



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

$(k,l)$ -ESTABILIDAD

# TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

OSBALDO MATA GUTIÉRREZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. GLORIA LETICIA BRAMBILA PAZ

MÉXICO, D.F.

NOVIEMBRE, 2010



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**POSGRADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**$(k,l)$ -ESTABILIDAD**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**P R E S E N T A**

**OSBALDO MATA GUTIÉRREZ**

**DIRECTORA DE TESIS: DRA. GLORIA LETICIA BRAMBILA PAZ**

**MÉXICO, D.F.**

**NOVIEMBRE, 2010**

# Índice general

---

<b>1. Haces vectoriales y gavillas coherentes</b>	<b>21</b>
1.1. Haces vectoriales . . . . .	21
1.1.1. Sucesiones exactas . . . . .	23
1.2. Cohomología de haces vectoriales . . . . .	25
1.3. Modificaciones de Hecke . . . . .	28
1.4. Estabilidad . . . . .	30
1.5. Filtraciones de Jordan-Hölder y Harder-Narasimhan . . . . .	34
1.6. Invariantes de Segre . . . . .	39
1.6.1. Invariantes de Segre para haces vectoriales de rango superior. . . . .	39
<b>2. <math>(k, l)</math>-estabilidad</b>	<b>47</b>
2.1. Introducción . . . . .	47
2.2. Definiciones y propiedades . . . . .	48
2.3. Región de existencia . . . . .	52
2.4. Haces vectoriales inestables . . . . .	65
2.5. Propiedades geométricas de $A_{(k,l)}(n, d)$ . . . . .	67
<b>3. <math>(k, l)</math>-estabilidad en rango dos</b>	<b>73</b>
3.1. $c$ -estabilidad para rango dos . . . . .	74
3.1.1. $c$ -estable . . . . .	74
3.1.2. Casos particulares . . . . .	79
3.2. Haces vectoriales inestables . . . . .	80
3.2.1. Espacio moduli $M^{ind}(2, d, \mathcal{O}_X, r)$ . . . . .	82
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>85</b>
4.1. Modificaciones de Hecke y $(k, l)$ -estabilidad . . . . .	85
4.2. Grassmanianas de Hecke . . . . .	91



*A mi familia.*



# Notación

---

$k$	Campo algebraicamente cerrado de característica cero.
$X$	Curva algebraica proyectiva, de género $g \geq 2$ sobre $k$ .
$E$	Haz vectorial sobre $X$ .
$E_x$	Fibra de $E$ en el punto $x \in X$ .
$E^*$	Haz vectorial dual.
$\xi$	Haz lineal sobre $X$ .
$\mathbb{P}(E)$	Haz proyectivo asociado a $E$ .
$\mathcal{O}(x)$	Gavilla localmente libre asociada al divisor $x$ .
$L_x$	Haz lineal asociado a $\mathcal{O}(x)$ .
$d(E)$	Grado de $E$ .
$r(E)$	Rango de $E$ .
$\mu(E)$	Inclinación de $E$ .
$\mathcal{O}_x$	Gavilla rascacielos con soporte en el punto $x$ .
$M(n, d)$	Espacio moduli de haces vectoriales estables sobre $X$ , de rango $n$ y grado $d$ .
$\widetilde{M}(n, d)$	Espacio moduli de haces vectoriales semiestables sobre $X$ , de rango $n$ y grado $d$ .
$M(n, \xi)$	Espacio moduli de haces vectoriales estables de rango $n$ y determinante isomorfo a $\xi$ .
$gr(E)$	Graduación de $E$ .
$E^V$	Modificación de Hecke determinada por el espacio vectorial $V$ .
$\mathbb{G}(r, V)$	Grassmaniana de subespacios de $V$ con dimensión $r$ .
$mod_{n-r}(E, x)$	Modificaciones de Hecke definidas por una terna $(E, x, V)$ , donde $V \subset E_x$ subespacio de dimensión $n - r$ .
$s_m(E)$	El $m$ -invariante de Segre.
$s(E, F)$	Diferencia de Segre.
$M(n, d, m, s)$	Variedad Segre determinada por el $m$ -invariante de Segre igual a $s$ .



$A_{(k,l)}(n, d)$	Haces vectoriales $(k, l)$ -estables de rango $n$ y grado $d$ .
$A_c(2, d)$	Haces vectoriales $c$ -estables de rango dos y grado $d$ con $c = k + l$ .
$A_c^{in}(2, d)$	Haces vectoriales inestables y $c$ -estables de rango dos y grado $d$ .
$N_X(2, d, d_1)$	Clases de isomorfismo de haces vectoriales inestables sobre $X$ con tipo de Harder-Narasimhan $d_1$ .
$N_X(2, d, d_1, r)$	Clases de isomorfismo de haces vectoriales inestables sobre $X$ con tipo de Harder-Narasimhan $d_1$ y dimensión del álgebra de endomorfismos igual a $r + 1$ .
$B_X(1, d, r)$	Variedad de Brill-Noether determinada por los haces lineales con al menos $r$ secciones.
$M^{ind}(2, d, \mathcal{O}_X, r)$	Espacio moduli de haces vectoriales inestables de rango dos, grado $d$ , con subhaz de Harder-Narasimhan $\mathcal{O}_X$ y dimensión del álgebra de endomorfismos igual a $r + 1$ .
$M_X^{ind}(2, d, d_1, r)$	Espacio moduli de haces vectoriales inestables de rango dos, grado $d$ , con tipo de Harder-Narasimhan $d_1$ y dimensión del álgebra de endomorfismos igual a $r + 1$ .
$mod_{n-r}(E)$	Modificaciones de Hecke de $E$ sin puntos fijos en la curva.
$\Psi_{E_x}$	Morfismo definido por las modificaciones de Hecke de $E$ en el punto $x$ .
$\Psi_E$	Morfismo definido por las modificaciones de Hecke de $E$ sin puntos fijos.

# Resumen

---

El objetivo de esta tesis es estudiar los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables de rango  $n$  y grado  $d$  sobre una curva algebraica  $X$  de género  $g \geq 2$ , proyectiva, no singular, definida sobre un campo  $k$  algebraicamente cerrado y de característica cero.

Un haz vectorial  $E$  sobre  $X$  es  $(k, l)$ -estable si para cualquier subhaz propio  $F \subset E$  se cumple la desigualdad

$$\frac{d(E) + k - l}{r(E)} > \frac{d(F) + k}{r(F)}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Este concepto se debe a Narasimhan y Ramanan (véase [23, 24]). Al conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables sobre  $X$  lo denotamos por  $A_{(k,l)}(n, d)$ .

En principio la  $(k, l)$ -estabilidad coincide con el concepto de estabilidad dada por Mumford únicamente en el caso  $(k, l) = (0, 0)$ . Nuestro objetivo es considerar la  $(k, l)$ -estabilidad para cualquier pareja de enteros  $(k, l)$ . Para los casos  $(k, l) \neq (0, 1), (1, 0)$  y  $(1, 1)$  no existía un estudio previo.

Para rango  $n$  y grado  $d$  fijos, determinamos las condiciones numéricas necesarias y suficientes sobre el género  $g$  de  $X$  y los pares  $(k, l)$ ; para la existencia de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables. Obtenemos las hipótesis necesarias para que la  $(k, l)$ -estabilidad implique estabilidad en el sentido de Mumford.

Narasimhan y Ramanan mostraron que la  $(k, l)$ -estabilidad es una propiedad abierta, por lo que define un abierto de Zariski en el espacio moduli  $M(n, d)$ . En este caso describimos la codimensión de la subvariedad  $(A_{(k,l)}(n, d))^c$ , considerando el complemento con respecto de  $M(n, d)$ .

Con la  $(k, l)$ -estabilidad determinamos la filtración de Jordan-Hölder de los haces vectoriales semiestables no estables de rango mayor que dos. Esto nos permite distinguir entre haces vectoriales semiestables y  $S$ -equivalentes.

En el caso de los haces vectoriales inestables de rango dos la filtración de Harder-Narasimhan determina la  $(k, l)$ -estabilidad.

Finalizamos usando la  $(k, l)$ -estabilidad para construir variedades grassmanianas en el espacio moduli  $M(n, d)$  las cuales pasan por un punto general. Las grassmanianas obtenidas son una generalización a las curvas de Hecke definidas en [24].

# Introducción

---

Nosotros trabajamos sobre una curva algebraica proyectiva  $X$  de género  $g \geq 2$ , no singular definida sobre un campo  $k$  algebraicamente cerrado de característica cero.

Al considerar los haces vectoriales sobre  $X$ , Mumford determinó la noción de haz vectorial estable. Además concluyó que las clases de isomorfismo de haces vectoriales estables de rango  $n$  y grado  $d$  tienen una estructura de variedad cuasiproyectiva  $M(n, d)$  (veáse [22]). Para los haces vectoriales semiestables de rango  $n$  y grado  $d$ , Seshadri introdujo el término de  $S$ -equivalencia. Con ella construyó una variedad proyectiva  $\widetilde{M}(n, d)$  la cual es la compactificación del espacio  $M(n, d)$  (veáse [32]).

Para enteros  $k, l$  Narasimhan y Ramanan en [23] introdujeron el concepto de  $(k, l)$ -estabilidad.

Un haz vectorial  $E$  sobre  $X$ , de rango  $r(E)$  y grado  $d(E)$  es  $(k, l)$ -estable si para cualquier subhaz  $F$  se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{d(E) + k - l}{r(E)} > \frac{d(F) + k}{r(F)}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Si la desigualdad no es estricta, entonces  $E$  es  $(k, l)$ -semiestable.

Antes de continuar, es importante aclarar lo siguiente. La  $(0, 0)$ -estabilidad coincide con la noción de estabilidad dada por Mumford, sin embargo para  $(k, l) \neq (0, 0)$ , la  $(k, l)$ -estabilidad no equivale a la estabilidad de Mumford. Aunque es de esperar, dada la naturaleza de la definición, que exista cierta

relación entre ambos conceptos a priori distintos.

Narasimhan y Ramanan probaron que para cualquier familia de haces vectoriales sobre  $X$  parametrizada por una variedad  $T$ , el conjunto de haces  $(k, l)$ -estables determina un abierto de Zariski en  $T$ , es decir la  $(k, l)$ -estabilidad es una propiedad abierta (vea, [24, Proposición 5.3]). Además dieron las condiciones para la existencia de los haces vectoriales  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$  estables en [24, Proposición 5.4].

Por lo anterior, si denotamos por  $Bun_X^{ind}(n, d)$  el moduli stack de haces vectoriales indescomponibles de rango  $n$  y grado  $d$  sobre  $X$ . Entonces  $A_{(k,l)}(n, d)$  es un substack abierto de  $Bun_X(n, d)$ .

Los haces vectoriales  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ -estables han sido utilizados en los siguientes casos:

- Narasimhan y Ramanan construyeron una desingularización para el espacio moduli de haces vectoriales estables de rango dos y determinante isomorfo a  $\xi$ , el cual se denota por  $M(2, \xi)$  (ver [24, Teorema 8.14]).
- Hwang utilizó los haces vectoriales  $(1, 1)$ -estables para demostrar que el haz tangente al espacio moduli  $M(2, d)$  con  $d$  impar es un haz vectorial estable (vea [12, Teorema 1]).
- Biswas, Brambila, Gómez y Newstead usaron los haces vectoriales  $(0, 1)$ -estables para demostrar que el haz de Picard de  $M(n, \xi)$  es estable (veáse [2]).
- Choe, Kiem, Mok y Sun, utilizaron los haces vectoriales  $(1, 1)$ -estables para estudiar las curvas racionales de grado mínimo que pasan por un punto general de  $M(2, d)$ , (ver [35]).

El objetivo de esta tesis es:

Estudiar el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables de rango  $n$  grado  $d$  para cualquier pareja de enteros  $(k, l)$ . En particular, determinar las condiciones para la no vacuidad y su relación con los haces vectoriales tanto estables como semiestables en el sentido de Mumford.

A continuación damos un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo.

Como primer paso, tomamos  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con coordenadas  $(k, l)$  y le llamaremos el  $(k, l)$ -plano. Sobre el definimos las siguientes regiones (véanse las ecuaciones (2.6) y (2.15) del texto):

- $R := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} (n-1)k + l < (n-1)(g-1) \quad \text{y} \\ k + (n-1)l < (n-1)(g-1) \end{array} \right\},$
- $R_0 := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} (n-1)k + l \geq (n-1)g \quad \text{y} \\ k + (n-1)l \geq (n-1)g \end{array} \right\}.$

Como se verá en el teorema siguiente, la región  $R_0$  carece de interés pues para  $(k, l) \in R_0$  probaremos que no existen haces vectoriales  $(k, l)$  estables. En cambio  $R$  es la región que interesa, ya que si  $(k, l) \in R$ , entonces el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es no vacío. Para las parejas  $(k, l) \in R$  la relación entre la estabilidad y la  $(k, l)$ -estabilidad dependerá de las siguientes subregiones de  $R$  (véanse (2.16), (2.18), (2.21) y (2.22) de la Sección 2.3):

- $R_1 := \left\{ (k, l) \in R \mid \begin{array}{l} (n-1)(g-1) > (n-1)k + l \geq 0 \quad \text{y} \\ (n-1)(g-1) > k + (n-1)l \geq 0 \end{array} \right\},$
- $R_2 := \{(k, l) \in R \mid k(n-1) + l \leq 0 \quad \text{y} \quad k + (n-1)l \leq 0 \}.$
- $R_3 = R_{3k} \cup R_{3l}$ , donde

$$R_{3k} := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} 0 < k(n-1) + l < (n-1)(g-1), \\ k + l(n-1) < 0 \end{array} \right\},$$

$$R_{3l} := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} 0 < k + l(n-1) < (n-1)(g-1), \\ k(n-1) + l < 0 \end{array} \right\},$$

Todas las regiones se muestran en la Figura 1.

En el siguiente resultado precisamos la vacuidad o no vacuidad del conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  y la relación entre la  $(k, l)$ -estabilidad y la estabilidad.

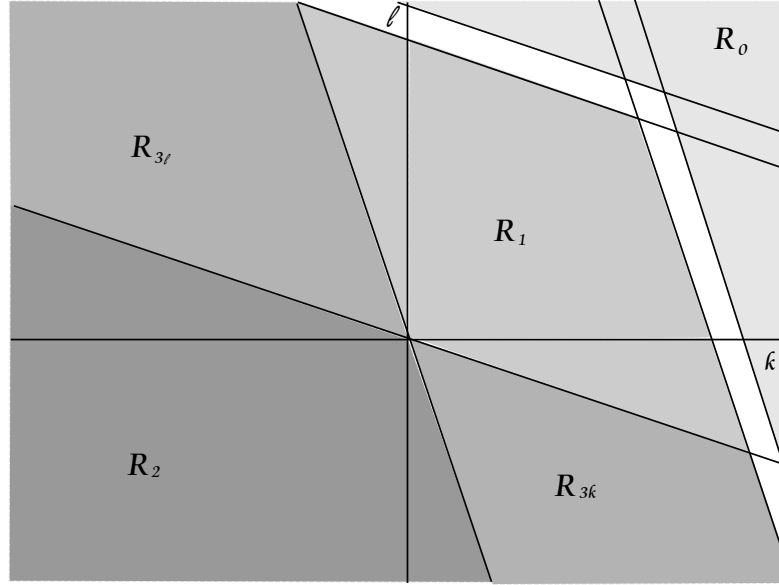


Figura 1: Regiones.

**Teorema, 2.4.2.** Sea  $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $A_{(k,l)}(n, d)$  el conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables de rango  $n$  y grado  $d$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. Para  $(k, l) \in R_0$ , el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es vacío, es decir

$$A_{(k,l)}(n, d) = \emptyset.$$

2. Para  $(k, l) \in R$ , el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es distinto del vacío, es decir

$$A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset.$$

En particular

$$A_{(k,l)}(n, d) \cap M(n, d) \neq \emptyset.$$

3. Para  $(k, l) \in R_1 \subset R$ , la  $(k, l)$ -estabilidad implica estabilidad así:

$$A_{(k,l)}(n, d) \subsetneq M(n, d).$$

En este caso  $A_{(k,l)}(n, d)$  es un abierto de  $M(n, d)$ .

4. Para  $(k, l) \in R_2 \subset R$ , se tiene que todo haz vectorial estable está en  $A_{(k,l)}(n, d)$ , esto es

$$A_{(k,l)}(n, d) \supsetneq M(n, d).$$

5. Para  $k \geq 1$ , si  $E$  es semiestable entonces  $E \in A_{(-k,-k)}(n, d)$ .

Ahora discutiremos los casos cuando  $(k, l) \in R_3$ .

Para  $(k, l) \in R_{3k} \cup R_{3l}$  la  $(k, l)$ -estabilidad determina el tipo de filtración de los haces vectoriales estrictamente semiestables. A continuación desarrollamos ello para el primer valor interesante del rango.

Tomamos  $E$  un haz vectorial de rango tres estrictamente semiestable, entonces la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  asume alguno de los siguientes tipos:

*Tipo 1*,  $(0 \subset L \subset E)$ . Para todo subhaz lineal  $L_0 \subset E$ ,  $\mu(E) - \mu(L_0) \geq 0$  y para todo subhaz de rango dos  $F_0 \subset E$  se cumple  $\mu(E) - \mu(F_0) > 0$ .

*Tipo 2*,  $(0 \subset F \subset E)$ . Para todo subhaz lineal  $L_0 \subset E$ ,  $\mu(E) - \mu(L_0) > 0$  y para todo subhaz de rango dos  $F_0 \subset E$  se cumple  $\mu(E) - \mu(F_0) \geq 0$ .

*Tipo 3*,  $(0 \subset L \subset F \subset E)$ . Para todo subhaz lineal  $L_0 \subset E$  se cumple  $\mu(E) - \mu(L_0) \geq 0$  y para todo subhaz de rango dos  $F_0 \subset E$  se cumple  $\mu(E) - \mu(F_0) \geq 0$ .

Con esta descripción obtenemos el:

**Teorema 2.3.9.** *Sea  $E$  un haz vectorial semiestable no estable de rango tres, entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

1.  $E$  es  $(k, l)$ -estable para algún  $(k, l) \in R_{3k}$  si y solo si la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  es de tipo 1.
2.  $E$  es  $(k, l)$ -estable para algún  $(k, l) \in R_{3l}$  si y solo si la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  es de tipo 2.
3. Para todo  $(k, l) \in R_{3k} \cup R_{3l}$ ; el haz vectorial  $E$  no es  $(k, l)$ -estable si y solo si la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  es de tipo 3.



El teorema anterior se generaliza de manera natural a rangos mayores (vea Observación 2.3.10).

Ahora estudiamos las propiedades de  $A_{(k,l)}(n, d)$  cuando  $(k, l) \in R_1$  y  $n \geq 2$ . Recordemos que en este caso todo haz vectorial  $(k, l)$ -estable es estable.

Dado un haz vectorial  $E$  y un entero  $m$  tal que  $1 \leq m \leq n-1$ , el  $m$ -invariante de Segre de  $E$  se define como la diferencia

$$s(E) = d(E)m - n \max\{d(F)\},$$

donde el máximo se toma de entre todos los subhaces de  $E$  de rango  $m$ . El  $m$ -invariante de Segre determina las subvariedades en el espacio moduli definidas como sigue:

$$M(n, d, s, m) := \{E \in M(n, d) \mid s_m(E) = s\},$$

estas se describen con más detalle en la Definición 1.6.8.

Usando los invariantes de Segre damos las condiciones para que un haz vectorial estable sea  $(k, l)$ -estable. Además demostramos la siguiente igualdad entre el conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables y las subvariedades definidas por los invariantes de Segre.

$$A_{(k,l)}(n, d) = \bigcap_{m=1}^{n-1} \left( \bigcup_{s > (n-m)k+ml} M(n, d, m, s) \right).$$

(vea, Proposición 2.5.5). Considerando esta igualdad obtenemos el:

**Teorema 2.5.7.** Si  $(k, l) \in R_1$  y  $\widetilde{s}_m, s_\Delta$  son los valores enteros

$$\widetilde{s}_m := \max\{s \mid s \leq k(n-m) + ml, s \equiv md \pmod{n}\}$$

y

$$s_\Delta := \min_m \{m(n-m)(g-1) - \widetilde{s}_m\}.$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

1.  $\dim (A_{(k,l)}(n, d))^c = n^2(g-1) + 1 - s_\Delta,$

$$2. \text{ cod } (A_{(k,l)}(n, d))^c = s_\Delta.$$

Donde el complemento es tomado con respecto de  $M(n, d)$ .

En la Proposición 2.2.7 demostramos que los conjuntos  $A_{(k,l)}(n, d)$  cumplen las contenciones siguientes

$$\begin{aligned} A_{(k,l)}(n, d) &\subseteq A_{(k,l-1)}(n, d), \\ A_{(k,l)}(n, d) &\subseteq A_{(k-1,l)}(n, d). \end{aligned}$$

Para el caso rango dos, los resultados son:

Mostramos que la  $(k, l)$ -estabilidad depende de la suma  $k + l$ , ya que la desigualdad (1) equivale a

$$\mu(E) - \mu(L) > \frac{k + l}{2}.$$

De esta manera

$$A_{(k,l)}(2, d) = A_{(k',l')}(2, d), \quad \text{si } k + l = k' + l'.$$

(véase (3.2) en la Sección 3.1.1). Lo anterior implica que si  $k + l > 0$ , entonces ambos definen la misma subvariedad en el moduli  $M(2, d)$ .

En consecuencia, para simplificar notación sustituimos el término de  $(k, l)$ -estabilidad por  $c$ -estabilidad, con  $c := k + l$  y escribimos  $A_c(2, d)$  en lugar de  $A_{(k,l)}(2, d)$  como el conjunto de haces vectoriales  $c$ -estables de rango dos y grado  $d$ .

Determinamos los valores de  $c$  para los cuales todo haz vectorial de rango dos y grado  $d$  es  $c$ -estable, es decir  $Bun_X^{ind}(2, d) = A_c(2, d)$  (ver Proposición 3.2.3). Como consecuencia, se tiene la contención

$$A_c(2, d) \subseteq A_{c-1}(2, d),$$

lo que genera la filtración:

$$\emptyset = A_{g-1}(2, d) \subseteq A_{g-2}(2, d) \subseteq \cdots \subseteq A_1(2, d) \subseteq A_0(2, d) = M(2, d) \subseteq$$

$$\subseteq A_1(2, d) \subseteq A_2(2, d) \subseteq \cdots \subseteq A_{2-2g}(2, d) = A_{1-2g}(2, d) = \text{Bun}_X^{\text{ind}}(n, d).$$

Las contenciones no son necesariamente estrictas, las condiciones para ello se explican en las proposiciones 3.1.6 y 3.1.7.

Las regiones en el  $(k, l)$ -plano que definimos anteriormente, se reescriben usando la  $c$ -estabilidad como sigue:

*Caso  $g \equiv d \pmod{2}$ .*

- $R_0 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \geq g\},$
- $R := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq g - 1\},$
- $R_1 := \{c \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq c \leq g - 1\},$
- $R_2 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq 0\},$

*Caso  $g \not\equiv d \pmod{2}$ .*

- $R_0 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \geq g - 1\},$
- $R := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq g - 2\},$
- $R_1 := \{c \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq c \leq g - 2\},$
- $R_2 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq 0\}.$

Así los Teoremas 2.4.2 y 2.5.7 quedan enunciados como sigue:

**Teorema, 3.1.10.** *Sea  $A_c(2, d)$  con  $c \in \mathbb{Z}$  el conjunto de haces vectoriales  $c$ -estables de rango dos y grado  $d$ , entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si  $c \in R$ , entonces  $A_c(2, d) \neq \emptyset$ .*
2. *Si  $c \in R_0$ , entonces  $A_c(2, d) = \emptyset$ .*
3. *Si  $c \in R_1$ , entonces  $A_c(2, d) \subseteq M(n, d)$ .*
4. *Si  $c \in R_2$ , entonces  $A_c(2, d) \supset M(2, d)$ .*

5. Si  $c < 0$ , entonces todo haz vectorial semiestable es  $c$ -estable.

Además en rango dos, podemos hacer el cálculo explícito de las codimensiones de  $(A_c(2, d))^c$  ya que solo dependerán de los subhaces lineales.

**Teorema 3.1.12.** Para  $c \in R_1$ , la dimensión y codimensión de los haces vectoriales estables que no son  $c$ -estables es:

$$\dim (A_c(2, d))^c = \begin{cases} 3g + c - 2, & \text{si } c \equiv d \pmod{2} \\ 3g + c - 3, & \text{si } c \not\equiv d \pmod{2}, \end{cases}$$

y

$$\text{cod} (A_c(2, d))^c = \begin{cases} g + c - 1, & \text{si } c \equiv d \pmod{2} \\ g + c - 2, & \text{si } c \not\equiv d \pmod{2}. \end{cases}$$

Donde el complemento es tomado con respecto al espacio moduli  $M(n, d)$ .

Si  $c > 0$  y  $A_c(2, d) \setminus A_{c+1}(2, d) \neq \emptyset$ , entonces probamos la igualdad

$$A_c(2, d) \setminus A_{c+1}(2, d) = M(2, d, 1, c + 1).$$

(veáse Proposición 3.1.11).

Para completar el caso de los haces vectoriales  $c$ -estables de rango dos y grado  $d$ , tomamos en cuenta los haces vectoriales inestables. Denotamos por  $N(2, d)$  al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales inestables de rango dos y grado  $d$ .

