



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO DE ZONAS GEOMÉTRICAMENTE COMPACTAS
UTILIZANDO CELDAS CUADRADAS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

SISTEMAS - INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

ERIC ALFREDO RINCÓN GARCÍA

TUTOR:

DR. MIGUEL ÁNGEL GUTIÉRREZ ANDRADE



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. José Jesús Acosta Flores

Secretario: Dr. Javier Ramírez Rodríguez

Vocal: Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade

1^{er} Suplente: Dr. Manuel Ordorica Mellado

2^{do} Suplente: Dr. Sergio Gerardo de los Cobos Silva

Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. MIGUEL ÁNGEL GUTIÉRREZ ANDRADE



FIRMA

Para

mi Princesa, Tatum y Sahad

Son muchas las personas a las que quisiera agradecer su amistad, apoyo, confianza y compañía durante los años que duró este proyecto. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en el corazón. Sin importar en donde estén o si alguna vez llegan a leer esta dedicatoria quiero darles las gracias por permitirme conocerlos y por todo lo que me han brindado.

Estoy profundamente agradecido con mi director de tesis el Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade, por sus consejos, por la confianza y por todo el apoyo y comprensión que me ha brindado en este proyecto y desde que nos conocimos.

Agradezco también a los miembros del Jurado Doctoral, los Doctores José Jesús Acosta Flores, Javier Ramírez Rodríguez, Sergio Gerardo de los Cobos Silva y Manuel Ordorica Mellado sus valiosos consejos académicos, pero sobre todo su confianza y apoyo personal sin los cuales no podría haber realizado este proyecto.

También deseo agradecer el apoyo económico obtenido por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México.

Agradezco el apoyo de la Dirección Ejecutiva del Registro Federal de Electores, en particular al Ing. Miguel Ángel Rojano López, por su apoyo para la obtención de la información necesaria para la realización de este proyecto.

Agradezco a mis Padres de todo corazón por su amor, cariño y comprensión. En todo momento los llevo conmigo.

Agradezco a Luis y Lorena por la compañía que me dan. Sé que cuento con ellos siempre.

A Carlos y Tadeo un abrazo especial por estar cerca de mí y mi familia.

Pero sobre todo, agradezco a mis tres ángeles Sara, Zyanya y Marla por estar conmigo, por sus sonrisas, por sus abrazos y por todos los momentos felices que me han regalado.

Aún quedan muchos por mencionar, pero las palabras y el espacio me hacen falta, tan sólo espero que pronto podamos vernos para darnos un fuerte abrazo.

CONTENIDO

Resumen	1
1. Introducción	2
Objetivo general	4
Objetivos específicos	4
2. Estado del arte	5
2.1. Origen y evolución del problema	5
2.2. Evolución del problema en México	6
2.3. Principales características	8
2.4. Complejidad del problema	10
3. Análisis de los modelos	13
3.1. Algoritmos activos y pasivos	13
3.2. Equilibrio poblacional, conexidad y compacidad geométrica	18
4. Compacidad en celdas	25
5. Modelo propuesto	32
5.1. Función objetivo	32
5.2. Conexidad	34
5.3. Estructura final	35
6. Algoritmo heurístico	38
6.1. Recocido simulado	38
7. Aplicación	43
7.1. Resultados obtenidos al aplicar la medida de compacidad 1	45
7.2. Resultados obtenidos al aplicar la medida de compacidad 2	47
8. Conclusiones	50
9. Apéndice	51
10. Referencias bibliográficas	56

INDICE DE FIGURAS

1. Figuras geométricas formadas con celdas cuadradas	25
2. Círculo formado con celdas de diferentes tamaños	26
3. Área en celdas, perímetro en celdas y perímetro en lados	27
4. Zona analizada y mínimo rectángulo que la inscribe	27
5. Dos cuadrados del mismo tamaño pero con diferente orientación	28
6. Figuras con el mismo perímetro en lados	30
7. Unidades geográficas básicas de Baja California	44
8. Zonas generadas al aplicar la medida de compacidad geométrica 1	47
9. Zonas generadas al aplicar la medida de compacidad geométrica 2	49

INDICE DE TABLAS

1. Número posible de planes de zonificación	2
2. Planes de zonificación con el mismo número de unidades	11
3. Planes de zonificación con unidades en una cadena	11
4. Número de años requeridos para revisar todos los planes de zonificación	12
5. Algoritmos comerciales y sus características	14
6. Aplicaciones a zonas de ventas, escolares ,servicios y mantenimiento	17
7. Aplicaciones a zonas electorales	18
8. Resultados de equilibrio poblacional por zona al aplicar la medida 1	46
9. Costos de compacidad geométrica por zona al aplicar la medida 1	46
10.Resultados de equilibrio poblacional por zona al aplicar la medida 2	48
11.Costos de compacidad geométrica por zona al aplicar la medida 2	48

RESUMEN

El diseño de zonas ocurre cuando pequeñas áreas o unidades geográficas deben ser agrupadas en zonas que resulten aceptables según los requerimientos impuestos por el problema estudiado. Una de las aplicaciones más conocida, o al menos la más polémica, es el diseño de zonas electorales, cuyas consecuencias políticas, administrativas y económicas han provocado la creación de varias leyes que regulan la forma en que deben ser diseñadas. En general, se busca que toda zona electoral contenga el mismo número de electores, que sea conexas y geoméricamente compacta para evitar cualquier tipo de manipulación que pueda favorecer o perjudicar a un partido político o sector social. En este trabajo se proponen dos medidas que calculan la compacidad geométrica de cada zona utilizando celdas cuadradas. La manera en que estas medidas determinan la compacidad de cada figura favorece la creación de formas cuadradas y sanciona las formas dispersas, alargadas o retorcidas. Para comprobar su eficiencia en el diseño de zonas electorales, se desarrolló un método basado en Arcview y un programa escrito en Avenue que, en conjunto, permiten obtener los datos necesarios para poder aplicarlas. Finalmente, se diseñó un algoritmo basado en recocido simulado que construye zonas electorales de acuerdo con los principios de equilibrio poblacional, conexidad y compacidad geométrica. Tanto la metodología como el algoritmo propuesto fueron probados en el estado de Baja California, México, cuya configuración topográfica dificulta la construcción de zonas compactas. Los resultados obtenidos muestran que la medida es capaz de crear zonas compactas con aproximadamente el mismo número de habitantes. Además, las operaciones necesarias para calcular la medida propuesta son fáciles de programar y requieren de poco tiempo de ejecución, lo cual favorece el desempeño de cualquier algoritmo que deba calcular la compacidad de las zonas muchas veces.

INTRODUCCIÓN

El diseño de zonas ocurre cuando pequeñas áreas o unidades geográficas deben ser agrupadas en zonas que resulten aceptables según los requerimientos impuestos por el problema estudiado. Dependiendo del contexto, dichos requerimientos pueden incluir la generación de zonas conexas, que contengan aproximadamente la misma cantidad de habitantes, clientes, medios de comunicación, servicios públicos, etcétera. El diseño de zonas aparece en diversas aplicaciones como son la creación de zonas escolares, zonas con características apropiadas para el análisis socioeconómico, el diseño de territorios de ventas, servicios o mantenimiento, y el diseño geográfico de censos.

Sin embargo, el caso más conocido es el diseño de zonas electorales también llamado distritación política, el cual consiste en agrupar unidades geográficas, generalmente unidades administrativas, en un número predeterminado de zonas o distritos. En la mayoría de los casos se busca los distritos electorales contengan el mismo número de habitantes, sean conexas y geoméricamente compactos.

En general, el diseño de zonas es un problema que está presente en tareas geográficas y requiere tomar en cuenta múltiples objetivos, los cuales pueden estar en competencia o conflicto unos con otros, por lo que encontrar una solución capaz de satisfacer cada uno de ellos puede resultar imposible

Otra razón por la que el problema de diseño de zonas es especialmente difícil es el tamaño del espacio solución. La dimensión de los problemas reales generalmente hace irrealizable cualquier tentativa de enumerar explícitamente todas las soluciones posibles. Aún para un pequeño número de unidades geográficas y zonas, la cantidad de posibles arreglos es enorme. Para ejemplificar lo anterior, en la Tabla 1 se muestra el número posible de planes de zonificación que podrían usarse para dividir un estado hipotético en dos zonas¹.

Total de unidades	10	30	50	80	150	250
Número de planes	511	5.36×10^8	5.6×10^{14}	6.04×10^{23}	7.13×10^{44}	9×10^{74}

Tabla 1. Número posible de planes de zonificación

¹ El número de planes es calculado utilizando el número de Stirling de segundo tipo, ver capítulo 2, ecuación (1).

Por este motivo, las computadoras son necesarias para el diseño de zonas con bases de datos geográficos espaciales y demográficos de gran tamaño. Sin embargo, la naturaleza de los problemas de zonificación hace que las capacidades de las computadoras se vean fácilmente superadas. De hecho, los métodos exactos, aquellos que examinan sistemáticamente todas las opciones y que por lo tanto son capaces de encontrar la solución óptima, solo han sido utilizados en problemas muy pequeños, debido a que el tiempo necesario para realizar una búsqueda exhaustiva llega a ser excesivo para la mayoría de los problemas reales. Por este motivo, se han utilizado algoritmos heurísticos que son considerados la mejor opción para producir soluciones de buena calidad en tiempos de cómputo razonable, y aunque no garantizan encontrar la solución óptima, normalmente se obtiene una respuesta suficientemente buena.

Resumiendo, el diseño de zonas es un complicado problema de optimización multi-objetivo que puede consumir mucho tiempo y tener una gran cantidad de soluciones.

Objetivo general

Crear y aplicar un método que permita utilizar medidas de compacidad geométrica basadas en celdas cuadradas y un algoritmo capaz de resolver problemas de diseño de zonas electorales que cumplan con los criterios de equilibrio poblacional, contigüidad y compacidad geométrica.

Objetivos específicos

- Revisar el estado del arte del problema de diseño de zonas
- Analizar y explicar los modelos y algoritmos existentes
- Crear y desarrollar un modelo para resolver problemas de diseño de zonas electorales
- Aplicar en un caso real el modelo y algoritmo desarrollados
 - Baja California, México.
- Publicar en revistas indexadas los avances obtenidos

CAPÍTULO DOS

Estado del Arte

En este capítulo se mencionan los datos bibliográficos más antiguos encontrados con relación al problema de diseño de zonas electorales tanto internacionales como nacionales. Asimismo, se señalan sus principales características prácticas y teóricas. En el aspecto práctico se exponen de manera breve los criterios utilizados con mayor frecuencia en los artículos revisados. En el aspecto teórico se mencionan los resultados conocidos sobre el tamaño del espacio de soluciones y la complejidad computacional del problema.

2.1. Origen y Evolución del Problema

El diseño de zonas electorales es un problema que ha sido analizado principalmente por su influencia en las elecciones políticas. Se han propuesto diferentes normas que regulan la construcción de los distritos y que buscan evitar la manipulación de los mismos a favor o en contra de algún partido, candidato o sector social. Se sabe que en 1842, el congreso de Estados Unidos creó su primera ley relacionada con la construcción de distritos electorales, en la cual se establece que los distritos deben ser conexos, para evitar la creación de zonas fragmentadas. Posteriormente, en 1871 añaden el concepto de igualdad o equilibrio poblacional, con lo cual se garantiza el principio “un hombre, un voto”, que busca una representación política justa entre los ciudadanos. Sin embargo, estos dos principios fueron insuficientes para evitar la manipulación conocida como gerrymandering², caracterizada por la construcción de zonas que disminuyen la representación política de un partido mediante la agrupación o dispersión de los votos que lo favorecerían. Por este motivo, en 1901 agregan el concepto de compacidad geométrica para prevenir la creación de zonas con formas alargadas, irregulares o confusas características del gerrymandering. Actualmente, los principios de conexidad, equilibrio poblacional y compacidad geométrica son considerados como imprescindibles en el diseño de zonas electorales en procesos políticos democráticos.

Posteriormente, en los años sesenta, se empiezan a usar las computadoras para generar zonas electorales y se llega a considerar que la automatización de estos

² Gerrymandering denota cualquier manipulación injusta en la frontera o forma de las zonas electorales con fines políticos. Este concepto surge en 1812 cuando Elbridge Gerry, gobernador del estado de Massachusetts y quinto vicepresidente de Estados Unidos, cambió los límites de zonas electorales para favorecer al partido republicano. Como una de las zonas “parecía salamandra”, unieron las palabras “Gerry” y “salamander” dando origen al concepto “gerrymander”.

procesos podía convertirse en un “antídoto” contra el gerrymandering, (Vickrey, 1961. Chou & Li, 2006). En 1963 (Weaver & Hess, 1963) y en 1965 (Hess, Weaver, Siegfeld, Whelan & Zhitlau, 1965. Nagel, 1965) se desarrollan los primeros algoritmos y medidas para el diseño automatizado de zonas electorales con base en los principios de conexidad, equilibrio poblacional y compacidad geométrica. A partir de ese momento, empezaron a desarrollarse diferentes algoritmos y formas de medir la calidad de las propuestas de zonificación, pero es hasta los años noventa cuando se da un verdadero avance en el uso de las computadoras en este tipo de problemas, debido principalmente al avance tecnológico y a la disminución en el costo de los equipos de cómputo (Altman, 2005. Hayes, 1996).

2.2. Evolución del Problema en México

En lo referente a México, se cuenta con información relacionada principalmente con los ejercicios electorales de 1978 (IFE, 1979), 1996 (IFE, 1996) y 2006, debido a que los procesos anteriores no fueron documentados.

Se sabe que durante la mayor parte del siglo XX el diseño de las zonas electorales era manual, frente a un conjunto de tablas de población y mapas impresos en los cuales se agregaban y/o quitaban unidades geográficas a las zonas, calculando las poblaciones correspondientes después de cada cambio. El único criterio oficial para llevar a cabo el diseño era procurar la creación de zonas con un número de habitantes equilibrado (Escandón & López, 2003).

En el diseño de zonas electorales de 1978, se consideró el número de habitantes como criterio cuantitativo, mientras que desde el punto de vista cualitativo se observaron tres factores: sociales, geográficos y de comunicación. Esta demarcación se mantuvo vigente durante las elecciones federales de 1982, 1985, 1988, 1991 y 1994, y no tuvo modificaciones basadas en los datos arrojados por los censos poblacionales de 1980 y 1990 (IFE, 2002).

En 1996 se realizó un nuevo diseño con base en criterios constitucionales, aunados a acuerdos de la asamblea del Congreso General del IFE del 23 de enero de 1996. En términos generales, se buscó la conformación de distritos contiguos y compactos, cuya población no se desviara más del 15% respecto de la población meta, el respeto de las fronteras estatales, municipales y seccionales, el uso de un modelo heurístico, la reasignación de distritos a través de la fórmula St Lague con base en la población del censo de 1990, considerar la fisiología del paisaje, agrupar comunidades con una identidad común, observar vías de comunicación y tiempos de traslado. El modelo heurístico fue aplicado para generar diversos planes de zonificación basados en el equilibrio poblacional, la compacidad, la conexidad y el respeto de las fronteras municipales y estatales. Después, los planes obtenidos mediante el algoritmo heurístico fueron revisados por expertos que, tomando en cuenta la integridad de comunidades y tiempos de traslado, realizaron los cambios necesarios (Escandón & López, 2004. Vilalta, 2002).

