Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Psicología

División de Estudios Profesionales

Desarrollo del razonamiento numérico en ambientes de aprendizaje con una perspectiva sociocultural en alumnos de preescolar.

Tesis

que para obtener el título de

Licenciada en Psicología

Presentan:

García Cruz María del Rocío

García Sánchez Sandra Patricia

Director: **Javier Alatorre Rico**

Revisora: **Georgina Delgado Cervantes**

México, D.F. 2010

DIRECTOR

Lic. Javier Alatorre Rico

REVISORA

Dra. Georgina Delgado Cervantes

JURADO

Dr. Marco Antonio Rigo Lemini

Lic. María Eugenia Martínez Compeán

Lic. Irma Graciela Castañeda Ramírez

AGRADECIMIENTOS

Rocío

Este fruto de mi esfuerzo quiero dedicarlo a mis padres quienes junto con Dios les agradezco el que me hayan dado la vida y me hayan permitido llegar hasta el final de mi carrera. También agradezco el apoyo que me brindaron en el transcurso de mis estudios y el ánimo que me daban en cada momento.

Los quiero mucho!!!

Agradezco a mi hermano Wenceslao que varias ocasiones se sentó conmigo a estudiar y me estuvo animando para seguir adelante.

Te quiero mucho hermanito!!!

A esta personita muy especial llamada Sandra, la cual es mi gran amiga, le agradezco todo el apoyo y su cariño que me dio durante la carrera y al final de esta por entenderme y siempre estar conmigo. Esta tesis no sólo son estas hojas de papel, son los momentos que pasamos con ella, las risas, las lágrimas, la alegría, la desesperación y sobre todo nuestro esfuerzo y conocimiento. También agradezco a tu familia!!!

Te quiero mucho!!!

Gracias Humberto por estar conmigo en el transcurso de mi carrera y el apoyo que me brindaste. Tú has estado en mis festejos y en mis tristezas. También agradezco a tu familia!!!

Te quiero mucho!!!

Eric gracias por tu apoyo, tu amistad y porque siempre estuviste interesado en que terminara la tesis.

Te quiero mucho amigo!!!

Les agradezco a mis sinodales por su ayuda y su amable disposición para la presente.

Te quiero mucho!!!

Martha, Natalia y Mari gracias por su compañía en este proyecto la comunicación y apoyo que siempre existió. Y a todos mis amigos de la facultad. Gracias por su amistad.

los quiero mucho!!!

Gracias Javier y Gina por transmitirme sus conocimientos y porque gracias a este proyecto adquirí una muy linda experiencia profesional.

Los estimo!!!

Esta tesis es uno de mis sueños que he cumplido, en la cual se ve reflejada todo mi esfuerzo y dedicación de la Licenciatura. Es un crecimiento tanto profesional como personal, ahora a continuar con la siguiente etapa.

Soy genial!!!

AGRADECIMIENTOS

Sandra

A los responsables de que este logro personal sea una realidad:

A mis padres Irma y Leonardo, quienes siempre estuvieron a mi lado. Este proyecto es de ustedes. Gracias por escucharme, por disfrutar, por reír, por animarme a continuar. Sé que fue largo pero ya está aquí. Sin ustedes no lo hubiera logrado. Gracias por las pláticas, por acercarse a mí y confiar, saben que siempre los escucharé.
Gracias por todo el amor que me han dado.

A mis hermanos Jessy y Leo, gracias por ser ustedes mismos, por acompañarme en el proceso de este proyecto, por escucharme.
Gracias por su apoyo que se distingue de los demás, un chiste y escucharlos era de apreciarse. Quiero que crezcan en todos los ámbitos, les deseo éxito.

A Ricardo, por las pláticas, los consejos, la motivación y la alegría que siempre muestras. Por cuidarme todos estos años y ser un apoyo para mí y mi familia.

A Rocío quien siempre tuvo una sonrisa para nuestra amistad, quien estuvo en esos momentos difíciles, quien escucho todos mis defectos, quien disfruto conmigo cada momento, quien hizo que riera hasta más no poder.
Gracias por haberme acompañado en toda la Carrera y en este proyecto, me alegra haber encontrado a alguien tan especial como tú.

A Carlos, gracias por estar conmigo no sólo en esta etapa sino en todos estos años, sabes que has sido un pilar fundamental en mi vida.

A Alonso por ponerme los pies en la tierra, por no dejarme caer y por hacerme ver que el cielo es más bonito.

A Javier y Gina por proporcionarme las herramientas necesarias para que esta inolvidable experiencia se cumpliera.

A mis Sinodales, gracias por el apoyo y el tiempo dedicado que hicieron que este proyecto mejorara.

A mis amigos de la Facultad de Psicología: Nataly, quien me apoyo no sólo en este proyecto sino en muchos más relacionados con mi vida. A Mary, Martha y Natalia, gracias por la amistad, la compañía, el apoyo en equipo y por ser cómplices de este proyecto.

Bussy y Mandy: Las quiero mucho!!

Ahora se cumple una nueva etapa anhelada en mi vida, uno de mis grandes sueños. Este proyecto es muestra del esfuerzo y dedicación que he depositado. Gracias a mi por todos los sacrificios y alegrías que logre con esta Tesis.

Desarrollo del razonamiento numérico en ambientes de aprendizaje con una perspectiva sociocultural en alumnos de preescolar.

RESUMEN

Desde la teoría sociocultural se ha propuesto que el razonamiento matemático se favorece con la exposición de situaciones contextualizadas. En éstas, el niño puede experimentar el uso del sistema numérico a través de un sistema de ayudas que, el docente u otro niño, proporciona en el transcurso de la actividad para auxiliarle a interpretar, ampliar y utilizar el conocimiento.

En México se ha observado que la enseñanza no está vinculada, en general, con el contenido de la vida social en la cual los niños se desenvuelven. Por esta razón se les dificulta utilizar los conocimientos que aprenden en su medio escolar en situaciones que están relacionadas con su entorno.

El objetivo de este trabajo, por lo tanto, ha sido crear las condiciones escolares que en el marco del Programa de Educación Preescolar (PEP) propuesta por la SEP, permita que los estudiantes de educación preescolar desarrollen y utilicen el razonamiento numérico al participar en actividades contextualizadas que promuevan las competencias numéricas planteadas en el PEP.

En el estudio, que se reporta participaron 129 infantes, con edades entre los 3 y 5 años, cursaban primero, segundo y tercer grado de preescolar. Se trabajó con dos condiciones: en la condición de intervención participaron 66 estudiantes y en el grupo de comparación fueron 63. Se realizó una medición inicial y otra final con el "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar" para conocer en los infantes el nivel de competencias matemáticas con el que habían ingresado y finalizado. Se intervino con situaciones didácticas contextualizadas, las cuales fueron dirigidas por la maestra de cada grupo, las docentes recibieron capacitación especial para el desarrollo de las situaciones, cuyo propósito era promover que los estudiantes desarrollaran competencias matemáticas. Los resultados muestran que los infantes de la condición de intervención desarrollaron un mayor número de competencias matemáticas, al hacer uso del análisis, la reflexión y la comprensión al solucionar problemas ante situaciones reales, en contraste con los estudiantes del grupo de comparación. De esta manera construyeron un razonamiento matemático y las competencias necesarias para resolver situaciones vinculadas con el Pensamiento Matemático.

INTRODUCCIÓN

El sistema educativo mexicano, en general, presenta serias deficiencias: altos índices de reprobación, deserción y bajos niveles de aprovechamiento en los estudiantes. Estas situaciones, entre otras razones, se deben a que el aprendizaje se promueve de manera abstracta y descontextualizada; con un conocimiento inerte, poco útil y escasamente motivante; además posee relevancia social limitada, es decir, existe una ruptura entre el saber qué hacer y el saber cómo hacerlo. Ésta ruptura es debido, entre otras razones, a que el conocimiento es tratado en la escuela como si fuera neutral y ajeno a la vida real. Éste, a su vez, genera aprendizaje poco significativo, carente de sentido y aplicabilidad. Por tanto: el alumnado es incapaz de transferir y utilizar lo que aprenden y, en consecuencia, tienen dificultades para generar abstracciones. Esta situación se ve reflejada principalmente en el ámbito de las matemáticas.

La formación escolar vigente de acuerdo a las evaluaciones, de aspectos matemáticos, nacionales e internacionales aplicadas en la educación básica y en la media superior, no logra, todavía, desarrollar plenamente en los estudiantes las habilidades que les permitan, por un lado, resolver problemas con creatividad y eficacia y, por otro, estar mejor preparados para los desafíos que se les presenten en la vida y para la inserción en el mercado laboral.

A nivel de educación preescolar se aplicó en el año 2008, la prueba “Exámenes para la calidad y el logro educativo” (EXCALE). En esta se obtuvieron bajos resultados en el rendimiento escolar de los estudiantes, al no lograr resolver actividades numéricas y solución de problemas.

La Secretaria de Educación Pública (SEP) ha considerado que es necesario que la calidad de la educación cambie desde el nivel básico y brinde las herramientas necesarias a los estudiantes para desenvolverse íntegramente dentro de una sociedad. Por tal motivo, a nivel de educación preescolar se cambia el enfoque pedagógico.

El nivel de educación preescolar es considerado como la base de la formación integral de la población infantil y tiene como finalidad el asegurar que los pequeños que asisten al preescolar participen en experiencias educativas que les permitan desarrollar, de manera prioritaria, sus competencias afectivas, sociales y cognitivas. Se pretende generar un aprendizaje con sentido, que les será de gran utilidad a los infantes a través de toda su trayectoria escolar.

Atendiendo a lo anterior, en el 2004, la SEP creó una nueva versión de la propuesta curricular llamada Programa de Educación Preescolar (PEP 2004). Su objetivo es mejorar la calidad de la experiencia formativa de los estudiantes, a través del desarrollo de capacidades y competencias cognitivas y socio-afectivas.

El PEP 2004 está basado en un marco psicopedagógico con un enfoque sociocultural, que plantea que los individuos construyen sus conocimientos y entendimientos de manera activa. Se enfatizan dos aspectos: los contextos sociales de aprendizaje y el hecho de que el conocimiento se crea y se construye mutuamente, a través del uso de sistemas culturales, los cuales se refieren al resultado de la interacción de las personas de una cultura en una sociedad determinada y, por lo tanto, crea elementos que establecen otras acciones que se construyen y se enriquecen a través del tiempo como el lenguaje, el sistema numérico, el idioma o las costumbres. En este marco se requiere que el maestro diseñe e implemente situaciones contextualizadas para facilitar el aprendizaje mediante, sistemas de ayuda; lo cual promueve un aprendizaje con significado. A pesar de que en el PEP se enfatiza en la importancia del papel docente en cuanto al diseño e implementación de situaciones contextualizadas, no establece, en estas, un trabajo de acompañamiento docente en el cual se guie paulatinamente a los profesores.

En las aulas en donde se imparten clases contextualizadas son importantes debido a que en ese espacio los estudiantes participan en actividades vinculadas al contexto en el que viven, compartiendo ideas, solucionando problemas, teniendo debates, discutiendo y reflexionando; son las aulas en donde se genera el razonamiento matemático y dan sentido a lo que aprenden. Los infantes descubren que los conocimientos matemáticos que desarrollan pueden ser utilizados para resolver problemas de su propio entorno.

Las matemáticas son usadas en diferentes contextos del mundo real, debido a que son concebidas como un sistema cultural que la humanidad ha construido y enriquecido a través del tiempo. Parte de este sistema consiste en identificar situaciones y formular problemas que permitan ser solucionados matemáticamente.

El propósito del estudio que se presenta se realizó para contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de Educación Preescolar. Tal contribución se basa en el diseño e implementación de situaciones contextualizadas en las cuales los aprendices se les permite pensar, analizar, razonar, reflexionar, socializar y desarrollar un conjunto de capacidades que incluyen conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas con las cuales puedan resolver problemas matemáticos en diversos contextos.

Con el fin de que los alumnos de educación preescolar logren resolver problemas reales se planteó, en este estudio, el siguiente objetivo: promover el razonamiento numérico en infantes que asisten a la educación preescolar a través del desarrollo y uso de las competencias numéricas al participar en actividades auténticas.

1. PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN ACTUAL EN MÉXICO: EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS.

La educación en México presenta deficiencias en cuanto a la calidad del aprendizaje de los estudiantes debido, entre otras razones, a que estos no hacen un uso socio-funcional de los conocimientos y destrezas matemáticas que desarrollan, lo que indica que la educación ha dejado de lado la <<capacidad de hacer>>. Esta dificultad radica en que los estudiantes no logran aplicar sus conocimientos y habilidades a contextos diferentes, debido a que los alumnos siguen memorizando, en lugar de utilizar diversas estrategias basadas en la reflexión (OCDE, 2003). Esta falta de aplicabilidad contribuye a que los estudiantes carezcan de un conjunto de habilidades, que les permita razonar, reflexionar y analizar ante una situación de dificultad y por ello muestren un bajo aprovechamiento académico (ENLACE, 2007).

Las pruebas que se utilizan para evaluar el nivel educativo en México se caracterizan por tener un criterio: currículo y competencias. A nivel preescolar, se aplica, por la Institución Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), la prueba “Exámenes para la Calidad y el Logro Educativo” (EXCALE) que, de la misma manera, está basada en currículo. Sin embargo, pone énfasis en el uso que los alumnos hacen de sus conocimientos (INEE, 2008).

A nivel primaria, los alumnos son valorados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) con la prueba “Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares” (ENLACE) basada en currículo. Ésta estima los conocimientos que los estudiantes adquieren (ENLACE 2007).

En el Proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos (PISA), aplicada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), se evalúa la aplicación de los conocimientos en la solución de problemas. Este proyecto basado en competencias, captura los resultados de doce años de educación para conocer si los estudiantes logran usar el conocimiento en situaciones de la vida cotidiana, laboral y científica (OCDE 2003).

Los criterios en las cuales están diseñadas las pruebas conllevan a que a medida que los alumnos avanzan en los siguientes niveles educativos se alejen más de los aprendizajes que se esperan en estos mismos. Si se exige a nivel preescolar y primaria sólo el desarrollar conocimiento y manifiestan un bajo rendimiento académico, entonces, en los niveles avanzados en donde se exige no sólo desarrollarlos sino utilizarlos mostrarán un menor rendimiento en cuanto a las competencias necesarias para la solución de problemas (OCDE 2003).

A nivel preescolar la prueba EXCALE muestra el bajo nivel de rendimiento escolar en los estudiantes, debido a que únicamente el 15% de ellos alcanzan un nivel avanzado, es decir, sólo este porcentaje es capaz de: utilizar números para representar cantidades hasta 20, trazar trayectos a partir de puntos de referencia espaciales, escribir y decir los números que sabe en orden ascendente llegando a un rango entre 31 y 89, identificar desplazamientos de objetos con respecto a otros objetos, identificar figuras geométricas a partir de sus características, ordenar de manera creciente o decreciente objetos por tamaño, estimar el número exacto de veces que cabe la longitud de un objeto pequeño respecto a la longitud de un objeto más grande, utilizar correctamente los días de la semana y resolver problemas que implican reunir objetos en una sola colección Esto muestra que el 85% de los preescolares no han desarrollado estas habilidades y conocimientos (INEE, 2008). Por lo tanto, no logran aplicarlos al enfrentarse a situaciones que requieran utilizar un razonamiento matemático. Estos resultados manifiestan que los alumnos desarrollan sólo nociones básicas. Puesto que muestran un bajo aprovechamiento académico y altos índices de reprobación al no alcanzar el conjunto de habilidades y saberes que permitan desarrollar un razonamiento matemático (INEE, 2008).

A nivel secundaria, los estudiantes no pueden aplicar sus conocimientos al momento de enfrentar problemas matemáticos. Esta falta de aplicabilidad es mostrada por PISA (2003), describe que el 65.9% de los alumnos se encuentran en los niveles 0 y 1 de una escala de 6 niveles. Esto significa que sólo pueden resolver problemas básicos, es decir, en donde toda la información relevante se presenta explícitamente de tal forma que la actividad es clara, como realizar una operación aritmética simple, resolver problemas simples en contextos familiares, usar dibujos de objetos geométricos, aplicar habilidades de conteo y cálculo básicos, localizar información relevante en una tabla o gráfica sencilla, comprender y usar ideas básicas de probabilidad en contextos experimentales familiares. Únicamente un 0.4% de los estudiantes alcanzan los niveles máximos: logran resolver problemas complejos, razonar, comprender, reflexionar, generalizar resultados, comunicar soluciones, dar explicaciones, argumentaciones, conceptuar, trabajar con modelos que contengan procesos matemáticos y con expresiones formales y simbólicas (OCDE, 2003).

Con los resultados de las evaluaciones se aprecia que a nivel preescolar, primaria y en alumnos de 12 años de educación, sólo el 15%, el 5% y el 0.4% respectivamente, alcanzan los puntajes más altos. Estos resultados indican que a los alumnos, mientras avanzan en los niveles educativos, se les dificulta poner en práctica los conocimientos que han desarrollado. Esto es debido a que la forma de enseñanza sólo se ha concentrado en transmitir conocimiento sin hacer uso de ello (OCDE, 2003).

La educación actual en México no ha logrado formar alumnos competentes capaces de enfrentar y dar diversas soluciones a problemas complejos de la vida cotidiana. A los estudiantes sólo se les ha enseñado a resolver problemas en los cuales ya está explícito qué se tiene que hacer o qué método utilizar para poder resolverlo. Lo que no permite que los estudiantes utilicen el razonamiento, la reflexión y el análisis para poder comprender el problema y generar soluciones argumentadas.

El Plan Nacional de la Educación plantea que los estudiantes necesitan tener una formación integral para erradicar el bajo rendimiento académico, es por ello que se ha propuesto varios objetivos: elevar la calidad de la educación, capacitar a los profesores, la actualización de programas de estudio y sus contenidos, los enfoques pedagógicos, métodos de enseñanza, recursos didácticos, ampliar las oportunidades educativas para reducir desigualdades entre grupos sociales, ofrecer una educación integral que equilibre la formación en valores ciudadanos, la adquisición de conocimientos y el desarrollo de competencias (SEP, 2007).

La educación a nivel preescolar, de acuerdo a la prueba EXCALE, muestra un bajo aprovechamiento en las habilidades de los estudiantes y por ello, surge la necesidad de trabajar en la educación preescolar. Este nivel educativo representa un papel fundamental, puesto que prepara a los alumnos para el desempeño de los siguientes niveles de educación. Con el propósito de formar alumnos capaces de razonar, pensar y reflexionar (para enfrentar y resolver problemas matemáticos en su vida diaria y con ello brindar una educación de calidad) se encuentra la propuesta curricular llamada Programa de Educación Preescolar 2004. Éste constituye un avance importante hacia la sistematización de las competencias básicas para garantizar la educación preescolar (Reyes, 2007).

2. CAMBIO EN LA VISIÓN DE LA EDUCACIÓN PREESCOLAR: PROPUESTA CURRICULAR

En este capítulo se describirá la propuesta curricular actual conocida como Programa de Educación Preescolar (PEP 2004). En el primer apartado se mencionará la finalidad que tiene el Programa, de acuerdo al desarrollo y empleo de los conocimientos, habilidades, actitudes y valores de los infantes. En seguida se abordarán los propósitos del Programa con respecto al uso de los conocimientos y capacidades: la reflexión, la explicación y la búsqueda de soluciones que el alumnado necesita desarrollar para resolver problemas. Al final de este apartado se explicará que el Programa está basado en competencias, es decir, el conjunto de capacidades que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiesta en contextos reales.

El segundo apartado se enfocará en explicar la organización del PEP 2004. Éste está constituido por seis Campos Formativos, los cuales establecen los contenidos educativos que permiten identificar las implicaciones de las actividades y experiencias en las que participan los niños. Cada uno de los Campos Formativos enfatiza en el aprendizaje de los educandos abarcando simultáneamente distintos campos del desarrollo humano y actividades en que participen.

En el tercer apartado se hablará del contenido del campo formativo: Pensamiento Matemático. Se iniciará explicando que los fundamentos del principio matemático están presentes desde edades muy tempranas en los pequeños, debido a que el ambiente influye en ellos. Los pequeños sin ser conscientes de la influencia de los contenidos matemáticos ponen en juego de manera implícita los principios del conteo. Posteriormente se mencionará que el campo formativo, Pensamiento Matemático, se divide en dos aspectos: el primero, número y forma y el segundo, espacio y medida; cada aspecto cuenta con sus distintas competencias de las cuales tan sólo se mencionarán las referidas al aspecto de Número. Por último se concluirá mencionando que el PEP 2004 intenta desarrollar y fortalecer las competencias matemáticas para generar en los aprendices un razonamiento numérico.

En el cuarto apartado se explicara la importancia que tienen las habilidades, conocimientos y actitudes denominadas competencias en la educación preescolar; puesto que el Programa de Educación Preescolar esta basado en ellas.

2.1 Programa de Educación Preescolar 2004

La sociedad actual demanda que los individuos se enfrenten a situaciones más complejas en muchas áreas de su vida, por ello, requieren un mayor dominio de destrezas y conocimientos con el fin de alcanzar sus metas. Entonces necesitan desarrollar capacidades que les permitan adaptarse a un mundo caracterizado por el cambio, la complejidad y la interdependencia. Por ello, se ha planteado, en el 2004, una nueva versión de la propuesta curricular llamada Programa de Educación Preescolar (PEP 2004). El principal fin de esta propuesta es que los niños y las niñas desarrollen y empleen conocimientos, habilidades, actitudes y valores, no sólo para seguir aprendiendo a lo largo de su vida, sino para enfrentarse a los retos que impone una sociedad en permanente cambio. El Programa se enfoca en que cada miembro de la comunidad pueda enfrentar y responder a determinados problemas de la vida moderna que dependerá de los conocimientos, habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación.

El Programa de Educación Preescolar tiene la finalidad de mejorar la calidad de la experiencia formativa de los niños y niñas durante la educación preescolar. Éste reconoce que los infantes en esta etapa educativa llegan con un gran número de conocimientos informales que desarrollan desde muy pequeños, los cuales son resultado de las experiencias sociales para desarrollar capacidades cognitivas, competencias socio-afectivas y comunicativas que permiten compartir significados e ideas (SEP, 2004).

El PEP tiene como propósitos fundamentales: que los educandos construyan nociones matemáticas, utilicen sus conocimientos y habilidades (la reflexión, la explicación, la búsqueda de soluciones) y que desarrollen un sentido positivo de sí mismos; para desarrollar la capacidad de resolver problemas. El PEP fundamenta que es necesario asumir distintos roles en las actividades que los estudiantes realizan para adquirir confianza al expresarse, comprendiendo las funciones del lenguaje escrito y reconociendo las propiedades del sistema de escritura (SEP, 2004).

También el Programa plantea que las personas tienen rasgos culturales distintos, que se interesen en la observación de fenómenos naturales, que se apropien de los valores y principios necesarios para la vida en la comunidad. Este fundamenta que las personas desarrollen la sensibilidad, la iniciativa, la imaginación, la creatividad para expresarse a través de los lenguajes artísticos, que los alumnos conozcan mejor su cuerpo, que actúen y se comuniquen mediante la expresión corporal y que comprendan que su cuerpo presenta cambios durante el crecimiento (SEP, 2004). Estos son los propósitos que el PEP manifiesta para desarrollar preescolares competentes.

La nueva propuesta curricular se creó haciendo énfasis en el conjunto de capacidades que incluyen conocimiento, actitudes, habilidades y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje conocidas como competencias. Estas competencias se manifiestan en el desempeño de la persona ante situaciones y contextos diversos (SEP, 2004).

2.2 Organización del Programa de Educación Preescolar 2004

La organización del PEP está realizada con base en las necesidades y complejidades del mundo actual, por ello se divide en campos formativos. Éstos son una forma de establecer los contenidos educativos y permiten identificar las implicaciones de las actividades y experiencias en que participan los niños; incluyen información básica del desarrollo infantil; procesos de aprendizaje; logros que pueden alcanzar los niños; las competencias en que se organiza cada campo, cómo se favorecen y se manifiestan éstas. Los campos formativos también ofrecen opciones para diseñar o seleccionar actividades didácticas dependiendo del aprendizaje que los niños pueden lograr según las características de cada campo formativo, por lo tanto son considerados una guía para la observación y la evaluación continua del aprendizaje del estudiante (SEP, 2004).

Dentro del PEP existen seis Campos Formativos: Desarrollo Personal y Social, Lenguaje y Comunicación, Pensamiento Matemático, Exploración y Conocimiento del Mundo, Expresión y Apreciación Artística y Desarrollo Físico y Salud. Estos campos formativos abarcan aquel conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes, conocidas como competencias, que una persona, en este caso un pequeño, necesita desarrollar (SEP, 2004).

El presente estudio se enfocó en el campo: Pensamiento Matemático, del Programa de Educación Preescolar, con el fin de desarrollar las competencias numéricas descritas en este.

2.3 Pensamiento Matemático

Las nociones matemáticas están presentes en los alumnos desde edades muy tempranas. Esto ocurre debido a los procesos de desarrollo y a las experiencias que viven los pequeños al interactuar en su propio entorno. Los alumnos desarrollan conocimientos numéricos, espaciales y temporales los cuales permiten que avancen en la construcción de nociones matemáticas más complejas. El ambiente cultural y social en el que viven los alumnos, provee experiencias que de manera espontánea, los lleven a realizar actividades de conteo. En estas actividades, los niños no son conscientes del uso de las nociones matemáticas, sin embargo, las ponen en juego de manera implícita e incipiente (SEP, 2004).

Cada pequeño tiene la noción de conteo aunque no sabe cómo definirlo ni nombrarlo, él, sin embargo, utiliza los principios de conteo cuando realiza actividades como contar todos los objetos de una colección una sola vez (correspondencia uno a uno); cuando repite los números en el mismo orden sin confundir que el orden siempre es el mismo (orden estable); al identificar que el último número nombrado es el que indica cuántos objetos tiene una colección (cardinalidad); al visualizar que las reglas para contar una serie de objetos iguales son las mismas (abstracción) y, por último, cuando entiende que el orden en que se cuentan los elementos no influye para determinar cuántos objetos tiene la colección (irrelevancia del orden). Estos elementos son los llamados principios del conteo y son utilizados por los pequeños de manera indirecta pero acertadamente, dependiendo de las experiencias a las cuales estén expuestos (SEP, 2004). El conteo es un elemento que se encuentra incluido en uno de los dos apartados del Campo Pensamiento Matemático.

El Campo formativo de Pensamiento Matemático se divide en dos contenidos conocidos como: aspectos. El primero número y el segundo forma, espacio y medida. En el estudio, que aquí se presenta, tan sólo se hablará del aspecto de número, del cual se identifican las siguientes competencias:

1. Los números son utilizados en situaciones variadas que impliquen poner en juego los principios del conteo.

Esta competencia se favorece cuando el infante identifica por percepción la cantidad de elementos en colecciones pequeñas. Compara colecciones, ya sea por correspondencia o por conteo. Establece relaciones de igualdad o desigualdad. Menciona los números en orden ascendente y descendente. Identifica el lugar que ocupa un objeto dentro de una serie ordenada. Usa los números en su vida cotidiana. Reconoce el valor de las monedas. Identifica los números y su significado en textos diversos. Utiliza objetos, símbolos propios y números para representar cantidades e identifica el orden de los números en forma escrita.

2. Plantea y resuelve problemas en situaciones familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.

Esta segunda competencia se manifiesta cuando el infante interpreta o comprende problemas numéricos que se le planteen y estima sus resultados. Utiliza estrategias propias para resolver problemas numéricos. Usa estrategias de conteo. Explica el procedimiento qué realizó para resolver un problema.

Compara e identifica entre distintas estrategias de solución para llegar a un resultado.

3. Reúne información sobre criterios acordados como representar gráficamente dicha información y la interpreta.

La siguiente competencia del aspecto de número y forma, se promueve cuando el infante agrupa objetos según sus atributos cualitativos y cuantitativos. Recopila datos e información cualitativa y cuantitativa del entorno. Propone códigos personales o convencionales para representar la información o los datos. Organiza, registra e interpreta información en cuadros, tablas y gráficas.

4. Identifica irregularidades en una secuencia a partir de criterios de repetición y crecimiento.

Esta última competencia se manifiesta cuando el infante organiza colecciones al identificar características similares entre ellas. Ordena colecciones tomando en cuenta su numerosidad de manera creciente y decreciente. Reconoce y reproduce formas constantes o modelos repetitivos en su ambiente. Continúa en forma concreta y gráfica, secuencias con distintos niveles de complejidad a partir de un modelo dado. Anticipa lo que sigue, identifica modelos faltantes y explica la regularidad en un patrón.

Estas cuatro competencias son las que el PEP 2004 ha considerado que es necesario fomentar en el aspecto de número y forma en el campo de Pensamiento Matemático.

El Programa de Educación Preescolar, entonces, está basado en competencias, las cuales se promueven, se desarrollan y se fortalecen en los alumnos para tener habilidades de razonamiento numérico y abstracción numérica; la primera, permite inferir los resultados al transformar datos numéricos; el uso de técnicas para contar; utilizar los principios de conteo; desarrollar las capacidades que propicien comprender un problema; reflexionar sobre lo que se busca; estimar posibles resultados; buscar distintas vías de solución; comparar resultados; expresar ideas; dar explicaciones y confrontarlas. La segunda, la abstracción numérica, se refiere a procesos en donde los niños captan y representan el valor numérico de una colección de objetos y ayuda a hacer inferencias acerca de los valores numéricos establecidos al operar con ellos (SEP, 2004).

Estos dos conceptos son indispensables pero para llegar a adquirir estas nociones los alumnos necesitan desarrollar y fortalecer las competencias matemáticas, las cuales se manifiestan en la persona ante situaciones y contextos comunes al resolver problemas matemáticos.

El Programa de Educación Preescolar ha sido renovado al preocuparse en poner en práctica los conocimientos de los alumnos, para que de esta manera se creen personas competentes y capaces de solucionar problemas y así poder cumplir las demandas de una sociedad exigente. Entonces, las personas cada vez tienen que enfrentarse a retos más complejos en su vida diaria pero no por ello los índices de reprobación y deserción escolar disminuyen. Por esta contradicción, en donde existe una sociedad más exigente y altos índices de reprobación, el PEP fue actualizado con el fin de brindar a las personas las herramientas necesarias para solucionar los retos a los que se enfrentan en su vida cotidiana.

El PEP de acuerdo al Campo Formativo: Pensamiento Matemático, ayuda a desarrollar en los niños nociones y habilidades matemáticas que permitan el análisis, la reflexión y la explicación para generar diversas soluciones a las dificultades que se encuentran en su entorno.

2.4 El enfoque de competencias en la educación

El empleo del enfoque de las competencias ha destacado de manera importante en el sector de la educación. Las competencias están presentes en la reforma educativa y, por lo tanto, en los programas de educación como se observó en el capitulo anterior en el Programa de Educación Preescolar 2004, es en definitiva muy visible el uso, el desarrollo y la exposición de las competencias, en este estudio, enfocado en la educación preescolar (Díaz, 2006).

Se ha propuesto de acuerdo al enfoque contextual, que las competencias se conocen como acciones situadas (se encuentran relacionadas con instrumentos mediadores, es decir, las competencias y los mediadores están conectados debido a que toman en cuenta el contexto en el cual se llevan a cabo) construidas a partir de las relaciones sociales y culturales, por ello, requieren de la interacción con otras personas (Tobón, 2006).

La competencia también se puede ver como una potencialidad que permite poner en práctica conocimientos y procedimientos, los cuales son desarrollados para transformarse en saberes activos y generalizables. Este cambio produce el uso, por parte del individuo, de los conocimientos en acciones autónomas y eficaces al percatarse que existen distintos tipos de saberes que la persona utiliza frente a la solución de un problema. La persona, en este caso el infante, debe ser capaz de integrar conocimientos, habilidades, actitudes, capacidades y demostrar la competencia en una acción o desempeño al solucionar un problema contextualizado (Nordenflycht, 2005).

Para desarrollar una competencia hay que asimilar y apropiarse siempre de una serie de saberes asociados a ella (habilidades prácticas y cognitivas, conocimientos, motivación, valores, actitudes y emociones); además de aprender a aplicarlos. Estos saberes ponen de relieve la necesaria integración y desarrollo de distintos tipos de conocimientos, entonces ser competente en un ámbito de actividad o de práctica significa ser capaz de activar y utilizar los conocimientos relevantes para afrontar determinadas situaciones y problemas relacionados con dicho ámbito (Coll, 2007).

Una competencia es más que nociones y destrezas; involucra la habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose y movilizando recursos psicosociales, es decir, que esas habilidades y conocimientos se apliquen en un contexto en particular y real (OCDE, 2003).

En el ámbito escolar se enfatiza que no tiene sentido enseñar ningún contenido si no es aprendido en un contexto proveniente de la realidad; Díaz (2006) toma en cuenta la contribución de Perrenaud (1999) en la cual concuerdan en que es necesario promover que la información obtenida en una situación se aplique a diferentes contextos.

Al desarrollar competencias se contribuye a mejorar el aprendizaje, pues la construcción del conocimiento en preescolares se realiza en situaciones problemáticas cercanas a su realidad y basadas en sus conocimientos previos, lo que les permite utilizar sus aprendizajes como estrategias o herramientas para resolver cualquier situación en su vida cotidiana (Yee, 2005).

La necesidad de que los individuos piensen y actúen reflexivamente es fundamental. La reflexión involucra no sólo la habilidad de aplicar de forma rutinaria una fórmula o método al confrontar una situación, sino que involucra la capacidad de adaptarse al cambio, aprender de las experiencias, pensar y actuar con actitud crítica. Las competencias se ponen de manifiesto en una gran variedad de situaciones correspondientes a los diversos ámbitos de la vida humana, personal y social, es decir, la persona hace visible aquellas capacidades complejas cuando se enfrenta a una situación problemática. Esta visibilidad de conjunto de habilidades son expresiones de los diferentes grados de desarrollo personal y de la participación activa en los procesos sociales. Toda competencia es una síntesis de las experiencias que el sujeto ha logrado construir en el marco de su entorno vital (OCDE, 2003).

El concepto de competencia entendido según la UNESCO, intenta profundizar en la tarea pedagógica del desarrollo de capacidades en los sujetos para hacer frente a los desafíos de una vida independiente, entonces hablar de competencias es pensar en la autonomía que el niño tendrá en un futuro (Azpeitia, 2006) y como menciona Nordenflycht (2005) la competencia es considerada como aplicable a distintas situaciones, es de carácter durable y logra que el alumno actúe de manera autónoma.

Toda competencia requiere del dominio de una información específica y el desarrollo de una serie de habilidades derivadas de los procesos de información, pero la competencia es necesaria en una situación problema, en una situación real, inédita, donde se pueda generar. El hecho de que la competencia tenga que propiciarse en un ambiente real dificulta la enseñanza y el aprendizaje en el entorno escolar. En la escuela se promueven ejercicios que llegan a ser rutinarios, lo que aleja a los alumnos de la formación de habilidades para ser utilizadas en contextos reales. Aunado a esto, a los docentes se les dificulta llevar a cabo una enseñanza por competencias a pesar de que se basan en una propuesta curricular sustentada en ese enfoque, para responder a esto es necesario que a los docentes se les capacite para promover competencias matemáticas en los alumnos (Díaz, 2006).

El PEP 2004, pone énfasis en la necesidad de crear experiencias educativas articuladas con sentido en los niños, que sean interesantes, que desafíen sus ideas y que promuevan su participación en las tareas de aprendizaje. El reto consiste en reconocer que los infantes tienen experiencias e ideas de todo aquello que los rodea. Tomar en cuenta los conocimientos previos de los alumnos es el punto de partida para desarrollar cualquier actividad de aprendizaje (González, 2005). Esta actividad debe ser significativa, debe integrarse con otras, presentar un desafío, tener un carácter auténtico, exigir un compromiso cognitivo, dar responsabilidad a los niños, permitirles la toma de decisiones, tener un carácter interdisciplinario, disponer de tiempo suficiente para su ejecución, promover el trabajo entre pares y la interacción con materiales concretos para generar en el alumno el desarrollo de competencias (Nordenflycht, 2005).

Ante la transformación curricular por introducir y fomentar las competencias en las aulas, es necesario cuidar el proceso de actualización docente para garantizar el acercamiento óptimo de los docentes al programa, así como un acompañamiento y asesoría efectivos (González, 2005). Otro punto destacable del PEP 2004 es que recupera el papel del docente en la toma de decisiones sobre los contenidos a enseñar a los niños y su intervención como apoyo, guía y facilitador del aprendizaje. Sin embargo, los docentes necesitan disponer de información de los contenidos a enseñar, sobre cómo son, cómo aprenden los alumnos y cuáles son las estrategias de enseñanza más eficaces. El personal docente, entonces necesita someterse a un proceso de aprendizaje que implique discutir, analizar y recibir ayuda para cuestionar su práctica y desafiar sus propias ideas (Yee, 2005).

Las competencias no son directamente evaluables, hay que elegir los contenidos más adecuados para trabajarlas y desarrollarlas; definir la secuencia y el grado propio de los distintos niveles y curso; establecer indicadores precisos de logro y acertar en las tareas que finalmente se le pide al alumno que realice (Coll, 2007). Por ende, implica que las tareas se mueven en un espacio donde haya libertad, creatividad y originalidad, pero también normas, reglas y límites. Lo valioso de las competencias es que se integran a partir de una tarea de desempeño; de ésta manera, la competencia se demuestra (Azpeitia, 2006).

Entonces, las competencias son habilidades, conocimientos, valores y actitudes que se integran y se ponen en práctica en situaciones reales. Estas son desarrolladas por el individuo y manifestadas en una gran variedad de situaciones similares o en diversos ámbitos de la vida humana personal y social. Al aplicar los conocimientos, habilidades y actitudes, por parte de los estudiantes, se genera un aprendizaje con sentido debido a que los infantes se enfrentan a situaciones problemáticas cercanas a su realidad, en las cuales logran construir sus conocimientos al utilizarlos como herramientas al dar solución a estas.

3 LOS USOS DE LOS NÚMEROS EN LAS ACTIVIDADES HUMANAS

En este capítulo se mencionara la importancia que los números tienen en las actividades humanas. Puesto que estos transmiten diferente tipo de información de acuerdo al contexto en el que las personas se encuentran.

Por otra parte, se sabe que los pequeños construyen sus propios conocimientos numéricos y los utilizan como herramientas para la solución de los problemas con los que se encuentren, es por ello, que en el primer apartado se hablará de las funciones que tiene el número. Es indispensable que el docente tome en cuenta los conocimientos previos que los pequeños poseen acerca de las funciones numéricas para saber desde qué punto y hacia dónde partir en la enseñanza del pequeño. Se continuara el apartado con la clasificación de González y Weinstein, (1998) acerca de las funciones de los números y se terminará este con la explicación de que el número se considera multiforme, dependiendo de la utilidad que se le dé, ésta característica del número también se debe al contexto en el que se esté utilizando. Los pequeños, debido a las experiencias que tienen, van adquiriendo una mayor cantidad de conocimientos numéricos con la interacción que tienen en su propio ambiente.

Los sistemas de numeración, es el tema del cual se hablará en el segundo apartado. En éste se destacará la manera en cómo el ser humano tiene la necesidad de transmitir información numérica, se mencionarán los diferentes sistemas de numeración y los cambios que estos han tenido dependiendo de las necesidades de las personas.

En el tercer apartado se describirá el sistema de numeración decimal, el cual es manejado en esta época, este se puede utilizar para diversas funciones y representaciones cuantitativas. A continuación se explicaran las cuatro funciones que este sistema tiene y se realizará una mención de la función del cero.

Para terminar este capítulo se hará referencia al registro de cantidades con la intención de explicar cómo las personas guardan en la memoria diversas cantidades. Se retoma la clasificación de Hughes (1987) quien divide en cuatro puntos cómo los pequeños registraban sus propias cantidades. Éstas son representadas desde garabatos hasta números establecidos, es decir, de lo más básico a lo más complicado. Para finalizar se concluye mencionando que las notaciones son necesarias para transmitir diferente tipo de información a más personas.

3.1 Funciones del número

Los números, en nuestra sociedad, son utilizados con múltiples propósitos. Estos se usan a diario para conocer la cantidad de elementos de un conjunto; para diferenciar el lugar que ocupa un objeto dentro de una serie; para diferenciar un objeto de otro o de un conjunto, para medir o para operar. Estos elementos son visualizados y utilizados por los niños de diferentes formas y desde edades muy tempranas. De esta manera, se percatan que los números transmiten diferente tipo de información de acuerdo al contexto en el que se encuentran al relacionar el número con el objeto o el hecho (González y Weinstein, 1998).

