuales pasan la mayor parte del tiempo en una configuración en la cual la acción asociada a la interacción entre los planetas es un mínimo local.

Ovenden estudia analíticamente las consecuencias del principio de mínima acción de interacción para sistemas de dos y tres planetas y, suponiendo órbitas coplanares y excentricidades pequeñas, encuentra que las configuraciones con periodos conmensurables corresponden a mínimos de acción de interacción.

Ovenden extiende su estudio mediante integraciones numéricas de sistemas de tres planetas, y confirma los resultados de Hills. Encuentra que los sistemas pasan la mayor parte del tiempo en configuraciones con periodos conmensurables, y que el tránsito de una configuración a otra es muy rápido. Las configuraciones con periodos conmensurables son aquellas con acción de interacción mínima.

#### 4.4 Trabajo de F. Graner y B. Dubrulle (1994)

Estos autores hacen una revisión de las interpretaciones y las explicaciones de la relación Titius-Bode. El propósito de su trabajo es mostrar que la mayoría de las relaciones tipo TB están implícitamente vinculadas con la suposición de una invariancia de escala y rotacional.

Empiezan por hacer un repaso histórico desde la época de Platón. Continúan en los tiempos modernos, exponiendo que la primera teoría cosmológica heliocéntrica que muestra regularidad orbital proviene de Kepler, quien asume una construcción donde cada órbita del planeta es un círculo circunscrito a uno de los cinco poliedros regulares.

Y finalizan su repaso recordando que la búsqueda de orden en el sistema solar fue revivida por Titius (1766) quien notó que las órbitas de los planetas conocidos (Mercurio a Saturno) siguen una progresión geométrica y postuló un planeta perdido entre los planetas de Marte y Júpiter. Esta observación fue reformulada por Bode (1772) y expresada en una forma matemática por Wurm en 1787.

Graner y Drubulle dividen a las diversas teorías modernas de la relación TB en dos categorías: Cinemáticas y dinámicas. Se refieren como dinámicas a las teorías que asumen que la relación se remonta a un periodo anterior o contemporáneo a la formación de los planetas; donde la mayoría de ellas describen inestabilidades que ocurren en el disco protoplanetario primordial y que limitan sus características físicas. La segunda categoría, las teorías cinemáticas, asumen que la relación físicamente se origina de las interacciones orbitales posteriores a la formación de los planetas.

Hacen referencia a las teorías dinámicas que aparecen en el libro de Nieto (1972) (29) quien estudia cuatro procesos físicos: acreción planetesimal, gravedad, fuerzas electromagnéticas e hidrodinámica (inestabilidades turbulentas en el disco protoplanetario).

Los autores hacen un análisis matemático en el cual estudian los diferentes escenarios en los cuales muestran las condiciones para la invariabilidad rotacional y escalar. El modelo que proponen sería análogo a estudiar un disco protoplanetario plano. Sus principales conclusiones son las siguientes:

- I. En cualquier sistema de dos dimensiones caracterizado por una invariancia escalar y rotacional, los vectores base de Fourier más naturales son  $\exp[ik \ln(r/r_0)]$ .
- II. Como la gravitación respeta a las dos invariantes, en un disco auto-gravitatorio de dimensión vertical despreciable la densidad de

perturbaciones tiende a seguir una progresión geométrica de la forma  
 $r_n = r_0 K^n$ .

- III. Si las relaciones tipo Titius-Bode del Sistema Solar son más que puras especulaciones numerológicas, simplemente deben de ser interpretadas como una huella de la invariancia escalar y rotacional del disco protoplanetario del sistema.
- IV. Ni las consideraciones simétricas, ni las observaciones del Sistema Solar pueden discriminar entre una relación Titius-Bode lineal y TB no-lineal.

#### 4.5 El trabajo de Hayes y Tremaine (1998)

Uno de los trabajos que se debe mencionar es el artículo de Wayne Hayes y Scott Tremaine (14) en el cual generan distribuciones planetarias con órbitas uniformemente distribuidas al azar entre 0.2-50 UA, con masas y con un orden igual al de nuestro Sistema Solar, con el propósito de generalizar la relación Titius-Bode y compararla con la distribución orbital planetaria.

En la generación de estas distribuciones planetarias (utilizando el método Monte-Carlo), se imponen ciertas condiciones iniciales para excluir sistemas "inestables", esto es, requiere que cada uno de los planetas adyacentes deben estar separados por una distancia mínima de  $k$ -veces de su radio de Hill. El radio de Hill se define como

$$h = H_M r; \quad H_M = \left( \frac{M}{3M_s} \right)^{1/3}, \quad (4.9)$$

donde  $M$  es la masa del planeta,  $r$  el semieje mayor y  $H_M$  el radio de Hill fraccional.

Para órbitas no circulares, se requiere también que el afelio de los planetas internos sea menor que el perihelio del planeta externo. En otras palabras si el  $i$ -ésimo planeta tiene un semieje mayor  $r_i$  y una excentricidad  $e_i$ , se espera que  $r_i(1+e_i) < r_{i+1}(1-e_{i+1})$ . Un criterio más estricto sería requerir que aún en su distancia mínima los planetas queden separados por un radio de Hill:

$$r_i(1+e_i + H_{M_i}) < r_{i+1}(1-e_{i+1} - H_{M_i}) \quad (4.10)$$

Los autores de este trabajo imponen otra condición de estabilidad mencionando que la frontera entre órbitas estables e inestables ocurre en resonancias de la forma  $j/j+1$ . Explican que es improbable que dos planetas se formen en una resonancia más cercana que 2:3. Para resonancias 2:3 se define  $H_{2:3}$  usando la tercera ley de Kepler como  $R_{2:3} = (3/2)^{2/3}$  y combinando el radio de Hill, la excentricidad y la condición impuesta por la resonancia 2:3 se obtiene

$$r_i(1+V_i) < r_{i+1}(1-V_{i+1}), \quad (4.11)$$

donde  $V_i = \max(H_{2:3}, e_i + H_{M_i})$

Para cada sistema planetario generado al azar que satisfaga este criterio de radio de exclusión, se hace un ajuste por mínimos cuadrados a las distancias orbitales  $r_i$

$$r_i = a + bc^i, \quad (4.12)$$

A esta relación se le llamará “Ley de Bode generalizada”. El ajuste se ejecuta minimizando la función

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^8 \left( \frac{\log(a + bc^i) - \log r_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4.13)$$

con  $a, b > 0$  y  $c > 1$ . Se hace el ajuste a  $\log r$  en vez de  $r$  con el objeto de que el error fraccional asociado a cada uno de los planetas, tenga igual peso.

Con estas condiciones, Hayes y Tremaine encuentran sistemas planetarios espaciados regularmente, los cuales satisfacen relaciones TB. Mientras más estrictos sean los criterios de exclusión, mejor se satisface la relación.

#### 4.6 El trabajo de P. Lynch (2003)

Peter Lynch (20) se hace la misma pregunta que Dermott: Las relaciones tipo TB que muestran una buena representación de las distancias orbitales del Sistema Solar (así como de algunos sistemas satelitales) ¿Tienen algún significado físico o son debidas al azar?

Para analizar esta pregunta, Lynch utiliza un enfoque estadístico utilizando el Método Monte Carlo.

Lynch hace una reseña y recapitula las conclusiones de un trabajo de Dermott y Murray (27), en el cual obtienen que la probabilidad de que la configuración de los satélites observados haya surgido por azar es de 80%. Retomando este caso, Lynch genera una población alterna de grupos de periodos, permite que cada uno de los satélites tome un valor del periodo al azar dentro de una banda centrada en el mejor ajuste:

$$\log T_n = \log T_0 + (n + ky_n) \log A \quad (4.14)$$

donde  $T_n$  es el periodo orbital,  $T_0$ ,  $A$  son constantes y  $y_n$  es un número al azar en el intervalo  $[-1/2, +1/2]$  y  $k$  es un parámetro fijo positivo que determina el ancho de la banda. Para  $k = 1$  las bandas se limitan entre ellas.

Lynch toma como ejemplo una muestra de paquetes de periodos orbitales con 50 casos, donde  $k = 2/3$ . Esta opción del valor de  $k$  es arbitraria, pero permite una variación en las configuraciones de satélites posibles mientras se asegura que los encuentros cercanos (los cuales pueden tener inestabilidades catastróficas) no ocurran. Con los resultados obtenidos, Lynch hace una comparación de sus poblaciones con los obtenidos por Dermott y Murray.

De su muestra de  $10^5$  casos, Lynch estima que  $P(\chi < \chi_0) = 0.20$ . Cuando el ancho de banda se incrementa a  $k = 1$  la probabilidad estimada del patrón observado se reduce a  $P(\chi < \chi_0) = 0.05$ , indicando que la actual disposición de satélites de Urano es muy difícil que haya surgido del azar, contrariamente a lo obtenido por Dermott y Murray.

A continuación hace el mismo análisis aplicado al Sistema Solar. En resumen, toma en cuenta a los diez cuerpos, los 8 planetas y los planetas enanos Ceres y Plutón. Postula una progresión geométrica con las distancias orbitales. La relación es de la siguiente forma:

$$R_n = R_0 A^n \quad n = 1, 2, 3, \dots, 10 \quad (4.15)$$

Para minimizar la desviación *rms* se escogen los parámetros  $R_0$  y  $A$  aplicando la tercera ley de Kepler de donde se obtienen las distancias planetarias

a partir de los periodos observados. Los valores resultantes son  $R_0 = 0.2139$  y  $A = 1.706$ , para estas constantes la discrepancia es  $\chi_0 = 0.0544$ .

Lynch calcula la población al azar para el Sistema Solar, utilizando como límites inferior y superior de los cocientes sucesivos de las distancias planetarias,  $L = 1.503$  y  $U = 2.851$ , respectivamente. Genera  $10^5$  paquetes de periodos orbitales; obtiene una probabilidad  $P(\chi < \chi_0)$  de aproximadamente 0.39. Con estos resultados se puede concluir que la configuración planetaria que ajusta a una relación tipo TB tiene una probabilidad de 40% que haya surgido por el azar.

Variando el ancho de banda a  $k = 2/3$  la probabilidad es  $P(\chi < \chi_0) = 0.99$  por lo que en este caso se concluye que esta muestra es completamente al azar. Cuando cambia el ancho de banda a  $k = 1$ , la probabilidad estimada  $P(\chi < \chi_0) = 0.34$ , casi el mismo valor que con la población de Dermott y Murray.

El autor de este trabajo muestra una alternativa al trabajo de Dermott y Murray (27) generando diferentes poblaciones para el sistema satelital de Urano y para el Sistema Solar. Sin embargo no llega a una conclusión sobre si la relación TB ha surgido de una distribución al azar o es reflejo de algún proceso físico.

#### 4.7 El trabajo de L. Neslušan

En este Neslušan trabajo utiliza el método de Lynch para continuar la discusión sobre el significado estadístico de la correspondencia entre la distribución planetaria y una progresión geométrica.

El autor toma otro enfoque sobre el significado de la relación Titius-Bode, estudiando si la relación de tipo potencial ( $r_n = r_0 Q^n$ ) asociada a la distribución planetaria es al azar pero no lo hace directamente utilizando esta relación potencial sino la relación logarítmica  $\log(r_n)$  asociada a la distribución orbital planetaria.

Como primer paso, ajusta la relación matemática

$$r_n = r_0 Q^n, \quad (4.16)$$

donde  $r_n$  es la distancia media a la estrella central del n-ésimo planeta,  $r_0$  y  $Q$  son constantes, y  $n$  es un entero positivo. Se hace el ajuste tomando los valores observados de la secuencia de distancias planetarias. Específicamente, escoge los parámetros  $r_0$  y  $Q$  tales que minimicen la desviación media cuadrática,  $\chi^2$ . Para este ajuste lo denotaremos como  $\chi_0^2$ .

En segundo lugar, realiza una simulación Monte Carlo de series de  $10^5$  secuencias de distancias planetarias artificiales, usando la fórmula

$$\log r_n = \log r_0 + (n + ky_n) \log Q, \quad (4.17)$$

donde  $y_n$  es un número al azar en el intervalo  $[-1/2, +1/2]$  y  $k$  es un parámetro positivo fijo que determina el ancho de banda en donde las distancias generadas dadas se encuentran. Para  $k=1$ , el límite inferior de la banda coincide con el límite superior de la banda anterior. Así, la distribución es continua y el método se puede clasificar como puramente matemático. Se realizan dos simulaciones independientes usando  $k=1$  y  $k=2/3$ . Cada uno de los casos simulados, se ajusta a la relación (4.17) y a las secuencias artificiales obtenidas se les asocia su desviación  $\chi$  correspondiente. Utilizando el método anterior, se encuentra que la relación (4.17) se ajusta a la secuencia observada de todas distancias planetarias (incluyendo al cinturón de asteroides y Plutón) con probabilidad de 99% de ser al azar con un ancho de banda  $k=2/3$ . Repitiendo la determinación de la probabilidad de la secuencia sin Plutón, el valor de la probabilidad es de 96%. Cuando no existe separación en las distancias vecinas ( $k=1$ ), la ecuación se ajusta a la progresión de distancias planetarias (sin Plutón) con  $P(\chi < \chi_0) = 29\%$ . Estos resultados son muy parecidos a los resultados obtenidos por Lynch.

Con una serie de argumentos un tanto extraños, el autor propone que la distancia orbital media de la Tierra no debe considerarse en el ajuste bajo esta premisa, obtiene que la probabilidad es de 0.3% si las órbitas planetarias cerradas están prohibidas, es decir, con un ancho de banda ( $k=1$ ). Pero la probabilidad se incrementa a un 3% cuando el ancho de banda es  $k=2/3$ . Estos valores, son mucho menores que el 29% o el 96% de probabilidades que se han obtenido anteriormente.

Este ajuste representa una buena prueba de que los planetas en el sistema solar tienden, a tener órbitas regulares y esta regularidad se manifiesta en una relación matemática tipo TB.

En cada uno de los trabajos mencionados se muestran diferentes enfoques sobre la relación Titius-Bode. Ninguno ha encontrado una teoría o explicación física por la cual exista la ley empírica Titius-Bode. Sin embargo, el estudio de otros sistemas exoplanetarios ayudará a responder esta pregunta.

#### 4.8 Inestabilidad en los sistemas planetarios.

Sean Raymond y colaboradores (36) publicaron un modelo en el cual las inestabilidades dinámicas explican la distribución de las excentricidades observadas de los exoplanetas y reproducen las configuraciones dinámicas observadas.

La idea de este modelo es que si las excentricidades observadas para los sistemas exoplanetarios se pueden explicar con un simple modelo, el cual supone que todos los sistemas están sujetos a inestabilidades dinámicas; entonces estos sistemas se formarían en una configuración marginalmente estable en un escala de tiempo relativamente corta  $\sim 10^5$  años y se volverían inestables después de  $\sim 10^6$  años. Los planetas que sobreviven a esta inestabilidad dinámica son los que muestran las excentricidades observadas.

En este trabajo se estudia la estabilidad de los planetas sobrevivientes en varios sistemas con tres planetas que están sujetos a la interacción planeta con planeta conduciendo a la pérdida de uno de ellos.

Para cada simulación se escogieron tres planetas al azar, separados por 4-5 veces el radio de Hill. Se realizaron decenas de series de simulaciones variando la masa planetaria. Las órbitas tenían excentricidad cero e inclinaciones mutuas menores que  $1^\circ$ . El análisis se restringe a los casos donde los sistemas son inestables. El criterio de estabilidad esta dado por:

$$\frac{-2(M_* + M_1 + M_2)}{G^2(M_1M_2 + M_*M_1 + M_*M_2)^3} c^2 h \geq 1 + 3^{4/3} \frac{M_1M_2}{M_*^{2/3}(M_1 + M_2)^{4/3}} - \frac{M_1M_2(11M_1 + 7M_2)}{3M_*(M_1 + M_2)^2},$$
$$\beta \geq \beta_{crit} \quad (4.18)$$

La cantidad  $\beta / \beta_{crit}$  mide la aproximación de un par de órbitas al límite de estabilidad de Hill.

Las distribuciones generadas utilizando el criterio de  $\beta / \beta_{crit}$ , se analizan dinámicamente. Las principales conclusiones son las siguientes:

La región obtenida para el caso  $\beta / \beta_{crit} \leq 1$  esta poblada enteramente por sistemas resonantes, y puede ser evidencia de la migración convergente en discos protoplanetarios gaseosos otro parrafo. La región obtenida para  $1 \leq \beta / \beta_{crit} \leq 1.5 - 2$  es congruente con el régimen de dispersión. En este caso, los sistemas con separaciones grandes, podrían deberse a interacciones con discos planetesimales o gaseosos.

Además de que estas inestabilidades reproducen los datos observados en las excentricidades, tienen consecuencias para las hipótesis de los sistemas planetarios “cuantizados” o densamente “empaquetados”.

Los sistemas dispersados que se encuentran justo afuera de la frontera de estabilidad implican que los sistemas están “empaquetados”, es decir, que no deberían existir grandes espacios entre planetas. Esto ayuda a dar un fundamento teórico a las hipótesis de sistemas planetarios “empaquetados” porque si el sistema cuenta con una zona de estabilidad entre dos planetas conocidos es muy probable que en esa zona exista un planeta (2). En este tipo de sistemas se encuentran, de manera natural, relaciones regulares tipo TB entre las distancias planetarias.

#### 4.9 Trabajo de Bohr y Olsen (2010)

Jakob Bohr y Kasper Olsen publicaron recientemente un estudio donde investigan si existe alguna correlación entre las posiciones de los planetas del Sistema Solar (4). En especial analizan la correlación entre planetas lejanos entre sí.

Para examinar las correlaciones entre las posiciones logarítmicas de los planetas, calculan la función de autocorrelación la cual relaciona la probabilidad de encontrar una órbita planetaria a una cierta distancia de otra órbita. Si la función es de largo alcance tendrá muchos picos indicando las distancias probables del planeta más cercano y el que sigue más cercano y así sucesivamente.

La función de autocorrelación esta dada por:

$$P(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x+\Delta)\rho(x)dx, \quad (4.19)$$

donde  $\rho(x)$  es una distribución parecida a la probabilidad de encontrar un planeta en la posición  $x$ . Para calcular la función de autocorrelación se escogió una función específica  $\rho(x)$ , de la forma:

$$\rho(x) = \sum \alpha_i \exp\left(-\left(\frac{x-x_i}{\omega_p/2\sqrt{2\ln 2}}\right)^2\right), \quad (4.20)$$

donde  $x_i$  es la posición logarítmica del planeta  $i$  medido en unidades de  $10^6$  km. Los valores individuales para cada planeta son  $x_i = \ln(a_i/10^6 \text{ km})$  y  $\alpha_i = (r_i 10^6 / a_i)^{1/8}$ .

La función de autocorrelación correspondiente al Sistema Solar se muestra en la figura 4.3. La posición de los siete picos se muestra en la figura 4.4

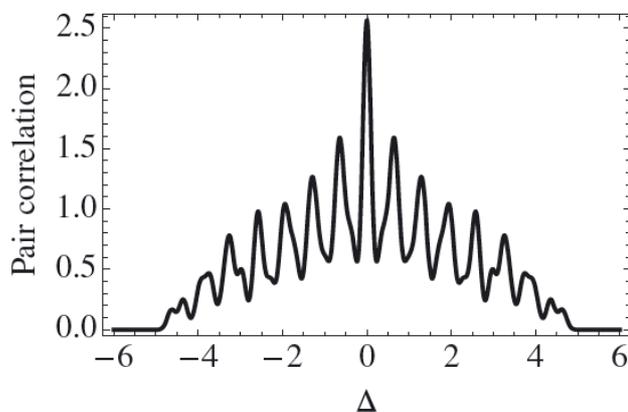
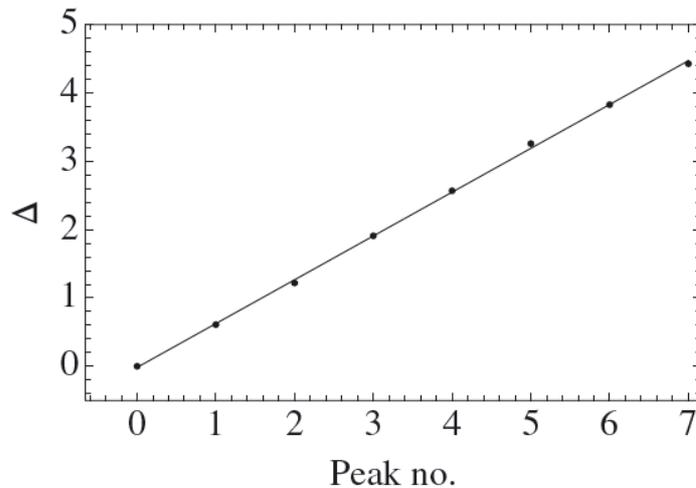


Figura. 4.3  
Función de autocorrelación (de pares) para el Sistema Solar.



*Figura 4.4 Localización de los picos en la función de autocorrelación*

La figura 4.4 muestra una relación lineal casi perfecta entre las posiciones de los picos de la función de autocorrelación, demostrando que hay orden de largo alcance. El coeficiente de determinación es  $R^2=0.999434$ . Para visualizar mejor el intervalo de correlación, los autores calculan la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

Por último los autores hacen el mismo análisis con el mismo número de posiciones que en el Sistema Solar, pero con datos azarosos, solo para observar si los resultados obtenidos para el Sistema Solar son (o no) de naturaleza estocástica.

Las conclusiones a las que llegan los autores son las siguientes:

Se demostró la correlación posicional entre planetas distantes del Sistema Solar.

Los resultados que se obtuvieron con datos aleatorios muestran que las correlaciones entre planetas son de largo alcance y no son azarosas, sino que representan característica propia de nuestro sistema planetario.

El ajuste de una relación tipo TB no es suficiente para demostrar que existen correlaciones de largo alcance. Esto resalta cuando se hace un ajuste lineal para un sistema aleatorio que resulta mucho mas preciso ( $R^2=0.99687$ ) que para el Sistema Solar ( $R^2=0.99355$ ).

Sin embargo, la existencia de correlaciones para planetas lejanos si implica una relación TB.

## 5. Relación Titius-Bode para el Sistema Solar

En la reseña histórica que se hizo sobre la relación TB, una de las preguntas principales sobre esta relación es la de saber si representa una distribución orbital que refleja la dinámica o las condiciones de formación del Sistema Solar.

Si esta relación empírica tiene un significado físico, se esperaría que esta progresión pudiera generalizarse. Anteriormente solamente se podía probar una posible generalización usando a los satélites de los planetas mayores del Sistema Solar, esto si tomamos en cuenta que tienen un funcionamiento similar al sistema planetario. Pero en concreto, conocíamos un sistema planetario: el Sistema Solar. Por tanto, las relaciones solo se podían aplicar a los planetas y a algunos satélites que giran alrededor de planetas, y así especular sobre el origen de dicha distribución de distancias.

Con los avances en el estudio de exoplanetas, podremos ahora comparar la distribución orbital de cada uno de estos sistemas, y ver si la relación TB puede aplicarse a los sistemas exoplanetarios.

Para ello se hará un ajuste generalizado tipo TB exponencial para el Sistema Solar y algunos de los satélites de Júpiter, Saturno y Urano, para después aplicarlo a todos los sistemas exoplanetarios, conocidos hasta ahora, con 4 o más planetas.

¿Se puede generalizar la relación TB para todos los sistemas planetarios?

Para responder esta pregunta, tendríamos que empezar con nuestro propio sistema solar. El sistema Solar cuenta con ocho planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno (véase Tabla 5.1). Sin embargo, hay cuerpos que históricamente son importantes como Ceres y Plutón. Ceres como representante principal del cinturón de asteroides y Plutón que fue considerado como planeta hasta el 2006, cuando que fue reclasificado junto con Ceres como planeta enano.