En el 2004 el IFE dio a conocer un diagnóstico, en el cual resultaba que el 34% de las zonas tenían una desviación superior al 15% con respecto a la población meta establecida en 1996. Por lo que fue necesario hacer un nuevo ejercicio de zonificación electoral que concluyó en 2005. Este proceso implicó mejorar del modelo utilizado, aplicar un algoritmo heurístico basado en recocido simulado, incrementar la participación de los partidos en la discusión durante el proceso y establecer una jerarquía de criterios. Se estableció que la nueva demarcación territorial serviría para la realización de las elecciones federales de 2005-2006 y 2008-2009, en virtud de que para el 2012 se contarán con los resultados del Censo de Población y Vivienda correspondientes al 2010, lo que permitirá actualizar la información (IFE, 2002. López, 2006).

Los lineamientos que debían respetar las nuevas zonas se encuentran referidos en el acuerdo del Consejo General del IFE CG-104-2004³. En este documento se mencionan los siguientes puntos:

1. Los distritos se integrarán con territorio de una sola entidad federativa.
2. Para la determinación del número de distritos que habrá de comprender cada entidad federativa, se observará lo dispuesto en el Artículo 53 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos.
3. Se aplicará el equilibrio demográfico en la determinación de los distritos partiendo de la premisa de que la diferencia de población de cada distrito, en relación con la media poblacional estatal será lo más cercano a cero.
4. Se procurará la conformación de distritos electorales con mayoría de población indígena. En todo caso se preservará la integridad territorial de las comunidades indígenas.
5. Los distritos tendrán continuidad geográfica tomando en consideración los límites político-administrativos y los accidentes geográficos.
6. En la delimitación de los distritos se procurará obtener la mayor compacidad, de tal forma que el perímetro de los distritos tenga una forma geométrica lo más cercana a un polígono regular. Ningún distrito podrá rodear íntegramente a otro.
7. Para la integración de distritos se utilizará la distribución municipal y seccional vigente. La unidad de agregación mínima será la sección electoral.
8. Los distritos se constituirán preferentemente con municipios completos.
9. Para establecer las cabeceras distritales se considerarán los siguientes parámetros: mayor población, vías de comunicación y servicios públicos. En caso de existir dos o más localidades semejantes, y una de ellas sea, en la actualidad, cabecera distrital, prevalecerá esta última.
10. En la conformación de los distritos, se procurará optimizar los tiempos de traslado para recorrer su interior, considerando su tamaño, su extensión y la distribución geográfica de sus localidades, para hacer más eficientes los trabajos de campo que realiza el IFE de forma permanente en el país.

³ Se encuentra disponible en:

<http://www.ife.org.mx/documentos/TRANSP/docs/consejo-general/acuerdos/2004/15JUL04/150704ap10.pdf>

Los 10 puntos anteriores del acuerdo del IFE se manejaron dentro del modelo, desarrollado por el IFE, de dos formas diferentes. Los puntos 1, 2, 4, 5, 7 y 9 se incorporaron a las restricciones del modelo, mientras que los puntos 3, 6, 8 y 10 se incluyeron en la función objetivo.

Es importante mencionar que en esta tesis solamente se manejan, dentro de la función objetivo, los puntos 3 y 6 de la lista anterior, que corresponden al equilibrio poblacional y a la compacidad geométrica respectivamente, debido a que este trabajo se centra en la aplicación de nuevas medidas de compacidad y su capacidad de generar zonas de buena calidad cuando compite contra un objetivo de mayor importancia como es el equilibrio poblacional.

2.3. Principales Características

Aunque cada problema de diseño de zonas presenta características diferentes, existen criterios que se repiten en varias aplicaciones y que han sido analizados en diversos trabajos (Kalcsics, Níkel & Schröder, 2005. Shirabe, 2005b). En esta sección se explican los criterios mencionados con mayor frecuencia en la literatura revisada.

Unidades Geográficas Básicas

También llamadas unidades de cobertura o celdas, son objetos geográficos en el plano como puntos (coordenadas), líneas (calles, carreteras, fronteras) o áreas geográficas (estados, municipios, manzanas) que se establecen al inicio del problema. Durante el análisis del problema son consideradas como indivisibles, deben agruparse para formar el número de zonas establecido y tienen asociadas propiedades cuantificables como carga laboral, número de habitantes, área, perímetro, etc. La forma en que se establecen las unidades geográficas básicas así como las propiedades que se les asocian depende del problema y del objetivo buscado. Por ejemplo, se puede establecer que cada unidad geográfica represente a cada uno de los clientes o usuarios de un servicio o puede representar un conjunto de usuarios con características similares como puede ser el tipo de servicio requerido o su ubicación geográfica.

Número de Zonas

Los problemas de diseños de zonas buscan agrupar las unidades geográficas básicas dadas en un número predeterminado de zonas o territorios ajenos entre sí. La forma de establecer el número de zonas que deben generarse depende del problema estudiado, así por ejemplo al construir zonas escolares se pueden diseñar tantas zonas como escuelas existan, al diseñar zonas electorales se deben generar el número de zonas establecidas por la ley y al diseñar zonas de ventas o servicios la cantidad de zonas se puede determinar por la cantidad de trabajadores o de equipos de trabajo con que se cuenta.

Asignación Única

Cada unidad geográfica básica debe estar contenida en exactamente una zona. Por lo tanto, las zonas definen una partición del conjunto de unidades geográficas básicas. Cada partición generada, factible o no, es llamada plan de zonificación.

Centros

En ocasiones se asocia un centro a cada zona o a cada unidad geográfica, puede ser algún sitio específico como una escuela, un hospital o el centro geográfico. De esta forma, un área geográfica puede ser considerada como un punto, lo cual simplifica el análisis del problema, por ejemplo se facilita el cálculo de la distancia entre dos unidades geográficas o zonas o se puede transformar un plano en una gráfica que refleja la colindancia entre unidades geográficas.

Conexidad

La conexidad de una zona se define como la posibilidad de conectar cualesquiera dos unidades geográficas de una zona mediante unidades geográficas que también formen parte de dicha zona (Bacao F., Lobo V. & Painho M. 2005). Con ello se busca que las zonas generadas no estén fragmentadas en unidades espaciales en forma de islas por lo complicado que resultaría su organización administrativa así como para evitar sospechas de manipulación en los procesos electorales. Para hacerlo, deben determinarse las unidades geográficas que serán consideradas como contiguas o vecinas ya que con base en esta contigüidad se podrá evaluar si una zona es conexa o no. Normalmente se considera que dos unidades geográficas son contiguas si comparten una frontera.

En esta parte pueden surgir algunas complicaciones que dependen del problema, por ejemplo determinar si dos unidades geográficas “vecinas” pueden ser consideradas como contiguas cuando la frontera que comparten es muy pequeña o está formada por obstáculos geográficos que complican la comunicación entre ellas. Una complicación mayor aparece cuando una unidad geográfica se encuentra formada por una isla y por lo tanto no existe una contigüidad clara con el resto de las unidades geográficas o cuando por estrategia administrativa resulta conveniente ubicar en zonas diferentes a unidades vecinas. Sin embargo, estos problemas pueden solucionarse mediante acuerdos en los que se aclare cómo deberán de ser consideradas las unidades geográficas de contigüidad “dudosa”.

Equilibrio

Se busca que todas las zonas estén equilibradas con respecto a una o varias propiedades de las unidades geográficas que la forman. Por ejemplo, pueden diseñarse zonas que tengan la misma carga laboral, los mismos tiempos de traslado o los mismos porcentajes de representación étnica o socio-económica. En general, no es posible lograr el equilibrio perfecto por lo cual se calcula la desviación con respecto al arreglo ideal. Cuanto mayor sea la desviación, peor es el equilibrio de la zona o del plan de zonificación generado.

Compacidad

La mayoría de las aplicaciones incluyen el concepto de compacidad, aunque la interpretan de distintas formas y por lo tanto proponen métodos diferentes para medirla, por ejemplo en el diseño de zonas de venta o servicios se considera que las zonas compactas disminuyen los tiempos de traslado requeridos para visitar a los clientes o usuarios, y para generarlas se minimiza la distancia entre las unidades geográficas y el centro de la zona a la que pertenecen. Por otro lado, en el diseño de zonas electorales la compacidad es vista como una herramienta para la prevención de la manipulación electoral y las medidas propuestas buscan minimizar la desviación de la “forma” de las zonas con respecto a figuras geométricas como círculos, cuadrados o hexágonos.

2.4. Complejidad del Problema

El problema de diseño de zonas ocurre cuando n unidades geográficas deben agruparse en k zonas de tal forma que se optimice el valor de una función, normalmente asociada con el equilibrio entre zonas, sujeta a restricciones de la topografía del problema como es la conectividad.

Este tipo de problemas es especialmente difícil debido al tamaño del espacio solución. La dimensión de los problemas reales generalmente hace irrealizable cualquier tentativa de enumerar explícitamente todas las posibles soluciones. El número total de soluciones para dividir n unidades geográficas en k zonas está dado por el número de Stirling del segundo tipo (Altman, 1997):

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad (1)$$

En casos especiales, se puede reducir el tamaño del espacio solución, por ejemplo si se generan zonas con exactamente r unidades geográficas, el número de soluciones es dado por:

$$S'(n, k, r) = \frac{n!}{k!(r!)^k} \quad (2)$$

Para mostrar el crecimiento del espacio de soluciones en este caso, en la Tabla 2 se pueden observar el número posible de planes de zonificación que podrían usarse para dividir un estado hipotético en cuatro u ocho zonas.

Total de unidades	8	8	16	16	32	32
Unidades por zonas	4	8	4	8	4	8
Número de planes	105	1	2627625	2027025	4.15×10^{15}	5.93×10^{19}

Tabla 2. Planes de zonificación con el mismo número de unidades

O bien, si se considera que las unidades geográficas están conectadas en una cadena y cada una es contigua solamente a dos vecinos, excepto por las unidades geográficas ubicadas en los extremos, el número soluciones es dado por (Baçao, Lobo & Painho, 2005):

$$S''(n, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (3)$$

El crecimiento del espacio de soluciones se muestra en la Tabla 3 donde se puede observar el número posible de planes de zonificación que podrían usarse para dividir un estado hipotético en cuatro u ocho zonas.

Total de unidades	50	50	100	100	150	150
Número de zonas	4	8	4	8	4	8
Número de planes	18424	8.6×10^7	156849	1.49×10^{10}	540274	2.8×10^{11}

Tabla 3. Planes de zonificación con unidades en una cadena

Como se puede ver, incluso en casos muy especiales el espacio solución crece rápidamente. Aunado a lo anterior, se han demostrado los siguientes resultados en términos de complejidad computacional (Altman, 1997. Gilbert, Holmes & Rosenthal, 1985):

Propuesta 1: Crear zonas ajenas con equilibrio poblacional es un problema NP-duro

Propuesta 2: Crear una zona conexas que minimice el costo asociado a las unidades geográficas que la forman es un problema NP-duro

Propuesta 3: Crear un plan de zonificación conexas y con equilibrio poblacional es un problema NP-duro

Propuesta 4: Crear un plan de zonificación que maximice la compacidad es un problema NP- duro

Por lo tanto, diseñar zonas conexas con equilibrio poblacional y compacidad geométrica, como ocurre con las zonas electorales, es un problema NP-duro, y tratar de resolverlo de manera exacta implicaría tiempos de búsqueda demasiado largos. Para ejemplificar lo anterior, en la Tabla 4 se presentan el número de años que necesitaría la computadora más rápida del mundo⁴ para revisar todos los planes de zonificación en un estado hipotético que debe dividirse en dos zonas.

Total de unidades	10	50	80	150	250
Número de planes	511	5.6×10^{14}	6.04×10^{23}	7.13×10^{44}	9×10^{74}
Años requeridos	6.48×10^{-21}	7.14×10^{-09}	7.7	8039387.37	1.14×10^{19}

Tabla 4. Número de años requeridos para revisar todos los planes de zonificación

Por tal motivo, resulta necesario recurrir al uso de algoritmos heurísticos, en particular en este trabajo se utilizará un algoritmo basado en recocido simulado, por ser una heurística eficiente en la resolución de problemas complejos, y por su capacidad para obtener soluciones finales que no dependen de la solución inicial, lo cual es una condición muy importante en procesos electorales que buscan garantizar la democracia y evitar cualquier tipo de manipulación.

⁴ Actualmente, la computadora más rápida del mundo se encuentra en China y es capaz de realizar 2.5×10^{15} operaciones por segundo.

CAPÍTULO TRES

Análisis de los Modelos

En este capítulo se explican diferentes métodos utilizados para resolver el problema de diseño de zonas, desde software comercial hasta el diseño de algoritmos heurísticos, no comerciales, para resolver casos específicos. Se mencionan las principales características y variables de las aplicaciones encontradas en la literatura revisada, así como el tipo de algoritmo utilizado en cada caso. Finalmente, se explican con detalle los conceptos de equilibrio poblacional, conectividad y compacidad geométrica, que tendrán una importancia central en el desarrollo de este trabajo.

3.1. Algoritmos Activos y Pasivos

Para realizar el diseño de zonas existe una gran variedad de algoritmos que pueden separarse en dos grupos: algoritmos pasivos y algoritmos activos. El primer grupo está formado por algoritmos incluidos en paquetería de software principalmente orientada a sistemas de información geográfica. En este grupo se encontraron herramientas de software comercial producidas por Caliper Corporation, ESRI, Digital Engineering Corporation, Corona Solutions y Manifold Systems capaces de realizar diseño de zonas automatizado. Estos algoritmos permiten el diseño de zonas al tiempo que muestran las desviaciones con respecto a los objetivos dados y dejan que el usuario modifique las zonas diseñadas mientras le muestran los cambios que esto produce en los objetivos. Asimismo, presentan mapas del diseño de zonas generado que permiten distinguir en la pantalla las zonas creadas y comprobar visualmente el cumplimiento de restricciones como ubicación y conectividad.

Las principales herramientas que proporcionan los algoritmos pasivos de diseño de zonas se pueden dividir en las siguientes categorías:

- **Tabulación.** Generalmente incluye la población de cada zona y la desviación poblacional. Algunos paquetes incluyen tabulaciones de otras variables, como porcentajes de minorías.
- **Mapa temático.** Proporcionan mapas coloreados para identificar las áreas donde se ubican las zonas generadas, poblaciones indígenas, comunidades de interés, etcétera.
- **Informes geográficos y comprobación de errores.** Revisan si un plan de zonificación presenta errores como discontinuidades (carencia de conectividad) o unidades geográficas que no se han asignado a una zona (agujeros). Algunos paquetes pueden

comparar dos planes para determinar sus diferencias o calcular la compacidad geométrica con diferentes métodos.

- Diseño automatizado. Varios paquetes ofrecen la capacidad de diseñar automáticamente planes de zonificación basados en los criterios seleccionados por el usuario.

En la Tabla 5 se presenta una lista de algunos paquetes de software comercial y sus principales características.

Software	Mapa temático	Tabulación	Informes geográficos	Diseño automático	Planes óptimos	Multiobjetivo
Autobound	Si	Si	Contigüidad Compacidad (12 tipos) Comparación Hoyos	Si, parece un algoritmo Steepest Ascent, basado en kernels fijos	No	Si
Maptitude for redistricting	Si	Si	Contigüidad Compacidad (7 tipos) Comparación Hoyos	No	No	No
Plan 2000	Si	Si	Contigüidad Compacidad (2 tipos) Comparación Hoyos	No		
Transcad	Si	Si	Contigüidad Compacidad (7 tipos) Comparación Hoyos	Si, usa un algoritmo Steepest Ascent	No	No
Manifold	Si	Si		Si, parece un algoritmo Steepest Ascent	No	No
Geobalance	Si	Si		Si, usa algoritmos genéticos	No	Si

Tabla 5. Algoritmos comerciales y sus características.

