



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ANOMALÍAS Y/O TRANSICIONES DE FASE EN
GASES IDEALES DE FERMIONES Y BOSONES EN
DIMENSIONES $D \geq 0$**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

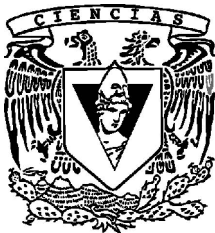
P R E S E N T A:

ISRAEL CHÁVEZ VILLALPANDO

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARCELA DOLORES GREYER GONZALEZ

Noviembre 2010





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Anomalías y/o transiciones de fase en gases ideales de fermiones y bosones en dimensiones $d \geq 0$

realizado por **Chávez Villalpando Israel** con número de cuenta **0-9214443-9** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Física**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. José Ignacio Jiménez Mier y Terán

Propietario Dr. Ilya Kaplan Savitsky

Propietario Dra. Marcela Dolores Grether González
Tutora

Suplente Dr. Mauricio Fortes Besprosvani

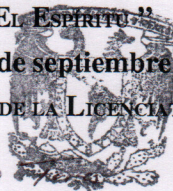
Suplente Dr. Francisco Javier Sevilla Pérez

Atentamente,

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Ciudad Universitaria, D. F., a 02 de septiembre de 2010

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA



M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE FÍSICA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Physics suggests that
if the two-dimensional realm is promising,
then one or zero dimensions is even better.

Elizabeth Corcoran & Glenn Zorpette
Scientific American Supplement
Sept-1997, p.122

Agradezco a la Facultad de Ciencias,
al Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM,
así como a la misma Universidad
y sus profesores por mi formación académica.

Agradezco a la Dra. Marcela Grether
que su Mente sea parte mi Tesis
y a los sinodales que conformaron el honorable jurado
que evaluó esta trabajo.

Agradezco a PAPIIT No. IN-106908,
CONACyT y PRONABES por el apoyo económico recibido.

Agradezco especialmente al
Dr. Manuel de Llano que su Mente sea parte de mi Tesis.

Agradezco también todo su apoyo,
comentarios y sugerencias para la elaboración de este escrito.

Dedico esta Tesis a mis padres, Cruzita y Jorge.

A mi Familia

A todos mis amigos y mis hermanos de la gran obra

A Ramtha el señor del viento

Índice general

Agradecimientos y dedicatoria	II
Introducción	2
1. Gas Ideal de Fermi	7
1.1. Potencial Termodinámico	7
1.2. Potencial Químico	11
1.2.1. Dimensión $d \rightarrow 0$	13
1.3. Calor Específico	13
1.3.1. Dimensión $d \rightarrow 0$	16
2. Gas Ideal de Bose	18
2.1. Potencial Químico	18
2.1.1. Dimension $d \rightarrow 0$	20
2.2. Calor Específico	21
2.3. Casos límite de C_V	23
2.3.1. Dimensión $d = 3$	23
2.3.2. Dimensión $d < 3$	25
2.3.3. Dimensión $d \rightarrow 0$	27
3. Equivalencia entre el gas de Fermi y el gas de Bose	28
3.1. Relación generalizada de energía-momento	28
3.2. Equivalencia de los gases ideales cuánticos	29
4. Conclusiones	33
A. Sobre el límite del continuo	36
B. Los gases ideales de Fermi y Bose a través de la función Lerch-Φ	40
C. BEC en átomos bosónicos y fermiónicos ultra-enfriados	43
D. Derivadas del calor específico del gas ideal de Bose	46
Bibliografía	48

Resumen

Estudiamos los gases ideales cuánticos de Fermi y Bose a partir de la función del gran potencial termodinámico en el ensemble gran canónico. El estudio se centra en la dimensionalidad de ambos sistemas cuando son confinados en una “caja” de volumen $V = L^d$, donde d es la dimensión entera o no, con una relación energía-momento cuadrática, es decir, un gas sin interacciones.

El gran potencial termodinámico tiene como variables el potencial químico μ , la temperatura T y el volumen L^d . En particular se analizan las propiedades termodinámicas en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ entretanto que la densidad de número $n = N/L^d$ permanece constante. Usamos las funciones de Bose $g_\nu(z)$ y las funciones de Fermi $f_\nu(z)$ donde ν está relacionada con la dimensión y con la relación de dispersión energía-momento ($\varepsilon \propto k^s$) de la forma $\nu = d/s$ y $z \equiv \exp(\beta\mu)$ es la fugacidad de los sistemas con $\beta = 1/k_B T$, k_B la constante de Boltzmann. Analizamos el potencial químico $\mu(T)$, y el calor específico $C_V(T, V)$ en los límites $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$ para cualquier dimensión $d \geq 0$ entera o no. Al no poder contar con una expresión analítica para $\mu(T)$ usamos técnicas de resolución numéricas.

Encontramos en el gas ideal de Fermi (GIF) una “anomalía” en el potencial químico en dimensiones $d < 2$, comportamiento que se ve reflejado en el calor específico C_V con un “hombro”, el cual es liso, así como su primera derivada, la “anomalía” se observa en dimensiones $d < 2$ ya que la función es no-monótona, se encuentra que si $d \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow +\infty$ para toda T este resultado nos dice que no podemos agregar una partícula más al sistema debido al principio de exclusión de Pauli.

Por otra parte, en el gas ideal de Bose (GIB) en dimensiones $d < 2$ entera o no, no presenta condensación de Bose-Einstein (BEC), C_V es continua así como su primera derivada, en general la BEC solo ocurre cuando $d/s > 1$. El potencial químico diverge negativamente $\mu \rightarrow -\infty$ cuando $d \rightarrow 0$, así como la fugacidad $z \rightarrow 0$ para toda T cuando la densidad $n \rightarrow 0$, este resultado lo podemos interpretar como que el sistema al acercarse al “punto cuántico ideal” no puede confinarse.

En general, si ambos sistemas tienen una razón $d/s = 1$ se hace patente una equivalencia entre ambos gases, siendo idénticamente iguales en el calor específico y una diferencia en el potencial químico entre ambos de la energía de Fermi E_F . En particular, existe una equivalencia cuando ambos gases están confinados sin interacción ($s = 2$) en $d = 2$, así como también se puede mostrar que al confinar ambos gases mediante potenciales armónicos ($s = 1$) serán idénticamente iguales en $d = 1$. Esta equivalencia resulta en parte al estudiar el GIF y el GIB con las funciones polilogaritmo $\text{Li}_\nu(z)$.

Se puede concluir que *i*) la dimensión juega un papel crucial en la descripción de los gases ideales cuánticos, *ii*) existe una equivalencia entre ambos sistemas cuando $d = s$ y en este estudio en $d = 2$ para el gas ideal, *iii*) se encuentran “anomalías” en el GIF y en el GIB en $d < 2$ y en $d = 0$ el potencial químico diverge negativamente para Bose $\mu \rightarrow -\infty$ y para Fermi $\mu \rightarrow +\infty$, éste último debido al principio de exclusión de Pauli y ambos casos debido al principio de incertidumbre de Heisenberg [1, 2].

Introducción

El fenómeno de la superconductividad fue descubierto en 1911 por Kammerlingh Onnes [3] refrigerando mercurio ${}_{121}^{80}\text{Hg}$ a 4.2K al experimentar con bajas temperaturas; posteriormente en 1913 se encontró plomo ${}_{125}^{82}\text{Pb}$ [4] superconductor a 7K y en 1941 se encontró nitruro de niobio NbN [5] a una temperatura de 16K. Hasta ahora la superconductividad se observa a bajas temperaturas, fase que existe por debajo de una temperatura de transición llamada T_c en la cuál la resistencia eléctrica del material es cero. En 1933 Meissner y Ochsenfeld descubren la repulsión de un campo magnético por un superconductor [6]. En 1935 los hermanos London mostraron que el efecto Meissner era una consecuencia de la minimización de la corriente llevada por un superconductor [7].

En 1950 Ginzburg y Landau formulan la teoría de la superconductividad [8], la cuál esta combinada con la teoría de Landau de transiciones de fase de segundo orden y explica macroscópicamente la propiedades de los superconductores, prediciendo las categorías de tipo I y tipo II, materiales que llegan al estado superconductor (ESC) súbitamente y de forma gradual, respectivamente. También en 1950 Maxwell y Reynolds encontraron la temperatura crítica T_c de un superconductor [9, 10] descubrimiento que conduce a una interacción electron-fonón como el mecanismo microscópico responsable de la superconductividad.

En 1957 Bardeen, Cooper y Schrieffer [11] formulan lo que hoy se conoce como la teoría BCS de la superconductividad, teoría que microscópicamente explica la corriente en un superconductor por medio de los pares de Cooper (PC) trabajo por el cual les otorgaron el premio Nobel en 1972. En 1959 Lev Gor'kov mostró que la teoría BCS se reduce a la teoría de Ginzburg-Landau cerca de T_c [12].

La teoría BCS impone una cota superior a la T_c que se puede alcanzar con el mecanismo electrón-fonón de interacción por arriba de los 30K, sin embargo en 1986 Bednorz y Müller encuentran superconductividad en un material tipo perovskita, estructura cristalina que tiene relación con materiales que presentan propiedades eléctricas, hecha de cuprato de lantano que tiene una transición de fase en 35K [13]. En poco tiempo se descubrió que reemplazando lantano por itrio, es decir YBaCuO , la temperatura crítica aumentaba hasta los 92K con lo cuál se dio un enorme salto en la temperatura de transición a la fase superconductora y permite alcanzar el ESC usando nitrógeno líquido como refrigerante [14]. Alrededor de 1993 se encontró un material que consiste de mercurio, cobre, bario, calcio y oxígeno $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+\delta}$

con temperatura crítica de $T_c = 138K$ [15], pero en 1994 se encontró un material $HgBa_2Ca_{m-1}Cu_mO_{2m+2+\delta}$ ($m=1,2,3$) bajo altas presiones de hasta $4.44 \times 10^5 \text{atm}$ con una $T_c = 164K$ [16]. La estructura cristalina en los superconductores cerámicos de alta T_c [17, 18], muestra que están formados por planos en los cuáles se transporta la corriente. Aunque se han encontrado otros materiales, la teoría de la superconductividad se ha convertido en un reto importante en la física de la materia condensada puesto que no existe un modelo teórico que explique el comportamiento de los superconductores de alta temperatura crítica.

Se ha conjeturado que la superconductividad es en general un condensado de Bose-Einstein [19–23]. La condensación de Bose-Einstein (BEC, por sus siglas en inglés) es un fenómeno cuántico que se presenta en un sistema de partículas en el cuál, por debajo de una temperatura crítica T_c las partículas empiezan a ocupar el mismo estado cuántico. Su predicción teórica fue hecha por Einstein en 1925 [24] basada en el trabajo de Bose de 1924 sobre fotones [25], después del cuál quedó durante muchas décadas como un ejercicio académico en los libros de texto. El gas ideal de Bose (GIB) sufre una BEC solo para cualquier dimensión entera o no $d > 2$ y $s = 2$; con una singularidad cúspide en la dependencia de la temperatura con el calor específico para $2 < d = 4$ y un salto finito discontinuo para $d > 4$ [26–28].

La BEC ha sido observada en el laboratorio en nubes de átomos bosónicos ultra-enfriados mediante láseres en trampas magnéticas. Esto ya se hizo con los átomos de ^{87}Rb [29], 7Li [30], ^{23}Na [31], 1H [32], ^{85}Rb [33], 4He [34], ^{41}K [35], ^{133}Cs [36], ^{174}Yb [37], ^{52}Cr [38] donde los índices superior e inferior indican el número de masa nuclear (ó de nucleones en el núcleo) y el número de protones respectivamente. La BEC en gases de excitones [39] y de magnones [40–42] también ha sido reportada. También se ha observado la BEC en bajas dimensiones: Görlitz [43] reporta una BEC de átomos de ^{23}Na en $1D$ o $2D$, Schreck [44] observa con átomos de 7Li en $1D$; y Burger [45] estudia la transición de fase en una nube de átomos de ^{87}Rb en cuasi-2D. El descubrimiento de superconductores cuasi-2D tales como los cupratos [46–48] o superconductores cuasi-1D como las sales órgano-metálicas (o sales de Bechgaard) [49–51] y los nanotubos de carbono [52] han motivado el estudio de gases cuánticos de baja dimensionalidad [53].

La generalización del condensado de Bose-Einstein (GBEC, por sus siglas en inglés) [19–23] es una combinación entre la teoría BCS de la superconductividad y la BEC, en este marco la temperatura de condensación es menor que la T_c de la BEC y se propone que los superconductores de alta T_c sean descritos por una gas ternario fermión-bosón como también de pares de agujeros tipo PC en equilibrio químico y térmico con fermiones no-apareados.

Enrico Fermi en 1926 [54] siguiendo el principio de exclusión de Pauli [55] encuentra la estadística que describe a las partículas que no pueden intercambiar el mismo estado cuántico, descripción a la cuál llegó de forma independiente en el mismo año Paul Dirac [56] y que hoy es conocida como la estadística de Fermi-Dirac. Estos trabajos juegan un papel determinante al construir la tabla periódica, en metales, enlaces iónicos y covalentes, aislantes, semiconduc-

tores, superconductores; en la estructura nuclear exterior y la energía de enlace. Los sistemas de Fermi exhiben un comportamiento no trivial debajo de dos dimensiones [57] ya que el potencial químico y el calor específico son funciones no-monótonas. Estos sistemas de baja dimensionalidad han encontrado varias aplicaciones en dispositivos electrónicos [58–60] con “superficies” (2D) “alambrados” (1D) y “puntos” (0D) cuánticos [61].

El estudio del gas ideal de Fermi (GIF) es interesante como precursor de la formación de los PC y se ha encontrado que muestra un curioso comportamiento en bajas dimensiones, como el reportado en [62] para $d = 1$, también presenta una “estructura” en $d < 2$ en el potencial químico y se manifiesta en un crecimiento en el calor específico [1, 57]. Esta “estructura” no es más que el comportamiento no-monótono de $\mu(T)$ y de $C_V(T, V)$, es decir, el cambio “suave” en su pendiente. Descubrimientos recientes han encontrado el condensado de Fermi (FDC, por sus siglas en inglés) [63] en donde los átomos, por debajo de una temperatura crítica T_c en vez de formar moléculas forman pares de átomos conformando tipo-átomo de espín entero como bosones, análogos a los PC de la teoría BCS, el condensado de Fermi también se le ha llamado el sexto estado de la materia (el quinto estado de la materia son los condensados de Bose-Einstein [64]) mostrando propiedades de superfluidez. Éstos estudios han iluminado el camino para comprender el fenómeno de la superconductividad en términos de los sistemas de Bose y Fermi.

En este trabajo estudiaremos al gas de Fermi y el de Bose en baja dimensionalidad, entera o no, puesto que la dimensión juega un papel crucial en la descripción de estos sistemas. La palabra dimensión viene del latín (*dimensio*) “medida” es esencialmente los grados de libertad para realizar algún movimiento en el espacio. Los fractales se han convertido en una rama de las matemáticas muy popular, tanto a nivel teórico como a nivel divulgativo. Un fractal por definición es una forma geométrica fragmentada la cuál sigue definiciones específicas para generar tal estructura, son así ejemplos famosos: el copo de nieve de Koch, el fractal de Mandelbrot o el de Hausdorff. Fractal significa “roto” o “fracturado”, la dimensión no-entera o dimensión fraccional bien podría quedar en esta definición, sin embargo también se le puede asociar a la medida de la irregularidad entre dimensiones enteras. Es interesante señalar que el triángulo de Sierpinski [65] tiene dimensión fractal $D \approx 1.585$. La dimensión fractal de una curva [66] puede estar entre 1 y 2 dependiendo de cuanto área sea llenada debajo de ella, la misma idea puede extenderse a las superficies, así las dimensiones fractales pueden ser usadas para comparar la complejidad [67] de dos curvas o superficies, se encuentran diferentes aplicaciones a esterología [68], tecnología de polvos [69, 70], geología [71], metalurgia [72] y visión computacional [73–75]. Se puede probar la dimensión fractal a diferentes tipos de curvas, en particular a una curva muy famosa la del movimiento browniano, esta traza fraccional se puede calcular y tiene una dimensión $\Delta(G_f) = 1.4$ [76], en parte esto ha motivado el estudio a baja dimensionalidad de los sistemas de Fermi y Bose.