Los infantes, desde temprana edad, usan los números sin necesitar preguntarse qué son y llegan al preescolar con variados conocimientos numéricos. Con este conocimiento informal, que los pequeños ya tienen, es indispensable que la escuela organice, complejice y sistematice los saberes que traen los niños a fin de garantizar la construcción de nuevos aprendizajes. Es por ello, que se deben apoyar las competencias iniciales de los infantes y tomar en cuenta los desafíos a los que los niños se enfrentan en sus prácticas cotidianas que dan significado a los números (González y Weinstein, 1998).

Los pequeños, entonces, construyen e integran sus propios conocimientos numéricos como recursos, herramientas e instrumentos útiles para resolver determinados problemas. Sin embargo, a pesar de que el pequeño ya posee nociones numéricas previas es necesario que el docente plantee situaciones problema, en contextos variados, que permitan desarrollar, integrar y hacer uso del número para que el niño pueda adquirir las distintas funciones de este. González y Weinstein, (1998) clasifican tres funciones de los números que a continuación se presentan:

1. El número como memoria de la cantidad: hace referencia hacia la posibilidad que ofrecen los números de evocar una cantidad sin que éste se encuentre presente. Ésta función está relacionada con el aspecto cardinal del número lo que permite conocer el cardinal de un conjunto.

2. El número como memoria de la posición: es la función que permite recordar el lugar ocupado por un objeto en una lista ordenada sin tener que memorizar la lista Esta función se relaciona con el aspecto ordinal del número que indica el lugar que ocupa en una serie.

3. El número para anticipar resultados, calcular y comprender que una cantidad puede resultar de la combinación de varias cantidades y que se puede operar sobre números para prever el resultado de una transformación de la cardinalidad. La transformación del cardinal de un conjunto se produce al operar sobre el mismo, es decir, al juntar, al reunir, al agregar o al quitar cardinales de distintos conjuntos

El número, además de estas tres funciones, se considera que tiene un concepto polimorfo como lo menciona Scheuer (2005). Éste es capaz de asumir y promover múltiples utilidades. El uso particular de un número no puede ser a la vez cardinal y ordinal o algebraico y operador o producto del conteo, entonces, el número es posible utilizarlo en diferentes perspectivas.

Para comprender las matemáticas es necesario entender el número, el cual proporciona conocimientos de herramientas convencionales (numeración oral o la notación numérica); terminología específica (área, volumen, función, matriz) y artefactos (reglas, ábacos, compás, calculadoras, ordenadores). Por lo tanto, se necesita ser capaz de usar y pensar en relaciones numéricas y espaciales utilizando las convenciones de la propia cultura, a lo que se le conoce como alfabetización numérica. Los niños no pueden re-inventar los números y las matemáticas por sí mismos sino que reconstruyen las matemáticas a través de la interacción con las personas, los artefactos culturales y el mundo físico (Scheuer, 2005).

3.2 Sistemas de numeración

Los números son usados para comunicar o transmitir diferente tipo de información y para dar solución a distintos problemas, es por ello, que el número depende de la situación contextual en el cual las personas se desenvuelven, puesto que cada persona puede darle un uso diferente a este, y a sus múltiples funciones, para dar solución al problema que se le presente. Entonces el Hombre adquiere una gran necesidad de transmitir información numérica para solucionar dificultades, lo que provocó que fuera desarrollando, a lo largo del tiempo, diferentes maneras de expresión que dieron lugar a distintos tipos de sistemas numéricos. (González y Weinstein, 1998).

Uno de los primeros sistemas que ocupó el hombre fueron los sistemas aditivos, los cuales están formados por una cantidad determinada de signos; los números se forman por la unión de los mismos. Este grafismo pertenece al sistema jeroglífico egipcio, en el cual existen dos símbolos uno representa el 10 y otro el 1. Después aparecieron los sistemas híbridos, estos surgieron por la necesidad, que sintió el Hombre, de evitar las largas repeticiones de los sistemas aditivos para expresar cifras. A estos sistemas de tipo multiplicativo pertenece el sistema chino-japonés. Luego surgieron los sistemas posicionales, estos poseen una cantidad limitada de símbolos y otorgan un valor variable a los mismos de acuerdo al lugar que ocupa en la escritura. Este grafismo pertenece al sistema de numeración maya, los cuales idearon un sistema de base 20 con el cinco cómo base auxiliar, dibujado como una raya horizontal y la unidad se representaba por un punto. Se añadían los puntos necesarios para representar cantidades después del número cinco. Para el número 10 se usaban dos rayas horizontales sobrepuestas y de la misma forma se continúa hasta el 20 con cuatro rayas. Estos símbolos constituyen las cifras de un sistema de base 20, en el que hay que multiplicar el valor de cada cifra por 1, 20, 20x20, 20x20x20, según el lugar que ocupe y sumar el resultado. Otro ejemplo de sistema posicional es el sistema decimal que dependiendo del lugar que ocupan las cifras indica el valor de cada símbolo (González y Weinstein, 1998).

La clasificación enunciada pone de manifiesto como el Hombre, a lo largo de la historia, fue evolucionando en sus construcciones intelectuales y elaborando sistemas de numeración cada vez más económicos y a la vez más complejos (González y Weinstein, 1998).

3.3 El Sistema de Numeración Decimal

Uno de los legados culturales importantes es el sistema numérico decimal arábigo-hindú; lo hacen un sistema semiótico muy particular; apto para ser empleado con propósitos y funciones diferentes. Una de estas funciones es que destaca la representación y el registro permanente de informaciones cuantitativas. Se considera una construcción intelectual del hombre que se fue elaborando a lo largo del tiempo y con mucho esfuerzo.

El sistema de numeración decimal es un sistema posicional que tiene las siguientes características:

1. Sistema de base diez: la palabra decimal indica que la base es el número 10 y por lo tanto, está conformado por 10 signos diferentes (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

2. Valor de cada signo: cada signo posee un valor relativo, es decir, un valor que varía de acuerdo al lugar que el signo ocupa en el número. Un valor posicional.

3. Agrupamiento de 10 en 10: los términos decena, centena, mil, indican este tipo de agrupamientos.

4. El Cero: es el signo que indica ausencia de agrupamiento de un determinado orden (González y Weinstein, 1998).

La invención del cero fue el resultado de concebir que un signo significase la ausencia de algo; la ausencia de unidades del orden correspondiente. El signo aislado representaba una cantidad nula. En la historia del sistema de numeración, una de las primeras estrategias para representar que faltaba alguna potencia en la escritura de una notación numérica; fue dejar un espacio vacío. Ésta estrategia es frecuente en preescolares (Martí, 2005).

Para comprender la estructura del sistema de numeración decimal es la equivalencia de los órdenes en base diez: 10 unidades equivalen a 1 decena, 10 decenas corresponden a 1 centena y así consecutivamente. También este sistema hace una pauta repetitiva con puntos de cambio predecibles, es decir, el sistema de base diez se fundamenta en un total de 10 símbolos para las cifras que se combinan sistemáticamente para formar números de 2 cifras, que empiezan con el 10 y acaban con el 99 (Baroody, 1998).

El sistema de numeración decimal gracias a sus diferentes características ha logrado permanecer en la vida y utilidad del hombre. Puesto que este sistema logra plasmar registros de manera cuantitativa y que se consiguiera la representación de cantidades con mayor facilidad, la cual le tomo mucho tiempo al Hombre finalizarla, esta utilidad ayudó a las personas para poder comunicar y transmitir información numérica.

3.4 Registro de Cantidades

A partir del uso del sistema de numeración decimal surge la necesidad de guardar en la memoria las cantidades que se utilizan, es decir, de registrar cantidades, para ello González y Weinstein, (1998) retoman la categorización que realizó Martín Hughes (1987), cuando quería observar el transcurso evolutivo acerca de cómo los niños registran sus propias cantidades y observó cuatro procesos:

1. Respuestas idiosincráticas: el niño al representar cantidades no tiene en cuenta ni el tipo ni la cantidad de objetos que se le presentan. Los pequeños realizan una representación similar a los “garabatos” que no tiene relación con la cantidad planteada.

2. Respuestas pictográficas: el niño simboliza por medio de dibujos tanto los objetos presentados como la cantidad de los mismos.

3. Respuestas icónicas: el niño representa la cantidad de objetos mediante símbolos (puntos, rayas o taches) que no se parecen al objeto presentado.

4. Respuestas simbólicas: el niño representa la cantidad de objetos mediante números (González y Weinstein, 1998).

Las notaciones son necesarias para transmitir a otra persona un contenido informativo (función de comunicación) pero también son indispensables porque se producen para uno mismo (función de memoria). Las notaciones, son un objeto de reflexión y conocimiento. El sujeto puede volver sobre ellas y analizarlas a partir de sus características perceptibles (Martí, 2005)

El uso de los números, en las actividades humanas son necesarios para las personas cuando intentan dar solución a los problemas con los que se enfrenten ante una situación real. Por ello, es necesario que desde las edades tempranas los docentes logren observar con qué tipo de conocimientos informales los niños asisten al preescolar. Puesto que ellos llegan con un sin fin de saberes de su propio contexto social y logran dar solución a diferentes dificultades. Los pequeños, dependiendo de su ambiente, adquieren y utilizan el sistema de numeración decimal y por medio de su propia cultura se apropian de él sin ni siquiera tener conocimiento de este. Estos niños demuestran que lo saben y lo conocen al utilizar las funciones de los números y el registro de cantidades.

4. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PREESCOLAR

En este capítulo se mostrarán las nociones matemáticas que docentes y estudiantes van construyendo a lo largo de su educación. La matemática se incluye en los planes educativos y se encuentra inmersa en los contextos reales de los individuos. En el primer apartado se hablará de cómo es concebida esta disciplina por diversos autores enfocados a la educación matemática y por quienes realizan los programas de estudio y pruebas de evaluación.

En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental el concepto que tiene el profesor de ésta ciencia, como se muestra en el segundo apartado, dado que su concepción determina la forma de propiciar el desarrollo de conocimientos a sus estudiantes.

Asimismo, en el tercer apartado, es importante conocer la concepción de las matemáticas que el alumno se forma a través de sus experiencias escolares ya que la manera en que es concebida esta disciplina influye en su rendimiento académico y social.

En el cuarto apartado, se menciona que el docente necesita conocer e indagar los saberes matemáticos que el niño posee y en base a ellos seleccionar los contenidos a enseñar, con el fin de proponer situaciones problema que planteen un reto cognitivo. Para brindar una enseñanza activa, los docentes necesitan aplicar estrategias de aprendizaje que cuestionen el pensamiento de los estudiantes y presenten retos con el propósito de incitar en ellos el análisis y la reflexión.

4.1 Concepción de las matemáticas

La matemática se caracteriza por ser una actividad humana, orientada a la solución de problemas que le surge al Hombre en su accionar sobre el medio. Se conciben como una permanente búsqueda de nuevas respuestas ante los distintos problemas provenientes de sí misma, de la realidad y de su interrelación con otras ciencias. Debido a estas características que tienen las matemáticas se incluyen en los planes educativos. Estas ayudan al individuo a integrarse activamente a una sociedad, quien necesita de instrumentos, habilidades y conceptos matemáticos que le permitan interactuar, comprender y modificar el mundo que le rodea. Las matemáticas ayudan a desarrollar la capacidad de interpretación y creación simbólica, necesaria en el mundo actual en donde se maneja con y sobre representaciones. Asimismo, las matemáticas son esenciales, ya que se encuentran en el medio en que se desenvuelve el individuo (González y Weinstein, 1998).

La Matemática es una ciencia que puede considerarse en sí misma, “instrumento de conocimiento”; ya que es una herramienta cultural, para analizar, representar, predecir hechos, comunicarse, comprender e interpretar la realidad. Encierra un carácter formativo, estimula la capacidad de explorar situaciones, identificar, resolver problemas, explicar y generar una flexibilidad en la búsqueda de soluciones (Callejo, 2007).

Pérez y Scheuer (2005) retoman la definición de las matemáticas que hace Nunes (1996) quien la concibe como una práctica cultural, situada en el espacio y en el tiempo; se definen por su carácter social, cultural de las actividades, pensamientos y prácticas realizadas por una comunidad de matemáticos. Las matemáticas emergen y se configuran dentro de usos, actividades culturales propias y características de grupos sociales concretos Estas actividades marcan al mismo tiempo posibilidades y restricciones para los distintos mundos culturales matemáticos: actividades cotidianas, sociales o científicas. El conocimiento matemático es el resultado de la participación en prácticas culturales que implican el número, el aprendizaje de herramientas culturales, lo que a su vez posibilita el aprendizaje y la comprensión posterior de sistemas matemáticos más formales (Pérez y Scheuer, 2005).

De acuerdo a PISA 2003, se refiere a las matemáticas como aquella capacidad que tienen los estudiantes para analizar, razonar y comunicar lo más eficazmente posible la interpretación y solución de problemas matemáticos que pueden darse en una variedad de contextos y situaciones de la vida ordinaria (OCDE, 2003).

El proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real se le denomina matematización. Este proceso comienza por situar un problema de la realidad, el cual se tiene que organizar de acuerdo a conceptos matemáticos. Mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización, la formalización se reduce y la realidad aumenta gradualmente, lo que potencia los rasgos matemáticos de la situación y transforma el problema real en un problema matemático, dando solución y sentido al problema en términos de la situación real (OCDE, 2003).

El Informe del Consejo Nacional de Investigación proveniente de la Academia Nacional de Ciencias de Washington, D.C., debate a favor de un objetivo instructivo de la "Competencia matemática" que implica:

1. Comprensión conceptual: de conceptos matemáticos, operaciones y relaciones.
2. Fluidez de procedimiento: destreza en llevar los procedimientos flexiblemente, con exactitud, eficientemente y apropiadamente.
3. La competencia estratégica: la habilidad de formular, representar y solucionar los problemas matemáticos.
4. El razonamiento: la capacidad para la idea lógica, la reflexión, la explicación y la justificación.
5. La utilidad matemática: la inclinación habitual de ver la matemática tan sensata, útil, unida con una creencia en la vivacidad y eficacia propia. (National Research Council, 2005).

La aplicación de las matemáticas para resolver problemas del mundo real es un proceso que envuelve varias fases: a) comprender la situación descrita en el problema, b) buscar una estrategia: formular la situación en términos matemáticos, es decir, construir un modelo matemático que describa la relación entre los datos y las condiciones del problema, c) aplicar la estrategia y d) revisar y comunicar el proceso y la solución. De esta manera, el problema se logrará resolver mediante una secuencia de pasos reflexivos, significativos y situados (Callejo, 2007).

Tener un grado relativamente bajo de interacción con el mundo físico y sociocultural, basta para comenzar a desarrollar el sentido numérico en sus diversas funciones, sin embargo, no abarca todas las dimensiones a las que son posibles atender. Sin el aprendizaje de los diversos sistemas externos de representación desarrollados y transmitidos culturalmente sería imposible pensar matemáticamente. Al aprender conocimientos culturales, aprendemos las perspectivas mediante las cuales las personas se relacionan con el mundo como los modos de hacer, representar, formular y pensar. Las matemáticas, forman parte del núcleo de las culturas humanas; de acuerdo con los estudios de Bishop (1991), retomado por Pérez y Scheuer (2005), en todas las culturas conocidas las personas participan en un repertorio de actividades matemáticas: contar, localizar, medir, diseñar, jugar, explicar y resolver problemas.

4.2 Concepción del alumno acerca de las matemáticas

Las creencias matemáticas de los estudiantes influyen en su rendimiento académico y social. Un estudiante que concibe a las matemáticas como un proceso rígido puede ser renuente a participar en actividades matemáticas creativas. A la inversa, un estudiante con una visualización activa que percibe “hacer matemática” como una actividad de solución de problemas dinámica, promueve el interés de emprender tareas estimulantes (Liu y Niess, 2006).

Las creencias que tienen los estudiantes acerca de las matemáticas determinan cómo se elige o se evita un problema y las técnicas que se utilizan. Los alumnos creen que las matemáticas formales tienen poco o nada que ver con el verdadero pensamiento o la solución de problemas y el mundo real. Corte (2004) retoma la consideración de Caldwell (1995) quien sugiere hacer uso de consideraciones realistas al resolver problemas matemáticos en la escuela.

Una modificación de las relaciones de los estudiantes con las matemáticas implica que los contenidos de esta disciplina y la disponibilidad de herramientas bajo el control del estudiante tomen significados diferentes. En esta modificación es necesario que los alumnos tomen un papel de activo, participando en los diálogos, justificando sus ideas y no tomar el papel único de ejecutores. A esta idea llegaron Cubillo y Ortega (2000) al estudiar la influencia en la opinión/actitud de los alumnos hacía las matemáticas al implementar en el aula, el modelo didáctico de gestión mental de A. de La Garanderie. El enfoque fundamental de este modelo reside en la concepción de que los conocimientos se construyen usándolos en contextos y situaciones sociales comunicativas como las que concurren en el aula. Intenta lograr un aprendizaje significativo e invita al enseñante a poner en práctica situaciones de aprendizaje variadas, proporcionándoles una mayor capacidad de razonamiento.

El modelo didáctico de gestión mental de A. de La Garanderie fue implementado en España a 23 alumnos de primer grado de bachillerato de estudios nocturnos que han tenido fracasos académicos en cursos anteriores, constatando que las matemáticas fueron la causante principal de estos retrasos académicos. La implementación se dio en 2 fases en los cursos 1994-95 y 1995-96 y se eligió como tópico las fracciones. En el primer ciclo los alumnos no entendían los conceptos, se les dificultaba seguir los razonamientos matemáticos y aplicar los resultados. No tuvieron éxito al tratar de resolver problemas, mostraron escaso interés por la asignatura y fueron poco participativos en el aula. Se realizó una prueba inicial y final para hacer una valoración de la posible influencia del modelo de gestión mental en su opinión/actitud hacia las matemáticas. En el primer ciclo obtuvieron calificaciones insuficientes y mostraron desagrado hacía la materia, no obstante, consideraron las matemáticas importantes para resolver sus problemas cotidianos y para sus estudios superiores (Cubillo y Ortega, 2000).

Al inicio del segundo ciclo, los alumnos concedieron una mayor importancia a las matemáticas para resolver sus problemas cotidianos. El agrado por esta materia dentro de su currículo fue medio y dedicaban poco tiempo al estudio de las matemáticas. Al final del segundo ciclo los alumnos afirmaron mayoritariamente que el uso de los materiales elaborados por la profesora favoreció su trabajo; señalaron como criterios positivos: el trabajo con el material, su autoevaluación y participación. También mencionaron que las limitaciones personales para la comprensión de las matemáticas son la causa que más influye, causas a las cuales atribuyeron su actual actitud hacia las matemáticas, después aparecieron la carencia de conocimientos previos y el método de estudio. La importancia que los alumnos concedieron a las matemáticas para su formación personal fue alta y esta valoración se vio ligeramente modificada, de forma positiva, a partir de la experiencia. De esta manera, el método colaboró a que los alumnos se sintieran responsables de su propio aprendizaje (Cubillo y Ortega, 2000).

Los estudiantes desarrollan sus visualizaciones de hacer matemática de la experiencia práctica. Aquellos que se encuentran dentro de aulas tradicionales en donde resalta la memorización y el uso de formulas perciben la matemática como el seguimiento de rutas predeterminadas y como un dominio externo de conocimiento que no hace relación con su vida personal. Los alumnos que se encuentran en clases comunicativas, en donde se les permite una reflexión de los problemas haciendo un intercambio de ideas y el uso de sus propias estrategias, conciben que en la matemática existen diversas maneras de llegar a una solución sin hacer uso de fórmulas preestablecidas y no la consideran como una verdad absoluta (Liu y Niess, 2006; Cobb, Boaler y Gresalfi, 2004).

La diferencia que los alumnos hacen entre concebir a las matemáticas como una herramienta necesaria para la vida diaria y como la aplicación de procedimientos rutinarios fue observada por Liu y Niess (2006) en 44 ingenieros de Taiwan. En este país, la matemática es percibida como un origen de conocimientos para una profesión, en el que resalta la memorización y el uso de fórmulas como dominantes del aprendizaje de las matemáticas, en lugar de una disciplina para desarrollar el pensamiento matemático. Los estudiantes resolvieron 12 problemas de cálculo sin aplicar fórmulas, permitiéndoles utilizar sus propias estrategias y el profesor promovía la idea crítica de los estudiantes.

Al finalizar se hizo una reflexión de los problemas haciendo un intercambio de ideas.

Los resultados encontrados por Liu y Niess (2006) muestran que antes, los alumnos creían que el pensamiento matemático era resolver problemas o derivar respuestas siguiendo rutas predeterminadas. Asimismo, consideraban la reflexión matemática como recordar una gran cantidad de fórmulas y aplicarlas, además de asociarla con números. Los alumnos al enfrentarse a problemas que no eran resueltos fácilmente, mostraban una disposición pasiva.

Los estudiantes son enseñados a creer que hay una única respuesta fija e inalterable para una cuestión de matemática en general. Sin embargo después de haber participado en la investigación de Liu y Niess (2006) los estudiantes cambiaron sus visiones: se refirieron al pensamiento matemático como un pensamiento lógico y de razonamiento, pocos se refirieron a éste como un proceso de resolver problemas o recordar fórmulas y nadie lo percibió como cálculo u operaciones aisladas. Ante problemas difíciles los alumnos mencionaron que se debe tratar el problema antes de pedir la ayuda. A la respuesta de cómo piensa un matemático, los participantes mencionaron algunas características como su perseverancia, su imaginación y su creatividad. La noción que tenían de que los matemáticos tienen siempre enfoques convenientes y rápidos ya no fueron mencionados. De esta manera, cuando los estudiantes participan en tareas donde se les permita la reflexión crítica y el uso de sus propias estrategias, se percatan que la matemática no es una verdad absoluta, sino que existen diversas maneras de llegar a una solución, sin hacer uso de fórmulas preestablecidas, además perciben la matemática como dinámica.

En aulas comunicativas los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático al percatarse que las matemáticas están vinculadas con su medio. Esto permite que los estudiantes resuelvan sus problemas mediante una visión matemática, como observaron Cobb, Boaler y Gresalfi (2004) en 1000 estudiantes a nivel secundaria de Estados Unidos. Estos estudiantes fueron sometidos a dos tipos de instrucción: uno basado en la investigación y otro en lo tradicional. La primera postura se considero productiva, en ella los estudiantes realizaban preguntas, cuando veían un hecho interesante o conjunto de datos, querían encontrar más respuestas y usaban la matemática para preguntar y probar las relaciones que observaban. Los estudiantes percibían la matemática como un conjunto de herramientas exploratorias y usaban los métodos matemáticos de ese modo. La segunda postura se considero pasiva, debido a que, los estudiantes vieron las matemáticas como un dominio externo de conocimiento que no hace relación con su vida personal. Cuando los alumnos tropezaban con un nuevo problema ellos recurrían al uso de fórmulas. Con esta acción era posible que los estudiantes estuvieran viendo la matemática como un conjunto de procedimientos, los cuales estaban estudiando en clases tradicionales.

Los resultados del estudio de Cobb, Boaler y Gresalfi (2004) demuestran que las posturas de los estudiantes estaban relacionadas con su plan de estudios y experiencias pedagógicas. Los estudiantes que participaron en clases tradicionales querían que se les dijera todo para llegar a la solución de los problemas y preferían el trabajo fácil, mientras que los estudiantes que estuvieron en clases comunicativas, tomaban un papel más activo en su aprendizaje y pensaban que eran productivos los problemas demandantes. Solamente los estudiantes que fueron animados a comunicar ideas y usar diferentes representaciones, constantemente describieron la matemática como una herramienta comunicativa.

En las clases tradicionales, el libro de texto y el profesor fueron presentados como la autoridad final, es decir, algunos estudiantes creían que las respuestas eran suficientes o correctas solamente cuando los profesores o el libro decían que lo eran. En las clases comunicativas, los profesores les decían a los estudiantes que podían determinar si estaban correctos o si iban en dirección correcta razonando matemáticamente. Algunos estudiantes desarrollaron la idea de que las herramientas matemáticas que aprendieron permitieron razonaran sobre la situación y determinaran si las preguntas fueron respondidas correctamente o no, teniendo la autoridad de razonar sobre las ideas. Las posturas que los estudiantes desarrollan no son definidas por creencias o por preferencias de aprendizaje únicamente, sino que también contribuyen las experiencias con plan de estudios, el éxito y actividades fuera de la escuela (Cobb, Boaler y Gresalfi, 2004).

Por su parte, Parra (2005) observó y entrevistó a 10 pasantes de la Licenciatura en Educación Matemática en Venezuela, con el objetivo de describir las relaciones existentes entre las creencias de los pasantes de prácticas profesionales y las de los más próximos en su proceso de formación. Encontró que los pasantes consideraron a la matemática como un conjunto de conocimientos construidos socialmente que, si bien conserva una estructura organizada, esta puede ser cambiada porque está en un continuo proceso de revisión y construcción. Como objetivos de la educación matemática, consideraron que los aprendices necesitan utilizar los conocimientos adquiridos en situaciones de la vida cotidiana haciendo uso de la reflexión. Los pasantes creían esto puesto que uno de sus maestros de física les mostró que tanto la física como la matemática debían promover el pensamiento racional.

La maestra y los alumnos de séptimo grado que estuvieron bajo la responsabilidad de los pasantes en el desarrollo de sus prácticas profesionales (los cuales proponían un modelo de enseñanza socio-constructivista basado en la educación contextualizada, solución de problemas y trabajo cooperativo) al inicio concibieron la matemática como un sistema formal consistente y sin contradicciones. Después los alumnos mencionaron que la matemática debía ser útil para la vida; algunos manifestaron que la matemática era útil porque les enseñaba a efectuar compras, centrando las matemáticas en el campo de los conjuntos numéricos y sus operaciones (Parra, 2005).

En las prácticas profesionales en el estudio de Parra (2005), se promovió con insistencia la solución de problemas, lo cual hizo que los pasantes giraran parcialmente sus creencias hacia un modelo cuya atención se centraba en el manejo de habilidades. Sin embargo, en la práctica prevaleció finalmente la transmisión de habilidades mediante repetición de ejercicios. La secuencia de actividades se convirtió en teoría-ejemplo-ejercicios, puesto que los aprendices manifestaron rechazo a la solución de problemas cuando se pretendió intensificar su uso. Los pasantes señalaron que hacer participar a los estudiantes en la solución de problemas y discutir sobre ellos es fundamental en el proceso enseñanza-aprendizaje, sin embargo, no es aplicada en la práctica, puesto que los profesores tienen su tiempo limitado para cumplir el programa establecido. Además, los pasantes observaron que los alumnos se quejaban porque ellos no les decían las respuestas y se resistían a cualquier variación en la forma de enseñanza.

Los estudiantes no sólo tienen nociones variadas acerca de las matemáticas, sino también, de algunos conceptos de ella como es el infinito. Se ha mostrado, que dependiendo de la profesión que los escolares estudian, las definiciones acerca de este concepto son más específicas. Esto fue observado por Montoro (2005), en 120 alumnos de la Universidad Nacional del Comahue de Argentina de los cuales 60 eran ingresantes y 60 avanzados. Estos estudiantes provenían de 3 carreras en donde el conocimiento matemático presenta una relevancia diferente: Profesorado en Matemática, Licenciatura en Biología y Profesorado de Educación Física.

En la investigación de Montoro (2005), se encontró que los alumnos de Educación Física e ingresantes de otras carreras, no aceptaban conjuntos infinitos o tenían el concepto de que infinito es mucho. De la misma manera, los estudiantes ingresantes mencionaron que realizar combinaciones posibles depende de la magnitud de los elementos de partida, es decir, con pocos elementos, se hacen pocas combinaciones y con muchos, resultan muchas combinaciones. Los alumnos de Biología, no respondían o lo hacían incorrectamente a preguntas con respecto de si en el infinito está todo. Los estudiantes que expresaron, que con pocos elementos repetidos se puede obtener una infinidad de combinaciones y que en una infinitud no necesariamente deben estar todas las combinaciones posibles, fueron los que estudiaban Matemáticas y eran avanzados. Estos estudiantes pasaron del conocimiento cotidiano al científico, lo que sostiene que para la comprensión de conceptos complejos se requiere de un alto grado de instrucción específica.

Las concepciones de las matemáticas que tienen los agentes educativos, van cambiando positivamente conforme participan en programas con un método de enseñanza socio-constructivista basada en la educación contextualizada, solución de problemas y trabajo cooperativo. Estos agentes coinciden que la matemática es una herramienta cultural, para analizar, representar, comprender e interpretar la realidad, predecir hechos y para comunicarse. Igualmente la consideran útil para poder resolver los problemas cotidianos, ya que constantemente participan en un repertorio de actividades matemáticas, como son contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Sin embargo, los profesores además requieren estar convencidos de que sus alumnos son sujetos intelectualmente creativos, capaces de resolver problemas, construir teorías y dar argumentos.

Los estudiantes desarrollan su concepción de la matemática a partir de la experiencia práctica, por ello los docentes necesitan ser capacitados para analizar críticamente su práctica en el marco de cómo están enseñando y con ello llevar a cabo una enseñanza reflexiva. Aquellos estudiantes que se encuentran en aulas donde resalta la memorización y el uso de formulas, perciben la matemática como el seguimiento de rutas predeterminadas que no hace relación con su vida personal. Esta concepción repercute en su aprendizaje, pensamiento y rendimiento escolar. Los alumnos que se encuentran en clases comunicativas, en donde se les permite una reflexión de los problemas haciendo un intercambio de ideas y el uso de sus propias estrategias, creen que en la matemática existen diversas maneras de llegar a una solución sin hacer uso de fórmulas preestablecidas. Entonces, los estudiantes dependiendo de la enseñanza y las experiencias que hayan recibido van a desarrollar diferentes tipos de concepciones matemáticas.

4.3 Concepción del docente acerca de las matemáticas

En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental el concepto que tiene el profesor de ésta ciencia, dado que su concepción determina la forma de propiciar el desarrollo de habilidades y conocimientos (Narro, 1997).

Narro (1997) observó las diferentes concepciones en los diversos sectores de la comunidad universitaria. En su estudio participaron 212 docentes de módulo de Matemática y 3585 alumnos de las carreras que se ofrecen en la División de Ciencias Sociales y Humanidades (DCSH) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Xochimilco (UAM-X) en la Ciudad de México. Para recolectar información utilizó un cuestionario dividido en 2 secciones: concepción de la matemática y procesos de enseñanza aprendizaje. Encontró que un mayor porcentaje de estudiantes y docentes consideraron la matemática totalmente formativa, como una ciencia complicada y de apoyo. Asimismo, apoyaron el carácter abstracto de esta ciencia, estuvieron de acuerdo que la matemática facilita la comprensión y solución de los problemas reales. Sin embargo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje se apreció que la elaboración de notas y textos adecuados fueron la mejor propuesta aplicada a los cursos de matemática. En los cursos se dio énfasis a los aspectos teóricos, en la parte instrumental y en la resolución de ejercicios. Este proceso de enseñanza-aprendizaje creó con el tiempo una situación de monotonía para el profesor, ocasionando una falta de motivación para la búsqueda de nuevos conocimientos o fortalecimiento de aquellos. Esto también provocaba que el alumno con cierta frecuencia, considerara la matemática sólo como una condición para acreditar el módulo, sin lograr una idea clara sobre su aplicación y su relación con la realidad.

Con sus resultados Narro (1997), demuestra que los profesores necesitan además de tener una concepción positiva de las matemáticas ser capacitados para llevar a cabo una enseñanza reflexiva haciendo que los alumnos apliquen sus conocimientos a problemas reales.

Otra concepción que los profesores tienen se reportó en la Ciudad de México, en donde docentes de secundaria consideran que sus alumnos no son capaces de resolver problemas matemáticos que requieran formular alguna generalización y crear argumentos sólidos para aceptar o rechazar una solución. Esto fue encontrado por Cedillo (2008) en 25 docentes de segundo grado de secundaria de dos escuelas públicas. La hipótesis en que basó su estudio fue que un incremento en la calidad de la enseñanza puede tener efectos positivos en el aprendizaje de los estudiantes. Además conocer las formas de razonamiento matemático de los alumnos proporciona a los profesores bases más sólidas para su instrucción y su desarrollo profesional.

Las actividades de aprendizaje utilizadas por Cedillo (2008) en su estudio fueron basadas en la solución de problemas que representaran un fuerte reto para los estudiantes y que, a la vez, motivaran su curiosidad intelectual. Utilizó temas de aritmética, álgebra y geometría. Los estudiantes tenían 50 minutos para tratar cada tema y se les permitió trabajar cooperativamente. Algunos problemas fueron de forma escrita en otros utilizaron materiales (como jarras de agua) que ayudaron a llevar a la práctica el problema. Los docentes y alumnos resolvieron los mismos problemas matemáticos por separado. Las 20 sesiones de clase y los talleres con los profesores fueron videograbadas.

En los talleres impartidos en la investigación de Cedillo (2008) se abordaron los problemas propuestos en sesión, se analizaron los videos y antes de verlos se les preguntaba a los docentes si creían que los alumnos serian capaces de resolver los problemas que ellos acababan de trabajar, ¿en qué medida?, ¿cómo? y ¿por qué? Al inicio no creían que los estudiantes resolvieran los problemas tomando como referencia su propia experiencia y recursos que empleaban cuando enseñaban esos temas, sin embargo, en los videos observaron logros matemáticos no esperados en ellos. Una vez que los profesores vieron hasta qué punto los estudiantes fueron capaces de trabajar con los problemas usando las herramientas matemáticas que tenían, empezaron a discutir buscando encontrar por qué su percepción inicial de las capacidades de los alumnos estaba tan alejada de lo que ellos pudieron hacer.

Los docentes llegaron a la conclusión de que había sido la manera en la que el instructor siguió la forma de razonamiento de los estudiantes asumiendo que el aprendizaje es un proceso de construcción socialmente compartido por los alumnos y el maestro. Esto hizo que los estudiantes empezaran a producir ideas, como analizar casos particulares que finalmente les dejaron ver posibles generalizaciones. Concluyeron que no fueron solo las habilidades pedagógicas del maestro lo que permitió que las actividades en el aula fueran fructíferas sino que también los materiales que el profesor usó para la actividad, el criterio para diseñar o seleccionar los problemas y la forma en la que se planeó la clase fueron factores importantes. El hecho de ponerlos en la posición de confrontar su conocimiento con el de sus estudiantes les permitió analizar críticamente su práctica en el marco de cómo estaban enseñando (Cedillo, 2008).

Los profesores necesitan estar preparados para proporcionar nuevas experiencias que induzcan a sus alumnos a recopilar y analizar información y confirmar o refutar las conjeturas que generan, con base en sus acercamientos intuitivos al conocimiento formal de las matemáticas. Esto requiere que los profesores demuestren en su práctica que están convencidos que sus alumnos son sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas, construir teorías y conocimiento razonable (Cedillo, 2008).

Los alumnos son capaces por si mismos de resolver sus propios problemas utilizando términos matemáticos. Sin embargo, la matemática en Estados Unidos se centra en que los alumnos cuando solucionan un problema lo realizan siguiendo los pasos de un método que ha sido enseñado en clase. Los docentes dejan a un lado el análisis y la comprensión del problema por parte de los estudiantes; por ejemplo: cuando se le plantea a alguna persona resolver el siguiente problema: 8/9+12/13, muchas personas tratan de encontrar inmediatamente el denominador común y añadirlos, debido a que ése es el procedimiento que les fue enseñado por docentes los cuales estaban más interesados en encontrar un resultado que en la comprensión misma que el estudiante puede dar al problema. Existen diferentes maneras de llegar a una solución, algunas personas pueden tomar un enfoque conceptual, en lugar de uno procedimental y notar que 8/9 es casi 1, al igual que 12/13, así que aproximadamente la respuesta es un número menor que 2 (National Research Council, 2005).

Otra concepción que los docentes tienen de las matemáticas es que algunas personas tienen habilidad para hacer matemática y otras no. Los docentes que identifican a niños con mayor dificultad para resolver problemas matemáticos son excluidos por estos; ya que consideran que no poseen la destreza necesaria para proporcionar soluciones (Diane y Anderson, 2006).

La matemática no sólo está considerada como difícil sino también ha sido percibida por docentes de Estados Unidos, como una forma de comprender y resolver problemas matemáticos, un ejemplo de esto es que si los estudiantes nunca comprenden que “X” y “Y” no tienen significado específico, sin saber que son notas convencionales para etiquetar algo no conocido, estarán confundidos cuando una “Z” aparezca (National Research Council, 2005).

Los docentes tienen diferentes formas de concebir a las matemáticas como: solucionadoras de problemas y como procedimientos rutinarios. Dependiendo de cuál sea el concepto que los profesores tienen acerca de esta ciencia es lo que se podrán enseñar y transmitir a sus alumnos.

4.4 Estrategias de los docentes en la enseñanza de las matemáticas

El sentido que un docente da a su práctica en una asignatura determina la naturaleza del ambiente que se establece dentro del salón de clase y éste, a su vez, condiciona las actitudes de los estudiantes hacia aquello que están aprendiendo. Fernández, et al. (2004) menciona, en su investigación con estudiantes colombianos, la transmisión de conceptos matemáticos sin la consideración de los conocimientos previos que los alumnos han desarrollado a partir de su vida cotidiana y sobre factores extraescolares relacionados con el rol de los padres.

Los niños espontáneamente construyen en su ambiente natural y sin instrucción formal nociones matemáticas informales. Estas nociones son relativamente significativas y constituyen el fundamento para el aprendizaje posterior de las matemáticas formales en la escuela; además, recopilan una gran riqueza de conocimientos sobre temas que les interesan. A partir de estos intereses y actividades cotidianas es como se desarrolla el pensamiento matemático. Los profesores necesitan saber lo que cada niño conoce y no conoce sobre cada tema presentado para partir desde sus construcciones actuales a un siguiente grado de conocimiento (Fernández, et al., 2004).

Fernández, et al. (2004) investigó las creencias y las prácticas de 96 docentes que trabajaban con niños entre 3 y 6 años respecto al pensamiento matemático informal de los niños de preescolar en Colombia. Utilizó como instrumentos de recopilación de información: cuestionarios y entrevistas. Encontró que la mayoría de los docentes destacaron en la educación matemática el conteo, el reconocimiento del número y su escritura. Al referirse a la forma de aprendizaje de las matemáticas, los docentes consideraron que ésta se aprende a través de la enseñanza directa, de lápiz y papel, dando mayor énfasis a las actividades lúdicas y manipulativas. Los docentes manifestaron que ayudan a sus alumnos a aprender por medio de diferentes estrategias: la explicación, el modelamiento y utilizan la reflexión como parte del proceso educativo, de esta manera, los niños aprenden más críticamente. Consideraron que los infantes de edad preescolar están en capacidad para aprender matemáticas. En lo referente a las relaciones numéricas (mayor que, menor que, igual a) los docentes consideran que sus alumnos no conocen dichas relaciones y esperan que identifiquen los símbolos más no la relación existente.

Los docentes que participaron en la investigación de Fernández, et al. (2004) expresaron satisfacción con el papel que desempeñan y disposición para estimular al niño en el proceso de aprendizaje. Los docentes creen que las actividades que diseñan son correctamente planeadas y desconocen otras técnicas para realizar su labor pedagógica. Consideraron como señales de éxito en sus alumnos, las respuestas acertadas a las preguntas que se les formulan, sin tener en cuenta que éstos al generar respuestas correctas, no necesariamente logran comprender y desarrollar un pensamiento crítico. Un gran número de docentes pensaron que los niños aprenden los contenidos por exigencias originadas en el hogar, escuela y el currículo, sin embargo, la mitad consideró que los niños aprenden contenidos por su propio interés, para realizar determinadas tareas intelectuales. Los docentes que impartían sus clases de manera tradicional se sintieron a gusto con lo que realizaban, no estuvieron abiertos a la implementación de nuevas estrategias, sus expectativas fueron limitadas por sus creencias, por el currículo o por los directivos. La enseñanza de contenidos que resultan significativos y motivantes para los niños conlleva a que se generen efectos positivos en el aprendizaje, lo cual implica una retención y mayor probabilidad que estas ideas sean utilizadas en nuevas situaciones.