Sin embargo, esta forma de diseñar zonas tiene los siguientes inconvenientes:

- Es muy difícil para una persona (y aun para un grupo de personas) revisar un gran número de posibles planes de zonificación por lo cual resultaría complicado encontrar una opción que aproxime adecuadamente al óptimo si el software seleccionado no es capaz de realizar diseños automatizados.
- Las características del problema o requisitos del usuario pueden sobrepasar las capacidades o funciones de los algoritmos comerciales por ejemplo, el software utilizado puede ser incapaz de trabajar con funciones multi-objetivo. Además, el usuario se encuentra limitado al uso de las medidas de equilibrio poblacional o compacidad geométrica incluidas en sus herramientas.
- La facilidad que ofrecen para modificar las zonas diseñadas puede ayudar a la generación de un plan electoral sesgado a favor o en contra de un partido y sería muy difícil probar si esto ocurrió de manera intencional o accidental.

En el segundo grupo se encuentran los métodos activos donde la intervención del usuario está limitada a generar un algoritmo que incluya explícitamente la función objetivo, las restricciones consideradas y la secuencia de pasos a seguir para llegar a un plan final. De esta forma, se incrementa sustancialmente la eficiencia del proceso ya que el método empleado para llegar a un plan de zonificación fue diseñado con las características y requerimientos específicos del problema.

En la mayoría de los casos, se emplean modelos heurísticos debido a su capacidad para encontrar soluciones, cercanas al óptimo, a problemas NP-Duros.

A continuación se presentan las aplicaciones encontradas en la bibliografía revisada así como sus principales características. Es importante remarcar que dependiendo de los requerimientos del problema pueden agregarse u omitirse algunas restricciones.

Zonas de Ventas, Servicios y Mantenimiento

En estas aplicaciones el diseño de zonas es empleado para dividir el territorio en áreas de administración o cobertura, asociadas con la fuerza de trabajo disponible, sus principales características son:

- Número de zonas, determinado por el número de equipos de trabajo
- Unidades geográficas básicas, formadas por clientes o usuarios con características semejantes, principalmente su ubicación geográfica,
- Cada unidad geográfica debe ser asignada a exactamente una zona
- Centros de operaciones, buscan disminuir el tiempo de traslado y recorrido de las zonas por lo que suelen ubicarse en la oficina o en la casa de los trabajadores
- Zonas conexas, accesibles y compactas, para facilitar su administración, disminuir el tiempo necesario para llegar hasta ellas y recorrerlas

- Equilibrio laboral, puede estar asociado al número de clientes o usuarios o bien al tiempo necesario para atenderlos. En ocasiones también se incluyen tiempos máximos de traslado, recorrido o número mínimo de clientes

Dentro de esta categoría se encuentran problemas que buscan diseñar zonas para: equipos de ventas o promoción de productos, operaciones de esparcimiento de sal, mantenimiento y reparación de equipos fijos, distribución de electricidad, servicios de salud y grupos de vigilancia.

Zonas Escolares

En el diseño de zonas escolares el territorio es dividido en áreas de administración o cobertura asociadas a la capacidad de atención de las escuelas existentes, sus principales características son:

- Número de zonas, determinado por el número de escuelas existentes
- Unidades geográficas básicas, formadas por estudiantes con características semejantes, normalmente son manzanas
- Cada unidad geográfica debe ser asignada en exactamente una zona
- Centros, dados por la ubicación de las escuelas y los centros de las unidades geográficas
- Zonas conexas, accesibles y compactas, para facilitar su administración, evitar obstáculos geográficos y disminuir el tiempo requerido por los estudiantes para llegar a la escuela asignada
- Equilibrio laboral, la cantidad de estudiantes asignados a cada escuela no deben exceder su capacidad en cada grado

En la Tabla 6 se muestran algunos artículos relacionados con el diseño de este tipo de zonas así como los algoritmos utilizados para resolverlos.

Zonas Electorales

En el diseño de zonas electorales se busca dividir un área administrativa, como un país o un estado, en sub-áreas en las cuales debe ser elegido un representante, sus principales características son:

- Número de zonas, normalmente determinadas por ley
- Unidades geográficas básicas, normalmente establecidas por ley
- Zonas conexas y compactas, para evitar la manipulación electoral
- Equilibrio poblacional, la cantidad de votantes en cada zona debe ser aproximadamente la misma para garantizar el principio “un hombre, un voto”

Año	Autor	Aplicación	Algoritmo
1971	Hess & Samuels	Zonas de ventas	GEOLINE
1976	Segal & Weinberger	Zonas de mantenimiento	
1990	Ferland & Guénette	Escolar	
1991	Schoepfle & Church	Escolar	Exacto
2002	Muyldermans, Cattrysse, Van Oudheusden & Lotan	Esparcimiento de sal	Rutas por arcos
2003	Blais, Lapierre & Laporte	Servicio médico a domicilio	Tabú
2003a	Bergey, Ragsdale & Hoscote	Zonas eléctricas	Genéticos
2003b	Bergey, Ragsdale & Hoscote	Zonas eléctricas	Recocido simulado/Genéticos
2003	D'Amico, Wang, Batta & Rump	Distritos para vigilancia	Recocido simulado
2004	Caro, Shirabe, Guignard & Weintraub	Escolar	
2005	Shortt, Moore, Coombes & Wymer	Servicio médicos	ERA
2009	Ríos-Mercado & Fernández	Zonas de ventas	GRASP
2006	DesJardins & Bulka	Escolar	Hill climbing
2007	Tavares-Pereira, Rui, Mousseau & Roy	Zonas tarifarias	Evolutivos

Tabla 6. Aplicaciones a zonas de ventas, escolares, servicios y mantenimiento.

El problema de diseño de zonas electorales ha sido estudiado en un gran número de artículos debido a su influencia en los resultados de cualquier proceso electoral (Forgette & Platt, 2005. Carson, Crespín, Finocchiaro & Rohde, 2007). Se han propuesto varios algoritmos para obtener soluciones cercanas al óptimo así como diferentes restricciones y medidas que buscan evitar la manipulación electoral y obtener zonas libres de tendencias políticas.

En la Tabla 7 se muestran algunos artículos relacionados con el diseño de este tipo de zonas así como los algoritmos utilizados para resolverlos.

Año	Autor	Aplicación	Algoritmo
1963	Weaver & Hess	Zonas electorales	Location-allocation
1970	Garfinkel & Nemhauser	Zonas electorales	Búsqueda exhaustiva
1996	IFE	Zonas electorales	Recocido simulado
1998	Mehrotra, Johnson, Nemhauser	Zonas electorales	Branch and Price
2000	Cirincione, Darling & O'Rourke	Zonas electorales	Aleatoria sin función objetivo
2001	Macmillan	Zonas electorales	Recocido simulado
2003	Bozkaya, Erkut & Laporte	Zonas electorales	Búsqueda tabú
2005	Baço & Lobo & Painho	Zonas electorales	Algoritmos genéticos
2006	Bong & Wang	Zonas electorales	Tabú/búsqueda dispersa/path relinking
2007	Chou & Li	Zonas electorales	Recocido simulado, algoritmos genéticos
2007	Ricca & Simeone	Zonas electorales	Tabú, recocido simulado, descendent y old bachelor Acceptance

Tabla 7. Aplicaciones a zonas electorales.

Como se mencionó anteriormente las principales características que deben cumplir las zonas electorales son: Equilibrio poblacional, compacidad geométrica y conexidad. Sin embargo, existen diferentes propuestas sobre la forma en que debe medirse el equilibrio poblacional más aún, existe una discusión abierta sobre lo que debe entenderse por “compacidad geométrica” y la forma en que puede ser medida. En la siguiente sección se abordan estos temas para explicarlos con mayor detalle.

3.2. Equilibrio Poblacional, Conexidad y Compacidad Geométrica

En esta sección se analizan de manera más precisa los conceptos de equilibrio poblacional, conexidad y compacidad geométrica debido a su importancia en el diseño de zonas electorales y por la gran cantidad de métodos propuestos para medirlos. En

particular, se amplía la información relacionada con la compacidad geométrica por tratarse de un concepto el cual aún no ha sido definido de manera adecuada.

Equilibrio Poblacional

En el diseño de zonas electorales se busca que todas las zonas contengan la misma cantidad de población o al menos que la diferencia poblacional entre cada zona sea la mínima posible. Se han sugerido varios métodos para calcular el equilibrio poblacional de las zonas propuestas, pero todos ellos conducen a resultados muy parecidos, por lo cual existe poca discusión con respecto a las ventajas de aplicar un método específico.

A continuación se listan los métodos encontrados en la bibliografía revisada:

1. La forma más sencilla de medir el equilibrio poblacional consiste en sumar los valores absolutos de la diferencia entre la población de cada zona y el promedio poblacional por zona

$$\sum |P_i - \bar{P}| \quad (4)$$

Donde:

P_i = Población de la zona i

\bar{P} = Promedio de población por zona dado por

$$\bar{P} = \sum_{k \in K} P_k / n \quad (5)$$

Donde

n = Número de zonas que deben crearse

K = Conjunto de todas las unidades geográficas

P_k = Población de la unidad geográfica k

2. La diferencia de población entre la zona más poblada y la menos poblada

$$P_{i \text{ MAX}} - P_{k \text{ MIN}} \quad (6)$$

En algunas ocasiones esta diferencia es dividida entre el promedio poblacional

$$\frac{P_{i \text{ MAX}} - P_{K \text{ MIN}}}{\bar{P}} \quad (7)$$

3. La división de la zona más poblada entre la menos poblada

$$\frac{P_{i \text{ MAX}}}{P_{K \text{ MIN}}} \quad (8)$$

4. El siguiente método está dado por la función

$$\frac{\sum_{j \in J} \max \{ P_j - (1 + \beta) \bar{P}, (1 - \beta) \bar{P} - P_j, 0 \}}{\bar{P}} \quad (9)$$

Donde:

J = Conjunto de todas las zonas

P_j = Población de la zona j

\bar{P} = Promedio de población por zona

β = Porcentaje de desviación poblacional máximo aceptable por zona

De esta forma, se busca que la población de cada zona se encuentre dentro del intervalo $[(1 - \beta) \bar{P}, (1 + \beta) \bar{P}]$, con $0 \leq \beta \leq 1$.

Se observa que esta función tomará el valor de cero si la población de cada zona se encuentra en el intervalo $[(1 - \beta) \bar{P}, (1 + \beta) \bar{P}]$. En otro caso tomará un valor positivo igual a la suma de desviaciones con respecto a estas cotas.

5. El método utilizado por el IFE para las elecciones del 2006 mide el equilibrio poblacional mediante la función

$$\sum_{S \in R} \left(\frac{100P_T}{d_a(P_N/300)} \right)^2 \left(\frac{P_S}{P_T} - \frac{1}{n} \right)^2 \quad (10)$$

Donde:

P_N = Población nacional

P_T = Población de la entidad

P_S = Población de la zona S

d_a = Porcentaje de desviación poblacional máximo aceptable por entidad

n = Número de zonas que deben crearse

$R = \{1, 2, 3, \dots, r\}$, donde r es el número de zonas que se deben generar en la entidad.

Se observa que en este método se incluyen tres tipos diferentes de población, primero la población total del país donde se está desarrollando el problema, P_N , después la población de la entidad o estado específico, P_T , y por último la población de cada zona diseñada. También es importante mencionar que los términos al cuadrado provocan que las variaciones en el tamaño de la población produzcan un cambio mayor en el costo asociado a la zona cuando la desviación poblacional está por arriba del porcentaje permitido, d_s . De esta forma, se busca que cada zona contenga la misma cantidad de habitantes, pero si no es posible obtenerlo, se favorecerá el diseño de zonas con desviación poblacional inferior al máximo aceptable.

Por último se incluyen dos formas de medir qué tan cerca se encuentra cada zona del equilibrio poblacional.

6. La división de la población de cada zona entre la población total

$$P_j / \sum_{k \in K} P_k \quad (11)$$

Donde

P_i = Población de la zona i

K = Conjunto de todas las unidades geográficas

7. La división de la población de cada zona entre el promedio poblacional

$$P_j / \bar{P} \quad (12)$$

Donde

P_j = Población de la zona j

\bar{P} = Promedio de población por zona

Algunas modificaciones de este método son:

- Restar una unidad para que el valor 0 indique el equilibrio poblacional y los valores positivos y negativos desviaciones por arriba y por abajo del promedio poblacional respectivamente.

$$P_j / \bar{P} - 1 \quad (13)$$

- Invertir la división

$$\bar{P} / P_j \quad (14)$$

Conexidad

Para garantizar la conexidad en el diseño de zonas se pueden utilizar algoritmos que determinen la conexidad de gráficas. Es importante recordar que una gráfica es conexa si y solo si para cualquier par de vértices existe un camino, formado con aristas y vértices dentro de la gráfica, que los une. En el diseño de zonas, cada unidad geográfica es representada como un vértice, y la colindancia entre dos unidades geográficas es indicada mediante una arista entre los vértices correspondientes. De esta forma, se considera que una zona es conexa si la gráfica que la representa lo es.

Sin embargo, para encontrar un plan óptimo es conveniente recurrir a programas de optimización especializados, como CPLEX, GAMS o LINDO API, lo cual implicará la necesidad de establecer un conjunto de ecuaciones o desigualdades, de preferencia lineales, que garanticen la conexidad de las zonas generadas.

En la literatura revisada fueron encontradas tres propuestas para garantizar la conexidad mediante un conjunto de ecuaciones y desigualdades lineales.

1. Cova y Church (Cova & Church, 2000) construyeron restricciones mediante las cuales una zona es generada a partir de una unidad geográfica llamada raíz y a la cual se le agregan unidades geográficas contiguas. Este modelo resulta ineficiente debido a que el número de variables binarias que deberían considerarse es igual al cuadrado del número de unidades geográficas estudiadas.
2. Macmillan W. (Macmillan, 2001) propone un método llamado switching-points que cuenta el número de veces que la frontera de cada unidad geográfica cambia de estar dentro de la zona a estar en la frontera de la misma. Los puntos donde ocurre un cambio de este tipo son llamados switching-points. De esta forma, únicamente las unidades geográficas que tengan exactamente dos switching-points podrán ser cambiadas de zona sin generar una desconexión en la zona a la que pertenecen actualmente.
3. Williams (Williams, 2002) diseñó un modelo que utiliza la gráfica primal y dual asociadas al problema de diseño de zonas. El modelo construye simultáneamente árboles de expansión complementarios en ambas gráficas y crea un sub-árbol conexo a partir del árbol primal para formar una zona conexa. En este modelo, el número de variables y restricciones crece de manera lineal con respecto al número de unidades geográficas consideradas.
4. Shirabe (Shirabe, 2005a) propuso un modelo que utiliza la gráfica asociada al problema de diseño de zonas. Establece una analogía, en gráficas conexas, entre encontrar un camino para unir cualesquiera dos unidades geográficas y el movimiento que seguiría un fluido desde múltiples fuentes hasta un sumidero. Con esta idea, define una zona como una sub-red en la cual un solo vértice sirve como sumidero y los otros proveen unidades de abastecimiento. De esta forma, una zona es conexa si el abastecimiento enviado desde cada vértice llega al sumidero sin salir de la sub-red. En este modelo, el número de variables y restricciones crece de manera lineal con respecto al número de unidades geográficas consideradas.

