



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Bifurcaciones no locales de ecuaciones  
diferenciales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
NANCY LETICIA GONZÁLEZ MORALES

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Este trabajo tiene como motivación principal los trabajos de Yu. Ilyashenko. Por otro lado, agradezco a mi asesora, Laura Ortiz y a Ernesto Rosales por brindarme la oportunidad de conocer el área de ecuaciones diferenciales, así como la emoción que comparten en cada enseñanza. A mis sinodales, Ernesto Rosales, Jefferson King, Aubin Arroyo, Héctor Méndez y Pedro Miramontes, por sus aportaciones y comentarios enriquecedores para este trabajo. También, agradezco al proyecto PAPIIT *IN103010* Geometría de foliaciones y ecuaciones diferenciales holomorfas el financiamiento de este trabajo.

Agradezco la oportunidad que tengo de estar aquí, justo en este espacio y momento.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Teorema de Poincaré y Teorema de Borel</b>	<b>1</b>
1.1. Transformaciones formales . . . . .	2
1.2. Poincaré Real . . . . .	4
1.3. Teorema de Borel . . . . .	10
<b>2. Formas formales</b>	<b>14</b>
2.1. Normalización de jets de orden finito . . . . .	15
2.1.1. Transformaciones semiformales . . . . .	18
<b>3. Globalización y Método Homotópico</b>	<b>25</b>
3.1. Globalización de la forma normal preliminar . . . . .	25
3.2. Descomposición de la discrepancia . . . . .	28
3.3. Método Homotópico . . . . .	29
3.3.1. Solución de la ecuación homológica . . . . .	32
<b>4. Teoría de Frobenius</b>	<b>39</b>
4.1. Conmutador de campos vectoriales . . . . .	42
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>46</b>
5.1. Bifurcación de una órbita homoclínica de un punto silla en el plano	46
5.2. Bifurcación de una órbita homoclínica de un punto silla-nodo en el plano . . . . .	52
5.3. Bifurcación de una órbita homoclínica en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	57
<b>Apéndice</b>	<b>72</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>

# Introducción

Cuando se realiza investigación en matemáticas, a menudo surge la pregunta sobre la posibilidad o no de aplicar la teoría al mundo real. En este sentido resulta fundamental determinar cuándo un fenómeno físico, o que se presenta en la naturaleza, es de tipo caótico o no. A su vez, para establecer modelos matemáticos que correspondan a dichos fenómenos es indispensable saber si las ecuaciones mismas que los describen son sensibles o no a las condiciones iniciales.

La noción de estabilidad estructural (Andronov & Pontragin, 19837) en ecuaciones diferenciales responde precisamente a este tipo de problemática. A saber, un sistema estructuralmente estable es aquél que bajo pequeñas perturbaciones conserva sus propiedades cualitativas. Cabe señalar que frecuentemente suele ser más sencillo medir localmente la persistencia de un fenómeno y sólo en algunas ocasiones es posible lograr hacer una análisis global.

En este sentido, la teoría de formas normales trata sobre la posibilidad de transformar el germen de un campo vectorial a una forma más simple, en particular se busca linealizar dicho campo en una vecindad de un punto singular. Las transformaciones que permiten realizar dicha linealización pueden ser de tipo topológico, diferenciable ( $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ ) o analítico. De los teoremas conocidos de clasificación diferenciable se encuentran los teoremas de Chen [CH] y de Sternberg [MS].

Es en este contexto que se inserta el presente trabajo: su objetivo principal es demostrar un teorema (teorema 0.3) de formas normales finito diferenciables para familias de campos vectoriales que dependen de un parámetro. Dicho teorema nos proporciona las condiciones bajo las cuales es posible linealizar una familia de campos vectoriales de variable real en una vecindad de un punto singular.

Para enunciar el teorema principal de la tesis (teorema 0.3), necesitamos algunas definiciones de la teoría local de campos vectoriales.

**Definición 0.1.** *Una familia local diferenciable ( $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ ) de campos vectoriales es el germen diferenciable en el origen de un campo vectorial de la forma  $v(x, \epsilon)$ ,  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$  y lo denotamos por  $(v(x, \epsilon), 0)$ . Asociado a esta familia*

---

se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = v(x, \epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0 \quad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \quad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0). \quad (1)$$

**Definición 0.2.** Decimos que dos familias locales  $(\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty)$  de campos vectoriales  $(v_1(x, \epsilon), 0)$  y  $(v_2(x, \epsilon), 0)$  son  $\mathcal{C}^k$  equivalentes, si existe una transformación  $\mathcal{C}^k$ ,

$$\hat{H} : (\mathbb{R}^n, 0) \times (\mathbb{R}^p, 0) \mapsto (\mathbb{R}^n, 0) \times (\mathbb{R}^p, 0), \quad \hat{H} = (H(x, \epsilon), \epsilon), \quad H(0, 0) = 0$$

tal que  $D_{(x, \epsilon)} \hat{H}(v_1(x, \epsilon), 0) = (v_2(\hat{H}(x, \epsilon)), 0)$ .

**Teorema 0.3.** Sea

$$\dot{x} = v(x, \epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0 \quad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \quad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0). \quad (2)$$

una familia local infinito diferenciable, que es una deformación del germen del campo vectorial  $v(x, 0) = Ax + o(|x|^2)$ , cuya linealización en el punto singular  $x = 0$  tiene una colección no resonante de valores propios distintos. Entonces existe  $k > 0$ , tal que la familia (2) es  $\mathcal{C}^k$  diferenciablemente equivalente a la familia lineal

$$\dot{x} = A(\epsilon)x, \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \quad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0). \quad (3)$$

La demostración del teorema 0.3 es larga y se basa en los resultados del capítulo 1, puesto que los campos vectoriales que analizaremos están definidos en  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0)$  y los teoremas clásicos de linealización (en particular el teorema de Poincaré) se enuncian para campos de vectores en el espacio complejo  $\mathbb{C}^n$ , se requiere puntualizar que los resultados probados en este espacio pueden ser transferidos al caso real. Para ello iniciamos el capítulo 1 probando los resultados que nos permiten asegurar que las transformaciones que llevan a una familia de campos vectoriales de variable real en su forma lineal están dadas también en el espacio real. Así mismo, requerimos que estas transformaciones sean diferenciables, de modo que seguiremos el siguiente principio que a grandes líneas se expresa como: toda serie formal se realiza como la serie de Taylor de una función infinito ( $\mathcal{C}^k$ ) diferenciable. Este principio se expresa formalmente en los Teoremas de Borel y de extensión de Whitney (los cuales también se incluyen en el capítulo 1). Sin embargo, es importante señalar que se presenta el problema de la falta de unicidad, puesto que dos funciones  $\mathcal{C}^\infty$  distintas pueden tener una misma serie de Taylor. Para resolver los problemas que puede ocasionar esta falta de unicidad (debido a la presencia de funciones planas), así como para eliminar los términos asociados a las resonancias que se pudieran generar, se requiere hacer uso del método homotópico. Para aplicar dicho método requerimos extender la forma normal local que se obtendrá en el capítulo 2 a una forma

---

normal global (capítulo 3). Dado que el desarrollo de la prueba del teorema 0.3 se divide en varios pasos, La demostración formal de dicho teorema se presenta en dos capítulos (capítulos 2 y 3) de esta Tesis.

En el capítulo 2 se estudian las formas normales semiformales. Éstas son las expresiones en cierto modo más sencillas a las que puede ser llevada una familia de campos vectoriales (1) bajo cambio semiformales (que son formales en la variable fase e infinito diferenciables en el parámetro).

En los capítulos 2 y 3 se desarrolla la demostración del teorema 0.3 usando el método homotópico. Cabe mencionar que dicho método nos proporciona el cambio de variables que realiza la equivalencia entre la familia local inicial (2.1) y su forma normal lineal.

En el capítulo 4 se desarrolla la Teoría de Frobenius, la cual es el sustento del método homotópico.

Por otro lado, el teorema 0.3 si bien local, tiene consecuencias en el análisis (no local) de bifurcaciones de órbitas homoclínicas. En este trabajo incluimos algunos ejemplos en el capítulo 5. Para ello, este capítulo se divide en 3 secciones:

Las secciones 5.1 y 5.2 corresponden al estudio las bifurcaciones de órbitas homoclínicas de un punto silla y de un punto silla-nodo, ambas en el plano.

En la sección 5.3 se analiza la bifurcación de una órbita homoclínica de un punto silla en el  $\mathbb{R}^3$ . En este ejemplo se requiere introducir el concepto de condición de cono de Poincaré, el cual también tiene aplicaciones en el análisis de bifurcaciones en otros contextos [IW].

# Capítulo 1

## Teorema de Poincaré y Teorema de Borel

Como se mencionó en la introducción, requerimos de varios resultados importantes para sustentar el desarrollo de este trabajo, es por ello que los presentamos en este capítulo.

Para simplificar la notación, en este primer capítulo trabajaremos con campos vectoriales definidos en  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) sin parámetros. El caso a parámetros se sigue tomando en cuenta que los coeficientes de los campos vectoriales y transformaciones dependen diferenciablemente de tales parámetros.

**Definición 1.1.** *Un campo vectorial de variable real, es una función*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & (1.1) \\ x &\rightarrow (x, v(x)), \quad \text{donde } v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Decimos que el campo vectorial  $\mathbf{v}$  es diferenciable ( $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$ ) si la función  $v$  es diferenciable ( $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$ ).

En adelante nos referiremos a la segunda coordenada de la imagen de  $\mathbf{v}$  (definición 1.1) como campo vectorial. Asumiremos también sin pérdida de generalidad que el origen de  $\mathbb{R}^n$  es el punto singular del campo vectorial  $v$ .

**Definición 1.2.** *Decimos que dos campos vectoriales ( $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$ )  $v_1(x)$  y  $v_2(x)$  son  $\mathcal{C}^k$  equivalentes en una vecindad de un punto singular, si existe una transformación  $\mathcal{C}^k$ ,  $H : (\mathbb{R}^n, 0) \mapsto (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $D_x H v_1(x) = v_2(H(x))$ .*

**Observación 1.3.** *Las definiciones 1.1 y 1.2 también se aplican a campos definidos en  $\mathbb{C}^n$ .*

**Definición 1.4.** *Sea  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  el conjunto de valores propios o espectro de una matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}^n)(M_{n \times n}(\mathbb{R}^n))$ .*

1. Decimos que la colección  $\lambda$  es hiperbólica si todos los valores propios  $\lambda_j$  tienen parte real distinta de cero.
2. Decimos que  $\lambda$  es un conjunto resonante, si existe al menos una relación de la forma

$$\langle r, \lambda \rangle = \lambda_j, \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, \quad |r| \geq 2 \quad (1.2)$$

donde  $\langle r, \lambda \rangle = r_1 \lambda_1 + \dots + r_n \lambda_n$ ,  $|r| := \sum_1^n r_j$ .  $|r|$  es llamado el orden de la resonancia. El monomio  $x^r \frac{\partial}{\partial x_j} := x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \frac{\partial}{\partial x_j}$  asociado a  $\langle r, \lambda \rangle = \lambda_j$  es llamado monomio resonante.

## 1.1. Transformaciones formales

A continuación analizaremos campos vectoriales y las transformaciones que usaremos para simplificar dichos campos en el espacio  $\mathbb{C}^n$ . Posteriormente, probaremos los resultados que nos permiten garantizar que las transformaciones que obtendremos en  $\mathbb{C}^n$  también están definidos en el espacio real.

**Lema 1.5.** Dado un campo vectorial definido como

$$\dot{v}(x) = Ax + f(x), \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}^n), \quad o(f) = (|x|^{|m|}), \quad x \in \mathbb{C}^n \quad (1.3)$$

tal que el espectro  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  de la matriz  $A$  posee valores propios distintos ( $m$  es un multi índice,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $|m| = \sum_{j=1}^n m_j$ ), existe una transformación formal que lleva el campo (1.3) en otro de la forma

$$\dot{x} = Ax + w(x) \quad (1.4)$$

donde  $w(x)$  es un campo vectorial diferenciable  $N - \text{plano}$  en  $x = 0$ .

*Demostración del Lema 1.5.* Realizaremos el análisis de la ecuación (1.3) por coordenadas. De esta manera, podemos suponer que

$$f(x) = (0, \dots, a_{jm} x^m, \dots, 0).$$

El procedimiento que seguiremos para obtener una expresión más simple del campo 1.3 consiste en eliminar de manera sucesiva cada uno de los términos de la parte no lineal (en caso de que dicho término no esté asociado a una resonancia). Es decir, en cada paso mediante una transformación (polinomial) obtendremos un campo vectorial (diferenciablemente equivalente al inicial) cuyo término no lineal de orden menor es de hecho mayor que el orden del término que se elimino en el paso anterior. Comenzamos por eliminar el término no lineal

1.1. TRANSFORMACIONES FORMALES

---

de menor orden del campo vectorial (1.3), el cual corresponde al término  $a_m x^m$ . Para esto, proponemos la transformación  $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} H(x) &= x + h_m x^m. \\ H_m^{-1}(x) &= x - h_m x^m + o(x^{2m-1}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Veamos cuales con las condiciones bajo las cuales se satisface la definición 1.2, para  $v_1(x) = v(x)$  y  $v_2(x) = Ax + o(|x|^{|N|})$  con  $|N| > |m|$  usando la transformación (1.5). Con este proposito, buscamos que se cumpla lo siguiente

$$\begin{aligned} DH_m \Big|_{(H_m^{-1})} \cdot v(H_m^{-1}(x)) &= \left( Id + \frac{\partial h_m}{\partial x}(x, \epsilon) \right) \cdot (Ax + f(x)) \Big|_{H_m^{-1}} \\ &= (Ax + f(x)) \Big|_{H_m^{-1}} + \left( \frac{\partial h_m}{\partial x}(Ax + f(x)) \right) \Big|_{H_m^{-1}} \\ &= A(x - h_m + o(x^{2m-1})) + f(H_m^{-1}) \\ &\quad + \frac{\partial h_m}{\partial x} \Big|_{H_m^{-1}} (A(x - h_m + o(x^{2m-1}))) + o(x^{2m-1}) \\ &= Ax - Ah_m(x) + f(x) \\ &\quad + \frac{\partial h_m}{\partial x}(x)Ax - \frac{\partial h_m}{\partial x} h_m(x, \epsilon) + o(x^{2m-1}) \\ &= Ax - Ah_m(x) + f(x) \\ &\quad + \frac{\partial h_m}{\partial x}(x)Ax + o(x^{2m-1}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Como queremos eliminar los términos de orden  $m$  debe suceder que

$$\frac{\partial h_m}{\partial x} Ax - Ah_m(x) + f(x) = 0 \quad (1.7)$$

**Observación 1.6.** La ecuación (1.7) se conoce como ecuación homológica.

Puesto que en el espacio  $\mathbb{C}^n$ , la matriz  $A$  es diagonalizable (asumimos que los valores propios de ésta son distintos), podemos suponer que  $A(\epsilon) = \text{diag}(\lambda_j(\epsilon))$ . De esta manera, la ecuación (1.7) está dada por

$$Ah_m(x) - A_j^m Ax = f(x) \quad (1.8)$$

donde

$$A_j^m = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_1 h_{jm} \frac{x^m}{x_1} & \cdots & m_n h_{jm} \frac{x^m}{x_n} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La relación (1.8) es equivalente a la ecuación

$$\lambda_j h_{jm} x^m - \langle m, \lambda \rangle h_{jm} x^m = a_{jm} x^m,$$

de lo cual, se deducen explícitamente los coeficientes de la transformación  $H_m$ ; éstos están dados por las relaciones

$$h_{jm} = \frac{a_{jm}}{\lambda_{j-} - \langle m, \lambda \rangle}. \quad (1.9)$$

De la expresión (1.9) se observa los coeficientes  $h_{jm}$  están bien definidos si  $\lambda_{j-} - \langle m, \lambda \rangle \neq 0$ . Por consiguiente, es posible remover los términos de la parte no lineal que no correspondan a resonancias (definición 1.4). Así pues, la transformación formal definida como

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} H_N \circ \cdots \circ H_2, \quad (1.10)$$

donde los subíndices de los elementos en dicha composición no están asociados a resonancias.

**Observación 1.7.** *De las igualdades dadas en (1.6) se tiene que, para cada  $n$  la transformación semiformal  $H_n(x, \epsilon) = x + h_n(\epsilon)x^n$  lleva a una ecuación de la forma*

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + v_n(x, \epsilon), \quad \text{donde } o(v_n) = o(x^n)$$

*a otra ecuación, cuyos términos no lineales son de orden mayor (de hecho el orden menor es  $2n - 1$ )*

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + v_{2n-1}(x, \epsilon), \quad \text{donde } o(v_{2n-1}) = o(x^{2n-1})$$

De la observación 1.7 mediante la transformación  $H$  se obtiene un campo cuya parte no lineal es una función vectorial  $w$  tal que  $o(w) = o(x^{2r-1})$ , donde  $r$  es el mínimo orden de resonancia que aparece, en particular se tiene que  $w$  es  $N$ -plana en  $x = 0$  si  $2r - 1 > N$ . Con esto queda demostrado el Lema 1.5.  $\square$

## 1.2. Poincaré Real

En esta sección analizaremos los cambios de coordenadas de la complejificación y algunos resultados que nos permiten ver que el Teorema de Poincaré también se aplica para campos vectoriales de variable real. De hecho, veremos que los cambios de coordenadas obtenidos en la sección anterior (sección ??) están bien definidos en el espacio  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Para simplificar el análisis usaremos los espacios  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{C}^2$ .

**Observación 1.8.** *Lo anterior se justifica puesto que una matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  se puede llevar a una matriz con bloques de la forma (1.12)*

Consideremos la siguiente ecuación diferencial en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + \dots \\ \dot{y} &= bx + ay + \dots,\end{aligned}\tag{1.11}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

**Definición 1.9.** *Decimos que un campo vectorial (ecuación diferencial) es real si los coeficientes de las variables fase de dicho campo (ecuación diferencial) son reales.*

La matriz asociada a la parte lineal de la ecuación (1.11) es:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\tag{1.12}$$

Consideremos la complejificación del espacio  $\mathbb{R}^2$  (esto significa que trabajaremos en el espacio  $\mathbb{C}^2$ ). Para ello, definimos a la matriz  $A_{\mathbb{C}}$  como sigue

$$A_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad A = A_{\mathbb{C}}\tag{1.13}$$

La matriz  $A_{\mathbb{C}}$  se aplica en vectores de  $\mathbb{C}^2$ . Los vectores propios de  $A_{\mathbb{C}}$  son los mismos que los de  $A$ , éstos son  $\lambda = a + ib$ ,  $\bar{\lambda} = a - ib$ .

A continuación describiremos el procedimiento para llevar a la matriz  $A_{\mathbb{C}}$  en su forma diagonal. Para esto, consideremos los vectores propios  $u = (1, -i)$  y  $\bar{u} = (1, i)$  asociados a los valores propios  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$  respectivamente.

Usando el cambio de coordenadas

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\tag{1.14}$$

se obtiene en las nuevas coordenadas  $(z_1, z_2)$  la matriz diagonal

$$P^{-1}A_{\mathbb{C}}P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}\tag{1.15}$$

**Observación 1.10.**

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{i}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De modo que,

$$z_1 = \frac{x + iy}{2} \quad z_2 = \frac{x - iy}{2}$$

**Teorema 1.11** (Poincaré Analítico). *Todo campo vectorial analítico asociado a una ecuación diferencial de la forma*

$$\dot{z} = \Lambda z + \dots, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

con  $\{\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib\}$  espectro no resonante, es analíticamente equivalente a su parte lineal  $\dot{z} = \Lambda z$

El Teorema de Poincaré (1.11) asegura que en ausencia de resonancias, la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + \dots \\ \dot{z}_2 &= \bar{\lambda} z_2 + \dots \end{aligned}$$

donde  $\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$ , es analíticamente equivalente a la ecuación lineal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 \\ \dot{z}_2 &= \bar{\lambda} z_2 \end{aligned}$$

Así mismo,  $\dot{z}_1 = \lambda z_1$  es equivalente a la ecuación real

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Recordemos que en nuestro caso, los campos en consideración son de variable real, de modo que, lo que nos interesa es conocer la naturaleza de las transformaciones que normalizan a las familias locales de dichos campos. Para ello, tenemos los siguientes resultados.

**Lema 1.12.** *Al normalizar en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  un campo vectorial real, todos los cambios son reales. Es decir, la transformación que lleva a un campo vectorial de variable real en una forma normal (en este caso dicha forma normal es lineal) tiene coeficientes reales.*

Para probar el Lema (1.12) vamos a definir una involución  $I$  en las cartas coordenadas  $(x, y)$ . Posteriormente, veremos a dicha involución en las coordenadas  $(z_1, z_2)$  y finalmente probaremos que un campo vectorial  $v$  en las coordenadas  $(z_1, z_2)$  proviene de un campo real si y sólo si conmuta con la involución (vista en las cartas  $(z_1, z_2)$ )

**Definición 1.13.** *Sea  $I$  la involución en  $\mathbb{C}^2$  definida por  $I(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$*

**Lema 1.14.** *Un campo vectorial diferenciable  $v$  en las coordenadas  $(x, y)$  es la complejificación de un campo real si y sólo si  $v \circ I = I \circ v$*

*Demostración del Lema 1.14.* Consideremos el campo vectorial  $v$  de la forma

$$v(x, y) = \left( \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j, \sum_{j+j=0}^{\infty} b_{ij} x^i y^j \right)$$

Para la prueba de la condición necesaria, suponemos que  $v$  viene de un campo vectorial real. Por consiguiente, se tiene que  $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$ ,  $b_{ij} = \overline{b_{ij}}$ . Ahora, componemos con la involución  $I$  y tenemos:

$$\begin{aligned} I \circ v(x, y) &= \left( \overline{\sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j}, \overline{\sum_{j+j=0}^{\infty} b_{ij} x^i y^j} \right) \\ &= \left( \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} \overline{x^i y^j}, \sum_{j+j=0}^{\infty} b_{ij} \overline{x^i y^j} \right) = v \circ I(x, y) \end{aligned}$$

La condición suficiente se prueba fácilmente. Supongamos  $v \circ I = I \circ v$ , de lo cual,  $a_{ij} \overline{x^i y^j} = \overline{a_{ij} x^i y^j}$ . Así,  $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$ , es decir,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ; análogamente  $b_{ij} \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Para trasladar esta propiedad a las coordenadas  $(z_1, z_2)$  vamos a ver primero cómo se expresa la involución  $I$  en estas coordenadas. Para esto, recordemos que el cambio de coordenadas está dado por (1.14).

Así pues, definimos a la involución  $\tilde{I}$  en las coordenadas  $(z_1, z_2)$  como

$$\tilde{I} := P^{-1} I P \quad \text{donde} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

De este modo, se tiene la expresión explícita de  $\tilde{I}$  dada por

$$\begin{aligned} [\tilde{I}(z)] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} [I] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} [I] \begin{bmatrix} z_1 + z_2 \\ i(-z_1 + z_2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ i(-\overline{z_1} + \overline{z_2}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{z_1} + \overline{z_2} + (-\overline{z_1}) + \overline{z_2} \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_1} - \overline{z_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{z_2} \\ \overline{z_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Observación 1.15.** En la involución  $\tilde{I}$  se intercambian las coordenadas  $\tilde{I}(z_1, z_2) = (\overline{z_2}, \overline{z_1})$

---

Por consiguiente, el Lema 1.14 se traslada a las coordenadas  $(z_1, z_2)$  con el siguiente resultado

**Lema 1.16.** *Todo campo  $\tilde{v}$  escrito en coordenadas  $(z_1, z_2)$  de la forma*

$$\tilde{v}(z_1, z_2) = (R(z_1, z_2), Q(z_1, z_2)) \quad (1.18)$$

donde  $R$  y  $Q$  son series formales en  $(z_1, z_2)$

$$R(z_1, z_2) = \sum_{i+j=0}^{\infty} \alpha_{ij} z_1^i z_2^j, \quad Q(z_1, z_2) = \sum_{i+j=0}^{\infty} \beta_{ij} z_1^i z_2^j \quad (1.19)$$

es la complejificación de un campo real  $v = v(x, y)$  si y sólo si  $\tilde{I} \circ \tilde{v} = \tilde{v} \circ \tilde{I}$

*Demostración del Lema 1.16.* Consideremos el campo  $\tilde{v}$  dado en (1.18). Usando el cambio de coordenadas (1.14), se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$$

donde el sistema  $(\dot{x}, \dot{y})$  corresponde al campo vectorial  $v(x, y)$ , mientras que el sistema  $(\dot{z}_1, \dot{z}_2)$  está asociado al campo  $\tilde{v}$ . Por consiguiente, la correspondencia entre los campos  $v$  y  $\tilde{v}$  está dada por

$$v(x, y) = P\tilde{v}P^{-1}(x, y) \quad (1.20)$$

Por el Lema 1.14 sabemos que  $v$  es la complejificación de un campo real en las coordenadas  $(x, y)$  si y sólo si se satisface la relación de conmutatividad

$$v \circ I = I \circ v \quad (1.21)$$

sustituyendo la expresión (1.20) en la igualdad 1.21 y usando que  $\tilde{I} = P^{-1}IP$  (1.17), se tiene que

$$P\tilde{v}P^{-1} \circ P\tilde{I}P^{-1} = P\tilde{I}P^{-1} \circ P\tilde{v}P^{-1}$$

Es decir,

$$P\tilde{v} \circ \tilde{I}P^{-1} = P\tilde{I} \circ \tilde{v}P^{-1}$$

por lo tanto,

$$\tilde{v} \circ \tilde{I} = \tilde{I} \circ \tilde{v}$$

De lo anterior se concluye el Lema 1.16. □

El Lema 1.16 nos permite resolver la siguiente pregunta:

Qué caracteriza a un campo  $\tilde{v} = \tilde{v}(z_1, z_2)$  cuando éste es la complejificación de un campo  $v(x, y)$  con coeficientes reales?. Es decir, dado  $v(x, y)$  con coeficientes reales, cómo es su complejificación  $\tilde{v}$  en las coordenadas  $(z_1, z_2)$  si  $\tilde{v} = P^{-1}vP$ ?

