



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSIDERACIONES TEÓRICAS  
SOBRE AGUJEROS NEGROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

FÍSICO

P R E S E N T A :

JUAN MANUEL CARMONA LOAIZA



TUTOR DE TESIS: DR. SERGIO MENDOZA RAMOS

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de Datos del Jurado

## Datos del alumno

Carmona Loaiza Juan Manuel  
Tel. 5651 0353  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
302555770

## Tutor

Dr. Sergio Mendoza Ramos

## Sinodal 1

Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky

## Sinodal 2

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada

## Sinodal 3

Dr. Sergio Mendoza Ramos

## Sinodal 4

Dr. Carlos Arturo Vargas Guadarrama

## Datos del trabajo escrito

Consideraciones Teóricas sobre Agujeros Negros  
75 páginas  
2010

*A mis padres,  
sin quienes este trabajo no hubiera  
llegado a ser siquiera una idea.*

# Agradecimientos

Mi madre hace tiempo me contó una historia que va más o menos así: “Había una vez un rey que ofrecía su castillo y toda su riqueza a quien lograra atravesar nadando la fosa de cocodrilos que rodeaba al castillo, obviamente sólo un loco intentaría lograrlo y nadie se lanzaba, pero cuando la gente parecía más tranquila y desanimada, pues nadie saltaba al agua, un hombre se acercó a un joven y dándole un fuerte empujón lo hizo caer a la fosa. En ese momento el joven sin darse cuenta de lo que le esperaba no tuvo otro remedio que nadar con todas sus fuerzas para intentar llegar al otro lado...” La historia sigue así, y al final, el joven logra llegar al castillo y hacerse de toda la riqueza que jamás pudo imaginar gracias al hombre que lo empujó.

Mientras realizaba este trabajo me sentía como el joven de esta historia, empujado por Sergio hacia un reto que jamás había vivido, sin saber qué esperar ni cómo librar los obstáculos que se me presentaban. Pero al final miro hacia atrás y me doy cuenta de todas las cosas que he aprendido, de la experiencia que he adquirido y de la riqueza que ahora poseo. Gracias a Sergio Mendoza por haber visto en mí un ser capaz de superar los retos que habrían de aparecer, por todo el conocimiento que puso a mi alcance, por haberme dado ánimo para continuar cuando veía todo perdido y por enseñarme el camino por el cual andar. Sin su guía esta tesis no hubiera visto la luz de la existencia. Finalmente le agradezco el haberme brindado su amistad, pues ha sido más que un director de tesis para mí.

Gracias a Juan Carlos Hidalgo por las enriquecedoras discusiones y por devolverme a la realidad en los momentos en que la perdía entre los interminables cálculos, por estar ahí para escucharme y resolver mis dudas siempre que se lo pedía y por ayudarme a tener confianza en los argumentos que desembocaron en los resultados de esta tesis.

Gracias a los excelentes maestros que he tenido y de quienes he adquirido los conocimientos sin los cuales no hubiera tenido el poder para superar esta etapa.

Gracias a Carlos Arturo Vargas por haberme dado herramientas en exceso para lograr el éxito en mi vida académica, por la rigurosidad de sus cursos y por la constancia, relevancia y dificultad en las tareas asignadas.

Gracias a Gustavo Cruz por la claridad de sus exposiciones. Cada clase era tan sencilla que parecían obvios los teoremas más difíciles, a pesar de nunca dejar de lado la rigurosidad.

Gracias a Matías Moreno por haberme explicado a fondo y con paciencia los conceptos más oscuros de la mecánica cuántica y por la relación tan natural que siempre hacía entre las matemáticas y la física.

Gracias a María del Carmen Jorge y Jorge, por haber sido una excelente maestra de quien aprendí las matemáticas más difíciles de la manera más fácil y quien finalmente me hizo entender conceptos que creía ya haber entendido.

Gracias a María de los Ángeles Ortiz por haber hecho de sus clases una hora de recreo enriqueciéndolas con conceptos históricos y por darme un panorama sumamente amplio de la física contemporánea.

Gracias a todos ustedes por haberme hecho sufrir en alguno u otro momento, pues es ese sufrimiento el que a fin de cuentas me ha enriquecido. Como bien se dice por ahí: Si no duele, no sirve.

Gracias a mis amigos, que siempre estuvieron presentes en esta difícil etapa y quienes siempre me dieron ánimo para continuar. Gracias a Pati por sus más que acertados consejos y por las palabras de aliento en los momentos de duda. Gracias a los Texanos Acapulco, Florencia, Manclik, Mario y Michelle por todas las risas, algunas de las cuales fui objeto, pero siempre me contagiaron de alegría en esta etapa de mi vida y eso es algo que nunca olvidaré. Gracias a los Felices Abdiel, Daniel, Javier, Mariana y Omar por haberse mantenido constantes desviándome de mis deberes académicos para ir a tomar unas cervezas o para ir a la fiesta. Gracias a Bruno, Fede, Longares, Palencia, Mafer y Marifer por haberme brindado su amistad todo este tiempo y por haber puesto interés en esta tesis.

Agradezco enormemente a la Facultad de Ciencias de mi universidad, la UNAM, por la excelente formación que recibí, pues me dio la oportunidad de aprender de los mejores maestros. Por las charlas enriquecedoras y las correcciones a esta tesis agradezco a mis sinodales Jerónimo Cortez, Pablo Rendón, Roberto Sussman y Arturo Vargas. Agradezco también el apoyo proporcionado por el Instituto de Astronomía, así como al apoyo económico proporcionado por la DGAPA en el proyecto PAPIIT IN116210.

Gracias a tí, Talía, por haber estado conmigo todo este tiempo, por haberme tendido tu mano cálida incondicionalmente y por haber compartido conmigo tantas sonrisas y alegrías. Gracias por haber contribuido directamente al desarrollo de esta tesis al discutir conmigo algunas ideas y por corregir mis matemáticas más de una vez. Gracias por haber estado ahí y devolverme la tranquilidad en los momentos de mayor tensión.

*Gracias a la vida,  
que me lo ha dado todo.*

# Índice general

Hoja de Datos del Jurado	III
Agradecimientos	1
Resumen	5
<b>I. Ondas de choque relativistas y Autosimilaridad.</b>	<b>7</b>
§1. Ondas de choque en hidrodinámica . . . . .	7
§2. Autosimilaridad . . . . .	11
§3. Hidrodinámica relativista . . . . .	14
§4. Ondas de choque en relatividad especial . . . . .	15
§5. Autosimilaridad en Relatividad Especial . . . . .	16
<b>II. Colapso gravitacional.</b>	<b>21</b>
§6. Teorema de Birkhoff . . . . .	21
§7. Formación de agujeros negros . . . . .	24
§8. Censura cósmica y colapso autosimilar . . . . .	25
<b>III Soluciones autosimilares en R.E.</b>	<b>35</b>
§9. Explosiones fuertes ultrarrelativistas . . . . .	35
§10. Implosiones fuertes ultrarrelativistas . . . . .	37
<b>IV. Ondas de choque implosivas en R.G.</b>	<b>41</b>
§11. Planteamiento del problema. . . . .	41
§12. Solución autosimilar . . . . .	44
§13. Discusión . . . . .	53

Conclusiones	55
A. Códigos utilizados.	57

# Índice de figuras

I.1. Onda de choque vista desde el sistema de referencia en el que esta está en reposo. . . . .	12
I.2. Diagrama de una onda de choque en relatividad especial. . . . .	17
II.1. Diagrama espacio-tiempo en coordenadas de Lemaître. . . . .	26
II.2. Soluciones numéricas a las ecuaciones de Einstein para una métrica autosimilar con parámetro de autosimilaridad $x = r/t$ . . . . .	32
IV.1. Índice de autosimilaridad como función de la tasa de eyección de masa para una onda de choque implosiva fuerte y ultrarrelativista . . . . .	48
IV.2. Soluciones numéricas para funciones adimensionales y autosimilares de presión, densidad de número de partículas y factor de Lorentz detrás de una onda de choque implosiva y ultrarrelativista . . . . .	49
IV.3. Perfiles de presión detrás de una onda de choque implosiva fuerte y ultrarrelativista. . . . .	50
IV.4. Perfiles de densidad de número de partículas detrás de una onda de choque implosiva fuerte y ultrarrelativista. . . . .	51
IV.5. Factor $\gamma$ de Lorentz del gas detrás de una onda de choque implosiva fuerte y ultrarrelativista. . . . .	52

# Resumen

En la presente tesis se realiza un estudio detallado acerca de ondas de choque fuertes y relativistas en espacio-tiempos curvos. Las ondas de choque son un fenómeno común en astrofísica, pues una gran cantidad de objetos las desarrollan en alguna etapa de su existencia y varios fenómenos observados se explican a través de ellas como son: vientos estelares, supernovas, núcleos activos de galaxias y destellos de rayos gamma. Cabe mencionar que los mecanismos que producen estos últimos aún no han podido ser descritos por completo. Es por eso que se ha decidido atacar el tema de ondas de choque desde una perspectiva completamente nueva, incorporando a su estudio los efectos que producirían campos gravitacionales intensos sobre estas, tales como los campos gravitacionales producidos por una singularidad desnuda, los cuales a pesar de ser sumamente intensos en sus vecindades, no desarrollan superficies causalmente desconectadas del resto del universo a la manera en que lo hace un agujero negro.

En el primer capítulo se dan a conocer las ecuaciones de la hidrodinámica y cómo éstas dictan los flujos a través de una onda de choque, es decir, se obtienen relaciones que las variables hidrodinámicas del flujo deben de satisfacer al cruzar de un lado a otro de la onda de choque. También se introduce el concepto de autosimilaridad y se utilizan argumentos dimensionales para resolver el problema de una explosión fuerte, la cual ocasiona un flujo autosimilar. Éstos conceptos se extienden para incluir en su estudio explosiones que dan lugar a flujos relativistas y se obtienen parámetros relevantes para el estudio de éstos (Zel'dovich & Raizer, 1966a,b). En el segundo capítulo se introducen algunos conceptos de relatividad general y se detallan los dos posibles resultados de un colapso gravitacional: un agujero negro o una singularidad desnuda. Se exponen también algunas condiciones que la materia en el colapso debe de cumplir con el fin de ser considerada plausible y se introduce el concepto de espacio-tiempo autosimilar, el cual ha sido de mucha utilidad en el estudio de formación de singularidades desnudas (Ori & Piran, 1987; Townsend, 1997). En el capítulo tres se exponen las soluciones para explosiones e implosiones fuertes y relativistas que han sido obtenidas hasta el momento (Blandford & McKee, 1976; Hidalgo & Mendoza,

2005). Finalmente en el capítulo cuatro se resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica para un espacio-tiempo esféricamente simétrico en el cual se supone existe una onda de choque implosiva y naturalmente se da una síntesis entre autosimilaridad en hidrodinámica y autosimilaridad en la geometría del espacio-tiempo.

# Capítulo I

## Ondas de choque relativistas y Autosimilaridad.

En este capítulo se obtienen ciertas relaciones que las variables hidrodinámicas en un fluido deben de cumplir al pasar este a través de una onda de choque. También se introduce el concepto de autosimilaridad y se utilizan argumentos dimensionales para resolver el problema de una explosión fuerte, la cual ocasiona un flujo autosimilar. Éstos conceptos se extienden para incluir en su estudio explosiones que dan lugar a flujos relativistas y se obtienen parámetros relevantes para el estudio de éstos.

### §1. Ondas de choque en hidrodinámica

Cuando se produce una explosión en una atmósfera en reposo, la energía liberada pone en movimiento al gas que rodea al punto de su liberación. Éste gas, al comenzar a moverse, cambia el estado de sus variables hidrodinámicas, como son la presión  $p$ , la densidad  $\rho$ , la temperatura  $T$  y la velocidad  $v$ . Además propaga la información de estos cambios a la *velocidad del sonido*, de tal manera que todo el gas en conjunto pueda empezar a fluir y entrar así en equilibrio. Esto cambia cuando tenemos una explosión lo suficientemente fuerte como para poner en movimiento a una gran masa de gas a velocidades mayores a la del sonido. En este caso no hay forma de que los elementos de fluido que comienzan a moverse hagan llegar la información de su estado a sus vecinos más lejanos antes de ellos mismos estar ahí. Lo que se genera a continuación es una *onda de choque*, es decir, una superficie que se expande a partir del punto de explosión, delante de la cual el gas permanece sin

enterarse siquiera de que ha ocurrido algo. Detrás de esta, el gas se mueve violentamente alejándose del punto inicial, pero sin alcanzarla.

Por supuesto, existen algunas relaciones entre el estado del fluido delante de la onda de choque (flujo no chocado), la velocidad de esta y el estado del fluido detrás de ella (flujo chocado). Estas relaciones salen de manera natural a partir de las leyes de conservación de masa, de energía, y de momento.

Consideremos un fluido de densidad  $\rho$  y velocidad  $v$  fluyendo dentro y fuera de un volumen fijo  $V$  que tiene como frontera una superficie  $S$ . La cantidad de masa por unidad de tiempo que pasa a través de un elemento de superficie  $d\vec{S}$  es  $\rho\vec{v} \cdot d\vec{S}$ . En ausencia de fuentes y sumideros, la masa que fluya a través de la superficie completa  $S$  debe de ser igual al cambio en la masa contenida dentro del volumen  $V$ . Matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera (Landau & Lifshitz, 1987):

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \rho\vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (1.1)$$

Dado que el volumen de integración es fijo y usando el teorema de Gauss, se obtiene que:

$$\int \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) dV = 0. \quad (1.2)$$

Por lo tanto, dado que el volumen de integración es arbitrario, llegamos a la *ecuación de continuidad*, o ecuación de *conservación de masa*:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho\vec{v}). \quad (1.3)$$

Generalizando este razonamiento, el cambio en cierta cantidad conservada dentro de algún volumen fijo debe de ser igual al flujo de dicha cantidad a través de la superficie que rodea al volumen. Las cantidades conservadas que tenemos aparte de la masa son el momento y la energía. De esta manera podemos escribir otras 2 ecuaciones análogas a la ecuación (1.3), las cuales expresarán la conservación de energía y de momento\* (Zel'dovich & Raizer, 1966a):

---

\*Utilizaremos notación de Einstein, en la que índices repetidos implican suma sobre ese índice, de esta manera tenemos:  $\nabla \cdot \vec{V} \equiv \partial_j V_j$

$$\partial_t \left( \rho c + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left[ \rho \vec{v} \left( c + \frac{1}{2} v^2 \right) + p \vec{v} \right], \quad (1.4)$$

$$\partial_t (\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik}, \quad (1.5)$$

donde hemos utilizado el tensor de densidad de flujo de momento  $\Pi^{ik}$  definido como:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}. \quad (1.6)$$

Si consideramos ahora un gas politrópico, hacemos pequeñas perturbaciones a sus variables termodinámicas, las introducimos a las ecuaciones de conservación anteriores, y despreciamos términos de segundo orden y superiores, llegamos a una ecuación de onda que tiene una velocidad de onda  $a$ :

$$a = \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \right]^{1/2} = \left( \frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (1.7)$$

donde la derivada se toma a entropía constante, y hemos supuesto un gas politrópico que obedece la relación <sup>\*</sup> :  $p \sim \rho^\kappa$ .

Estamos ahora en posibilidad de obtener ciertas relaciones entre los estados termodinámicos del gas chocado y el gas no-chocado. Escojamos un sistema de referencia en el cual la onda de choque permanece en reposo, en el cual el gas no chocado llega a la onda de choque a velocidades supersónicas y el gas chocado se aleja de ella a velocidad subsónica, tomando en cuenta que la velocidad del sonido no es la misma en ambas regiones. Supongamos que el gas entra a la onda de choque con valores de presión, densidad y velocidad  $(p_1, \rho_1, v_1)$ , y sale como gas chocado con valores correspondientes  $(p_2, \rho_2, v_2)$ . Estudiaremos una región tan pequeña cerca de la onda de choque que podemos considerar el fenómeno como unidimensional, así,  $x$  denotará la distancia desde el choque. Si suponemos también que el flujo es estacionario, i.e.  $\partial_t = 0$ , podemos escribir las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) de la siguiente manera:

---

<sup>\*</sup>Un cambio politrópico en un gas es un cambio cuasiestático y de tal manera que los calores específicos del gas permanecen constantes en el proceso.  $\kappa$  generalmente es el cociente de calores específicos, sin embargo esta interpretación deja de ser correcta en el caso de gases semirelativistas o cuando el gas tiene una componente relativista y la otra no relativista (e.g. gas y radiación, o electrones relativistas y protones lentos)

$$\frac{d}{dx}(\rho v) = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \rho v \left( \epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) + p v \right] = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho v^2 + p) = 0. \quad (1.10)$$

Habiendo demostrado que el flujo de masa, de energía y de momento se conserva, es evidente que a través de la onda de choque se debe de cumplir:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2}, \quad (1.12)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2. \quad (1.13)$$

Donde hemos introducido una relación entre la energía específica, la densidad y la presión dada por  $e = \frac{p}{(\kappa-1)\rho}$ . De esta manera podemos escribir las ecuaciones en términos únicamente de  $p$ ,  $v$  y  $\rho$  y resolver las variables del gas chocado en términos de las del gas no-chocado.

Las relaciones (1.11) (1.12) y (1.13) son conocidas como las *condiciones de salto* a través de una onda de choque, y determinan la magnitud del cambio en  $p$ ,  $\rho$  y  $v$  a través del choque (Ver Figura §1).

Manipulando las condiciones de salto, en el caso límite de una onda de choque fuerte dado por la condición \*

$$p_2 \gg p_1, \quad (1.14)$$

---

\* A partir de esta condición se sigue también que la velocidad de la onda de choque con respecto al gas no chocado es mucho mayor a la velocidad del sonido del gas. Si definimos el número de Mach  $\mathcal{M} = \frac{v_c}{a}$ , este resultado se puede expresar como  $\mathcal{M} \gg 1$

se cumplen las siguientes relaciones:

$$\rho_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_1, \quad (1.15a)$$

$$p_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \rho_1 v_1^2, \quad (1.15b)$$

$$v_2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1. \quad (1.15c)$$

En este caso, dado que  $p_1 \ll p_2$ , podemos considerar efectivamente  $p_1 = 0$ .

