



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**PROPUESTA DE ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE
GRIETAS SUPERFICIALES Y EN AGUJEROS
CIRCULARES**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A :

PATRICIA ARACELI RÍOS MURILLO

TUTOR:

DR. JESÚS MANUEL DORADOR GONZÁLEZ



MÉXICO D.F.

OCTUBRE 2010.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. ARMANDO ORTIZ PRADO

Secretario: DR. ARTURO BARBA PINGARRÓN

Vocal: DR. JESÚS MANUEL DORADOR GONZÁLEZ

1er Suplente: DR. SAÚL DANIEL SANTILLÁN GUTIERREZ

2do Suplente: DR. MARCELO LÓPEZ PARRA

FACULTAD DE INGENIERÍA, CAMPUS JURIQUILLA, QUERÉTARO

TUTOR DE TESIS:

DR. JESÚS MANUEL DORADOR GONZÁLEZ

FIRMA

Dedicatoria

A mi familia, no existen palabras para expresar el amor y agradecimiento que tengo por ustedes y por todo su cariño, felicidad, apoyo y enseñanzas que me han brindado y me siguen brindando en mi vida.

Agradecimientos

A mi madre por demostrarme que cualquier tiempo es bueno para seguir aprendiendo. Felicidades por tu segunda carrera.

A Eduardo Murillo Zamudio por que siempre y más ahora que nunca demostrarme que cualquier obstáculo puede ser superado.

A mis hermanos Mely, Gio y Edgar, por hacerme reír de mi misma, apoyarme y aguantarme, los quiero.

Al Dr. Jesús Manuel Dorador González por su ayuda, paciencia, confianza y sobretodo por ser un ejemplo en mi vida. Y como lo dije hace 5 años por ser un buen amigo.

Al Dr. Saúl Santillán por su apoyo y consejos durante los estudios de maestría. Y por dejarme conocerlo más que como maestro como persona.

A Juan Carlos Barbosa y Miguel Gallardo por compartir sus conocimientos y experiencia.

A mis amigas de la facultad por seguir compartiendo nuestras vidas.

A Ileana por su amistad incondicional.

A la UNAM porque ahora sé que siempre formaré parte de ella.

A mis amigos y compañeros del trabajo por motivarme en esta etapa de mi vida y por recordarme lo importante que es divertirse aún en los momentos difíciles.

Patricia Araceli Ríos Murillo.