Los alumnos tienen conocimientos matemáticos antes de entrar a la escuela, que han ido desarrollando en actividades cotidianas dentro de diversos contextos sociales, por tanto, es necesario que los docentes indaguen qué conocimientos poseen sus alumnos y planeen actividades que estén vinculadas a sus contextos. Estas actividades extraídas de sucesos de la vida de los estudiantes se llaman actividades auténticas, las cuales tienen un objetivo, son coherentes, significativas y son "prácticas ordinarias de nuestra cultura". Esto permite que los alumnos resuelvan los problemas de distintas maneras; ya que ellos tienen diferentes visiones de un mismo mundo que los rodea (Chamoso, Mitchell, Rawson, 2004).

Una actividad que los docentes pueden aprovechar en el salón de clases para que los alumnos puedan resolver problemas numéricos de modo natural es el "tomar asistencia". En esta los alumnos utilizan el conteo, la cardinalidad y las operaciones básicas, reflexionando a partir de las preguntas que el docente les plantea para conocer cuántos niños hay, si hay más niños que niñas, comprobar si todos asistieron a clase, cuántos están ausentes, quiénes se quedan a comer, qué hacer cuando se reparten caramelos entre los amigos y no hay para todos. Ésta actividad permite distintas formar de utilizar las matemáticas como un juego para aprender y cuando el alumno relaciona la palabra "presente" con una representación simbólica al pasar lista, demuestra cómo se pueden desarrollar conceptos a través de una actividad. Otras actividades auténticas que se pueden realizar dentro del salón de clases pueden ser jugar al banco o al médico para utilizar más conceptos matemáticos (Chamoso, Mitchell y Rawson, 2004).

Las actividades auténticas proponen algo interesante o estimulante para que a los niños les genere curiosidad de participar y llegar a varias soluciones. Asimismo, en estas actividades se requiere que los propios niños evalúen su éxito y que todos los jugadores participen activamente durante todo el juego. Si la actividad se repite de la misma manera todas las semanas, pasa de ser una situación cotidiana o funcional a ser rutinaria, es decir, pierde su valor de situación problemática y ya no genera aprendizaje. Entonces los docentes necesitan hacer variaciones en las actividades implicando nuevos desequilibrios que se producen en diferentes elementos de la actividad, la cual se debe hacer en una organización grupal en el que el conocimiento matemático, en tanto saber cultural y social, se construye en interacción con otros. La organización en pequeños equipos, a diferencia del trabajo con el grupo en su totalidad, favorece la comunicación fluida entre todos los integrantes. Asimismo, se debe tener en cuenta el tamaño de los equipos dependiendo de la tarea a realizar, ya que entre más pequeños sean los niños menor cantidad de integrantes deben tener estos. De igual manera, la conformación de los grupos y sus integrantes no deben ser fijos, porque la variedad de las interacciones permite un mayor enriquecimiento (González y Weinstein, 1998).

Las actividades que propone el educador para que el alumno vaya construyendo sus conceptos lógico-matemático y generen sentido en ellas, no cumplirán su misión si el educador no es consciente de la intencionalidad educativa de las mismas. Para la comprensión de la matemática de los niños se tiene que dar énfasis al papel de sus opiniones y el papel que juega como persona que construye su propia interpretación de la realidad (Moya, 2004).

Dentro de estas actividades, los docentes deben ser conscientes que es necesario dejar pensar a sus alumnos, permitirles hablar y opinar puesto que, de esta manera, se evidencia la originalidad de su pensamiento y de los diversos caminos en que razonan para entender y dar sentido a las matemáticas (Chamoso, Mitchell y Rawson, 2004).

Los docentes utilizan las preguntas como una forma de hacer pensar a los niños y usar el lenguaje de una manera funcional. Las preguntas animan a los niños a pensar, usar conceptos y destrezas matemáticas como: ordenar, clasificar, combinar, comparar, usar números, describir, correspondencia uno a uno, contar, usar modelos, observar, pronosticar y experimentar. En una investigación realizada en Estados Unidos participaron 3 profesores que impartían clase en preescolar, se usaron posters y tarjetas, donde los docentes podían ver las opciones de preguntas que podían hacerle a los niños en diversas actividades y los pasos a seguir. Algunos ejemplos de las preguntas fueron: ¿cuál de los grupos hay más?, ¿en cuál hay menos?, ¿quiénes tienen la misma cantidad?, ¿cómo podemos repartir? ¿hay uno para cada persona? Lo que se encontró fue que tanto los niños y los profesores cambiaron. Los niños aumentaron su reflexión al tener que pensar en el problema para dar la respuesta a las preguntas hechas y los profesores se dieron cuenta de la importancia que eran estas preguntas para hacer razonar a los niños (Ramsey y Fowler, 2004).

El cuestionamiento que realizan los docentes a los alumnos dentro de las actividades crean un ambiente de aprendizaje reflexivo como lo observaron Douglas y Sarama (2008) quienes utilizaron en Nueva York, un programa de matemáticas en preescolar para conocer la efectividad de este, se realizaron actividades cotidianas por ejemplo, el colocar la mesa, en donde el niño debía saber cuántos materiales poner en la mesa dependiendo de la cantidad de integrantes que iban a comer, después de estas actividades a los pequeños los docentes les hacían preguntas: ¿cómo supiste? y ¿por qué?, de esta manera, los alumnos tenían que razonar para dar sus respuestas y así intercambiar información creando un ambiente de aprendizaje reflexivo. En esta investigación participaron 23 profesores y 253 niños. A los profesores se les capacitó para apoyar el desarrollo matemático en el aula, reconociendo y apoyando las matemáticas a lo largo del día y el desarrollo matemático en el hogar. Los profesores participaron en todas las actividades de formación y aplicación de sus respectivos planes de estudio, actividades diarias como el calendario, incluido el tiempo, en los centros de trabajo, merienda y juegos al aire libre.

Ramsey y Fowler, (2004), sostienen que los alumnos del preescolar aprenden mejor habilidades matemáticas cuando: a) los conceptos son basados sobre el conocimiento informal de los niños; b) uso de materiales concretos; c) el niño es un aprendiz activo; d) el adulto provee estructura, guía, y asistencia cuando se requiere, para ampliar el aprendizaje.

Los estudiantes de preescolar, aún los de bajos recurso, se benefician del contexto familiar, al tener la oportunidad de observar a sus padres utilizar el conteo y el cálculo para la solución de problemas cotidianos. Asimismo, cuando interactúan con sus hijos en actividades matemáticas los padres utilizan diversas estrategias tales como el modelamiento, el hacer preguntas, conversaciones, relatos, explicar, dar ayuda, negociar y elogiar. Estas actividades permiten a sus hijos reflexionar sobre el problema y así adquirir nociones matemáticas informales.

El docente debe tener en cuenta el conocimiento de partida del alumno: qué es capaz de aprender, estilos de aprendizaje, motivaciones, provocar desafíos que cuestionen y modifiquen el conocimiento, incrementar la competencia, la comprensión y la actuación autónoma del estudiante. El aprendizaje se lleva acabo de manera más eficiente cuando la interrelación entre docentes y alumnos es frecuente y dirigida hacia la solución de los intereses y problemas del estudiante, constituyéndose en un organizador y mediador en el encuentro del alumno con el conocimiento. Asimismo, se requiere que la clase sea interactiva y que el docente utilice diversas estrategias que estimulen el pensamiento crítico y reflexivo de los estudiantes, tales como, hacer cuestionamientos a los estudiantes sobre el problema y sus numerosas soluciones, proporcionar ayuda, utilizar ejemplos visuales y verbales, presentar diferentes modelos para elaborar la tarea, proporcionarles tiempo para pensar, responder y sintetizar lo que están aprendiendo. El manejo de las relaciones alumno-profesor y alumno-alumno para forman parte de la calidad de la docencia misma.

5 EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS DESDE LA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL

En este capítulo se mencionará la importancia que tiene el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural. Se dividirá en cuatro apartados.

El primer apartado consistirá en la utilidad que tienen las matemáticas como herramientas en las actividades humanas, en las cuales los procesos de aprendizaje están involucrados directamente con estas actividades; puesto que el sujeto está mayormente involucrado con su mundo real y obtiene numerosas experiencias de éste, que le permitirá desarrollar habilidades, capacidades y actitudes para solucionar de distintas maneras los determinados problemas matemáticos a los que se llegue a enfrentar. Sin embargo, no todas las personas se encuentran inmersas en su contexto social u obtienen las distintas experiencias que se necesitan para desarrollar las capacidades. Por lo tanto, éstas personas deben estar expuestas a situaciones auténticas, debido a que éstas permiten desarrollar este tipo de habilidades. Una tarea auténtica fomenta la experimentación activa a través de una actitud, en la cual se logra participar y aprender, lo que genera nuevas ideas, creando metas, propósitos y sistemas de relaciones sociales.

En el segundo apartado se explicará de qué manera influye la interacción social y el uso de las matemáticas puesto que el aprendizaje es comprendido de manera social y cultural al interactuar con las personas de manera dinámica. Por esta razón, los estudiantes necesitan tener un papel más activo en su aprendizaje al desarrollar diversas estrategias matemáticas que les permitan comunicar, observar, razonar, analizar, hablar, describir, justificar, argumentar y validar los problemas. En este nuevo papel activo del estudiante también se encuentra involucrada la participación del profesor quien apoya de manera activa y constructiva el desarrollo de procesos sociales y culturales, además es el encargado de diseñar contextos matemáticos que faciliten este tipo de actividades mediante la interacción social. Lo que el profesor necesita, para desarrollar el aprendizaje en sus alumnos, es exponerlos ante situaciones auténticas que ofrezcan retos y metas; también es necesario que el profesor se percate de los conocimientos actuales que el niño posee y hasta donde es capaz de llegar, esto con la guía asistida de otro compañero o del mismo profesor. Esta guía permite que el niño se acerque cada vez más a su nivel de desarrollo potencial y es en este momento cuando el niño logra apropiarse de los nuevos conocimientos para utilizarlos en su vida diaria.

En el tercer apartado se hablará de la importancia de la participación en el aprendizaje de las matemáticas. Ésta habilidad es indudablemente importante debido a que propicia en los estudiantes a desarrollar su razonamiento matemático; mediante las guías y estrategias que el docente enseña a sus alumnos y la apropiación de los conocimientos al participar en actividades auténticas. Cuando los estudiantes logran participar en las tareas contextualizadas pueden desarrollar capacidades como la apropiación del lenguaje matemático, el cual ayudara a que los alumnos logren comunicarse de manera matemática y así formar una negociación de significados a través de las conversaciones entre sus compañeros y profesores. Para que la negociación se propicie; el profesor necesita dirigir las actividades del aula, las cuales permiten que los estudiantes pongan a prueba sus ideas, escuchen, incorporen el pensamiento de otros y además creen un sentido de la matemática. Los estudiantes pueden lograr y desarrollar estas habilidades mediante dos funciones psicológicas superiores. La primera se refiere a las personas: adultos y niños y la segunda consiste en incluir artefactos como libros, videos, equipo científico o computadora a estos se les conoce como herramientas físicas, las cuales están mediadas por la misma cultura o sistemas culturales como: la escritura, los símbolos algebraicos, los sistemas numéricos o el lenguaje. Entonces la actividad semiótica sólo puede ser promovida en el juego de los niños cuando la actividad tiene sentido para ellos, cuando existe una necesidad y la presencia de un maestro que pueda ayudarlos a enfrentarse a problemas en sus actividades para dar solución a estas.

El último apartado, el cuarto, se explicará la importancia que tienen los ambientes de aprendizaje de las matemáticas. El individuo se encuentra involucrado indirectamente dentro de una sociedad y una cultura las cuales contienen sistemas culturales matemáticos. Es por ello, que los programas educativos necesitan redirigirse en sus métodos de enseñanza-aprendizaje para que los alumnos se apropien y distingan distintas maneras de hacer matemáticas de acuerdo a la creación y diseño de ambientes de aprendizaje. Por esta razón, es indispensable que exista un vínculo y equilibrio entre los profesores, los alumnos y los conocimientos que se proporcionan y se aprenden. El docente, entonces, necesita ser muy cuidadoso, creativo y exponer los conocimientos, habilidades y actitudes que quiere que sus alumnos aprendan al diseñar ambientes de aprendizaje. Él necesita conocer, antes de iniciar una actividad contextualizada, los conocimientos con los que los niños llegan a la escuela para que a partir de ahí puede iniciar su actividad y propiciar nuevas nociones, las cuales serán mezcladas con las previas. Además, este diseño de tareas deberán contener propósitos, es decir, las metas hacia donde la actividad se va a dirigir; métodos, que se refiere a las estrategias que se van a utilizar para resolver las dificultades de la actividad y por último, las soluciones que se obtendrán, las cuales se conseguirán mediante la guía oportuna y paulatina del docente, la reflexión, la crítica, el razonamiento, el debate, la participación y la negociación de significados de los estudiantes.

Entonces es importante que en el diseño de ambientes de aprendizaje el docente les permita a sus alumnos percatarse de que estos tienen un reto, que posee una dificultad, esto con la intención de causar en los alumnos un desequilibrio cognitivo óptimo el cual no debe ser mayor a la capacidad del alumno puesto que no podrá asimilarlo y no logrará apropiarse de los conocimientos y habilidades que la actividad ofrece. También es importante que al diseñar estos ambientes se tome en cuenta la propia cultura de los alumnos con el propósito de crear y desarrollar personas matemáticamente competentes.

5.1 Las matemáticas como herramientas en las actividades humanas.

Los procesos de aprendizaje están estrechamente relacionados a la participación en las actividades humanas, es decir, lo que se aprende está profundamente conectado con las condiciones en las cuales el sujeto se vincula con el mundo real cuando experimenta distintas situaciones, las cuales le permiten desarrollar un conjunto de habilidades, actitudes y capacidades. Bresnen, Goussevskaia y Swan (2005) retoman las ideas de Lave y Wenger (1991) quienes están de acuerdo que el aprendizaje, como parte integrante de la práctica social, está involucrado en las actividades de la vida cotidiana de los miembros de una comunidad.

La sociedad, la cual integra a la comunidad, se considera como aquel contexto en el que una persona desarrolla experiencias, habilidades, conocimientos e identidades propias de la misma sociedad. De esta manera, el aprendizaje se considera situado porque posiciona a la sociedad como una práctica. Entendiéndose que este tipo de aprendizaje posee un aspecto integral e inseparable de la práctica social que implica la construcción de la identidad, a través de la evolución de las formas de participación al hacer hincapié en la dinámica sociocultural y al crear el significado de las actividades de la vida diaria (Handley, Sturdy, Fincham y Clark, 2006).

La práctica social proporciona, en un contexto histórico y social, una estructura y significado, refiriéndose a lo que las personas hacen; por ejemplo al participar un recién llegado a una nueva comunidad; desarrolla una conciencia de que ésta tiene sus propias normas, entonces intenta comprender y trabajar con distintas herramientas: lenguaje, definición de roles, artefactos explícitos, diferentes relaciones implícitas y toma en cuenta los valores. El individuo necesita retomar y realizar estos aspectos para crear un significado y estructura a la práctica social de la nueva comunidad. Cada persona aporta una historia individual al involucrarse o participar ante grupos sociales y/o familiares. En estos grupos existen normas, las cuales pueden servir de complemento o provocar un conflicto con el otro, sin embargo, estas reglas pueden ser negociadas (Handley, Sturdy, Fincham y Clark, 2006).

Las actividades humanas, en las cuales están involucradas las prácticas sociales, propician a que se desarrollen tareas auténticas. En ellas se fomenta la experimentación activa a través de una actitud de juego con el fin de participar y aprender. Las tareas auténticas como menciona Houde (2007) están diseñadas para exponer a los participantes a nuevas ideas y personas en una forma que refleja la progresión en la sociedad y Wertsch (1985) complementa cuando expone que las tareas auténticas también incluyen metas, propósitos y sistema de relaciones sociales.

Las tareas auténticas generan nuevas ideas, metas y relaciones sociales, por ello, las nuevas reformas para enseñar matemáticas, como el Programa de Educación Preescolar 2004 (PEP 2004) de México, redirigen a los profesores a que se concentren en diseñar y aplicar tareas auténticas a sus alumnos. Ésta propuesta es originada por tres razones: primero, la economía actual requiere trabajadores capacitados que puedan aplicar sus conocimientos matemáticos para dar solución a tareas matemáticas relacionadas con su propio medio. Segundo, que los estudiantes logren interpretar información y resolver conflictos matemáticos de acuerdo a la forma y aplicación de los conocimientos que posee; en lugar de aplicar algoritmos preparados para resolver tareas estándar. Tercero, proporcionar tareas matemáticas para los estudiantes, éstas deben ser estimulantes y relevantes para su vida cotidiana y que, de esta manera, se incremente el interés matemático al aumentar su aprovechamiento (Kramarski, Mevarech y Arami, 2002). Estas tres propuestas ayudan a que los estudiantes (dependiendo del medio al cual estén involucrados y a las prácticas que realicen en su contexto social) tengan la oportunidad de obtener diferentes maneras de resolver los problemas matemáticos de su propio mundo real de acuerdo a los conocimientos, capacidades, habilidades y actitudes que desarrollen y posean (Cobb y Hodge, 2002).

Las tareas matemáticas auténticas plasman contextos comunes con situaciones reales, con significado y en los que no hay ningún algoritmo establecido como exponen Kramarski, Mevarech y Arami (2002) al realizar una investigación que muestra la efectividad de una tarea auténtica en adolescentes de países occidentales acostumbrados a comprar pizzas y refrigerio. La tarea consistía en que los estudiantes necesitaban analizar los datos que les permitiera decidir cuál sería la mejor oferta para ordenar una pizza dependiendo del costo, la cantidad de personas que van a comer, los precios en diferentes pizzerías y los factores que determinan el precio de una pizza (el tamaño, número de rebanadas o los tipos de condimentos). Este problema podría ser auténtico para estudiantes que están acostumbrados a comprar esta clase de comida, pero no podría ser auténtico para estudiantes que viven en países donde tales actividades no son comunes.

La investigación de Kramarski, Mevarech y Arami (2002) se realizó de la siguiente manera participaron 91 estudiantes occidentales de primero de secundaria de diferente nivel socioeconómico. Se realizaron 2 mediciones: la primera para estimar los conocimientos matemáticos previos de cada alumno y la segunda para observar el cambio en la solución de problemas. Cada medición fue compuesta por 2 partes: tareas auténticas y tareas estándar. En la primera evaluación se llevó a cabo la tarea auténtica que consistía en alquilar un salón para una fiesta en la escuela. Los estudiantes recibieron tres propuestas de precios diferentes para alquilar este salón, los precios variaban según el número de participantes que asistirían a la fiesta. Cada estudiante tuvo que determinar qué oferta era más conveniente y justificar su respuesta usando varias representaciones. En las tareas estándar se utilizaron 41 actividades de respuesta múltiple, estas abordaron números enteros, fracciones, decimales y porcentaje. En la segunda evaluación, como tarea auténtica, se llevó a cabo la organización de una fiesta, en la cual se debía comprar pizzas. El presupuesto de la clase era de 85.00 pesos. A los estudiantes se les daban propuestas de tres pizzerías y los precios de cada una. Ellos tenían que comparar los precios y escoger la oferta más conveniente. Los estudiantes también tenían que realizar cálculos, usar diferentes representaciones y aplicar conocimientos respecto a geometría, fracciones y proporción. Las tareas estándar, de esta segunda evaluación, fueron 22 problemas que cubrían números racionales; operaciones con números positivos y negativos; orden de operaciones y el uso de expresiones algebraicas. Un ejemplo de estos fue: Javier tiene 4 veces más pizzas que

Martha. Si x representa el número de pizzas de Martha, escriba una expresión algebraica que representa el número de pizzas que Javier tiene.

Los resultados que obtuvieron Kramarski, Mevarech y Arami (2002) en su investigación fueron que los estudiantes que resolvieron tareas auténticas se concentraron en las características estructurales y en la información dada de la tarea; tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre el proceso de solución del problema. Estos alumnos buscaron toda la información relevante, la distinguen de la irrelevante y comprenden la tarea completa en vez de partes aisladas. De esta manera, los estudiantes lograron resolver las tareas nuevas y auténticas porque fueron más reflexivos; llevaron operaciones múltiples y fueron más capaces de reorganizar y procesar la información. Debido a que utilizaron estrategias más apropiadas para resolver las tareas. Mientras que los estudiantes, que no llevaron a cabo esta reflexión, usaron estrategias simples basadas solamente en la multiplicación de los números presentados de la tarea.

Los estudiantes enfrentan dificultades en resolver tareas auténticas, esto es debido, entre otras cosas, a que se concentran en partes únicamente de la tarea; no reconocen que podría haber más de una manera correcta de resolverla y son inseguros acerca de cómo calcular y confirmar la solución. Los alumnos tienen dificultades en reorganizar la información; distinguir entre la información relevante e irrelevante; buscar un procedimiento adecuado, plantear, reflexionar y escoger las estrategias apropiadas para la solución al determinar si tiene sentido o no; además los estudiantes se rinden fácilmente porque los algoritmos preparados no están disponibles para resolver la tarea. Estas dificultades, entre otras razones, se deben al hecho de que los estudiantes realizan problemas que no requieren una comprensión matemática; ya que han estado expuestos a procedimientos en los cuales sólo se basan en fórmulas que llegan a una solución (Kramarski, Mevarech y Arami, 2002).

Una solución para evitar este conflicto los estudiantes necesitan comprender el problema, construir conexiones entre los previos y nuevos conocimientos, hacer uso de estrategias apropiadas para resolver el problema y reflexionar sobre los procesos y la solución de los mismo (Kramarski, Mevarech y Arami, 2002).

Otra dificultad que los estudiantes presentan es que no logran ver la tarea como un todo. Esto podrís deberse a que los profesores tienen un marco de referencia completo, que al enseñarlo es dado por partes sin especificar que están entrelazadas lo que, en consecuencia, repercute en el éxito de las actividades. Los estudiantes adquieren las piezas como son presentadas: en aislamiento; construyendo una imagen de cada una de manera individual, sin tener éxito en crear un conjunto de todas las piezas obtenidas en un todo. Una solución para evitar este conflicto es que los profesores primero necesitan dar una introducción cualitativa global de un concepto matemático a sus estudiantes y después desglosar el tema en cada una de sus partes lo que podría crear la necesidad de una descripción más formal de los conceptos involucrados (Gravemeijer y Doorman, 1999).

Las tareas auténticas son presentadas rara vez en las aulas matemáticas, en lugar de esto, las tareas estándar son utilizadas habitualmente por los profesores. Ellos, en ocasiones describen las situaciones estándar de la tarea de manera simplificada e involucran un poco de información cuantitativa en la cual ya están preparados los algoritmos que los estudiantes tienen que aplicar para resolver el problema (Kramarski, Mevarech y Arami, 2002).

En la siguiente investigación realizada por Inoue (2008) también se expone cómo los problemas matemáticos no están relacionados con la realidad. En su trabajo presenta un problema a estudiantes en el cual deben hacer una llamada y pedir el número de autobuses que se necesiten para llevar a un determinado número de pasajeros. Este problema se considera una situación realista, sin embargo, a los estudiantes se les dificulta tomar en cuenta los contextos reales y su único objetivo es buscar una respuesta correcta. En esta investigación a los alumnos se les planteo de la siguiente manera el problema de los autobuses: sí 450 pasajeros deben transportarse de sitio y cada autobús tiene capacidad para 36 personas, ¿cuántos autobuses se necesitan? Más de la mitad de los alumnos de quinto grado respondieron 12.5

autobuses. Ellos dejaron de tomar en cuenta el hecho de que los autobuses no pueden ser divididos y que su respuesta pudo haber sido que se necesitan 13 autobuses. Los estudiantes son capaces de ejecutar los procedimientos operacionales correctamente pero su solución a los problemas está desconectada de su conocimiento con la realidad. En esta investigación se ejemplifica que en ocasiones las matemáticas enseñadas en la escuela omiten la conexión con la realidad y los estudiantes al tener el objetivo de, únicamente, encontrar el resultado correcto omiten el contexto (Civil, 2002).

Inoue (2008) está de acuerdo en que la autenticidad de los problemas matemáticos juega un papel importante para generar sentido en la solución de los problemas. Una manera de aumentar la autenticidad es incluir situaciones familiares y objetivos significativos en los problemas matemáticos. Si los estudiantes resuelven estos problemas reconociendo la significancia de buscar el objetivo, pueden resolver el problema para conseguir la respuesta correcta y además darle sentido a la solución. Estos objetivos pueden aumentar una gran variedad de conocimientos de la vida real al resolver los problemas. Lo que determina la autenticidad y la relevancia de un problema matemático es sí este permite a los estudiantes utilizar su imaginación, por medio de sus experiencias diarias; cuando se les proporcionan múltiples interpretaciones y reconstruyen situaciones que contengan problemas de acuerdo al contexto.

Para observar de qué forma los estudiantes toman en cuenta la realidad cuando se exponen a tareas auténticas Corte (2004) realizó una investigación, en la cual observó a un niño de 12 años de Bélgica, en una actividad contextualizada de compra-venta. La tarea consistía en que el pequeño tenía que comprar 10 cocos en la calle. Cada coco costaba 35 pesos. El niño por medio de su propio procedimiento realizó cifras y con exactitud obtuvo el precio de la siguiente manera: "3 cocos son 105 pesos, 3 más hacen 210 pesos; para obtener 10 cocos, necesito 4 cocos más. Entonces gastaré 350 pesos". Esta actividad contextualizada logro que el pequeño resolviera el problema de manera correcta mediante su propio método, sin la necesidad de multiplicar 35 por 10. Sin embargo cuando este pequeño tenía que resolver problemas parecidos expuestos en sus libros de texto los ejecutaba con mucha menos eficiencia al aplicar los algoritmos formales aprendidos en la escuela, que aparentemente no logró dominar, como cuando lo hizo en su negocio de la calle.

Es importante que los estudiantes estén involucrados en tareas auténticas de tipo matemático. Puesto que beneficia a los alumnos a crear en sus mentes relaciones de las situaciones problema con su comprensión del mundo. Un factor importante de la enseñanza de las tareas, que involucran problemas matemáticos auténticos, es la actividad interpretativa en la mente de los estudiantes, quienes necesitan relacionar la solución de los problemas con sus experiencias diarias (Inoue, 2008).

Las actividades auténticas también permite a los estudiantes desarrollar sus propias estrategias como apoya Gravemeijer y Doorman (1999) y Bishop (2002) agrega que además de desarrollar estrategias, también los estudiantes deben generar sus propios símbolos matemáticos para que ellos mismos creen sus significados, representaciones y comparaciones de estos mismos para su entendimiento. Esta reinvención de símbolos matemáticos necesita ser guiada por el profesor, el cual requiere ser capaz de reducir el intervalo entre el conocimiento informal y el formal de los estudiantes.

Kramarski, Mevarech y Arami, (2002) retoman las ideas de Forman y Steen (2000) quienes enfatizan que las tareas auténticas evitan procedimientos mecánicos y sin razonamiento como utilizar hojas de cálculo artificiales. Estas tareas proveen información rica sobre la situación que se llegue a presentar; incluyen datos matemáticos complicados y que pueden ser enfocados de diferentes maneras; estas tareas están basadas por varios conocimientos y habilidades matemáticas y requieren de usar representaciones diferentes en sus soluciones.

En conclusión las actividades humanas son un medio por el cual las personas logran crear sus propios procesos de aprendizaje debido a que el mismo sujeto está inmerso en su propio contexto social. Entonces éste puede desarrollar un conjunto de distintas habilidades, capacidades y actitudes cuando experimenta diferentes contextos matemáticos de su propio ambiente. En este momento es cuando la persona logra percatarse que las matemáticas son una herramienta para dar solución a diversas situaciones reales. Por lo tanto, el aprendizaje es parte integrante de las actividades de la vida cotidiana o práctica social de los miembros de la comunidad a la que pertenecen. Puesto que cada persona aporta una historia individual al participar ante grupos sociales. Las actividades humanas, en las cuales están involucradas las prácticas sociales, propician a que se desarrollen tareas auténticas para desarrollar un conjunto de capacidades, en estas se fomenta la experimentación activa; la participación; el aprendizaje; se generan nuevas ideas; las personas se plantean metas, propósitos y se crean sistemas de relaciones sociales.

Los estudiantes tienen problemas al resolver tareas auténticas, porque se les complica organizar la información proporcionada; distinguirla de la información relevante y la irrelevante; buscar un procedimiento conveniente; plantear; reflexionar y reconocer que hay más de una solución y estrategia para los problemas. Estas dificultades son debido a que los estudiantes no están acostumbrados a realizar una comprensión y razonamiento matemático.

Otras dificultades que los estudiantes presentan son que los problemas o situaciones a las que se enfrentan en las aulas son visualizados como partes aisladas y no como un todo. Entonces los alumnos crean sus propios marcos de referencia de manera individual como les fueron enseñados. También las tareas auténticas rara vez son presentadas en las aulas matemáticas; además los profesores describen las situaciones de la tarea de manera simplificada; proporcionan poca información cuantitativa y se basan en tareas estándar.

Las tareas auténticas matemáticas generan sentido en la solución de los problemas porque incluyen situaciones familiares con objetivos reales. Estas tareas ayudan a resolver los problemas de manera correcta y aumentar una gran variedad de conocimientos de la vida real al involucrarse con estas, puesto que evitan procedimientos mecánicos. Los beneficios que proporcionan las tareas auténticas en los alumnos es que desarrollan sus propias estrategias, realizan diferentes procedimientos, hacen reflexiones, generan nuevas ideas y crean en sus mentes relaciones de las situaciones problema con la comprensión de su propio mundo.

5.2 La interacción social y el uso de las matemáticas.

Desde una perspectiva sociocultural el aprendizaje es comprendido de manera social y cultural al interactuar con los aspectos del desarrollo de las personas de forma dinámica, es decir, combina las vivencias exteriores y los procesos interiores de la gente. En base a esta idea Vygotsky propone que el aprendizaje en el transcurso del desarrollo despierta una serie de procesos internos. Estos procesos son capaces de operar sólo cuando el niño está interactuando con personas de su entorno, familiares o compañeros. Es por ello, que los estudiantes necesitan asumir un papel más activo en su aprendizaje matemático; en donde también se encuentra involucrada la participación del profesor quien se encarga de diseñar los contextos matemáticos que faciliten las actividades (Sullivan, 1998).

La enseñanza matemática no sólo aborda principios, conceptos, métodos y procedimientos propios de esta disciplina sino que también es un proceso social que crea distintas formas de enseñar, aprender, hacer, comunicar y pensar matemáticamente. Esta enseñanza pone a los alumnos y maestros a funcionar estos distintos tipos de saberes que han construido en contextos múltiples en los que se desarrolla su experiencia. El aula, es un ejemplo de estos contextos, los cuales con diferentes tareas propician a que los alumnos adopten formas de comunicar, observar, razonar, analizar, hablar, describir, justificar, argumentar y validar los problemas matemáticos en las situaciones que les son presentadas; además las tareas también crean en los alumnos experiencias reales que ayudan a retomar los conocimientos previos que ya poseen y relacionarlos con saberes novedosos esto con la participación y ayuda de una persona más experta que ya ha desarrollado estos nuevos conocimientos (Forero, 2008).

Siguiendo la idea que a los estudiantes se les hace participar en actividades auténticas y el profesor se involucra con ellos para que desarrollen capacidades, Gibbons, (2008) hace mención a la noción de Vygotsky cuando se refiere a la zona de desarrollo próximo (ZDP). Él señala: “el aprendizaje se produce en la zona comprendida entre lo que un alumno puede hacer solo y lo que puede hacer con la ayuda de otros más expertos”. De esta manera, los alumnos son tratados no como las personas que son sino como las personas que pueden llegar a ser.

Para complementar esta idea Hernández (1998) plantea cuatro momentos básicos con respecto a la ZDP. El primero se refiere a que la zona establece una actividad e involucra a la persona en un nivel de dificultad intermedia para que se manifieste el nivel actual y el nivel de desarrollo más próximo o potencial de ésta persona, es decir, el nivel que se tiene por objetivo alcanzar. En segundo lugar se establece una comparación entre los niveles de desarrollo actual y potencial, identificando las diferencias que cada nivel posee. El tercero, cuando la persona realiza la tarea presentada y se le ofrecen diversas ayudas asistidas, es decir, ejercer una mediación social y semiótica, las cuales dirigen a mejorar la ejecución de la persona hacía el nivel de desarrollo potencial. Por último, se valora el aprendizaje que el individuo logró, es decir, el sujeto se apropia de los conocimientos, habilidades y actitudes que propiciaba la actividad para utilizarlos en otro ambiente o contexto parecido.

Una vez presentada la actividad auténticas, en la cual se involucra al sujeto, es necesario distinguir sus capacidades y saberes previos y percatarse de sus niveles actuales de conocimiento para poder proporcionar el andamiaje el cual se refiere a dirigir una tarea auténtica mediante ayudas paulatinas, es decir, dar una asistencia guiada por parte de una persona más experta (Sharmaa y Hannafinb, 2007).

Este proceso de interacción es muy frecuente y perceptible entre profesores y niños, ya que el desarrollo de capacidades, entre otras razones, se obtiene por medio de andamios, los cuales se refieren a aquella asistencia o apoyo guiado por parte de expertos (profesores, adultos, niños) para el aprendizaje y desarrollo de habilidades de un novato (niño) para su mejor comprensión del aprendizaje. Este proceso ayuda a que los infantes logren desarrollar y alcanzar las competencias matemáticas, las cuales son utilizadas en contextos significativos para resolver diversas situaciones (Sharmaa y Hannafinb, 2007).

Para que los andamios funcionen es necesario tener presente dos situaciones de apoyo para el alumno como sugieren Sharmaa y Hannafinb (2007). En la primera, el experto requiere establecer la guía adecuada al novato al identificar los conocimientos previos que el niño ya posee. El profesor necesita partir desde ese punto y adecuar las estrategias que van a ayudar con la construcción del aprendizaje que será proporcionado por las tareas que se realizarán. En segundo lugar, el profesor necesita desvanecer gradualmente la ayuda que le está proporcionando al alumno debido a que este se vuelve cada vez más competente.

Los profesores o personas más expertas requieren brindar oportunidades a los estudiantes mediante la guía asistida para que ellos sean capaces de reflexionar y por lo tanto aprender y razonar matemáticamente para dar solución a los problemas y comprender que no se llega al resultado mediante un sólo procedimiento sino que con la interacción, que se crea entre profesores y pares, se puedan percatar que existen distintas maneras de responder correctamente. Este proceso de interacción se da cuando a los niños se les proporcionan actividades que causen significado. Un ejemplo de ello son los juegos de mesa. En una investigación realizada por Edo y Deulofeu (2005) observaron cómo los estudiantes aprendieron contenidos matemáticos por medio de una actividad auténtica la cual consistía en utilizar juegos de mesa.

Estos autores desarrollaron un procedimiento para observar cómo las personas más expertas, involucradas en tareas auténticas, empiezan a ayudar a los menos expertos cuando los primeros se empiezan a apropiar de los conocimientos matemáticos. Al principio el grupo de seguimiento fue formado por 4 integrantes de entre seis y ocho años de edad de una escuela primaria en España. Estos alumnos fueron expuestos a juegos con cartas, cada una de ellas tenía un número. Ésta tarea consistía en que el investigador mencionaba un número y los alumnos tenían que sumar las cartas y encontrar el resultado solicitado. Esta investigación era realizada en tres fases. Fase uno, el alumno tenía que identificar tareas matemáticas como: repartir, cuando se organizaba el material; calcular, cuando se jugaba con las cartas; realizar un recuento y comparar las puntuaciones finales. En la fase dos, La maestra empezaba a identificar las actuaciones o comportamientos que exhibían sus alumnos cuando desempeñaban diferentes tipos de roles en el juego. Además ella mostraba una tendencia cuando reducía su participación, lo que resultaba un aumento en la autonomía de los estudiantes con respecto a la tarea. También empezaba a ajustar la ayuda que le proporcionaba a sus estudiantes dependiendo de su nivel de competencia y por último organizaba a los estudiantes en pequeños grupos para fomentar la interacción y cooperación. En la última fase, se observa que los estudiantes disminuyen sus errores a medida que avanzan en cada actividad también aumentaron sus capacidades para ejercer ayudas mutuas y aceptarlas como parte de su proceso de aprendizaje. Estas ayudas son prácticamente inexistentes en las primeras sesiones y numerosas en las últimas; además los diálogos eran más largos y complejos. Por parte de la maestra, se identifican estrategias cuando realiza ayudas ajustadas en sus estudiantes; cuando plantea situaciones que promueven la reflexión; al detectar y corregir errores propios y de los compañeros incitándolos a cuestionarse, por último la profesora divide la actividad en distintos contenidos matemáticos: cálculo; estrategias de juego y procesos de solución de problemas con la intención de crear un procedimiento organizado, además de fomentar el interés, la atención y el aprendizaje matemático en sus estudiantes (Edo y Deulofeu, 2005).

Edo y Deulofeu (2005) afirman, con base en su investigación, que los juegos de mesa ayudaron a crear y desarrollar el proceso de interacción entre pares y profesor; a desarrollar e identificar por parte de la maestra estrategias educativas y por último, los alumnos que se volvían más expertos en la tarea empezaron a proporcionar ayudas guiadas por si mismos a otros compañeros. Entonces, los alumnos pueden aumentar su capacidad de realizar ayudas mutuas efectivas en el marco de la interacción con sus compañeros.

Sullivan (1998) retoma la investigación de Taylor y Cox (1997) para proporcionar otro ejemplo de cómo influye la guía asistida en el aprendizaje matemático de los estudiantes y profesores. Ellos estaban interesados en conocer cómo los niños construyen y desarrollan competencias matemáticas en lugar de desarrollarlas a través de la imitación o modelamiento.

Tanto profesores como alumnos al estar involucrados en una actividad significativa en la cual está inmerso el proceso de interacción del andamiaje se encuentra otro proceso involucrado: la negociación, donde el profesor necesita buscar puntos de referencia comunes con sus alumnos para adaptar su forma de comprender la situación a otra que esté al alcance del niño, es decir, el docente ajusta su participación, la manera en cómo se involucra en la tarea y las guías asistidas que ofrece para lograr que el alumno que tiene menos experiencia pueda desarrollar una comprensión y adquisición de nuevos conocimientos. Este proceso permite llegar a un consenso, al cual se le conoce como intersubjetividad la cual se refiere al momento en que el alumno se apropia de nociones que no tenía y las utiliza en su vida diaria para dar solución a situaciones (Ibarra y Guzmán, 2003).

Una parte fundamental en el aprendizaje matemático de los alumnos es la interacción del docente, ya que éste es una pieza indispensable en la enseñanza y desarrollo de conocimientos nuevos para la adquisición de competencias matemáticas en los estudiantes. Forero (2008) para demostrar ésta afirmación realizó una investigación, en la cual encontró que el rol del docente está centrado en conducir y estimular a los alumnos a la participación y a la construcción conjunta mediante diversas estrategias como: las preguntas exploratorias, aportación de claves, debates, invitar a hablar en voz alta, fomentar la toma decisiones, establecer acuerdos conjuntos y reformular la participación del estudiante para complementar su conocimiento. Estas estrategias estimularon a los alumnos a que se comunicaran entre ellos y reconocieran procedimientos más eficientes para solucionar la tarea. Por parte del docente la principal función fue el discurso, ya que contribuyo con la comprensión y desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos.

Estos resultados fueron encontrados por Forero (2008) en una clase de un profesor de segundo de primaria con niños de siete y ocho años de edad, donde se enseñaba el sistema de numeración decimal. La actividad consistía en que se presentaban cuatro clases de juegos: juegos con contenidos no estrictamente matemáticos; juegos que hacen demandas cognitivas elementales; juegos vinculados directamente al dominio del sistema de numeración decimal y juegos que requieren del manejo de otros sistemas matemáticos. A estos juegos se les introducían elementos más complejos como realizar tablas o cuadros de registro y operar a partir de ellas; las actividades vinculadas a su vida cotidiana consistían en jugar al banco y cuántos días faltan para navidad.

Los contextos auténticos siempre están involucrados con medios de interacción y colaboración para la solución de problemas y de investigación. Los maestros necesitan ofrecer estos medios y crear un entorno de apoyo para los alumnos, este entorno requiere desarrollar los niveles actuales de los alumnos en niveles en los que los estudiantes puedan realizar tareas por si solos, sin la necesidad de ayuda extra puesto que han logrado convertirse en expertos al apropiarse de los conocimientos y habilidades que la actividad proporcionaba; esta idea es a lo que Vygotsky hace referencia cuando menciona la zona de desarrollo próximo (ZDP) la cual es un proceso para dar a conocer cuáles son los progresos en términos psicológicos que las personas pueden alcanzar con el apoyo de otros (Gibbons, 2008; Steiner y Mahn, 1996).