Históricamente se ha mostrado que la relación TB se aplica para nuestro sistema planetario. Para poder generalizarla necesitamos una relación matemática que represente una progresión geométrica.

La relación clásica enunciada por Titius y Bode en su forma moderna tiene 3 constantes independientes que se ajustan para obtener la distancia de los planetas al Sol, en unidades astronómicas. ( ecuación 1.1).

*Tabla 5.1*  
*Parámetros orbitales, masa y número de satélites naturales de los planetas que integran el Sistema Solar.*

<i>Planeta</i>	<i>Semieje mayor (UA)</i>	<i>Periodo orbital (años)</i>	<i>Masa (kg)</i>	<i>Excentricidad</i>	<i>Inclinación (°)</i>	<i>Satélites naturales</i>
Mercurio	0.38	0.241	$3.302 \times 10^{23}$	0.2056	7°	0
Venus	0.72	0.615	$4.868 \times 10^{24}$	0.0068	3.39°	0
Tierra	1.00	1.00	$5.973 \times 10^{24}$	0.0167	0.00005°	1
Marte	1.52	1.88	$6.418 \times 10^{23}$	0.0934	1.8°	2
Ceres	2.76	4.6	$8.7 \times 10^{20}$	0.0789	10.58°	0
Júpiter	5.20	11.86	$1.897 \times 10^{27}$	0.0483	1.305°	63
Saturno	9.54	29.46	$5.685 \times 10^{26}$	0.0541	2.484°	56
Urano	19.22	84.01	$8.684 \times 10^{25}$	0.0471	0.770°	27
Neptuno	30.06	164.79	$1.024 \times 10^{26}$	0.0085	1.769°	13
Plutón	39.48	247.92	$1.25 \times 10^{21}$	0.2488	17.16°	3

Una expresión matemática que pueda seguir una progresión geométrica y se pueda ajustar para más de un sistema planetario sería una ecuación del tipo exponencial. Con una ecuación del tipo exponencial solo habría que ajustar con dos constantes independientes:

$$r = ae^{bn} \quad (5.1)$$

Con los datos que tenemos de los planetas del sistema solar se hará un ajuste matemático utilizando el método de mínimos cuadrados aplicado a una relación exponencial (véase el anexo).

Para este ajuste no se tomarán en cuenta a Mercurio y a Plutón. Plutón que ya no se encuentra en la lista de planetas, su órbita cuenta con una excentricidad mayor que cualquiera de los planetas del Sistema solar ( $e=0.2488$ ), su inclinación es de 17.16° sobre el plano y su masa de solo  $1.25 \times 10^{21}$  kg. ( $0.002176 M_T$ ). La órbita hace de Plutón cruza la órbita de Neptuno. Por todo lo anterior, parece conveniente no tomar en cuenta a Plutón en la muestra, pues no refleja un comportamiento generalizado en los elementos orbitales del sistema.

Durante la XXVI Asamblea General la Unión Astronómica Internacional (UAI) en Praga, el 24 de agosto de 2006, se emitió la resolución B5, la cual excluyó a Plutón de la categoría de planeta y lo asignó al nuevo grupo de planetas enanos.

Mercurio resalta por sus características orbitales. Casi todos los planetas del sistema solar tienen órbitas circulares, lo que quiere decir que la excentricidad

es muy pequeña ( $e \approx 0$ ). La excentricidad de Mercurio es de 0.2056 y es la mayor excentricidad de los planetas del Sistema Solar. Su inclinación es de  $7^\circ$ , también la segunda mayor inclinación para los planetas. Cabe mencionar que para Mercurio la forma clásica TB no tiene ningún significado congruente; se le suele asignar  $n = -\infty$ , solo para que este se pueda ajustar a la relación. Nuestro ajuste inicial no tomará en cuenta a Mercurio pero sí al planeta enano Ceres.

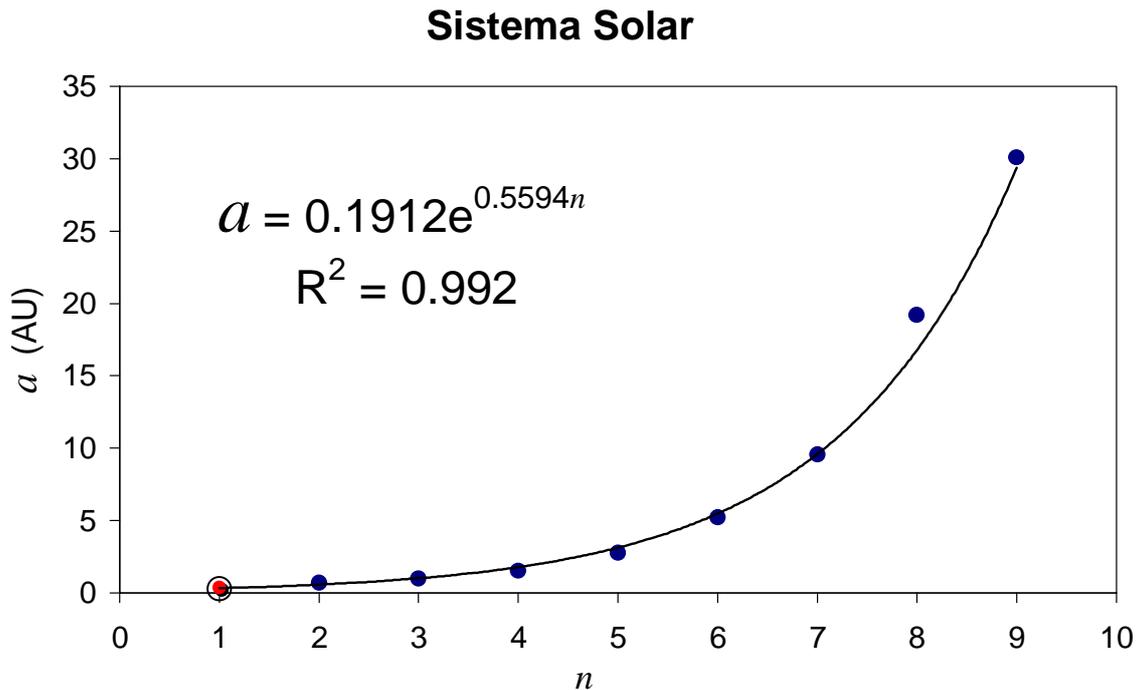


Figura 5.1. Ajuste exponencial para el Sistema Solar. En el eje Y se muestra el semieje en unidades astronómicas y en el eje X, el número de orden n. La posición actual observada de Mercurio se muestra con un círculo hueco.

En la figura 5.1 se muestra el primer ajuste de forma exponencial para el Sistema Solar por el método de mínimos cuadrados. Para este ajuste se tomaron en cuenta Venus, Tierra, Marte, Ceres, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno y se les asignó una numeración progresiva la cual empieza con  $n=2$  para Venus,  $n=3$  para la Tierra y así consecutivamente hasta Neptuno.

En la figura 5.1 no se tomó el valor de Mercurio para el ajuste, sin embargo, si se hace una extrapolación para  $n=1$ , se muestra que la relación predice bien la posición actual de Mercurio. La relación que encontramos es:

$$a = 0.1912e^{0.5594n}, \quad (5.2)$$

con un coeficiente  $R^2=0.992$ , lo cual nos dice que el ajuste obtenido para la progresión orbital de los cuerpos del Sistema Solar, es muy bueno.

Se puede observar que la mayoría de los planetas siguen muy bien el ajuste exponencial, solo para  $n=8$  Urano tiene un error significativo que no se puede dejar de mencionar. (Véase figura 5.1).<sup>1</sup> (35)

En la relación clásica de Titius-Bode, los errores porcentuales son menores que 5%, con excepción de Neptuno que tiene un error del 29%, pero hay que recordar que esta relación tiene una variable independiente más que las relaciones de tipo exponencial. (Véase tabla 5.2).

Tabla 5.2.

*Distancias orbitales de los planetas, tanto como las observadas como los pronosticados por los ajustes exponenciales, cada uno con sus respectivos errores porcentuales*

Planeta	$n$	Semieje Observado (UA)	Semieje Titius-Bode original (UA)	Error %	Semieje TB (exponencial) (UA)	Error %
Mercurio	1	0.387	0.4	3.36	0.33	13.56
Venus	2	0.723	0.7	3.18	0.59	19.05
Tierra	3	1	1	0	1.02	2.40
Marte	4	1.523	1.6	5.06	1.79	17.64
Ceres	5	2.739	2.8	2.23	3.13	14.45
Júpiter	6	5.203	5.2	0.06	5.48	5.41
Saturno	7	9.539	10	4.83	9.60	0.60
Urano	8	19.2182	19.6	1.99	16.79	12.64
Neptuno	9	30.057	38.8	29.09	29.38	2.27

$$Error = \frac{|a_{obs} - a_{TB}|}{a_{obs}} \times 100$$

En este primer ajuste, el mayor error porcentual (columna 7 de la tabla 5.2) se presenta en Venus el cual tiene un error porcentual de 20%, pero para algunos planetas exteriores como Saturno y Neptuno el error porcentual con respecto a la relación clásica TB (columna 5 de la tabla 5.2) disminuye considerablemente. Por ejemplo, Saturno tiene un error porcentual de 0.60% mientras que la relación Titius-Bode clásica muestra un error del 4.83%.

El ajuste exponencial para la órbita de Neptuno muestra un error del 2.27% con respecto a sus valores observacionales mientras que su error porcentual utilizando la relación Titius-Bode es del 29%.

<sup>1</sup> Los resultados del primer ajuste se publicaron en la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, Poveda & Lara, (2008) (35) (ver anexo2)

En el pasado se ha visto que las relaciones tipo Titius-Bode se pueden ajustar a los satélites de algunos planetas del Sistema Solar. A continuación se mostrará el ajuste exponencial para estos satélites.

Uno de los ejemplos representativos de sistemas satelitales en el Sistema Solar es el de Júpiter. El planeta Joviano cuenta con 63 satélites naturales, los más masivos son conocidos como satélites Galileanos (en honor a su descubridor Galileo): Io, Europa, Ganímedes y Calisto. Sus órbitas son casi circulares y se encuentran en el mismo plano con respecto a Júpiter (Véase tabla 5.3).

Tabla 5.3.  
Elementos orbitales de los satélites Galileanos de Júpiter.

Satélite	$n$	Semieje mayor ( $10^3$ km)	Periodo orbital (días)	Excentricidad	Inclinación ( $^\circ$ )	Masa ( $10^{20}$ kg)
Io	1	421.6	1.77	0.004	0.04	893.2
Europa	2	670.9	3.55	0.0101	0.47	480.0
Ganímedes	3	1070.4	7.15	0.0015	0.21	1481.9
Calisto	4	1882.7	16.69	0.007	0.51	1075.9

Se procedió a ajustar una relación exponencial a los satélites galileanos en analogía a lo para el Sistema Solar. Asignamos  $n=1$  a Io,  $n=2$  a Europa,  $n=3$  a Ganímedes y  $n=4$  a Calisto.

La relación exponencial para los satélites galileanos, muestra que se ajusta con mucha precisión; la progresión matemática que resulta es:

$$a = 251.67e^{0.4956n}, \quad (5.3)$$

con un coeficiente de  $R^2=0.9976$ .

Las posiciones orbitales de estos satélites siguen una regularidad que al parecer es exponencial. (Ver figura 5.2)

En la tabla 5.4 se muestran la comparación con los valores observados con sus respectivos errores porcentuales para estos satélites. Se puede observar que ningún error porcentual sobrepasa el 4%.

Este conjunto de satélites, es una muestra de un sistema en equilibrio que ya tiene una regularidad en periodos, algunos de los cuales se encuentran en resonancia. Los satélites Io, Europa y Ganímedes están en una triple resonancia, o conocida como la resonancia de Laplace, en la cual los periodos siguen una proporción de 1:2:4. El estudio de resonancias y su relación con una progresión geométrica en las distancias planetarias es un tema que ha interesado a los astrónomos desde hace mucho tiempo, pero sobre el cual todavía no se llega a ninguna conclusión

## Satélites Galileanos

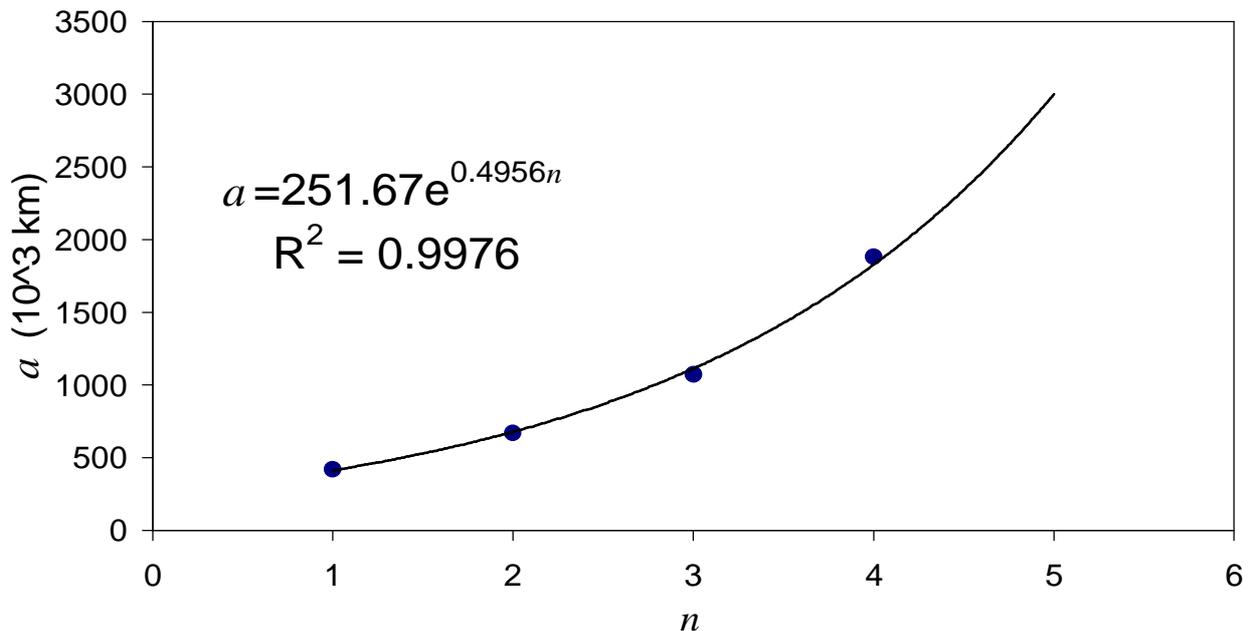


Figura 5.2. Ajuste exponencial para los Satélites Galileanos. En el eje Y se muestra el semieje mayor en  $10^3$  km y en el eje X, el número en orden ascendente  $n$ .

Tabla 5.4.  
Valores observacionales y valores predicho por el ajuste exponencial de las distancias de los satélites Galileanos.

Satélite	$n$	Semieje mayor Observado ( $10^3$ km)	Semieje mayor TB exponencial ( $10^3$ km)	Error %
Io	1	421.6	412.70	2.11
Europa	2	670.9	676.76	0.87
Ganímedes	3	1070.4	1109.78	3.68
Calisto	4	1882.7	1819.87	3.34

Los satélites Galileanos son muy importantes en el estudio de la astrobiología. Por ejemplo, Io es el cuerpo con mayor actividad volcánica en el Sistema Solar debido a las fuerzas de marea producidas por la cercanía con Júpiter. Dichas fuerzas producen un calentamiento interno y éste se disipa en forma de actividad volcánica.

La superficie helada de Europa, con pocos cráteres de impacto observados, muestra que hay actividad geológica y se cree que se presenta un mecanismo de calentamiento interno provocado por fuerzas de marea. Se especula que debajo de la cubierta de hielo del satélite pueda existir vida alimentada por sistemas hidrotermales de forma análoga a lo que ocurre en el océano profundo de la Tierra.

Por la importancia que tienen estos satélites en el Sistema Solar no podrían faltar en el análisis de esta relación a la cual se ajustan muy bien.

Otro sistema de satélites muy importante en nuestro sistema planetario son las lunas de Saturno. Saturno aparte de tener el mayor número de anillos en el sistema solar, tiene 60 satélites naturales orbitando a su alrededor, pero al grupo más importante se le conoce como los satélites mayores: Mimas, Encelado, Tetis, Dione, Rea, Titán, Hiperión y Japeto. Este conjunto comprende los satélites más masivos ( $0.055 \times 10^{20}$  -  $1345.5 \times 10^{20}$  kg) y los de mayor radio ecuatorial (191 – 2575 km). Las excentricidades son casi cero y la mayoría de estos satélites están en el mismo plano, exceptuando Japeto con  $14.75^\circ$  de inclinación (Véase tabla 5.5).

Tabla 5.5.  
Elementos orbitales de los satélites mayores de Saturno.

Satélite	$n$	Semieje mayor ( $10^3$ km.)	Periodo orbital (días)	Excentricidad	Inclinación ( $^\circ$ )	Masa ( $10^{20}$ kg.)
Mimas	1	185.52	0.942	0.0202	1.53	0.379
Encélado	2	238.02	1.370	0.0045	0	1.08
Tetis	3	294.66	1.887	0	1.86	6.18
Dione	4	377.40	2.736	0.022	0.02	11
Rea	5	527.04	4.517	0.001	0.35	23.1
Titán	6	1221.83	15.945	0.0292	0.33	1345.5
Hiperión	7	1481.10	21.276	0.1042	0.43	0.055
Japeto	8	3561.30	79.330	0.0283	14.72	18.1

Una característica principal del planeta de Saturno son sus grandes anillos que se extienden en el plano ecuatorial desde los 6630 km hasta 120,700 km de distancia. La mecánica sobre los movimientos de los anillos no se ha explicado por completo, sin embargo, se cree que algunos satélites son la fuente de partículas de los discos.

Para este sistema de satélites saturninos se ajustará una relación exponencial. Solamente se utilizará el grupo de los satélites mayores por ser los más representativos de las propiedades de este sistema.

El ajuste para los satélites de Saturno muestra que siguen un patrón en su distribución orbital. Sin embargo, el satélite más externo del sistema no se acopla a la relación, pero se aprecia que este último, con  $n=8$ , ajustaría mejor si se pone en el lugar  $n=9$  (Véase figura 5.3).

Como se sospechaba, el segundo ajuste para este sistema es mucho más preciso que el primero, al haber cambiado de orden Japeto y haberlo puesto en la posición  $n=9$ .

La relación exponencial para este segundo ajuste de los satélites mayores de Saturno es:

$$a = 103e^{0.3808n}, \quad (5.4)$$

donde  $R^2=0.9691$ .

### Satélites Saturninos

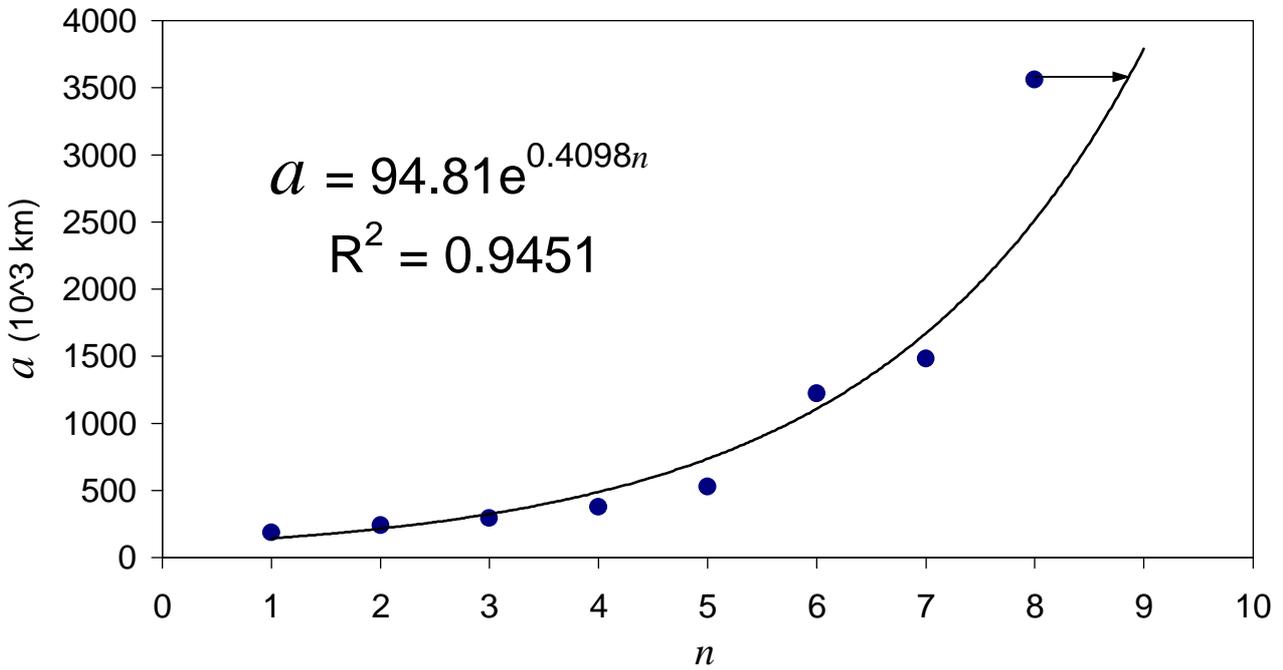


Figura 5.3. Ajuste exponencial para los satélites mayores de Saturno. En el eje Y se muestra el semieje en unidades de  $10^3$  km, y en el eje X, el número en orden  $n$ . Se resalta con una flecha la posibilidad de un mejor ajuste si se cambia a Japeto de la posición  $n=8$  a  $n=9$ .

### Satélites Saturninos

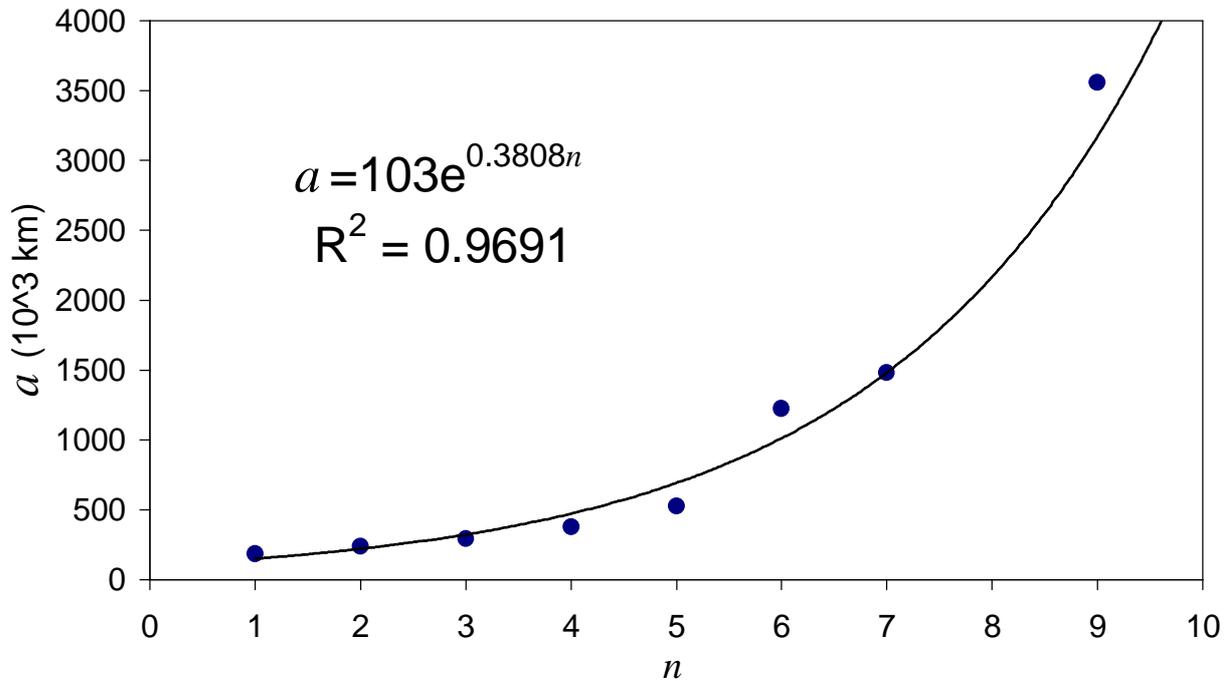


Figura 5.4. Ajuste exponencial para los satélites mayores de Saturno. En el eje Y se muestra el semieje en unidades de  $10^3$  km, y en el eje X el número en orden  $n$ . En esta imagen se muestra a Japeto en la posición  $n=9$ .