Contenido

Problema, Objetivos y Alcances ----- 1

Capítulo 1: Conceptos Básicos

1.1 Falla por Fractura -----3

1.2 Esfuerzos Principales -----4

1.3 Desviador de Esfuerzos -----8

1.4 Teorías de Falla -----10

 1.4.1 Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo -----10

 1.4.2 Teoría de la Energía Máxima de Distorsión-----12

 1.4.3 Teoría del Esfuerzo Normal Máximo-----13

 1.4.4 Teoría de Mohr-----14

1.5 Concentradores de Esfuerzos-----15

1.6 Factor de Intensidad de Esfuerzos-----18

1.7 Criterio de la Energía-----21

 1.7.1 Liberación de Energía-----23

Capítulo 2: Falla por Fatiga

2.1 Falla por Fatiga -----28

2.2 Perfil de Cargas-----30

2.3 Teorías de Falla por Fatiga-----36

 2.3.1 Método de Esfuerzo-Vida-----36

 2.3.2 Método de Deformación Local-----37

 2.3.3 Mecánica de la Fractura-----38

 2.3.3.1 LEFM (Linear Elastic Fracture Mechanics) -----39

Capítulo 3: Pruebas de Fatiga

3.1 Vida por Fatiga-----46

3.2 Selección y Preparación del Espécimen-----47

 3.2.1 Espesor del Espécimen-----49

 3.2.2 Microestructura del Material-----49

 3.2.3 Cargas-----49

 3.2.4 Equipo-----50

 3.2.5 Preparación del Espécimen-----50

 3.2.6 Mediciones-----50

3.2.7 Caracterización de la Superficie de Fractura-----	51
Capítulo 4: Cálculo de Vida por Análisis de Elemento Finito	
4.1 Análisis de Elemento Finito-----	52
4.2 Análisis de Propagación de Grieta-----	54
4.2.1 Pre-proceso-----	54
4.2.2 Solución-----	54
4.2.3 Post-proceso-----	55
Capítulo 5: Función de Esfuerzos de Airy y Regla de Neuber	
5.1 Función de Esfuerzos de Airy-----	63
5.2 Campo de Esfuerzos Alrededor de un Agujero Circular-----	66
5.3 Aplicación de la Función de Esfuerzos de Airy-----	73
5.4 Regla de Neuber-----	76
Capítulo 6: Cálculo de Propagación de Grieta	
6.1 Análisis de Propagación de Grieta-----	79
6.1.1 Calidad y Confiabilidad-----	79
6.1.2 Competencia-----	79
6.1.3 Cliente-----	80
6.1.4 Limitantes-----	80
6.1.5 Funcionamiento-----	80
6.1.5.1 Cálculo 1-----	81
6.1.5.2 Cálculo 2-----	83
6.2 Comparación de Resultados-----	88
6.3 Mejoras-----	90
Conclusiones -----	92
Anexos	
Anexo A: Esfuerzos Principales-----	96
Anexo B: Ecuaciones para Grieta Superficial-----	97
Anexo C: Ecuaciones para Grieta en la Esquina de un Agujero-----	99

Anexo D: Variación de Parámetros-----	103
Bibliografía-----	106
Trabajo a futuro-----	107

Problema

Debido a su geometría y tipos de cargas a las que son sometidos, algunos componentes pueden ser críticos a la fractura. Es por esto que los análisis de inicio y propagación de grieta son muy comunes en el diseño de este tipo de componentes; en particular, geometrías con agujeros, filetes, canales, etc. son las áreas más críticas durante el análisis de vida, ya que los esfuerzos se concentran en estas áreas.

Uno de los métodos más comunes para realizar un análisis de propagación de grieta es:

1. Modelar la parte utilizando un Modelo de Elemento Finito (MEF) en 2D con materiales isotrópicos y ortotrópicos. El propósito de considerar un material ortotrópico es disminuir las propiedades del material en ciertas direcciones en las zonas que modelan agujeros.
2. Obtener resultados de esfuerzos estructurales.
3. Submodelar en detalle el área de interés utilizando un MEF en 3D.
4. Obtener los tiempos críticos y gradientes de esfuerzos que propician la propagación de la grieta.
5. Calcular los ciclos por propagación de grieta.

A pesar de que los análisis de modelos 3D proporcionan resultados muy cercanos a la realidad, la complejidad de su modelado así como el tiempo de resolución y análisis de resultados puede volver estos métodos muy imprácticos.

El reto es obtener resultados confiables y más exactos a partir de un modelo 2D, o incluso de mediante análisis matemáticos o cálculos a mano, lo cual disminuiría considerablemente el tiempo de análisis.

Objetivo

Proponer una herramienta de software que permita la obtención de resultados confiables en análisis de vida por propagación de grieta, mediante el uso de concentradores de esfuerzo obtenidos por Análisis de Elemento Finito y de ecuaciones de ajustes para los gradientes de esfuerzos que propagan la grieta.

Objetivos particulares

Desarrollar una herramienta de software que utilice conocimientos de dominio público de mecánica de la fractura, análisis de elemento finito y factores de concentración de esfuerzos para calcular la propagación de grieta.

Alcances

Los casos de propagación de grieta analizados, son únicamente aquellos en los que el esfuerzo que propaga la grieta (primer esfuerzo principal) se encuentra alineado con alguna de las siguientes direcciones con respecto al eje del componente axial, radial y circunferencial.

La herramienta de software realizará cálculos de propagación para dos tipos de grieta: grieta superficial y grieta en la esquina de un agujero ante la presencia de un gradiente constante. Se calculará el crecimiento de grieta en dos direcciones, sin embargo el resultado de los cálculos no incluirá los ciclos para los casos en los cuales la grieta haya cambiado a otro tipo de grieta.

Organización de la tesis

En el primer capítulo se muestran los conceptos básicos de mecánica de materiales necesarios para realizar cálculos de propagación de grieta, así como para interpretar correctamente los resultados obtenidos. Mediante estos conceptos básicos es posible entender de manera general las condiciones que propician el inicio y propagación de una grieta.

El segundo capítulo titulado “Falla por Fatiga” habla más detalladamente de cómo ocurre el crecimiento de grietas ante la presencia de cargas cíclicas; adicionalmente se muestran las teorías de falla elásticas utilizadas comúnmente para su análisis.

En el tercer capítulo “Pruebas por Fatiga” se habla brevemente de los parámetros básicos a considerar durante pruebas uniaxiales de fatiga en probetas convencionales.

