Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Caracterizaciones de dendritas y algunos puntos.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
DANIEL MORALES VILLAR

DIRECTOR DE TESIS:
ISABEL PUGA ESPINOSA

2010

Universidad Nacional
Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

   Morales

   Villar

   Daniel

   Universidad Nacional

   Autónoma de México

   Facultad de Ciencias

   Matemáticas

   098172212

2. Datos del tutor

   Dr. en Ciencias

   M. Isabel

   Puga

   Espinosa

3. Dr. Ángel Tamaríz Mascarúa

4. Dr. Carlos Islas Moreno

5. M. en C. Gerardo Reyna Hernández

6. M. en C. Alejandro Bravo Mojica

7. Datos del trabajo escrito

   Propiedades de Dendritas y algunos de sus puntos

   66 p

   2010

Índice general

Capítulo 1

Nociones Preliminares

1.1. Espacios Métricos

Comenzaremos definiendo lo que es un

Definición 1.1.1. ***Espacio métrico***

Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama métrica sobre X si para toda $x, y, z \in X$ se cumple:
$d(x,y) \geq 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
A la pareja (X, d) le llamamos *espacio métrico*; y el número real $d(x,y)$ es la distancia de x a y.

Definición 1.1.2. ***Diámetro***

Sea A un subconjunto de un espacio métrico(X, d), definimos el diámetro de A como:
$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \,|\, x, y \in A\}$

Ejemplo 1.1.3. *Sea* $(\mathbb{R}^2, d)$ *el plano euclidiano,*

con la siguiente distancia. Se define para $x = (x_1, x_2)$*,* $y = (y_1, y_2)$ *como: d(x,y)=* $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

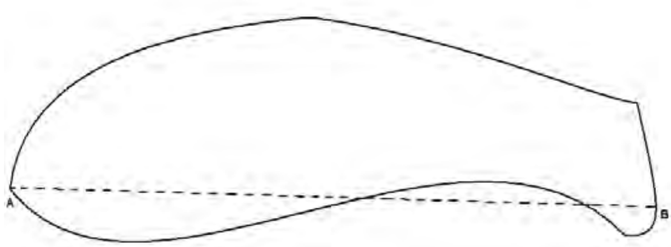


Figura 1.1: Diámetro del conjunto.

También definimos lo que es una bola y una vecindad

Sean (X, d) un espacio métrico y $a \in X$.

Definición 1.1.4. ***Bola***

Definimos $B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ la bola abierta con centro en a y radio r.

Definición 1.1.5. ***Vecindad***

Se dice que $V \subseteq X$ es una vecindad de a si existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset V$

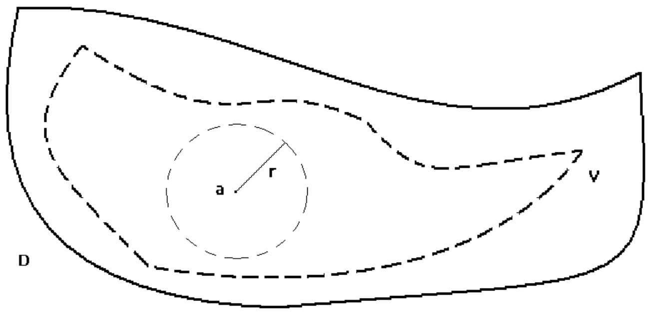


Figura 1.2: Se muestra una bola con centro en a y de radio r, la cual está dentro de la vecindad V.

El siguiente lema nos da una propiedad útil entre una bola y un espacio métrico.

Lema 1.1.6. *Toda bola abierta en un espacio métrico, es vecindad de cada uno de sus elementos*

Demostración. Sea $a \in B_r(a)$ y $\delta = r - d(a,x) > 0$. Si $y \in B_r(a)$, entonces $d(y,a) < \delta$, y por lo tanto $d(y,x) \leq d(y,a) + d(a,x) < r - d(a,x) + d(a,x) = r$. $\square$

A continuación daremos dos definiciones de conjunto abierto y probaremos que son equivalentes.

a) $A \subseteq X$ es abierto si $A = \bigcup_{i\in\Omega} B_{r_i}(x_i)$ donde $x_i \in A, r_i > 0$.

b) A es abierto si $\forall a \in A$ existe un $r_a \in \mathbb{R}, r_a > 0$ tal que $B_{r_a} \subseteq A$.

a) $\Rightarrow$ *b*) tenemos que $a \in A \Rightarrow a \in B_{r_i}(x_i) \subseteq A$ para alguna $i \in \Omega$. Por el lema 1.1.6, existe r_a tal que $B_{r_a}(a) \subseteq B_{r_i}(x_i) \subseteq A$.

b) $\Rightarrow$ *a*) tenemos que dada $a \in A$ existe un $r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) \subseteq A$; entonces $A = \bigcup_{a\in A} B_{r_a}(a)$

Definición 1.1.7. ***Función continua***

Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es continua en el punto $a \in X$, si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y

$d(a,x) < \delta$ entonces $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Una función $f : X \to Y$ es continua, si lo es en todo punto $a \in X$.

1.2. Espacios Topológicos

Proposición 1.2.1. ***Espacio Topológico.***

Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $\tau = \{A \subseteq X \mid A \text{ es abierto } \}$ es una topología para X. Demostraremos que τ satisface las siguientes propiedades:

1) $X, \emptyset \in \tau$.

2) Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$.

3) $SiA = \bigcup_{i \in \Omega} A_i$ y $A_i \in \tau$ para cada $i \in \Omega$, entonces $A \in \tau$.

Demostración. 1) Es claro que $X = \bigcup_{x \in X} B_r(x)$ con $r > 0, r$ fija. Utilizando b) del lema anterior, vemos que $\emptyset \in \tau$ por vacuidad.

2) Si $a \in A \cap B$ entonces existen $r_a > 0$ y $s_a > 0$ tales que $B_{r_a}(a) \subseteq A$ y $B_{s_a}(a) \subseteq B$. Es claro que $B_r(a) \subseteq A \cap B$ si $r = min\{r_a, s_a\}$.

3) Si $a \in A$ entonces $a \in A_i$ para alguna $i \in \omega$, por lo tanto existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A_i \subseteq A$. $\square$

Definición 1.2.2. ***Topología Relativa o Heredada.***

Si $Y \subseteq X$ y τ es una topología en X entonces $\tau_Y = \{A \cap Y \mid A \in \tau\}$ es una topología en Y a la que llamaremos topología relativa.

Es fácil ver que este subespacio cumple las mismas propiedades del espacio topológico.

A continuación definiremos algunos subconjuntos de mucha importancia para nuestra teoría.

Sean (X, τ) espacio topológico , $A \subseteq X$

Definición 1.2.3. ***Interior de*** A

Es el máximo abierto contenido en A. Lo denotaremos con A^o
$A^o = \bigcup\{T \mid T \text{ es abierto }, T \subseteq A\}$. En otras palabras:
$A^o = \{x \in A \mid \text{ existe } T \text{ abierto tal que } x \in T \subseteq A\}$.
El siguiente espacio lo definiremos con base en el anterior.

Definición 1.2.4. ***Cerrado***

Se dice que A es cerrado si A^c es abierto. A partir de estas definiciones, definiremos la cerradura de un conjunto.

Definición 1.2.5. ***Cerradura de*** A

Es el mínimo cerrado que contiene a A lo denotaremos con $\overline{A}$, es decir:
$\overline{A} = \bigcap\{C \text{ tal que } C \text{ es cerrado y } A \subseteq C\}$

Proposición 1.2.6. *Sea (X, d) un esapcio métrico y $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ dado U abierto con $x \in U, U \cap A \neq \emptyset$*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $x \in \overline{A}$ y U abierto con $x \in U$. Si $U \cap A = \emptyset$ entonces $A \subseteq U^c$ lo que implica que $\overline{A} \subseteq U^c$ pues U^c es cerrado. Esto contradice que $x \in \overline{A} \cap U$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in (\overline{A})^c$. Como $(\overline{A})^c$ es abierto, por hipótesis $\overline{A}^c \cap A \neq \emptyset$. Pero $\overline{A}^c \cap A \subset A^c \cap A = \emptyset$, lo que implica que $\overline{A}^c \cap A = \emptyset$. $\square$

Definición 1.2.7. ***Frontera de*** A

Definimos la frontera de A, como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

Se sigue de 1.2.6 que:
$\partial A = \{x \in A|$ si S es abierto y $x \in S$ entonces $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap A^c \neq \emptyset\}$.
Nótese que $\partial A = \partial A^c$

Sea (X, τ) un espacio topológico y (S, τ_s) un subespacio de X, es decir $S \subseteq X$ y $\tau_s = \{V \cap S | v \in \tau\}$.
Denotaremos por $Ce_S(A)$ a la cerradura de A en S donde $A \subseteq S$.
Observación: $Ce_S(A) \equiv \overline{A} \cap S$
Para probar esta observación notemos que $\overline{A} \cap S$ es cerrado en S y $A \subseteq \overline{A} \cap S$ por lo tanto $Ce_S(A) \subseteq \overline{A} \cap S$.

Ahora, si $x \in \overline{A} \cap S$ y $V \in \tau$ tal que $x \in V \cap S$, entonces $V \cap A \neq \emptyset$, y como $A \subseteq S, V \cup (S \cap A) = V \cap A$. Entonces tenemos que $x \in Ce_S(A)$.

Proposición 1.2.8.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces

1) $A^o \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

2) $\overline{A} = A^o \cup \partial A$.

3) $\overline{H^c} = (H^o)^c$.

4) $(\overline{H})^c = (H^c)^o$.

5) $B - \partial B = B^o$.

Demostraciones:

1) Se sigue de las definiciones que $A^o \subset A \subset \overline{A}$.

2) $\supseteq$) De la definición tenemos que $A^o \subset A \subset \bar{A}$ y además $\partial A \subset \overline{A}$ $\therefore$ $A^o \cup \partial A \subseteq \overline{A}$.

$\subseteq$) Sea $a \in \overline{A}$ y supongamos que $a \notin \partial A$ entonces $a \notin \overline{A^c}$. Ahora bien, sabemos que existe un abierto U tal que $a \in U$ y $U \cap A^c = \emptyset \therefore U \subset A \therefore a \in A^o \therefore \overline{A} \subseteq A^o \cup \partial A$.

3) $\supseteq$) Sea $x \in (H^o)^c$ entonces $x \notin H^o$ por lo tanto $x \in \partial H$ ó $x \in H^c$. En ambos casos $x \in \overline{H^c}$.

$\subseteq$)H^o es abierto, entonces $(H^o)^c$ es cerrado; por otra parte tenemos $H^o \subset H \therefore H^c \subset (H^o)^c$ ya que $\overline{H^c}$ es el mínimo cerrado que contiene a H^c, entonces $\overline{H^c} \subset (H^o)^c$.