Todo haz vectorial  $E$  inestable de rango dos y grado  $d$  tiene un único subhaz lineal  $L$  que lo desestabiliza, es decir; de inclinación estrictamente mayor. Al haz lineal  $L$  se le conoce como el *subhaz de Harder-Narasimhan de  $E$*  y al grado de  $L$  se le llama el *tipo de Harder-Narasimhan de  $E$* .

En [4] se hace la clasificación de  $N(2, d)$  fijando el tipo de Harder Narasimhan, y la dimensión del álgebra de endomorfismos. Representaremos por  $N(2, d, d_1, r)$  al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales inestables de rango dos grado  $d$ , con tipo de Harder Narasimhan  $d_1$  y dimensión del álgebra de endomorfismos igual a  $r + 1$  (en caso de no fijar el álgebra de endomorfismos se denota simplemente como  $N(2, d, d_1)$ ).

En [4, Proposición 7.5], se demostró que  $N(2, d, d_1, r)$  forma un stack algebraico representable por una variedad cuasi-proyectiva  $M^{ind}(2, d, d_1, r)$  (véase [4, Teorema 6.5]).

Denotamos por  $A_c^{in}(2, d)$ , al conjunto de haces vectoriales inestables,  $c$ -estables, de rango dos y grado  $d$ . Damos las relaciones entre los conjuntos  $N(2, d, d_1)$  y  $A_c^{in}(2, d)$  obteniendo el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.6.** *Para haces vectoriales inestables de rango dos y grado  $d$  se tienen las siguientes afirmaciones*

1. Si  $E \in N(2, d, d_1)$ , entonces  $E \in A_c^{in}(2, d)$  si y solo si  $c \leq d - 2d_1$ .
2. Si  $d$  es par, entonces  $c \geq -2$  implica  $A_c^{in}(2, d) = \emptyset$ .
3. Si  $d$  es impar, entonces  $c \geq -1$  implica  $A_c^{in}(2, d) = \emptyset$ .
4. Si  $c \leq 2 - 2g$ , entonces  $N(2, d) \subset A_c^{in}(2, d)$ .

Considerando el inciso 1 de este teorema, completamos la relación entre  $N(2, d, d_1)$  y  $A_c^{in}(2, d)$  con lo cual obtenemos el siguiente:

**Teorema 3.2.7.** Si  $c < -1$ , entonces

$$A_c^{in}(2, d) = \bigsqcup_{2d_1 < d - c} N(2, d, d_1).$$

donde  $\bigsqcup$  denota la unión disjunta.

Finalizamos nuestro trabajo, utilizando la  $(k, l)$ -estabilidad para determinar las grassmanianas de Hecke.

Tomamos  $E$  un haz vectorial estable,  $(k, l)$ -estable tal que  $(k, l), (k-r, l-r) \in R_1$ . Dada una terna  $(E, x, V)$  con  $x \in X$  y  $V \subset E_x$  un subespacio vectorial de dimensión  $n - r$ . Construimos un morfismo

$$\Psi_{(E_x^V)^*} : \mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*) \rightarrow M(n, \det(E)),$$

donde  $E^V$  es la modificación de Hecke definida por la terna  $(E, x, V)$  [35] (vea también nuestra Sección 1.3). Al conjunto de todas las modificaciones

de Hecke definidas por  $x \in X$  y algún subespacio de  $E_x$  de dimensión  $n - r$  lo denotamos por  $\text{mod}_{n-r}(E, x)$ . Si dejamos variar el punto y los subespacios vectoriales de dimensión  $n - r$  de la fibra correspondiente, entonces al conjunto de modificaciones de Hecke lo representamos por  $\text{mod}_{n-r}(E)$ . El morfismo  $\Psi_{(E^V)^*}$  tiene las siguientes propiedades.

**Teorema 4.2.8.** Si  $k(n - 1) + l + rn < g$ ,  $k + (n - 1)l + nr < g$  y  $k + l \geq 2r$ . Entonces para un haz vectorial general  $E \in M(n, d)$ , existe una grassmaniana de Hecke que pasa por  $E$ .

En el teorema anterior, entendemos por “general” que se cumple para cualquier haz vectorial contenido en un abierto de Zariski de  $M(n, d)$ .

A continuación hacemos un bosquejo de la construcción del morfismo  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  para un haz vectorial  $E$  de rango  $n$  y grado  $d$ .

Consideremos  $x \in X$  y  $V \subset E_x$  un subespacio vectorial de dimensión  $n - r$ . La aplicación lineal definida por el cociente  $E_x \rightarrow E_x/V$  determina un morfismo sobreyectivo de gavillas coherentes  $E \rightarrow (E_x/V) \otimes \mathcal{O}_x$ . Como  $X$  es una curva no singular, el kernel de este morfismo es una gavilla localmente libre. Por lo tanto, determina un haz vectorial el cual representamos por  $E^V$ .

Cada punto en  $\mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*)$  define un subespacio vectorial  $W \subset (E_x^V)^*$  de dimensión  $n - r$ . Denotamos por  $E^{V,W}$  la modificación de Hecke dada por la terna  $((E^V)^*, x, W)$ . De esta manera se cumple que  $(E^{V,W})^*$  es un haz vectorial estable siempre que  $(k - r, l - r) \in R_1$ . Con esta condición, la construcción anterior determina una familia de haces vectoriales estables parametrizada por  $\mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*)$  y por lo tanto se tiene el morfismo

$$\Psi_{(E_x^V)^*} : \mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*) \rightarrow M(n, \det(E)).$$

Probamos que  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  es inyectivo usando las propiedades de la  $(k, l)$ -estabilidad bajo modificaciones de Hecke.

Demostramos que si  $F$  es un haz vectorial  $(k, l - r)$ -estable con  $\det(F) = \det(E) \otimes \mathcal{O}(-rx)$  entonces  $h^0(X, \text{Hom}(F, E)) \leq 1$  y si existe un morfismo  $f : F \rightarrow E$  entonces este morfismo debe ser de rango máximo (ver Proposición 4.1.2). Por último demostramos que el morfismo  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  es un encaje considerando sucesiones exactas en cohomología.

A continuación hacemos una descripción capítulo por capítulo del presente trabajo.

En el *Capítulo 1*, damos un repaso general a la teoría de haces vectoriales: su definición, sucesiones exactas naturales en su estudio, una descripción sucinta de su cohomología. Presentamos sin demostración el teorema de Riemann-Roch y la dualidad de Serre. Describimos detalladamente las *modificaciones de Hecke* y como caso particular las *transformaciones elementales* de los haces vectoriales.

En la última sección presentamos una introducción a los invariantes de Segre. En el *Capítulo 2*, estudiamos las propiedades generales de  $(k, l)$ -estabilidad. Describimos las regiones  $R_i$  y damos la demostración de los Teoremas 2.4.2, 2.3.9 y 2.5.7.

En el *Capítulo 3* desarrollamos el caso rango dos, probamos las propiedades de  $(k, l)$ -estabilidad y determinamos su relación con los haces vectoriales inestables. En este capítulo demostramos los Teoremas 3.1.10, 3.1.12, 3.2.6, 3.2.6 y 3.2.7.

En el *Capítulo 4*, determinamos (como aplicación de la  $(k, l)$ -estabilidad) la generalización a la construcción dada por Narasimhan, Ramanan y Hwang. Haciendo uso de las grassmanianas de Hecke demostramos el Teorema 4.2.8.

---

# Capítulo 1

## Haces vectoriales y gavillas coherentes

---

Sección 1.1

### Haces vectoriales

En este capítulo presentamos los resultados de la teoría de gavillas y haces vectoriales que usaremos a lo largo del trabajo. El lector interesado en la teoría de gavillas coherentes puede consultar [5, 8, 10, 19, 31]. Para gavillas localmente libres de rango uno sugerimos [7, 19]. En el caso de haces vectoriales sobre curvas se tienen las referencias [33, 8, 19, 20, 28].

Nuestro principal objeto de estudio son los haces vectoriales, iniciemos con los siguientes conceptos.

**Definición 1.1.1.** Un *haz vectorial* de rango  $n$  sobre  $X$ , es una terna  $(E, p, X)$ , donde  $p : E \rightarrow X$  es un morfismo sobreyectivo de variedades algebraicas, tal que para todo punto  $x \in X$  se cumplen las siguientes propiedades.

1.  $E_x := p^{-1}(x)$  es un espacio vectorial  $k^n$ , llamada la fibra de  $E$  en  $x$ .
2. Existe una vecindad  $U$  de  $x$  y un isomorfismo  $\phi_U$  llamado *trivialización*, el cual hace conmutar el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times k^n \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$



donde  $p_1$  es la proyección al primer factor.

3. Si  $\phi_{U_i}$  y  $\phi_{U_j}$  son las trivializaciones respectivas a los abiertos  $U_i, U_j$  y  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces la *función de transición*  $\phi_{ji}$  es

$$\phi_{ji} := \phi_{U_j} \circ \phi_{U_i}^{-1} : (U_i \cap U_j) \times k^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times k^n.$$

Cuando no exista peligro de confusión nos referimos al haz vectorial  $(E, p, X)$  simplemente como  $E$ .

Todo haz vectorial  $E$  de rango  $n$  tiene asociados distintos haces vectoriales como lo son: el *haz vectorial determinante*  $\det(E) := \bigwedge^n(E)$ , el *haz proyectivo*  $\mathbb{P}(E)$ , el *haz vectorial dual*  $E^*$ . Si se tienen dos haces vectoriales  $E$  y  $F$  algunos de los haces vectoriales asociados son: *producto tensorial*  $E \otimes F$ , *suma directa*  $E \oplus F$ . Si además  $F$  es subhaz vectorial de  $E$ , entonces se tiene el *haz vectorial cociente*  $E/F$ . Dado un morfismo de haces vectoriales  $\phi : F \rightarrow E$  inyectivo, entonces  $\phi(F)$  es un subhaz vectorial de  $E$ . Para una definición detallada de estos haces el lector interesado puede consultar [1, 8, 10, 19, 28].

A continuación recordamos algunos resultado de la teoría de gavillas. Una referencia para estos temas es [7] y [8].

Toda gavilla localmente libre  $\mathcal{E}$  tiene asociado un haz vectorial (único salvo isomorfismo). A su vez cada haz vectorial  $E$  determina una gavilla localmente libre (única salvo isomorfismo) llamada *gavilla de secciones locales de  $E$* . Esto es, se tiene una relación uno a uno entre los haces vectoriales sobre  $X$  y las gavillas localmente libres, véase [7, Teorema 1, Sección 1].

El cociente de gavillas localmente libres sobre  $X$  es una gavilla localmente libre. El kernel de un morfismo de gavillas localmente libres es una gavilla localmente libre. Sin embargo, el cokernel de un morfismo de gavillas localmente libre no siempre es una gavilla localmente libre. Por este motivo es necesario introducir la categoría de *gavillas coherentes*. Recordemos que una gavilla coherente sobre  $X$  es localmente el cokernel de un morfismo de gavillas  $f : \mathcal{O}_X^m|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^n|_U$ , donde como es usual  $\mathcal{O}_X$  es la gavilla estructural sobre  $X$  y para el abierto  $U$   $\mathcal{O}_X|_U$  denota la restricción de la gavilla al abierto, véase [6, Sección 1 (d)].

Cualquier gavilla localmente libre es una gavilla coherente, sin embargo no toda gavilla coherente es localmente libre. El siguiente resultado determina el tipo de gavillas coherentes que hay sobre una curva  $X$ .

**Teorema 1.1.2.** [20, Proposición 8.37] *Sea  $R$  un anillo local regular de dimensión uno y  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado libre de torsión, entonces  $M$  es  $R$ -módulo libre.*

Las gavillas con torsión sobre una curva  $X$ , son gavillas con soporte finito. El teorema afirma que toda gavilla sin torsión es de hecho una gavilla localmente libre. La interpretación de este resultado es la siguiente:

Una gavilla  $\mathcal{E}$  sin torsión sobre una curva no singular  $X$  es localmente un módulo libre de torsión sobre un anillo local regular (pues la curva es no singular) de dimensión uno. El teorema implica que dicho módulo es libre. Es decir, la gavilla  $\mathcal{E}$  es localmente un módulo libre, esto implica que la gavilla es localmente libre.

Una consecuencia es que sobre una curva  $X$ , las gavillas coherentes son de la forma  $\mathcal{E} \oplus \tau$  con  $\mathcal{E}$  una gavilla localmente libre y  $\tau$  una gavilla con torsión.

Para un espacio vectorial  $W$  denotamos por  $W \otimes \mathcal{O}_x$  a la gavilla skyscraper con soporte en  $x$  y fibra  $W$ , es decir la gavilla con torsión, soporte en el punto  $x$  fibra  $W$ .

Si  $D = \sum_{i=1}^s a_i x_i$ ,  $x_i \in X$  y  $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , es un divisor sobre la curva  $X$  asociado al haz lineal  $L$ , entonces el grado de  $L$  se define como el grado del divisor  $D$ , es decir

$$d(L) := \deg(D) := \sum_{i=1}^s a_i.$$

**Definición 1.1.3.** El grado de un haz vectorial  $E$  de rango  $n \geq 2$ , es el grado de su haz determinante, esto es

$$d(E) := d(\det(E)).$$

### 1.1.1. Sucesiones exactas

Una *sucesión exacta corta de gavillas*, es una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}'' \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

de gavillas y morfismos de gavillas, tal que  $\phi$  es inyectivo,  $\psi$  es sobreyectivo y  $Im(\phi) = Ker(\psi)$ . A este tipo de sucesiones se le conoce también como *una extensión de  $\mathcal{E}''$  por  $\mathcal{E}'$* .

Cuando en la sucesión exacta las gavillas son localmente libres se tiene la siguiente propiedad: para cualquier punto  $x \in X$ , la restricción de la sucesión exacta a  $x$ , es una sucesión exacta de espacios vectoriales,

$$0 \longrightarrow (E_1)_x \xrightarrow{i_x} (E_2)_x \xrightarrow{p_x} (E_3)_x \longrightarrow 0,$$

donde  $i_x$  y  $p_x$  son las restricciones a la fibra de los morfismos  $i$  y  $p$  respectivamente.

El siguiente es un ejemplo de sucesiones exactas de haces vectoriales el cual tomará importancia en la Sección 1.3.

**Ejemplo 1.1.4.** Tomamos una haz vectorial  $E$  y un punto  $x \in X$ . La subgavilla localmente libre  $\mathfrak{m}_x E$  es, por definición, la gavilla de secciones de  $E$  que se anulan en  $x$ , es decir la gavilla asociada a la pregavilla

$$\mathfrak{m}_x E(U) = \{s \in E(U) \mid s(x) = 0\}.$$

Consideramos la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x E \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} (E/\mathfrak{m}_x E) \longrightarrow 0, \quad (1.2)$$

donde  $i$  es la inclusión de gavillas y  $\pi$  un morfismo sobreyectivo de gavillas definido como

$$\pi(U) : E(U) \rightarrow (E/\mathfrak{m}_x E)(U),$$

con  $\pi(U)$  el morfismo cero si  $x \notin U$  y la identidad en otro caso. Así (1.2) es una sucesión exacta corta de gavillas. En particular la gavilla  $E/\mathfrak{m}_x E$  es la gavilla de torsión con soporte en el punto  $x$  y fibra igual a  $E_x$ .

Haciendo uso de las sucesiones exactas cortas de haces vectoriales podemos descomponer cualquier morfismo de haces por un morfismo de rango máximo, como sigue:

**Definición 1.1.5.** Sea  $f : E \rightarrow F$  un morfismo de haces vectoriales de rango  $n$ . Decimos que  $f$  es de *rango máximo* si

$$\wedge^n f : \wedge^n E \rightarrow \wedge^n F.$$

es un morfismo no cero.

Cuando el morfismo  $f$  no es de rango máximo, existe una descomposición de  $f$ , (véase [25, Proposición 4.3]) de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Ker(f) & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_1/Ker(f) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow \phi \\ & & & & E_2 & \longleftarrow & \overline{Im(f)} \longleftarrow 0 \\ & & & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ 0 & \longleftarrow & E_2/Im(f) & \longleftarrow & E_2 & \longleftarrow & \overline{Im(f)} \longleftarrow 0, \end{array}$$

donde los renglones son sucesiones exactas cortas de haces vectoriales y  $\phi$  es de rango máximo. En general la imagen de un morfismo de haces vectoriales no es un haz vectorial, por lo que en el diagrama anterior  $\overline{Im(f)}$  denota la saturación de  $Im(f)$  en  $E_2$ .

Recordemos que la saturación está definida como el kernel de la siguiente composición de morfismos

$$E \rightarrow (E/Imf) \rightarrow (E/Imf)/t(E/Imf)$$

siendo  $t(E/Imf)$  la torsión de  $(E/Imf)$ .

Sección 1.2

## Cohomología de haces vectoriales

Dada una gavilla coherente  $\mathcal{E}$  sobre una variedad proyectiva  $Y$ , denotamos por  $H^i(X, \mathcal{E})$  al  $i$ -ésimo grupo de cohomología de Čech. Para una

construcción de estos espacios referirse a [31, Capítulo 1, Sección 15] ó [7, Capítulo 3]. Al respecto recordamos algunos resultados importantes.

Si  $Y$  es una variedad proyectiva de dimensión  $r$ , entonces

$$H^k(Y, \mathcal{E}) = 0, \text{ para } k > r$$

(ver, [31, pág. 214]).

Para toda sucesión exacta corta de gavillas sobre  $Y$  de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0,$$

existe una sucesión exacta larga de grupos de cohomología asociada

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Y, \mathcal{E}') \rightarrow H^0(Y, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{E}'') \rightarrow H^1(Y, \mathcal{E}') \rightarrow \\ \rightarrow H^1(Y, \mathcal{E}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{E}'') \rightarrow H^2(Y, \mathcal{E}') \rightarrow H^2(Y, \mathcal{E}) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

(ver, [31, Proposición 5]).

Existe una relación biyectiva entre los puntos del espacio  $H^0(Y, \mathcal{E})$  y las secciones globales de  $\mathcal{E}$ , (véase [7, Lema 4]). Además los grupos de cohomología  $H^q(Y, \mathcal{E})$  son espacios vectoriales de dimensión finita [7, Teorema 7]. La dimensión de estos espacios la denotamos por  $h^q(Y, \mathcal{E})$ .

Si  $\tau$  denota una gavilla con torsión sobre una curva  $X$ , entonces  $h^0(Y, \tau) \geq p$  y  $h^1(Y, \tau) = 0$ , donde  $p$  es el número de puntos en el soporte de  $\tau$ .

Para cualquier gavilla coherente  $\mathcal{E}$ , las dimensiones de los grupos de cohomología determinan la siguiente

**Definición 1.2.1.** La *característica de Euler* de una gavilla coherente  $\mathcal{E}$  sobre una variedad  $Y$  es

$$\chi(\mathcal{E}) := \sum_i (-1)^i h^i(Y, \mathcal{E})$$

En caso de que  $\mathcal{E}$  es una gavilla coherente sobre una curva  $X$ , se tiene

$$\chi(\mathcal{E}) = h^0(X, \mathcal{E}) - h^1(X, \mathcal{E}).$$

La característica de Euler tiene propiedades aditivas bajo sucesiones exactas de gavillas coherentes (véase [27, Página 129]). Si tomamos una extensión  $0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ , entonces  $\chi(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}_1) + \chi(\mathcal{E}_2)$ .

**Definición 1.2.2.** Si fijamos un haz vectorial amplio  $\mathcal{O}(1)$ , entonces el polinomio de Hilbert de  $\mathcal{E}$  se define como  $\chi(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(1)^t)$ , siendo  $t$  una variable con valores en los enteros positivos.

En general, el producto tensorial  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(1)^t$  se denotará por  $\mathcal{E}(t)$ .

En particular si  $Y$  es una curva algebraica proyectiva no singular,  $E$  un haz vectorial sobre  $Y$  y  $L$  un haz lineal de grado uno. Denotamos por  $L^t$  el producto tensorial de  $t$  copias de  $L$  y  $E(t) := E \otimes L^t$ . Entonces el *polinomio de Hilbert de  $E$*  es

$$\chi(E(t)) = t d(E) + n(1 - g).$$

El polinomio de Hilbert de  $E$  está completamente determinado por el rango y grado de  $E$ .

**Definición 1.2.3.** Una *familia de gavillas coherentes* sobre una curva  $X$  parametrizada por una variedad  $Y$  es una gavilla coherente  $\mathcal{E}$  sobre el producto  $X \times Y$ . Si  $y \in Y$ , entonces  $\mathcal{E}|_{X \times \{y\}}$  es una gavilla coherente sobre  $X$ .

Cuando no exista ambigüedad, denotaremos la restricción  $\mathcal{E}|_{X \times \{y\}}$  simplemente por  $\mathcal{E}_y$ .

**Proposición 1.2.4.** [28, Lema 4.4.4] *Para cualquier familia de gavillas coherentes  $\mathcal{E}$  sobre  $X$  parametrizadas por  $Y$ , existe un entero  $t_0$  tal que para todo  $t \geq t_0$  y todo  $y \in Y$ ,  $H^1(X, \mathcal{E}_{X \times \{y\}}(t)) = 0$ .*

Dos teoremas importantes que relacionan los grupos de cohomología son: el Teorema de Riemann-Roch sobre curvas y el Teorema de la dualidad de Serre. A continuación los enunciamos sin demostración, el lector interesado puede ver las demostraciones en [6, 7, 20].

**Teorema 1.2.5.** (Riemann-Roch.) *Si  $E$  es un haz vectorial de rango  $n$  sobre una curva  $X$  de género  $g$ , entonces*

$$h^0(X, E) - h^1(X, E) = d(E) + n(1 - g).$$

**Teorema 1.2.6.** (*Dualidad de Serre.*) Si  $K_X$  denota al haz canónico sobre  $X$ , entonces

$$H^0(X, E) = H^1(X, K_X \otimes E^*)^*.$$

Sección 1.3

## Modificaciones de Hecke

Como hemos visto, dado un haz vectorial  $E$  podemos definir nuevos haces vectoriales por ejemplo, el haz dual asociado, el haz determinante entre otros. Existen otros tipos de haces vectoriales asociados a  $E$  definidos fijando más elementos, en esta sección describimos las *modificaciones de Hecke* de un haz vectorial (véase [35]).

Consideremos la terna  $(E, x, V)$  donde  $E$  es un haz vectorial de rango  $n$  y grado  $d$  sobre una curva  $X$ , un punto  $x \in X$  y  $V \subset E_x$  un subespacio vectorial de dimensión  $n - r$ . Una *modificación de Hecke de  $E$*  es un haz vectorial obtenido a partir de  $(E, x, V)$  mediante la siguiente construcción.

Tomamos el cociente  $E_x/V$  el cual es de dimensión  $r$ . La aplicación cociente es una aplicación lineal  $\tilde{f} : E_x \rightarrow E_x/V$ , la cual induce un morfismo de gavillas coherentes

$$\tilde{f} : E_x \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow (E_x/V) \otimes \mathcal{O}_x.$$

Sea  $\tilde{\pi} : E \rightarrow E_x \otimes \mathcal{O}_x$  el morfismo de valuación en la fibra  $x$ , entonces la composición de estos morfismos  $f := \tilde{f} \circ \tilde{\pi}$ , es un morfismo sobreyectivo de gavillas coherentes,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E_x \otimes \mathcal{O}_x \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & (E_x/V) \otimes \mathcal{O}_x. \end{array}$$

Dado que trabajamos sobre una curva  $X$ , por el Teorema 1.1.2 sabemos que la gavilla kernel de  $f$  es una gavilla coherente, libre de torsión y por lo tanto es un haz vectorial que denotamos por  $E^V$ . En consecuencia, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de gavillas coherentes

$$0 \longrightarrow E^V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} (E_x/V) \otimes \mathcal{O}_x \longrightarrow 0. \quad (1.3)$$

**Definición 1.3.1.** El haz vectorial  $E^V$  es la *modificación de Hecke* de  $E$  definido por la terna  $(E, x, V)$ .

**Observación 1.3.2.** Notemos que las modificaciones de Hecke también son parametrizadas por ternas del tipo  $(E, x, f)$  siendo  $f$  una aplicación lineal de  $E_x$  en  $k^r$ . Mas aún cada terna  $(E, x, V)$  como antes, determina una terna  $(E, x, f)$  tomando a  $f$  como el anulador de  $V$ .

**Observación 1.3.3.** De la sucesión (1.3) se tienen las siguientes afirmaciones

1.  $r(E^V) = r(E)$  y  $d(E^V) = d(E) - r$ .
2. Si  $\det(E) = L$ , entonces  $\det(E^V) = L \otimes \mathcal{O}(-rx) = L(-rx)$ .

**Definición 1.3.4.** Dado un haz vectorial  $E$ , al conjunto de modificaciones de Hecke de  $E$  determinadas por ternas  $(E, x, V)$  con  $V$  de dimensión  $n - r$ , lo denotaremos por  $\text{mod}_{n-r}(E, x)$ . Si dejamos variar el punto, las representaremos por  $\text{mod}_{n-r}(E)$ .

**Observación 1.3.5.** El nombre modificación de Hecke viene de la notación usada en [35]. Sin embargo en [36, Definición 6] es llamada operación elemental de grado  $r$ . En otros artículos es conocida como transformación elemental de grado  $r$  (véase [3]). El autor de esta tesis optó por el nombre: modificación de Hecke, para evitar confusión entre el grado de la operación (transformación) elemental y el grado del haz vectorial.