El cuarto capítulo titulado “Cálculo de Vida por Análisis de Elemento Finito” ejemplifica, mediante el uso del software comercial especializado en elemento finito ANSYS, la obtención del concentrador y gradiente de esfuerzos en dirección del plano de propagación para un agujero circular en una placa semi infinita sometido a cargas axiales y biaxiales.

El quinto capítulo titulado “Función de Esfuerzos de Airy y Regla de Neuber” muestra la aplicación de dichas funciones así como su relevancia en el cálculo de propagación de grieta para la obtención y/o ajuste de concentradores esfuerzos en agujeros circulares, así como la corrección del gradiente, de ser necesario.

El sexto capítulo “Cálculo de Propagación de Grieta” se presentan las especificaciones de diseño de la herramienta de software diseñada y se comparan los resultados del análisis de propagación de una grieta superficial mediante dos métodos analíticos.

Finalmente en la última sección se presentan las conclusiones obtenidas, así como las recomendaciones para trabajos futuros dentro de la misma línea de investigación.

1.1 Falla por fractura

Las fallas por fractura pueden generar grandes pérdidas económicas y, más preocupante, pérdidas humanas; por tal motivo el diseñar máquinas, vehículos y estructuras confiables y seguras es de suma importancia. Esto requiere tanto del uso eficiente de materiales como el asegurar que la falla estructural inesperada no ocurrirá.

Para asegurar el desempeño, seguridad y durabilidad de un componente es necesario evitar su deformación excesiva, es decir que los esfuerzos a los que son sometidos los componentes no excedan la resistencia del material. Esto se logra en gran medida mediante el entendimiento del problema de falla por fatiga.

Los tipos de fallas básicas pueden ser clasificadas de acuerdo al tipo de deformación o al tipo de fractura.