## §2. Autosimilaridad

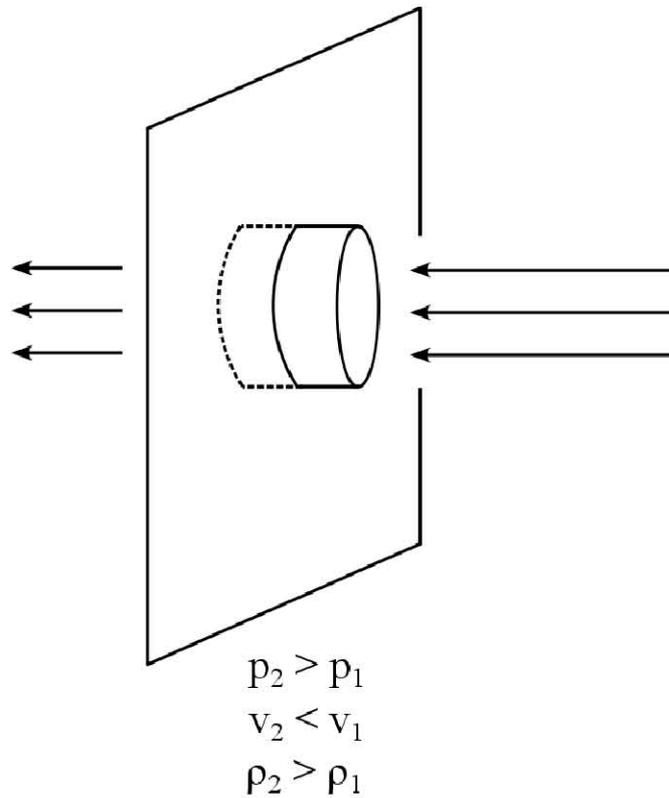
Continuemos con el problema de una explosión fuerte, suponiendo que se libera una cantidad de energía  $E$  en una atmósfera de gas ideal y en reposo, con densidad constante  $\rho_0$ . Supongamos que ha pasado suficiente tiempo como para que la región de liberación de energía pueda ser considerada un punto y el tiempo que tardó en liberarse pueda ser considerado un instante, pero no tanto tiempo como para que la onda de choque generada por la explosión haya perdido su fuerza. De esta manera el sistema ha alcanzado un estado de movimiento *relajado* que admite una descripción matemática sencilla.

El movimiento del gas está determinado por la energía  $E$  de la explosión y la densidad inicial  $\rho_0$  de la atmósfera. Recordando el *teorema II de Buckingham*, debemos de poder escribir las soluciones como funciones adimensionales de parámetros adimensionales que representen distancia y tiempo, multiplicadas por un factor dependiente del tiempo en general que nos dará las unidades físicas de la solución.

$$f(r, t) = f_0 \cdot \phi(r/r_0, t/t_0). \quad (2.1)$$

Donde  $f(r, t)$  representa alguna de nuestras variables hidrodinámicas ( $p, \rho, v$ ).  $f_0, r_0, t_0$  representan escalas características (con unidades físicas) de cada variable construidas a partir de los parámetros del problema, y  $\phi(r/r_0, t/t_0)$  representa una función adimensional de las variables adimensionales  $\tilde{r} = r/r_0, \tilde{t} = t/t_0$

Los parámetros de nuestro problema no pueden ser combinados para generar dimensiones características de distancia, ( $r_0$ ) ni de tiempo ( $t_0$ ) independientemente, por lo cual las



**Figura I.1:** Onda de choque vista desde el sistema de referencia en el que ella misma está en reposo. Desde la derecha, el gas no chocado entra a ella con velocidad supersónica, y al atravesarla, sale con velocidad subsónica. Al atravesar una onda de choque, el gas supersónico sufre un salto en sus cantidades hidrodinámicas, como son la presión  $p$ , la densidad  $\rho$ , la velocidad  $v$ , y la temperatura  $T$ . De esta manera, la energía cinética del gas se convierte en energía térmica. La presión del lado izquierdo es mayor a la presión del lado derecho, al igual que la densidad. [Imagen proporcionada amablemente por Talía Lezama.]

soluciones deben de estar dadas por una combinación particular y adimensional entre  $r$  y  $t$ .

Para encontrar esta combinación, notamos que la variable  $z := \frac{E}{\rho_0}$  tiene dimensiones de  $L^5 T^{-2/5}$ . Así podemos construir una variable adimensional de autosimilaridad del problema, de la cual dependerá nuestra solución:

$$\zeta = r \left( \frac{\rho_0}{Et^2} \right)^{1/5}. \quad (2.2)$$

Las soluciones resultantes se conocen como *soluciones autosimilares* y la combinación particular de  $r$  y  $t$  se conoce como *variable de autosimilaridad*. Estos términos, hablando vagamente, se refieren a que la distribución espacial de alguna cantidad física a cierto tiempo tiene perfiles similares (parecidos) a los que la misma cantidad tendrá en un futuro o tenía en el pasado, haciendo un reescalamiento adecuado de las longitudes y del tiempo.

En términos más rigurosos, podemos decir que si al transcurrir el tiempo reescalamos de cierta manera nuestra unidad de distancia (e.g.  $r \sim t^{2/5}$ ), tendremos siempre la misma distribución espacial de la cantidad en cuestión, únicamente multiplicada por un factor que dependerá del tiempo y contendrá las dimensiones físicas:

$$f(r, t) = f_0(t) \cdot \phi(\zeta). \quad (2.3)$$

Donde las funciones tienen el mismo significado que en (2.1), y  $f_0(t)$  está dada por las condiciones iniciales del problema. En general, el parámetro de autosimilaridad  $\zeta = r/t^\alpha$ , y el exponente  $\alpha$  se encuentra de alguna manera.

En el caso de una explosión fuerte existen 2 parámetros iniciales,  $E$  y  $\rho_0$  con dimensiones independientes. Como hemos visto, estos pueden ser combinados para construir el parámetro adimensional de autosimilaridad y de esta manera automáticamente conocemos el exponente  $\alpha = 2/5$  en este caso. Éste tipo de problemas, donde el *índice de autosimilaridad*  $\alpha$  puede ser encontrado a partir de las condiciones iniciales, se denominan del *primer tipo*.

Los problemas del *segundo tipo* son aquellos en donde las condiciones iniciales son insuficientes para determinar el exponente  $\alpha$ . Un ejemplo de esto es el problema de una implosión. Una implosión que inicia violentamente, al cabo de un tiempo llegará a un estado relajado y de alguna manera olvidará las condiciones iniciales precisas que la llevaron a ese estado. De esta manera, el problema se deja tratar de manera autosimilar, sin embargo no existe

una integral de energía que nos permita encontrar el índice de autosimilaridad  $\alpha$  de la misma manera que se hizo para el caso de la explosión fuerte. Para este tipo de problemas es necesario integrar las ecuaciones autosimilares dejando  $\alpha$  indeterminado. Después se pide que la solución por un punto singular, pues de otro modo las condiciones de frontera no se satisfacen (Zel'dovich & Raizer, 1966b).

Las soluciones autosimilares son de mucha utilidad al tratar con problemas hidrodinámicos, pues nos permiten reducir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en  $r$  y  $t$  a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable de autosimilaridad.

### §3. Hidrodinámica relativista

Cuando estudiamos fluidos cuyas velocidades son comparables a las de la luz, o cuya densidad de energía interna es comparable o mayor a su densidad de energía en reposo, es necesario trabajar dentro del formalismo de la relatividad especial. Si aparte estudiamos grandes masas de fluidos autogravitantes, o en presencia de fuertes campos gravitacionales, tales como los producidos por agujeros negros o estrellas de neutrones, necesitamos incluir a la relatividad general en el estudio. Las cantidades termodinámicas en esta generalización están contenidas en el *tensor de energía-momento* (Landau & Lifshitz, 1987):

$$T_{\mu\nu} := (e + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Donde  $e = c + \rho c^2$  es la densidad de masa-energía medida en el sistema de referencia propio,  $p$  es la presión,  $u_\alpha$  es la 4-velocidad y  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico\*.

Este tensor debe de satisfacer una ecuación de conservación dada por:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

La componente  $\mu = 0$  de esta ecuación representa la conservación de energía, mientras que la componente  $\mu = k$  representa la conservación de la  $k$ -ésima componente del momento.

---

\*La convención que se utilizará para la signatura de la métrica es la  $(-, +, +, +)$ , por lo tanto,  $u_\mu u^\mu = -1$ , en unidades geométricas tales que la velocidad de la luz es  $c = 1$  y la constante de gravitación universal de Newton es  $G = 1$ .

Para que el problema esté matemáticamente completo hay que satisfacer también la ecuación de conservación de número de partículas:

$$\nabla_\alpha n^\alpha = 0, \quad (3.3)$$

donde  $n^\sigma = nu^\sigma$ , y  $n$  representa la densidad de número de partículas medida en el sistema propio.

En lugar de conservación de número de partículas podemos pedir conservación de flujo de masa. Esto se obtiene al multiplicar  $n$  por la masa promedio por partícula:

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0, \quad (3.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa.

## §4. Ondas de choque en relatividad especial

En el caso de fluidos unidimensionales, las componentes 0 y 1 de la ecuación (3.2) y la ecuación (3.4), pueden ser reescritas de la siguiente manera:

$$\partial_t \left[ \beta \frac{p+e}{1-\beta^2} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \partial_r \left[ r^\sigma \frac{p+\beta^2 e}{1-\beta^2} \right] - \frac{\sigma p}{r} = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_t \left[ \frac{e+\beta^2 p}{1-\beta^2} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \partial_r \left[ r^\sigma \beta \frac{p+e}{1-\beta^2} \right] = 0, \quad (4.2)$$

$$\partial_t \left[ \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \partial_r \left[ r^\sigma \beta \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = 0. \quad (4.3)$$

Donde  $\sigma$  puede tomar los valores 0, 1, 2 para simetría plana, cilíndrica y esférica respectivamente y  $\beta := dr/dt$  es la velocidad del fluido.

Las ecuaciones (4.1) y siguientes tienen la forma general:

$$\partial_t [r^\sigma A] + \partial_r [r^\sigma B] + C = 0, \quad (4.4)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son funciones hidrodinámicas del tiempo  $t$  y de la longitud  $r$ .

Análogamente a la manera en que se obtuvieron las condiciones de salto de Rankine-

Hugoniot, integremos las ecuaciones (4.4) sobre una región en el plano  $(r, t)$  que cruce la onda de choque y apliquemos el teorema de Gauss para obtener (McKee & Colgate, 1973) (ver Figura §4):

$$\oint [r^\sigma B dt - r^\sigma A dr] + \iint C dt dr = 0. \quad (4.5)$$

La integral de línea es tomada sobre el circuito alrededor de la frontera de la región (ver Figura §4) y la contribución de la segunda es despreciable dado que  $C$  es finita y  $dr dt$  es una cantidad de segundo orden.

Si ahora hacemos el contorno lo suficientemente pequeño, podremos tomar  $r$  como constante en esa región, y la ecuación (4.5) se podrá simplificar a

$$\oint [B dt - A dr] \approx \Delta B \Delta t - \Delta A \Delta r = 0 \quad (4.6)$$

Ahora bien, dado que la velocidad del choque  $\beta_s = \Delta r / \Delta t$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces las condiciones de salto para las cantidades  $A$  y  $B$  son  $\Delta B = \beta_s \Delta A$ . Sustituyendo  $A$  y  $B$  por las cantidades correspondientes de las ecuaciones (4.1) y siguientes, obtenemos las generalizaciones relativistas de las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot:

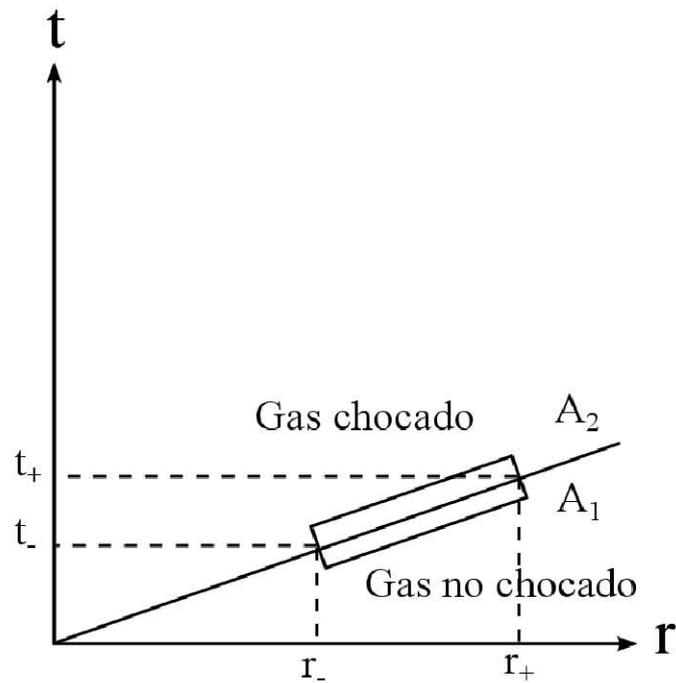
$$\beta_s \Delta \left[ \beta \frac{p + e}{1 - \beta^2} \right] = \Delta \left[ \frac{p + \beta^2 e}{1 - \beta^2} \right], \quad (\text{momento}) \quad (4.7)$$

$$\beta_s \Delta \left[ \frac{e + \beta^2 p}{1 - \beta^2} \right] = \Delta \left[ \beta \frac{p + e}{1 - \beta^2} \right], \quad (\text{energía}) \quad (4.8)$$

$$\beta_s \Delta \left[ \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = \Delta \left[ \beta \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]. \quad (\text{masa}) \quad (4.9)$$

## §5. Autosimilaridad en Relatividad Especial

Es natural buscar una solución autosimilar al problema de una explosión fuerte y relativista, que extienda la solución dada por Sedov (cf. ec. (2.2)). Sin embargo, dado que en este caso se introduce de manera natural una velocidad característica — la velocidad de la luz  $c$  — podríamos pensar que un buen parámetro de autosimilaridad debería de ser algo como  $\sim r/ct$ . Eltgroth (1972) investigó esta posibilidad, proponiendo



**Figura I.2:** En este diagrama se muestra la línea de mundo de una onda de choque. Si integramos la ecuación (3.2) sobre el área del rectángulo mostrado y utilizamos el teorema de Gauss, obtenemos la integral (4.5). Si ahora tomamos el límite cuando el área dentro de él tiende a cero y despreciamos términos de orden superior, encontramos las condiciones de salto de las cantidades hidrodinámicas a través de la onda de choque. [Imagen proporcionada amablemente por Talía Lczama.]

$$\beta = \frac{dr}{cdt} \quad (5.1)$$

como parámetro de autosimilaridad y construyendo soluciones separables en las variables independientes  $\beta$  y  $r$ . Sin embargo Blandford & McKee (1976) dieron tres argumentos físicos para obtener un nuevo parámetro de autosimilaridad a este problema (Blandford & McKee, 1976):

1. La densidad en el fluido chocado excede a la del fluido no chocado por un factor  $\sim \Gamma^2$ . Así, si la mayoría de las partículas han sido barridas al radio  $R$ , el grosor efectivo del fluido chocado es aproximadamente  $R/\Gamma^2$
2. Si el factor de Lorentz del fluido chocado es aproximadamente  $\Gamma/\sqrt{2}$  un elemento de fluido cae una distancia aproximadamente igual a  $R/\Gamma^2$  detrás del choque en el tiempo que el radio del choque se duplica.
3. La energía media por partícula en el fluido chocado varía como  $\Gamma^2$ , un factor  $\Gamma$  debido al incremento de energía medido en el marco de referencia en co-movimiento y el otro debido a la transformación de Lorentz al sistema fijo. Si la mayor parte de la energía se encuentra en partículas chocadas recientemente, la energía total es proporcional a  $\Gamma^2 R^3$ , y a partir de esto se sigue que el grosor de la capa de partículas chocadas es aproximadamente  $R/\Gamma^2$

Hidalgo & Mendoza (2005) obtuvieron una derivación del mismo parámetro a partir de argumentos matemáticos que a continuación detallaremos:

La velocidad  $dR/dt$  con que crece el radio  $R$  de la onda de choque está dada por:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Gamma^2}}, \quad (5.2)$$

con  $\Gamma$  el factor de Lorentz de la velocidad del choque  $dR/dt$ .

Suponiendo que la onda de choque es ultrarrelativista, i.e.  $\Gamma \gg 1$ , entonces, a  $O(\Gamma^{-2})$

$$\frac{dR}{dt} = 1 - \frac{1}{2\Gamma^2}. \quad (5.3)$$

Consideramos ahora que

$$\Gamma = At^{-m},$$

para poder integrar la ecuación anterior y obtener así

$$R = t \left( 1 - \frac{1}{2(m+1)\Gamma^2} \right). \quad (5.4)$$

Dado que  $t$  tiene dimensiones de distancia, podemos escribir el cociente adimensional introduciendo una cantidad adimensional  $\phi$ :

$$\frac{R}{r} = 1 - \frac{\phi}{2(m+1)\Gamma^2} \quad (5.5)$$

Aproximando  $r/R$  a  $O(\Gamma^{-2})$  y resolviendo para  $\phi$ , obtenemos:

$$\phi = 2 \left( 1 - \frac{r}{R} \right) (m+1)\Gamma^2 \quad (5.6)$$

Podemos decir entonces que  $\phi$  es nuestro parámetro de autosimilaridad, pues nos permite escribir las funciones hidrodinámicas como el producto de una función adimensional que nos da el perfil de distribución espacial de las cantidades, y otra función, que en general dependerá del tiempo, que nos da la escala y las dimensiones físicas apropiadas de manera análoga a la ecuación (2.3).

Sin embargo hay que notar que cuando  $r = R$  tenemos un valor nulo para  $\phi$ , por lo cual resulta más conveniente utilizar un nuevo parámetro  $\chi$  dado por:

$$\chi = 1 + 2 \left( 1 - \frac{r}{R} \right) (m+1)\Gamma^2, \quad (5.7)$$

cuyo rango debe de ser tomado para  $\chi \geq 1$ , siendo  $\chi = 1$  el valor correspondiente a la onda de choque.

Sustituyendo la ecuación (5.4) en la (5.7), y aproximando a  $O(\Gamma^{-2})$ , obtenemos la forma final del parámetro de autosimilaridad:

$$\chi = [1 + 2(m+1)\Gamma^2] \left( 1 - \frac{r}{l} \right) \quad (5.8)$$

El exponente  $m$  y la constante  $A$  tienen que ser encontrados a partir de las condiciones iniciales específicas del problema. Si es autautosimilaridad del tipo I existe una integral de energía que nos permite conocer ambos parámetros. Si es autosimilaridad del tipo II, las

ecuaciones resultantes deben de pasar por un punto singular para satisfacer las condiciones de frontera, pidiendo esto se determina el exponente  $m$ . Ésto y la solución de las ecuaciones se detalla en el capítulo III.

Es importante notar que este parámetro de autosimilaridad no es tan simple como el encontrado por Sedov (2.2) para una explosión fuerte en los regímenes no relativistas, o como el parámetro propuesto por Eltgroth (5.1), que resulta no ser el correcto a pesar de ser una buena propuesta. El parámetro (5.8) ha sido derivado a partir de ciertas aproximaciones y consideraciones físicas del problema, lo cual nos invita a tratar de hacer un muy buen análisis de los problemas al tratar de encontrar soluciones autosimilares a ellos, y aún así quizás haya que hacer varias propuestas antes de encontrar el correcto.

## Capítulo II

# Colapso gravitacional.

Cuando existe cierta cantidad de masa acumulada, se dan situaciones en las que no hay agentes de presión capaces de vencer a la fuerza de autogravedad que siente dicha acumulación de masa. De esta manera se inicia un colapso gravitacional, el cual puede terminar en un agujero negro (Oppenheimer & Snyder, 1939) o en una singularidad desnuda (Ori & Piran, 1987), dependiendo de los factores físicos iniciales.

En este capítulo se introducen algunos conceptos de relatividad general y se detallan los dos posibles resultados de un colapso gravitacional. Se exponen también algunas condiciones que la materia en el colapso debe de cumplir con el fin de ser considerada plausible y se introduce el concepto de espacio-tiempo autosimilar, el cual ha sido de mucha utilidad en el estudio de formación de singularidades desnudas.