**Proposición 1.3.6.** *Existe una biyección entre el conjunto  $\text{mod}_{n-r}(E)$  y la grassmaniana  $\mathbb{G}(n - r, E)$ .*



**Demostración.** Es suficiente probar la biyección fijando un punto  $x \in X$ , es decir, demostrar la biyección entre el conjunto  $\text{mod}_{n-r}(E, x)$  y  $\mathbb{G}(n-r, E_x)$ . Por definición, toda modificación de Hecke en el punto  $x$  viene parametrizada por un punto  $V \in \mathbb{G}(n-r, E_x)$  y viceversa.

Dado dos punto distintos  $V, W \in \mathbb{G}(n-r, E_x)$  probaremos que  $E^V \neq E^W$ . Supongamos  $E^V = E^W$ , entonces se tienen las siguientes extensiones de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E_x^V \rightarrow E_x \rightarrow (E_x/E_x^V) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow E_x^W \rightarrow E_x \rightarrow (E_x/E_x^W) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esto implica que los cocientes

$$\frac{E_x}{V} = \frac{E_x}{E_x^V} = \frac{E_x}{E_x^W} = \frac{E_x}{W}$$

entonces  $V = W$ , lo cual es una contradicción por lo que  $E^V \neq E^W$ .  $\square$

En el caso  $r = n - 1$ , las modificaciones de Hecke son mejor conocidas como *transformaciones elementales*, las cuales fueron introducidas por Maruyama en [18].

**Observación 1.3.7.** Existe una biyección natural entre  $\mathbb{G}(n-r, E_x)$  y  $\mathbb{G}(r, E_x^*)$  luego entonces las modificaciones de Hecke también están en biyección con  $\mathbb{G}(r, E_x^*)$ . Note que por Observación 1.3.2, si  $(E, x, V)$  determina la modificación  $E^V$ , entonces la terna  $(E, x, f)$  con  $f$  el anulador de  $V$  determina un único punto en  $\mathbb{G}(r, E_x^*)$ .

Sección 1.4

## Estabilidad

A continuación haremos un repaso general del concepto de estabilidad de haces vectoriales sobre una curva  $X$ .

**Definición 1.4.1.** La *inclinación* de un haz vectorial  $E$  es el cociente entre el grado y rango, es decir

$$\mu(E) = \frac{d(E)}{r(E)}.$$

Tomamos  $E$  un haz vectorial sobre  $X$  de rango mayor que uno y  $F \subset E$  un subhaz vectorial. ¿Es la inclinación de  $F$  arbitrariamente grande? La respuesta la encontraremos en la Proposición 1.4.3 cuya demostración requiere de la siguiente

**Proposición 1.4.2.** [20, Corolario 10.9] *Si  $E$  es un haz vectorial de rango  $n$  y grado  $d$ , entonces el conjunto*

$$\{d(L) \mid L \subset E, \text{ subhaz lineal}\}$$

*está acotado superiormente.*

Ahora que sabemos que el grado de los subhaces lineales de  $E$  están acotados, usamos el resultado para mostrar que las inclinaciones de los subhaces de  $E$  están acotadas.

**Proposición 1.4.3.** [34, Lema 2] *Para un haz vectorial  $E$ , el conjunto*

$$\{\mu(F) \mid F \subset E\}$$

*está acotado superiormente.*

**Demostración.** Tomamos  $F$  un subhaz de rango  $m$  de  $E$ , entonces  $\wedge^m F$  es un subhaz lineal de  $\wedge^m E$ . Por la Proposición 1.4.2, los grados de los subhaces lineales de  $\wedge^m E$  están acotados superiormente. Como  $d(F) = d(\wedge^m F)$ , entonces la inclinación de los subhaces de rango  $m$  de  $E$  están también acotados superiormente. Lo anterior se cumple para toda  $m$  con  $1 \leq m \leq n-1$ , lo que implica que las inclinaciones de todos los subhaces están acotadas superiormente.  $\square$

Observe que en realidad la demostración prueba que el grado de cualquier subhaz vectorial de  $E$  está acotado.

El siguiente resultado relaciona las inclinaciones de los haces vectoriales que forman una sucesión exacta.

**Proposición 1.4.4.** *Si se tiene la sucesión exacta de haces vectoriales  $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0$  entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si  $\mu(F) < \mu(E)$  entonces  $\mu(E) < \mu(G)$ .*

2. Si  $\mu(F) \leq \mu(E)$  entonces  $\mu(E) \leq \mu(G)$ .
3. Si  $\mu(F) > \mu(E)$  entonces  $\mu(E) > \mu(G)$ .
4. Si  $\mu(F) \geq \mu(E)$  entonces  $\mu(E) \geq \mu(G)$ .

La prueba de esta proposición se obtiene tomando en cuenta las igualdades  $d(E) = d(F) + d(G)$  y  $r(E) = r(F) + r(G)$ .

En geometría algebraica es común que se consideren familias de los objetos que se estudian con el propósito de analizar sus propiedades. Es usual que las condiciones o propiedades definidas en familias no se cumplen para todos sus elementos. Las propiedades impuestas usualmente se cumplen para “casi” todos. Esto da pie a la siguiente:

**Definición 1.4.5.** Una *propiedad*  $P$  definida en haces vectoriales es una propiedad abierta, si para cualquier familia  $\mathbf{E}$  de haces sobre  $X$  parametrizada por una variedad  $Y$ , se cumple que el conjunto

$$\{y \in Y \mid \mathbf{E}_y, \text{ tiene la propiedad } P\},$$

es un abierto de Zariski de  $Y$ .

**Definición 1.4.6.** Un haz vectorial  $E$  es *estable* si todo subhaz propio  $F \subset E$  cumple:

$$\mu(E) > \mu(F). \tag{1.4}$$

Si la desigualdad no es estricta, entonces  $E$  es un haz vectorial *semiestable*. Los haces vectoriales que no son semiestables son llamados *inestables*.

A continuación describimos algunas propiedades de los haces estables y semiestables.

- Todo haz vectorial lineal es estable.
- Si  $E$  es estable entonces  $E \otimes L$  es estable para cualquier haz vectorial lineal  $L$ .

- Todo haz vectorial estable, es semiestable.
- Si el rango y grado son coprimos, todo haz semiestable es estable.
- La suma directa de haces vectoriales semiestables de la misma inclinación es un haz vectorial semiestable llamado *poliestable*.

La siguiente proposición dada por Seshadri, afirma que la estabilidad es una propiedad abierta.

**Proposición 1.4.7.** [25, Teorema 2] *En toda familia  $E$  de haces vectoriales sobre  $X$  parametrizada por una variedad  $Y$ , el conjunto de puntos  $y \in Y$  tal que  $E|_{X \times \{y\}}$  es estable (respectivamente semiestable) es un abierto de Zariski de  $Y$ .*

Al considerar la estabilidad, es posible establecer una relación entre la inclinación de un haz vectorial y su cohomología tal como en la siguiente

**Proposición 1.4.8.** *Si  $E$  es un haz vectorial sobre una curva  $X$  de género  $g$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si  $E$  es semiestable y  $d(E) < 0$ , entonces  $H^0(X, E) = 0$ .*
2. *Si  $E$  es semiestable y  $\mu(E) > 2g - 1$ , entonces  $H^1(X, E) = 0$ .*
3. *Si  $E$  es estable,  $\mu(E) \geq 2g - 2$ , y  $E \neq K_X$ , entonces  $H^1(X, E) = 0$ .*

Una propiedad importante que presentan los haces vectoriales estables es que son *simples*, esto es: los únicos endomorfismos son la identidad y múltiplos escalares de la identidad. En otras palabras, el espacio vectorial de morfismos de  $E$  en si mismo (denotado por  $End(E)$ ) es de dimensión uno. Esta afirmación se encuentra implícita en la siguiente

**Proposición 1.4.9.** [25, Proposición 4.3] *Suponga que  $E$  y  $F$  son haces vectoriales semiestables, del mismo rango y grado, tales que al menos uno de ellos es estable. Si  $f : E \rightarrow F$  es un homomorfismo no cero, entonces  $f$  es un isomorfismo.*

Consideremos el conjunto de haces vectoriales estables fijando su rango y grado. Si consideramos la relación de equivalencia dada por el isomorfismo (que además es la natural) entonces no existen morfismos entre haces vectoriales pertenecientes a clases de equivalencia distintas. Además entre dos haces vectoriales de la misma clase el único morfismo posible es la identidad o un múltiplo escalar de esta. En este sentido, la proposición implica que la estabilidad es la propiedad buena para clasificar haces vectoriales y que los invariantes que se necesitan son el rango y grado.

Sección 1.5

## Filtraciones de Jordan-Hölder y Harder-Narasimhan

Como hemos visto en el estudio de los haces vectoriales, los subhaces juegan un papel importante. En gran medida los subhaces vectoriales determinan las propiedades del haz, como observamos en el caso de la estabilidad. Buscando herramientas más precisas se estudian los subhaces vectoriales mediante filtraciones, al final de la sección veremos que estas filtraciones determinan una relación de equivalencia entre haces vectoriales.

**Definición 1.5.1.** Para un haz vectorial  $E$ , decimos que  $F' \subset E$  es de *inclinación máxima*, si para cualquier otro subhaz  $F$  de  $E$  se tiene  $\mu(F) \leq \mu(F')$ .

Entre los subhaces vectoriales de inclinación máxima siempre podemos elegir uno que sea estable. Sin embargo, no es necesariamente único.

**Proposición 1.5.2.** *Para cualquier haz vectorial  $E$  existe un subhaz  $F'$  estable y de inclinación máxima.*

**Demostración.** Consideramos el conjunto de subhaces vectoriales

$$\mathfrak{M} := \{F \subset E \mid F \text{ subhaz de inclinación máxima}\}$$

y  $F' \in \mathfrak{M}$  del menor rango posible. Si  $G \subset F'$ , entonces  $G \notin \mathfrak{M}$  y en consecuencia  $\mu(G) < \mu(F')$ . Por lo tanto  $F'$  es un haz estable de inclinación máxima.  $\square$

Si se considera  $E$  un haz vectorial inestable, G. Harder y M.S. Narasimhan demuestran en [9] que existe un único subhaz semiestable  $F \subset E$  con inclinación mayor que la inclinación de  $E$ .<sup>1</sup>

**Proposición 1.5.3.** [9, Proposición 1.3.4] *Para todo haz vectorial  $E$  inestable, existe un único subhaz vectorial  $F$  semiestable tal que  $\mu(E) < \mu(F)$ . Es más,  $E/F$  es semiestable.*

Para el caso  $E$  no estable las proposiciones anteriores muestran el comportamiento de los subhaces vectoriales de  $E$ . La siguiente construcción estudia los subhaces vectoriales en el caso  $E$  semiestable.

Una *filtración creciente* de un haz vectorial  $E$ , es una colección de subhaces vectoriales  $\{E_i\}_{i=0}^r$  tal que

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_r = E. \quad (1.5)$$

**Definición 1.5.4.** Una filtración creciente  $\{E_i\}_{i=0}^r$  para un haz vectorial  $E$ , es una *filtración de Harder-Narasimhan* si se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\mu(E_{i+1}/E_i) < \mu(E_i/E_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ .
2.  $E_i/E_{i-1}$  es semiestable.

G. Harder y M. S. Narasimhan demostraron que para cualquier haz vectorial inestable la filtración de Harder-Narasimhan es única, (véase [9, Proposición 1.3.9]).

De las definiciones de filtración de Harder-Narasimhan e inclinación de un haz se tenemos:

---

<sup>1</sup>El haz semiestable es llamado SCSS (strongly contradicting semistability) por sus siglas en inglés.

**Proposición 1.5.5.** Si  $\{E_i\}_{i=0}^r$ , es una filtración de Harder-Narasimhan de  $E$ , entonces  $\mu(E_{i+1}) < \mu(E_i)$  para  $1 \leq i \leq r - 1$ .

Cuando  $E$  es semiestable la filtración de Harder-Narasimhan es la trivial,  $0 = E_0 \subset E$  y por lo tanto no aporta información alguna. Sin embargo podemos considerar la siguiente filtración.

**Definición 1.5.6.** Una filtración creciente  $\{E_i\}_{i=0}^r$  para un haz vectorial  $E$ , es una *filtración de Jordan-Hölder*, si para toda  $i$  se cumplen las siguientes propiedades.

1.  $\mu(E_{i+1}/E_i) = \mu(E)$ .
2.  $E_{i+1}/E_i$  son estables.

Si  $E$  es un haz vectorial estable, la filtración de Jordan-Hölder es  $0 = E_0 \subset E_1 = E$  y por lo tanto es única.

Seshadri demostró en [32, Proposición 3.1] que todo haz vectorial semiestable  $E$  tiene una filtración de Jordan-Hölder, sin embargo esta filtración no es única como podemos comprobarlo en el siguiente:

**Ejemplo 1.5.7.** 1. Si  $E := L_1 \oplus L_2$ , tal que  $L_1, L_2$  son haces vectoriales lineales con la misma inclinación y no isomorfos. Entonces,  $E$  es poliestable (por lo tanto semiestable) y se tienen dos filtraciones de Jordan-Hölder distintas

$$0 \subset L_1 \subset E,$$

y

$$0 \subset L_2 \subset E.$$

Para evitar el problema de la no unicidad de la filtración de Jordan-Hölder y determinar una estructura que describa el comportamiento de los subhaces vectoriales de un haz semiestable, Seshadri da la siguiente

**Definición 1.5.8.** La *graduación de un haz vectorial* semiestable  $E$ , asociada a una filtración de Jordan-Hölder  $\{E_i\}_{i=0}^r$ , es

$$\bigoplus_{i=0}^r (E_{i+1}/E_i).$$

La graduación  $\bigoplus_{i=0}^r (E_{i+1}/E_i)$  es un haz vectorial poliestable denotado por  $gr(E)$ . Seshadri demostró [32, Teorema 2.1] que la graduación no depende de la filtración.

**Observación 1.5.9.** Sea  $E$  un haz vectorial semiestable  $gr(gr(E)) \cong gr(E)$ . Si en particular  $E$  es estable,  $gr(E) = E$ .

Seshadri en [32, Sección 8] (vea también, [26, Sección 2]) introduce una relación de equivalencia para los haces semiestables.

**Definición 1.5.10.** Dos haces vectoriales semiestables  $E, F$  son *S-equivalentes* si sus graduaciones son isomorfas. En particular, dos haces vectoriales estables son *S-equivalentes* si y solo si son isomorfos.

Con esta relación de equivalencia, denotamos por  $\widetilde{M}(n, d)$  al conjunto de clases de haces vectoriales semiestables *S-equivalentes*, de rango  $n$  y grado  $d$  sobre una curva algebraica  $X$  de género  $g$ .

**Observación 1.5.11.** Por los trabajos de Narasimhan y Seshadri se tienen las siguientes propiedades para  $\widetilde{M}(n, d)$  y  $M(n, d)$ .

- $\widetilde{M}(n, d)$  es una variedad proyectiva de dimensión  $n^2(g - 1) + 1$ .
- $M(n, d)$  es una variedad cuasi-proyectiva no singular de dimensión  $n^2(g - 1) + 1$ .
- $M(n, d) \subset \widetilde{M}(n, d)$  y corresponde al conjunto de puntos no singulares de  $\widetilde{M}(n, d)$ .
- Si  $n$  y  $d$  son coprimos entonces  $\widetilde{M}(n, d) = M(n, d)$ .

Como referencia a estos resultados, el lector interesado puede consultar [25, 26, 32].

**Observación 1.5.12.** Mumford en [22] demostró usando G.I.T. que el espacio moduli  $M(n, d)$  de haces vectoriales estables es una variedad proyectiva.



Para cualquier espacio vectorial  $V$  de dimensión  $r$  denotamos por  $V \otimes \mathcal{O}_X$  (o simplemente  $V \otimes \mathcal{O}$  si no hay confusión) al haz vectorial trivial sobre  $X$  de rango  $r$  y fibra  $V$ .

Un haz vectorial  $E$  se dice que es *generado* por un subespacio  $V \subset H^0(X, E)$ , si el morfismo de valuación

$$\begin{aligned} V \otimes \mathcal{O} &\rightarrow E, \\ (x, s) &\mapsto (x, s(x)), \end{aligned}$$

es sobreyectivo. Si  $V = H^0(X, E)$  entonces se dice que  $E$  es *generado por sus secciones*.

Equivalentemente, un haz vectorial  $E$  es generado si para algún espacio vectorial  $V_0 \subset H^0(X, E)$  existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F \rightarrow V_0 \otimes \mathcal{O} \rightarrow E \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Cuando un haz vectorial  $E$  es generado, se puede escribir como un cociente del haz trivial de rango  $r$ , para algún entero  $r$ .

**Proposición 1.5.13.** *Sea  $E$  un haz vectorial semiestable de rango  $n$  y grado  $d$  sobre  $X$  de género  $g$  y  $\mu(E) > 2g - 1$ , entonces:*

1.  $E$  es generado por sus secciones.
2. Para  $r = d + n(1 - g)$  se tiene la sucesión exacta  $0 \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}^r \rightarrow E \rightarrow 0$ .

**Demostración.** (1) Para  $x \in X$  se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x E \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} (E/\mathfrak{m}_x E) \longrightarrow 0,$$

donde  $\mathfrak{m}_x E = \mathfrak{m}_x \otimes E$  y  $\mathfrak{m}_x$  la gavilla localmente libre definida por el ideal  $x$ . Sea  $L_x$  el haz vectorial lineal asociado a  $\mathfrak{m}_x$ , entonces  $E \otimes L_x$  es semiestable y  $\mu(E \otimes L_x) > 2g - 2$ . Por la Proposición 1.4.8 inciso 2,  $H^1(\mathfrak{m}_x E) = H^1(X, E \otimes L_x) = 0$ . Así la sucesión exacta en cohomología queda como

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{m}_x E) \longrightarrow H^0(X, E) \longrightarrow H^0(X, (E/\mathfrak{m}_x E)) \longrightarrow 0.$$

Observe que  $H^0(X, (E/\mathfrak{m}_x E))$  es isomorfo a la fibra  $E_x$ , y la construcción anterior es independiente del punto  $x$ . Por lo tanto para todo  $x \in X$ ,  $H^0(X, E)$

genera la fibra  $E_x$ . En consecuencia  $E$  es generado por sus secciones.

(2) Por el inciso uno de esta proposición, tenemos la extensión

$$0 \rightarrow F \rightarrow H^0(X, E) \otimes \mathcal{O} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Por Riemann-Roch se tiene que  $h^0(X, E) = d + n(1 - g)$ . Si definimos  $r := d + n(1 - g)$ , entonces se tiene

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}^r \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Ello implica que  $E$  es un cociente de  $\mathcal{O}^r$  como se deseaba.  $\square$

Al tomar  $E$  es un haz vectorial tal que  $\mu(E) \leq 2g - 1$ , siempre podemos encontrar un haz lineal  $L$  de grado positivo y un entero  $t$  tales que  $\mu(E(t)) > 2g - 1$  y por la Proposición 1.5.13  $E(t)$  es un cociente del haz trivial  $\mathcal{O}^r$ , con  $r = d + d(L)tn + n(1 - g)$ .

Observe que al fijar el haz lineal  $L$ , el valor  $r$  no depende del haz vectorial  $E$ , solo depende de  $n$  y  $d$ .

Sección 1.6

## Invariantes de Segre

### 1.6.1. Invariantes de Segre para haces vectoriales de rango superior.

Al considerar haces vectoriales de rango  $n$ , cada entero  $m$  con  $1 \leq m \leq n - 1$  define un invariante. Este invariante refleja que tan estable (o inestable) es el haz con respecto de sus subhaces de rango  $m$ . El origen de estos invariantes se debe al estudio de las superficies regladas hecho por C. Segre en [30].

En esta sección daremos las propiedades de los invariantes de Segre, los cuales estudiaremos.

**Definición 1.6.1.** El  $m$ -invariante de Segre de  $E$  es

$$s_m(E) := md - n \left( \max_{\substack{F \subset E, \\ r(F)=m}} \{d(F)\} \right).$$

**Definición 1.6.2.** Sea  $E$  un haz vectorial de rango  $n$  y grado  $d$ . Decimos que  $E_1 \subset E$  es un *subhaz de Segre de  $E$*  si para toda  $m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$  se cumple que

$$s_m(E) \geq dr(E) - nd(E_1).$$

**Observación 1.6.3.** Para cualquier subhaz  $F$  de  $E$  denotamos por

$$s(E, E_1) := dr(F) - nd(E_1). \quad (1.7)$$

entonces un subhaz de Segre  $E_1$  de  $E$  es tal que  $s(E, E_1) = \min_m \{s_m(E)\}$ .

**Observación 1.6.4.** El subhaz de Segre siempre existe ya que las inclinaciones de los subhaces de  $E$  están acotadas superiormente (veáse Lema 1.4.3). Si  $E_1$  denota un subhaz de Segre de  $E$ , entonces se verifican las siguientes afirmaciones.

1.  $E$  es estable (respectivamente semiestable) si y solo si para todo  $m$ ,  $s_m(E) > 0$  (respectivamente  $\geq 0$ ).
2.  $E$  es estable (respectivamente semiestable) si y solo si  $s(E, E_1) > 0$  (respectivamente  $\geq 0$ ).  $s_m(E) \equiv md \pmod{n}$ .

El siguiente resultado se encuentra de manera implícita en los resultados de A. Langer (vea, [17, Lema 2.2, Corolario 2.3]) nosotros los hacemos explícitos en la siguiente proposición la cual será útil posteriormente.

**Proposición 1.6.5.** Sea  $E$  un haz vectorial de rango  $n$  grado  $d$  y  $E_1$  un subhaz de Segre para  $E$ . Si  $E$  es estable (respectivamente, semiestable) entonces  $E_1$  y  $E/E_1$  son estables (respectivamente, semiestables).

**Demostración.** Suponga  $E$  estable y  $E_1$  un subhaz de Segre de  $E$ . Denotamos por  $E_2$  al cociente  $E/E_1$  y consideramos la sucesión exacta  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ . Suponga que  $E_0$  es un subhaz de Segre de  $E_1$  lo cual nos lleva al siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & E_0 & \xlongequal{\quad} & E_0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E_2 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & E_4 & \longrightarrow & E_2 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 
\end{array} \tag{1.8}$$

donde  $E_4 := E/E_0$ . Para demostrar la estabilidad de  $E_1$  es suficiente probar que  $s(E_1, E_0) > 0$ . Para ello usamos algunas relaciones definidas a partir del diagrama (1.8).

Si por  $n_i, d_i$  y  $\mu_i$  al grado, rango e inclinación de  $E_i$ , y por  $n, d$  y  $\mu$  los respectivos valores para  $E$ . Entonces usando del diagrama tenemos  $s(E, E_1) \leq s(E, E_0) = dn_0 - d_0n = (d_0 + d_4)n_0 - d_0(n_0 + n_4) = d_4n_0 - d_0n_4 = n_4n_0(\mu_4 - \mu_0)$  por lo tanto se tiene la desigualdad

$$s(E, E_1) \left( \frac{1}{n_4n_0} \right) \leq \mu_4 - \mu_0,$$

de manera similar obtenemos

$$s(E_1, E_0) \left( \frac{1}{(n_1)^2 n_3 n} \right) = \mu_1 - \mu_0,$$

$$\frac{s(E, E_1) + s(E_1, E_0)}{n_4 n_1} = \mu_4 - \mu_1.$$

Sumando las dos últimas igualdades y sustituyendo en la primera desigualdad obtenemos

$$s(E, E_1) \left( \frac{1}{n_4 n_0} \right) \leq \frac{s(E, E_1) + s(E_1, E_0)}{n_4 n_1} + s(E_1, E_0) \left( \frac{1}{(n_1)^2 n_3 n} \right)$$

y despejando obtenemos

$$s(E, E_1) \left[ \frac{1}{n_4 n_0} - \frac{1}{n_4 n_1} \right] \leq s(E_1, E_0) \left( \frac{1}{n_4 n_0} + \frac{1}{(n_1)^2 n_3 n} \right), \quad (1.9)$$

donde los valores  $\left[ \frac{1}{n_4 n_0} - \frac{1}{n_4 n_1} \right]$  y  $\left( \frac{1}{n_4 n_0} + \frac{1}{(n_1)^2 n_3 n} \right)$  son positivos.

La estabilidad de  $E$  implica  $s(E, E_1) > 0$  y por (1.9)  $s(E_1, E_0) > 0$ . Por lo tanto  $E_1$  es estable.

De manera similar, si  $E$  es semiestable entonces  $s(E, E_1) \geq 0$  y por lo tanto  $s(E_1, E_0) \geq 0$ , lo que implica la semiestabilidad de  $E_1$ . Esto concluye la primera parte de la demostración.