Los estudiantes que se encuentran expuestos a actividades colaborativas son más eficaces en el uso de habilidades de comunicación, ellos logran desarrollar mayor número de palabras explicativas, ayudaban a sus demás compañeros y ofrecen explicaciones más amplias (Sullivan, 1998).

Como se ha mencionado los profesores y estudiantes necesitan tener una colaboración activa en el proceso de aprendizaje mediante las tareas y actividades en donde se incluyen diferentes estrategias como realizar preguntas; resolver problemas; hacer una reflexión sobre el aprendizaje; elaborar conclusiones; explicar; pensar de manera crítica y creativa; construir conocimientos; experimentar; realizar autoevaluaciones; interpretar la información y explorar las relaciones entre ideas. Los estudiantes gracias a este tipo de estrategias logran explorar en colaboración las diferentes actividades, lo que permite desarrollar sus propias estrategias para comprobar sus ideas. Los alumnos se pueden presentar ante distintas actividades matemáticas como cuando comparan cuánto miden sus dos brazos con su estatura; sí al beber un litro de agua se hacen más pesados; si los objetos más pesados tienen un descenso más rápido. En estas actividades es necesario que los niños se planteen metas, que se creen propósitos, que desarrollen sus competencias matemáticas, que intenten hacer representaciones de sus conclusiones con ayuda de diferentes tipos de gráficos, que planifiquen qué decir y que expliquen sus representaciones. Con estas actividades los estudiantes son alentados a la problematización del conocimiento y reconocen que este puede ser cuestionado y que se puede ofrecer una solución alternativa del problema o que se puede cambiar sus propias ideas como resultado de un nuevo aprendizaje (Gibbons, 2008).

Cuando el alumno crea un nuevo aprendizaje desarrolla nociones que no tenía y las utiliza en su vida diaria para dar solución a situaciones, a este proceso se le conoce como intersubjetividad, la cual se genera a partir de negociaciones sociales sobre los significados del entorno que está mediado por el experto y el novato permitiendo que ambos se apropien de las comprensiones del otro (Medina, 1995) y que permite que se realicen actividades coordinadas y dirigidas hacía objetivos comunes. En estas actividades el niño se responsabiliza de las acciones que realiza ante una tarea y comprende la definición de la situación dada por el experto (Solís, 2003).

La interacción social permite que en las actividades con contexto matemático (las cuales propician a que los estudiantes creen sus propias formas de pensar y resolver sus problemas con ayuda del docente) pueda existir un proceso de interacción entre profesores y alumnos. Este proceso se da a partir de la actividad auténtica la cual permite que a partir de una situación que causa una dificultad matemática se cree el aprendizaje. En la actividad es indispensable la participación del profesor ya que él cumple la función de mediador y guía para el aprendizaje del estudiante, cuando proporciona ayudas paulatinas y graduadas.

Este proceso de interacción conocido como andamiaje permite al alumno modificar sus niveles actuales de conocimientos y llegar a nuevos aprendizajes; el docente necesita proporcionar la ayuda precisa para desarrollar el aprendizaje de alumno por medio del cuestionamiento, la reflexión, la comprensión, el trabajo en equipo, la revisión de diferentes estrategias en grupo, las dificultades que se tuvieron al resolver un problema, la participación, los diferentes procedimientos que se utilizaron o el debate en grupo. El profesor en base a estas estrategias necesita que el alumno realice una serie de tareas para sí mismo y sus compañeros y, además, dar solución a la actividad contextualizada.

De esta manera cuando al alumno se le presente alguna situación real logre aplicar las diversas estrategias que ha aprendido con ayuda del docente; ya que el profesor apoya al alumno a que cree distintas formas y métodos de solucionar los problemas. Es en el momento en que el estudiante logra apropiarse de los conocimientos, que la tarea auténtica propiciaba, y es capaz de utilizarlos para dar solución a sus distintos problemas.

5.3 La importancia de la colaboración en el aprendizaje de las matemáticas

Al estar involucrado en actividades auténticas dentro de la escuela, los estudiantes desarrollan su razonamiento matemático por medio de la colaboración e interacción que los alumnos tienen unos con otros, las guías y estrategias que el docente enseña a sus alumnos y la apropiación de los conocimientos favorecidos por la actividad cuando los utilizan para resolver distintas situaciones presentadas en su vida cotidiana (Enyedy, 2003).

Estos procesos que propician al estudiante a reflexionar están favorecidos por el cambio o transformación en los sistemas de signos y formas de discurso de la actividad, que la participación ofrece, ya que ésta se da en diferentes niveles en donde se desarrollan las funciones psicológicas superiores, las cuales se producen en primer lugar en la interacción social, antes de ser internalizadas por los estudiantes (Enyedy, 2003).

Las funciones psicológicas superiores están mediadas por la misma cultura y se distinguen en 2 tipos de mediadores. El primero las herramientas físicas, las cuales participan y unen a la conducta con el medio y los objetos. El segundo las herramientas psicológicas, aquellas que producen cambios en el sujeto cuando realiza una actividad, éstas actúan y regulan la actividad intelectual y las relaciones con los demás (Medina, 1995).

Xiaoxue (2009) menciona que cuando los estudiantes trabajan en grupos colaborativos su rendimiento es más alto y obtienen mejores resultados en las actividades que realizan; en comparación con alumnos que trabajan individualmente. El trabajar de manera conjunta permite que los estudiantes resuelvan sus problemas mediante distintas estrategias y en base a esto pueden considerar utilizar las nuevas habilidades aprendidas como parte de su vida. La colaboración como una estrategia de aprendizaje es efectiva en el aprovechamiento y desempeño de los estudiantes, ya que permite ampliar la capacidad de los miembros del grupo para lograr objetivos que no podrían lograrse trabajando solos.

Elbers y Haan (2005) también deciden realizar una investigación para observar cómo influye la colaboración en los procesos de aprendizaje matemáticos en los niños. Estos investigadores tenían el propósito de analizar de qué forma los estudiantes realizaban una construcción de los significados de las palabras durante actividades de colaboración. Esto se observó en un aula de una escuela primaria holandesa en donde participaron 22 niños de 10 a 13 años. Ellos tenían que realizar actividades que implicaran el cálculo de área y volumen y sus transformaciones con ayuda de una calculadora. Para realizar la tarea los niños tuvieron que definir el significado de palabras no familiares o difíciles utilizando herramientas simbólicas y físicas: el lenguaje holandés, gestos, tareas, dibujos de un libro y un objeto; estas herramientas se usaron como medios para llegar a una comprensión común. Durante las discusiones el significado de una palabra no conocida era negociado mediante argumentos entre los alumnos. Los estudiantes al negociar y discutir el significado de las palabras destacaron elementos específicos o aspectos de la situación que fueron apropiados para solucionar las operaciones matemáticas; además existían niños que comprendían más fácilmente el problema los cuales ayudaron a otros compañeros a explicar sus soluciones.

Aprender a comunicarse y tener un lenguaje matemático es visto como un aspecto central de lo que representa el aprendizaje de las matemáticas. Cuando se logra aprender esta comunicación es mucho más sencillo presentar argumentos y participar en discusiones matemáticas. Además implica una negociación de significados a través de las conversaciones, ya que una palabra puede llegar a tener más de un significado como el concepto de “más”; este puede adquirir diferentes interpretaciones dependiendo del contexto en el que se aplique. No es lo mismo decir “más” en las aulas matemáticas que en casa. En el aula, “más” es comprendido por ser el opuesto de “menos” y en la casa el opuesto de “más” es asociado con “no más”; como cuando se presentan expresiones como: “quiero más papel” y “no hay más papel” (Moschkovich, 2002).

Este ejemplo se observó en un aula bilingüe de sexto y segundo de secundaria en un curso de matemáticas; los alumnos tenían la tarea de construir unos rectángulos que tuvieran la misma área pero con la condición de que sus perímetros fueran diferentes. Cada alumno buscaba un modelo para basarse en él y relacionarlo con las dimensiones y el perímetro de sus rectángulos. Los estudiantes utilizaban diferentes estrategias para explicar sus resultados: una alumna uso gestos para ilustrar lo que representaba cada término matemático, haciendo referencia a objetos concretos que se encontraban frente a ella, utilizando dibujos de rectángulos para aclarar su descripción; también hizo usó del lenguaje como un recurso. De este modo: los ademanes, los objetos relacionados con la situación, el lenguaje del estudiante, las experiencias diarias y la ayuda que el profesor proporciona sirvieron de recursos para comunicarse matemáticamente (Moschkovich, 2002).

El profesor no es el único participante que puede dar forma a la construcción de competencia en un aula, Gresalfi, Martin, Hand y Greeno (2008) mencionan que también los estudiantes juegan un papel importante en la negociación, ya que ellos mismos pueden realizar preguntas a otros estudiantes como ayuda o consulta y también permite crear acuerdos con los significados de las palabras; de esta manera los estudiantes se aseguran que sus respuestas sean correctas.

McCrone (2005) menciona que el profesor tiene un papel principal al iniciar y dirigir las discusiones en el aula, las cuales permiten que los estudiantes pongan a prueba sus ideas, escuchen, incorporen el pensamiento de otros y creen un sentido de la matemática. Las discusiones en grupo animan a los estudiantes a desarrollar una postura más reflexiva, esto se da cuando ellos toman en cuenta las contribuciones de los demás y aprenden a justificar sus propias ideas.

Para comprobar esta afirmación acerca de las discusiones matemáticas, las negociaciones y las acciones que los maestros tienen sobre las normas del aula se realizaron observaciones en estudiantes de quinto grado. Este estudio consistía en que los estudiantes debían trabajar con un compañero, para conocer de qué manera ellos interactuaban cuando resolvían un problema y cómo lo argumentaban. Al principio a los alumnos se les dificultaba comunicarse con su compañero, esto impedía conocer sus ideas y métodos de solución; además por parte de los estudiantes existía una falta del uso de un lenguaje matemático. Los alumnos sólo compartían sus ideas cuando la profesora se los pedía y las soluciones rara vez las justificaban. El propósito de la maestra durante las discusiones era que los alumnos se percataran, por medio de frases, que todos tienen diferentes ideas y formas de pensar, ella utilizaba distintas expresiones: "voy a escuchar lo que la otra persona dice, puede tener un pensamiento diferente al mío”; "no pensé en eso"; "creo que tengo algo para compartir". Con las discusiones que la profesora propiciaba entre las diadas logró que en el transcurso de las actividades los métodos y descubrimientos ocurrieran, que empezaran a buscar y compartir nuevas ideas, que se preguntaran qué pensaba el otro compañero y que compararan procedimientos de solución mediante un pensamiento matemático después de que las soluciones fueron compartidas, lo que permitió que las discusiones fueron cambiando haciéndose más abundantes en conceptos matemáticos. Por parte de la docente existió un cambio de líder a facilitador o mediador en las tareas realizadas, ella cuestionaba las contribuciones de los estudiantes para aclararlas y expresar de distinta manera (McCrone, 2005).

De igual manera, en una escuela secundaria de Brasil, se analizaron las interacciones que tuvieron lugar en una discusión de clase y las diferentes maneras de interpretar, discutir y argumentar en cuanto al razonamiento matemático. En esta investigación realizada por Frade y Tatsis (2009). examinaron el aprendizaje de 28 estudiantes de 12 a 13 años, a los cuales se les aplicó un cuestionario de 7 preguntas, relacionadas con los conceptos de volumen y área y en base a las respuestas se realizó una discusión de manera grupal. En los resultados de este estudio se observó que existió una discusión colectiva y abundante, la cual permitió que los alumnos llegaran a un acuerdo en común con respecto a sus respuestas y aclaraciones acerca de las dudas que tenían de los conceptos de volumen y área. El papel del profesor consistió en ser una guía, él no intervenía en las respuestas de los estudiantes para promover un aprendizaje práctico en la que los estudiantes lograran percatarse de las incongruencias o contradicciones de sus respuestas, puesto que la intención del profesor era verificar si los significados eran construidos por los estudiantes durante la conversación, de esta manera, el profesor valoraba la negociación de los significados que existía entre ellos; también permitía que entre los alumnos se contestaran sus propias preguntas para que llegaran a un acuerdo colectivo con respecto a los significados formulados. La discusión, por lo tanto, tuvo lugar entre el profesor y los mismos estudiantes.

Steiner y Mahn (1996) retoman las ideas de Brown y colaboradores (1992, 1993) quienes sugieren que, además de la interacción y participación tanto de los estudiantes como del docente y la enseñanza de diversas estrategias para el aprendizaje, existen agentes activos dentro de la zona de desarrollo próximo que ayudan con la solución de situaciones reales, estos pueden ser de dos tipos. Los primeros incluyen personas, adultos y niños, los cuales tienes varios niveles de habilidad y en los segundos están involucrados los artefactos como los libros, videos, equipo científico o computadora a estos se les conoce como herramientas físicas, estos están mediados por sistemas culturales como: los sistemas numéricos, la escritura, los símbolos algebraicos o el lenguaje.

La utilidad de los artefactos se ejemplifica con la siguiente investigación realizada por Sarama y Clements (2002) quienes por medio de una herramienta física: una computadora, diseñan una actividad en la cual se utilizaba para que los niños tuvieran la oportunidad de manipular objetos matemáticos sobre la pantalla. La actividad consistía en realizar rompecabezas matemáticos con bloques en la pantalla, a estos se les podía hacer transformaciones, duplicarlos, combinarlos y colocarlos en distintas posiciones, esta operación se realizaba mediante la ayuda de iconos expuestos en la pantalla de la computadora, los cuales se utilizaban como herramientas para que los niños pudieran manipularlos en sus diversas opciones y así llegaran a ser consientes de las acciones que llevaban a cabo sobre las variables formas que se le podía dar a los rompecabezas.

Los resultados encontrados en esta investigación fueron que, dependiendo de la experiencia que los alumnos tenían, podían ofrecer diferentes utilidades a los artefactos mostrados en la investigación, ya que un alumno de 5 años al realizar un hexágono por medio de la computadora, lo comenzó a hacer basándose en triángulos, al principio colocaba 2 triángulos, después contaba las figuras colocando su dedo sobre la pantalla a partir del centro del hexágono incompleto, el niño visualizaba los otros triángulos faltantes y concluyó que necesitaría 4 más para formar por completo el hexágono solicitado. Sarama y Clements (2002) entonces concluyen que las acciones intencionadas y deliberadas del pequeño utilizando una herramienta física como la computadora lo ayudaron a formar imágenes las cuales permitieron que el niño lograra descomponer la figura hexagonal mentalmente y tener éxito en sus resultados.

El aprendizaje mediante el uso de artefactos no sólo se da por medio de la computadora sino que existen diversas herramientas físicas que ayudan a los alumnos con su aprendizaje y apropiarse de nuevos conocimientos para llevarlos a la práctica, en la siguiente investigación se utiliza el ábaco como artefacto en 10 actividades matemáticas con 16 niños de 4 a 5 años de edad pertenecientes a un preescolar en Inglaterra; esta herramienta física permitió que los niños comprendieran cuestiones matemáticas como contar números en un orden convencional, contar objetos en un conjunto, utilizar los principios de la cardinalidad, reconocer, escribir y ordenar números; comprender el número en operaciones de suma, resta y división, hacer estimaciones y el uso del álgebra. Los resultados mostraron que los niños lograron realizar las actividades con éxito por medio de una participación conjunta mediada a través de artefactos como el ábaco y objetos concretos. Es importante que las actividades estén previstas para ofrecer oportunidades a los niños para desarrollar su capacidad de solución de problemas y que permita ampliar su conocimiento en varias situaciones (Aubrey y Carol, 1993).

No sólo existen las herramientas físicas como los artefactos sino también las herramientas psicológicas como las invitaciones verbales las cuales igualmente permiten el aprendizaje de los alumnos y que si se conjugan estos dos tipos el resultado en las capacidades y conocimientos de los alumnos será mucho mayor (Ares, Stroup, y Schademan, 2009).

Van Oers y Wardekker (1999) observaron cómo los niños de 4 a 8 años de edad podían utilizar distintos artefactos dentro de actividades semióticas en un escuela de preescolar y primaria holandesa. Las actividades consistían en poner a los niños a realizar diversos tipos de juegos en grupos y los profesores cumplían el papel de animar a los pequeños a hacer dibujos o representaciones esquemáticas dentro de la actividad. En todas las tareas los niños utilizaban juguetes para que, por medio de su imaginación, construyeran vías férreas, una tienda de zapatos o un castillo. En estas tres tareas el profesor participó en el juego de los niños para ayudarles en aquellas acciones que no podían realizar por si solos pero que los pequeños querían llevar a cabo. El docente como parte de la actividad realizaba preguntas, explicaba las actividades, sugería soluciones o señalaba los problemas, con la intención de alentar a los niños a reflexionar.

La ayuda del docente en esta investigación se vio reflejado en la situación de construir una tienda de zapatos, en esta actividad una de las tareas consistía en que los alumnos se apropiarán de la palabra: “par”, el docente, entonces mostraba a sus alumnos un zapato y les pedía que encontraran su par, los pequeños cuando no entendían esta instrucción el maestro cambiaba su lenguaje pidiéndoles ahora que le llevaran un zapato igual al que tenía, sin dejar de hacer referencia al concepto de par. También en esta misma actividad pero con otra tarea, los niños comenzaron a utilizar símbolos que habían aprendido al estar expuestos a este juego debido a que ellos tenían que acomodar en unas cajas diversos zapatos de mamá, de papá y los suyos. Como a los pequeños se les dificultaba identificar los tres tipos de cajas empezaron a etiquetarlas por medio de dibujos que no se distinguían, entonces inventaron otros símbolos, los cuales todos comprendían y estaban de acuerdo, esto ayudó a diferenciar las cajas y encontrar los zapatos con mayor facilidad (Van Oers y Wardekker, 1999).

Se concluye, esta investigación, que la actividad semiótica sólo puede ser promovida en el juego de los niños cuando la actividad tiene sentido para ellos, cuando existe una necesidad y la presencia de un maestro que pueda ayudarlos a enfrentarse a problemas en sus actividades y darle solución a estas (Van Oers y Wardekker, 1999)

Los sistemas semióticos dominados por los aprendices cambian y se desarrollan en su aprendizaje, el cual se hace más elaborado y permite la apropiación de sistemas más complicados y abstractos como: el número, el conteo y el cálculo, los cuales tienen reglas para operar sobre ellos y significados subyacentes; por ejemplo los niños en un determinado momento tan sólo tienen el conocimiento de que existen números positivos sin percatarse de que los negativos también están presentes; es decir los niños tienen el significado de que a un número mayor es posible restarle un número menor pero no a la inversa, ya que no han interactuado con problemas en los cuales se obtengan resultados negativos (Ernest, 2006).

Cuando se aprende el sistema semiótico de número y conteo significa que un aprendiz es capaz de participar en ciertas actividades sociales y prácticas. Cuando ésta persona ya se encuentra inmersa en estas prácticas sociales puede pronunciar o producir signos de número apropiadamente, porque ahora es capaz de participar en tales interacciones de conteo, número y lenguaje matemático. En este proceso el aprendiz está interiorizando algunas funciones principales y estructuras del sistema de número, para que se de esta interiorización se necesita que el aprendiz participe en conversaciones continuas y que se involucre con actividades referentes al número, para lograr intercambios de información con otros, incluir confirmaciones y ajustar correcciones en su rendimiento y funcionamiento; consecuentemente el aprendiz también estará aprendiendo a identificar tareas aritméticas en situaciones cotidianas (Ernest, 2006).

Una perspectiva semiótica de la actividad matemática provee una manera de conceptualizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas impulsada por el uso y producción de signos ya internalizados, las reglas de los signos son aprendidas por medio de la observación de la aplicación de estos y sus usos en la práctica social. La apropiación se da cuando un individuo adopta las herramientas psicológicas disponibles socialmente y por ello, el niño no necesita reinventar los artefactos por que ya están desarrollados en su propio sistema de actividad; en su propia cultura. El pequeño llegará a una comprensión adecuada de estas herramientas solamente para el uso que se le da al objeto elaborado culturalmente en las circunstancias de la vida (Steiner y Mahn, 1996).

Cuando una persona se encuentra inmersa en actividades auténticas la participación toma un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, ya que por medio de esta los estudiantes logran desarrollar su razonamiento matemático, además de adoptar habilidades de colaboración, la cual se da entre compañeros y profesores, aprender nuevas y diferentes estrategias y la apropiación de conocimientos. Estos factores que la participación ofrece son parte fundamental para resolver situaciones presentadas en un ambiente cotidiano.

La participación, la interacción y la colaboración permiten un aprendizaje efectivo en el rendimiento de los estudiantes, porque amplía las capacidades de los miembros del grupo para lograr objetivos que no podrían conseguirse trabajando solos, el trabajo en equipo facilita la comunicación, el conocer distintas ideas, reconocer errores, observar nuevos métodos, aplicar estrategias diferentes y además los estudiantes adquieren la confianza de poder realizar preguntas a otros compañeros lo que permite crear acuerdos con los significados de las palabras y de esta manera obtener mejores resultados en las actividades realizadas.

El proceso de participación propicia al estudiante a reflexionar en los sistemas de signos y formas de discurso que la actividad contextualizada ofrece, ésta se desarrolla en base a las funciones psicológicas superiores, las cuales participan en la misma cultura y se conocen como herramientas físicas y herramientas psicológicas. Estas herramientas son utilizadas en las actividades como mediadores y sólo pueden ser promovidas en el juego de los niños cuando la actividad tiene sentido para ellos, cuando existe una necesidad y cuando el maestro se encuentra presente para ayudar a los niños a enfrentarse a problemas en sus actividades y dar solución a cada situación problemática.

Estos mediadores se aprenden por medio de la observación de la aplicación de estos y sus usos en la práctica social. Los estudiantes logran apropiarse de ellos debido a que estas herramientas se encuentran en su medio social y cultural y por lo tanto no es necesario reinventar nuevas herramientas.

Cuando un alumno ha dominado un sistema semiótico, el aprendizaje de este cambia, debido a que se hace más elaborado y por lo tanto permite la apropiación de sistemas más complicados y abstractos. Una vez que esto sucede el estudiante es capaz de participar en ciertas prácticas sociales y producir los signos apropiadamente, porque ahora es capaz de participar en interacciones porque el conocimiento aprendido se ha interiorizado.

5.4 Ambientes de aprendizaje de las matemáticas

El individuo está en interacción constante con las matemáticas pero no por ello implica que éste utilice los conocimientos que tiene con respecto a ésta ciencia para resolver los problemas que el mundo social le plantea, por ello es necesario replantear los métodos de enseñanza-aprendizaje a fin de superar esta dificultad mediante la ayuda de la escuela. El propósito sería modificar el significado de la relación que existe entre el docente, el alumno y el saber para que ésta llegue a ser más colaborativa, que exista la interacción, que el docente ayude a los estudiantes como mediador y facilitador, que los alumnos utilicen artefactos físicos y psicológicos mediante tareas auténticas para la solución de situaciones que se le presente a los estudiantes y puedan dar solución a ellas (González y Weinstein, 1998).

Es necesario crear un vínculo más estrecho y significativo entre estos tres factores, profesor, alumno y saber, para generar un equilibrio entre ellos; por tal motivo es indispensable que los profesores tomen en cuenta las ideas y aportaciones que los alumnos comunican en el aula, ya que ellos muestran una conciencia de conceptos y habilidades matemáticas informales, las cuales son desarrolladas por medio de estrategias que los alumnos han elaborado. Estos conocimientos informales ayudan al profesor a tener un punto de partida para saber hacia dónde dirigirse en la actividad, también permite que conozca las nociones previas que sus alumnos ya poseen, las experiencias socioculturales que han tenido, las estrategias que utilizan y cómo es su manera de colaborar y actuar. Con estos principios tanto el profesor se ayuda de los alumnos como los alumnos de él, creando un vínculo entre ellos y el saber de cada parte (National Research Council, 2005).

Es necesario que el docente cree ambientes auténticos destinados al aprendizaje de los alumnos y para ello necesitan estar conscientes de 3 elementos. El primero de dónde partir, los estudiantes al llegar a las aulas educativas ya ingresan con diferentes conocimientos debido a las experiencias diarias de su vida cotidiana, entonces los profesores necesitan percatarse de las habilidades, capacidades y actitudes con las que sus alumnos cuentan para que a partir de ahí creen ambientes de aprendizaje que permitan el desarrollo y apropiación de nuevos conocimientos. El segundo elemento hacia donde quiere ir, el profesor establecer los propósitos que tiene con respecto a la clase, a los alumnos o con sí mismo. Él necesita estar consciente de qué es lo que los alumnos quieren que aprenda, qué es lo que le va a enseñar y por último, el tercer elemento, indica cuál es la mejor manera de llegar allí, lo que se refiere a qué procedimientos va a utilizar el profesor para alcanzar sus propósitos y el de sus alumnos y de qué manera lo va a realizar (National Research Council, 2005).

Estos tres elementos que el docente necesita tener presentes son indispensables en el aprendizaje de los estudiantes pero además para que los propósitos se logren el docente necesita cumplir con la función de mediador en las actividades como menciona Bothaa (2005), ya que proporciona una secuencia de ayudas y enriquece la interacción entre el niño y el ambiente. Estos dos medios, debido a que pertenecen a un contexto, crean significados e intenciones, lo cual permite la transmisión de la cultural: actitudes, valores, capacidades, habilidades y objetivos; para que en un determinado momento se apropien de ellos, logren desarrollar las competencias necesarias y estar preparados para la vida en general.

Para que los alumnos sean competentes en las actividades matemáticas presentadas en su mundo real; Bothaa (2005) agrega que es indispensable que el profesor adquiera el papel de facilitador de la construcción de conocimiento; ellos cumplen con la función de ser un modelo para sus estudiantes, puesto que demuestran, explican, proporcionan información, crean un entorno con variabilidad de materiales y actividades, construyen juegos, formulan preguntas, facilitan, apoyan, mejoran la exploración, observan el desempeño de cada alumno y añaden complejidad a las tareas en las actividades. Estas estrategias que el docente proporciona ofrecen oportunidades para que los niños logren planificar, prever, reflexionar y estar atentos a sus propias experiencias de aprendizaje que son esenciales para el éxito de actividades matemáticas.

Como se observa en la siguiente investigación en la cual participaron niños de preescolar. El procedimiento de este estudio consistía en que los niños tenían que realizar ejercicios de número, en los cuales estuvieran inmersos conceptos como el conteo, la cardinalidad y la aritmética básica. Los niños cuando realizaban los ejercicios buscaban que la información estuviera relacionada con situaciones que estuvieran ligadas a su entorno debido a que la ayuda del docente consistía en dar ejemplos que acompañaran y facilitaran el aprendizaje cotidiano de los alumnos, por lo tanto los estudiantes obtuvieron puntajes altos en los resultados de sus ejercicios; ya que estaban con maestros que se habían plateado metas a seguir y estaban más motivados, logrando así un equilibrio en el cual interactuaba, docente, alumno y saber, de manera dinámica (Aunola, Leskinen , Nurmi , 2006).

Las matemáticas según Bothaa (2005) se inician con experiencias de aprendizaje y la manipulación y exploración de materiales para el desarrollo de conceptos matemáticos como: correspondencia biunívoca, clasificación, suma, resta, multiplicación, división, el uso de unidades de medida, así como el análisis de datos. Estos conceptos son favorecidos con la interacción de las personas más expertas, las cuales poseen un mayor número de habilidades, que pueden ser enseñadas a los menos expertos. El profesor como experto necesita crear ambientes de aprendizaje que permitan la interacción, el uso de estrategias, la colaboración, un lenguaje matemático y el desarrollo de competencias para llegar a tener un razonamiento matemático, de esta manera el niño logrará realizar tareas que estando solo no podría llevar a cabo.

Gifford (2004) también menciona que para que los niños aprendan conceptos numéricos es necesario crear actividades contextualizadas que promuevan el aprendizaje de número. Él propone crear, mediante juegos, ambientes de aprendizaje que generen en los niños conceptualizaciones, destrezas e intereses, estos ambientes deben involucrar metas y diferentes niveles de dificultad que estén al alcance de los pequeños como los juegos de mesa, el boliche, el juego de dardos y actividades en que los niños puedan actuar de manera conjunta. Este autor también menciona que es importante el juego de roles, así los pequeños podrán actuar de distintas formas dependiendo el papel que tengan que representar, aprender lo que el rol ofrece, tomando en cuenta que para los niños más pequeños es necesario que en la actividad se realicen adaptaciones, ya sea en los materiales culturales o en el lenguaje del profesor, de acuerdo a su nivel de capacidad o destreza.

El docente es un factor importante en el diseño de ambientes de aprendizaje puesto que ayuda a los niños a realizar conexiones entre los conocimientos que la actividad proporciona y las nociones previas que los niños poseen; él maestro ofrece oportunidades para realizar representaciones de los problemas, al hacer hincapié en la negociación de significados, al facilitar los andamios y al enseñar estrategias, como el debate, para la solución de problemas; además de considerar que los aspectos sociales influyen en el aprendizaje; es decir cuando a los niños en su casa se les enseña a jugar con dinero, calculadoras y números, generan un mayor aprendizaje y un mayor número de competencias matemáticas; entonces, los niños son considerados actores sociales que participan en la construcción y la determinación de sus propias vidas e influyen en las personas que están a su alrededor así como ellas influyen en los niños debido a las múltiples experiencias que tienen (Gifford, 2004).

Las experiencias crean en las personas aprendizaje y por esta razón Santagata y Barbieri (2005) retoman las ideas de Stigler y Hiebert (1999), ellos señalan que la enseñanza es cultural, por lo tanto es necesario que los profesores organicen, den estructura y secuencia a las actividades de los estudiantes pertenecientes a la cultura en la que viven.

La manera en como las experiencias influyen en la capacidad de las personas se demostró en la siguiente investigación, en la cual se compararon dos modelos de enseñanza en dos clases, una de Italia y la otra de Japón. En la clase de Italia el profesor trabaja con los estudiantes de manera grupal, él explica el tema, habla de los objetivos de la lección, proporciona los conceptos, las ideas y las estrategias de solución o métodos. Los estudiantes pueden participar haciendo preguntas o exponiendo sus dudas y el profesor ayuda a que los alumnos comprendan la lección dando explicaciones o demostrando los pasos de la solución. Las tareas de la clase de Italia se realizaban de manera grupal y antes de empezar se revisaba la información del tema que los alumnos llevaban a clase o las dificultades surgidas; después el profesor explicaba la lección y presentaba conceptos principales mediante pláticas y preguntas; luego animaba a los estudiantes a que aplicaran los conceptos aprendidos cuando les ponía un problema para que ellos lo resolvieran, los estudiantes tenían que explicar en voz alta qué estaban haciendo y cómo lo hacían. El profesor además de usar estas estrategias él les pedía a sus estudiantes que se expresaran usando un lenguaje matemático. En cambio en la clase de Japón sucedía lo contrario, ya que en ese país la explicación y la aplicación se proporcionaban en un principio y de manera unidireccional y después se daban los conceptos. Los profesores italianos al realizar sus clases toman en cuenta 3 tareas principales: la primera, el vínculo entre el conocimiento previo y las nociones nuevas de sus estudiantes; la segunda, los profesores presentan los nuevos temas de forma bidireccional y la tercer tarea consiste en promover el dominio de los nuevos temas mediante la práctica y aplicación de los nuevos conocimientos aprendidos. Otra estrategia que utilizan estos profesores para el aprendizaje de los estudiantes es observar en video cómo es la dinámica en la clase y cómo sus alumnos la reciben (Santagata y Barbieri, 2005).

Los resultados de esta investigación, la cual se realizó en alumnos de segundo de secundaria grado pertenecientes a Italia a los cuales se les aplicaron 39 lecciones de álgebra, geometría y estadística, incrementaron la participación y se hicieron conscientes de sus propias prácticas de enseñanza, lo que ayudo a que se sintieran habilitados para cambiar rutinas; crear nuevas ideas alternativas para enseñar y aprender matemática y se consideraron capaces de discutir y colaborar con sus compañeros para mejorar la enseñanza y aprendizaje en cuanto a las matemáticas (Santagata y Barbieri, 2005).

González y Weinstein (1998) también centran la enseñanza en la actividad del alumno, ya que ellos consideran que exponer a los alumnos a situaciones reales permite que ellos sean capaces de participar, analizar y reflexionar de manera conjunta, esto con la ayuda del docente el cual escucha al alumno, responde a sus demandas y lo guía a utilizar diferentes fuentes de información y si el docente se encuentra motivado los resultados del alumno serán mejores en las actividades matemáticas. Para que los estudiantes adquieran competencias matemáticas; es decir para que se apropien de las capacidades, actitudes y habilidades que las situaciones reales o tareas auténticas propician es indispensable que el docente plantee a sus alumnos problemas que les sean significativos, que exista en las tareas objetivos y metas con un grado de dificultad al nivel de ellos y así logren solucionarlos de manera interactiva con sus pares.

La actividad de solución de los problemas cobra un lugar privilegiado en la situación de aprendizaje, de esta manera el docente tendrá la necesidad de conocer el mundo exterior y las exigencias que plantea la sociedad actual, a fin de proponer intencionalmente, situaciones significativas, contextualizadas y con sentido; además de seleccionar aquellos saberes matemáticos que garanticen tanto la inserción sociocultural del alumno como una educación matemática enraizada en la cultura (González y Weinstein, 1998).

Los maestros reflejan en su práctica educativa las diferentes percepciones que tienen con respecto a la enseñanza y el aprendizaje como se observó en la siguiente investigación, en la cual participaron 60 maestros a los cuales se les aplicó una primera entrevista para conocer las nociones que tenían acerca de la enseñanza; posteriormente se les introdujo a talleres y seminarios acerca del significado de la enseñanza eficaz y el aprendizaje de calidad y al final se les volvió a aplicar una segunda entrevista para percatarse de los cambios que los maestros obtuvieron (Li, 2004).

Los cambios obtenidos de los profesores en la segunda entrevista se obtuvieron debido a la exposición de los talleres; ya que los maestros lograron obtener y desarrollar habilidades de organización del contenido y de las actividades de aprendizaje, utilizaban estrategias como tomar fotos para realizar demostraciones, permitían que los niños exploraran; conocían los contenidos de los planes de enseñanza y se preparan sus clases, además utilizaban materiales, los cuales eran factores importantes que afectaban el aprendizaje de los niños; dedicaban más esfuerzo a los tipos de actividades que iban a realizar; comprendían los contenidos del plan de estudios, tomaban en cuenta el tiempo destinado para cada lección. Los profesores reconocían que en sus alumnos existía una ganancia de conocimientos; pensamiento lógico, habilidades de lenguaje y relaciones interpersonales. También que existían factores que afectaban el aprendizaje de los niños como la guía que se les daba por parte del profesor al realizar la actividad, la interacción, la comunicación y la negociación. Los profesores se percataron que las nuevas ideas acerca de la enseñanza ayudaron a sus alumnos a comprender y apropiarse de nuevos conocimientos (Li, 2004).

Cuando a los preescolares se les expone a tareas contextualizadas es mucho más probable que en su vida cotidiana cuando se presenten a situaciones parecidas logren resolverlas como en la investigación que Saxe (1989) retoma de las ideas de Guberman (1987) quien realizó un estudio con niños de un barrio pobre de Brasil, a los cuales se les mandaba a comprar artículos para sus familias. Había dos condiciones: a los niños pequeños se les da el dinero exacto para que lo intercambiaran por un artículo y a los niños más grandes se les daba una cantidad mayor de dinero para producir cálculos asociados con la compra de artículos. Se observó que los niños más grandes intentaban realizar cálculos, verificaban el precio de los productos, el dinero que llevaban y el cambio que al final les regresaban. Cada niño utilizaba distintas estrategias para llegar al resultado correcto.

El exponer a los alumnos a situaciones reales ayuda a los estudiantes a desarrollar nuevos conocimientos y lograr aplicarlos en su vida cotidiana; en estas actividades contextualizadas es importante que exista una dificultad que produzca en el niño un reto y deseos de llegar a una meta; por ello Coll menciona que “la intervención pedagógica debe concebirse en términos de diseño de situaciones, que permitan un grado óptimo de desequilibrio; es decir, que superen el nivel de comprensión del alumno pero que no lo superen tanto que no pueda ser asimilado o que resulte imposible restablecer el equilibrio para el niño", entonces, exponer a los alumnos a situaciones que contengan un reto, una dificultad, pero que este no sea tan difícil como para que el niño desista de la actividad y no pueda desarrollar de los conocimientos y habilidades que podría ofrecer. Es por esto que en cada situación didáctica es necesario plantear un reto, un problema en el cual la trilogía docente-alumno-saber pueda resolver de manera conjunta (González y Weinstein, 1998).

Reyes (2007) entonces menciona que para una enseñanza y aprendizaje eficaz con respecto a las matemáticas la ayuda del maestro es la parte central; el profesor necesita usar diversos medios de ayuda como la ejecución guiada, la estructuración cognoscitiva, la explicación, el uso de sistemas de representación (que permitan al alumno tener una imagen clara de los elementos con que está trabajando), las relaciones entre alumnos y profesor y las operaciones, las cuales pueden ser concretas, pictóricas o abstractas y crear un lenguaje matemático que permita la claridad y precisión al nombrar objetos, algoritmos, operaciones y relaciones.

Callejo (2007) retoma las ideas de Hiebert (1997) quien hace referencia a cinco elementos de las clases de matemáticas: el primero al entorno de las tareas matemáticas propuestas a los estudiantes, ya que se requiere proponer verdaderos problemas para que los estudiantes exploren, analicen y busquen estrategias de solución. Estas tareas deben captar el interés del alumnado, motivarlo a investigar, a utilizar sus conocimientos y a comunicar sus resultados; el segundo, el papel del profesor, quien es el encargado de seleccionar y proponer secuencias de problemas adecuados, ofrecer información cuando sea necesario y facilitar un ambiente para que los alumnos puedan trabajar interactuando con sus compañeros; el tercero, la cultura social del aula, en la cual es indispensable potenciar que los alumnos busquen su autonomía en diferentes estrategias de solución y que consideren los errores como situaciones de aprendizaje; el cuarto elemento, los recursos matemáticos, los cuales se toman en cuenta como soporte del aprendizaje y en donde están inmersos los distintos sistemas de representación como el lenguaje oral, el gráfico o el simbólico. Estos recursos pueden ayudar en todas las fases de solución del problema; también en la comunicación verbal, oral o escrita y por último el quinto elemento, la equidad y la accesibilidad, la cual menciona que los problemas propuestos deben ser accesibles a todos los estudiantes para que todos tengan la misma oportunidad de adquirir y mejorar las competencias matemáticas.

El alumno entonces gracias a los ambientes de aprendizaje desarrolla habilidades matemáticas que posibilitan, en forma autónoma, la solución de problemas; confrontar las soluciones encontradas, buscar distintos caminos de solución, formular nuevos problemas, aceptar equivocarse y generar respuestas simples; además construye saberes matemáticos para luego poder hacer un uso inteligente, adecuado y suficiente de los mismos en las diversas situaciones que se le lleguen a presentar y así facilitar una solución (González y Weinstein, 1998).

El Consejo de Investigación Nacional (2005), apoya la idea de que a los estudiantes se les debe dejar usar sus propias estrategias de solución de problemas y una vez conociendo sus estrategias a partir de ellas guiarlos hacia estrategias más eficaces, acuerdos avanzados y métodos para resolver un problema; para que analicen las ideas matemáticas. Es necesario que el docente cree ambientes en donde la matemática sea emotiva, con el propósito de que los estudiantes puedan aclarar sus estrategias y comparar los beneficios y las limitaciones de enfoques alternativos. La comunicación sobre la idea matemática puede ayudar a todos en el aula a comprender un concepto en particular o método contrastando los enfoques. El docente necesita ligar los conocimientos previos con los nuevos cuando diseñe actividades con el propósito de desarrollar competencias matemáticas para que los alumnos sean capaces de razonar y resolver los problemas eficazmente en un dominio particular.

Los beneficios que otorgan los ambientes de aprendizaje en el aula es que son centrados en el aprendiz, se toma en cuenta el pensamiento que este adquiere y desarrolla junto con los conocimientos que ya posee; las estrategias que utiliza para resolver problemas y los métodos por los cuales llegan a los resultados; el docente tomara participación en las actividades para enseñar nuevas estrategias o encaminar sus propios métodos y así los alumnos lleguen a ser más competentes. Es necesario que el docente cree oportunidades para que los estudiantes hablen de su pensamiento, de sus dudas o dificultades acerca de la tarea y exponga sus resultados y los métodos por los cuales llego a ellos; también se debe tomar en cuenta la influencia de la comunidad, ya que es ella quien crea las normas y por lo tanto valora las ideas de los estudiantes, animan el intercambio productivo y promocionan el pensamiento de colaboración (National Research Council, 2005).