La respuesta a la pregunta anterior se da mediante la siguiente observación:

**Observación 1.17.** Usando Lema 1.16 se tiene que si  $\tilde{v} = (R, Q)$  es la complejificación de un campo real, entonces  $\tilde{I} \circ v = v \circ \tilde{I}$ , donde  $\tilde{I} \circ v = (\tilde{Q}, \tilde{R})$ . Por consiguiente,  $(\tilde{Q}, \tilde{R}) = (R \circ \tilde{I}, Q \circ \tilde{I})$ . De lo anterior se sigue que,  $\tilde{R} = Q \circ \tilde{I}$  y  $\tilde{Q} = R \circ \tilde{I}$  y por tanto  $R = \tilde{Q} \circ \tilde{I}$ .

De las expresiones para  $R$  y  $Q$  dadas en (1.18) se deduce que

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} \beta_{ij} z_1 z_2 = \sum_{i+j=0}^{\infty} \overline{\alpha_{ij} z_2^i z_1^j}$$

Así, se obtiene que  $\alpha_{ij} = \overline{\beta_{ij}}$ . (Nótese que se cambian los subíndices)

De la observación 1.17 se deduce el siguiente

**Lema 1.18.** Todo campo vectorial  $\tilde{v}$  de la forma (1.18) en las coordenadas propias  $(z_1, z_2)$  es la complejificación de un campo real  $v(x, y) = A(x, y) + \dots$  si y sólo si  $\alpha_{ij} = \overline{\beta_{ij}}$ .

De lo anterior, finalmente se obtiene el resultado referente a los cambios de coordenadas normalizadoras.

**Lema 1.19.** Los cambios de coordenadas que normalizan a un campo vectorial  $\tilde{v} = \tilde{v}(z_1, z_2)$  que es la complejificación de un campo real  $v(x, y)$  son reales.

*Demostración del Lema 1.19.* Supogamos que tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \tilde{v}_2(z_1, z_2) + \dots + \tilde{v}_n(z_1, z_2) \quad (1.22)$$

donde

$$\tilde{v}_N(z_1, z_2) = \left( \sum_{i+j=N} \alpha_{ij} z_1^i z_2^j, \sum_{i+j=N} \beta_{ij} z_1^i z_2^j \right) \quad (1.23)$$

Por el Lema 1.18,  $\alpha_{ij} z_1^i z_2^j = \overline{\beta_{ij} z_1^i z_2^j}$ . Por otro lado, sabemos que el cambio para quitar el termino de grado  $N$  de la ecuación (1.22) es de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{H}_N(z_1, z_2) &= (z_1, z_2) + \tilde{h}_N(z_1, z_2) \quad \text{donde} \\ \tilde{h}_N(z_1, z_2) &= \left( \sum_{s+k=N} h_{ks} z_1^k z_2^s, \sum_{s+k=N} l_{ks} z_1^k z_2^s \right) \\ \text{con } (h_{ks}, l_{ks}) &= \left( \frac{\alpha_{ks}}{\lambda - k\lambda - s\bar{\lambda}}, \frac{\beta_{ks}}{\bar{\lambda} - k\lambda - s\bar{\lambda}} \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Como  $\alpha_{ks} = \overline{\beta_{sk}}$ , entonces

$$(h_{ks}, l_{ks}) = \left( \frac{\overline{\beta_{sk}}}{\lambda - k\lambda - s\bar{\lambda}}, \frac{\beta_{ks}}{\bar{\lambda} - k\lambda - s\bar{\lambda}} \right) \quad (1.25)$$

Conjugando la segunda expresión con subíndices  $sk$  obtenemos que:

$$\bar{l}_{sk} = \frac{\bar{\beta}_{sk}}{\lambda - s\bar{\lambda} - k\lambda} = h_{ks} \quad (1.26)$$

La igualdad (1.26) significa justamente que las transformaciones que normalizan los campos vectoriales son reales. Así, concluimos el Lema 1.19  $\square$

**Observación 1.20.** *La prueba a parámetros se rehace palabra por palabra tomando en cuenta que los campos y transformaciones dependen diferenciablemente del parámetro  $\epsilon$ .*

### 1.3. Teorema de Borel

Usualmente recurrimos a la serie de Taylor de una función diferenciable para analizar propiedades de ésta, sin embargo también cabe la siguiente pregunta: Dada una sucesión de números reales, Existe una función diferenciable, cuya serie de Taylor sea precisamente esa sucesión de números?. El Teorema de Borel responde esa cuestión.

Antes de enunciar el Teorema de Borel veamos algunas definiciones.

**Definición 1.21.** *Sea  $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$  y  $S \subset \Omega$ . Definimos la norma de  $f$  en  $S$  como:*

$$\|f\|_m^S = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in S} |D^\alpha f(x)| \quad (1.27)$$

Notemos que, si  $f, g \in \mathcal{C}^m(\Omega)$  tenemos

$$\begin{aligned} \|fg\|_m^S &\leq \|f\|_m^S \|g\|_m^S \\ \|f + g\|_m^S &\leq \|f\|_m^S + \|g\|_m^S \end{aligned}$$

**Definición 1.22.** *La topología en  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  ( $k$  finito) inducida por la norma (1.27) es la siguiente: Un sistema fundamental de vecindades de  $g \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  está dado por los conjuntos*

$$B(g, K, \epsilon) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid \|f - g\|_k^K < \epsilon\}$$

$\epsilon \in \mathbb{R}^+$  y  $K \subset \Omega$  compacto. La topología correspondiente en  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  se obtiene tomando como un sistema fundamental de vecindades a los conjuntos

$$\{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \|f - g\|_m^K < \epsilon\}$$

**Teorema de Borel sobre series de Taylor.**

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $0 \in \Omega$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Denotamos

$$T(f) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (D^{\alpha} f)(0) x^{\alpha} \quad (1.28)$$

$$T^m(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^{\alpha} f)(0) x^{\alpha} \quad m \in \mathbb{Z}^+ \quad (1.29)$$

Es claro que  $T^m$  es un polinomio.

**Definición 1.23.** Sea  $x \in \Omega$  cerrado. Decimos que  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  es  $m$ -plana en  $X$ ,  $m \leq k$ , si  $D^{\alpha} f(x) = 0$  para toda  $x \in X$  y para toda  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq m$ . Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  y  $D^{\alpha} f(x) = 0$  para toda  $x \in X$  y para toda  $\alpha$  decimos que  $f$  es plana en  $X$ .

**Lema 1.24.** Sea  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$   $m$ -plana en 0. Entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe una función  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  que se anula en una vecindad de 0 y tal que  $\|g - f\|_m^{\mathbb{R}^n} < \epsilon$ .

**Observación 1.25.** El Lema 1.24 también indica que la función  $g$  es  $m$ -plana en 0.

*Esto se sigue de inmediato, pues por definición*

$$\|g(0) - f(0)\|_m^{\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup(D^{\alpha}(g(0) - f(0)))$$

Pero  $D^{\alpha} f(0) = 0$  para toda  $\alpha \leq m$  y por la cercanía de  $g$  con  $f$  se tiene que  $\|g(x) - f(x)\|_m^{\mathbb{R}^n}$  tiende a 0 cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Ahora presentamos el Teorema más importante de la sección 1.3.

**Teorema 1.26** (Borel). Dada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  una  $n$ -tupla de enteros no negativos, y para cada  $\alpha$  una constante  $C_{\alpha} \in \mathbb{R}$ , existe una función  $f$  infinito diferenciable en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0) = C_{\alpha}$$

En otras palabras, el mapeo de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  al de series de potencias formales en  $n$ -variables dado por

$$f \mapsto T(f)$$

es sobreyectivo.

*Demostración del Teorema 1.26.* Sea

$$T_m = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} x^{\alpha} \quad (1.30)$$

Para simplificar la notación seguiremos la prueba para  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , de este modo  $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$ .  $T_{m+1} - T_m = C_{m+1}x^{m+1}$  es claramente  $m$ -plana en 0. Así, por el Lema 1.24 para cada  $m$  existe una función  $g_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  que se anula en una vecindad de 0 y tal que  $\|T_{m+1} - T_m - g_m\|_m^{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2^m}$ . Consideremos la función  $f$  definida como

$$f = T_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (T_{m+1} - T_m - g_m) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.31)$$

**Observación 1.27.** Para toda  $k > 0$ , la suma

$$\sum_{m \geq 0} (T_{m+1} - T_m - g_m)$$

es  $k$ -plana en 0.

Esto sucede ya que  $T_{m+1} - T_m$  es  $m$ -plana en 0 en particular es  $k$ -plana para  $k \leq m$ , además  $g_m$  es  $\epsilon$ -cercana a la resta  $T_{m+1} - T_m$  y por la observación 1.25 se sigue que  $g_m$  es también  $k$ -plana en 0.

De la observación 1.27, al derivar  $k$  veces la expresión 1.31 podemos olvidarnos de los últimos términos pues éstos son nulos y considerar la suma de los  $k - 1$  primeros para tener

$$T^k = T^k(T_0 + \sum_{m=0}^{k-1} (T_{m+1} - T_m - g_m)). \quad (1.32)$$

Por definición de  $T^k$  (1.29) se tiene

$$T^k = \sum_{\alpha \leq k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(0) x^\alpha \quad (1.33)$$

Sustituyendo la expresión de  $f$  dada en (1.31) tenemos que

$$\begin{aligned} T^k &= \sum_{\alpha \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (T_0 + (T_1 - T_0 - g_0) + \cdots + (T_k - T_{k-1} - g_{k-1}))(0) x^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (T_k - (g_{k-1} + \cdots + g_0))(0) x^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (C_0 + C_1 x + \cdots + C_k x^k - \sum_{j=0}^{k-1} g_j)(0) x^\alpha \\ &= C_0 + C_1 x + \cdots + C_k x^k = T_k. \end{aligned}$$

donde  $T_k = \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha x^\alpha$ . Para cada  $j$ , la función  $g_j$  desaparece en las derivadas de orden menor que  $k$ , puesto que ésta es  $k$ -plana en 0. Con esto se concluye la demostración del Teorema de Borel.  $\square$

**Teorema 1.28** (Teorema de extensión de Whitney: Parte 2). *Dada una función continua  $f_\alpha$  en  $X$  para cada  $\alpha$ , existe una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  tal que  $D^\alpha f|_X = f_\alpha$  para toda  $\alpha$  si y sólo si para cualquier entero  $m > 0$  y para cualquier conjunto compacto  $K \subset X$  tenemos que la igualdad*

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta + o(|x-y|^m), \quad (1.34)$$

se da uniformemente cuando  $|x-y| \rightarrow 0$ ,  $x, y \in K$ .

El teorema de Borel 1.26 es un caso especial del teorema 1.28 cuando  $X = \{0\}$ .

## Capítulo 2

# Formas formales

Como se mencionó en la introducción, podemos dividir la prueba del Teorema 0.3 básicamente en 3 partes como lo indicamos en el siguiente esquema:

**Esquema 1.** *Esquema de la demostración del Teorema 0.3.*

1. *Mediante un cambio de coordenadas local, las variedades invariantes estable e inestable de la familia local dada en (2.1) serán llevadas en los subespacios invariantes del sistema lineal  $A(0)x$ , los cuales corresponden a los planos coordenados que se definen en la descomposición (2.2). Con esto, usando cambios que preserven invariantes a estos planos coordenados, la familia (2.1) será transformada en la forma normal preliminar definida en (2.3), la cual tiene un  $N$ -jet cero en  $x = 0$ , con  $N$  arbitrariamente grande en  $x = 0$ .*
2. *Después, la forma normal preliminar (2.3) se extenderá mediante un proceso de globalización a una familia que esté definida en todo el espacio fase y que es lineal fuera de una vecindad del origen.*
3. *Posteriormente, probaremos que la familia global obtenida es  $\mathbb{C}^k$  diferenciablemente equivalente a una familia obtenida similarmente por la globalización de la familia lineal  $A(\epsilon)x$ . Estas dos familias difieren por una discrepancia que tiene soporte compacto para todos los valores del parámetro y un  $N$ -jet que se anula en  $x = 0$ .*
  - a) *Para conseguir esto, mostraremos que la discrepancia entre los campos puede ser expresada como suma de dos términos, cada uno de ellos teniendo soporte compacto y un  $[\frac{N}{2}]$ -jet nulo en todos los puntos de los planos coordenados correspondientes a los subespacios invariantes estable e inestable  $(\mathbb{R}^{n-}, \mathbb{R}_{n+})$ .*

b) Finalmente, haremos uso del método homotópico para eliminar cada término de la discrepancia individualmente y completar la prueba.

En este capítulo, describiremos el punto 1 del esquema 1, el cual corresponde a la normalización de jets de orden finito.

## 2.1. Normalización de jets de orden finito

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a una familia local infinito diferenciable de campos vectoriales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\epsilon)x + f(x, \epsilon) \\ \dot{\epsilon} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$  y la función vectorial  $f$  satisface que  $f(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

En adelante usaremos el término familia local de manera indistinta para referir tanto a una familia local  $\mathcal{C}^\infty$  de campos vectoriales así como al sistema de ecuaciones diferenciales asociado a ella.

Sea  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  el conjunto de valores propios de la matriz  $A(0)$ . Supondremos en lo siguiente que  $\lambda$  satisface las hipótesis del Teorema (0.3).

**Observación 2.1.** *La condición de no resonancia del espectro  $\lambda$  implica la hiperbolicidad del mismo (ver apéndice 5.32).*

Asumiremos sin pérdida de generalidad que los primeros  $n_-$  valores propios cumplen que  $Re\lambda_i < 0$  y los restantes  $n_+$  son tales que  $Re\lambda_j > 0$ , donde  $n_- + n_+ = n$  (en caso contrario aplicamos un cambio de coordenadas adecuado). Sea

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_-} \oplus \mathbb{R}^{n_+}\tag{2.2}$$

la descomposición del espacio fase en suma directa de los subespacios lineales invariantes de  $A(0)$ . Usando el cambio de variables (2.15) descrito al final de esta sección, podemos suponer que estos planos coordenados corresponden a las variedades estable e inestable de la familia local (2.1).

**Observación 2.2.** *Bajo la condición de no resonancia de  $\lambda$ , también podemos asumir que la familia (2.1) tiene como un único punto singular al origen  $x = 0$  para todo  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$  (apéndice 5.34). Esto nos permite suponer que las perturbaciones del campo correspondiente al valor del parámetro  $\epsilon = 0$  corresponden sólo a términos de orden mayor o igual que 1. Con esto, podemos suponer que  $f(x, \epsilon) = a_m(\epsilon)x^m + \dots$  ( $o(f) = o(|x|^m)$ ) con  $|m| \geq 2$ , pues la perturbación en el término lineal ya está en  $A(\epsilon)$ .*

**Observación 2.3.** Si el espectro de  $A(0)$  no es hiperbólico, la observación 2.2 no se cumple. El ejemplo inmediato es el caso silla-nodo, es decir, una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

El espectro de la linealización de la ecuación anterior posee un valor propio cero, y ésta puede perturbarse de modo que, o bien desaparece el punto singular o se generan dos puntos singulares (ver ejemplo en la sección 5.1).

Puesto que estamos trabajando con una familia de campos de vectores que dependen diferenciablemente de un parámetro  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ , requerimos introducir la noción de campos vectoriales semiformales. De igual manera, introducimos los cambios de variable con transformaciones semiformales.

**Definición 2.4.** Sea  $\mathcal{E}$  el anillo de gérmenes en el cero de funciones diferenciables con respecto al parámetro  $\epsilon$  (con las operaciones suma y producto de funciones).

- Una serie semiformal es una serie de potencias en las variables fase  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) con coeficientes en  $\mathcal{E}$ .
- Un campo vectorial es semiformal si está dado por una serie semiformal.
- Los cambios semiformales se definen análogamente .

**Observación 2.5.** Cualquier familia local diferenciable de campos vectoriales corresponde a un campo vectorial semiformal, que es la serie de Taylor asociada a la familia.

**Lema 2.6.** Sea  $A(\epsilon)$  una familia local diferenciable (a parámetros) de operadores lineales, tal que todos los valores propios  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  de  $A(0)$  son distintos, y forman un conjunto no resonante. Entonces el espectro  $\lambda(\epsilon) = \{\lambda_j(\epsilon)\}_{j=1}^n$  de  $A(\epsilon)$  depende diferenciablemente con respecto al parámetro  $\epsilon$ , es decir, para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$   $\lambda_j(\epsilon) \in \mathcal{E}$  .

*Demostración del Lema 2.6.* Sea  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  conjunto de valores propios de  $A(0)$ . Consideremos el polinomio característico de  $A(\epsilon)$

$$Q(x, \epsilon) = \sum_{j=1}^n a_j(\epsilon)x^j.$$

$Q(x, \epsilon)$  es de grado  $n$  en  $x$ .  $Q(x, 0)$  es el polinomio característico de la matriz  $A(0)$ . Es decir,  $Q(x, 0) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ . Derivando la función  $Q$  respecto a la variable  $x$  y evaluando esta derivada en  $(\lambda_j, 0)$  tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(\lambda_j, 0) \neq 0,$$

puesto que,  $\lambda_k \neq \lambda_j$  para toda  $j \neq k$ . Así pues, por el Teorema de la función implícita, existen funciones  $g_j(\epsilon) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tales que  $Q(g_j(\epsilon), \epsilon) = 0$  para todo  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ .

Haciendo  $\lambda_j(\epsilon) = g_j(\epsilon)$ ,  $\lambda_j = \lambda_j(0)$  se tiene que  $\lambda_j$  es una función diferenciable con respecto a  $\epsilon$ . Es decir,  $\lambda_j(\cdot) \in \mathcal{E}$ . Además, éstas funciones  $\lambda_j(\epsilon)$  justamente corresponden a los valores propios de  $A(\epsilon)$  pues anulan a su polinomio característico  $Q(x, \epsilon)$ , y éstos son distintos en una vecindad de  $\epsilon = 0$ , ya que  $\lambda_j \neq \lambda_k$  para  $j \neq k$ .  $\square$

**Definición 2.7** (Forma Normal Preliminar). *Sea  $A(0) = A$  un operador lineal cuyo espectro es no resonante, y todos los valores propios son distintos.*

*La forma normal preliminar de orden  $N < \infty$  de una familia local de la forma (2.1) con matriz de linealización  $A$  en el punto singular, es una familia local diferenciable asociada al sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\epsilon)x + w(x, \epsilon) \\ \dot{\epsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $A(0) = A$ ,  $(x, \epsilon) \in (\mathbb{R}^n, 0) \times (\mathbb{R}^p, 0)$ , con las siguientes propiedades:

1.  $w(0, \epsilon) \equiv 0$  para todo  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ .
2. Los planos coordenados en la suma directa  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-} \oplus \mathbb{R}^{n+}$  son invariantes bajo la familia (2.3).
3. El  $N$ -jet de la discrepancia  $w$  en  $x = 0$  es cero para todo  $\epsilon$ .

**Lema 2.8.** *Supongamos una familia local de la forma (2.1) cuya matriz de linealización  $A(0) = A$  en el punto singular posee un espectro no resonante. Para cualquier  $N$ , la familia (2.1) es  $\mathcal{C}^N$  diferenciablemente equivalente a una familia en la forma normal preliminar (2.3). El difeomorfismo que conjuga a los flujos solución preserva el parámetro  $\epsilon$ .*

Para la prueba del Lema 2.8 es necesario mostrar que existe una vecindad del valor del parámetro  $\epsilon = 0$  en  $\mathbb{R}^p$ , tal que, para todos los valores de  $\epsilon$  en esa vecindad, o bien la familia (2.1) no posee resonancias o las que se generan son de orden muy grande. Para esto tenemos el siguiente Lema.

**Lema 2.9.** *Sea  $(v(x, \epsilon), 0)$  una familia local diferenciable de campos vectoriales, que determina el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = v(x, \epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \quad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0) \tag{2.4}$$

*tal que  $v(x, 0) = Ax + o(|x|^2)$  y  $v(0, \epsilon) = 0$  para  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ . Sea  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  el conjunto de valores propios de  $A$ , con  $\lambda$  no resonante. Entonces dada  $N \in \mathbb{Z}^+$ ,*

existe una vecindad del origen  $\epsilon = 0$  en  $\mathbb{R}^p$  tal que, para todo  $\epsilon$  en esa vecindad todos los monomios resonantes que pueden aparecer en la familia (2.4) tienen orden mayor que  $N$ .

*Demostración del Lema 2.9.* Definimos los hiperplanos resonantes  $\Pi_m := \{z \in \mathbb{C}^n : m_1 z_1 + \dots + m_n z_n = z_j\}$  y el orden de resonancia del hiperplano  $\Pi_m$  como  $|\Pi_m| := \sum m_j$ . Consideremos  $U_N$  el conjunto definido por  $U_N = \{\Pi_m : |\Pi_m| \leq N\}$ . Entonces como  $\lambda$  es no resonante,  $\lambda \notin \Pi_m$  para todo  $\Pi_m$ . Además, dado que  $U_N$  tiene un número finito de elementos,  $\mathbb{C}^n \setminus U_N$  es un conjunto abierto, y como  $\lambda(\epsilon)$  depende continuamente del parámetro  $\epsilon$  (Lema 2.6), existe una vecindad  $V_\epsilon$  de  $\epsilon = 0$  tal que, para todo  $\epsilon \in V_\epsilon$  se tiene que  $\lambda(\epsilon) \notin U_N$ . De hecho, tal vecindad corresponde sólo a hiperplanos con orden de resonancia más grande que  $N$ . Por consiguiente, las resonancias que pueden generarse son de orden mayor que  $N$ .  $\square$

**Observación 2.10.** *El ejemplo que ilustra la importancia del Lema 2.9 es el siguiente: Consideremos un campo vectorial diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , tal que el conjunto de valores propios  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  de su parte lineal en el punto singular satisfacen que el cociente entre ellos es irracional,  $\lambda_1/\lambda_2 := \mu \notin \mathbb{Q}$  (ver ejemplos de campos que cumplen esta condición en el capítulo 5). Con esta condición no se tienen resonancias en el campo inicial. Sin embargo, al realizar una perturbación sobre este campo, pueden surgir relaciones en las cuales el cociente  $\lambda_1(\epsilon)/\lambda_2(\epsilon)$  es un número racional. Entonces, si  $\lambda_1(\epsilon)/\lambda_2(\epsilon) = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$  las relaciones de resonancia que se pueden generar son de la forma*

$$\begin{aligned} \lambda_1(\epsilon) &= (1+q)\lambda_1(\epsilon) - p\lambda_2(\epsilon) \\ \lambda_2(\epsilon) &= q\lambda_1(\epsilon) + (1-p)\lambda_2(\epsilon). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por otro lado, se tiene el siguiente

**Lema 2.11.** *Para cualquier número  $\mu$  irracional, existen aproximaciones mediante números racionales cuyo error es menor que el recíproco del cuadrado del denominador*

$$\left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \tag{2.6}$$

[A2]. De la desigualdad (2.6) observamos que para tener una buena aproximación a  $\mu$  es necesario que  $q$  sea muy grande. Con esto, los ordenes de las resonancias (2.5) asociadas a  $\lambda_1(\epsilon)$  y  $\lambda_2(\epsilon)$  son  $m = 1+q-p$  y  $\tilde{m} = q+1-p$ . En ambos casos  $m$  y  $\tilde{m}$  son valores muy grandes. Notemos que las relaciones resonantes se dan si  $pq < 0$ .

### 2.1.1. Transformaciones semiformales

En esta sección trabajaremos con transformaciones definidas por series semiformales (definición 2.4) y usaremos los resultados del capítulo 1

---

**Lema 2.12.** *Dado un campo vectorial que define a una ecuación diferencial semiformal con parte lineal diagonal*

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + f(x, \epsilon), \quad A(\epsilon) = \text{diag}(\lambda_j(\epsilon)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

tal que, el espectro  $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$  de  $A(0)$  es no resonante, existe un cambio de variables semiformal que lo transforma a un campo vectorial asociado a una ecuación de la forma

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + w(x, \epsilon) \quad (2.8)$$

donde  $w(x, \epsilon)$  es un campo vectorial diferenciable  $N - \text{plano}$  en  $x = 0$ .

*Demostración del Lema 2.12.* Esta prueba es análoga a la del lema 1.5 para campos vectoriales de la forma  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$ . Y se realiza eliminando de manera sucesiva cada uno de los monomios de la parte no lineal del campo (en caso de que dicho monomio no sea resonante).