4) $x \in (\overline{H})^c \Leftrightarrow$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap H = \emptyset \Leftrightarrow B_\varepsilon(x) \subset H^c \Leftrightarrow x \in (H^c)^o$.

5) Supongamos que $y \notin B^o$ entonces dado un abierto W que contiene a $y, W \cap B^c \neq \emptyset$. Considderemos dos casos:

* Si $W \cap B \neq \emptyset$ para todo W que contiene a y, entonces $y \in \partial B$ así que $y \notin B - \partial B$. Si existe un abierto W que contiene a y tal que $W \cap B = \emptyset$ entonces $y \notin B$ por tanto $y \notin B - \partial B$.

* Por otro lado si $y \in B^o$ entonces $y \in B$ y esto nos asegura la existencia de un conjunto abierto U el cual contiene a y y $U \subseteq B$, así que $U \cap B^c = \emptyset$ lo que implica que $y \notin \partial B$.

Lema 1.2.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $H \subseteq X$. Entonces $\partial H = \emptyset \Leftrightarrow H$ es abierto y cerrado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Probaremos $H = H^o$. Del inciso anterior 5) tenemos que $H^o \subset H$. Por otra parte $\overline{H} = H^o \cup \partial H$; pero $\partial H = \emptyset$ de tal forma que $\overline{H} = H^o = H \therefore H$ es abierto y cerrado.

$\Leftarrow$) Como H es abierto y cerrado, tenemos que H^c es cerrado entonces $\partial H = \overline{H} \cap (\overline{H})^c = H \cap H^c = \emptyset$.

$\square$

1.3. Conexidad en Espacios Topológicos

Esta es una propiedad muy importante para nuestro trabajo, así que empezaremos definiendo:

Definición 1.3.1. ***Conexo***

Se dice que un conjunto X es conexo si no existen A, B abiertos de X, tales que $A, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$.

Equivalentemente, tenemos que X es conexo, si los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados son $X y \emptyset$.

De la definición de conexidad y de la de topología, es fácil ver que si A, B son abiertos, no vacíos de $X, A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$, entonces si C es un subconjunto conexo de $X, C \subseteq A$ o $C \subseteq B$.

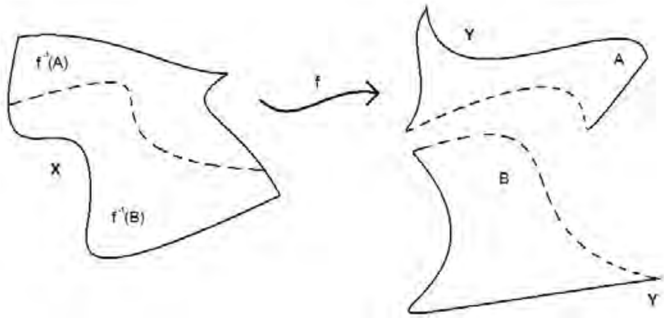
Sea Y un espacio topológico, si ocurre que $Y = P \cup Q, P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset, P \cap Q = \emptyset, P\, y\, Q$ ambos abiertos en Y, lo denotamos $P \,|\, Q = Y$.

Definición 1.3.2. ***Separación***

Sea X Un espacio topológico y $A, B, C \subset X$. Decimos que C separa a A de B en X si ocurre que $X - C = P \,|\, Q$ donde $A \subset P$ y $B \subset Q$.

Lema 1.3.3. *La imagen de un conjunto conexo, bajo una función continua es un conexo.*

Demostración. Sea Y la imagen de X y supongamos que Y no es conexo, entonces existen A y B tal que $A|B = Y$. Entonces $f^{-1}(A) \,|\, f^{-1}(B) = X$ el cual por hipótesis sabemos que es conexo, lo que nos lleva a una contradicción $\therefore Y$ es conexo. $\square$



Definición 1.3.4. ***Homeomorfismo***

Una función $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos se llama *homeomorfismo* si es una función biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas.

Se dice que un espacio topológico (X, τ) es homeomorfo a otro espacio (Y, τ') si existe un homeomorfismo entre ellos.

Figura 1.3: Ésta es una imagen por pasos, para ejemplificar un homeomorfismo

Lema 1.3.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico, K conexo, $K \subseteq X$ y $A \in \tau$. Supongamos que $A \cap K \neq \emptyset$ y $(X - A) \cap K \neq \emptyset$, entonces $\partial A \cap K \neq \emptyset$.*

Demostración. Nótese que $\partial A = \partial(X - A) \subseteq X - A$ ya que $X - A$ es cerrado. Por otra parte $K = (K \cap A) \cup (K \cap (X - A))$, si $K \cap \partial A = \emptyset$ entonces tendríamos que $K = (K \cap A) \cup (K \cap ((X - A) - \partial A))$ donde claramente $K \cap A$ y $K \cap ((X - A) - \partial A)$ son abiertos en K lo cual contradice la conexidad de $K \therefore K \cap \partial A \neq \emptyset$. $\square$

Lema 1.3.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico conexo, y $H \subset X$. Entonces $\partial H = \emptyset \Leftrightarrow H = X$ ó $H = \emptyset$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Por el lema1.2.9 tenemos que H es abierto y cerrado; se sigue de la conexidad en X que $H = X$ ó $H = \emptyset$.

$\Leftarrow$) La demostración es inmediata.

$\square$

Teorema 1.3.7. ***Sandwich conexo***

Sean (S, τ) un espacio topológico, C un subconjunto conexo de S y X tal que $C \subseteq X \subseteq \overline{C}$. Entonces X es conexo.

Demostración. Supongamos que $X = A \,|\, B$. Supondremos que $C \subseteq A$. Como B es abierto en X, entonces $B = W \cap X, W \in \tau$. Supongamos que $B \neq \emptyset$ y sea $b \in B$. Entonces $b \in \overline{C}$ y $b \in W$ así que $W \cap C \neq \emptyset$. Pero $W \cap C \subseteq W \cap X \cap A = B \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción que surgió de suponer que $B \neq \emptyset$. De aquí se sigue que $B = \emptyset$ y por lo tanto X es conexo. $\square$

A continuación veremos definiciones relacionadas con conexidad en espacios topológicos.

Definición 1.3.8. ***Componente***

Sea (X, τ) un espacio topológico y $p \in X$. La componente C_p de X que contiene a p es la unión de todos los subconjuntos conexos contenidos en X y que contienen a p.

$C_p = \bigcup \{A \subset X |\ p \in A \text{ conexo}\}$

Observemos que C_p es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a p.

Definición 1.3.9. ***Conexo en pequeño***

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $p \in X$ se dice que X es conexo en pequeño en p si dado cualquier $U \subset X$ abierto y $p \in U$, existe K conexo tal que $p \in K^o \subseteq K \subseteq U$.

Definición 1.3.10. ***Localmente conexo***

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\forall\, p \in X$ y cada abierto U tal que $p \in U$, existe un abierto A conexo, que contiene a p y $A \subset U$, se dice que X es un espacio localmente conexo.

Teorema 1.3.11. ***[Ejercicio 5.22 (a), pag 83]***
Un espacio X es localmente conexo si y sólo si cada componente de un conjunto abierto de X es abierta.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea U abierto de X y sea V componente de U, para demostrar que V es abierto, sea $v \in V \subset U$ entonces existe $W \subset U$ donde W es abierto, conexo y $v \in W$. Como V es componente de U tenemos que $v \in U$ entonces $W \subset V$ por lo tanto V es abierto.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$; sea $W \subset U$ la componente de U que contiene a x entonces W es abierto y conexo; $x \in W \subset U$. $\square$

Nótese que si X es localmente conexo en p, entonces X es conexo en pequeño en p.

El regreso de este enunciado es falso, la siguiente figura muestra un contra ejemplo

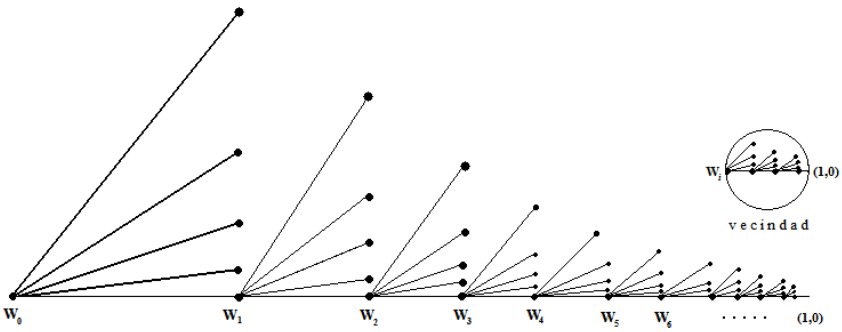


Figura 1.4:

Obsérvese que si V es un abierto que contiene al punto $(1,0)$ éste no es conexo, ya que alrededor de cualquier punto w_i hay partes disconexas en la vecindad, por lo tanto, para tener un subconjunto conexo debemos considerar al punto w_i como punto frontera de la vecindad tomada, lo que nos da una vecindad conexa no abierta, por lo tanto podemos asegurar que éste conjunto es conexo en pequeño y no localmente conexo.

Definición 1.3.12. ***Espacio de Peano***

Un espacio es de Peano si es un espacio métrico localmente conexo.

Teorema 1.3.13. ***[Ejercicio 5.22 (b), pag 84]***
Un espacio topológico X es conexo en pequeño en cada punto si y sólo si es localmente conexo en cada punto.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $W \subseteq X, W$ abierto y C componente de W. Sea $x \in C \subseteq W$. Por ser X conexo en pequeño en x, tenemos que existe un conexo V tal que $x \in V^o \subset V \subseteq W \therefore V \subseteq C$ y $x \in V^o \subset V \subseteq C \therefore C$ es abierto. Se sigue del teorema 1.3.11 que X es localmente conexo.

$\Leftarrow$) Es inmediato.

$\square$

1.4. Arco-conexidad (primera parte)

En esta sección nos enfocamos en la existencia de *arcos* totalmente contenidos en espacios topológicos que veremos más adelante.

Definición 1.4.1. ***Arco***

Es cualquier espacio homeomorfo al segmento [0,1].

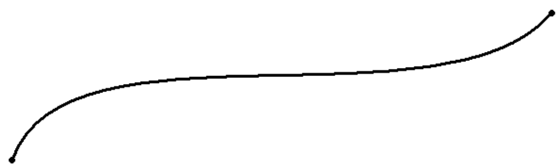


Figura 1.5:

Definición 1.4.2. ***Espacio arco-conexo***

Decimos que X es arco-conexo $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, tal que $x \neq y$ existe un arco totalmente contenido en X teniendo como extremos a x y y.