### §6. Teorema de Birkhoff

Consideremos un campo gravitacional esféricamente simétrico. Esta simetría impone condiciones sobre el tensor métrico, el cual deberá tener la misma forma para diferentes puntos localizados a la misma distancia del centro de la distribución de masas. Si usamos coordenadas “esféricas” espaciales  $r, \theta, \varphi$ , podemos escribir el *intervalo*, de la forma más general que preserva simetría esférica, de la siguiente manera (Landau & Lifshitz, 1980; Misner et al., 1980):

$$ds^2 = \mathcal{N}(r, t)dt^2 + \alpha(r, t)drdt + \Lambda(r, t)dr^2 + \varrho(r, t)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (6.1)$$

Como las unidades de longitud y de tiempo han sido escogidas de manera arbitraria, podemos hacer transformaciones que preserven la simetría esférica de la forma  $r \rightarrow f_1(r, t)$ ,  $t \rightarrow f_2(r, t)$ . Así pues, hagamos  $\alpha(r, t) = 0$ ,  $\varrho(r, t) = r^2$ . De esta manera, una circunferencia con centro en el origen de coordenadas tendrá longitud  $2\pi r$ . Para simplificar los cálculos también será conveniente hacer:  $\Lambda(r, t) = e^\lambda$ ,  $\mathcal{N}(r, t) = -e^\nu$ , siendo  $\lambda$  y  $\nu$  funciones de  $r$  y  $t$ . Así hemos llegado a una expresión más simple para el intervalo:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.2)$$

donde el desplazamiento angular

$$d\Omega^2 := \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2.$$

Hasta ahora sólo hemos considerado funciones generales que representen un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Si queremos conocer la forma de las funciones  $\nu$  y  $\lambda$  necesitamos resolver las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (6.3)$$

donde el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  está dado por (3.1), y el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  está definido por:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

con  $R_{\mu\nu}$  y  $R$  el *Tensory* el *Escalar de Ricci* respectivamente.

Sustituyendo la métrica (6.2) en las ecuaciones de Einstein (6.3) se obtiene (Landau & Lifshitz, 1980):

$$8\pi T_1^1 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left( \frac{\partial_r \nu}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (6.5a)$$

$$8\pi T_0^0 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\partial_r \lambda}{r} \right), \quad (6.5b)$$

$$8\pi T_0^1 = -\frac{\partial_t \lambda}{r} e^{-\lambda}. \quad (6.5c)$$

La solución más sencilla a estas ecuaciones se obtiene para puntos fuera de las masas

que generan el campo, donde  $T_{\mu\nu}$  es nulo. Así:

$$\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left( \frac{\partial_r \nu}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (6.6a)$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\partial_r \lambda}{r} \right) = 0, \quad (6.6b)$$

$$\partial_t \lambda = 0. \quad (6.6c)$$

De la tercera ecuación se sigue que, en este caso,  $\lambda$  no depende del tiempo. Por otra parte, la suma de la primera ecuación con la segunda implica que  $\partial_r(\lambda + \nu) = 0$ , por lo que  $\lambda + \nu = f(t)$ .

Dada la forma del intervalo (6.2), aún podemos hacer una transformación de coordenadas  $t \rightarrow f(t)$  que preserve la simetría. Una transformación en particular podría ser equivalente a añadir a  $\nu$  una función arbitraria del tiempo, de tal manera que  $\lambda + \nu = 0$ . Así pues, las integrales de las ecuaciones (6.6) están dadas por:

$$e^{-\lambda} = e^\nu = 1 + \frac{C}{r} \quad (6.7)$$

Hasta ahora hemos resuelto las ecuaciones de Einstein para un punto en el que no hay materia, pero en un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Así, existen 2 posibilidades: *i)* El punto está rodeado por un cascarón esférico de materia, o *ii)* El punto está fuera de una distribución esférica de materia que rodea al origen.

En el primer caso, debemos de tener  $C = 0$ , de otra manera la métrica tendría una singularidad en el origen de coordenadas. Así, dentro de un cascarón esférico de materia no hay campo gravitacional y el espacio tiempo es plano, de manera análoga a lo que ocurre en Gravitación Newtoniana.

Tomando el *límite de campo débil* en el segundo caso, la componente temporal de la métrica  $g_{00} \approx -(1 + 2\phi)$ , donde  $\phi$  representa el potencial Newtoniano. De aquí se sigue que la constante de integración  $C = -2M$  y así obtenemos la expresión final de la métrica.

*Para cualquier distribución de masa con simetría esférica moviéndose únicamente en dirección radial, el intervalo —la métrica—, estará dado por la métrica de Schwarzschild para todos aquellos puntos que se encuentren fuera de la distribución:*

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r_s/r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (6.8)$$

Donde el *radio de Schwarzschild* se define como  $r_s = 2M$ , siendo  $M$  la masa total de la distribución.

## §7. Formación de agujeros negros

En la ecuación (6.8),  $g_{tt} \rightarrow 0$  y  $g_{rr} \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow r_s$ , de tal manera que uno se vería tentado a pensar que la estructura misma del espacio-tiempo no permite que existan cuerpos con radios menores a cierto radio proporcional a la masa total del objeto para evitar esas singularidades, y la respuesta a la pregunta arriba planteada sería sencilla. Sin embargo, el determinante de la métrica (6.8),  $g = -r^4 \sin^2 \theta$  no tiene ninguna singularidad para ningún radio, y se sigue cumpliendo que  $g < 0$ \*. El radio  $r = r_s$  no es una singularidad en el espacio-tiempo, las singularidades en las componentes en la métrica sólo nos dicen que no tenemos un buen sistema de coordenadas cerca de esa región. Haciendo el siguiente cambio de coordenadas,

$$T = \pm t \pm \int \frac{\sqrt{r_s/r}}{1 - r_s/r} dr \quad (7.1a)$$

$$R = t + \int \frac{dr}{(1 - r_s/r) \sqrt{r_s/r}} \quad (7.1b)$$

llegamos a la siguiente expresión para el intervalo, escogiendo el signo positivo:

$$ds^2 = -dT^2 + \frac{dR^2}{[(3/2)r_s](R - T)]^{2/3}} + \left[\frac{3}{2}(R - T)\right]^{4/3} r_s^{2/3} d\Omega^2 \quad (7.2)$$

En esta expresión para la métrica, trayectorias  $r = \text{const}$  corresponden a trayectorias  $R - T = \text{const}'$ :

$$r = \left[\frac{3}{2}(R - T)\right]^{2/3} r_s^{1/3} \quad (7.3)$$

---

\*  $g < 0$  es una condición importante que debe de cumplir cualquier espacio tiempo físico, pues al elegir una coordenada temporaloide y las demás espacialoide, la métrica tendrá una signatura  $(-, +, +, +)$  ó  $(+, -, -, -)$ . En cualquier caso,  $g < 0$

En sistemas de referencia *síncronos* (aquellos en que  $g_{00} = -1$ ), las trayectorias de reposo (en este caso  $R = \text{const}$ ) corresponden a geodésicas, es decir, a trayectorias de caída libre.

De este análisis observamos que no hay nada fundamental que impida que un cuerpo se compactifique más allá de su radio de Schwarzschild, y de hecho, como veremos a continuación, una vez que el objeto se contrae por debajo de éste radio no hay poder conocido que pueda evitar que continúe su colapso hasta formar una singularidad central, o caer hacia ella cuando ya se ha formado.

Consideremos ahora la propagación de rayos de luz,  $ds^2 = 0$ :

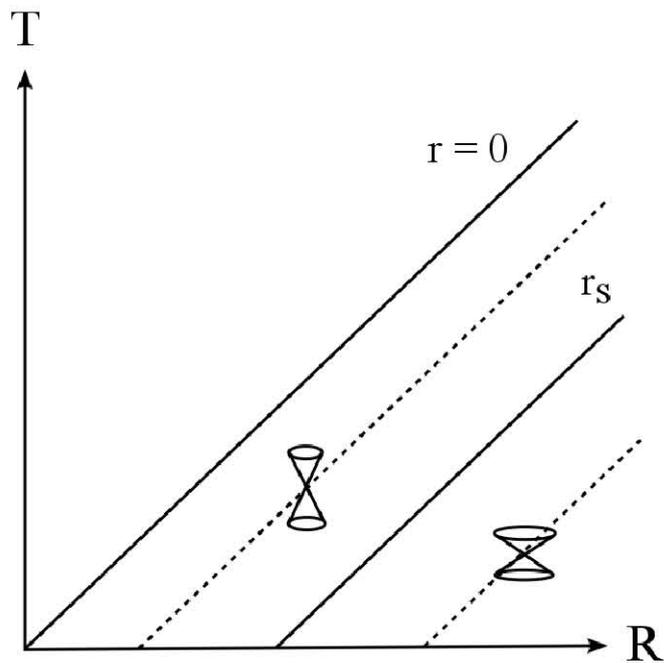
$$\left(\frac{dR}{dT}\right)_{\text{luz}} = \left[\frac{3}{2r_s}(R - T)\right]^{1/3} = \pm\sqrt{r/r_s} \quad (7.4)$$

Notemos que las líneas  $r = \text{const}$  en el plano  $(R, T)$  tienen pendiente 1 para cualquier  $r$ . Cuando  $r > r_s$ ,  $(dR/dT)_{\text{luz}} > 1$ , por lo tanto, hay trayectorias temporaloides, con  $1 < dR/dT < (dR/dT)_{\text{luz}}$  que pueden ir hacia valores mayores de  $r$ . Esto cambia cuando consideramos  $r < r_s$ ; en este caso,  $(dR/dT)_{\text{luz}} < 1$ , y como para cualquier partícula material  $dR/dT < (dR/dT)_{\text{luz}}$ , cualquier trayectoria temporaloide caerá hacia  $r = 0$  en un intervalo de tiempo finito por ninguna razón más que la misma razón por la que el tiempo transcurre sin detenerse: La estructura del espacio-tiempo.

El objeto que hemos descrito se conoce técnica y popularmente como *agujero negro*, pues, después de este análisis, es evidente que al darse un colapso de este tipo, cualquier objeto que cruce el *horizonte de eventos*,  $r = r_s$  estará causalmente desconectado con el exterior, pues cualquier tipo de señal emitida, al viajar manteniéndose dentro de su *cono de luz*, o en su frontera inevitablemente llegará al centro de coordenadas.

## §8. Censura cósmica y colapso autosimilar

Uno de los problemas no resueltos de mayor importancia en astrofísica relativista y gravitación es precisamente conocer el estado final de una estrella que ha entrado en colapso gravitacional que lleva a ésta a contraerse aún más que una estrella de neutrones ¿Cuál será el estado final de un colapso como este, dominado enteramente por la fuerza de gravedad?



**Figura II.1:** En este diagrama se muestra la relación entre las coordenadas de Lemaître y las coordenadas de Schwarzschild. Las trayectorias  $r = \text{const}$  corresponden a trayectorias  $R - T = \text{const}$ . Estas trayectorias se salen del cono de luz cuando  $r$  toma valores menores a  $2M$  y por lo tanto son imposibles. Un observador en reposo con respecto a las coordenadas  $R - T$  inevitablemente alcanzará la singularidad en un tiempo finito. [Imagen proporcionada amablemente por Talía Lezama.]

La conjetura, propuesta por Penrose (1969), de que un colapso gravitacional bajo ciertas suposiciones físicamente razonables debe de terminar en la formación de un agujero negro es conocida como la *censura cósmica*, la cual es comunmente asumida en el estudio de fenómenos físicos cerca de campos gravitacionales intensos. Existen dos versiones de esta conjetura: la versión débil propone que toda singularidad estará rodeada por un horizonte de eventos, por lo que ningún observador fuera de este horizonte podrá recibir información proveniente de la singularidad. La versión fuerte nos dice que ningún observador, sin importar dónde se encuentre, podrá recibir información proveniente de la singularidad.

De manera formal, la conjetura de censura cósmica puede enunciarse como:

*“Un sistema que evoluciona de acuerdo a la teoría de la relatividad general, sujeto a ecuaciones de estado razonables, a partir de condiciones iniciales genéricas no-singulares dadas sobre una hipersuperficie de Cauchy, no desarrolla ninguna singularidad espacio-temporal que sea visible desde infinito.”*

Hay ejemplos que violan esta hipótesis fácilmente. Éstos son aquellos donde se suponen masas negativas, agujeros negros de Kerr en rotación extrema o agujeros cargados en los cuales la carga es más grande que la masa, aunque parecen no cumplir con la hipótesis de estar sujetas a ecuaciones de estado razonables. De hecho, uno de los problemas de esta conjetura es que hay términos no bien definidos en ella, tales como “ecuación de estado razonable” o “condiciones iniciales genéricas” (Harada et al., 2002; Joshi, 2007; Harada, 2009). Para evitar este tipo de situaciones, generalmente se hacen hipótesis adicionales sobre las cualidades que un Tensor de energía-momento físicamente razonable debe de tener al intentar probar la conjetura de Penrose (Townsend, 1997):

- $T_{\mu\nu}$  satisface la *condición de energía dominante* si para todo campo vectorial temporaloide  $v$  dirigido hacia el futuro se satisface que el campo vectorial

$$j(v) := -v^\mu T_\mu^\nu \partial_\nu \quad (8.1)$$

está dirigido hacia el futuro y es no espacialoide, o es cero.

- La *condición de energía débil* se sigue de la anterior:

$$v^\mu v^\nu T_{\mu\nu} \geq 0. \quad (8.2)$$

- La *condición de energía fuerte* es independiente de las anteriores y expresa la positividad de la densidad de energía:

$$v^\mu v^\nu (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \geq 0, \quad (8.3)$$

donde  $T := T^\alpha_\alpha$ . Para un fluido perfecto, la condición anterior equivale a pedir  $e + 3p \geq 0$

Se argumenta que si no se cumpliera la conjetura de censura cósmica, y se pudieran formar singularidades desnudas, el futuro dejaría de ser predecible a partir de datos iniciales dados en una hipersuperficie espacialoide, y es por eso que se ha tenido mucha confianza en su validez. Sin embargo, a pesar de múltiples esfuerzos a lo largo de cuarenta años ha resultado imposible probarla. Es por esto que se han comenzado a hacer esfuerzos en dirección contraria, es decir, encontrar situaciones realistas en las que aparezcan singularidades desnudas.

Aunque probando la existencia de singularidades desnudas todavía se podría salvar la hipótesis de censura cósmica, o al menos dar una versión alternativa, si se lograra probar que éstas no se forman genéricamente como resultado de un colapso gravitacional, o si resultara que aún cuando se formaran estas fueran inestables. Así pues, si las singularidades desnudas han de ser observadas, se requiere que sean un fenómeno genérico y estable.

*Lo que significa tener una singularidad desnuda como producto de un colapso gravitacional es que existan familias de curvas no-espacialoides dirigidas hacia el futuro que terminen en la singularidad en el pasado\**.

Contario a lo que uno esperaría, a lo largo de estos años se han encontrado muchas soluciones a las ecuaciones de Einstein que satisfacen las condiciones de energía y desarrollan singularidades desnudas (Eardley & Smarr, 1979; Christodoulou, 1984; Ori & Piran, 1987, 1990; Joshi & Dwivedi, 1993; Harada et al., 2002). Entonces, si existe alguna singularidad desnuda podría significar la pérdida de la posibilidad de predecir el futuro dentro

---

\*Un agujero negro es precisamente lo contrario. Cualquier curva no-espacialoide dirigida hacia el futuro terminará siempre en el pasado fuera del horizonte de eventos.

de la teoría clásica, aunque por otro lado, podría ser una ventana a la física más allá de la relatividad general.

Al tratar de buscar soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein (6.3), uno se enfrenta con grandes problemas técnicos, debido a que son altamente no-lineales. Sin embargo, haciendo la observación de que la relatividad general no tiene ninguna escala característica propia, podemos buscar soluciones autosimilares a estas, y así simplificar en gran medida el problema, de manera análoga al caso de la explosión fuerte expuesto en el capítulo 1.

Cuando en un espacio-tiempo existe un vector de Killing  $\xi$  homotético,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\beta}, \quad (8.4)$$

se dice que el espacio-tiempo es autosimilar u homotético.

Para un espacio-tiempo esféricamente simétrico, este vector se puede escribir de la siguiente manera:

$$\xi = t\partial_t + r\partial_r, \quad (8.5)$$

y cualquier cantidad adimensional  $Q(r, t) = Q(r/t)$ . De esta manera se define la variable de similaridad como  $x = r/t$  y el intervalo esféricamente simétrico se escribe en términos de esta como:

$$ds^2 = -e^{\nu(x)} dt^2 + e^{\lambda(x)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.6)$$

Para resolver las ecuaciones de Einstein, también necesitamos dar un tensor de energía momento y una ecuación de estado que nos de una relación entre la presión y la densidad de masa-energía. Algunos autores (e.g. Cahill & Taub (1971)) han encontrado que una ecuación de estado compatible con autosimilaridad es la ecuación de estado de Bondi-Wheeler para un gas politrópico (c.f. Tooper (1965)):

$$p = (\kappa - 1)e. \quad (8.7)$$

Al sustituir la ecuación de estado (8.7) en el tensor de energía momento (3.1), y utilizar la métrica autosimilar (8.6) para calcular el tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$  finalmente podemos resolver las ecuaciones de Einstein (6.3) en su forma autosimilar. Como estamos resolviendo en simetría esférica, sólo 3 de estas ecuaciones son relevantes (c.f. ecuaciones

(6.5)). Dado que el problema a resolver tiene 4 variables,  $p \sim e, u, \lambda, \nu$ , utilizamos la ecuación (3.2) proyectada a lo largo de la 4-velocidad  $u^\mu$  para construir la cuarta ecuación faltante. Así tenemos que

$$u^\mu \nabla_\nu T_\mu^\nu = 0. \quad (8.8)$$

De esta manera llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$8\pi f\kappa u_t^2 - 8\pi f e^\nu \kappa + 8\pi f e^\nu = \frac{e^\nu \lambda'}{x e^\lambda} + \frac{e^\nu}{x^2} - \frac{e^\nu}{x^2 e^\lambda}, \quad (8.9a)$$

$$8\pi f\kappa u_t u_r = -\lambda', \quad (8.9b)$$

$$8\pi f\kappa u_r^2 + 8\pi f e^\lambda \kappa - 8\pi f e^\lambda = -\frac{e^\lambda}{x^2} + \frac{\nu'}{x} + x^{-2}, \quad (8.9c)$$

$$\begin{aligned} & 4x^2 f\kappa u^{t'} - 2\kappa f x u^{r'} + \left(2x^2 f\kappa u^{t'} + 2\kappa f x u^{r'}\right) e^\lambda (u^r)^2 + \\ & \left(-\kappa f x \nu' + \kappa \lambda' f x\right) e^\lambda (u^r)^3 + \left(x^2 \nu' f\kappa - x^2 \kappa \lambda' f\right) e^\lambda (u^r)^2 u^t + \\ & -2x^2 u^r u^t \kappa f e^\lambda u^{r'} - 2u^r u^t \kappa f e^\nu x u^{t'} + \left(-2f'x - \kappa \lambda' f x - 4f\kappa - 2\kappa f x \nu'\right) u^r + \\ & \left(4fx + 2x^2 f' + x^2 \kappa \lambda' f + 2x^2 \nu' f\kappa\right) u^t = 0, \end{aligned} \quad (8.9d)$$

que corresponden a las componentes 00, 01, 11 de las ecuaciones de Einstein y a la ecuación (8.8) respectivamente.