La diferencia radica simplemente en que los coeficientes de la transformación  $H_m$  (definición 1.5) para cada  $m$  dependenden diferenciablemente del parámetro, es decir  $h_m := h_m(\epsilon) \in \mathcal{E}$ . De este modo, dichas transformaciones son semiformales y están dadas por

$$\begin{aligned} H_m(x, \epsilon) &= x + h_m(\epsilon)x^m \\ H_m^{-1}(x, \epsilon) &= x - h_m(\epsilon)x^m + o(x^{2m-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

En este contexto, la ecuación homológica dada en (1.7) se expresa como

$$\frac{\partial h_m}{\partial x} A(\epsilon)x - A(\epsilon)h_m(x, \epsilon) + f(x, \epsilon) = 0 \quad (2.10)$$

El análisis también se realiza por coordenadas, de modo que asumimos que  $f(x, \epsilon) = (0, \dots, a_{jm}(\epsilon)x^m, \dots, 0)$  Por el mismo procedimiento efectuado en la sección 1.1 se deducen explícitamente los coeficientes de la transformación  $H_m$ ; éstos están dados por las relaciones

$$h_{jm}(\epsilon) = \frac{a_{jm}(\epsilon)}{\lambda_j(\epsilon) - \langle m, \lambda(\epsilon) \rangle}. \quad (2.11)$$

De la expresión (2.11) se observa los coeficientes  $h_{jm}$  están bien definidos si  $\lambda_j(\epsilon) - \langle m, \lambda(\epsilon) \rangle \neq 0$ . Por el Lema 2.9, sabemos que existe una vecindad de  $\epsilon = 0$  en la cual las resonancias que pudieran generarse en la familia (2.7) son de orden mayor que  $N$ . Por consiguiente, en esta vecindad del parámetro la transformación que lleva a la familia (2.7) en la familia (2.8) está dada por

$$H^N = H_N \circ \dots \circ H_m,$$

la cual es, en efecto una serie semiformal, de hecho ésta es polinomial en las variables del espacio fase  $\mathbb{C}^n$ .

De la observación 1.7 mediante la transformación  $H^N$  se obtiene un campo cuya parte no lineal es una función vectorial  $w$  tal que  $o(w) = o(x^{2N-1})$ , en particular se tiene que ésta es  $N$  – plana en  $x = 0$ . Con esto queda demostrado el Lema 2.12.  $\square$

**Observación 2.13.** *Los coeficientes  $h_{jm}$  en el proceso de eliminación de términos no lineales para el caso sin parámetros, son reales (lema 1.19). La prueba a parámetros es análoga e indica que, para cada  $m \in \mathbb{Z}^+$  los cambios  $H_m$  son transformaciones semiformales, de hecho para toda  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $H_m$  es polinomial en  $x \in \mathbb{R}^n$ . De este modo, el Lema 2.12 también es válido en  $\mathbb{R}^n$*

*Demostración del Lema 2.8.* Ésta es consecuencia de los Lemas 2.9 y 2.12. Para esto, observamos que la transformación semiformal que lleva a la familia (2.1) en la forma normal preliminar (2.3) está dada por

$$H(x, \epsilon) = (H^N(x, \epsilon), \epsilon), \quad (2.12)$$

la cual es polinomial en las variables fase ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) puesto que  $H^N$  lo es (observación 2.13). Por consiguiente, la diferenciabilidad de esta transformación es de cualquier orden y ésta preserva el parámetro  $\epsilon$ .  $\square$

**Observación 2.14.** *Sea*

$$v(x, \epsilon) = A(\epsilon)x + f(x, \epsilon), \quad (x, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0).$$

con  $\lambda(0)$  conjunto de valores propios de la matriz  $A(0)$  no resonante.

Para cada  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$  fijo, se tienen los siguientes escenarios:

- $\lambda(\epsilon)$  es no resonante. En este caso, usando el Teorema de Borel 1.26 (ver sección 1.3), existe una transformación infinito diferenciable  $\mathcal{H}$  que tiene como serie de Taylor a la transformación  $H = \lim_{N \rightarrow \infty} H_n \circ \dots \circ H_2$ . Cabe mencionar que  $\mathcal{H}$  no es necesariamente la transformación que realiza la equivalencia  $\mathcal{C}^\infty$  entre la familia (2.1) y su forma normal lineal  $A(\epsilon)x$ . La discrepancia entre  $\mathcal{H}$  y la transformación buscada  $\hat{H}$  es una función infinito plana en el origen. Sin embargo, esta discrepancia será eliminada mediante el método homotópico (ver sección 3.3).
- $\lambda(\epsilon)$  es resonante. En este caso, el menor orden de resonancia que se genere es muy grande (Lema 2.9), por lo cual surge la función vectorial  $w_N$ , la cual es  $N$  – plana en  $x = 0$ . También en este caso, la discrepancia  $w_N$  será eliminada usando el método homotópico (ver sección 3.3). El orden de diferenciabilidad del difeomorfismo que transforma a la familia (2.1) en su forma normal lineal  $A(\epsilon)x$  es finito [ALE].

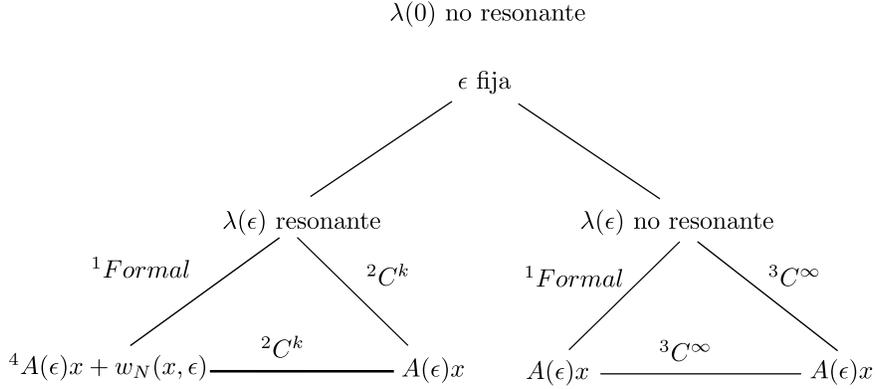


Figura 2.1: Diagrama del espectro  $\lambda(\epsilon)$

En el diagrama 2.1 se ilustran los dos puntos anteriores.

$N$  es el orden menor de las resonancias que se generan en  $\lambda(\epsilon)$  (Lema 2.9).

<sup>1</sup> Lema 2.12.

<sup>2</sup>  $k=k(N)$ , descomposición de  $w_N$  (Lema 3.2) y Método homotópico (3.3).

<sup>3</sup> Teorema de Borel 1.26 y Método homotópico (3.3).

<sup>4</sup>  $w_N$  es una función vectorial  $N$ -plana que contiene a los monomios resonantes que aparecen en la familia (2.1).

## Planos coordenados

Sabemos por la observación 2.2 que en una vecindad del parámetro  $\epsilon$ , la familia (2.1) tiene un único punto singular. Por consiguiente, podemos usar los resultados conocidos de gérmenes hiperbólicos de campos vectoriales como la existencia de las variedades invariantes estable e inestable [P], que son tangentes a los subespacios invariantes del campo  $\dot{x} = A(\epsilon)x$ . Estas variedades tienen dimensiones  $n_- + p$  y  $n_+ + p$  (respectivamente) y dependen diferenciablemente del parámetro  $\epsilon$  puesto que el sistema (2.1) depende diferenciablemente de las condiciones iniciales y las variables fase [A1].

Para cada  $\epsilon$  fijo las intersecciones de las variedades estable e inestable de la familia (2.1) con el plano  $\epsilon = constante$  (ver figura 2.2) definen a las variedades invariantes correspondientes en cada plano  $\epsilon = constante$ . Estas variedades tienen dimensiones  $n_-$  y  $n_+$  respectivamente.

**Lema 2.15.** *Para cada  $\epsilon$  fijo, existe un cambio de coordenadas local que transforma a las variedades estable e inestable de la familia (2.1) en los planos coordenados  $\mathbb{R}^{n_-}$  y  $\mathbb{R}^{n_+}$  respectivamente. De este modo, dichos planos coordenados permanecen invariantes bajo la transformación que lleva a la familia (2.1) en su forma normal preliminar (2.3).*

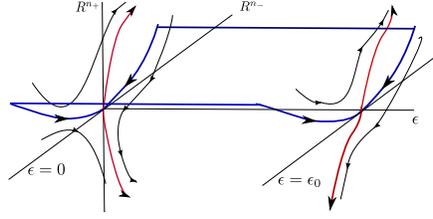


Figura 2.2: Variedad estable de la familia (2.1) para cada  $\epsilon = \epsilon_0$  fijo.

*Demostración del Lema 2.15.* El procedimiento que damos a continuación es de forma local. Por el Teorema de la variedad estable [P] sabemos que las variedades invariantes (estable e inestable) de la familia (2.1) se pueden parametrizar localmente con funciones diferenciables. Para dar un cambio de coordenadas local para cada  $\epsilon$  fijo que transforme dichas variedades a los planos coordenados  $\mathbb{R}^{n-}$  y  $\mathbb{R}^{n+}$ , consideremos como antes, la descomposición del espacio fase  $\mathbb{R}^n$  como  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-} \oplus \mathbb{R}^{n+}$ , y la respectiva descomposición de los vectores  $x \in \mathbb{R}^n$  como  $x = (x_{n-}, x_{n+})$ , ambas en coordenadas de linealización del campo correspondiente al valor del parámetro  $\epsilon = 0$ .

Como nos interesa la restricción al plano  $\epsilon = \text{constante}$  de las variedades estable e inestable de la familia (2.1), sólo analizaremos las coordenadas  $x \in \mathbb{R}^n$ . El Teorema de la variedad estable [P] nos dice que podemos definir a variedades estable e inestable de la familia (2.1) parametrizadas por funciones diferenciables. Denotamos a la variedad estable de (2.1) como  $W_\epsilon^s(0)$ , la cual está parametrizada por  $n_+$  funciones diferenciables  $\psi_j^s(x_{n-})$   $j = 1, \dots, n_+$ . Mientras que, a la variedad inestable  $W_\epsilon^u(0)$  la definen  $n_-$  funciones diferenciables  $\psi_j^u(x_{n+})$ ,  $j = 1, \dots, n_-$ . Des esta manera, las variedades estable e inestable de (2.1) para  $\epsilon$  fijo en  $x = 0$  están definidas como

$$\begin{aligned} W_\epsilon^s(0) &= (x_{n-}, \psi_1^s(x_{n-}), \dots, \psi_{n_+}^s(x_{n-})) & \text{y} \\ W_\epsilon^u(0) &= (\psi_1^u(x_{n+}), \dots, \psi_{n_-}^u(x_{n+}), x_{n+}) \end{aligned}$$

Denotamos a las funciones que definen a cada variedad en forma vectorial (respectivamente) como

$$\begin{aligned} \psi_{n_+}^s(x_{n-}) &= (\psi_1^s(x_{n-}), \dots, \psi_{n_+}^s(x_{n-})) & \text{y} \\ \psi_{n_-}^u(x_{n+}) &= (\psi_1^u(x_{n+}), \dots, \psi_{n_-}^u(x_{n+})) \end{aligned}$$

## 2.1. NORMALIZACIÓN DE JETS DE ORDEN FINITO

Esto sugiere hacer los cambios de coordenadas como sigue

$$\begin{aligned}\Phi^\epsilon &: (x_{n_-}, x_{n_+}) \mapsto (y_{n_-}, y_{n_+}) \\ y_{n_-} &= x_{n_-} - \psi_{n_-}^u(x_{n_+}) \\ y_{n_+} &= x_{n_+} - \psi_{n_+}^s(x_{n_-})\end{aligned}$$

El cambio de coordenadas se ilustra en la figura (2.3)

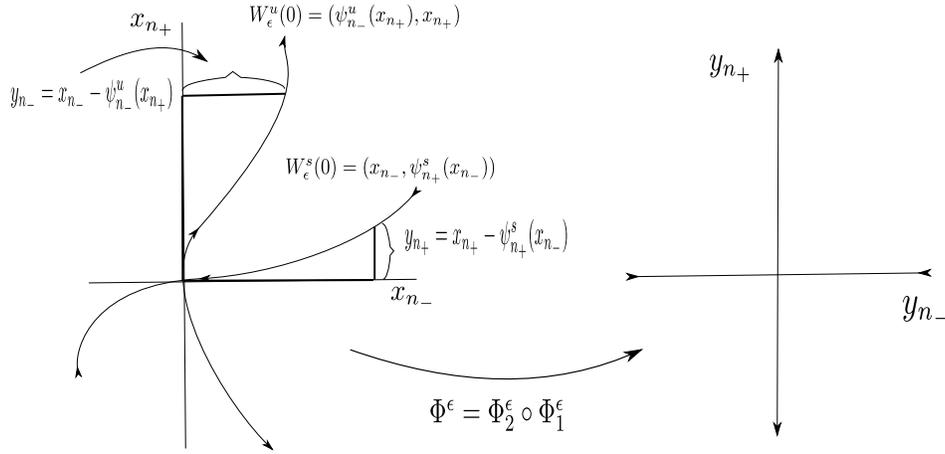


Figura 2.3: Cambio de coordenadas

**Observación 2.16.** *Los cambios mencionados preservan el parámetro  $\epsilon$ , puesto que para cada valor  $\epsilon$ , los cambios que se realizan afectan sólo a las coordenadas de las variables fase en  $\mathbb{R}^n$ .*

Consideremos por separado los cambios, es decir, definimos

$$\begin{aligned}\Phi_1^\epsilon &: (x_{n_-}, x_{n_+}) \mapsto (y_{n_-}, x_{n_+}) \\ y_{n_-} &= x_{n_-} - \psi_{n_-}^u(x_{n_+}) \quad \text{y} \\ \Phi_2^\epsilon &: (x_{n_-}, x_{n_+}) \mapsto (x_{n_-}, y_{n_+}) \\ y_{n_+} &= x_{n_+} - \psi_{n_+}^s(x_{n_-})\end{aligned}$$

La derivada del primer cambio  $\Phi_1^\epsilon$  es

$$D\Phi_1 = \begin{pmatrix} Id & \left[ -\frac{\partial \psi_{n_-}^u}{\partial x_{n_+}^s} \right] \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Entonces  $\Phi_1^\epsilon$  es un difeomorfismo (de igual forma lo es  $\Phi_2^\epsilon$ ). Por consiguiente, el cambio global  $\Phi^\epsilon = \Phi_2^\epsilon \circ \Phi_1^\epsilon$  es también un difeomorfismo.

## 2.1. NORMALIZACIÓN DE JETS DE ORDEN FINITO

---

Para verificar que los planos coordinados en las nuevas coordenadas  $(y, \epsilon)$  quedan invariantes bajo la familia (2.1) nos fijamos en el campo  $v(x, \epsilon) = A(\epsilon)x + f(x, \epsilon)$  (que corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales de la familia (2.1) en las coordenadas fase  $x \in \mathbb{R}^n$ ). De esta manera tenemos que

$$v(y, \epsilon) = D\Phi^\epsilon(A(\epsilon)\Phi^{-1}(y) + f(\Phi^{-1}(y), \epsilon))$$

El plano coordinado  $y_{n-} = 0$  se transforma bajo  $(\Phi^\epsilon)^{-1}$  como sigue

$$(\Phi^\epsilon)^{-1} : (0, y_{n+}) \mapsto (\psi_{n-}^u(x_{n+}), y_{n+})$$

$$\text{Así, } v(0, y_{n+}, \epsilon) = D\Phi^\epsilon(A(\epsilon)(\psi_{n-}^u(x_{n+}), y_{n+}) + f(\psi_{n-}^u(x_{n+}), y_{n+}, \epsilon)),$$

donde  $\psi_{n-}^u(x_{n+})$  define a la variedad invariante (inestable) de la familia inicial (2.1) para  $\epsilon$  fijo. Y como la derivada del cambio de coordenadas  $D\Phi^\epsilon$  es la identidad en la diagonal, se tiene que, el plano coordinado  $\mathbb{R}^{n+}$  es invariante bajo el flujo de la familia (2.1) en las coordenadas  $y = (y_{n-}, y_{n+}, \epsilon)$ . Análogamente, se obtiene la misma afirmación para el plano coordinado  $\mathbb{R}^{n-}$ . Así, queda demostrado el Lema 2.15.  $\square$

Como consecuencia del Lema 2.15, en las coordenadas  $(y_{n-}, y_{n+}, \epsilon)$ , la familia (2.1) es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n-} &= y_{n-} \left( \sum_{i+j \geq 0} a_{ij}(\epsilon) y_{n-}^i y_{n+}^j \right) \\ \dot{y}_{n+} &= y_{n+} \left( \sum_{i+j \geq 0} b_{ij}(\epsilon) y_{n-}^i y_{n+}^j \right) \\ \dot{\epsilon} &= 0. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.12 los cambios que hacemos para eliminar los términos no lineales en las variables fase son de la forma:

$$H_m(y_{n-}, y_{n+}) = y + y \left( \sum_{i+j=m-1} h_{ij}(\epsilon) y_{n-}^i y_{n+}^j \right).$$

De modo que, para toda  $m \geq 2$ ,  $H_m$  preserva invariantes a los planos coordinados, esto también ocurre para  $H^N = H_N \circ \dots \circ H_m$  que define a la transformación  $\hat{H} = (H^N, \epsilon)$  que lleva a la familia (2.1) en la forma normal preliminar (2.3). Con esto se verifica la propiedad 2 de la forma normal preliminar (definición 2.7).

Mientras que,  $w(0, \epsilon) \equiv 0$  para todo  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$  se sigue de inmediato, puesto que ya probamos que en una vecindad de  $\epsilon = 0$ , el sistema (2.1) tiene un único punto singular ( $x = 0$ ).

De los cambios  $H_N$  se obtienen términos de orden  $2N - 1$ , en particular el  $N - jet$  de la discrepancia  $w$  es nulo en  $x = 0$ . Con esto se verifican las propiedades de la definición 2.7 de la forma normal preliminar (2.3).

## Capítulo 3

# Globalización y Método Homotópico

En este capítulo abordaremos los puntos 2 y 3 del esquema 1 para concluir la demostración del teorema 0.3.

Para esto, usando los resultados del capítulo anterior, asumimos sin pérdida de generalidad que las familias locales de los campos vectoriales en consideración están en su forma normal preliminar (2.3). Ésta difiere de la forma normal lineal por una función diferenciable  $w$  a la que llamamos discrepancia, la cual tiene un  $N$ -jet que se anula en  $x = 0$ .

Comenzamos por definir a la familia local determinada por (2.3) en todo el espacio fase  $\mathbb{R}^n$  mediante el proceso de globalización de tal forma que la discrepancia  $w$  tenga soporte compacto y todas las trayectorias del campo global construido se extiendan también a todo el espacio. Este procedimiento nos permitirá trabajar con integrales impropias a lo largo de las trayectorias del campo global.

Posteriormente, veremos que se puede descomponer a la discrepancia  $w$  como suma de dos términos, los cuales, se eliminarán por separado (sección 3.2) usando el método homotópico (sección 3.3). Cabe enfatizar que se encontrará explícitamente el cambio de variables que nos permita eliminar a cada uno de los términos de la descomposición de la discrepancia  $w$ .

### 3.1. Globalización de la forma normal preliminar

Sea  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable no negativa con soporte compacto en la bola de radio 1 centrada en el origen, tal que  $\psi(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\psi(x) = 1$  para  $x$  en la bola de radio  $\frac{1}{2}$  con centro en  $x = 0$ .

### 3.1. GLOBALIZACIÓN DE LA FORMA NORMAL PRELIMINAR

---

Sea  $\psi_\delta(x) := \psi(\frac{x}{\delta})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . El radio  $\delta$  se escoge, de modo que el campo vectorial  $w$  y sus  $N$  derivadas sean suficientemente pequeñas en esa vecindad. También se escoge una vecindad pequeña del parámetro  $\epsilon$  tal que, la familia

$$\dot{x} = (1 - \psi_\delta(x))A(0)x + \psi_\delta(x)(A(\epsilon)x + w(x, \epsilon)), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad (3.1)$$

tenga al origen  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0)$  como único punto singular (observación 2.2).

Reagrupando los términos de (3.1), se obtiene la expresión que usaremos de la familia global

$$\dot{x} = F(x, \epsilon) + \tilde{w}(x, \epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad (3.2)$$

donde  $F(x, \epsilon) = Ax + (A(\epsilon) - A)\psi_\delta(x)x$  es un campo vectorial diferenciable definido globalmente en  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0)$  cuyo germen en el origen coincide con el operador lineal  $A(\epsilon)$ . Más aún, el campo  $F$  es igual a la transformación lineal  $A$  (la cual es independiente del parámetro  $\epsilon$ ) fuera de la bola  $B_\delta$  de radio  $\delta$  y centrada en el origen.

La discrepancia  $\tilde{w} = \psi w$  también tiene soporte compacto y un N-jet nulo en  $x = 0$ . Por simplicidad en la notación, en adelante se omitirá la tilde de la discrepancia  $w$ .

**Lema 3.1.** *La familia global (3.2) satisface las siguientes propiedades:*

1.  $F(0, \epsilon) \equiv 0$  y los planos coordenados en la suma directa  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-} \oplus \mathbb{R}^{n+}$  son invariantes bajo  $F$  y  $w$ .
2. Todas las curvas fase de  $F$  y  $w$  están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Fuera de la bola  $B_\delta$  la discrepancia  $w$  se anula idénticamente y  $F(x, \epsilon) = Ax$ .
4. Sean  $\pi_\pm$  las proyecciones sobre los planos coordenados  $\mathbb{R}^{n+}$  y  $\mathbb{R}^{n-}$  respectivamente. Sea  $g^t$  el flujo fase de los campos  $F$  ó  $F + w$ . Entonces, para alguna  $C > 0$  se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|\pi_- \circ g^t x\| &\leq C e^{-\lambda_- t} \cdot \|\pi_- x\| \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty \\ \|\pi_+ \circ g^t x\| &\leq C e^{\lambda_+ t} \cdot \|\pi_+ x\| \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde

$$\max\{Re\lambda_j : Re\lambda_j < 0\} < -\lambda_- < 0 < \lambda_+ < \min\{Re\lambda_k : Re\lambda_k > 0\} \quad (3.4)$$

$\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  es el conjunto de valores propios de  $A$ . Estas estimaciones describen la contracción (expansión) hiperbólica en una vecindad de los espacios invariantes  $\mathbb{R}^{n\pm}$ .

### 3.1. GLOBALIZACIÓN DE LA FORMA NORMAL PRELIMINAR

---

5. La discrepancia  $w$  es un campo vectorial  $N$  – plano en  $x = 0$ , y dado un multi índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq N$ , la siguiente desigualdad se satisface uniformemente con respecto a  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ :

$$\|D_x^\alpha w(x, \epsilon)\| \leq c(\alpha) \cdot \|x\|^{N-|\alpha|} \quad (3.5)$$

$c(\alpha)$  depende del orden de derivación de  $w$ .

*Demostración del Lema 3.1.* Las propiedades de la familia (3.2) se verifican a continuación.

La propiedad 1) se sigue de la definición de los cambios de coordenadas que llevan el sistema a su forma normal preliminar, los cuales dejan invariantes a los planos coordenados (sección 2.1.1).

Las curvas fase de  $F$  y  $w$  coinciden en una vecindad del origen con las curvas solución del campo lineal  $\dot{x} = A(\epsilon)x$  y de la discrepancia del campo inicial (la cual está acotada en  $B_\delta$ ) y fuera de ésta la extensión corresponde a la parte lineal  $A(0)$ . La propiedad 3) se sigue puesto que  $w$  tiene un soporte compacto en  $B_\delta$ .

Las propiedades dadas en 4) se heredan a la familia global (3.2) de la hiperbolicidad de la linealización de la familia local (2.1) en el punto singular, pues las proyecciones  $\pi_\pm$  del flujo solución de  $F + w$  están en las variedades estable e inestable (respectivamente) de la familia global (3.2) para  $\epsilon$  fijo. (ver figura 3.1).

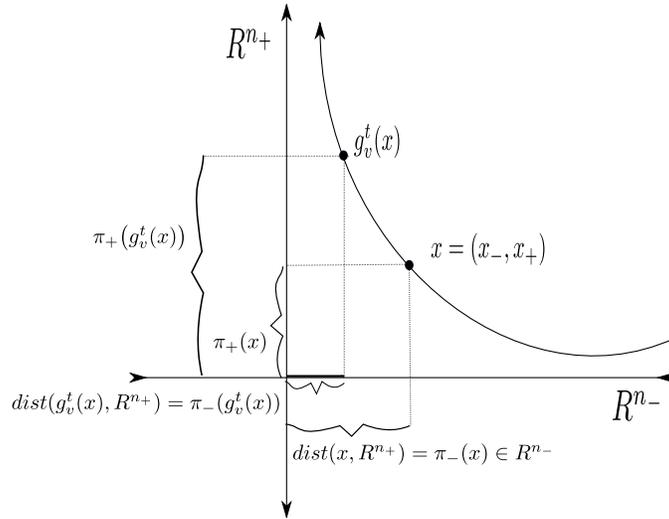


Figura 3.1: Proyecciones  $\pi_-$  y  $\pi_+$

Finalmente, dado que  $w$  es una función vectorial con un N-jet que se anula en  $x = 0$ ,  $o(w) = o(x^N)$ , por lo cual ésta se escribe como  $w(x, \epsilon) = a_{N+1}(\epsilon)x^{N+1} +$

... Por consiguiente,  $o(D^\alpha w) = o(x^{N-\alpha})$ . De este modo,  $D^\alpha w$  tiene un  $(N - |\alpha|)$ -jet con  $|\alpha| \leq N$  que se anula en  $x = 0$ , lo cual nos permite obtener la desigualdad (3.5).  $\square$

### 3.2. Descomposición de la discrepancia

Para eliminar la discrepancia  $w$ , la cual es  $N$  plana en  $x = 0$  es necesario primero descomponerla como suma de dos términos, cada uno de los cuales es una función plana en cada uno de los planos coordenados  $\mathbb{R}^{n_\pm}$ .