Compacidad Geométrica

Como se mencionó anteriormente, los principios de equilibrio poblacional y conexidad resultaron insuficientes para evitar la manipulación de las zonas electorales (Sherstyuk, 1998). Por este motivo, se propuso el concepto de compacidad geométrica como una condición, que aunada a las anteriores, busca evitar la creación de zonas electorales con formas irregulares y así prevenir la generación de planes de zonificación favorables a un candidato o partido. También se considera que la compacidad favorece la claridad en la delimitación de las zonas y se ha apreciado que las zonas compactas son más fáciles de administrar por los representantes electos, debido a que se disminuyen los tiempos de traslado y las dificultades de comunicación (Bélanger & Eagles, 2001).

Sin embargo, la compacidad geométrica no se ha definido de manera exacta lo cual ha provocado la creación de una gran variedad de métodos que buscan medirla de manera cuantitativa, tan solo el análisis realizado por Richard G. Niemi en 1990 reunió 24 medidas

diferentes (Niemi, Grofman, Carlucci & Hofeller. 1990). Las medidas de compacidad encontradas en la literatura revisada se presentan en el apéndice A.

Una forma de comprender el concepto de compacidad geométrica es pensar que la forma de cada zona generada debe ser tan “parecida” como sea posible a un cuadrado, a un círculo o a una figura geométrica convexa. Aunque esta descripción refleja la idea intuitiva de compacidad geométrica, no proporciona una definición exacta que pueda ser utilizada para determinar si un plan de zonificación es compacto o no. Como consecuencia ninguna de las medidas propuestas hasta el momento ha resultado totalmente satisfactoria, en algunos casos debido a que sus resultados son incongruentes al aplicarlas a ciertas configuraciones geométricas (Young, 1988) pero en general, se debe a la posibilidad de generar zonas y/o planes de zonificación “compactos” con una tendencia política predeterminada lo cual contradice el objetivo original (Altman, 1998 (3). Altman, 1998 (1)). Sin embargo, se ha demostrado que la creación de una medida de compacidad capaz de agrupar a personas con preferencias semejantes, junto con la construcción de zonas conexas puede eliminar los sesgos políticos (Gilligan & Matsusaka, 2006).

Más aún, la capacidad para generar zonas compactas en aplicaciones reales puede verse disminuida al competir con otros criterios, como el equilibrio poblacional, o al ser aplicadas en configuraciones topográficas que dificulten su desempeño. Por este motivo, se acepta la combinación de diferentes métodos que en conjunto sean capaces de favorecer las formas deseadas, con lo cual se pueden crear soluciones de mejor calidad pero la medida obtenida será difícil de entender y de aplicar.

Por lo anterior, la elección del método, o combinación de métodos, adecuado, se convierte en una tarea complicada que recae en las organizaciones encargadas del diseño de zonas de cada país, dando como resultado el uso de diferentes medidas.

CAPÍTULO CUATRO

Compacidad mediante Celdas

En este capítulo se explica el método que se empleará para cuantificar, mediante el uso de celdas cuadradas, la similitud entre cada zona diseñada y el mínimo rectángulo que la inscribe, y que será utilizado en el capítulo siete para favorecer la construcción de zonas electorales con formas rectas. Sin embargo, el mismo método puede ser utilizado en cualquier problema que requiera medir la compacidad de las zonas o figuras analizadas.

Para poder aplicar la compacidad mediante celdas, la figura estudiada debe ser transformada en un conjunto de celdas cuadradas, del mismo tamaño y organizadas en filas y columnas. En este trabajo, únicamente se consideraron filas y columnas orientadas de este a oeste y de norte a sur respectivamente. En la Figura 1 se observan seis formas geométricas diferentes, hechas con celdas del mismo tamaño.

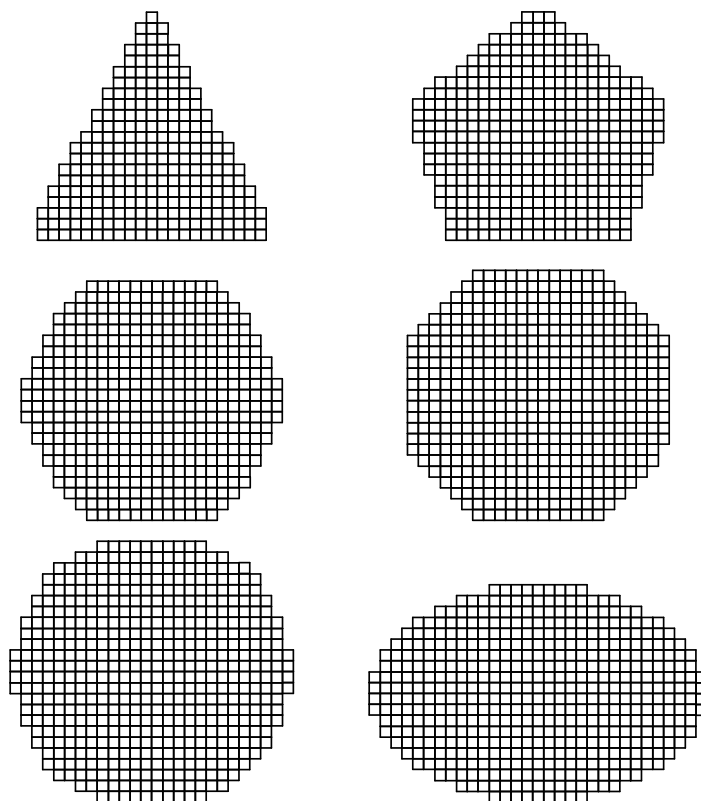


Fig. 1. Figuras geométricas formadas con celdas cuadradas.

Es importante destacar que la figura estudiada y la figura obtenida al transformarla en un conjunto de celdas cuadradas, pueden tener algunas diferencias. Sin embargo, estas diferencias se disminuyen al utilizar cuadrados suficientemente pequeños. En la Figura 2, se muestra a un círculo formado con cuatro tamaños diferentes de celdas, y se puede observar que la similitud aumenta conforme disminuye el tamaño de las celdas. Por este motivo, el método utilizado para realizar dicha conversión de figuras, debe permitir el uso de celdas tan pequeñas como el problema los requiera.

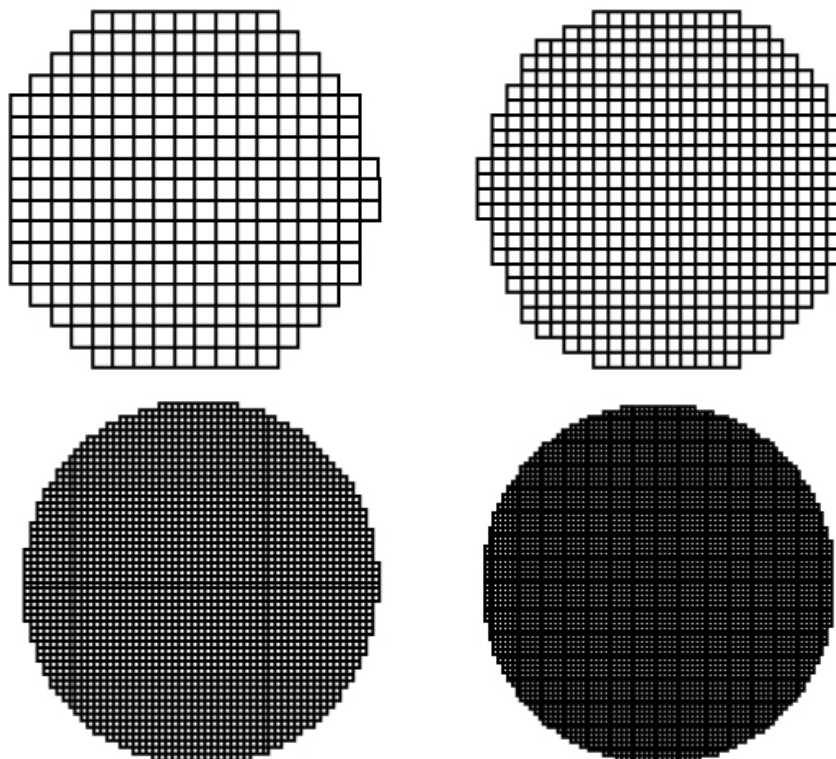


Fig. 2. Círculo formado con celdas de diferentes tamaños.

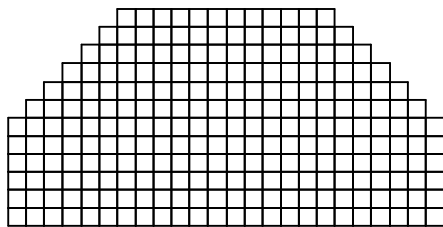
Una vez que se ha realizado la transformación de la figura, se puede observar que cada celda y sus lados sólo tienen dos opciones, formar parte del contorno o estar en el interior. A partir de lo anterior, se presentan las siguientes definiciones:

Definición 1: El área en celdas es el número de celdas que forman la figura.

Definición 2: El perímetro en celdas es el número de celdas que forman el contorno de la figura.

Definición 3: El perímetro en lados es el número de lados que se encuentran en el contorno de la figura.

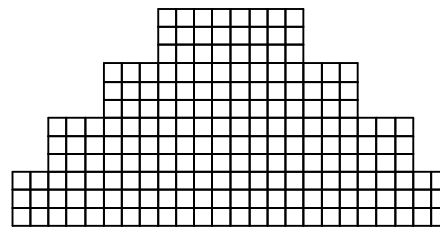
Es importante destacar que cada celda en el contorno de una figura puede tener hasta tres de sus lados formando parte del perímetro en lados. De hecho, la menor diferencia entre el perímetro en celdas y el perímetro en lados de una figura, ocurre cuando la figura analizada es un rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula. En la Figura 3 se presentan dos formas diferentes, y en cada caso se indica el área en celdas, el perímetro en celdas y el perímetro en lados correspondiente.



Área en celdas = 246

Perímetro en celdas = 56

Perímetro en lados = 72



Área en celdas = 198

Perímetro en celdas = 62

Perímetro en lados = 72

Figura 3. Área en celdas, perímetro en celdas y perímetro en lados.

Más aún, cada zona puede compararse con el mínimo rectángulo que la contiene orientado en la misma dirección que la cuadrícula, y se observa que zonas con formas retorcidas, alargadas y dispersas tendrán un área en celdas menor, y un perímetro en celdas y perímetro en lados mayor que dicho rectángulo, ver Figura 4.

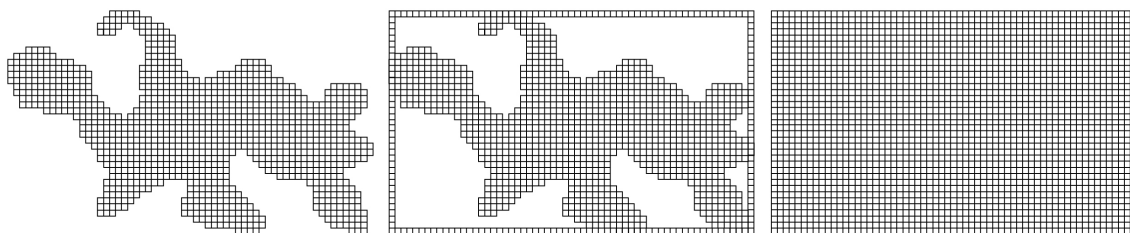


Figura 4. Zona analizada y mínimo rectángulo que la inscribe.

Por lo tanto, la máxima compacidad se obtendrá cuando la zona sea un rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula. Con lo cual, se favorece el diseño de zonas con pocas irregularidades y formas rectas.

Para medir la proporción entre el área en celdas se utiliza la siguiente operación

$$\frac{AC_R}{AC_Z} \geq 1 \quad (15)$$

Donde:

AC_Z , es el área en celdas de la zona

AC_R , es el área en celdas del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona

Con esta medida, todas las zonas tendrán valores mayores iguales que 1 y las figuras más compactas tendrán valores más pequeños.

Es importante destacar que el valor obtenido por este cociente depende de la orientación de la figura con respecto a la dirección de la cuadrícula. En la Figura 5 se muestran dos cuadrados del mismo tamaño pero con diferente orientación. Esta variación provoca que el mínimo rectángulo que los inscribe tenga un área diferente en cada caso, provocando que la medida anterior les asigne distintos valores.

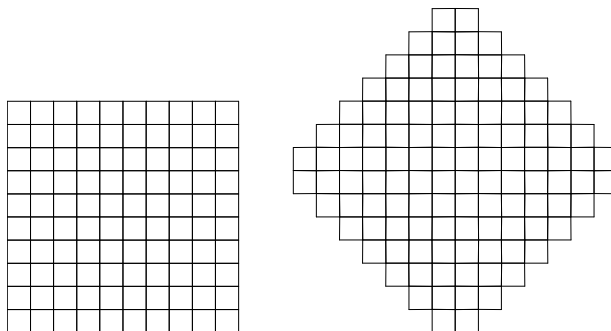


Figura 5. Dos cuadrados del mismo tamaño pero con diferente orientación.

Para medir la diferencia del perímetro en celdas se utiliza la siguiente operación⁵

$$\frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} \geq 2 \quad (16)$$

Donde:

PC_Z , es el perímetro en celdas de la zona

PC_R , es el perímetro en celdas del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona

Para que las zonas compactas obtengan valores iguales a cero, se realiza la siguiente modificación.

$$\frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} - 2 \geq 0 \quad (17)$$

Se debe aclarar que esta operación asigna valores diferentes a una misma figura dependiendo de su orientación con respecto a la dirección de la cuadrícula. En la Figura 5 se muestran dos cuadrados del mismo tamaño pero con diferente orientación. Este cambio provoca que el mínimo rectángulo que los inscribe tenga un perímetro en celdas distinto en cada caso, provocando que la medida anterior les asigne valores diferentes.

Para medir la proporción entre el perímetro en lados se utiliza la siguiente operación

$$\frac{P_Z}{P_R} \geq 1 \quad (18)$$

Donde:

P_Z , es el perímetro en lados de la zona

P_R , es el perímetro en lados del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona

⁵ La función $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$ tiene un mínimo en $x=1$. Por lo tanto

$\frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z}$ será mayor o igual que 2 para cualquier zona.

Nuevamente, para que las zonas compactas obtengan valores iguales a cero, se realiza la siguiente modificación.

$$\frac{P_Z}{P_R} - 1 \geq 0 \quad (19)$$

Es importante mencionar que esta operación asigna valores de cero a algunas figuras no convexas. En la Figura 6 se muestran dos figuras diferentes que tienen el mismo perímetro en lados que el mínimo rectángulo que las inscribe.

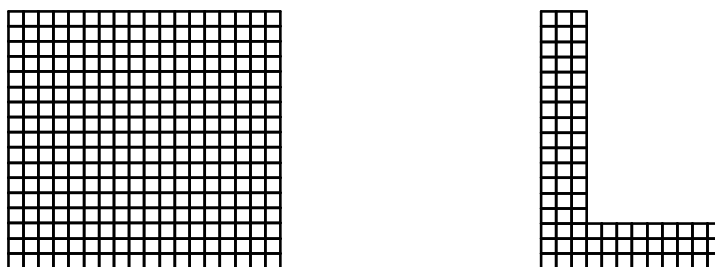


Figura 6. Figuras con el mismo perímetro en lados.