Estas ecuaciones son autosimilares únicamente bajo la suposición de que  $e := f(x)/t^2$ , es decir, a medida que el tiempo avanza ( $t \rightarrow 0^-$ ), para  $x = x_0 = \text{const.}$  la densidad de masa-energía crece como  $e \sim t^{-2}$  (Ori & Piran, 1987).

Una vez planteadas las ecuaciones, necesitamos dar condiciones a la frontera razonables. Para obtener funciones regulares en el origen, se debe de cumplir:

$$u^r(0) = \lambda(0) = \nu(0) = 0, \quad (8.10a)$$

$$f(0) = f_0, f'(0) = 0 \quad (8.10b)$$

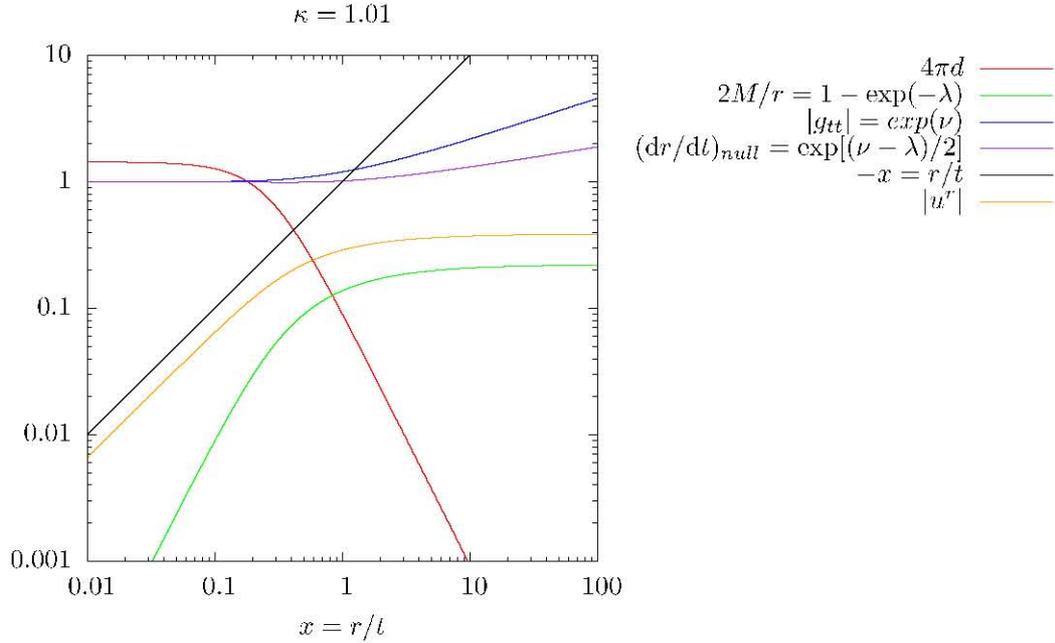
Estas ecuaciones representan una nube infinita de gas cayendo hacia el origen,  $r = x = 0$ . La solución es válida para  $t \leq 0$  ( $x \leq 0$ ), con  $t = 0$  siendo el tiempo de formación de la singularidad en  $r = 0$ . La densidad de energía en el origen  $e(0)$  diverge cuando  $t$  se acerca a cero, pues  $e(0) = f_0/t^2$ , pero para cualquier otro tiempo el punto  $x = 0$  es un punto regular.

La solución está caracterizada por los parámetros  $f_0$  y  $\kappa$ . Una vez escogidos estos parámetros se pueden integrar numéricamente las ecuaciones (8.9). Hay que tener cuidado con los valores que se escogen para  $\kappa$  y para  $f_0$ , pues puede existir un punto sónico  $x_s$ , donde la velocidad del fluido es igual a la velocidad del sonido, para el cuál las soluciones sean singulares y no sea posible integrarlas. Si escogemos una ecuación de estado con  $\kappa > 1.015$ , se formará un horizonte de eventos ( $r_s/r > 1$ ) antes de  $t = 0$ , dando como resultado un agujero negro. Si escogemos una ecuación de estado con  $\kappa = 1$  recuperamos el caso del colapso de una nube de *polvo*, el cual resulta también en la formación de un agujero negro. Por lo tanto, si queremos obtener una singularidad desnuda, debemos escoger una ecuación de estado muy suave, con  $1.0 < \kappa < 1.015$ . La solución para  $\kappa = 1.01$  se muestra en la Figura §8 y fue obtenida primeramente por Ori & Piran (1987).

Podemos calcular el comportamiento de las soluciones cuando  $x \rightarrow 0^-$  a partir de las ecuaciones (8.9). Aproximando a  $O(x^2)$  se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &\approx a^\lambda_2 x^2 = \left[ \frac{8\pi f_0}{3} \right] x^2, \\ \nu(x) &\approx a^\nu_2 x^2 = \left[ 4\pi f_0 \left( \kappa - \frac{2}{3} \right) \right] x^2, \\ f(x) &\approx f_0 - f_2 x^2 = f_0 - \left[ \frac{f_0(\kappa - 1)}{9\kappa} (18\pi f_0 \kappa^3 - 12\pi f_0 \kappa^2 - 9\kappa + 8) \right] x^2, \\ u^r(x) &\approx a^u_1 x = \left[ \frac{2}{3\kappa} \right] x.\end{aligned}$$

Las soluciones describen un colapso casi homogéneo ( $f \approx f_0 - f_2 x^2$ ) y uniforme ( $u^r \approx a^u_1 x$ ). Si hacemos la identificación  $g_{rr} = (1 - r_s/r)^{-1}$ , vemos que el colapso también es casi Newtoniano (i.e.  $r_s/r \ll 1$ ) y por lo tanto no se forma ningún horizonte. Adicionalmente calculamos el *escalar de Kretschmann*  $K$ , con el fin de averiguar en qué puntos del espacio-tiempo se forma una singularidad. Cerca de  $r = 0$ , dicho escalar está dado por (Misner et al., 1980):



**Figura II.2:** Soluciones numéricas a las ecuaciones de Einstein (8.9). En esta Figura se observa que  $2m/r < 1$  para todo valor de  $x$ , por lo que no aparece horizonte, sin embargo la función de densidad  $d(x)$  para  $r = x = 0$  tiene un valor finito, lo cual ocasiona que  $e(r, t) = d(x)/t^2 \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow 0$ , al momento del colapso. Se observa también que una geodésica radial nula siempre tiene una velocidad coordenada  $dr/dt > 0$ . A la derecha de la recta identidad  $-x = r/t$ , el espacio-tiempo está causalmente desconectado de la parte central, pues  $r > t$  por lo cual una modificación en esa región exterior no afectará la estructura autosimilar de la parte interior. Vemos también que la componente temporal de la métrica  $g_{tt} \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , es decir, cuando  $t \rightarrow 0$ , por lo cual las coordenadas no son buenas para extender la solución para tiempos  $t > 0$ .

$$K(r \approx 0) \equiv R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}(r \approx 0) = \frac{12}{t^4}(a^\lambda{}_2 + a^\nu{}_2) + O(r^2). \quad (8.11)$$

Numéricamente se observa que  $K$  diverge para toda  $r$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Con esto concluimos 2 cosas importantes: *i*) existe una singularidad física en  $t = 0$ , y antes de este momento el espacio-tiempo es suave, y *ii*) las coordenadas que estamos utilizando no son buenas si queremos extender el espacio-tiempo a  $t > 0$ , pues aparentemente tenemos una singularidad en todo el espacio a  $t = 0$ . Sumemos a esta observación el hecho de que  $g_{tt} \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , para convencernos de que es necesario hacer un cambio de coordenadas para  $t > 0$ .

Ori & Piran (1987) llevan a cabo tal cambio de coordenadas y muestran que para  $t > 0$  existen geodésicas radiales nulas que salen de la singularidad en  $t = 0$  y logran escapar a infinito\*:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{-g_{tt}}{g_{rr}}} > 0. \quad (8.12)$$

Si en estas regiones sumamente densas y sin *superficies atrapadas* se formara una onda de choque, quizás podría acelerar partículas a velocidades ultrarrelativistas como ningún otro proceso conocido. La fuerza que una onda de choque podría tener en estas regiones de gravedad sumamente intensa podría resultar suficiente para acelerar partículas y convertirlas en rayos cósmicos ultraenergéticos.

Varios autores han mostrado que existen geodésicas radiales nulas salientes de la singularidad y que llegan a infinito en el futuro (Eardley & Smarr, 1979; Christodoulou, 1984; Ori & Piran, 1987, 1990; Joshi & Dwivedi, 1993; Harada et al., 2002; Harada, 2009; Joshi, 2007). Sin embargo, la interrogante permanece: Aún cuando estas singularidades sean en principio observables desde infinito, quizás el corrimiento al rojo sea tan intenso que haga imposible recibir cualquier tipo de señal en la realidad (Deshingkar, 2009), a menos que la fuente tuviera una luminosidad infinita (Ori & Piran, 1987).

De una forma más general el vector homotético  $\xi$  (c.f. ecuación (8.5)) puede escribirse como (Benoit & Coley, 1998):

---

\*Para el caso de un agujero negro de Schwarzschild  $dr/dt = \sqrt{-g_{tt}/g_{rr}} = (1 - 2M/r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 2M$ .

$$\xi^\lambda \partial_\lambda = (\alpha t + \beta) \partial_t + r \partial_r. \quad (8.13)$$

Así, Carter & Henriksen (1989) han encontrado 3 tipos diferentes de autosimilaridad para un espacio-tiempo, en analogía con los 3 casos de autosimilaridad conocidos en hidrodinámica (c.f. Zel'dovich & Raizer (1966a,b)). Para cada uno de ellos, la variable de autosimilaridad  $x$  toma la forma:

$$x = \begin{cases} r e^t, & \alpha = 0 \text{ (exponencial) ,} \\ r/t, & \alpha = 1 \text{ (primer tipo) ,} \\ r (\alpha t)^{-1/\alpha}, & \alpha \neq 0, 1 \text{ (segundo tipo).} \end{cases} \quad (8.14)$$

El caso estudiado en este capítulo corresponde a autosimilaridad del primer tipo, pero no es la única posibilidad para tener autosimilaridad en gravitación. Para un fluido autogravitante debe de existir una relación entre el parámetro de autosimilaridad del fluido y el correspondiente a la geometría del espacio-tiempo.

## Capítulo III

# Soluciones autosimilares en relatividad especial.

Para estudiar ondas de choque cerca de una singularidad desnuda es necesario incorporar la teoría de la relatividad general. Dicho de otra manera, es necesario estudiar la dinámica de los flujos que desarrollan ondas cerca de campos gravitacionales intensos, lo cual exige que se incorpore al estudio el formalismo de la relatividad general.

Existen estudios detallados sobre ondas de choque autosimilares en relatividad especial (Blandford & McKee, 1976; Hidalgo & Mendoza, 2005) y el objetivo de este capítulo es mostrar las soluciones que se han obtenido hasta el momento para luego tratar de hacer una generalización de las mismas para los casos en los que las masas involucradas influyen de manera significativa en la curvatura del espacio-tiempo.

### §9. Explosiones fuertes ultrarrelativistas

Supongamos un gas ultrarrelativista con ecuación de estado dada por la relación (8.7). Para un choque fuerte en el sistema de referencia donde el gas no chocado está en reposo se cumple que  $p_2/n_2 \gg p_1/n_1$ , y las condiciones de salto pueden ser escritas en forma muy simple como (Blandford & McKee, 1976):

$$\frac{e_2}{n_2} = \gamma_2 \frac{e_1 + p_1}{n_1}, \quad (9.1a)$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\kappa\gamma_2 + 1}{\kappa - 1}, \quad (9.1b)$$

$$\Gamma^2 = \frac{(\gamma_2 + 1)[\kappa(\gamma_2 - 1) + 1]^2}{\kappa(2 - \kappa)(\gamma_2 - 1) + 2}, \quad (9.1c)$$

donde  $\Gamma$  y  $\gamma_2$  son el *factor de Lorentz* de la onda de choque, y el del gas chocado respectivamente.

Si se supone un gas ultrarrelativista tal que  $\kappa = 4/3$ , más la condición de que  $\Gamma^2 \gg 1$  podemos escribir las relaciones (9.1) como:

$$p_2 = \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}\Gamma^2(e_1 + p_1), \quad (9.2a)$$

$$n'_2 = 2\Gamma^2 n_1, \quad (9.2b)$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2, \quad (9.2c)$$

donde hemos introducido la densidad del gas chocado  $n'_2 := \gamma_2 n_2$  medida en el sistema de referencia del gas no chocado.

El teorema II de Buckingham (c.f. Sedov (1993)) asegura que existen funciones adimensionales  $f(\chi), g(\chi), h(\chi)$  que cumplen con  $f(1) = g(1) = h(1) = 1$  cuando  $\chi = 1$ , que corresponde al radio de la onda de choque, de tal manera que las variables hidrodinámicas se pueden escribir de la siguiente forma:

$$p_2 = \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}\Gamma^2(e_1 + p_1)f(\chi), \quad (9.3a)$$

$$n'_2 = 2\Gamma^2 n_1 h(\chi), \quad (9.3b)$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2 g(\chi). \quad (9.3c)$$

Para mostrar que las ecuaciones (4.1) pueden ser llevadas a su forma autosimilar, sustituyamos las funciones hidrodinámicas  $p, \gamma, n$  por las expresiones (9.3), y las derivadas  $\partial_t$  y  $\partial_r$  por:

$$\partial_t = -\frac{m}{t}\Gamma^2 \partial_{\Gamma^2} + \left[ \frac{1 + 2(m+1)\Gamma^2}{t} - \frac{(m+1)\chi}{t} \right] \partial_\chi, \quad (9.4a)$$

$$\partial_r = -\frac{1 + 2(m+1)\Gamma^2}{t} \partial_\chi. \quad (9.4b)$$

Con esto, las ecuaciones autosimilares resultantes son:

$$\frac{1}{fg} \frac{df}{d\chi} = \frac{8(m-1) - (m-4)g\chi}{(m+1)(g^2\chi^2 - 8g\chi + 4)}, \quad (9.5a)$$

$$\frac{1}{g^2} \frac{dg}{d\chi} = \frac{(7m-4) - (m+2)g\chi}{(m+1)(g^2\chi^2 - 8g\chi + 4)}, \quad (9.5b)$$

$$\frac{1}{hg} \frac{dh}{d\chi} = \frac{2(9m-8) - 2(5m-6)g\chi + (m-2)g^2\chi^2}{(m+1)(g^2\chi^2 - 8g\chi + 4)(2-g\chi)}. \quad (9.5c)$$

Para encontrar el índice de autosimilaridad  $m$  en este caso, podemos utilizar la integral de energía y dar el siguiente argumento. Si la energía total que se liberó en la explosión es  $E$ , y la energía total contenida en el fluido chocado debe de ser constante, entonces se cumple que:

$$E = \int T_{00} dV = \text{const.}, \quad (9.6)$$

donde  $T_{00} \approx 4p\gamma^2$  a  $O(\gamma^2)$ . Al sustituir  $p$  y  $\gamma$  en términos de las funciones autosimilares (9.2) y  $dr$  en términos de  $d\chi$  obtendremos que para una explosión relativista, si se ha de cumplir la ecuación (9.6),  $\Gamma^2 \sim t^{-3}$ . Por lo tanto, el índice de autosimilaridad deberá ser  $m = 3$ . De aquí se sigue que las soluciones a las ecuaciones (9.5) son:

$$f(\chi) = \chi^{-17/12}, \quad g(\chi) = \chi^{-1}, \quad h(\chi) = \chi^{-7/4}, \quad (9.7a)$$

Conociendo estas soluciones, podemos regresar a las variables  $(r, t)$  y encontrar las soluciones físicas de interés.

## §10. Implosiones fuertes ultrarrelativistas

Hidalgo & Mendoza (2005) han encontrado una solución autosimilar para el problema de una implosión ultrarrelativista esféricamente simétrica proponiendo

$$\Gamma^2 = A(-t)^{-m}, \quad (10.1)$$

donde  $t \leq 0$  y  $t = 0$  representa el momento en el que la onda de choque llega al origen.

Análogamente a la manera como se obtuvo el parámetro (5.8), reemplazando  $t \rightarrow -t$ , se obtiene como parámetro de autosimilaridad para este problema:

$$\eta = \left(1 + \frac{r}{t}\right) [1 + 2(m+1)\Gamma^2]. \quad (10.2)$$

Para este problema la región relevante es  $r > R$ , correspondiente a  $1 \geq \eta \geq -\infty$  en términos de la variable de autosimilaridad  $\eta$ .

Las formas de las funciones autosimilares son idénticas a las funciones (9.3), con las mismas condiciones de frontera:  $f = g = h = 1$  en  $\eta = 1$ . Las derivadas parciales,  $\partial_r$  y  $\partial_t$ , tendrán casi la misma forma que en (9.4). Haciendo la sustitución formal  $t \rightarrow -t$  toman la forma:

$$\partial_t = -\frac{m}{t}\Gamma^2\partial_{\Gamma^2} + \left[\frac{1 + 2(m+1)\Gamma^2}{t} - \frac{(m+1)\chi}{t}\right]\partial_x. \quad (10.3a)$$

$$\partial_r = \frac{1 + 2(m+1)\Gamma^2}{t}\partial_x. \quad (10.3b)$$

De esta manera, las ecuaciones hidrodinámicas (4.1) se reducen a:

$$\frac{1}{fg} \frac{df}{d\eta} = -\frac{8(m-1) - (m-4)g\eta}{(m+1)(g^2\eta^2 - 8g\eta + 4)} \quad (10.4a)$$

$$\frac{1}{g^2} \frac{dg}{d\eta} = \frac{(7m-4) - (m+2)g\eta}{(m+1)(g^2\eta^2 - 8g\eta + 4)} \quad (10.4b)$$

$$\frac{1}{hg} \frac{dh}{d\eta} = \frac{2(9m-8) - 2(5m-6)g\eta + (m-2)g^2\eta^2}{(m+1)(g^2\eta^2 - 8g\eta + 4)(2-g\eta)} \quad (10.4c)$$

En este caso no hay una integral de energía de la cuál podamos obtener el índice de autosimilaridad  $m$ . Este tipo de soluciones autorimilares se denominan *del segundo tipo* y para encontrar el índice de autosimilaridad es necesario resolver las ecuaciones de manera numérica y encontrar el punto crítico  $\eta^*$  por el cual debe de atravesar la solución. En este punto la velocidad del fluido es igual a la velocidad del sonido (Zel'dovich & Raizer, 1966b), de tal manera que las regiones externas a esta superficie no puedan influenciar el movimiento autosimilar del gas y del choque.