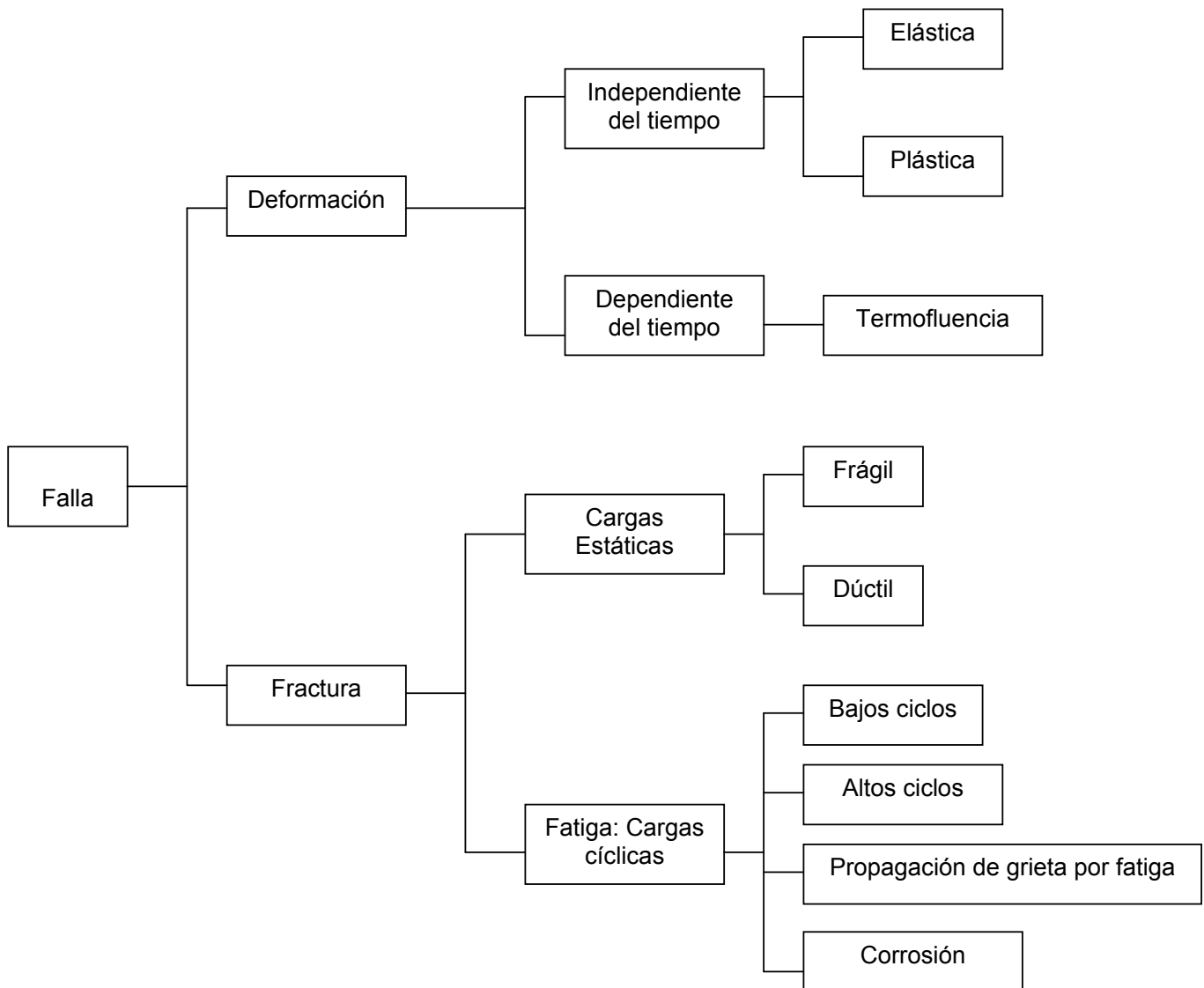


Figura 1.1 Clasificación de fallas mecánicas

Una carga estática es la acción estacionaria de una fuerza o un momento que actúan sobre cierto componente. Para que una fuerza o momento sean estacionarios deben poseer magnitud, dirección y un punto de aplicación que sean invariables o que varíen muy lentamente.

Una carga variable es aquella que varía o fluctúa con el tiempo, este tipo de cargas producen esfuerzos repetidos o alterantes. Cuando un material falla aún cuando los esfuerzos máximos reales son inferiores a la resistencia última a la tensión del material o incluso a la resistencia a la cedencia del material, se debe a que estas fallas han sido generadas por esfuerzos que se repitieron varias veces, lo cuál se denomina como una falla por fatiga.

Las fallas por fatiga comienzan por una grieta, dicha grieta se desarrollará en un punto de discontinuidad del material. Una vez que se forma la grieta, el efecto de concentración de esfuerzo se hace mayor y se extiende más rápidamente debido a que el área esforzada disminuye en tamaño y por ende el esfuerzo aumenta en magnitud hasta que finalmente el área restante falla.

Una falla estática sucede en un estado cuasi-estático, donde la variación de la carga en el tiempo es muy lenta, como sucede en un ensayo de tracción; donde se genera una deformación muy grande, por lo que es visible y puede ser detectada con anticipación, en cambio la falla por fatiga es repentina y total.

Los problemas de fatiga no involucran cargas estáticas sino cargas fluctuantes derivadas de una combinación de cargas estáticas con cargas alternantes.

Cuando se ejerce una carga sobre un componente, de modo que el estado de esfuerzos es uniaxial, es posible comparar directamente el esfuerzo y la resistencia a fin de determinar si el componente fallará. En la presencia de estados biaxiales o triaxiales de esfuerzos el problema es más complicado, sin embargo sigue existiendo una resistencia significativa del material que puede ser comparada mediante los esfuerzos principales y las teorías de falla.

1.2 Esfuerzos Principales

Los componentes de estructuras están sometidos a cargas de diversos tipos como pueden ser:

- Cargas a Tracción
- Cargas a Flexión
- Cargas a Torsión
- Presión
- Cargas Térmicas
- Combinaciones de las anteriores

Como resultado de estos tipos de carga los componentes pueden presentar diversos y complejos estados de esfuerzos normales y cortantes, los cuales varían en magnitud y dirección a lo largo del componente. Los esfuerzos de mayor magnitud, llamados esfuerzos principales, se encuentran ubicados en planos llamados a su vez planos principales.

Conocer el comportamiento de estos esfuerzos a lo largo del componente es de suma importancia en el análisis de fallas por fractura debido a que la propagación de grieta se presenta en planos perpendiculares a los esfuerzos principales.

El proceso que determina la representación equivalente del estado de esfuerzos en un nuevo sistema coordenado se llama transformación de ejes y las ecuaciones obtenidas de esta transformación son llamadas ecuaciones de transformación. A través de las ecuaciones de transformación es posible obtener la variación de los esfuerzos normales y cortantes a través del material.

Los ejes principales son ejes donde ocurre el esfuerzo normal máximo y mínimo y el esfuerzo cortante es cero, los planos normales a estos ejes son los planos principales.