Vemos que este ajuste es mucho mejor en comparación con el primer ajuste, que tenía un coeficiente  $R^2=0.9451$  (Véase figura 5.4). Este segundo ajuste hace la predicción de que se encontrará un cuerpo a una distancia orbital de  $2.515 \times 10^6$  km, entre los satélites Hiperión y Japeto.

Saturno es uno de los cuatro planetas del Sistema Solar que cuentan con anillos. Por pertenecer al Sistema Solar ha sido estudiado durante mucho tiempo y por muchas sondas espaciales y no se ha encontrado ningún cuerpo en la posición vacante en la distribución (satélite o anillo).

El ajuste exponencial para los satélites mayores de Saturno, es deficiente en comparación a los ajustes que se han hecho para otros sistemas. Sin embargo, este caso de la dinámica y evolución de este sistema pudo haber sido influenciada por la dinámica de los anillos planetarios. Esto es una pregunta para estudios posteriores.

Por último, se analizará los satélites de Urano. El planeta Urano es un planeta muy singular ya que su eje de rotación es casi paralelo al plano de la eclíptica. Es el segundo sistema anillado descubierto después de Saturno y contiene 27 satélites naturales confirmados. La mayoría de los satélites son de masas muy pequeñas. Por eso para el ajuste exponencial solo se tomará en cuenta con el grupo de los satélites mayores de Urano, integrado por: Miranda, Ariel, Umbriel, Titania y Oberon. A continuación se muestran los elementos orbitales de dichos satélites.

Tabla 5.6.  
Elementos orbitales de los satélites mayores de Urano.

Satélite	<i>n</i>	Semieje mayor ( $10^3$ km. )	Periodo orbital (días)	Excentricidad	Inclinación (°)	Masa ( $10^{20}$ kg.)
Miranda	1	129.39	1.4134	0.0027	4.22	0.66
Ariel	2	191.02	2.5203	0.0034	0.31	13.5
Umbriel	3	266.30	4.1441	0.0050	0.36	11.7
Titania	4	435.91	8.7058	0.0022	0.14	35.2
Oberon	5	583.52	13.4632	0.0008	0.10	30.1

Todos estos satélites tienen órbitas casi circulares y sus inclinaciones con respecto al plano ecuatorial del planeta son muy pequeñas. Como ya mencionamos, Urano tiene una peculiaridad que se debe resaltar: el eje de rotación tiene  $97.77^\circ$  con respecto a la normal al plano de la eclíptica. Sería intrigante si los satélites mayores de este singular planeta se ajustaran a una relación TB.

### Satélites de Urano

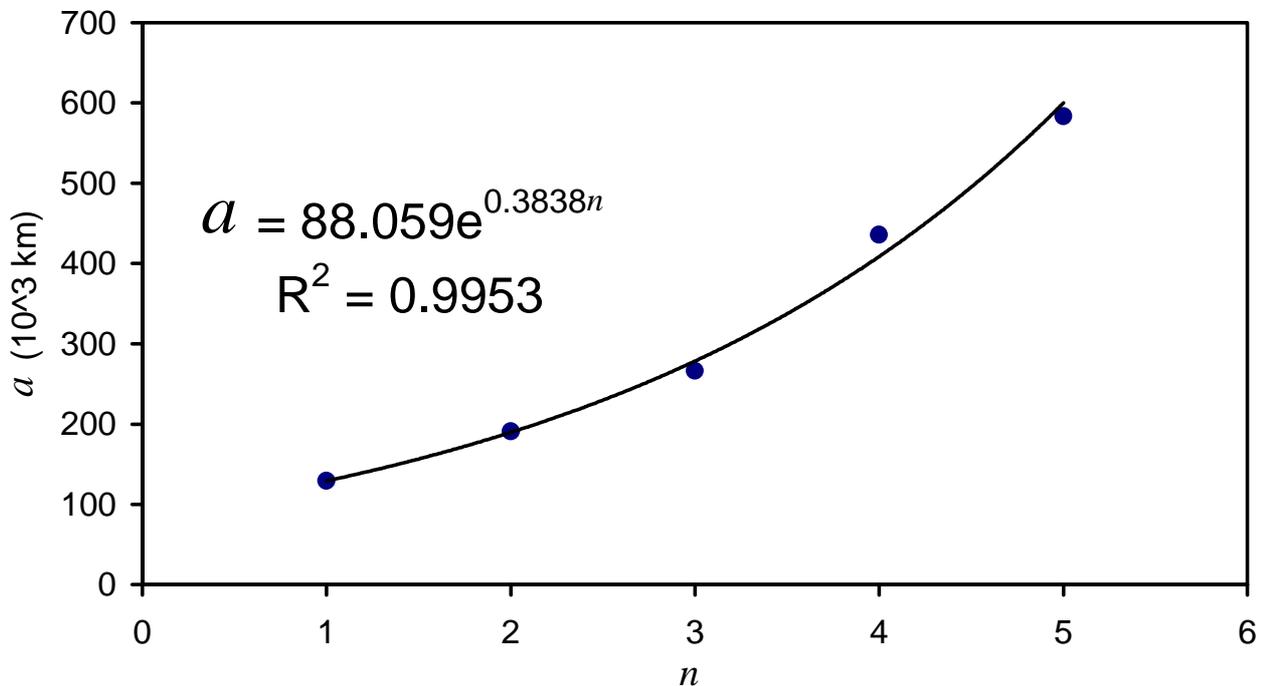


Figura 5.5. Muestra el ajuste exponencial para los satélites Urano. En el eje Y se muestra el semieje en unidades de  $10^3$  km. y en el eje X, el número en orden  $n$ .

En la figura 5.5 podemos observar el ajuste exponencial que se aplica a los satélites de Saturno. La relación exponencial que se encuentra es:

$$a = 88.059e^{0.3838n}, \quad (5.5)$$

con  $R^2=0.9953$ , y donde  $a$  esta en unidades de  $1 \times 10^3$  km y  $n$  es el número de orbital de los satélites.

La relación exponencial TB tiene una precisión apreciable para este sistema de satélites mayor que para el sistema de satélites de Saturno aunque menor que la obtenida por los galileanos. En la figura 5.5 se resalta el coeficiente  $R^2=0.9953$ . El error porcentual más significativo para estos satélites es de 6.22% para el caso  $n=5$  que le corresponde al satélite Titania, todos los demás están por debajo de esta cantidad (véase tabla 5.7).

*Tabla 5.7.*  
*Valores observacionales y valores predichos por el ajuste exponencial para las distancias de los satélites orbitales de Urano.*

<i>Satélite</i>	<i>n</i>	<i>Semieje mayor Observacional</i> <i>(10<sup>3</sup> km)</i>	<i>Semieje mayor TB exponencial</i> <i>(10<sup>3</sup> km)</i>	<i>Error %</i>
Miranda	1	129.39	129.26	0.102
Ariel	2	191.02	189.73	0.675
Umbriel	3	266.30	278.50	4.580
Titania	4	435.91	408.79	6.221
Oberon	5	583.52	600.05	2.832

La distribución de distancias en el sistema solar ha sido motivo de discusión entre los científicos. Gracias a estos ajustes, por medio del método de mínimos cuadrados, se ha mostrado que las distancias orbitales de los planetas del Sistema Solar siguen una progresión geométrica. De estos resultados sobresale el hecho de que los satélites de los planetas mayores (Júpiter, Saturno y Urano) del Sistema Solar siguen el mismo tipo de progresión geométrica representada por una relación matemática del tipo exponencial.

## 6. Relación Titius-Bode para sistemas exoplanetarios

El sistema exoplanetario 55 Cancri es el sistema planetario fuera del sistema solar con 5 planetas girando alrededor de la estrella 55 Cancri, de la constelación del Cangrejo. En la estrella HD 10180 se ha confirmado que orbitan 5 planetas y existe fuerte evidencia de que hay dos exoplanetas más girando alrededor de esta estrella. Gliese 581, Gliese 876 y  $\mu$  Arae son sistemas exoplanetarios que cuenta con 4 planetas. El sistema planetario Gliese 581 destaca porque algunos de sus planetas son candidatos para albergar vida.

El objetivo del presente capítulo es mostrar si estos sistemas siguen la relación TB.

### 6.1 Sistema exoplanetario 55 Cancri

El sistema exoplanetario 55 Cancri fue uno de los primeros sistemas en los que se detectó un planeta girando alrededor de su primaria (21).

55 Cancri (55 Cnc = HD 75732 = HR3522 = HIP 43587 = GJ 324A) es una estrella tipo G8V, relativamente cercana a nuestro Sistema Solar, en la constelación de Cáncer. Tiene un brillo aparente  $V= 5.96$ , a una distancia de 12.5 parsecs y una luminosidad estelar de 0.6 la luminosidad del Sol. En la tabla 6.1 se pueden observar algunas de las características de esta estrella.

La estrella 55 Cancri también es un sistema binario, 55 Cancri B es una estrella enana M4 de magnitud 13 que se encuentra a 1550 UA de su primaria.

Magnitud Visual Aparente	5.96
Paralaje Hiparco	$79.8 \pm 0.84$ mas
Distancia	$12.5 \pm 0.13$ parsecs
Magnitud Visual Absoluta	5.47
Temperatura Efectiva	$5234 \pm 30$ K
$v \sin i$	$2.4 \pm 0.5$ km s <sup>-1</sup>
Luminosidad	0.6 L <sub>s</sub>
Tipo espectral	G8V/K0V
Masa estelar	$0.94 \pm 0.05$ M <sub>s</sub>
Metalicidad [Fe/H]	$0.31 \pm 0.04$

55 Cancri tiene alrededor 5 mil millones de años de edad, es un poco menos masiva que el Sol, y tiene una magnitud aparente tal que se puede ver a simple vista en una noche despejada.

El descubrimiento del quinto planeta orbitando alrededor de este sistema (11), nos hizo pensar en la posibilidad de que una relación TB se ajustara para este sistema. Por lo que se examinará el sistema de 55 Cancri. Tomando en cuenta los datos del artículo de Fischer, en la tabla 6.2, se listan los parámetros orbitales de los planetas en 55 Cancri.

*Tabla 6.2.  
Elementos orbitales, año de descubrimiento y masa de los planetas que se encuentran en el sistema 55 Cancri, en orden de posición orbital.*

	55 cnc e	55 cnc b	55 cnc c	55 cnc f	55 cnc d
<i>n</i>	1	2	3	4	5
Año de descubrimiento	2004	1996	2002 (1)	2007	2002 (2)
Semieje mayor observada (UA)	0.038 $\pm 1.0 \times 10^{-6}$	0.115 $\pm 1.1 \times 10^{-6}$	0.24 $\pm 4.5 \times 10^{-5}$	0.781 $\pm 0.007$	5.77 $\pm 0.11$
Periodo orbital (días)	2.817 $\pm 1 \times 10^{-4}$	14.651 $\pm 7 \times 10^{-4}$	44.344 $\pm 7 \times 10^{-3}$	260 $\pm 1.1$	5218 $\pm 230$
Excentricidad	0.07	0.014	0.086	0.2	0.03
<i>M sin i</i> (Masa joviana)	0.034 $\pm 0.0036$	0.824 $\pm 0.007$	0.169 $\pm 0.008$	0.144 $\pm 0.04$	3.835 $\pm 0.08$

Las órbitas de este sistema son casi circulares, exceptuando el planeta “f” que tiene la mayor excentricidad (0.2). Las masas de los planetas sobrepasan 11 masas terrestres y, debido a sus características, podríamos decir que los planetas de este sistema en su mayoría son gaseosos. Cabe resaltar que el planeta recién descubierto, 55 Cancri f, tiene una masa de 46 masas terrestres y un periodo asociado de 260 días, que se encuentra en la zona habitable de su sistema, pero debido a su composición gaseosa no es probable que albergue vida.

Utilizado los elementos orbitales conocidos de los cuerpos del sistema 55 Cancri se hará un ajuste exponencial a las distancias orbitales de este sistema y se evaluará la precisión del ajuste (Véase Figura 6.1).

## 55 Cancri

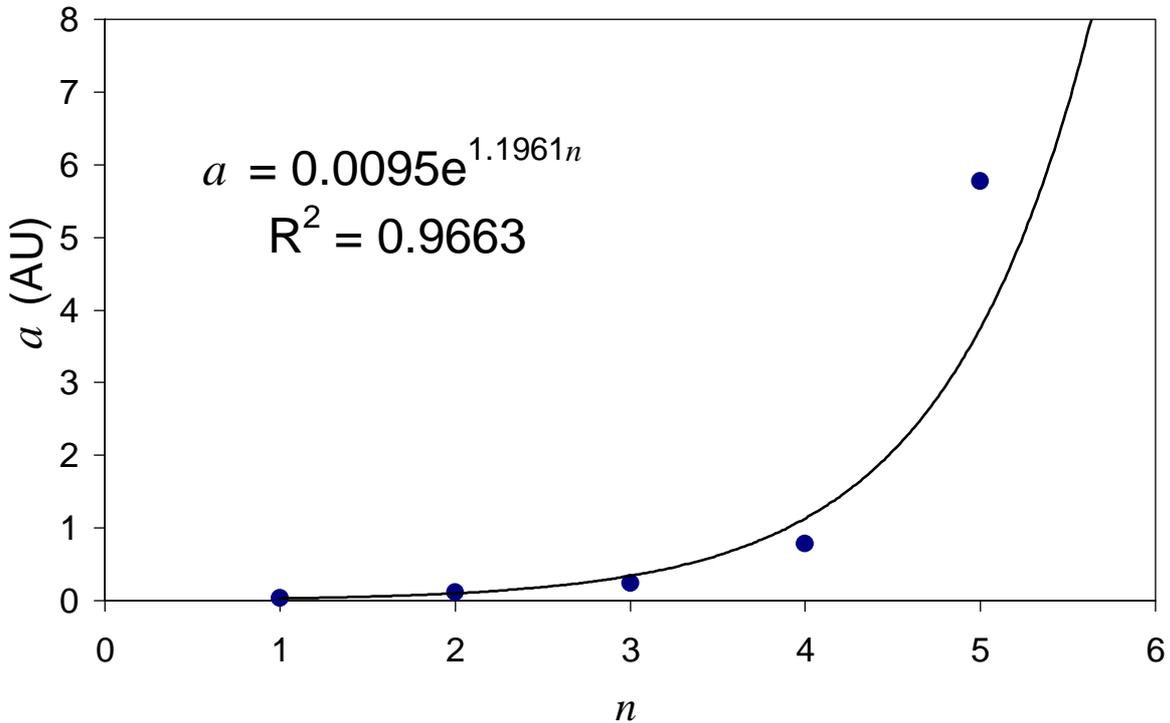


Figura 6.1. Ajuste exponencial para el sistema 55 Cancri, tomando los valores observados de cada uno de los planetas. En el eje Y se muestra el semieje en unidades astronómicas y en el eje X, el número en orden  $n$ .

En la figura 6.1 se muestra que la mayoría de los planetas, exceptuando el planeta más externo ( $n=5$ ), sigue una relación exponencial. La relación obtenida es:

$$a = 0.0095e^{1.1961n}, \quad (6.1)$$

con un coeficiente  $R^2=0.9663$ .

Observando las posiciones de los planetas, resalta el hecho de que al situado en  $n=5$  pudiera no corresponderle ese orden en el sistema. Hacemos otro ajuste tomando en cuenta solo los 4 primeros planetas para ver si la relación exponencial pudiera predecir la posición de  $n=5$ , considerando que en el pasado este tipo de relaciones TB ha tenido la capacidad para predecir planetas en el Sistema Solar.

Cuando se toman en cuenta los 4 primeros planetas del sistema para el segundo ajuste, utilizando la relación TB obtenida, se resalta que la posición del quinto planeta debe corresponder al orbital  $n=6$  (Véase en figura 6.2).

La relación TB exponencial que se obtiene con los primeros 4 puntos es:

$$a = 0.0148e^{0.9718n} \quad (R^2 = 0.990) \quad (6.2)$$

## 55 Cancri

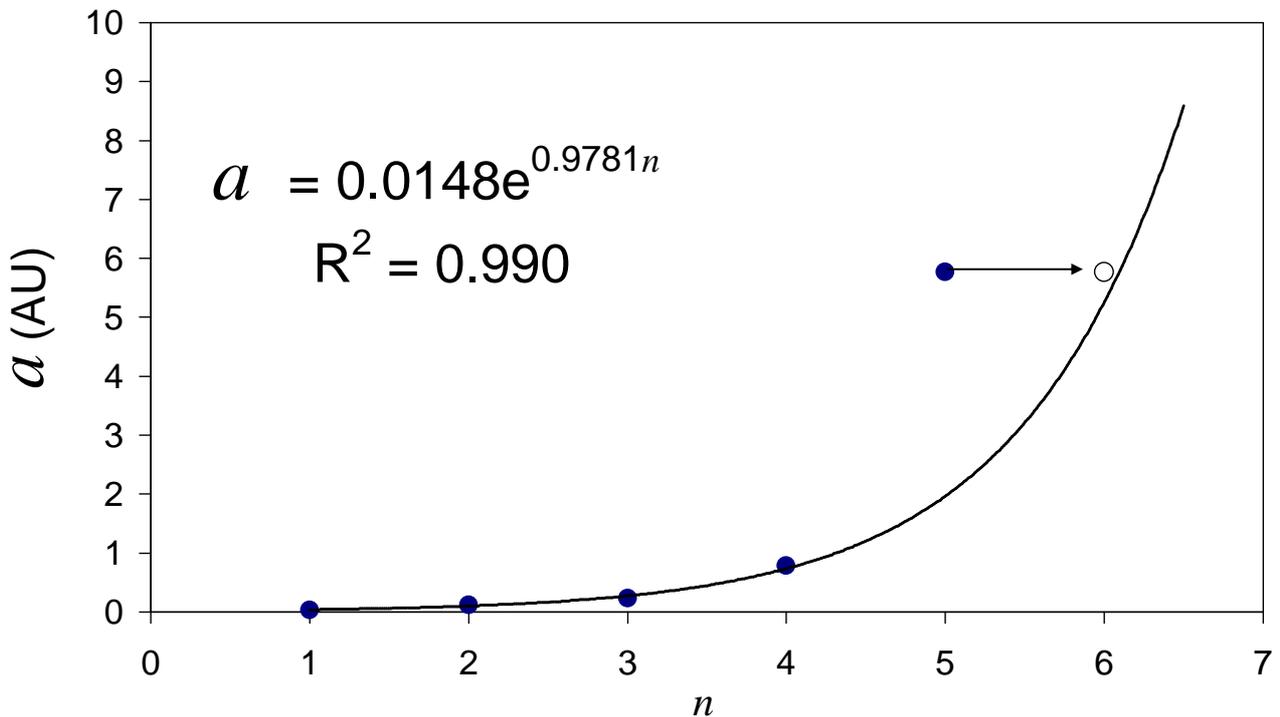


Figura 6.2. Ajuste exponencial para el sistema 55 Cancri, tomando los valores observados de los cuatro primeros planetas. Se observa claramente que la posición del planeta en  $n=5$  corresponde a  $n=6$ .

Como la figura 6.2 muestra que la verdadera posición orbital del quinto planeta pudiera corresponder más buena  $n=6$ , en vista a lo anterior, realizamos un ajuste tomando en cuenta los cinco planetas pero en vez de tomar  $n=5$  para el quinto planeta se hará situándolo en  $n=6$ . La relación exponencial que se obtiene es:

$$a = 0.0142e^{0.9975n} \quad (R^2=0.997) \quad (6.3)$$

En la figura 6.3 y en la ecuación (6.3) mostramos que si la relación TB se cumple para este sistema, entonces es muy probable que exista un planeta en 55 Cancri en la posición  $n=5$  que todavía no se descubre (o un cinturón de asteroides), hipótesis que se ha planteado en varios estudios actuales sobre este sistema. El planeta en cuestión debería tener un semieje de  $a \approx 2$  UA con un periodo de 1130 días.

La relación TB se caracteriza por su capacidad predictiva. Si se acepta la extrapolación del ajuste puede incluso predecirse un segundo planeta exterior en  $n=7$ , con un semieje  $a \approx 15$  UA y un periodo de 62 años.

El ajuste exponencial TB para 55 Cancri es muy bueno teniendo un coeficiente  $R^2=0.997$ . En la tabla 6.3 se muestran los elementos orbitales de 55 Cancri y los valores que predice la ecuación 6.3 con sus correspondientes errores porcentuales.

## 55 Cancri

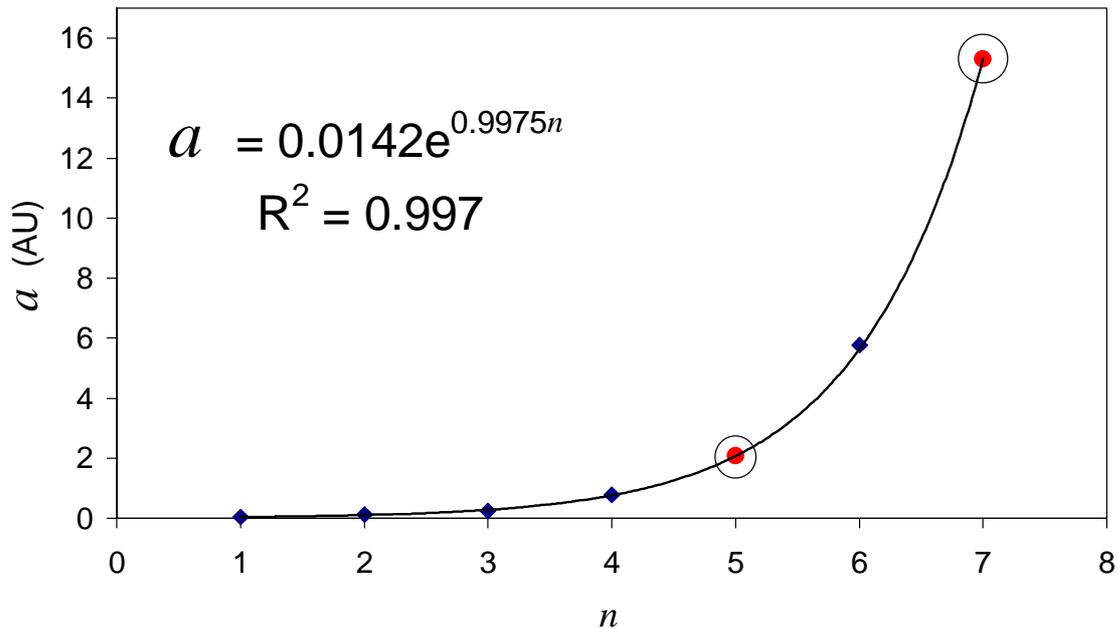


Figura 6.3. Ajuste TB exponencial para el sistema 55 Cancri, tomando los valores observacionales de los cinco planetas, donde el planeta más lejano conocido se encuentra en el orbital  $n=6$ . Los planetas predichos con orbitales  $n=5$  y  $n=7$ , están encerrados en círculos.