Para demostrar que la estabilidad (semiestabilidad) de  $E$  implica la estabilidad (semiestabilidad) de  $E_2$  el procedimiento es semejante al caso anterior. Por ello consideramos lo siguiente: si  $E'_2$  es el subhaz de Segre para  $E_2$  se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E'_1 & \longrightarrow & E'_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E_2 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & E''_2 & = & E''_2 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (1.10)$$

Denotamos por  $\mu'_i, n'_i, d'_i$  los respectivos valores de  $E'_i$  y por  $\mu''_2, n''_2, d''_2$  los respectivos valores de  $E''_2$ . Entonces las desigualdades son:

$$s(E, E_1) \leq (n''_2 n) (\mu''_2 - \mu),$$

$$\mu''_2 - \mu_2 = \frac{s(E_2, E'_2)}{n''_2 n_2},$$

$$\mu_2 - \mu = \frac{s(E, E_1)}{nn_2},$$

Usando estas desigualdades junto con los incisos 2 y 4 de la Observación 1.6.4 obtenemos que la estabilidad (semi-estabilidad) de  $E$  implica la estabilidad (semi-estabilidad) de  $E_2$ .  $\square$

**Corolario 1.6.6.** *Todo haz vectorial  $E$  estable (semi-estable) tiene una extensión por haces vectoriales estables (semi-estables) donde el subhaz vectorial de la extensión es un subhaz de Segre de  $E$ .*

El siguiente resultado fué obtenido por C. Segre para haces de rango dos, (véase, [30]). Para haces de rango suficientemente grande H. Lange obtuvo el mismo resultado (véase, [15]). La generalización a cualquier rango fué obtenida por Mukai-Sakai en [21].

**Proposición 1.6.7.** *Sobre una curva  $X$  algebraica proyectiva no singular de género  $g \geq 2$  se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *Para todo haz vectorial  $E$  sobre  $X$ ,  $s_m(E) \leq m(n - m)g$ .*
2. *Para un haz vectorial estable y general  $E$ ,  $m(n - m)(g - 1) \leq s_m(E)$ .*

Hirschowitz calculó el invariante de Segre para un haz general  $E$  (vea [11]) y lo describió como

$$m(n - m)(g - 1) + \epsilon_m = s_m(E),$$

donde,  $0 \leq \epsilon_m \leq n - 1$  es el único valor tal que  $s_m(E) \equiv md \pmod{n}$ .

Una vez dadas las características elementales del invariante de Segre definiremos las subvariedades que determinan. Para ello consideramos una familia  $\mathbf{E}$  de haces vectoriales sobre  $X$  de rango  $n$  grado  $d$ , parametrizadas por una variedad  $Y$ . El  $m$ -invariante de Segre determina una función

$$s_m : Y \rightarrow \mathbb{Z}, \tag{1.11}$$

$$y \mapsto s_m(\mathbf{E}_y),$$

tal que para cada punto  $y \in Y$ ,  $s_m(y) := s_m(E|_{X \times \{y\}})$ . Esta función es semi-continua inferiormente.

Si  $M(n, d)$  es el espacio moduli de haces estables, aún cuando en ocasiones no existe la familia universal sobre  $M(n, d)$  podemos definir la aplicación correspondiente,

$$s_m : M(n, d) \rightarrow \mathbb{Z},$$

Para cada valor entero positivo  $s$ , la imagen inversa  $s_m^{-1}(s)$  define un conjunto en el espacio moduli  $M(n, d)$ . Por la Proposición 1.6.4, si  $s \not\equiv md \pmod n$ , entonces  $s_m^{-1}(s) = \emptyset$ . Así con la función anterior se tienen la siguiente

**Definición 1.6.8.** Dado  $s$  un entero positivo  $s \equiv md \pmod n$ , denotamos por  $M(n, d, m, s) \subset M(n, d)$  a la imagen inversa  $s_m^{-1}(s)$ , es decir,

$$M(n, d, m, s) := \{E \in M(n, d) \mid s_m(E) = s\}.$$

- Observación 1.6.9.**
1. Por la semicontinuidad de la función  $s_m$ , los conjuntos  $M(n, d, m, s)$  son localmente cerrados.
  2. Para  $m$  fijo, el  $m$ -invariante de Segre determina una estratificación sobre el espacio moduli  $M(n, d)$ , esto es

$$M(n, d) = \bigsqcup_{s>0} M(n, d, m, s).$$

A continuación enunciamos dos resultados que describen a  $M(n, d, m, s)$ .

Para el caso  $n \geq 2$  se tiene el siguiente resultado (veáse [3], [16] [29]).

**Teorema 1.6.10.** [29, Teorema 0.1] *Supongamos  $0 < s \leq m(n - m)(g - 1)$ ,  $s \equiv md \pmod n$ . Si  $g \geq 2$ , entonces  $M(n, d, m, s)$  es no vacío, irreducible y de dimensión igual a  $n^2(g - 1) + 1 + s - m(n - m)(g - 1)$ .*

---

**Proposición 1.6.11.** *[29, Corolario 1.12] Si  $M(n, d, m, s)$  es no vacío, entonces está contenido en la cerradura de  $M(n, d, m, s + n)$ .*

En el Capítulo 2 estudiaremos la relación entre los invariantes de Segre y la filtración de Harder-Narasimhan para haces vectoriales inestables de rango dos.





---

## Capítulo 2

# $(k, l)$ -estabilidad

---

Sección 2.1

### Introducción

Los haces vectoriales  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ -estables han sido utilizados para estudiar problemas como son: las deformaciones del espacio moduli de haces vectoriales  $M(n, d)$  en [23]), la desingularización del espacio moduli  $\widetilde{M}(2, \mathcal{O})$  (vea [24]), curvas minimales del espacio moduli  $M(n, d)$  en [35], ciclos de Hecke en [24].

Nuestro objeto de estudio son los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables en general. En la primera sección de este capítulo daremos la definición de  $(k, l)$ -estabilidad, sus propiedades generales y resultados conocidos. En la segunda sección trabajamos sobre los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables para valores enteros arbitrarios de  $k$  y  $l$ .

Denotamos por  $A_{(k,l)}(n, d)$ , al conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables de rango  $n$  y grado  $d$ . En el Teorema 2.3.2, damos una cota superior para la existencia de los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables. Definiremos una región  $R_1$  (ver, Proposición 2.3.4) donde la  $(k, l)$ -estabilidad implica estabilidad, es decir  $A_{k,l}(n, d) \subset M(n, d)$ .

En general en el  $(k, l)$ -plano determinamos las regiones para las cuales se cumplen las siguientes condiciones

- $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$ ,
- $A_{(k,l)}(n, d) \subset M(n, d)$ ,
- $M(n, d) \subsetneq A_{(k,l)}(n, d)$ .

En la sección 2.4, definiremos una región en el  $(k, l)$ -plano (es decir en  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas enteras  $(k, l)$ ) en la que existen haces vectoriales inestables que son  $(k, l)$ -estables, ( Proposición 2.4.1 ).

En la sección 2.5 hacemos un estudio de los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables con  $(k, l) \in R_1$  donde  $A_{(k,l)}(n, d) \subset M(n, d)$  y  $A_{(k,l)}(n, d)$  define un abierto irreducible en el espacio moduli  $M(n, d)$ . Establecemos la relación entre la  $(k, l)$ -estabilidad y los invariantes de Segre, ( Proposición 2.5.5). Calcularemos la codimensión de  $A_{(k,l)}(n, d)$  (Proposición 2.5.6 y Proposición 2.5.7).

Sección 2.2

## Definiciones y propiedades

La estabilidad de un haz vectorial es determinada en mediante su inclinación y la de sus subhaces, (ver, 2.17). Narasimhan y Ramanan definen la  $k$ -inclinación como:

Sea  $E$  un haz vectorial de rango  $n$  grado  $d$  sobre una curva  $X$  de género  $g \geq 2$ . La  $k$ -inclinación de  $E$  denotada por  $\mu_k(E)$  se define como el cociente

$$\mu_k(E) = \frac{d + k}{n}.$$

Usando la  $k$ -inclinación se define el concepto de  $(k, l)$ -estabilidad de un haz vectorial.

**Definición 2.2.1.** Sea  $E$  un haz vectorial de rango  $n$  y grado  $d$  sobre una curva  $X$  y  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Decimos que  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable si para todo subhaz propio  $F \subset E$  se cumple la siguiente desigualdad:

$$\mu_{k-l}(E) > \mu_k(F). \quad (2.1)$$

Si la desigualdad no es estricta, entonces decimos que  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -semiestable.

De la definición de  $k$ -inclinación, si tomamos  $\delta$  y  $m$  como el grado y rango de  $F$ , entonces la condición (2.1) equivale a

$$m(d + k - l) > n(\delta + k). \quad (2.2)$$

**Observación 2.2.2.** Para cualquier pareja de enteros  $(k, l)$ , es posible construir un haz vectorial de rango  $n$  grado  $d$ , descomponible y que no es  $(k, l)$ -estable.

Para ello defina  $E := F_1 \oplus F_2$ , con  $F_i$  haces estables de grado  $d_i$  y rango  $m_i$  tales que  $d_1 + d_2 = d$ ,  $m_1 + m_2 = n$ ,  $\mu(F_1) \geq \mu(F_2)$  y  $m_1 d_2 - d_1 m_2 \leq (k(n - m_1) + l m_1)$ . Por ejemplo para  $F_1$  un haz lineal de grado suficientemente grande, las condiciones anteriores se cumplen. El haz vectorial  $E$  obtenido es no  $(k, l)$ -estable, ya que la condición  $m_1 d_2 - d_1 m_2 \leq (k(n - m_1) + l m_1)$  es equivalente a  $m_1 d - d_1 n \leq k(n - m_1) + l m_1$  lo que implica  $\mu(E) - \mu(F) \leq (k(n - m_1) + m_1 l) / n m_1$  contradiciendo la condición (2.2).

Por esta razón no existe una cota para la cual todo haz vectorial sea  $(k, l)$ -estable. Esto nos lleva a excluir a los haces vectoriales descomponibles.

**Observación 2.2.3.** Si tomamos  $E$  y  $F$  como en la Definición 2.2.1, entonces la condición (2.1) es equivalente a cualquiera de las siguientes desigualdades:

1.  $\mu(E) - \mu(F) > ((n - m)k + ml) / nm$ .
2.  $d(E \otimes F^*) = md - nd(F) > (n - m)k + ml$ .
3.  $\mu_{-l}(E/F) > \mu_k(F)$ .

Para la estabilidad, se tienen las siguientes propiedades conocidas:

- Si  $E$  es un haz vectorial estable y  $L$  un haz vectorial lineal, entonces el producto tensorial  $E \otimes L$  es estable.
- $E$  es estable si y solo si  $E^*$  es estable.

En la siguiente proposición se observa que al considerar la  $(k, l)$ -estabilidad se tienen propiedades similares.

**Proposición 2.2.4.** *Si  $E$  es un haz vectorial de rango  $n$  y grado  $d$  sobre  $X$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Para cualquier haz lineal  $L$  sobre  $X$ ,  $E$  es  $(k, l)$ -estable si y solo si  $E \otimes L$  es  $(k, l)$ -estable.*
2.  *$E$  es  $(k, l)$ -estable si y solo si  $E^*$  es  $(l, k)$ -estable.*

**Demostración.** (1,  $\Rightarrow$ ) Sea  $F \subset E \otimes L$  y  $E$   $(k, l)$ -estable, entonces  $F \otimes L^* \subset E$ . Por la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E$  tenemos

$$d((E \otimes L) \otimes F^*) = d(E \otimes (F \otimes L^*)^*) \geq (n - m)k + ml.$$

De la Observación 2.2.3 inciso 2,  $E \otimes L$  es  $(k, l)$ -estable.

(1,  $\Leftarrow$ ) Sea  $F \subset E \otimes L$  y  $E \otimes L$   $(k, l)$ -estable, entonces  $F \otimes L^* \subset E$ . Por la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E$  se tiene

$$d(E \otimes (F \otimes L^*)^*) = d((E \otimes L) \otimes F^*) \geq k(n - m) + ml,$$

siendo esta desigualdad equivalente a la propiedad de  $(k, l)$ -estabilidad para  $E$  según la Observación 2.2.3, inciso 2.

(2,  $\Rightarrow$ ) Sea  $F \subset E^*$  un subhaz de rango  $m$  y grado  $\delta$  y consideramos la sucesión exacta corta  $0 \rightarrow F \rightarrow E^* \rightarrow E^*/F \rightarrow 0$ . Entonces  $(E^*/F)^* \subset E$  y de la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E$  se tiene

$$\mu_{k-l}(E) > \mu_k((E^*/F)^*),$$

de lo cual se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} (d + k - l)/n &> (d + \delta + k)/(n - m), \\ d(n - m) + (k - l)(n - m) &> n(d + m + k), \\ -dm - (k - l)m &> n\delta + kn - (k - l)n, \\ (d(E^*) - (k - l))/n &> (d(F) + l)/m, \\ \mu_{l-k}(E^*) &> \mu_l(F). \end{aligned}$$

Dado que esto se cumple para cualquier subhaz  $F$ , la última desigualdad implica la  $(l, k)$ -estabilidad para  $E^*$  (ver, (2.1)). Por lo tanto,  $E^*$  es un haz

vectorial  $(l, k)$ -estable.

(2,  $\Leftarrow$ ) Esta implicación se obtiene de la anterior considerando que  $(E^*)^* = E$ .

□

Si tomamos un haz vectorial  $E$   $(k, l)$ -estable y  $(k', l') \neq (k, l)$ , ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que  $E$  sea  $(k', l')$ -estable? La siguiente proposición nos dará respuesta a esta pregunta.

**Proposición 2.2.5.** *Sea  $E$  un haz vectorial  $(k, l)$ -estable de rango  $n$  y grado  $d$ , entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si  $a, b$  son enteros positivos, entonces  $E$  es  $(k - a, l - b)$ -estable.*
2. *Si  $(k_0, l_0)$  es una pareja de enteros tal que para todo  $m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$  se cumple  $k(n - m) + ml \geq k_0(n - m) + ml_0$ . Entonces  $E$  es  $(k_0, l_0)$ -estable.*

**Demostración.** (1) Si  $F \subset E$  es un subhaz de rango  $m$  (por el inciso 1 de la Observación 2.2.3) se cumple

$$\mu(E) - \mu(F) > ((n - m)k + ml)/nm > ((n - m)(k - a) + m(l - b))/nm.$$

lo cual implica que  $E$  es  $(k - a, l - b)$ -estable (nuevamente Observación 2.2.3, inciso 1).

(2) La segunda afirmación se obtiene de manera similar al usar la misma observación y la desigualdad  $k(n - m) + ml \geq k_0(n - m) + ml_0$ . □

Denotaremos por  $A_{(k,l)}(n, d)$  al conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables de rango  $n$  y grado  $d$ , esto es

$$A_{(k,l)}(n, d) := \{E \mid (k, l)\text{-estable de rango } n \text{ y grado } d\}. \quad (2.3)$$

A continuación damos algunas propiedades de los conjuntos  $A_{(k,l)}(n, d)$  usando las propiedades de  $(k, l)$ -estabilidad anteriores.

**Proposición 2.2.6.** *(Proposición 5.3, [24]) Para cualquier familia de haces vectoriales sobre una curva  $X$  parametrizada por una variedad  $Y$  el conjunto de puntos  $(k, l)$ -estables es una propiedad abierta.*

Como consecuencia de la proposición observamos que al tomar el espacio moduli  $M(n, d)$  el conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables es un abierto en  $M(n, d)$ . En seguida observamos la relación entre el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  y el espacio moduli de estables, así como la relación entre los conjuntos  $A_{(k,l)}(n, d)$  para distintos valores de  $(k, l)$ .

**Proposición 2.2.7.** *Para los haces vectoriales de rango  $n$  y grado  $d$  se cumplen las siguientes afirmaciones*

1.  $A_{(0,0)}(n, d) = M(n, d)$ .
2. Si  $k, l \geq 0$ , entonces  $A_{(k,l)}(n, d) \subseteq M(n, d)$ .
3. Si  $k, l \leq 0$ , entonces  $M(n, d) \subset A_{(k,l)}(n, d)$ .
4.  $A_{(k,l)}(n, d) \subseteq A_{(k,l-1)}(n, d) \subseteq A_{(k-1,l-1)}(n, d)$ .

**Demostración.** (1) Es clara y es parte de la Observación 2.2.3.

(2) Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable con  $k, l \geq 0$ , entonces  $\mu(E) - \mu(F) > (k(n - m) + ml)/nm > 0$ , para todo subhaz  $F \subsetneq E$  de rango  $m$ . Por lo tanto,  $E$  es estable.

(3) Sea  $E \in M(n, d)$ , así para todo subhaz  $F \subset E$  se cumple

$$\mu(E) - \mu(F) > 0 > (k(n - m) + ml)/nm,$$

entonces  $E \in A_{(k,l)}(n, d)$ , (Observación 2.2.3).

(4) Es una consecuencia de la Proposición 2.2.5. □

**Corolario 2.2.8.** *Sean  $(k, l)$  y  $(k', l')$  dos parejas de enteros tales que para todo  $m$  con  $1 \leq m \leq n - 1$  se cumple  $k'(n - m) + ml' \leq k(n - m) + ml$ . Entonces  $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$  implica  $A_{(k',l')}(d, n) \neq \emptyset$ .*

— Sección 2.3 —

## Región de existencia

En esta sección determinaremos la existencia de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables, para ello tomamos  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con coordenadas  $(k, l)$  al cual llamaremos  $(k, l)$ -plano. La idea es graficar las parejas de enteros  $(k, l)$  y establecer regiones de no vacuidad de los conjuntos  $A_{(k,l)}(n, d)$ .

Por simplicidad, vamos a considerar el plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , sin embargo sólo tomaremos en cuenta las parejas de enteros. De manera similar, cuando grafiquemos las regiones en el plano, las partes sombreadas se referirán a los puntos  $(k, l)$  de coordenadas enteras contenidos en ella. Como es usual fijaremos el rango y grado denotados por  $n$  y  $d$  respectivamente, así como la curva  $X$  de género  $g \geq 2$ .

**Región  $R_0$ .** Consideramos las rectas definidas de la siguiente manera:

$$L'_1 := \{(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid k(n-1) + l - (n-1)g = 0\}, \quad (2.4)$$

$$L'_{n-1} := \{(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid k + (n-1)l - (n-1)g = 0\}. \quad (2.5)$$

Usando estas rectas definimos la región  $R_0$  como el conjunto de puntos que se encuentran acotados inferiormente por ambas rectas, esto es

$$R_0 := \{(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (n-1)k + l \geq (n-1)g, \text{ y } k + (n-1)l \geq (n-1)g\}. \quad (2.6)$$

Para darnos una idea de la región que estamos considerando, graficamos la región  $R_0$  en el  $(k, l)$ -plano, obteniendo así la figura 2.1.

Nuestro objetivo es determinar una región de existencia para los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables. En seguida observamos que si  $(k, l) \in R_0$  entonces no existen haces vectoriales estables.

**Proposición 2.3.1.** *Para todo  $(k, l) \in R_0$  se tiene que  $A_{(k,l)}(n, d) = \emptyset$ .*

**Demostración.** Sea  $(k_0, l_0) \in R_0$ , sin pérdida de generalidad suponemos que  $(k_0, l_0)$  se encuentra por encima de la recta  $L'_1$  esto es, para  $m = 1$  se cumple

$$(n-1)g \leq (n-1)k_0 + l_0.$$

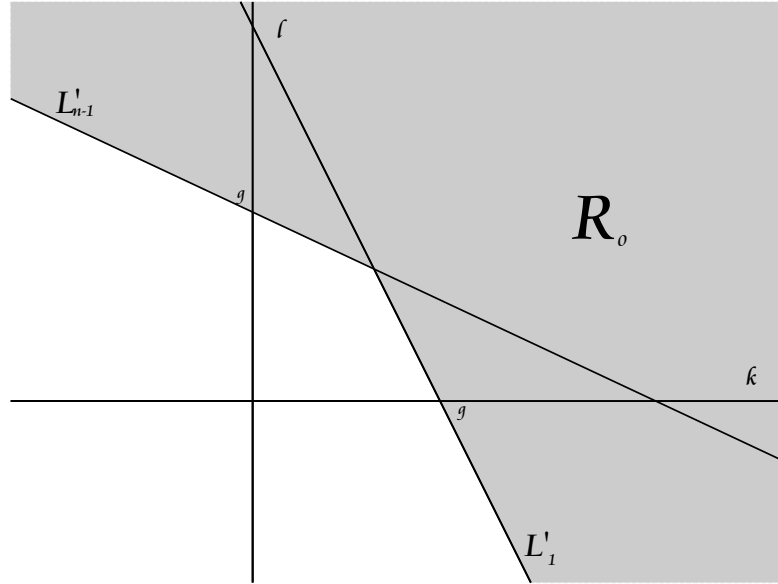
Por la Proposición 1.6.7, si tomamos  $E$  un haz vectorial de rango  $n$ , grado  $d$  y  $L \subset E$  un subhaz lineal de grado  $\delta$ , entonces

$$d - \delta n \leq (n-1)g.$$

De las dos desigualdades se observa que  $d - \delta n \leq (n-1)k_0 + l_0$ , de la cual al dividir ambos lados entre  $n$  y hacer el despeje apropiado obtenemos que

$$\mu_{k_0-l_0}(E) = (d + k_0 - l_0) / n \leq \delta + k_0 = \mu_{k_0}(L).$$



Figura 2.1: Región  $R_0$ .

Lo anterior implica que  $E$  no es  $(k, l)$ -estable (Observación 2.2.3, inciso 1). Por lo tanto, no existen haces vectoriales  $A_{(k,l)}(n, d) = \emptyset$ .  $\square$

Una vez establecida la región  $R_0$ , veremos si es óptima, es decir si  $R_0$  es la región más grande para la cual  $A_{(k,l)}(n, d) = \emptyset$ , en lo siguiente probaremos este hecho.

De acuerdo a la Proposición 2.2.7, se tienen las contenciones  $A_{(k,l)}(n, d) \subset A_{(k-a, l-b)}(n, d)$ . Por lo que para demostrar existencia basta considerar valores de  $k$  y  $l$ , lo más grandes posibles (vea, [24, Proposición 5.4]).

**Proposición 2.3.2.** *Sobre una curva  $X$  de género  $g$ , el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es no vacío para los enteros  $k, l$  que cumplen las siguientes desigualdades*

$$k(n-1) + l < (n-1)(g-1), \quad (2.7)$$

$$k + (n-1)l < (n-1)(g-1). \quad (2.8)$$

**Demostración.** Probaremos que si  $(k, l)$  satisface (2.7) y (2.8), entonces el conjunto de haces vectoriales estables que no son  $(k, l)$ -estables tiene dimensión menor que  $\dim M(n, d)$ . Lo anterior implicaría la existencia de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables en  $M(n, d)$  y en consecuencia  $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$ .

Consideramos  $E$  un haz vectorial estable de rango  $n$  grado  $d$  que no es  $(k, l)$ -estable, donde  $(k, l)$  satisface (2.7) y (2.8). Como  $E$  no es  $(k, l)$ -estable, existe un  $F \subset E$  de rango  $m$  y grado  $\delta$  tal que  $\mu_{k-l}(E) \leq \mu_k(F)$  lo que equivale a

$$dm - n\delta \leq k(n - m) + ml. \quad (2.9)$$

Dado que solo estamos interesados en las dimensiones y la estabilidad es una propiedad abierta, podemos suponer, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $F$  y  $E/F$  son estables. En consecuencia, la extensión

$$0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow E/F \rightarrow 0, \quad (2.10)$$

es una extensión por haces vectoriales estables. De esta manera, la dimensión del conjunto de haces vectoriales estables rango  $n$  grado  $d$  que no son  $(k, l)$ -estables está acotada superiormente por la dimensión del espacio de extensiones, donde el subhaz es estable de rango  $m$  grado delta  $\delta$  y el cociente es estable de rango  $n - m$  grado  $d - \delta$ . La dimensión del espacio de tales extensiones es

$$m^2(g - 1) + 1 + (n - m)^2(g - 1) + 1 + h^1((E/F)^* \otimes F) - 1. \quad (2.11)$$

Como  $h^0((E/F)^* \otimes F) = 0$ , entonces usando Riemann-Roch  $h^1((E/F)^* \otimes F) = -d((E/F)^* \otimes F) - m(n - m)(1 - g) = dm - n\delta - m(n - m)(1 - g)$ . En consecuencia la dimensión (2.11) es

$$m^2(g - 1) + 1 + (n - m)^2(g - 1) + 1 + dm - n\delta - m(n - m)(1 - g) - 1,$$

que al simplificar queda

$$(n^2 - nm + m^2)(g - 1) + 1 + dm - n\delta.$$

Si demostramos que este número es menor que  $\dim M(n, d)$  habremos terminado. Demostrarlo equivale a probar que para  $n \geq 2$  y  $1 \leq m \leq n - 1$ , se cumple

$$dm - n\delta < m(n - m)(g - 1). \quad (2.12)$$

A continuación demostraremos la desigualdad (2.12) para los distintos valores posibles de  $n$  con  $1 \leq m \leq n - 1$ .

*Caso  $n = 2, 3$ .* Con estos valores la desigualdad (2.12) se sigue directamente de (2.7) y (2.8).

*Caso  $n = 4$ .* Si  $m = 1$  ó  $3$  la desigualdad se sigue de (2.7) y (2.8) respectivamente. Si  $m = 2$ , sumamos (2.7) y (2.8) y dividimos la suma entre dos para obtener  $2k + 2l < 3(g - 1)$ . Por (2.9) el grado y rango de  $E$  y  $F$  cumplen  $2d - 4\delta \leq 2k + 2l$ . En consecuencia  $2d - 4\delta < 3(g - 1)$ , obteniendo así la desigualdad (2.12).