Los esfuerzos normales principales se denotan como σ_1 , σ_2 y σ_3 , donde uno de ellos es el esfuerzo máximo, otro el mínimo y el esfuerzo restante es un esfuerzo de valor intermedio ente el máximo y el mínimo.

Los valores de los esfuerzos normales principales para un estado triaxial de esfuerzos están dados por la solución de la siguiente ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad \text{Ec.1.1}$$

La ecuación 1.1 es obtenida de la siguiente manera:

Si se tiene un estado triaxial de esfuerzos como el mostrado en la Figura 1.1

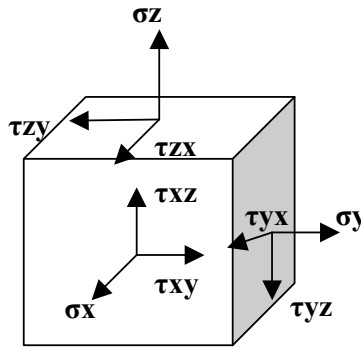


Figura 1.2 Estado triaxial de esfuerzos

y se desea conocer el esfuerzo σ_n normal al plano oblicuo ABC mostrado en la Figura 1.3.

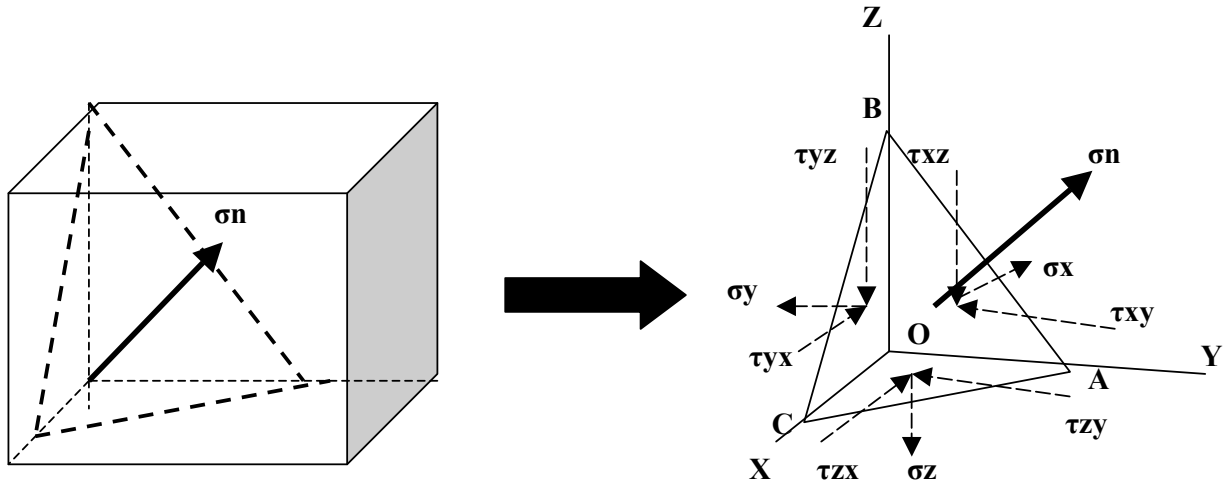


Figura 1.3 Estado normal al plano ABC

Es necesario definir la orientación del plano oblicuo mediante una normal unitaria llamada n . Dicho vector unitario es a su vez definido por sus cosenos directores l , m y n donde:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= l \\ \cos\beta &= m \\ \cos\gamma &= n \end{aligned}$$

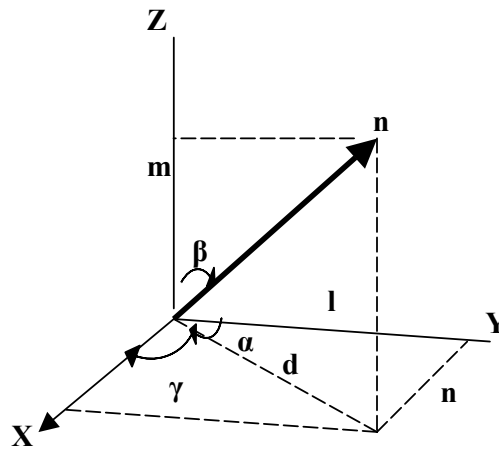


Figura 1.4 Cosenos Directores

$$\begin{aligned} l^2 + n^2 &= d^2 \\ d^2 + m^2 &= 1 \quad \text{Ec.1.2} \\ l^2 + n^2 + m^2 &= 1 \end{aligned}$$