En la tabla 6.3, los valores que pronostica la relación TB se ajustan bastante bien a los valores observados para este sistema. Incluso la vacante que muestra el sistema 55 Cancri simula una situación análoga a la del Sistema Solar, que tuvo un espacio vacante en  $n=5$ , hasta que se descubrió Ceres.

El hecho de que a dos sistemas planetarios se les pueda aplicar la relación TB, da confianza en la capacidad predictiva de esta relación, que puede servir de guía para la búsqueda de nuevos exoplanetas.

Los resultados de este análisis se publicaron en la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, Poveda & Lara, (2008) (35) (Ver anexo 2)

Tabla 6.3

Distancia observada de los planetas del sistema 55 Cancri y su comparación con las distancias predichas por la relación TB exponencial

No. Orden planeta	1	2	3	4	5	6	7
Año de descubrimiento	2004	1996	2002 (1)	2007		2002 (2)	
Semieje mayor observacional (UA)	0.038 $\pm 1 \times 10^{-6}$	0.115 $\pm 1.1 \times 10^{-6}$	0.24 $\pm 4.5 \times 10^{-5}$	0.781 $\pm 0.007$		5.77 $\pm 0.11$	
Ajuste Exponencial TB (UA)	<b>0.039</b>	<b>0.104</b>	<b>0.283</b>	<b>0.768</b>	<b>2.081</b>	<b>5.643</b>	<b>15.302</b>
Error porcentual	<b>2.63</b>	<b>9.57</b>	<b>17.92</b>	<b>1.72</b>		<b>2.19</b>	
Periodo (días)	2.817 $\pm 0.0001$	14.651 $\pm 0.0007$	44.344 $\pm 0.007$	260 $\pm 1.1$	1130	5218 $\pm 230$	22530

## 6.2 Sistema exoplanetario HD 10180

El sistema exoplanetario HD 10180 tiene 5 planetas confirmados. En una publicación reciente sobre el descubrimiento de estos planetas se menciona que existe evidencia de la existencia de dos exoplanetas más (19).

La estrella HD 10180 (HIP 7599, SAO 248411) tiene un tipo espectral G1V, con una magnitud aparente de 7.33. Se encuentra a una distancia de 127 años luz, en la constelación de Hidra. Algunas de sus características físicas están listadas en la Tabla 6.4.

Magnitud Visual Aparente	7.33
Paralaje Hipparcos	$25.39 \pm 0.62$ mas
Distancia	$39.4 \pm 1$ parsecs
Magnitud Visual Absoluta	4.35
Temperatura Efectiva	$5911 \pm 19$ K
$v \sin i$	$< 3$ km s <sup>-1</sup>
Luminosidad	$1.49 \pm 0.02$ L <sub>S</sub>
Tipo espectral	G1V
Masa estelar	$1.06 \pm 0.05$ M <sub>S</sub>
Metalicidad [Fe/H]	$0.08 \pm 0.01$

HD 10180 tiene una edad de aproximadamente 4 mil millones de años, su masa y metalicidad son 6% y 20% mayor que el Sol, respectivamente. Esta estrella tiene por lo menos 5 planetas extrasolares con masas semejantes a las de Neptuno.

La publicación sobre el descubrimiento de 7 posibles exoplanetas en esta estrella, nos han motivado a analizar si existe un ajuste de tipo exponencial que las distancias orbitales de estos planetas cumplan.

Basados en los datos reportados por el equipo de C. Lovis (19), se hará el mismo tipo de ajuste que se ha realizado tanto para el Sistema Solar como el Sistema 55 Cancri. Los elementos orbitales y la masa de los exoplanetas descubiertos se muestran en la Tabla 6.5. También se incluyen los datos de los exoplanetas que oficialmente no se han confirmado hasta el momento.

Tabla 6.5.

Elementos orbitales, año de descubrimiento y masa de los planetas que se encuentran en el sistema HD 10180, en orden de posición orbital. Los exoplanetas marcados con asterisco, no están confirmados pero hay evidencias muy fuertes sobre su existencia a las distancias indicadas.

	HD 10180b*	HD 10180c	HD 10180d	HD 10180e	HD 10180f	HD 10180g	HD 10180h*
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7
Año de descubrimiento	2010	2010	2010	2010	2010	2010	2010
Semieje mayor observacional (UA)	0.0222 ± 0.00035	0.0641 ± 0.001	0.1286 ± 0.002	0.2699 ± 0.0042	0.4929 ± 0.0078	1.422 ± 0.026	3.4 ± 0.11
Periodo orbital (días)	1.17768 ± 1x10 <sup>-4</sup>	5.75979 ± 6.2x10 <sup>-4</sup>	16.3579 ± 0.038	49.745 ± 0.022	122.76 ± 0.17	601.2 ± 8.1	2222 ± 91
Excentricidad	0.0	0.045	0.088	0.026	0.135	0.19	0.08
<i>Msin i</i> (Masa joviana)	0.0043	0.04122	0.03697	0.07897	0.07519	0.06733	0.20262

Las órbitas de estos exoplanetas son órbitas casi circulares, y sus distancias son muy cercanas a su estrella, con excepción de HD 10180g con una distancia de 1.42 UA y una excentricidad 0.19. Como ya se había mencionado las masas son del orden de la masa de Neptuno (17 masas terrestres = 1 masa de Neptuno). Uno de los posibles exoplanetas, HD 10180b, tiene 1.4 masas terrestres. De confirmarse su existencia sería el exoplaneta con menor masa descubierto. Una vez conocidos los datos observados se procederá a un ajuste de tipo exponencial.

Para el primer ajuste exponencial de las órbitas de este sistema planetario se tomarán en cuenta los datos observados de los cinco exoplanetas confirmados. Esta confirmación es debida a que muestran las señales más intensas en la curva de velocidad de este sistema planetario.

La relación exponencial que presenta este primer ajuste se muestra en la figura 6.4 y está dada por:

$$a = 0.0286e^{0.7542n}, \quad (6.4)$$

con un coeficiente de correlación de  $R^2 = 0.9912$ .

El ajuste de la ecuación (6.4) muestra una concordancia muy buena para estos cinco exoplanetas. A pesar de este resultado favorable, el error porcentual promedio es de alrededor del 12%.

Ya se hizo mención de que hay pruebas suficientes que permiten inferir la existencia de 2 exoplanetas más. A continuación se hará el ajuste tomando en cuenta los 7 exoplanetas.

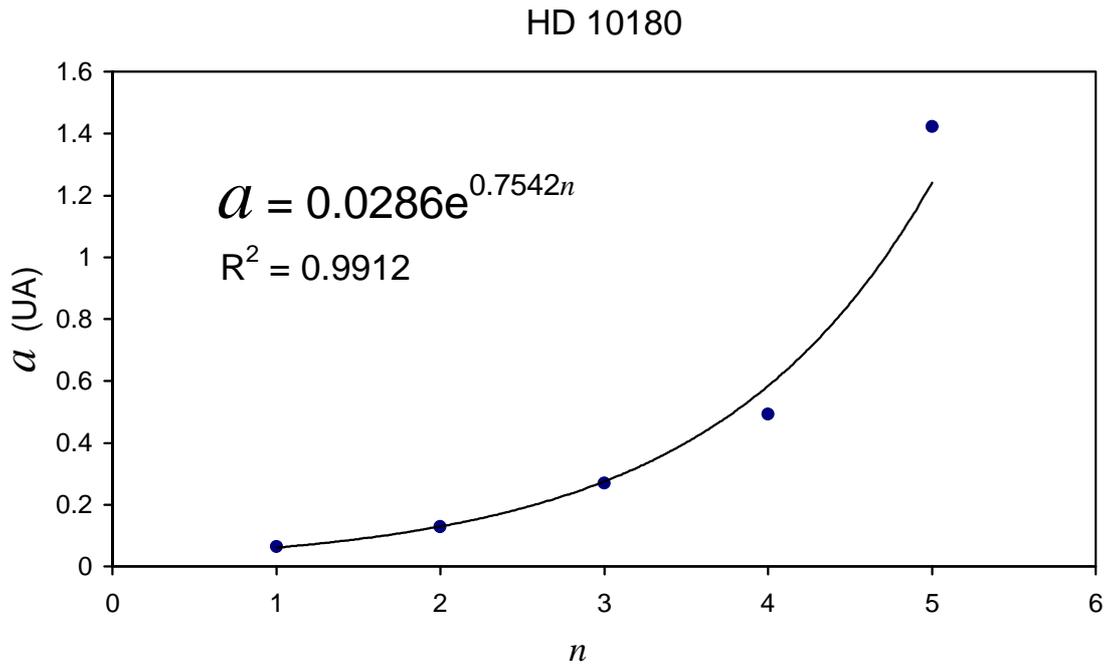


Figura 6.4. Ajuste TB exponencial para el sistema HD 10180, tomando los valores observados de los cinco planetas confirmados. El eje vertical es el semieje mayor en unidades astronómicas y en el eje horizontal se encuentra el número orbital.

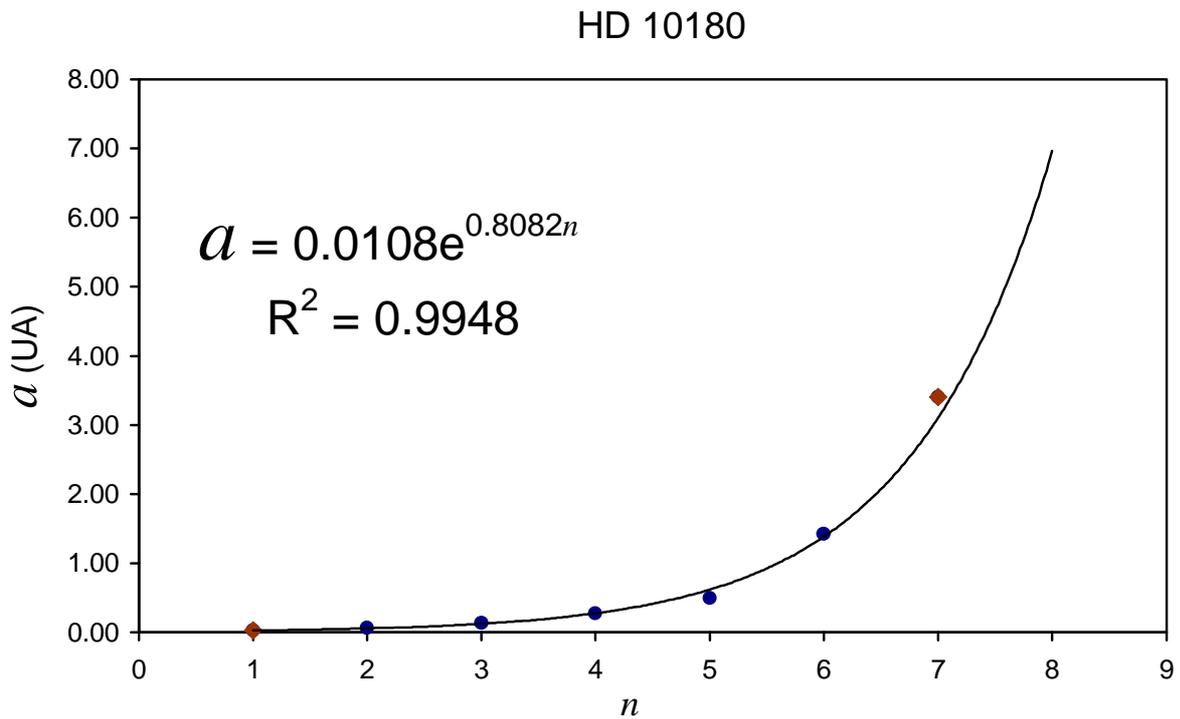


Figura 6.5. Ajuste TB exponencial para el sistema HD 10180, tomando los valores observados de los cinco planetas y de los dos posibles exoplanetas. Los planetas por confirmar se encuentran en los orbitales  $n=1$  y  $n=7$ , marcados por rombos.

El ajuste exponencial realizado con los valores reportados para los 7 exoplanetas, muestra que siguen una progresión matemática dada por:

$$a = 0.0108e^{0.8082n}, \quad (6.5)$$

la cual tiene un coeficiente  $R^2 = 0.994$ .

Con el ajuste exponencial (figura 6.5) se resalta una correspondencia muy buena entre los datos observacionales con los valores que predice la relación TB tipo exponencial, esto se refleja en el coeficiente de correspondencia  $R^2 = 0.994$ . En la tabla 6.6 se enlista los valores que predice la relación TB exponencial para este sistema exoplanetario.

Tabla 6.6

Tabla 6.6							
Distancias observadas y predichas por la relación de la ecuación (6.5) de los exoplanetas del sistema HD 10180							
	HD 10180b*	HD 10180c	HD 10180d	HD 10180e	HD 10180f	HD 10180g	HD 10180h*
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7
Año de descubrimiento	2010	2010	2010	2010	2010	2010	2010
Semieje mayor observacional (UA)	0.0222	0.0641	0.1286	0.2699	0.4929	1.422	3.4
Ajuste Exponencial TB (UA)	$\pm 0.00035$	$\pm 0.001$	$\pm 0.002$	$\pm 0.0042$	$\pm 0.0078$	$\pm 0.026$	$\pm 0.11$
Error porcentual	<b>9.82</b>	<b>15.17</b>	<b>5.12</b>	<b>1.44</b>	<b>24.64</b>	<b>3.06</b>	<b>9.02</b>
Periodo orbital (días)	1.17768	5.75979	16.3579	49.745	122.76	601.2	2222
	$\pm 1 \times 10^{-4}$	$\pm 6.2 \times 10^{-4}$	$\pm 0.038$	$\pm 0.022$	$\pm 0.17$	$\pm 8.1$	$\pm 91$

Los valores obtenidos de la ecuación 6.5 distan de los datos observacionales desde 1.44% hasta 24.64%. El buen resultado de este ajuste para este sistema exoplanetario puede verse como una confirmación de la existencia de estos planetas.

### 6.3 Sistema exoplanetario Gliese 581

Este sistema es de particular interés, debido a que algunos de sus planetas están localizados en la Zona Habitable determinada para el tipo espectral de la estrella primaria.

La estrella Gliese 581(HIP 74995, LHS 394) es una estrella enana M3, con una distancia al Sol de 6.3 pc. Su masa es 0.31 Ms, su luminosidad es de solo 0.013 Ls, su magnitud aparente  $V=10.55$  y tiene una metalicidad  $[Fe/H]=-0.25$ . La mayoría de los indicadores de edad para esta estrella apuntan a una edad mínima de 2 mil millones de años. Sus propiedades se enlistan a continuación.

Magnitud Visual Aparente	10.55
Paralaje Hipparcos	$159.52 \pm 2.27$ mas
Distancia	6.26 pc.
Magnitud Visual Absoluta	11.55
$V \sin i$	$2.4 \pm 0.5$ km s <sup>-1</sup>
Luminosidad	0.013 L <sub>S</sub>
Tipo espectral	M3V
Masa estelar	$0.31 \pm M_S$
Metalicidad [Fe/H]	-0.25

Gliese 581 se encuentra a 20.3 años luz de nuestro planeta, en la constelación de Libra. Esta enana roja visualmente es 50 veces más débil que el Sol. Tiene un tercio de la masa solar.

Se ha dicho que este tipo de estrellas tienen mayor probabilidad de tener planetas de baja masa girando a su alrededor, por eso se busca preferentemente en este tipo de estrellas.

El descubrimiento de un cuarto planeta en Gliese 581 y la corrección del valor en el periodo de Gliese 581d (24), nos da la motivación para comprobar si la relación TB también se aplica a este sistema exoplanetario.

En los elementos orbitales reportados hubo corrección para el planeta de Gliese 581d. El periodo conocido era de 88 días y cambio a un valor corregido de 66.8 días (Tabla 6.8).

Tabla 6.8.

Elementos orbitales, año de descubrimiento y la masa de los planetas que se encuentran en el sistema Gliese 581, en orden de posición orbital. Los planetas marcados con asteriscos fueron descubiertos posteriormente al análisis de este trabajo.

	Gl 581 e	Gl 581b	Gl 581c	Gl 581g*	Gl 581d	Gl 581f*
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6
Año de descubrimiento	2009	2005	2007	2010	2007	2010
Semieje mayor observacional (UA)	0.03	0.041	0.07	0.146	0.22	0.76
Periodo orbital (días)	3.14942 $\pm 4.5 \times 10^{-4}$	5.36874 $\pm 1.9 \times 10^{-4}$	12.9292 $\pm 4.7 \times 10^{-3}$	36.65 $\pm 0.052$	66.80 $\pm 0.14$	433 $\pm 13$
Excentricidad	0.0	0.0	0.17	-	0.38	-
<i>M sin i</i> (Masa terrestres)	1.94	15.65	5.36	3.19	7.09	7.34

Como se ha mencionado, este sistema alberga 5 planetas con masas de tipo terrestre y uno más masivo con una masa  $m \sin i = 16M_T$  (tipo Neptuno). A esta clase de planetas se les conoce como súper-Tierras.

Gliese 581g es el planeta con mayor interés astrobiológico porque es el primer exoplaneta que se encuentra en la “zona habitable” correspondiente a esta estrella. Tiene poca masa (~3 masas terrestres) y cuenta con gravedad suficiente para mantener una atmósfera y temperatura adecuadas para albergar agua líquida (-31°C a -12°C).

Gliese 581c se encuentra en los límites de la “zona habitable”. Tiene un radio de 1.5 veces el radio terrestre y 5 veces la masa de la Tierra. Aplicando modelos climáticos, la temperatura de equilibrio para Gl 581 es de -3°C si se toma en cuenta que su albedo es como el de Venus. Si su albedo fuera como el de la Tierra, su temperatura superficial sería de 40°C. Debido a su posición, el planeta está bajo la influencia de las fuerzas de marea y se refleja con la rotación sincrónica que tiene con respecto a su estrella primaria.

Todas estas características hacen a este planeta candidato para albergar agua líquida, que es requisito para la evolución de vida.

Falta mencionar el último planeta descubierto hasta el momento, que es GJ 581e; éste tiene la peculiaridad de ser el planeta más pequeño de los exoplanetas conocidos con una masa mínima  $m \sin i = 1.9M_T$ . Utilizando los valores observacionales que reporta el equipo de Mayor, se hará el ajuste exponencial para el sistema de Gl 581.

Como ya se ha hecho anteriormente, el primer ajuste para este sistema se realiza tomando en cuenta los cuatro primeros datos del semieje mayor de los planetas, en unidades astronómicas, asignándoles a cada uno un número de orden ascendente.

### GI 581

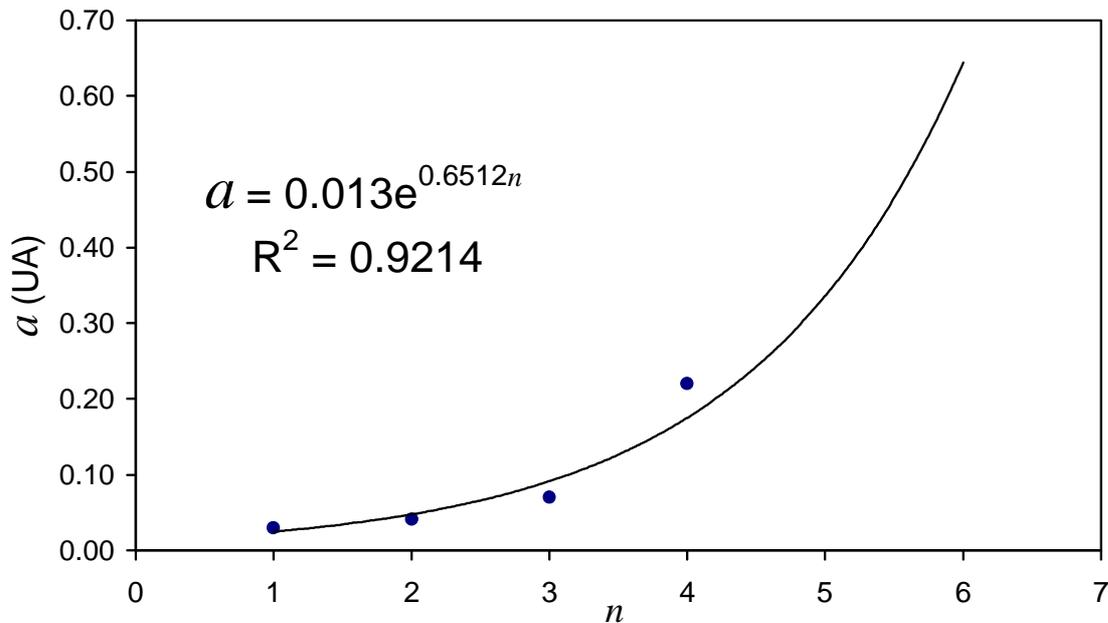


Figura 6.6. Ajuste exponencial TB para el sistema Gliese 581, aquí se muestra los valores del semieje mayor de cuatro planetas (GJ 581 e, b, c y d) graficados en orden ascendente conocido.

Con este ajuste resalta que los tres primeros (Gliese 581 e, b y c) se acoplan en mejor forma que el cuarto planeta (Gliese 581 d), el más externo. (Ver figura 6.6). De manera superficial se observa que la relación exponencial  $a = 0.013e^{0.6512n}$ , con un índice de correlación  $R^2 = 0.9214$ , es un ajuste muy bueno. Sin embargo, los errores porcentuales de este ajuste van del 16% al 30%. En particular, es grande el error para  $n=4$ .

En los casos anteriores hemos visto que un ajuste para los primeros planetas nos sirve como guía para hacer un ajuste óptimo. A continuación se mostrará un ajuste con los tres primeros planetas.

Cuando se realiza el ajuste con los tres primeros planetas, sobresale una tendencia diferente en el orden de los planetas. El planeta más externo (Gliese 581d), que no se tomó en cuenta para hacer este ajuste, no pertenece a su posición actual sino que debería estar en el orbital  $n=6$  (ver figura 6.7).

## GI 581

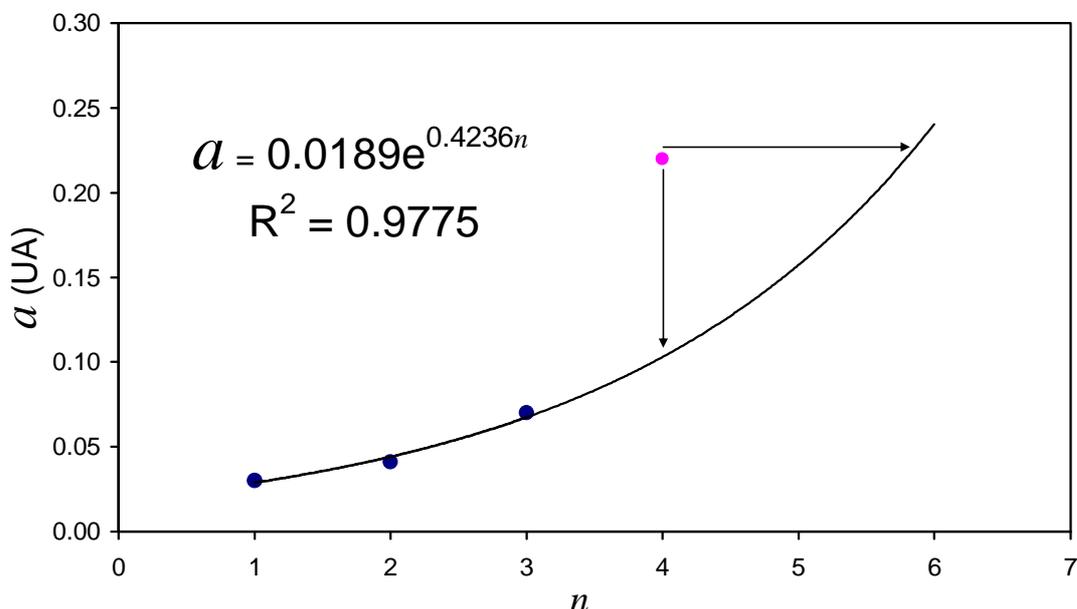


Figura 6.7. Ajuste exponencial T-B para el sistema Gliese 581, aquí se muestra el ajuste a los tres primeros planetas. También se muestra, Gliese 581d (n=4). La grafica muestra que este planeta deberá tener el orbital n=6.