Como se mencionó anteriormente, las modificaciones realizadas a las operaciones que miden la diferencia del perímetro en celdas y del perímetro en lados, fueron hechas para que las zonas compactas obtengan valores iguales a cero. Sin embargo, las operaciones que miden la diferencia del área en celdas no fueron modificadas, porque se observó que las zonas generadas al utilizar la ecuación actual tienen formas menos retorcidas y dispersas que aquellas obtenidas al restarle una unidad.

Con estas operaciones, se establecen dos medidas diferentes para determinar la compacidad de las zonas estudiadas.

La primera medida toma en cuenta el área en celdas y el perímetro en lados de la zona estudiada y el mínimo rectángulo que la inscribe, de la siguiente manera:

$$\left(\frac{AC_R}{AC_Z} \right) \left(\frac{P_Z}{P_R} - 1 \right) \quad (20)$$

La segunda medida toma en cuenta el perímetro en celdas y el perímetro en lados de la zona estudiada y el mínimo rectángulo que la inscribe, de la siguiente manera:

$$\frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} + \frac{P_Z}{P_R} - 3 \quad (21)$$

De esta forma, ambas medidas le asignan valores muy cercanos a cero a las zonas más compactas.

Es importante destacar que para aplicar ambas propuestas solamente se requieren sumas, productos y divisiones de áreas y perímetros, por lo que se considera que son fáciles de entender y sencillas de calcular, lo cual favorecerá el desempeño de cualquier algoritmo que deba calcular en varias ocasiones el costo de las zonas diseñadas.

CAPÍTULO CINCO

Modelo Propuesto

En este capítulo se presenta el modelo de programación no lineal entero mixto propuesto en este trabajo para la construcción de zonas electorales con equilibrio poblacional, conexas y compactas. Para lo cual, se explicarán cada una de las partes que integran el modelo y finalmente serán unidas para obtener la estructura final.

5.1. Función Objetivo

La función objetivo buscará minimizar la desviación poblacional y maximizar la compacidad geométrica.

El equilibrio poblacional será medido con la fórmula usada por el IFE en las elecciones del 2006.

$$\sum_{s \in S} \left(\frac{100P_T}{d_a(P_N/300)} \right)^2 \left(\frac{P_s}{P_T} - \frac{1}{n} \right)^2$$

Donde:

P_N = población nacional

P_T = población de la entidad

P_s = población de la zona s

d_a = porcentaje de desviación poblacional máxima aceptable por zona

n = número de zonas que deben crearse

$S = \{1, 2, 3, \dots, r\}$, donde r es el número de distritos electorales que se deben generar en la entidad

Es importante destacar que los cocientes $\frac{P_T}{P_N}$ y $\frac{P_s}{P_T}$ hacen que esta medida sea adimensional. También se observa que mientras menor es el valor obtenido por una

solución, mayor será su equilibrio poblacional. De hecho, el equilibrio poblacional perfecto se alcanza cuando todas las zonas tienen la misma cantidad de habitantes, y en este caso la medida asigna un valor de cero.

Para determinar la compacidad de las zonas se utilizarán por separado las medidas propuestas en este trabajo.

$$\text{Compacidad1} = \sum_{s \in S} \left(\frac{AC_{Rs}}{AC_{Zs}} \right) \left(\frac{P_{Zs}}{P_{Rs}} - 1 \right)$$

Donde:

AC_{Zs} , es el área en celdas de la zona s

AC_{Rs} , es el área en celdas del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona s

P_{Zs} , es el perímetro en lados de la zona s

P_{Rs} , es el perímetro en lados del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona s

$S = \{1, 2, 3, \dots, r\}$, donde r es el número de distritos electorales que se deben generar en la entidad

O bien,

$$\text{Compacidad2} = \sum_{s \in S} \frac{PC_{Zs}}{PC_{Rs}} + \frac{PC_{Rs}}{PC_{Zs}} + \frac{P_{Zs}}{P_{Rs}} - 3$$

Donde:

P_{Zs} , es el perímetro en lados de la zona s

PC_{Zs} , es el perímetro en celdas de la zona s

P_{Rs} , es el perímetro en lados del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona s

PC_{Rs} , es el perímetro en celdas del mínimo rectángulo orientado en la misma dirección que la cuadrícula que inscribe a la zona s

$S = \{1, 2, 3, \dots, r\}$, donde r es el número de distritos electorales que se deben generar en la entidad

5.2. Conexidad

Para garantizar la conexidad de las zonas se utilizarán las restricciones propuestas por Shirabe (Shirabe, 2005a). Como se mencionó anteriormente, estas desigualdades establecen una analogía entre la conexidad de una zona y el envío de unidades de flujo desde múltiples fuentes hasta un sumidero en una red de conexa. Para hacerlo, cada unidad geográfica es considerada como un vértice, y la colindancia entre dos unidades geográficas es representada con una arista que une los vértices correspondientes. Asimismo, se considera que uno de los vértices funciona como sumidero, mientras que el resto son fuentes que envían una unidad de flujo. Si el abastecimiento enviado desde cada fuente es recibido en el vértice sumidero sin salir de la red, entonces la zona es conexa.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} \geq x_{is} - Mw_{is} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} w_{is} = 1 \quad \forall s \in R \quad (24)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} \leq (M-1)x_{is} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (25)$$

$$x_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (26)$$

$$w_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (27)$$

$$y_{jis} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (28)$$

Donde:

$I = \{1,2,3,\dots,n\}$, n es el número de UGB consideradas en el problema

$R = \{1,2,3,\dots,r\}$, r es el número de zonas que se deben generar

$$x_{is} = \begin{cases} 1 & \text{si la UGB } i \text{ pertenece a la zona } s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i \in I, s \in R$$

$A = \{(i,j) : \text{las UGB } i, j \text{ son contiguas}\}$

$$w_{is} = \begin{cases} 1 & \text{si la UGB } i \text{ de la zona } s \text{ es un sumidero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i \in I, s \in R$$

y_{jis} = variable continua no negativa que representa la cantidad de flujo desde UGB i hasta la UGB j en la zona s

M = un número mayor que la cantidad de variables asociadas a las UGB

La restricción (23) representa el flujo en cada vértice. Los términos en el lado izquierdo de esta desigualdad representan, respectivamente, el flujo de salida y el flujo de entrada en el vértice i . Si el vértice i es parte de la zona s pero no es un sumidero, entonces $x_{is} = 1$, $w_{is} = 0$, y por lo tanto el flujo deberá ser mayor o igual que 1. Si el vértice i es parte de la zona s y es un sumidero, entonces $x_{is} = 0$, $w_{is} = 1$, y por lo tanto se puede tener una demanda (un flujo negativo) menor o igual que $M - 1$. La restricción (24) implica que un vértice y solo uno puede ser sumidero. La restricción (25) garantiza que no habrá flujo hacia ningún vértice afuera de la zona s , y que el flujo de cada vértice no será mayor que $M - 1$.

5.3. Estructura Final

Para presentar el modelo completo, se agrega la siguiente notación:

$Z_s = \{i : x_{is} = 1\}$, es el conjunto de UGB que forman la zona s con $s \in R$

$P = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_r\}$, es un plan de zonificación

$C_1(P)$, es el costo del equilibrio poblacional asociado al plan de zonificación P dado por

$$C_1(P) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{100P_T}{d_a(P_N/300)} \right)^2 \left(\frac{P_{Z_i}}{P_T} - \frac{1}{n} \right)^2 \quad (29)$$

$C_2(P)$, es el costo de la compacidad geométrica asociado al plan de zonificación P dado por

$$C_2(P) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{AC_{Ri}}{AC_{Zi}} \right) \left(\frac{P_{Zi}}{P_{Ri}} - 1 \right) \quad (30)$$

o bien

$$C_2(P) = \sum_{i=1}^r \frac{PC_{Zi}}{PC_{Ri}} + \frac{PC_{Ri}}{PC_{Zi}} + \frac{P_{Zi}}{P_{Ri}} - 3 \quad (31)$$

α_1, α_2 , factores de ponderación no negativos para los términos $C_1(P)$ y $C_2(P)$ respectivamente

De esta forma, cada zona Z_s , $s \in R$, está formada por las UGB que le fueron asignadas, $x_{is} = 1$, y todo plan de zonificación P se encuentra formado por las zonas $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_r$.

Utilizando esta notación, se busca minimizar una función en la cual se suman la medida de equilibrio poblacional, $C_1(P)$, y una de las medidas de compacidad geométrica, $C_2(P)$, utilizando factores de ponderación no negativos, α_1 y α_2 , que representen la importancia relativa de cada uno de estos objetivos. Es importante mencionar que los factores de ponderación deben permitir que las soluciones de costo mínimo tengan una desviación poblacional dentro del límite indicado, al tiempo que se favorece el diseño de zonas compactas. Finalmente, se plantea el problema de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } C(P) = \alpha_1 C_1(P) + \alpha_2 C_2(P) \quad (32)$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^n x_{is} \geq 1 \quad \forall s \in R \quad (33)$$

$$\sum_{s=1}^r x_{is} = 1 \quad \forall i \in I \quad (34)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{ijs} - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} \geq x_{is} - M w_{is} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (35)$$

$$\sum_{i \in I} w_{is} = 1 \quad \forall s \in R \quad (36)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} \leq (M-1) x_{is} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (37)$$

$$x_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (38)$$

$$w_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad \forall s \in R \quad (39)$$

$$y_{ijs} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (40)$$

De esta forma, la función objetivo busca que el resultado óptimo tenga la menor desviación poblacional y la mayor compacidad posible. La restricción (33) garantiza que en cada zona se incluya al menos una unidad geográfica. La restricción (34) obliga a cada unidad geográfica a pertenecer exactamente a una zona. Por lo tanto, las restricciones (33) y (34) garantizan que todo plan de zonificación factible esté formado por el número exacto de zonas, ajenas entre si y que incluya todas las UGB. Las restricciones (35), (36) y (37) garantizan la conexidad de las zonas construidas. En particular, la restricción (38) indica la imposibilidad de dividir o fraccionar las unidades geográficas, lo cual complica la

construcción de zonas compactas, ya que al agregar o quitar una unidad geográfica completa se tiene menor control sobre la nueva forma de la zona, en comparación con los resultados que se obtendrían si se pudiera agregar o quitar solamente el espacio geográfico necesario para mejorar su compacidad.

Es importante destacar, que los resultados obtenidos en este trabajo no son comparables con los planes de zonificación propuestos por el IFE para las elecciones del 2006, ya que las funciones objetivo son distintas y por lo tanto, las soluciones propuestas, buscarán el equilibrio entre criterios diferentes. Más aún, el objetivo no es contrastar los distritos, de muy buena calidad, diseñados por el IFE con las zonas obtenidas en este trabajo, sino proponer nuevas medidas de compacidad geométrica, capaces de generar zonas con formas rectilíneas incluso en escenarios complicados, y cuyo cálculo requiera pasos algebraicos sencillos y fáciles de realizar.

CAPÍTULO SEIS

Algoritmo Heurístico

El diseño de zonas es un problema NP-Duro, como ya se mencionó anteriormente, y en este trabajo se propone un modelo no lineal entero mixto ya que en la función objetivo se incluyen términos cuadráticos y cocientes entre las variables, y además se utilizan variables continuas y binarias. En estos casos, resulta conveniente la aplicación de un software especializado, como GAMS, para poder resolver el problema de manera exacta. Sin embargo, resulta muy complicado tener acceso a estos programas y aún cuando se pudiera disponer de ellos, el tiempo necesario para encontrar el óptimo podría ser excesivo debido al tamaño del espacio solución. Por este motivo, es necesario diseñar un método de búsqueda capaz de generar soluciones de buena calidad en tiempo de cómputo acotado por una función polinomial. Los algoritmos heurísticos son capaces de realizar una búsqueda con estas características y, como se observó en el capítulo 3, varios de ellos han sido aplicados al diseño de zonas.

En este trabajo, se utilizó un algoritmo basado en recocido simulado por tratarse de una heurística que ha demostrado su eficiencia en una amplia variedad de problemas NP-Duros. Más aún, su buen desempeño en el diseño de zonas electorales quedó comprobado con el trabajo realizado por el IFE para las elecciones del 2006. Por estos motivos se considera que las soluciones obtenidas por una implementación apropiada, permitirán determinar si las medidas de compacidad propuestas son capaces de generar zonas con formas rectilíneas, y en caso de que los resultados no sean satisfactorios, se sabrá que el error proviene de la medida y no del algoritmo.

6.1. Recocido Simulado

Recocido Simulado es una de las heurísticas más conocidas, que por su simplicidad y buenos resultados en numerosos problemas, se ha convertido en una herramienta muy popular, con aplicaciones en diferentes áreas de optimización. El concepto fue introducido en el campo de la optimización combinatoria a inicios de la década de los 80 por Kirkpatrick (Kirkpatrick, Gellat & Vecchi, 1983) y Cerny (Cerny, 1985). Esta heurística, se inspira en una analogía entre el proceso de recocido de sólidos y la forma en que se resuelven problemas de optimización combinatoria. Dicha analogía resulta importante para comprender la forma en que trabaja esta heurística, por lo cual se explicará de manera breve el proceso de recocido de sólidos.

El recocido de sólidos es un proceso de tratamiento térmico por el que el vidrio y ciertos metales y aleaciones se hacen menos quebradizos y más resistentes a la fractura. El objetivo de este proceso es minimizar los defectos internos en la estructura atómica del material y eliminar posibles tensiones internas provocadas en las etapas anteriores de su procesado. Para lograrlo, los metales ferrosos y el vidrio se recuecen calentándolos a alta temperatura y enfriándolos lentamente. Cada vez que se baja la temperatura, las partículas se reacomodan en estados de más baja energía hasta que se obtiene un sólido con partículas acomodadas conforme a una estructura adecuada. Cuando el volumen de metal o vidrio es grande suele enfriarse dentro del horno de calentamiento; las láminas suelen recocerse en un horno de proceso continuo. El material a recocer se traslada sobre un tablero móvil a través de una cámara de gran longitud con un gradiente de temperaturas cuidadosamente fijado, desde un valor inicial justo por debajo del punto de ablandado hasta la temperatura ambiente en el extremo final. Si el proceso de enfriamiento es demasiado rápido no se alcanzará el equilibrio térmico y el sólido obtendrá un estado cuya estructura será amorfa caracterizada por una imperfecta cristalización del sólido. El tiempo de recocido, sobre todo en el caso del vidrio, varía mucho según el espesor de cada pieza; el vidrio de ventana, por ejemplo, requiere varias horas; el vidrio cilindrado necesita varios días, y los espejos de vidrio para telescopios reflectores, varios meses.

En 1953 Metropolis *et al* introdujeron un algoritmo en el campo de la termodinámica estadística, para modelar el proceso de recocido de sólidos simulando los cambios energéticos en un sistema de partículas conforme decrece la temperatura, hasta que converge a un estado estable (congelado). El algoritmo está basado en técnicas de Monte Carlo y genera una sucesión de estados del sólido de la siguiente manera. Dado un estado i del sólido con energía E_i , entonces el siguiente estado j es generado al aplicar una pequeña perturbación al estado actual, por ejemplo el movimiento de una partícula. La temperatura del nuevo estado es E_j . Si la diferencia de energía $E_j - E_i$, es menor o igual que cero, el estado j es aceptado como estado actual. Si la diferencia es mayor que cero, el estado j es aceptado con una probabilidad dada por:

$$\exp\left(\frac{E_i - E_j}{k_B T}\right) \quad (41)$$

donde T denota la temperatura a la cual se encuentra el sólido y k_B es una constante física llamada la constante de Boltzmann. Este criterio de aceptación es conocido como el criterio de Metrópolis. Si el decremento de la temperatura es suficientemente lento, el sólido alcanzará un equilibrio térmico en cada temperatura.