Suponiendo que el esfuerzo normal σ_n es el único que actúa sobre la cara oblicua ABC, la sumatoria de fuerzas en los ejes coordenados queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 & \quad (\sigma_n dA)n - \sigma_x dAn - \tau_{xy} dAl - \tau_{zx} dAm = 0 \\
 \sum F_y = 0 & \quad (\sigma_n dA)l - \sigma_y dAl - \tau_{zy} dAm - \tau_{xy} dAn = 0 \\
 \sum F_z = 0 & \quad (\sigma_n dA)m - \sigma_z dAm - \tau_{xz} dAn - \tau_{yz} dAl = 0
 \end{aligned} \quad \text{Ec.1.3}$$

Simplificando y reagrupando términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_n)n + \tau_{xy}l + \tau_{zx}m &= 0 \\
 \tau_{xy}n + (\sigma_y - \sigma_n)l + \tau_{zy}m &= 0 \\
 \tau_{xz}n + \tau_{yz}l + (\sigma_z - \sigma_n)m &= 0
 \end{aligned} \quad \text{Ec.1.4}$$

De las ecuaciones 1.4 se observa que los tres cosenos directores no pueden ser cero, sin embargo existe una solución no trivial para el sistema de ecuaciones si solo si el determinante de los coeficientes de l, m y n es cero, por lo tanto

$$\begin{vmatrix}
 (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_n)
 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Ec.1.5}$$

$$\sigma_n^3 - \sigma_n^2 I_1 + \sigma_n I_2 - I_3 = 0 \quad \text{Ec.1.6}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\
 I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2
 \end{aligned} \quad \text{Ec.1.7}$$

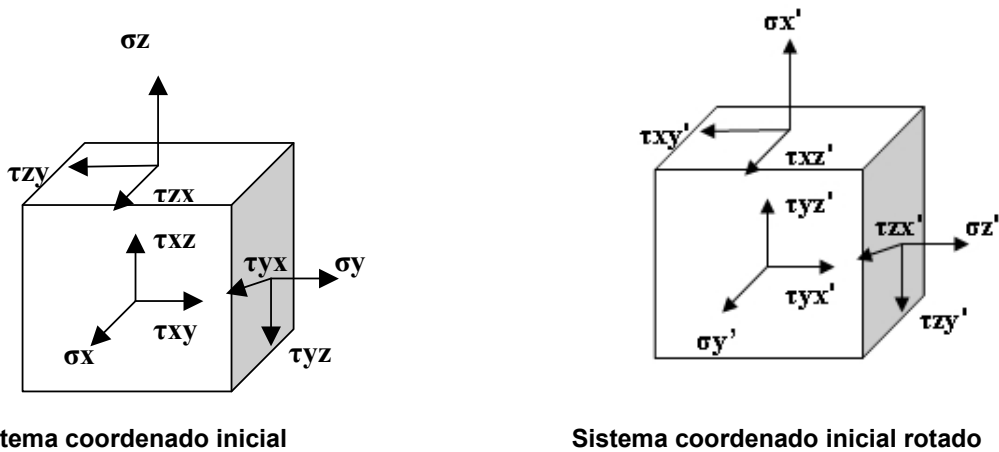
donde:

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z, \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}, \sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{xz}, \sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau_{yz}.$$

De las ecuaciones obtenidas anteriormente se puede concluir que si el sistema coordenado inicial es cambiado, σ_n sigue siendo el mismo, por lo tanto las constantes I_1 , I_2 e I_3 de la ecuación 1.7 y deben también seguir siendo las mismas y por consiguiente son conocidas como invariantes de esfuerzos.

La matriz de la ecuación 1.5 es simétrica y todos sus elementos son reales, esas raíces son los valores propios o eigen valores llamados en este caso esfuerzos normales principales para un punto dado. (Anexo A)

Debido a que los esfuerzos principales son los valores reales de los invariantes de esfuerzo, se concluye que estos valores no dependen de la elección del sistema coordenado base.