*Caso  $n \geq 5$ .* En esta situación es suficiente probar (2.12) para  $2 \leq m \leq n - 2$ . Para ello supondremos que si  $2 \leq m \leq n - 2$  entonces se cumple

$$k(n - m) + ml < m(n - m)(g - 1). \quad (2.13)$$

Como  $E$  y  $F$  cumplen  $\mu_{k-l}(E) \leq \mu_k(F)$  entonces  $dm - n\delta \leq k(n - m) + ml$ . Y usando la desigualdad (2.13) obtenemos

$$dm - n\delta < m(n - m)(g - 1),$$

la cual es lo que deseábamos probar. Por lo tanto para completar la prueba demostraremos por contradicción la desigualdad (2.13) se cumple.

Suponga que (2.13) no se cumple, así para algún  $n \geq 5$  existe  $m$ ,  $2 \leq m \leq n - 2$  tal que  $m(n - m)(g - 1) \leq k(n - m) + ml$ .

Por el inciso 3, Proposición 2.2.7 podemos suponer que  $0 \leq l \leq k$ . Entonces

$$m(n - m)(g - 1) \leq k(n - m) + ml \leq kn, \quad (2.14)$$

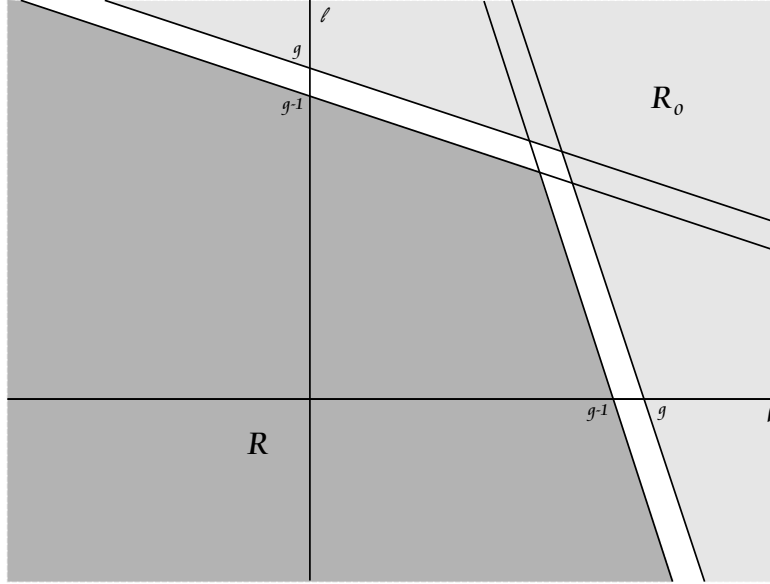
tomando los extremos obtenemos

$$(m/n)(n - m)(g - 1) \leq k.$$

Por otra parte de la desigualdad (2.7) y  $0 \leq l$  se obtiene  $k(n - 1) \leq k(n - 1) + l < (n - 1)(g - 1)$ , tomando los extremos tenemos

$$k < (g - 1).$$

Usando este hecho y la desigualdad (2.14), obtenemos  $(m/n)(n - m)(g - 1) \leq k < (g - 1)$  lo que implica,  $(m/n)(n - m) < 1$ . Sin embargo esto es una contradicción, ya que para  $n \geq 5$  y  $2 \leq m \leq n - 2$ ,  $1 \leq (m/n)(n - m)$ . Esto

Figura 2.2: Región  $R$  y  $R_0$ .

demuestra la desigualdad  $k(n - m) + ml < m(n - m)(g - 1)$ .

De esta manera concluimos: Para toda  $m$  con  $1 \leq m \leq n$ , la dimensión del espacio de extensiones de  $E/F$  por  $F$ , donde  $F$  un haz de rango  $m$  grado  $\delta$  es menor que la dimensión del espacio moduli  $M(n, d)$ . Dado que  $m$  solo toma un número finito de valores, los haces vectoriales que no son  $(k, l)$ -estables no cubren el espacio moduli  $M(n, d)$ . Por lo tanto, existen haces vectoriales estables y  $(k, l)$ -estables, terminando así nuestra demostración.  $\square$

La Proposición 2.3.2, determina una región donde  $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$ . Esta región la llamaremos  $R$  y queda descrita como

$$R := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} (n - 1)k + l < (n - 1)(g - 1) \\ k + (n - 1)l < (n - 1)(g - 1) \end{array} \text{ y } \right\}. \quad (2.15)$$

En la figura 2.2 presentamos los puntos de  $R$  en el plano.

Por la Proposición 2.2.7 sabemos que si  $k, l > 0$ , entonces  $(k, l)$ -estabilidad implica estabilidad. Ahora determinaremos una región mas grande donde se sigue cumpliendo esta implicación.

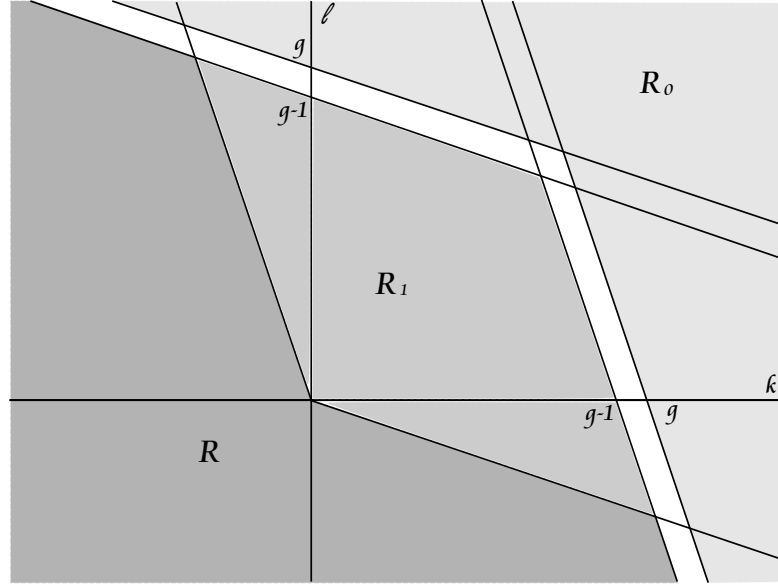


Figura 2.3: Regiones  $R_0$  y  $R_1$ .

Definimos la región  $R_1$ , de la siguiente manera:

$$R_1 := \left\{ (k, l) \in R \mid \begin{array}{l} (n-1)(g-1) > (n-1)k + l \geq 0 \quad \text{y} \\ (n-1)(g-1) > k + (n-1)l \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (2.16)$$

Así la región  $R_1$  es la subregión de  $R$  acotada inferiormente por las rectas

$$L_m := \{(k, l) \mid (k(n-m) + ml) = 0\}, \quad (2.17)$$

con  $m = 1, n - 1$ . Si tomamos el plano, entonces los puntos  $(k, l)$  en  $R_1$  se representan en la figura 2.3.

En particular si  $k, l \geq 0$ , entonces  $(k, l) \in R_1$ . Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable para  $k, l \geq 0$ , entonces  $E$  es estable por la Observación 2.2.3. Sin embargo esta afirmación se cumple para toda pareja  $(k, l) \in R_1$ , para probarlo necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 2.3.3.** *Si  $(k, l) \in R_1$ , entonces  $k(n-m) + ml \geq 0$  para toda  $m$  con  $1 \leq m \leq n-1$ .*

**Demostración.** Si  $k, l \geq 0$ , el resultado es inmediato. Si  $l > 0 \geq k$ , hacemos  $l = k + a$ , con  $a > 0$ . Usando la primer desigualdad de (2.16) obtenemos,  $k(n-1) + k + a \geq 0$ , es decir,  $kn + a \geq 0$ . Como  $a$  es positiva se cumple  $kn + am \geq kn + a \geq 0$  y sumando un cero tenemos  $k(n-m) + m(k+a) \geq 0$ . En consecuencia,  $(n-m)k + ml \geq 0$ .

Si  $k > 0 \geq l$ , la demostración se obtiene de manera similar al caso anterior utilizando la segunda desigualdad en (2.16).  $\square$

Ahora podremos demostrar que en la región  $R_1$  la  $(k, l)$ -estabilidad implica estabilidad.

**Proposición 2.3.4.** *Para todo  $(k, l) \in R_1$   $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$  y  $A_{(k,l)}(n, d) \subset M(n, d)$ . Esto es, si  $(k, l) \in R_1$ , entonces  $(k, l)$ -estabilidad implica estabilidad.*

**Demostración.** La no vacuidad se sigue de la Proposición 2.3.2. Para la contención sea  $E$   $(k, l)$ -estable con  $(k, l) \in R_1$ , así para cualquier subhaz  $F \subset E$  tenemos  $\mu(E) - \mu(F) > (k(n-m) + ml)/nm$  y por el Lema 2.3.3  $\mu(E) - \mu(F) > (k(n-m) + ml)/nm \geq 0$ , esto implica la estabilidad de  $E$ .  $\square$

A continuación, determinamos una región en el  $(k, l)$ -plano donde la estabilidad implica  $(k, l)$ -estabilidad, esto es decir  $M(n, d) \subset A_{(k,l)}(n, d)$ . Por definición de estabilidad tenemos que si  $E$  es estable, entonces  $E$  es  $(k, l)$ -estable para todo  $k, l \leq 0$ . Sin embargo para  $k, l \leq 0$  existen haces vectoriales  $(k, l)$ -estables que no son estables, por ejemplo todo los haces vectoriales semiestables no estables.

Para determinar completamente la región donde estabilidad implica  $(k, l)$ -estabilidad, definimos la región  $R_2$  como

$$R_2 := \{(k, l) \in R \mid k(n-1) + l \leq 0 \text{ y } k + (n-1)l \leq 0\}. \quad (2.18)$$

Esta región está acotada superiormente por las rectas  $L_1$  y  $L_{n-1}$  definidas en (2.17). De esta manera, un punto  $(k, l)$  pertenece a  $R_2$  si y solo si está en  $R$  y se encuentra ubicado por debajo de  $L_1$  y  $L_2$ . En la figura 2.4 presentamos la región  $R_2$ .

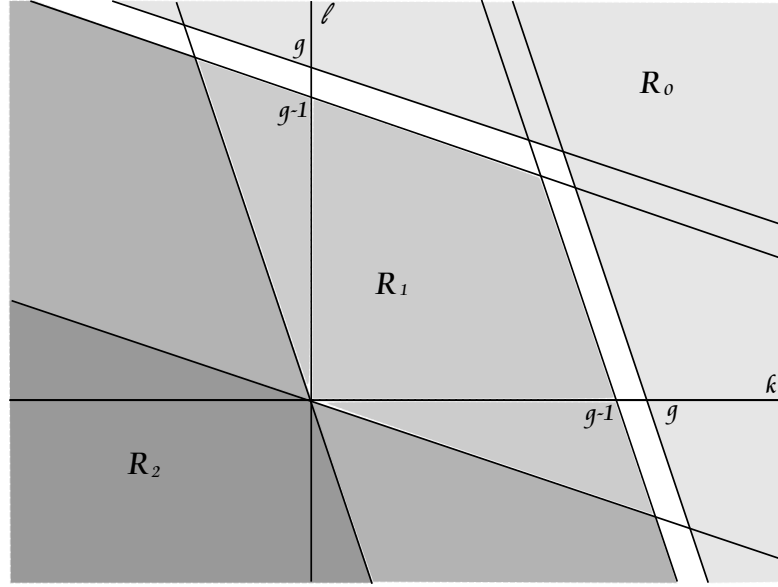


Figura 2.4: Región  $R_2$ , estabilidad implica  $(k, l)$ -estabilidad.

Si  $(k, l) \in R_2$ , entonces por definición,  $k(n-1) + ml \leq 0$  y  $k + (n-1)l \leq 0$ . Si suponemos que  $k \leq 0$  y  $l > 0$  y usamos el hecho de que  $k + (n-1)l \leq 0$ , entonces tenemos,

$$k(n-m) + ml \leq (l(1-n))(n-m) + ml = ln(m+1-n) \leq 0.$$

Si por otra parte suponemos que  $k > 0$  y  $l \leq 0$ , entonces al tomar en cuenta que  $k(n-1) + ml \leq 0$ , obtenemos

$$k(n-m) + ml \leq k(n-m) + m(k(1-n)) = kn(1-m) \leq 0.$$

De esta manera, para toda pareja  $(k, l) \in R_2$  se cumple la desigualdad  $k(n-m) + ml \leq 0$ , por lo cual hemos probado la siguiente afirmación

**Proposición 2.3.5.** *Para todo  $(k, l) \in R_2$ ,  $M(n, d) \subset A_{(k,l)}(n, d)$ .*

La Proposición 2.3.5 afirma que para toda pareja  $(k, l) \in R_2$ , la estabilidad implica  $(k, l)$ -estabilidad.

**Observación 2.3.6.** Si  $E_1, E_2$  son haces vectoriales isomorfos,  $E_1$  es  $(k, l)$ -estable si y solo si  $E_2$  lo es, sin importar si son semiestables o no. Sin embargo si  $E_1, E_2$  son semiestables no estables y  $S$ -equivalentes entonces la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E_1$  no implica la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E_2$  tal y como se observa en Ejemplo 2.3.7. De esta manera, es posible concluir dos cosas.

- La  $(k, l)$ -estabilidad distingue entre los haces vectoriales semiestables  $S$ -equivalentes.
- La  $S$ -equivalencia no es una buena relación de equivalencia para clasificar haces vectoriales  $(k, l)$ -estables.

**Ejemplo 2.3.7.** Sean  $L, G$  haces vectoriales estables, no triviales, de rango uno y dos respectivamente y  $\mu(G) = \mu(L)$ . Observe que  $h^1(L^* \otimes G) \neq 0$  y  $h^1(G^* \otimes L) \neq 0$  ya que  $h^0(L^* \otimes G) = h^0(G^* \otimes L) = 0$ . Por lo tanto, existen extensiones  $0 \rightarrow G \rightarrow E_1 \rightarrow L \rightarrow 0$  y  $0 \rightarrow L \rightarrow E_2 \rightarrow G \rightarrow 0$  no triviales. Además  $E_1, E_2$  son semiestables con las siguientes propiedades:

1.  $E_1$  y  $E_2$  son  $S$ -equivalentes con inclinación igual a un número entero,
2.  $E_1$  es  $(1, -1)$ -estable,
3.  $E_2$  no es  $(1, -1)$ -estable.

La verificación a estas afirmaciones es:

(1) Por construcción que  $gr(E_1) = G \oplus (E_1/G) \cong G \oplus L$  y  $gr(E_2) = L \oplus (E_2/L) \cong L \oplus G$ .

(2) Para probar la  $(1, -1)$ -estabilidad de  $E$  tomaremos un subhaz  $G_0$  de rango dos y un subhaz lineal  $L_0$ . Por la Observación 2.2.3 inciso 1, será suficiente demostrar  $\mu(E_1) - \mu(G_0) > (-1)/6$ , y  $\mu(E_1) - \mu(L_0) > 1/3$ . La primera desigualdad es una consecuencia de la semiestabilidad de  $E$ , ya que

$$\mu(E_1) - \mu(G_0) \geq 0 > \frac{-1}{6}. \quad (2.19)$$

Para la segunda desigualdad observe que  $\mu(E_1) - \mu(L_0) \neq 0$ , de lo contrario la composición  $L_0 \hookrightarrow E_1 \rightarrow L$  implicaría  $L \cong L_0$  dando una escisión para la extensión. Tomando en cuenta que  $\mu(E_1)$  es entero se tiene  $\mu(E_1) - \mu(L_0) \geq 1$  y en consecuencia

$$\mu(E_1) - \mu(L_0) \geq 1 > \frac{1}{3} = \frac{2k+l}{3}. \quad (2.20)$$



Por lo tanto  $E$  es  $(1, -1)$ -estable.

(3) Tomando la diferencia  $\mu(E_2) - \mu(L)$  observamos que

$$\mu(E_2) - \mu(L) = \frac{k+l}{2} = 0$$

y por la Observación 2.2.3 inciso 1,  $E_2$  no es  $(1, -1)$ -estable lo cual finaliza nuestro ejemplo.

La siguiente proposición nos dice que la semiestabilidad implica  $(k, l)$ -estabilidad en  $R_2$ .

**Proposición 2.3.8.** *Si  $E$  es un haz vectorial semiestable y no estable, entonces  $E$  es  $(k, l)$ -estable para todo  $(k, l)$  en el interior de  $R_2$ . Es más  $E \in A_{(-k, -k)}(n, d)$  para toda  $k > 0$ .*

**Demostración.** Tomamos  $E$  y  $(k, l)$  como en la proposición. Entonces para todo subhaz  $F \subset E$  de rango  $m$  se tiene  $\mu(E) - \mu(F) \geq 0$  y ya que  $(k, l)$  está en el interior de  $R_2$ , entonces  $0 > k(n - m) + ml$ . Por lo tanto se tiene la siguiente desigualdad

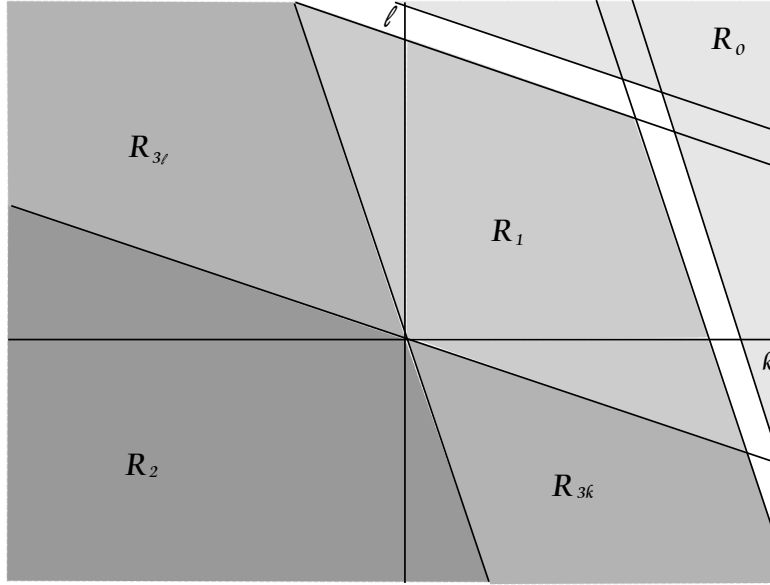
$$\mu(E) - \mu(F) \geq 0 > (k(n - m) + ml) / nm,$$

como esta desigualdad se cumple para cualquier subhaz  $F$ , podemos concluir que  $E$  es  $(k, l)$ -estable. La segunda afirmación es una consecuencia de lo anterior.  $\square$

Con esta propiedad hacemos la siguiente lectura: Para poder distinguir entre dos haces vectoriales semiestables no estables de rango  $n$  y grado  $d$  usando la  $(k, l)$ -estabilidad es necesario que  $(k, l)$  se encuentre en la frontera ó en el complemento de  $R_2$  con respecto de  $R$ . Esto es  $k$  y  $l$  son tales que  $k(n-1)+l \geq 0$  ó  $k + (n-1)l \geq 0$ . En el Ejemplo 2.3.7,  $(1, -1)$  cumple esta condición.

Por último, consideramos una región que llamaremos región  $R_3$  y la cual se compone de los siguientes dos conjuntos.

$$R_{3k} := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} 0 < k(n-1) + l < (n-1)(g-1), \\ k + l(n-1) < 0 \end{array} \right\}. \quad (2.21)$$

Figura 2.5: Región  $R_3$ .

$$R_{3l} := \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \begin{array}{l} 0 < k + l(n-1) < (n-1)(g-1), \\ k(n-1) + l < 0 \end{array} \right\}. \quad (2.22)$$

En la figura 2.5 presentamos la gráfica de la región  $R_3$ .

La región  $R_3$  es una subregión de  $R$ , por lo que para todo  $(k, l) \in R_3$  el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es no vacío, (Proposición 2.3.2). Sin embargo la región  $R_3$  nos dará información acerca de la filtración de Jordan-Hölder de los haces vectoriales semiestables no estables.

Para fijar ideas desarrollamos explícitamente la relación entre los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables con  $(k, l) \in R_3$  y la filtración de Jordan-Hölder para haces vectoriales de rango tres. Los resultados obtenidos son fácilmente generalizados a rangos mayores como el lector puede comprobar, (caso rango dos ver, Capítulo 3).

La filtración de Jordan-Hölder para un haz vectorial semiestable no estable  $E$  de rango tres es de alguno de los siguientes tres tipos.

**Tipo 1,**  $0 \subset L \subset E$ .

**Tipo 2,**  $0 \subset F \subset E$ .

**Tipo 3,**  $0 \subset L \subset F \subset E$ .

**Teorema 2.3.9.** *Sea  $E$  un haz vectorial semiestable no estable de rango tres y  $(k, l) \in R_3$ , entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

1.  $E$  es  $(k, l)$ -estable para algún  $(k, l) \in R_{3l}$  si y solo si la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  es del tipo 1.
2.  $E$  es  $(k, l)$ -estable para algún  $(k, l) \in R_{3k}$  si y solo si la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  es del tipo 2.
3.  $E$  no es  $(k, l)$ -estable para ningún  $(k, l)$  en  $R_{3k} \cup R_{3l}$ , si y solo si la filtración de Jordan-Hölder de  $E$  es de tipo 3.

**Demostración.**  $(1, \Rightarrow)$  Fijamos  $(k, l) \in R_{3l}$ , entonces de (2.21)  $0 < k + 2l$ . Si  $E$  tiene una filtración de Jordan-Hölder tipo 2 ó 3 entonces existe  $F_0 \subsetneq E$  de rango dos tal que  $\mu(E) = \mu(F_0)$  lo que implica  $\mu(E) - \mu(F_0) < (k + 2l)/6$  y en consecuencia no sería  $(k, l)$ -estable. Por lo tanto,  $E$  tiene una filtración de Jordan-Hölder de tipo 1.

$(1, \Leftarrow)$  Por definición si  $(k, l) \in R_{3l}$  entonces  $0 < k + 2l$ ,  $2k + l < 0$ . Supongamos que para todo  $(k, l) \in R_{3l}$   $E$  no es  $(k, l)$ -estable. Esto es, para cada  $(k, l) \in R_{3l}$  existe un subhaz  $G \subseteq E$  de rango  $m$  tal que  $\mu(E) - \mu(G) \leq (k(n - m) + ml)/nm$ , donde  $m = 1, 2$ .

Sin embargo  $m \neq 1$ , pues si  $m = 1$ , entonces  $0 \leq \mu(E) - \mu(G) \leq ((2k + l)/3)$ . Como  $E$  tiene una filtración de Jordan-Hölder de tipo 1 se cumple  $0 \leq \mu(E) - \mu(G) \leq ((2k + l)/6)$  siendo una contradicción al hecho  $2k + l < 0$ . Tomamos  $(k, l) \in R_{3l}$  tal que  $k + 2l = 1$ , y por lo anterior existe un subhaz  $G$  de rango dos tal que  $0 < \mu(E) - \mu(G) \leq (1/6)$ . Multiplicando por 6 la desigualdad tendríamos  $0 < 2d(E) - 3d(G) \leq 1$ . Esto implicaría  $2d(E) - 3d(F) = 1$ , es decir  $(d(E), 3)$  son coprimos lo cual contradice la existencia de  $E$  (recuerde que grado y rango coprimos implica que todo haz semiestable es estable). Las demostraciones de (2) y (3) son análogas.  $\square$

**Observación 2.3.10.** La idea para la generalización del Teorema 2.3.9 es como sigue:

De acuerdo al valor del rango  $n$ , existen  $n - 3$  líneas por el origen definidas como

$$L_m\{(k, l) \mid k(n - m) + ml = 0\}, \quad 2 \leq m \leq n - 2.$$

Estas líneas dividen a las regiones  $R_{3k}$  y  $R_{3l}$  en nuevas subregiones. Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable y  $(k, l)$  se encuentra por arriba o sobre la línea  $L_m$ , esto es  $k(n - m) + ml \geq 0$  ello implica que en la filtración de Jordan-Hölder no puede haber un haz de rango  $m$  pues sería una contradicción para la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E$ .

**Corolario 2.3.11.** *Sea  $E$  un haz vectorial semiestable no estable de rango tres con Jordan-Hölder tipo 2. Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable, entonces  $(k, l) \in R_2$ .*

**Observación 2.3.12.** Para la parte del  $(k, l)$ -plano que no está definido, esto es

$$\left\{ (k, l) \notin R_0 \mid \begin{array}{l} (n - 1)(g - 1) \leq k(n - m) + ml < (n - 1)g \\ \text{ó } (n - 1)(g - 1) \leq k + (n - m)l < (n - 1)g \end{array} \right\}, \quad (2.23)$$

hacemos las siguientes precisiones. La existencia o no existencia de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables rango  $n$  grado  $d$  dependerá directamente del grado, el género de la curva y de relaciones del tipo  $g \equiv md \pmod{n}$ . Ofrecemos un estudio muy detallado para el caso rango dos, ver por ejemplo: Proposición 3.1.4 y Observación 3.1.9).

Con esto determinamos las regiones en el  $(k, l)$ -plano. El comportamiento de la  $(k, l)$ -estabilidad para distintas regiones y su relación con la estabilidad, semiestabilidad y no semiestabilidad.

Sección 2.4

## Haces vectoriales inestables

En esta sección hacemos una descripción de los haces vectoriales inestables (haces vectoriales no semiestables) y su relación con la  $(k, l)$ -estabilidad. Por los resultados de la sección anterior, sabemos que si  $E$  es un haz vectorial inestable  $(k, l)$ -estable, entonces  $(k, l) \in R_2$ .