Regresando a la heurística de recocido simulado, el algoritmo de Metrópolis puede ser utilizado para generar soluciones a problemas de optimización combinatoria si se hacen las siguientes consideraciones:

- Las soluciones del problema de optimización son equivalentes a los estados del sólido

- El costo de una solución es equivalente a la energía de cada estado
- La temperatura será sustituida por un parámetro de control que regulará la probabilidad de aceptación de nuevas soluciones

La heurística de recocido simulado comienza con una solución y una temperatura T_0 . Se recomienda que al inicio del algoritmo la temperatura sea suficientemente alta para permitir todo, o casi todo, movimiento, es decir, que la probabilidad de pasar de la solución P_A a la solución P_B sea muy alta, sin importar la diferencia entre los costos de ambas soluciones, $f(P_B) - f(P_A)$.

En cada iteración genera de manera aleatoria una solución vecina, si la nueva solución mejora el valor de la función objetivo con respecto a la solución actual, ésta última es reemplazada. Cuando la nueva solución no mejora el valor de la función objetivo, se puede aceptar el cambio de la solución actual con cierta probabilidad dada por:

$$\exp\left(\frac{f(P_A) - f(P_B)}{T}\right) \quad (42)$$

donde, $f(P_A)$ es el costo de la solución actual, $f(P_B)$ es el costo de la solución vecina y T es la temperatura del proceso. Conforme el algoritmo avanza, el valor de la temperatura disminuye mediante un coeficiente de enfriamiento, $0 < \alpha < 1$, pero cada valor es mantenido estable durante L iteraciones, para permitir que el algoritmo explore distintas soluciones con la misma probabilidad de aceptación.

Debe observarse que al inicio, cuando la temperatura es alta, se tiene una mayor probabilidad de aceptar soluciones inferiores, lo cual permite la exploración del espacio solución y evita la convergencia prematura a mínimos locales. Sin embargo, conforme disminuye el valor de la temperatura, el algoritmo se hace más selectivo y difícilmente acepta soluciones inferiores, iniciando una búsqueda que lo guía hacia un mínimo local. Finalmente, el algoritmo es detenido cuando la temperatura alcanza un valor límite, T_f , y devuelve la mejor solución encontrada.

Los parámetros de temperatura inicial T_0 , coeficiente de enfriamiento α , temperatura final T_f y número de soluciones visitadas en cada temperatura L , son conocidos como programa de enfriamiento y juegan un papel importante en el desarrollo del algoritmo. Si se utilizan valores demasiado grandes el tiempo de ejecución podría ser excesivo, mientras que valores demasiado pequeños podrían provocar una convergencia prematura a un mínimo local.

Se han propuesto diferentes métodos para determinar el programa de enfriamiento más eficiente, y pueden distinguirse dos clases importantes: programas estáticos y programas

dinámicos. En los programas de enfriamiento estático los parámetros son fijos y no pueden cambiar durante la ejecución del algoritmo. En los programas de enfriamiento dinámico, los parámetros se adaptan y modifican durante la ejecución del algoritmo. En este trabajo se utilizará un programa de enfriamiento estático y para determinar los valores de los parámetros se tomarán las siguientes consideraciones.

Temperatura Inicial T_0

La temperatura inicial T_0 debe permitir casi todo movimiento, por lo cual será lo suficientemente alta para que el algoritmo acepte al menos el 80% de las soluciones inferiores encontradas.

Factor de Enfriamiento α

Un método muy usado para disminuir la temperatura es dado por la función

$$T_{k+1} = \alpha T_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Donde α es una constante positiva menor que 1. Normalmente se le asignan valores entre 0.8 y 0.99.

Criterio de Cambio de la Temperatura L

La cantidad de iteraciones que se hacen en cada temperatura, afecta tanto el tiempo de ejecución del algoritmo como su capacidad para explorar el espacio solución y por lo tanto, de encontrar soluciones de buena calidad. Para lograr un equilibrio adecuado, se recomienda establecer un valor fijo relacionado con el número de vecindades del problema.

Otro factor importante para el desempeño del algoritmo, es la forma en que se definen a las soluciones vecinas o vecindario de la solución actual. En este trabajo, las soluciones vecinas serán generadas de la siguiente manera.

Solución Vecina

De la solución actual se elige de manera aleatoria una UGB que pueda ser cambiada de zona, de tal forma que el resultado sea otra solución factible. Primero se garantiza la conexidad de las nuevas zonas, mediante la elección de una UGB que se encuentre en la colindancia entre dos zonas y que, al ser cambiada, no provoque una disconexión en la zona a la cual pertenece actualmente. Después, se revisa que el cambio no disminuya el número de zonas. De esta forma, cada solución vecina es una solución factible que se diferencia de la anterior sólo por la ubicación de una UGB.

Por último, se explicará la forma en que es construida la solución inicial. Sin embargo, es importante mencionar que una de las cualidades más importantes de recocido simulado, es su capacidad para obtener soluciones de buena calidad, que son totalmente independientes de la solución que se utilice al inicio del algoritmo.

Solución Inicial

El algoritmo empieza con la construcción de una solución factible, para lo cual selecciona de manera aleatoria r UGB y las marca como zonas iniciales. Después, a cada zona le anexa una UGB vecina que aún no forme parte de ninguna zona y continúa hasta incluir todas las UGB. De esta forma se obtiene una solución factible con r zonas conexas ajenas que incluyen a todas las UGB.

CAPÍTULO SIETE

Aplicación

El estado de Baja California es uno de los estados de la República Mexicana en el que resulta difícil diseñar zonas compactas con equilibrio poblacional, debido a la diversidad en formas y tamaños de las unidades geográficas que lo constituyen, ver Figura 7, así como a la distribución de su población⁶. Por lo anterior, se aplicó el modelo propuesto en el capítulo 4 a dicho estado para determinar si la compacidad mediante celdas es capaz de diseñar zonas con formas rectilíneas. Se considera que si los resultados son satisfactorios en este caso, serán de buena calidad, al aplicar el mismo modelo en configuraciones menos complicadas.

Baja California cuenta con una población de 2,487,367 habitantes, y se encuentra formado por 319 UGB que deben ser divididas en 8 zonas electorales, con un porcentaje de desviación poblacional máximo $d_a = 15\%$, de acuerdo con lo estipulado por el IFE. Se considerará una población nacional de 97,483,412 habitantes, según el censo practicado por INEGI en el año 2000.

A fin de aplicar la compacidad por celdas, el estado fue dividido en celdas cuadradas de 10 metros por lado. Para hacerlo se utilizó el sistema de información geográfica Arcview 3.0, que permite obtener, a partir de los archivos originales en formato shape, archivos en formato grid formados con celdas cuadradas del tamaño deseado. Debe observarse que el área de cada celda es de 100m^2 , pero la misma metodología puede aplicarse con celdas más grandes o pequeñas según lo requiera el problema, por ejemplo, en el diseño de zonas para una ciudad podrían construirse celdas de 1 metro por lado. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el tamaño de estos archivos puede llegar a ser muy grande si el espacio geográfico estudiado es muy amplio y las celdas son muy pequeñas.

Al obtener el archivo en formato grid, cada unidad geográfica es transformada en un conjunto de celdas cuadradas. Sin embargo, es necesario conocer el número de celdas y lados que forman tanto a cada UGB, como al perímetro que comparten con las unidades vecinas. Para obtener esta información se diseñó un programa en Avenue, el lenguaje de programación en Arcview, que lee los datos del archivo grid y los envía a archivos de texto, que son utilizados posteriormente por el heurístico diseñado en este trabajo.

⁶ De acuerdo con el II Censo de Población y Vivienda 2005, INEGI, el 49.59% de la población se localizaba en el municipio de Tijuana cuya extensión representa el 2.25% del territorio estatal.

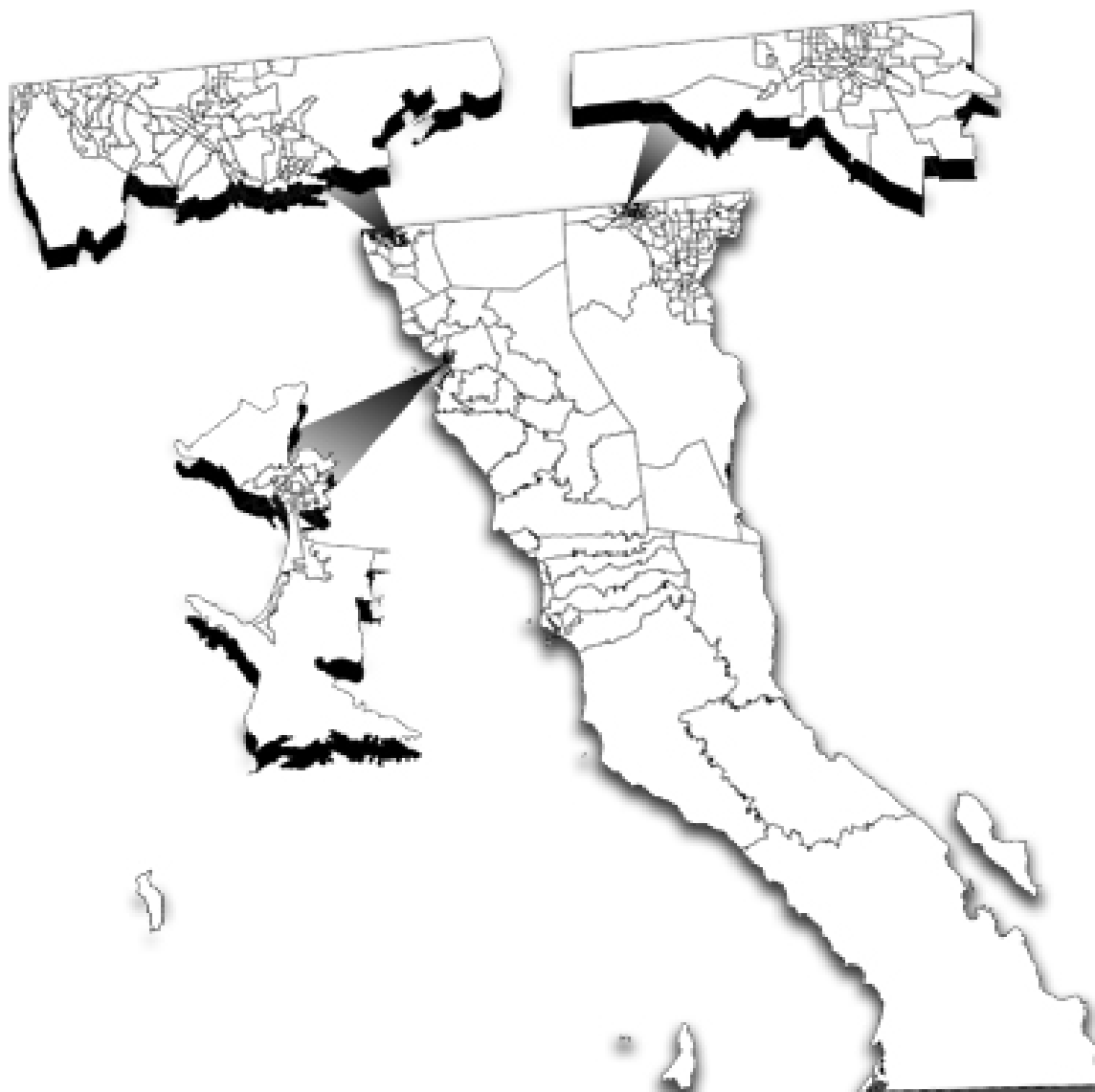


Fig.7. Unidades geográficas básicas de Baja California

Por último, se diseñó un algoritmo basado en recocido simulado, escrito en C++, para realizar la búsqueda en el espacio de soluciones factibles del problema estudiado. En cada iteración, el algoritmo de optimización calcula el número de habitantes, el perímetro en lados y el área en celdas, o bien el perímetro en celdas de cada zona, dependiendo de la medida de compacidad que se esté utilizando, para establecer el costo de cada solución, y determinar si las nuevas soluciones son aceptadas o rechazadas según los criterios de recocido simulado.

Para determinar los valores de los factores del programa de enfriamiento, se realizaron varias corridas que permitieron conocer el comportamiento de las soluciones visitadas por el algoritmo. Para ambas medidas de compacidad, se establecieron los siguientes valores:

- Temperatura inicial $T_0 = 10$, con un porcentaje de aceptación superior al 80%
- Temperatura final $T_f = 0.005$, con un porcentaje de aceptación menor al 1%
- Criterio de cambio de la temperatura $L = 1000$
- Factor de enfriamiento $\alpha = 0.97$

Para determinar los valores de los factores de ponderación también se realizaron varias corridas asignándoles distintos valores, y se observó como variaban los costos de equilibrio poblacional y compacidad geométrica tanto en las soluciones visitadas como en las soluciones finales. Se notó que se favorecían las soluciones con un buen equilibrio poblacional, dando como resultado valores relativamente altos en la compacidad geométrica. Finalmente, para estimar los valores de ambos parámetros, se observó la cantidad que incrementa el costo de $C_2(P)$ para que la función objetivo mantenga el mismo valor asociado, cuando el criterio $C_1(P)$ disminuye una unidad, (Steuer, 1986). Con este procedimiento, se obtuvieron valores de ponderación bajos para el equilibrio poblacional en comparación con los valores asignados a las medidas de compacidad geométrica.

- En la medida de compacidad 1 se utilizaron $\alpha_1 = 0.2$ y $\alpha_2 = 0.8$
- En la medida de compacidad 2 se utilizaron $\alpha_1 = 0.1$ y $\alpha_2 = 5$

Es importante destacar que la diferencia tan amplia en los factores de ponderación no implica ninguna ventaja de la compacidad geométrica sobre el equilibrio poblacional, de hecho, los resultados obtenidos muestran un equilibrio poblacional con un porcentaje de desviación inferior al límite establecido por el IFE en las zonas generadas con ambas medidas.

7.1. Resultados Obtenidos al Aplicar la Medida de Compacidad 1

En la Tabla 8 se presentan los costos del equilibrio poblacional de todas las zonas propuestas como solución final al aplicar la medida de compacidad 1. Se observa que las zonas más penalizadas son las que tienen un mayor porcentaje de desviación con respecto a la población ideal, de aproximadamente 310,921 electores. Sin embargo, todas tienen un costo menor que 1, con lo cual se respeta el porcentaje desviación establecido por el IFE.

En el caso de la compacidad geométrica, los costos más altos se encuentran en las zonas 1 y 4, ver Tabla 9. Estos valores tan altos, en comparación con el resto de las zonas, son provocados por la preferencia que se le da al equilibrio poblacional y confirman la competencia que existe con la compacidad geométrica. Sin embargo, gracias a los factores de ponderación, la medida de compacidad puede diseñar zonas congruentes con los objetivos propuestos, al favorecer las formas rectas y evitar figuras retorcidas, alargadas y dispersas; ver Figura 8.