La relación exponencial obtenida,  $a = 0.0189e^{0.4236n}$  con  $R^2=0.9775$ , mejora notablemente para los tres primeros planetas, dando errores relativos que van del 3% al 7%. Incluso da la pauta del cambio en la órbita de  $n=4$ .

Esta situación es análoga a la del sistema planetario 55 Cancri, en donde, una vez establecido que los primeros planetas están en sus orbitales correspondientes y que los errores de cada uno con respecto a los observados son pequeños, estos mismos sugieren la ordenación correcta para el sistema.

Por último, en la figura 6.8 se muestra el ajuste exponencial utilizando los valores de los 4 planetas conocidos hasta el momento pero en este caso colocando al planeta más externo en el orbital  $n=6$ . La relación exponencial se ajusta mejor a este sistema planetario. En efecto, este último ajuste muestra de forma muy clara esta relación, donde se obtiene la ecuación matemática:

$$a = 0.0196e^{0.4046n}, \quad (6.6)$$

con  $R^2=0.996$ .

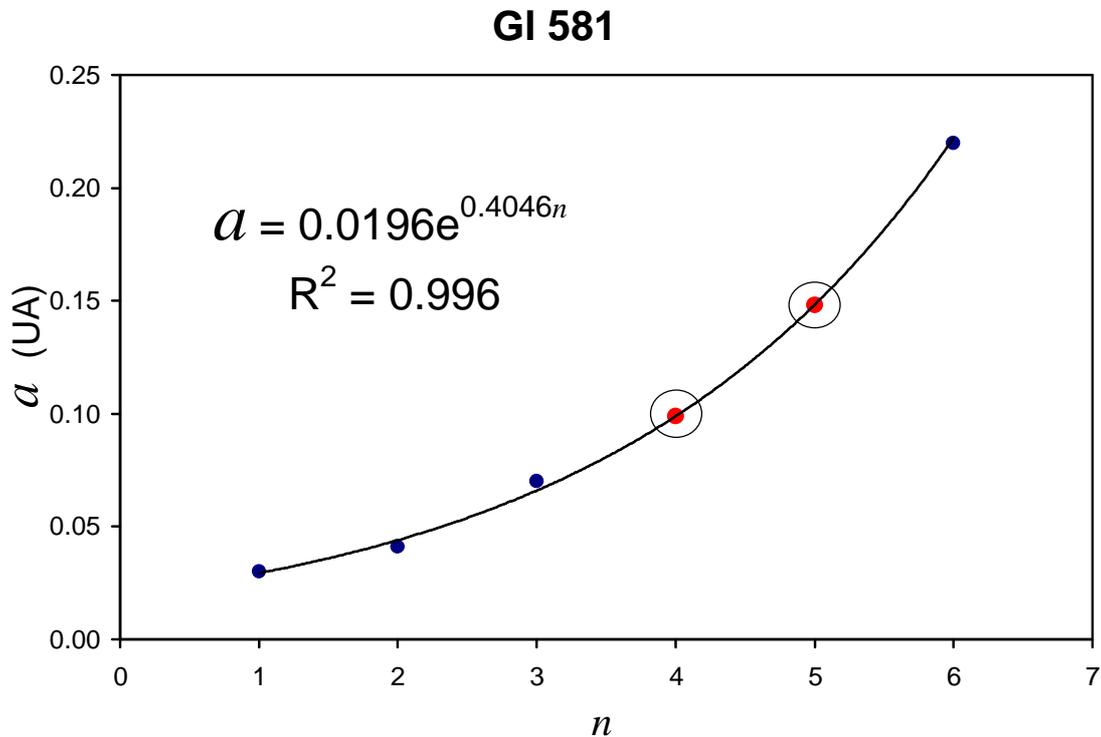


Figura 6.8. Ajuste exponencial TB para el sistema Gliese 581, aquí se muestra el ajuste con los cuatro planetas (Gliese e, b c y d). Encerrados con círculos se muestran los planetas que se predicen para este sistema.

El índice de correlación de  $R^2=0.996$ , indica un buen ajuste de los datos. Además este ajuste nos muestra algo muy importante: quedan dos espacios vacantes en los orbitales de  $n=4$  y  $n=5$ . Los valores en semieje y periodo que predice este ajuste exponencial se pueden ver en la Tabla 6.9.

Tabla 6.9  
Datos observados y predichos del semieje mayor de los planetas del sistema GI 581.  
Los datos se obtienen empleando la ecuación 6.6

No. Orden planeta	1	2	3	4	5	6
Semieje mayor observacional (UA)	0.030	0.040	0.070			0.22
Ajuste Exponencial TB (UA)	<b>0.029</b>	<b>0.044</b>	<b>0.066</b>	<b>0.099</b>	<b>0.148</b>	<b>0.222</b>
Error porcentual (%)	<b>2.08</b>	<b>7.37</b>	<b>5.74</b>			<b>0.95</b>
Periodo (días)	3.14942	5.3687	12.9292	<b>20.36</b>	<b>37.71</b>	66.8
	$\pm 4.5 \times 10^{-4}$	$\pm 1.9 \times 10^{-4}$	$\pm 4.7 \times 10^{-3}$			$\pm 0.14$

Considerando los dos ajustes anteriores, este tercer ajuste mejora notablemente los errores porcentuales para cada uno de los valores de los

semiejes, de hecho, estos no pasan de un 7.37%, inclusive para  $n=6$  el error porcentual es de 0.95%. Esta ecuación exponencial predice dos planetas en los orbitales  $n=4$  y  $n=5$ , con los valores en el semieje  $a \approx 0.099$  UA ( $p=20.36$  días) y  $a \approx 0.148$  UA ( $p=37.71$  días), respectivamente.

Una de las características principales de este sistema es que es un sistema muy compacto. Su estrella primaria tiene una luminosidad de un tercio que la del Sol. Los planetas que se predicen deben de tener una masa muy similar a la terrestre, lo cual dificulta su detección debido a las limitaciones tecnológicas.

Los resultados que obtuvimos para Gliese 581, se reportaron en la VI Reunión de la Sociedad Mexicana de Astrobiología, en la conferencia titulada “Los sistemas exoplanetarios: 55 Cancri, Gliese 581 y la ley de Titius-Bode”. Estos resultados fueron obtenidos hasta antes del reciente descubrimiento de dos planetas en este sistema (41), Gliese f y g con semiejes de 0.758 UA y 0.146 UA, respectivamente.

El planeta  $n=4$  todavía no se encuentra. El planeta que predecíamos en la posición  $n=5$  fue uno de los que fue encontrado y como se muestra en la Tabla 6.10, podemos observar que tiene un error porcentual del 1.5% respecto del valor predicho por nuestra relación. Si extrapolamos nuestro ajuste exponencial se observa que al planeta Gliese f le correspondería el orbital  $n=9$ , con un error porcentual de 1.36% (Figura 6.9). Gracias a estos descubrimientos podemos predecir (además del planeta en  $n=4$ ) la posición de dos exoplanetas más, en los orbitales  $n=7$  y  $n=8$  con unos semiejes  $a=0.333$  UA y  $a=0.499$  UA.

Todos estos resultados contribuyen a dar validez a la capacidad predictiva de la relación TB.

Tabla 6.10  
 Datos observados y predichos del semieje mayor de los planetas Gl 581.  
 Los valores predichos y comparación con los planetas descubiertos recientemente (Gl581f y Gl581g)

No. Orden planeta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Año de descubrimiento	2009	2005	2007		2010	2007			2010
Semieje mayor observacional (UA)	0.030	0.040	0.070		0.146	0.22			0.76
Ajuste Exponencial TB (UA)	<b>0.029</b>	<b>0.044</b>	<b>0.066</b>	<b>0.099</b>	<b>0.148</b>	<b>0.222</b>	<b>0.333</b>	<b>0.499</b>	<b>0.75</b>
Error porcentual (%)	<b>2.08</b>	<b>7.37</b>	<b>5.74</b>		<b>1.49</b>	<b>0.95</b>			<b>1.36</b>
Periodo (días)	3.14942 $\pm 4.5 \times 10^{-4}$	5.3687 $\pm 1.9 \times 10^{-4}$	12.9292 $\pm 4.7 \times 10^{-3}$	<b>20.36</b>	36.65 $\pm 0.052$	66.8 $\pm 0.14$	125.9	423.8	433 $\pm 13$

## GI 581

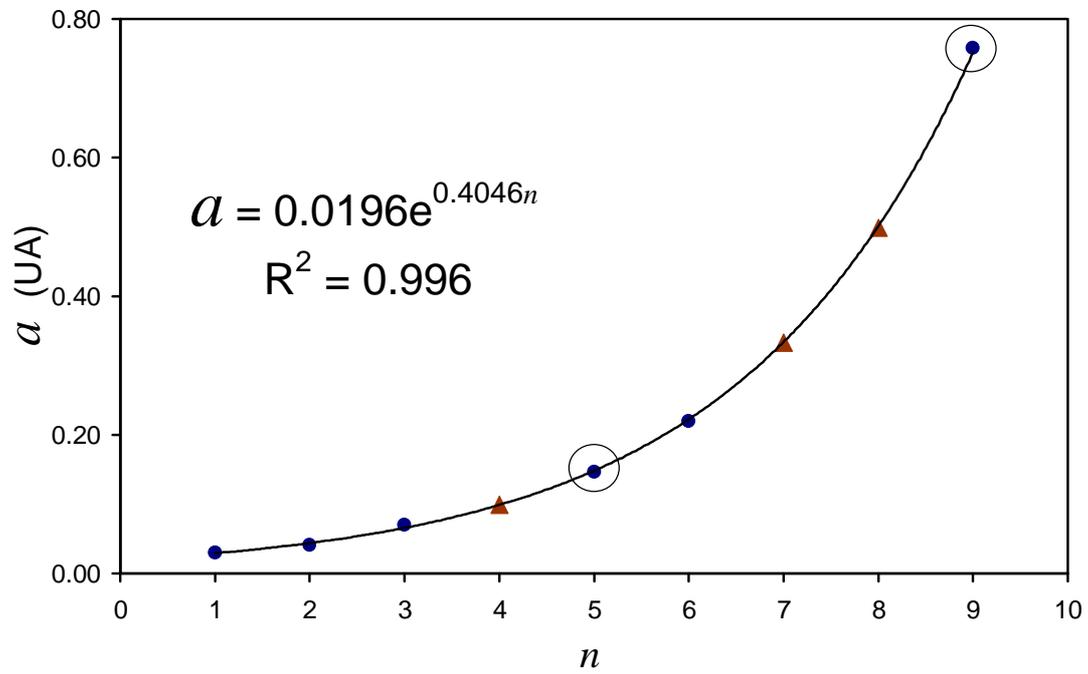


Figura 6.9. Muestra el ajuste exponencial T-B para el sistema Gliese 581, extrapolando nuestro ajuste exponencial podemos reproducir los dos planetas recientemente descubiertos (GJ 581 f y g), que se muestran encerrados por un círculo. Los exoplanetas que se predicen están indicados por triángulos.

## 6.4 Sistema exoplanetario Gliese 876

El sistema exoplanetario Gliese 876 es otro de los sistemas múltiples que se han descubierto con varios exoplanetas. Este sistema planetario alberga 4 planetas. Ha sido un sistema ampliamente estudiado desde el descubrimiento de Gliese 876b, reportado por dos equipos independientes liderados por Marcy et al., (1998) (21) y Delfosse et al., (1998) (7).

La estrella Gliese 876 (HIP 113020, NLTT 55130, V\* IL Aqr, HIC 113020) es una enana roja con tipo espectral M4V. Es una de las estrellas cercanas al Sol y se encuentra a 15 años luz de la Tierra en la constelación de Acuario. Es una estrella variable tipo IL Aquarii, su brillo fluctúa alrededor de 0.04 en la magnitud. Posee una magnitud aparente de 10.17, por lo que no se puede observar a simple vista. Tiene un tercio de la masa solar. En la Tabla 6.11 se muestran claramente sus características físicas.

Magnitud Visual Aparente	10.17
Paralaje Hipparcos	$212.69 \pm 2.10$ mas
Distancia	$4.7 \pm 0.01$ pc.
Magnitud Visual Absoluta	11.82
Temperatura efectiva	$3,480 \pm 50$ K
$v \sin i$	$-1.7 \pm$ km s <sup>-1</sup>
Luminosidad	0.0124 Lo
Tipo espectral	M4V
Masa estelar	$0.334 \pm 0.03$ Mo
Metalicidad [Fe/H]	$0.05 \pm 0.2$

Gliese 876 está clasificada como una estrella variable y su brillo varía cada 97 días. Diferentes modelos que analizan la actividad cromosférica de esta estrella estiman que la edad es de ~ 2-9 Giga-años.

Hasta septiembre del 2010, se habían encontrado 4 exoplanetas alrededor de esta estrella. Dos de estos exoplanetas tienen masas jovianas, el más cercano tiene masa del tipo Neptuno y el más externo tiene una masa como la de Urano. Dos de estos exoplanetas (Gliese 876b y Gliese 876c) se encuentran en la zona habitable determinada para este tipo de estrellas. Debido a que éstos son muy masivos, y por ende gaseosos, es muy poco probable la existencia de vida.

Cabe resaltar que este sistema tiene una interesante relación en los periodos. Los planetas Gliese 876(c, b y e) se encuentran en resonancia orbital de 1:2:4; este es el segundo ejemplo de la resonancia conocida como “Resonancia de Laplace”. Los satélites Galileanos fueron el primer caso que mencionamos como ejemplo de esta resonancia.

Los elementos orbitales y la masa de los planetas del sistema Gliese 876 se encuentran resumidos en la Tabla 6.12.

*Tabla 6.12.  
Elementos orbitales, año de descubrimiento y masa de los planetas que se encuentran en el sistema Gliese 876, en orden de posición orbital.*

	Gl 876d	Gl 876c	Gl 876b	Gl 876e
<i>n</i>	1	2	3	4
Año de descubrimiento	2005	2000	1998	2010
Semieje mayor observacional (UA)	0.0208 $\pm 1.5 \times 10^{-7}$	0.1296 $\pm 2.4 \times 10^{-5}$	0.2083 $\pm 2 \times 10^{-5}$	0.334 $\pm 0.0013$
Periodo orbital (días)	1.938 $\pm 2 \times 10^{-5}$	30.088 $\pm 0.0082$	61.117 $\pm 0.0086$	124.26 $\pm 0.7$
Excentricidad	0.207	0.256	0.0324	0.055
<i>M sin i</i> (Masa joviana)	0.021 $\pm 0.001$	0.7142 $\pm 0.0039$	2.276 $\pm 0.0045$	0.046 $\pm 0.005$

Tomando en cuenta los valores observacionales se realizara el ajuste exponencial TB para Gliese 876.

Este primer ajuste exponencial (Figura 6.10) para este sistema planetario no muestra una correspondencia clara en la progresión orbital. Sin embargo, la relación de periodos entre algunos de los exoplanetas (recordemos el buen resultado que se encontró para los satélites Galileanos) nos indujo a realizar un segundo ajuste.

Debido a la resonancia de Laplace que los exoplanetas Gliese 876 (c, b y e) cumplen, el segundo ajuste tomará en cuenta solo los valores de estos planetas, esperando que la relación exponencial obtenida de este ajuste pronostique la posición de Gliese 876d.

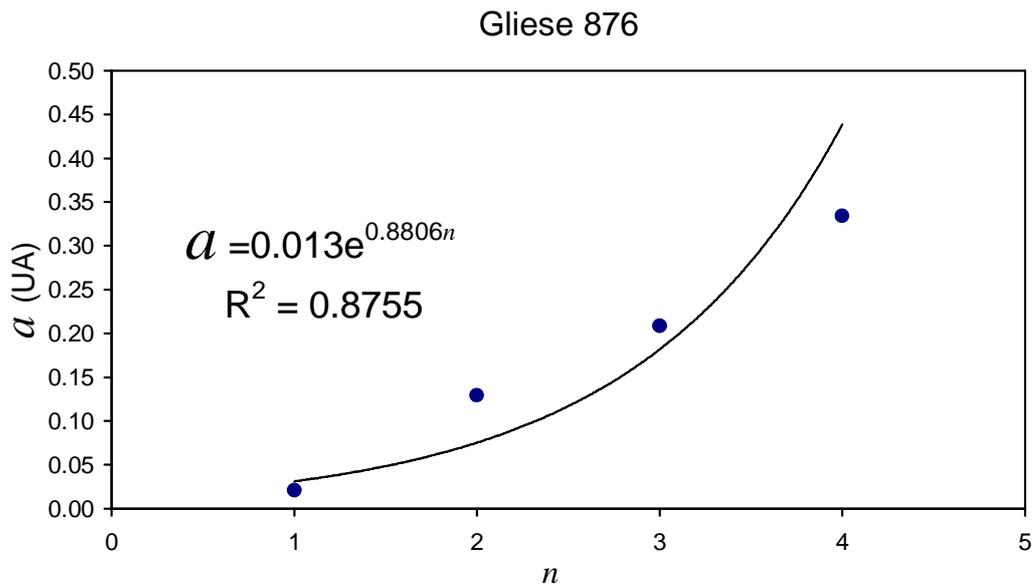


Figura 6.10. Ajuste exponencial TB para los 4 planetas del sistema Gliese 876, aquí se muestran los valores del semieje mayor (UA) de los cuatro planetas (GJ 876 d, c, b y e) graficados en el orden ascendente conocido.

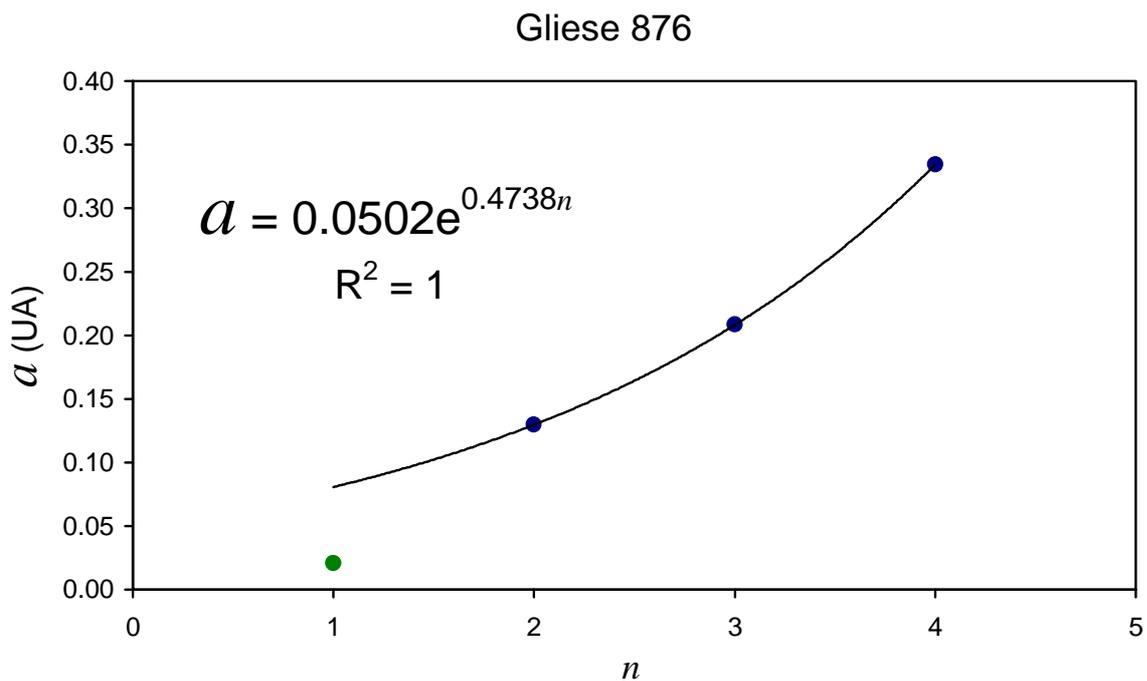


Figura 6.11. Ajuste exponencial TB para el sistema Gliese 876, tomando en cuenta los valores del semieje mayor de los planetas Gliese 876(c, b y e). El semieje mayor está en unidades astronómicas (UA).

El ajuste exponencial para los tres exoplanetas en resonancia, tiene un coeficiente  $R^2 = 1$  (Figura 6.11). La relación para este ajuste exponencial TB esta dada por la siguiente ecuación

$$a = 0.0502e^{0.4738n}, \quad (6.7)$$

donde  $a$  está en unidades astronómicas y  $n$  es el número orbital. Sin embargo, la posición para el orbital  $n = 1$  no se acopla a la relación, tiene un error con respecto a la observada del 287%. Los resultados que arroja esta ecuación se enlistan en la Tabla 6.13. El análisis de estos resultados se desarrollará más adelante.

Tabla 6.13  
 Datos observados y predichos del semieje mayor de los planetas GJ876.  
 Los datos predichos se obtienen empleando la ec. 6.7

No. Orden planeta	1	2	3	6
Año de descubrimiento	2005	2000	1998	2010
Semieje mayor observacional (UA)	0.0208	0.1296	0.2083	0.334
Ajuste Exponencial TB (UA)	0.0806	0.1295	0.2080	0.3340
Error porcentual (%)	287	0.76	0.16	0.082
Periodo (días)	1.938 $\pm 2 \times 10^{-5}$	30.088 $\pm 0.0082$	61.117 $\pm 0.0086$	124.26 $\pm 0.7$

La resonancia de Laplace que cumplen los 3 exoplanetas de este sistema afecta su distribución orbital.

A pesar de que Gliese 876d no se ajusta a la relación exponencial cuando se toma en cuenta su orden orbital original, la figura 6.12 muestra un mejor ajuste si se considera a Gliese 876 c, d y e en los orbitales 4, 5 y 6 respectivamente y a Gliese 876d en  $n=1$ . En este caso se predicen 2 exoplanetas adicionales en  $n=2$  y  $n=3$

### Gliese 876

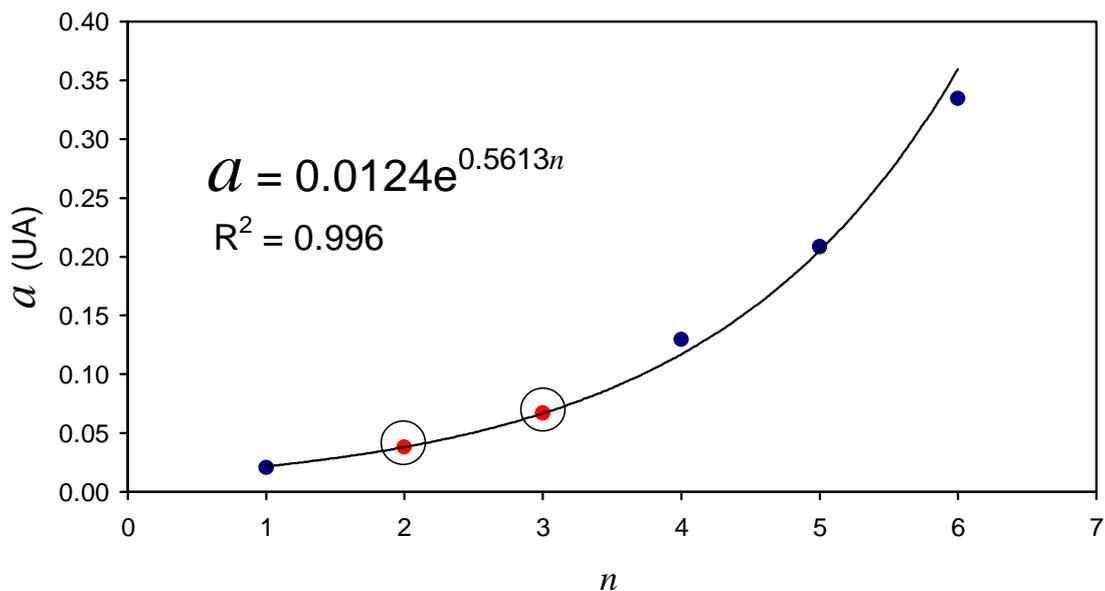


Figura 6.12 Ajuste exponencial TB para el sistema Gliese 876, tomando en cuenta los valores del semieje mayor de los cuatro planetas de Gliese 876. Se predicen dos exoplanetas en los orbitales  $n=2$  y  $n=3$ , marcados con un círculo.