En conclusión el alumno necesita estar expuesto a ambientes de aprendizaje que permitan el desarrollo de capacidades, habilidades y actitudes; es decir que los alumnos desarrollen y adquieran competencias matemáticas mediante actividades contextualizadas; en las cuales estén involucrados factores como la colaboración, la interacción, la guía del docente como mediador de la actividad, el uso de artefactos físicos y psicológicos por medio de la negociación debido a la exposición de tareas auténticas para dar solución a las diferentes situaciones matemáticas. Este proceso generará un equilibrio entre los docentes, el alumno y los conocimientos que por parte de los dos poseen; ésta nueva relación permitirá un mejor desempeño en las distintas actividades reales

El equilibrio que surge entre los estudiantes, el maestro y los conocimientos ayudan a que se tengan puntos de partida, se conozcan las nociones informales de los alumnos, sus experiencias, estrategias y la manera en cómo se comunican con sus compañeros y profesores. Con el conocimiento de estas habilidades el profesor podrá redirigir sus actividades basándose en las necesidades que sus alumnos tienen y lograr plantear la actividad de acuerdo a metas y propósitos útiles con resultados favorables. La trilogía alumno, profesor y saber es indispensable, puesto que permite que cada una de estas tres partes se favorezcan, sean un complemento y se necesiten entre sí.

Cuando los alumnos están expuestos a ambientes de aprendizaje logran desarrollar y adquirir competencias matemáticas, las cuales los favorecen al involucrarse en un medio social y cultural, por lo que lograrán resolver situaciones de su propio entorno, debido a que estos estudiantes se convierten en personas críticas, analíticas, reflexivas y podrán razonar de manera matemática.

En el diseño de situaciones se debe permitir que los alumnos sean capaces de dar solución a ellas; sin embargo no deben ser tan sencillas como para no generar retos y crear en los estudiantes un desequilibrio cognoscitivo razonable para que logren aprender y plantearse propósitos, metas, desarrollar habilidades y actitudes, favorecer la colaboración y la interacción entre los compañeros, aceptar la ayuda mutua y la guía por parte del docente y alumnos mediante el uso de distintos artefactos. Cada situación debe ser modificada de acuerdo a las necesidades del grupo y a partir de ellos diseñar las actividades contextualizadas.

Uno de los principales propósitos de las actividades reales consiste en solucionar los problemas contextualizados, ya que tiene un lugar importante en el aprendizaje, puesto que se encuentra inmerso en el mundo exterior y las exigencias de la cultura y la sociedad. De esta manera el docente podrá, de manera intencionada, crear situaciones significativas con conceptos pertenecientes a la propia cultura de los alumnos y los saberes matemáticos que garanticen tanto la inserción sociocultural del alumno como una educación matemática enraizada en la cultura.

Los ambientes de aprendizaje, entonces otorgan múltiples beneficios, porque se enfocan en el aprendiz al tomar en cuenta sus pensamientos, conocimientos, estrategias, métodos, participación, interacción, colaboración, negociación por medio de los artefactos y la apropiación de las competencias matemáticas mediante la creación de las actividades contextualizadas; tomando en cuenta la influencia de la sociedad y la cultura.

6 ¿QUÉ CONOCIMIENTO NUMÉRICO TIENEN LOS NIÑOS AL ENTRAR AL PREESCOLAR?

Este capítulo abarca los conocimientos numéricos que los infantes de educación preescolar desarrollan a lo largo de este nivel por ello los profesores de la educación preescolar tienen la oportunidad de aprovechar los conocimientos que cada alumno tiene al entrar por primera vez a clases. En el primer apartado, se muestra de qué manera influye el contexto social en el desarrollo de los conocimientos numéricos del infante, puesto que ellos asisten al preescolar con nociones numéricas previas que han aprendido al observar a sus padres cuando resuelven algún problema.

En el segundo apartado se muestra cómo los infantes al participar en actividades autenticas de conteo generan un significado de los números y se percatan que proveen medios para describir la cantidad y sus transformaciones.

En el tercer apartado, se describe de qué manera los niños y las niñas se interesan en las diferentes formas de notaciones numéricas y les atribuyen una función general relacionada con el contexto. Al estar involucrados en situaciones en las cuales se exija esta notación, transforman su representación para lograr escribir simbólicamente cantidades.

En el último apartado, se habla de las habilidades analíticas y de reflexión que desarrollan los niños para dar solución a problemas relacionados con su vida cotidiana y que son similares a los expuestos en el ambiente escolar.

El número tiene diferentes funciones de acuerdo al contexto en el que se utilice: una es la de nombrar y la otra es la de ordenar. El aspecto nominal, o cardinal, trata de los elementos que contiene un conjunto dado; nombrar un conjunto no requiere contar necesariamente. El aspecto de orden u ordinal del número, está relacionado con contar y se refiere a colocar colecciones en sucesión por orden de magnitud. Para contar una colección, se asignan sucesivamente términos de la serie numérica a cada elemento de la colección hasta que se ha asignado un nombre a cada uno de los elementos, el número asignado a la colección específica la magnitud relativa del conjunto. Los niños al contar con los dedos pueden enlazar el aspecto cardinal y ordinal del número; los resultados de contar 4 objetos son idénticos a los de levantar simultáneamente 4 dedos siendo un medio para pasar de un aspecto del número al otro (Baroody, 1998).

Los niños incluso aquellos con bajo nivel socioeconómico adquieren conocimientos considerables sobre contar, el número y la aritmética. Este conocimiento adquirido de manera informal actúa como fundamento para la comprensión y el dominio de las matemáticas impartidas en la escuela. Asimismo, la matemática informal de los niños se desarrolla a partir de necesidades prácticas y experiencias concretas, como contar y emplear los dedos, incluso los niños de seis meses de edad pueden distinguir entre conjuntos de uno a cuatro elementos, pero quizá no puedan ordenarlos por orden de magnitud (Baroody, 1998).

A medida que los números aumentan, los métodos informales se van haciendo cada vez más propensos al error. La matemática formal permite a los niños pensar de una manera más abstracta y abordar con eficacia problemas en los que intervienen números grandes. La matemática informal es el paso intermedio crucial entre su conocimiento intuitivo, limitado e impreciso y basado en su percepción directa y la matemática precisa basada en símbolos abstractos que se imparte en la escuela. El objetivo de la instrucción es ayudar a los niños a construir una representación más exacta de las matemáticas y desarrollar pautas de pensamiento más maduras. La enseñanza de las matemáticas consiste en traducirlas a una forma que los niños puedan comprender, ofrecer experiencias que les permitan descubrir relaciones, construir significados, crear oportunidades para desarrollar y ejercer el razonamiento matemático y las aptitudes para la resolución de problemas (Baroody, 1998).

Cuando a los niños se les presenta una tarea poco familiar o difícil de manejar, tienden a recurrir al empleo de un procedimiento aprendido previamente; si se les pregunta a los niños, cuántos objetos acaban de contar, vuelven a enumerar todos los elementos del conjunto. Cuando la enumeración se contempla como un fin en sí misma y no como un medio para llegar a un fin, los niños muy pequeños pueden no llegar a comprender el sentido de preguntas como "¿Cuántos hay?", cuando se dan cuenta de que contar es un procedimiento empleado para asignar números a colecciones, realizan el intento de recordar lo que han contado. Una vez que el niño ha llegado a dominar los principios básicos para contar que se refieren a un solo conjunto, la acción de contar puede aplicarse a contextos más complicados como la comparación de 2 conjuntos, también puede emplearse la acción de contar para descubrir que la apariencia no es pertinente para determinar si 2 conjuntos son iguales o no. De igual forma, aprenden que el número puede especificar diferencias entre conjuntos y emplearse para especificar "más" o "menos" (Baroody, 1998).

Existen 2 tipos de conocimiento matemático, uno es el conocimiento de la forma, que implica aprender los nombres y las formas de unos símbolos, las reglas para su empleo y las reglas para manipularlos en la resolución de problemas. El segundo tipo es la comprensión, que implica construir conceptos o encontrar relaciones; por ejemplo, los niños pueden construir, a partir de su experiencia informal, el concepto de adición como un progreso aumentativo; en la escuela, los niños asignan un significado al símbolo "más" (+) relacionándolo con este concepto (Baroody, 1998).

La estrategia más básica que los niños utilizan para contar y determinar la suma, es la cuenta concreta global. En ésta los objetos se cuentan uno por uno, para representar un sumando, el proceso se repite con el otro sumando, luego se cuentan todos los objetos para determinar la suma. Otra estrategia utilizada por los niños es la estrategia de pautas digitales, que consiste en representar con los dedos u objetos el primer sumando, formar otra pauta digital para representar el segundo sumando y contar todos los dedos u objetos para determinar la suma. Una tercera estrategia es la de reconocimiento de pautas, que consiste en formar el primero y el segundo sumando por medio de pautas digitales y reconocer el resultado sin contar (Baroody, 1998).

Para problemas de resta, los niños emplean modelos concretos que representan directamente su concepto informal de la sustracción como “quitar algo”, el cual implica, representar el minuendo, quitar un número de elementos igual al sustraendo y contar los elementos restantes para determinar la respuesta. Un procedimiento mental que utilizan los niños, es la de retrocontar, que implica expresar el minuendo, contando de forma descendente tantas unidades como indique el sustraendo y dar el último número contado como respuesta. A medida que intervienen números cada vez mayores, los niños aprenden otros métodos de sustracción, como el de contar progresivamente, el cual es parecido al procedimiento del “sumando ausente”, que implica partir del sustraendo y contar de manera ascendente hasta llegar al minuendo, al tiempo que se lleva la cuenta del número de pasos dados (Baroody, 1998).

Los niños pueden percatarse de las relaciones existentes entre la adición y la sustracción al observar que la sustracción de una cantidad cualquiera N puede anularse mediante la adición de N y viceversa, también, percibir que la adición y la sustracción se relacionan entre sí mediante el principio de complementación, el cual menciona que restar un sumando de un total produce el otro sumando. Además de interpretar la sustracción escrita como “quitar”, también necesitan aprender otros significados; ya que, la sustracción puede tener un significado comparativo, puede relacionarse con la adición mediante el procedimiento que destaque los sumandos ausentes o la sustracción aditiva. De igual forma, sucede con el símbolo igual (=), ya que los niños tienden a interpretar este símbolo como “operador” que significa “suman” o “hacen un total de”, sin embargo, el signo igual indica una relación de equivalencia: es lo mismo que. Si el signo igual no se considera un signo de relación, las estrategias para la solución de problemas algebraicos pueden carecer de significado. Por lo que, se requiere que los signos de igualdad y desigualdad se introduzcan en un contexto distinto de la adición, de una forma más concreta, podrían emplearse por primera vez para identificar conjuntos de objetos equivalentes y no equivalentes (Baroody, 1998).

Asimismo, reconocer, leer y escribir símbolos matemáticos es un objetivo fundamental de la enseñanza formal, la mayoría de los niños pueden reconocer y leer números de una cifra y llegan a dominar los símbolos matemáticos básicos y escribirlos. Para diferenciar entre los números, un niño necesita conocer las características que definen a cada uno de ellos: las partes componentes y las relaciones de las mismas para formar el todo. El conocimiento del sistema de numeración con órdenes de unidades de base diez, se desarrolla gradualmente y se basa en conocimientos anteriores de contar, los niños aprenden a reconocer los nombres y los lugares de las unidades, las decenas, las centenas y millares, también dominan la designación del orden de cada cifra, pueden identificar cuántas unidades, decenas, centenas, etc., representa un número de varias cifras (Baroody, 1998).

En cuanto a la solución de problemas, antes de recibir una enseñanza de la aritmética formal, los niños pueden emplear su conocimiento aritmético informal para analizar y resolver problemas sencillos de adición y sustracción de enunciado verbal, además de ser más significativos. Al principio, los niños emplean objetos reales para representar las cantidades descritas en un problema, realizan acciones para imitar la operación aritmética indicada y cuentan para determinar la respuesta. Algunas estrategias que los niños utilizan para problemas de tipo cambio y combinación es contarlo todo de forma concreta. Para problemas de quitar, utilizan la separación. En problemas de segundo sumando ausente, sustracción aditiva y primer sumando ausente, los niños cuentan a partir del número dado y para problemas de comparación, establecen correspondencias. Para la resolución de problemas eficaz, se requiere que los niños comprendan el problema, es decir, identificar el objetivo del problema, definirlo, planificar una estrategia para la solución, poner en práctica la estrategia y comprobar los resultados (Baroody, 1998).

6.1 Influencia del contexto social en la enseñanza de las matemáticas

Los niños no sólo aprenden en la escuela, también traen aprendizajes positivos de sus casas a ella. Tienen la oportunidad de observar a sus padres a usar los números para solucionar sus propios problemas diarios, ya que las matemáticas se encuentran alrededor y al alcance de las personas para contar y reconocer números, por ejemplo en el uso de un calendario, en el control de la televisión o ir a comprar a la tienda (Diane y Anderson, 2006).

En Filadelfia Diane y Anderson (2006) encontraron en cuatro alumnos de nivel preescolar de una zona urbana que preferían elegir actividades que tuvieran relación con objetos parecidos a los que utilizaban en su casa. Por ejemplo, en su estudio, un niño escogió un calendario donde identificaba la fecha de su cumpleaños, fechas importantes y contaba los días para ver cuántos faltaban para llegar a estas fechas. Con ello, el niño se percataba de la utilidad de un calendario y que no sólo sirve para reconocer números y contar los días sino que también se puede utilizar para medir el tiempo. El procedimiento de su estudio consistía en realizar 14 observaciones en el salón de clases, se hicieron visitas a los hogares y comunidades donde vivían los niños. Los infantes tenían 45 minutos libres para elegir cualquier actividad u objeto con el que quisieran jugar y se encontró que cada niño tomaba el objeto con el que interactuaba más en su casa. Un niño eligió el calendario porque en su casa acostumbran a anotar las fechas importantes como los cumpleaños con el fin de festejarlos. Por lo tanto, las experiencias en las que es necesario el uso del cálculo y el conteo, dentro y fuera de la escuela, benefician el logro de las matemáticas de los estudiantes.

Los padres, al igual que los docentes, les ayudan a sus hijos desde edades muy tempranas a construir nociones matemáticas. Los padres se convierten en guías y proporcionan ayudas cuando sus hijos no logran por sí solos comprender o realizar la actividad. Este tipo de ayuda fue encontrado en China con 86 diadas, conformadas por madre-hijo, en el que los objetivos era observar qué clase de eventos matemáticos están involucrados en las diadas y qué clase de estrategias son usadas por los padres en las actividades. Cada diada participó en cuatro actividades conjuntas y respondieron un cuestionario. Las tareas consistieron en destreza de número. En la primera los niños tenían que sacar un conjunto específico de botones de un recipiente y después escribir la cantidad. En otra tarea, el investigador sacaba una cantidad de botones y los niños tenían que representar simbólicamente esa cantidad. Después el investigador invirtió el procedimiento, en este los niños sacaban el número específico de botones que la tarjeta indicaba (Zhou, et al. 2005).

Zhou y colaboradores (2005) encontraron que el conteo era el evento matemático más común en todas las actividades. Nombrar formas y comparar tamaños eran utilizados por los padres; aunque había eventos de suma y resta que los padres habían enseñado. Los padres en el transcurso de las actividades aplicaron estrategias al interactuar con sus hijos: hacer preguntas, explicar, dar ayuda, negociar y elogiar. De esta manera, ayudaban a que los niños comprendieran la actividad y la realizaran con éxito. Asimismo, los preparaban para entrar a la escuela y suministrar una base para beneficiarse de las actividades educativas.

Todas las personas, en este caso los estudiantes, se benefician al participar en las actividades que son fuera de la escuela, incluso la gente que proviene de familias de bajos recursos. Esto fue demostrado por Pagani y Girard (1997) quienes realizaron un estudio longitudinal en el que participaron 532 niños con edades entre los 4 y 5 años que vivían en zonas carentes de recursos y asistían al preescolar. Los objetivos que tenían hacia los niños era que aprendieran: la secuencia del número del 1 al 10, correspondencia uno a uno; contar desde cualquier lugar en secuencia; concepto de suma y resta; estimar y comparar cantidades; secuencia numérica; contar hacia adelante y hacia atrás de 0 a 10; hacer estimaciones de cantidades relativas y la evaluación de las dimensiones. Estos objetivos se lograron mediante juegos y actividades consideradas agradables a esa edad. Se les evaluó al final con la prueba de Conocimiento de Número y se encontró que los niños que tienen bajos recursos son tan hábiles y capaces como cualquier otro infante para desarrollar el conocimiento matemático.

Los padres latinos con más educación y ocupaciones con un nivel alto, usan más alfabetismo y nociones elementales de cálculo aritmético con sus niños en casa. Estas actividades involucran: juegos, solución de problema, exploración de materiales y eventos. Esto fue encontrado por López, Gallimore, Garnier y Reese, (2007) quienes mencionan que los padres emplean contextos sociales en el que utilizan diferentes estrategias como el modelamiento, instrucciones, preguntas, conversaciones y relatos. Participaron en su estudio longitudinal 73 estudiantes latinos junto con sus padres, provenientes de una escuela primaria en México, América Central y Estados Unidos. Encontraron que entre más actividades de alfabetismo matemático se daban en la casa junto con la asistencia del preescolar, pronosticaban significativamente altos puntajes de logro matemático en la escuela primaria. El éxito que tenían los alumnos en la primaria temprana pronosticó un logro mayor de matemática en la secundaria. Los recursos familiares pronosticaron el rendimiento temprano sobre el alfabetismo y medidas matemáticas al incluir en casa oportunidades de experimentar nociones elementales de cálculo en rutinas diarias, como visitar un mercado o una tienda donde los niños observen el intercambio compra-venta.

6.2 Conteo

Desde edades muy tempranas se ha observado que los niños se apropian de nociones numéricas básicas, como la primera vez que el niño usa la palabra “uno”, basándose en la ayuda que le proporciona el adulto. El adulto mientras señala un objeto y menciona la palabra uno, el niño va relacionando e imitando esta acción aplicándolo a diferentes contextos similares. También adquieren términos de “muchos, pocos, más, menos, más largo, más corto”. El niño logra enumerar reproduciendo lo que hace el adulto, como utilizar el ábaco para contar. Empiezan a conocer que la numerosidad es un factor importante, ya que pueden percibir por ejemplo: que entre más puntos obtenga una persona en un dado será la ganadora. De igual forma, los niños hacen uso de sistemas de representación que sean más cercanos a ellos, utilizando sus dedos para decir cuántos años tienen o describir cantidades pequeñas. Utiliza los signos en forma correcta y apropiada, aún cuando tienen poco sentido para él; los procedimientos que imita generalmente son resultado de conductas dirigidas directamente hacia él y que se ajustan a su nivel. Esto se observó en interacciones espontáneas cotidianas de un niño, entre los 19 y los 40 meses de edad en Suiza (Sinclair, 2005).

El desarrollo de número y conteo son aspectos culturales que los niños encuentran durante la actividad compartida con compañeros más competentes. Durkin (1993) quien es retomado por Fluck y Linnell (2001), menciona que la actividad de adquirir muchos conocimientos numéricos y matemáticos puede ser cualitativamente diferente de acuerdo con el contexto socio cultural o lingüístico. Los niños encuentran números y conteo durante la interacción social mucho antes de que adquieran el lenguaje necesario para funcionar independientemente en dominios de número.

Aunque los niños menores a 4 años comprenden números cardinales no pueden inicialmente apreciar cómo, conteo y cardinalidad, son vinculados. Esa comprensión cardinal que implica separar la palabra final de conteo del resto de la secuencia verbal, aparece cuando adquieren habilidad en destrezas de conteo procedimental (Fluck y Linnell, 2001). Se demostró que las madres eran una forma de ayuda para sus hijos en las tareas matemáticas a realizar y en la comprensión de la cardinalidad; ya que al final del conteo ellas les preguntaban a sus hijos ¿cuántos hay?, lo que hacía que sus hijos al responder a la pregunta cardinalizaban y si no lograban hacerlo la mamá contestaba la pregunta y se la repetía a su hijo para que lograra contestar; entre mayor edad tuviera el niño era más fácil que se apropiara de la cardinalidad. También se encontró que los niños que no utilizaban la subitización, el cual implica reconocer colecciones pequeñas sin contar, tenían que recurrir al conteo; esto fue demostrado en Inglaterra por Fluck, Linnell y Holgate (2005), con 100 madres de niños preescolares, con edad de 3 a 4 años y medio, con el objetivo de investigar el conocimiento de las mamás sobre la discrepancia entre el dominio procedimental y conceptual de conteo de los niños.

De igual manera, en otra investigación similar realizada en Inglaterra se trabajó con 18 díadas madre-niño, en un diseño longitudinal consistiendo en 3 fases (32, 38 y 44 meses). Se observaron los efectos de apoyo maternal en el desarrollo de conteo y cardinalidad; la tarea consistió en contar y dar cierta cantidad de objetos, con ayuda o sin ella, de 2 conjuntos subitizable (2 y 3) y 4 conjuntos no subitizable (4, 7, 10, 18). Los resultados reflejaron que los niños fueron más exitosos en la tarea de conteo que en la tarea de dar cierta cantidad, la cual requiere conocimiento de la relación entre conteo y cardinalidad. El incremento en la ayuda en la tarea de dar cierta cantidad de objetos en los niños con edades entre 38 y 44 meses sugiere que la tarea se encuentra dentro de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Cuando la mamá daba la palabra final del conteo verbal a su hijo para copiarlo, aún con esta ayuda, los niños menores de 32 meses no podían dar el número exacto aunque ya lo hubieran escuchado. En ambas tareas la correspondencia uno a uno disminuyó conforme el niño aumentaba de edad. A pesar del conocimiento del niño de la secuencia de conteo, muchos de ellos copiaron el conteo verbal proveídos por la madre; el énfasis y la repetición son característicos de interacciones madre-niño. Este estilo de interacción puede influenciar en el desarrollo de comprensión cardinal (Linnell y Fluck, 2001).

Los números adquieren significado para los niños cuando reconocen que cada número se refiere a una cantidad especial; y cuando se percatan de que los números proveen medios para describir la cantidad y sus transformaciones, es posible que usen un lenguaje diario como "montón", "poco", o "más." (National Research Council, 2005).

Dada la comprensión de conteo, los niños pueden notificar que la colocación repetida de un ítem dentro de una colección incrementa su valor. Cuando los niños notan el valor cardinal de un número se dan cuenta de que representa uno más que el valor anterior. Los niños negocian correctamente problemas aritméticos cuando el número total es igual a o menor que 4, por ejemplo: se le pregunta a un niño ¿cuántos panes puedes comprar con 3 pesos, si cada pan cuesta un peso? Los niños en edad preescolar pueden llevar a cabo tareas de conteo-aritmético tanto aproximaciones como precisas.

Los niños también reconocen el principio inverso implícitamente (si a+b=c, también c-b=a, y viceversa). Cuando los niños de 2 ½ años participan en tareas que evocan razonamiento aritmético, revelan el conocimiento de que contar determina cardinalidad (Gelman, 2005).

Los preescolares pueden con exactitud contar un conjunto de 3 cosas y decir cuántos hay, lo hacen tocando las cosas en un modo sistemático. Pueden contar cosas de diferente color entremezclados, dividiéndolos, al hacer esto han aprendido a aislar el conjunto parcial para ser contado, mental o físicamente. Cuentan en un modo sistemático, asegurándose de que sepan qué cosa contaron primero y que tocan cada cosa solamente una vez cuando cuentan. El contar y el tocar son 2 estrategias no alineadas, a veces dicen más que lo que tocan o se saltan objetos mientras cuentan, olvidan con qué objeto empezaron y cuentan uno o más objetos dos veces. Los niños que hacen estos errores están demostrando un poco de conocimientos de conteo; pueden decir la secuencia numérica correcta y saben que se debe hacer así, para calcular la respuesta; pueden hacer comparaciones de longitud, peso (balanza), siempre que las diferencias entre los conjuntos son visualmente obvias. Los que se equivocan, tal parece que las palabras más-menos, y el proceso de comparación que les subyace no tienen significado. Cuando no son obvias el conteo es exigido para determinar cuál tiene más o menos. Con esto los niños han construido un esquema de conteo inicial, que permite que cuenten verbalmente de uno a cinco, usando correspondencia uno a uno, y usando la regla de cardinalidad. Este esquema también le da una comprensión intuitiva de la respectiva cantidad y de las transformaciones que cambian esta cantidad (National Research Council, 2005).

Un mayor cambio toma lugar cuando comienzan a resolver problemas involucrando números pequeños y cantidades sin tener objetos reales disponibles para contar. Con este cambio, los niños actúan como si usarán una "línea de conteo mental" y/o sus dedos están al tanto de cuántos objetos han contado. Los niños más avanzados pueden calcular la respuesta sin usar sus dedos, es decir, mentalmente, demostrando su conciencia que contar números se refiere a las cantidades del mundo real y pueden ser usados, en la ausencia de objetos contables; pueden usar la estrategia de sobre-conteo o empezar a contar desde uno; también pueden comparar cantidades diciendo cuál de dos números es más grande o más pequeño. Los niños parecen saber, que los números indican cantidad y por lo tanto, tienen magnitud, que la palabra "más grande" o "mayor cantidad" son sensatos en su contexto y que los números ocupan posiciones en la secuencia de conteo (National Research Council, 2005).

Los niños de edad preescolar, según Baroody (1998), manejan la secuencia numérica tempranamente, pero es posible que sólo sepan que la secuencia de conteo se compone de números y que han de repetirse siempre en el mismo orden, sin que se infiera una comprensión conceptual como, por ejemplo, que cada elemento de la lista es único.

Se puede hacer dos usos funcionales de la secuencia numérica: ordinal y cardinal. El valor funcional ordinal se manifiesta cuando, con la acción de contar, los niños tienen que resolver problemas de ordenación. Para estudiar la evolución de las relaciones lógicas-ordinales, 27 niños de Educación Infantil de 3 a 6 años en España, participaron en 3 actividades: 1. Alternancia. Se colocó pan en un escalón sí y en otro no, se les mostró 2 peldaños consecutivos, sin percibir la alternancia, y sabiendo lo que ocurría en el primero de ellos tenían que anticipar lo que sucedería en el siguiente inmediato, pidiendo la comparación de 2 peldaños; 2. Contar. Contaron los escalones determinando una posición ordinal cualquiera y después el experimentador eligió otra posición ordinal que los niños tenían que identificar; 3. Secuencia numérica/Alternancia. Anticiparon lo qué ocurriría en un escalón conociendo lo que ocurría en otro escalón que se dio como dato, el dato que se proporcionó fue numérico y los niños debían responder con una posición numérica de la secuencia describiéndola mediante la alternancia. Se encontró que entre más edad, es más frecuente que los niños utilicen la secuencia numérica para explicar una realidad ordinal. Todos los niños de 5 años estuvieron capacitados para comparar posiciones ordinales, algunos niños de 3 años lograron realizar la acción de contar sin cometer errores; sin embargo, no usaron la secuencia numérica para determinar una posición ordinal. Los niños de 4 años fueron capaces de usarla como instrumento para resolver problemas ordinales en contextos numéricos (Fernández y Ortiz, 2008).

Hannula, Rasanen y Lehtinen (2007) mencionan que existen 3 habilidades numéricas tempranas que se desarrollan durante la infancia. La primera, es el reconocimiento de número basado en subitización (el rápido y exacto reconocimiento de números de 1 a 4 objetos sin contar); la segunda, es el conteo de objetos verbalmente y la tercera es la destreza de Numerosidad Enfocada en Espontaneidad (SFON); la cual esta relacionada con la enumeración basada en conteo y también en la subitización.

Las habilidades de conteo de objetos aparecen como resultado de la integración de una destreza del reconocimiento de los primeros números pequeños cardinales y el aprendizaje de procedimientos de conteo de objetos. Hannula, Rasanen y Lehtinen (2007) observaron en 39 niños urbanos de una guardería de Finlandia que la tendencia para concentrarse en numerosidad, enumeración basada en subitización y habilidades de conteo están relacionadas.

Los niños con una tendencia para enfocarse en numerosidad tendían a enumerar cantidades más grandes de ítems por medio de la subitización y tenían mejores habilidades de conteo a la edad de 5 años. Las tareas consistieron en 3 pruebas separadas con colecciones de 1 a 3 ítems en cada uno, colecciones que todos los niños fueron capaces de reconocer y producir, si se concentraban en numerosidad en la tarea, el experimentador hacía la tarea matemática como contar y cardinalizar y los niños tenían que observarlo para después repetirlo; se consideró que si los niños se concentraban en los números producían un conjunto de ítems numéricamente iguales al del experimentador y/o si fueron observados presentando cualquier acto cuantificando. Para la enumeración basada en subitización, en una pantalla se les presentó un conjunto de objetos rápidamente y después se les mostró 2 imágenes con cierto número de cantidad y tenían que elegir el que había aparecido en la pantalla (Hannula, Rasanen y Lehtinen, 2007).

En Reino Unido, Muldoon, Lewis y Freeman (2003), realizaron 2 experimentos para ver si los niños pueden resolver problemas de equivalencia numérica por conteo y cardinalidad en dos contextos. En el experimento 1, participaron 23 niños de 42 a 57 meses, en este, se observó si eran capaces de resolver dos problemas aritméticos simples usando conteo. La primera tarea consistió en la creación de un conjunto equivalente a uno acabado de contar; con el fin de si los niños conocían que conteo era una manera apropiada de hacer un conjunto de tamaño particular; tenían que contar ítems y parar cuando el número nombrado en la secuencia de conteo igualará el valor cardinal del conjunto original.

La segunda tarea consistió en comparar dos conjuntos y juzgar si eran o no equivalentes; con el fin de si los niños conocían que el valor cardinal provee la respuesta a la cuestión de equivalencia, y que conteo fue una estrategia apropiada para determinar estos cardinales. A cada niño se les proporcionó una batería de 5 pruebas: 1. Test de conteo procedimental. Se les dio 10 bloques de construcción en línea, para que los contaran. 2. Test de discriminación de conteo y conteo erróneo. Se les dijo que un muñeco estaba aprendiendo a contar y algunas veces se equivocaba; el niño observaba el conteo del muñeco y decía si era correcto o no; el muñeco tocaba cada bloque mientras contaba. 3. Test de cardinal erróneo. Se les preguntó, ¿Cuántos bloques piensa el muñeco que hay?, ¿Cuántos hay realmente? 4 y 5. Test de creación de conjunto y comparación de conjunto. Se hizo una fase de demostración, el problema consistió en que unas ranas tenían que transportarse de un lugar a otro por medio de botes, un bote le correspondía sólo a una rana y tenían que ver cuántos botes necesitaban, se les preguntó: ¿Lleva la cantidad correcta de botes?, ¿Cuántos botes deberían ser? (Muldoon, Lewis y Freeman, 2003).

En el primer experimento, se encontró que los niños que tuvieron éxito en el test de creación de conjunto, también obtuvieron los mismos resultados en el test de comparación y viceversa. Si un niño ha logrado un aspecto de cardinalidad, el cual se refiere a que conjuntos equivalentes forman el mismo cardinal, es probable que comprenda el otro aspecto en el que cardinales diferentes denotan que un conjunto es numéricamente más grande que el otro. Comprendieron que los ítems pueden contarse mal y surgir problemas asociados con conteo erróneo y que se pueden resolver a través de un conteo exacto para un cardinal real; los niños que comprendieron esto formaron un puente conceptual entre el acto de contar y cardinalidad (Muldoon, Lewis y Freeman, 2003).

El segundo experimento, se realizó con 30 niños, de 47 a 57 meses; se analizó si las habilidades procedimentales o detección de error, predicen mejor el uso de conteo como una herramienta aritmética. Una restricción vital del principio de cardinalidad es que la última palabra dicha representa el valor cardinal únicamente si el conteo es correcto en procedimiento. La hipótesis fue que la detección de violaciones para el principio de cardinalidad deberían ser más predictivos de éxito que la detección de violaciones procedimentales. A cada niño se le dio una batería de 7 pruebas: 1. Test de conteo procedimental. El mismo al experimento 1. 2. Test de conteo en orden aleatorio. Se les dieron 6 bloques rojas y 7 bloques amarillos arreglados en línea. Se les preguntó ¿Cuántos bloques hay? Después de manera aleatoria, para establecer si el conteo fue en un sentido numérico y no tratar el acto de contar como una actividad regular, rítmica y repetitiva. 3, 4 y 5. Test de violaciones a los principios de conteo. Una fila de bloques rojos y amarillos; se les indicó a los niños observar el conteo de un muñeco, se le dijo que el muñeco estaba aprendiendo a contar y algunas veces se equivocaba; se violó el principio de correspondencia uno a uno, el de orden estable, en ambas el cardinal siempre era exacto, al violar el principio de cardinalidad, se decía un numero más o uno menos. 6. Test de cardinal erróneo. Se les preguntó, ¿Cuántos bloques piensa el muñeco que hay?, ¿Cuántos hay realmente? 7. Test de creación de conjunto. El mismo al experimento 1, excepto, que se les preguntó a la mitad de los niños ¿Cuántas ranas hay en este lugar? Antes de pedirles que indicaran el número de botes que se necesitaba y a la otra mitad no (Muldoon, Lewis y Freeman, 2003).

Se encontró en el segundo experimento, que la habilidad para contar no garantiza que un niño intente usar el conteo para crear conjuntos equivalentes.

Los estudiantes quienes acertaron en detectar las 3 violaciones, usaron correctamente la estrategia de conteo en la creación de conjunto. La comparación entre cardinales, puede animar a un niño a considerar el hecho de que cardinalidad reposa sobre procedimiento exacto, llevándolo a la conclusión de que los cardinales son muy importantes para cuestiones de cantidad. La distinción de contadores y no contadores en esta situación es su comprensión conceptual de los principios de conteo, en particular, su logro de las restricciones impuestas sobre el principio de cardinalidad. Fue más probable que los niños utilizaran el conteo estratégicamente cuando eran capaces de comprender que el conteo exacto impacta en la determinación sobre cardinalidad. Los niños al ver el conteo como una estrategia aritmética aceptaron que las palabras de número son símbolos que representan valores particulares de cantidad y no parte simple de una rutina que es iniciada en respuesta a cuestiones particulares. El potencial del niño no puede ser realizado sin la oportunidad de interactuar con, influir, y ser influenciado por ambientes sostenidos (Muldoon, Lewis y Freeman, 2003).

6.3 Representación numérica

El sistema de número simbólico es una invención cultural que ha sido desarrollado y refinado en la historia humana. El conocimiento inicial de los niños pequeños de escribir números no puede ser separado de objetos concretos. El uso de símbolos de número escritos provee un modelo cognitivo compartido entre niño y adulto, que suministra un fundamento para la comunicación de los números. Cuando los niños pueden compartir el modelo cognitivo común de los números, pueden usar herramientas diferentes para calcular y medir, tales como calculadora, un reloj, una regla, una taza para medir, juegos en computadora y otras actividades en las que los números escritos son incluidos. Cuando empiezan a usar estos símbolos, llega a ser parte de su pensamiento para un aprendizaje matemático (Zhou y Wang, 2004).

Los niños en edad preescolar se interesan en las diferentes formas de las notaciones numéricas y les atribuyen una función global relacionada directamente con el contexto. Saben, por ejemplo, que el número de los edificios sirve para saber qué persona vive en él, el número de los autobuses sirve para saber a dónde van, etc. Este conocimiento se basa en una función de identificar; sin ser cuantitativa. Sólo de forma progresiva, las notaciones numéricas, pueden ser consideradas representaciones que transmiten una información cuantitativa. A pesar del conocimiento que los niños tienen de las notaciones numéricas y de las informaciones que poseen de sus usos sociales, no siempre resulta fácil escoger los mismos signos (notaciones numéricas) para funciones diferentes; ya que no han alcanzado el grado de arbitrariedad que hace posible aplicarlas a cualquier tipo de información numérica siendo que los niños utilizan notaciones numéricas para diferentes propósitos (Martí, 2005).

La relación entre números y una notación abstracta de cantidad es parte del principio cardinal. Los niños que pueden contar no necesariamente comprenden el significado de estas formas y quienes parecen reconocer estas representaciones escritas no pueden comprender qué les indica. Existe una discrepancia entre la habilidad de los niños para producir notaciones numéricas y su comprensión de qué representan estas notaciones (Bialystok y Codd, 2000).

Antes de que aprendan los niños a escribir los números formalmente, tienen sus propias maneras únicas y creativas de representar cantidades; explican el significado de estos símbolos escritos con sus propios conocimientos y experiencias. Estos símbolos inventados proveen un fundamento importante para el aprendizaje de números escritos de los niños. Los niños de 3 a 7 años usan 4 clases de métodos para representar cantidades: idiosincrático, pictórico, icónico y simbólico, su diferencia relata su comprensión de número. Aunque algunos pueden leer y escribir números bien, no comprenden la relación entre la posición y el valor de los números (Zhou y Wang, 2004).

Los niños empiezan por usar representaciones globales sin hacer corresponder la cantidad y avanzan luego a las representaciones análogas que preservan información numérica. El tipo de representación más avanzada son los numerales escritos. Hughes (1986), menciona 4 categorías del proceso evolutivo de cómo los niños llegan a las cantidades: idiosincrásico (garabatos), pictórico (representando la apariencia de los objetos así como su numerosidad) icónico (correspondencia uno a uno) y simbólico (números convencionales), las representaciones icónicas, que son a menudo líneas, quizás son una representación pictográfica directa de los dedos del niño; señala que es este enlace con los dedos que pueden explicar la frecuencia de las respuestas icónicas (Bialystok y Codd, 2000).

En un estudio realizado en China se verificaron las características del desarrollo de representación y comprensión de números escritos en 61 preescolares de 4 años de edad; la relación entre representación de números escritos y su concepto cardinal y las diferencias de desarrollo en representación de números escritos entre niños de diferentes clases sociales. Se realizaron 3 tareas: a) objeto-símbolo, consistió en escribir la cantidad después de que un juego de botones fue mostrado; b) símbolo-objeto, consistió en tomar la cantidad correspondiente de botones después de ver un número escrito en una tarjeta; c) lectura de número y etiquetar las cajas con botones, los niños tuvieron que leer cada número escrito en una ficha y observar cual ficha correspondía a cada caja dependiendo de la cantidad de botones que tuvieran y colocarla. Después se introdujo un botón en una de las cajas y los niños tuvieron que ver en cual de todas las cajas se había añadido un botón. Se encontró que las respuestas de los niños en la primer parte de la tarea de representación de número simbólico se categorizaron en 4 niveles: respuestas idiosincráticas, pictóricas, icónicas y simbólicas. Sólo una tercera parte de los niños de 4 años fueron capaces de usar números convencionales para representar la cantidad, la mayoría de los niños de 5 años pudieron representar números escritos, relacionándolo con su concepto cardinal. Algunos niños contaron los botones correctamente pero no supieron cómo escribir la cantidad. Otros niños recurrieron a la función de los números escritos como memoria de la cantidad, al utilizar la tarjeta que contenía la cantidad de botones de la caja, para saber en cuál se había agregado un botón (Zhou y Wang, 2004).

Al mismo tiempo que los niños están aprendiendo a contar y practicar el procedimiento, también comienzan a familiarizarse con el sistema de notación para recordar la cantidad. Los niños aprenden a reconocer y producir números en los años del preescolar, este desarrollo es facilitado por la abundancia de los números en su entorno (Bialystok y Codd, 1996).

En Canadá se realizó otra investigación donde se vio el desarrollo de las representaciones y su interpretación con 73 niños de 3 a 5 años; se realizaron dos tareas; la primera, de producción de símbolo: que consistió en presentarles 3 cajas, cada una contenía una cantidad (menor a 10) de objetos. Se les preguntó si podían contar el número de ítems en la primera caja; el experimentador y el niño lo hicieron juntos para asegurar que el número contado era correcto y se les dio una tarjeta para escribir la cantidad del contenido de la caja, después de que había escrito algo, se cerró la tapa y la tarjeta se colocó encima. Después de 20 minutos, se les mostró la ficha acompañada de la caja cerrada y se les pidió que dijeran cuántos ítems había. El tipo de marca que los niños hicieron sobre la ficha fueron clasificados como simbólico, icónico o pictórico, e idiosincrático. En la segunda tarea de selección de símbolo, el procedimiento fue el mismo, excepto que se les mostro tres tarjetas, cada una contenía una representación diferente (icónica, pictórica, idiosincrática y simbólica) y se les pidió que seleccionaran una tarjeta para ayudarse a recordar cuántas cosas estaban en la caja. Se observó que las respuestas de símbolo aumentaron con la edad mientras las globales disminuyeron. Los niños dijeron el número de ítems correctamente cuando eran notas simbólicas, tuvieron más dificultad interpretando representaciones análogas, y ninguna interpretación para las notaciones idiosincráticas y pictóricas. La mayoría de los niños de 3 años escogieron las tarjetas que tenían números; la mayor parte de los niños de 5 años habían comprendido que los números eran la mejor opción para demostrar la cantidad, pero los de 3 años no comprendían este principio básico (Bialystok y Codd, 1996).