En el punto crítico, la ecuación para  $g(\eta)$  en el conjunto de ecuaciones (10.4) debe de pasar por un punto singular ( $g^*, \eta^*$ ) para el cual el numerador y denominador se anulan simultáneamente, es decir,

$$(7m - 4) - (m + 2)g\eta = 0, \quad (10.5)$$

$$(m + 1)(g^2\eta^2 - 8g\eta + 4) = 0. \quad (10.6)$$

El denominador se anula (c.f. ecuación (10.6)) en las hipérbolas

$$g\eta = 4 \pm 2\sqrt{3}. \quad (10.7)$$

Escogiendo el signo negativo para mantener el índice de autosimilaridad positivo, sustituimos éste valor en la ecuación (10.5) y encontramos el índice de autosimilaridad, obteniendo  $m = 12\sqrt{3} - 20 = 0,78461$ . Escogiendo  $m$  de esta manera, también se anulan simultáneamente el numerador y denominador de las ecuaciones para  $f(\eta)$  y  $h(\eta)$  en el punto crítico.

A partir de aquí, las ecuaciones (10.4) deberán ser intergadas numéricamente, pues no tienen solución analítica, y de su solución se podrán conocer los perfiles de las distintas cantidades hidrodinámicas para diferentes tiempos.

El parámetro de autosimilaridad empleado para resolver los problemas de explosión e implosión fuertes y relativistas es prácticamente el mismo, salvo por un signo en la variable  $t$ , y es sustancialmente diferente del empleado en los casos de colapso gravitacional autosimilar discutidos en el capítulo II. Por esto es necesario encontrar una relación entre ambos parámetros al estudiar fluidos autogravitantes cuyas velocidades sean cercanas a la de la luz. Esto nos permitirá conocer la dinámica de ondas de choque que se desarrollen cerca de campos gravitacionales intensos. Podría ser que el parámetro de autosimilaridad  $x := r/t$  no sea relevante desde un punto de vista físico aunque matemáticamente sea correcto, en analogía con el caso del parámetro de autosimilaridad propuesto por Eltgroth (1972), que resultó carente de relevancia física y finalmente fueron Blandford & McKee (1976) quienes obtuvieron un parámetro físicamente relevante para el problema.



## Capítulo IV

# Ondas de choque implosivas en relatividad general.

En este capítulo se presenta un intento por obtener soluciones autosimilares a ondas de choque implosivas generadas alrededor de un espacio-tiempo de Schwarzschild. Debido a que el radio gravitacional hace que el espacio-tiempo sea no autosimilar se propone una modificación natural a este. Con este modelo de juguete se obtienen soluciones autosimilares para ondas de choque implosivas alrededor de un objeto central eyectando masa.

### §11. Planteamiento del problema.

Como vimos en el capítulo II, la métrica de Schwarzschild está dada por la ecuación (6.8). El factor  $\gamma$  de Lorentz del gas se define como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (11.1)$$

donde  $v$  representa la velocidad propia del gas con respecto a un observador en reposo instantáneamente en la misma posición del gas al que se le mide la velocidad. Si suponemos que el gas tiene un movimiento puramente radial, esta velocidad es (Landau & Lifshitz, 1980):

$$v^2 = \frac{dl^2}{d\tau^2} = \frac{g_{rr}}{g_{tt}} \left( \frac{dr^2}{dt^2} \right). \quad (11.2)$$

Si el gas es ultrarrelativista, podemos resolver la ecuación (11.1) para  $v$  y aproximar a  $O(\gamma^{-2})$ , obteniendo:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} \left( \frac{dr}{dt} \right) = 1 - \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (11.3)$$

De la misma manera, la velocidad de la onda de choque está dada por:

$$v_{\text{ch}} = \frac{dL}{d\tau} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} \left( \frac{dR}{dt} \right) = 1 - \frac{1}{2\Gamma^2}. \quad (11.4)$$

Con estas aproximaciones podemos escribir la 4-velocidad del gas como:

$$u_0 = -\gamma(r, t)\sqrt{g_{tt}} \quad , \quad u_1 = -\gamma(r, t) \left( 1 - \frac{1}{2\gamma(r, t)^2} \right) \sqrt{g_{rr}}, \quad (11.5)$$

donde el signo menos en la componente radial  $u_1$  significa que el gas se mueve hacia el origen y en la componente temporal  $u_0$  que se mueve hacia el futuro.

Como el gas es ultrarrelativista,  $p(r, t) = 1/3e(r, t)$  (c.f. ecuación (8.7)), y el tensor de energía momento toma la forma:

$$T_{\mu\nu} = 4pu_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (11.6)$$

Tomando la proyección de la ecuación (3.2) lo largo de la 4-velocidad se obtiene la ecuación de conservación de entropía relativista (Landau & Lifshitz, 1987):

$$u^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (11.7)$$

y proyectando a lo largo de la dirección perpendicular a esta se obtiene la versión relativista de la ecuación de Euler (Landau & Lifshitz, 1987):

$$F_\sigma^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (11.8)$$

donde  $F_\sigma^\nu := u^\nu u_\sigma + \delta_\sigma^\nu$  es el tensor de proyección.

Estas dos ecuaciones junto con la ecuación de estado son suficientes para conocer la presión y la velocidad del gas detrás de la onda de choque dadas las condiciones iniciales y de frontera. Para conocer la densidad es necesaria la ecuación de conservación de número de partículas (ecuación (3.3)):

$$\nabla_{\mu}(n u^{\mu}) = 0. \quad (11.9)$$

En analogía con trabajos anteriores (Blandford & McKee, 1976; Hidalgo & Mendoza, 2005) suponemos que el factor  $\Gamma$  de Lorentz de la onda de choque está dado por la relación (10.1). De esta manera el parámetro de autosimilaridad resulta ser el mismo que se ha obtenido anteriormente,  $\eta$  (c.f. ecuación (10.2)).

Para resolver las ecuaciones (11.7) y (11.8) hay que sustituir en ellas las derivadas  $\partial_r$  y  $\partial_t$  en términos de la variable  $\eta$  de similaridad (c.f. ecuación (10.3)), y las cantidades  $p$ ,  $\gamma$  y  $n$  en términos de sus funciones adimensionales  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$  y  $h(\eta)$  (c.f. ecuación (9.3)). Tomando en cuenta únicamente términos dominantes en  $\Gamma^2$  se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} & \left[ 2 \frac{\eta (m+1)}{g} + 4 \frac{m+1}{g^2} + \left( \frac{4}{g} - 4 \frac{\eta}{g} \right) \frac{M}{t} \right] \frac{dg}{d\eta} + \\ & \left[ 3 \frac{\eta (m+1)}{f} - 6 \frac{m+1}{gf} + \left( \frac{6}{f} - 24 \frac{m+1}{gf} - 6 \frac{\eta}{f} \right) \frac{M}{t} \right] \frac{df}{d\eta} + \\ & -12 \frac{M}{t} - 8 + 5m = 0, \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 4 \frac{\eta}{g} - \frac{4}{g} + 8 \frac{m+1}{g^2} \right) \frac{M}{t} + 4 \frac{m+1}{g^2} - 2 \frac{\eta (m+1)}{g} \right] \frac{dg}{d\eta} + \\ & \left[ -\frac{\eta (m+1)}{f} - 2 \frac{m+1}{gf} + \left( 4 \frac{m+1}{gf} - \frac{-2}{f} + 2 \frac{\eta}{f} \right) \frac{M}{t} \right] \frac{df}{d\eta} + \\ & -3m - 4 \frac{M}{t} = 0. \end{aligned} \quad (11.11)$$

A pesar de que estas ecuaciones se reducen al caso conocido (Hidalgo & Mendoza, 2005; Sari, 2006) cuando  $M \rightarrow 0$ , no son autosimilares, pues la variable  $t$  sigue apareciendo en ellas. Notemos adicionalmente que esta variable siempre aparece dividiendo a la masa  $M$ . Esto nos dice que si la onda de choque ha de ser autosimilar en un espacio-tiempo esféricamente simétrico con una masa central, necesariamente la masa tendrá que variar con el tiempo, de manera que  $M \propto t$ .

Estos resultados no son inesperados, pues el radio gravitacional está definido por  $r_s = 2M$ . Si  $M = \text{const.}$  existe una escala de longitud propia del problema e independiente del tiempo, la cual nos impide hacer un tratamiento autosimilar del mismo (c.f. Zel'dovich & Raizer (1966b)). El hacer  $M \propto t$  implica que el radio de Schwarzschild del objeto central crece o decrece a medida que el tiempo avanza.

## §12. Solución autosimilar

Como una primera aproximación al problema supongamos que la masa  $M = \alpha t$ . De esta manera el intervalo puede escribirse como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\alpha t}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2\alpha t/r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (12.1)$$

donde  $\alpha = \text{const.}$  Como  $M > 0$ , se debe de cumplir que  $\alpha > 0$  para el caso de una explosión, pues  $t > 0$ , y  $\alpha < 0$  para el caso de una implosión para la que se supone  $t < 0$ . Algunos escenarios astrofísicos en los cuales existe eyección de masa por parte de un objeto central son vientos estelares, jets en núcleos activos de galaxias, GRBs y microcuasares (Mendoza, 2008; Rosswog, 2007).

Sustituyendo en las ecuaciones (11.7) - (11.9) la métrica (12.1) y la variable de autosimilaridad (10.2), llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( -8/g + 8\frac{\eta}{g} \right) \alpha^2 + \left( -4\frac{\eta(m+1)}{g} + 8\frac{\eta}{g} - 4/g - 8\frac{m+1}{g^2} \right) \alpha + \right. \\ & \quad \left. -4\frac{m+1}{g^2} - 2\frac{\eta(m+1)}{g} \right] \frac{dg}{d\eta} + \\ & \left[ \left( -12/f + 12\frac{\eta}{f} + 18\frac{m+1}{gf} \right) \alpha^2 + \left( 12\frac{\eta}{f} + 36\frac{m+1}{gf} - 6/f - 6\frac{\eta(m+1)}{f} \right) \alpha + \right. \\ & \quad \left. -3\frac{\eta(m+1)}{f} + 6\frac{m+1}{gf} \right] \frac{df}{d\eta} + \\ & 24\alpha^2 + (24 - 10m)\alpha - 5m + 8 = 0, \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( -8\frac{\eta}{g} + 8/g - 16\frac{m+1}{g^2} \right) \alpha^2 + \left( -16\frac{m+1}{g^2} - 8\frac{\eta}{g} + 4\frac{\eta(m+1)}{g} + 4/g \right) \alpha + \right. \\
& \quad \left. -4\frac{m+1}{g^2} + 2\frac{\eta(m+1)}{g} \right] \frac{dg}{d\eta} + \\
& \left[ \left( 4/f - 8\frac{m+1}{gf} - 4\frac{\eta}{f} \right) \alpha^2 + \left( 2/f - 4\frac{\eta}{f} + 2\frac{\eta(m+1)}{f} \right) \alpha + \right. \\
& \quad \left. \frac{\eta(m+1)}{f} + 2\frac{m+1}{gf} \right] \frac{df}{d\eta} + \\
& 8\alpha^2 + (8+6m)\alpha + 3m = 0,
\end{aligned} \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( -4\frac{\eta}{g} + 4/g \right) \alpha^2 + \left( -4\frac{\eta}{g} + 2\frac{\eta(m+1)}{g} + 4\frac{m+1}{g^2} + 2/g \right) \alpha + \right. \\
& \quad \left. \frac{\eta(m+1)}{g} + 2\frac{m+1}{g^2} \right] \frac{dg}{d\eta} + \\
& \left[ \left( -32\frac{m+1}{gh} + 8/h - 8\frac{\eta}{h} \right) \alpha^2 + \left( 4/h - 8\frac{\eta}{h} - 24\frac{m+1}{gh} + 4\frac{\eta(m+1)}{h} \right) \alpha + \right. \\
& \quad \left. -4\frac{m+1}{gh} + 2\frac{\eta(m+1)}{h} \right] \frac{dh}{d\eta} + \\
& -12\alpha^2 + (6m-12)\alpha + 3m - 4 = 0.
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Estas ecuaciones son autosimilares, pues son ecuaciones diferenciales ordinarias en las que no aparecen las variables  $r$  ni  $t$ . Sólo aparece la variable de autosimilaridad  $\eta$ . El rango de la variable  $\eta$  es  $-\infty < \eta < 1$  y las condiciones de frontera están dadas por  $f(1) = g(1) = h(1) = 1$ , de tal manera que se cumplan las condiciones de salto (9.2). Así la relación entre las variables físicas y las autosimilares está dada por las ecuaciones (9.3).

$$p_2 = \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}\Gamma^2(e_1 + p_1)f(\eta), \tag{12.5a}$$

$$n'_2 = 2\Gamma^2 n_1 h(\eta), \tag{12.5b}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2 g(\eta). \tag{12.5c}$$

Como estamos tratando con un problema de autosimilaridad del segundo tipo, no hay una integral de energía de la cuál podamos obtener el índice de similaridad  $m$ . Éste debe de

obtenerse de la misma manera que se obtuvo en el caso estudiado por Hidalgo & Mendoza (2005) (c.f. Sección §10).

Escribamos el sistema de ecuaciones (12.2) - (12.4) en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ g' \\ h' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (12.6)$$

donde las componentes de la matriz  $A_{ij}$  representan los coeficientes de las derivadas  $f'$ ,  $g'$  y  $h'$  en las ecuaciones (12.2) - (12.4), y las componentes del vector  $c_i$  son los términos independientes de las derivadas en esas ecuaciones. Denotemos por  $\Delta$  al determinante de la matriz  $A$  y por  $\Delta_i$  al determinante que resulta de sustituir la columna  $i$  de la matriz  $A$  por el vector columna  $c$ . En lugar de resolver explícitamente las ecuaciones (12.2) - (12.4) para las derivadas  $f'$ ,  $g'$  y  $h'$  escribiremos su solución en forma simbólica, pues las expresiones que resultan son realmente largas (c.f. Apéndice A para ver los cálculos hechos para esto). Las soluciones en forma simbólica están dadas por:

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{dg}{d\eta} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{dh}{d\eta} = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (12.7)$$

En completa analogía con el ejemplo mostrado en la sección §10, será necesario encontrar el punto singular de las ecuaciones anteriores. En el punto singular  $\eta^*$  debe de cumplirse que:

$$\Delta(\eta^*) = \Delta_1(\eta^*) = \Delta_2(\eta^*) = 0.$$

Esto automáticamente fija  $\Delta_3(\eta^*) = 0$ . Si resolvemos  $\Delta = 0$  para la variable  $\eta g(\eta)$  obtenemos:

$$\eta g = 2 \frac{\left( 4\alpha(m+1) - \alpha g + 2(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 (3 + 6\alpha + 4\alpha^2)} \right) (1 + 2\alpha)}{-4\alpha^2 + 2\alpha(m+1) - 4\alpha + (m+1)}. \quad (12.8)$$

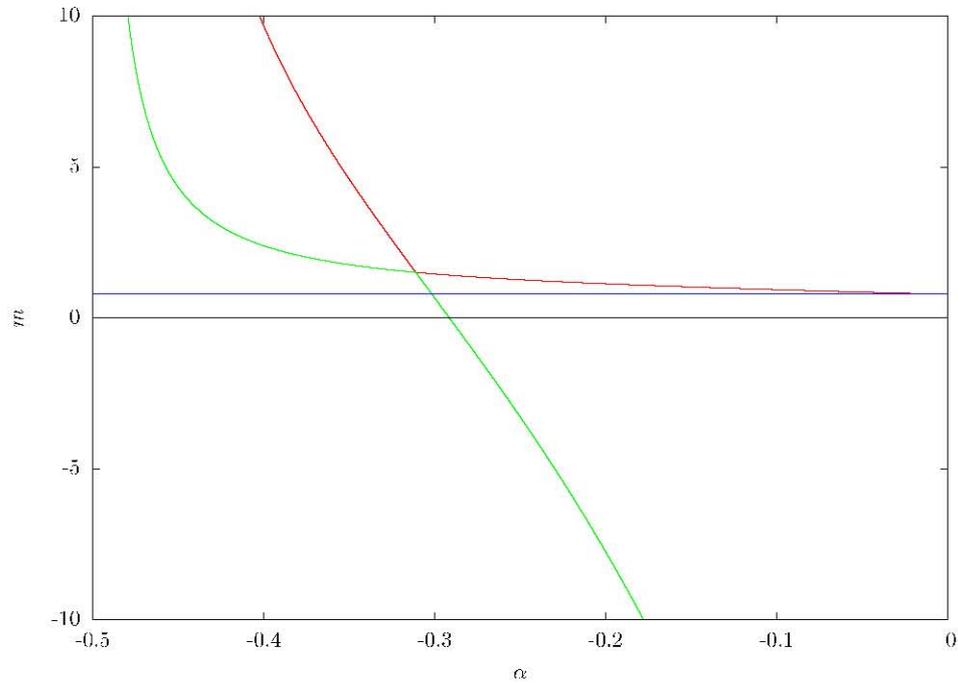
Sin importar que signo se elija, al sustituir este valor en la ecuación  $\Delta_2 = 0$  y resolver para  $m$ , se obtienen dos valores posibles para el índice de autosimilaridad:

$$m_{\pm} = 4 \frac{26 \alpha^3 + 50 \alpha^2 + 30 \alpha + 5 \pm \sqrt{(3 + 6 \alpha + 4 \alpha^2)(3 + 14 \alpha + 14 \alpha^2)^2}}{(3 \alpha - 1)(1 + 2 \alpha)}. \quad (12.9)$$

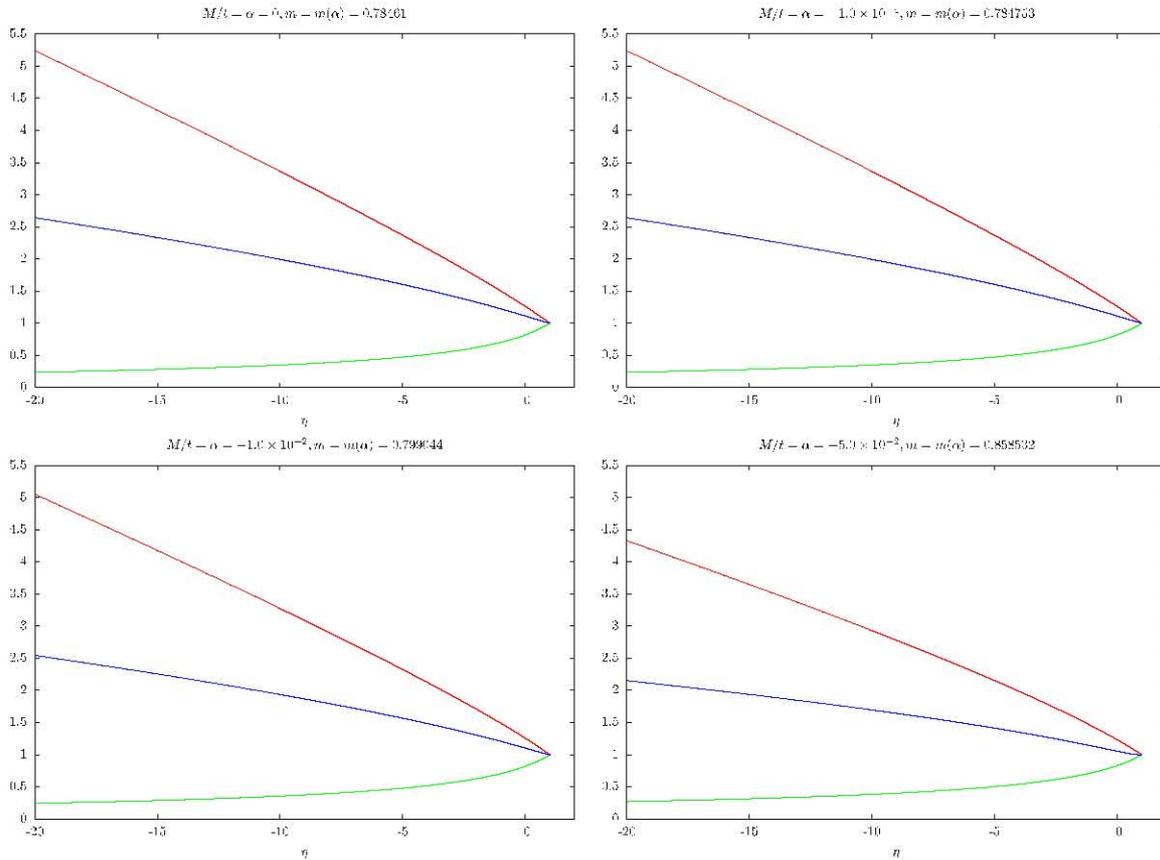
Dado que por hipótesis  $m > 0$ , el signo a elegir dependerá del valor de  $\alpha$ . Para  $\alpha = 0$  se debe de tomar el signo negativo, resultando  $m = 12\sqrt{3} - 20 = 0.78461$  (c.f. sección §10, Hidalgo & Mendoza (2005)). En la Figura §12 se grafican ambas soluciones para el índice de autosimilaridad  $m$  como función de  $\alpha$ . Se muestra que hay un punto  $\alpha_0$  para el cual  $m_+ = m_-$ . El índice de autosimilaridad a la derecha de ese punto, es decir, para  $\alpha > \alpha_0$ , es  $m_-$ , mientras que para  $\alpha < \alpha_0$  se debe de utilizar  $m_+$ . De esta manera se recupera la solución estudiada cuando  $\alpha \rightarrow 0$  y se tiene continuidad en la función  $m(\alpha)$  y en su derivada  $dm/d\alpha$ .