La ecuación exponencial que resulta del ajuste que aparece en la figura 6.12 esta dada por:

$$a = 0.0124e^{0.5613n}, \quad (6.8)$$

El coeficiente de correlación para esta relación TB es  $R^2 = 0.996$ . En la Tabla 6.14 se resumen los valores obtenidos con este ajuste, así como sus respectivos errores.

Tabla 6.14  
Datos observados y predichos en el semieje para el sistema Gliese 876

No. Orden planeta	1	2	3	4	5	6
Semieje mayor observacional (UA)	0.0208			0.1296	0.2083	0.334
Ajuste Exponencial TB (UA)	<b>0.0217</b>	<b>0.0381</b>	<b>0.0668</b>	<b>0.1171</b>	<b>0.2052</b>	<b>0.3598</b>
Error porcentual (%)	<b>4.50</b>			<b>9.65</b>	<b>1.47</b>	<b>7.62</b>
Periodo (días)	1.938	<b>4.527</b>	<b>10.510</b>	30.088	61.117	124.26
	$\pm 2 \times 10^{-5}$			$\pm 0.0082$	$\pm 0.0086$	$\pm 0.7$

Esta relación predice la posición de dos exoplanetas que no se han descubierto. Los valores en el semieje mayor son de  $a=0.0381$  ( $p \approx 4.5$  días) y  $a=0.0668$  ( $p \approx 10.5$  días) para los orbitales  $n=2$  y  $n=3$ , respectivamente. Este ha sido el mejor ajuste que se ha encontrado para este sistema, pues muestra un error porcentual máximo de alrededor del 10%.

## 6.5 Sistema exoplanetario $\mu$ Arae

El sistema exoplanetario  $\mu$  Arae se encuentra a 49,8 años luz de distancia aproximadamente en la constelación Arae (el Altar). Es un sistema exoplanetario que tiene 4 planetas. Los datos del primer exoplaneta se reportaron en el 2000 (5), confirmando la existencia un planeta gigante mas masivo que Júpiter.

La estrella primaria  $\mu$  Arae (HD 160691, Gl 691, HIP 86796, HR 6585, SAO 244981) es una estrella subgigante con un tipo espectral G3. Su magnitud aparente es de 5.15, lo que la hace visible a simple vista. Se estima que tiene 108% de la masa del Sol y puede ser un 32% más grande. Según los datos obtenidos por el satélite Hipparcos, tiene una paralaje de 65.46 milisegundos de arco. Tiene aproximadamente 1.7 veces la luminosidad del Sol y se sospecha que está más evolucionada, moviéndose a la fase de subgigante.  $\mu$  Arae es rica en metales, más que el Sol. En la tabla 6.15 se resumen algunas de las características de esta estrella primaria.

Magnitud Visual Aparente	5.15
Paralaje Hipparcos	$65.46 \pm 0.80$ mas
Distancia	15.3 parsecs
Magnitud Visual Absoluta	4.28
Temperatura Efectiva	$5700 \pm 100$ K
$v \sin i$	$-9.0 \pm 0.5$ km s <sup>-1</sup>
Luminosidad	$1.75 \pm 0.10$ L <sub>S</sub>
Tipo espectral	G3IV-V
Masa estelar	$1.08 \pm 0.05$ M <sub>S</sub>
Metalicidad [Fe/H]	0.28

El descubrimiento de los 3 exoplanetas adicionales en este sistema planetario fue gradual, tres de los exoplanetas son masivos (probablemente gaseosos).  $\mu$  Arae d tiene una masa mínima de solo 14 veces la de la Tierra y cabe resaltar que fue el primer planeta poco masivo encontrado alrededor de una estrella cerca de la secuencia principal.

El planeta gigante gaseoso " $\mu$  Arae b" se encuentra en la zona habitable en donde el agua puede estar líquida, pero por ser muy masivo la posibilidad de que exista vida en ese planeta es casi nula.

Tabla 6.16.  
Elementos orbitales, año de descubrimiento y masa de los planetas que se encuentran en el sistema  $\mu$  Arae, en orden de posición orbital.

	$\mu$ Arae c	$\mu$ Arae d	$\mu$ Arae b	$\mu$ Arae e
$n$	1	2	3	4
Año de descubrimiento	2004	2004	2000	2006
Semieje mayor observacional (UA)	0.09094	0.921	1.50	5.235
Periodo orbital (días)	9.6386 $\pm 1.5 \times 10^{-3}$	310.55 $\pm 0.83$	643.25 $\pm 0.9$	4205.8 $\pm 758.9$
Excentricidad	0.172	0.066	0.128	0.0985
$M \sin i$ (Masa joviana)	0.03321	0.5219	1.676	1.814

Con los valores observacionales que se han reportado para este sistema planetario múltiple (Tabla 6.16), se hará el ajuste de una relación exponencial tipo TB. Análogamente como se ha hecho con los demás sistemas exoplanetarios, se ajustará el orden orbital actual.

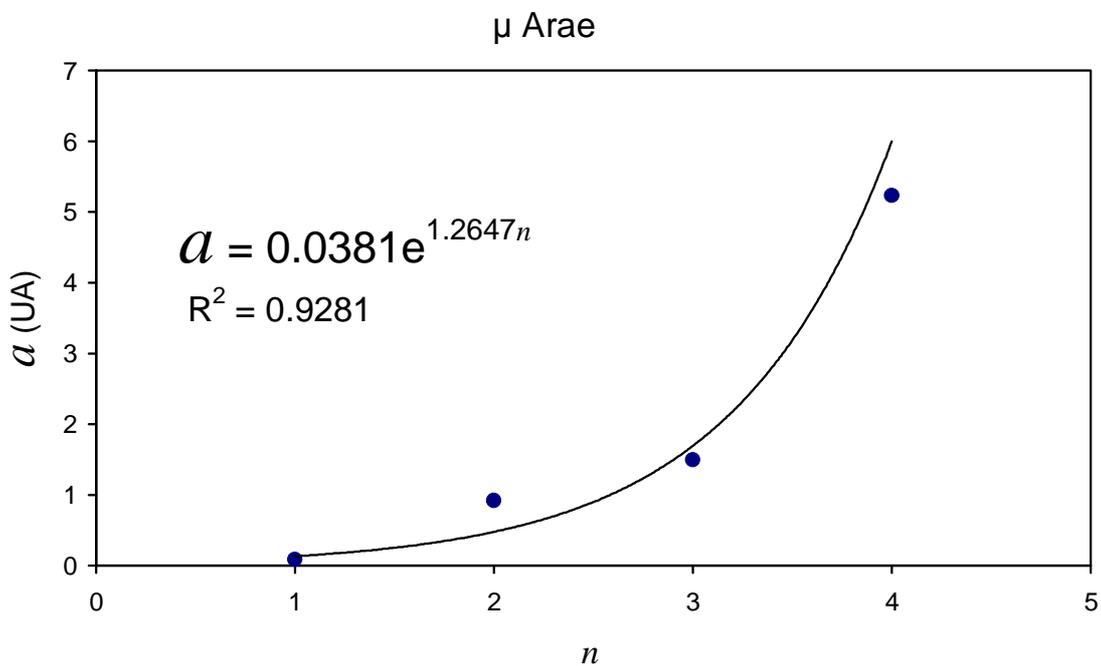


Figura 6.13. Ajuste exponencial TB para el sistema  $\mu$  Arae, aquí se muestra los valores del semieje mayor (UA) de los cuatro planetas ( $\mu$  Arae c, d, b y e) graficados en el orden ascendente conocido.

Este primer ajuste exponencial TB para el sistema exoplanetario produce una relación dada por:

$$a = 0.0381e^{1.2647n}, \quad (6.9)$$

con un coeficiente de correlación de  $R^2 = 0.9281$ . Este coeficiente indica que la relación no se acopla muy bien para estos valores observacionales, por lo que se realizará un segundo ajuste.

Lo que podemos observar del primer ajuste es que el orbital  $n=2$  presenta el mayor error porcentual (~48%) y la experiencia nos ha mostrado que es favorable intentar un ajuste con un planeta menos. Entonces, el segundo ajuste se hará sin tomar en cuenta el planeta que se encuentra en el orbital  $n=2$ .

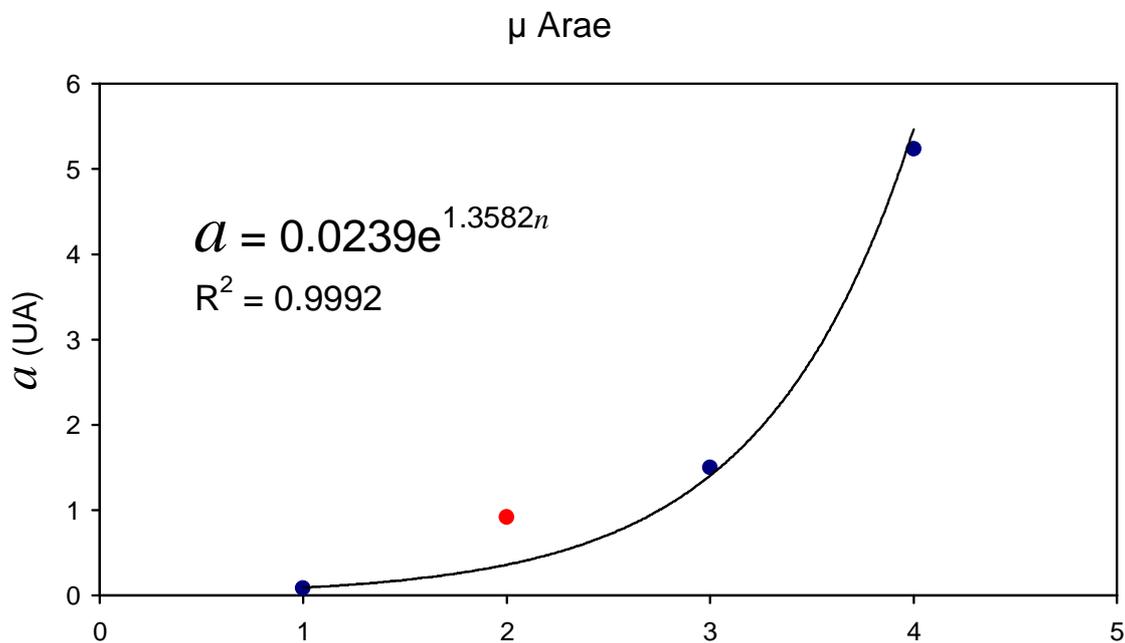


Figura 6.14. El ajuste exponencial TB para el sistema  $\mu$  Arae, aquí se muestra el ajuste exponencial TB sin tomar en cuenta el orbital  $n=2$ .

Con el segundo ajuste exponencial obtenemos la siguiente relación:

$$a = 0.0239e^{1.3582n} \quad (6.10)$$

con  $R^2 = 0.9992$ . A pesar de que el coeficiente muestra un número muy cercano a 1, hay que recordar que se hizo tomando en cuenta solo 3 de los 4 exoplanetas y que con este nuevo ajuste el orbital  $n=2$  tiene un error de aproximadamente 61%. Sin embargo, nuevamente podemos obtener información de este ajuste. De la figura 6.14 se ve que el planeta en  $n=2$ , se acoplaría mejor al ajuste si ocupara el orbital  $n=3$ .

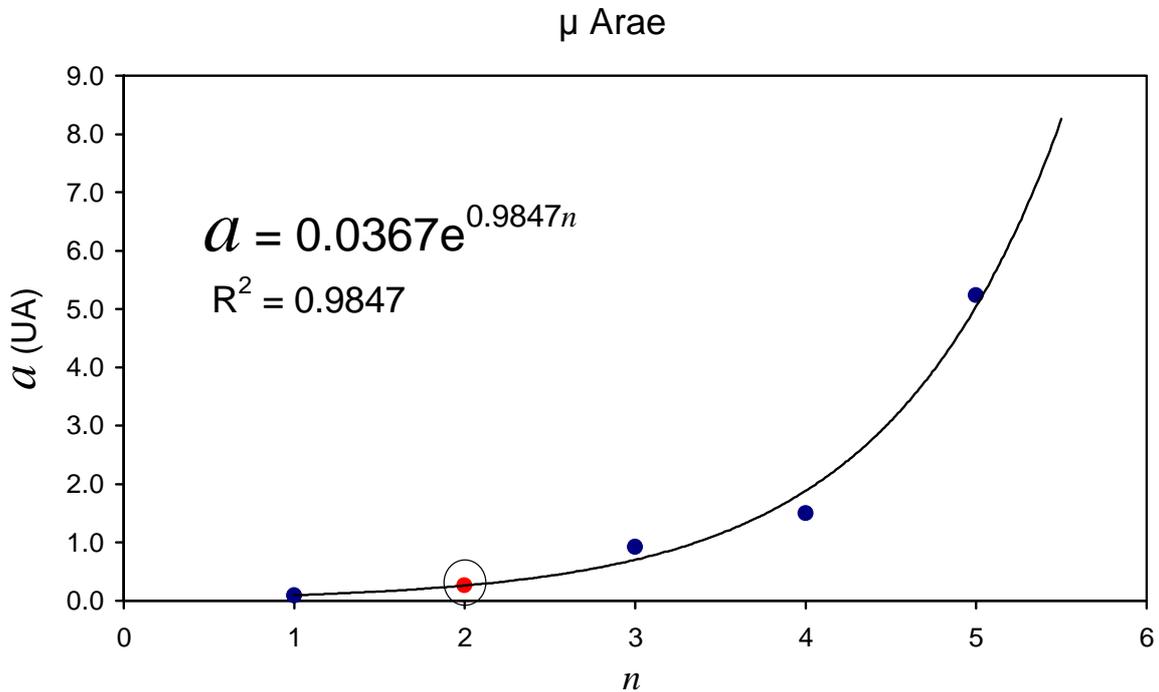


Figura 6.15. Tercer ajuste exponencial TB para el sistema  $\mu$  Arae, se muestra la relación exponencial TB para los 4 exoplanetas, dejando una vacante en  $n=2$  que esta marcada con un círculo.

La relación exponencial para este tercer ajuste es:

$$a = 0.0367e^{0.9847n}, \quad (6.11)$$

con  $R^2=0.9847$ . Los valores que pronostica esta ecuación se muestran en la Tabla 6.17. Esta relación TB mejora mucho la correlación de los datos. Sin embargo, siendo este el mejor ajuste obtenido, no ha mostrado una mejoría apreciable resultó con los demás sistemas exoplanetarios que hemos analizado, ya que los errores porcentuales tienen hasta un 26% de error.

Tabla 6.17  
Datos observados y predichos del semieje mayor para el sistema  $\mu$  Arae

No. Orden planeta	1	2	3	4	5
Semieje mayor observacional (UA)	0.09094		0.921	1.50	5.235
Ajuste Exponencial TB (UA)	<b>0.098</b>	<b>0.263</b>	<b>0.704</b>	<b>1.885</b>	<b>5.046</b>
Error porcentual (%)	<b>8.03</b>		<b>23.55</b>	<b>25.65</b>	<b>3.62</b>
Periodo (días)	9.6386 $\pm 1.5 \times 10^{-3}$	<b>47.37</b>	310.55 $\pm 0.83$	643.25 $\pm 0.9$	4205.8 $\pm 758.9$

En el espacio vacante se predice un planeta con un semieje  $a = 0.263 \text{ UA}$  ( $p \approx 47 \text{ dias}$ ).

$\mu$  Arae d y b se encuentra cerca de la resonancia orbital 2:1, lo cual les hace sufrir interacciones fuertes. Se han hecho simulaciones que resaltan que este sistema es realmente inestable; estos mismos resultados sugieren que sistema sufrirá modificaciones drásticas al cabo de 78 millones de años (34).

## 7. Resonancias en el Sistema Solar

La gran cantidad de información que se ha acumulado del Sistema Solar, ha mostrado que éste es un conjunto de cuerpos con órbitas altamente estructuradas. Las leyes de Newton y el efecto de la fuerza gravitacional establecen la estructura dinámica del Sistema Solar y condicionan el fenómeno de resonancia.

El primer ejemplo de resonancias que tenemos en el Sistema Solar es el de la Luna con la Tierra, en donde la Luna gira en su propio eje en una proporción espín-órbita 1:1 con su avance orbital alrededor de la Tierra. Como resultado, desde la Tierra se observa siempre la misma cara de la Luna.

Los dos planetas gigantes, Júpiter y Saturno, están en una resonancia orbital 5:2.

$$\begin{aligned} P_{Júpiter} &= 11.8565 \text{ años} \\ P_{Saturno} &= 29.40 \text{ años} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Saturno}}{P_{Júpiter}} = 2.4796 \approx \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Los planetas Neptuno y Plutón llevan una resonancia de 3:2 en sus periodos orbitales.

$$\begin{aligned} P_{Neptuno} &= 164.79 \text{ años} \\ P_{Pluton} &= 247.92 \text{ años} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Pluton}}{P_{Neptuno}} = 1.5044 \approx \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Uno de los fenómenos más sorprendentes del Sistema Solar son las resonancias orbitales entre los periodos de los Satélites Galileanos de Júpiter. Io tiene una resonancia orbital 2:1 con Europa, éste a su vez, tiene una resonancia orbital con Ganímedes de 2:1. Esta configuración con estos tres satélites Galileanos se le como la resonancia de Laplace.

$$\begin{aligned} P_{Io} &= 1.769138 \text{ días} \\ P_{Europa} &= 3.551181 \text{ días} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Europa}}{P_{Io}} = 2.0079 \approx 2 \quad 2P_{Io} = P_{Europa} \\ P_{Ganimedes} &= 7.154553 \text{ días} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Ganimedes}}{P_{Europa}} = 2.0146 \approx 2 \quad 2P_{Europa} = P_{Ganimedes} \end{aligned}$$

La geometría de la resonancia prohíbe que haya una triple conjunción entre estos satélites. La resonancia orbital 2:1 de Io-Europa es indirectamente

responsable del Vulcanismo en Io. El sistema de Júpiter tiene un anillo muy tenue que se piensa que puede atribuirse a resonancias.

El sistema satelital de Saturno también presenta resonancias. Los periodos de los satélites Mimas y Tetis están en una resonancia orbital 4:2. Encélado y Dione tienen una resonancia de 2:1. Por último, Titán e Hiperión se encuentran en una resonancia orbital de 4:3.

$$P_{Mimas} = 0.942 \text{ días}$$

$$P_{Tetis} = 1.887 \text{ días} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Mimas}}{P_{Tetis}} = 0.4992 \approx \frac{1}{2}$$

$$P_{Encelado} = 1.370 \text{ días}$$

$$P_{Dione} = 2.736 \text{ días} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Dione}}{P_{Encelado}} = 1.9970 \approx 2$$

$$P_{Titán} = 15.945 \text{ días}$$

$$P_{Hiperión} = 21.276 \text{ días} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Hiperión}}{P_{Titán}} = 1.334 \approx \frac{4}{3}$$

Si hablamos de resonancias en el Sistema Solar no podríamos dejar de mencionar el cinturón de asteroides. La distribución de semiejes mayores de los asteroides del cinturón principal presenta huecos. Kirkwood (1867) observó que estos huecos correspondían a resonancias importantes con Júpiter. Las resonancias más sobresalientes de esta distribución son 4:1, 3:1, 5:2 y 2:1. Solamente nos referimos a las poblaciones importantes de asteroides que se encuentran en estas resonancias, pero existen más de 90 000 asteroides catalogados y su distribución puede exhibir diferentes resonancias. La figura 7.1 muestra la distribución de los asteroides y las resonancias con diferentes planetas.

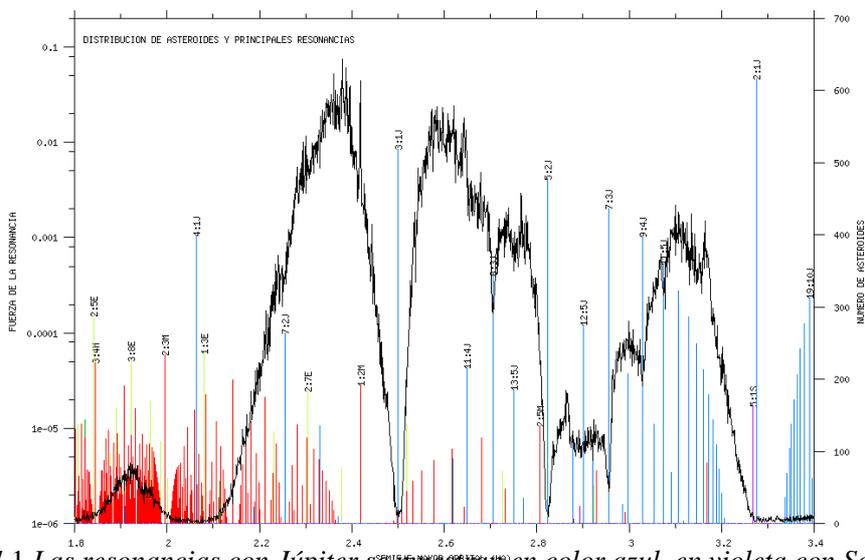


Figura 7.1 Las resonancias con Júpiter se muestran en color azul, en rojo con Marte y en verde con la Tierra. Por ejemplo, la resonancia 2:1J significa que cuando el asteroide cumple 2 revoluciones en torno del Sol, Júpiter ha cumplido exactamente 1 revolución. (Gallardo, 2007)

## 7.1 Resonancias en 55 Cancri

En la actualidad se han hecho muchos estudios sobre la estabilidad y habitabilidad del sistema de 55 Cancri analizando sus resonancias, y se ha encontrado una estabilidad que es muy importante para la habitabilidad de este sistema. A nosotros nos interesa revisar si existe alguna relación entre las resonancias y las relaciones tipo TB, que aparecen tanto en el Sistema Solar como en los sistemas exoplanetarios.

Tomando en cuenta los periodos orbitales de los planetas del sistema 55 Cancri, (tabla 6.2) resaltan las siguientes resonancias entre periodos.

$$P_e = 2.817 \text{ días}$$

$$P_b = 14.651 \text{ días} \quad \Rightarrow \frac{P_e}{P_b} = 0.1923 \approx \frac{1}{5}$$

$$P_b = 14.651 \text{ días}$$

$$P_c = 44.344 \text{ días} \quad \Rightarrow \frac{P_b}{P_c} = 0.330 \approx \frac{1}{3}$$

$$P_c = 44.344 \text{ días}$$

$$P_f = 260.0 \text{ días} \quad \Rightarrow \frac{P_c}{P_f} = 0.1705 \approx \frac{1}{6}$$

La resonancia más exacta es la resonancia entre los periodos que tienen los planetas 55 Cancri b y 55 Cancri c con una relación de 3:1.