Bialystok y Codd (2000) realizaron otra investigación en Canadá donde examinaron el desarrollo de representaciones de los niños con respecto a la cantidad y las concepciones del significado de estas representaciones con 75 niños de 3 a 7 años, pero ahora incluyeron 3 clases de cantidades: número total, ceros y fracciones. Sus notaciones les fueron mostradas después de que fueron producidas y después de dos semanas para ver si podían interpretarlos. Al fin del estudio se incrementó el uso de notaciones convencionales para las 3 clases de cantidades. La habilidad para leer las notaciones fue mayor para números convencionales, bajo para representaciones análogas y ninguna interpretación para las idiosincráticas. Los niños fueron capaces de resolver problemas que implicaban el cero, casi tan bien, como los que involucraban números completos, pero su comprensión y uso de representaciones para fracciones fue muy limitado, la cantidad de "mitad" fue mejor que "un cuarto". Para las representaciones, los niños de 5 a 7 años emplearon más representaciones simbólicas, los de 3 a 4 años usaron análogas, y los de 3 años utilizaron globales. Cuando se les preguntó acerca de sus representaciones de cero, en el caso de dejar espacios en blanco, los niños decían que no había nada, siendo una estrategia que emplearon para transmitir ausencia de cantidad. La habilidad de los niños para comprender, representar y renombrar cantidades, indica que comprenden la significancia de las cantidades antes que puedan usar formas notacionales para representarlos. Los niños consideran que el cero por ser una posición en una dimensión de cantidad es menor que 1 (Bialystok y Codd, 2000).

El concepto de cero, tiene un desarrollo histórico-social; en culturas anteriores no fue espontáneamente obvio que el cero, fuera una cantidad que pudiera ser representada teniendo dos usos para su notación: el primero es una marca de espacio reservado en lugar de sistemas numéricos de valor; el segundo es un número; la notación de ausencia es abstracta y difícil aplicarlo a la cantidad (Bialystok y Codd, 2000). En investigaciones retomados por Martí (2005), como la de García-Milá, Teberosky y Mari (2000) también se ha encontrado que los niños utilizan la representación del cero; cuando se les mostraron 3 cajas en la que una de ellas estaba vacía y se les pidió anotar la cantidad que contenía la caja, al representar la cantidad de la caja vacía, los niños no anotaban nada en el papel, no colocaban papel, escribían que la caja estaba vacía o algunos escribían el cero.

En una investigación realizada por Brizuela (2005) se analizó las notaciones de fracciones en 24 niños de 5 y 6 años de edad en Estados Unidos, a los cuales se les entrevistó, acerca de lo que saben y piensan en cuanto a los números. Las preguntas que se les hicieron a los niños fueron: ¿Qué es un medio?, ¿Qué significa un medio?, ¿Podría mostrarme un medio de este pedazo de papel?, ¿Cómo lo sabes?, ¿Alguna vez has oído hablar de mitades?; se encontró que la mayoría de los niños que hicieron notaciones de fracciones incluían una línea en su notación en una forma no convencional, utilizando sólo una línea. Algunos niños utilizaron un dos por debajo de la línea como una notación de la mitad. Cuando se le preguntó a una niña cómo hacer una notación de seis y medio y siete y medio, escribió 6 + y 7 +, respectivamente. Algunos niños creyeron que un medio es más pequeño que uno; ya que mencionaron que "la mitad son los números más pequeños, de modo que cualquier otro número es más grande." Los niños al desarrollar ideas sobre los números fraccionarios, demuestran que están pensando y reflexionando sobre el aspecto del número y el área de las matemáticas. Las producciones de notaciones espontáneas ayudan a desarrollar imágenes de sus ideas acerca de las fracciones.

6.4 Solución de problemas

Los planes de estudio intentan proporcionar instrumentos que permitan describir y analizar numerosas situaciones. Estas ocurren en el mundo real tomando en cuenta el aspecto matemático, el cual juega un papel importante en la educación. Este aspecto permite que los alumnos empiecen a crear y a desarrollar habilidades sobre cuándo y cómo aplicar sus conocimientos matemáticos. Para que cuando estos alumnos se presenten ante una situación real problemática de la vida cotidiana puedan utilizar su razonamiento matemático y resolverla (Orrantia, González y Vicente, 2005).

Los alumnos, para que puedan desarrollar este razonamiento matemático al apropiarse de habilidades analíticas, de reflexión y logren darle solución a las dificultades que se les presenten en su ambiente; es indispensable que en las aulas se les permita enfrentarse a contextos reales. Sin embargo, algunos problemas que interfieren con el aprendizaje contextualizado se presentan en los libros de texto. Los ejercicios que se exponen en estos libros no muestran dificultades situacionales, puesto que obligan a los alumnos a saltarse el paso de la comprensión y por lo tanto, a que realicen cálculos directos con los números que aparecen en el enunciado. Los estudiantes, entonces, utilizan estrategias superficiales como encontrar palabras clave, las cuales son asociadas con una operación determinada o con una operación enseñada recientemente en clase (Orrantia, González y Vicente, 2005).

En una investigación hecha en España por Orrantia, González y Vicente, (2005) encontraron que en los libros de texto de matemáticas de tres editoriales: Ediciones SM (2001), Grupo Anaya (2003) y Grupo Santillana de Ediciones (1999), los problemas más numerosos corresponden a los problemas más sencillos de resolver. La resolución de estos se puede llevar a cabo entendiendo premisa por premisa secuencialmente, tal como se presenta el problema en el texto. Por lo que, crear una representación o esquematización de la situación problemática no es necesaria; puesto que el problema se puede efectuar aplicando estrategias superficiales. Otra situación encontrada en los libros de texto es que los problemas aparecen en contextos en los que es fácil anticipar el tipo de operación que se aplicará incluso antes de leer el mismo problema. En los encabezados de los libros de texto, esta explícita la operación que se va a realizar (problemas de suma, problemas de resta, etc.). Por lo tanto, los autores de esta investigación concluyen que los libros de texto están más orientados a ejercitar operaciones aprendidas que a promover estrategias de solución; también las situaciones reales que pueden resolverse a través de las matemáticas son escasas; los problemas con datos omitidos o extra son pocos y cuando aparecen estos lo hacen en contextos en los que es fácil anticipar qué datos sobran o faltan porque el texto lo especifica. Los autores terminan mencionando: que los problemas deben tener un objetivo a desarrollar en los contenidos de aritmética, en la medida en que se incluyan motivos, acciones e intenciones (por ejemplo, en un problema de cálculo, el infante se ve enfrentado a repartir caramelos a sus compañeros, pero se percata de que no alcanza para todos, por lo que, tiene que recurrir al uso de la división y a las fracciones). Así los estudiantes podrán involucrarse analítica, reflexiva y situacionalmente en la solución de los problemas antes de buscar únicamente los datos necesarios para responder la pregunta.

Para que estas fallas que se encuentran dentro de los libros de texto, en las que no está implicado el razonamiento matemático, no afecten primordialmente en el aprendizaje de los alumnos es necesario prepararlos con un conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes. Este conjunto es conocido como competencia, en este caso matemática. Las competencias son necesarias para que cuando el alumno se presente ante un problema del mundo real logre enfrentarse a él. Por lo tanto, es necesario preparar a los alumnos en el desarrollo de competencias aritméticas, creando en ellos el desarrollo de conocimientos y su aplicación, en este caso de la suma y la resta u otras operaciones básicas para que resuelvan varios problemas en diversos contextos.

Existen investigaciones que fueron dedicadas a estudiar cómo los niños del preescolar resuelven problemas aritméticos que involucran la suma y la resta. Estas operaciones son necesarias en el desarrollo de las competencias aritméticas (Klein y Bisanz, 2000). La suma y la resta son centrales en la enseñanza de las matemáticas y son visualizadas de esta manera por los niños, quienes utilizan estas operaciones al efectuar problemas simples cuando los contextos son reales y significativos (Davenport y Howe, 1999).

Vicente, Orrantia y Verschaffel, (2008) retoman las ideas de Heller y Greeno (1978) y las complementan agrupando los problemas aritméticos que contemplan las operaciones de suma y resta en tres categorías: la primera problemas de cambio, se refiere a iniciar de una cantidad inicial sobre la que se opera un cambio (añadir o quitar) que da lugar a una cantidad final; la segunda problemas de combinación, se parte de dos cantidades o partes que se combinan entre sí para dar lugar a una cantidad total y la última, problemas de comparación, se compara una cantidad con otra surgiendo un tercer conjunto: el de diferencia. Además otros autores añaden un cuarto tipo, el de igualación.

Los problemas también pueden tener otra clasificación: consistentes e inconsistentes. Los primeros se refieren a la estructura superficial del problema que coincide con la operación a realizar; por ejemplo: cuando aparece el término “ganar” y hay que sumar. Los problemas inconsistentes son aquellos en los que la estructura superficial del problema no coincide con la operación a realizar, por ejemplo: aparece el término “ganar” pero hay que restar. De esta manera, los problemas consistentes son más fáciles de resolver que los inconsistentes; ya que pueden resolverse siguiendo pistas textuales sin necesidad de comprender en profundidad el enunciado del problema. Otro tipo de ayuda para solucionar problemas son las imágenes. El representar esquemáticamente la estructura matemática de los problemas permite a los estudiantes desglosar y organizar la información obtenida para resolverlos mejor (Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008).

Sophian y McCorgray, (1994) establecen que los esquemas son necesarios en la solución de problemas. Los niños al resolver problemas aritméticos necesitan percibir que existen conjuntos individuales en cada problema y que al combinarse estas partes forman un todo. Entonces los niños estarán construyendo un esquema parte-todo.

En una investigación realizada por Sophian y McCorgray, (1994) en Hawaii, demostraron el esquema parte-todo al presentar diversos problemas a 20 niños de tres a seis años. Los problemas eran de dos tipos: en el primero se desconocía la cantidad inicial. Esta cantidad era incrementada o disminuida por otra cantidad especificada. El resultado de esta operación era una cantidad final establecida. Este tipo de problemas requería de un esquema parte-todo. El segundo tipo de problemas consistían en que la cantidad final era la que se desconocía ahora; la cantidad inicial es dada e incrementada o disminuida por una cantidad establecida. Para obtener el resultado de estos problemas los niños tenían que realizar únicamente la operación pedida. En este tipo de problemas los niños no requerían el uso del esquema parte-todo. Para obtener estos resultados. Este procedimiento se realizó al aplicar 24 problemas a los niños con la ayuda de juguetes de animales.

Se encontró que los niños eran capaces de percibir la estructura parte-todo de los problemas aritméticos. Asimismo, los pequeños se percataron que para los problemas de suma la respuesta era un número grande y para los problemas de resta la respuesta era un número menor. Los niños lograron comprender la utilidad del esquema parte-todo al representar las partes del problema como subconjuntos complementarios vislumbrando el todo. Esta visualización permitió a los niños decidir la operación aritmética apropiada para solucionar cualquier cantidad faltante (Sophian y McCorgray, 1994).

Locuniak, (2007) en su investigación evaluó el número en el apartado de recuento. En este trabajo participaron 198 niños de segundo grado de preescolar; pertenecientes a seis escuelas del norte de Delaware. Existían varias tareas que los niños necesitaban realizar. La primera consistió en mostrar una serie de cinco estrellas en un trozo de papel; después se les pidió a los pequeños que contaran la cantidad de estrellas junto con el investigador. En la segunda tarea se le pidió a los niños que mencionaran el nombre de los siguientes números: 2, 8, 9 y 13 para saber si los conocían. La tercera tarea, el número de combinaciones, se midió la capacidad de los niños a enumerar los conjuntos y dar la cantidad de cada uno de estos. La última tarea, el cálculo en secuencia, se les pidió a los niños que contaran hasta el número más grande que conocían y que se detuvieran cuando llegaran al número 50. Después se les pidió que resolvieran problemas de suma; un ejemplo de ellos era: Si un niño tiene “x” centavos y otro niño le da “x” centavos de más. ¿Cuántos centavos tiene ahora el primer niño? Al finalizar la investigación se encontró que los niños podían resolver problemas que implicaran el cálculo teniendo una mejor comprensión de la suma y la resta.

Pasnak, Savage, Ferguson y Levit, (2006) realizaron una investigación con 34 niños, elegidos aleatoriamente, alrededor de los 4 años de edad, con nacionalidad estadounidense, latinos y africanos. En la cual encontraron que los niños tenían progresos en el área de las matemáticas cuando desarrollaron habilidades de clasificación de objetos, al encontrar las diferencias y similitudes de estos; también realizaron construcciones de series cortas y la comprensión y adquisición del lenguaje matemático. Para demostrar estas afirmaciones dichos autores aplicaron diversas actividades a los niños. Una de estas consistía en jugar con números impares. Cuando esta actividad fue dominada pasaron a la tarea de seriación; en la cual a los niños, mediante títeres, se les enseñaba cómo hacer las seriaciones y se les pedía tomar algún objeto que estuviera en algún orden. La siguiente actividad era la de clasificación; la cual consistía en presentar un grupo de objetos de una misma categoría. En este conjunto se colocaba un objeto no perteneciente al grupo; posteriormente un títere escogía el objeto que no era igual a esa categoría. Una vez que el títere mostraba la tarea a realizar los niños lo tenían que imitar. Esta dinámica se efectuaba cada vez que se cambiaba el conjunto y el objeto diferente a este.

En la siguiente investigación se observa de qué manera los niños utilizan diferentes procedimientos para dar solución a los problemas que se les presentan. Este trabajo fue realizado por Baroody y Tiilikainen (2006), en la cual intervinieron a 20 preescolares con edades de cinco a siete años para determinar el uso de su propio procedimiento y su habilidad para evaluar procedimientos correctos e incorrectos. 14 niños provenían de Europa, 3 asiáticos, 2 Afroamericanos y uno de India.

El procedimiento de la investigación consistía en aplicar diversas actividades. La primera llamada habilidades de conteo y número, en la cual se realizaron 5 juegos para comprender, valorar o aprender procedimientos de adición; utilizando el conteo mediante sumas hasta llegar al número 15. Uno de los juegos de esta primera tarea consistía en valorar el conteo verbal y la comprensión de la cardinalidad al enumerar colecciones de objetos. El siguiente juego fue contar estrellas, en este, el examinador cubría la tarjeta y preguntaba a los niños: "¿Cuántas estrellas estoy escondiendo?". Las preguntas se utilizaron para valorar la lectura del número. En otro juego se les mostraba un número del 1 a 9. Estos números eran mostrados en orden aleatorio. El investigador escogía un número y les preguntaba a los pequeños

¿qué número era?, después se le volvía a preguntar qué número seguía si se contaba a partir del número que acababa de mencionar el niño. En el penúltimo juego se les pedía a los pequeños que contaran el número de puntos sobre una tarjeta y tomaran las clavijas correspondientes a la cantidad de puntos que ésta tuviera. En el último juego los pequeños sólo tenían que responder cuál de dos números del 1 a 10 era más grande. La segunda actividad fue de suma y resta no verbal, en ésta se usó un juego de ocultación para valorar la habilidad matemática informal del niño; se pretendía que los pequeños representaran mentalmente la suma y resta de colecciones pequeña. El investigador colocaba de 1 a 4 objetos en orden lineal, después cubría la colección por 3 segundos y agregaba 1 o 2 cosas más. La tercera actividad consistía en aplicar problemas de suma verbales. Esta siguiente actividad involucró 3 historias de un muñeco. En el primer juego de evaluación de procedimiento, el niño tenía que analizar si el muñeco realizaba de manera correcta los cálculos, pero no podía decir la respuesta. En el segundo juego se realizaba una competencia de carros. A los niños se les preguntaba la suma de 10 expresiones. Éstas expresiones eran de tres tipos: números pequeños, medianos y “largos + pequeños”. En este juego a los pequeños se les dejaba el material para observar qué procedimientos desarrollaban para resolver cada expresión; además, en cada caso 5 procedimientos fueron modelados; por ejemplo: en el primer ejercicio de conteo-total, el muñeco contaba el primer sumando, luego el segundo y para obtener el resultado contaba todo; es decir, para 8+7, el muñeco contaba: 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; más 1, 2, 3, 4,5, 6, 7 y después contaba todo. En el segundo ejercicio sobre-conteo, primero el muñeco contaba la cantidad más pequeña y después empezaba a contar el número más grande consecuente; por ejemplo para 6+5, contaba: 1, 2, 3, 4, 5, más 6, 7, 8, 9, 10, 11 (Baroody y Tiilikainen, 2006).

Algunos errores que se presentaron en la investigación fueron: el primero llamado error no sutil, esto ocurría cuando se contaba un sumando dos veces; es decir, con 7+6, se contaba la primera cantidad dos veces, 7+7. El segundo error conocido como sobre-conteo del sumando más grande abstracto; por ejemplo, para 6+8, primero se comienza a contar del número más grande y después al volver a contar cuenta con un aumento; por ejemplo termina de contar hasta el número 6 y después empieza a contar empezando por el 8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. En el tercer error sutil, se hace una superposición del conteo de suma, para 7 + 9. Primero cuenta la primera cantidad: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y luego cuenta el segundo número (9), 8, 9. Contando éstos números como elementos individuales (7) y (2) obteniendo 9 como resultado (Baroody y Tiilikainen, 2006).

Baroody y Tiilikainen (2006), por lo tanto, encontraron en su investigación que la mayoría de los niños fueron capaces de resolver las tareas encomendadas en cuanto al desarrollo de la evaluación y el procedimiento utilizado. Los autores concluyen que la habilidad de conocer el número siguiente es necesaria para el sobre-conteo; la facilidad de comparación-número es indispensable para las estrategias que ignoran el orden del sumando. Aunque algunos pequeños no son altamente capaces al usar procedimientos abstractos, si lo están para aprender conteo-total. Algunos niños usaron procedimientos avanzados en 90% de las pruebas y fueron clasificados usuarios de sobre-conteo abstracto. En cuanto a la tarea de evaluación de procedimiento, los pequeños que comprendieron la tarea de sobre-conteo, consideraron poco atractivas otras estrategias que los niños que no habían entendido. Al final a todos los participantes, incluso a los que se les mostró conteo-total fueron exitosos en la mitad de las pruebas de adición no verbal y resta, sugiriendo que los niños pueden representar mentalmente la adición antes que inventen incluso la estrategia de conteo-total básico.

Entonces los resultados muestran que los preescolares pueden comprender una tarea de adición no verbal y llevar a cabo una simple adición mental, antes de que inventen el procedimiento de conteo-total para resolver problemas de palabra o expresiones simbólicas. Ésta capacidad indica que un concepto básico se desarrolla de manera temprana y que existe un salto cualitativo o conceptual para cambiar de conteo-total a cada una de las estrategias para llegar al sobre-conteo abstracto. Por ello, los conocimientos conceptuales involucran comprensión de objetivos y relaciones que proveen bases más efectivas para el aprendizaje que simplemente el conocimiento procedimental (Baroody y Tiilikainen, 2006).

En esta otra investigación realizada por Klein y Bisanz (2000) se presenta otro ejemplo de las dificultades que los pequeños pueden presentar ante la solución de problemas. Se encontró que los niños tienen pocos errores al resolver problemas de suma y resta, cuando los números eran menores a 6; sin embargo, muestran dificultades con números más grandes. Cuando a los niños se les presentaban problemas de suma y resta se observaba que intentaban solucionarlos mediante atajos.

Estos resultados fueron encontrados en Canadá con 18 niños de cuatro años de edad. El trabajo por estos dos autores consistía en dos sesiones. En la primera sesión los niños fueron grabados al realizar actividades de número, en las cuales se les dieron dos problemas de conteo e igualación. En la tarea de conteo a los niños se les ponía a contar determinados objetos, ellos tenían que realizar la actividad de manera exacta. Al principio eran seis objetos y dependiendo del avance de los niños la cantidad de estos aumentaba. El número máximo al que podían llegar los pequeños era 10 objetos. En la tarea de igualación primero los niños tenían que formar pares con los números 2, 4 y 6. Después se les presentaban dos problemas de suma y resta; los cuales consistían en colocar objetos en una caja de cartón; los niños conocían la cantidad de estos, luego se quitaba cierta cantidad de objetos de la caja y al final los niños debían de igualar la cantidad del principio. En la segunda sesión los pequeños resolvieron problemas de aritmética. Se les presentaban problemas en los cuales el resultado final fuera la mitad del primer resultado, por ejemplo: 1+3-2=2. Los siguientes problemas consistían en sumar dos términos y restando un tercer término que fuera el mismo al segundo término por ejemplo: 1+3-3=1. Cada suma y resta se hacía quitando o agregando objetos a una caja, en estos problemas se evaluaba el conteo, la solución y la espontaneidad verbal (Klein y Bisanz, 2000).

Los pequeños al presentarse ante un problema realizan diversas estrategias para darle solución a estos; como se mostró en esta investigación. En la cual se observó sí la información de tipo situacional (temporal) puede ser útil para que los alumnos sean capaces de resolver problemas con más facilidad y también para saber sí la incorporación de imágenes (que resalten tanto la estructura matemática como la información situacional) contribuyen a una mejor comprensión y resolución de problemas a través de la elaboración de un modelo matemático y/o situacional más completo (Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008).

Se trabajó con 152 alumnos de Salamanca; de tercero, cuarto y quinto de primaria. Se evalúo la ejecución de operaciones y resoluciones de problemas. Se utilizaron dibujos, estos tenían dos funciones decorativa y en otros organizaban la información del problema en un esquema parte-todo. Los dibujos matemáticos contribuyeron a que los alumnos resolvieran con más efectividad los problemas difíciles, pero no los fáciles. De manera general, los niños pudieron resolver cualquier tipo de problemas aritméticos, apoyándose tanto de las ayudas textuales como de las imágenes (Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008).

Otra estrategia que los alumnos utilizan es la habilidad de subitización verbal; es decir, que los niños reconozcan cantidades pequeñas sin contar, la cual sirve de fundamento para la enumeración significativa. Ésta enumeración es necesaria para inventar o aprender procedimientos de suma basado en el conteo básico; además les permite a los niños formular un concepto cardinal cada vez más seguro y exacto; también pueden percibir el número 2 como 1 y 1; el 3 como 2 y 1 o como 1, 1 y 1. Se percatan de los números como un conjunto compuesto de unidades. Esto debido a experimentar con colecciones donde se utiliza la subitización; así los preescolares pueden construir un significado de suma informal como “incremento” o “cambio en el resultado cuando se añade algo” (Baroody y Tiilikainen, 2006).

Otra estrategia que los niños necesitan comprender para la solución de problemas es la del principio inverso de suma-resta. En la siguiente investigación realizada por Baroody y Lai, (2007) se observa este principio donde el objetivo fue evaluar a niños preescolares de Taiwán de 4 a 6 años, con tareas que midieran el principio inverso, para revelar cuándo empieza a aparecer una comprensión informal, general y seguro del principio.

Los niños participaron en tareas que consistían en mostrarles a los infantes una cierta cantidad de objetos. Después (sin que el niño se diera cuenta) se modificaba la cantidad de objetos que se tenía ya fuera agregando o quitando objetos. Algunos niños se percataban de la disminución de estos de los que había en un principio; después el experimentador les preguntaba cómo podrían llegar a la cantidad inicial. Algunas respuestas que daban los niños era que se tenía que regresar la misma cantidad de objetos que fue quitada; entonces los niños tenían que tomar de un conjunto de objetos la cantidad correcta. Con esto los niños lograron utilizar el principio inverso como una forma de solución de problemas que implicarán la transformación de cantidades (Baroody y Lai, 2007).

Es necesario intervenir en el aprendizaje de los pequeños presentando situaciones reales contextualizadas para lograr desarrollar en ellos habilidades de reflexión y análisis en cuanto a la solución de problemas al promover el razonamiento matemático. Para que cuando un niño se encuentre ante un problema en su ambiente logre tener las herramientas necesarias para resolverlo.

Desde muy pequeños los niños se apropian de nociones numéricas básicas; reconocen que cada número se refiere a una cantidad especial y de esta manera, adquieren el significado de los números. Esto les permite percatarse de que los números proveen medios para describir la cantidad y sus transformaciones. Dada la comprensión de conteo, los niños pueden notificar que la colocación repetida de un ítem dentro de una colección incrementa su valor, notando el valor cardinal de un número. El conteo de los niños de preescolar es en un modo sistemático, asegurándose de que sepan qué cosa contaron primero y que tocan cada cosa solamente una vez cuando cuentan. Un mayor cambio toma lugar cuando comienzan a resolver problemas sin tener objetos reales disponibles para contar, actuando como si usarán una "línea de conteo mental". Con este cambio demuestran su conocimiento de que contar números se refiere a las cantidades del mundo real y pueden ser usados, en la ausencia de objetos contables. Los niños conocen que los números indican cantidad y por lo tanto, tienen magnitud, y ocupan posiciones en la secuencia de conteo. Comprenden que los ítems pueden contarse mal y surgir problemas asociados con conteo erróneo y que se pueden resolver a través de un conteo exacto para un cardinal real, formando un puente conceptual entre el acto de contar y cardinalidad.

Los niños de preescolar aprenden a reconocer y escribir números, el cual no puede ser separado de objetos concretos. Se interesan en las diferentes formas de las notaciones numéricas y les atribuyen una función global relacionada directamente con el contexto. Antes de que aprendan a escribir los números formalmente, tienen sus propias maneras únicas y creativas de representar cantidades. Explican el significado de estos símbolos escritos con sus propios conocimientos y experiencias. Utilizan 4 clases para representar cantidades: idiosincrático, pictórico, icónico y simbólico, su diferencia relata su comprensión de número; empiezan por usar representaciones globales sin hacer corresponder la cantidad y avanzan luego a las representaciones análogas que preservan información numérica. Asimismo, reconocen que los números escritos se pueden utilizar para recordar una cantidad y que las representaciones simbólicas son más fáciles de leer. Con respecto a la representación del cero, los niños comienzan haciendo lo que culturas anteriores hacían, dejan un espacio vacío, no ponen papel, escriben que no hay nada o algunos escriben el cero; consideran que el cero por ser una posición en una dimensión de cantidad es menor que 1. Para las notaciones de fracciones, los niños incluyen una línea en su notación en una forma no convencional, algunos utilizan un dos por debajo de la línea como una notación de la mitad y tienen la noción de que un medio es más pequeño que uno.

En cuanto a la resolución de problemas, los niños emplean objetos reales para representar las cantidades descritas en un problema, realizan acciones para imitar la operación aritmética indicada y cuentan para determinar la respuesta. Los estudiantes de preescolar son capaces de percibir la estructura parte-todo de los problemas aritméticos, el cual les permite decidir la operación aritmética apropiada para solucionar cualquier cantidad faltante, notando que para los problemas de suma la respuesta es un número grande y para los problemas de resta la respuesta es un número menor. Los preescolares construyen un significado de suma informal como “incremento” o “cambio como resultado de añadir algo” y asignan un significado al símbolo “más” (+) relacionándolo con este concepto. Asimismo, los niños se percatan cuando se retiran objetos de una cantidad y saben que para volver a tener la misma cantidad se tiene que regresar la cantidad de objetos que fue quitada, logrando utilizar el principio inverso como una forma de solución de problemas que implican transformación de cantidades.

Para que los alumnos de edad preescolar desarrollen nociones de conteo, representen numéricamente cantidades, utilicen el razonamiento y resuelvan problemas, es necesario que participen en ambientes reales y significativos. En estos ambientes, se requiere que un adulto o un alumno más competente guie a los alumnos en la comprensión de la actividad y en la solución de la misma.

MÉTODO

El razonamiento matemático se promueve a través del desarrollo de competencias numéricas, las cuales se generan dentro de actividades auténticas. En éstas el niño puede experimentar el uso del sistema numérico a través de un sistema de ayudas que el docente, u otro niño, proporciona en el transcurso de la actividad para auxiliarle a interpretar, ampliar y utilizar el conocimiento. Sin embargo, en México se ha observado que la forma de enseñanza no está vinculada a la vida social en la que los niños se desenvuelven. Por esta razón se les dificulta utilizar los conocimientos que aprenden en su medio escolar en situaciones relacionadas con su entorno.

El propósito del estudio que se presenta se realizó para contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de Educación Preescolar. Tal contribución se basa en el diseño e implementación de situaciones contextualizadas en las cuales los aprendices se les permite pensar, analizar, razonar, reflexionar, socializar y desarrollar un conjunto de capacidades que incluyen conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas con las cuales puedan resolver problemas matemáticos en diversos contextos.

Con el fin de que los alumnos de educación preescolar logren resolver problemas reales se planteó, en este estudio, el siguiente objetivo: promover el razonamiento numérico en infantes que asisten a la educación preescolar a través del desarrollo y uso de las competencias numéricas al participar en actividades contextualizadas.

En esta investigación se crearon ambientes de aprendizaje auténticos para promover el razonamiento numérico en alumnos de preescolar al involucrarlos en actividades contextualizadas que permitían la interacción y el uso de artefactos.

Participantes

El estudio que se presenta en esta investigación es de tipo comparativo, en este se encuentran dos condiciones: intervención y comparación. El número de alumnos que participaron fue de 129, con un rango de edad de 3 a 5 años, estos estudiantes pertenecían a los tres grados de preescolar, quienes fueron seleccionados mediante una muestra no probabilística intencional.

Bajo la condición de intervención participaron un total de 66 estudiantes, de los cuales 35 pertenecían a la escuela “A” y 31 a la escuela “B”; dentro del grupo de comparación se encuentran 63 alumnos: 39 integran la escuela “C” y 24 la escuela “D”. Ver Diseño en la página 136.

Para observar las diferencias socioeconómicas y familiares de los participantes, se realizó un cuestionario, éste fue aplicado al finalizar la intervención a los padres de los estudiantes que conformaban las dos condiciones y sus resultados se reflejan en las tablas 1 y 2. Se muestran las características socioeconómicas en la primera tabla: nivel socioeconómico (NSE), escolaridad, ocupación de los padres, el tipo de vivienda y el nivel de hacinamiento. Después se muestran las características familiares, en la segunda tabla: tipo de familia, cantidad de hermanos, lugar que ocupa el participante, quien lo cuida, si acudió a la guardería, cuántos meses estuvo en ella y cuántos meses asistió al CENDI.

En la tabla 1 se puede apreciar las características socioeconómicas de las escuelas de intervención y comparación. Los alumnos de las escuelas de intervención, como indica la tabla, más de la mitad de los participantes provienen de familias con un nivel socioeconómico bajo al presentar un 56.5% de la población; mientras que los alumnos de las escuelas de comparación la mayoría de las familias tienen un nivel socioeconómico medio, al presentar un porcentaje de 76.2. De igual manera, se puede observar que en las escuelas de comparación, en el aspecto de escolaridad, la mitad de la población alcanza puntajes mayores en el nivel de licenciatura; en contraste con las escuelas de intervención, las cuales su puntaje mayor recae a nivel secundaria. En cuanto al aspecto de ocupación tanto los grupos de intervención como los de comparación el puntaje mayor se encuentra en la característica: empleado. En cuanto al tipo de vivienda la familia de los participantes del grupo de intervención más de la mitad rentan o su casa es prestada; en contraste con las familias de los grupos de comparación tienen casa propia. Por último La mitad de los alumnos, del grupo de comparación, tienen un nivel de hacinamiento medio; mientras que los alumnos del grupo de intervención presentan un hacinamiento alto.

Tabla 1. Características socioeconómicas de los participantes

Características	Grupo de Intervención		Grupo de Comparación		Total	
	%	*(n)*	%	(n)	%	(n)
NSE						
Bajo	56.5	*(26)*	17.5	*(11)*	33.9	*(37)*
Medio	37.0	*(17)*	76.2	*(48)*	59.6	*(65)*
Alto	6.5	*(3)*	6.3	*(4)*	6.4	*(7)*
Escolaridad						
Primaria	6.5	*(3)*	0.0	*(0)*	28.0	*(3)*
Secundaria	32.6	*(15)*	3.2	*(2)*	15.6	*(17)*
Carrera técnica Secundaria	10.9	*(5)*	20.6	*(13)*	16.5	*(18)*
Bachillerato	17.4	*(8)*	22.2	*(14)*	20.2	*(22)*
Carrera técnica Bachillerato	6.5	*(3)*	1.6	*(1)*	3.7	*(4)*
Licenciatura	26.1	*(12)*	50.8	*(32)*	40.4	*(44)*
Posgrado	0.0	*(0)*	1.6	*(1)*	0.9	*(1)*
Ocupación						
Empleado	65.2	*(30)*	54.0	*(34)*	58.7	*(64)*
Empleado con gente a cargo	10.9	*(5)*	9.5	*(6)*	10.1	*(11)*
Profesionista	17.4	*(8)*	28.6	*(18)*	23.9	*(26)*
Profesionista con gente a cargo	6.5	*(3)*	7.9	*(5)*	7.3	*(8)*
Vivienda						
Prestada	21.7	*(10)*	7.9	*(5)*	13.8	*(15)*
Rentada	43.5	*(20)*	23.8	*(15)*	32.1	*(35)*
Propia	34.8	*(16)*	68.3	*(43)*	54.1	*(59)*
Hacinamiento						
Alto	37.0	*(17)*	15.9	*(10)*	24.8	*(27)*
Medio	32.6	*(15)*	52.4	*(33)*	44.0	*(48)*
Bajo	30.4	*(14)*	31.7	*(20)*	31.2	*(34)*

En lo que respecta a las características familiares se muestra en la tabla 2, que en las escuelas pertenecientes a las dos condiciones predomina la familia nuclear; el que tengan un hermano o ninguno; que ocupen el primero o el segundo lugar entre hermanos y que ambos padres lo cuidan. También se percibe que los alumnos de intervención más de la mitad no asistieron a la guardería; en contraste con los alumnos de comparación. Por último, el puntaje mayor de asistencia al CENDI, de ambas condiciones fue de 36 meses.

Tabla 2. Características familiares de los participantes

Características	Grupo de Intervención		Grupo de Comparación		Total	
	%	*(n)*	%	(n)	%	(n)
Tipo de familia						
Monoparental (Mamá)	15.2	*(7)*	15.9	*(10)*	15.6	*(17)*
Monoparental (Abuela)	2.2	*(1)*	0.0	*(0)*	0.9	*(1)*
Nuclear	65.2	*(30)*	63.5	*(40)*	64.2	*(70)*
Extensa	17.4	*(8)*	20.6	*(13)*	19.3	*(21)*
Cantidad de Hermanos						
0	37.0	*(17)*	23.8	*(15)*	29.4	*(32)*
1	47.8	*(22)*	52.4	*(33)*	50.5	*(55)*
2	10.9	*(5)*	20.6	*(13)*	16.5	*(18)*
3	4.3	*(2)*	3.2	*(2)*	3.7	*(4)*
Lugar que ocupa						
1	52.2	*(24)*	46.0	*(29)*	48.6	*(63)*
2	34.8	*(15)*	44.4	*(28)*	40.4	*(44)*
3	8.7	*(4)*	7.9	*(5)*	8.3	*(9)*
4	4.3	*(2)*	1.6	*(1)*	2.8	*(3)*
Quien lo cuida						
Mamá y Papá	58.7	*27*	74.6	*(47)*	67.9	*(64)*
Abuelos	32.6	*15*	6.3	*(4)*	17.4	*(19)*
No parientes	0.0	*0*	1.6	*(1)*	0.9	*(1)*
Mamá y otros parientes	8.7	*4*	17.5	*(11)*	13.8	*(15)*
Asistencia a Guardería						
0	67.4	*(31)*	27.0	*(17)*	44.0	*(48)*
1	32.6	*(15)*	73.0	*(46)*	56.0	*(61)*
Meses en Guardería						
0	67.4	*(31)*	27.0	*(17)*	44.0	*(48)*
6	2.2	*(1)*	0.0	*(0)*	0.9	*(1)*
12	17.4	*(8)*	17.5	*(11)*	17.4	*(19)*
18	0.0	*(0)*	1.6	*(1)*	0.9	*(1)*
24	13.0	*(6)*	25.4	*(16)*	20.2	*(22)*
28	0.0	*(0)*	1.6	*(1)*	0.9	*(1)*
36	0.0	*(0)*	27.0	*(17)*	15.6	*(17)*
Meses CENDI						
12	30.4	*(14)*	25.4	*(16)*	27.5	*(30)*
18	0.0	*(0)*	1.6	*(1)*	0.9	*(1)*
24	32.6	*(15)*	31.7	*(20)*	32.1	*(35)*
36	37.0	*(17)*	41.3	*(26)*	39.4	*(43)*

Escenarios

Los 129 estudiantes pertenecían a cuatro Centros de Desarrollo Infantil (CENDI) de la Ciudad de México: en la condición de intervención se encontraban los CENDI Granada (A) y CENDI Legaría (B) en las cuales sus estudiantes pertenecían a un nivel socioeconómico bajo y, por otro lado, en la condición de comparación conformada por CENDI 4 (C) y CENDI 5 (D) los estudiantes de estas escuelas tenían un nivel socioeconómico medio

El CENDI Granada se encuentra dentro del mercado Granada en la delegación Miguel Hidalgo esq. con Río San Joaquín. El preescolar cuenta con servicios de gas, energía eléctrica, agua y drenaje. Algunos de estos gastos son subsidiados por la delegación (luz, gas, predial y personas que laboran en la institución). Los gastos referentes a la alimentación y materiales didáctico son pagados a partir de las cuotas que los padres aportan.

El preescolar cuenta con tres salones destinados para cada grado, un salón para maternal, la oficina de la directora (dirección), dos baños: uno para los pequeños y el otro para las docentes, un comedor, una bodega, servicio médico, cocina, una biblioteca y un espacio abierto de uso común para los niños con juegos. Todas las docentes tienen un grado de licenciatura en Educación Preescolar.

El otro CENDI, Legaria, ubicado en la delegación Miguel Hidalgo calzada Legaria, cuenta con instalaciones de agua, gas, drenaje, iluminación. Algunos de estos gastos son subsidiados por la delegación (luz, gas, predial y personas que laboran en la institución). Los gastos referentes a la alimentación y materiales didáctico son pagados a partir de las cuotas que los padres aportan.

El CENDI está conformado por siete salones: uno para maternal, uno para primer grado, dos para segundo grado, otros dos para tercer grado, y uno destinado para cantos y juegos, dos comedores, una cocina, servicio médico, dos baños para alumnos y docentes, la dirección y dos espacios abiertos de uso común para juegos. Todas las docentes tienen un grado de licenciatura en Educación Preescolar.

Instrumento

En esta investigación se utilizaron dos instrumentos: el primero, un cuestionario sociodemográfico con el fin de conocer las características socioeconómicas y familiares de los participantes y el segundo, el "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar" para evaluar las competencias matemáticas de los infantes.

Cuestionario sociodemográfico

En el presente estudio, se aplicó a los padres el cuestionario sociodemográfico, al final de la investigación, con el propósito de conocer las características socioeconómicas y familiares de los participantes en ambas condiciones: intervención y comparación.

Este cuestionario cuenta con 18 reactivos que se dividen en tres secciones: datos generales, características socioeconómicas y características familiares. En la primera, descripción de los datos generales del pequeño: nombre, fecha de nacimiento, sexo, escuela, grado y docente que lo asiste. En la segunda sección, la descripción de las características socioeconómicas: nivel socioeconómico, escolaridad y ocupación de los padres, tipo de vivienda y nivel de hacinamiento. En las características familiares, la tercera sección, se describe con referencia al pequeño: el tipo de familia, la cantidad de hermanos, el lugar que ocupa, quien lo cuida, sí asistió a la guardería, cuántos meses asistió a ella y los meses que lleva cursando en el CENDI.

En el transcurso de una semana se les fue proporcionando a los padres de los participantes el cuestionario sociodemográfico al final del las actividades escolares, estos fueron contestados en el salón de clases al cual pertenecían sus hijos. En algunas ocasiones los padres entregaban el cuestionario al siguiente día.