A partir del ensemble gran canónico estudiamos el sistema con las variables: potencial químico μ , la temperatura T y el volumen V . La Termodinámica del

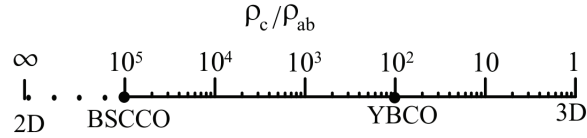


Figura 1: Figura aparecida en la Ref. [77], donde se muestra la razón de la resistividad ρ_c/ρ_{ab} de los planos perpendiculares ρ_c y paralelos $\rho_{a,b}$ en los superconductores tipo $BiSrCCuO$ e $YBaCuO$ entre dos y tres dimensiones.

sistema se obtiene a través de la relación $\Omega(\mu, T, V) = \ln \Xi$, donde $\Omega(\mu, T, V) = U - TS - \mu N$ es el potencial termodinámico y $\Xi = \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}]$ la gran función de partición donde $\hat{\rho} \propto e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$ es el operador de densidad.

El presente estudio se centra en la dimensionalidad de los sistemas de Fermi y Bose, los cuales están confinados en una “caja” de volumen L^d donde d es la dimensión, con una relación energía-momento cuadrática. Dada la expresión para el hamiltoniano del sistema, encontramos la función del potencial termodinámico, la cuál está relacionada con las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein y cuya expresión general puede expresarse por medio de la función polilogaritmo $\text{Li}_{d/2}(z)$, función compleja de variable compleja con dominio $\{\mathbb{C} \setminus [1, \infty)\}$. Los sistemas en dimensiones tales como $d = 3$ (volumen), $d = 2$ (capas), $d = 1$ (líneas) son relativamente conocidas, la discusión también se centrará en dimensiones no enteras, mediante interpolaciones.

El estudio en dimensiones no-enteras o dimensiones fractales es porque se ha encontrado una variación en la dimensión d [77] en superconductores cupratos de alta temperatura en ρ_c/ρ_{ab} , donde ρ_{ab} es la resistividad paralela a los planos de óxido de cobre y ρ_c en la dirección perpendicular, cuando d cambia continuamente de 2 a 3, el punto en la figura 1 marca el material $BSCCO$ que corresponde al valor experimental encontrado en el superconductor $Bi_{2+x}Sr_{2-y}CuO_{6+\delta}$, mientras que el punto $YBCO$ se encuentra para el comunmente reportado para el superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$.

Tenemos como objetivo mostrar algunas de las propiedades de los gases ideales¹ en dimensiones $d > 0$ enteras o no, es decir cuando son confinados espacialmente, su estudio podría arrojar nueva luz sobre el estado superconductor de los materiales al encontrar un modelo que pueda predecir superconductores de alta T_c , tanto como refrigerados por agua líquida, descubrimiento que rev-

¹La distancia interatómica suele ser de varios nanómetros, el potencial Lennard-Jones [78] muestra que la distancia de interacción entre átomos es del orden de 4Å y el número de partículas del orden del número de avogadro, sin embargo se han encontrado BEC en diferentes arreglos de átomos, distancias de $11,856\text{Å}$ como máximo y con densidades de número de partículas de hasta $6 \times 10^{11}(\text{cm}^{-3})$. En las tablas obtenidas por la ref. [79] y reproducidas en el apéndice B, se observan que las distancias inter-bosónicas en átomos-bosónicos ultraenfriados son de algunas micras y el número de bosones N_0 en el estado condensado es de hasta 10^6 . En estos sistemas las partículas pueden considerarse sin interacción, cercanamente a lo que conocemos como ideal, aunque han sido confinados espacialmente.

olucionaría a la técnica y a la industria a corto y mediano plazo y que podría compararse con la revolución industrial del siglo XVIII.

En el capítulo 1 estudiamos el GIF, extendemos los resultados encontrados en la Ref. [57] para dimensiones no enteras cuando $T \rightarrow \infty$, estudiando el potencial químico μ y el calor específico C_V en función de la temperatura absoluta encontrando un comportamiento “anómalo” para $d < 2$, entera o no, estudiamos los casos límite, $T \rightarrow \infty$ y $T \rightarrow 0$ en cualquier dimensión $d > 0$ y un análisis cualitativo cuando $d \rightarrow 0$, interpretación que yace en la manifestación del principio de exclusión de Pauli.

En el capítulo 2 presentamos un análisis para el GIB en $d \leq 2$, entera o no, mostrando la no existencia de una transición de fase. Estudiamos el potencial químico μ y el calor específico C_V en función de la temperatura absoluta para cualquier dimensión $d > 0$ y mostramos que los resultados analíticos en $d = 0$ [80–82] sugieren una divergencia de $\mu(T)$ para toda T ; interpretación que nos conduce al principio de incertidumbre de Heisenberg, sugiriendo posibles “anomalías” espaciales.

En el capítulo 3 estudiaremos la equivalencia [82–84] de ambos sistemas, mostrando una relación de energía-momento generalizada $\varepsilon_k \propto k^s$, donde $s > 0$, la cual muestra que solo puede ocurrir un estado de condensación para el GIB si $d/s > 1$. Estos resultados podrán ofrecer nuevas interpretaciones [2] sobre el comportamiento de los superconductores, también la descripción estadística de los gases cuánticos usando las funciones polilogaritmo [86, 90] sugiriendo una posible equivalencia de ambos sistemas por simples transformaciones [87].

En el capítulo 4 se dan las conclusiones generales que son *i*) el GIF cuando $d \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow +\infty$ y se interpreta como un precursor del Principio de Exclusión de Pauli (PEP) *ii*) el GIB cuando $d \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -\infty$ si $n \rightarrow 0$ y nos dice que en el sistema de Bose las partículas no pueden confinarse del todo *iii*) Ambos comportamientos divergentes en el potencial químico son debidos al Principio de Incertidumbre de Heisenberg (PIH).

En el apéndice A se muestra un breve análisis sobre el límite del continuo. En el apéndice B un breve análisis de la función polilogaritmo y su generalización a la función de Lerch- Φ para el estudio de los gases de Fermi y Bose. En el apéndice C se muestran las tablas BEC en átomos bosónicos y fermiónicos ultra-enfriados. En el apéndice D se muestran las derivadas del calor específico para el GIB.

Capítulo 1

Gas Ideal de Fermi

En este capítulo estudiaremos el gas ideal de Fermi, partiendo de la función del gran potencial termodinámico $\Omega(\mu, T, L^d)$, analizamos el potencial químico en función de la temperatura $\mu(T)$, así como también el calor específico $C_V(T, L^d)$ en dimensiones $0 < d < 3$ para toda T . El cálculo del potencial químico y el calor específico se llevan a cabo con técnicas de cálculo numérico y encontramos los límites cuando $T \rightarrow \infty$ y para $T \rightarrow 0$ en cualquier dimensión $d > 0$, entera o no. La divergencia encontrada en el potencial químico cuando $d \rightarrow 0$ “punto¹ cuántico ideal” es debido al principio de exclusión de Pauli (PEP).

1.1. Potencial Termodinámico

Consideremos un sistema físico compuesto de N partículas idénticas confinadas en un volumen $V = L^d$ de dimensiones $d > 0$ donde d es la dimensión. Nuestro análisis se centrará en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$ pero su razón, la densidad de número $n = N/L^d$ permanece constante. En el marco teórico del ensemble gran canónico Ref.[88, pág. 92], en donde tenemos intercambio de energía y de partículas, nuestras variables serán el potencial químico μ , el volumen L^d y la temperatura T . El potencial termodinámico (o gran potencial) para un gas ideal cuántico en dimensiones $d > 0$ [88, pág. 134] está dado por

$$\Omega(\mu, T, L^d) = \frac{1}{a} \sum_n \ln [1 + az \exp(-\beta \varepsilon_n)] \quad (1.1)$$

dónde $\beta = 1/k_B T$, k_B la constante de Boltzmann. El gran potencial $\Omega(\mu, L^d, T)$ depende de las variables μ , T y L^d y la conexión con la estadística de las partículas es a través de la gran función de partición Ref.[88, pág. 134], $\ln \Xi(\mu, T, V) = \Omega(\mu, T, L^d)$. Si $a = 0$ se tiene la estadística de Maxwell-Boltzmann (MB, caso clásico), si $a = 1$ la de Fermi-Dirac (FD) y si $a = -1$ es la de Bose-Einstein (BE) como resultado de las funciones de onda antisimétricas y simétricas, para los casos $a = 1$, $a = -1$ respectivamente; $z = \exp(\beta\mu)$ es la fugacidad² del

sistema y ε_n los eigenvalores de la energía de una partícula en el estados n . En el caso clásico $a = 0$ se puede ver de (1.1) que

$$\Omega(\mu, L^d, T)_{\text{MB}} = z \sum_n \exp(-\beta\varepsilon_n). \quad (1.2)$$

Consideremos un gas ideal cuántico en $d > 0$ dimensiones, el hamiltoniano asociado al sistema es $H = \sum_{i=1}^d p_i^2/2m$, sus eigenvalores están dados por

$$\varepsilon_n = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2} \sum_{i=1}^d n_i^2 \quad (1.3)$$

donde $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es el número de partículas en el nivel de energía ε_n . Definamos $k_i \equiv (2\pi/L)n_i$ el momento de una sola partícula en el nivel de energía ε_i , se encuentra que la relación de dispersión energía-momento es

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^d k_i^2. \quad (1.4)$$

Así el gran potencial se puede escribir como

$$\Omega = \frac{1}{a} \sum_k \ln [1 + a z \exp(-\beta\varepsilon_k)]. \quad (1.5)$$

Usando la expansión del logaritmo $\ln(1+x) = -\sum_{l=1}^{\infty} (-x)^l/l$ para $|x| < 1$ se puede reescribir como

$$\Omega(\mu, L^d, T) = -\frac{1}{a} \sum_k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[-a z \exp(-\beta\varepsilon_k)]^l}{l}. \quad (1.6)$$

En el límite termodinámico, la suma sobre ε_k puede aproximarse por una integral (ver apéndice A y Refs. [88, 89])

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (2s+1) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int d^d k_i \quad (1.7)$$

donde s es el espín de la partícula. Esta expresión es válida en $d \neq 0$, puesto que si tomamos $d = 0$ de la expresión (1.4) vemos que solo tenemos un estado $n = 0$, el estado base ε_0 . Sustituyendo (1.7) en (1.6)

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{1}{a} (2s+1) (L/2\pi)^d \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-az)^l}{l} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \exp[-\beta l (\hbar^2/2m) k_1^2] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \exp[-\beta l (\hbar^2/2m) k_2^2] \dots \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_d \exp[-\beta l (\hbar^2/2m) k_d^2] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Haciendo $x = \beta\varepsilon_k$ y tomando el límite continuo dónde $\hbar^2/mL^2 \ll k_B T$ y puesto que las aproximaciones se vuelven exactas en $N \rightarrow \infty$, se puede resolver esta integral de acuerdo con [62], obteniendo

$$\Omega = -\frac{1}{a}(2s+1)\beta^{-d/2+1} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)^{d/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-az)^l}{l^{d/2+1}} \quad (1.9)$$

Podemos identificar la suma en términos de las funciones de Fermi si $a = 1$ de la forma

$$f_\nu(z) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-z)^l}{l^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}\exp x + 1} \quad (1.10)$$

donde $0 \leq z < \infty, \nu > 0$ y las funciones de Bose si $a = -1$

$$g_\nu(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(z)^l}{l^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}\exp x - 1} \quad (1.11)$$

donde $0 \leq z < 1, \nu > 0$, ver Ref. [88, apéndices D, E]. Éstas funciones se pueden generalizar mediante la función Polilogaritmo $\text{Li}_\nu(z)$ [86, 90] y se asocian con las integrales de Fermi ($a = 1$) y Bose ($a = -1$) de la forma

$$-a\text{Li}_{d/2}(-az) = \frac{1}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dx \frac{x^{d/2-1}}{z^{-1}\exp x + a}. \quad (1.12)$$

Así, se puede expresar el gran potencial para los gases ideales de Fermi y de Bose de la forma

$$\Omega(\mu, T, L^d) = -aA_d \frac{\text{Li}_{d/2+1}(-az)}{\beta^{d/2+1}} \quad (1.13)$$

dónde $A_d = (2s+1)(mL^2/2\pi\hbar^2)^{d/2}$. La función polilogaritmo es una función compleja de variable compleja con dominio $\{\mathbb{C} \setminus [1, \infty)\}$ y $-\infty < \text{Re}[z] < 1$.

La ecuación de estado para el gas ideal cuántico es

$$d\Omega(\mu, T, L^d) = -SdT - Pd(L^d) - Nd\mu$$

dónde N es el número de partículas, P la presión y S la entropía. Así, podemos encontrar las propiedades termodinámicas del sistema al calcular las correspondientes derivadas de (1.13)

$$N \equiv -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{L^d, T} \quad (1.14)$$

$$P \equiv -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial L^d}\right)_{\mu, T} \quad (1.15)$$

$$S \equiv -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{\mu, L^d}. \quad (1.16)$$

La energía interna U puede encontrarse en la Ref. [88, pág. 159] con la relación

$$U \equiv -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Omega}{k_B T} \right)_{\mu, L^d} \quad (1.17)$$

el calor específico $C_V(T, V)$ se puede encontrar al derivar esta expresión con respecto a T , dejando N y V constantes.

Resulta interesante estudiar las diferentes estadísticas por el número de ocupación, mediante la siguiente expresión ver Ref.[88, pág. 134]

$$n_{\varepsilon_k} = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_k - \mu)] + a} \quad (1.18)$$

donde n_{ε_k} es el número promedio de estados que ocupan las partículas con energía ε_k . Al graficar la ec. (1.18) tenemos los casos para FD cuando $a = 1$, BE cuando $a = -1$ y MB cuando $a = 0$ en la Figura 1.1 para el caso tridimensional $d = 3$.

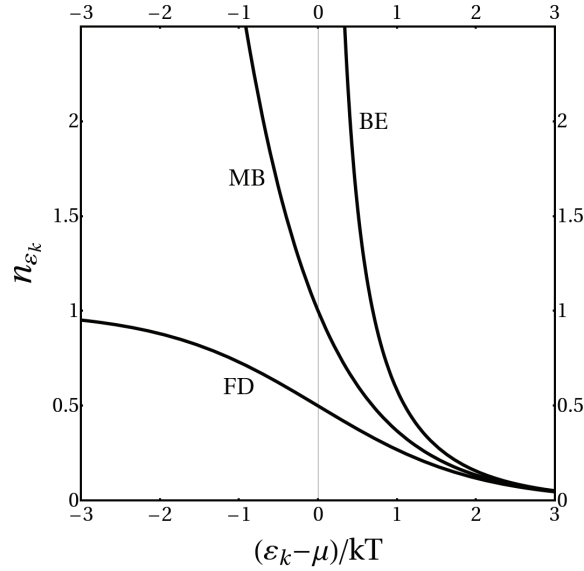


Figura 1.1: El número de ocupación media n_{ε_k} de las estadísticas de Fermi-Dirac (FD) si $a = 1$, Bose-Einstein (BE) si $a = -1$ y Maxwell-Boltzmann (MB) si $a = 0$ de un gas de partículas sin interacción confinadas en un volumen L^3 ($d = 3$). Figura generada por el autor a partir de la estadística de la expresión (1.18).

Observamos que para FD ($a = 1$) cuando $\varepsilon_k < \mu$, la energía del sistema $\varepsilon_k \rightarrow E_F$, E_F es la energía del estado base llamada energía de Fermi y $\langle n_{\varepsilon_k} \rangle \rightarrow 1$, es decir solo está ocupado por una sola partícula. Ahora, para BE ($a = -1$) observamos que si $\mu \rightarrow 0$, ε_k/kT tiende al valor más bajo, digamos un ε_0 y

tenemos que el número de ocupación media se vuelve infinito, esto es conocido como el estado de condensación de Bose-Einstein en dimensiones $d = 3$. Ambos casos tienden al límite clásico cuando $|\varepsilon_k - \mu| \ll kT$.