Si se toman en cuenta los planetas que se predicen por la relación exponencial TB, usando la notación que se muestra en la tabla 6.3 se resalta la siguiente resonancia

$$P_{n=5} = 1130 \text{ días}$$

$$P_d = 5218 \text{ días} \quad \Rightarrow \frac{P_{n=5}}{P_d} = 0.2098 \approx \frac{1}{5}$$

## 7.2 Resonancias en HD 10180

Con el propósito de encontrar alguna relación en la distribución en los periodos orbitales, que refleje algún comportamiento dinámico entre los planetas, se calcularon resonancias para este sistema. Tomando en cuenta los valores observacionales (Tabla 6.5), las resonancias que se encontraron para este sistema son:

$$\begin{aligned} P_d &= 16.3579 \text{días} & \frac{P_d}{P_e} &= 0.329 \approx \frac{1}{3} \\ P_e &= 49.745 \text{días} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_f &= 122.76 \text{días} & \frac{P_f}{P_g} &= 0.204 \approx \frac{1}{5} \\ P_g &= 601.2 \text{días} \end{aligned}$$

### 7.3 Resonancias en Gliese 581

Utilizando los datos que se han recopilado para los planetas de Gliese 581, se muestran las siguientes resonancias (tabla 6.8)

$$\begin{aligned} P_g &= 36.65 \text{días} & \frac{P_g}{P_d} &= 0.549 \approx \frac{5}{9} \\ P_d &= 66.80 \text{días} \end{aligned}$$

Si se toma en cuenta los planetas que predice la relación exponencial TB (Tabla 6.10) tenemos

$$\begin{aligned} P_{n=4} &= 20.36 \text{días} & \frac{P_{n=4}}{P_g} &= 0.556 \approx \frac{5}{9} \\ P_g &= 36.65 \text{días} \end{aligned}$$

### 7.4 Resonancias en Gliese 876

De los datos observacionales se obtiene una relación entre los periodos para tres planetas de este sistema planetario (Tabla 6.12), esto se muestra a continuación

$$\begin{aligned} P_c &= 30.088 \text{días} & \frac{P_c}{P_b} &= 0.50 \approx \frac{1}{2} \\ P_b &= 61.117 \text{días} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_b &= 61.117 \text{días} & \frac{P_b}{P_e} &= 0.49 \approx \frac{1}{2} \\ P_e &= 124.16 \text{días} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_c : 2P_b : 4P_e$$

Esta relación es la resonancia conocida como de Laplace y es el segundo sistema, después de los satélites galileanos, que presenta estas resonancias.

Las resonancias que se acaban de mostrar para los sistemas exoplanetarios tienen como propósito el exhibir una característica en común con nuestro sistema planetario.

La relación que existe entre estructuras resonantes (o aproximadamente resonantes) y estructuras que cumplen con relaciones tipo TB, así como la estabilidad de estas estructuras, son temas en los que se investiga actualmente.

## 8. Discusión y conclusiones

Se ha caracterizado y estudiado la relación Titius-Bode, desde su formulación, teoría e historia, hasta los estudios actuales que se han llevado a cabo sobre ella. Históricamente, la relación Titius-Bode solo se había probado para el Sistema Solar así como para los satélites de Júpiter, Saturno y Urano pero ahora gracias a los descubrimientos de los sistemas exoplanetarios, se tuvo la oportunidad de probar si la relación Titius-Bode también se aplica a estos sistemas.

Para proceder a ello, primero se encontró una forma generalizada, tipo exponencial, de la relación TB para los cuerpos de nuestro sistema planetario. El método matemático por el cual se hizo el ajuste a esta relación fue el de mínimos cuadrados.

Los datos que se extrajeron de la literatura reciente mostraron buenos resultados tanto para el sistema solar como para los sistemas de satélites. En el Sistema solar se tiene una relación exponencial  $a = 0.1912e^{0.5594n}$  con un coeficiente de correlación  $R^2 = 0.992$ , para los satélites Galileanos se obtiene  $a = 251.67e^{0.4956n}$  con  $R^2 = 0.9976$ , de los satélites de Saturno y Urano se obtuvieron las ecuaciones  $a = 103e^{0.3808n}$  y  $a = 88.059e^{0.3838n}$  con  $R^2 = 0.9691$  y  $R^2 = 0.995$  respectivamente.

En el caso de los satélites Saturninos se hizo un segundo ajuste en el cual se predice la posición ( $n=8$ ) de un satélite aun no descubierto.

Una vez que se estudió la relación generalizada tipo exponencial TB y se observó una buena correspondencia de los cuerpos del sistema solar, el siguiente paso a seguir, y el propósito fundamental de esta tesis, fue el de ajustar la relación TB para todos los sistemas exoplanetarios con 4 o más planetas, a saber: 55 Cancri, HD 10180, Gliese 581, Gliese 876 y  $\mu$  Arae.

El sistema exoplanetario de 55 Cancri es el primer sistema con 4 o más planetas descubiertos, de hecho cuenta con 5 planetas. Utilizando los datos observacionales obtenidos por el equipo de Debra Fischer (Fischer et al., 2008) se hizo un ajuste tomando en cuenta los 5 planetas con su orden orbital correspondiente. El primer ajuste no dió buenos resultados: el planeta más externo (55 Cancri d) no tenía una correspondencia favorable con el ajuste matemático. Este ajuste mostraba un índice de correlación  $R^2 = 0.9663$ , y ya daba una pista sobre la tendencia de la distribución orbital de este sistema.

Para distinguir esta tendencia claramente, se hizo otro ajuste utilizando los valores de los primeros cuatro exoplanetas. Los resultados claramente mostraron que el planeta más externo parecía corresponder al orbital  $n=6$  y no al  $n=5$ , que originalmente tenía asignado.

Usando esta información se hizo un último ajuste utilizando los datos observacionales de los 5 planetas pero asignando el planeta en  $n=5$  al orbital  $n=6$ . El ajuste es sorprendentemente fiel a las distancias observadas de este sistema, con un coeficiente  $R^2 = 0.997$ . La relación exponencial encontrada es

$$a = 0.0142e^{0.9975n}$$

Esta ecuación predice que existe por lo menos un planeta entre los planetas  $n=4$  y  $n=6$ , situación análoga a la del asteroide Ceres, en el Sistema Solar. El semieje mayor de este planeta extrasolar sería de  $a \approx 2.00$  UA y su periodo  $p=1130$  días.

Extrapolando la relación obtenida hacia una posición más, se puede predecir con menos confiabilidad, un planeta en el orbital  $n=7$  con un semieje mayor  $a \approx 15.30$  UA ( $p=22530$  días).

La publicación del descubrimiento de 5 (o posiblemente 7) planetas alrededor de la estrella HD 10180 (Lovis et al., 2010) (19) nos dio datos suficientes para verificar la relación exponencial TB. El equipo de Lovis reporta que pueden confirmar la existencia de 5 planetas, aunque tiene fuerte evidencia sobre la presencia de dos planetas más.

El primer ajuste que se hizo para HD 10180 toma en cuenta los 5 exoplanetas confirmados, con ellos se obtiene una relación exponencial  $a = 0.0286e^{0.7542n}$  con  $R^2=0.9912$ . El error porcentual de las distancias obtenidas mediante este ajuste respecto de las observadas va del 0.5% al 12%. Aunque el resultado es muy bueno para los planetas confirmados, se realizó un segundo ajuste exponencial para los 7 exoplanetas con el propósito de ver si era posible apoyar la confirmación de los dos exoplanetas faltantes.

El segundo ajuste para HD 10180 mostró una relación exponencial  $a = 0.0108e^{0.8082n}$ , con un coeficiente  $R^2 = 0.9948$ . Los resultados de este segundo ajuste muestran una correlación muy buena para estos siete exoplanetas y se refuerza nuestra confianza sobre la existencia de estos dos exoplanetas. De ser confirmados los dos exoplanetas, este sistema se convertirá en el sistema exoplanetario con el mayor número de planetas.

El sistema exoplanetario Gliese 581 era el segundo sistema con cuatro planetas descubiertos al momento que se hizo el análisis en esta tesis. Sin embargo, recientemente se reportó el descubrimiento de dos exoplanetas más. Gracias a los datos de los cuatro primeros exoplanetas hemos podido probar si el sistema Gliese 581 se ajusta a la relación TB.

Siguiendo el procedimiento ya establecido, se ajustaron los valores de los cuatro planetas a una relación exponencial. El primer ajuste no mostró buenos resultados, como en el caso de 55 Cancri. La relación reveló un coeficiente de

correlación  $R^2 = 0.9214$ . Entonces, se siguió con un segundo ajuste en el cual se tomó en cuenta a los tres primeros planetas con el propósito de mostrar la tendencia de esta distribución orbital. El ajuste muestra que el planeta externo ( $n=4$ ) debería pertenecer al orbital  $n=6$ .

Tomando en cuenta este último resultado, se hizo un tercer ajuste donde el valor del orbital del planeta más externo se asignó a  $n=6$ . Los resultados son muy buenos en este caso, para el cual:

$$a = 0.0196e^{0.4046n} \quad \text{con } R^2 = 0.9960,$$

Esta relación presenta una buena correspondencia para cada uno de los valores observados, siendo 7.37% el mayor error porcentual.

Este ajuste nos permite predecir la existencia de dos planetas en los orbitales  $n=4$  y  $n=5$  con semiejes de  $a = 0.099$  UA ( $p = 20.36$  días) y  $a = 0.148$  UA ( $p = 37.71$  días), respectivamente.

Nuestra predicción del planeta que se encuentra en el orbital  $n=5$  fue exitosa: en la publicación de Voght et. al (2010)(41) reportan la ubicación de dos exoplanetas más en Gliese 581, con distancias  $a = 0.1461$  UA y  $a = 0.758$  UA. Con ello, se confirma la predicción que obtuvimos para el orbital  $n=5$  ( $a = 0.148$  UA) del ajuste exponencial que tomaba en cuenta los cuatro primeros planetas descubiertos. El error porcentual que se tiene para este planeta es del 1.36%.

Esta misma relación, si se extrapola para un orbital  $n=9$  ( $a=0.748$  UA), ajusta muy bien para el segundo planeta reportado ya que muestra un error porcentual del 1.31% con respecto al valor observado.

Hace falta resaltar que el planeta Gliese 581g tiene un gran interés astrobiológico debido a que es el primer exoplaneta que realmente se encuentra dentro de la zona de habitabilidad de su estrella.

Estos resultados representan un gran éxito para la relación exponencial TB y demuestran la capacidad predictiva que tiene esta relación para detectar nuevos planetas. El descubrimiento de los dos nuevos planetas en Gliese 581 es un ejemplo de esto.

Gliese 876 es un sistema exoplanetario que tiene 4 exoplanetas girando a su alrededor. El primer ajuste TB tomando en cuenta los valores de los 4 planetas observados y muestra una relación exponencial  $a = 0.013e^{0.8806n}$  con un coeficiente  $R^2 = 0.8755$ , el peor resultado que se obtuvo entre todos los sistemas planetarios analizados.

Los planetas Gliese 876c, b y e muestran una relación muy importante entre los periodos orbitales de 1:2:4, es conocida como la resonancia de Laplace. Este es el segundo sistema analizado en este trabajo que presenta esta peculiaridad. Tomando en cuenta esto, se realizó un ajuste utilizando los planetas en resonancia.

Con el segundo ajuste se obtiene una relación exponencial:  $a = 0.0502e^{0.4738n}$  con  $R^2 = 1$ . Hay que tener en cuenta que este coeficiente de correlación corresponde a los tres exoplanetas a los cuales se ajusta. Se extrapoló hacia adentro una unidad con el propósito de observar que valor pudiera tener el planeta en el orbital  $n=1$ , sin embargo, este muestra una discordancia del 287% con respecto al ajuste obtenido.

La relación en los periodos nos sugiere que no puede haber vacantes entre estos planetas. Entonces hicimos un tercer ajuste en el cual se toman en cuenta los 4 exoplanetas y se acepta la posibilidad de vacantes entre  $n = 1$  y  $n = 2$ . Se encontró el mejor ajuste para Gliese 876 en el cual los planetas observados se encuentran en los orbitales  $n = 1, 4, 5$  y  $6$ , dejando vacantes en  $n = 2$  y  $n = 3$ . Este tercer ajuste tiene una relación de la forma:

$$a = 0.0124e^{0.5613n} \quad (R^2 = 0.996)$$

Esta relación exponencial presenta muy buen ajuste para los valores observacionales, pues los errores porcentuales no pasan del 10%.

Gracias al éxito obtenido en Gliese 581, en cuanto a la predicción de exoplanetas, podemos con confianza predecir dos exoplanetas en Gliese 876. Los planetas que se predicen tendrían un semieje mayor  $a = 0.0381$  UA ( $p \approx 4.5$  días) y  $a = 0.0668$  ( $p \approx 10.5$  días) en los orbitales  $n=2$  y  $n=3$ , respectivamente.

$\mu$  Arae es el último sistema exoplanetario por discutir. Este contiene 4 exoplanetas. De manera análoga a todos los sistemas que se han analizado se hizo el primer ajuste con los datos observacionales y su número de órbita correspondiente. El primer ajuste muestra una relación que esta dada por:  $a = 0.0381e^{1.2647n}$ , con un coeficiente  $R^2 = 0.9281$ . Debido a este resultado se llevó a cabo un segundo ajuste, que igual que en los pasados, se hizo con un planeta menos para observar si existe alguna mejor tendencia que pudiera servir para realizar un mejor ajuste.

El segundo ajuste se hizo sin tomar el valor de  $n=2$ . La ecuación exponencial que se obtuvo es  $a = 0.0239e^{1.3582n}$  y su coeficiente  $R^2 = 0.9992$ . Igual que en los casos anteriores, el ajuste a tres exoplanetas es muy bueno, y como se ha mencionado, nos sirve como guía para encontrar el mejor ajuste.

El último y mejor ajuste para este sistema exoplanetario se hizo tomando los cuatro exoplanetas conocidos pero recorriendo el orden orbital a partir de  $n=2$ ,

es decir el orden orbital a seguir sería  $n=1, 3, 4$  y  $5$ , dejando una vacante en  $n=2$ . El ajuste exponencial tipo TB que se obtiene está dado por:

$$a = 0.0367e^{0.9847n} \quad (R^2 = 0.9847)$$

A pesar de ser el mejor ajuste para  $\mu$  Arae, tenemos dos planetas con errores porcentuales de alrededor del 25%. El índice  $R^2$  no es muy bueno comparado con los resultados de los demás sistemas exoplanetarios. Sin mucha confiabilidad se predice un exoplaneta en  $n=2$  con un semieje  $a = 0.263$  UA ( $p \approx 47.37$  días).

Este resultado, en el cual no se observa muy bien una progresión geométrica, sería objeto de un trabajo a desarrollar posteriormente.

Tanto en el caso del Sistema Solar (incluidos los satélites) como en los casos de los sistemas exoplanetarios se encuentran una regularidad orbital muy marcada. En cada uno de estos casos se encuentran resonancias, en algunos casos muy exactas.

Uno de los sistemas que sobresale es el de los satélites Galileanos de Júpiter. Si consideramos las relaciones entre los periodos de los satélites Io, Europa y Ganímedes, encontramos que la proporción que siguen estos satélites es de 4:2:1 respectivamente. Esta relación se conoce como la resonancia de Laplace y representa el ajuste más exacto de todos los casos en el Sistema Solar.

En nuestro sistema planetario existen otros casos de resonancias: Júpiter y Saturno tienen una resonancia en los periodos de 5:2; Neptuno y Plutón tienen una relación de 3:2; los satélites de Saturno, Mimas y Tetis, una resonancia, 1:2; Dione y Encelado 1:2; Titán e Hiperión 4:3. Por último, el cinturón de asteroides tiene una distribución orbital en resonancia con Júpiter, la cual tiene como consecuencia las brechas de Kirkwood.

Para los sistemas exoplanetarios sobresale el sistema de 55 Cancri debido a que presenta una resonancia de 3:1 entre los planetas de 55 Cnc b y 55 Cnc c, la cual es una de las resonancias más exactas de este sistema exoplanetario. Sin embargo, existen algunas resonancias 5:1 entre 55 Cnc e y 55 Cnc b, 6:1 entre 55 Cnc c y 55 Cnc f y, si además tomamos en cuenta los planetas que predice la relación TB exponencial, existiría una resonancia 5:1 con el planeta en el orbital de  $n=5$  y 55 Cnc d.

El sistema exoplanetario HD 10180 presenta resonancias 3:1 y 5:1 entre los exoplanetas HD 10180d y HD 10180e; y HD 10180f y HD 10180g. Para el sistema Gliese 581 se observa una resonancia 5:9 entre los planetas d y g y, si se confirmara la presencia de los planetas que pronostica la relación exponencial TB, se mostraría otra resonancia 5:9 entre el planeta que se predice en el orbital  $n=4$  y GJ 581g.

En particular se debe resaltar el caso de Gliese 876, que es el segundo caso que presenta la relación de Laplace. Esta relación existe entre los planetas Gliese 876(c, b y e). Solamente en este caso los cuatro planetas observados no se ajustan directamente a una relación exponencial TB.

Por último, en el sistema exoplanetario  $\mu$  Arae no se encuentran resonancias y su ajuste a la relación TB es el peor de los obtenidos en este trabajo.

El hecho que la mayoría de los sistemas planetarios que se estudiaron contienen configuraciones resonantes, nos da una pista del muy alto grado de interacción entre estos planetas. Es decir, los planetas pudieron ser capturados en las regiones de resonancias debido a un planeta gigante que se encontrará migrando por la interacción entre el planeta y el disco protoplanetario y que podrían sobrevivir en la resonancia hasta el final de la evolución planetaria. Podría ser que la posición que tienen actualmente los planetas no es la de origen, sino que han migrando y han entrado en resonancia.

Esto nos indica que los parámetros orbitales iniciales estuvieron sujetos a un proceso de dinámica interna, el cual llevaría a una configuración estable, donde los cuerpos alcanzarían un mínimo de interacción y esto se reflejaría en la distribución de distancias con una relación generalizada Titius-Bode.

En algunos de los trabajos teóricos que se citaron sobre la relación TB se analiza la relación que pudiera existir entre las resonancias y la distribución de distancias (o periodos) de los sistemas planetarios.

En este trabajo se ha revisado la historia, teoría y algunos de los trabajos actuales de la relación Titius-Bode. Se propuso una relación exponencial generalizada TB para ajustarla a los cuerpos del sistema solar, incluidos los satélites de Júpiter, Urano y Saturno, por medio del método de mínimos cuadrados. Este método se utilizó para comprobar la hipótesis de que una relación tipo TB generalizada también es válida para los sistemas exoplanetarios 55 Cancri, HD 10180 Gliese 581, Gliese 876 y  $\mu$  Arae.

Los resultados obtenidos para el Sistema Solar y el sistema 55 Cancri se publicaron en la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, Poveda & Lara, (2008) (35). También como ya se mencionó, los resultados obtenidos para los sistemas 55 Cancri y Gliese 581 se reportaron en la VI Reunión de la Sociedad Mexicana de Astrobiología (2009), en la conferencia titulada: "Los sistemas exoplanetarios: 55 Cancri, Gliese 581 y la ley de Titius-Bode".

Examinando los ajustes exponenciales encontramos que la relación TB es válida tanto para el Sistema Solar como para los sistemas exoplanetarios.

La pregunta de si la regularidad en la distribución de planetas corresponde solamente a una relación matemática o si puede atribuirse a un fenómeno físico, sigue estando abierta. Sin embargo este trabajo, al igual que estudios anteriores, han mostrado un simple hecho: la distribución de las distancias planetarias tiende a seguir una relación TB, y esta relación tiene carácter predictivo tanto en el Sistema Solar como en los sistemas exoplanetarios.

Como hemos encontrado que en los sistemas exoplanetarios la relación TB es válida, nos inclinamos a pensar que es muy improbable que la relación TB sea debida al azar.

La correlación entre las resonancias y la relación TB también nos da una pista de que la relación TB pueda ser consecuencia de un proceso de relajación gravitacional, que ocurriría al final del proceso de la formación planetaria, es decir, después de la disipación de gas y polvo del disco protoplanetario.

El enigma de la relación TB proviene de tiempo atrás y ha causado mucha controversia entre los astrónomos. Sin embargo, siguen publicándose trabajos sobre este tema y, gracias al avance en la observación de sistemas planetarios en otras estrellas, podremos estudiar más a fondo el tema de la formación planetaria y encontrar la conexión con la relación TB.

El descubrimiento de los planetas que se predicen por medio de esta relación ayudará a confirmar esta ley empírica. De tener éxito, la relación TB podría servir como herramienta para la predicción y búsqueda de planetas, concentrando la búsqueda en las distancias que ésta pronostica. Como ocurrió con el descubrimiento del planeta Gliese 581g, cuya distancia orbital observada ya había sido pronosticada por la relación TB exponencial, lo cual resalta la gran capacidad predictiva de esta relación.

En cada uno de los casos estudiados se predicen planetas, esperemos que con los avances tecnológicos se pueda confirmar su existencia.

## 9. Anexo

### 9.1 Método de Mínimos Cuadrados

No existe un método único correcto para optimizar los parámetros, válido para todos los problemas. Sin embargo, existe un método que si puede ser bien justificado, esto es simple y lineal, y experimentalmente bien establecido que es el método de mínimos cuadrados.

Nuestros datos consisten en pares de dos medidas  $(x_i, y_i)$ , donde  $x_i$  es una variable independiente y  $y_i$  es una variable dependiente. Deseamos encontrar los valores  $a$  y  $b$  que minimice la discrepancia entre los valores medidos y los valores calculados por  $y(x)$ . No podemos determinar los parámetros exactos con solo un número finito de observaciones, pero podemos extraer el estimado más probable para los coeficientes.

Debemos de definir el criterio para minimizar la discrepancia entre los valores medidos y los valores predichos  $y_i$ . Para los valores cualesquiera de  $a$  y  $b$ , podemos calcular las desviaciones de  $\Delta y_i$  entre cada de los valores observados  $y_i$  y los valores ajustados.

$$\Delta y_i = y_i - y(x_i) = y_i - a - bx_i$$

Con parámetros bien escogidos, estas desviaciones deberían ser relativamente muy pequeñas. Sin embargo, la suma de estas desviaciones no es una buena medida de comparación sobre la precisión de nuestros datos se ajuste a la curva debido a que grandes desviaciones positivas pueden ser balanceadas por las desviaciones negativas y dando por resultado una suma muy pequeña incluso cuando el ajuste de la función  $y(x)$  con los datos este mal. Uno podría considerar el sumar los valores absolutos de las desviaciones pero esto traería problemas para obtener una solución analítica. En cambio haremos la suma de los cuadrados de las desviaciones.

Nuestros datos consisten en una muestra de observaciones proyectadas de una distribución que determina la probabilidad de crear dicha observación en particular. Para un problema de una esperada relación lineal entre las variables dependientes e independientes, definimos los parámetros  $a_0$  y  $b_0$  tales que muestran una relación entre  $x$  y  $y$ , está dada por:

$$y_0(x) = a_0 + b_0x$$

Asumiremos que cada uno de los valores medidos de  $y_i$  pertenece a una distribución Gaussiana con el valor medio  $y_0(x_i)$  y una desviación estándar  $\sigma_i$ .

Hay que tomar en cuenta que la asunción de que es Gaussiana no siempre es correcta.

Considerando esta asunción, la probabilidad  $P_i$  para un valor observado  $y_i$  con una desviación estándar  $\sigma_i$  para las observaciones y con un valor medio  $y_0(x_i)$  es:

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{y_i - y_0}{\sigma_i} \right]^2\right\}$$

La probabilidad para la creación del paquete de mediciones observadas con  $N$  valores de  $y_i$ , es el producto de las probabilidades de dicha observación:

$$P(a_0, b_0) = \prod P_i = \prod \left( \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum \left[ \frac{y_i - y_0(x_i)}{\sigma_i} \right]^2\right\}$$

donde el producto  $\prod$  es tomado con  $i$  de 1 a  $N$  y el producto de los exponenciales esta expresado como el exponencial de la suma de los argumentos.