**Lema 3.2.** *Sea  $w : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  función vectorial diferenciable que tiene soporte compacto y un  $N$ -jet nulo en  $x = 0$ , ( $N \leq \infty$ ). Sea  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_-} \oplus \mathbb{R}^{n_+}$  la descomposición en suma directa de los subespacios invariantes de la familia (3.2). Entonces, existe una descomposición de  $w$  como*

$$w = w_- + w_+ \tag{3.6}$$

donde la función  $w_-$  tiene un  $[N/2]$ -jet que se anula en todos los puntos de  $\mathbb{R}^{n_-}$  y el  $[N/2]$ -jet de la función  $w_+$  es cero en todos los puntos de  $\mathbb{R}^{n_+}$ . Ambas funciones tienen soporte compacto.

( $[N/2]$  denota la parte entera de  $N/2$ , para  $N = \infty$  definimos  $N/2 = \infty$ ).

*Demostración del Lema 3.2.* Es suficiente dar la demostración para una función escalar  $f$ . Un germen diferenciable con un  $N$ -jet nulo en  $x = 0$  puede escribirse en la siguiente forma si  $N < \infty$ :

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=N} x^\alpha f_\alpha(x),$$

donde  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  es un multi índice y  $f_\alpha$  son funciones diferenciables  $[[$  (esta expansión es válida si la función  $f$  depende de otros parámetros). El monomio  $x^\alpha$  puede ser escrito en la forma  $x^{\alpha_-} \cdot x^{\alpha_+}$ ,  $\alpha_\pm \in \mathbb{Z}_+^n$ , donde  $x^{\alpha_-}$  contiene sólo el producto de funciones coordenadas que se anulan en  $\mathbb{R}^{n_-}$ , análogamente  $x^{\alpha_+}$  es un producto que se anula en  $\mathbb{R}^{n_+}$ , donde  $\alpha_\pm$  son multi índices, tales que  $\alpha = \alpha_- + \alpha_+$ ,  $\alpha_\pm = \alpha_\pm(\alpha)$ . Así, podemos reescribir a  $f$  como

$$f = \sum_{|\alpha_+| \geq [N/2]} x^\alpha f_\alpha + \sum_{|\alpha_-| \geq [N/2]} x^\alpha f_\alpha.$$

Sean  $f_+ = \sum_{|\alpha_+| \geq [N/2]} x^\alpha f_\alpha$  y  $f_- = \sum_{|\alpha_-| \geq [N/2]} x^\alpha f_\alpha$ . Usando el método de particiones de la unidad se construyen las funciones  $f_\pm$  con soporte compacto. Éstas son funciones diferenciables que satisfacen las condiciones del Lema 3.2.

El caso  $N = \infty$  se obtiene con el Teorema de Extensión de Whitney [N] (ver apéndice 1.28). Para ello, se considera el cerrado  $X = \mathbb{R}^{n_-} \cup \mathbb{R}^{n_+}$  y definimos

### 3.3. MÉTODO HOMOTÓPICO

---

las funciones  $f_\alpha$  como

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha f(x) & x \in \mathbb{R}^{n-}, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^{n+}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Dichas funciones son continuas en  $\mathbb{R}^n$  para cada  $\alpha$ .

Sea  $m > 0$ . Dado un conjunto compacto  $K \subset X$  tenemos que la igualdad

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta + o(|x-y|^m), \quad (3.8)$$

se da uniformemente cuando  $|x-y| \rightarrow 0$ ,  $x, y \in K$ .

Lo anterior se obtiene considerando los siguientes casos:

1.  $y \in \mathbb{R}^{n+}$
2.  $x \in \mathbb{R}^{n+}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-}$

El primer caso se sigue de inmediato por la definición de  $f_\alpha$ , mientras que el segundo se resuelve notando que, en este caso  $|x-y| \rightarrow 0$  si y sólo si  $x \rightarrow 0$  y  $y \rightarrow 0$ . Y como  $f$  es infinito plana en la intersección  $\mathbb{R}^{n-} \cap \mathbb{R}^{n+} = (0, 0)$  se tiene que

$$\lim_{|x-y| \rightarrow 0} \frac{D^\alpha f(x) - \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta}{|x-y|^m} = 0 \quad (3.9)$$

Así, por el teorema de Whitney existe una función  $f_+ \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ , tal que  $D^\alpha f|_X = f_\alpha$  para toda  $\alpha$ . Definimos  $f_- = f - f_+$ . De este modo se tiene que  $f = f_- + f_+$  y ambas funciones satisfacen las propiedades del Lema 3.2, con lo cual se concluye la demostración.  $\square$

**Observación 3.3.** *La demostración del Lema 3.2 es análoga si  $f$  es una función que depende del parámetro  $\epsilon$ .*

Por el Lema 3.2 la familia global (3.2) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \epsilon) + w_-(x, \epsilon) + w_+(x, \epsilon) \\ \dot{\epsilon} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3. Método Homotópico

Usando la descomposición (3.6) de la discrepancia  $w$ , consideremos las siguientes familias de campos vectoriales:  $F$ ,  $F + w_+$  y  $F + w_+ + w_-$ . De las cuales, dos familias sucesivas difieren por una discrepancia  $[N/2]$  plana en cada uno de los planos invariantes. Usaremos el método homotópico para mostrar que las

familias  $F$  y  $F + w_+$ , y posteriormente las familias  $F + w_+$  y  $F + w_+ + w_-$  son finitamente diferenciablemente equivalentes. Para probar esto, proponemos la homotopía  $F + \tau w_+$ ,  $\tau \in [0, 1]$  entre las familias  $F$  y  $F + w_+$ , y buscamos un campo vectorial finitamente diferenciable que conmute con la familia que describe la homotopía. De este modo, usando la teoría de Frobenius (ver capítulo 4), existe una hipersuperficie integral para la cual el desplazamiento al tiempo uno a lo largo de las trayectorias de este campo lleva a las hipersuperficies invariantes  $\tau = 0$  en las dadas por  $\tau = 1$  conjugando a las trayectorias de las restricciones correspondientes de la familia que determina estas hipersuperficies. Estas restricciones son precisamente  $F$  y  $F + w_+$ . El procedimiento para probar la equivalencia entre el par de familias  $F + w_+$  y  $F + w_+ + w_-$  se sigue de forma análoga.

Antes de continuar, damos la definición del conmutador de dos campos vectoriales y algunos resultados que nos permitirán probar la equivalencia entre los campos involucrados  $F$  y  $F + w_+$ .

**Definición 3.4.** *Se define el conmutador de dos campos vectoriales  $\nu, \omega$  como*

$$[\nu, \omega] = \frac{\partial \omega}{\partial x} \nu - \frac{\partial \nu}{\partial x} \omega \quad (3.11)$$

**Teorema 3.5.** *El flujo de dos campos vectoriales  $\nu, \omega$  conmuta si y sólo si  $[\nu, \omega] \equiv 0$ .*

**Proposición 3.6.** *Sean  $(g(x, \epsilon), 0)$  y  $(g(x, \epsilon) + u(x, \epsilon), 0)$  familias de campos vectoriales diferenciables en  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0)$  tales que  $u(0, \epsilon) = 0$ ,  $g(0, \epsilon) = 0$ . Supóngase que existe un campo vectorial  $C^k$  diferenciable  $H : (x, \epsilon, \tau) \mapsto (h(x, \epsilon, \tau), 0, 1)$ ,  $h(0, \epsilon, \tau) = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \times [0, 1]$ , tal que se satisface la relación de conmutatividad*

$$[\mathbf{V}, H] = 0, \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{V}(x, \epsilon, \tau) = (g(x, \epsilon) + \tau u(x, \epsilon), 0, 0)$ . Entonces las familias  $g$  y  $g + u$  son  $C^k$  equivalentes.

La ecuación (3.12) es el kernel del método homotópico y ésta se conoce como *ecuación homológica*.

La proposición 3.6 reduce el problema de la equivalencia diferenciable entre las familias de campos vectoriales  $F$  y  $F + w_+$  a encontrar el campo vectorial  $H$ ,  $C^k$  diferenciable que satisfaga la ecuación (3.12) para la siguiente familia

$$\mathbf{V} := (\mathbf{v}, 0, 0) \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{v}(x, \epsilon, \tau) = F(x, \epsilon) + \tau w_+(x, \epsilon)$ .

Se probará que la relación de conmutatividad (3.12) tiene solución  $C^k$  diferenciable (dicha solución se obtiene en la sección 3.3.1) de la forma

$$H(x, \epsilon, \tau) = (h(x, \epsilon, \tau), 0, 1). \quad (3.14)$$

Sin embargo, antes de resolver la ecuación (3.12) describiremos las implicaciones que tiene la proposición 3.6. Para esto, asumimos que la relación (3.12) se satisface para la familia (3.13).

Por consiguiente, el flujo fase de los campos  $\mathbf{V}$  y  $H$  conmuta (Teorema 3.5), y por lo tanto, existe una hipersuperficie integral  $\Gamma$  de la distribución de planos dada por los campos  $\mathbf{V}$  y  $H$  (Teorema 4.5) definida por

$$\Gamma = \{g_{\mathbf{V}}^t \circ g_H^s(x) \mid (s, t) \in (\mathbb{R}^2, 0)\}.$$

Por otro lado, notemos que las restricciones de  $\mathbf{V}$  a los planos  $\tau = 0$  y  $\tau = 1$ , los cuales son invariantes bajo el flujo solución de dicho campo, son precisamente los campos vectoriales  $F$  y  $F + w_+$  respectivamente.

**Lema 3.7.** *Sea  $H$  el campo vectorial  $C^k$  que satisface la relación de conmutatividad (3.12). La transformación dada por el flujo solución de  $H$  al tiempo uno, lleva las hipersuperficies invariantes  $\tau = 0$  a las dadas por  $\tau = 1$  conjugando las trayectorias de las restricciones de la familia  $\mathbf{V}$ , es decir, las trayectorias correspondientes a las familias  $F$  y  $F + w_+$ .*

**Observación 3.8.** *La conjugación de los flujos solución  $g_{\nu}^t$  y  $g_{\omega}^t$  de dos campos vectoriales  $\nu$  y  $\omega$  mediante una transformación  $H$ , se refiere a que se satisface la siguiente relación*

$$H(g_{\nu}^t(x)) = g_{\omega}^t(H(x)) \quad (3.15)$$

*La conjugación de flujos de campos a parámetros se define análogamente (??).*

*Demostración del Lema 3.7.* Sean  $g_{\mathbf{V}}^t(x, \epsilon, \tau)$ ,  $g_H^t(x, \epsilon, \tau)$  los flujos solución de los campos  $\mathbf{V}$  y  $H$  respectivamente. En virtud del teorema 3.5, se da la conmutatividad de dichos flujos solución.

$$g_H^s \circ g_{\mathbf{V}}^t(x, \epsilon, \tau) = g_{\mathbf{V}}^t \circ g_H^s(x, \epsilon, \tau). \quad (3.16)$$

Por otro lado,  $H(x, \epsilon, \tau) = (h(x, \epsilon, \tau), 0, 1)$  define a la familia de ecuaciones diferenciales

$$(\dot{x}, \dot{\epsilon}, \dot{\tau}) = (h(x, \epsilon, \tau), 0, 1)$$

De lo anterior se tiene que  $\frac{d\tau}{dt} = 1$ , entonces  $\tau(t) = t + k$ . Podemos tomar condiciones iniciales  $k = 0$ , de forma que  $\tau$  depende directamente de  $t$ .

De este modo, el punto inicial  $(x, \epsilon, 0) \in \{\tau = 0\}$  es llevado por la transformación del flujo fase  $g_H^1$  en algún punto  $(\hat{x}, \epsilon, 1)$  de la hipersuperficie  $\tau = 1$  donde se encuentra el campo  $F + w_+$  (ver figura 3.2).

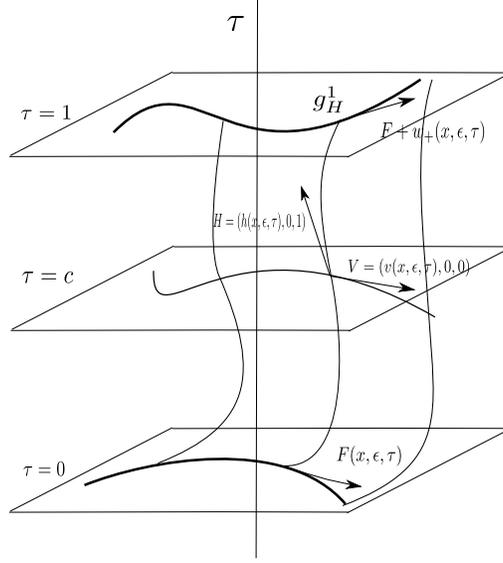


Figura 3.2: Acción del flujo solución de  $H$

Usando la igualdad (3.16) lo anterior se expresa como:

$$\begin{aligned} g_H^1(g_{\mathbf{V}(x,\epsilon,0)}^t(x,\epsilon,0)) &= g_{\mathbf{V}(x,\epsilon,\tau)}^t(g_H^1(x,\epsilon,0)) \\ &= g_{\mathbf{V}(\hat{x},\epsilon,1)}^t(\hat{x},\epsilon,1) \end{aligned}$$

Finalmente, dado que  $\mathbf{V}(x,\epsilon,0) = (F,\epsilon,0)$  y  $\mathbf{V}(\hat{x},\epsilon,1) = (F+w_+,\epsilon,1)$ , la restricción al espacio fase  $E = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0)$  está dada por

$$g_H^1 \circ g_{(F,\epsilon,0)}^t \Big|_E = g_{(F+w_+,\epsilon,1)}^t \circ g_H^1 \Big|_E \quad (3.17)$$

Con la igualdad 3.17 se concluye la demostración 3.7.  $\square$

Por lo tanto, asumiendo que se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.6,  $F$  y  $F+w_+$  son  $C^k$  equivalentes. El difeomorfismo que conjuga sus flujos solución es  $g_H^1$ . En la siguiente sección resolveremos la ecuación homológica 3.12.

### 3.3.1. Solución de la ecuación homológica

En virtud de la proposición 3.6 resta resolver la ecuación (3.12) para la familia  $V = (F + \tau w_+, 0, 0)$  definida en (3.13).

Sea  $g_{\mathbf{V}}^t(x,\epsilon,\tau) = (g_{\mathbf{v}}^t(x,\epsilon,\tau), \epsilon, \tau)$  el flujo solución de la ecuación (3.13), donde  $g_{\mathbf{v}}^t$  es el flujo solución de la ecuación

$$\dot{x} = \mathbf{v}(x,\epsilon,\tau) \quad (3.18)$$

### 3.3. MÉTODO HOMOTÓPICO

---

Sea  $X_1(x, \epsilon, \tau, t)$  la solución de la ecuación de primera variación del campo (3.18) a lo largo de la solución  $g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau)$ . Esto es,  $X_1$  satisface la ecuación lineal homogénea

$$\frac{d}{dt}X_1 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau), \epsilon, \tau)X_1, \quad X_1(x, \epsilon, \tau, 0) = Id \quad (3.19)$$

**Observación 3.9.**  $X(x, \epsilon, \tau, t) = \frac{\partial g_{\mathbf{v}}^t}{\partial x}(x, \epsilon, \tau)$  satisface la ecuación (3.19);

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial g_{\mathbf{v}}^t}{\partial x}(x, \epsilon, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dt} g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}(g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau)) = \frac{\partial v}{\partial x}(g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau)) \frac{\partial g_{\mathbf{v}}^t}{\partial x}.$$

**Lema 3.10.** La relación de conmutatividad (3.12) es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} h = w_+. \quad (3.20)$$

Esta ecuación lineal en  $h$  tiene, bajo las hipótesis del Teorema 0.3, una solución vectorial  $C^k$  diferenciable dada por

$$h(x, \epsilon, \tau) = \begin{cases} -\int_0^\infty X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, \sigma) w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon, \tau), \epsilon, \tau) d\sigma & x \notin \mathbb{R}^{n+}, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^{n+}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Además, existe una constante positiva  $K_0$  tal que

$$\|h(x, \epsilon, \tau)\| \leq K_0 \text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+})^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \quad (3.22)$$

uniformemente con respecto a  $\epsilon$  y  $\tau$ .

*Demostración del Lema 3.10.* La ecuación (3.20) se obtiene de la definición del conmutador de dos campos vectoriales (3.11)

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}, H] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial \epsilon} & \frac{\partial h}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \epsilon} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} h - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \end{aligned}$$

donde  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = w_+$ .

Para resolver la ecuación (3.20), evaluaremos ésta a lo largo del flujo solución  $g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau)$ . Nos fijamos primero en la ecuación lineal homogénea dada por

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(g_{\mathbf{v}}^t)} \mathbf{v}(g_{\mathbf{v}}^t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Big|_{(g_{\mathbf{v}}^t)} h(g_{\mathbf{v}}^t) \quad \text{donde} \quad \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(g_{\mathbf{v}}^t)} \mathbf{v}(g_{\mathbf{v}}^t) = L_{\mathbf{v}} h$$

$L_{\mathbf{v}} h$  denota la derivada de Lie del campo  $h$  en dirección del campo  $\mathbf{v}$ . De esta forma podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{d}{dt}h(g_{\mathbf{v}}^t) = \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|_{(g_{\mathbf{v}}^t)} h(g_{\mathbf{v}}^t). \quad (3.23)$$

La expresión (3.23) es precisamente la ecuación de primera variación (3.19) a lo largo del flujo solución  $g_{\mathbf{v}}^t$ . Sea  $X_1$  solución de (3.19). Para resolver la ecuación no homogénea dada por la ecuación (3.20)

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(g_{\mathbf{v}}^t)} \mathbf{v}(g_{\mathbf{v}}^t) = \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|_{(g_{\mathbf{v}}^t)} h(g_{\mathbf{v}}^t) + w_+(g_{\mathbf{v}}^t), \quad (3.24)$$

usamos el método de variación de parámetros.

Proponemos la función vectorial  $h(x, \epsilon, \tau, t) = X_1(x, \epsilon, \tau, t)C(t)$  como solución de la ecuación (3.24). Para que esto se cumpla la función  $C(t)$  debe satisfacer la ecuación diferencial  $\dot{C}(t) = X_1^{-1}w_+(g_{\mathbf{v}}^t)$ . Integrando de  $t_0$  a  $t$  ambos lados de la ecuación anterior obtenemos que

$$C(t) - C(t_0) = \int_{t_0}^t X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, t)w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon), \epsilon, \tau)d\sigma \quad (3.25)$$

Sin embargo, notemos que la ecuación (3.20) no involucra a la variable  $t$ , por consiguiente la solución de ésta tampoco depende de  $t$ . Además, como las soluciones de la familia (3.2) se extienden para todo  $t \in \mathbb{R}$  (Lema 3.1), buscamos una solución global en  $\mathbb{R}^n$ . Para ello, tomamos condiciones iniciales en  $t_0 = \infty$  de modo que  $C(t_0) = 0$ . De esta manera, tenemos que

$$h(x, \epsilon, \tau, t) = X_1(x, \epsilon, \tau, t) \left( \int_{\infty}^t X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, \sigma)w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon, \tau), \epsilon, \tau)d\sigma \right)$$

Para eliminar la dependencia de  $h$  con respecto a la variable  $t$  evaluamos ésta en  $t = 0$ . Así,  $X_1(x, \epsilon, \tau, t) \equiv Id$  y obtenemos que

$$h(x, \epsilon, \tau) = - \int_0^{\infty} X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, \sigma)w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon, \tau), \epsilon, \tau)d\sigma. \quad (3.26)$$

Finalmente, como  $w_+$  es una función  $[N/2] - plana$  con respecto a  $\mathbb{R}^{n+}$ , la solución en este plano coordenado es  $h(x, \epsilon, \tau) = 0$ .

De lo anterior, se tiene que la solución global de la ecuación (3.20) está dada por

$$h(x, \epsilon, \tau) = \begin{cases} - \int_0^{\infty} X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, \sigma)w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon, \tau), \epsilon, \tau)d\sigma & x \notin \mathbb{R}^{n+}, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^{n+}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ahora, nos falta ver que  $h$  está bien definida y es un campo diferenciable. Para sustentar la primera afirmación se requiere que la integral (3.26) converga a 0 cuando  $x$  tiende al subespacio  $\mathbb{R}^{n+}$ . Esta convergencia se sigue de la desigualdad (3.22), la cual se obtiene de los Lemas 3.12, 3.14.

**Observación 3.11.** 1. De la expresión de  $h$  se sigue que, para  $j = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ , la  $j$ -ésima derivada parcial del mapeo  $h$  en  $\mathbb{R}^{n+}$  existe y es igual a cero.

2. La diferenciabilidad finita de  $h$  fue obtenida en [IY1]. Las estimaciones explícitas de las normas de las derivadas parciales se encuentran en [ALE].

**Lema 3.12.** Las siguientes propiedades se satisfacen para la familia (3.13).

1. El plano coordenado  $\mathbb{R}^{n+}$  es invariante bajo el flujo asociado a (3.13).
2. La función vectorial  $w_+$  es  $[N/2] -$  plana con respecto a  $x$  en  $\mathbb{R}^{n+}$ .
3. Las soluciones de la familia están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
4.  $\mathbb{R}^{n+}$  es globalmente exponencialmente estable, esto es, existe un número positivo  $C$  tal que para todo  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $\tau \in [0, 1]$ ,

$$\text{dist}(g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau), \mathbb{R}^{n+}) \leq C e^{-\lambda_- t} \cdot \text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}), \quad t \geq 0,$$

donde  $\max\{\text{Re}\lambda_j : \text{Re}\lambda_j < 0\} < -\lambda_- < 0$  (3.4).

5. La función  $w_+$  satisface la siguiente desigualdad

$$\|D_x^\alpha w_+(x, \epsilon)\| \leq c(\alpha) \cdot \text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+})^{[N/2]-|\alpha|},$$

cuando  $x \rightarrow \mathbb{R}^{n+}$ . Así, cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene que

$$\|D_x^\alpha w_+ \circ (g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau), \epsilon)\| \leq c(\alpha) e^{-\lambda_- ([N/2]-|\alpha|)t} (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{([N/2]-|\alpha|)}$$

para todo  $|\alpha| \leq N$ .

Las propiedades 1 y 3 del Lema 3.12 se siguen del Lema 3.1. La propiedad 2 es consecuencia de la descomposición de la discrepancia  $w$  (Lema 3.2).

**Observación 3.13.** Lo que nos interesa es la distancia de  $(x, \epsilon, \tau)$  al plano coordenado  $\mathbb{R}^{n+}$ , la cual está dada por la norma euclidiana de la proyección  $\pi_-$  de  $(x, \epsilon, \tau)$  sobre el plano  $\mathbb{R}^{n-}$  (como se muestra en la figura 3.3). Es decir,  $\text{dist}((x, \epsilon, \tau), \mathbb{R}^{n+}) = \|\pi_-(x, \epsilon, \tau)\|$  y  $\text{dist}(g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau), \mathbb{R}^{n+}) = \|\pi_- \circ g_{\mathbf{v}}^t(x, \epsilon, \tau)\|$ .

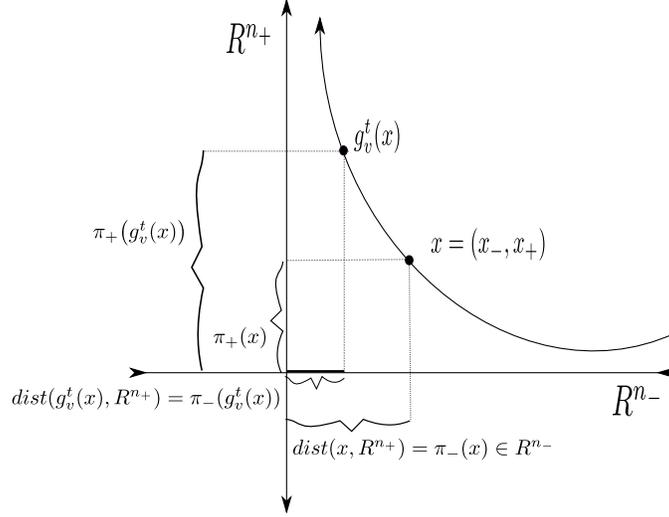
De la observación 3.13 y de la propiedad 4 del Lema 3.1 se tiene la estabilidad global de  $\mathbb{R}^{n+}$  (ver figura 3.3).