ZONA	Habitantes	Equilibrio Poblacional
1	305 167	0.00278708
2	306 001	0.00203768
3	299 633	0.01072637
4	302 098	0.00655313
5	323 716	0.01378217
6	332 889	0.04062698
7	312 992	0.00036111
8	304 871	0.00308121

Tabla 8. Resultados de equilibrio poblacional por zona al aplicar la medida 1

ZONA	Compacidad Geométrica
1	2.101813
2	0.407717
3	0.118237
4	1.894465
5	0.227546
6	0.152822
7	0.421003
8	0.368051

Tabla 9. Costos de compacidad geométrica por zona al aplicar la medida 1

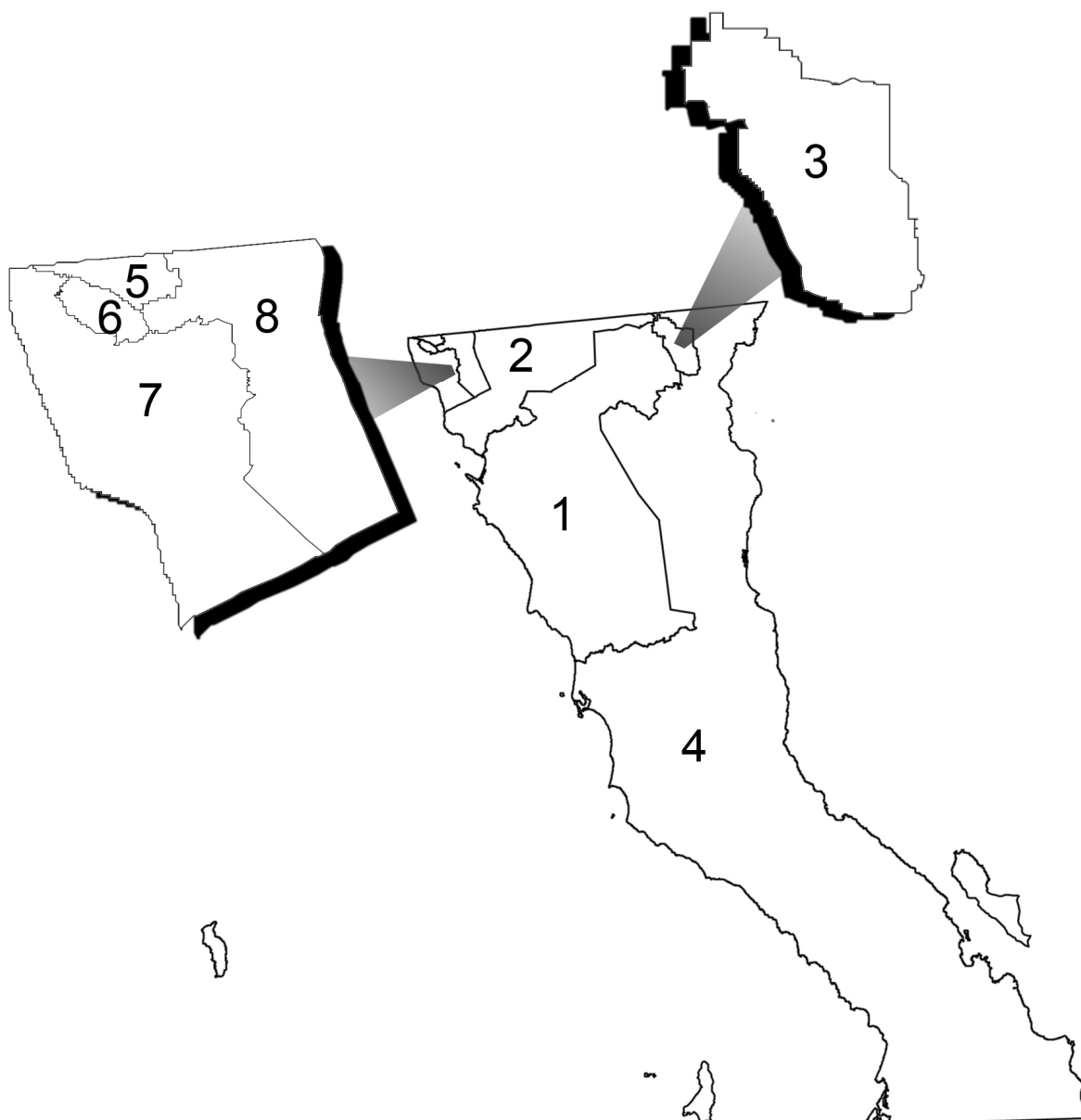


Fig. 8. Zonas generadas al aplicar la medida de compacidad geométrica 1

7.2. Resultados Obtenidos al Aplicar la Medida de Compacidad 2

En la Tabla 10 se presentan los costos del equilibrio poblacional de todas las zonas propuestas como solución final al aplicar la medida de compacidad 2. Nuevamente se observa que los valores se encuentran dentro del límite de desviación permitido, con costos menores que 1.

En el caso de la compacidad geométrica, se obtienen costos menores que 1 en la mayoría de las zonas, excepto en la zona 3, ver Tabla 11. Sin embargo, el costo de esta

zona se ve afectado, principalmente, por la forma inclinada e irregular de la frontera costera del estado, ver Figura 9.

ZONA	Habitantes	Equilibrio Poblacional
1	322 249	0.00540150
2	269 506	0.07219569
3	305 902	0.00106026
4	315 242	0.00078595
5	283 741	0.03109521
6	322 497	0.00564060
7	340 267	0.03624934
8	327 963	0.01222492

Tabla 10. Resultados de equilibrio poblacional por zona al aplicar la medida 2

ZONA	Compacidad Geométrica
1	0.020923
2	0.238686
3	4.023066
4	0.278721
5	0.057087
6	0.064701
7	0.096957
8	0.093032

Tabla 11. Costos de compacidad geométrica por zona al aplicar la medida 2

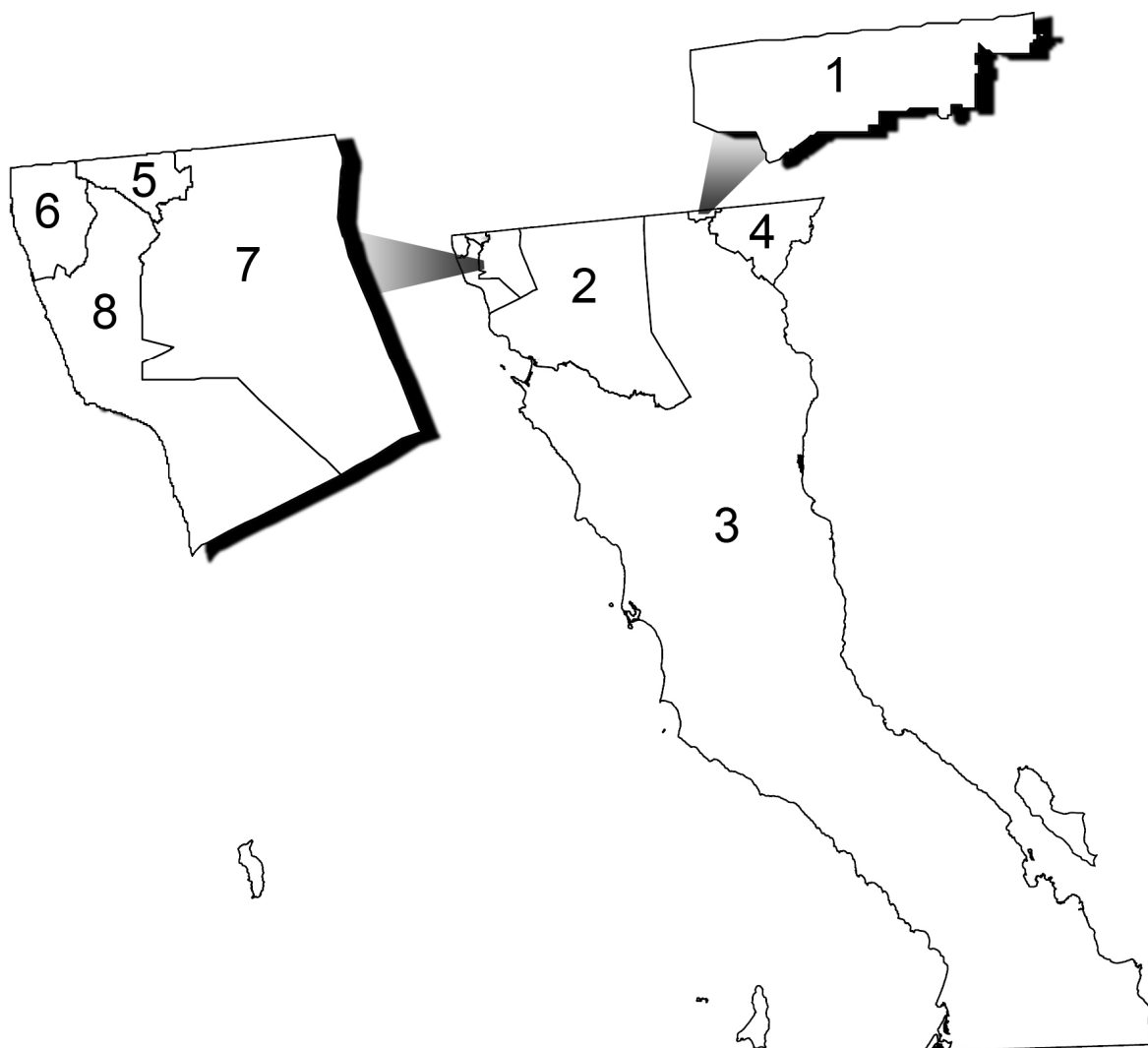


Fig. 9. Zonas generadas al aplicar la medida de compacidad geométrica 2

En los resultados obtenidos, se puede observar la competencia que existe entre el equilibrio poblacional y la compacidad geométrica, de tal forma que la mejora de uno de ellos puede implicar el deterioro del otro como ocurre en todo problema multiatributo. Sin embargo, en las soluciones obtenidas por ambas medidas, los costos del equilibrio poblacional se encuentran por abajo del límite permitido, y se favorecen las zonas con formas rectas. Lo anterior muestra que ambas medidas de compacidad y los factores de ponderación propuestos no afectan, de manera significativa, la distribución poblacional al tiempo que promueven la calidad en la forma de las zonas. Esto es un punto muy importante, ya que zonas muy compactas pero con escaso equilibrio poblacional o bien, zonas con muy buen equilibrio poblacional pero de formas confusas serán rechazadas por sospecha de manipulación electoral, aunque todo el proceso haya sido imparcial.

CAPÍTULO OCHO

Conclusiones

En esta tesis se propone un método para transformar un espacio geográfico en un conjunto de celdas cuadradas, y calcular el área en celdas, el perímetro en celdas y el perímetro en lados de la figura obtenida mediante dicha transformación. Para hacerlo, se utiliza un sistema de información geográfica, lo cual facilita la creación de celdas tan grandes o pequeñas como el problema lo requiera. Más aún, gracias al trabajo realizado en la dirección de cartografía del IFE, es posible aplicar este método en toda la República Mexicana.

Utilizando las figuras formadas con celdas cuadradas se proponen dos nuevas medidas para cuantificar la compacidad geométrica, que no habían sido utilizadas en el diseño de zonas, al menos hasta donde se tiene conocimiento. El método propuesto, permite que las medidas puedan ser utilizadas para crear zonas con formas rectilíneas en cualquier tipo de problema geográfico.

Para explorar el espacio de soluciones se diseñó un algoritmo basado en recocido simulado, debido a su eficiencia en la resolución de problemas complejos y a su capacidad para obtener soluciones finales que no dependen de la solución inicial, lo cual es una condición muy importante tanto en procesos electorales que buscan garantizar la democracia y evitar cualquier tipo de manipulación, como en problemas que requieren diversidad en soluciones de buena calidad.

Tanto el modelo como las nuevas medidas de compacidad fueron usados en el estado de Baja California, México, cuya configuración topográfica complica el diseño de zonas compactas. Las soluciones obtenidas por el algoritmo heurístico probaron que las medidas son capaces de crear zonas con formas rectas y evitar figuras retorcidas o dispersas, sin importar la diversidad de formas o tamaños de las unidades geográficas básicas, al tiempo que mantiene al equilibrio poblacional dentro de los límites establecidos. De esta forma, se comprobó que ambas medidas son capaces de generar zonas de alta calidad, tanto por su forma como por el número de electores que contiene, dando como resultado planes de zonificación electoral que difícilmente serían rechazados.

Por último, las operaciones propuestas para medir la compacidad mediante celdas, son sencillas y requieren de muy poco tiempo para ser ejecutadas. Lo cual se convierte en una cualidad muy valiosa en este tipo de problemas, ya que calcular el costo de cada solución visitada puede afectar considerablemente el tiempo de ejecución de cualquier algoritmo. Por lo anterior, si ya se cuenta con un algoritmo para el diseño de zonas compactas, se puede agregar cualquiera de las medidas propuestas en este trabajo, y la eficiencia del proceso de búsqueda no será afectada de manera considerable.

APÉNDICE

Medidas de compacidad geométrica encontradas en la bibliografía revisada.

En las siguientes tablas se incluyen las medidas de compacidad encontradas en la literatura revisada.

Medidas basadas en longitud y anchura	
Ecuación	Descripción
W/L	L es el eje más largo de la zona y W la longitud máxima perpendicular al eje L (Harris 1964)
W/L	W y L son tomados de un rectángulo con mínima área que circunscribe la zona
W/L	W y L son tomados de un rectángulo con mínimo perímetro que circunscribe la zona (Niemi, et al. 1991)
W/L	W y L son el eje menor y el eje mayor de la zona respectivamente (Flaherty and Crumplin 1992)
W/L	W y L son tomados de un rectángulo que encierra la zona, la toca en sus cuatro lados y para el cual la división del lado mayor entre el lado menor es máxima (Young 1988)
$1/(W/L)$	W y L son tomados de un rectángulo que encierra la zona, la toca en sus cuatro lados y para el cual la división del lado mayor entre el lado menor es máxima (Niemi, et al. 1991) modificación de (Young 1988)
W/L	W y L son tomados de un rectángulo que encierra la zona y la toca en sus cuatro lados (Niemi, et al. 1991)
$L - W$	L y W son medidos de norte a sur y de este a oeste respectivamente (Eig and Seitzinger 1981)
$L - W$	L es el eje más largo de la zona y W la longitud máxima perpendicular al eje L
D_{ci}/D_{cc}	D_{ci} es el diámetro del círculo inscrito y D_{cc} el diámetro del círculo circunscrito (Frolov 1974)

Medidas basadas en áreas	
Ecuación	Descripción
A_z/A_c	A_z es el área de la zona y A_c el área del mínimo círculo que circunscribe la zona (Frolov 1974)
A_z/A_H	A_z es el área de la zona y A_H el área del mínimo hexágono regular que circunscribe la zona (Geisler 1985), citado en (Niemi and Wilkerson 1990)
A_z/A_x	A_z es el área de la zona y A_x el área de la mínima figura convexa que contiene completamente a la zona (Niemi, et al. 1991)
A_z/A_R	A_z es el área de la zona y A_R el área de un círculo con diámetro igual al eje mayor de la zona (Gibbs 1961)
A_{ci}/A_{cc}	A_{ci} es el área del círculo inscrito y A_{cc} el área del círculo circunscrito (Flaherty and Crumplin 1992)
A_{ci}/A_z	A_{ci} es el área del círculo inscrito y A_z el área de la zona (Ehrenburg 1892) citado en (Frolov 1974)
A_{znc}/A_{zuc}	A_{znc} es el área de intersección entre la zona y un círculo de igual área y A_{zuc} el área de la unión de la zona y el círculo de igual área (Lee and Sallee 1970)
A_z/A_p	A_z es el área de la zona y A_p el área de un círculo con el mismo perímetro que la zona (Cox 1927) citado en (Niemi, et al. 1991)
$A_z/\left(2\int\int_D r^2 dD\right)^{1/2}$	Momento de inercia, A_z es el área de la zona D . Esta ecuación calcula el momento de inercia ajustado de 0 a 1 (Boyce and Clark 1964)

Momento de inercia

Se localiza el centro geográfico q de cada unidad geográfica de la zona. Se elige un punto arbitrario x y se calcula el cuadrado de la distancia de x a q , multiplicado por la población de la unidad geográfica correspondiente. La suma de estos números es el momento de inercia de la zona sobre el punto x . El punto que dé el mínimo momento de inercia es el centro de gravedad de la zona. Cuanto más pequeño sea el momento de inercia sobre el centro de gravedad más compacta será la zona.