Similarmente, para cualquier valor estimado de los parámetros de  $a$  y  $b$ , podemos calcular la probabilidad obtenida del paquete de valores observados

$$P(a, b) = \prod \left( \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2\right\}$$

Con  $y(x) = a + bx$  y evaluado cada uno de los valores  $x_i$ .

Debido a que el primer factor en el producto de la ecuación pasada es constante, independiente los valores de  $a$  y  $b$ , maximizando la probabilidad  $P(a, b)$  es equivalente a minimizar la suma en el exponencial. Se define esta suma como parámetro de ajuste  $\chi^2$  (*goodness-of-fit*)

$$\chi^2 = \sum \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum \left[ \frac{1}{\sigma_i} (y_i - a - bx_i) \right]^2$$

Este método para encontrar el ajuste óptimo a los datos y encontrar los valores de  $a$  y  $b$  que minimizan el peso de la suma de los cuadrados de las desviaciones  $\chi^2$  y por lo tanto, el encontrar el ajuste que produce las más pequeña de los mínimos cuadrados. La magnitud de  $\chi^2$  esta determinada por cuatro factores:

1. Fluctuaciones en los valores medidos de las variables  $y_i$ , donde son muestras azarosas de una población matriz con valores esperados  $y_0(x_i)$ .
2. Los valores asignados a las incertidumbres  $\sigma_i$  en las medidas de las variables  $y_i$ . Incorrectamente asignadas a de las incertidumbres  $\sigma_i$  se dirigirá a valores incorrectos de  $\chi^2$ .
3. La selección de la función analítica  $y(x)$  como una aproximación de la “verdadera” función  $y_0(x)$ . Podría ser necesario ajustar varias funciones diferentes para encontrar la función apropiada para un paquete de datos en particular.
4. Los valores de los parámetros de la función  $y(x)$ . Nuestro objetivo es el de encontrar “los mejores valores” para este parámetro.

Para encontrar lo valores de los parámetros  $a$  y  $b$  que produce el valor mínimo de  $\chi^2$ , igualamos a cero las derivadas parciales de  $\chi^2$  con respecto a cada uno de los parámetros.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} \chi^2 &= \frac{\partial}{\partial a} \sum \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i)^2 \right] \\ &= -2 \sum \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i) \right] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b} \chi^2 &= \frac{\partial}{\partial b} \sum \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i)^2 \right] \\ &= -2 \sum \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i) x_i \right] = 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden arreglar como un par ecuaciones lineales con los parámetros  $a$  y  $b$  como incógnitas:

$$\begin{aligned}\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} &= a \sum \frac{1}{\sigma_i^2} + b \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} &= a \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\end{aligned}$$

Utilizaremos el método de determinantes para solucionar estas ecuaciones. Las soluciones son:

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left( \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left( \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \left( \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right)$$

### Estimación de error

Si la desviación estándar  $\sigma_i$  de los datos  $y_i$  es desconocida podemos asumir que todas son iguales,  $\sigma_i^2 = \sigma^2$ , entonces podemos estimarlas a partir de los datos y de los resultados del ajuste. El requisito de que errores sean iguales se pueden satisfacer si las incertidumbres son instrumentales y todos los datos están obtenidos con el mismo instrumento y en la misma escala.

La mejor estimación de error para la variación de la muestra de datos:

$$\sigma^2 \cong s_T^2 = \frac{1}{N-m} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

Donde  $N - m$  es el número de grados de libertad y es igual al número de medidas menos el número de parámetros determinados por el ajuste. En esta ecuación podemos identificar  $y_i$  con el valor medido de la variable dependiente, y para  $\bar{y}$ , el valor medio esperado de  $y_i$ , podemos utilizar el valor calculado de la ecuación para cada uno de los datos con los parámetros ajustado a  $a$  y  $b$ . Entonces, nuestro estimado  $\sigma_i = \sigma$  para la desviación estándar en cada medida individual es

$$\sigma^2 \cong s_A^2 = \frac{1}{N-m} \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

Comparando las dos ecuaciones, se puede observar que esta incertidumbre es la que hemos minimizado en el procedimiento de mínimos cuadrados.

## Coeficiente de determinación

El coeficiente de determinación indica la fuerza y la dirección de un ajuste lineal entre las dos variables al azar. Este refleja la correlación que existe entre los valores medidos y los valores obtenidos por medio del ajuste, con lo que muestra la fracción en la que varía  $y_i$  con respecto al ajuste lineal obtenido por el ajuste. Se define como:

$$R^2 = 1 - \frac{s_A^2}{s_T^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - a - bx_i)^2}$$

Donde  $s_A^2$  es la suma de cuadrática del error que existe por el ajuste y  $s_T^2$  es la suma total de cuadrados.

Cuando tomamos en cuenta el valor de este coeficiente, podemos afirmar que si el coeficiente es igual a 1 implica que la correlación entre ambas variables es lineal total y que los datos siguen una tendencia completamente lineal. Un coeficiente igual o próximo a cero indica que no existe relación lineal entre las dos variables, aunque podría existir otro tipo de correlación no lineal.

$R^2 = 1$	correlación perfecta.
$0.8 < R^2 < 1$	correlación muy alta
$0.6 < R^2 < 0.8$	correlación alta
$0.4 < R^2 < 0.6$	correlación moderada
$0.2 < R^2 < 0.4$	correlación baja
$0.0 < R^2 < 0.2$	correlación muy baja
$R^2 = 0$	correlación nula

## THE EXO-PLANETARY SYSTEM OF 55 CANCRI AND THE TITIUS-BODE LAW

Arcadio Poveda<sup>1</sup> and Patricia Lara<sup>2</sup>

Received 2008 February 13; accepted 2008 February 26

### RESUMEN

El reciente descubrimiento de un quinto planeta ligado a 55 Cancri (Fischer et al. 2007) nos ha motivado a investigar si este sistema exo-planetario se ajusta a alguna una forma de la ley de Titius-Bode (TB). Encontramos que una simple relación TB exponencial reproduce muy bien los cinco semiejes mayores observados siempre y cuando se asigne el número 6 al planeta con el semieje más grande. Esta forma de contar deja un vacío en la posición  $n = 6$ , una situación curiosamente reminiscente a la ley TB en nuestro propio sistema planetario, antes del descubrimiento de Ceres. La aplicación de una ley T-B exponencial a 55 Cancri nos permite predecir la existencia de un planeta con  $a \approx 2.0$  AU y con un período de  $P \approx 1130$  días localizado en la gran brecha entre  $a = 0.781$  AU ( $P = 260$  días) y  $a = 5.77$  AU ( $P = 5218$  días) correspondientes a los dos más grandes períodos observados. Con menos certeza, también predecimos un séptimo planeta en  $a \approx 15$  AU con  $P \approx 62$  años.

### ABSTRACT

The recent discovery of a fifth planet bound to 55 Cancri (Fischer et al. 2007) motivated us to investigate if this exo-planetary system fits some form of the Titius-Bode (TB) law. We found that a simple exponential TB relation reproduces very well the five observed major semi-axis, provided we assign the orbital  $n = 6$  to the largest  $a$ . This way of counting leaves empty the position  $n = 5$ , a situation curiously reminiscent of TB law in our planetary system, before the discovery of Ceres. The application of an exponential TB relation to 55 Cancri allows us to predict the existence of a planet at  $a \approx 2.0$  AU with a period of  $P \approx 1130$  days located within the large gap between  $a = 0.781$  AU ( $P = 260$  days) and  $a = 5.77$  AU ( $P = 5218$  days). With less certainty, we also predict a seventh planet at  $a \approx 15$  AU, with  $P \approx 62$  years.

*Key Words:* planetary systems — planets and satellites: general — stars: individual (55 Cancri)

### 1. INTRODUCTION

The two hundred year old saga of the Titius-Bode law is well known (see Nieto 1972 for a well documented review). Since the discovery by Bode, in 1782, that the Titius relation “predicted” the major semi-axis of Uranus, a frantic search for “the lost planet” at position  $n = 5$  was initiated at various European observatories. The discovery of Ceres by Piazzi on the night of January 1st, 1801, with the major semi-axis predicted by TB, and the fact

that the satellites of Jupiter, Saturn and Uranus also follow a TB relation, initiated a debate about the meaning of TB which is still alive nowadays. Is the TB law a matter of chance (Lynch 2003; Dubrulle & Graner 1994; Neslušan 2004)? Is it consequence of the early physical conditions in the protoplanetary disk (Graner & Dubrulle 1994)? Is it a reflection of a process of dynamical relaxation in a system of planets subject to their mutual gravitational perturbation (Hayes & Tremaine 1998; Hills 1970; Ovenden 1975)?

Because of the previous considerations and in view of the growing number of multiple exoplanetary systems, we decided to check whether the

<sup>1</sup>Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico.

TABLE 1  
PROPERTIES OF 55 CANCRI

Apparent visual magnitude	5.96
Hipparcos parallax	$79.8 \pm 0.84$ mas
Distance	$12.5 \pm 0.13$ parsecs
Absolute visual magnitude	5.47
Effective Temperature	$5234 \pm 30$ K
Rotation velocity $v \sin i$	$2.4 \pm 0.5$ km s <sup>-1</sup>
Luminosity	$0.6 L_{\odot}$
Spectral type	G8V/K0V
Mass	$0.94 \pm 0.05 M_{\odot}$

55 Cancri system, for which a fifth planet has been recently announced (Fischer et al. 2007), follows the TB law.

The traditional TB relation is essentially a geometric progression in the number  $n$ , the running number of a planet according to its distance to the central star. This geometric relation can be represented by an exponential in  $n$ .

We tried to represent our planetary system by an exponential in  $n$  and found a good fit. Having verified that an exponential fit for the Solar System was a good approximation we tried to represent the 55 Cancri system also by an exponential TB. The exponential fit to the 55 Cancri system was very good (with a coefficient of correlation  $R^2 = 0.997$ ) when we assigned the number  $n = 6$  to the largest major semi-axis observed. The vacancy left at  $n = 5$  leads us to propose the existence of a new planet with a major semi-axis  $a \approx 2$  AU.

## 2. THE 55 CANCRI SYSTEM

The star 55 Cancri (55 Cnc = HD 75732 = HR3522 = HIP 43587) is a well observed nearby star; in Table 1 we list some of its parameters taken from the paper by Fischer et al. (2007). In Table 2 the observed parameters for its planetary system are listed, including the year of discovery of each planet. Note in this table the enormous spacing between planets  $n = 4$  and  $n = 5$ , whose major semi-axes are, respectively, less than 1 AU and more than 5 AU, and whose periods are 260 days and 5218 days.

## 3. THE TITIUS-BODE LAW

The equation

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad (a \text{ in AU}) \quad (1)$$

represents the classical Titius-Bode law. Note the peculiar ordering system: Mercury corresponds to  $n = -\infty$ , Venus to  $n = 0$ ...

Solar System

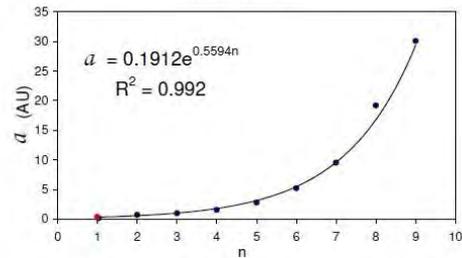


Fig. 1. An exponential TB fit to the Solar System. This fit includes major semi-axis from Venus ( $n = 2$ ) up to Neptune ( $n = 9$ ). Note that the extrapolation of equation to  $n = 1$ , gives  $a(1) = 0.335$  AU, close to the observed value  $a = 0.387$ .

In the equation

$$a = 0.1912 e^{0.5594n} \quad (2)$$

we present our best exponential fit to the Solar System excluding Mercury and Pluto, but including Uranus and Neptune. Our exponential TB fit to the Solar System excludes Mercury because in the traditional TB relation not only it is given an orbital number  $n = -\infty$ , devoid of any physical meaning, but also the value of the constant (0.4) is arbitrarily chosen to give the approximately correct values of  $a$  for Mercury and the Earth. At the other end of our planetary system we exclude Pluto not only because of its pathological orbit, but also because we do not know if it is an object from the Kuiper belt, captured into the region of the outer planets, or a satellite ejected from Neptune; in any case its present orbit has followed a dynamical evolution different from that of the rest of the planets.

In Figure 1 we plot equation (2), and we mark the position of the orbital  $n = 1$ . Note that although equation (2) does not include the value of  $a$  for Mercury, it predicts orbitals close to the observed ones up to Neptune,  $n = 9$ . The traditional TB relation gave a good fit up to Uranus, but a very poor one for Neptune. Our exponential TB relation gives a poor representation for Uranus, but a good one for Neptune.

## 4. THE TITIUS-BODE AND THE 55 CANCRI EXO-PLANETARY SYSTEM

If we plot, as we do in Figure 2, the major semi-axis of the five known planets versus  $n$ , we note that

TABLE 2  
OBSERVED PROPERTIES OF THE 55 CANCRI EXO-PLANETARY SYSTEM\*

$n$	1	2	3	4	5
Year of discovery	2004	1996	2002 (1)	2007	2002 (2)
Observed semiaxis major (AU)	0.038 $\pm 1.0 \times 10^{-6}$	0.115 $\pm 1.1 \times 10^{-6}$	0.24 $\pm 4.5 \times 10^{-5}$	0.781 $\pm 0.007$	5.77 $\pm 0.11$
Period (days)	2.817 $\pm 1 \times 10^{-4}$	14.651 $\pm 7 \times 10^{-4}$	44.344 $\pm 7 \times 10^{-3}$	260 $\pm 1.1$	5218 $\pm 230$
$M \sin i$ (Jovian masses)	0.034 $\pm 0.0036$	0.824 $\pm 0.007$	0.169 $\pm 0.008$	0.144 $\pm 0.04$	3.835 $\pm 0.08$

\*Taken from Fischer et al. 2007.

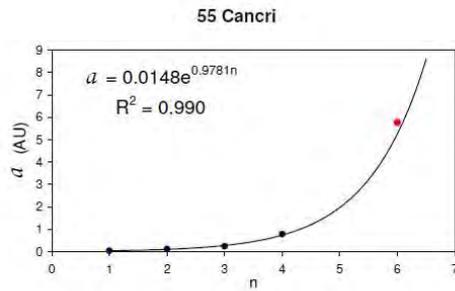


Fig. 2. An exponential TB fit to the four closest planets in the 55 Cancri system. Note that the extrapolation to  $n = 6$  corresponds to a major semi-axis close to the observed one.

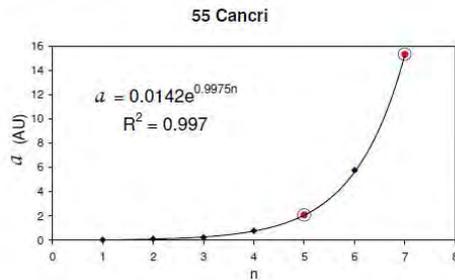


Fig. 3. The TB exponential fit to the 5 observed planets of 55 Cancri, where we count the farthest observed one as  $n = 6$ . Planets  $n = 5$  and  $n = 7$ , predicted by TB, are shown as open circles.

the more distant planet,  $n = 5$  falls very far from any reasonable exponential fit to the 4 closest planets

( $n = 1, 2, 3, 4$ ). However, if we assume that planet 5 has not been discovered, and we fit the first 4 planets with an exponential we see that the extrapolation of this relation to  $n = 6$  ( $a \approx 5.24$  AU) turns out to be close to the observed value ( $a = 5.77$  AU). Figure 3 shows the best fit for the distribution of the observed major semi-axes of the first four planets and the fifth one, now occupying orbital number 6.

This fit is

$$a = 0.0142 e^{0.9975n} \quad (R^2 = 0.997) \quad (3)$$

This equation “predicts” the existence of a fifth planet at  $a \approx 2$  AU and, with less certainty, a seventh one at  $a \approx 15$  AU.

In Table 3 we list the observed elements of 55 Cancri system as well as the TB fit and the two new planets predicted by the Titius-Bode law.

### 5. CONCLUSIONS

In the present paper we showed that the exponential Titius-Bode law holds for the 4 closest planets of 55 Cancri and that its extrapolation fits well the major semi-axis of the fifth planet, provided it is assumed that it occupies the sixth orbital.

The Titius-Bode law is valid for the exoplanetary system 55 Cancri, and may be valid for other exoplanetary systems as well.

Having found another planetary system where the Titius-Bode law is valid makes it rather unlikely that it is due to chance.

The Titius-Bode law allows us to predict two new planets for the 55 Cancri system:

$$\begin{aligned} a &\approx 2.0 \text{ AU} & P &\approx 3.1 \text{ years} \\ a &\approx 15.0 \text{ AU} & P &\approx 62 \text{ years} \end{aligned}$$

TABLE 3  
THE TITIUS-BODE FIT TO THE 55 CANCRI SYSTEM AND THE TWO NEW PLANETS

$n$	1	2	3	4	5	6	7
Observed semiaxis major (AU)	0.038 $\pm 1 \times 10^{-6}$	0.115 $\pm 1.1 \times 10^{-6}$	0.24 $\pm 4.5 \times 10^{-5}$	0.781 $\pm 0.007$		5.77 $\pm 0.11$	
Titius-Bode (AU)	0.039	0.104	0.283	0.768	<b>2.08</b>	5.643	<b>15.3</b>
Period (days)	2.817 $\pm 1 \times 10^{-4}$	14.651 $\pm 7 \times 10^{-4}$	44.344 $\pm 7 \times 10^{-3}$	260 $\pm 1.1$	<b>1130</b>	5218 $\pm 230$	<b>22530</b>

The existence of two hot Jupiter-like planets ( $n = 1, 2$ ), in this system opens the problem of how to understand the persistence of the Titius-Bode law against the phenomenon of planet migration.

The validity of TB for the 55 Cancri exoplanetary system does not yet help to understand the physics behind it. However, it may help to discover new planets by paying special attention to periodic signals in the radial velocities at values close to the predicted periods.

#### REFERENCES

- Dubrulle, B., & Graner, F. 1994, A&A, 282, 269  
 Fischer, D. A., et al. 2007, ApJ, submitted (astro-ph/07123917)  
 Graner, F., & Dubrulle, B. 1994, A&A, 282, 262  
 Hayes, W., & Tremaine, S. 1998, Icarus, 135, 549  
 Hills, J. G. 1970, Nature, 225, 840  
 Neslušan, L. 2004, MNRAS, 351, 133  
 Nieto M. M. 1972, The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory (Oxford: Pergamon Press)  
 Ovenden, M. W. 1975, Vistas in Astron., 18, 473

Arcadio Poveda: Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-264, 04510 México, D. F. Mexico (poveda@servidor.unam.mx).

Patricia Lara: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, 04510 México, D. F. Mexico (path\_6@yahoo.com).

## 10. Referencias

1. Badolati, E., 1982, Moon and the Planets, vol. 26, May 1982, p. 339-341.
2. Barnes, R., Quinn, T. 2004, ApJ 611, 494.
3. Basano, L.; Hughes, D. W., 1979, Nuovo Cimento C, Serie 1, vol. 2C, p. 505-510.
4. Bohr, J., Olsen, K. 2010. MNRAS 403L-1, 59-63.
5. Butler R. P., Tinney, C. G.; Marcy, Geoffrey W.; Jones, Hugh R. A.; Penny, Alan J.; Apps, Kevin (2001). ApJ. 555, 410–417.
6. Carrasco, E., Carramiñana A. A., 2005, Del Sol a los confines del Sistema Solar, Primera Edición, Colección "La ciencia para todos" No. 208
7. Delfosse X., Forveille T., Mayor M., Perrier C., Naef D., Queloz, D. 1998, A&A 338, L67
8. Dermott, S. F., 1968, MNRAS, 141, 349
9. Dermott, S. F., 1968, MNRAS, 141, 363
10. Drubulle, B., Graner, F., 1994, A & A, 282, 269-276
11. Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt S. S., Laughlin, G., Henry, G. W., Abouav, D., Peek, K. M. G., Wright, J. T., Johnson, J. A., McCarthy C., Isaacson, H., 2008, ApJ. 675, 790-801
12. Gallardo, T. 2007, Icarus 190, 1, 280-282
13. Graner, F., Drubulle, B., 1994, A & A, 282, 262-268
14. Hayes, W., Tremaine, S., 1998, Icarus, 135, 549-557
15. Hills, J. G., 1970, Nature, 225, 840
16. Hoyle F., 1962, Astronomy., MacDonald & Co.
17. <http://www.seds.org/messier/xtra/Bios/bode.html>
18. Jiang-Hui Ji, Hiroshi Kinoshita, Lin Liu & Guang-Yu Li 2009 Res. Astron. Astrophys. 9 703

19. Lovis C., Segransan D., Mayor M., Udry S., Benz W., Bertaux J.-L., Bouchy F., Correia A., Laskar J., Lo Curto G., Mordasini Ch., Pepe F., Queloz D. & Nunos S. , 2010, A&A, en prensa.
20. Lynch, P., 2003, MNRAS, 341, 1174-1178
21. Marcy, G.W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Fischer, D., & Lissauer, J. J. 1998, ApJ., 505, L147
22. Martinez, V. J., Miralles, J. A., Marco, E. & Galadi-Enriquez. D. 2005, Astronomía fundamental , Vol.81, Universidad de Valencia
23. Marzari, F., Scholl, H. & Tricarico, P. 2005 A&A 442, 359–364
24. Mayor M., Bonfils X., Forveille T., Delfosse X., Udry S., Bertaux J.-L., Beust H., Bouchy F., Lovis C., Pepe F., Perrier C., Queloz D., and Santos N. C., 2009, A&A 507, 487-494
25. Moore, P., 1954, The story of man and the stars., Ed. W. W. Norton & Company inc.
26. Munini, E. & Armellini, A., 1978, Coelum 46, 223 - 233
27. Murray, C. D., & Dermott, S. F. 1999. Solar system dynamics, Solar system dynamics by Murray, C. D., 1999 (Cambridge: Cambridge University Press)
28. Neslušan, L., 2004, MNRAS, 351, 133-136
29. Nieto M. M., 1972, The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory. Pergamon Press, Oxford
30. Ortiz, J. L.; Moreno, F.; Molina, A.; Sanz, P. Santos; Gutiérrez, P. J, 2007, MNRAS 379-3, 1222-1226.
31. Ovenden, M. W., 1972, Nature, 239, 508-509
32. Ovenden, M. W., 1975, Vistas in Astron., 18, 473-495
33. Patton, J. M., 1988, CeMec, 44, 365-391
34. Pepe F., Correia A.C.M., Mayor M., Tamuz O., Benz W., Bertaux J.-L., Bouchy F., Couetdic J., Laskar J., Lovis C., Naef D., Queloz D., Santos N.C., Sivan J.-P., Sosnowska D., Udry S., 2007, A&A 462, 769
35. Poveda, A. & Lara, P., 2008 RMxAA 44, 243-246

36. Raymond, S. N., Barnes, R., Veras, D., Armitage, P. J., Gorelick, N., Greenberg, R. 2009. ApJ 696L, 98-101.
37. Rivera E. J., Laughlin G; Butler R. P., Vogt S. S., Haghighipour N., Meschiari S., 2010. arXiv:1006.4244v1 [astro-ph.EP].
38. Roy, A. E., Ovenden, M. W., 1954, MNRAS, 114, 232
39. Schneider, J. 2010, Extrasolar Planets Encyclopaedia, [www.exoplanet.eu](http://www.exoplanet.eu)
40. Simbad, astronomical object database. <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad>
41. Vogt S. S., Butler, R. P., Rivera E. J., Haghighipour N., Henry G. W., Williamson M. H. 2010 ApJ 713, 954
42. Zhou, L-Y, Ferraz-Mello, S. and Sun, Y-S., 2007, Proceedings of the International Astronomical Union, 3:485-490, Cambridge University Press.