**Proposición 2.4.1.** *Si  $E$  es inestable de rango  $n$  y grado  $d$ , entonces existe  $(k, l) \in R_2$  tal que  $E \in A_{(k,l)}(n, d)$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 1.4.3, las inclinaciones de todos los subhaces de  $E$  están acotadas superiormente y llamamos  $\mu(E_0)$  a dicha cota. Sea  $k > 0$  tal que  $\mu(E) - \mu(E_0) > (-k/(n-1))$ . Entonces para todo subhaz  $F \subset E$  de rango  $m$  se tiene

$$\mu(E) - \mu(F) \geq \mu(E) - \mu(E_0) > (-k/(n-1)) \geq (-k/m),$$

así

$$\mu(E) - \mu(F) > (-kn/nm),$$

lo que implica que  $E$  es  $(-k, -k)$ -estable. Y como  $(-k, -k) \in R_2$  esto finaliza la demostración.  $\square$

En el Capítulo 3, haremos un estudio mucho más detallado de los haces vectoriales inestables de rango dos, así como su relación con la  $(k, l)$ -estabilidad.

Haciendo uso de las regiones en el  $(k, l)$ -plano (vea Figura 2.3), dimos regiones donde el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es vacío (región  $R_0$ ), las relaciones de la  $(k, l)$ -estabilidad y los haces estables (Región  $R_1$ ). Además se dió la descripción de los haces vectoriales semiestables no estables en la región  $R_3$  y por último los inestables con la región  $R_2$ . Así de las proposiciones 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.5 y 2.3.8 obtenemos el siguiente

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $A_{(k,l)}(n, d)$  el conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables de rango  $n$  y grado  $d$ , entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

1. Para todo  $(k, l) \in R_0$ ,  $A_{(k,l)}(n, d) = \emptyset$ .
2. Para todo  $(k, l) \in R$ ,  $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$ .
3. Para todo  $(k, l) \in R_1$ ,  $A_{(k,l)}(n, d) \subseteq M(n, d)$ .
4. Para todo  $(k, l) \in R_2$ ,  $M(n, d) \subset A_{(k,l)}(n, d)$ .
5. Para todo  $k > 0$ , si  $E$  es semiestable entonces  $E \in A_{(-k,-k)}(n, d)$ .

## Propiedades geométricas de $A_{(k,l)}(n, d)$

En esta sección daremos las propiedades topológicas del conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  con  $(k, l) \in R_1$  (ver, 2.16). Recordemos que todo haz vectorial  $(k, l)$ -estable con  $(k, l) \in R_1$  es un haz vectorial estable (Proposición, 2.3.4). En este caso particular y haciendo abuso de notación denotaremos por  $A_{(k,l)}(n, d)$  al conjunto de clases de isomorfismo.

Por (2.16),  $A(k, l)(n, d)$  describe una subvariedad del espacio moduli  $M(n, d)$ . El objetivo es estudiar sus propiedades topológicas: irreducibilidad, dimensión, codimensión, etc. Iniciamos con la siguiente proposición la cual es una consecuencia de la [24, Proposición 5.2] dada por Narasimhan y Ramanan.

**Proposición 2.5.1.** *Para todo  $(k, l) \in R_1$ ,  $A(k, l)$  es irreducible de dimensión  $n^2(g - 1) + 1$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 2.3.4, el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d)$  es no vacío y por la Proposición 2.2.6,  $A_{(k,l)}(n, d)$  es abierto en  $M(n, d)$ . De esta manera  $A_{(k,l)}(n, d)$  es irreducible de dimensión  $n^2(g - 1) + 1$ .  $\square$

A continuación daremos una caracterización de los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables con  $(k, l) \in R_1$ . En [23, Proposición 2.6], Narasimhan y Ramanan demuestran que dado un haz vectorial  $E$  estable de rango  $n$  y grado  $d$  existe una familia  $\mathcal{E}$  de haces vectoriales parametrizada por una variedad irreducible  $T$  tal que contiene a  $E$  y existe un abierto de Zariski en  $U \subset T$  donde para todo  $t \in U$  el haz vectorial  $\mathcal{E}_t$  es estable.

Sea  $(k, l) \in R_1$  y  $E \in A_{(k,l)}(n, d)$ , entonces  $E$  es estable y tiene una extensión por estables

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0,$$

donde  $E_1$  es el subhaz de Segre de  $E$  y  $E_2 = E/E_1$  (ver, Proposición 1.6.5). Denotamos por  $m$  y  $\delta$  el rango y grado de  $E_1$ , por lo que  $E_2$  será de rango  $n - m$  y grado  $d - \delta$ .

Definimos  $\mathcal{E}_i \rightarrow X \times T_i$  a la familia que contiene a  $E_i$  tal que  $T_i$  es irreducible. Si  $p_{ij}$  es la proyección a la entrada  $ij$  con  $i = 0, 1, 2$  y  $j = 1, 2$  entonces se

tiene  $p_{01}^* \mathcal{E}_1 \otimes p_{02}^* \mathcal{E}_{02}^*$  es un haz vectorial sobre  $X \times T_1 \times T_2$ . Consideramos la primera imagen directa  $\mathcal{R}_{p_{12}^*}^1(p_{01}^* \mathcal{E}_1 \otimes p_{02}^* \mathcal{E}_{02}^*)$ . Por la estabilidad de  $E$ ,  $h^0(E_2^* \otimes E_1) = 0$ . Más aún, existe un abierto  $U$  de  $T_1 \times T_2$  tal que para todo  $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$  se cumple  $h^0(p_{01}^* \mathcal{E}_1|_{X \times t_1} \otimes p_{02}^* \mathcal{E}_{02}^*|_{X \times t_2}) = 0$ . Restringimos la primera imagen directa al abierto  $U$ , entonces  $\mathcal{R}_{p_{12}^*}^1(p_{01}^* \mathcal{E}_1 \otimes p_{02}^* \mathcal{E}_{02}^*)|_U$  es localmente libre. Denotamos  $\mathbf{P} := \mathbb{P}(\mathcal{R}_{p_{12}^*}^1(p_{01}^* \mathcal{E}_1 \otimes p_{02}^* \mathcal{E}_{02}^*))$  y la restricción por  $\mathbf{P}|_U$ .

De acuerdo a [14, Remark 4.6], existe una extensión universal sobre  $X \times \mathbf{P}|_U$  de la forma

$$0 \rightarrow p_{01}^* \mathcal{E}_1 \otimes p_{02}^* \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow p_{01} \mathcal{E}_2 \rightarrow 0,$$

ello determina la familia de haces vectoriales  $\mathcal{F}$  parametrizada por  $\mathbf{P}|_U$ . Como la  $(k, l)$ -estabilidad es una propiedad abierta, existe un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbf{P}|_U$  tal que para cualquier punto  $u \in \mathcal{U}$  la restricción de la extensión universal a  $X \times \{u\}$  determina una extensión sobre  $X$  y un haz vectorial  $\mathcal{F}_u$ .

Para todo punto  $u \in \mathcal{U}$  el haz vectorial  $\mathcal{F}_u$  es  $(k, l)$ -estable y tiene una extensión por haces vectoriales (no necesariamente estables). De esta manera  $\mathcal{U}$  parametriza a todos los haces vectoriales  $(k, l)$ -estables que son extensión de un haz vectorial de rango  $n - m$  y grado  $d - \delta$  por un haz vectorial de rango  $m$  y grado  $\delta$ .

Observemos que el abierto  $\mathcal{U}$  es irreducible pues  $U$  es un abierto en  $T_1 \times T_2$  que por definición es irreducible. A continuación calculamos la dimensión de  $\mathcal{U}$  como sigue.

Por construcción, la fibra de  $\mathbf{P}$  en cualquier punto de  $U$  es por Riemann-Roch igual a  $\delta(n - m) - (d - \delta)m + m(n - m)(g - 1) - 1$ . Como  $U$  es abierto en  $T_1 \times T_2$  entonces  $U$  es de dimensión igual a  $m^2(g - 1) + 1 + (n - m)^2(g - 1) + 1$ . Así el abierto  $\mathcal{U}$  tiene dimensión  $d(n - m) - \delta m + m(n - m)(g - 1) - 1 + m^2(g - 1) + 1 + (n - m)^2(g - 1) + 1$ . Esto es:

$$\dim \mathcal{U} = \delta n - dm + (n^2 - mn + m^2)(g - 1) + 1.$$

Si denotamos por  $A_{(k,l)}(n, d, m, \delta)$  al conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables que se obtienen como extensión de haces vectoriales de rango  $n - m$ , grado  $d - \delta$  por un haz vectorial de rango  $m$  y grado  $d$ , entonces la construcción anterior demuestra la siguiente

**Proposición 2.5.2.** *Para  $(k, l) \in R_1$  el conjunto  $A_{(k,l)}(n, d, m, \delta)$  es irreducible de dimensión  $\delta n - dm + (n^2 - mn + m^2)(g - 1) + 1$ .*

Si  $E \in A_{(k,l)}(n, d)$  y  $E_1$  un subhaz de Segre de  $E$  de rango  $m$  y grado  $\delta$ , entonces se cumple  $dm - n\delta > k(n - m) + ml$ . Además por el inciso 1 de la Proposición 1.6.7 sabemos que  $m(n - m)g \geq dm - n\delta$ . Por lo tanto  $m$  y  $\delta$  cumplen

$$m(n - m)g \geq dm - n\delta > k(n - m) + ml.$$

Como  $m$  es tal que  $1 \leq m \leq n - 1$ , entonces  $\delta$  sólo puede tomar un número finito de valores, de esta manera se tiene la siguiente

**Proposición 2.5.3.** *El conjunto de haces vectoriales  $(k, l)$ -estables cumple la siguiente igualdad*

$$A_{(k,l)}(n, d) = \bigcup_{(m,\delta)} A_{(k,l)}(n, d, m, \delta),$$

donde  $m$  y  $\delta$  son tales que  $m(n - m)g \geq dm - n\delta > k(n - m) + ml$ .

Enseguida daremos una descripción más a detalle de  $A_{(k,l)}(n, d)$ , para hacerlo relacionaremos la  $(k, l)$ -estabilidad y los invariantes de Segre. Es decir, las subvariedades de Segre  $M(n, d, m, s)$ , (ver, Teorema 1.6.10). Recordemos que son no vacías si y solo si  $s \equiv md \pmod n$ .

**Proposición 2.5.4.** *Se  $E$  es un haz vectorial de rango  $n$ , grado  $d$  y  $s_m(E)$  es el  $m$ -invariante de Segre. Entonces  $E$  es  $(k, l)$ -estable si y solo si para todo  $m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$  se cumple  $s_m(E) > k(n - m) + ml$ .*

**Demostración.** Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable y  $F \subset E$  de rango  $m$  y grado  $\delta$ , entonces  $\mu(E) - \mu(F) > (k(n - m) + ml)/nm$  si y solo si  $dm - n\delta > (k(n - m) + ml)/nm$ . Lo anterior se cumple para todo subhaz de rango  $m$ , si y solo si, se cumple para el subhaz de rango  $m$  y grado máximo. Por la definición de invariante de Segre concluimos que  $\mu(E) - \mu(F) > k(n - m) + ml$  si y solo si  $s_m(E) > (k(n - m) + ml)/nm$ , lo cual finaliza la demostración.  $\square$



**Proposición 2.5.5.** *Si  $(k, l) \in R_1$ , entonces*

$$A_{(k,l)}(n, d) = \bigcap_{m=1}^{n-1} \left( \bigcup_{s > (n-m)k+ml} M(n, d, m, s) \right).$$

**Demostración.**  $(\subseteq)$  Sea  $E \in A_{(k,l)}(n, d)$  por la Proposición 2.5.4, si  $m$  es tal que  $1 \leq m \leq n-1$ , entonces  $s_m(E) > k(n-m) + ml$ . De esta manera

$$E \in \bigcup_{s > (n-m)k+ml} M(n, d, m, s),$$

sin embargo lo anterior es para todo  $m$ , así se tiene la primera contención.

$(\supseteq)$  Si  $E$  está en la intersección, entonces  $s_m(E) > (n-m)k + ml$  para toda  $m$  y por la Proposición 2.5.4  $E$  es  $(k, l)$ -estable.  $\square$

Ahora que tenemos la relación entre ambas propiedades la usaremos para calcular la codimensión del complemento de  $A_{(k,l)}(n, d)$  en  $M(n, d)$ .

**Proposición 2.5.6.** *Si  $(k, l) \in A$ , entonces*

$$\text{Cod} (M(n, d) \setminus A_{(k,l)}(n, d)) \geq \min \left\{ \begin{array}{l} (n-1)(g-1) - k(n-1) - l, \\ (n-1)(g-1) - k - (n-1)l \end{array} \right\}.$$

**Demostración.** Sea  $E \in M(n, d) \setminus A_{(k,l)}(n, d)$  y  $F \subset E$  es un subhaz, de rango  $m$  y grado  $\delta$ . En la demostración de la Proposición 2.3.2, vimos que la dimensión de los haces vectoriales estables que tienen un subhaz  $F$  de rango  $m$ , tal que  $\mu_{k-l}(E) \geq \mu_k(F)$ , es igual a  $(n^2 - nm + m^2)(g-1) + 1 + dm - n\delta$ .

Además dicho número está acotado por

$$(n^2 - nm + m^2)(g-1) + 1 + dm - n\delta \leq (n^2 - nm + m^2)(g-1) + 1 + (n-m)k + ml.$$

De la desigualdad anterior y considerando que el conjunto de haces vectoriales que no son  $(k, l)$ -estables es un conjunto cerrado, se tiene una cota para la codimensión del complemento esto es

$$\dim M(n, d) - \dim (M(n, d) \setminus A_{(k,l)}(n, d)) \geq (nm - m^2)(g-1) - (n-m)k - ml.$$

A la derecha de la desigualdad, si consideramos  $m$  como una incógnita, se tiene la ecuación de una parábola alcanzando el mínimo en los extremos, es

decir cuando  $m = 1, n - 1$ . Por lo tanto, la codimensión del complemento está acotada por el menor de estos valores.  $\square$

Recordemos que si  $(k, l) \in R_1$ , entonces para todo  $m$ ,  $k(n - m) + ml < m(n - m)(g - 1)$ . Por la Proposición 1.6.10, si  $0 < s \leq k(n - m) + ml$  entonces  $\dim M(n, d, m, s) = n^2(g - 1) + 1 + s - m(n - m)(g - 1)$ . Por lo tanto, definimos las siguientes variables.

1. Consideramos  $\widetilde{s}_m := \max_s \{s \mid s \leq k(n - m) + ml, s \equiv md \pmod{n}\}$ ,
2. Tomamos  $s_\Delta := \min_m \{m(n - m)(g - 1) - \widetilde{s}_m\}$ .

Por definición,  $\widetilde{s}_m < m(n - m)(g - 1)$  para cualquier  $m$ , por lo que  $s_\Delta > 0$ . Considerando lo anterior se tiene la siguiente afirmación.

**Teorema 2.5.7.** *Si  $(k, l) \in R_1$ , entonces*

1.  $\dim A_{(k,l)}(n, d)^c = n^2(g - 1) + 1 - s_\Delta$ .
2.  $\text{cod } A_{(k,l)}(n, d)^c = s_\Delta$ .

donde el complemento es tomado respecto al espacio moduli  $M(n, d)$ .

**Demostración.** (1) De la Proposición (2.5.5), se tienen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
 \dim (A_{(k,l)}(n, d))^c &= \dim \left[ \bigcap_{m=1}^{n-1} \left( \bigcup_{s > k(n-m)+ml} M(n, d, m, s) \right) \right]^c, \\
 &= \dim \left[ \bigcup_{m=1}^{n-1} \left( \bigcup_{s > k(n-m)+ml} M(n, d, m, s) \right) \right]^c, \\
 &= \dim \left[ \bigcup_{m=1}^{n-1} \left( \bigcup_{s \leq k(n-m)+ml} M(n, d, m, s) \right) \right], \\
 &= \max_m \left\{ \max_s \{ \dim (M(n, d, m, s)) \} \right\}, \\
 &= \max_m \left\{ \max_s \{ n^2(g - 1) + 1 + s - m(n - m)(g - 1) \} \right\}, \\
 &= \max_m \{ n^2(g - 1) + 1 + \widetilde{s}_m - m(n - m)(g - 1) \}, \\
 &= n^2(g - 1) + 1 - s_\Delta.
 \end{aligned}$$

Obteniendo con esto nuestra afirmación.

(2) Dado que el complemento de  $A_{(k,l)}(n, d)$  es cerrado en  $M(n, d)$ , la afirmación se obtiene de la diferencia

$$\begin{aligned} \dim M(n, d) - \dim (A_{(k,l)}(n, d))^c &= n^2(g-1) + 1 - (n^2(g-1) + 1 - s_\Delta), \\ &= s_\Delta. \end{aligned}$$

□

---

## Capítulo 3

# $(k, l)$ -estabilidad en rango dos

---

En el estudio de haces vectoriales de rango dos veremos que la  $(k, l)$ -estabilidad depende de la suma  $k + l$ . Dadas dos parejas de enteros  $(k, l)$  y  $(k', l')$ , los conjuntos  $A_{(k,l)}(2, d)$  y  $A_{(k',l')}(2, d)$  son iguales si y solo si  $k + l = k' + l'$ . Así sustituiremos el término  $(k, l)$ -estable donde  $c = k + l$  y al conjunto  $A_{(k,l)}(2, d)$  lo denotamos por  $A_c(2, d)$ .

En este capítulo hacemos un estudio detallado de la  $c$ -estabilidad para haces vectoriales de rango dos. Con ello obtenemos la filtración

$$\emptyset = A_g(2, d) \subseteq \cdots \subseteq A_0 = M(2, d) \subseteq A_{-1}(2, d) \subseteq \cdots \subseteq A_{2-2g}(2, d) = \cdots .$$

Las contenciones no son necesariamente estrictas (vea las Proposiciones 3.1.6, 3.1.7). Haremos explícita la relación entre los conjuntos  $A_c(2, d)$  y la estratificación dada por el invariante de Segre.

En la sección 3.2, describiremos los conjuntos de haces vectoriales inestables  $c$ -estables de rango dos, los cuales denotaremos por  $A_c^{in}(2, d)$ . Demostraremos que la curva  $X$  se puede recuperar a través de los conjuntos de haces vectoriales inestables simples, esto demostrará un teorema tipo Torelli para haces vectoriales inestables de rango dos

## $c$ -estabilidad para rango dos

### 3.1.1. $c$ -estable

Si  $E$  es un haz vectorial de rango dos, la condición de  $(k, l)$ -estabilidad de  $E$  (ver, Definición 2.2.1) es:

$$\frac{d(E) + k - l}{2} > d(L) + k, \quad (3.1)$$

siendo equivalente a la desigualdad

$$d(E) - 2d(L) > k + l \quad (3.2)$$

(ver inciso 2, Observación 2.2.3). Por lo tanto si  $k + l = k' + l'$ ,  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable si y solo si  $E$  es  $(k', l')$ -estable. Esto nos lleva de manera natural a la siguiente

**Definición 3.1.1.** Sea  $E$  un haz vectorial de rango dos y  $c$  un entero. Decimos que  $E$  es  $c$ -estable si para todo subhaz lineal  $L \subset E$ ,  $\mu(E) - \mu(L) > (c/2)$  o de manera equivalente  $d(E) - 2d(L) > c$ . Denotamos al conjunto de haces vectoriales  $c$ -estables por  $A_c(2, d)$ .

**Proposición 3.1.2.** Un haz vectorial  $E$  es  $c$ -estable si y solo si es  $(k, l)$ -estable para  $k + l = c$ .

Para la  $(k, l)$ -estabilidad la Proposición 2.5.4 es el equivalente a la siguiente

**Observación 3.1.3.** De los resultados obtenidos en el Capítulo 2, se tiene que: Un haz vectorial  $E$  de rango dos y grado  $d$  es  $c$ -estable si y solo si su invariante de Segre es mayor a  $c$ , esto es  $s(E) > c$ .

**Proposición 3.1.4.** Para una curva algebraica  $X$  de género  $g \geq 2$  se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Si  $g \not\equiv d \pmod{2}$ , entonces  $A_c(2, d) \neq \emptyset$  si y solo si  $c < g - 1$ .

2. Si  $g \equiv d \pmod{2}$ , entonces  $A_c(2, d) \neq \emptyset$  si y solo si  $c \leq g - 1$ .

**Demostración.**  $(1, \Rightarrow)$  Sea  $E \in A_c(2, d)$ , si  $L \subset E$  es un subhaz lineal entonces  $c < d - 2d(L)$ . Lo anterior implica que  $c < s(E)$ . Dado que  $g \not\equiv d \pmod{2}$ , tenemos que  $s(E) \neq g$  y por la Proposición ?? sabemos que  $s(E) \leq g - 1$ . Por lo tanto  $c < s(E) \leq g - 1$ , lo cual implica que  $c < g - 1$ .

$(1, \Leftarrow)$  Esta implicación es consecuencia directa de la Proposición 2.3.2 al considerar  $n = 2$ .

$(2, \Rightarrow)$  La demostración es similar a  $((1, \Rightarrow))$  si tomamos en cuenta que con las hipótesis dadas se cumple  $c < s(E) \leq g$ .

$(2, \Leftarrow)$  Por la Proposición 2.3.2, sabemos que si  $c < g - 1$  entonces  $A_c(2, d) \neq \emptyset$ . Por lo tanto solo es necesario demostrar la afirmación para el caso  $c_0 = g - 1$ .

Tomamos  $E \in A_{g-2}$  es decir  $d(E) - 2d(L) > g - 2$  para todo  $L \subset E$  subhaz lineal. Por hipótesis  $g - 1 \not\equiv d \pmod{2}$ , lo que implica que  $d(E) - 2d(L) \neq g - 1$  para cualquier  $L \subset E$  como antes. Sin embargo lo anterior implica que  $d(E) - 2d(L) > g - 1$  para todo  $L \subset E$ , lo que equivale a  $E \in A_{g-1}(2, d)$ . Concluimos con esto que  $A_{g-1}(2, d) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Observación 3.1.5.** De la Definición 3.1.1 se tiene

1.  $A_0(2, d) = M(2, d)$ .
2. Si  $c > 0$ , entonces  $A_c(2, d) \subseteq M(2, d)$ .
3. Si  $c < 0$ , entonces  $M(2, d) \subseteq A_c(2, d)$ .
4.  $A_{c+1}(2, d) \subseteq A_c(2, d)$ .

Para el caso en que  $c > 0$ , el conjunto  $A_c(2, d)$  es una subvariedad del  $M(2, d)$  y se cumplen las siguientes contenciones

$$\emptyset = A_g(d) \subseteq A_{g-1}(d) \subseteq \cdots \subseteq A_1(d) \subseteq A_0(d) = M(2, d).$$

Estas contenciones no son necesariamente estrictas pues si  $E$  es un haz vectorial estable, esto no implica que  $E$  es  $(0, 1)$ -estable. En general si  $E$  es un haz vectorial  $c$ -estable, no implica que  $E$  es  $c + 1$ -estable. Sin embargo bajo ciertas condiciones, estas implicaciones son verdaderas. Las siguientes proposiciones nos dan las hipótesis necesarias y son válidas para todo  $c \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 3.1.6.** Si  $d$  es par,  $r \in \mathbb{Z}$  y  $2r + 1 < g$ , entonces

$$A_{2r}(2, d) = A_{2r+1}(2, d).$$

**Demostración.** ( $\supseteq$ ) Esta contención es clara a partir de la definición de  $c$ -estabilidad.

( $\subseteq$ ) Sea  $E \in A_{2r}(2, d)$ , por la Observación 3.1.3,  $s(E) > 2r$  lo que implica que  $s(E) \geq 2r + 1$ . Sin embargo  $s(E)$  es par ya que  $d$  es par. Por lo tanto  $s(E) > 2r + 1$  y nuevamente por la Observación 3.1.3 concluimos que  $E \in A_{2r+1}(2, d)$ .  $\square$

**Proposición 3.1.7.** *Si  $d$  es impar,  $r \in \mathbb{Z}$  y  $2r + 2 \geq g$ , entonces*

$$A_{2r+1}(d) = A_{2r+2}(d).$$

**Demostración.** ( $\supseteq$ ) Se obtiene directamente a partir de la definición de  $c$ -estabilidad.

( $\subseteq$ ) Sea  $E \in A_{2r+1}(2, d)$ , por la Observación 3.1.3,  $s(E) > 2r + 1$  lo que implica que  $s(E) \geq 2r + 2$ . Sin embargo  $s(E)$  es impar ya que  $d$  es impar. Por lo tanto  $s_1(E) > 2r + 2$ , nuevamente por la Observación 3.1.3 concluimos que  $E \in A_{2r+2}(2, d)$ .  $\square$

**Observación 3.1.8.** De las proposiciones anteriores se tiene:

- Si  $d$  es par, entonces  $M(2, d) = A_1(2, d)$ .
- Si  $d$  es impar, entonces  $M(2, d) = A_{-1}(2, d)$ .