La propiedad 5 se obtiene también del Lema 3.1 (propiedad 5) y de la estabilidad global de  $\mathbb{R}^{n+}$ . Pues de la desigualdad (3.5) se sabe que

$$\|D_x^\alpha w_+(x, \epsilon)\| \leq c(\alpha) \cdot \|x\|^{[N/2]-|\alpha|}.$$

y cuando  $x \rightarrow \mathbb{R}^{n+}$  se tiene que

$$\|D_x^\alpha w_+(x, \epsilon)\| \leq c(\alpha) \cdot (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[N/2]-|\alpha|}.$$


 Figura 3.3: Distancia de  $x$  a  $\mathbb{R}^{n+}$ 

Mientras que, por la estabilidad exponencial (propiedad 4 Lema 3.1), cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha w(g_v^t(x), \epsilon)\| &\leq c(\alpha)(\text{dist}(g_v^t(x), \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}] - |\alpha|} \\ &\leq c(\alpha)e^{-\lambda(N-|\alpha)t}(\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}] - |\alpha|}. \end{aligned}$$

**Lema 3.14.** Para cualquier  $\mu > M$ , donde  $M = \max\{|\text{Re}\lambda_j|\}$ , existen constantes  $k_1, \bar{k}_1$  tal que para todo  $(x, \epsilon, \tau) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \times [0, 1]$  se satisfacen las siguientes desigualdades

1.  $\|X_1(x, \epsilon, \tau, t)\| \leq k_1 e^{\mu t}$
2.  $\|X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, t)\| \leq \bar{k}_1 e^{\mu t}$

Estimaciones similares se cumplen para cualquier derivada parcial de las funciones (matriz valuadas)  $X_1, X_1^{-1}$  [ALE].

*Demostración del Lema 3.14.* Recordemos que el campo vectorial  $v$  esta definido como:

$$v(x, \epsilon, \tau) = Ax + \mathbf{f}(x, \epsilon, \tau) \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{f}(x, \epsilon, \tau) = (A - A(\epsilon))\psi_\delta(x) + \tau w_+(x, \epsilon)$  y  $\mathbf{f} \equiv 0$  si  $\|x\| \geq \delta$ .

Denotamos por  $\varphi(x, \epsilon, \tau, t)$  al flujo solución  $g_v^t(x, \epsilon, \tau)$  de la ecuación 3.28.  $\varphi$  satisface la ecuación

$$\dot{\varphi}(x, \epsilon, \tau, t) = A(\varphi(x, \epsilon, \tau, t)) + \mathbf{f}(\varphi(x, \epsilon, \tau, t), \epsilon, \tau, t)$$

### 3.3. MÉTODO HOMOTÓPICO

---

Por consiguiente,

$$\varphi(x, \epsilon, \tau, t) = e^{At}x + \int_0^t e^{(t-\sigma)A} \mathbf{f}(\varphi(x, \epsilon, \tau, \sigma), \epsilon, \tau) d\sigma$$

De esta última igualdad se deduce que la solución de la ecuación de primera variación a lo largo de la solución  $\varphi$ , es decir,  $X_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  satisface la igualdad

$$X_1(x, \epsilon, \tau, t) = e^{At} + \int_0^t e^{(t-\sigma)A} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\varphi(x, \epsilon, \tau, \sigma), \epsilon, \tau) \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\sigma \quad (3.29)$$

Sea  $\mu_1$  tal que  $\mu > \mu_1 > \lambda_+$ , entonces existe una constante positiva  $k$  tal que,  $\|e^{At}\| \leq ke^{\mu_1 t} \leq ke^{\mu t}$ . Usando estas desigualdades en (3.29) tenemos que

$$\|X_1(x, \epsilon, \tau, t)\| \leq ke^{\mu_1 t} + ke^{\mu_1 t} \int_0^t e^{-\mu_1 \sigma} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\varphi(x, \epsilon, \tau, \sigma), \epsilon, \tau) \right\| \|X_1(x, \epsilon, \tau, t)\| d\sigma$$

De lo anterior se obtiene la desigualdad

$$e^{-\mu_1 t} \|X_1(x, \epsilon, \tau, t)\| \leq k + \int_0^t ke^{-\mu_1 \sigma} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\varphi(x, \epsilon, \tau, \sigma), \epsilon, \tau) \right\| \|X_1(x, \epsilon, \tau, t)\| d\sigma$$

Usando el Lema de Gronwall [P] se tiene que

$$e^{-\mu_1 t} \|X_1(x, \epsilon, \tau, t)\| \leq ke^k \int_0^t \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\varphi(x, \epsilon, \tau, \sigma), \epsilon, \tau) \right\| d\sigma \quad (3.30)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x, \epsilon, \tau) &= (A - A(\epsilon))\psi(x) + (A - A(\epsilon)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \epsilon)x + \tau \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \epsilon) \\ &= (A - A(\epsilon)) \frac{\partial \psi \cdot Id}{\partial x}(x, \epsilon) + \tau \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \epsilon) \end{aligned}$$

Dado que  $\tau \in [0, 1]$ , tenemos que

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x, \epsilon, \tau) \right\| \leq \|(A - A(\epsilon))\| \left\| \frac{\partial \psi \cdot Id}{\partial x}(x, \epsilon) \right\| + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \epsilon) \right\| \quad (3.31)$$

Como  $w_+ := \psi w_+$  es una función  $\frac{N}{2}$  plana en  $\mathbb{R}^{n+}$  y se anula en el complemento de la bola  $B_\delta$ , se tiene la siguiente desigualdad

$$\left\| \frac{\partial w_+}{\partial x}(x, \epsilon) \right\| < \frac{\mu - \mu_1}{2k} \quad (3.32)$$

Además, como  $\psi \cdot Id$  se anula fuera de  $B_\delta$ , entonces  $\left\| \frac{\partial \psi \cdot Id}{\partial x}(x, \epsilon) \right\|$  está acotada por alguna constante  $\tilde{k}$ .

### 3.3. MÉTODO HOMOTÓPICO

---

También se tiene que,  $A - A(\epsilon) = o(|\epsilon|)$ . Por consiguiente, para cualquier valor del parámetro sucede que

$$\|A - A(\epsilon)\| < \frac{r - r_1}{2kk} \quad (3.33)$$

Usando las desigualdades (3.32) y (3.33) en (3.31) se obtiene que

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x, \epsilon, \tau) \right\| < \frac{\mu - \mu_1}{2kk} \tilde{k} + \frac{\mu - \mu_1}{2k} = \frac{\mu - \mu_1}{k} \quad (3.34)$$

Finalmente, sustituyendo (3.34) en (3.30), se tiene el resultado del Lema 3.14 para  $X_1$ . La demostración de la segunda desigualdad se encuentra en [ALE].  $\square$

Para probar la desigualdad (3.22) se usa la definición de la función  $h$ . Así,

$$\begin{aligned} \|h(x, \epsilon, \tau)\| &\leq \int_0^\infty \|X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, \sigma) w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon, \tau), \epsilon)\| d\sigma \\ &\leq \int_0^\infty \|X_1^{-1}(x, \epsilon, \tau, \sigma)\| \|w_+(g_{\mathbf{v}}^\sigma(x, \epsilon, \tau), \epsilon)\| d\sigma \end{aligned}$$

Por otra parte, de la segunda desigualdad de Lema 3.14 y de las propiedades 4 y 5 del Lema 3.12 se tiene que;

$$\begin{aligned} \|h(x, \epsilon, \tau)\| &\leq \int_0^\infty k_1 e^{\mu\sigma} c(0) e^{-\lambda - [\frac{N}{2}]\sigma} (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}]} d\sigma = \\ &= \int_0^\infty k_0 e^{(\mu - \lambda - [\frac{N}{2}])\sigma} (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}]} d\sigma = \\ &= k_0 (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}]} \int_0^\infty e^{(\mu - \lambda - [\frac{N}{2}])\sigma} d\sigma = \\ &= k_0 (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}]} d\sigma \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene puesto que, para  $N$  suficientemente grande  $\mu - \lambda - [\frac{N}{2}] < 0$ . De lo anterior, concluimos que

$$\|h(x, \epsilon, \tau)\| \leq k_0 (\text{dist}(x, \mathbb{R}^{n+}))^{[\frac{N}{2}]}$$

uniformemente en  $\epsilon$  y  $\tau$ .

De este modo terminamos la demostración del Lema 3.10.  $\square$

Con esto hemos probamos que se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.6. Por consiguiente,  $F$  y  $F + w_+$  son  $C^k$  equivalentes. La equivalencia entre las familias  $F + w_+$  y  $F + w_+ + w_-$  se demuestra análogamente. Así, finalmente se concluye la demostración del Teorema 0.3, puesto que los campos  $F$  y  $F + w_+ + w_-$  corresponden a la familia global preliminar (2.3) y a la forma normal lineal global  $A(\epsilon)x$ , respectivamente.

## Capítulo 4

# Teoría de Frobenius

El Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales [A1] indica que dada una ecuación diferencial definida como  $\dot{x} = v(x)$ ,  $v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ , ésta tiene solución, es decir en cada punto existe una curva integral cuyo vector tangente coincide con el vector del campo en ese punto.

Ahora la pregunta es, qué sucede cuando se tiene una distribución de planos, es posible encontrar una superficie cuyo plano tangente en cada punto coincida con el plano de dicho campo en ese punto?.

Antes de contestar a la pregunta sobre la existencia de una superficie integral asociada a una distribución de planos (Teoría de Frobenius), introducimos los conceptos que usaremos en este capítulo.

**Definición 4.1.** *Una  $l$ -distribución de un campo de planos  $l$ -dimensionales es la correspondencia que asigna a cada punto de un espacio euclidiano, un plano  $l$ -dimensional que pasa por ese punto.*

**Ejemplo 4.2.** *Considérese un conjunto de  $l$  campos vectoriales con la condición extra de que en cada punto los vectores de estos campos son linealmente independientes. Entonces los planos generados por los vectores de estos campos constituyen una familia de  $l$ -planos. Por consiguiente la diferenciabilidad de esta familia corresponde a la diferenciabilidad de los campos vectoriales que la generan.*

**Definición 4.3.** *Una superficie integral de una distribución de planos es una variedad diferenciable, cuyo plano tangente en cada punto coincide con el plano de la distribución en ese punto. Así, una distribución de planos es integrable si cada punto del dominio del campo de distribución pertenece a alguna superficie integral de la distribución.*

Sean  $\nu(x)$  y  $\omega(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) campos vectoriales diferenciables, linealmente independientes en cada punto. Sean  $g_\nu^t$  y  $g_\omega^t$  sus flujos solución respectivamente.

---

Sea  $p$  un punto arbitrario en el espacio fase de estos campos. Consideremos la curva

$$\gamma = \{g_\nu^t p \mid t \in (\mathbb{R}, 0)\}. \quad (4.1)$$

y una curva fase del campo vectorial  $\omega$ ,

$$\gamma_q = \{g_\omega^s q \mid s \in (\mathbb{R}, 0)\}, \quad (4.2)$$

que pasa por el punto  $q \in \gamma$  (ver figura 4). La curva  $\gamma_q$  depende diferenciablemente de  $q$ , puesto que está dada por el flujo solución de  $\omega$ .

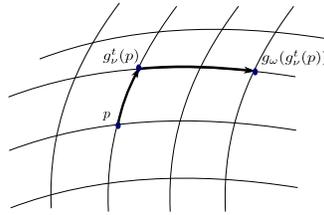


Figura 4.1: Flujos fase de  $\nu$  y  $\omega$

**Lema 4.4.** *Si el campo de planos es integrable, entonces toda superficie integral tiene la siguiente forma*

$$\Gamma = \cup_{q \in \gamma} \gamma_q. \quad (4.3)$$

$\Gamma$  puede ser escrita de la siguiente manera

$$\Gamma_p = \{g_\omega^s \circ g_\nu^t p \mid (t, s) \in (\mathbb{R}^2, 0)\}. \quad (4.4)$$

Lo anterior se obtiene puesto que el campo  $\nu$  es tangente a la superficie integral, entonces ésta contiene a  $\gamma$ . Lo mismo sucede con el campo  $\omega$ , de modo que la superficie contiene a  $\gamma_q$ .

El siguiente resultado indica cual es la condición necesaria para la existencia de la superficie integral de una distribución de planos.

**Teorema 4.5.** *Sean  $\nu$ ,  $\omega$  campos vectoriales diferenciables en cada punto. Si los flujos solución de los campos  $\nu$  y  $\omega$  conmutan, entonces la distribución de planos que generan es integrable.*

*Demostración del Teorema 4.5.* Consideremos el conjunto dado por (4.4). Para probar que  $\Gamma$  es una superficie diferenciable, mostraremos una parametrización diferenciable de ésta.

Para esto, definimos la función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  dada por:

$$F(t, s, u_3, \dots, u_n) = f_x(t, s) + (0, 0, u_3, \dots, u_n), \quad (4.5)$$

---

donde,

$$f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f_x(t, s) = g_\omega^s \circ g_\nu^t(x)$$

De las hipótesis  $\nu$ ,  $\omega$  son linealmente independientes en cada punto, por consiguiente, se supone sin pérdida de generalidad que

$$\det \begin{vmatrix} \nu_1(x) & \omega_1(x) \\ \nu_2(x) & \omega_2(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.6)$$

La derivada de (4.5) respecto a  $x$  es

$$D_x F = \begin{bmatrix} \nu_1(x) & \omega_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \nu_2(x) & \omega_2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \nu_n(x) & \omega_n(x) & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

**Observación 4.6.** Usando la hipótesis de conmutatividad de los flujos se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=s=0} F = \frac{\partial}{\partial s} g_\omega^s \circ g_\nu^t(x) = \frac{\partial}{\partial t} g_\nu^t \circ g_\omega^s(x) = \nu(x),$$

mientras que,

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=t=0} F = \frac{\partial}{\partial s} g_\omega^s \circ g_\nu^t(x) = \omega(x)$$

De (4.6), se ve que  $D_x F$  tiene rango máximo. Por consiguiente  $F$  es invertible. De manera que  $F$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  en una vecindad  $U$  de  $(0, 0, u_3, \dots, u_n)$ .

Ahora, la restricción de  $F$

$$F \Big|_{\{s,t\} \cap U} : \mathbb{R}^n \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

por el argumento anterior, define una parametrización de  $\Gamma$  en una vecindad de  $(0, 0)$ .

Por último, de la observación 4.6 se tiene que, la superficie  $\Gamma$  en cada punto  $x$  es tangente a los campos  $\nu(x)$  y  $\omega(x)$ . Es decir, el espacio tangente de  $\Gamma$  es generado por  $\nu$  y  $\omega$  ( $T_x \Gamma = \langle \nu, \omega \rangle$ ).

Así,  $\Gamma$  es en efecto una superficie integral del campo de planos generado precisamente por  $\nu$  y  $\omega$ , pues su plano tangente en cada punto coincide con el plano  $\langle \nu, \omega \rangle$ .  $\square$

**Observación 4.7.** *Si existe una superficie integral para una distribución de campos, no necesariamente los flujos de dichos campos conmutan. Por ejemplo, consideremos los campos lineales en  $\mathbb{R}^2$  dados por las ecuaciones  $\dot{x} = Ax$  y  $\dot{x} = Bx$  tales que,  $AB \neq BA$ . Éstos generan una distribución de planos, la cual es integrable (el mismo  $\mathbb{R}^2$  es la superficie integral) sin embargo sus flujos solución no conmutan.*

## 4.1. Conmutador de campos vectoriales

En esta sección se dan las condiciones necesarias y suficientes para que los flujos de dos campos vectoriales conmuten.

Sean  $\nu, \omega$  campos vectoriales y  $g_\nu^t, g_\omega^s$  sus correspondientes flujos solución. Definimos a la siguiente familia de campos vectoriales

$$\omega_t = (g_\nu^t)_* \omega, \quad \text{donde} \quad (g_\nu^t)_* \omega = \frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \circ \omega \circ g_\nu^{-t} \quad (4.7)$$

**Observación 4.8.** *Lo anterior se obtiene de la definición de derivada de una función  $f$  en dirección de un campo  $\omega$*

$$L_\omega f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \omega = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \omega_j,$$

donde  $x(0) = p$  y  $\dot{x}(0) = \omega(x)$ .

En nuestro caso  $f = g_\nu^t$  y se deriva en dirección del campo  $\omega$  con  $x(t) = g_\omega^t$ . De este modo,

$$L_\omega (g_\nu^t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g_\nu^t \circ g_\omega^t) = \left. \frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \right|_{g_\omega^t(g_\omega^t(x))} \cdot \omega(x)$$

Si  $g_\nu^t(x) = y$ ,  $g_\nu^{-t}(y) = x$ , se obtiene que

$$L_\omega g_\nu^t = \omega_t$$

La definición del conmutador de  $\nu$  y  $\omega$  en términos de la expresión (4.7) es

$$[\omega, \nu] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega \quad (4.8)$$

Para hallar una expresión más cómoda del conmutador se usa que

$$g_\nu^t = Id + t\nu + o(t^2) \quad (4.9)$$

Derivando (4.9) respecto a la posición resulta que

$$\frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} = Id + t \frac{\partial \nu}{\partial x} + o(t^2)$$

Así,

$$\frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \cdot \omega \circ g_\nu^{-t} = \omega \circ g_\nu^{-t} + t \frac{\partial \nu}{\partial x} g_\nu^{-t} + o(t^2)$$

Derivando esta última expresión con respecto a  $t$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \cdot \omega \circ g_\nu^{-t} = \frac{d}{dt} \omega \circ g_\nu^{-t} + t \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{d}{dt} g_\nu^{-t} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \omega \circ g_\nu^{-t} + o(t^2) \nu$$

Finalmente, evaluando la derivada en  $t = 0$  se obtiene que

$$[\omega, \nu] = \frac{\partial \nu}{\partial x} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial x} \nu \quad (4.10)$$

**Corolario 4.9.** *El conmutador de dos campos vectoriales cumple las siguientes propiedades:*

1. *es lineal con respecto a ambas entradas.*
2. *es antisimétrico.*
3. *se cumple la siguiente identidad de Jacobi.*

$$[[u, \nu], \omega] + [[\nu, \omega], u] + [[\omega, u], \nu] \equiv 0$$

Lo anterior se verifica por cálculos directos.

**Teorema 4.10.** *El flujo de dos campos vectoriales diferenciables  $\nu(x), \omega(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) conmuta si y sólo si  $[\omega, \nu] \equiv 0$ .*

Sean  $\nu, \omega$  campos vectoriales cuyos flujos conmutan. Lo anterior supone que el flujo  $g_\nu^t$  lleva curvas solución de  $\omega$  en curvas solución del mismo campo preservando la parametrización.

En efecto, pues de la igualdad  $g_\nu^t \circ g_\omega^s(x) = g_\omega^s \circ g_\nu^t(x)$ , se tiene que  $g_\nu^t(g_\omega^s(x)) = g_\omega^s(g_\nu^t(x))$ .

Para probar la condición necesaria tenemos el siguiente lema

**Lema 4.11.** *Si el flujo de dos campos vectoriales diferenciables conmuta, entonces el campo de vectores velocidad se preserva, es decir  $\omega_t \equiv \omega$  y por consiguiente  $[\nu, \omega] = 0$ .*

*Demostración del Lema 4.11.* Sean  $\nu, \omega$  campos vectoriales cuyos flujos fase  $g_\nu^t$ ,

$g_\omega^t$  conmutan. Sea  $g_\nu^{-t}(y) = x$ . De la observación 4.8 se tiene que

$$\begin{aligned}
 \omega_t(y) &= L_{\omega(x)}g_\nu^t \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_\nu^t \circ g_\omega^t(x) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_\nu^t \circ g_\omega^t(g_\nu^{-t}(y)) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_\nu^t \circ g_\nu^{-t}(g_\omega^t(y)) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_\omega^t(y) \\
 &= \omega(g_\omega^t(y))|_{t=0} = \omega(y)
 \end{aligned}$$

De este modo se concluye que  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_t = 0$  pues  $\omega_t$  no depende de  $t$ . De la definición (4.8) se tiene que  $[\omega, \nu] = 0$ . Fin de la demostración del Lema 4.11.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.10.* La condición necesaria se obtiene puesto que, bajo la hipótesis de conmutatividad de los flujos se,  $[\nu, \omega] \equiv 0$ . Para esto se usa la definición (4.8) y calculamos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} \omega_t \quad \text{para toda } a \in \mathbb{R}.$$

Usando las propiedades de grupo del flujo fase, se tiene que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} \omega_t = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} (g_\nu^a)_* \omega_h$$

Lo anterior se obtiene puesto que

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} \omega_t &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} (g_\nu^t)_* \omega \\
 &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} (g_\nu^{a+h})_* \omega \\
 &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \frac{\partial g_\nu^a \circ g_\nu^h}{\partial x} \omega \circ g_\nu^{-(a+h)} \\
 &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \frac{\partial g_\nu^a}{\partial x} \frac{\partial g_\nu^h}{\partial x} \omega \circ g_\nu^{-a} \circ g_\nu^{-h}(x)
 \end{aligned}$$

Usando que  $g_\nu^{-a} \circ g_\nu^{-h}(x) = g_\nu^{-h} \circ g_\nu^{-a}(x)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} \omega_t &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \frac{\partial g_\nu^a}{\partial x} \left( \frac{\partial g_\nu^h}{\partial x} \circ \omega \circ g_\nu^{-h} \right) \circ g_\nu^{-a}(x) \\
 &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \frac{\partial g_\nu^a}{\partial x} \circ \omega_h \circ g_\nu^{-a}(x) \\
 &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} (g_\nu^a)_* \omega_h
 \end{aligned}$$

Por el lema (4.11), sucede que

$$\frac{d}{dh} \Big|_{h=0} \omega_t = 0$$

por lo tanto  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=a} \omega_t = 0$  para toda  $a \in \mathbb{R}$ , es decir,  $[\nu, \omega] \equiv 0$ .

Para la prueba de la condición suficiente, supongamos que  $[\nu, \omega] \equiv 0$ . Por la definición 4.7 se tiene que se satisface idénticamente lo siguiente

$$\frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \omega \circ g_\nu^{-t}(x) \equiv \omega(x)$$

Sea  $x = g_\nu^t(y)$ . Sustituyendo en la igualdad anterior se tiene que

$$\frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \omega(y) = \omega(g_\nu^t(y)) \quad (4.11)$$

Para probar que  $g_\nu^t \circ g_\omega^s$  es solución del campo  $\omega$ , derivamos la curva dada por la composición de los flujos  $g_\nu^t \circ g_\omega^s$  respecto al parámetro  $s$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g_\nu^t \circ g_\omega^s(x) &= \frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \Big|_{g_\omega^0(x)} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g_\omega^s(x) \\ &= \frac{\partial g_\nu^t}{\partial x} \Big|_x \omega(x) = \omega(g_\nu^t(x)) \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene usando (4.11). Ésta indica precisamente que  $g_\nu^t \circ g_\omega^s$  satisface la ecuación diferencial  $\dot{x} = \omega(x)$ , entonces existe  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$g_\nu^t \circ g_\omega^s(x) = g_\omega^s(\xi).$$

Por otro lado, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales [A1], en el punto  $\xi$ , existe una solución de la ecuación  $\dot{x} = \nu(x)$  que pasa por  $\xi$ . Es decir, existe  $\eta \in \mathbb{R}^n$  tal que  $g_\nu^t(\eta) = \xi$

Por consiguiente,

$$g_\nu^t \circ g_\omega^s(x) = g_\omega^s \circ g_\nu^t(\eta).$$

Finalmente, evaluando la última igualdad en  $t = 0$  y luego en  $s = 0$ , se tiene que  $x = \eta$ .

En conclusión,  $g_\nu^t \circ g_\omega^s(x) = g_\omega^s \circ g_\nu^t(x)$ .

**Observación 4.12.** *Todas las igualdades anteriores se satisfacen idénticamente.*

Esto termina la prueba del Teorema 4.10. □

El caso de campos vectoriales  $\nu(x, \epsilon)$ ,  $\omega(x, \epsilon)$  a parámetros  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ , se sigue análogamente.

## Capítulo 5

# Aplicaciones

En la Teoría topológica se tiene el Teorema de Grobmann-Hartman, que nos indica que el germen hiperbólico de un campo vectorial o de una transformación es topológicamente equivalente a su parte lineal. Sin embargo las formas normales topológicas son insuficientes para responder las preguntas no locales, por ello requerimos que éstas sean diferenciables.

En este capítulo, la principal herramienta que usaremos para analizar y describir el comportamiento de campos vectoriales a un parámetro, serán las formas normales finitamente diferenciables (Teorema 0.3 [IY91]) para familias locales de campos vectoriales.

Analizaremos bifurcaciones (no locales) de órbitas homoclínicas que ocurren en familias de campos vectoriales a un parámetro en el plano y en  $\mathbb{R}^3$ , las cuales cumplen condiciones genéricas.

### 5.1. Bifurcación de una órbita homoclínica de un punto silla en el plano

En esta sección analizaremos la bifurcación de una órbita homoclínica asociada a un punto singular que localmente es de tipo silla en el plano. De aquí en adelante asumiremos que las familias a considerar son de clase  $C^\infty$ .