Definición 1.4.3. ***Arco-componente.***

Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que $C \subseteq X$ es arco-componente si:

i) C es arco-conexo.

ii) Si $C' \subseteq X$ es arco-conexo y $C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

El conjunto $\overline{X}$ que definiremos enseguida es un ejemplo de un conjunto que es conexo, pero no arco-conexo.

Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = sen(\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$

El conjunto que a continuación se muestra es $\overline{X}$.

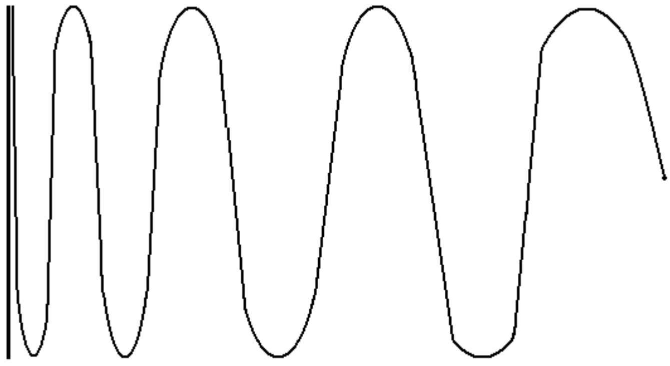


Figura 1.6: A éste conjunto se le conoce como la curva topológica.

Definición 1.4.4. ***Localmente arco-conexo***

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $p \in X$, entonces se dice que X es localmente arco-conexo en p si cada vecindad de p contiene una vecindad arco-conexa de p.

Se dice que el espacio es localmente arco-conexo si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición 1.4.5. ***Cubierta abierta***

Sea (X, τ) un espacio topológico, llamamos cubierta abierta a una colección de abiertos cuya unión es todo el espacio.

Ahora, en el mismo sentido una subcubierta abierta es una subcolección con la misma propiedad.

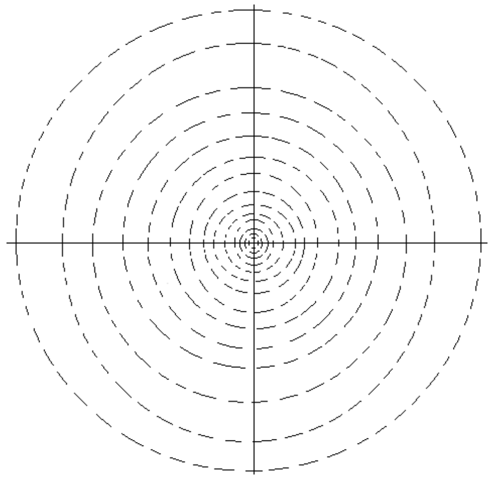


Figura 1.7: Éste es un ejemplo de una cubierta para el espacio $\mathbb{R}^2$

Definición 1.4.6. *Compacidad*

Se dice que en un espacio topológico (X, τ) es compacto, si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

De este modo diremos que un subconjunto de un espacio topológico es un compacto si lo es con la topología heredada a ese subconjunto.

Teorema 1.4.7. *Si (X, τ) es compacto y $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha | \ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ una cubierta abierta de F. Entonces $U_\alpha = V_\alpha \cap F, V_\alpha \in \tau$. La familia $\{V_\alpha | \ \alpha \in \mathfrak{A}\} \cup \{X - F\}$ es una cubierta abierta y por lo tanto admite una subcubierta finita
$\{V_{\alpha_i} | \ \alpha_i \in \mathfrak{A}, i = 1, ..., m\} \cup \{X - F\}$ es claro que $\{U_{\alpha_i} | \ \alpha_i \in \mathfrak{A}\}$ es una cubierta finita para F. $\square$

Capítulo 2

Continuos

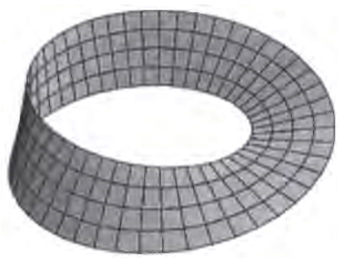
2.1. Continuos y ejemplos de continuos

Definición 2.1.1. ***Continuo***

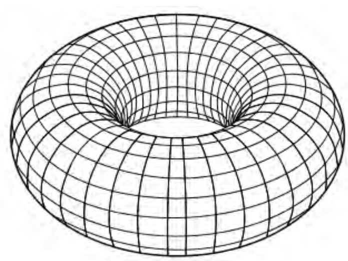
Se dice que X es un continuo si es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un subespacio de un espacio métrico, el cuál dada su topología heredada, es un continuo.

En $\mathbb{R}$ los intervalos $[a, b]$ donde $a < b$, son continuos y todos son homeomorfos entre sí. Para el caso $a = b$, se trata de un conjunto con sólo un punto, el cual también es un continuo.

También tenemos continuos en $\mathbb{R}^2$ como la curva topológica antes mencionada, una circunferencia y las dendritas, de este tipo de continuos abordaremos más adelante. En $\mathbb{R}^3$ la banda de Möebius, un cubo y el toro.



Banda de Möebius



El Toro

2.2. Conexidad local

En esta sección seguimos abordando el tema de la conexidad, ahora en los continuos, veremos los continuos semi-localmente conexos y los continuos hereditariamente localmente conexos, de estos últimos veremos varios ejemplos.

Definición 2.2.1. ***Semi-localmente conexo.***

Sea X un continuo, se dice que X es semi-localmente conexo en $p \in X$; si dado U abierto tal que $x \in U, \exists V$ abierto y $p \in V \subseteq U$ tal que $X - V$ tiene un número finito de componentes.

Teorema 2.2.2. *Si X es un continuo localmente conexo en todo punto $p \in X$, entonces X es semi-localmente conexo en todo punto $p \in X$.*

Demostración. Sea U un abierto y $p \in U$. Tenemos que $\forall x \notin U, \exists U_x$ abierto y conexo, tal que $x \in U_x$ y $p \notin \overline{U_x}$ (ya que $p \neq x$, existen abiertos ajenos que los contienen respectivamente).

La familia $\wp = \{U_x \mid x \in U^c\}$ es una cubierta abierta de U^c. Por el teorema 1.4.7 existe$\{U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_m}\}$ una cubierta finita de U^c. Sea $W = U_{x_1} \cup U_{x_m}$, el conjunto $V = U - \overline{W} = U \cap \overline{W}^c$ es abierto. Como $p \notin \overline{W}$ entonces $p \in V \subseteq U$. Por otra parte $V^c = U^c \cup \overline{W} = \overline{W}$ ya que $\overline{W} \supseteq U^c$ y además $\overline{W} = \overline{U_{x_1}} \cup ... \cup \overline{U_{x_m}}$ el cual a lo más tiene m componentes, por lo tanto V^c tiene un numero finito de componentes.

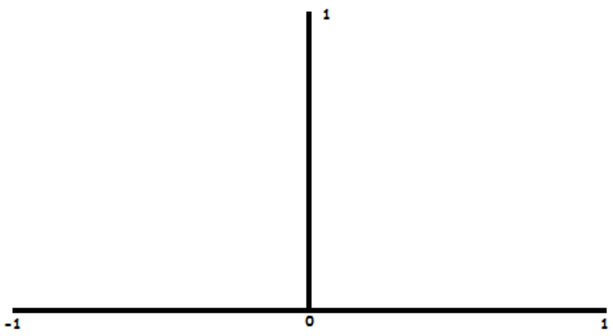
$\square$

Definición 2.2.3. ***Hereditariamente localmente conexo***

Se dice que un continuo X es hereditariamente localmente conexo, si cada subcontinuo de X es un continuo de Peano.

A continuación daremos unos ejemplos de continuos hereditariamente localmente conexos.

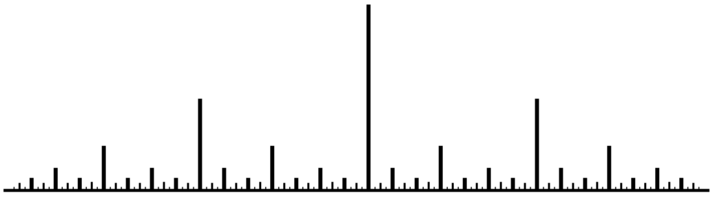
a) conocido como *el triodo* $T =$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], x = 0\}$.



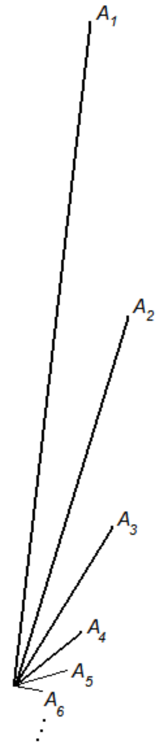
b) $A = ([0,1] \times 0) \cup (\bigcup \frac{1}{n} \times [0, \frac{1}{n}])$ donde $n \in \mathbb{N}$

c)$R = ([0,1] \times 0) \cup (\bigcup_{p \in [0,1]} p \times [0, f(p)]),$ donde

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } p = \frac{m}{n}, \quad (m,n) = 1 \\ 0 \text{ si } p \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



d) $F_w = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde $A_n = \{r(cos\frac{\theta}{2^n\pi}, sen\frac{\theta}{2^n\pi})|\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$



2.3. Unicoherencia

Definición 2.3.1. ***Unicoherente***

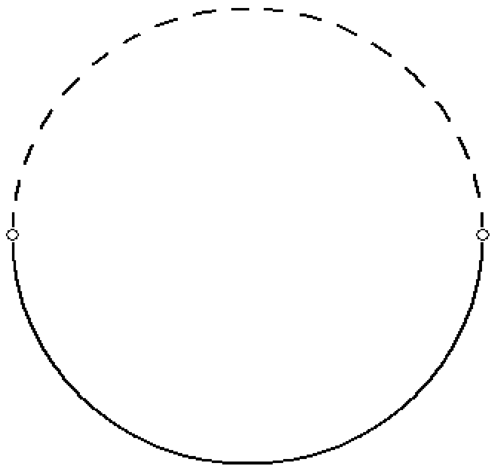
Un continuo es unicoherente si siempre que $X = A \cup B$, con A y B subcontinuos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexo (y por tanto subcontinuo de X). Decimos que X es hereditariamente unicoherente si todo subcontinuo de X es unicoherente.

Ejemplo 2.3.2.

Definición 2.3.3. ***Curva cerrada simple***

Un espacio X se dice que es una curva cerrada simple, si X es homeomorfo a: $S' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

Nótese que una curva cerrada simple no es unicoherente. Véase la siguiente figura:



A continuación definimos ejemplos de continuos, conocidos como: árbol y el otro como rayo.