1.2. Potencial Químico

Para el GIF confinado en un volúmen L^d de dimensión $d > 0$ y con una relación de dispersión energía-momento cuadrática, el gran potencial (1.13) es

$$\Omega \equiv -A_d \frac{\text{Li}_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}} \quad (1.19)$$

dónde $A_d = (2s+1) (mL^2/2\pi\hbar^2)^{d/2}$ y $\beta \equiv 1/k_B T$. Podemos observar, sin perder generalidad que el término $2s+1 = 2$ ya que estamos considerando fermiones $s = 1/2$, por simplicidad en los cálculos tomaremos $s = 0$ sabiendo que nos referimos a fermiones y de la misma forma en el caso de bosones. Usaremos la notación de las integrales de Fermi $f_\nu(z) = -\text{Li}_\nu(-z)$ o Bose $g_\nu(z) = \text{Li}_\nu(z)$ para referirnos a tal sistema segun sea el estudio.

El potencial químico para el GIF como función de la temperatura absoluta para cualquier dimension $d > 0$ se encuentra de la ecuación de número (1.14)

$$N = A_d \frac{f_{d/2}(z)}{\beta^{d/2}} \quad (1.20)$$

ó también

$$N = \frac{1}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\exp(\beta[\varepsilon - \mu]) + 1}. \quad (1.21)$$

Ésta ecuación también se puede escribir como

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon) \quad (1.22)$$

donde

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \quad (1.23)$$

es la densidad de estados (DOS, por sus siglas en inglés) y

$$n(\varepsilon) = [\exp(\beta[\varepsilon - \mu]) + 1]^{-1} \quad (1.24)$$

es la distribución de Fermi-Dirac. En $T = 0$, $n(\varepsilon) = \theta(E_F - \varepsilon)$ es la función escalón y $\mu(T) \equiv E_F$ es la energía de Fermi, entonces de la ec. (1.21) se obtiene

$$n \equiv \frac{N}{L^d} = \frac{1}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{2}{d} \right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} E_F^{d/2} \quad (1.25)$$

donde $E_F \equiv k_B T_F$. El potencial químico $\mu(T)$ se encuentra de (1.25) y (1.21) ya que la densidad n es constante para cualquier temperatura, obtenemos la siguiente expresión para cualquier dimension $d > 0$

$$T^{d/2} \Gamma(d/2) f_{d/2}(z) = \frac{2}{d} T_F^{d/2}. \quad (1.26)$$

En $d = 2$, $f_1(z) = \ln(1 + z)$ (Ref. [88, Apéndice E]); esto nos conduce a una forma analítica para el potencial químico cuando $T \rightarrow 0$ de la forma

$$\mu(T)/E_F = (T/T_F) \ln(\exp(T_F/T) - 1) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 1$$

puesto que $\mu(0)/E_F = 1$ y cuya expresión no es expandible en serie de potencias para T/T_F . Para $d \neq 2$ el potencial químico no se puede expresar de forma analítica, éste se encuentra numéricamente de (1.26) en función de la temperatura absoluta en unidades de la temperatura de Fermi (T/T_F). Al graficar $\mu(T)/E_F$ obtenemos la Figura 1.2 para dimensiones $d = 1/2, 3/4, 1, 2, 3$. Se observa el comportamiento monótono en dimensiones $d \geq 2$, y el curioso comportamiento no-monótono para dimensiones $d < 2$ [57].

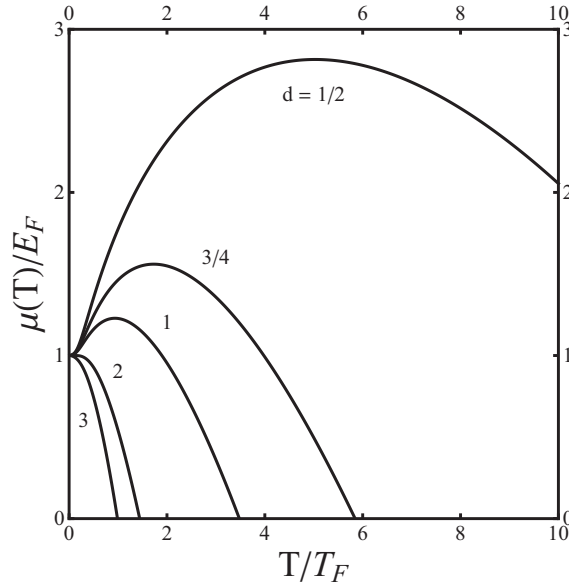


Figura 1.2: El Potencial químico en función de la temperatura absoluta en unidades de la energía de Fermi $\mu(T)/E_F$ contra la temperatura absoluta en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F para un gas ideal de Fermi en dimensiones $d = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 2, 3$. Figura tomada de la Ref. [57] y reproducida aquí.

Encontremos ahora los límites para el potencial químico. Usando la expansión para z -grandes (Ref. [88, apéndice E]), es decir, cuando $T \rightarrow 0$ donde $f_\nu(z) \simeq (\ln z)^\nu/\Gamma(\nu+1) + (\pi^2/6)(\nu-1)(\ln z)^{\nu-2}/\Gamma(\nu) + \dots$, obtenemos

$$\mu(T)/E_F \xrightarrow{T/T_F \rightarrow 0} 1 - (d/2 - 1)(\pi^2/6)(T/T_F)^2 + O(T^4) \quad (1.27)$$

ésta es la llamada expansión de Sommerfeld para T pequeñas [88, Apéndice E], notemos que a primer orden es positivo para toda $d \leq 2$, mientras que para T suficientemente grandes el potencial químico diverge negativamente. Ahora, usando la expansión para z -pequeñas (ver Ref. [88, apéndice E]), es decir $T \rightarrow \infty$ y $f_\nu(z) \simeq z - z^2/2^\nu + z^3/3^\nu - \dots$, obtenemos

$$\mu(T)/E_F \xrightarrow{T/T_F \rightarrow \infty} -(T/T_F) \ln \left[\Gamma(d/2)(T/T_F)^{d/2}(d/2) \right] \quad (1.28)$$

el cuál, es el límite clásico para T grandes.

1.2.1. Dimensión $d \rightarrow 0$

Ahora, analicemos que sucede con $\mu(T)$ cuando $d \rightarrow 0$. Si $d \rightarrow 0$, $V \rightarrow 1$ es un “punto cuántico ideal”, observamos que la densidad $n = N/L^{d-0} \rightarrow N$ y la función de Fermi $f_{d/2}(z) \xrightarrow{d \rightarrow 0} Li_0(z)$ [2], entonces de la ec. (1.20) tenemos

$$\lim_{d \rightarrow 0^+} n = \lim_{d \rightarrow 0^+} N/L^d = -Li_0(-z) \quad (1.29)$$

y como $Li_0(z) = z/1+z$ podemos decir

$$n_{d \rightarrow 0} = -\frac{z}{1+z} \quad (1.30)$$

como $z \equiv \exp(\beta\mu)$ podemos tomar logaritmos y dejamos al potencial químico como

$$\beta\mu(T) = \ln \left[\frac{n_{d \rightarrow 0}}{1 - n_{d \rightarrow 0}} \right] \quad (1.31)$$

si $n_{d \rightarrow 0} \rightarrow 1$ tenemos que $\mu \rightarrow +\infty$. El potencial químico diverge cuando el sistema de fermiones es confinado en $d \rightarrow 0$. Esto nos dice que el sistema ya no tiene la capacidad de aceptar partículas, es decir, necesitamos un trabajo infinito sobre el sistema para que esto ocurra. Esta divergencia es debida al principio de exclusión de Pauli que enuncia que en el espacio de configuración solo puede ser ocupado por una partícula.

1.3. Calor Específico

La expresión del calor específico para un gas ideal se obtiene a partir del cambio de la energía interna del sistema con respecto a la temperatura dejando el volumen constante

$$C_V(T, L^d) \equiv \left[\frac{\partial U(T, L^d)}{\partial T} \right]_{L^d} \quad (1.32)$$

La energía interna (1.17) la calculamos de la ec. (1.13) para el GIF [88, pág. 399], encontramos que

$$U(T, L^d) = \frac{d}{2} \frac{N}{\beta} \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} = \frac{d}{2} N k_B T \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} \quad (1.33)$$

Usando las relaciones de recurrencia [88, apéndice E] para la función de Fermi

$$z \frac{\partial f_{d/2}(z)}{\partial z} = \frac{\partial f_{d/2}(z)}{\partial \ln(z)} = f_{d/2-1}(z) \quad (1.34)$$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N, L^d} = -k_B \beta (d/2) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)} \quad (1.35)$$

se encuentra que el calor específico es

$$\begin{aligned} C_V(T, L^d) &= \frac{d}{2} A_d \left[(d/2 + 1) k_B f_{d/2+1}(z) + \frac{f_{d/2}}{\beta^{d/2+1}} \frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{L^d} \right] \\ &= \frac{d}{2} N k_B (d/2 + 1) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} - \frac{d}{2} N k_B (d/2) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2+1}(z)} \end{aligned} \quad (1.36)$$

reagrupando, se obtiene el calor específico para un gas de fermiones para cualquier dimensión $d > 0$

$$\frac{2C_V(T, L^d)}{dNk_B} = (d/2 + 1) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} - (d/2) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2+1}(z)}. \quad (1.37)$$

Podemos graficar la última expresión en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F , al resolver numéricamente para $\mu(T)$. De esta forma al graficar (1.37) obtenemos la Figura 1.3.

En la Figura 1.3 encontramos una “estructura” que aparece en dimensiones $d < 2$, sin embargo no hay transición de fase ya que el cambio en la pendiente es continuo. Al no existir una temperatura crítica T_c puesto que el potencial químico, si bien es la unidad en $T = 0$, $2C_V(T, L^d)/dNk_B$ es continua para todo T , el calor específico manifiesta una “anomalía” en $d < 2$ [57] cuando su primera derivada cambia de signo lo que es un reflejo del comportamiento no-monótono del potencial químico. Para dimensiones $d \geq 2$ desaparece la estructura. Es notable mencionar que esta configuración aparece en el gas ideal de Bose en dimensiones $d > 2$ encontrando la famosa transición de fase del condensado, ya que en este caso, si existe una discontinuidad en la primera derivada.

Los límites para el calor específico cuando $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$ se encuentran a partir de la expansión de z -grandes para $f_{d/2}(z)$, ($T \rightarrow 0$) obtenemos la expansión para la energía interna $U(T, L^d)$

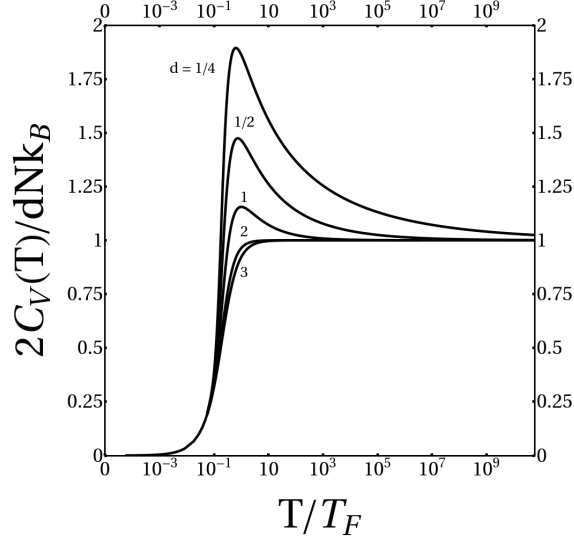


Figura 1.3: El calor específico $2C_V(T)/dNk_B$ en función de la temperatura absoluta en unidades de la temperatura de Fermi (T/T_F) desde $T = 0$ hasta temperaturas del orden de 10^{10} para dimensiones $d = 1/4, 1/2, 1, 2, 3$. Figura generada por el autor, aparecida en la Ref. [57] para T pequeñas.

$$2U(T, L^d)/dNE_F \xrightarrow{T \rightarrow 0} \left(\frac{2}{d+2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \quad (1.38)$$

Para el límite clásico $T \rightarrow \infty$ usamos la expansión de z -pequeñas para $f_{d/2}(z) \simeq z - z^2/2^{d/2} + \dots$ y de (1.33) se obtiene

$$2U/dN \xrightarrow{T \rightarrow \infty} k_B T. \quad (1.39)$$

Notemos que si $d = 3$ recuperamos de (1.39) la expresión clásica de la energía interna para un gas ideal, $U = \frac{3}{2}Nk_B T$. Al calcular las derivadas de (1.38) y (1.39) se encuentran los límites para $C_V(T, L^d)$ cuando $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$, respectivamente

$$2C_V(T, L^d)/dNk_B \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{T_F} \quad (1.40)$$

$$2C_V(T, L^d)/dNk_B \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1 + \frac{z}{2^{d/2+1}}(1 - d/2). \quad (1.41)$$

Observemos de (1.40) que cuando $T \rightarrow 0$, $2C_V(T, L^d)/dNk_B$ es lineal para toda dimensión $d > 0$. En (1.41) el segundo término tiende a cero, puesto que $T \rightarrow \infty$ y $z \rightarrow 0$ entonces $2C_V(T, L^d)/dNk_B \rightarrow 1$ para toda dimensión $d > 0$, que corresponde al resultado clásico para el gas ideal y que está de acuerdo con el límite de las expresiones de Einstein y Debye del calor específico de un sólido.

1.3.1. Dimensión $d \rightarrow 0$

Ahora, analicemos que sucede con el calor específico cuando $d \rightarrow 0$. Observamos de (1.37)

$$\frac{2C_V(T, L^d)}{dNk_B} \xrightarrow{d \rightarrow 0} \frac{f_1(z)}{f_0(z)} \quad (1.42)$$

y puesto que $f_1(z) = \ln(1 - z)$ y $f_0(z) = -z/1 + z$ [88] obtenemos

$$\frac{2C_V(T, L^d)}{dNk_B} \xrightarrow{d \rightarrow 0} -(1 + z) \frac{\ln(1 - z)}{z}, \quad (1.43)$$

tenemos que $C_V > 0$ para toda d entonces si $-z \ln(1 - z) = \ln(1 - z)$ entonces $z = -1$ pero si $z = -1 \Rightarrow \ln(-1) = \beta\mu$, lo cuál es absurdo puesto que el potencial químico siempre es positivo. Si $z = 1$ la igualdad se cumple, esto implica que $\mu \rightarrow +\infty$ como ya habíamos observado en la sección anterior del potencial químico. Ésta estructura se manifiesta como un “hombro” [57] en el calor específico y cuya interpretación [1] está en el principio de exclusión de Pauli y lo que nos muestra es que el sistema en $d \rightarrow 0$ (“punto cuántico ideal”), no puede aceptar más partículas $\mu(T) \rightarrow +\infty$ ya que tiene energía infinita y se ve reflejado en $C_V(T, L^d) \xrightarrow{d \rightarrow 0} \infty$ para toda T .

Notas

¹Tenemos que el volúmen del sistema es $V = L^d$ si consideramos $d \rightarrow 0$, $V \rightarrow 1$, el cual define un punto ideal en la dimensión espacial. Ahora bien, el punto es un elemento geométrico adimensional, no tiene ni volúmen, ni área ni longitud ni otro análogo dimensional; no es un objeto físico; describe una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas preestablecido. En este estudio como en toda la termodinámica de los gases ideales se consideran a las partículas puntuales, aunque se asocia la masa a través de la ecuación del número de partículas N , sin embargo el límite termodinámico se respeta pues mientras $L \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$ con la densidad de número $n \equiv N/L^d$ constante. En este estudio no es importante, por el momento el volúmen o el espacio dimensional que ocupa cada partícula, aunque encontramos que una sola partícula “puntual”, solo puede ocupar el espacio puntual ideal $d = 0$ en el caso del gas de Fermi, mientras que para el gas de Bose ninguna partícula puede ocupar este espacio puntual ideal.