Una vez fijado el valor de  $\alpha$  conocemos el valor de  $m$  y de esta manera podemos resolver numéricamente las ecuaciones (12.2) - (12.4) para las variables  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$  y  $h(\eta)$ . En la Figura §12 se muestran algunas soluciones numéricas para estas funciones utilizando distintos valores de  $\alpha$ .

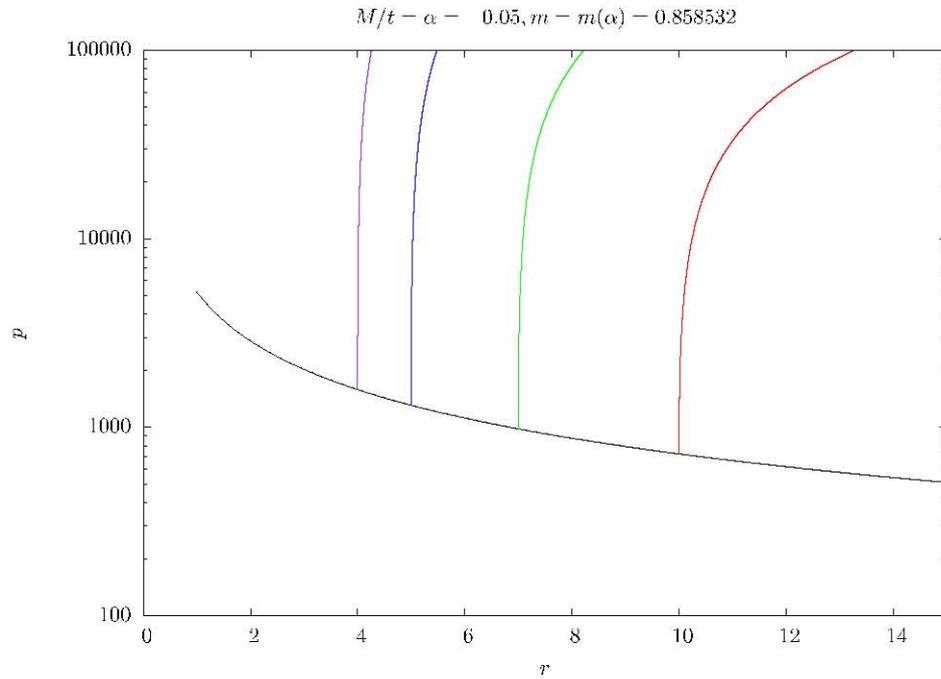
Utilizando  $\alpha = -0.05$  se obtiene  $m = 0.858532$ . Escojamos unidades de distancia y tiempo tales que  $n_1 = 1$  y  $p_1 = 1$ . Supongamos además que la onda de choque se forma en la coordenada radial  $R_0 = 100$  con un salto en la presión inicial  $p_0 = 100$ . Con esto se obtienen las soluciones mostradas en las Figuras §12 - §12 después de sustituir las soluciones de las ecuaciones (12.2) - (12.4) en las relaciones (12.5).



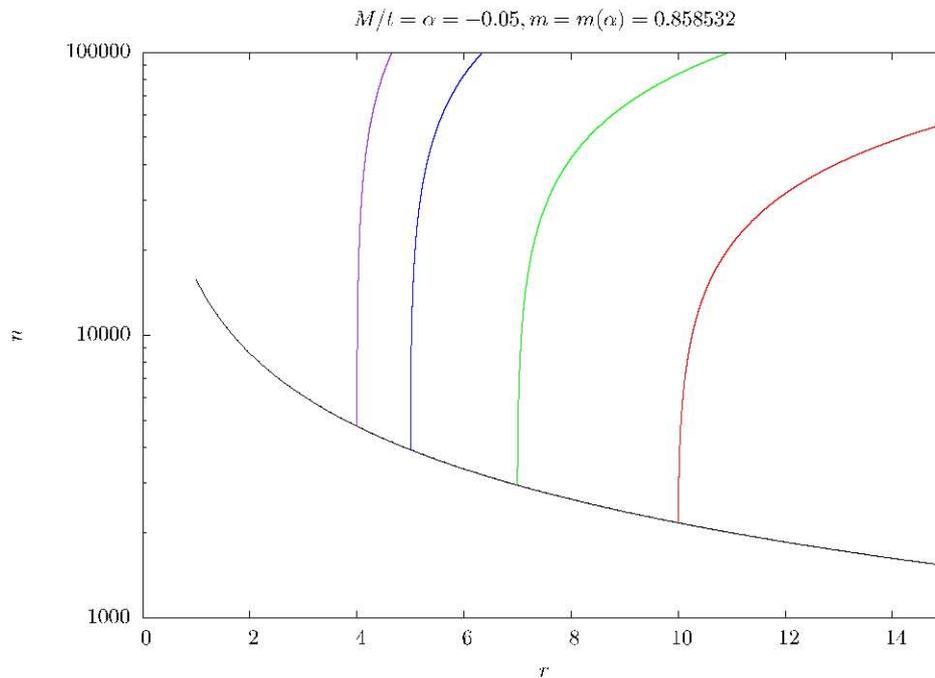
**Figura IV.1:** En esta figura se grafican los índices de autosimilaridad  $m_{\pm}$  como función de la tasa de eyección  $\alpha$  (ecuación (12.9)). Para  $\alpha \rightarrow 0$  se utiliza el índice con signo negativo y la solución converge al caso previamente estudiado (Hidalgo & Mendoza, 2005). Para  $\alpha_0 = 0.311$  se tienen ambos índices iguales,  $m_+ = m_- = m_0 = 1.512$ , y se observa que cada una de las curvas tiene un pico en ese punto. Si seguimos la curva  $m_-$  de derecha a izquierda, será más suave continuar sobre la curva  $m_+$  a partir de  $\alpha_0$ . Se observa que ambos índices tienden a infinito cuando  $\alpha$  tiende a  $-0.5$ . Dado que se trata de un problema de implosión en el cual  $t < 0$ , se debe de cumplir  $\alpha < 0$  para tener una masa  $M > 0$ . Esto significa que la masa central tiene que decrecer con el tiempo, es decir, debe de eyectarse de alguna forma.



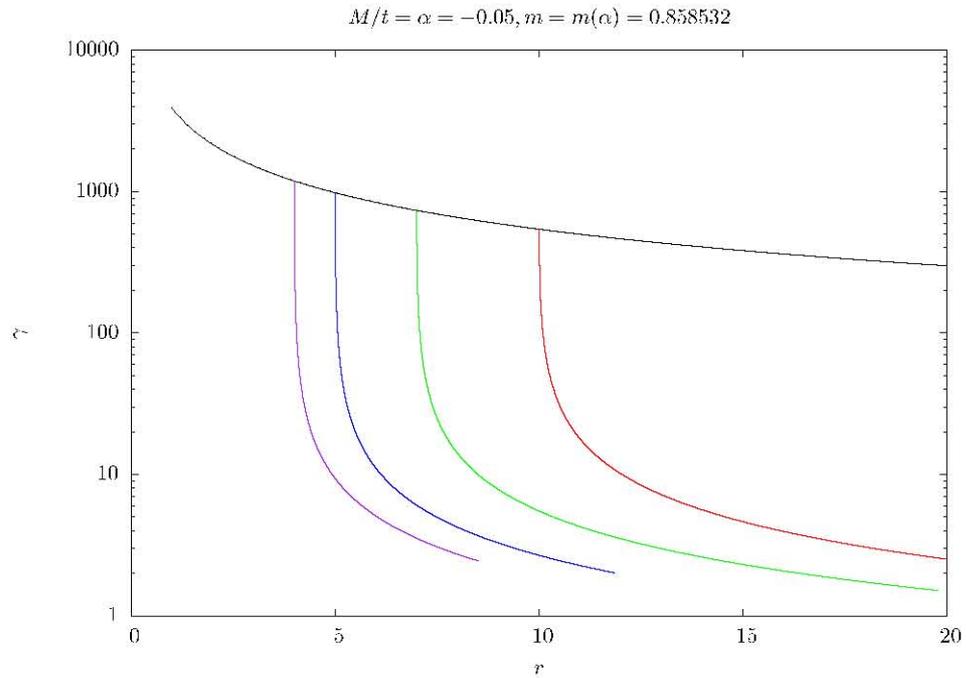
**Figura IV.2:** De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo cada panel muestra las soluciones numéricas a las ecuaciones (12.2) - (12.4) utilizando valores de  $\alpha = 0, 10^{-4}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}$ . La solución que se obtiene cuando  $\alpha = -1 \times 10^{-4}$  es prácticamente indistinguible de la obtenida cuando  $\alpha = 0$ . En los demás casos se observa el mismo comportamiento cualitativo de las funciones  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$  y  $h(\eta)$  que en el caso para el cual  $\alpha = 0$ . En cada panel, de arriba hacia abajo las curvas representan las funciones auto-similares de presión  $f(\eta)$ , factor  $\gamma^2$  de Lorentz  $g(\eta)$  y densidad de número de partículas  $h(\eta)$ .



**Figura IV.3:** En esta figura se muestran los perfiles de presión detrás de una onda de choque fuerte y ultrarrelativista. Se asume que la densidad y la presión del medio son uniformes, con  $n_1 = p_1 = 1$ . Se ha asumido que la onda de choque implosiva se ha formado a  $R_0 = 100$  con un salto inicial en la presión de  $p_0 = 100$ . De izquierda a derecha se muestran los perfiles de presión como función de  $r$  a tiempos 4, 5, 7 y 10 antes de que la onda de choque llegue a  $r = t = 0$ . La presión justo detrás de la onda de choque también se muestra como una curva que crece indefinidamente cuando la onda de choque converge al origen. Para puntos más alejados de la onda de choque la presión parece crecer sin límite, sin embargo esta solución deja de ser válida para esos radios pues las aproximaciones hechas dejan de tener sentido para  $\gamma^2 \lesssim 10$ .



**Figura IV.4:** La gráfica muestra la densidad de número de partículas  $n$  detrás de la onda de choque como función de  $r$ . Las condiciones del medio no chocado y que dieron lugar a la onda de choque se describen en la Figura §12. De izquierda a derecha se muestra la densidad de número de partículas como función de  $r$  a tiempos 4, 5, 7 y 10 antes de que la onda de choque colapse en el origen. La curva envolvente muestra el valor de  $n$  justo detrás de la onda de choque, el cual crece indefinidamente al colapsarse la onda de choque en el origen. Al igual que la presión, la densidad parece crecer monótonamente para puntos más alejados de la onda de choque, sin embargo, como se explica en la Figura §12, ésta solución deja de tener sentido en esa región.



**Figura IV.5:** Factor  $\gamma^2$  de Lorentz detrás de la onda de choque. Las condiciones del medio en el cual ocurre la implosión y se propaga la onda de choque están detalladas en la Figura §12. De izquierda a derecha se muestra el valor del factor  $\gamma^2$  como función de  $r$  a tiempos 4, 5, 7 y 10 antes de que la onda de choque colapse en el origen. La curva envolvente muestra el valor de  $\gamma^2$  del flujo justo detrás de la onda de choque, el cual diverge al acercarse la onda de choque al momento del colapso en  $r = t = 0$ . La solución deja de ser válida para valores suficientemente pequeños de  $\gamma$ , tales que las aproximaciones a  $O(\Gamma^{-2})$  dejan de ser válidas.

### §13. Discusión

Las soluciones autosimilares del segundo tipo tienen 2 propiedades básicas. La primera es la existencia de un punto singular  $\eta^*$  por el cual debe de pasar la solución para un valor específico del índice de autosimilaridad  $m$ . La segunda es que ese punto singular por el cual pasan corresponde a una curva  $r(t)$  en el plano  $r-t$ , la cual es una  $C_-$  característica delimitando la región de influencia hidrodinámica (Landau & Lifshitz, 1987; Hidalgo & Mendoza, 2005). La ecuación de dicha característica está dada por:

$$\sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} \frac{dr_*}{dt} = -\frac{a-\beta}{1-a\beta}, \quad (13.1)$$

donde  $a$  es la velocidad propia del sonido y  $\beta$  es la velocidad del fluido. Así, la energía contenida en la región autosimilar del flujo está dada por:

$$E = 4\pi \int_1^{\eta^*} T^{00} \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}(\eta)]} d\eta \quad (13.2)$$

$$\sim \Gamma^2 |t|^3 \quad (13.3)$$

Como  $\Gamma^2 \sim |t|^{-m}$ ,  $E \sim |t|^{3-m}$ . Así,  $E \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$  a pesar de que  $p$  y  $n$  diverjan al aproximarse la onda de choque al origen. Esto nos dice también que las aproximaciones hechas serán válidas únicamente en los casos para los que el índice de autosimilaridad  $m < 3$ .

En este capítulo hemos logrado obtener una relación entre el parámetro de autosimilaridad hidrodinámico para una onda de choque implosiva ultrarrelativista  $\eta := (1+r/t)[1+2(m+1)\Gamma^2]$  y el parámetro de autosimilaridad geométrico o gravitacional  $x = r/t$ , los cuales a primera vista parecían no tener relación alguna. Esto que por el momento es solamente un modelo de juguete, es un primer paso hacia un estudio detallado sobre ondas de choque desarrollándose en presencia de campos gravitacionales intensos. Este tipo de estudios sin lugar a dudas son relevantes al describir un colapso gravitacional en el que se origine una singularidad desnuda.



# Conclusiones

En el presente trabajo se ha generalizado el estudio de hidrodinámica relativista en explosiones e implosiones fuertes para casos en los cuales los campos gravitacionales cercanos al flujo estudiado son muy intensos y es necesario incluir el formalismo de la relatividad general. Para esto se ha estudiado el colapso gravitacional y cómo este puede tener como consecuencia la formación de singularidades desnudas y de esta manera liberar energía que pueda ser medida por un observador externo.

Con esta motivación, y a partir de los fenómenos autosimilares conocidos en hidrodinámica relativista fue posible desarrollar un espacio tiempo de juguete que fuera autosimilar en el cual se supuso la existencia de una onda de choque implosiva a la manera de Hidalgo & Mendoza (2005) y se resolvieron numéricamente las ecuaciones obtenidas. Así, se obtuvieron resultados cualitativamente no muy diferentes a los obtenidos en trabajos anteriores (Hidalgo & Mendoza, 2005; Sari, 2006).

Este tipo de estudios son relevantes en astrofísica para describir los procesos más energéticos del universo, tales como los destellos de rayos gamma, los cuales a pesar de ser bien conocidos observacionalmente no dejan de ser una interrogante mayor astrofísicamente y es necesario proponer nuevas hipótesis. Otra aplicación de interés para este tipo de estudios se encuentra en el campo de los rayos cósmicos. Si una onda de choque tuviera lugar en las vecindades de una singularidad desnuda, esta podría ser sumamente fuerte y acelerar partículas a velocidades ultrarrelativistas, dando una explicación a la existencia de rayos cósmicos ultraenergéticos.

El modelo que en el presente trabajo se desarrolló no deja de ser un modelo de juguete, sin embargo nos ha permitido arrojar algo de luz en el campo de la astrofísica relativista sujeta a fuertes campos gravitacionales y de qué manera éstos influyen en la hidrodinámica de la materia que los rodea.



# Apéndice A

## Códigos utilizados.

En este apéndice se adjuntan los programas escritos en Maple que se utilizaron para resolver el problema de una onda de choque fuerte y ultrarrelativista desarrollándose en un espacio-tiempo autosimilar expuesto en el capítulo IV.