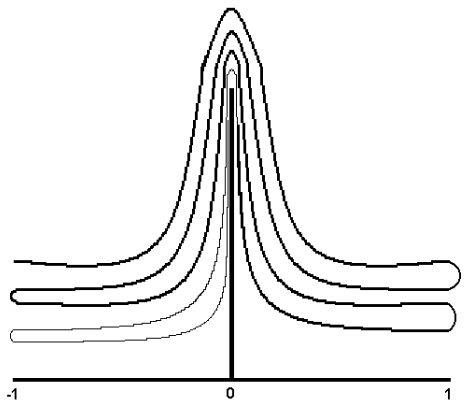
Sea X un continuo, decimos que:

1) X es un árbol si es la unión finita de arcos y no contiene curvas cerradas simples.

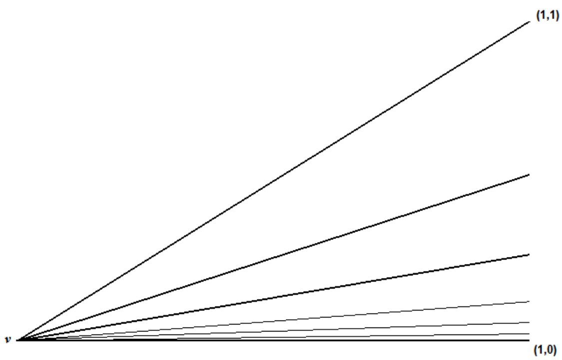
2) X es un rayo si X es homeomorfo a $[0, 1)$, es decir tomamos cerrado un lado del segmento y el otro lado lo tomamos abierto.

Ahora presentamos 2 ejemplos de continuos hereditariamente unicoherentes que no son árboles y uno de ellos es la cerradura en $\mathbb{R}^2$ de un rayo.

1) El rayo que converge al triodo.



2) Abanico armónico.



Proposición 2.3.4. *Todos los árboles son hereditariamente unicoherentes.*

Teorema 2.3.5. *Sea X un continuo, X es hereditariamente unicoherente $\Leftrightarrow \forall H, K \subset X$ tales que H y K son cerrados y conexos, tenemos que $H \cap K = \emptyset$ o $H \cap K$ es conexa.*

Demostración. $\Rightarrow$) sean $H, K \subset X$ cerrados y conexos, si $H \cap K = \emptyset$, ya acabamos. Ahora si $H \cap K \neq \emptyset$ el conjunto $H \cup K$ es un continuo y como X es hereditariamente unicoherente, entonces $H \cap K$ es conexo.

$\Leftarrow$) sea Y un subcontinuo de X y supongamos que $Y = H \cup K$, donde H, K subcontinuos de Y, entonces $H \cap K \neq \emptyset \therefore H \cap K$ es conexo.

□

2.4. Continuos de convergencia

Definición 2.4.1. *Límite*

Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos:

lim inf $A_i = \{x \in X|$ para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $U \cap A_i \neq \emptyset$ apartir de alguna $i > m\}$.

$\limsup A_i = \{x \in X|$ para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $U \cap A_i \neq \emptyset$ para una infinidad de índices$\}$.

Sea (X, τ) un espacio topológico, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X y $A \subset X$.

$limA_i = A$ significa: lim inf $Ai = A = \limsup A_i$.

Observación

Si $limA_i = A$, entonces A es cerrado. Sea $b \in \overline{A}$ y U un abierto tal que $b \in U$. Entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in U \cap A$ entonces $U \cap A_i \neq \emptyset$ a partir de alguna $i > m$. Se sigue de aquí que $b \in A$.

Definición 2.4.2. ***Continuo de Convergencia***

Sea X un continuo, $K \subseteq X, K$ continuo.

Se dice que K es un continuo de convergencia si existen continuos $K_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}$ tal que $lim K_n = K$, y $K_n \cap K = \emptyset, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Observación. Si K es un continuo de convergencia y $p \in K$, entonces para toda $\varepsilon > 0, B_\varepsilon(p) \cap K_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. Se sigue de 1.3.5 que $\partial B_\varepsilon(p) \cap K_n \neq \emptyset$.

Supongamos que X contiene un continuo de convergencia K, entonces tenemos que existe una sucesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos contenidos en X tal que:

1) $K = lim K_i$

2) $K \cap K_i = \emptyset, \ \forall i$

3) $K_i \cap K_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$

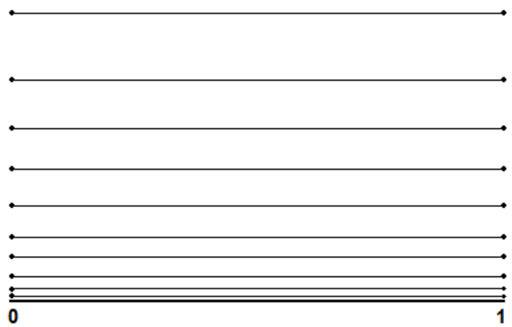
Sabemos que existe $\{H_n\}, n \in \mathbb{N}$ una sucesión de continuos que satisface 1) y 2). Sea $K_1 = H_1$. Supongamos que hemos elegido $K_i\,, i = 1, ..., n$ de tal manera que $K_i = H_{m_i}$ y $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Para elegir K_{n+1}, supongamos que $\forall j > m_n, H_j \cap K_i \neq \emptyset\,, i = 1, ..., m_n$.

Sea $x_j \in H_j \cap K_i$. Ya que X es métrico y compacto x_j tiene una subsucesión que converge a un punto x. Es fácil ver que $x \in K$ y que $x \in K_i$ para alguna $i \in \{1, ..., m_n\}$. Pero $K_i = H_{m_i}$, entonces $x \in K \cap H_{m_i}$ lo que contradice a 2).

Ejemplo 2.4.3. *a) Sean* $K_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}, K = [0,1] \times \{0\}$ *y*
$X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n \cup K$

Un continuo de convergencia es claramente $lim K_n = K$



b) En el abanico armónico (visto anteriormente en ejemplos de continuos hereditariamente unicoherentes)
Un continuo de convergencia es: $\{[0,1] \times 0\}$

Usaré los siguientes resultados más adelante. El primero de ellos, retoma el concepto de la separación, pero ahora en los continuos de convergencia.

Lema 2.4.4. ***[Ejercicio 5.30, pag 86]***
Si K *es un continuo de convergencia en* X *y* $x, y \in K$*, entonces ningún subconjunto de* K *separa a* x *de* y *en* X*.*

Demostración. Sea $\{K_i\} i \in \mathbb{N}$ como en la definición 2.4.2, supóngase que $S \subset K$ y $X - S = G|H$ con $x \in G$ y $y \in H$. Como $S \subset K$ entonces $K_i \cap S = \emptyset \forall\, i$ y como K_i es conexo $i \in \mathbb{N}, K_i \subseteq G$ o $K_i \subset H$. Digamos que $K_i \subseteq G$ para $i \in J \subseteq \mathbb{N}, J$ infinito.

Entonces $\bigcup_{i\in J} K_i \subseteq G$. Ahora como G es cerrado en $X-S$, se tiene que $Ce_{X-S}(\bigcup K_i) \subseteq G_y$ ya que $K = \lim_{x\to\infty} K_i, K-S \subseteq Ce_{X-S}\bigcup K_i \subseteq G$ lo que contradice que $y \in H$. $\square$

El segundo trata en sí, de la existencia de continuos de convergencia, obviamente de más peso e importancia en la teoría.

Teorema 2.4.5. ***Teorema del continuo de convergencia [Teorema 5.12, pag 76]*** *Sea X un continuo y sea $N = \{x \in X | X$ no es conexo en pequeño en $x\}$ si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia $K \subset X$ tal que $p \in K \subset N$.*

Definición 2.4.6. ***σ-conexo***

Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que X es $\sigma - conexo$ si X no es la unión de más de uno y a lo más una cantidad numerable de subconjuntos no vacíos, cerrados y mutuamente disjuntos.

El siguiente teorema trata de la relación que hay entre los continuos y los $\sigma - conexos$.

Teorema 2.4.7. ***[Teorema 5.16, pag 80]***
Todo continuo es $\sigma - conexo$.

Teorema 2.4.8. ***[Teorema 10.4, pag 167]***
Un continuo X es hereditariamente localmente conexo si y sólo si X no contiene continuos de convergencia.

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $p, q \in X$ tal que $p \neq q$. Para mostrar que X no es hereditariamente localmente conexo, asumiremos que X es un continuo de Peano.

Sea $U \subset X$ subconjunto abierto y conexo tal que $p \in U$ y $q \notin \overline{U}$, entonces por la condición 1), existe N tal que $K_i \cap U \neq \emptyset, \forall i \geq N$.

Sea $Y = K \cup \overline{U} \cup [\bigcup_{i=N}^{\infty} K_i]$ Es claro que Y es métrico y cerrado. Como $p \in K \cap \overline{U}$, tenemos que$(K \cap \overline{U})$ es conexo.

Además $K_i \cap U \neq \emptyset \forall i \geq N$, entonces $\overline{U} \cup [\bigcup_{i=N}^{\infty} K_i]$ es conexo. De aquí se sigue que Y es continuo. Supongamos que Y es un continuo de Peano. Entonces ya que $q \in (Y - \overline{U})$, existe un subconjunto abierto y conexo $V \subset Y$ tal que $q \in V$ tal que $q \in V$ y $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$, de donde tenemos:

4)$\overline{V} = [\overline{V} \cap K] \cup [\bigcup_{i=N}^{\infty} (\overline{V} \cap K_i)]$

Dado que $q \in V \cap K$, por la condición 1) tenemos $V \cap K_i \neq \emptyset \forall i \geq N$. Ahora usando $2), 3)$ y 4) de la observación hecha en la definición de continuo de convergencia, podemos concluir que $\overline{V}$ no es $\sigma - conexo$. Como $\overline{V}$ es un continuo, tenemos una contradicción al teorema 2.4.7. En consecuencia Y no es un conjunto de Peano, por lo tanto X no es hereditariamente localmente conexo.

$\Leftarrow$) Sea Y un subcontinuo de X y definimos al conjunto

$N(Y) = \{y \in Y | Y$ no es conexo en pequeño en $y\}$

Si $N(Y) \neq \emptyset$, por el teorema 2.4.5 tenemos que existe C continuo de convergencia de Y y por lo tanto C es continuo de convergencia de X. Entonces se tiene que $N(Y) = \emptyset \therefore Y$ es conexo en pequeño en y, para cualquier y, por lo que tenemos que Y es localmente conexo $\forall y \in Y$. □

Definición 2.4.9. ***Accesible por arcos***

Sea (X, τ) un espacio topológico, $Z \subset X$ y $p \in X$. Decimos que p es accesible por arcos desde $X - Z$, si existe un arco contenido en $(X - Z) \cup \{p\}$ teniendo a p como punto extremo.