²La fugacidad es usada para aproximar la presión de los gases reales que los estimados usando la ley de los gases ideales. La fugacidad nos permite usar muchas relaciones desarrolladas por un sistema. En el mundo real, los gases se aproximan al comportamiento del gas ideal a bajas presiones y altas temperaturas, bajo ciertas condiciones el valor de la fugacidad se aproxima al valor de la presión ya que ninguna sustancia es realmente ideal. A presiones moderadas los gases reales tienen interacciones de atracción y en altas presiones las repulsiones intermoleculares se vuelve importantes. Ambas interacciones resultan en una desviación del comportamiento “ideal” en donde esas interacciones entre átomos o moléculas pueden ser ignoradas.

Capítulo 2

Gas Ideal de Bose

En este capítulo estudiaremos el gas ideal de Bose (GIB). Analizaremos el potencial químico en función de la temperatura $\mu(T)$, así como también el calor específico $C_V(T, V)$ en dimensiones $0 < d \leq 3$ para toda T . Calculamos la temperatura de transición T_c para la BEC en $d = 3$, mientras que para $d < 2$ no existe transición de fase, $T_c = 0$. Encontramos el potencial químico y el calor específico numéricamente mostrando nuestros resultados gráficamente en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F , debido a que nos interesa comparar ambos sistemas ya que en el siguiente capítulo discutiremos la equivalencia entre ambos gases. Encontramos el comportamiento de μ y C_V cuando $T \rightarrow 0$ y para $T \rightarrow \infty$ en cualquier dimensión $d > 0$. Analizamos también el caso $d = 0$, el “punto cuántico ideal” donde $n/n_F = 0$ nos conduce a que la fugacidad $z \rightarrow 0$, es decir, $\mu \rightarrow -\infty$ debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.

2.1. Potencial Químico

Para el GIB confinado en un volumen L^d y con una relación energía-momento cuadrática, el gran potencial (1.13) es

$$\Omega(\mu, T, L^d) = \Omega_0 + A_d \frac{g_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}} \quad (2.1)$$

donde Ω_0 es el potencial termodinámico en el estado base. El número de partículas en el GIB es $N = -(\partial\Omega/\partial\mu)_{T, L^d}$, derivando (2.1) encontramos

$$N = N_0 + N_e = N_0 + A_d \frac{g_{d/2}(z)}{\beta^{d/2}} \quad (2.2)$$

donde N_0 es el número de bosones en el estado base y N_e son los que están en los estados excitados, $A_d = (mL^2/2\pi\hbar^2)^{d/2}$, $z = \exp(\beta\mu)$ es la fugacidad del sistema y $\beta = 1/k_B T$. La temperatura crítica del sistema T_c se obtiene cuando $N_0 = 0$, es decir cuando $\mu = 0$, $z \rightarrow 1$, de la ec. (2.2) encontramos

$$k_B T_c = \left(\frac{N}{A_d g_{d/2}(1)} \right)^{2/d}. \quad (2.3)$$

Ahora, si $d = 3$, nos lleva a $(N\beta^{3/2}/A_3) = g_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ puesto que $g_{d/2}(z) = Li_{d/2}(z)$, $Li_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ ver Refs. [85, 90] donde $\zeta(3/2)$ es la función zeta de Riemann de orden $3/2$ y $A_3 = (mL^2/2\pi\hbar^2)^{3/2}$ entonces podemos encontrar

$$k_B T_c = (2\pi\hbar^2/mL^2)^{3/2} (N/\zeta(3/2))^{2/3}$$

la conocida expresión para la temperatura crítica para la BEC en $d = 3$. Podemos observar que si $d \leq 2$ y $z \rightarrow 1$ la función de Bose $g_{d/2}(1) \rightarrow \infty \Rightarrow T_c = 0$ no hay temperatura crítica y por tanto no existe la BEC en $d \leq 2$.

El potencial químico para el GIB lo encontramos a partir de la ec. (2.2) y la función de Bose $g_{d/2}(z)$ en su representación integral [88, Apéndice D] de forma que la densidad $n = N/L^d$ sea constante, para cualquier dimension $d > 0$ es

$$n = \frac{A_d}{\beta^{d/2} L^d} g_{d/2}(z). \quad (2.4)$$

Ahora, dividiendo la ec. (2.4) por $n_F \equiv (k_F^2/4\pi)^{d/2}/\Gamma(d/2 + 1)$ obtenemos

$$n/n_F = \Gamma(d/2 + 1)(T/T_F)^{d/2} g_{d/2}(z) \quad (2.5)$$

donde $T_F \equiv E_F/k_B \equiv \hbar^2 k_F^2/2mk_B$, de esta forma podemos adimensionalizar el sistema, además de que podremos comparar ambos sistemas en el capítulo 3.

El potencial químico se obtiene de (2.5) para $0 < d \leq 3$ y $n/n_F = 1$, el resultado se muestra en la Figura 2.1, el comportamiento de $\mu(T)/E_F$ para $n/n_F = 1$ con d como parámetro. Podemos observar que $\mu(0)/E_F = 0$ para toda d , en $d = 2$ y en dimensiones $d \leq 2$ observamos que no existe condensación para el GIB, en esta figura es interesante observar que mientras la dimensión $d \rightarrow 0$ y $T \rightarrow 0$ tenemos una zona que no es “mapeada” por el potencial químico, la zona $0 \leq T/T_F \leq 1.5$ donde $\mu \rightarrow -\infty$ cuando $T \gg 1$, solución que podría alcanzarse en la discusión del límite del continuo en el apéndice A.

En la Figura 2.2 graficamos z vs T/T_F vs d , donde $z = \exp(\beta\mu)$, donde tenemos diferentes valores de la densidad n/n_F . Observamos que cuando $n/n_F \rightarrow 0$, $\mu(T) \rightarrow -\infty$ para toda T . En la Figura 2.3 observamos el comportamiento en la densidad $n/n_F \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow 0$, de forma que $\mu \rightarrow -\infty$. El potencial químico está asociado con la función de trabajo termodinámico, de forma que si $\mu > 0$ los alrededores ejercen un trabajo sobre el sistema para introducir una nueva partícula, cuando $\mu < 0$ se interpreta que el sistema ejerce un trabajo sobre los alrededores, es decir el sistema está sacando las partículas del sistema y las cede a sus alrededores. Cuando $\mu \rightarrow -\infty$ nos está diciendo que no pueden existir partículas en el sistema, esto implica que $n/n_F = 0$. Las partículas en el sistema de Bose no puede confinarse cuando $d \rightarrow 0$.

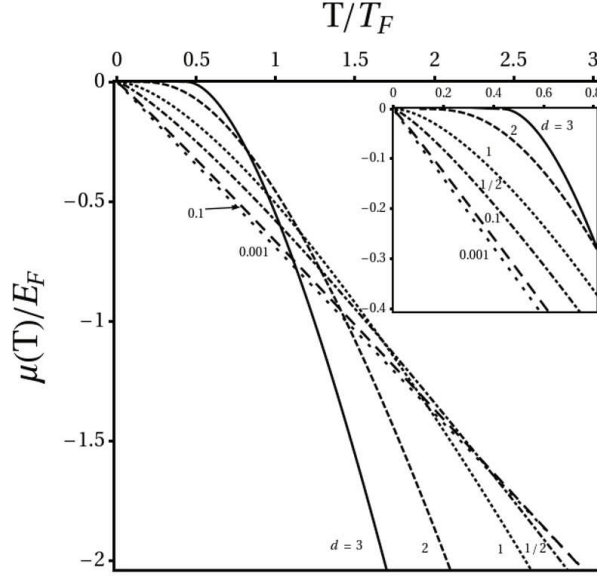


Figura 2.1: Potencial químico $\mu(T)/E_F$ para el gas de Bose en $d = 3, 2, 1, 1/2, 0.1, 0.001$ y densidad $n/n_F = 1$.

2.1.1. Dimension $d \rightarrow 0$

Cuando $d \rightarrow 0$ [91] la ecuación (2.5) se puede expresar

$$\lim_{d \rightarrow 0^+} n/n_F = \text{Li}_0(z) \quad (2.6)$$

como $\text{Li}_0(z) = g_0(z) = z/1 + z$ podemos decir que

$$n_{d \rightarrow 0} = \frac{z}{1 + z} \quad (2.7)$$

como $z \equiv \exp(\beta\mu)$ tomando logaritmos llegamos a la expresión para el potencial químico cuando $d \rightarrow 0$

$$\beta\mu(T) = \ln \left[\frac{n_{d \rightarrow 0}}{1 + n_{d \rightarrow 0}} \right] \quad (2.8)$$

como $n = N/L^d$ cuando $d \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow N$, observamos $\mu < 0$ para toda N y para toda T . Cuando $n_{d \rightarrow 0} \rightarrow 0$ encontramos que $\mu \rightarrow -\infty$. Tenemos que cuando $d \rightarrow 0$ al “punto cuántico ideal”, las partículas en el sistema de Bose no pueden confinarse puesto que $n_{d \rightarrow 0} = N \rightarrow 0$.

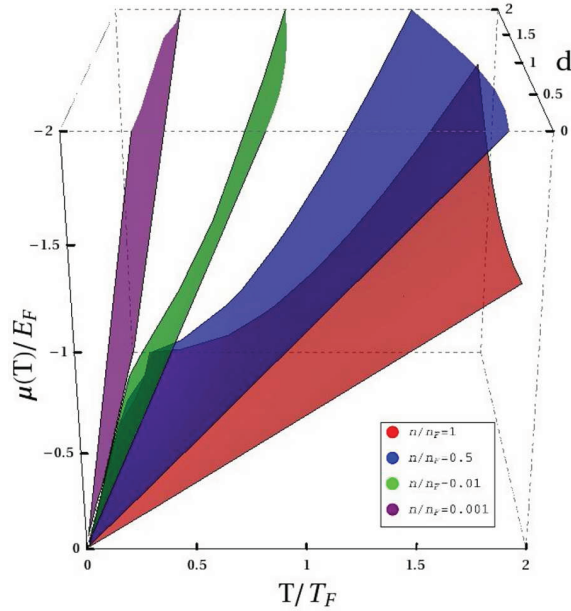


Figura 2.2: Potencial químico $\mu(T)/E_F$ para el gas de Bose en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F para dimensiones $0 < d < 2$, con la densidad de número como parámetro para $n/n_F = 1, 0.5, 0.01, 0.001$.

Estas soluciones se discuten en el apéndice B con la generalización de las funciones polilogaritmo, puesto que $\text{Li}_\nu(z)$ no es analítica en $d = 0$ [91], en este estudio usamos las relaciones de recurrencia [88] en las integrales de Fermi y Bose para aproximarnos a $d \rightarrow 0$.

2.2. Calor Específico

La energía interna para el IBG se encuentra a partir de (1.17) obteniendo

$$U(T, L^d) = \frac{d N}{2 \beta} \frac{g_{d/2+1}(z)}{g_{d/2}(z)} \quad (2.9)$$

derivando ésta expresión con respecto a T dejando N, L^d constantes obtenemos el calor específico $C_V(T, L^d)$

$$C_V(T, L^d) = \frac{d}{2} \frac{A_d}{\beta^{d/2}} \left[k_B (d/2 + 1) g_{d/2+1}(z) - \frac{\mu(T)}{T} g_{d/2}(z) \right] \quad (2.10)$$

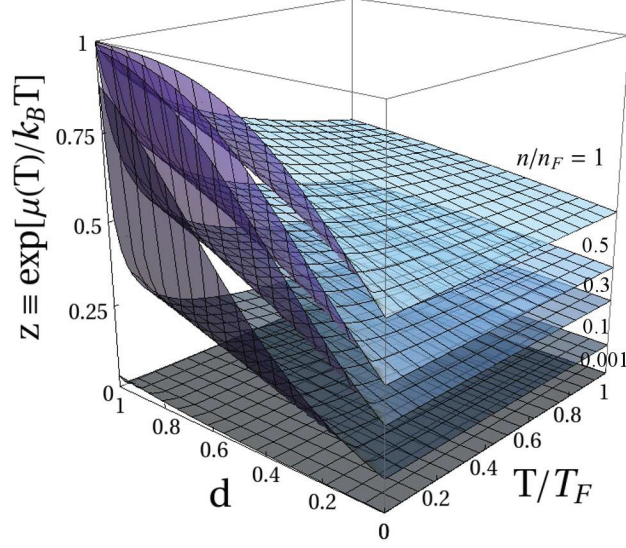


Figura 2.3: La fugacidad z para el gas de Bose en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F para dimensiones $0 < d < 1$ con la densidad de número como parámetro para densidades $n/n_F = 1, 0.5, 0.3, 0.1, 0.001$.

substituyendo A_d en la expresión anterior y usando la relación de recurrencia ver Ref. [88]

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N,V} = -k_B \beta (d/2) \frac{g_{d/2}(z)}{g_{d/2-1}(z)}$$

obtenemos el calor específico para un gas de Bose en cualquier dimensión $d > 0$

$$C_V(T, V) = \frac{d}{2} N k_B \left[(d/2 + 1) \frac{g_{d/2+1}(z)}{g_{d/2}(z)} - (d/2) \frac{g_{d/2}(z)}{g_{d/2-1}(z)} \right]. \quad (2.11)$$

El calor específico es la cantidad de energía necesaria para elevar un grado la temperatura del sistema, es decir, podemos agregar energía al sistema y esperar que pueda ocurrir una transición de fase. Esta transición se tiene cuando existe una discontinuidad en la primera derivada de C_V , es decir, hay un cambio súbito en la pendiente en la curva del calor específico, a esto se le conoce como una transición de fase de primer orden [92]. Analicemos cualitativamente C_V en $d = 3$, resolviendo numéricamente (2.11) obtenemos la Figura 2.4.

Observamos este cambio abrupto en la pendiente en $C_V(T, V)/N k_B$ en $d = 3$, este cambio en la pendiente nos muestra una transición de fase en el gas

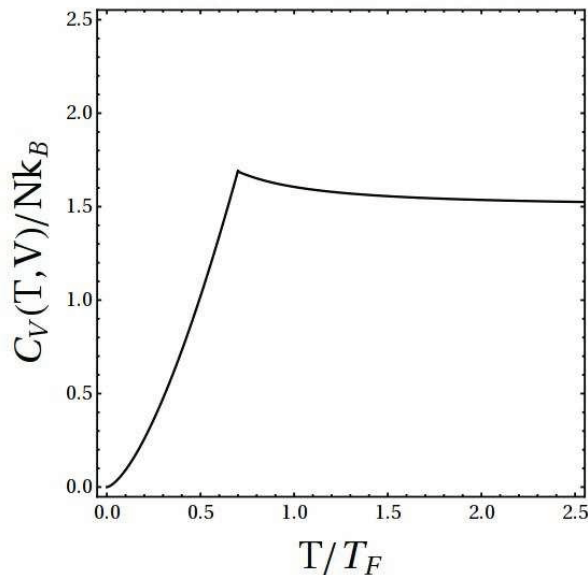


Figura 2.4: El calor específico $C_V(T, V)/Nk_B$ para el gas de Bose, en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F , para dimensión $d = 3$.

de Bose, ésta es la conocida condensación de Bose-Einstein (BEC). Siguiendo este análisis, podemos continuar gráficamente al resolver numéricamente el calor específico para dimensiones $d \leq 2$ obteniendo la Figura 2.5. Observamos que no existe cambios abruptos en la pendiente de las curvas del calor específico, es decir, no existe condensación de Bose-Einstein en $d \leq 2$ entera o no.