En general la filtración que se obtiene mediante la  $c$ -estabilidad queda determinada como sigue:

Si  $d$  es par entonces se tiene

$$\begin{aligned} \emptyset &= A_g(2, d) \cdots \subset A_{2r+1}(2, d) = A_{2r}(2, d) \subset \cdots \subset A_3(2, d) = A_2(2, d) \subset \\ &\subset A_1(d) = A_0(d) \subset A_{-1}(2, d) = A_{-2}(2, d) \subset \cdots \subset A_{2-2g}(2, d). \end{aligned}$$

Si  $d$  es impar entonces se tiene

$$\begin{aligned} \emptyset &= A_g(d) \cdots \subset A_{2r+2} = A_{2r+1}(d) \subset \cdots \subset A_2(d) = A_1(d) \subset \\ &\subset A_0(d) = A_{-1}(2, d) \subset \cdots \subset A_{2-2g}(2, d). \end{aligned}$$

En las proposición 3.2.3, demostramos que estas filtraciones se estacionan a partir de  $A_{2-2g}$ .

Para haces de rango dos, por simplicidad representaremos las regiones de existencia en  $\mathbb{R}$ . Para hacerlo consideramos (como en la Proposición 3.1.4) los casos  $g \equiv d \pmod{2}$  y  $g \not\equiv d \pmod{2}$ . El trabajar con estos dos casos elimina la zona de “incertidumbre” que se daba en el caso general (vea, Observación 2.3.12).

**Observación 3.1.9.** En rango dos, la Proposición 3.1.4 se divide en dos casos con el propósito de determinar exactamente las regiones  $R$  y  $R_0$  (compare con (2.6) y (2.15)).

**Caso  $g \equiv d \pmod{2}$ .** En este caso las regiones son definidas como

- $R_0 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \geq g\}$ ,
- $R := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq g - 1\}$ ,
- $R_1 := \{c \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq c \leq g - 1\}$ ,
- $R_2 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq 0\}$ .

**Caso  $g \not\equiv d \pmod{2}$ .** Para este caso las regiones son

- $R_0 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \geq g - 1\}$ ,
- $R := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq g - 2\}$ ,
- $R_1 := \{c \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq c \leq g - 2\}$ ,
- $R_2 := \{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq 0\}$ .

Si  $d$  es par existen haces vectoriales semiestables y no estables. Supongamos  $E$  uno de estos haces vectoriales, de esta manera la filtración de Jordan-Hölder para  $E$  es  $0 \subset L \subset E$ . Por lo tanto, si  $E$  es  $c$ -estable entonces  $c < 0$ , (compare con Proposición 2.3.9). Así, la región  $R_3$  definida en rango general no existe para rango dos.

Ahora que hemos determinado las regiones consideramos el Teorema 2.4.2 y enunciamos la versión correspondiente para haces de rango dos.

**Teorema 3.1.10.** 1. Si  $c < g - 1$ ,  $A_{(c)}(2, d) \neq \emptyset$ .  
2. Si  $c \geq g$ ,  $A_{(c)}(2, d) = \emptyset$ .



3. Si  $0 \leq c < g - 1$ ,  $A_{(c)}(2, d) \subseteq M(n, d)$ .
4. Si  $c < 0$ ,  $M(2, d) \subset A_{(c)}(2, d)$ .

Para haces vectoriales de rango dos los conjuntos  $A_c^{in}(2, d)$  se determinan de la siguiente manera:

Si  $c \geq 0$ , el conjunto  $A_c(2, d)$  es un subconjunto abierto de  $M(2, d)$ , no vacío de dimensión  $4g - 3$  y  $A_c(2, d) = \bigsqcup_{s>c} M(2, d, s)$  (vea Proposición 2.5.1).

Nos preguntamos si es posible determinar las subvariedades  $M(2, d, s)$  en términos de la  $c$ -estabilidad. Una respuesta la obtenemos de la Observación 3.1.3, la cual se complementa con la siguiente

**Proposición 3.1.11.** *Si  $c \geq 0$ , entonces  $M(2, d, c+1) = A_c(2, d) \setminus A_{(c+1)}(2, d)$ .*

**Demostración.** Por definición,  $E \in M(2, d, c+1)$  si y solo si  $s(E) = c+1$ . De la Observación 3.1.3,  $s(E) = c+1$  si y solo si  $E \in A_c(2, d)$  y  $E \notin A_{(c+1)}(2, d)$ , completando así la demostración.  $\square$

Recordemos que para  $c > 0$   $A_c(2, d) \subset M(2, d)$ . Por lo que la dimensión y codimensión descritas en la siguiente proposición son tomados respecto del espacio moduli  $M(2, d)$  (ver Proposición 2.5.7).

**Teorema 3.1.12.** *Para  $c > 0$ , la dimensión y codimensión de los haces vectoriales estables que no son  $c$ -estables es:*

$$\dim (M(2, d) \setminus A_{(c)}(2, d)) = \begin{cases} 3g + c - 2, & \text{si } c \equiv d \pmod{2}, \\ 3g + c - 3, & \text{si } c \not\equiv d \pmod{2}, \end{cases}$$

y

$$\text{cod} (M(2, d) \setminus A_{(c)}(2, d)) = \begin{cases} g + c - 1, & \text{si } c \equiv d \pmod{2}, \\ g + c - 2, & \text{si } c \not\equiv d \pmod{2}. \end{cases}$$

**Demostración.** Se sigue de la demostración dada para la Proposición 2.5.7. Basta observar en este caso que

$$\widetilde{s}_m := \begin{cases} c, & \text{si } c \equiv d \pmod{2}, \\ c - 1, & \text{si } c \not\equiv d \pmod{2}, \end{cases}$$

y

$$s_{\Delta} = \begin{cases} g - c - 1, & \text{si } c \equiv d \pmod{2}, \\ g - c - 2, & \text{si } c \not\equiv d \pmod{2}. \end{cases}$$

□

### 3.1.2. Casos particulares

A continuación a manera de ejemplos se precisarán los resultados para  $g = 2, 3, 4$ .

*Caso  $g = 2, d$  impar.* Por la Proposición 3.1.4, se tiene que  $A_c(2, d) = \emptyset$  para  $c \geq 1$ . La filtración para este caso es:

$$\emptyset = A_2(2, d) = A_1(2, d) \subset A_0(2, d) = A_{-1}(2, d) \subset A_{-2}(2, d).$$

Por lo tanto todo haz vectorial en  $M(2, d)$  es únicamente estable ó 0-estable.

*Caso  $g = 2, d = 0$  ó  $d$  par.* Por la Proposición 3.1.4, se tiene que  $A_c(2, d) = \emptyset$  para  $c \geq 2$ . La filtración es:

$$\emptyset = A_2(2, d) \subset A_1(2, d) = A_0(2, d) \subset A_{-1}(2, d) = A_{-2}(2, d).$$

Todo haz vectorial estable es 1-estable. Existen haces vectoriales semiestables no estables. Todo haz vectorial inestable ( $-2$ )-estable es ( $-1$ )-estable.

*Caso  $g = 3, d$  impar.* Por la Proposición 3.1.4, se tiene que  $A_c(2, d) = \emptyset$  para  $c \geq 3$ , quedando la filtración de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \emptyset = A_3(2, d) \subseteq A_2(2, d) = A_1(2, d) \subset A_0(2, d) = A_{-1}(2, d) \subset \\ \subset A_{-2}(2, d) = A_{-3}(2, d) \subset A_{-4}(2, d). \end{aligned}$$

Todo haz vectorial 1-estable es 2-estable.

*Caso  $g = 3, d$  par.* Por la Proposición 3.1.4, se tiene que  $A_c(2, d) = \emptyset$  para  $c \geq 2$  y no vacío en otro caso. Así la filtración queda como

$$\emptyset = A_2(2, d) \subset A_1(2, d) = A_0(2, d) \subset A_{-1}(2, d) =$$

$$= A_{-2}(2, d) \subset A_{-3}(2, d) = A_{-4}(2, d).$$

Todo haz vectorial estable es 1-estable.

*Caso  $g = 4$ ,  $d$  impar.* Por la Proposición 3.1.4, se tiene que  $A_c(2, d) = \emptyset$  para  $c \geq 3$  y  $A_2(2, d) \neq \emptyset$ . Así de la Proposición 3.1.6, la filtración queda como sigue:

$$\begin{aligned} \emptyset = A_3(2, d) \subseteq A_2(2, d) = A_1(2, d) \subset A_0(2, d) = A_{-1}(2, d) \subset \\ \subset A_{-2}(2, d) = A_{-3}(2, d) \subset A_{-4}(2, d) = A_{-5}(2, d) \subset A_{-6}(2, d). \end{aligned}$$

*Caso  $g = 4$ ,  $d$  par.* Por la Proposición 3.1.4, se tiene que  $A_c(2, d) = \emptyset$  para  $c \geq 4$  y  $A_3(2, d) \neq \emptyset$ . Así de la Proposición 3.1.6, la filtración es:

$$\begin{aligned} \emptyset = A_4(2, d) \subseteq A_3(2, d) = A_2(2, d) \subset A_1(2, d) = A_0(2, d) \subset A_{-1}(2, d) = \\ = A_{-2}(2, d) \subset A_{-3}(2, d) = A_{-4}(2, d) \subset A_{-5}(2, d) = A_{-6}(2, d). \end{aligned}$$

Siendo todo haz vectorial 2-estable es 3-estable y todo estable es 1-estable.

Debemos observar que en este caso los haces vectoriales  $A_{-1}(2, d) \setminus A_0(2, d)$  corresponde al conjunto de los haces vectoriales semiestables no estables. De igual manera ya que todo haz estable es  $c$ -estable cuando  $c \leq 0$ , entonces los haces vectoriales que se agregan son haces vectoriales inestables. El estudio de los haces vectoriales inestables indescomponibles  $(k, l)$ -estables se hace en la siguiente sección.

— Sección 3.2 —

## Haces vectoriales inestables

Para un haz vectorial inestable  $E$  de rango dos sabemos por la Sección 1.5 que tiene un único subhaz de grado máximo que lo desestabiliza, al cual denotaremos por  $L_1$ . Para continuar fijaremos la siguiente notación, la cual será usada a lo largo de la sección.

**Definición 3.2.1.** Sea  $E$  un haz vectorial inestable de rango dos sobre  $X$ . Al subhaz de  $E$  de grado máximo que lo desestabiliza le llamamos *el subhaz de Harder-Narasimhan de  $E$*  (subhaz HN de  $E$ ). El *tipo de Harder-Narasimhan de  $E$*  (tipo HN de  $E$ ) es el grado del subhaz HN de  $E$ . La unicidad del subhaz HN de  $E$  determina una única extensión

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0,$$

llamada la *sucesión de Harder-Narasimhan de  $E$*  (sucesión HN de  $E$ ) donde  $L_1$  es precisamente el subhaz HN de  $E$ .

Una propiedad de la sucesión de Harder-Narasimhan es

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $E$  un haz vectorial inestable de rango dos,  $E$  es indescomponible si y solo si la sucesión HN de  $E$  no escinde.*

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) La primera implicación es directa.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $E$  es descomponible, esto es  $E = L' \oplus L''$ . Sabemos que  $d(L') \neq d(L'')$  pues en caso contrario  $E$  sería semiestable. Sin pérdida de generalidad supondremos  $d(L') > d(L'')$ . Por la unicidad del subhaz HN de  $E$  la sucesión  $0 \rightarrow L' \rightarrow E \rightarrow L'' \rightarrow 0$  es la sucesión de HN de  $E$  y escinde lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 3.2.3.** *Si  $E$  es un haz vectorial inestable, indescomponible de grado  $d$  y tipo HN igual a  $d_1$ , entonces  $0 < 2d_1 - d \leq 2g - 2$ .*

**Demostración.** Si  $2d_1 - d > 2g - 2$  y la sucesión HN de  $E$  es  $0 \rightarrow L_1 \rightarrow E \rightarrow L_2 \rightarrow 0$ , entonces  $d(L_2^* \otimes L_1) = d_1 - d_2 = 2d_1 - d > 2g - 2$ , por lo que  $h^1(L_2^* \otimes L_1) = 0$ . De lo anterior concluimos que la sucesión HN de  $E$  escinde y por lo tanto  $E$  es descomponible, esto es una contradicción.  $\square$

Denotamos por  $N(2, d)$  al conjunto de clases de isomorfismo de haces inestables indescomponibles de rango dos y grado  $d$  y por  $N(2, d, d_1)$  al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales inestables, indescomponibles, de rango dos, grado  $d$  y tipo HN igual a  $d_1$ . De manera similar denotamos por  $N(2, -d, \mathcal{O}_X)$  el conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales de rango dos, grado  $d$  sobre  $X$  con subhaz de HN igual a  $\mathcal{O}_X$ .

Si  $E \in N(2, d, d_1)$  y  $L_1$  es el subhaz HN de  $E$ , entonces  $d(L_1) = d_1$  y la sucesión HN de  $E$  es

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0.$$

Haciendo producto tensorial de la extensión por el haz vectorial  $L_1^*$  obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow E \otimes L_1^* \rightarrow L \otimes L_1^* \rightarrow 0,$$

con  $E \otimes L_1^* \in N(2, d - 2d_1, \mathcal{O}_X)$ . De esta manera se tiene la siguiente biyección

$$N(2, d, d_1) \cong N(2, d - 2d_1, \mathcal{O}_X) \times \text{Pic}^{d_1}(X). \quad (3.3)$$

Observe que si  $E' \in N(2, d - 2d_1, \mathcal{O}_X)$  y  $L \in \text{Pic}^{d_1}(X)$  entonces  $E' \otimes L \in N(2, d, d_1)$ .

**Proposición 3.2.4.** [4, Proposición 2.4] *El conjunto  $N(2, d, \mathcal{O}_X)$  es no vacío si y solo si  $2 - 2g \leq d \leq -1$ . Es más,  $N(2, d, d_1)$  es no vacío si y solo si  $2 - 2g \leq d - 2d_1 \leq -1$ .*

**Demostración.** Sea  $D$  un divisor efectivo  $D$  de grado  $2g - 2 + d$  y denotamos por  $L := \mathcal{O}(D)$  el haz asociado al divisor. Entonces  $h^0(X, L) \neq 0$  y por dualidad de Serre  $h^1(X, L^* \otimes K_X) \neq 0$ . Por lo que existe una extensión  $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow E \rightarrow L \otimes K_X^* \rightarrow 0$  que no escinde y por lo tanto  $E \in N(2, d, \mathcal{O}_X)$ . La segunda afirmación se obtiene a partir de (3.3).  $\square$

### 3.2.1. Espacio moduli $M^{ind}(2, d, \mathcal{O}_X, r)$ .

Sea  $\mathcal{L}$  el haz de Poincaré sobre  $X \times \text{Pic}^d(X)$ , con  $0 < d < 2g - 2$ . Consideramos el morfismo proyección  $\pi_2 : X \times \text{Pic}^d(X) \rightarrow \text{Pic}^d(X)$ . La gavilla  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L})$  parametriza todas las extensiones del tipo  $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow E \rightarrow L^* \rightarrow 0$ , con  $L^*$  un haz lineal de grado  $-d$ . Sin embargo, pueden existir haces lineales  $L_1, L_2 \in \text{Pic}^d(X)$  con  $H^0(X, L_1) \neq H^0(X, L_2)$ . Por Riemann-Roch  $H^1(X, L_1) \neq H^1(X, L_2)$ . Así  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L})$  no es necesariamente una gavilla localmente libre. Si restringimos la gavilla  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L})$  a un conjunto donde  $\dim H^0(X, L)$  sea constante para cualquier  $L$ , entonces la gavilla  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L})$  es de rango constante.

En [4], se demostró que la estratificación plana de  $\mathcal{R}^1(\mathcal{L})$  está dada por las variedades de Brill-Noether  $B(1, d, r)$ . Recordemos que  $B(1, d, r) \subset \text{Pic}^d(X)$  es el locus de haces lineales de grado  $d$  que tienen al menos  $r$  secciones.

Si  $Y_r^d := B(1, d, r) - B(1, d, r+1) \subset \text{Pic}^d(X)$  son los haces lineales tales que  $\dim H^0(X, L) = r$ . Dado que  $(\pi_2)_*(\mathcal{L}|_{Y_r^d})$  es localmente libre en  $Y_r^d$  y conmuta con el cambio de base, entonces  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L}|_{Y_r^d})$  conmuta con el cambio de base. De esta manera  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L}|_{Y_r^d})$  es localmente libre y por Riemann-Roch es de rango  $r + g - 1 - d$ . Además ya que  $\mathcal{L}|_{Y_r^d}$  es localmente libre, se tiene el isomorfismo  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L}|_{Y_r^d}) \cong \text{Ext}_{\pi_2}((\mathcal{L}|_{Y_r^d})^*, \mathcal{O}_{X \times Y_r^d})$ .

Denotamos por  $P_r^d$  a la proyectivización de  $\mathcal{R}_{(\pi_2)_*}^1(\mathcal{L}|_{Y_r^d})^*$ . En [4] se prueba que  $P_r^d$  representa al stack  $M^{\text{ind}}(2, d, \mathcal{O}_X, r)$ . Además se tiene que

$$M^{\text{ind}}(2, d, d_1, r) = M^{\text{ind}}(2, d - 2d_1, \mathcal{O}_X, r) \times \text{Pic}^{d_1}(X).$$

Además en [4, Proposición 7.5] se demostró que  $M^{\text{ind}}(2, -d, d_1, r)$ , es no vacío si y solo si se cumplen las siguientes condiciones

1.  $0 \leq r \leq g$ .
2.  $1 \leq d \leq 2g - 2$ .
3.  $r - d + g - 1 \geq 1$ .
4.  $B_X(1, d, r) \neq \emptyset$ .

En particular, para curva general se probó

**Teorema 3.2.5.** [4, Teorema 7.7] *Sea  $X$  una curva general de género  $g \geq 2$  y  $r, d, d_1$  enteros tales que  $3 - 2g \leq d - 2d_1 \leq -1$ ,  $1 \leq r \leq g$ . Sea  $\beta = g - r(r - 2d_1 + d + g - 1)$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *El esquema  $M^{\text{ind}}(2, d, d_1, r) \neq \emptyset$  si  $0 \leq \beta \leq g - 1$  y vacío si  $g \leq \beta$ .*
2. *Si  $X$  es general, entonces  $M^{\text{ind}}(2, d, d_1, r)$  es no vacío si y solo si  $0 \leq \beta \leq g - 1$ , y en este caso  $M^{\text{ind}}(2, d, d_1, r)$  es reducido y de dimensión  $2g - (r - 1)(r - 2d_1 + d + g - 1) - 1$ .*
3. *Si  $X$  es general y  $1 \leq \beta \leq g - 1$ . Entonces  $M^{\text{ind}}(2, d, d_1, r)$  es integral y suave.*

A continuación relacionaremos los espacios  $N(2, d, d_1)$  con los espacios  $A_c(2, d)$  para  $c < 0$ . tipo de Harder Narasimhan de un haz vectorial con la  $c$ -estabilidad. Con esto daremos algunas propiedades al conjunto  $A_c^{\text{in}}(2, d)$ . Recuerde que  $N(2, d)$  denota al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales inestables indecomponibles de rango dos y grado  $d$ .

**Teorema 3.2.6.** *Para haces vectoriales inestables de rango dos y grado  $d$  se tienen las siguientes afirmaciones*

1. Si  $E \in N(2, d)$  con tipo HN igual a  $d_1$ , entonces  $E \in A_c(2, d)$  si y solo si  $c < d - 2d_1$ .
2. Si  $d$  es par, entonces  $c \geq -2$  implica  $A_c^{in}(2, d) = \emptyset$ .
3. Si  $d$  es impar, entonces  $c \geq -1$  implica  $A_c^{in}(2, d) = \emptyset$ .
4. Si  $c \leq 2 - 2g$ , entonces  $N(2, d) \subset A_c^{in}(2, d)$ .

**Demostración.** (1) Para cualquier subhaz lineal  $L \subset E$  se cumple que  $d - 2d(L) \geq d - 2d_1$ . Por lo que  $d - 2d_1 > c$  si y solo si  $d - 2d(L) > c$  para todo subhaz lineal  $L$ , esto es si y solo si  $E \in A_c(2, d)$ .

Para la demostración de (2) y (3) basta observar lo siguiente: si  $E$  es inestable de grado impar con tipo HN  $d_1$  entonces  $d - 2d_1 \leq -1$ . Si  $E$  es inestable de grado par con tipo HN  $d_1$  entonces  $d - 2d_1 < -1$ . Así, por el inciso (1) se tiene  $E \notin A_c^{in}(2, d)$ .

(4) Si  $E \in N(2, d)$  con tipo HN  $d_1$ , entonces por la Proposición 3.2.3,  $d - 2d_1 \geq 2 - 2g$ . Del inciso (1) esto implica que  $E \in A_c^{in}(2, d)$  para  $c \leq 2 - 2g$ .  $\square$

**Teorema 3.2.7.** *Si  $c < -1$ , entonces*

$$A_c^{in}(2, d) = \bigsqcup_{c < d - 2d_1} N(2, d, d_1).$$

**Demostración.** ( $\subseteq$ ) Como en la demostración de la Proposición 2.5.5, si  $E \in A_c^{in}(2, d)$  con tipo HN igual a  $d_1$ , entonces  $d - 2d_1 > c$ .

( $\supseteq$ ) Si  $E$  está en algún  $N(2, d, d_1)$  entonces para cualquier subhaz lineal  $L$  se cumple  $d - 2d(L) \geq d - 2d_1 > c$ , por lo tanto  $E \in A_c^{in}(2, d)$ .  $\square$

---

## Capítulo 4

# Aplicaciones

---

En este capítulo a manera de aplicación de la  $(k, l)$ -estabilidad, daremos una generalización de las curvas de Hecke, introducidas por Narasimhan y Ramanan en [24] y trabajadas posteriormente por Hwang en [12, 13] entre otros. La generalización es construir lo que denominaremos *grassmanianas de Hecke*. La  $(k, l)$ -estabilidad será la propiedad necesaria para asegurar que la modificación de Hecke  $E^V$  de un haz estable  $E$  sea estable (ver, Sección 1.3), esto nos permite definir un morfismo  $\Psi_{(E_x^V)^*} : \mathbb{G}(r, (E_x^V)^*) \rightarrow M(n, \det(E))$  siendo la imagen una *grassmaniana de Hecke*.

---

### Sección 4.1

## Modificaciones de Hecke y $(k, l)$ -estabilidad

Iniciamos observando el comportamiento de la  $(k, l)$ -estabilidad al considerar modificaciones de Hecke. Los resultados obtenidos serán usados en la siguiente sección.

En la Sección 1.3 vimos que dado un haz vectorial  $E$  de rango  $n$  grado  $d$  y  $1 \leq r \leq n - 1$ , entonces  $\text{mod}_{n-r}(E, x)$  denota el conjunto de  $n - r$  modificaciones de Hecke de  $E$ , fijando el punto  $x \in X$ . Estas modificaciones son determinadas por ternas del tipo  $(E, x, V)$ , siendo  $V \subset E_x$  un subespacio vectorial de dimensión  $n - r$ . Además si  $E^V$  es la modificación de Hecke correspondiente a  $(E, x, V)$ , entonces escribimos  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$  y se



tiene una sucesión exacta de gavillas coherentes

$$0 \rightarrow E^V \rightarrow E \rightarrow (E_x/V) \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow 0.$$

Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable y  $E^V$  una modificación de Hecke, entonces no implica que  $E^V$  sea  $(k, l)$ -estable. Sin embargo, se cumple la siguiente afirmación.

**Proposición 4.1.1.** *Si  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable y  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$ , entonces  $E^V$  es un haz vectorial  $(k, l-r)$ -estable.*

**Demostración.** Tomamos  $G$  un subhaz vectorial de  $E^V$  y  $G'$  el subhaz de  $E$  generado por  $G$ . Entonces, ambos haces vectoriales son del mismo rango y  $\mu(G') \leq \mu(G)$ . Dado que  $E$  es  $(k, l)$ -estable se tiene que,

$$\mu_k(G') \leq \mu_k(G) \leq \mu_{k-l}(E) = \mu_{k-l+r}(E^V),$$

lo que demuestra que  $E^V$  es  $(k, l-r)$ -estable.  $\square$

De acuerdo a la proposición anterior para  $r > 0$ , si  $E \in A_{(0,r)}(n, d) \subset M(n, d)$  y  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$ , entonces  $E^V$  es estable. Esta afirmación ocurre para cualquier subespacio  $V \subset E_x$  de dimensión  $n-r$ . Por lo que si  $E$  es un  $(0, r)$ -estable entonces para cualquier punto  $x \in X$  y para todo  $V \in \mathbb{G}(n-r, E_x)$ , la modificación  $E^V$  es estable.

A continuación demostraremos que existe un morfismo de  $\mathbb{G}(n-r, E_x)$  a  $M(n, d)$ , para esto primero la siguiente:

**Proposición 4.1.2.** *Consideramos  $(k, l)$  con  $k+l \geq r \geq 1$ . Sean  $F$  y  $E$  haces vectoriales tales que  $F$  es  $(k, l-r)$ -estable,  $E$  es  $(k, l)$ -estable y  $\det(E) \otimes \mathcal{O}(-rx) = \det(F)$ . Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

1. Si  $f : F \rightarrow E$  es un homomorfismo, entonces  $f$  es de rango máximo.
2.  $h^0(X, \text{Hom}(F, E)) \leq 1$ .

**Demostración.** (1) Si  $f$  no es de rango máximo entonces se tiene la descomposición

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow h & & \\ E & \longleftarrow & E' & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

con  $h$  de rango máximo y  $\mu(F'') \leq \mu(E')$  (ver Definición 1.1.5).