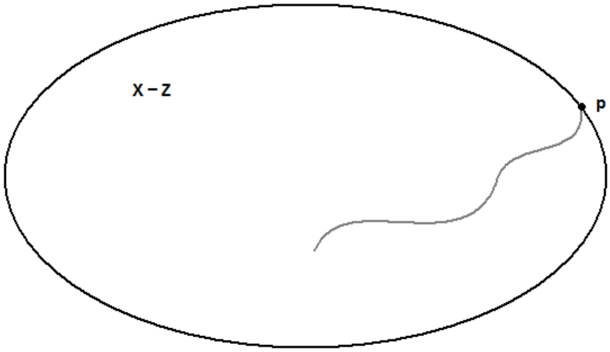


Figura 2.1:

Definición 2.4.10. ***Corte***

Un corte de un continuo X es un subconjunto cerrado C de X tal que $X - C$ no es conexo.

Lema 2.4.11. ***Colección no numerable de cortes [Ejercicio 6.29 (a), pag 100]***
Sea X un espacio métrico y conexo. Si ξ es una colección no numerable de cortes mutuamente disjuntos de X, entonces existe $C \in \xi$ tal que $X - C = U|V$ donde:
$U \cap (\bigcup \xi) \neq \emptyset \neq V \cap (\bigcup \xi)$.

Demostración. Lo supondremos falso. Sean C_a y $C_b \in \xi$, y supongamos que $X - C_\alpha = U_\alpha | V_\alpha$ y $X - C_\beta = U_\beta | V_\beta$ con
$U_\alpha \supseteq \bigcup \xi - C_\alpha$ y $U_\beta \supseteq \bigcup \xi - C_\beta$. Probaremos lo siguiente:
$X = U_\alpha \cup U_\beta \cup (V_\alpha \cap V_\beta)$.
Dado $x \in X$ tenemos los siguientes casos:
Caso 1): $x \in U_\alpha \cup U_\beta$ habríamos terminado.
Caso 2): $x \notin U_\alpha \cup U_\beta \Rightarrow x \in V_\alpha \cap V_\beta$.
Por otra parte tenemos que $(U_\alpha \cup U_\beta) \cap (V_\alpha \cap V_\beta) = \emptyset$

Por ser X conexo, tenemos $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ y tendríamos una colección no numerable $\{V_\alpha\}$ de abiertos, ajenos dos a dos lo cual no es posible en un espacio separable. $\square$

Definición 2.4.12. ***Punto de corte***

Sea X un espacio conexo $p \in X$, decimos que p es punto de corte de X si $X - \{p\}$ no es conexo.

Lema 2.4.13. ***Continuos de convergencia y colección no numerables de cortes***
[Ejercicio 6.29 (b), pag 100]

Si K es un continuo de convergencia de X entonces K no contiene una colección no numerable de cortes en X, mutuamente disjuntos. Esto implica que tenemos a lo más una cantidad numerable de puntos de K que son puntos de corte de X. Entonces K contiene una cantidad no numerable de puntos que no son de corte de X.

Demostración. Supongamos que K sí contiene una colección ξ no numerable de cortes ajenos dos a dos. Usando el lema 2.4.11 tenemos que existe un corte $C \in \xi$ tal que $X - C = U|V$ donde:

$U \cap (\bigcup \xi) \neq \emptyset \neq V \cap (\bigcup \xi)$.

Ahora, como K es un continuo de convergencia, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de continuos que no intersectan a K tal que $lim K_n = K$. Ahora $(X - K) \subseteq (X - C) = U \cup V$ por lo tanto podemos suponer que $K_n \subseteq U$ para una infinidad de índices n. Entonces $(K - C) \subseteq U$, lo cual es una contradicción ya que $V \cap \bigcup \xi \neq \emptyset$. $\square$

Lema 2.4.14. ***Puntos de corte***
[Ejercicio 6.29 (d), pag 100]

Sea Y el conjunto de todos los puntos de corte de X. Sea Z un subconjunto conexo de X, entonces todos excepto a lo más una cantidad numerable de puntos de $Y \cap Z$ sun puntos de corte de Z.

Demostración. Sea $S = \{p \in Y \cap Z | p$ es punto de corte de $Z\}$

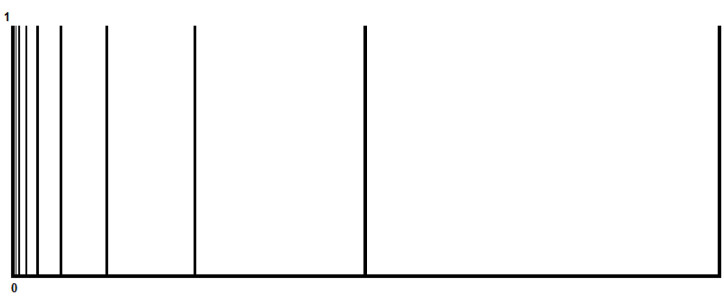
Supongamos que $(Y \cap Z) - S$ no es numerable. Como $(Y \cap Z) - S \subseteq Y$ tenemos que los puntos de $(Y \cap Z) - S$ son puntos de corte de X. Aplicando 2.4.11 tenemos que existe $p \in (Y \cap Z) - S$ tal que si $X - \{p\} = U|V$ entonces $U \cap (Y \cap Z - S) \neq \emptyset$ y $V \cap (Y \cap Z - S) \neq \emptyset$ lo que es una contradicción. □

2.5. Arco-conexidad (segunda parte)

Los siguientes dos teoremas están demostrados en [Nadler].

Teorema 2.5.1. ***Arco-conexidad [Teorema 8.23, pag 130]*** *Todo Continuo (de Peano) localmente conexo, es Arco-conexo*

Nota: el regreso de éste teorema es falso, como lo muestra la siguiente figura.



$P = ([0,1] \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])$ donde $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

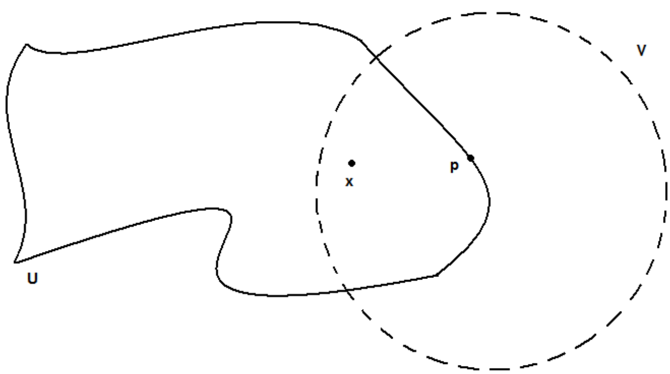
Este conjunto conocido como espacio Peine, cumple con ser arco-conexo pero no es localmente conexo, ya que ningún punto del segmento $\{0\} \times [0,1]$ posee base de vecindades conexas.

Teorema 2.5.2. ***[Teorema 8.26, pag 132]***
Todo subconjunto abierto y conexo de un continuo de Peano es arco-conexo.

Lema 2.5.3. ***Densidad de los puntos accesibles por arcos [Ejercicio 8.32 (b), pag 134]***
Sea (X, τ) un espacio topológico localmente conexo y $U \subset X$ abierto. Entonces el conjunto de todos los puntos de ∂U que son accesibles por arcos desde U es denso en ∂U.

Demostración. Sea $F = \{x \in \partial U | x \text{ es accesible por arcos desde } U\}$. Sea $W \subseteq \partial U$ tal que W es abierto en ∂U; tomemos a

$W = W_1 \cap \partial U, W_1$ abierto en X. Sea $p \in W$ entonces $x \in W_1$. Existe V arco-conexo, abierto tal que $p \in V \subseteq W_1$. Como $p \in \partial U \Rightarrow V \cap U \neq \emptyset$, sea $x \in V \cap U$. Ahora $x, p \in V \therefore \exists$ un arco de x a p contenido en V. $\square$



Lema 2.5.4. ***De las orejas***

Sea X un continuo y M un subcontinuo de X. Si sucede que $X - M = U|V$ entonces tenemos que $M \cup U$ y $M \cup V$ son continuos.

Demostración. Probaremos primero la compacidad. Tenemos que $X - M = U \cup V$, y $U \cap V = \emptyset$. Ahora, sabemos que V es abierto en X, por lo tanto tenemos que $M \cup U$ es cerrado.

Para probar la conexidad, supongamos que $M \cup U = H|K$, dado que M es conexo entonces $M \subseteq H$. Se sigue que $K \subseteq U$. Como $\overline{V} \cap U = \emptyset$, entonces $\overline{V} \cap K = \emptyset$. Notemos que:

$X = H \cup (V|K) \Rightarrow X = H \cup K \cup V$. Ahora $\overline{H \cup V} \cap K = (\overline{H} \cup \overline{V}) \cap K = (\overline{H} \cap K) \cup (\overline{V} \cap K)$ las cuales son ambas vacías. Por otro lado $(H \cup V) \cap \overline{K} = (H \cap \overline{K}) \cup (V \cap \overline{K}) = (H \cap K) \cup (V \cap K) = \emptyset$. Esto contradice la conexidad de X. $\square$

Teorema 2.5.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico, sea C conexo y $C \subseteq X$. Si L es una componente de $X - C$ entonces $X - L$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X - L = U|V$. Como $C \subseteq (X - L)$ y C es conexo, entonces C sólo puede estar en un sólo lado, es decir $L \cup V \subseteq X - C$, ahora usando el teorema anterior tenemos la existencia de un abierto más grande contenido en $X - C$, esto no puede ocurrir por la definición de componente, por lo que tenemos que $V = \emptyset$.

$\square$

Lema 2.5.6. *Puntos en continuos que no son de corte.*
[Ejercicio 8.45, pag 137]

Sea X un continuo de Peano y sea p un punto de X que no sea de corte. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe un subconjunto abierto y conexo $U \subset X$ tal que $p \in U, diam(U) < \varepsilon$ y $X - U$ es conexo.