2.3. Casos límite de C_V

El calor específico para un gas ideal de Bose con una relación cuadrática energía-momento para cualquier dimensión es

$$\frac{2C_V(T, L^d)}{dNk_B} = \frac{d+2}{2} \frac{g_{d/2+1}(z)}{g_{d/2}(z)} - \frac{d}{2} \frac{g_{d/2}(z)}{g_{d/2-1}(z)}. \quad (2.12)$$

2.3.1. Dimensión $d = 3$

Encontremos el calor específico cuando $T < T_c$, es decir cuando $\mu(T) = 0 \Rightarrow z = 1$, entonces de la expresión (2.12) queda como

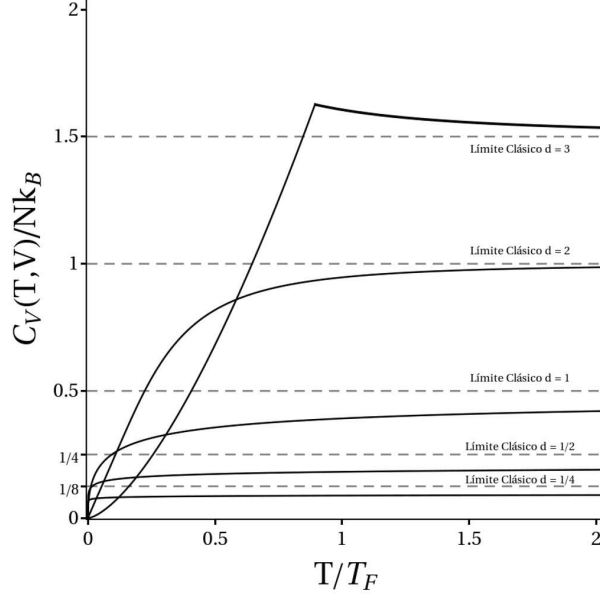


Figura 2.5: El calor específico $C_V(T, V)/Nk_B$ en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F , para dimensiones $d = 3, 2, 1, 1/2, 1/4$.

$$\frac{2C_V(T, L^d)}{dNk_B} = \frac{d+2}{2} \frac{g_{d/2+1}(1)}{g_{d/2}(1)} - \frac{d}{2} \frac{g_{d/2}(1)}{g_{d/2-1}(1)} \quad (2.13)$$

si $d = 3$ el segundo término se anula puesto que la función de bose $g_{1/2}(1)$ diverge, entonces tenemos $C_V(T_c)$

$$\frac{C_V(T_c)}{Nk_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \simeq 1.925 \quad (2.14)$$

ya que $g_{5/2}(1) = \zeta(5/2)$ y $g_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ [85, 90]. En las figuras 2.4 y 2.5 observamos que este valor para el calor específico en T_c no se alcanza, la razón es debido a que los cálculos están normalizados con respecto a la temperatura de Fermi T_F , puesto que posteriormente vamos a comparar ambos sistemas. Ahora, cuando $T > T_c$, $z \ll 1$ y $d = 3$ tenemos

$$\frac{C_V(T, L^3)}{Nk_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad (2.15)$$

cuando $T \rightarrow \infty$, $z \equiv \exp[\mu(T)/k_B T] \rightarrow 1$ la función de bose $g_{d/2}(z) < \zeta(d/2)$ tenemos entonces

$$\frac{C_V(T, L^3)}{Nk_B} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{15 \zeta(5/2)}{14 \zeta(3/2)} - \frac{9 \zeta(3/2)}{4 \zeta(1/2)} = \frac{3}{2}$$

valor que está de acuerdo con el cálculo numérico presentado en las figuras 2.4 y 2.5.

2.3.2. Dimensión $d < 3$

Encontremos una expresión de C_V para el gas de Bose en $d = 2$, observamos que $g_1(z) = -\ln(1 - z)$, así como también $g_0(z) = z/(1 - z)$ [91] entonces sustituyendo en (2.12) obtenemos

$$\frac{C_V(T, L^2)}{Nk_B} = \frac{(1 - z)\ln(1 - z)}{z} - 2 \frac{g_2(z)}{\ln(1 - z)} \quad (2.16)$$

si esta expresión la graficamos en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F obtenemos la Figura 2.6, la cuál es idéntica si graficamos la ecuación (2.12) cuando $d = 2$.

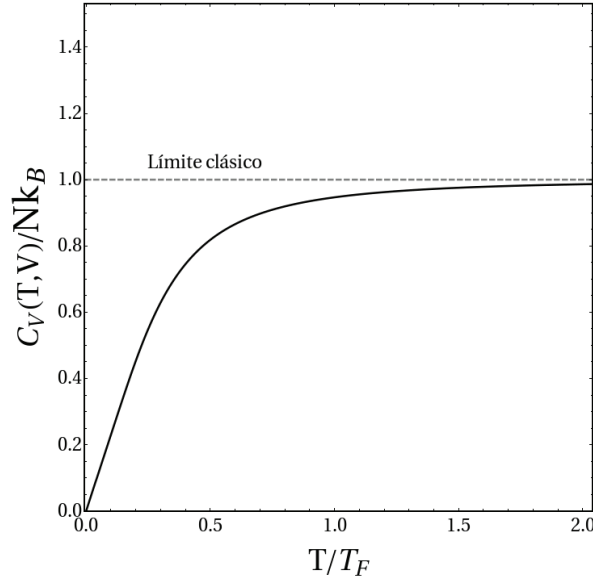


Figura 2.6: El calor específico $C_V(T, V)/Nk_B$ para el gas de Bose, en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F para $d = 2$.

Ahora, tomemos el límite del calor específico cuando $T \rightarrow \infty$; la fugacidad $z \equiv \exp(\beta\mu) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1$ ya que $\beta = 1/k_B T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ y puesto que $g_\nu(z) =$

$\sum_{l=1}^{\infty} z^l/l^\nu$, entonces $g_\nu(z) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} z$ para $\nu > 1$, substituyendo z por $g_\nu(z)$ en (2.12) obtenemos

$$\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1 \quad (2.17)$$

es el límite para toda d . Podemos calcular este límite si resolvemos numéricamente la expresión (2.12) obteniendo la Figura 2.7, la cuál esta de acuerdo con el análisis anterior.

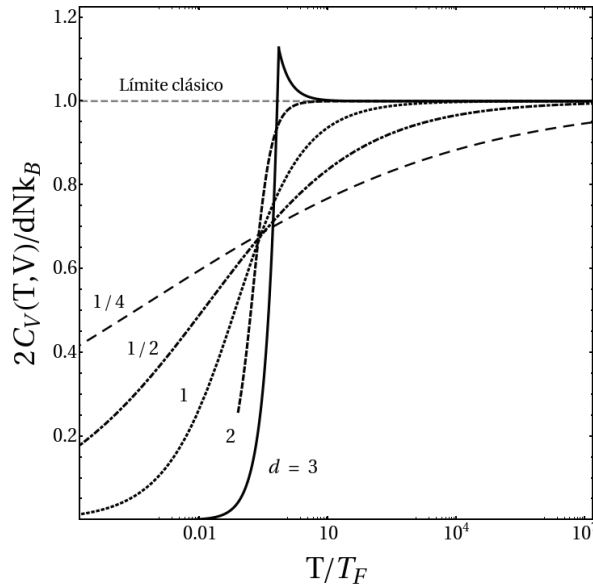


Figura 2.7: Límite para el calor específico $2C_V(T, V)/dNk_B$ en función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi T/T_F cuando $T \rightarrow \infty$ para dimensiones $d = 3, 2, 1, 1/2, 1/4$.

El límite de C_V cuando $T \rightarrow 0$ lo encontramos mediante la expresión de la fugacidad $z \equiv \exp(\mu/k_B T)$. Puesto que $T \rightarrow 0$ también $\mu \rightarrow 0$, el límite esta indeterminado. Observemos de la Figura 2.1, que en $d \leq 1$, $\mu > T$, es decir, μ se acerca más rápidamente a cero que T , en este caso $z \rightarrow 1$, la función de Bose entonces $g_{d/2}(1) = \zeta(d/2)$ la función zeta de Riemann de orden $d/2$.

Si tomamos el criterio de la segunda derivada y derivamos con respecto a la temperatura T , tenemos para $d \leq 3$,

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{2C_V(T, V)}{3Nk_B} \right) > 0$$

el calor específico tiene un mínimo relativo en el intervalo $(0,1)$, entonces es cóncava en $(0,1)$, es decir $\partial C_V/\partial T \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$. Ahora, si $d < 2$, la segunda derivada del calor específico es

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} \right) < 0$$

C_V tiene un máximo relativo en $(0,1)$, el calor específico es convexo en el intervalo abierto $(0,1)$ y $\partial C_V/\partial T \rightarrow \infty$ cuando $T \rightarrow 0$. Se pueden consultar las derivadas del C_V para el GIB en el Apéndice D.

2.3.3. Dimensión $d \rightarrow 0$

Si $d \rightarrow 0$ la segunda derivada

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} \right) \rightarrow \infty$$

de igual forma ocurre cuando $d = 2$ el calor específico diverge cuando $T \rightarrow 0$. El análisis de la segunda derivada nos muestra que cuando $T \rightarrow 0$ en el “punto cuántico ideal” $d \rightarrow 0$ el calor específico $C_V \rightarrow \infty$, resultado que esta de acuerdo con nuestro análisis puesto que $\mu \rightarrow -\infty$, sin embargo para toda T en dimensión $d \rightarrow 0$ no existe energía disponible para cambiar la temperatura del sistema $C_V \rightarrow 0$ puesto $N \rightarrow 0$, resultado que se muestra en la Figura 2.5.

Capítulo 3

Equivalencia entre el gas de Fermi y el gas de Bose

En este capítulo estudiaremos la equivalencia de ambos sistemas. Primeramente fue encontrado por May en 1964 [83], describiendo una equivalencia en los sistemas de Bose y Fermi en dimensión $d = 2$. Partiremos de la relación de dispersión generalizada entre la energía y el momento $\varepsilon \propto k^s$, en particular estudiaremos la relación d/s , dónde d es la dimensión y $s > 0$ el tipo de relación entre la energía y el momento (lineal, cuadrática, etc.). Estudiaremos la equivalencia de los gases cuando $d = s$, este tipo de relación es estudiado en el presente trabajo donde $d = s = 2$, gráficamente encontramos una equivalencia entre el GIF y el GIB en el calor específico C_V y en la energía interna U con una diferencia entre ambos de una constante, así como también en el potencial químico en dónde solo difieren en la energía de Fermi E_F .

De forma general mostramos que solo si $d/s > 1$ existe fase de condensación para el GIB.

3.1. Relación generalizada de energía-momento

Sea $\varepsilon_k = c_s \sum_{i=1}^d k_i^s$, donde $k_i = (2\pi/L)n_k$, n_k el número de partículas en el nivel de energía ε_k y c_s una constante. Se han estudiado 3 tipos de relaciones entre la energía y el momento en donde *i*) la cuadrática donde $s = 2$ y $\varepsilon_k \propto k^2$ donde la constante $c_2 = 2\pi^2\hbar^2/2mL^2$ que describe un gas sin interacciones, *ii*) la relación lineal donde $s = 1$ y $\varepsilon_k \propto k$, la constante de proporcionalidad es $c_1 = (2\pi^2\hbar^2/2mL^2)^{1/2}$ y que describe a un gas atrapado por potenciales armónicos, *iii*) y la relación de dispersion que existe entre los CP donde $s = 1$ y $\varepsilon_k \propto k$.

Veamos entonces que la función del gran potencial es

$$\Omega(\mu, L^d, T) = -\frac{1}{a} \sum_k \ln [1 + az \exp(\beta\varepsilon_k)] \quad (3.1)$$

donde $a = 1$ corresponde a la estadística de Fermi-Dirac, $a = -1$ a Bose-Einstein y $a = 0$ a Maxwell-Boltzmann. Usando la expansión del logaritmo $\ln(1+x) = -\sum_{l=1}^{\infty} (-x)^l/l$ para $|x| < 1$ tenemos que

$$\Omega = \frac{1}{a} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-a \exp[-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)])^l}{l} \quad (3.2)$$

tomando el límite termodinámico podemos aproximar la suma sobre \mathbf{k} por la integral

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int d\mathbf{k} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int dk k^{d-1} \quad (3.3)$$

entonces el gran potencial

$$\Omega = \frac{1}{a} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int dk k^{d-1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-a z \exp[\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}])^l}{l} \quad (3.4)$$

re-escribimos la integral en términos de ε en vez de k

$$\Omega = \frac{1}{a} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{d/s-1}}{z^{-1} \exp(\beta\varepsilon) + a} \quad (3.5)$$

haciendo $x = \beta\varepsilon_{\mathbf{k}}$ y tomando el límite del continuo obtenemos,

$$\Omega = \frac{1}{a} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{s c_s^{d/s} \beta^{d/s}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{d/s-1}}{z^{-1} \exp(x) + a}. \quad (3.6)$$

La función polilogaritmo se expresa en forma integral como

$$-a \text{Li}_{d/s}(-az) = \frac{1}{\Gamma(d/s)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{d/s-1}}{z^{-1} e^x + a}. \quad (3.7)$$

La función del gran potencial termodinámico para un gas ideal cuántico con una relación energía-momento generalizada en cualquier dimensión $d > 0$ es

$$\Omega(\mu, T, L^d) = -a A_{d/s} \frac{\text{Li}_{d/s}(-az)}{\beta^{d/s}} \quad (3.8)$$

donde $A_{d/s} = \Gamma(d/s) L^d / \Gamma(d/2) s c_s^{d/s} \beta^{d/s} 2^{d-1} \pi^{d/2}$. Esta relación se puede escribir de forma más general con la generalización de la función polilogaritmo en el apéndice B.

3.2. Equivalencia de los gases ideales cuánticos

Estudiemos al GIF y al GIB cuando la razón entre la dimensión d y la relación de dispersión s es la unidad, es decir $d/s = 1$, entonces de la expresión (3.8) para el GIF y para el GIB respectivamente es

$$\Omega_F = -A_1 \frac{Li_1(-z)}{\beta^2} \quad (3.9)$$

$$\Omega_B = A_1 \frac{Li_1(z)}{\beta^2} \quad (3.10)$$

donde $A_1 = mL^2/2\pi\hbar^2$. Observamos que ambas expresiones son casi idénticas, excepto por la relación de la fugacidad para Fermi y para Bose. Landen encontró [90, 93] la forma que en que se relacionan los dilogaritmos por medio de su argumento. En la Ref.[82, pág 1519] se describe esta relación encontrando una relación entre las fugacidades de los sistemas

“Si x es un número real y $x < 1$ y $y = -x/(1-x)$, entonces

$$Li_0(x) = -Li_0(y)/[1 + Li_0(y)] \quad (3.11)$$

$$Li_1(x) = -Li_1(-y) \quad (3.12)$$

y

$$Li_2(x) = -Li_2(y) - \frac{1}{2} [Li_1(y)]^2. \quad (3.13)$$

Las relaciones de Landen expresan la transformación de los polilogaritmos bajo las transformaciones de Euler de x a y [90]. Veamos ahora la relación entre los gases de Fermi y de Bose. Si las densidades reducidas son de la misma forma tenemos

$$n\lambda = Li_1(z_B) = -Li_1(-z_F) \quad (3.14)$$

donde n es la densidad de número, $\lambda = \beta\hbar^2/2\pi m$, la longitud de onda media térmica z_B y z_F , son las fugacidades para Bose y para Fermi respectivamente. Si las partículas de ambos sistemas no tienen espín y tienen la misma masa, entonces la condición de arriba significa que sus temperaturas son también las mismas. Por las relaciones de Landen tenemos

$$Li_1(-z_F) = Li_1(-z_B/[1 - z_B]). \quad (3.15)$$

Podemos concluir que al tener la misma densidad reducida significa que

$$z_F = z_B/(1 - z_B) \quad (3.16)$$

las dos fugacidades están relacionadas por las transformaciones de Euler.”

La expresión (3.16) muestra que para $d = s$ los gases deben estar relacionados fundamentalmente por sus fugacidades. Usando las relaciones de Landen veamos que sucede con la energía interna para ambos sistemas. La energía interna para el GIB con las relaciones de Landen queda

$$\begin{aligned}\beta \frac{U(z_B)}{N} &= \frac{Li_2(z_B)}{Li_1(z_B)} \\ &= \frac{Li_2(-z_B/[1-z_B]) + \frac{1}{2} [Li_1(-z_B/[1-z_B])]^2}{Li_1(-z_B/[1-z_B])}\end{aligned}\quad (3.17)$$

usando la expresión (3.15) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{U(z_B)}{N} &= \frac{U(z_F)}{N} + \frac{1}{2\beta} Li_1(-z_F) \\ &= \frac{U(z_F)}{N} - n \frac{\hbar^2 \pi}{m}\end{aligned}\quad (3.18)$$

el segundo término de (3.18) es independiente de T y corresponde exactamente a la energía del estado base por partícula del gas de Fermi en $d = 2, \frac{1}{2} \varepsilon_F^{(0)}$.