De la  $(k, l - r)$ -estabilidad de  $F$  y por el inciso 3 de la Observación 2.2.3 se cumple  $\mu_{k-l+r}(F) < \mu_{-l+r}(F'')$ . Similarmente por la  $(k, l)$ -estabilidad de  $E$  obtenemos  $\mu_k(E') < \mu_{k-l}(E)$ . Usando estas desigualdades concluimos

$$\mu_k(E') < \mu_{k-l}(E) = \mu_{k-l+r}(F) < \mu_{-l+r}(F'') \leq \mu_{-l+r}(E'),$$

y ello implica  $k + l < r$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $f$  es de rango máximo.

(2) Si  $f : F \rightarrow E$ , entonces por la afirmación (1),  $f$  es de rango máximo. Tomemos el homomorfismo asociado  $\bigwedge^n f : \bigwedge^n F \rightarrow \bigwedge^n E$ , es decir,  $\bigwedge^n f : \det(E) \otimes \mathcal{O}(-rx) \rightarrow \det(E)$  el cual se anula únicamente en el punto  $x$  y lo hace con multiplicidad  $r$ .

Por otra parte, si  $f, g \in \text{Hom}(F, E)$  son linealmente independientes, entonces existe un punto  $y \in X$  con  $y \neq x$  y valores  $a, b$  ambos no cero tales que  $af_y + bg_y$  no es un isomorfismo. Esto implica que el morfismo  $af_y + bg_y$  se anula en  $y$ , por lo que no es de rango máximo. Ello demuestra la segunda parte.  $\square$

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $(k, l)$  tal que  $(k, l - r) \in R_1$ . Si  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable, entonces se tiene el siguiente morfismo*

$$\begin{aligned} \Psi_{E_x} : \mathbb{G}(n - r, E_x) &\rightarrow M(n, \det(E) \otimes \mathcal{O}(-rx)), \\ V &\mapsto [E^V]. \end{aligned}$$

**Demostración.** La condición  $(k, l - r) \in R_1$  es necesaria para observar que todo haz vectorial  $E^V$  es estable (inciso 2, Teorema 2.4.2 y Proposición 4.1.1).

Denotaremos por  $\mathbb{G}$  la grassmaniana  $\mathbb{G}(n - r, E_x)$ . De esta manera, si  $p_i$  es la proyección a la  $i$ -ésima entrada, se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow p_1^*E \rightarrow p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

definida sobre  $X \times \mathbb{G}$ , donde  $\tau$  denota el haz vectorial tautológico sobre  $\mathbb{G}$ . La sucesión exacta (4.1) se obtiene de la siguiente manera:

Observe que el morfismo  $p_1^*E \rightarrow p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x$ , es el morfismo cero al considerar puntos fuera de  $\{x\} \times \mathbb{G}$ . Por lo que existe una biyección entre los morfismos

definidos en  $\{x\} \times \mathbb{G}$  que van de  $p_1^*E|_{x \times \mathbb{G}}$  en  $p_2^*\tau$  y los morfismos de  $p_1^*E$  en  $p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x$ .

Por lo tanto si consideramos la inclusión

$$\begin{aligned} i_x : \mathbb{G} &\rightarrow X \times \mathbb{G}, \\ g &\mapsto (x, g). \end{aligned}$$

entonces

$$H^0(X \times \mathbb{G}, \text{Hom}(p_1^*E, p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x))$$

es isomorfo a

$$H^0(\{x\} \times \mathbb{G}, i_x^* \text{Hom}(p_1^*E, p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x)),$$

donde  $i_x^* \text{Hom}(p_1^*E, p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x)$  es la restricción de los morfismos a  $\{x\} \times \mathbb{G}$ . Sin embargo, también se tienen los isomorfismos

$$\begin{aligned} &H^0(\{x\} \times \mathbb{G}, i_x^* \text{Hom}(p_1^*E, p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x)) \\ &\cong H^0(\mathbb{G}, \text{Hom}(i_x^*p_1^*E, i_x^*(p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x))) \\ &\cong H^0(\mathbb{G}, \text{Hom}(i_x^*p_1^*E, \tau)). \end{aligned}$$

Siendo  $i_x^*p_1^*E \cong E_x \times \mathbb{G}$ , el trivial sobre  $\mathbb{G}$  con fibra  $E_x$ . Existe un homomorfismo canónico y sobreyectivo

$$\alpha : i_x^*p_1^*E \rightarrow \tau$$

Sea  $\beta : p_1^*E \rightarrow p_2^*\tau \otimes p_1^*\mathcal{O}_x$  el morfismo tal que  $i_x^*\beta = \alpha$ . Así  $\beta$  es el morfismo sobreyectivo que determina la sucesión exacta (4.1). La gavilla  $\mathcal{F}$  es el kernel de  $\beta$ . La familia  $\mathcal{F}$  es tal que, si  $V \in \mathbb{G}(n-r, E_x)$  entonces  $\mathcal{F}_V$  es la modificación de Hecke  $E^V$  de  $E$ .

Como  $E^V$  es estable, entonces la familia  $\mathcal{F}$  define el morfismo  $\Psi_{E_x} : \mathbb{G} \rightarrow M(n, \det(E) \otimes \mathcal{O}(-rx))$ .  $\square$

**Observación 4.1.4.** Consideremos el caso cuando el punto en la curva  $X$  no está fijo. De este modo, el conjunto  $\text{mod}_{n-r}(E)$  (ver Definición 1.3.4) está en biyección con la grassmaniana  $\mathbb{G}(n-r, E)$  (ver, Proposición 1.3.6). Si  $g \in \mathbb{G}(n-r, E)$  entonces  $g = (y, V)$ , donde  $y \in X$  un punto y  $V \subset E_y$ .

Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable con  $(k, l), (k, l - r) \in R_1$ , entonces todo  $g \in \mathbb{G}(n - r, E)$  determina un punto en la curva y un subespacio de dimensión  $n - r$  los que a su vez definen una modificación  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E)$ . Por las Proposiciones 4.1.1 y 2.4.2,  $E^V$  es estable, de lo que tenemos una aplicación

$$\Psi_E : \mathbb{G}(n - r, E) \rightarrow M(n, d - r)$$

(vea Proposición 4.2.5). Del inciso 2, Proposición 4.1.2  $\Psi_E$  es inyectiva.

**Proposición 4.1.5.** *Sea  $(k, l)$ , tales que  $(k, l - r) \in R_1$ . Si  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable, se tiene un morfismo*

$$\begin{aligned} \Psi_E : \mathbb{G}(n - r, E) &\rightarrow M(n, d - r), \\ g &\mapsto [E^V]. \end{aligned}$$

donde  $E^V$  es la modificación de Hecke correspondiente al punto  $g$ .

**Demostración.** Sean  $p_i$  los morfismos proyección a la  $i$ -ésima entrada. Denotamos por  $\mathbb{G}' := \mathbb{G}(n - r, E)$  la grassmaniana de  $E$  y por  $\pi$  el morfismo proyección  $\pi : \mathbb{G}' \rightarrow X$ .

Consideramos  $\Delta(\mathbb{G}' \times \mathbb{G}')$  la diagonal y hacemos  $(\pi \times Id) : \Delta(\mathbb{G}' \times \mathbb{G}') \rightarrow X \times \mathbb{G}'$ . La imagen de este morfismo es un divisor en  $X \times \mathbb{G}'$ , al cual denotamos por  $D_{\mathbb{G}'}$ . Se tiene una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow H(E) \rightarrow p_1^*E \rightarrow p_2^*\tau \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathbb{G}'}} \rightarrow 0,$$

donde  $\tau$  es el haz vectorial tautológico de cocientes sobre  $\mathbb{G}(n - r, E)$  y  $\mathcal{O}_{D_{\mathbb{G}'}}$  es la gavilla con soporte el divisor  $D_{\mathbb{G}'}$ . Esta sucesión exacta se obtiene al igual que en (4.1) al considerar el morfismo  $\beta : p_1^*E \rightarrow p_2^*\tau \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathbb{G}'}}$  correspondiente al morfismo sobreyectivo  $p_1^*E \rightarrow \tau$  de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Theta_\pi^* \otimes \tau \rightarrow p_1^*E \rightarrow \tau \rightarrow 0.$$

(ver 4.1) donde  $\Theta_\pi$  es el tangente a las fibras de  $\pi$ . De este modo,  $H(E)$  determina una familia de haces vectoriales estables cuyo morfismo de clasificación es el morfismo

$$\Psi_E : \mathbb{G}(n - r, E) \rightarrow M(n, d - r)$$

□

Ahora probaremos que el morfismo es un encaje para ello, primero el siguiente Lema de Narasimhan y Ramanan.

**Lema 4.1.6.** [24, Lema 5.10] Sea  $X$  un esquema propio sobre  $k$  y  $\mathcal{F}$  una gavilla coherente de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Sea  $S$  un esquema y

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow p_1^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

una sucesión de gavillas coherentes sobre  $X \times S$  con  $\mathcal{G}$  plana sobre  $S$ . Entonces  $\mathcal{H}$  es una familia plana de  $\mathcal{O}_X$ -módulos parametrizada por  $S$  y su deformación infinitesimal en  $s_0 \in S$  es el negativo de la composición de la aplicación natural  $T_{s_0} \rightarrow H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{H}_0, \mathcal{G}_0))$  y el homomorfismo cofrontera  $H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{H}_0, \mathcal{G}_0)) \rightarrow \text{Ext}^1(X, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$  asociado a la sucesión  $0 \rightarrow \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow 0$ .

**Proposición 4.1.7.** El morfismo  $\Psi_E : \mathbb{G}(n-r, E) \rightarrow M(n, d-r)$  es un encaje

**Demostración.** Consideramos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H(E) \rightarrow p_1^*(E) \rightarrow p_2^* \tau \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathbb{G}'}} \rightarrow 0.$$

El tangente de  $\mathbb{G}(n-r, E)$  se identifica con

$$H^0(X \times \mathbb{G}(n-r, E), \text{Hom}(H(E)|_{D_{\mathbb{G}'}}), \tau).$$

De acuerdo al Lema 4.1.6, la deformación infinitesimal de la familia  $H(E)$  está dada salvo el signo por el homomorfismo cofrontera

$$H^0(X \times \mathbb{G}(n-r, E), \text{Hom}(H(E)|_{D_{\mathbb{G}'}}), \tau) \rightarrow \mathcal{R}^1(p_2)_*(\text{End } H(E)),$$

obteniendo así la sucesión exacta

$$0 \rightarrow (p_2)_*(\text{End } H(E)) \rightarrow (p_2)_*(\text{Hom}(H(E), p_1^* E)) \rightarrow$$

$$\text{Hom}(H(E)|_{D_{\mathbb{G}'}}), \tau) \rightarrow \mathcal{R}^1(p_2)_* \text{End}(H(E)).$$

Por el inciso 2 del Teorema 2.4.2, la familia  $H(E)$  es de haces estables, además por el inciso 2 de la Proposición 4.1.2 tenemos la siguiente

$$(p_2)_*(\text{End } H(E)) \cong (p_2)_*(\text{Hom}(H(E), p_1^* E)) \cong \mathcal{O}_{D_{\mathbb{G}'}}$$

Por lo que de la sucesión exacta en cohomología tenemos que la diferencial de  $\Psi_E$  es inyectiva probando la proposición.  $\square$

## Grassmanianas de Hecke

A continuación desarrollamos una generalización de Hecke en las que consideraremos variedades grassmanianas.

En las siguientes páginas fijaremos: un punto  $x \in X$ , un haz vectorial  $E$  de rango  $n$ , grado  $d$  y  $V$  un subespacio vectorial de  $E_x$  de dimensión  $n - r$ .

Sea  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$  determinado por la terna  $(E, x, V)$  (ver, Sección 1.3). Con estos elementos se tiene la siguiente sucesión exacta de gavillas coherentes.

$$0 \longrightarrow E^V \longrightarrow E \xrightarrow{f} ((E_x)/V) \otimes \mathcal{O}_x \longrightarrow 0. \quad (4.2)$$

Similarmente para  $(E^V)^*$  las modificaciones de Hecke son:

Cada  $W \in \mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*)$  determina la modificación de Hecke  $E^{V,W}$  de  $(E^V)^*$  definida por la siguiente sucesión exacta de gavillas coherentes

$$0 \longrightarrow E^{V,W} \longrightarrow (E^V)^* \longrightarrow ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

**Observación 4.2.1.** Para cualquier  $W \in \mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*)$  la modificación de Hecke  $E^{V,W}$  es tal que  $\det((E^{V,W})^*) = \det(E)$  y  $r(E^{V,W})^* = r(E)$ .

**Proposición 4.2.2.** Si  $E$  es  $(k, l)$ -estable, entonces  $(E^{V,W})^*$  es  $(k - r, l - r)$ -estable.

**Demostración.** Sea  $E$  un haz vectorial  $(k, l)$ -estable, por la Proposición 4.1.1,  $E^V$  es un haz vectorial  $(k, l - r)$ -estable. Por el comportamiento de la  $(k, l)$ -estabilidad bajo dualidad (Observación 1.3.3) el haz vectorial  $(E^V)^*$  es  $(l - r, k)$ -estable. Aplicando nuevamente la Proposición 4.1.1, al  $(E^V)^*$  se tiene que  $E^{V,W}$  es  $(l - r, k - r)$ -estable. Nuevamente de la Observación 1.3.3,  $(E^{V,W})^*$  es  $(k - r, l - r)$ -estable.  $\square$

**Corolario 4.2.3.** Si  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable con  $k, l \geq r$ , entonces para todo  $E^{V,W} \in \text{mod}_{n-r}((E^V)^*, x)$ ,  $E^{V,W}$  es un haz vectorial estable.

**Demostración.** Por la Proposición 4.2.2,  $E^{V,W}$  es un haz vectorial  $(l - r, k - r)$ -estable. Como  $k, l \geq r$  entonces  $(l - r, k - r) \in R_1$  (toda pareja de positivos está en  $R_1$ ) lo que implica que  $E^{V,W}$  es estable.  $\square$

**Observación 4.2.4.** Considerando la inclusión de gavillas  $0 \rightarrow E^V \rightarrow E$  de la sucesión (4.2). La restricción define un morfismo  $E_x^V \rightarrow E_x$  y denotamos por  $W_0$  al kernel de la restricción. Entonces  $W_0 \in \mathbb{G}(r, E_x^V)$  y  $W_0^\perp = (E_x^V/W_0)^*$ , de esta manera  $W_0^\perp \in \mathbb{G}(n-r, (E^V)^*)$  y por lo tanto define la modificación de Hecke  $E^{V, W_0^\perp}$ . Esta modificación es tal que  $(E^{V, W_0^\perp})^* \cong E$ .

Por la Proposición 4.1.3, se tiene un morfismo de  $\mathbb{G}(n-r, (E_x^V)^*) \rightarrow M(n, \det(E))$ . Por la Observación 4.2.4,  $E$  está en la imagen del morfismo, por lo cual se tiene la siguiente:

**Proposición 4.2.5.** Sea  $(k, l)$  tales que  $(k - r, l - r) \in R_1$ . Si  $E$  es un haz vectorial  $(k, l)$ -estable y  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$ . Se tiene un morfismo

$$\begin{aligned} \Psi_{(E_x^V)^*} : \mathbb{G}(n-r, (E_x^V)^*) &\rightarrow M(n, \det(E)) \\ W &\mapsto [(E^{V,W})^*] \end{aligned}$$

Además la imagen de  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  contiene a  $E$ .

**Definición 4.2.6.** Sea  $(k, l)$  tal que  $(k - r, l - r) \in R_1$ ,  $E$  un haz vectorial  $(k, l)$ -estable de rango  $n$  grado  $d$  y  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$ . Entonces el conjunto

$$\{(E^{V,W})^* \mid W \in \mathbb{G}(n-r, (E_x^V)^*)\},$$

de haces vectoriales estables en  $M(n, d)$  es la *grassmaniana de Hecke* de  $E$  determinada por  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$ . En el caso particular  $r = n-1$  entonces las grassmanianas de Hecke son las llamadas curvas de Hecke.

**Proposición 4.2.7.** Sea  $(k, l)$  tal que  $k + l \geq 2r$ ,  $(k - r, l - r) \in R_1$  donde  $n - 1 \geq r \geq 1$ . Si  $E$  un haz vectorial  $(k, l)$ -estable y  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$ , entonces el morfismo  $\Psi_{(E_x^V)^*} : \mathbb{G}(n-r, (E_x^V)^*) \rightarrow M(n, \det(E))$  es un encaje.

**Demostración.** Por el inciso 3 del Teorema 2.4.2, la hipótesis  $(k - r, l - r) \in R_1$  implica que para todo  $W \in \mathbb{G}(n-r, (E_x^V)^*)$  el haz vectorial  $(E^{V,W})^*$  es estable, por lo que el morfismo está bien definido. De la Proposición 4.1.2 y

$k + l \geq 2r$  tenemos que  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  es inyectivo. Así solo basta demostrar que la diferencial de  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  es inyectiva.

Recordemos que el espacio tangente de la grassmaniana  $\mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*)$  en un punto  $W$  está definido como  $T_W \mathbb{G}(n - r, (E_x^V)^*) = H^0(W, (E_x^V)^*/W)$ . Así mismo, el espacio tangente del espacio moduli  $M(n, \det(E))$  en el punto  $\Psi_{E_x}(W) = (E^{V,W})^*$  es  $H^1(\text{End}((E^{V,W})^*))$ . Ahora bien, consideramos la sucesión exacta (4.1) restringida a un punto  $W$ , obtenemos

$$0 \rightarrow E^{V,W} \rightarrow (E^V)^* \rightarrow ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow 0.$$

al tensorizar por  $(E^{V,W})^*$ , se tiene

$$0 \rightarrow (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W} \rightarrow (E^{V,W})^* \otimes (E^V)^* \rightarrow (E^{V,W})^* \otimes ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow 0.$$

Su correspondiente sucesión exacta en cohomología es:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W}) \longrightarrow H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes (E^V)^*) \longrightarrow \\ &H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x) \xrightarrow{\delta} H^1(X, (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

donde  $\delta$  es el homomorfismo cofrontera. Ahora bien, la deformación de la familia  $\mathcal{F}$  está dada por el homomorfismo cofrontera. Observe que la estabilidad de  $E^{V,W}$  implica  $H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W}) = k$  y la Proposición 4.1.2 implica  $H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes (E^V)^*) = k$ . Por lo tanto, de la sucesión exacta en cohomología se obtiene

$$0 \longrightarrow H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x) \xrightarrow{\delta} H^1(X, (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W})$$

Lo que demuestra la inyectividad de  $\delta$ .

Ahora bien, tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} &H^0(X, (E^{V,W})^* \otimes ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x) \cong \\ &\cong H^0(X, \text{Hom}((E^{V,W}), ((E_x^V)^*/W) \otimes \mathcal{O}_x)) \\ &\cong \text{Hom}((E_x^{V,W}), (E_x^V)^*/W) \end{aligned}$$



este último isomorfismo está dado por la restricción a la fibra  $x$ . Entonces  $\delta$  define la aplicación inyectiva

$$\text{Hom}((E_x^{V,W}), ((E_x^V)^*/W)) \xrightarrow{\tilde{\delta}} H^1(X, (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W}).$$

Como el espacio vectorial  $W^*$  es un subespacio de  $(E_x^{V,W})^*$ , entonces  $W^* \otimes ((E_x^V)^*/W)$  es un subespacio de  $(E_x^{V,W})^* \otimes ((E^V)^*/W)$ . Esto implica que hay un morfismo inyectivo

$$j : \text{Hom}(W, ((E_x^V)^*/W)) \rightarrow \text{Hom}((E^{V,W}), ((E_x^V)^*/W)),$$

por lo tanto la composición

$$\tilde{\delta} \circ j : \text{Hom}(W, ((E_x^V)^*/W)) \rightarrow H^1(X, (E^{V,W})^* \otimes E^{V,W}),$$

es inyectiva. Por construcción  $\tilde{\delta} \circ j$  es la diferencial de  $\Psi_{(E_x^V)^*}$ , lo que implica que  $\Psi_{(E_x^V)^*}$  es un encaje.  $\square$

**Teorema 4.2.8.** *Si  $k(n-1) + l + rn < g$ ,  $k + (n-1)l + nr < g$ ,  $k + l \geq 2r$ . Entonces para un haz vectorial general  $E \in M(n, d)$ , existe una grassmaniana de Hecke que pasa por  $E$ .*

**Demostración.** De las condiciones  $k(n-1) + l + rn < g$ ,  $k + (n-1)l + nr < g$  observamos que  $k(n-1) + l < (n-1)(g-1)$  y  $k + l(n-1) < (n-1)(g-1)$ , por el inciso 2 del Teorema 2.4.2 esto implica que  $A_{(k,l)}(n, d) \neq \emptyset$ . Dado que  $A_{(k,l)}(n, d)$  es un abierto, entonces  $E \in A_{(k,l)}(n, d)$  es general.

Las hipótesis también implican que  $(k-l, r-l) \in R_1$  y por la Proposición 4.2.7 cada  $E^V \in \text{mod}_{n-r}(E, x)$  define un encaje  $\Psi_{(E_x^V)^*} : \mathbb{G}(n-r, (E_x^V)^*) \rightarrow M(n, d)$ , tal que  $E$  está en la imagen de  $\Psi_{(E_x^V)^*}$ .  $\square$

# Bibliografía

---

- [1] M. F. Atiyah, *K-theory*, Addison-Wesley, 1989.
- [2] I. Biswas, L. Brambila-Paz, T. L. Gómez, and P. E. Newstead, *Stability of the Picard bundle*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 561–568.
- [3] L. Brambila-Paz and H. Lange, *A stratification of the moduli space of vector bundles on curves*, J. Reine Angew. Math. **494** (1988), 173–187.
- [4] L. Brambila-Paz, O. Mata-Gutiérrez, and N. Nitsure, *Moduli stacks and moduli schemes for rank 2 unstable bundles*, Sometido en International Journal of Mathematics (2010), arXiv:0911.2301v1 [math.AG].
- [5] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, vol. 13, 1958.
- [6] P. A. Griffiths, *Introduction to Algebraic Curves*, Trans. of Math. Monographs, vol. 76, AMS, 1989.
- [7] R. C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton University, 1966.
- [8] ———, *Lectures on Vector Bundles over Riemann Surfaces*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1967.
- [9] G. Harder and M. S. Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli space of vector bundles on curves*, Math. Ann. **212** (1974), 163–187.
- [10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [11] A. Hirschowitz, *Problèmes de Brill-Noether en rang supérieur*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris (1988), 153–156.
- [12] J. M. Hwang, *Tangent vectors to Hecke curves on moduli space of rank 2 bundles over an algebraic curve*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 1, 179–187.

- [13] ———, *Hecke curves on moduli space of vector bundles over an algebraic curve*, Algebraic Geometry in East Asia, World Sci. Publ. River Edge, NJ, (2002), pp. 155–164.
- [14] H. Lange, *Universal families of extensions*, Journal of Algebra **83** (1983), 101–112.
- [15] ———, *Zur klassifikation von regelmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **262** (1983), 447–459.
- [16] H. Lange and M. S. Narasimhan, *Maximal subbundles of rank two vector bundles on curves*, Math. Ann. **266**.
- [17] A. Langer, *Moduli space of sheaves in mixed characteristic*, Duke Math. J. **124** (2004), no. 3, 571–586.
- [18] M. Maruyama, *Elementary transformation in the theory of algebraic vector bundles*, Algebraic Geometry (La Rábida) (1981), 241–266.
- [19] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995.
- [20] S. Mukai, *An Introduction to Invariants and Moduli*, Cambridge, University Press, 2003.
- [21] S. Mukai and F. Sakai, *Maximal subbundles of vector bundles on a curve*, Manuscripta Math. **52** (1985), 251–256.
- [22] D. Mumford, *Projective invariants of projective structures and applications*, Proc. Intern. Cong. Math. Stockholm (1962), 526–530.
- [23] M. S. Narasimhan and S. Ramanan, *Deformation of the moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve*, Math. Ann. **212** (1975), 215–248.
- [24] ———, *Geometry of Hecke cycles-1*, C.P. Ramanujam- A tribute. Bombay T.I.F.R. (1978), 291–345.
- [25] M. S. Narasimhan and C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Math. Ann. **82** (1965), 540–567.
- [26] ———, *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface*, Math. Ann. **89** (1969), 14–51.
- [27] P. E. Newstead, *Lectures on Introduction to Moduli Space Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Springer-Verlag, 1978.
- [28] J. Le Potier, *Lectures on Vector Bundles*, Cambridge University Press, 1997.

- 
- [29] B. Russo and M. Teixidor, *On a conjecture of Lange*, J. Algebraic Geometry **8** (1999), 483–496.
- [30] C. Segre, *Recherche générales sur les courbes et les surfaces réglés algébriques II*, Math. Ann. **34** (1889), 1–25.
- [31] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955), no. 2, 197–278.
- [32] C. S. Seshadri, *Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surfaces*, Ann. of Math. **85** (1967), no. 2, 303–336.
- [33] ———, *Fibrés Vectoriels sur les Courbes Algébriques*, Société Mathématique de France, vol. 96, Astérisque, 1982.
- [34] S.S. Shatz, *The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles*, Compositio Mathematica **35** (1977), no. 2, 163–187.
- [35] X. Sun, *Minimal rational curves on moduli spaces of stable bundles*, Math. Ann. **331** (2005), 925–937.
- [36] A. N. Tyurin, *The geometry of moduli of vector bundles*, Uspekhi Mat. Nauk **29** (1974), 59–88.