Demostración. Sea V un abierto tal que $p \in V$, $diam(V) < \varepsilon$ y $X - V$ tiene un número finito de componentes (La existencia de$V$ está justificada por el teorema 2.2.2). Sean $L_1, ..., L_m$ las componentes de $X - V$ y sean T_i, donde $i = 1, 2, ..., m$ arcos que unen L_1 con $L_i, i = 2, ..., m$ contenidos en $X - \{p\}$. Estos arcos existen ya que $X - \{p\}$ es arco-conexo por el teorema 2.5.2. Entonces $L_1 \cup \bigcup_{i=2}^{m} T_i \cup L_i = C$ conexo y cerrado. Sea U la componente de $X - C$ que contiene a p. Entonces $p \in U \subseteq V, L$ es abierto y conexo y por el teorema 2.5.5, tenemos que L es conexo. Es claro que el $diam(U) < \varepsilon$. □

Lema 2.5.7. *Si X es un continuo no degenerado, entonces existe una colección ξ como la del lema 2.4.11.*

Demostración. Sean X conexo y $H \subseteq X, H \neq \emptyset$. Haciendo uso del lema 1.3.6 tenemos que $\partial H \neq \emptyset$. Sean $p, q \in X$ y $r > 0$ tal que $q \notin B_\varepsilon(p)$. Ahora si $x \in \partial B_\varepsilon(p) \Rightarrow d(x, p) = r$.

Entonces si $r \neq s$, tendríamos que $\partial B_\varepsilon(p) \cap \partial B_s(p) = \emptyset$. Ya que la frontera de un conjunto separa al interior del exterior, entonces $\partial B_s(p)$ donde $s < r$ es una colección no numerable de cortes cerrados, ajenos dos a dos. □

Con el siguiente teorema concluimos nuestro estudio en los diferentes tipos de conexidad que hay en este campo.

Teorema 2.5.8. *de Han-Mazurkiewicz [Teorema 8.14, pág 126] Todo continuo de Peano es la imagen continua del intervalo [0,1].*

Capítulo 3

Dendroides

3.1. Propiedades

En este capítulo nos enfocaremos en esta clase de continuos que son los dendroides, veremos algunas de sus propiedades y estudiaremos algunos teoremas que nos ayudarán para la prueba de el teorema principal de esta tesis.

Definición 3.1.1. ***Dendroide***

Un Dendroide es un continuo, arco-conexo y hereditariamente unicoherente

A continuación veremos dos lemas que tienen que ver con propiedades básicas de los dendroides.

Lema 3.1.2. *Sea X un dendroide, dados dos puntos $p, q \in X$ existe un único arco con extremos en p y q.*

Demostración. Como p y $q \in X$ sabemos que existe un arco A de p a q contenido en X; ahora supongamos que existe otro arco $B \neq A$ sea $b \in B$ tal que $b \notin A$. Ahora si $a, b \in B$, diremos que $a < b$

si a está entre p y b. Sean $H = \{x \in A \cap B \text{ tal que } p \leq x < b\}$ y $K = \{x \in A \cap B \text{ tal que } b < x \leq q\}$ observemos que $\overline{H} = \{x \in A \cap B \text{ tal que } p \leq x \leq b\}$ y $\overline{K} = \{x \in A \cap B \text{ tal que } b \leq x \leq q\}$ de donde tenemos que H y K son cerrados, y como $p \in H$ y $q \in K$; H y K son no vacíos, además $H \cap K = \emptyset$ esto prueba que $A \cap B$ no es conexo, contradiciendo la unicoherencia hereditaria de X. Entonces tenemos que $B = A$ y el arco es único.

□

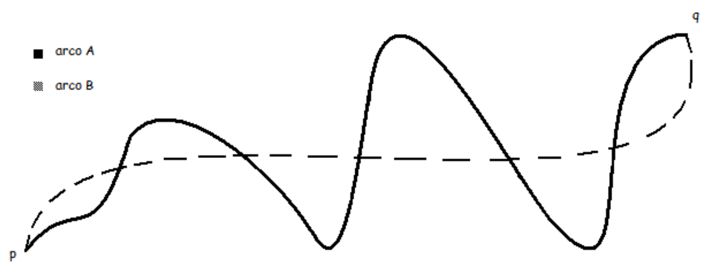


Figura 3.1:

Lema 3.1.3. *Sea X un dendroide, tenemos que todo subcontinuo $Y \subset X$ es un dendroide.*

Demostración. Tenemos que por ser Y un subconjunto de X dendroide, Y es métrico, compacto, conexo y hereditariamente unicoherente. Ahora para ver que Y es arco-conexo, sean $p, q \in Y \subset X$. Entonces existe un arco $A \subset X$ tal que los extremos de A son p y q; supongamos que $A \subsetneq Y$, entonces $A \cap Y$ no es conexo, lo que contradice la hipótesis de ser hereditariamente unicoherente, por lo tanto $A \subset Y$ lo que demuestra que Y es arco-conexo.

□

Ejemplos de dendroides

a) Peine de Cantor: $([0,1]\times\{0\})\cup(\kappa\times[0,1])$ donde la letra κ denota el conjunto de Cantor.

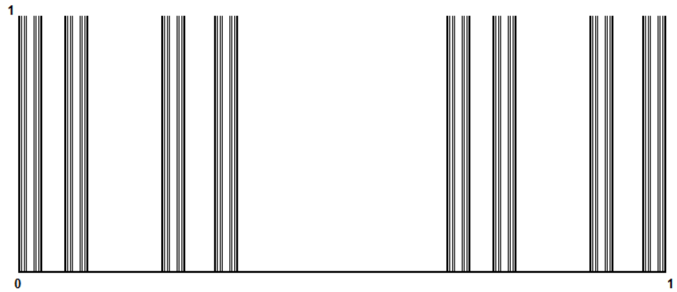


Figura 3.2:

b) La Dendrita de Gemahn

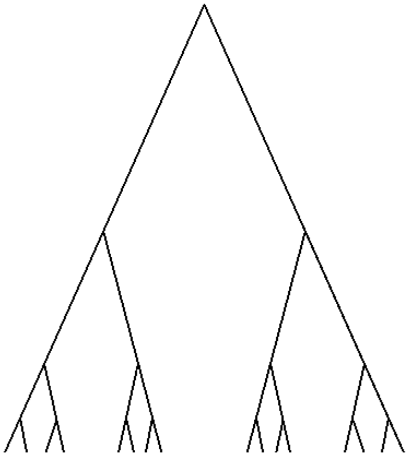


Figura 3.3:

Definición 3.1.4. ***Orden de un punto***

Sea X un dendroide, definimos el orden de un punto $p \in X, ord(p)$, como el número de arco-componentes de $X - \{p\}$.

$$\text{Tipos de puntos en los dendroides:} \begin{cases} \text{terminales } ord(p) = 1 \\ \text{ordinarios } ord(p) = 2 \\ \text{ramificación } ord(p) \geq 3 \end{cases}$$

Definición 3.1.5. ***Tipos de Dendroides***

a) Árboles: son dendroides que tienen un número finito de puntos terminales.

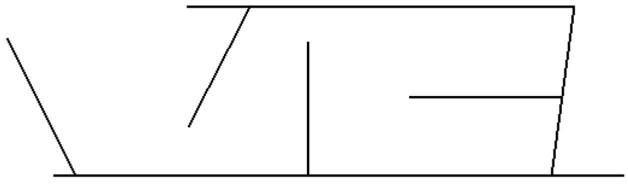


Figura 3.4:

b) Dendritas: continuos localmente conexos que no contienen curvas cerradas simples.

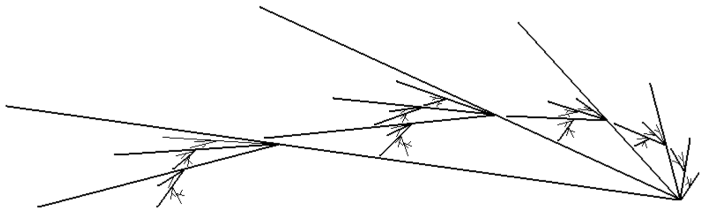


Figura 3.5:

Proposición 3.1.6. *Todo árbol es una dendrita y toda dendrita es un dendroide*

Teorema 3.1.7. *Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.*

Para probar éste teorema, utilizaremos las siguientes definiciones y resultados.

Teorema 3.1.8. ***[Teorema 10.2, pág 166]***
Un continuo es una dendrita si y sólo si cualquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea X una dendrita, sean $p, q \in X$ tal que $p \neq q$. Apoyándonos en el teorema 2.5.1 y tenemos la existencia de un arco $A \subset X$ que va de p a q. Sea $r \in A - \{p, q\}$ y U la componente de p en $X - \{r\}$. Supongamos que $q \in U$. Por la definición 1.3.11 tenemos que U es abierto en X, y el teorema 2.5.2 nos afirma que hay un arco $B \subset U$ que va de p a q, observemos que $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple, lo cual contradice la suposición de que X es una dendrita. Entonces $q \notin U$. Notemos que U es abierto y cerrado en $X - \{r\}$ por lo que obtenemos que p y q están separados en X por r.

$\Leftarrow$ Dado que cualesquiera dos puntos están separados por un tercer punto, entonces utilizando el lema 2.4.4 tenemos que X no puede contener un continuo de convergencia. Entonces, por el teorema 2.4.5 sabemos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, con esto y el teorema 1.3.13 obtenemos que X es locamente conexo en cada punto. Por otra parte, la hipótesis nos dice que X no contiene curvas cerradas simples. $\square$

Teorema 3.1.9. ***[Teorema 10.5, pág 167]***
Toda dendrita es hereditariamente localmente conexa.

Demostración. Apoyándonos en el teorema anterior 1.3.7 el cual nos da una caracterización de la dendrita, tenemos que si X es una dendrita, entonces $\forall x, y \in X \exists z \in X$ tal que x está separado de y por z. Ahora con el lema 2.4.4, si $x, y \in K$ donde K es un continuo de convergencia de X, entonces ningun subconjunto de K puede separar a x de y en X. Con lo que tenemos que X no contiene continuos de convergencia, ahora recordando el teorema 2.4.8 obtenemos que X es hereditariamente localmente conexo. $\square$

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema 3.1.8 y de la definición de dendrita.

Teorema 3.1.10. ***[Teorema 10.6, pág 167]***
Todo subcontinuo F de una dendrita D es una dendrita.

Definición 3.1.11. ***Punto extremo***

Sea (X, τ) un continuo, $p \in X$ es llamado punto extremo de X si cada vez que $p \in U \in \tau, \exists V \in \tau$ tal que $p \in V \subset U$ y ∂V consta de un solo punto.