Probaremos el teorema de Andronov-Leontovich 5.4, que indica que en una familia genérica de campos vectoriales en el plano, sólo puede ser creado un único ciclo límite de la bifurcación de una curva homoclínica correspondiente a un punto singular de tipo silla. Cabe aclarar que el Teorema asegura la existencia de una perturbación tal que en ella hay un único ciclo límite y no el que en toda perturbación aparezca alguno.

5.1. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA EN EL PLANO

---

Consideremos una familia  $X_\epsilon$  de campos vectoriales a un parámetro, tal que el campo  $X_0 \in X_\epsilon$  tiene una órbita homoclínica  $\gamma$  correspondiente a un punto singular del tipo silla (el parámetro  $\epsilon = 0$  es llamado crítico).

**Condiciones 5.1.** *En el contexto de campos vectoriales, diremos que una propiedad  $P$  es genérica en un conjunto  $C$  si ésta se satisface en un conjunto denso y abierto  $U$  subconjunto de  $C$*

**Condiciones 5.2.** *Decimos que la familia  $X_\epsilon$  es genérica en el espacio de campos vectoriales si satisface las siguientes condiciones:*

1. Sean  $\lambda < 0 < \mu$  los valores propios de la matriz de linealización del campo  $X_0$  en el punto singular  $O$ , que asumimos es localmente tipo silla. La condición sobre los valores propios es que su cociente  $\frac{\lambda}{\mu}$  sea irracional.
2. En la familia  $X_\epsilon$  la curva homoclínica ocurre y se rompe de manera transversal cuando  $\epsilon$  pasa por cero.

Más precisamente, consideremos  $\Gamma$  un segmento transversal (orientado) al campo  $X_0$  en un punto de  $\gamma$ . Sean  $\rho_s(\epsilon)$ ,  $\rho_u(\epsilon)$  los puntos que intersectan por primera vez a las variedades estable e inestable del punto singular  $O$  con  $\Gamma$  respectivamente (ver figura 5.1). Esta condición indica que la perturbación del campo vectorial  $X_0$  no generan más órbitas homoclínicas en una vecindad de  $\epsilon = 0$ .

Denotamos a la distancia euclidiana orientada entre  $\rho_s(\epsilon)$  y  $\rho_u(\epsilon)$  por  $\rho(\epsilon)$ . La suposición genérica es

$$\left. \frac{d\rho(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \neq 0; \tag{5.1}$$

es decir, la función  $\rho$  es transversal al eje  $\epsilon$ .

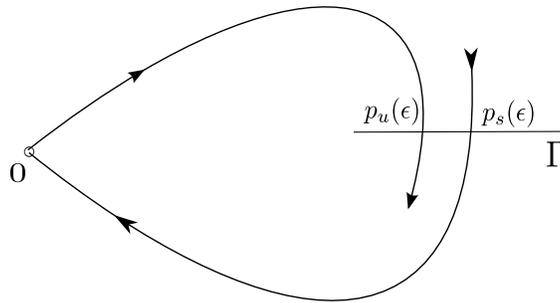


Figura 5.1: Caracterización de la bifurcación de un lazo separatriz

5.1. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA EN EL PLANO

---

**Definición 5.3.** Definimos el valor del punto silla como la suma de los valores propios  $\lambda$ ,  $\mu$  de la parte lineal del campo vectorial  $X_0$  en el punto singular y lo denotamos por  $\sigma$ , ( $\sigma = \lambda + \mu$ ).

**Teorema 5.4 (A-L).** Sea  $X_\epsilon$  familia de campos vectoriales que cumple las condiciones genericas 5.2. Entonces existe una vecindad  $U$  de  $\gamma$  y una vecindad  $V$  de  $\epsilon = 0$  donde se satisfacen las siguientes afirmaciones.

1. Si  $\sigma = \lambda + \mu < 0$ , entonces para todo  $\epsilon \in V$  de un lado del cero, existe una única órbita periódica estable (Lyapunov y estructuralmente estable) en  $U$  que tiende a  $\gamma$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para todo  $\epsilon$  en el lado opuesto de cero,  $X_\epsilon$  no tiene órbitas periódicas en  $U$ .
2. Si  $\sigma > 0$ , se cumplen las mismas conclusiones, excepto que la órbita periódica es inestable.

**Observación 5.5.** 1. El segundo enunciado se reduce al primero, tomando el tiempo al revés.

2. El teorema anterior indica que existe una perturbación de un campo vectorial que posee una órbita homoclínica con las condiciones anteriores que genera un único ciclo límite en el campo perturbado. Además, dicho ciclo es Lyapunov y estructuralmente estable.

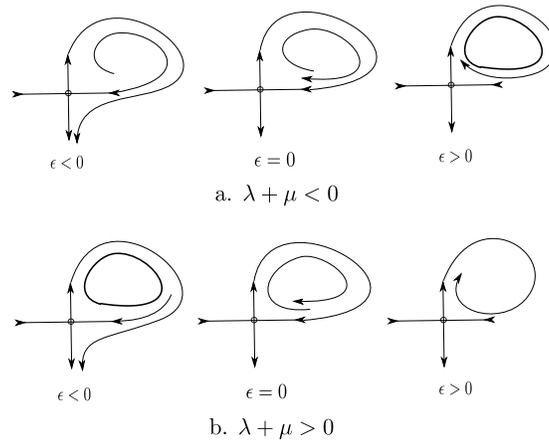


Figura 5.2: Bifurcación de una curva homoclínica en el plano

Las afirmaciones del Teorema 5.4, se muestran en la figura (5.2).

*Demostración del Teorema 5.4.* Probaremos entonces el primer caso del Teorema (5.4) construyendo una transformación de correspondencia cerca de  $\gamma$  como la composición de dos transformaciones; una singular y otra regular.

5.1. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA EN EL PLANO

---

Para esto, consideremos dos segmentos transversales a la órbita homoclínica  $\gamma$  del campo  $X_0$  en dos puntos cercanos al punto singular  $O$ . Los denotamos por  $T^+$  y  $T^-$ ; el primero es llamado el segmento de entrada; éste intersecta a la variedad estable del punto silla en un punto  $p$ . El segundo, el segmento de salida intersecta a la variedad inestable de  $O$  en un punto  $q$ .

Para un punto singular tipo silla, una transformación de correspondencia está definida para cualquier sector hiperbólico de éste. Dicha transformación es un mapeo a lo largo de las soluciones del campo  $X_\epsilon$ , que lleva el semi-intervalo  $\Gamma^+ \subset T^+$  con vértice sobre la variedad estable (transversal a este segmento) a un semi-intervalo  $\Gamma^-$  con vértice sobre la variedad inestable.

Denotamos a esta transformación como

$$\Delta_\epsilon^{sing} : T^+ \mapsto T^- \quad (5.2)$$

también llamado mapeo singular, pues no está bien definido en toda la vecindad del punto  $p \in \Gamma^+$ .

**Observación 5.6.** *Sabemos que, dadas dos condiciones iniciales  $x_1, x_2$  cercanas, se tiene que sus imágenes a lo largo del flujo solución de un campo vectorial  $C^k$  diferenciable satisfacen la desigualdad*

$$|\varphi_v(t, x_2) - \varphi_v(t, x_1)| \leq \left\| \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} \right\| |x_2 - x_1| \quad (5.3)$$

por el Lema 3.14, se tiene que  $\left\| \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} \right\| \leq k_1 e^{\mu t}$ ,  $\mu > 0$ . Esto es, para tiempos finitos el flujo solución  $\varphi_v^t$  tiene constante de Lipschitz acotada.

Por el Teorema de diferenciabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con respecto a las condiciones iniciales y a los parámetros [A1], y de la observación 5.6, para  $\epsilon$  suficientemente pequeña, el flujo solución del campo  $X_\epsilon$  que empieza en un punto de  $\Gamma^-$  cercano a  $q$ , intersecta a  $T^+$  por primera vez en algún punto cercano a  $p$ .

Denotamos a esta transformación como

$$\Delta_\epsilon^{reg} : T^- \mapsto T^+ \quad (5.4)$$

y la llamamos transformación regular.

Las transformaciones dadas por (5.2) y (5.4) dependen diferenciablemente del parámetro  $\epsilon$ , puesto que están dadas por el flujo solución de un campo diferenciable [A1].

La transformación de correspondencia se define como la composición de las dos anteriores

$$\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^{reg} \circ \Delta_\epsilon^{sing} : \Gamma^+ \mapsto \Gamma^+ \quad (5.5)$$

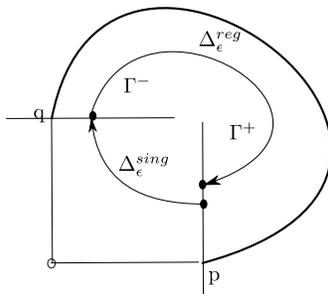


Figura 5.3: Definición de los mapeos singular y regular

Estudiaremos la bifurcación de una órbita homoclínica  $\gamma$  analizando los puntos fijos de la transformación (5.5) que corresponden a los ciclos límite que se generan de la perturbación de  $\gamma$ .

Para ello, veremos que dicha transformación tiene un único punto fijo estable (si  $\sigma < 0$ ) y por tanto un único ciclo límite estable (Lyapunov y estructuralmente estable).

### Formas Normales para la perturbación de puntos singulares tipo silla en el plano

La teoría de formas normales finitamente diferenciables nos proporciona un cambio de coordenadas apropiadas cerca del punto singular que permite dar una expresión explícita del mapeo singular (5.2).

Por la condición genérica 1 dada en 5.2, de acuerdo con el Teorema 0.3 en una vecindad  $V$  de  $\epsilon = 0$  la familia  $X_\epsilon$  es  $C^k$  diferenciablemente equivalente a la familia lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(\epsilon)x \\ \dot{y} &= \mu(\epsilon)y \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde  $\lambda(0) = \lambda < 0 < \mu = \mu(0)$ . Para cada  $\epsilon$ ,  $\lambda(\epsilon)$  y  $\mu(\epsilon)$  son los valores propios de la matriz de linealización  $A(\epsilon)$ .

Reescalando el retrato fase podemos suponer que  $\{|x|, |y| \leq 1\} \subset V$ . Sean  $(x, y)$  las coordenadas normalizadoras. En estas coordenadas  $p = (1, 0)$ ,  $q = (0, 1)$ . Escogemos los segmentos  $T^+, T^-$  transversales a las variedades estable e inestable, respectivamente como sigue:

$$T^+ = \{(x, y) \in V \mid x = 1\}, \quad T^- = \{(x, y) \in V \mid y = 1\} \tag{5.7}$$

El flujo solución de la ecuación (5.6) con condiciones iniciales  $(x_0, y_0)$  está dado por:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda(\epsilon)t}, \quad y(t) = y_0 e^{\mu(\epsilon)t} \tag{5.8}$$

5.1. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA EN EL PLANO

---

Para  $y \neq 0$  el tiempo  $\tau$  tal que  $ye^{\mu(\epsilon)\tau} = 1$  es  $\tau = \ln y^{-\frac{1}{\mu(\epsilon)}}$ . Así, el mapeo singular (5.2) se define como

$$\Delta_\epsilon^{sing} : (1, y) \mapsto (y^{\alpha(\epsilon)}, 1), \quad \alpha(\epsilon) = \frac{-\lambda(\epsilon)}{\mu(\epsilon)}$$

**Observación 5.7.** De la expresión de  $\tau$  vemos que el tiempo requerido para que las imágenes de los puntos  $(1, y)$  bajo el flujo solución del sistema (5.6) lleguen a la transversal  $T^-$  tiende a infinito cuando  $(1, y) \rightarrow p$ , de hecho en  $p$ ,  $\Delta_\epsilon^{sing}(p) = (0, 0)$ .

Sin embargo podemos extender diferenciablemente con respecto a  $y$  la transformación singular al punto  $(1, 0)$  como  $\Delta_\epsilon^{sing}(1, 0) = (0, 1)$ .

Por otro lado, la transformación regular  $\Delta_\epsilon^{reg} : T^- \mapsto T^+$  en las coordenadas normalizadoras, está dada por

$$\Delta_\epsilon^{reg} : (x, 1) \mapsto (1, f_\epsilon(x)) \quad (5.9)$$

donde  $f_\epsilon$  es el flujo solución del campo  $X_\epsilon$  que corresponde a la parte regular de éste. Por la segunda condición generica de 5.2 se tiene que

$$\left. \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \neq 0$$

Sin pérdida de generalidad asumimos que

$$\left. \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} > 0 \quad (5.10)$$

Finalmente, la transformación de correspondencia tiene la forma

$$\Delta_\epsilon(y) = f_\epsilon(y^{\alpha(\epsilon)}) \quad (5.11)$$

La constante de Lipschitz de  $\Delta_\epsilon^{sing}$  restringida al segmento  $[0, \delta]$  se estima como

$$L_1 = \left\| \frac{\partial y^{\alpha(\epsilon)}}{\partial y} \right\| = \alpha(\epsilon) \delta^{\alpha(\epsilon)-1} \quad (5.12)$$

Para  $\alpha(\epsilon) > 1$  es claro que  $L_1$  tiende a 0 uniformemente cuando  $\delta \rightarrow 0$  (es decir  $\Delta_\epsilon^{sing}$  es una contracción fuerte).

Así,

$$|\Delta_\epsilon^{sing}(y_1) - \Delta_\epsilon^{sing}(y_2)| = |y_1^{\alpha(\epsilon)} - y_2^{\alpha(\epsilon)}| < L_1 |y_1 - y_2|$$

Mientras, la constante de Lipschitz  $L_2$  de  $f_\epsilon$  (observación 5.6) cumple que

$$|f_\epsilon(x_1) - f_\epsilon(x_2)| < L_2 |x_1 - x_2|, \quad L_2 < \infty$$

De esta forma, la transformación de correspondencia (5.11) satisface que

$$|\Delta_\epsilon(y_1) - \Delta_\epsilon(y_2)| < L_2 L_1 |y_1 - y_2| \quad (5.13)$$

Sea  $Lip\Delta_\epsilon = L_2 L_1$  donde  $L_2 < \infty$  y  $L_1$  tiende a 0 cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Por consiguiente, podemos escoger  $\delta$  suficientemente pequeña tal que

$$Lip\Delta_\epsilon < \frac{1}{2}.$$

Como en las coordenadas normalizadoras la variedad estable corresponde al eje  $y = 0$  se tiene que  $\Delta_0(0) = f_0(0) = 0$ .

Por la condición de Lipschitz para  $\Delta_0$  tenemos que

$$|\Delta_0(\delta)| = |\Delta_0(\delta) - \Delta_0(0)| < Lip\Delta_0 \delta < \frac{\delta}{2}. \quad (5.14)$$

Además de (5.10) vemos que  $f_\epsilon$  es creciente con respecto a  $\epsilon$  y por tanto para  $\epsilon > 0$ , se tiene que  $\Delta_\epsilon(0) = f_\epsilon(0) > 0$ .

Finalmente de (5.14) se tiene que, en una vecindad de  $\epsilon = 0$  con  $\epsilon > 0$ , sucede que  $\Delta_\epsilon(\delta) < \frac{\delta}{2}$ . Por consiguiente,  $\Delta_\epsilon([0, \delta]) \subset [0, \delta]$ .

Esto es, para cada  $\epsilon > 0$  pequeño, la transformación de correspondencia (5.11) es una contracción que mapea el dominio  $[0, \delta] \subset T^+$  en sí mismo, con constante de Lipschitz  $Lip\Delta_\epsilon < 1$  para  $\delta$  suficientemente pequeña. Por el Teorema de punto fijo [A1], ésta tiene un único punto fijo estable que corresponde a un único ciclo límite estable de la familia  $X_\epsilon$ .

**Observación 5.8.** 1. Para  $\epsilon < 0$  ver figura 5.2.

2. Por el Teorema de Andronov-Witt [ ] se tiene que el ciclo límite es Lyapunov estable. Esto se sigue pues el mapeo de correspondencia  $\Delta_\epsilon$  en el punto fijo coincide con la transformación de Poincaré del ciclo límite que se genera y  $\frac{\partial}{\partial x}\Delta_\epsilon \leq Lip\Delta_\epsilon < 1$ . Esta última desigualdad también indica que el ciclo límite es estructuralmente estable.

□

## 5.2. Bifurcación de una órbita homoclínica de un punto silla-nodo en el plano

Ahora analizaremos la bifurcación de un campo vectorial que posee una curva homoclínica de un punto singular tipo silla-nodo en el plano.

Consideremos  $X_\epsilon$  una familia de campos vectoriales a un parámetro en el plano, para la cual el campo  $X_0$  posee una órbita homoclínica  $\gamma$  de un punto singular de tipo silla-nodo, la cual cumple las siguientes condiciones:

5.2. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA-NODO EN EL PLANO

---

**Condiciones 5.9.** (El campo vectorial  $X_0$  cumple la primera y segunda condiciones, mientras la familia  $X_\epsilon$  esta sujeta a la tercera condición).

1. El origen es un punto silla-nodo de multiplicidad dos, es decir, el punto singular tiene dos valores propios:  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = 0$ . Así, el campo tiene una variedad central de dimensión uno. Además la restricción de  $X_0$  a la variedad central local del punto singular tiene la forma

$$(ax^2 + \dots) \frac{\partial}{\partial x}, \quad a \neq 0, x \in (\mathbb{R}, 0)$$

2. La órbita homoclínica  $\gamma$  tiende al punto singular cuando  $t \rightarrow \infty$  y es tangente a la variedad central.

El retrato fase de un campo vectorial  $X_0$  que satisface 1 y 2 se muestra en la figura (5.4).

3. La restricción de la familia  $X_\epsilon$  a la variedad central local de cero tiene la forma

$$\dot{x} = f(x, \epsilon), \quad (x, \epsilon) \in (\mathbb{R}^2, 0)$$

donde

$$\left. \frac{\partial f(0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \neq 0$$

**Observación 5.10.** Por el teorema de la función implícita, existe una función diferenciable  $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $f(x, \epsilon(x)) = 0$ . Es decir, los ceros de la restricción están parametrizados por una función no degenerada que es transversal a  $\epsilon = \text{constante}$ .

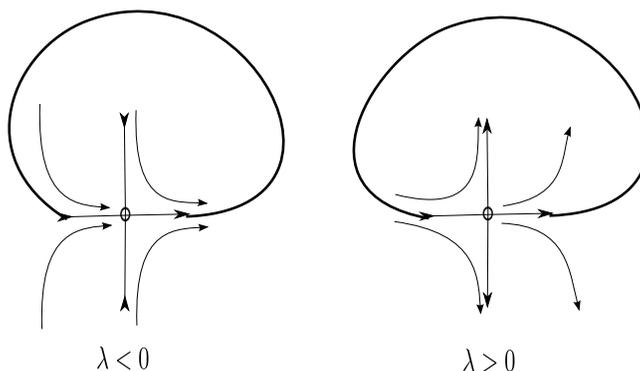


Figura 5.4: Curvas homoclínicas de puntos silla-nodo

**Teorema 5.11** (Andronov). *Sea  $X_\epsilon$  una familia de campos vectoriales en el plano a un parámetro  $\epsilon$  satisface las condiciones dadas en (5.9), para la cual  $X_0$  posee una órbita homoclínica  $\gamma$  de un punto singular  $O$  de tipo silla-nodo. Entonces existe una vecindad  $U$  de  $O \cup \gamma$  y una vecindad  $V$  de  $\epsilon = 0$  tal que, se satisface lo siguiente:*

*Caso 1)  $\lambda < 0$ . Para todo  $\epsilon \in V$  de un lado del cero, existe un único ciclo límite estable en  $U$  que tiende a  $O \cup \gamma$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Y para todo  $\epsilon$  del otro lado del cero, se tienen dos puntos singulares hiperbólicos que tienden a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ; uno de ellos es un punto silla y el otro es un nodo estable.*

*Caso 2)  $\lambda > 0$ . Las mismas conclusiones que en el caso 1), excepto que reemplazamos el comportamiento estable por inestable.*

**Observación 5.12.** 1. *El teorema anterior indica que existe una perturbación de un campo vectorial que posee una órbita homoclínica con las condiciones anteriores que genera un único ciclo límite en el campo perturbado. Además dicho ciclo es Lyapunov y estructuralmente estable.*

2. *El segundo enunciado se reduce al primero, tomando el tiempo al revés.*

### Formas Normales para la perturbación de puntos silla-nodo

Analizaremos el caso 1).

De acuerdo con la teoría de formas normales  $\mathbb{C}^k$  para familias locales [IY91], la familia  $X_\epsilon$ , en una vecindad de  $\epsilon = 0$  es finitamente diferenciablemente equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + \epsilon)(1 + a(\epsilon)x)^{-1} \\ \dot{y} &= \lambda(x, \epsilon)y \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde  $\lambda(0, 0) = \lambda < 0$ .

De la expresión anterior se tiene la siguiente descripción local de la bifurcación (ver fig(5.5)).

1.  $\epsilon > 0$ . La ecuación (5.15) no tiene puntos singulares.
2.  $\epsilon < 0$ . La ecuación (5.15) tiene dos puntos singulares,  $(\pm\sqrt{\epsilon}, 0)$ . Donde  $(\sqrt{\epsilon}, 0)$  corresponde a un punto singular tipo nodo estable mientras  $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$  es un punto silla.

Estudiaremos la bifurcación que ocurre cuando el punto singular en la familia  $X_0$  desaparece, es decir, cuando  $\epsilon > 0$ .

Para esto, construiremos una transformación de correspondencia que depende del parámetro  $\epsilon$ .

5.2. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA-NODO EN EL PLANO

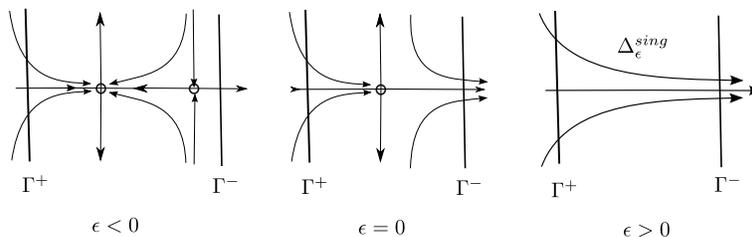


Figura 5.5: Bifurcación caso silla-nodo

Primero nos fijamos en los segmentos transversales

$$\Gamma^+ = \{(x, y) | x = -\delta, |y| \leq \delta\}, \quad \Gamma^- = \{(x, y) | x = \delta, |y| \leq \delta\}.$$

$\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  corresponden a los segmentos de entrada y salida del flujo solución respectivamente; las curvas solución de la familia (5.15) entran a la vecindad del punto singular a través de  $\Gamma^+$  y salen de ella a través de  $\Gamma^-$  para  $\delta$  suficientemente pequeña, en adelante especificaremos las condiciones sobre  $\delta$ .

Las órbitas del sistema (5.15) pasan de un segmento de entrada a uno de salida en el caso  $\epsilon > 0$ .

Para  $\epsilon \leq 0$  las curvas invariantes  $x = \pm\sqrt{\epsilon}$  son un obstáculo para pasar de  $\Gamma^+$  a  $\Gamma^-$ .

La forma normal (5.15) es de variables separadas y es lineal respecto a  $y$ . Resolviendo la primera ecuación, tenemos que el tiempo  $t$  esta dado por la integral

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1 + a(\epsilon)x}{x^2 + \epsilon}.$$

De modo que el tiempo  $T_\epsilon$  que se requiere para que las soluciones de (5.15) pasen de la transversal  $\Gamma^+$  a  $\Gamma^-$  es

$$T_\epsilon = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1 + a(\epsilon)x}{x^2 + \epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \arctg \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}} \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad (5.16)$$

Al mismo tiempo, la coordenada  $y$  cambia a lo largo de las soluciones en el tiempo  $T_\epsilon$  como sigue

$$y \longmapsto \Lambda(\epsilon)y, \quad \Lambda(\epsilon) = e^{\int_0^{T_\epsilon} \lambda(x_\epsilon(t), \epsilon) dt} \quad (5.17)$$

Como  $\lambda(0, 0) = \lambda < 0$ , por continuidad existe  $(\delta^*, r)$  tal que, para  $|x| \leq \delta^*$ ,  $|\epsilon| \leq r$  se tiene que  $\lambda(x, \epsilon) < 0$ . Escogemos  $\delta \leq \delta^*$  tal que  $\lambda(x, \epsilon) < \frac{\lambda}{2}$ . Entonces para  $|x| \leq \delta$  se tiene que

$$\Lambda(\epsilon) < e^{\frac{\lambda}{2} T_\epsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

5.2. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA DE UN PUNTO SILLA-NODO EN EL PLANO

---

La formula (5.17) nos da una expresión para la transformación de correspondencia  $\Delta_\epsilon^{sing} : \Gamma^+ \longleftrightarrow \Gamma^-$  como

$$\Delta_\epsilon^{sing} : (-\delta, y) \rightarrow (\delta, \Lambda(\epsilon)y) \quad (5.18)$$

En las cartas normalizadoras, esta transformación es una contracción lineal en la coordenada  $y$ , cuyo coeficiente de contracción tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Observación 5.13.** *En este caso, la contracción es independiente de la longitud de la transversal  $\Gamma^+$ . Por otra parte también tenemos control del efecto de la transformación regular, pues su constante de Lipschitz está acotada (observación 5.6).*

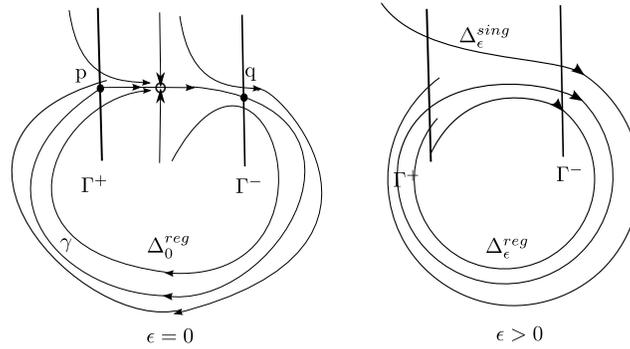


Figura 5.6: Generación de un ciclo límite de la bifurcación de una órbita homoclínica de un punto silla-nodo

**La transformación  $\Delta_\epsilon$  y su punto fijo**

La condición generica 2 de 5.9 implica que para  $\delta$  suficientemente pequeña, la órbita homoclínica  $\gamma$  intersecta al segmento transversal  $\Gamma^+$  en un punto interior  $p$ . Denotamos por  $q$  al punto de intersección de  $\gamma$  con el segmento de salida  $\Gamma^-$  (ver Figura 5.6).