De aquí podemos concluir que si las dos densidades reducidas son las mismas, las energías de los gases de Fermi y Bose difieren sólo por la energía del gas ideal de Fermi, esto significa que el calor específico debe ser el mismo en $d = s$, es decir derivando (3.18) con respecto a T y dejando a N y V constantes, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U(z_B)/N}{\partial T}\right)_{N,V} &= \left(\frac{\partial (U(z_F)/N - 1/2\beta^{-1}\rho\lambda^2)}{\partial T}\right)_{N,V} \\ C_V(T, V)_B &= C_V(T, V)_F\end{aligned}\quad (3.19)$$

dónde $C_V(T, V)_B, C_V(T, V)_F$ son el calor específico de Bose y Fermi respectivamente.

El análisis numérico de acuerdo a la ec. (1.37) C_V para Fermi y la ec. (2.12) C_V para Bose, muestra la equivalencia cuando $d = s = 2$ es decir $d/s = 1$ en la Figura 3.1.

La equivalencia entre ambos sistemas sin interacción en $d/s = 1$ muestra que ambos gases típicamente tienen el mismo comportamiento ó bien cuando con $s = 2$ y confinados en un volumen L^2 ó cuando están confinados por un potencial armónico $s = 1, d = 1$; de forma más general cuando la relación de dispersión energía-momento es idénticamente igual a la dimensión, es decir $d/s = 1$. La equivalencia de los sistemas de Fermi y Bose se ha contemplado también como consecuencia del estudio de las funciones polilogaritmo, funciones complejas de variable compleja con dominio $\{\mathbb{C} \setminus [1, \infty)\}$ donde la función de Fermi $f_{d/s}(z)$ la rama principal de la fugacidad está en $-\infty < Re[z] < 0$ y para la función de Bose $g_{d/s}(z)$, es $0 < Re[z] < 1$, un estudio más profundo en este sentido podría conjeturar una nueva estadística.

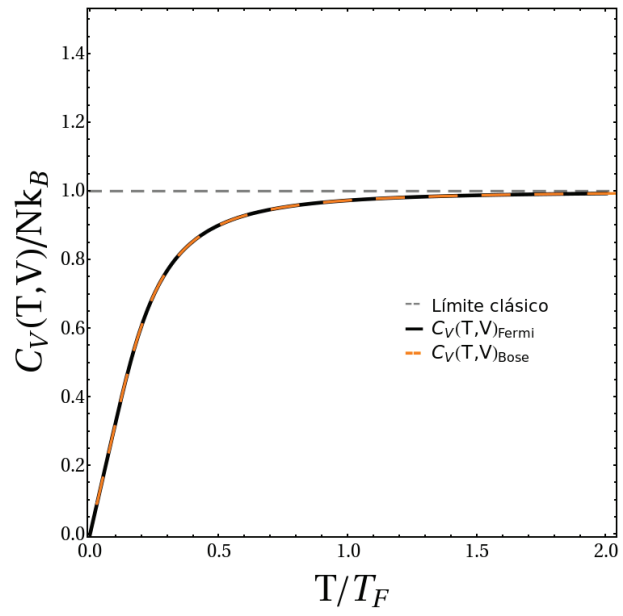


Figura 3.1: Calor específico para el GIB y el GIF con una relación de dispersión $s = 2$ en dimensión $d = 2$.

Capítulo 4

Conclusiones

Gas Ideal de Fermi

En el gas ideal de Fermi encontramos una divergencia en el potencial químico $\mu \rightarrow +\infty$ cuando $d \rightarrow 0$ y la densidad de número $n \equiv N/L^d \rightarrow 1$. Existe una anomalía en el calor específico C_V en dimensiones $d < 2$ enteras o no, C_V es continuo y no exhibe una transición de fase y en particular cuando $d \rightarrow 0$, $C_V \rightarrow +\infty$. En altas temperaturas $T \gg 1$ recuperamos los valores en el límite clásico para toda d , esto nos puede indicar que el cálculo numérico en dimensiones fraccionales esta de acuerdo con la teoría.

La interpretación sobre el comportamiento del potencial químico para el GIF es la siguiente: Cuando $d \rightarrow 0$, $\mu(T)$ diverge positivamente, estamos llevando al sistema a un “punto cuántico ideal” donde $n_{d \rightarrow 0} \rightarrow 1$. Necesitamos una cantidad de energía infinita para agregar una partícula más al sistema, esto se ve reflejado en el calor específico $C_V \rightarrow \infty$ porque necesitamos de energía infinita para cambiar la temperatura del sistema. El número de partículas $N/L^{d \rightarrow 0} \rightarrow 1$ cuando estamos confinando el sistema en $d = 0$, esto nos indica que solamente un fermión puede ocupar este estado, resultado que es debido al principio de exclusión de Pauli que enuncia que solo es posible dejar a una partícula (sin espín) por estado.

Gas Ideal de Bose

Para el gas ideal de Bose en $d > 2$ esta la bien conocida BEC, existe discontinuidad en $d = 3$ para el calor específico C_V , mientras en $d \leq 2$ no exhibe una transición de fase, es decir la primera derivada del calor específico es continua. Por otro lado el sistema de Bose muestra una divergencia negativa en el potencial químico $\mu \rightarrow -\infty$ cuando $d \rightarrow 0$, mientras que en $C_V \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow 0$. Este comportamiento se refleja en la fugacidad del sistema, mientras la densidad de número $n/n_F \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$, esto nos puede indicar, puesto que la fugacidad aproxima la presión del sistema que en el “punto cuántico ideal” no existe pre-

sión puesto que $N/L^{d \rightarrow 0} \rightarrow 0$. La interpretación de la divergencia de μ es la siguiente: Si el potencial químico está asociado con el trabajo termodinámico y el signo nos indica sobre quien se está haciendo el trabajo, sabemos que $\mu < 0$ el sistema está haciendo el trabajo sobre los alrededores, es decir, está cediendo partículas, de forma que cuando confinamos el sistema en $d = 0$, $\mu(T) \rightarrow -\infty$ las partículas no pueden confinarse y se escapan a los alrededores del sistema, y esto se ve reflejado en el número de partículas puesto $N/L^{d \rightarrow 0} \rightarrow 0$.

Similitudes

Las similitudes en ambos sistemas aparecen en $d = 2$, son equivalentes *i*) en el potencial químico, $\mu(T)$ sólo difieren por la energía de Fermi E_F en el estado base (de aquí el interés de normalizar ambos sistemas con T_F), *ii*) en la energía interna U donde difieren por una constante, la energía del estado base del gas ideal de Fermi y *iii*) son idénticamente iguales en el calor específico C_V . Ésta similitud nos muestra que ambos gases cuando son confinados sobre un plano, forman una mezcla de fermiones y bosones ya que tienen una diferencia entre ellos de la energía de Fermi E_F .

Esta equivalencia de ambos gases en un sistema bosón/fermión se da cuando $d/s = 1$, es decir, cuando la dimensión es idénticamente igual al exponente de la relación de dispersión energía-momento. Los gases ideales son difíciles de encontrar en la naturaleza, pero podemos confinarlos con trampas ópticas y magnéticas (potenciales de oscilación) donde tienen una relación de energía-momento lineal. Si podemos “aplanar” este sistema, o dejarlos sobre un filamento podríamos esperar que el gas así confinado, tuviera un comportamiento bosón/fermión. Más aún, se ha mostrado que la estructura de los superconductores está formada por capas, sobre las cuales se transporta la carga eléctrica, conjeturando que estos sistemas puedan ser una mezcla de gases de bosones y fermiones confinados espacialmente en $2 + \epsilon$ dimensiones. Las implicaciones y consecuencias que puedan conducir, son extremadamente alentadoras, tanto el poder encontrar una teoría que describa finalmente a los superconductores, como el predecir nuevos materiales que tengan fase superconductora con una T_c de temperatura ambiente.

Otra similitud muestra que ambos sistemas están relacionados de manera más fundamental. Las funciones de Bose $g_{d/2}(z)$ y Fermi $f_{d/2}(z)$ que son expresadas mediante las funciones polilogaritmo $Li_{d/2}(z)$ donde ambos están relacionados por la fugacidad $z = \exp(\beta\mu)$ cuyo dominio está en $-\infty < z < 0$ para Fermi y $0 < z < 1$ para Bose, de la forma $z_F = z_B/1 - z_B$, relación que puede igualmente, aproximar las presiones de ambos sistemas, también puede indicarnos una transformación más fundamental entre ambos sistemas.

La función polilogaritmo es una función compleja de variable compleja con dominio $\{\mathbb{C} \setminus [1, \infty)\}$, pero tomamos $z \in \mathbb{R}$, es decir tomamos solo la parte real de μ , esto está de acuerdo al tomar la parte real de la función de partición.

Dimensión $d \rightarrow 0$, PEP y PIH

Si graficamos la función densidad de estados (1.23) en función de los estados de energía ε_k (ver apéndice A, Figura A.2) para varias dimensiones, observamos que cuando $\varepsilon_k \rightarrow 0$ y la dimensión $d \rightarrow 0$, $g(\varepsilon_k) \rightarrow +\infty$ los estados se condensan cercanamente a $d = 0$ (puesto que la curva presentada es el límite). El sistema nos muestra que todos los niveles de energía son posibles cuando nos acercamos a la dimensión nula o “punto-cero” de dimensión, esto es un claro reflejo del principio de incertidumbre de Heisenberg (PIH), $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Mientras más precisión obtengamos en la posición, quedará indeterminada la energía asociada al sistema, independientemente de la estadística con la que estemos trabajando e independientemente de la temperatura, siempre y cuando consideremos todas las componentes iguales en el sistema (condiciones de isometría), condición que solo ocurriría en el vacío.

De la 1ª ley de la termodinámica la energía interna es $dU = \mu dN + T dS$. Cuando $d \rightarrow 0 \Rightarrow \mu \rightarrow \pm\infty$ para cualquier T , significa entonces que $d \rightarrow 0$, T es independiente $\Rightarrow \Delta Q = 0$ por la 2ª ley tenemos que $dS = 0 \forall z$, entonces $U \rightarrow \pm\infty$ cuando $d \rightarrow 0$. Como $(\Delta U/\Delta N)_{S,V} = \mu$ y como $\Delta U = \sum \Delta \varepsilon n(\varepsilon)$, donde $n(\varepsilon)$ está definida en (1.24), para ambos sistemas tenemos que $\Delta \varepsilon \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \Delta p \rightarrow \pm\infty$ entonces $\Delta x \rightarrow \pm 0$, lo cual nos conduce al PIH. La condición de confinar a los sistemas de Bose y Fermi en $d \rightarrow 0$ nos impide conocer por completo la energía asociada al sistema. Una total incertidumbre asociada en el momentum nos conduce a que nunca hay un estado estacionario en dimensión nula, evoluciona de estado a estado, esto es consistente con que la función de onda es no localizable y que la función densidad de estados diverga cuando $d \rightarrow 0$. Cuando consideramos a los fermiones en $d \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow +\infty$ encontramos que $n(\varepsilon) \rightarrow 1$, es decir sólo un fermión sin-espín puede situarse en el espacio de configuración, condición que es enunciada por el Principio de Exclusión de Pauli (PEP). En el caso de Bose cuando $d \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -\infty$ se tiene que $n(\varepsilon) \rightarrow 0$, ni un solo bosón puede confinarse cuando $d \rightarrow 0$. Las divergencias en el potencial químico son clara muestra del PIH.

Sin embargo, si tomamos el límite del continuo, en el “punto-cero” de dimensión, solo existirá un solo nivel de energía (carácter discreto de la energía) independientemente de la estadística, el sistema podría mostrar que se despliegan niveles de energía si calculamos de la ec. (A.1) con $d = 0 + \epsilon$ dimensiones, ϵ entera o no y para toda T , con lo cuál se podría explicar la zona del potencial químico para el GIB, cuando $d \rightarrow 0$ y $T \rightarrow 0$ las curvas se pegan cada vez más entre si, sin llegar a “mapear” todo el cuadrante. Este problema entre el límite del continuo (límite termodinámico) y el carácter discreto de la energía, puede dar pie a las divergencias encontradas en este estudio y aún más con el estudio de las dimensiones fractales el estudio podría mostrar con un poco más de profundidad el carácter discreto de la dimensión física.

Apéndice A

Sobre el límite del continuo

La relación energía-momento para un gas cuántico sin interacciones es

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar}{2m} \sum_{i=1}^d k_i^2 \quad (\text{A.1})$$

donde d es la dimensión y k es el vector de onda de momento. Si sólo existiera la componente x , la relación de dispersión sería $\varepsilon_k = \xi k^2$ donde $\xi = \hbar/2m$.

Si graficamos $\varepsilon_k = \xi k^2$ en función del vector de onda de momento en unidades de ξ claramente tenemos una función cuadrática, obtendríamos los niveles de energía ε_k que se encuentran sólo en una dimensión. Ahora, si consideramos las componentes x, y estaríamos en un plano, la relación de dispersión sería

$$\varepsilon_k = \xi(k_x^2 + k_y^2) \quad (\text{A.2})$$

graficando ésta expresión en unidades de ξ obtenemos la figura A.1.

La figura A.1 muestra los niveles de energía en función del vector de onda de momento en dos dimensiones, cada punto representa un nivel de energía ε_k . Podemos observar el comportamiento de los niveles de energía si graficamos la función densidad de estados para diferentes dimensiones d en la figura A.2. La figura de la densidad de estados muestra que cuando $d \rightarrow 0$, $g(\varepsilon_k) \rightarrow \infty$ y los niveles de energía $\varepsilon_k \rightarrow 0$, sin embargo $\Delta\varepsilon_i = cte$, no importando la estadística.

Si consideramos la energía total del sistema E y si las partículas están confinadas en un volumen V y no interactúan, la energía total del sistema sería la suma de las energías ε_i de las partículas individuales

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i \quad (\text{A.3})$$

donde n_i es el número de partículas cada una con energía ε_i . De acuerdo a la mecánica cuántica las energías de una sola partícula ε_i son discretas y sus valores dependen sobre el volumen en el cuál estén confinadas, de acuerdo a

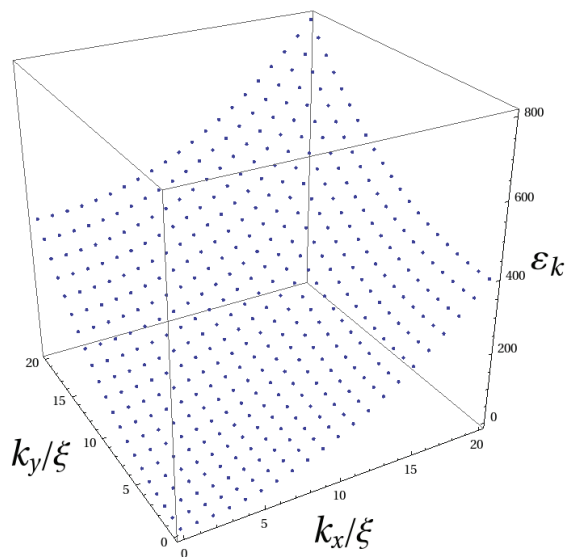


Figura A.1: Niveles de energía ε_k en función del vector de onda de momento \mathbf{k} en unidades $\xi = \hbar/2m$, en $d = 2$ dimensiones.

esto los posibles valores de la energía E también son discretos. Si consideramos un gran volumen, con un gran número de partículas ($N \sim 10^{23}$) la energía total del sistema E que es el parámetro del sistema, puede considerarse como una variable continua y la separación entre niveles $\Delta\varepsilon_i \rightarrow 0$, pero solo porque tenemos $\sim 10^{23}$ formas de repartir la energía, sin embargo al confinar el sistema $d \rightarrow 0$ la densidad de estados aumenta y $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

El sistema nos muestra que todos los niveles de energía son posibles en la dimensión nula, esto es un claro reflejo del principio de incertidumbre de Heisenberg, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ mientras seamos más precisos en la posición, quedará indeterminada la energía asociada al sistema, independientemente de la estadística que estemos trabajando.