Teorema 3.1.12. ***[Teorema 10.7, pág 168]***
Un continuo es una dendrita si y sólo si cada punto de X es o bien un punto de corte de X, o bien punto extremo de X.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea X una dendrita y $p \in X$ un punto que no sea de corte. Sea $\varepsilon > 0$, aplicando el lema 2.5.6 sabemos que existe un subconjunto abierto y conexo $U \subset X$ tal que $p \in U, diam(U) < \varepsilon$ y $X - U$ es conexo. Supongamos que $|\partial U| \geq 2$. Entonces retomando el lema 2.5.3, tenemos que existen $q, r \in \partial U$ con $q \neq r$ tal que q y r son accesibles por arcos desde U. Ahora tenemos que U es arco-conexo, aplicando el teorema 2.5.2 tenemos que existe un arco A en $U \cup \{q, r\}$ que va de q a r. Notemos que $q, r \in X - U$. Como $X - U$ es conexo, por le teorema 3.1.10 tenemos que $X - U$ es un continuo de Peano ya que X es una dendrita, retomando la definición 1.3.12 tenemos que existe un arco B en $X - U$ que va de q a r. De aquí se sigue que $A \cup B$ es una curva cerrada simple, lo cual no puede ocurrir, ya que habíamos supuesto que x es una dendrita; por lo tanto $|\partial U| \leq 1$. Como X no es degenerado, aplicando el lema 1.3.5 tenemos que p es punto extremo de X.

$\Leftarrow$ Supongamos que X es un continuo tal que cada punto de X es o bien punto de corte de X, o bien punto extremo de X. Sea $H = \{p \in X | p$ no es punto extremo de X. Usando la definición 1.2.7 y la observación hecha en la definición 2.2.4 tenemos que ningún punto extremo de X puede pertenecer a un continuo de convergencia en X.

Ahora veremos que X no contiene ningún continuo de convergencia. Si tuviera algún continuo de convergencia K entonces recordando la observación de la definición 2.4.1, solamente una cantidad numerable de puntos de K serían puntos de corte de X. Por hipótesis, los demás puntos son extremos, lo cual no es posible por la observación anterior. En consecuencia aplicando teorema 3.1.9 obtenemos que X es hereditariamente unicoherente. En particular X es de Peano y no contiene curvas cerradas simples, entonces X es una dendrita. $\square$

Teorema 3.1.13. ***[Teorema 10.9, pág 169]***
Un subconjunto conexo de una dendrita es arco-conexo.

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de una dendrita X y sean $p, q \in C$ tal que $p \neq q$. Sabemos por el teorema 3.1.10 que todo subcontinuo de una, es dendrita, entonces $\overline{C}$ es también una dendrita, por ser cerrado, por tanto compacto y conexo. Apoyándonos en el teorema 2.5.1, obtenemos la existencia de un arco $A \subset \overline{C}$ de p a q.

Ahora mostraremos que $A \subset C$. Como C es conexo entonces cada punto de $\overline{C} - C$ es punto de no corte de $\overline{C}$, observemos que si $p \in \overline{C} - C$, entonces $C \subseteq C - \{p\} \subseteq \overline{C}$. Retomando el teorema 1.3.12 y sabiendo de $\overline{C}$ es una dendrita, tenemos que cada punto de $\overline{C} - C$ es un punto de corte o un punto terminal de $\overline{C}$; por lo que se tiene que cada punto de $\overline{C} - C$ es un punto terminal de $\overline{C}$; entonces tenemos que los únicos puntos de A que pueden ser puntos terminales en $\overline{C}$ son p y q, y como p y $q \in C$ tenemos que $A \cap (\overline{C} - C) = \emptyset$, entonces $A \subset \overline{C}$ implica que $A \subset C$. □

Teorema 3.1.14. ***[Teorema 10.10, pág 169.]*** *Un continuo es una dendrita si y sólo si la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexa.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea X una dendrita. Supongamos que existen subconjuntos conexos C_1 y C_2 contenidos en X tal que $C_1 \cap C_2$ no es conexa; sean p, q puntos de diferentes componentes de $C_1 \cap C_2$ retomando el teorema 3.1.9 obtenemos la existencia de arcos $A_1 \subset C_1$ y $A_2 \subset C_2$ que van de$p$ a q; entonces tenemos que $A_1 \cup A_2$ contiene una curva cerrada simple, lo que contradice la suposición de que X es dendrita. $\Leftarrow$ De la hipótesis se sigue que X no contiene curvas cerradas simples. Para demostrar que X es localmente conexo, supongamos que X contiene un continuo de convergencia K. Recordando el lema 2.5.6 se sigue que existe una colección no numerable ξ de cortes, cerrados y mutuamente disjuntos de K. Usando el lema 2.4.13, tenemos la existencia de $C \in \xi$ tal que $X-C$ es conexo. Por hipótesis $K \cap \{X-C\}$ es conexo. Pero $K \cap \{X-C\} = K-C$. Y ya que $C \in \xi, K-C$ no es conexo. Ésta contradicción nos prueba que X no contiene continuos de convergencia y por lo tanto X es localmente conexo, esto aplicando el teorema 2.4.8 $\therefore X$ es una dendrita. $\square$

Ahora sí podemos demostrar el teorema 3.1.7 Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.

Demostración. $\Rightarrow$ Tenemos que X es métrico, compacto, localmente conexo y que no contiene curvas cerradas simples, para ver que X es un dendroide falta mostrar que, si X no contiene curvas cerradas simples, entonces X debe ser hereditariamente unicoherente. Esto lo obtenemos aplicando el 3.1.14, ahora para mostrar que todo continuo localmente conexo es arco-conexo, retomamos el teorema 2.5.1 $\square$

Capítulo 4

Ejemplos de dendroides y algunos de sus puntos.

4.1. Clasificación de puntos

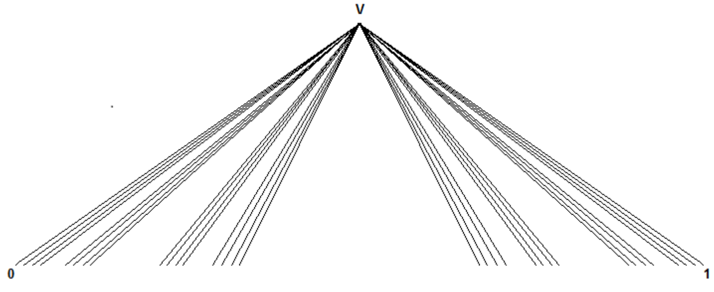
Definición 4.1.1. *Abanico*

Un dendroide es un abanico si tiene exactamente un punto de ramificación al que llamaremos vértice del abanico.

Ejemplos

a) El abanico armónico (visto capítulos atrás)

b) El abanico de Cantor:



Definición 4.1.2. *Punto orilla*

Sean X un dendroide y $p \in X$, decimos que p es punto orilla si existe una sucesión $\{A_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, la cual converge a X donde los conjuntos A_n son subcontinuos de X, ninguno de los cuales contiene a p.

Definición 4.1.3. *Suavidad*

Un dendroide X es suave en uno de sus puntos p si dada cualquier sucesión convergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ con $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$ el límite de los arcos $[p, a_n]$ es el arco $[p, a]$.

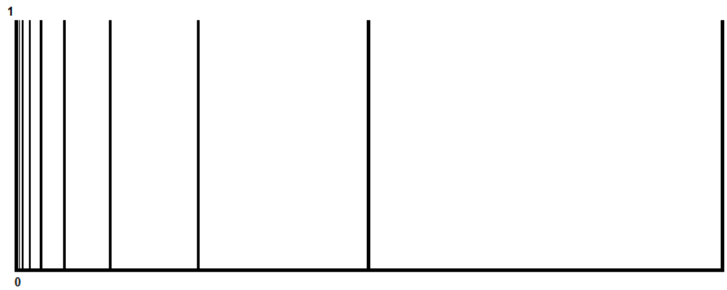
Un dendroide es suave si es suave en algún punto.

A continuación mostraremos algunos dendroides, en los cuales hemos buscado algunas clases de puntos que en ellos se encuentran.

Triodo: $X = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$

Localmente Conexo: X es localmente conexo en todos sus puntos.
Suave: X es suave en todos sus puntos.
Conexo en pequeño: X es conexo en pequeño en todos sus puntos.
Puntos de corte:los puntos contenidos en $((-1, 1)\times\{0\})\cup(\{0\}\times(0, 1))$
Puntos orilla: los puntos con las coordenadas $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$
Puntos terminales: tiene tres, $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$
Puntos ordinarios: los puntos del conjunto
$((-1, 1) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (0, 1))$
Puntos de ramificación: el punto $(0, 0)$

Peine $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])$
donde $A = \{\frac{1}{n} | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$



Tomemos $A' = A - \{0\}$.

Localmente Conexo: los puntos del conjunto
$\{[(0,1] \times \{0\}] \cup [A' \times [0,1]]\}$

Suave: los puntos del conjunto $\{[(0,1] \times \{0\}] \cup [A' \times [0,1]]\}$

Conexo en pequeño: los puntos del conjunto
$\{[(0,1] \times \{0\}] \cup [A' \times [0,1]]\} \cup (0,0)$

Puntos de corte: los puntos del conjunto $[(0,1] \times \{0\}] \cup [A' \times [0,1)]$

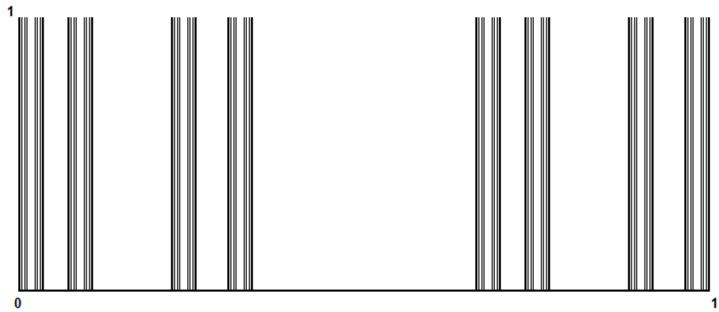
Puntos orilla: los puntos del conjunto $[\{0\} \times [0,1]] \cup [A' \times \{1\}]$

Puntos terminales: los puntos del conjunto $[A \times \{1\}]$

Puntos ordinarios: los puntos en el conjunto
$[((0,1) \times \{0\}) - (A \times \{0\})] \cup [A \times (0,1)]$

Puntos de ramificación: $A \times \{0\}$

Peine de Cantor $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\kappa \times [0,1])$ donde κ es el conjunto de Cantor.