El resto del análisis se sigue como en el caso de la bifurcación de la órbita homoclínica en la sección anterior.

Por el teorema de diferenciabilidad de soluciones respecto a condiciones iniciales y parámetros [A1], para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, la semiórbita positiva empezando en un punto de  $\Gamma^-$  cercano a  $q$ , intersecta a  $\Gamma^+$  por primera vez, en un punto cercano a  $p$ . La transformación así definida será denotada por  $\Delta_\epsilon^{reg}$  y llamada transformación regular. Ésta también depende diferenciablemente del parámetro  $\epsilon$  pues está dada precisamente por el flujo solución  $\varphi_\epsilon^t$  del campo  $X_\epsilon$ .

### 5.3. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA EN $\mathbb{R}^3$

---

Finalmente, la transformación de correspondencia  $\Delta_\epsilon : \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^+$  está dada por

$$\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^{reg} \circ \Delta_\epsilon^{sing} \quad (5.19)$$

Analizaremos la generación del ciclo límite a partir de la bifurcación de la órbita homoclínica  $\gamma$ . Para esto, buscamos el punto fijo de la transformación  $\Delta_\epsilon$ .

Por la condición de Lipschitz de  $\Delta_\epsilon^{reg}$  (observación 5.6), este mapeo regular toma una vecindad  $U^-$  de  $q \in \Gamma^-$  y la lleva a una vecindad  $U^+$  del punto  $p \in \Gamma^+$ . La imagen de  $U^- \cap \Gamma^-$  bajo el flujo solución  $\varphi_\epsilon^t$  describe una curva  $\Gamma$  diferenciable y transversal a la variedad central (el eje  $y = 0$  en las cartas normalizadas) del campo perturbado (esto se sigue de las condiciones genéricas 1 y 2 de la familia  $X_\epsilon$ ). Sabemos que la proyección (a la que denotamos por  $\Pi$ ) de dicha curva a lo largo del flujo solución a la transversal  $\Gamma^+$  es diferenciable con respecto a las variables fase (ver observación 5.14).

**Observación 5.14.** *El segmento  $\Gamma^+$  es llevado por el flujo solución  $\varphi_v(t, x)$  del campo inicial a una curva  $\Gamma = \varphi_v(t, \Gamma^+)$  cuya proyección también a lo largo del flujo solución al segmento  $\Gamma^+$  es diferenciable respecto a las variables fase, al tiempo y al parámetro.*

Como  $\Delta_\epsilon^{sing}$  es una contracción, escogemos  $\epsilon$  pequeño de forma que el coeficiente de contracción sea tal que la proyección de la curva  $\Gamma$  al segmento  $\Gamma^+$  sea llevado en  $U^-$ , es decir  $\Delta_\epsilon^{sing}(\Pi(\Gamma)) \subset U^-$ .

Por consiguiente, la composición (5.19) es tal que  $\Delta_\epsilon(U^+ \cap \Gamma^+) \subset U^+ \cap \Gamma^+$ , y es una contracción.

Por el teorema de punto fijo [A1],  $\Delta_\epsilon$  tiene un único punto fijo estable que corresponde al ciclo límite estable que nos interesa.

**Observación 5.15.** *La estabilidad de Lyapunov del ciclo límite que se genera se analiza analógicamente al caso anterior (observación 5.8).*

### 5.3. Bifurcación de una órbita homoclínica en $\mathbb{R}^3$

En el siguiente ejemplo analizaremos la bifurcación de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  a un parámetro, el cual posee una única órbita homoclínica  $\gamma$ .

Analizaremos el caso más simple: El punto singular es de tipo silla, cuyos valores propios de la linealización en éste son todos reales.

Sea  $X_0$  campo vectorial con una única trayectoria homoclínica  $\gamma$  que corresponde a un punto singular de tipo silla en  $\mathbb{R}^3$  que satisface la condición:

Los valores propios  $\{\lambda_j\}_{j=1,2,3}$  de la matriz de linealización de  $X_0$  en el punto singular son números reales. Suponemos sin pérdida de generalidad que

### 5.3. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA EN $\mathbb{R}^3$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . (Lo anterior indica que el punto singular tiene una variedad estable de dimensión dos y una variedad inestable de dimensión uno (Ver figura 5.7)).

**Definición 5.16.** El valor del punto silla se define como  $\sigma = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} + \lambda_3$ .

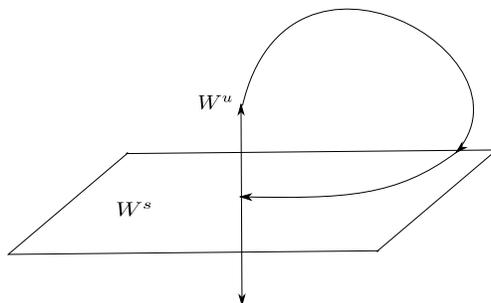


Figura 5.7: Curva homoclínica  $\gamma$  de un punto silla hiperbólica en el espacio, con valores propios reales.

**Teorema 5.17.** Sea  $X_\epsilon$  una familia de campos vectoriales diferenciables en  $\mathbb{R}^3$  a un parámetro  $\epsilon$ , tal que el campo vectorial  $X_0$  posee una única órbita homoclínica  $\gamma$  de un punto singular de tipo silla cuyos valores propios son reales. Entonces la familia  $X_\epsilon$  para  $\epsilon$  en una vecindad de  $\epsilon = 0$  de un lado del cero (es decir, para valores del parámetro tales que  $\epsilon > 0$  o  $\epsilon < 0$ ), posee una única órbita periódica que tiende a la trayectoria homoclínica  $\gamma$  del campo vectorial  $X_0$  cuando  $\epsilon$  tiende a cero. Dicha órbita es estable si el valor de la silla  $\sigma$  es positivo y tiene dos variedades invariantes, estable e inestable si  $\sigma < 0$ .

Los campos vectoriales correspondientes a todos los valores del parámetro del lado opuesto de la vecindad de  $\epsilon = 0$  no tienen órbitas periódicas en una vecindad de  $\gamma$ .

**Condiciones 5.18.** para la familia  $X_\epsilon$ .

1. El conjunto de valores propios que corresponden al punto singular del campo  $X_0$  es no resonante.
2. La trayectoria homoclínica tiende al punto singular a lo largo de la dirección principal (que corresponde al máximo valor propio negativo) cuando  $t$  tiende a infinito. La siguiente condición es propia de la familia  $X_\epsilon$ .
3. Cuando el parámetro  $\epsilon$  pasa a través del valor cero, la órbita homoclínica ocurre y se rompe de manera transversal.

La condición 1 de 5.18 implica que en una vecindad del punto singular, el campo vectorial es  $C^\infty$  diferenciablemente equivalente a su parte lineal  $A(0)$  [Chen]. Mientras que, por el teorema 0.3, la familia  $X_\epsilon$  es  $C^k$  diferenciablemente equivalente a su parte lineal  $A(\epsilon)$ . Así, en las coordenadas normalizadoras, la variedad estable del punto singular es la intersección de un plano con una vecindad  $U$  del origen en  $\mathbb{R}^3$  y su variedad inestable la intersección de  $U$  con una recta.

### Esquema de la prueba

De la misma forma que en el caso dos dimensional, analizaremos la transformación de correspondencia  $\Delta_\epsilon$  de la órbita homoclínica  $\gamma$  como composición de dos factores, un mapeo singular y otro regular,  $\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^{reg} \circ \Delta_\epsilon^{sing}$  (ver figura 5.8).

Para esto, en una vecindad del punto singular (que asumimos sin pérdida de generalidad es el origen) escogemos dos secciones  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  transversales a la órbita homoclínica  $\gamma$ . Las curvas solución del campo vectorial con condiciones iniciales en  $\Gamma^+$  entran a la vecindad, mientras las curvas solución sobre  $\Gamma^-$  salen de la vecindad, por esto usamos la notación  $+$  y  $-$ .

El mapeo  $\Delta_\epsilon^{sing} : \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$  se define a lo largo de las curvas solución cercanas al punto singular. Su estudio constituye la parte técnica más complicada del análisis, sin embargo la teoría de formas normales  $\mathcal{C}^k$  para familias locales nos permite dar una expresión explícita para  $\Delta_\epsilon^{sing}$ . De esta manera, el análisis geométrico es más transparente.

Por otra parte, se tiene control para el mapeo  $\Delta_\epsilon^{reg} : \Gamma^- \rightarrow \Gamma^+$  definido por la parte regular del flujo solución de la familia  $X_\epsilon$  (obsevación 5.6), por lo cual podemos considerarlo lo más simple posible y con ello describir mejor el comportamiento geométrico.

### La transformación singular

Por la condición genérica 1 dada en 5.18 podemos usar el Teorema 0.3. De este modo, la familia  $X_\epsilon$  en coordenadas normalizadoras es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1(\epsilon)x \\ \dot{y} &= \lambda_2(\epsilon)y \\ \dot{z} &= \lambda_3(\epsilon)x \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\lambda_2(0) < \lambda_1(0) < 0 < \lambda_3(0)$$

Reescalando el espacio fase podemos definir las secciones  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  transversales a la órbita homoclínica  $\gamma$  como sigue:

$$\Gamma^+ = \{x = 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}, \quad \Gamma^- = \{z = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}. \tag{5.21}$$

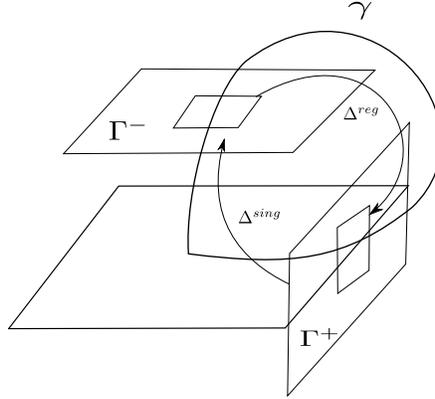


Figura 5.8: Mapeos singular y regular de una curva homoclínica en  $R^3$

Antes de calcular la expresión explícita del mapeo singular daremos una descripción geométrica del procedimiento.

El sistema (5.20) puede ser expresado como el producto de dos sistemas: uno definido sobre la variedad estable y el otro en la variedad inestable. De esta manera, la proyección de cualquier curva solución a lo largo del eje  $z$  al plano  $(x, y)$ , corresponde a la curva solución del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1(\epsilon)x \\ \dot{y} &= \lambda_2(\epsilon)y \end{aligned} \quad (5.22)$$

Por consiguiente, cualquier curva solución con condiciones iniciales en  $\Gamma^+$  cae dentro de un cilindro paralelo al eje  $z$ . Las proyecciones de todas las curvas fase que empiezan en  $\Gamma^+$  llenan el triángulo curvilíneo  $T_0$  formado por las órbitas del nodo (5.22) saturando la base de  $\Gamma^+$  sobre  $z = 0$  (ver figura (5.9)) Sea  $\Pi_h$  un rectángulo contenido en  $\Gamma^+$  con base inferior sobre el plano  $z = 0$  y base superior de altura  $h$ .

Para tener una idea geométrica de la imagen en la transversal  $\Gamma^-$  del rectángulo  $\Pi_h$  bajo el flujo fase del sistema (5.20), debemos desplazar  $T_0$  al plano  $\Gamma^-$  a lo largo del eje  $z$ , y entonces cortar la parte del triángulo desplazado con la imagen de la base superior de  $\Pi_h$ .

Para calcular el tiempo en que las soluciones con condiciones iniciales en la base superior de  $\Pi_h$  llegan al plano  $z = 1$ , usamos el flujo solución de (5.20), el cual está dado por

$$(x, y, z) \mapsto (e^{\lambda_1(\epsilon)t}x, e^{\lambda_2(\epsilon)t}y, e^{\lambda_3(\epsilon)t}z) \quad (5.23)$$

Nos fijamos en los puntos de la forma  $(1, y, h)$  de la base superior de  $\Pi_h$  y

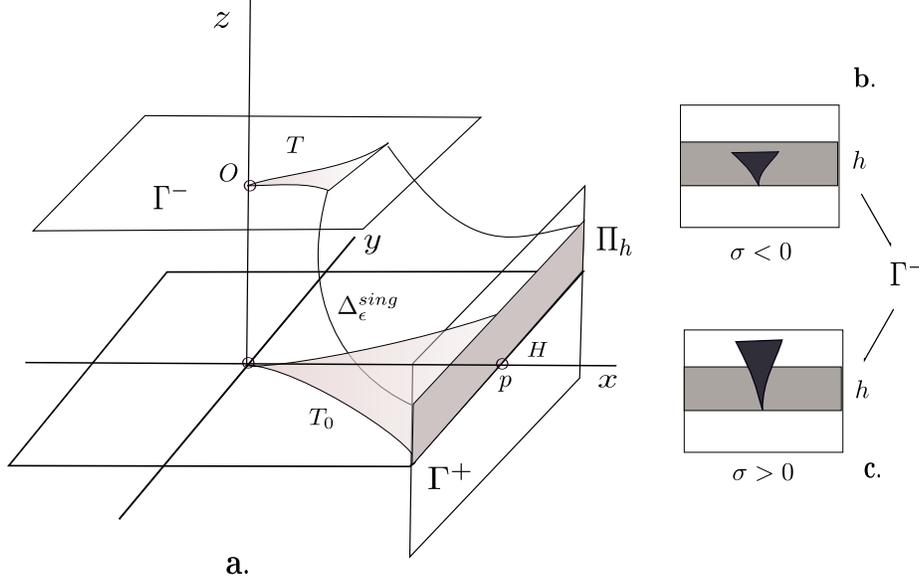


Figura 5.9: (a) Mapeo singular para un punto silla en  $\mathbb{R}^3$  con valores propios reales. Imágenes de  $\Pi_h$  en los casos (b)  $\sigma < 0$  y (c)  $\sigma > 0$

buscamos el tiempo  $\tau$  tal que  $e^{\lambda_3 \tau} h = 1$ . Esta igualdad se satisface para  $\tau = -\frac{\ln h}{\lambda_3(\epsilon)}$ .

Así, la coordenada  $x$  de los puntos de la imagen de  $T_0$  bajo el flujo 5.23 es

$$x = h^{\alpha(\epsilon)}, \quad \alpha(\epsilon) = \frac{-\lambda_1(\epsilon)}{\lambda_3(\epsilon)}. \quad (5.24)$$

Mientras que, la coordenada  $y$  de estos puntos esta dada por

$$y = yh^{\beta(\epsilon)}, \quad \beta(\epsilon) = \frac{-\lambda_2(\epsilon)}{\lambda_3(\epsilon)}. \quad (5.25)$$

**Observación 5.19.**  $0 < \alpha(\epsilon) < \beta(\epsilon)$ , puesto que asumimos  $\lambda_2(0) < \lambda_1(0) < \lambda_3(0)$ .

La transformación singular dada por el flujo solución (5.23) en una vecindad del punto singular es una contracción en la dirección  $y$  (observación 5.23).

Por otra parte, el comportamiento en la coordenada  $x$  depende del valor de la silla  $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_3(0)$ , el cual depende diferenciablemente de  $\epsilon$ .

Caso 1. Si  $\sigma < 0$ , se tiene estabilidad en la dirección  $x$ , pues  $\alpha(\epsilon) > 1$  implica  $h^{\alpha(\epsilon)} \ll h$ , para  $h$  pequeña.

Caso 2. Si  $\sigma > 0$ , tenemos  $\lambda_3 > |\lambda_1|$ , así  $0 < \alpha(\epsilon) < 1$  implica  $h^{\alpha(\epsilon)} \gg h$  para  $h$  pequeña. En este caso el comportamiento es inestable.

En el primer caso,  $\Delta_\epsilon^{sing}$  es una contracción fuerte, cuyo coeficiente tiende a 0 cuando  $h \rightarrow 0$  (Lema 5.22).

Mientras que, en el segundo caso la transformación  $\Delta_\epsilon^{sing}$  es hiperbólica: Contracción fuerte en la dirección  $y$  y expansión fuerte en la dirección ortogonal a ésta. Los coeficientes de contracción y expansión tienden a 0 e  $\infty$  respectivamente cuando  $h \rightarrow 0$  (observaciones 5.23 y 5.24).

Estas afirmaciones se verifican en lo siguiente analizando la derivada de la transformación singular  $\Delta_\epsilon^{sing}$  dada en (5.28).

### Generación del ciclo límite estable

*Demostración del Teorema 5.17 en el caso  $\sigma < 0$ .* (Para el caso  $\sigma > 0$  usaremos la condición de cono de Poincaré que definimos más adelante en 5.26).

Sean  $(x, y, z)$  las cartas normalizadoras y las secciones  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  como se definieron en (5.21). Sean  $(y, z)$  y  $(x, y')$  coordenadas sobre  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  respectivamente, definidas como las restricciones a las coordenadas normalizadoras en estas secciones.

**Observación 5.20.** Denotamos por  $O$  a la intersección de  $\gamma$  y  $\Gamma^-$ ,  $O = (0, 0, 1)$  y  $p = \Gamma^+ \cup \gamma$ .

La variedad estable intersecciona a  $\Gamma^+$  en un segmento  $H = \{x = 1, z = 0\}$ . Por consiguiente,  $z(p) = 0$  (es decir, la coordenada  $z$  del punto  $p$  es cero en las coordenadas normalizadoras).

Por la condición genérica 3 dada en 5.18, la imagen  $O(\epsilon) = \Delta_\epsilon^{reg}(O)$  bajo la transformación regular, intersecciona transversalmente al plano  $z = 0$  cuando  $\epsilon$  pasa por el valor cero (de aquí se deduce que  $O(\epsilon)$  tiene coordenada  $z$  distinta de cero). Reparametrizando podemos suponer que

$$z(O(\epsilon)) = \epsilon, \quad \epsilon \neq 0. \quad (5.26)$$

Definimos la altura de  $\Pi_h$  como  $h = 2|\epsilon|$ .

Probaremos que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, la transformación

$$\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon^{reg} \circ \Delta_\epsilon^{sing}$$

lleva el rectángulo  $\Pi_h$  en sí mismo y es una contracción (ver figura 5.10).

En el caso  $\epsilon < 0$  y para alguna altura  $h$  que no depende del parámetro  $\epsilon$ , la transformación  $\Delta_\epsilon$  no tiene puntos fijos en  $\Pi_h$ . Para tales valores de  $\epsilon$  no se generan órbitas periódicas en una vecindad de la curva homoclínica.

La expresión de la transformación singular restringida a las secciones  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  está dada por

$$\Delta_\epsilon^{sing}(y, z) \mapsto (z^{\alpha(\epsilon)}, yz^{\beta(\epsilon)})$$

### 5.3. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA EN $\mathbb{R}^3$

---

Hacemos un cambio de base  $(e_1, e_2) \mapsto (e_2, e_1)$  en la imagen de  $\Delta_\epsilon^{sing}$ , es decir en la sección  $\Gamma^-$ . Denotamos por  $(y', x)$  a estas nuevas coordenadas. Y en éstas la definición de la transformación singular es

$$\Delta_\epsilon^{sing}(y, z) \mapsto (yz^{\beta(\epsilon)}, z^{\alpha(\epsilon)}) \quad (5.27)$$

Extendemos (diferenciablemente) la transformación a  $(0, 0)$  como  $\Delta_\epsilon^{sing}(0, 0) = (0, 0)$ .

La derivada de  $\Delta_\epsilon^{sing}$  es

$$D\Delta_\epsilon^{sing} = \begin{bmatrix} z^{\beta(\epsilon)} & \beta(\epsilon)yz^{\beta(\epsilon)-1} \\ 0 & \alpha(\epsilon)z^{\alpha(\epsilon)-1} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

**Observación 5.21.** *El cambio de base, nos permitirá analizar con más detalle la condición de cono de Poincaré para  $\Delta_\epsilon$  en el caso  $\sigma > 0$ .*

Para el caso que analizamos ( $\sigma < 0$ ), la constante de Lipschitz  $L = \|D\Delta_\epsilon^{sing}\|_{(y,h)}$  de  $\Delta_\epsilon^{sing}$  tiende a 0 cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  (Lema 5.22).

**Lema 5.22.** *Sea  $\Delta_\epsilon^{sing}$  la transformación singular definida en (5.27), tal que,  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_3 < 0$ . Entonces,  $\Delta_\epsilon^{sing}$  es una contracción fuerte en  $\Pi_h$ .*

*Demostración del Lema 5.22.* Nos fijamos en la norma de la derivada de  $\Delta_\epsilon^{sing}$  dada en (5.28)

$$\begin{aligned} \|D\Delta_\epsilon^{sing}\| &= \max_{(\xi_1, \xi_2) \in S^1} \|D\Delta_\epsilon^{sing}(\xi_1, \xi_2)\| = \\ &= \max \|(z^{\beta(\epsilon)}\xi_1, \beta(\epsilon)yz^{\beta(\epsilon)-1}\xi_1 + \alpha(\epsilon)z^{\alpha(\epsilon)-1}\xi_2)\| \leq \\ &\leq \max |h^{\beta(\epsilon)}\xi_1| + \max |h^{\alpha(\epsilon)-1}(\beta(\epsilon)y\xi_1 + \alpha(\epsilon)\xi_2)| \end{aligned}$$

donde  $1 < \alpha < \beta$ , puesto que  $-\lambda_1(\epsilon) < \lambda_3(\epsilon)$ . De esta forma, cada uno de los términos de la suma tiende a cero cuando  $h$  tiende a cero. En particular  $\|\Delta_\epsilon^{sing}\| < 1$ . Por consiguiente, esta transformación es una contracción. Fin de la demostración.

Mientras que, de la ecuación (5.20),  $diam(\Delta_\epsilon^{sing}(\Pi_h)) = \|(yh^{\beta(\epsilon)}, h^{\alpha(\epsilon)})\| \leq |yh^{\beta(\epsilon)}| + |h^{\alpha(\epsilon)}| \leq |h^{\alpha(\epsilon)}|(y+1) \leq 2|h^{\alpha(\epsilon)}|$ , lo anterior se sigue pues,  $\alpha < \beta$  implica  $h^{\alpha(\epsilon)} > h^{\beta(\epsilon)}$  para  $h$  pequeño, además  $y < 1$  y  $h = 2|\epsilon|$ . Por consiguiente,  $diam(\Delta_\epsilon^{sing}(\Pi_h)) \leq ch^\alpha = C\epsilon^\alpha$ .

Por otro lado, la distancia de  $O(\epsilon)$  a la frontera de  $\Pi_h$  es igual a  $\epsilon$  (ver 5.26). Por la continuidad de  $\Delta_\epsilon^{reg}$  respecto a las variables fase, en una vecindad  $V_0$  de  $O$ , se tiene que  $|z(\Delta_\epsilon^{reg})(V_0) - \epsilon| < \delta$ , para  $\delta$  pequeño. Esto se sigue puesto que,  $\Delta_\epsilon^{reg}$  tiene constante de Lipschitz acotada (observación 5.6), por lo cual la transformación  $\Delta_\epsilon$  preserva el efecto de contracción en  $\Pi_h$ .

### 5.3. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA EN $\mathbb{R}^3$

Sea  $\epsilon > 0$ , tal que la imagen del rectángulo  $\Pi_h$  bajo la transformación  $\Delta_\epsilon^{sing}$  caiga en  $V_0$ . Esto es,  $T = \Delta_\epsilon^{sing}(\Pi_h) \subset V_0$  (Lema 5.22). Así, la distancia de  $\Delta_\epsilon^{reg}(V_0)$  a la frontera de  $\Pi_h$  es suficientemente cercana a  $\epsilon$  (observación 5.6). Por lo tanto,  $\Delta_\epsilon(\Pi_h) \subset \Pi_h$ . Con esto se concluye la demostración 5.22.

Por consiguiente, se aplica el teorema de punto fijo y con esto se tiene un único punto fijo estable de la transformación  $\Delta_\epsilon^{sing}$  (la estabilidad de dicho punto se tiene puesto que  $\|\Delta_\epsilon^{sing}\| < 1$ ). Esto prueba la existencia de una única órbita periódica estable para  $\epsilon > 0$ , de hecho ésta es Lyapunov y estructuralmente estable (observación 5.8).