Ahora veamos que sucede con el límite termodinámico, citando la Ref. [2, pág. 1289]:

“Suponemos que el Límite Termodinámico (LT) fuera tomado en $d = 3$, fijemos a $z \dots \Omega(3d)$ para un gas de N partículas en un volumen $V = L^3$. Por continuación analítica de las funciones polilogaritmo en Ω , obtenemos $\Omega(2d)$ el nuevo potencial para un gas de área $L^2 \dots$ Una composición de L en $\Omega(2d)$ no hace una $\Omega(3d)$ pero una composición de densidad de área de L hojas es igual al valor

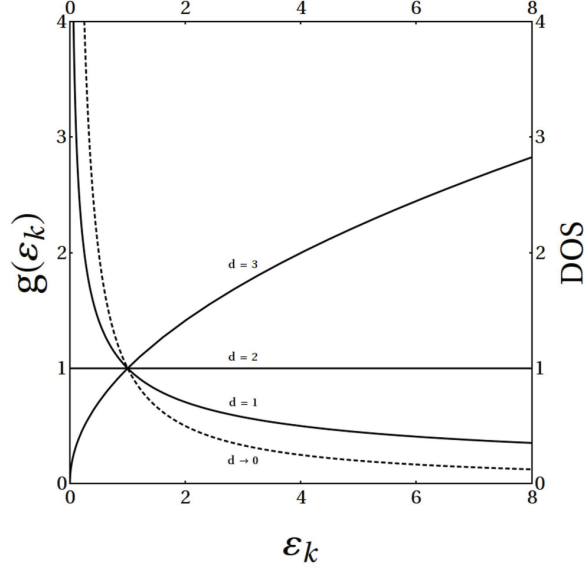


Figura A.2: Función densidad de estados $g(\varepsilon_k)$ contra los niveles de energía ε_k para diferentes dimensiones $d \rightarrow 0, d = 1, 2, 3$.

inicial fijo de la densidad de volúmen, el proceso puede compararse en como podría calcularse $\Omega(d)$ para cada d , separadamente. Cada cálculo podría implicar tomar LT de forma separada . . . Si d va de $2 \rightarrow 1$, la imagen es obvia. El área L^2 es descompuesta en L líneas desconectadas, si d va de $1 \rightarrow 0$, hay L^0 puntos desconectados.”

Podemos tomar este análisis, desde el punto de vista del teorema de Liouville, ver la Ref. [88, pág. 33] de la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0$$

Este teorema nos habla de que el ensemble del sistema está “todo el tiempo” uniformemente distribuido en todos los microestados posibles, permanece constante. Podríamos tomar Ω y aplicar el teorema de Liouville en función de la dimensión, si se cumple la igualdad a cero, el potencial termodinámico sería uniforme en toda d y sería válido tomar LT en cualquier dimensión.

La función de partición va en este sentido. La función de partición para un gas libre es $\Xi = \text{Tr}[-\exp(\beta \hat{H})]$ [88], \hat{H} es el hamiltoniano del sistema. Si hablamos de un sistema cuántico, éste está relacionado con la matriz de densidad $\hat{\rho}$. Tomar LT , implica tomar la función de partición continua, es decir, tomar los

eigenvalores de la energía continuos. Se deberían tomar todas las soluciones de la función de onda del espacio de Hilbert correspondiente. Aunque en la Ref. [2] dice que para cada d hay un espacio de Hilbert diferente, de ahí la desconexión entre las diferentes L .

El potencial termodinámico de la forma

$$\Omega(\mu, T, L^d) = -\frac{1}{a} \sum_k \ln(1 + aze^{\beta\varepsilon_k}). \quad (\text{A.4})$$

es la expresión para el caso discreto, de aquí se pueden encontrar N el número de partículas, P la presión y S la entropía. Al usar la identidad del logaritmo, se puede reescribir (A.4) como (1.1), al tomar el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ y la densidad n permanece constante, podemos reemplazar la suma sobre los estados ε_k por una integral.

Ahora, estamos sobre el espacio- k , en este espacio se forma una rejilla de puntos d -dimensional [94, apéndice B] (un ejemplo, la fig. A.1 pero en $d = 2$), con un espacio entre puntos de π/L , el volumen por punto en el espacio- k es $(\pi/L)^d$ y como queremos el número de vectores de onda \mathbf{k}_i que están en el intervalo $k + dk$. Este número será igual al número de puntos en la rejilla en el espacio- k que están entre dos capas esféricas, centradas en el origen, de radio k y $k + dk$, respectivamente; así, el volumen en el octante positivo es $\frac{1}{8} 4\pi k^2 dk$, el número de vector de onda cuya magnitud k esta entre $k + dk$ es

$$f(k)dk = \frac{L^d}{2\pi^2} k^2 dk \quad (\text{A.5})$$

donde $f(k)$ es la función densidad de estados del vector de onda k en la bola de dimensión d . Cuando consideramos la suma sobre el espacio del vector de onda de momento \mathbf{k} a una integral consideramos que $f(k)$ sea una función continua de forma que tenemos

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int d^d k = f(k)dk$$

sin embargo cuando tomamos el límite $d \rightarrow 0$, $f(k) \rightarrow k^2/2\pi^2$, tenemos un solo nivel de energía ε_0 pero $g(\varepsilon_0) \rightarrow \infty$. La densidad de probabilidad de la función de onda cuando $d \rightarrow 0$ nos indica que es no localizable, lo cual es consistente con el resultado anterior.

Apéndice B

Los gases ideales de Fermi y Bose a través de la función Lerch- Φ

Cuando $d = 0$ obtenemos un volúmen singular, $L^0 = 1$ de manera que no es posible dar una serie de Taylor para la función polilogaritmo $\text{Li}_\nu(z)$ alrededor de $d = 0$ [91] ya que la pendiente se comporta como $\frac{1}{2} \ln \ln z$ (el primer término) de manera que la n -ésima derivada con respecto a d es $(\frac{1}{2} \ln \ln z)^n$, así que todas la derivadas divergen a $z \rightarrow \infty$ cuando $d \rightarrow 0$. Así, observamos una singularidad esencial en la densidad de número para ambos sistemas de acuerdo a las expresiones (1.25), (1.30) para Fermi y (2.4), (2.6) para Bose y como consecuencia una divergencia en el potencial químico en los dos sistemas.

La generalización de la función polilogaritmo es la llamada función de *Lerch* o función Lerch- Φ [95]

$$\Phi(z, \nu, \alpha) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n + \alpha)^\nu} \quad (\text{B.1})$$

donde $|z| < 1$ y $\nu \neq 0, -1, -2 \dots$, en su forma integral [96]

$$\Phi(z, \nu, \alpha) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1} \exp(-\alpha x)}{1 - z \exp(-x)} \quad (\text{B.2})$$

para $\text{Re}[\nu] > 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, $\alpha > 0$ y por continuidad analítica a todo el plano complejo para toda α, ν ; de manera que las funciones de Fermi y Bose en su representación integral ($a = 1$, $a = -1$; respectivamente) se pueden escribir con la representación integral de Lerch como

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx z \frac{x^{\nu-1} \exp(-\alpha x)}{a - z \exp(-x)} = -a z \Phi(-az, \nu, 1) \quad (\text{B.3})$$

ya que la función Lerch- Φ es una generalización de la función polilogaritmo [96–100] de la forma

$$Li_\nu(z) = z\Phi(z, \nu, 1). \quad (\text{B.4})$$

En la Figura B1 se muestra la función polilogaritmo $Li_\nu(z)$ en función de z así como también la función Lerch- Φ , donde $z\Phi(z, \nu, \alpha)$ está en función de z con $\nu = 1$ y $\alpha = 1, 1/2, 3/2$ como parámetros.

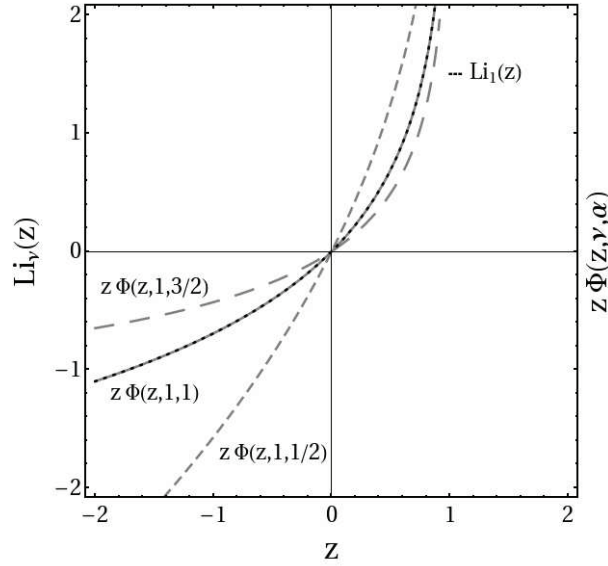


Figura B.1: Gráfica comparativa entre la función Polilogaritmo $Li_\nu(z)$ con respecto a la función Lerch- Φ , donde $z\Phi(z, \nu, \alpha)$ toma como parámetros $\nu = 1$ y $\alpha = 1/2, 1, 3/2$.

Podemos encontrar una representación en serie para la función Lerch- Φ de la forma

$$\Phi(z, \nu, \alpha) = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{1-z} \right)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\alpha + k)^{-\nu} \quad (\text{B.5})$$

válida para toda ν y para toda z , con $\text{Re}[z] < 1/2$. Ahora, si tomamos la expresión ligeramente diferente de la función de Lerch

$$\Phi(z, \nu, \alpha) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[(n + \alpha)^2]^{\nu/2}} \quad (\text{B.6})$$

válida para $|z| < 1$, para toda ν y $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Si desarrollamos la función polilogaritmo en términos de la serie de la función de Lerch- Φ , combinando (B.4) y (B.5) obtenemos

$$-a\text{Li}_\nu(-az) = \frac{-az}{1+az} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{az}{1+az} \right)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (1+k)^{-\nu} \quad (\text{B.7})$$

si tomamos la serie a primer orden ($n = 0$) y $\nu = 0$ de tal forma que ν esta relacionada con la dimensión espacial de los sistemas de Bose y Fermi y la relación de energía-momento generalizada ($\varepsilon \propto k^s$) de la forma $\nu = d/s$, $d = 0$, obtenemos

$$-a\text{Li}_0(-az) = -a \left(\frac{z}{1+az} \right). \quad (\text{B.8})$$

Si $a = 1$ que corresponde con la estadística de Fermi obtenemos

$$\text{Li}_0(-z) = \frac{z}{1+z} = f_0(z) \quad (\text{B.9})$$

si $a = -1$ que corresponde con las estadística de Bose obtenemos

$$\text{Li}_0(z) = \frac{z}{1-z} = g_0(z) \quad (\text{B.10})$$

recuperamos las expresiones para los sistemas de Fermi y Bose en el “punto cuántico ideal” $d = 0$. Observamos que el potencial químico a través de la fugacidad de los sistemas diverge hacia $\mu \rightarrow +\infty$ en el caso de Fermi y $\mu \rightarrow -\infty$ en el caso de Bose. Así, podemos determinar los gases ideales de Bose y de Fermi a través de la función Lerch- Φ mediante $-az\Phi(-az, d/s, \alpha)$ donde z es la fugacidad de los sistemas, d la dimensión física, s de la relación generalizada energía-momento, mientras que $\alpha = 1$ podríamos denotarla como el parámetro de unicidad de los gases ideales cuánticos.

Apéndice C

BEC en átomos bosónicos y fermiónicos ultra-enfriados

Tablas aparecidas en la Ref. [79] basadas en la Ref. [101, pág. 21] con adiciones y modificaciones, la tabla C.1. muestra rangos de 12 órdenes de magnitud en el número de densidad (en partículas/ cm^3) para varios sistemas físicos. También se dan, donde es apropiado, las temperaturas de condensación T_c . La conjetura del “Líquido Efimov” [102]³ para muy-bajas-densidades.

Sistema de muchos cuerpos	Estadística	Número de densidad (cm^{-3})	T_c (K)
gas de electrones en metales	FD	$10^{22} - 10^{23}$	0 – 23
^4He líquido	BE	$\sim 10^{22}$	2.2
^3He líquido	FD	$\sim 10^{22}$	2×10^3
SCs exóticos (incluyen cupratos)	FD	$10^{21} - 10^{22}$	1–164
Aire (STP) [78 % N_2 + 21 % O_2 + ...]	–	$\sim 10^{19}$	–
gases de Bose ultraenfriados	BE	$10^{12} - 10^{15}$	$10^{-8} - 10^{-5}$
gases de Fermi ultraenfriados	FD	$10^{12} - 10^{13}$	$10^{-7} - 10^{-6}$
“Líquido Efimov” conjeturado	BE o FD	$\sim 10^{10}$	–

Tabla C.1: Número de densidad en partículas/ cm^3 para una variedad de sistemas de muchos-cuerpos. También se dan las temperaturas críticas T_c (K) los cuáles se refieren a la temperatura de transición de superconductores o superfluidez o de átomos-enfriados BEC.

Bosones	$^{87}_{37}\text{Rb}$	^7_3Li	$^{23}_{11}\text{Na}$	^1_1H	$^{85}_{37}\text{Rb}$
Año/Ref	1995 ^[29]	1995 ^[30]	1995 ^[31]	1998 ^[32]	2000 ^[33]
N	4×10^4	2×10^5	5×10^5	–	3×10^8
N_0	2×10^3	–	–	10^9	10^4
T_c (μK)	0.17	0.4	2	50	0.015
n_0 (cm^{-3})	2.5×10^{12}	2×10^{12}	1.5×10^{14}	1.8×10^{14}	1×10^{12}
$n_0^{-1/3}$ (Å)	7,368	7,937	1,882	1,771	10,000

Bosones	^4_2He	$^{41}_{19}\text{K}$	$^{133}_{55}\text{Cs}$	$^{174}_{70}\text{Yb}^*$	$^{52}_{24}\text{Cr}$
Año/Ref	2001 ^[34]	2001 ^[35]	2003 ^[36]	2003 ^[37]	2005 ^[38]
N	8×10^6	–	2×10^7	10^7	1.3×10^8
N_0	5×10^6	6.5×10^4	5×10^3	5×10^4	–
T_c (μK)	4.7	0.16	0.046	0.73	0.7
n_0 (cm^{-3})	3.8×10^{13}	6×10^{11}	1.3×10^{13}	7×10^{14}	–
$n_0^{-1/3}$ (Å)	2,974	11,856 máx	4,253	1,126 mín	–

* de cinco isotópos estables

Tabla C.2: Átomos-bosónicos ultra-enfriados BEC (algunas veces llamado como el “5o. estado de la materia”) parámetros experimentales asociados con gases bosónicos atrapados, en la cuál la BEC ha sido observada, con fecha, N y N_0 son los números de átomos en la nube inicial y en el condensado, respectivamente; T_c la temperatura de transición de la BEC; n_0 el número de densidad de bosones reportados (el pico de átomos) en T_c del condensado en cm^{-3} ; $n_0^{-1/3}$ el espaciamiento promedio interbosónico en Å .

Fermiones	${}^6_3\text{Li}$	${}^{40}_{19}\text{K}$	${}^{173}_{70}\text{Yb}$ (de 2 isótopos estables)
Año/Ref	2003 ^[103]	2003 ^[104]	2007 ^[105]
N	3.5×10^7	1.4×10^6	–
N_0	9×10^5	–	–
T_c (μK)	0.6	0.07	enfriado a $T/T_F = 0.37$
n_0 (cm^{-3})	7×10^{13}	7×10^{12}	–
$n_0^{-1/3}$ Å	2,426	5,228	–

Tabla C.3: BEC de Átomos-fermiónicos ultra-enfriados (algunas veces llamado como el “6o. estado de la materia”) parámetros experimentales asociados con gases bfermiónicos atrapados, en la cuál la BEC ha sido observada hasta Dic. 2007, N y N_0 son los números de átomos en la nube inicial y en el condensado, respectivamente; T_c la temperatura de transición de la BEC; n_0 el número de densidad de bosones reportados (el pico de átomos) en T_c del condensado en cm^{-3} ; $n_0^{-1/3}$ el espaciamiento promedio interbosónico en Å . La más baja temperatura registrada es $T \simeq 45 \times 10^{-5} \mu\text{K}$, en la Ref.[106] ~ 0.03 más baja que la temperatura crítica para la BEC de la tabla C2 la cuál es de $T_c^{BEC}({}^{85}\text{Rb}) = 0.015 \mu\text{K}$.