Medidas basadas en perímetros y áreas	
Ecuación	Descripción
$\sum P_i$	P_i es el perímetro de la zona i (Adams 1977)
P_z/P_c	P_z es el perímetro de la zona y P_c el perímetro de un círculo con la misma área que la zona (Nagel 1835) citado en (Frolov 1974)
$100\left(\frac{P_z}{P_c}\right)$	Mide el perímetro de una zona como un porcentaje del mínimo perímetro que encierra esa zona (Pounds 1972)
$\left(\sum_{i \in I} P_i(x) - P\right) / 2P$	$P_i(x)$ es el perímetro de la zona i en la solución x y P el perímetro del territorio total
$\sum_{i \in I} \left(1 - \frac{2\pi\sqrt{A_i(x)/\pi}}{P_i(x)}\right) / m$	$P_i(x)$ es el perímetro de la zona i en la solución x y $A_i(x)$ es un círculo que tiene la misma área que la zona i
$\sum_i P_i^2 / A_i$	P_i es el perímetro y A_i el área de la i -ésima zona
$\sum_{j \in J} 1 - \frac{(2\pi\sqrt{A_j(x)/\pi}) / P_j(x)}{m}$	$P_j(x)$ es el perímetro y $A_j(x)$ el área de la zona j en la solución x y m es el número de zonas que deben crearse

Medidas basadas en población	
Ecuación	Descripción
Pob_z / Pob_x	Pob _z es la población en la zona y Pob _x la población en la mínima figura convexa que contenga completamente a la zona (Niemi, et al. 1991)
Pob_z / Pob_c	Pob _z es la población en la zona y Pob _c la población en el mínimo círculo que circunscribe a la zona (Niemi, et al. 1991)
	Momento de inercia poblacional normalizado (Weaver & Hess, 1963)
	Suma de las distancias entre los centros de las unidades geográficas que forman la zona pesados por la población contenida en cada unidad (Papayanopoulos 1973)

Otro tipo de medidas	
Ecuación	Descripción
$N - R / N + R$	N y R son el número de ángulos interiores no reflexivos y reflexivos respectivamente (Taylor 1973)
$\sum_j \sum_{i \in Z_j} d_{ij}$	d_{ij} representa la distancia Euclidiana entre la i-esima unidad geográfica y el centro de la zona que la contiene
	El promedio de las distancias entre el centro de gravedad de la zona y su frontera, medidas mediante líneas radiales espaciadas equitativamente (Boyce and Clark 1964)
	La máxima desviación absoluta del área promedio (Theobald 1970) citado en (Niemi, et al. 1991)
$S_{ij} = \frac{P_i P_j D_{ij}}{2}$	S_{ij} es la separación interpersonal entre los habitantes de las zonas i, j. P_i y P_j son las poblaciones de las zonas i, j y D_{ij} es la distancia entre los centroides de las zonas i, j (Plane 1982)
$S_{ii} = \frac{P_i(P_i - 1)D_i}{2}$	S_{ii} es la separación intrazona. P_i es la población de la zona i y D_i es la mínima distancia entre los centroides de la zona i y el resto de las zonas (Plane 1982)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altman M. (1997). *Is Automation the Answer: The Computational Complexity of Automated Redistricting*. Rutgers Computer and Law Technology Journal, 23(1), 81-141.
- Altman M. (1998) (1). *Modeling the effect of mandatory district compactness on partisan gerrymanders*. Political Geography, Vol. 17, Issue 8, pp. 989-1012.
- Altman M. (1998) (2). *The Consistency and Effectiveness of Mandatory District Compactness Rules*. Doctoral Thesis, California Institute of Technology.
- Altman M. (1998) (3). *Traditional Districting Principles: Judicial Myths vs. Reality*. Social Science History, Vol. 22, No. 2, pp. 159-200.
- Altman M, MacDonald K, McDonald MP (2005). *From Crayons to Computers: The Evolution of Computer Use in Redistricting*. Social Science Computer Review, 23(3), 334-346.
- Baçao F., Lobo V., Painho M. (2005). *Applying genetic algorithms to zone design*. Soft Comput, Vol. 9, pp. 341-348.
- Bélanger Paul, Eagles Munroe (2001). *The compactness of federal electoral districts in Canada in the 1980s and 1990s: an exploratory analysis*. Canadian Geographer, Vol. 45, No. 4, pp. 450-460.
- Bergey P., Ragsdale C., Hoskote M. (2003a). *A decision support system for the electrical power districting problem*. Decision Support Systems, Vol. 36, pp. 1-17.
- Bergey P. K. Ragsdale C. T. Hoskote M. (2003b). *A Simulated Annealing Genetic Algorithm for the Electrical Power Districting Problem*. Annals of Operations Research, Vol. 121, pp. 33-55.
- Blais M., Lapierre SD., and Laporte G. (2003). *Solving a home-care districting problem in an urban setting*. Journal of the Operational Research Society, Vol. 54, pp. 1141-1147.
- Bong C. W., Chai W. Y., Wong C. W. (2004). *State-of-the-Art Multiobjective Metaheuristic for Redistricting*. OCEANS '04. MTS/IEEE TECHNO-OCEAN '04, Vol. 2, pp. 763-769.
- Bong C. W., Wang Y. C. (2006). *A Multiobjective Metaheuristic for Spatial-based Redistricting*. Advances in Soft Computing, Vol. 34, pp. 235-250.
- Boyce, Ronald R. and W.A.V. Clark (1964). *The Concept of Shape in Geography*. Geographical Review, Vol. 54, pp.561-572.

- Bozkaya B., Erkut E. and Laporte G. (2003). *A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting*. European Journal of Operational Research, Vol. 144, pp. 12-26.
- Caro F., Shirabe T., Guignard M. and Weintraub A. (2004). *School redistricting: embedding GIS tools with integer programming*. Journal of the Operational Research Society. Vol. 55, pp. 836-849.
- Carson J. L., Crespín M. H., Finocchiaro C. J. and Rohde D. W. (2007). *Redistricting and Party Polarization in the U.S. House of Representatives*. American Politics Research, Vol. 35, pp. 878-905.
- Cerny V. (1985). *A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm*. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 45, pp. 41-55.
- Chou C., Li S. P. (2006). *Taming the Gerrymander—Statistical physics approach to Political Districting Problem*. Physica A, Vol. 369, pp. 799-808.
- Chou C., Li S. P. (2007). *Spin systems and Political Districting Problem*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 310, pp. 2889-2891.
- Cirincione C., Darling T. A., O'Rourke T. G. (2000). *Assessing South Carolina's 1990s congressional districting*. Political Geography, Vol. 19, pp. 189-211.
- Cova J. T., Church R. L. (2000). *Contiguity Constraints for Single-Region Site Search Problems*. Geographical Analysis, Vol. 32, No. 4, pp. 306-329.
- D'Amico S., Wang S., Batta R., Rump C. (2002). *A simulated annealing approach to police district design*. Computers & Operations Research, Vol. 29, pp. 667-684.
- DesJardins M., Bulka B., Carr R., Hunt A., Rathod P., Rheingans P. (2006). *Heuristic Search and Information Visualization Methods for School Redistricting*. Proceedings of the 18th conference on Innovative applications of artificial intelligence, Vol. 2, pp. 1774-1781.
- Escandón M. C., López L. L. (2003). *Integridad de comunidades y redistribución urbana*. Política y Cultura, No. 19, pp. 45-63.
- Escandón M. C., López L. L. (2004). *Sistemas de información geográfica y redistribución electoral: su impacto en México*. Scripta Nova, Vol. 8, No. 170, pp. 63.
- Ferland J., Guenette G. (1990). *Decision Support System for the School Districting Problem*. Operations Research, Vol. 38, No. 1, pp. 15-21.
- Forgette R., Platt G. (2005). *Redistricting principles and incumbency protection in the U.S. Congress*. Political Geography, Vol. 24, pp. 934-951.
- Garfinkel R. S., Nemhauser G. L. (1970). *Optimal Political Districting by Implicit Enumeration Techniques*. Management Science, Vol. 16, No. 8, Application Series, pp. B495-B508.
- Gilbert K. C., Holmes D. D., Rosenthal R. E. (1985). *A Multiobjective Discrete Optimization Model for Land Allocation*. Management Science, Vol. 31, No. 12, pp. 1509-1522.

- Gilligan T. W., Matsusaka J. G. (2006). *Public choice principles of redistricting*. Public Choice, Vol. 129, pp. 381-398.
- Hayes B. (1996). *Machine politics*. American Scientist. Research triangle park, Vol. 84, No. 6, pp. 522-526.
- Hess S., Samuels S. (1971). *Experiences with a Sales Districting Model: Criteria and Implementation*. Management Science, Vol. 18, No. 4, Application Series, Part 2, Marketing Management Models. P41-P54.
- Hess S. W., Weaver J. B., Siegfeldt H. J., Whelan J. N., Zitlau P. A. (1965). *Nonpartisan Political Redistricting by Computer*. Operations Research, Vol. 13, No. 6, pp. 998-1006.
- IFE. (1979). *Reforma política*. México, Instituto Federal Electoral.
- IFE. (1996). *La redistribución electoral mexicana de 1996; Informe sobre los resultados de la redistribución que presenta el Comité Técnico para el Seguimiento y Evaluación de la Redistribución al Consejo General del Instituto Federal Electoral*. México, Instituto Federal Electoral.
- IFE. (2002). *Acuerdo del consejo general del instituto federal electoral por el que se establece que, para la elección federal del año 2003, se utilizará la demarcación territorial de los trescientos distritos electorales federales uninominales, aprobada por el consejo general el 31 de julio de 1996*. Gaceta electoral 56. México, Instituto Federal Electoral.
- Kalcsics J., Nickel S., Schröder M. (2005). *Towards a Unified Territorial Design Approach - Applications, Algorithms and GIS Integration*. Top, Vol. 13, No. 1, pp. 1-74.
- Kirkpatrick S., Gellat C.D., Vecchi M.P. (1983). *Optimization by simulated annealing*. Science, Vol. 220, pp. 671-680.
- López L. L. (2006). *Redistribución electoral en México: logros pasados y retos futuros*. Investigaciones Geográficas, Boletín del Instituto de Geografía, UNAM. Núm. 61, pp. 99-113.
- Macmillan W. (2001). *Redistricting in a GIS environment: An optimisation algorithm using switching-points*. Journal of geographical systems, Vol. 3, pp. 167-180.
- Mehrotra A., Johnson E. L., Nemhauser G. L. (1998). *An Optimization Based Heuristic for Political Districting*. Management Science, Vol. 44, No. 8. pp. 1100-1114.
- Metropolis N., Rosenbluth A.W., Rosenbluth M.N., Teller A.H., Teller E. (1953). *Equation of state calculation by fast computing machines*. Journal of Chemistry Physics, Vol. 21, pp. 1087-1091.
- Muyldermans L., Cattrysse D., Van Oudheusden D., Lotan T. (2002). *Districting for salt spreading operations*. European Journal of Operational Research, Vol.139. 521-532.
- Nagel S. S. (1965). *Simplified Bipartisan Computer Redistricting*. Stanford Law Review, Vol. 17, No. 5. (1965), pp. 863-899.
- Niemi R. G., Grofman B., Carlucci C., Hofeller T. (1990). *Measuring Compactness and the Role of a Compactness Standard in a Test for Partisan and Racial Gerrymandering*. Journal of Politics, Vol. 52, No. 4, 1155-1181.

- Plane D. (1982). *Redistricting reformulated: a maximum Interaction/minimum separation objective*. Socio-Econ Plan Sci. Vol. 16, No. 6, pp. 241-244.
- Ricca F., Simeone B. (2008). *Local search algorithms for political districting*. European Journal of Operational Research, Vol. 189, pp. 1409-1426.
- Ríos-Mercado R. Z., Fernández E. (2009). *A Reactive GRASP for Comercial Territory Design Problem with Multiple Balancing Requirements*. Computers & Operations Research. 36, 755-776.
- Robertson I. M. L. (1982). *The Delimitation of Local Government Electoral Areas in Scotland: A Semi-Automated Approach*. The Journal of the Operational Research Society, Vol. 33, No. 6, pp. 517-525.
- Schoepfle B. Church R. (1991). *New network representation of a classic school districting problem*. Socio-Econ Plann Sci. Vol. 25, No. 3, pp. 189-197.
- Segal M., Weinberger D. (1977). *Turfing*. Operations Research, Vol. 25, No. 3, 367-386.
- Steuer R. (1986). *Multiple criteria optimizatio:Theory, computation and application*. John Wiley and Sons.
- Sherstyuk K. (1998). *How to gerrymander: A formal analysis*. Public Choice, Vol. 95, pp. 27-49.
- Shirabe T. (2005a). *A Model of Contiguity for Spatial Unit Allocation*. Geographical Analysis, Vol. 37, pp. 2-16.
- Shirabe T. (2005b). *Classification of Spatial Properties for Spatial Allocation Modeling*. Geoinformatica, Vol. 9, No. 3, pp. 269-287.
- Shortt N. K., Moore A., Coombes M., Wymer C. (2005). *Defining regions for locality health care planning: A multidimensional approach*. Social Science & Medicine, Vol. 60, pp. 2715-2727.
- Tavares-Pereira F. Rui J. Mousseau V. Roy B. (2007). *Multiple criteria districting problems: The public transportation network pricing system of the Paris region*. Ann Oper Res. Vol. 154, pp. 69-92.
- Taylor P. J. (1973). *A New Shape Measure for Evaluating Electoral District Patterns*. The American Political Science Review, Vol. 67, No. 3, pp. 947-950.
- Vickrey W. (1961). *On The Prevention of Gerrymandering*. Political Science Quarterly, Vol. 76, No. 1, 105-110.
- Vilalta Perdomo Carlos J. (2002). *Procesos de distritación electoral y el uso de comunidades de interés*. Estudios demográficos y urbanos, No. 49, pp. 151-173
- Weaver J. B., Hess S. W. (1963). *A Procedure for Nonpartisan Districting: Development of Computer Techniques*. The Yale Law Journal, Vol. 73, No.2, pp. 288-308.
- Williams, J. C. (2003). *Convex Land Acquisition With Zero-One Programming*. Environment and Planning B: Planning and Design, volume 30, pp. 255-270.

Young H. P. (1988). *Measuring the Compactness Of Legislative Districts*. Legislative Studies Quarterly, Vol. 13, No. 1, pp. 105-115.