<pre> juanmeloza@gmail.com          2010 Perfect Fluid Around Spherically Symmetric Concentration of Mass. En este programa se obtiene la 4-divergencia del tensor energía momento y la 4-divergencia del número de partículas.  &gt; restart: with(tensor): assume( alpha:=real, r:=real, r&gt;2*alpha*t, t:=real, gamma(r,t):=real, gamma(r,t)&gt;0, theta:=real, phi:=real, u(r,t):=real, u(r,t)&gt;0 );  [Coordinates and Metric] &gt; coord := [t, r, theta, phi]: &gt; g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4): g_compts[1,1] := -(1 - 2*alpha*t/r): g_compts[2,2] := 1/(1 - 2*alpha*t/r) g_compts[3,3] := (r)^2: g_compts[4,4] := (r)^2*sin(theta)^2: g := create([-1,-1], eval(g_compts)):  &gt; Inverse Metric: ginv:=invert(g,'deta'): &gt; Christoffel Symbols: Dg:=differential(g,coord): D2g:=d2metric(Dg, coord): CF1:=Christoffel1(D2g): CF2:=Christoffel2(ginv,CF1): displayGR(Christoffel1,CF1): displayGR(Christoffel2,CF2):  &gt; Riemann Tensor: RNdwn := Riemann(ginv, D2g, CF1): displayGR(Riemann, RNdwn):  &gt; Raise Riemann indices: RNUp := raise(ginv, RNdwn, 1,2,3,4): displayGR(Riemann, RNUp):  &gt; Kretschmann Scalar: RNdwnContract := prod(RNdwn, RNUp, [1,1],[2,2],[3,3],[4,4]): Kscalar := RNdwnContract[compts]: </pre>	<pre> &gt; Ricci Tensor: RiCT := Ricci(ginv, RNdwn): displayGR(Ricci, RiCT):  &gt; Ricci Scalar: Rs:=RicciScalar(ginv, RiCT): displayGR(RicciScalar, Rs):  &gt; Einstein Tensor: Einst := Einstein(g, RiCT, Rs): displayGR(Einstein, Einst):  &gt; Metric Components: g00 := g[compts][1,1]: g11 := g[compts][2,2]: g01 := g[compts][1,2]: g22 := g[compts][3,3]: g33 := g[compts][4,4]:  &gt; Equation of State #set a = 1 for the case of an explosion, a = -1 for the case of an implosion: a := -1: ##### P = k*rho: P := (kappa-1)*a(r,t): rho := a(r,t): u_0 := - gamma(r,t) * (-g00)^(1/2): u_1 := a * gamma(r,t) * (g11)^(1/2) * (1 - 1/(gamma(r,t))^2)^(1/2): kappa := 4/3: p = P:  &gt; Components of the 2-covariant Energy-Momentum Tensor: T00 := (P+ rho) * u_0 * u_0 + P * g00: T11 := (P+ rho) * u_1 * u_1 + P * g11: T22 := P*g22: T33 := P*g33:  T01 := (P+ rho) * u_0 * u_1: T02 := 0: T03 := 0:  T12 := 0: T13 := 0:  T23 := 0: </pre>
<pre> &gt; Create the Energy-Momentum Tensor: Tm_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4): Tm_compts[1,1] := T00: Tm_compts[2,2] := T11: Tm_compts[3,3] := T22: Tm_compts[4,4] := T33: Tm_compts[1,2] := T01: Tm := create([-1,-1], eval(Tm_compts)): simplify(get_compts(Tm)):  [4-velocity, index down (v) and index up (V): &gt; v := create([-1], array([ u_0, u_1, 0, 0 ])): V := raise(ginv, v, 1):  Raise 2nd index of the En-Mom Tensor: &gt; Tm1 := raise(ginv, Tm, 2):  &gt; Covariant Derivative: Tm1k := cov_diff(Tm1, coord, CF2):  [Contract indices 2 and 3 to obtain the divergence: TmNn] &gt; TmNn := contract(Tm1k, [2,3]):  [Create Projection Tensor, orthogonal to 4-Velocity: &gt; #U_n * U_nV: Vv := simplify( prod(V,v), power, radical, symbolic):  #Kronacker Delta: dNn := simplify( raise(ginv, g, 1), power, radical, symbolic):  #Projection tensor, PmN = U_n * U_n + delta Nn: PmN := Tin_con(dNn, Vv):  #Check that it works: prod(V, PmN, [1,1]): simplify(% , power, radical, symbolic):  [Contract div(TmV) with 4-velocity &gt; VdT := simplify( prod(TmNn, V, [1,1]), power, symbolic): get_compts(N):  [Contract div(TmV) with normal to 4-velocity: &gt; PdT := simplify( prod(TmNn, PmN, [1,1]), power, symbolic): get_compts(N): </pre>	<pre> [Finally, the equations to solve] &gt; energy := VdT[compts] = 0: leutra := PdT[compts][2] = 0:  [Vamos a encontrar ahora la ecuación de continuidad] &gt; Nform := create([-1], array([ u_0 * n(r,t), u_1 * n(r,t), 0, 0 ])): Nvac := raise(ginv, Nform, 1): covDiffNvac := cov_diff(Nvac, coord, CF2): covDiffNvac := contract(covDiffNvac, [1,2]): get_compts(N): simplify(N): continuity := % = 0: get_compts(Nvac):  ] EOF </pre>

En este programa se escriben las ecuaciones de conservación de energía-momento y de número de partículas en forma autoabular.

```

> restart:
assume(
  N::real, N>0,
  r::real, r>2*N,
  t::real,
  gamma(r,t)::real, gamma(r,t)>0,
  chiata::real,
  phi::real,
  n(r,t)::real, n(r,t)>0
):
> Y := y(r,t):
P := p(r,t):
N := n(r,t):
Dnp := diff(p(r,t),r):
Dtp := diff(p(r,t),t):
Drgamma := diff(gamma(r,t),r):
Dtgamma := diff(gamma(r,t),t):
Dry := diff(y(r,t),r):
Dty := diff(y(r,t),t):
Drn := diff(n(r,t),r):
Dtn := diff(n(r,t),t):
> A := 1:
#Implosión:#####
a := -1:
#Explosión
fa := 1:
#####
Gn := 2 * (m+1) * G:
r_ata := ( 1 - 1/Gn * ( A * eta + (1-A)*(1/2) ) ) * a * t:
p_ata := 2/3 * m * G * f(eta):
y_ata := G/2 * p(ata):
n_ata := 2 * m * G * h(ata):
Dnp_ata := - 1/a/t * ( 1 + A*Gn)/A * diff(p_ata,eta) :
Dry_ata := - 1/a/t * ( 1 + A*Gn)/A * diff(y_ata,eta) :
Dtn_ata := - 1/a/t * ( 1 + A*Gn)/A * diff(n_ata,eta) :
Dtp_ata := 1/t * ( - m * G * diff(p_ata,G) + ( 1/A - 1 - (m+1) ) * eta

```

```

+ (Gn + 1/A)/A + (1-A)/A * ( 2/A/A + 2/A * (m+1) - m ) ) * diff(n_ata,
eta) ) :
Dty_ata := 1/t * ( - m * G * diff(y_ata,G) + ( 1/A - 1 - (m+1) ) * eta
+ (Gn + 1/A)/A + (1-A)/A * ( 2/A/A + 2/A * (m+1) - m ) ) * diff(y_ata,
eta) ) :
Dtn_ata := 1/t * ( - m * G * diff(n_ata,G) + ( 1/A - 1 - (m+1) ) * eta
+ (Gn + 1/A)/A + (1-A)/A * ( 2/A/A + 2/A * (m+1) - m ) ) * diff(n_ata,
eta) ) :

```

```

Df := diff(f(eta),eta):
Dg := diff(g(eta),eta):
Dh := diff(h(eta),eta):

```

```

> #Aquí se escriben las ecuaciones que salen de ImplosiveCaronca#endozo
energy := 1/3*( -8*a(r,t)*A2-3*a3*(diff(a(r,t),r)))+4*gamma(r,
t)*a3*a(r,t)*diff(gamma(r,t),r)-4*gamma(r,t)*a2*a1*a(r,
t)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)+4*a1*a1*a(r,t)*A2-1*A(1/2)*A2*a(r,
t)*diff(gamma(r,t),r)-3*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)+a3*(diff(a(r,t),
t))*gamma(r,t)+6*gamma(r,t)*A2*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2))*diff(a(r,t),
t))*a1*a1*a(r,t)*A2-1*A(1/2)+a3*(diff(gamma(r,t),
t))*a2*a2*a(r,t)+16*gamma(r,t)*a(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))-12*a2*a1*a(r,t)*diff(a(r,t),r)-12*a2*a1*a(r,t)*diff(a(r,t),
r))+12*gamma(r,t)*A2*(diff(a(r,t),r))*a1*a1*a2+a2+3*gamma(r,
t)*A2*a3*(diff(a(r,t),r))-2*a2*a2*a1*a(r,t)*A2*gamma(r,
t)*A2*a2*a(r,t)+16*gamma(r,t)*a(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))*a1*a1*a2+a2+2*gamma(r,t)*A2*a1*a2*a(r,t)-16*gamma(r,
t)*A2*a(r,t)*diff(gamma(r,t),r))*a1*a1*a2+28*a1*a(r,t),
t)-12*gamma(r,t)*A2*a2*(diff(a(r,t),r))*a1*a1*a2+28*gamma(r,
t)*A2*a1*a1*a(r,t))/(r*(3/2)*(r-2*a1*a(r,t)*A(1/2))*gamma(r,
t)*A2-1*A(1/2)) = 0:

```

```

Isotra := 1/3*gamma(r,t)*a1*a1*a(r,t)*A2+1*a3*(diff(a(r,t),
t))-4*gamma(r,t)*a(r,t)*diff(gamma(r,t),r)+16*gamma(r,t)*A2*a(r,
t)*A2*a1*a(r,t)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*diff(a(r,t),r))*gamma(r,
t)+a3+4*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*a(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))+a3-2*a2*(diff(a(r,t),r))*a1*a1*a(r,t)*a1*a1*a(r,t),
t)*diff(gamma(r,t),r)+a2+2*gamma(r,t)*A2*a1*a1*(diff(a(r,t),
t))*a2-8*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*a1*a2*a(r,t)*gamma(r,
t)-4*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*diff(a(r,t),r))*gamma(r,
t)+2*a1*a1*a(r,t)+4*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*diff(a(r,t),r))*gamma(r,
t)+a1*a1*a2+2-16*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*a(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))+a1*a1*a2+16*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*a(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))*a1*a1*a2+4*(gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*a1*a1*a(r,t)*gamma(r,
t)+a(r,t)*A2*(diff(a(r,t),r))*a3)/r*(gamma(r,
t)*A2-1*A(1/2))*(-r-2*a1*a(r,t)*A2) = 0:

```

```

continuity := -( -r*(3/2)*A(1/2)*diff(n(r,t),r)-2*a2*a(r,
t)*A(1/2)*A(1/2)+2*a1*a1*a(r,t)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*diff(gamma(r,

```

```

t),t))*n(r,t)+2*a1*a1*a(r,t)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*gamma(r,
t)*diff(n(r,t),t))-a1*a1*a(r,t)*n(r,t)*a3*(3/2)*gamma(r,
t)*A2-1*A(1/2)+A(5/2)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*diff(gamma(r,t),r))*n(r,
t)-r*(5/2)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*gamma(r,t)*diff(n(r,t),
t))-r*(5/2)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*a1*a1*a2*a1*a2*n(r,
t)*A(1/2)*gamma(r,t)*A2-1*a1*a1*a(r,t)*diff(gamma(r,t),
t)+2*a2+4*a1*a1*a(r,t)*A(1/2)*diff(n(r,t),
r))-4*a2*a1*a1*a2*(r,t)*A(1/2)*diff(n(r,t),
r))-4*a2*a1*a1*a2*(r,t)*A(1/2)*diff(n(r,t),r))*gamma(r,
t)*A2-6*a2*a1*a1*a2*n(r,t)*A(1/2)+2*a2*a2*n(r,t)*A(1/2)*gamma(r,
t)*A2+4*a3*(r,t)*A(1/2)*diff(n(r,t),r))*gamma(r,
t)*A2+4*a2*a1*a1*a2*(r,t)*A(1/2)*diff(n(r,t),r))*gamma(r,
t)*A2-4*a1*a1*a1*a2*(r,t)*A(1/2)*n(r,t)*gamma(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))+4*a2*a1*a1*a3*(r,t)*n(r,t)*gamma(r,t)*diff(gamma(r,t),
r))+4*a3*(r,t)*A(1/2)*n(r,t)*gamma(r,t)*diff(gamma(r,t),
r)))/(r*(r-2*a1*a(r,t)*A(3/2))+a3*(3/2)*gamma(r,t)*A2-1*A(1/2)*A(1/2)) = 0:

```

> energy:

alpha = 0 en Energy:

```

> #Ponemos energy en términos de y(r,t) y p(r,t):
subs( gamma(r,t) = sqrt(Y), energy):
subs( a(r,t) = 3*p(r,t), %):
subs( alpha = 0, %):

```

```

#Multiplicamos por los over-all factors:
expand(% * r * sqrt(Y-1) * Y * t):
factor(%):

```

```

#Aproximamos la raíz:
subs( sqrt(Y-1) = sqrt(Y) * (1 - 1/2/Y), %):
expand(%):
factor(%):

```

```

#Sustituimos las derivadas:
subs( Dry = Dry_ata, %):
subs( Dty = Dty_ata, %):
subs( Drp = Drp_ata, %):
subs( Dtp = Dtp_ata, %):

```

```

#Sustituimos las funciones:
subs( Y = y_ata, %):
subs( P = p_ata, %):
subs( r = r_ata, %):

```

```

subs(alpha = 0, %):

```

```

expand(%):
collect(%,%):
expand(%/G/G/G):
subs(G = infinity, %):
#subs(infinity = 0, %):

```

E1N0 := %:

> E1N0:

```

#Quitar dependencias:
subs(Df = f1,%):
subs(Dg = g1,%):
subs(f(eta) = f, g(eta) = g, %):

```

```

#Simplificar:
expand(%/g/g/f/t/p1):
simplify(%), power):
collect(%,%):
collect(%,%):
collect(%,%):

```

M = 0 En Energy:

```

> #Ponemos energy en términos de y(r,t) y p(r,t):
subs( gamma(r,t) = sqrt(Y), energy):
subs( a(r,t) = 3*p(r,t), %):

```

```

#Multiplicamos por los over-all factors:
expand(% * (r)*A(3/2) * (r-2*a1*a(r,t)*A(3/2) * sqrt(Y-1) ):
factor(%):

```

```

#Aproximamos la raíz:
subs( sqrt(Y-1) = sqrt(Y) * (1 - 1/2/Y), %):
expand(%):

```

```

#Sustituimos las derivadas:
subs( Dry = Dry_ata, %):
subs( Dty = Dty_ata, %):
subs( Drp = Drp_ata, %):
subs( Dtp = Dtp_ata, %):

```

```

#Sustituimos las funciones:
subs( Y = y_ata, %):
subs( P = p_ata, %):
subs( r = r_ata, %):

```

```

expand(%):

```

<pre> collect(%G): expand( % /G/G/G): subs(G = infinity ,%): subs(infinity = 0,%):  E1 := %: subs(alpha = 0,%): &gt; E1:  #Quitar dependencias: subs(Df = f1,%): subs(Dg = g1,%): subs(f(eta) = f, g(eta) = g , %):  #Simplificar: expand(%*6/t/t /p1/g/g/f): simplify(%power): collect(% ,alpha): collect(% ,f1): collect(% ,g1):  #Con alpha = 1: subs(alpha = 1, %):  #Checar que converge a JC subs(alpha = 0,%):  FIN1 := %: ENERGY:  &gt; laotra:  M = 0 en laotra: &gt; #Ponemos laotra en términos de y(r,t) y p(r,t): subs( gamma(r,t) = sqrt(Y).laotra): subs( a(r,t) = 3*p(r,t),%):  #Multiplicamos por los over-all factors: expand(sqrt(Y)*sqrt(Y-1) * (-r + 2*alpha*t) * (r - 2*alpha*t) * r * %): factor(%):  #Aproximamos la raíz: </pre>	<pre> subs( sqrt(Y - 1) = sqrt(Y) * (1 - 1/2/Y), %): expand(%):  #Sustituimos las derivadas: subs( Dry = Dry_eta , %): subs( Dty = Dty_eta , %): subs( Drp = Drp_eta , %): subs( Dtp = Dtp_eta , %):  #Sustituimos las funciones: subs( Y = y_eta , % ): subs( P = p_eta , % ): subs( r = r_eta , % ):  subs(alpha = 0, %): expand(%): collect(% ,G): expand( % /G/G/G): subs(G = infinity ,%): subs(infinity = 0,%):  E2M0 := %: &gt; E2M0:  #Quitar dependencias: subs(Df = f1,%): subs(Dg = g1,%): subs(f(eta) = f, g(eta) = g , %):  #Quitar Over-all-factors expand(% * 6 /p1/g/g/f/t/t):  #Simplificar: simplify(%power): collect(% ,f0): collect(% ,f1): collect(% ,g1):  SI M= 0: &gt; #Ponemos laotra en términos de y(r,t) y p(r,t): subs( gamma(r,t) = sqrt(Y).laotra): subs( a(r,t) = 3*p(r,t),%):  #Multiplicamos por los over-all factors: expand(sqrt(Y)*sqrt(Y-1) * (-r + 2*alpha*t) * (r - 2*alpha*t) * r * %): factor(%): </pre>
<pre> #Aproximamos la raíz: subs( sqrt(Y - 1) = sqrt(Y) * (1 - 1/2/Y), %): expand(%):  #Sustituimos las derivadas: subs( Dry = Dry_eta , %): subs( Dty = Dty_eta , %): subs( Drp = Drp_eta , %): subs( Dtp = Dtp_eta , %):  #Sustituimos las funciones: subs( Y = y_eta , % ): subs( P = p_eta , % ): subs( r = r_eta , % ):  expand(%): collect(% ,G): expand( % /G/G/G): subs(G = infinity ,%): subs(infinity = 0,%):  E2 := %: &gt; E2:  #Quitar dependencias: subs(Df = f1,%): subs(Dg = g1,%): subs(f(eta) = f, g(eta) = g , %):  #Quitar Over-all-factors expand(% * 6 /t/t/p1/g/g/f):  #Simplificar: simplify(%power): collect(% ,alpha): collect(% ,f1): collect(% ,g1): #Checar que converge FIN2 := %: subs(alpha = 0, %): LAOTRA: </pre>	<pre> #alpha = 1 subs(alpha = 1,%):  Continuity: &gt; #Ponemos continuity en términos de y(r,t) y p(r,t): continuity: subs( gamma(r,t) = sqrt(Y),%): subs( a(r,t) = 3*p(r,t),%):  #Multiplicamos por los over-all factors: expand( sqrt(Y-1) * (-r + 2*alpha*t)^(3/2) * r^(3/2) * %): factor(%):  #Aproximamos la raíz: subs( sqrt(Y - 1) = sqrt(Y) * (1 - 1/2/Y), %): expand(%):  #Sustituimos las derivadas: subs( Dry = Dry_eta , %): subs( Dty = Dty_eta , %): subs( Drp = Drp_eta , %): subs( Dtp = Dtp_eta , %): subs( Dtn = Dtn_eta , %): subs( Dtn = Dtn_eta , %):  #Sustituimos las funciones: subs( Y = y_eta , % ): subs( P = p_eta , % ): subs( N = n_eta , % ): subs( r = r_eta , % ):  #Colectar G's para despreciar las de menor orden: expand(%): collect(% ,G): expand( % /G/G): subs(G = infinity ,%): subs(infinity = 0,%):  E3 := %: subs(alpha = 0, %): &gt; E3:  #Quitar dependencias: subs(Df = f1,%): </pre>

```

subs(Dg = g1,X):
subs(Dh = h1,X):
subs(f(eta) = f, g(eta) = g, h(eta) = h, X):

#Quitar Over-all-factors
expand(X = 2 /t/(n1/g/h):

#Simplificar:
simplify(X,power):
collect(X,alpha):
collect(X,f1):
collect(X,g1):
collect(X,h1):

#Checar que converge
#subs(alpha = 0, X):

alpha = 1
#subs(alpha = 1,X):
FMS := X:
CONTINUITY:
EOF