Notas

³El efecto Efimov es una solución al problema mecánico cuántico de 3 cuerpos predicho por V.N. Efimov en 1970. Éste efecto se refiere a un escenario en el cuál tres bosones idénticos interactúan, con la predicción de una serie infinita de estados de energía excitados cuando el estado de dos cuerpos es exactamente el umbral de disociación. Un corolario es que los tres bosones pueden formar un sistema aproximadamente ligado si la atracción de las dos partículas es muy débil y permiten que dos bosones formen un par.

Apéndice D

Derivadas del calor específico del gas ideal de Bose

El calor específico lo encontramos a partir de la expresión de la energía interna

$$U \equiv -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Omega}{k_B T} \right)_{\mu, V} \quad (\text{D.1})$$

Derivando con respecto a T y dejando el volúmen constante obtenemos el calor específico del gas ideal de Bose para cualquier dimensión

$$\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} = \left(\frac{d+2}{2} \right) \frac{g_{d/2+1}(z)}{g_{d/2}(z)} - \left(\frac{d}{2} \right) \frac{g_{d/2}(z)}{g_{d/2-1}(z)} \quad (\text{D.2})$$

Podemos calcular la primera derivada con respecto a T

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} \right)_{N, V} = & \\ & -\frac{dz'}{2} + \frac{(2+d)z'}{2} - \frac{(2+d)z' g_{d/2-1}(z) g_{d/2+1}(z)}{g_{d/2}(z)} + \\ & \frac{dz' g_{d/2-2}(z) g_{d/2}(z)}{2 g_{d/2-1}(z)} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

De esta forma obtenemos la segunda derivada de C_V

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} \right)_{N, V} = & \\
& - \frac{2g_{d/2-2}(z)z'^2}{g_{d/2-1}(z)z^2} - \frac{2(1+d)g_{d/2-1}(z)z'^2}{g_{d/2}(z)z^2} \\
& + g_{d/2}(z) \left(\frac{2g_{d/2-2}(z)^2z'^2}{g_{d/2-1}(z)^3z^2} - \frac{g_{d/2-3}(z)z'^2}{g_{d/2-1}(z)^2z^2} + \frac{g_{d/2-2}(z)z'^2}{g_{d/2-1}(z)^2z^2} - \frac{g_{d/2-2}(z)z''}{g_{d/2-1}(z)^2z} \right) \\
& + \frac{g_{d/2-2}(z)z'^2}{g_{d/2-1}(z)z^2} - \left(\frac{z'^2}{z^2} - \frac{z''}{z} \right) + (1+d)g_{d/2+1}(z) \\
& \left(\frac{2g_{d/2-1}(z)^2z'^2}{g_{d/2}(z)^3z^2} - \frac{g_{d/2-2}(z)z'^2}{g_{d/2}(z)^2z^2} + \frac{g_{d/2-1}(z)z'^2}{g_{d/2}(z)^2z^2} - \frac{g_{d/2-1}(z)z''}{g_{d/2}(z)^2z} \right) \\
& + (1+d) \left(\frac{g_{d/2-1}(z)z'^2}{g_{d/2}(z)z^2} - \frac{z'^2}{z^2} + \frac{z''}{z} \right) \tag{D.4}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{\partial z}{\partial T} = z \left(\frac{-\mu(T)}{k_B T^2} + \frac{d\mu(T)/dT}{k_B T} \right) \\
z'' &= \frac{\partial^2 z}{\partial T^2} = z \left(\frac{2\mu(T)}{k_B T^3} + \frac{2d\mu(T)/dT}{k_B T^2} + \frac{d^2\mu(T)/dT^2}{k_B T} \right)
\end{aligned}$$

Veamos que cuando $T \rightarrow 0$, $\mu(T) \rightarrow 0$ entonces $z \rightarrow 1$, las funciones de bose se reducen a $g_\nu(1) = \zeta(\nu)$, la función zeta de Riemann de orden ν , donde $\nu = d/2, d/2 - 1, d/2 - 2, d/2 - 3$. La función $\zeta(\nu)$ tiene el siguiente comportamiento

$$\zeta(\nu) = \begin{cases} < 0 & \text{si } \nu < 1 \\ > 0 & \text{si } \nu > 1 \\ \infty & \text{si } \nu = 1 \end{cases} \tag{D.5}$$

Podemos encontrar el comportamiento de C_V cuando $T \rightarrow 0$ de esta forma vemos que para dimensiones $d < 3$

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{2C_V(T, V)}{dNk_B} \right)_{N, V} = \begin{cases} > 0 & \text{si } 2 < d \leq 3 \\ < 0 & \text{si } d < 2 \\ \infty & \text{si } d \rightarrow 0 \end{cases} \tag{D.6}$$

Bibliografía

- [1] M. Grether, M. de Llano & M.H. Lee, *Int. J. Mod. Phys. B* **23**, 4121 (2009)
- [2] M.H. Lee, *Acta Physica Polonica B* **40**, 1279 (2009)
- [3] H. K. Onnes, *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden* **12**, 120 (1911)
- [4] J.W. Rohlf, *Modern Physics from α to Z^0* (Wiley & Sons, NY, 1994)
- [5] United States Patent 4844989
- [6] W. Meissner & R. Ochsenfeld, *Naturwiss.* **21**, 787 (1933)
- [7] F. London & H. London, *Proc. R. Soc. London A* **149**, 71 (1935)
- [8] V. L. Ginzburg & L.D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. (J. Exp. & Theo. Phys.)* **20**, 1064 (1950)
- [9] E. Maxwell, *Phys. Rev.* **78**, 477 (1950)
- [10] C. A. Reynolds, B. Serin, W. H. Wright & L. B. Nesbitt, *Phys. Rev.* **78**, 487 (1950)
- [11] J. Bardeen, L. N. Cooper & J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957)
- [12] L. P. Gor'kov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36**, 1364 (1959)
- [13] J. G. Bednorz & K. A. Mueller, *Z. Phys. B* **64**, 189 (1986)
- [14] M. K. Wu, J. R. Ashburn, C. J. Torng, P. H. Hor, R. L. Meng, L. Gao, Z. J. Huang, Y. Q. Wang & C. W. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 908 (1987)
- [15] P. Dai, B. C. Chakoumakos, G. F. Sun, K. W. Wong, Y. Xin & D. F. Lu, *Physica C* **243**, 201 (1995)
- [16] L. Gao, Y.Y. Xue, F. Chen, Q. Xiong, R.L. Meng, D. Ramírez, C.W. Chu, J.H. Eggert & H.K. Mao, *Phys. Rev. B* **50**, 4260 (1994)
- [17] R. M. Hazen, L. W. Finger, R. J. Angel, C. J. Prewitt, N. L. Ross, H. K. Mao, C. G. Hadjidakos, P. H. Hor, R. L. Meng, C. W. Chu, *Phys. Rev. B* **35**, 7238 (1987)

- [18] K. Neeraj, *Handbook of High-Temperature Superconductor Electronics*, ISBN: 0-8247-0823-7
- [19] V.V. Tolmachev, Phys. Lett. A **266**, 400 (2000)
- [20] M. de Llano & V.V. Tolmachev, Physica A **317**, 546 (2003)
- [21] M. de Llano & V.V. Tolmachev, Ukr. J. Phys. **55**, 1 (2007)
- [22] M. Casas, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo & M.A. Solis, Solid State Commun. **123**, 101 (2002)
- [23] M. Casas, N.J. Davidson, M. de Llano, T.A. Mamedov, A. Puente, R.M. Quick, A. Rigo & M.A. Solis, Physica A **295**, 146 (2001)
- [24] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften **1**, 3 (1925)
- [25] S.N. Bose, Zeitschrift für Physik **26**, 178 (1924)
- [26] R.M. May, Phys. Rev. **135**, A1515 (1964)
- [27] R.M. Ziff, G.E. Uhlenbeck & M. Kac, Phys. Rep. **32**, 169 (1977)
- [28] V.C. Aguilera-Navarro, M. de Llano & M.A. Solís, Eur. J. Phys. **20**, 177 (1999)
- [29] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Wieman, & E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995)
- [30] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett & R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995)
- [31] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)
- [32] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner, and T.J. Greytak, Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998)
- [33] S.L. Cornish, N.R. Claussen, J.L. Roberts, E.A. Cornell, and C.E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000)
- [34] F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, Junmin Wang, C.J.Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C.S. Unnikrishnan, M. Leduc, & C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001)
- [35] G. Mondugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni, & M. Inguscio, Science **294**, 1320 (2001)
- [36] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.C. Nagel, & R. Grimm, Science **299**, 232 (2003)

- [37] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, & Takahashi, Phys. Rev. Lett. **91**, 040404 (2003)
- [38] Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, & T. Pfau, Phys. Rev. Lett. **94**, 160401 (2005)
- [39] J.L. Lin & J.P. Wolfe, Phys. Rev. Lett. **71**, 1222 (1993)
- [40] A. Oosawa, M. Ishii, & H. Tanaka, J. Phys.: Condens. Matter **11**, 265 (1999)
- [41] T. Nikuni, M. Oshikawa, A. Oosawa, & H. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 5868 (2000)
- [42] E.Ya. Sherman, P. Lemmens, B. Busse, A. Oosawa, & H. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **91**, 057201 (2003) & refs. therein
- [43] A. Görlitz, J.M. Vogels, A.E. Leanhardt, C. Raman, T.L. Gustavson, J.R. Abo-Shaeer, A.P., S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, & W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001)
- [44] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, & C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001)
- [45] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, & M. Inguscio, Europhys. Lett. **57**, 1 (2002)
- [46] J.G. Bednorz & K.A. Müller, Z. für Phys. B **64**, 189 (1986)
- [47] C.W. Chu, P.H. Hor, R.L. Meng, L. Gao, Z.J. Huang, & Y.Q. Wang, Phys. Rev. Lett. **58**, 405 (1987)
- [48] C.P. Poole, H.A. Farach, & R.J. Creswick & R. Prozorov, *Superconductivity* (Academic Press, NY, 2007)
- [49] D. Jérôme, Science **252**, 1509 (1991)
- [50] J.M. Williams, A.J. Schultz, U. Geiser, K.D. Carlson, A.M. Kini, H.H. Wang, W.K. Kwok, M.H. Whangbo, & J.E. Schirber, Science **252**, 1501 (1991)
- [51] H. Hori, Int. J. Mod Phys. B **8**, 1 (1994)
- [52] Z.K. Tang, L. Zhang, N. Wang, X.X. Zhang, G.H. Wen, G.D. Li, J.N. Wang, C.T. Chan, & P. Sheng, Science **292**, 2462 (2001)
- [53] E. Corcoran & G. Zopette, Sci. Am. [*Supplement: The Solid-State Century*], **25** (Sep. 1997)
- [54] E. Fermi, Rend. Lincei **3**, 145 (1926)

- [55] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1945/pauli-lecture.html
- [56] P.A. Dirac, *Series A* **112**, 661 (1926)
- [57] M. Grether, M. de Llano, & M.A. Solís, *Eur. Phys. J. D* **25**, 287 (2003)
- [58] L.J. Challis, *Contemp. Phys.* **33**, 111 (1992)
- [59] C. Weisbuch and B. Vinter, *Quantum Semiconductor Structures* (Academic Press, San Diego, 1991)
- [60] E. Corcoran, *Sci. Am.* **122** (Nov. 1990)
- [61] R. Turton, *The Quantum Dot: A Journey into the Future of Microelectronics* (Oxford University Press, 1995)
- [62] C. Kittel & H. Kroemer, *Thermal Physics*, 2a. Ed. p. 192 (W.H. Freeman, New York, 1980)
- [63] C. A. Regal, M. Greiner, & D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004)
- [64] M. Casas & M. de Llano, *Boletín de la Soc. Mex. Fís.* **22** [# 2] 93 (2008)
- [65] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Sierpinski.html>
- [66] B.Dubue, J.F. Quiniou, C. Roques-Carmes, C. Tricot & S.W. Zucker, *Phys. Rev. A* **39**, 1500 (1989)
- [67] P. Pfeifer, *Appl. Surf. Sci.* **18**, 146 (1984)
- [68] J.P Rigaut, *J. Microsc. (Oxford)* **133**, 41 (1984)
- [69] B. H. Kaye, *Powder Technol.* **21**, 1 (1978)
- [70] N.N Clarck, *Power Technol.* **46**, 45 (1986)
- [71] M.F. Goodchild, *Math. Geo.* **12**, 85 (1980)
- [72] B.B. Mandelbrot, D.E. Passoja & A.J. Paullay, *Nature* **308**, 721 (London, 1984)
- [73] A.P. Pentland, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **6**, 661 (1984)
- [74] S. Peleg, J. Naor, R. Hartley & D. Avnir, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **6**, 518 (1984)
- [75] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology* (Academic, London, 1982)
- [76] B.B. Mandelbrot & J.W. VanNess *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) Rev.* **10**, 422 (1968)

- [77] M.Grether, M. De Llano, M.H. Lee, Int. J. Mod. Phys. B. **23**, 4121 (2009)
- [78] J.E. Lennard-Jones, Proc. Phys. Soc. **43**, 461 (1931)
- [79] M. Grether, M. de Llano, S. Ramírez & O. Rojo, Int. J. Mod. Phys. B. **22**, 4376 (2008)
- [80] M.H. Lee, Phys. Rev. E **54**, 946 (1996)
- [81] M.H. Lee, J. Math. Phys. **36**, 1217 (1995)
- [82] M.H. Lee, Phys. Rev. E **55**, 1518 (1997)
- [83] R.M. May, Phys. Rev. **135**, 1515 (1964)
- [84] R.K. Pathria, Phys. Rev. E **57**, 2697 (1998)
- [85] M. H. Lee, Phys. Rev. E **56**, 3909 (1997)
- [86] S. Wolfram, *The MATHEMATICA Book*, 4a. Ed. p. 764 (Wolfram Media, IL, 1999)
- [87] A. Dragos-Victor, Rom. J. Phys. **53**, 689 (2008)
- [88] Pathria R.K., *Statistical Mechanics* 2a. Ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1996)
- [89] D.L. Goodstein, *States of Matter* (Dover Publications, NY, 1985)
- [90] L. Lewin, *Dilogarithms and Associated Functions* p. 5 (McDonald, London, 1958)
- [91] M.H. Lee, Phys. Rev. E **54**, 946 (1996)
- [92] L. Landau, E.M Lifshitz, *Statistical Physics*, 3a. Ed. traducido por J.B. Sykes y M.J. Kearsley (Pergamon Press, Oxford, 1976)
- [93] G.H. Hardy, *Divergent Series* págs. 7, 70, 178 (Chelsea, New York, 1991); T.J. Bromwich, *Introduction to Infinite Series* págs. 62, 196 (Chelsea, New York, 1991)
- [94] F. Mandl, *Statistical Physics* 2a. Ed. (John Wiley & Sons, Chichester, 1988)
- [95] B.R. Johnson, Pacific J. Math. **53**, 189 (1974)
- [96] F. W. Olver, D. W. Lozier , R. F. Boisvert, C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, (Cambridge University Press, 2010)
- [97] <http://functions.wolfram.com/ZetaFunctionsandPolylogarithms/LerchPhi/>
- [98] M. Hassani, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **8**, 1 Art. 25 (2007)

- [99] M. Abramowitz & I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Dover Publications, 1972)
- [100] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Translated and edited by Richard A. Silverman, (Dover Publications, NY, 1972)
- [101] A.J. Leggett, *Quantum Liquids: Bose Condensation and Cooper Pairing in Condensed-Matter Systems* (Oxford University Press, UK, 2006)
- [102] A. Bulgac, Phys. Rev. Lett. **89**, 050402 (2002)
- [103] M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic & W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003)
- [104] M. Greiner, C.A. Regal & D.S. Jin, Nature **426**, 537 (2003)
- [105] T. Fukuhara, Y. Takasu, M. Kumakura & Y. Takahashi, Phys. Rev. Lett. **98**, 030401 (2007)
- [106] A.E. Leanhardt, T.A. Pasquini, M. Saba, A. Schirotzek, Y. Shin, D. Kielpinski, D.E. Pritchard and W. Ketterle, Science **301** 1513 (2003)