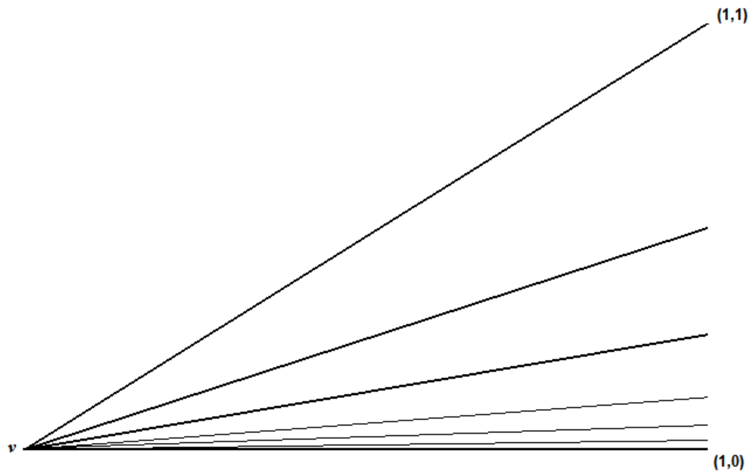
Localmente Conexo: los puntos del segmento $[0,1] \times \{0\}$
Suave: en los puntos del segmento $[0,1] \times \{0\}$
Conexo en pequeño: los puntos del segmento $[0,1] \times \{0\}$
Puntos de corte: son los puntos del segmento $[0,1] \times \{0\}$
Puntos orilla: son los puntos del conjunto $\kappa \times (0,1)$
Puntos terminales: son los puntos del conjunto $\kappa \times \{1\}$
Puntos ordinarios: $\kappa^c \cup [\kappa \times (0,1)]$
Puntos de ramificación: todos los puntos de $\kappa \times \{0\}$

Abanico armónico

Sea $X = \{1\} \times (\{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $v = (0,0)$

Denotaremos con $\langle a, b\rangle$ al segmento rectilíneo que va de a a b.

El abanico armónico es $\bigcup \langle v, x\rangle$ tal que $x \in X$.



Localmente Conexo: en cada uno de los puntos de $\langle v, (1, \frac{1}{n})\rangle, n \in \mathbb{N}$.

Suave: todos los segmentos $\langle v, X'\rangle$, donde $X' = X - \{0\}$.
[0.2cm] **Conexo en pequeño:** todos los segmentos $\langle v, X'\rangle$

Puntos de corte: todos los segmentos $\langle v, X\rangle - \{x\}$ con $x \in X'$.

Puntos orilla: $X' \cup (\langle v, 0\rangle - \{v\})$.

Puntos terminales: todos los puntos de X' lo son.

Puntos ordinarios: los puntos en $\langle v, x\rangle - \{v, x\}$ donde $x \in X$.

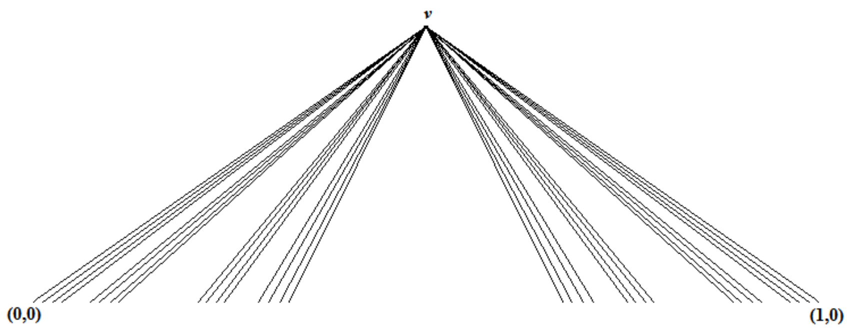
Puntos de ramificación: v.

Abanico de Cantor

Sea $X = [\{0\} \times \kappa]$ y $v = (\frac{1}{2}, 1)$

El abanico de Cantor es $\bigcup \langle v, x \rangle$ tal que $x \in X$.

Lo denotaremos con Δ



Localmente Conexo: en el vértice v

Suave: en el punto v

Conexo en pequeño: en el punto v

Puntos de corte: el punto v

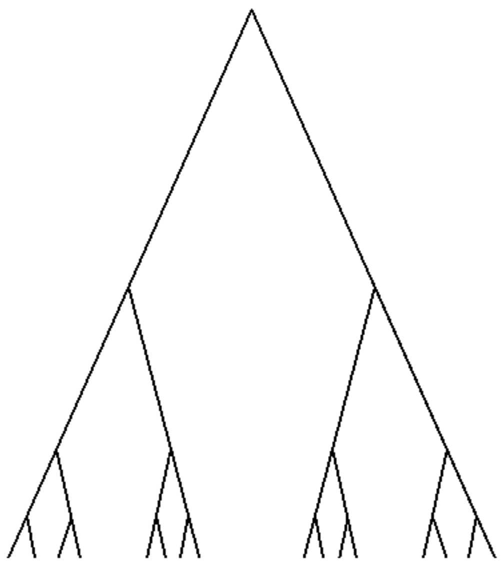
Puntos orilla: todos los puntos del conjunto $X - v$

Puntos terminales: $[\{0\} \times \kappa]$

Puntos ordinarios: $\Delta - ((\{0\} \times \kappa) \cup \{v\})$

Puntos de ramificación: el punto v

Dendrita de Gemahn



Localmente Conexo: Todos los puntos de X lo son

Suave: Todos los puntos de X lo son

Conexo en pequeño: Todos los puntos de X lo son

Puntos de corte: los puntos del conjunto $(X - (\kappa \times \{0\}))$

Puntos orilla: $(\kappa \times \{0\})$

Puntos terminales: $(\kappa \times \{0\})$. Denotados por T

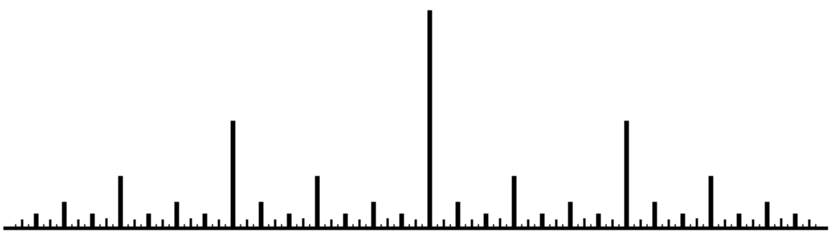
Puntos de ramificación: son los puntos de la forma $(\frac{2n-1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}), n \in \{1, ..., 2^{k-1}\}$ y $k \in \mathbb{N}$. Denotados por R

Puntos ordinarios: $(\kappa \times \{0\}) \cup (X - (T \cup R))$

Dendrita D

$$D = ([0,1] \times 0) \cup \Big(\bigcup_{p \in [0,1]} p \times [0, f(p)] \Big), \text{ donde}$$

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } p = \frac{m}{n}, \quad (m,n) = 1 \\ 0 \text{ si } p \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Localmente Conexo: todos los puntos de X lo son

Suave: todos los puntos de X lo son

Conexo en pequeño: todos los puntos de X lo son

Puntos terminales: $\{(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}) \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $n \in \mathbb{N}\}$. Denotados por T

Puntos de corte: los puntos del conjunto $X - T$

Puntos orilla: T

Puntos de ramificación: $([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\}$. Denotados por R

Puntos ordinarios: los puntos del conjunto $X - (R \cup T)$

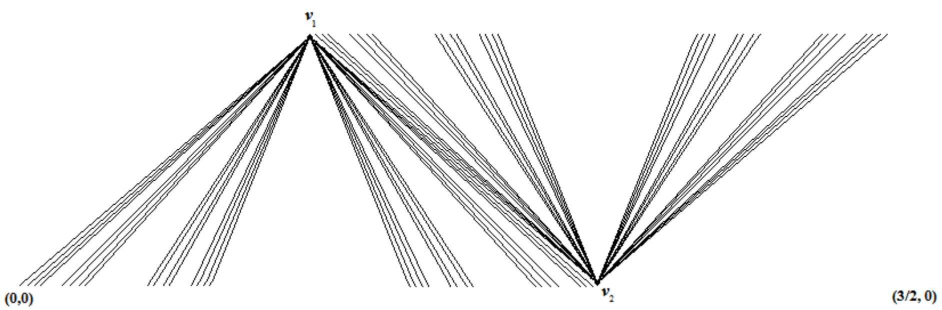
Abanico doble de Cantor

Denotaremos con C_0 al conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1]\times\{0\}$ y con $C_{\frac{1}{2}}$ al conjunto de Cantor en el intervalo $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\times\{1\}$

A este conjunto lo describimos de la siguiente manera:

Sea $v=(\frac{1}{2},1)$ y $u=(1,0)$

$$\bigcup_{x\in C_0}\langle v,x\rangle \cup \bigcup_{x\in C_{\frac{1}{2}}}\langle u,x\rangle$$



Localmente Conexo: ningún punto es localmente conexo.

Suave: ningún punto es suave.

Conexo en pequeño: ningún punto es conexo en pequeño.

Puntos de corte: v_1 y v_2

Puntos terminales: $(C_0\times\{0\})\cup(\frac{1}{2}\times\{1\})$. Denotados por T

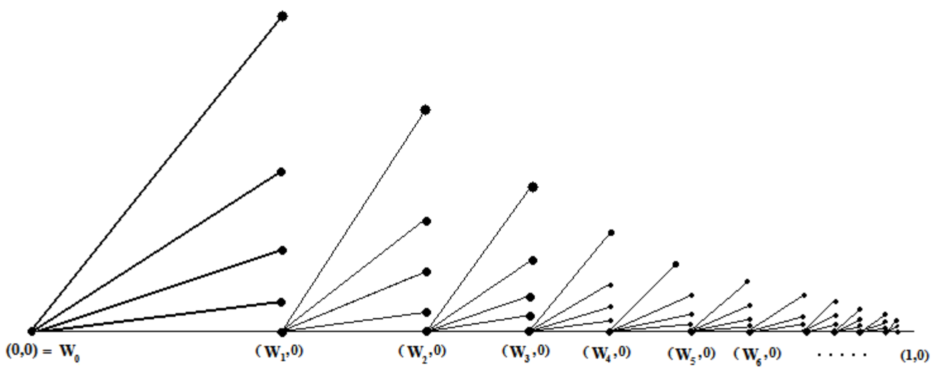
Puntos orilla: T

Puntos ordinarios: $(\kappa\times\{0\})\cup(\kappa\times\{1\})$

Puntos de ramificación: v_1 y v_2

Denotamos con $\widehat{W}$ al conjunto aquí presentado.

Sea $\{W_n\} \subseteq [0,1] \times \{0\}$ una sucesión creciente que converge a (1,0) $W_n = (w_n, 0)$



Localmente Conexo: los puntos del conjunto $X - \langle W_0, (0,1) \rangle$

Suave: los puntos del conjunto $X - \langle W_0, (0,1) \rangle$

Conexo en pequeño: $[0,1] \times \{0\}$

Puntos terminales: $\{(w_i, \frac{1}{n} |\ i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} \cap \widehat{W}$
Denotados por T

Puntos de corte: $X - (((0,0),(1,0)] \cup T)$

Puntos orilla: T

Puntos ordinarios: Los puntos del tipo $\{(w_n, 0) |\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y los puntos terminales de cada uno de los segmentos de los abanicos.

Puntos de ramificación: $\{(w_n, 0) |\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Bibliografía

[1] Sam B. Nadler, An introducction of Continnum Theory
.