<u>Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar</u>

Este instrumento evaluó el nivel de competencias numéricas de los estudiantes en ambas condiciones, al inicio y al final de la intervención, el cual cubre los aspectos y competencias establecidos por el Programa de Educación Preescolar 2004, el cual se basa en el campo Pensamiento Matemático en dos diferentes aspectos:

a) El primero: número, en el que se encuentran las competencias de conteo; plantear y resolver problemas que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos; reunir información, representarla gráficamente e interpretarla y por último identificar regularidades en una secuencia a partir de criterios de repetición y crecimiento.

b) El segundo: forma, espacio y medida, se presentan las competencias de reconocer y nombrar características de objetos, figuras y cuerpos geométricos; construir sistemas de referencia en relación con la ubicación espacial; utilizar unidades no convencionales para medir magnitudes de longitud, capacidad, peso y tiempo e identificar el uso de algunos instrumentos de medición.

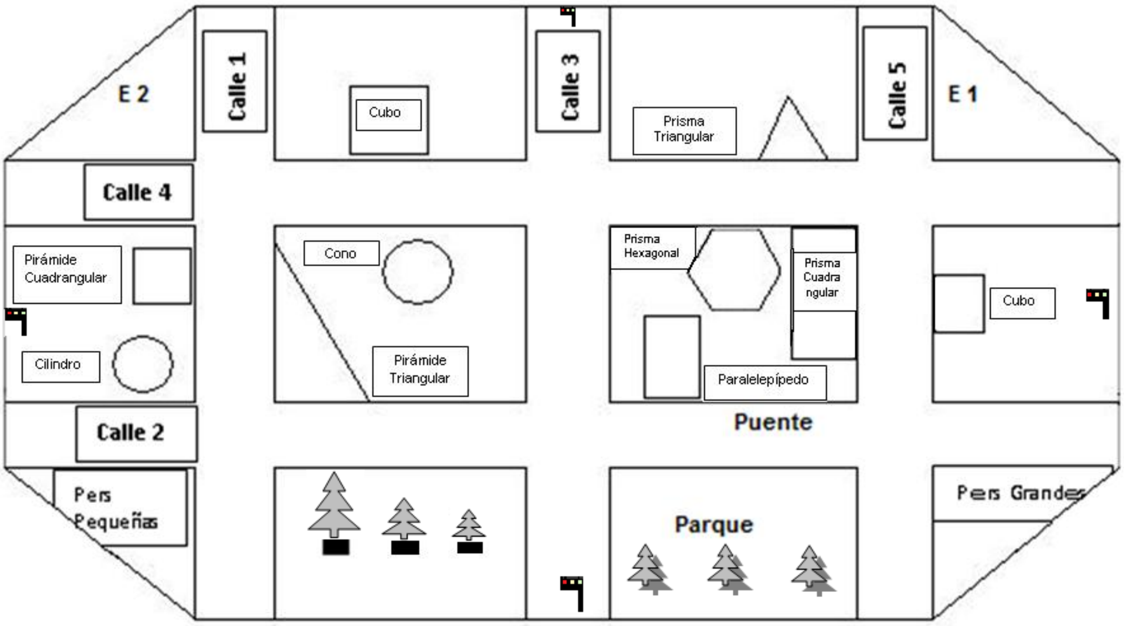
Este instrumento tiene las características de ser situado y dinámico puesto que se utilizó como escenario el plano de una ciudad y cuyos elementos de ésta son materiales concretos.

A continuación se presentan los materiales en la tabla 3 que fueron utilizados en el Instrumento por los infantes.

Tabla 3. Materiales utilizados en el Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar.

MATERIAL	APLICACIÓN EN EL INSTRUMENTO	ASPECTO
Plano de la ciudad	Lugar en donde se creaba y representaba la ciudad	Número y Forma, espacio y medida
Reloj	Se tenía que marcar una hora específica.	Número y Forma, espacio y medida
Calle 1-5	Se etiquetaban las calles, colocando su nombre	Número
Rosa de los vientos	Se utilizaba para ubicar los puntos cardinales	Forma, espacio y medida
Cinta Métrica	Se utilizaba para medir los cuerpos geométricos	Número y Forma, espacio y medida
Cuerpos geométricos:	Se utilizaban para simular los edificios de la ciudad (Cubo, Prisma Cuadrangular, Prisma Triangular, Prisma Hexagonal, Pirámide Cuadrangular, paralelepípedo, cono, cilindro y un prisma triangular)	Forma, espacio y medida
Tres planillas de cuerpos geométricos	Se elegía la planilla con la que se realizaba un cubo	Forma, espacio y medida
Diez cubitos	Se utilizaban para armar un cubo	Forma, espacio y medida
Diez etiquetas con números del 1-10	Se etiquetaban cada uno de los edificios	Número
Puente	Se utilizaba para colocarlo entre dos calles	Forma, espacio y medida
Coches	Se ponía en práctica la direccionalidad, la lateralidad, la ordinalidad, las medidas no convencionales y uso de operaciones aritméticas.	Número y Forma, espacio y medida
Croquis	Marcar una ruta de un punto a otro con respecto al plano de la ciudad y como referencia para colocar un árbol	Forma, espacio y medida
Etiquetas de precios	Mostrar el precio de los coches	Número
Diez monedas de un peso	Se utilizaban para comprar los coches, realizando cálculos.	Número
Palitos de madera	Se trazaba el perímetro de un terreno de la ciudad y formar un ángulo	Forma, espacio y medida
Trozo de papel verde	Se colocaba en el terreno marcado por el perímetro.	Forma, espacio y medida
Seis árboles	Se utilizaron para señalar los lados de una figura y dos terrenos	Forma, espacio y medida
Papel y plumón	Se anotaba la cantidad de árboles que existían en la ciudad	Número
Siete muñequitos de personas	Se clasificaba de acuerdo al tamaño de las personas (3 grandes y 3 pequeñas) y se colocaba una en la esquina de 2 calles	Forma, espacio y medida
Tabla de registro	Se utilizaba para conocer la cantidad de coches, personas y edificios	Número
Gráfica de barras	Se utilizaba representar la información de la tabla de registro	Número

A continuación se presenta una imagen y un esquema en los cuales se muestra la ciudad al finalizar la aplicación del instrumento.



Esquema 1. Plano del Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar

Los reactivos están organizados de menor a mayor complejidad**.** Se organizan en tres niveles de competencia:

1. Reproducción: Este nivel incluye el conocimiento de los hechos, su representación, el reconocimiento de equivalencias, el desarrollo de procedimientos de rutina, la aplicación de algoritmos estándar y el desarrollo de destrezas técnicas.

Un ejemplo de reactivo de reproducción en el Instrumento es el siguiente:
Al niño se le presenta un coche con una etiqueta que indica el precio (4 pesos) y el evaluador le hace la siguiente pregunta:

"Este es el precio de este coche. (4 pesos) ¿Cuánto cuesta?"

2. Conexión: Establece conexiones entre los diferentes campos de las matemáticas y continúan con la integración de la información en problemas sencillos. En este nivel se requiere el manejo de diversos

métodos de representación como las afirmaciones, los ejemplos y las demostraciones.

Un ejemplo de reactivo de conexión en el Instrumento es el siguiente:
Al niño se le proporcionan 10 monedas de un peso y el evaluador le hace la siguiente pregunta:

"Si tú quisieras comprar este coche, ¿Cuántas monedas me darías?"

3. Reflexión: Se basa en la comprensión, conceptualización y generalización. Se requiere un reconocimiento y extracción de conceptos matemáticos incluidos en las actividades y que los empleen para resolver el problema, es necesario en este nivel, analizar, interpretar, desarrollar estrategias y establecer argumentos matemáticos que incluyan demostraciones y generalizaciones. El uso de estos procedimientos reconoce la formación del pensamiento crítico el análisis y la reflexión. Exige que los alumnos además de resolver problemas sean capaces de plantear soluciones adecuadas.

Un ejemplo de reactivo de reflexión en el Instrumento es el siguiente:
Al niño se le muestran tres coches con etiquetas de diferentes precios y el evaluador le hace la siguiente pregunta:

"Ahora tienes que comprar dos coches uno cuesta 2 pesos y el otro cuesta 5 pesos. ¿Cuánto tienes que pagar en total por los dos coches?"

Consecuentemente el "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar" está conformado por 70 reactivos, en cada uno de ellos se proporcionaba un nivel de ayuda cuando los alumnos se quedaban callados o se equivocaban.

Ejemplo:

Al niño se le proporcionan 10 etiquetas de números del 1 al 10 para asignarle un número a los edificios el evaluador mencionaba lo siguiente:

“Pon un número en cada edificio empezando por el 1 hasta llegar al 10, los números están revueltos (etiquetar edificios e ir indicando que edificio tiene que enumerar). Mira este edificio es el 1, este es el 2, este el 3…”

Se le brinda ayuda al niño cuando este se queda quieto, dice que no sabe o no puede enumerar los edificios.

AYUDA: El evaluador enseña el número que corresponda al edificio y dice:

Mira este es el número (mostrar el numero 1,2,3… que corresponda) de este edificio, ahora busca uno igual a este y colócalo

De los 70 reactivos, sólo 27 de ellos evalúan las competencias numéricas: conteo, solución de problemas, representación gráfica y regularidades en una secuencia. Cada reactivo tiene una calificación de 0, 1 y 2 puntos, teniendo así que el puntaje máximo que se puede obtener en la prueba es de 140 puntos. El puntaje 2 se asignaba cuando el niño proporcionaba una respuesta correcta sin proporcionarle ayuda, el puntaje 1 se estipulaba cuando se le proporcionaba ayuda al niño al momento en el que este se quedaba quieto, no contestaba o decía que no sabía, el puntaje 0 se establecía cuando al niño se le proporcionaba la ayuda y no emitía respuesta. Estos puntajes se anotaban en un protocolo de evaluación el cual contenía el nombre del niño, la escuela, la edad, el grado y el nombre del evaluador; además de los 70 reactivos cada uno haciendo referencia a un indicador textual del instrumento.

El escenario donde se aplicó el instrumento fue dentro de un aula aislada, sin distracciones y silenciosa. El tiempo requerido para la aplicación del instrumento fue aproximadamente de 45 minutos para cada alumno. Este instrumento se aplicó de manera individual y cuenta con una confiabilidad de 0.96.

Diseño

El diseño expuesto ayuda a representar de manera esquemática el procedimiento desarrollado en la investigación, ésta es de tipo comparativo en donde se encuentran dos condiciones: intervención y comparación conformadas por dos grupos cada una. Los participantes en el presente trabajo fueron seleccionados mediante una muestra no probabilística intencional.

$$\mathbf{I: G_1 \text{ y } G_2: O_1 \; X \; O_2}$$
$$\mathbf{C: G_3 \text{ y } G_4: O_1 - O_2}$$

I: Condición de intervención. Implementación de actividades auténticas.

C: Condición de comparación. No se implementaron actividades auténticas.

G_1 y G_2: CENDI Granada y CENDI Legaria. Condición de intervención

G_3 y G_4: CENDI 4 y CENDI 5. Condición de comparación

O_1: Evaluación inicial. Aplicación del Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar

X: Implementación de actividades auténticas.

O_2: Evaluación final. Aplicación del Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar

Procedimiento

A continuación se explicará el procedimiento que describe la manera en la cual se efectuó la investigación, ésta fue realizada en tres fases. En la primera fase se explicará cómo se llevó a cabo la evaluación inicial al aplicar el "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar". En la fase dos, se expondrá la estructura de las actividades auténticas, el acompañamiento que se le proporcionó a las docentes, así como la implementación de estas actividades. En la tercera fase, se mencionará la evaluación final que se realizó a los estudiantes después de haber participado en la exposición de actividades auténticas.

Primera fase: Evaluación inicial

Al inicio de la investigación se realizó una evaluación inicial a los alumnos de los tres grados de los grupos de intervención (A y B) y comparación (C y D) utilizando el "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar" para conocer el nivel actual de competencias numéricas descritas en el PEP 2004 antes de implementar las actividades auténticas. Para llevar a cabo la primera medición se aplicó el.

Esta evaluación fue aplicada a cada uno de los pequeños de ambas condiciones de manera individual. El escenario donde se realizo la evaluación fue en un salón de clases dentro de la escuela, el cual se encontraba aislado y sin distracciones.

El evaluador antes de aplicar el instrumento al infante iniciaba una pequeña conversación con el fin de generar confianza. Después el evaluador y el niño se colocaban de frente con el instrumento sobre una mesa, los materiales de este se le iban presentando al niño para que construyera la ciudad conforme se realizaban los reactivos. El evaluador mientras aplicaba el instrumento tenía el protocolo de evaluación en el cual anotaba las respuestas obtenidas de cada participante.

Segunda fase: Diseño, acompañamiento e implementación

En esta fase se contempla todo el proceso que se realizó en el transcurso de la intervención, el cual será presentado en tres secciones.

Primera sección: Diseño de actividades auténticas

La intervención se inicio con el diseño de 50 actividades auténticas, éstas abarcaban contenidos matemáticos de las cuales 16 cubrían el aspecto de número. Las actividades tenían las características de ser situadas y abarcaban diferentes contextos: escenarios, proyectos, juegos, talleres y rutinarias.

- Escenarios: En estas actividades se creaban sitios o lugares relevantes al contexto del niño, por ejemplo: una tienda, una panadería, un cine, una tortillería.
- Proyectos: Se caracterizan por obtener al final de la actividad un producto, por ejemplo: brochetas de frutas y probando nuestros carros
- Juegos: Actividades en las cuales los infantes se involucraban de manera competitiva, por ejemplo: boliche, la pirinola, juego de cartas y juego de dardos.
- Talleres: En estos los pequeños participaban en talleres de cocina, en los cuales se requería de mayor tiempo por ejemplo: aguas frescas y pay de limón
- Rutinarias: Estas actividades se realizaban diariamente con el fin de aprovechar cuestiones cotidianas e involucrar al alumno al uso del número, por ejemplo: asistencia.

Cada actividad además de contar con un contexto en el cual se realizara esta, también requiere utilizar la capacidad del pensamiento y destrezas necesaria según la dificultad de la actividad. Cada una de estas forma parte de un nivel de competencia, es decir, cada actividad tiene un nivel de dificultad: Reproducción (Desarrollo de procedimientos de rutina), conexión (establecimiento de conexiones entre diferentes campos de las matemáticas) y reflexión (capacidad para plantear soluciones adecuadas). Cabe mencionar que no es necesario dominar uno de los niveles para comprender el siguiente.

Tabla 4. **Características de las actividades auténticas por competencias, niveles y contextos**

Aspecto de Número			
Actividades auténticas	**Competencias**	**Niveles de Competencia**	**Contextos**
Brochetas de fruta	Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo	Conexión	Proyecto
Carrera de coches		Reproducción	Juego
Juego de dardos		Conexión	Juego
El Boliche		Reproducción	Juego
La Pirinola		Reproducción	Juego
El Dado	Registra información numérica, reúne y organiza información sobre criterios acordados, los organiza y representa gráficamente e interpreta la información registrada	Reproducción	Juego
Mi Asistencia		Reflexión	Rutinaria
Juego de cartas	Plantea y resuelve problemas en situaciones practicas que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos	Conexión	Juego
Aguas frescas		Reflexión	Taller
Tiendita		Reflexión	Escenario
Cine		Reflexión	Escenario
Panadería		Reflexión	Escenario
Pay de limón		Reflexión	Taller y proyecto
Tortillería		Reflexión	Escenario
Construyendo un carro	Identifica regularidades en una secuencia a partir de criterios definidos	Reflexión	Proyecto
Decorando mi casita			

El diseño de las actividades auténticas se realizaba de la siguiente manera en orden ascendente:

Grado: Se colocaba en la parte superior de la hoja para distinguir de manera rápida el grado al que pertenecía la actividad, debido a que cada una de estas tenía un diferente nivel de dificultad.

Título: Crear un titulo atractivo, estimulante que motivara a los niños con el fin de generar en ellos interés y ganas de participar en las actividades

Introducción: En esta parte se le da a la docente un pequeño resumen introductorio en donde se explica: el nombre de la actividad, de qué manera se realizará y que competencias se van a promover y desarrollar en los pequeños.

Objetivo: El propósito de esta parte es evidenciar las competencias a desarrollar en los pequeños, colocando la competencia que se va a desarrollar y además explicando cómo se fomenta y se relaciona en la actividad.

Campo Formativo: Se utilizaron actividades auténticas del Campo Pensamiento Matemático.

Aspecto: Esta parte consistía en colocar el tipo de aspecto que representaba a la actividad. Cabe mencionar que el Programa de Educación Preescolar 2004 divide el Campo de Pensamiento Matemático en dos aspectos: el primero número y el segundo forma, espacio y medida. Por otro lado, es importante mencionar que en algunas actividades los aspectos podían combinarse

Descripción de actividades: Este es un indicador para guiar a la docente y señalarle que a partir de este punto la descripción de la actividad es enteramente dirigida hacia el pequeño.

Introducción de la actividad para los niños: En este punto la docente les menciona a los infantes el procedimiento de cómo van a realizar la actividad, primero hace mención del título de manera interesante y a base de juego, después explica cómo será la organización del grupo, en seguida una pequeña reseña de lo que se va a realizar en la actividad y por último las competencias que van a aprender en ella.

Organización: Cada actividad se organizaba en equipos, dependiendo de la dificultad, el número de alumnos, el grado que cursaban los pequeños y de la propia actividad.

Desarrollo de la actividad: En esta parte, se repite la introducción de lo que van a hacer los pequeños y cuáles son las competencias que van a desarrollar. Antes de iniciar los pasos de la actividad la docente realizaba preguntas con el fin de saber los conocimientos previos que los estudiantes tenían con respecto al tema de la actividad. Enseguida se mencionan los pasos de esta, en cada uno de ellos se describe el proceso a seguir y las sugerencias de motores cognitivos que la docente requiere preguntar a los niños en el transcurso de la actividad.

Seguimiento y evaluación: Se desglosan las competencias que se promueven en la actividad dependiendo del aspecto al cual se refiere. En esta parte las docentes necesitan llevar un registro de cada uno de sus alumnos y mediante observaciones ella debe conocer quiénes son los pequeños que desarrollan y promueven las competencias, cuáles son los aciertos, las ventajas y desventajas de la actividad.

Contenidos de la materia: Se colocan los conceptos numéricos que los estudiantes pondrán en práctica en la actividad y que la docente va a utilizar para complementar su evaluación.

Materiales didácticos: Estos son todos aquellos materiales que ayudan a facilitar la actividad y hacerla más dinámica y práctica (papel, plumón, lápices caja de cartón).

Materiales culturales: Son todos aquellos materiales que ayudan a la docente y al pequeño a utilizarlos como representaciones físicas de la actividad (ábaco, dado, regla, monedas y fichas).

Tiempo: Dependiendo del tipo de contexto de la actividad ya sea rutinaria, taller, proyecto, escenario y juego, era el tiempo que se iba a tardar la actividad.

A cada una de las docentes se les proporcionaba dos documentos impresos: la actividad autentica y un instructivo, en este último se resumía de manera muy general los pasos a seguir de cada actividad a realizar y cada uno de estos era acompañado de un esquema o imagen que representaba cada paso.

Segunda sección: Acompañamiento docente

A las docentes se les proporcionaba una asesoría 2 veces por semana con una duración de 20 minutos para cada docente de diferente grado. En la primera sesión se les entregó un cuadernillo de contenidos matemáticos, con el propósito de informar a las docentes acerca de los temas que contenía cada actividad. Además, en esta misma sesión se facilitaba un cronograma mensual para los tres grados, en el cual se describían las actividades que realizarían en el mes.

En las siguientes sesiones se proporcionaba a las docentes la actividad auténtica impresa junto con el instructivo, se les explicaba en que consistía dicha actividad, haciendo énfasis en cada uno de los elementos de esta (título, introducción, objetivos, campos formativos, aspecto, introducción de las actividades, organización, descripción de la actividad, seguimiento y evaluación, contenidos de la materia, materiales didácticos y culturales y el tiempo). Enfocándose principalmente en las competencias numéricas a desarrollar.

Asimismo, en cada una de las sesiones, a las docentes se les proporcionaba una demostración anticipada de la actividad. Esta demostración consistía en representar cómo se iba a llevar a cabo la actividad con ayuda de los materiales que se necesitaban, con el fin de ejemplificar, poner en práctica el desarrollo de la actividad y conocer las nociones previas de las docentes.

Cada una de las actividades auténticas tenía su propia adaptación, dependiendo del grado al que pertenecieran los alumnos haciéndose más compleja para los alumnos de mayor grado. Por ello, en las sesiones se requería una atención individual para cada docente, en donde se les proporcionaban las herramientas y conocimientos necesarios para la realización de las actividades.

A las docentes se les proporcionaba un cronograma semanal en el que se especificaba las actividades auténticas que se realizarían en el transcurso de la semana. Este cronograma se facilitaba una semana antes de llevar a cabo estas actividades, con el fin de que las maestras se organizarán y adquirieran los materiales.

Al finalizar las actividades escolares, se realizaba una breve sesión en la que se discutían los aciertos y obstáculos que las docentes se enfrentaban en las actividades, con el propósito de mejorar su práctica docente. A las docentes se les enfatizaba que en estas actividades auténticas necesitaban adquirir un papel como facilitadoras del aprendizaje de sus alumnos. Esta sesión se realizaba dos veces por semana.

Para promover íntegramente las competencias numéricas en los niños se incluyó un componente de padres**,** el cual consistía en realizar tareas sencillas fuera de la escuela con sus hijos como visitas a museos, actividades recreativas, juegos de mesa y actividades cotidianas: poner la mesa, marcar por teléfono, cambiar de canal al televisor y ayudar a hacer postres. Estas tareas eran proporcionadas semanalmente por la docente a los padres.

Tercera sección: Implementación de las actividades auténticas

En el transcurso de 60 días se aplicaron las actividades auténticas, a las cuales se les dedicaron una hora diaria semanalmente. Las docentes del grupo eran las encargadas de poner en marcha la actividad y hacer que los alumnos alcanzaran el objetivo establecido para cada una de ellas. En el transcurso de la implementación de las actividades se mantuvo una evaluación y seguimiento del aprendizaje de los alumnos y del desempeño de las docentes mediante la observación y registro del trabajo en el salón de clase, si existía alguna duda se intervenía de manera discreta para aclararla. Esta evaluación y seguimiento permitió una retroalimentación en cuanto a las desventajas, los avances y logros que los alumnos mostraban; además de la mejora de la práctica docente.

Otro punto importante era que las maestras observaran y registraran el desempeño que los alumnos mostraban en las actividades auténticas. Ellas observaban y analizaban la dinámica de la clase y realizaban notas de las competencias numéricas que desarrollaban sus alumnos. En cada actividad se elegía a un equipo de estudiantes para ser observado por la docente y de esta manera, lograr observar los avances y complicaciones de todo el grupo a la semana.

Las actividades auténticas se realizaron en distintos escenarios pertenecientes al preescolar. La mayoría de las actividades se realizaron dentro del salón de clase, sin embargo, también se aprovecharon otros espacios: el patio de la escuela, el comedor y los alrededores.

Tabla 5. Escenarios donde se aplicaron las actividades auténticas

CENDI Legaria y Granada	Escenarios	Actividades auténticas
Primero, segundo y tercer grado de preescolar	Salón de clases	Brochetas de fruta
		Juego de dardos
		Lotería de figuras geométricas
		El Dado
		El Boliche
		La Pirinola
		Mi Asistencia
		Juego de cartas
		Tortillería
		Panadería
		Construyendo un carro o probando nuestros carros
	Patio del preescolar	Carrera de coches
		Tiendita
	Comedor del preescolar	Aguas frescas
		Pay de limón
	Salón de cantos y juegos	Cine

Los salones de clases contaban con mesas, sillas, material didáctico, un pizarrón, un escritorio, un área de higiene, ventanas además de iluminación. El patio del preescolar tenía juegos dibujados en el suelo (stop y avión). Un columpio, una resbaladilla y una casita de juegos. El comedor estaba conformado por mesas largas, sillas, ventanas y con iluminación. El salón de cantos y juegos contaba con un piano, sillas, un pizarrón, algunas mesas, ventanas e iluminación.

Tercera fase: Evaluación final

Después de llevar a cabo las actividades auténticas se realizó una evaluación final para conocer el desarrollo de competencias numéricas en los niños y niñas de ambas condiciones. Además de observar los cambios y diferencias que existieron entre las escuelas de comparación (CENDI 4 Y CENDI 5) y de intervención (CENDI Granada y CENDI Legaria).

Ésta segunda evaluación se aplicó a los alumnos de los tres grados de los grupos de intervención (A y B) y comparación (C y D) utilizando el "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar" para conocer el nivel de competencias numéricas descritas en el PEP 2004 desarrolladas en el transcurso de la intervención.

Esta evaluación fue aplicada a cada uno de los pequeños de ambas condiciones de manera individual. El escenario donde se realizo la segunda evaluación fue en un salón de clases dentro del CENDI, el cual se encontraba aislado y sin distracciones.

El evaluador antes de aplicar el instrumento al infante iniciaba una pequeña conversación. Después el evaluador y el niño se colocaban de frente con el instrumento sobre una mesa, los materiales de este se le iban presentando al niño para que construyera la ciudad conforme se realizaban los reactivos. El evaluador mientras aplicaba el instrumento tenía el protocolo de evaluación en el cual anotaba las respuestas obtenidas de cada participante.

RESULTADOS

En esta sección, se muestran los resultados del desarrollo y uso de las competencias numéricas de los estudiantes, al participar en actividades auténticas para promover el razonamiento numérico. Estos se obtuvieron al aplicar a los infantes de los tres grados el “Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar” antes y después de la implementación de las actividades auténticas. Con el propósito de exponer las competencias previas de los estudiantes y el cambio que produjo la intervención (escuelas A y B) al final de esta en contraste con el grupo de comparación (escuelas C y D).

La primera evaluación reflejó el nivel de razonamiento numérico que los infantes de ambas condiciones tenían antes de que el grupo de intervención fuera expuesto a las actividades auténticas; para conocer el nivel de competencias numéricas en las que se encontraban los alumnos. La segunda evaluación, también aplicada a ambas condiciones, permitió conocer el impacto que la intervención mostró en los alumnos de las escuelas A y B, en cuanto al desarrollo del razonamiento numérico.

Los datos obtenidos con el “Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar” se analizaron estadísticamente con el programa SPSS versión 13.0, realizando una estadística descriptiva y un análisis univariable comparativo para obtener comparaciones entre escuelas y condición.

Los resultados se presentan de la siguiente manera:

a) El promedio del razonamiento numérico que obtuvo cada escuela en la evaluación inicial, final y el cambio que estas adquirieron se muestran de manera inicial en la tabla 6.

b) El porcentaje total de las competencias numéricas por condición (intervención y comparación) de acuerdo a los reactivos contestados por los estudiantes se presentan en la gráfica 1. Este porcentaje refleja el conocimiento numérico que los infantes obtuvieron en la primera y segunda evaluación.

c) El promedio total de competencias numéricas por condición, se refleja en la tabla 7. En la que se observa la manera en cómo los alumnos de las escuelas de intervención y de comparación cambiaron en el transcurso de la aplicación de las actividades auténticas. Estos resultados son acompañados de la gráfica 2.

d) Los cambios que obtuvieron los alumnos en los niveles de representación numérica se muestran en una gráfica y en una tabla.

El porcentaje de los niveles de representación numérica por condición se muestra en la gráfica 3, donde se puede observar el nivel que poseen los niños para representar cantidades antes y después de la intervención y de esta manera exponer los cambios que lograron.

El porcentaje de la representación numérica con respecto a la cantidad correcta se aprecia en la tabla 8, es decir, se requería que los alumnos de ambas condiciones escribieran correctamente una cantidad sin importar el nivel de representación; con el fin de conocer si los alumnos utilizan el principio de cardinalidad.

Desarrollo de razonamiento numérico que los alumnos presentaron por escuela

L a comparación de las mediciones por escuela se muestra en la tabla 6, en ella se observa que en la evaluación inicial las escuelas de intervención (A y B) están por debajo de las escuelas de comparación (C y D). En la segunda evaluación la escuela A incrementó su promedio al doble, lo que explica que los niños al verse involucrados en las actividades auténticas durante el transcurso de la intervención adquirieron las competencias numéricas descritas en el PEP 2004. De igual forma los alumnos de la escuela B se beneficiaron de las actividades al incrementar sus puntajes significativamente en comparación con las escuelas C y D.

En las escuelas de comparación, la escuela C fue la más alta en la primera medición, sin embargo el incremento que obtuvo en la segunda medición fue menor en comparación con las otras tres escuelas. La escuela D fue la más baja en la primera medición, ésta adquirió un cambio mayor que la escuela C; no obstante permaneció con puntajes más bajos que las demás escuelas en la segunda evaluación.

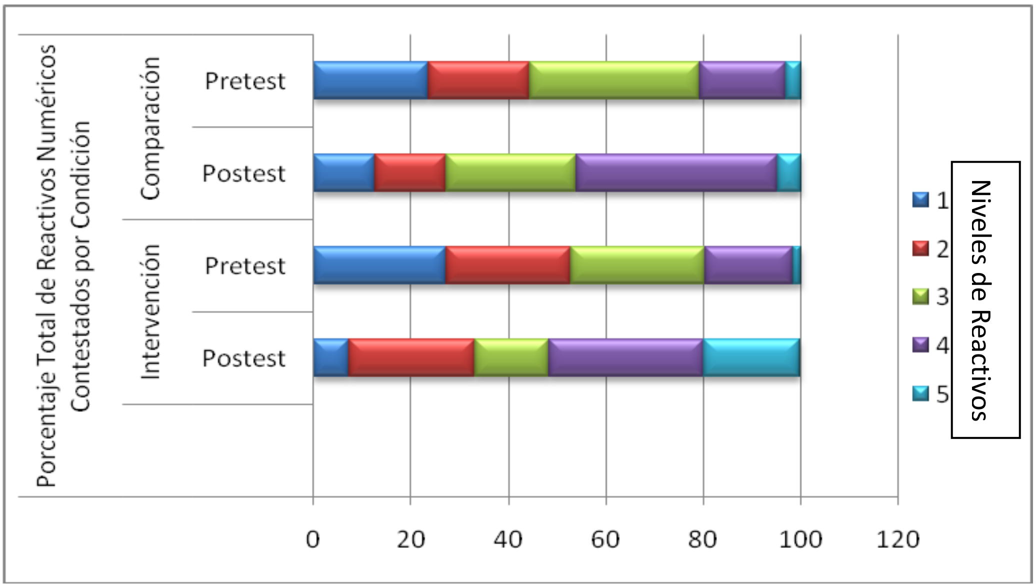
En general, todas las escuelas incrementaron su promedio, no obstante las escuelas de intervención, fueron las que obtuvieron un mayor cambio que las escuelas C y D. Esto es debido a que el aprendizaje de los niños se favoreció con las actividades auténticas de forma significativa (0.000).

Tabla 6 Puntaje promedio del razonamiento numérico por escuela

Escuela	Pretest		Postest		Cambio	
	Media	(Ds)	Media	(Ds)	Media	(Ds)
A	17.94	*11.77*	**37.22**	*9.96*	**19.28**	*7.54*
B	21.70	*9.39*	30.77	*9.38*	9.06	*6.03*
C	**26.25**	*10.22*	32.43	*9.62*	6.17	*4.40*
D	16.37	*10.33*	24.45	*10.57*	8.08	*3.95*

Reactivos numéricos contestados por los estudiantes de ambas condiciones

El porcentaje total de los niveles de reactivos numéricos contestados por los alumnos entre las escuelas de intervención y comparación se presentan en la gráfica 1. El nivel 1 indica que el alumno respondió de 1 a 5 reactivos del "Instrumento de Evaluación de Competencias Matemáticas en Preescolar", el cual contiene 27 reactivos numéricos. El nivel 2 se refiere a que el estudiante contestó de 6 a 10 reactivos, el nivel 3 de 11 a 15 reactivos, el nivel 4 de 16 a 21 reactivos y el nivel 5 de 22 a 27 reactivos, logrando el nivel máximo. Se puede observar que el 80% de los alumnos de ambas condiciones respondieron aproximadamente la mitad de las preguntas al inicio de la evaluación; esto se refiere a que los alumnos llegaron con ciertos conocimientos numéricos. Sin embargo con la intervención, los alumnos lograron ampliar sus conocimientos y apropiarse de nuevas competencias numéricas; como lo muestran los datos de la segunda evaluación, en la cual los alumnos de las escuelas de intervención aumentan el nivel de reactivos contestados en contraste con los alumnos de comparación.



Gráfica 1. Porcentaje total de reactivos numéricos contestados por condición.

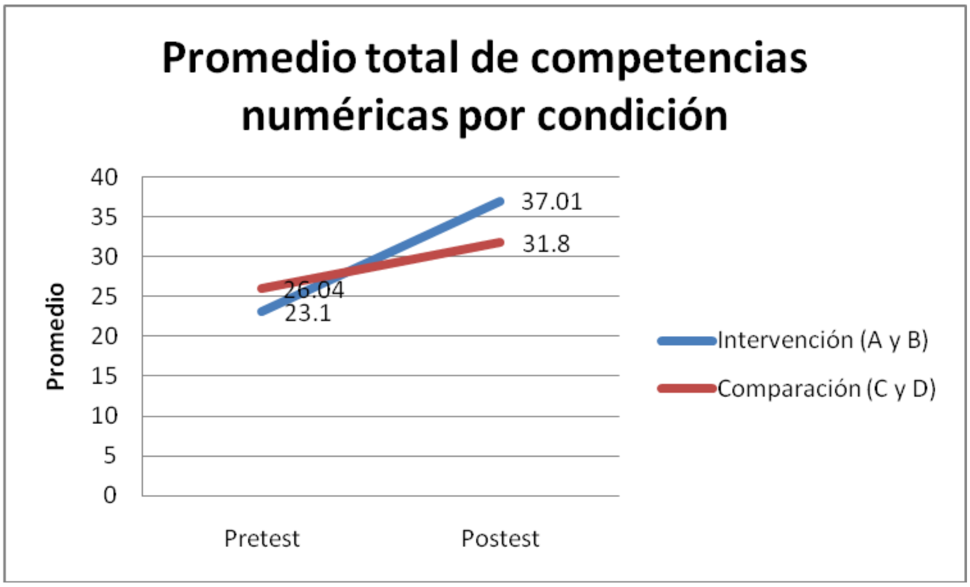
Desarrollo de competencias numéricas de los estudiantes por condición

El promedio total de las competencias numéricas entre las escuelas de intervención y comparación se aprecian en la tabla 7. En ella se refleja que en la evaluación inicial, las escuelas de intervención están por debajo de las escuelas de comparación; lo que indica que los alumnos de las escuelas A y B poseen menos conocimientos numéricos al inicio de este estudio; sin embargo en la segunda evaluación los promedios se invierten; siendo ahora que las escuelas de intervención están por arriba de las de comparación; ya que el cambio que se logró fue notorio al obtener el doble de respuestas correctas que las escuelas C y D. Esto muestra que la intervención tuvo un efecto significativo en el aprendizaje de los alumnos en cuanto a las competencias numéricas.

Tabla 7 **Promedio Total de Competencias Numéricas por Condición**

Condición	Pretest		Postest		Cambio	
	Media	(Ds)	Media	(Ds)	Media	(Ds)
Intervención	23.10	*11.94*	**37.01**	*10.74*	**13.90**	*9.27*
Comparación	**26.04**	*12.36*	31.80	*11.39*	5.76	*4.61*

De igual forma se puede apreciar el incremento en ambas condiciones en el transcurso de la intervención en la gráfica 2, al observar que las escuelas A y B inician con un puntaje más bajo que las escuelas C y D. Sin embargo, al finalizar el estudio, las escuelas de intervención obtuvieron puntajes mayores que las de comparación.

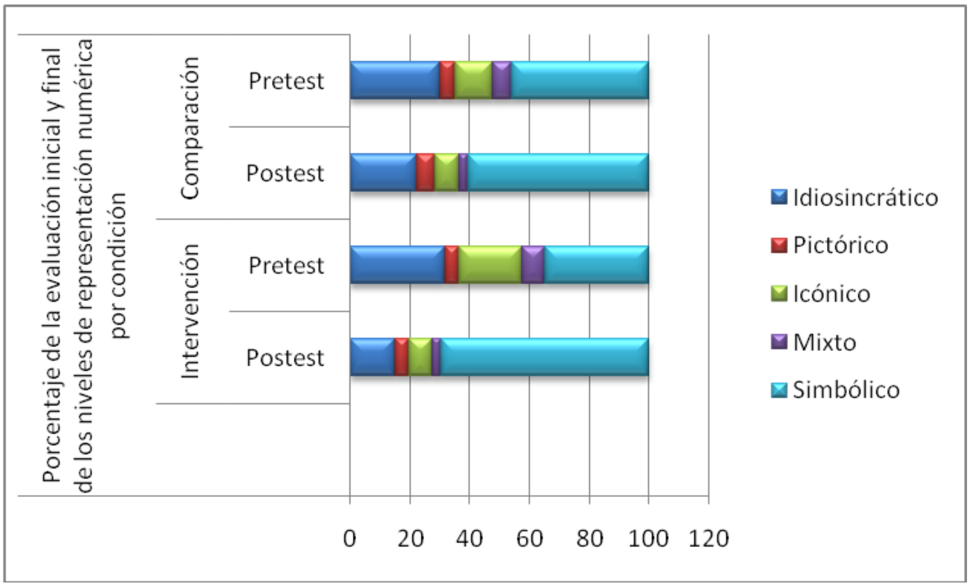


Gráfica 2. Promedio total de competencias numéricas por condición.

Desarrollo de los niveles de representación numérica de los infantes

El porcentaje de la evaluación inicial y final de los distintos niveles de representación numérica entre las escuelas de intervención (A y B) y comparación (C y D) se muestran en la gráfica 3. El nivel 1, representa el nivel idiosincrático este se refiere a cualquier rayón que los niños hagan en una hoja; el nivel 2, representa el nivel pictórico, donde los niños por medio del dibujo registran cantidades; el 3 da lugar al nivel icónico, en el que los niños hacen cualquier símbolo que no se parece al objeto presentado, como rayas, puntos o taches; el 4 representa el nivel mixto, donde los niños combinan números y letras para anotar cantidades y por último el nivel 5 representa el nivel simbólico en este los niños representan cantidades usando los numerales.

Se puede apreciar que en las dos condiciones una tercera parte de los alumnos se encuentran en el nivel 5; sin embargo las escuelas A y B (intervención), están por debajo que las escuela C y D (comparación) en la primera evaluación. No obstante estos porcentajes se invierten en la segunda evaluación; al obtener puntajes más altos por parte de las escuelas de intervención. También la gráfica refleja que en ambas condiciones en la segunda evaluación existe una disminución en los niveles: idiosincrático, pictórico, icónico y mixto; sin embargo la disminución de estos niveles fue mayor en los alumnos de intervención, lo que indica que los alumnos al participar en actividades, en las que se requiere representar cantidades, logren expresarse de manera simbólica.



Gráfica 3. Porcentaje de la evaluación inicial y final de los niveles de representación numérica por condición

El porcentaje de la evaluación inicial y final de la cantidad correcta usando cualquier nivel de representación numérica, entre las escuelas de intervención (A y B) y comparación (C y D) se muestra en la tabla 8. El nivel cero indica que los niños no registraban la cantidad que se pedía (6 árboles) debido a que escribían una cantidad mayor o menor. El nivel 1 corresponde a aquellos niños que registraban la cantidad de manera correcta. Estos datos fueron tomados sin importar el nivel de representación.

Como se puede observar en esta tabla, al inicio había más niños en las escuelas A y B que no registraban la cantidad correcta, en comparación con las escuelas C y D. En la segunda evaluación en ambas condiciones, disminuyó el número de niños que no registraban correctamente; sin embargo las escuelas de intervención disminuyeron más que las escuelas de comparación.

Asimismo en la primera evaluación la mitad de los niños de las escuelas C y D registraban la cantidad correctamente. En la segunda medición existieron más niños que registraban la cantidad correcta en las escuelas A y B en comparación con las escuelas C y D. Estos resultados indican que los niños que fueron intervenidos lograron anotar correctamente la cantidad requerida (6 árboles) empleando el principio de cardinalidad; es decir, que los alumnos se percataban que el último número mencionado en el conteo representaba el total de un conjunto, sólo si se contaba correctamente.