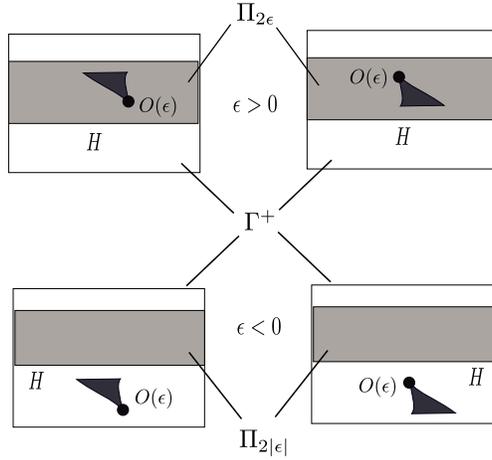


Figura 5.10: Imagen de la transformación de Poincaré de una órbita homoclínica de un punto silla, con  $\sigma < 0$ .

Para probar la ausencia de puntos fijos en el caso  $\epsilon < 0$  (ver figura 5.10), veremos que la transformación  $\Delta_\epsilon$  decrece en la coordenada  $z$  en  $\Pi_h$ .

Podemos asumir que la constante de Lipschitz de  $\Delta_\epsilon$  es menor que  $\frac{1}{2}$ . Sean  $a = (y, z) \in \Pi_h$  y  $b = (y, 0)$ , notemos que  $\Delta_\epsilon(b) = \Delta_\epsilon^{reg}(O) = (y(\epsilon), \epsilon)$ .

Así, se tiene que

$$z(\Delta_\epsilon(a)) \leq z(\Delta_\epsilon(b)) + z(\Delta_\epsilon(0, z)) = \epsilon + \frac{z}{2} < z$$

Por consiguiente, no hay puntos fijos, es decir, no hay órbitas periódicas. Esto concluye la prueba del Teorema 5.17 en el caso  $\sigma < 0$ .

**Observación 5.23.** *El coeficiente de contracción se tiene en la dirección  $y'$  para ambos casos (1 y 2), puesto que*

$$\|D\Delta_\epsilon^{sing}(e_1^*)\| = \|(z^{\beta(\epsilon)}, 0)\| \leq \|(h^\beta, 0)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0$$

**Observación 5.24.** *Mientras que, en el caso 2 ( $\sigma > 0$ ) la dirección expansiva es la ortogonal a la dirección  $y'$  y su coeficiente de expansión tiende a  $\infty$  cuando  $h$  tiende a 0. Esta afirmación se obtiene puesto que*

$$\begin{aligned} \|D\Delta_\epsilon^{sing}(e_2^*)\| &= \|(\beta(\epsilon)yz^{(\beta(\epsilon)-1)}, \alpha(\epsilon)z^{\alpha(\epsilon)-1})\| \\ &\geq \|(0, \alpha(\epsilon)h^{\alpha(\epsilon)-1})\| = |\alpha(\epsilon)h^{\alpha(\epsilon)-1}| \end{aligned}$$

donde  $\alpha(\epsilon) - 1 < 0$ .

Para probar el caso  $\sigma > 0$  requerimos de algunas definiciones y resultados de la teoría hiperbólica.

**Observación 5.25.** *Aunque estamos analizando la bifurcación de una órbita homoclinica en  $\mathbb{R}^3$ , hemos visto que su transformación de correspondencia  $\Delta_\epsilon$  se descompone como la composición de dos transformaciones  $\Delta_\epsilon^{sing}$  y  $\Delta_\epsilon^{reg}$  y éstas reducen el problema a un análisis dos dimensional. De modo que, usaremos los siguientes resultados en  $\mathbb{R}^2$ .*

Hemos visto que la transformación de correspondencia para una órbita homoclinica admite una descomposición como el producto de un mapeo regular y otro singular. La parte singular tiene una expresión explícita que exhibe un comportamiento hiperbólico (fuerte). Por otro lado, no tenemos información detallada de la parte regular, excepto que su derivada está acotada uniformemente (desigualdad 5.3). Sin embargo, bajo condiciones de transversalidad, el efecto hiperbólico (fuerte) de un mapeo, se preserva con la composición de éste con un mapeo acotado. Para probar este hecho, se emplea la condición del cono de Poincaré y algunos lemas que enunciamos a continuación (un análisis más detallado de estos resultados se encuentra en [IW]).

### Condición de cono de Poincaré

**Definición 5.26.** *Sean  $\mu_h, \mu_v$  dos constantes positivas que satisfacen la desigualdad  $\mu_h \mu_v < 1$ . Consideremos la descomposición  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , la correspondiente descomposición de vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\xi = (\xi^-, \xi^+)$  y los siguientes conjuntos*

$$K^+ = \{|\xi^-| \leq \mu_v |\xi^+|\}, \quad K^- = \{|\xi^+| \leq \mu_h |\xi^-|\}$$

Sea  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un operador lineal. Denotamos  $\eta = A\xi$ .

Se dice que  $A$  satisface la  $(\mu_h, \mu_v)$  condición de cono de Poincaré, si

1.  $AK^+ \subset K^+$ ,
2.  $A^{-1}K^- \subset K^-$ ,  
y existe  $\lambda > 1$  tal que
3.  $|\eta^+| \geq \lambda |\xi^+|$  para cualquier  $\xi \in K^+$ ,

4.  $|\xi^-| \geq \lambda|\eta^-|$  para cualquier  $\eta \in K^-$ .

La ilustración geométrica se da en la figura 5.11.

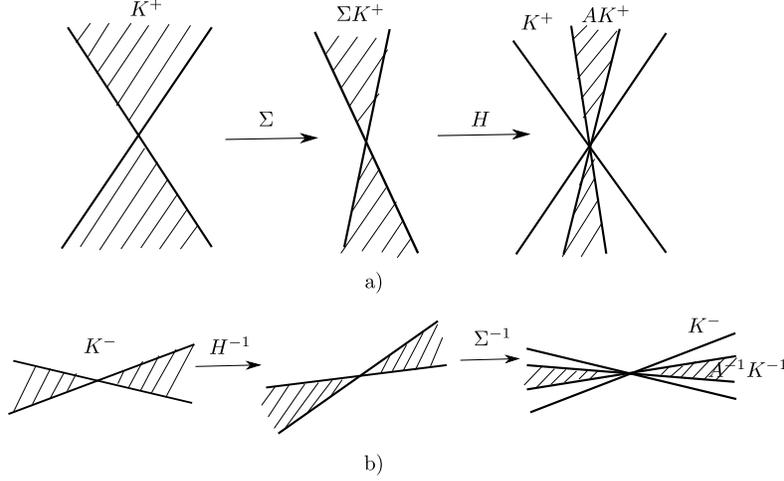


Figura 5.11: Efecto de la transformación  $A$  y  $A^{-1}$

**Definición 5.27.** Un  $(\mu_h, \mu_v)$  rectángulo  $D$  en  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  es un dominio de la forma

$$D = F(B_1 \times B_2),$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son bolas unitarias en  $\mathbb{R}$ ,  $F : B_1 \times B_2 \rightarrow \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}_2$  es un homeomorfismo. Las partes horizontal y vertical de la frontera de  $D$  se definen como las imágenes bajo  $F$  de las partes horizontal y vertical de la frontera de  $B_1 \times B_2$  respectivamente:

$$\partial_h D = F(B_1 \times \partial B_2), \quad \partial_v D = F(\partial B_1 \times B_2).$$

**Definición 5.28.** Un  $(\mu_h, \mu_v)$  rectángulo  $D$  es llamado verticalmente cilíndrico ( $v$ -cilíndrico) en un rectángulo estándar  $B$  si

$$D \subset B, \quad \partial_v D \subset \partial_v B.$$

Y se dice horizontalmente cilíndrico ( $h$ -cilíndrico) si sucede que

$$D \subset B, \quad \partial_h D \subset \partial_h B.$$

**Teorema 5.29** (Teorema del Punto Fijo Hiperbólico). Sea  $B = D_h \times D_v$  un rectángulo estándar. Sean  $D \subset B$  y  $D' \subset B$   $(\mu_h, \mu_v)$  rectángulos  $v$ -cilíndrico y  $h$ -cilíndrico en  $B$  (con proyecciones  $D_h$  y  $D_v$  respectivamente).

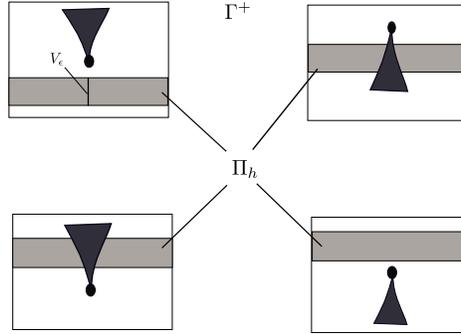


Figura 5.12: Imágenes del Mapeo de Poincaré,  $\sigma > 0$ ; Descripción geométrica.

Sea  $f : D \rightarrow D'$  un mapeo que satisface la  $(\mu_h, \mu_v)$  condición de como 5.26. Entonces  $f$  tiene un único punto fijo  $O$  en  $D$ :

$$O = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i D.$$

La demostración del Teorema 5.29 se encuentra en [IW].

### Descripción Geométrica

Para describir los efectos geométricos, dado que, como ya vimos (observación 5.6) se tiene control sobre el mapeo  $\Delta_\epsilon^{reg}$ , asumiremos que éste es lo más simple posible. Esto nos brindará una mejor interpretación geométrica.

Supongamos entonces que  $\Delta_\epsilon^{reg}$  tiene alguna de las siguientes formas:

$$\Delta_\epsilon^{reg} = g_\epsilon^\pm \quad (5.29)$$

donde  $g_\epsilon^+ : (x, y, 1) \rightarrow (1, y, x + \epsilon)$ ,  $g_\epsilon^- : (x, y, 1) \rightarrow (1, -y, -x + \epsilon)$ . Esto tiene sentido pues  $\Delta_\epsilon^{reg}$  es Lipschitz. Por consiguiente podemos suponer que su efecto es el de una traslación en la dirección  $z$  en las coordenadas  $(y, z)$  en  $\Gamma^+$ .

Las imágenes del mapeo de correspondencia

$$\Delta_\epsilon = g_\epsilon^\pm \circ \Delta_\epsilon^{sing}, \quad (5.30)$$

se muestran en la figura 5.12.

Para probar el Teorema 5.17 en el caso  $\sigma > 0$ , como lo hemos hecho en el caso anterior, analizaremos el mapeo  $\Delta_\epsilon$ . Para esto, analizamos el modelo descrito en (5.30).

El objetivo es aplicar a este modelo el Teorema del punto fijo hiperbolico 5.29 (ver figura 5.12). Para ello, buscamos un dominio adecuado de  $\Delta_\epsilon^{sing}$ , es decir, un dominio tal que el punto  $O(\epsilon) = \Delta_\epsilon^{reg}(O)$  (observación 5.20) se localice

fuera de la preimagen de  $\Delta_\epsilon^{sing}$ . Para esto, definimos la altura del rectángulo  $\Pi_h$  como  $h = |\epsilon|/2$ . Sea  $V_\epsilon = \Pi_h \cap \{y = 0\}$ . De la definición 5.29, para  $g_\epsilon^+$  se tiene que  $\Delta_\epsilon(V_\epsilon) = g_\epsilon^+(\{(z^\alpha(\epsilon), 0, 1) : 0 < z \leq h\}) = \{(1, 0, z^\alpha(\epsilon) + \epsilon) : 0 < z \leq h\}$ . Es decir,  $\Delta_\epsilon(V_\epsilon) = [\epsilon, \epsilon + h^\alpha]$ . Y para  $g_\epsilon^-$ ,  $\Delta_\epsilon(V_\epsilon) = [\epsilon, \epsilon - h^\alpha]$ . En el primer caso,  $\Delta_\epsilon(V_\epsilon) \supset V_\epsilon$  para  $\epsilon < 0$ . Mientras que, en el segundo caso se cumple la misma inclusión para  $\epsilon > 0$ .

En ambos casos, se observa que el mapeo  $\Delta_\epsilon$  es una expansión estricta en  $V_\epsilon$  para  $\epsilon$  pequeño. Recordemos también que en el caso que tratamos ( $\sigma > 0$ ) se tiene contracción en la dirección  $y$  (observación 5.23). De esta forma, podemos usar el teorema del punto fijo hiperbólico 5.29 y deducir que la transformación  $\Delta_\epsilon$  tiene un único punto fijo hiperbólico en  $V_\epsilon \subset \Pi_h$ .

### Generación de un ciclo hiperbólico: construcción de mapeos y dominios

Los argumentos anteriores nos proporcionan una idea geométrica del efecto de la transformación de correspondencia  $\Delta_\epsilon$  en  $\Pi_h$ . Los detalles de la construcción de los dominios  $B = B(\epsilon)$ ,  $D = D_\epsilon$ ,  $D' = D'_\epsilon$  en los cuales se satisfacen las hipótesis del teorema 5.29 se encuentran en [IW] (éstos se ilustran en la figura 5.13). Sin embargo, el peso de la demostración del Teorema 5.17 recae básicamente en probar que la condición de cono de Poincaré se satisface para dicha transformación.

Consideremos las cartas normalizadoras que nos permiten linealizar el campo  $X_\epsilon$ , las secciones transversales  $\Gamma^-, \Gamma^+$  (5.21). Sean  $O$  y  $p$  como se definieron en la observación 5.20. La variedad estable del punto singular intersecta a  $\Gamma^+$  en el segmento  $H = \{(1, y, 0) : |y| \leq 1\}$ . De este modo,  $z(p) = 0$ . Por otro lado, una curva transversal a  $H$ , por el teorema de la función implícita intersecta transversalmente a  $\Gamma^-$  en una curva  $V^-$  que pasa por  $O$ . Podemos suponer que  $V^- = \{y = 0\}$ . Sea  $\Omega^- \subset \Gamma^-$  vecindad del punto  $O$ .

Como  $\gamma \cap \Gamma^+ = O$  y  $\gamma$  se rompe transversalmente cuando  $\epsilon$  pasa por el cero (condición generica 3 dada en 5.18) y dado que  $z(O(\epsilon)) = \epsilon$ , reparametrizando el modelo (5.29) podemos suponer que

$$\Delta_\epsilon(O) = (y(\epsilon), \epsilon) \tag{5.31}$$

El mapeo  $\Delta_\epsilon^{reg}$  envía a  $\Omega^-$  a alguna vecindad  $\Omega_\epsilon^+ \subset \Gamma^+$  de  $p$ . Por la condición 3 de transversalidad dada en 5.18, se tiene que

$$\Delta_\epsilon^{reg} V^- \text{ es transversal a } H \text{ en el punto } (1, 0, 0) \text{ para } \epsilon = 0 \tag{5.32}$$

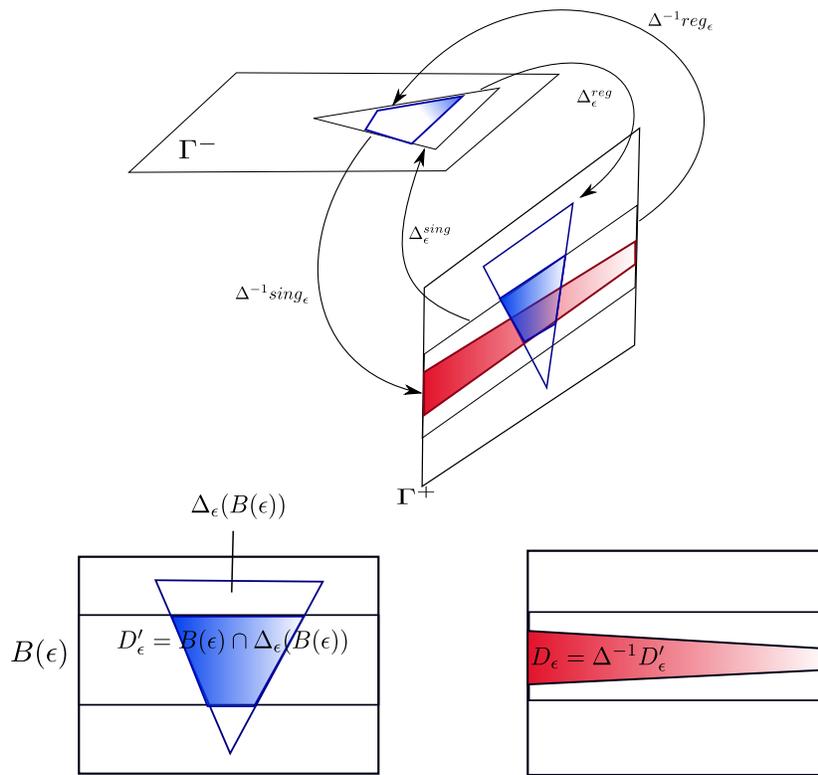


Figura 5.13: Dominios de  $\Delta_\epsilon$  y  $\Delta_\epsilon^{-1}$

**Condición de cono de Poincaré para la transformación de correspondencia  $\Delta_\epsilon$ .**

Lo que nos interesa es probar que la transformación  $\Delta_\epsilon$  satisface la condición de cono de Poincaré 5.26. Para conseguir esto, tenemos el siguiente

**Lema 5.30.** *Consideremos dos operadores lineales del espacio  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo:*

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ D & 1 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Sea  $d \neq 0$ , y supóngase que se satisfacen las siguientes condiciones

$$\|H\| < L, \quad \|H^{-1}\| < L \quad \|d^{-1}\| < L. \quad (5.34)$$

Entonces para cualquier  $\mu_v$  más grande que alguna constante que depende sólo de  $L$  y para cualquier  $\mu_h$ ,  $0 < \mu_h < \mu_v^{-1} \ll 1$ , existe un número positivo  $\delta$  tal que, bajo las condiciones (5.35)

$$\|\Lambda\| < \delta, \quad \|M^{-1}\| < \delta, \quad \|B\| < L, \quad \|D\| < \delta, \quad \|cB\| < \delta \quad (5.35)$$

el mapeo lineal  $A = H\Sigma$  satisface la  $(\mu_h, \mu_v)$  condición de cono de Poincaré con  $\lambda = 2$ .

**Lema 5.31.** *El mapeo de Poincaré  $\Delta_\epsilon$  satisface la  $(\mu_h, \mu_v)$  condición de cono de Poincaré 5.26 para constantes apropiadas  $\mu_h, \mu_v, \mu_h\mu_v < 1$ .*

*Demostración del Lema 5.31.* El Lema anterior se sigue del Lema 5.30 y de la condición de transversalidad (5.32). Por consiguiente, probaremos que la transformación

$$D\Delta_\epsilon = D\Delta_\epsilon^{reg} \cdot D\Delta_\epsilon^{sing} \quad (5.36)$$

satisface las hipótesis del Lema 5.30.

Sea  $H = D\Delta_\epsilon^{reg}$ , supongamos que ésta es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Mientras que  $\Sigma = D\Delta_\epsilon^{sing}$ , donde

$$D\Delta_\epsilon^{sing} = \begin{pmatrix} z^{\beta(\epsilon)} & \beta(\epsilon)yz^{\beta(\epsilon)-1} \\ 0 & \alpha(\epsilon)z^{\alpha(\epsilon)-1} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

Las desigualdades (5.34) puesto que  $\Delta_\epsilon^{reg}$  tiene constante de Lipschitz acotada y  $d \neq 0$  se sigue de la condición de transversalidad (5.32). Por otro lado, notemos que la matriz  $\Sigma$  dada por (5.28) es de la forma (5.33) con

$$D = 0, \quad \Lambda = z^{\beta(\epsilon)}, \quad M = \alpha(\epsilon)z^{\alpha(\epsilon)-1}, \quad B = \frac{\alpha(\epsilon)}{\beta(\epsilon)}yz^{\alpha(\epsilon)-\beta(\epsilon)}$$

### 5.3. BIFURCACIÓN DE UNA ÓRBITA HOMOCLÍNICA EN $\mathbb{R}^3$

---

Recordemos que estamos analizando el caso  $\sigma > 0$ , que implica,  $\alpha < 1$ ,  $\alpha < \beta$ . Además, la coordenada  $z$  depende de  $\epsilon$  (observación 5.20). Por lo tanto, se obtienen las desigualdades (5.35) para  $\delta$  arbitraria y escogiendo  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Así, concluimos la prueba del lema (5.31). Esto completa finalmente la demostración del Teorema 5.17.

# Apéndice

**Observación 5.32.** *La condición de no resonancia del espectro  $\lambda$  implica la hiperbolicidad del mismo.*

En efecto, sea  $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$  el conjunto de valores propios de la matriz  $A$ . Supongamos  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Así, si  $\lambda_k = a_k + ib_k$  es valor propio de  $A$ , entonces su conjugado  $\overline{\lambda_k}$  también lo es. De este modo, si  $\lambda$  no cumple la condición de hiperbolicidad, es decir, la parte real de algún valor propio es cero,  $Re\lambda_j = 0$  para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces para algún  $i \neq j$  se tiene  $\lambda_i = -\lambda_j$ . En ese caso se produce la relación de resonancia

$$\lambda_i = (m+1)\lambda_i + m\lambda_j, \quad m \in \mathbb{N}$$

En el caso  $\lambda_k = 0$  también se tienen relaciones de resonancia.

**Observación 5.33.** *Sin embargo si  $A \in M_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n}$ , dado  $\lambda_j$  uno de sus valores propios, su conjugado no necesariamente lo es.*

*En este caso decimos que el conjunto de valores propios  $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$  de  $A$  es hiperbólico si  $\lambda_j \neq m\lambda_k$  para toda pareja  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Observación 5.34.** *Bajo la condición de no resonancia del espectro  $\lambda$ , también, podemos asumir que el campo (2.1) tiene un único punto singular en  $x = 0$  en una vecindad del origen de  $\mathbb{R}^p$ .*

Lo anterior se sigue de la condición de hiperbolicidad de  $\lambda$  y de las hipótesis sobre  $f$ ,  $f(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

. Derivando el campo  $A(\epsilon)x + f(x, \epsilon)$  (al cual denotamos por  $v(x, \epsilon)$ ) respecto a la posición y evaluando en  $(x, \epsilon) = (0, 0)$ , tenemos que

$$A(\epsilon)|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = A(0),$$

dado la matriz  $A(0) = A$  es hiperbólica, es ésta de rango máximo, en particular es no degenerada.

Del argumento precedente, podemos usar el teorema de la función implícita y asegurar que existe una función  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, 0)$  tal que  $v(g(\epsilon), \epsilon) = 0$ .

---

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$G^{-1} : (x, \epsilon) \mapsto (y, \epsilon); \quad y = x - g(\epsilon)$$

En las nuevas coordenadas  $(y, \epsilon)$  sucede que  $f(0, \epsilon) \equiv 0$  para todo  $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ . Éste cambio depende diferenciablemente de  $\epsilon$ .

Por consiguiente, podemos asumir sin pérdida de generalidad que en una vecindad de  $\epsilon = 0$  se satisface que la familia (2.1) tiene como único punto singular a  $x = 0$ .

**Observación 5.35.** *Para diagonalizar a la matriz de linealización  $A$  del campo (2.1) usamos la complejificación del espacio, es decir, extendemos el espacio fase de las variables  $x \in \mathbb{R}^n$  como sigue:*

*Definimos  $A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ , tal que  $A_{\mathbb{C}} := A$ . La diferencia radica en que  $A_{\mathbb{C}}$  se aplica en vectores de  $\mathbb{C}^n$ , lo cual permite llevar a la matriz  $A$  en su forma diagonal mediante una transformación lineal  $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ .  $Q^{-1}A_{\mathbb{C}}Q = \Lambda$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ , donde  $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$  es el espectro de  $A$  (Se obtiene una forma diagonal puesto que suponemos que todos los valores propios son distintos). Por el Lema 2.6 sabemos que para  $j = 1, \dots, n$ ,  $\lambda_j(\epsilon)$  es diferenciable con respecto a  $\epsilon$ . De este modo, bajo la complejificación de  $A(\epsilon)$ , en una vecindad de  $\epsilon = 0$  la matriz  $A(\epsilon)$  también puede ser llevada a su forma diagonal mediante una transformación lineal invertible  $Q_{\epsilon} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tal que,*

$$Q_{\epsilon}^{-1}A_{\mathbb{C}}(\epsilon)Q_{\epsilon} = \Lambda(\epsilon), \quad \Lambda(\epsilon) = \text{diag}(\lambda_j(\epsilon)), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

donde  $\{\lambda_j(\epsilon)\}_1^n$  es el espectro de  $A_{\mathbb{C}}(\epsilon)$ .

# Bibliografía

- [IY91] Yu. Ilyashenko, Sergei Yakovenko, *Finitely smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields*, Russ. Math. Sur., (1991).
- [ALE] L. Ortiz Bobadilla, A. Ortiz Rodríguez, E. Rosales González, *Remark on finitely smooth linearization of Local families of hyperbolic vector fields with resonances of high order* Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 6,2000.
- [IW] Yu. Ilyashenko, Weigu Li, *Nonlocal Bifurcations*, American Mathematical Society, 1999.
- [A1] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag.
- [A2] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in Theory of Differential Equations*, Springer-Verlag, 2nd edition, Berlin-New York, (1988).
- [CH] K.T. Chen, *Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point*, Amer. Journal Math., **85**, (1963) 693-722.
- [MS] Mohamed Samy ElBialy, *Linearization of vector fields near resonant hyperbolic rest points*, Journal Diff. Equations, **118**, (1995) 336-370.
- [N] R. Narasimham ,*Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, (1968).
- [P] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition* Springer Press, 2001.