Sistema coordenado inicial

Sistema coordenado inicial rotado

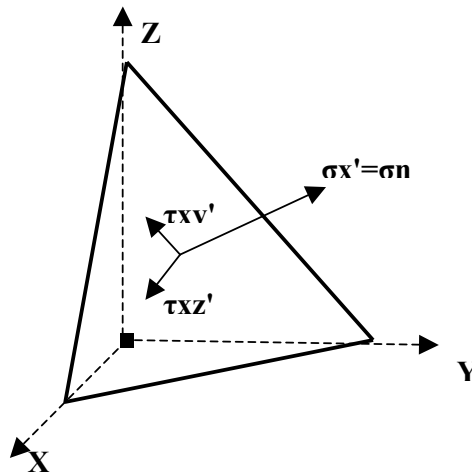


Figura 1.5 Sistema coordenado rotado sobre tres plano mutuamente perpendiculares (tetraedro)

Una vez conocidos los valores de los esfuerzos normales, es posible conocer los esfuerzos cortantes principales ya que estos ocurren en un plano rotado 45° con respecto a los planos de los esfuerzos principales normales y están dados por:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{Ec. 1.8}$$

1.3 Desviador de Esfuerzos

El tensor de esfuerzos puede ser considerado como un sistema de fuerzas en equilibrio actuando en paralelepípedo infinitesimal. Dicho sistema puede ser descompuesto en subsistemas de fuerzas en equilibrio.

Al aplicar la teoría de esfuerzo es común separar las componentes del tensor de esfuerzo que causan distorsiones (tensor desviador de esfuerzos) de

aquellas que inducen únicamente cambios de volumen en el material (tensor hidrostático o volumétrico o de esfuerzo normal medio).

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad \text{Ec.1.9}$$

Desviador (S_{ij})

Componente
Isotrópica
(Volumétrico, $p\delta_{ij}$)

donde

$$p = \sigma_{kk} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3} \quad \text{Ec.1.10}$$

Debido a que se trata de un tensor de segundo orden, el tensor desviador de esfuerzos posee invariantes, las cuales pueden ser obtenidas de igual manera que las invariantes del tensor de esfuerzos.

$$|S_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \lambda^3 - J_1\lambda^2 - J_2\lambda - J_3 = 0 \quad \text{Ec.1.11}$$

Donde J_1 , J_2 y J_3 son el primer, segundo y tercer invariantes del desviador de esfuerzo respectivamente; las cuales pueden ser expresadas en función de S_{ij} (o sus valores principales S_1 , S_2 y S_3) o en función de σ_{ij} (o sus valores principales σ_1 , σ_2 y σ_3)

En un material isotrópico, el desviador no causa cambios de volumen (cortante puro), por lo que $J_1 = S_{kk} = 0$.

$$S^3 + J_2S - J_3 = 0 \quad \text{Ec.1.12}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{i=1}^3 S_{kk} = I_1 \\ J_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij}S_{ij} = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \\ J_3 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_{ij}S_{jk}S_{ki} = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 \end{aligned} \quad \text{Ec.1.13}$$

Conocer el estado de esfuerzos (esfuerzos normales y cortantes) a los que se encuentra sometido un componente, permite hacer uso de las diferentes teorías de falla con el fin de diseñar componentes para una cierta vida útil.

1.4 Teorías de Falla

Las teorías de fallas establecen la relación que existe entre las componentes de esfuerzo y los valores de las características de falla del material. Estas teorías presuponen un material homogéneo en el que los defectos del material son promediados.

Las teorías de falla pueden ser divididas de acuerdo al comportamiento del material como:

	Material Dúctil	Material Frágil
Esfuerzo característico de falla	Esfuerzo de Cedencia	Esfuerzo Último a la Tensión
Teoría	1.Esfuerzo Cortante Máximo	1.Esfuerzo Normal Máximo
	2.Energía Máxima de distorsión	2.Coulomb-Mohr

En general, el criterio de falla de un material se encuentra en función del estado de esfuerzos:

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_y, \sigma_{UTS}, \dots) = 0 \quad \text{Ec.1.14}$$

Como se demostró anteriormente, para materiales isotrópicos, los esfuerzos principales no depende del sistema coordinado base y los valores de los tres esfuerzos principales son suficientes para describir un estado de esfuerzos único.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_y, \sigma_{UTS}, \dots) = 0 \quad \text{Ec.1.15}$$

A su vez se demostró que los esfuerzos principales pueden expresarse en términos de las 3 invariantes del desviador esfuerzo.

$$f(I_1, J_2, J_3, \sigma_y, \sigma_{UTS}, \dots) = 0 \quad \text{Ec.1.16}$$

1.4.1 Teoría del esfuerzo cortante máximo

Esta teoría también llamada criterio de Tresca fue propuesta en 1864 y se basa en el supuesto que un material fallará cuando el esfuerzo cortante máximo exceda el esfuerzo cortante de cedencia.