```

```

g-128*a1p4a4g-32*a1p4a4g2eta+etaA2m2gA2+64*a1p4a2g2eta-8*eta
m2g-4*etaA2g2a1p4a2-16*a1p4eta-32*a1p4a3g2eta-4*a1p4a2g2
448*a1p4a2g-96*a1p4a2g2eta-128*a1p4a4geta-16*a1p4a3etaA2g2+16*a1
ha4a2g2etaA2-2*etaA2g2eta-8*a-4*etaA2g2a1p4a-96*a1p4a2g-192*a1p4a
3g2eta-56*a1p4a-16*a1p4a2g2eta-224*a1p4a2-4*a1p4a2g2eta-48*a1p4a
ataA2g-32*a1p4a2g-16*a1p4a2g-16*a1p4a2g-112*a1p4a2g-56*a1p4a2g-224*a1p4
A2m2+4*g2a1p4a2eta-16*g2a1p4a2eta-4*a1p4a2eta-64*a1p4a2eta-64*a1p4a
taA2g2etaA2g2-128*a1p4a4g-192*a1p4a3g2eta-352*a1p4a3m2+384*a1p4a4m
92*a1p4a4m2+704*a1p4a3m+16*a1p4a3g2eta-128*a1p4a3m2eta-4*a1p4a3m2eta-4*a
a2m2g2a1p4a-16*etaA2m2a1p4a2-64*a1p4a3m2eta-32*a1p4a4
m2eta-96*a1p4a2m2eta-16*a1p4a3g2etaA2m+4*a1p4a2m2etaA2g
2-16*a1p4a4g2+16*a1p4a3g2+352*a1p4a3+192*a1p4a4):
Df :=
-(8-96*a1p4a3eta-32*a1p4a2g2eta+etaA2g-8*a1p4eta-56*a1p4a2
+8*a1p4a2g2eta-64*a1p4a4geta-48*a1p4a2g2eta-8*a1p4a3g2eta-48*a1p4a2g1p
a2g+128*a1p4a2-8*a1p4a2-56*a1p4a2g2eta-4*a1p4eta-224*a1p4a2g-3*et
a2g-8*a1p4eta-8*a1p4eta-42*a1p4eta2-72*a1p4eta2-24*a1p4eta2g-64
1p4a4g-96*a1p4a3g-40*a1p4a3m2+96*a1p4a4m+136*a1p4a3m-40*a1p4a
m2eta-4*a1p4a2m2eta-176*a1p4a3+96*a1p4a4)+g2f/(4-192*a1p4a3e
g-128*a1p4a4m-32*a1p4a4m2eta+etaA2m2gA2+64*a1p4a2g2eta-8*
a2m2g-4*etaA2g2a1p4a2-16*a1p4eta-32*a1p4a3g2eta+4*a1p4a2g
2+448*a1p4a2g-96*a1p4a2g2eta-128*a1p4a4geta-16*a1p4a3etaA2g2+16*
1p4a4g2etaA2-2*etaA2g2eta-8*a-4*etaA2g2a1p4a-96*a1p4a2g-192*a1p4
a3g2eta-56*a1p4a-16*a1p4a2g2eta-224*a1p4a2-4*a1p4a2g2eta-48*a1p4
ataA2g-32*a1p4a2g-16*a1p4a2g-16*a1p4a2g-112*a1p4a2g-56*a1p4a2g-224*a1p4
ha2m2+4*g2a1p4a2eta-16*g2a1p4a2eta-4*a1p4a2eta-64*a1p4a2eta-64*a1p4a
taA2g2etaA2g2-128*a1p4a4g-192*a1p4a3g2eta-352*a1p4a3m2+384*a1p4a4m
+192*a1p4a4m2+704*a1p4a3m+16*a1p4a3g2eta-128*a1p4a3m2eta-4*a1p4a3m2eta-4
etaA2m2g2a1p4a-16*etaA2m2a1p4a2-64*a1p4a3m2eta-32*a1p4a4
m2eta-96*a1p4a2m2eta-16*a1p4a3g2etaA2m+4*a1p4a2m2etaA2g
2+16*a1p4a4g2+16*a1p4a3g2+352*a1p4a3+192*a1p4a4):

```

```

#Vemos que cuando alpha es cero las cosas converjan a JC:
> subs(alpha = 0, Dg):
simplify(X):
> subs(alpha = 0, Df):
simplify(X):

#Separamos numeradores y denominadores para hacer claro cada uno por
separado:
Fnum :=
8-96*a1p4a3eta-32*a1p4a2g2eta+etaA2g-8*a1p4eta-56*a1p4a2m
a1p4a2g2eta-64*a1p4a4geta-48*a1p4a2g2eta-8*a1p4a3g2eta-48*a1p4a2g1p
a2g+128*a1p4a2-8*a1p4a2-56*a1p4a2g2eta-4*a1p4eta-224*a1p4a2g-3*eta
2g-8*a1p4eta-8*a1p4eta-42*a1p4eta2-72*a1p4eta2-24*a1p4eta2g-64
a1p4a4g-96*a1p4a3g-40*a1p4a3m2+96*a1p4a4m+136*a1p4a3m-40*a1p4a
m2eta-4*a1p4a2m2eta-176*a1p4a3+96*a1p4a4)+g2f/(4-192*a1p4a3e
g-128*a1p4a4m-32*a1p4a4m2eta+etaA2m2gA2+64*a1p4a2g2eta-8*
a2m2g-4*etaA2g2a1p4a2-16*a1p4eta-32*a1p4a3g2eta+4*a1p4a2g
2+448*a1p4a2g-96*a1p4a2g2eta-128*a1p4a4geta-16*a1p4a3etaA2g2+16*
1p4a4g2etaA2-2*etaA2g2eta-8*a-4*etaA2g2a1p4a-96*a1p4a2g-192*a1p4
a3g2eta-56*a1p4a-16*a1p4a2g2eta-224*a1p4a2-4*a1p4a2g2eta-48*a1p4
ataA2g-32*a1p4a2g-16*a1p4a2g-16*a1p4a2g-112*a1p4a2g-56*a1p4a2g-224*a1p4
ha2m2+4*g2a1p4a2eta-16*g2a1p4a2eta-4*a1p4a2eta-64*a1p4a2eta-64*a1p4a
taA2g2etaA2g2-128*a1p4a4g-192*a1p4a3g2eta-352*a1p4a3m2+384*a1p4a4m
+192*a1p4a4m2+704*a1p4a3m+16*a1p4a3g2eta-128*a1p4a3m2eta-4*a1p4a3m2eta-4
etaA2m2g2a1p4a-16*etaA2m2a1p4a2-64*a1p4a3m2eta-32*a1p4a4
m2eta-96*a1p4a2m2eta-16*a1p4a3g2etaA2m+4*a1p4a2m2etaA2g
2+16*a1p4a4g2+16*a1p4a3g2+352*a1p4a3+192*a1p4a4):

```

```

En este programa se obtiene el índice de autosimilitud encontrando el punto crítico de
las ecuaciones autosimilares obtenidas anteriormente.
> restart:
with(CodeGeneration):
Warning, the protected name Matlab has been redefined and unprotected
> #Escribimos las ecuaciones tal y como las obtenemos de
Implor/veCurvaturaMendocinoEsq, checamos adicionalmente que converjan en el caso
conocido cuando alpha es 0.
> entropy :=
((8*eta/(g*(m-1))-8/g-8*eta/(g*(m-1)))*alpha2-(4*eta/g-4/g-4*eta/g
/g2+8*eta/(g*(m-1))+8*eta/(g*(m-1))-8/(g2))-8*alpha-2*eta/g-2*eta/g-4
a/g2-4/g2)*g1+(-3*eta/f-8/(g*f)-3*eta/f-(-6/f-6*eta/f+36/(g*f))+12
eta/f*(m-1))-12*eta/(m-1)-8*eta/f+36/(g*f))*alpha+6*(g*f)+12*et
a/(m-1)+48/(g*f)+48/(g*f)-12/f+12*eta/(m-1))*alpha2)+f1+24*a
ha2+8*(-10*m+24)*alpha-5*m = 0:
subs(alpha = 0, X):
> leotra :=
((-8*eta/(g*(m-1))+8/g-16/g2-8*eta/(g*(m-1))-16/g2)*alpha2+2*eta/g
4/g2+2*eta/g-4*a/g2+4*eta/g2+4/g2+4*eta/g-8*eta/(g*(m-1))-8*eta/(g
*(m-1))-16/g2-16/g2)*alpha+1+((-8/(g*f)-4*eta/(m-1))-4*eta/(m-1)
+12)-8*(g*f)+4/f))*alpha2+(2*eta/f+2/f-4*eta/(m-1))+2*eta/f-4*eta
/(m-1))*alpha2m/(g*f)+2/(g*f)+eta/f+eta/f)+f1+8*alpha2+(6*m+8)*
alpha3m = 0:
subs(alpha = 0, X):
> continuity :=
((4/h-24/(g*h))-8*eta/(h*(m-1))-24*(g/h)-8*eta/(h*(m-1))+4*eta/h+4*a
/h))*alpha+(-32/(g*h)-8*eta/(h*(m-1))-32*(g/h)+4/h-8*eta/(h*(m-1)))*
alpha2-4*(g/h)+2*eta/h-4/(g*h)+2*eta/h)*h1+((2*eta/g+2*eta/g-4*eta/g
*(m-1))-4*eta/(g*(m-1))+2/g+4/g2+4*a/g2)*alpha+(4/g+4*eta/g*(m-1)
4*eta/(g*(m-1))*alpha2+eta/g+2*m/g2+eta/g2/g2)*g1-12*alpha2+3*m-4
(-12+6*m)*alpha = 0:
subs(alpha = 0, X):
> #Despejamos las derivadas:
> solve(entropy,leotra), {f1,g1}:
subs(alpha = 0, X):
> Dg :=
-8*a1p4a3eta-32*a1p4a2g2eta+etaA2m2gA2+64*a1p4a2g2eta-8*eta
m2g-4*etaA2g2a1p4a2-16*a1p4eta-32*a1p4a3g2eta-4*a1p4a2g2
448*a1p4a2g-96*a1p4a2g2eta-128*a1p4a4geta-16*a1p4a3etaA2g2+16*a1
ha4a2g2etaA2-2*etaA2g2eta-8*a-4*etaA2g2a1p4a-96*a1p4a2g-192*a1p4a
3g2eta-56*a1p4a-16*a1p4a2g2eta-224*a1p4a2-4*a1p4a2g2eta-48*a1p4a
ataA2g-32*a1p4a2g-16*a1p4a2g-16*a1p4a2g-112*a1p4a2g-56*a1p4a2g-224*a1p4
A2m2+4*g2a1p4a2eta-16*g2a1p4a2eta-4*a1p4a2eta-64*a1p4a2eta-64*a1p4a
taA2g2etaA2g2-128*a1p4a4g-192*a1p4a3g2eta-352*a1p4a3m2+384*a1p4a4m
92*a1p4a4m2+704*a1p4a3m+16*a1p4a3g2eta-128*a1p4a3m2eta-4*a1p4a3m2eta-4*a
a2m2g2a1p4a-16*etaA2m2a1p4a2-64*a1p4a3m2eta-32*a1p4a4
m2eta-96*a1p4a2m2eta-16*a1p4a3g2etaA2m+4*a1p4a2m2etaA2g
2-16*a1p4a4g2+16*a1p4a3g2+352*a1p4a3+192*a1p4a4):

```

```

g-8*a1p4a3eta-32*a1p4a2g2eta+etaA2m2gA2+64*a1p4a2g2eta-8*eta
m2g-4*etaA2g2a1p4a2-16*a1p4eta-32*a1p4a3g2eta-4*a1p4a2g2
448*a1p4a2g-96*a1p4a2g2eta-128*a1p4a4geta-16*a1p4a3etaA2g2+16*a1
ha4a2g2etaA2-2*etaA2g2eta-8*a-4*etaA2g2a1p4a-96*a1p4a2g-192*a1p4a
3g2eta-56*a1p4a-16*a1p4a2g2eta-224*a1p4a2-4*a1p4a2g2eta-48*a1p4a
ataA2g-32*a1p4a2g-16*a1p4a2g-16*a1p4a2g-112*a1p4a2g-56*a1p4a2g-224*a1p4
A2m2+4*g2a1p4a2eta-16*g2a1p4a2eta-4*a1p4a2eta-64*a1p4a2eta-64*a1p4a
taA2g2etaA2g2-128*a1p4a4g-192*a1p4a3g2eta-352*a1p4a3m2+384*a1p4a4m
92*a1p4a4m2+704*a1p4a3m+16*a1p4a3g2eta-128*a1p4a3m2eta-4*a1p4a3m2eta-4*a
a2m2g2a1p4a-16*etaA2m2a1p4a2-64*a1p4a3m2eta-32*a1p4a4
m2eta-96*a1p4a2m2eta-16*a1p4a3g2etaA2m+4*a1p4a2m2etaA2g
2-16*a1p4a4g2+16*a1p4a3g2+352*a1p4a3+192*a1p4a4):

```

```

#Hacemos el denominador de Df = 0:
Ecdn := subs(eta = x/g,den) = 0:
#Hacemos el numerador de Df = 0:
Ecfnum := subs(eta = x/g,fnum) = 0:
#Hacemos el numerador de Dg = 0:
Ecgnum := subs(eta = x/g,gnum) = 0:
#Resolvemos la ecuación del denominador para la variable x = eta/g:
> solve(Ecdn,x):
solx :=
4*(2*alpha-1/2*alpha-2*alpha-1-m-1/2*(3+6*alpha-8*alpha2+m-12*alpha
m-6*m+3*m2+6*alpha2+4*alpha2+4*alpha2+4*alpha2)*alpha)/(2-2*alpha)
- (2-2*alpha)
> #Vemos que la solución anterior sólo depende de alpha y m. Sustituimos en
el numerador de Dg y resolvemos para m:

```

<pre> &gt; subs(x = solX, EcgInm0): solva(X, a):  solm2 := 4*(26*a1pha^3+50*a1pha^2+30*a1pha+5+(784*a1pha^6+2744*a1pha^5+4060*a1pha^4 +3192*a1pha^3+1380*a1pha^2+306*a1pha+27)^(1/2))/(3*a1pha-1)*(1+2*a1pha) solm1 := 4*(26*a1pha^3+50*a1pha^2+30*a1pha+5-(784*a1pha^6+2744*a1pha^5+4060*a1pha^4 +3192*a1pha^3+1380*a1pha^2+306*a1pha+27)^(1/2))/(3*a1pha-1)*(1+2*a1pha)  #LAS DOS SOLUCIONES SON BUENAS. DEPENDE DE QUÉ VALOR DE ALPHIA SE UTILICE &gt; solm2 := 4*(26*a1pha^3+50*a1pha^2+30*a1pha+5+(784*a1pha^6+2744*a1pha^5+4060*a1pha^4 +3192*a1pha^3+1380*a1pha^2+306*a1pha+27)^(1/2))/(3*a1pha-1)*(1+2*a1pha) subs(a1pha = 0, solm2): evalf(%) subs(a1pha = -0.5, solm2): evalf(%)  &gt; solm1 := 4*(26*a1pha^3+50*a1pha^2+30*a1pha+5-(784*a1pha^6+2744*a1pha^5+4060*a1pha^4 +3192*a1pha^3+1380*a1pha^2+306*a1pha+27)^(1/2))/(3*a1pha-1)*(1+2*a1pha) subs(a1pha = 0, solm1): evalf(%) subs(a1pha = -0.5, solm1): evalf(%)  #¿cuándo son iguales las 2 sols? expand(solm1 - solm2) = 0: simplify(%): solva(X, alpha): subs(alpha = -1/2 + sqrt(7)/14, solm1): evalf(%): subs(alpha = -1/2 + sqrt(7)/14, solm2): evalf(%): subs(alpha = -1/2 - sqrt(7)/14, solm1): evalf(%): subs(alpha = -1/2 - sqrt(7)/14, solm2): evalf(%): subs(alpha = -1, solm1):  #Falta la de continuidad. Substituímos Dg por lo que hemos obtenido y resolvemos para Dh: &gt; continuity: subs(g1 = Dg, %): </pre>	<pre> solva(%h3): Dh := %: EOF </pre>

# Bibliografía

- BENOIT, P. M. & COLEY, A. A., 1998. Spherically symmetric spacetimes and kinematic self-similarity. *Classical and Quantum Gravity*, **15**, 2397–2414.
- BLANDFORD, R. & MCKEE, C., 1976. Fluid dynamics of relativistic blast waves. *The Physics of Fluids*, **19**.
- CAHILL, M. E. & TAUB, A. H., 1971. Spherically symmetric similarity solutions of the Einstein field equations for a perfect fluid. *Communications in Mathematical Physics*, **21**, 1–40.
- CARTER, B. & HENRIKSEN, R. Ñ., 1989. A covariant characterisation of kinematic self-similarity. In *Journées Relativistes: Relativité Générale, Astrophysique et Physique Mathématique*, 47–53.
- CHRISTODOULOU, D., 1984. Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud. *Communications in Mathematical Physics*, **93**, 171–195.
- DESHINGKAR, S. S., 2009. Can we See Naked Singularities? *International Journal of Modern Physics D*, **18**, 2083–2092.
- EARDLEY, D. M. & SMARR, L., 1979. Time functions in numerical relativity: Marginally bound dust collapse. *Physical Review D*, **19**, 2239–2259.
- ELTGROTH, P. G., 1972. Nonplanar Relativistic Flow. *Physics of Fluids*, **15**, 2140–2144.
- HARADA, T., 2009. Singularities and self-similarity in gravitational collapse. *ArXiv e-prints*.
- HARADA, T., IGUCHI, H. & NAKAO, K., 2002. Physical Processes in Naked Singularity Formation. *Progress of Theoretical Physics*, **107**, 449–524.

- HIDALGO, J. & MENDOZA, S., 2005. Self-similar imploding relativistic shock waves. *Physics of Fluids*, **17**(9), 096101–+.
- JOSHI, P. S., 2007. *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- JOSHI, P. S. & DWIVEDI, I. H., 1993. Naked singularities in spherically symmetric inhomogeneous Tolman-Bondi dust cloud collapse. *Physical Review D*, **47**, 5357–5369.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1980. *The Classical Theory of Fields*. Butterworth–Heinemann.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1987. *Fluid Mechanics*. Butterworth–Heinemann.
- McKEE, C. & COLGATE, S., 1973. Relativistic Shock Hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, **181**, 903–938.
- MENDOZA, S., 2008. *Astrofísica Relativista*. <http://www.mendoza.org/sergio/gravitacion/>.
- MISNER, THORNE & WHEELER, 1980. *Gravitation*. Freeman.
- OPPENHEIMER, J. R. & SNYDER, II., 1939. On Continued Gravitational Contraction. *Physical Review*, **56**, 455–459.
- ORI, A. & PIRAN, T., 1987. Naked singularities in self-similar spherical gravitational collapse. *Physical Review Letters*, **59**, 2137–2140.
- ORI, A. & PIRAN, T., 1990. Naked singularities and other features of self-similar general-relativistic gravitational collapse. *Physical Review D*, **42**, 1068–1090.
- PENROSE, R., 1969. *Riv. Nuovo Cimento*, **1**, 252.
- ROSSWOG, S., 2007. *Introduction to High-Energy Astrophysics*. Cambridge University Press.
- SARI, R., 2006. First and second type self-similar solutions of implosions and explosions containing ultrarelativistic shocks. *Physics of Fluids*, **18**(2), 027106–+.
- SEDOV, L., 1993. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics - 10th Edition*. CRC Press, Inc.

- TOOPER, R. F., 1965. Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity. *Astrophysical Journal*, **142**, 1541–+.
- TOWNSEND, P. K., 1997. Black Holes. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*.
- ZEL'DOVICH, Y. B. & RAIZER, Y. P., 1966a. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena - Volume 1*. ACADEMIC PRESS New York and London.
- ZEL'DOVICH, Y. B. & RAIZER, Y. P., 1966b. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena - Volume 2*. ACADEMIC PRESS New York and London.