Tabla 8 Porcentaje de representación de la cantidad correcta por condición

Niveles	Intervención		Comparación	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest
0	**63.6**	28.8	**50.8**	36.5
1	36.4	**71.2**	49.2	**63.5**

Los resultados anteriores muestran que tanto las niñas y los niños de las escuelas de intervención desarrollaron un mayor número de competencias numéricas que los estudiantes de las escuelas de comparación. De igual forma, en los niveles de representación numérica existieron más alumnos de las escuelas A y B que lograron expresarse de manera simbólica en contraste con las escuelas C y D.

DISCUSIÓN

Existe una problemática en México con respecto a la carencia de competencias numéricas en los alumnos de preescolar, esta afirmación está representada en las pruebas nacionales e internacionales aplicadas a los estudiantes de este país, los cuales también tienen problemas de reprobación y deserción. Una de las propuestas del marco institucional para desvanecer esta problemática es la renovación de la reforma educativa, la cual se caracteriza por el diseño e implementación de actividades auténticas en las cuales se favorecen las competencias numéricas. Asimismo en esta reforma educativa se propone desarrollar una reestructuración en la práctica docente, es decir, se requiere que los profesores cambien su visión de los conocimientos a enseñar en la educación preescolar con respecto a la capacidad de que sus alumnos poseen.

Debido a la carencia de las competencias, en los estudiantes mexicanos, el objetivo principal que se planteó en esta investigación fue promover el razonamiento numérico en los infantes de educación preescolar al desarrollar y utilizar las competencias numéricas en actividades auténticas.

Los resultados obtenidos en esta investigación mostraron un cambio en el desarrollo de competencias numéricas en los estudiantes de preescolar, los cuales fueron estadísticamente significativos. Estos resultados confirman que las actividades auténticas favorecen las competencias numéricas cuando los infantes ponen en práctica sus conocimientos numéricos: conteo, cálculo y solución de problemas con esto se logra que los estudiantes obtengan un razonamiento numérico, lo que permite ratificar que el razonamiento numérico se desarrolla mediante la participación en prácticas culturales, las cuales posibilitan el aprendizaje y la comprensión de sistemas matemáticos formales en los estudiantes como mencionan Pérez y Scheuer, (2005).

Una de las aportaciones de Baroody (1998) fue que los niños pequeños poseen, antes de incorporarse a la escuela, una “matemática informal” que implica nociones simples de cálculo y conteo. Esta matemática se propicia debido a que se encuentra alrededor y al alcance de las personas; al participar en actividades sencillas: usar el control de la televisión, ir a comprar a la tienda, repartir objetos y observar a sus padres usando números para solucionar sus propios problemas diarios. A partir que se conoce que los niños tienen nociones previas, en esta investigación se realizó una evaluación inicial con el fin de observar los conocimientos que los estudiantes ya poseían. En esta evaluación se encontró que los niños de las cuatro escuelas participantes en la investigación, tenían conocimientos numéricos previos, debido a que ningún estudiante en el instrumento obtuvo un puntaje de cero, puesto que todos los niños conocían y utilizaban algunos conceptos numéricos y algunos empleaban estrategias para resolver problemas, contar y representar cantidades numéricas.

Una vez realizada la evaluación inicial se prosiguió con el diseño e implementación de actividades auténticas con el objetivo de promover en los estudiantes de educación preescolar el razonamiento numérico. Estas actividades fomentaban el desarrollo de competencias numéricas con ciertas características: objetivo, meta a seguir, coherencia, significativas, interesantes, estimulantes, tenían relación con el contexto cotidiano de los niños, contaban con adecuaciones para cada grado y los equipos variaban en la cantidad de sus integrantes. Estas características del diseño y empleo de las actividades, utilizadas en esta investigación, ayudaron a obtener resultados favorables en concordancia con los resultados encontrados por Chamoso, Mitchell, Rawson (2004); González y Weinstein (1998) quienes también encontraron resultados favorables en cuanto utilizando actividades con las mismas características.

Las adecuaciones que se realizaban en cada actividad dependían del grado que los infantes cursaran: para primer grado tenían un nivel de dificultad menor por ejemplo, en la actividad auténtica llamada “cine”, a los estudiantes se les proporcionaba 10 pesos en monedas de un peso la cantidad exacta para comprar su boleto de 6 pesos y sus papas de 4 pesos. En segundo grado, en la misma actividad, la adecuación fue proporcionarles 15 pesos incluyendo monedas de cinco y de un peso. En tercer grado el cambio que se realizó fue incluir monedas de 50 centavos.

La cantidad de integrantes en los equipos también variaba de acuerdo al grado en el que se encontraban los alumnos: para primer grado se trabajaba de manera grupal en actividades rutinarias, de juego y escenarios y en dos equipos en actividades de proyectos y talleres en con el fin de controlar al grupo. Para segundo grado y tercer grado todas las actividades se realizaban en equipos de cuatro o cinco con 5 integrantes cada uno aproximadamente.

Por otra parte López, Gallimore, Garnier y Reese (2007) apoyan la idea que entre más actividades numéricas se den en la vida cotidiana del niño (visitar un mercado o ir a la tienda, en las cuales los niños observen el intercambio compra-venta) pronostican altos puntajes de logro en el aprendizaje de las matemáticas. Con estas actividades los niños se percatan que los números transmiten diferente información de acuerdo al contexto en el que se encuentran (González y Weinstein, 1998). ejemplo

Con respecto al desarrollo de competencias numéricas Pagani y Girard (1997) afirman que los niños mediante actividades vinculadas su contexto logran aprender los principios de conteo; los conceptos de suma y resta; estimar, comparar cantidades y contar hacia adelante y hacia atrás. Siguiendo con esta idea, en la presente investigación, se encontró que los infantes de la educación preescolar de las escuelas de intervención, después de participar en actividades auténticas desarrollaron competencias numéricas pues lograron poner en práctica el uso del conteo, la cardinalidad, la correspondencia biunívoca, el sobre-conteo, el orden estable, la irrelevancia del orden, la suma y la resta, las cuales son utilizadas para la solución de problemas.

En el transcurso de las actividades, en esta investigación, los niños al utilizar el conteo en colecciones, se percataron que no era necesario volver a contar el número de elementos de un conjunto, puesto que aprendieron que el último número representa el total de la colección. Esto se refiere a que los niños lograron utilizar la estrategia de cardinalidad. Sin embargo, Muldoon, Lewis y Freeman (2003), aportan la idea que los niños, al apropiarse del principio de cardinalidad, comprenden que los elementos pueden contarse de manera incorrecta y surgir problemas de conteo erróneo. Esta dificultad es resuelta por los niños cuando vuelven a contar, ahora de manera exacta, los elementos de un conjunto para obtener un cardinal correcto. Los niños que comprenden esto han formado un puente conceptual entre el acto de contar y la cardinalidad. Este puente les permite percatarse que existe una restricción fundamental del principio de cardinalidad, la cual indica que la última palabra dicha representa el valor cardinal únicamente si el conteo es correcto en procedimiento. En el presente estudio, en la actividad: Mi asistencia, la cual consistía en que los niños en base a una grafica de barras tenían que pasar asistencia y con ella responder cuántos estudiantes habían asistido en el día y en la semana, se observó en esta actividad que algunos niños lograban contar correctamente el número total de los niños que asistían y además mencionar el cardinal; mientras que otros utilizaban volvían a contar el número de alumnos cuando intentaban decir el cardinal a esta estrategia se le conoce como recuento según Baroody (1998).

Baroody (1998) ha observado que los niños, cuando se les presenta una tarea poco familiar o difícil de manejar, como preguntarles cuántos objetos acaban de contar en una colección, recurren al empleo de un procedimiento aprendido previamente conocido como recuento, el cual consiste en volver a enumerar todos los elementos que conforman el conjunto. Sin embargo, cuando los estudiantes se percatan que contar es un procedimiento empleado para asignar números a colecciones, ellos realizan el intento de recordar lo que han contado. En concordancia con esta postura, se observó que los niños participantes, de esta investigación, también empleaban la estrategia del recuento, es decir, volvían a contar todos los elementos del conjunto para obtener el cardinal de este, puesto que aún no comprendían que él último número mencionado de un conjunto implicaba el total de este. Por ejemplo en la actividad brochetas de frutas la docente les mencionaba el número total de frutas que debía contener la brocheta y al final preguntaba con cuántas frutas se formaba su brocheta; algunos niños lograban mencionar el número cardinal de la brocheta mientras que otros utilizaban la estrategia de recuento.

Los niños al estar involucrados en actividades auténticas se enfrentan a retos cada vez de mayor complejidad. Esto permite que ellos busquen otras estrategias con la ayuda de la docente, para solucionar los problemas presentados en estas actividades. La suma y la resta son centrales en la enseñanza de las matemáticas, los niños que se apropian de los conocimientos para llevar a cabo estas operaciones pueden generar soluciones y resolver problemas cuando los contextos son reales y significativos (Davenport y Howe, 1999). De igual forma, Gelman (2005) menciona que cuando los niños notan el valor cardinal de un conjunto se percatan que sumando un elemento más a éste, aumenta el valor del cardinal al inmediato siguiente. Sophian y McCorgray (1994) también aportan que los niños al presentarse con actividades de cálculo dan como respuesta un número grande para los problemas de suma y para los problemas de resta un número pequeño. Apoyando estas ideas, en el presente estudio, se encontró que los niños preescolares, al desarrollar los principios del conteo y las competencias de suma y resta, resolvieron problemas que implicaban agregar o quitar como las actividades de compra-venta. Al participar en estas actividades los niños desarrollaron la noción que al agregar un elemento dentro de una colección incrementa su valor. También en las actividades auténticas utilizadas en la presente investigación, se observaba que los niños, cuando ponían en práctica las competencias de cálculo, percibían que la persona que obtenía mayor número de puntos, en las actividades de juegos, era la que ganaba, en contraste con el niño que obtenía el último lugar al tener menor cantidad de puntos. Asimismo en estas actividades auténticas, los estudiantes usaban sus conocimientos de ordinalidad, para conocer que participantes habían quedado en primer lugar, en segundo y en tercero.

En cuanto a la resta, de acuerdo con Baroody (1998), los niños aprenden varios métodos como el “sumando ausente”, este término: implica partir del sustraendo y contar hacía adelante hasta llegar al minuendo; esta estrategia fue observada, en la presente investigación, con algunos alumnos cuando se enfrentaron a la actividad de “juego de cartas”, la cual consistía en sumar dos cartas para obtener un número determinado y en base a este número se les preguntaba cuántos puntos les hacía falta para llegar a la cantidad solicitada.

Con respecto a la representación numérica los niños, antes de aprender a escribir los números formalmente, tienen sus propias maneras únicas y creativas de representar cantidades; de igual forma explican el significado de estos símbolos escritos con sus propios conocimientos y experiencias (Zhou y Wang, 2004). Desde edades muy tempranas, los niños se interesan en las diferentes formas de notaciones numéricas y ellos les atribuyen una función global relacionada directamente con el contexto. Saben, por ejemplo, que el número de los edificios sirve para conocer qué persona vive en él o el número de los autobuses para saber a qué lugar se dirigen. Éste conocimiento se basa en una función de identificar sin ser cuantitativa, sólo de forma progresiva las notaciones numéricas, pueden ser consideradas representaciones que transmiten una información cuantitativa (Martí, 2005). Asimismo Bialystok y Codd (1996); Zhou y Wang (2004) encontraron que los niños son capaces de usar números convencionales para representar números escritos, los cuales están relacionados con su concepto cardinal. Esta capacidad es facilitada por la abundancia de los números en su entorno.

En la presente investigación también se encontró que los niños, de las escuelas de intervención, utilizaban los números como símbolos para representar una cifra al participar en actividades donde se requería llevar un registro de cantidades. De igual forma, se observaron los cambios que los niños desarrollaron en cuanto a los niveles de representación, es decir, la transición que existe entre el nivel idiosincrático, pictórico, icónico hasta llegar al simbólico. Estos niveles se observaron, en el transcurso de la intervención, en las actividades: “El dado”, “juego de dardos” y “pirinola”, en las que se requería el uso de una tabla de registro. Al principio los niños anotaban la cantidad con taches, rayas, puntos, garabatos o números, sin embargo, al término de la investigación, la mayoría de ellos lograron representar de manera simbólica. Por ello se reafirma que entre más experiencias ofrecidas en la escuela, de manera sistemática e intencionada, permite mayor contacto con notaciones numéricas. En estas experiencias los niños empiezan a reconocer los símbolos cuando atribuyen un significado a la representación numérica.

Los niños también logran representar la ausencia de algo como lo menciona Martí (2005) ya que ellos, cuando se exponen ante una situación en la cual necesitan representar el cero, utilizan diversas estrategias como no anotar, escribir algo o escribir el cero. Se encontró en la presente investigación que, en efecto, los niños, cuando se enfrentaban a actividades donde implicaba la ausencia de algo, se percataban que también se puede representar ya sea utilizando un cero o dejando un espacio en blanco. En una actividad se requería que los niños, por medio de un modelo dibujado en una hoja de papel, armaran un muñeco en tercera dimensión. Para realizarla ellos tenían que observar y registrar con cuántas piezas el modelo estaba armado. Cuando los niños se encontraban ante una pieza que no existía en su modelo, ellos registraban la ausencia de este colocando un cero o dejando un espacio en blanco.

Además de las actividades auténticas y el desarrollo de competencias numéricas, el papel del docente fue fundamental en este estudio como apoyan Gifford (2004); McCrone (2005); Bothaa (2005) y Gibbons, (2008) quienes encontraron un cambio en el rol del maestro que consistió en la transformación de líder a facilitador o mediador de la discusión en la actividad. Estos investigadores observaron que el docente, en sus clases, mediante una serie de preguntas cuestionaba a sus estudiantes las contribuciones que estos podían aportar con el fin de reflexionar y razonar sus propias aportaciones, por ello, estos autores proponen que los maestros deben ser un modelo para el alumno.

Las profesoras de educación preescolar, que participaron en los grupos de intervención, del presente estudio, también desarrollaron un papel de mediador entre el conocimiento y la actividad para generar aprendizaje en el niño. Ellas creaban un ambiente de aprendizaje en el cual se promovía el uso de diversas estrategias como cuestionamiento, debate, modelamiento y proporcionar ayudas para generar la reflexión, el análisis y el razonamiento. Las docentes realizaban preguntas a los infantes en cada actividad que implicaban un reto cognitivo, es decir, cuando los alumnos estaban expuestos a una actividad las docentes realizaban preguntas antes, durante y después de ésta como ¿quién ganó?, ¿por qué gano?, ¿cuánto dinero tienes?, ¿qué puedes comprar con ese dinero?, ¿cuánto te sobró? También las docentes corregían los errores de los niños al realizar conexiones con los conocimientos previos y las nociones nuevas aprendidas, la elaboración de conclusiones, la explicación, pensar de manera crítica y creativa y recurrir al uso de ayudas.

Xiaoxue (2009); Davenport y Howe (1999) encontraron que los estudiantes cuando trabajaban en grupos colaborativos mejoraban las actividades que llevaban a cabo, en comparación con los alumnos que trabajaban individualmente, es decir, el trabajar de manera conjunta permite que los estudiantes resuelvan sus problemas con la aportación de las ideas de los demás alumnos, obteniendo nuevas estrategias de solución y llegando a resultados favorables. Este trabajo en colaboración permite que el estudiante al encontrarse en una situación similar a la vida real la cual sea problemática logre resolverla con mayor facilidad. Las docentes de las escuelas de intervención, en la investigación que aquí se presenta, permitían que los alumnos realizaran las actividades en colaboración con el fin de que ellos compartieran sus ideas, solucionar problemas, proporcionar diferentes métodos de solución, brindarse apoyo cuando a alguien se le complicaba comprender la actividad y percatarse que existían diferentes puntos de vista.

Steiner y Mahn (1996) sugieren que los agentes activos dentro de la zona de desarrollo próximo incluyen: personas (con varios niveles de habilidad), artefactos (libros, videos, equipo científico, computadora) y sistemas culturales (sistemas numéricos, la escritura, los símbolos algebraicos y el lenguaje). Estos tres elementos se utilizan dentro del aula como mediadores del conocimiento, en todas las actividades implementadas, en la investigación presente, se requería la participación de docentes y alumnos los cuales intervenían en la actividad cuando algún niño se le complicaba realizarla y/o comprenderla mediante ayudas que se iban desvaneciendo conforme el alumno desarrollara las competencias. También en estas actividades se utilizaron artefactos los cuales permitían representar la dificultad de la actividad de manera simbólica por ejemplo: regla, metro, reloj, monedas, dados, gráficas o tablas. Asimismo los sistemas culturales estaban presentes cuando los alumnos se enfrentaban a un problema y tenían que recurrir al uso del sistema numérico y el lenguaje.

Los alumnos se apropian de un lenguaje matemático cuando están expuestos a actividades que impliquen entablar un diálogo permitiéndoles, de esta manera, comunicarse matemáticamente con sus compañeros y con el docente (National Research Council, 2005; Sinclair, 2005). Los niños de esta investigación, al comunicarse con sus compañeros de clase, utilizaban términos matemáticos como los siguientes: más grande, más pequeño, dame tres más, poco, más, muchos, menos, más largo, más corto.

El comunicarse matemáticamente es visto como un aspecto central que representa el aprendizaje de esta ciencia, al presentar argumentos y participar en discusiones matemáticas. Además esta comunicación implicaba una negociación de significados; puesto que una palabra puede llegar a tener más de uno. Esto fue observado, en el presente estudio, en algunas actividades donde los niños se tenían que percatar que podían ganar al obtener todos los puntos o perder. Por ejemplo en la actividad de "La Pirinola" los niños ganaban al obtener el mayor número de fichas, sin embargo, en la actividad "juego de dardos" los pequeños ganaban cuando obtenían el menor número de puntos. Por lo tanto, los niños negociaban de qué manera se ganaría dependiendo del contexto de la actividad en la que participaban. Moschkovich (2002) encontró que los niños de su investigación al escuchar la frase: "dame más", todos ellos estaban de acuerdo en que se tenía que agregar cierta cantidad de la que ya se tenía. Esta conceptualización se fue creando con el desarrollo de formas de observar, razonar, analizar, hablar, describir, justificar, argumentar y validar.

Para conocer los cambios logrados al aplicar las actividades auténticas en los alumnos de los dos preescolares de intervención y contrastarlos con los de comparación, se realizó una segunda evaluación. Esta permitió confirmar que los ambientes de aprendizaje: actividades auténticas, la participación del docente, los sistemas culturales, la colaboración entre pares, impactaron en la promoción del razonamiento numérico y el desarrollo de competencias numéricas en los niños de los tres grados de educación preescolar. Mediante la participación en las actividades auténticas existió un cambio relevante entre las competencias iniciales de los niños y las que desarrollaron en el transcurso de la intervención, por lo cual se considera que el diseño e implementación de las actividades auténticas favorecieron las competencias numéricas con ayuda de la reestructuración de la práctica docente.

CONCLUSIÓN

En esta investigación, de acuerdo a los resultados obtenidos, se llegó a la conclusión que los ambientes de aprendizaje favorecen el desarrollo de competencias numéricas en los estudiantes de educación preescolar. En este ambiente el docente es un factor importante quien desarrolla la responsabilidad de guía en el proceso de aprendizaje, este utiliza diversas estrategias como el debate, el cuestionamiento y proporciona ayudas cuando los alumnos no puedan por si solos resolver los retos a los que se enfrentan. El uso de estas estrategias tiene como objetivo que los alumnos analicen, reflexionen y den soluciones a problemas de su entorno, con la ayuda de materiales culturales y trabajando en grupos colaborativos. Esto permite el intercambio de información, la ayuda entre ellos y la observación de diferentes formas de llegar a la solución de un problema.

Debido a la problemática que se ha observado en México (con respecto a la carencia de competencias numéricas en los alumnos y a la falta de aplicación de los conocimientos numéricos de las personas en situaciones reales) el marco institucional ofrece la modificación de la reforma educativa: Programa de Educación Preescolar 2004, la cual hace énfasis en implementar actividades auténticas y significativas que involucren retos intelectuales para que los alumnos desarrollen competencias que les permitan razonar, reflexionar, analizar y resolver problemas que se encuentran inmersos en la sociedad.

Para que esta reforma educativa se implemente de manera adecuada, es necesario una reestructuración de la práctica docente. En esta práctica se necesita que el maestro desarrolle un papel de mediador entre el alumno, las actividades y el saber y, de manera intencionada, diseñe e implemente actividades en las cuales los alumnos tengan la posibilidad de enfrentar problemas de número en contextos reales. También se necesita que el docente utilice diversas estrategias para generar en los alumnos un pensamiento reflexivo y analítico para formar personas competentes que razonen matemáticamente los problemas a los cuales se enfrentan en su vida diaria.

Los alumnos se encuentran inmersos en un contexto social; por ello, es necesario que las docentes al diseñar sus actividades reconozcan la importancia de considerar este contexto. De esta manera, se logra que los alumnos relacionen los conocimientos que han desarrollado en su propio contexto con los contenidos a los que se van a enfrentar en las actividades dentro del aula los cuales son retos similares a los de su vida diaria. Entonces los niños se percatan que los conocimientos que aprenden en la escuela pueden aplicarse en su contexto real.

Una limitación encontrada en esta investigación fue el poco apoyo inicial de las docentes, ya que se mostraron susceptibles al implemento de actividades auténticas; puesto que consideraban que los niños eran aún muy pequeños para reflexionar y analizar sobre problemas matemáticos. Además, tenían la idea que las actividades de juego no permitían el desarrollo de conocimientos numéricos al involucrar a los niños en estas.

Otra limitación fue que los registros que se elaboraron en cuanto al seguimiento, evaluación y retroalimentación de las docentes al aplicar las actividades auténticas no se realizaron en un formato de manera sistemática por lo tanto no se tomaron en cuenta para un análisis cualitativo, el cual es relevante dentro de la aproximación sociocultural. Asimismo los registros que las docentes elaboraban cuando observaban a un determinado equipo de alumnos en cuanto al desarrollo de competencias numéricas, tampoco se tomaron en cuenta puesto que fueron notas aisladas sin un formato sistematizado.

Algunas sugerencias para futuras investigaciones es el aprovechar todos los espacios de la escuela por ejemplo la hora de la comida, el recreo y el servicio médico. Estos son espacios que promueven que los alumnos desarrollen un mayor número de competencias al acercarse a actividades de su entorno: compra-venta, el uso del número como medida e identificar el valor de las monedas, permitiendo que los alumnos generen un mayor razonamiento numérico.

Otra sugerencia es grabar algunas sesiones para observar y analizar cómo la actividad es aplicada por la docente y cómo los alumnos cambian en su aprendizaje. Estas grabaciones son utilizadas con el fin de propiciar una retroalimentación a las docentes sobre su enseñanza y además de observar sus habilidades y dificultades que surgieron en la actividad para mejorar e intercambiar información con las demás docentes.

Una tercera sugerencia es el realizar registros sistematizados en los cuales se especifiquen las competencias numéricas que se van a desarrollar en la actividad y la docente pueda guiarse fácilmente al momento de registrar lo observado, asimismo se requiere otro formato para registrar el seguimiento y evaluación docente con el fin de percibir sus dificultades y ventajas en las actividades.

Los resultados que se obtuvieron en esta investigación, en cuanto al periodo de la intervención, fueron favorables; sin embargo se sugiere ampliar éste lapso para obtener resultados más altos en cuanto a las competencias numéricas desarrolladas por los alumnos.

Este estudio sólo presenta una parte de los resultados de una línea de investigación en cuanto al desarrollo de razonamiento numérico en niños preescolares. Esta línea se ha trabajado durante algunos años y cada año se ha ido renovando con las ventajas y desventajas que se han encontrado en cuanto al proceso de intervención.

Este estudio concluye que el desarrollo del razonamiento numérico, en los infantes de educación preescolar, se favorece con la creación de ambientes de aprendizaje y así desarrollar competencias numéricas. En estos ambientes se incluye la participación de los estudiantes en actividades autenticas, estas se caracterizan por tener un objetivo o meta a seguir, ser coherentes, significativas, interesantes, estimulantes y tener relación con el contexto cotidiano de los niños. Estas actividades propician la interacción docente-alumno, en la cual el docente utiliza diversas estrategias como la proporción de ayudas, el modelamiento, el cuestionamiento o el debate. En la actividad también está presente la colaboración entre pares al surgir el intercambio de ideas entre estudiantes y docentes, en ella también se observa la negociación de significados, la cual permite que los alumnos lleguen a un consenso entre sí, con el propósito de que una palabra tenga un mismo significado para todos. Para facilitar la comprensión de la actividad, por parte de los alumnos, se incluye el uso de materiales culturales conocidos como artefactos y el uso de sistemas culturales.

Los estudiantes de educación preescolar que participan en ambientes de aprendizaje, con las características mencionadas en el párrafo anterior, desarrollan habilidades, conocimientos, actitudes y competencias numéricas que les permiten enfrentar dificultades matemáticas en sus contextos reales, utilizando su razonamiento numérico.

REFERENCIAS

Ares, N., Stroup, W. y Schademan, A. (2009). *The Power of Mediating Artifacts in Group-Level Development of Mathematical Discourses*. Cognition and Instruction. 27(1), 1–24.

Aubrey y Carol, (1993). *An investigation of the mathematical knowledge and competencies which young children bring in to the school*. British Educational Research Journal. 19 (1), 15-27.

Aunola, K., Leskinen, E. y Nurmi, J. (2006). *Developmental dynamics between mathematical performance, task motivation, and teachers' goals during the transition to primary school*. British Journal of Educational Psychology. 76, 21-40.

Azpeitia. M. (2006). *Currículum y competencias. Memoria del primer encuentro internacional de educación preescolar*. México. Santillana

Baroody, A. (1998). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid, España: Visor.

Baroody, A. y Lai, M. (2007). *Preschoolers' Understanding of the Addition–Subtraction Inverse Principle*: A Taiwanese Sample. Mathematical Thinking and Learning. 9 (2), 131-171.

Baroody, A. y Tiilikainen, S. (2006). *The Application and Development of an Addition Goal Sketch.* Cognition and Instruction. 24 (1), 123-170.

Bialystok, E. y Codd, J. (1996). *Developing representations of quantity*. Canadian Journal of Behavioural Science. 28 (4), 281.

Bialystok, E. y Codd, J. (2000). *Representing Quantity Beyond Whole Numbers: Some, None, and Part*. Canadian Journal of Experimental Psychology. 54 (2), 117-128.

Bishop, A. (2002). *Critical Challenges in Researching Cultural Issues in Mathematics Education*. Journal of Intercultural Studies. 23 (2), 119-131.

Bothaa, M., Mareea, J. y Wittb, M. (2005). *Developing and piloting the planning for facilitating mathematical processes and strategies for preschool learners*. Early Child Development and Care. 175 (7, 8), 697–717.

Bresnen, M., Goussevskaia, A. y Swan J. (2005). *Organizational Routines, situated learning and processes of change in project-based organizations*. Project Management Journal. 36 (3), 27-41.

Brizuela, B. (2005). *Young children's notations for fractions*. Educational Studies in Mathematics. 62, 281–305.

Callejo, M. (2007). *Resolución de problemas realistas y uso del sentido común.* Uno Revista Didáctica de las matemáticas (46), 61-71.

Cedillo, T (2008). *El aula de matemáticas: un rico ámbito de estudio para el desarrollo profesional de los profesores en servicio*. Revista Mexicana de Investigación Educativa 13(36), 35-58.

Chamoso, J. Mitchell, C. y Rawson, W. (2004). *Reflexiones sobre Experiencias Matemáticas de estudiantes de 3 a 5 años*. Educación Matemática. 16 (001), 195-217.

Civil, M. (2002). *Culture and mathematics: a community Approach*. Journal of Intercultural Studies. 23 (2), 133-148.

Cobb, P., Boaler, J. y Gresalfi, M. (2004). *Exploring an elusive link between knowledge and practice: Students' disciplinary orientations*. Psycology of mathematics and Education of North.

Cobb, P. y Hodge, L., (2002). *A Relational Perspective on Issues of Cultural Diversity and Equity as They Play Out in the Mathematics Classroom*. Mathematical thinking and learning. 4 (2, 3), 249–284.

Coll, C. (2007), *“Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio”* en Revista Aula de Innovación Educativa*,* núm. 161, pp. 34-39.

Corte, E., (2004). *Mainstreams and Perspectives in Research on Learning Mathematics from Instruction.* Applied psychology: an international review. 53 (2), 279–310.

Cubillo C y Ortega T (2000) *Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las matemáticas*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(002) 189-206.

Davenport, P. y Howe, C. (1999). *Conceptual Gain and Successful problem-solving in Primary School Mathematics.* Educational Studies. 25 (1), 55-78.

Diane, D. y Anderson, E. (2006). *Home to School: Numeracy Practices and Mathematical Identities.* Revista Mathematical Thinking and Learning. 8 (3), 261–286.

Díaz A. (2006). *El enfoque de competencias en la educación: ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?* Perfiles Educativos tercera época. 28 (111). Universidad Nacional Autónoma de México. México, 7-36.

Douglas, H. y Sarama, J. (2008). *Experimental Evaluation of the Effects of a Research-Based Preschool Mathematics Curriculum.* American Educational Research Journal. 45 (2), 443-452.

Edo, M. y Deulofeu, J. (2005). *Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa.* Actas

IX Simposio SEIEM, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática 187-195.

Elbers, E. y Haan, M. (2005). *The construction of word meaning in a multicultural classroom.* Mediational tools in peer collaboration during mathematics lessons. European Journal of Psychology of Education. 20 (1), 45-59.

ENLACE, SEP (2007). *Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares.*

Enyedy, N., (2003). *Knowledge Construction and Collective Practice: At the Intersection of Learning, Talk, and Social Configurations in a Computer-Mediated Mathematics Classroom*. The Journal of the Learning Sciences. 12(3), 361–407.

Ernest, P. (2006). *A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number.* Educational Studies in Mathematics, 61, 67–101.

Fernández, C. y Ortiz, A. (2008). *La evolución del pensamiento ordinal en los escolares de 3 a 6 años.* Infancia y Aprendizaje. 31 (1), 107-130.

Fernández K, Gutiérrez I, Gómez M, Jaramillo L, Orozco M. (2004). *El pensamiento matemático informal de niños en edad preescolar.* Creencias y prácticas de docentes de Barranquilla (Colombia). Zona próxima 005, 42-72.

Fluck, M. y Linnell, M. (2001). *The effect of maternal support for counting and cardinal understanding in pre-school children*. Social Development. 10 (2), 202–220.

Fluck, M. Linnell, M. y Holgate, M. (2005). *Does counting Count for 3-to-4 years olds? Parental Assumptions about Preschool Children's Understanding of Counting and Cardinality*. Social Development. 14 (3), 496-514.

Forero, A. (2008). *Interacción y discurso en la clase de matemáticas.* Universitas psycologica. 7 (003), 787-805.

Frade, C. y Tatsis, K. (2009). *Learning, participation and local school mathematics Practice.* The Montana Mathematics Enthusiast. 6 (1 y 2), 99-112.

Gelman, R. (2005). *Young Natural-Number. Arithmeticians.* Rutgers Center for Cognitive Science and the Department of Psychology. 15 (4), 193-197.

Gibbons, P., (2008). *It was taught good and I learned a lot: Intellectual practices and ESL learners in the middle years.* Australian Journal of Language and Literacy. 31 (2), 155–173.

Gifford, S., (2004). *A new mathematics pedagogy for the early years: in search of principles for practice.* International Journal of Early Years Education. 2 (12), 99 – 115

González, A. (2005). *El Programa de Educación Preescolar 2004, un desafío a las tradiciones pedagógicas.* Cero en conducta. 20 (51), 93-102.

González, A. y Weinstein, E., (1998). *¿Cómo enseñar matemática en el jardín? Número, medida, espacio.* Buenos Aires: Colihue.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). *Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example.* Educational Studies in Mathematics. 39, 111-129.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V. y Greeno J. (2008). Constru*cting competence: an analysis of student participation in the activity* Systems of mathematics classrooms. Educ Stud Math. 70, 49–70.

Handley, K., Sturdy, A., Fincham, R. y Clark T. (2006). *Within and Beyond Communities of Practice: Making Sense of Learning Through Participation, Identity and Practice.* Journal of Management Studies 43 (3), 641 - 653

Hannula, M., Rasanen, P. y Lehtinen, E. (2007). *Development of Counting Skills: Role of Spontaneous Focusing on Numerosity and Subitizing-Based Enumeration.* Mathematical Thinking and Learning. 9 (1), 51-57.

Hernández, G. (1998). *Paradigmas en Psicología de la Educación*. México: Páidos Educador.

Houde, J., (2007). *Analogically Situated Experiences: Creating Insight Through Novel Contexts.* Academy of Management Learning and Education. 6 (3), 321–331.

Ibarra, I. y Guzmán, C. (2003). *Desarrollo de estrategias de colaboración y comprensión de cuentos dentro de una innovación educativa.* Tesis de Licenciatura en Psicología Educativa. México: Facultad de Psicología, UNAM.

INEE (2008), Andrade, E., Backhoff, E., Sánchez, A. y Peon, M. *El aprendizaje en tercero de preescolar en México, Lenguaje y comunicación, Pensamiento Matemático*. México. Informes Institucionales.

Inoue, N. (2008). *Minimalism as a Guiding Principle: Linking Mathematical Learning to Everyday Knowledge.* Mathematical Thinking and Learning. 10, 36–67.

Klein, J. y Bisanz, J. (2000). *Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is week.* Canadian Journal of Experimental Psychology, Health and Medical Complete. 105-116

Kramarski, B., Mevarech, Z. y Arami, M. (2002). *The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks.* Educational Studies in Mathematics. 49, 225-250.

Li, Y. (2004). *A school-based project in five kindergartens: the case of teacher development and school development.* International Journal of Early Years Education. 12 (2), 143-155.

Liu, P. y Niess, M. (2006). *An Exploratory Study of College Students' Views of Mathematical Thinking in a Historical Approach Calculus Course.* Mathematical Thinking and learning. 8(4), 373-406.

Locuniak, M. y Jordan N. (2007). *Using Kindergarten Number Sense to Predict Calculation Fluency in Second Grade.* Journal of Learning Disabilities. 41 (5), 451-459.

López, E., Gallimore, R. Garnier, H. y Reese, L. (2007). *Preschool Antecedents of Mathematics Achievement of Latinos the Influence of Family Resources, Early Literacy Experiences, and Preschool Attendance.* Hispanic Journal of Behavioral Sciences. 29 (4), 456-471.

Martí, E. (2005). *Las primeras funciones de las notaciones numéricas: Una mirada evolutiva.* En: Alvarado, M. y Brizuela, B. (Comp) Haciendo Números: Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia. México: Paidos.

Medina, A. (1995). *La Dimensión Sociocultural de la enseñanza: La herencia de Vygotsky.* México: CEA-ILCE.

McCrone, S. (2005). *The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom*. Mathematical Thinking and Learning. 7 (2), 111-133.

Montoro, V. (2005). *Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios.* Infancia y Aprendizaje. 4, 409-427.

Moschkovich, J. (2002). *A Situated and Sociocultural Perspective on Bilingual Mathematics Learners.* Mathematical Thinking and Learning. 4 (2, 3), 189–212.

Moya, A. (2004). *La matemática de los niños y niñas contribuyendo a la equidad-sapiens.* Revista universitaria de Investigación. 5 (002), 23-36.

Muldoon, K., Lewis, C. y Freeman, N. (2003). *Putting counting to work: preschoolers´ understanding of cardinal extension.* International Journal of Educational Research. 39, 695-718.

Narro, A. (1997). *Investigación sobre la concepción de la matemática en las ciencias sociales en la UAM-Xochimilco*. Política y Cultura (009) 249-280.

National Research Council. (2005). *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom.* Committee on How People Learn, A Targeted Report for Teachers, M.S. Donovan and J.D. Bransford, Editors. Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: The National Academies Press.

Nordenflycht, M. (2005). *Enseñanza y aprendizaje por competencias.* Pensamiento Educativo. 36, pp. 80-104.

OCDE (2003), Marcos Teóricos de PISA: La medida de los conocimientos y destrezas matemáticos, Lectura. Paris.

Orrantia, J., González, L. y Vicente, S. (2005). *Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria.* Infancia y Aprendizaje. 28 (4), 429-451.

Pagani, L., Jalbert, J. y Girard, A. (1997). *Does Preschool Enrichment of Precursors to Arithmetic Influence Intuitive Knowledge of Number in Low Income Children?* Early Childhood Education Journal. 34 (2), 133-146.

Parra H. (2005). *Ciencias matemáticas y la relación entre actores del contexto.* Revista Latinoamericana de Investigaciones en Matemática Educativa. 8(001) 69-90.

Pasnak, R., Savage, M., Ferguson, E. y Levit, K. (2006). *Applying Principles of Development to Help At-Risk Preschoolers Develop Numeracy.* The Journal of Psychology. 140 (2), 155-173.

Pérez, M. y Scheuer, N. (2005). *Desde el sentido numérico al número con sentido.* Infancia y Aprendizaje. 28 (4), 393-407.

Ramsey, J. y Fowler, M. (2004). '*What do you notice?' Using posters containing questions and general instructions to guide preschoolers' science and mathematics learning.* Early Child Development and Care. 174 (1), 31–45.

Reyes, A. (2007). *Promoción del Pensamiento Matemático en Infantes Preescolares: Una perspectiva socioconstructivista.* Tesis de Licenciatura en Psicología Educativa. México: Facultad de Psicología, UNAM.

Santagata, R. y Barbieri, A. (2005). *Mathematics Teaching in Italy: A Cross-Cultural Video Analysis.* Mathematical Thinking and Learning. 7 (4), 291-312.

Sarama, J. y Clements, D. (2002). *Building blocks for young children´s mathematical development.* Educational Computing Research. 27 (1, 2), 93-110.

Saxe, G. (1989). *Transfer of Learning Across Cultural Practices.* Cognition and Instruction. 6 (4), 325-330.

SEP (2004). Programa de Educación Preescolar

SEP (2007). Programa Sectorial de Educación.

Scheuer, N. (2005). *Introducción al Dossier: De las matemáticas como conocimiento lógico a las matemáticas como conocimiento sociocultural: implicaciones para el estudio de la adquisición y enseñanza del número.* Infancia y Aprendizaje. 28 (4), 363-375.

Sharmaa, P. y Hannafinb, M. (2007). *Scaffolding in Technology-Enhanced Learning Environments.* Interactive Learning Environments. 15 (1) 27 – 46.

Sinclair, A. (2005). *Las matemáticas y la imitación entre el año y los tres años de edad.* Infancia y Aprendizaje. 28 (4), 377-392.

Solis, L. (2003). *Papel del aprendizaje cooperativo y el tutelaje cognoscitivo en la comprensión y composición de cuentos en niños de cuarto de primaria.* Tesis de Licenciatura en Psicología Educativa. México: Facultad de Psicología, UNAM.

Sophian, C. y McCorgray, P. (1994). *Part-Whole Knowledge and Early Arithmetic Problem Solving.* Cognition and Instruction. 12 (1), 3-33.

Steiner, V. y Mahn, H. (1996). *Sociocultural Approaches to Learning and Development: A Vygotskian Framework.* Educational Psychologist. 3 (3, 4), 191-206.

Sullivan, A. (1998). *Social constructivist perspectives on teaching and learning.* Rev. Psychol. 49, 345 – 375.

Tobón, S. (2006)., *"Aspectos básicos de la formación basada en competencias.* Documento de trabajo, pp. 1-8 (Ver compilación, lectura 5).

Van Oers, B. y Wardekker, W. (1999). *On becoming an authentic learner: semiotic activity in the early grades.* Curriculum studies. 31 (2), 229 – 249.

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). *Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas.* Infancia y Aprendizaje. 31 (4), 463-483.

Wertsch, J. (1985). *Culture comunication and cognition. Vigotskian perspectives,* Press, Estados Unidos Americanos. 146-161.

Xiaoxue, C., (2009). *Comprehensive Assessment of Student Collaboration in Electronic Portfolio Construction: An Evaluation Research*. TechTrends. 53 (1), 58 - 66

Yee, A. (2005). *La reforma de la educación preescolar.* Cero en conducta. 20 (51), 117-121.

Zhou, X., Huang, J., Wang, Z., Wang, B., Zhao, Z., Yang, L. y Yang, Z. (2005). *Parent–child interaction and children's number learning.* Social Development Bureau, China. 763-774.

Zhou, X. y Wang, B. (2004). *Preschool children's representation and understanding of written number symbols.* Early Child Development and Care. 174 (3), 253-266.