$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_Y}{2} \quad \text{Ec.1.17}$$

$$\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_{21} - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \right)_{\max} \leq \sigma_Y \quad \text{Ec. 1.18}$$

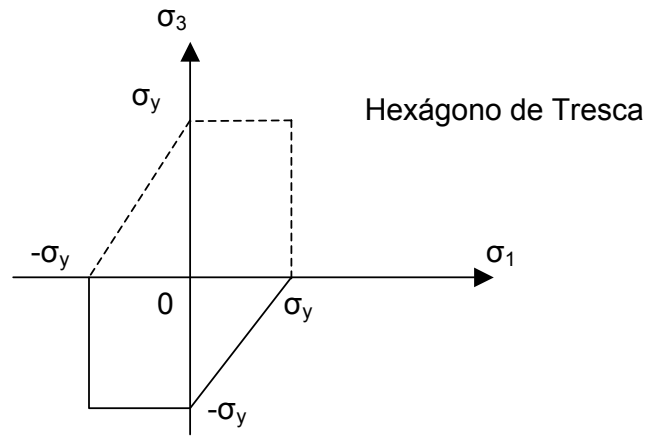


Figura 1.6 Teoría del cortante máximo

En términos de las invariantes del desviador de esfuerzos:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left[\cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \right] = \sigma_y \quad \text{Ec. 1.19}$$

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{1}{3} \pi \right) - \sigma_y = 0$$

Donde $0 \leq \theta \leq 60^\circ$

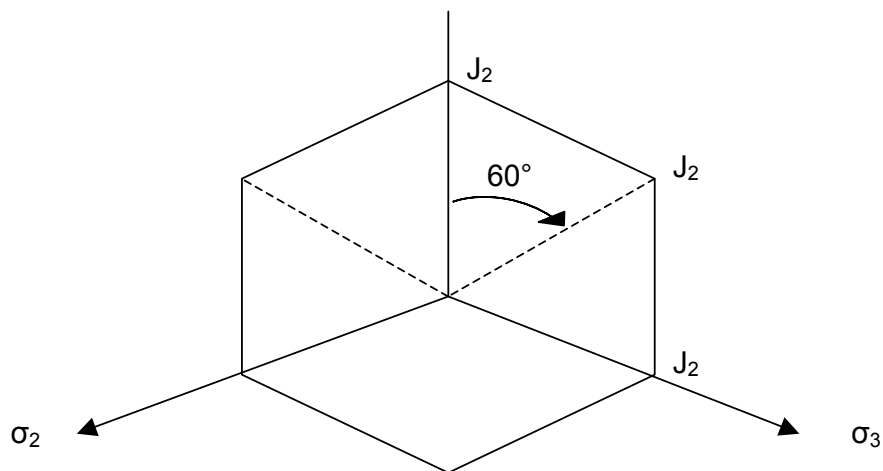


Figura 1.7 Teoría del cortante máximo plano deviatorico

$$f(J_2, J_3) = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36\left(\frac{\sigma_y}{2}\right)^2 J_2^2 + 96\left(\frac{\sigma_y}{2}\right)^4 J_2 - 64\left(\frac{\sigma_y}{2}\right)^6 = 0 \quad \text{Ec.1.20}$$

1.4.2 Teoría de la energía máxima de distorsión

La teoría de Tresca no refleja la influencia del esfuerzo principal intermedio, por lo que en 1913 fue propuesto el criterio de Von Mises o de la energía máxima de la distorsión.

Un material fallará cuando la densidad máxima de energía de deformación por distorsión sea igual a la densidad de energía de deformación en el punto de cedencia.

La energía de deformación en un material lineal e isotrópico se define como:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] = \frac{I_1^2}{2E} - \frac{I_2}{2G} \quad \text{Ec.1.21}$$

La ecuación 1.16 puede ser descompuesta en dos componentes independientes, una relacionada con la deformación volumétrica y otra relacionada con la deformación por distorsión.

$$U = U_v + U_s \quad \text{Ec.1.22}$$

donde

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2 \quad \text{Ec.1.23}$$

$$U_s = \frac{I_2}{2G} = \frac{3}{4G} \tau_{OCT}^2 \quad \text{Ec.1.24}$$

τ_{OCT} es el esfuerzo cortante octaédrico, el cual se define por la ecuación 1.25

$$\tau_{OCT} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad \text{Ec.1.25}$$

En términos de los invariantes de esfuerzos:

$$f(J_2) = J_2 - \left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \text{Ec.1.26}$$

$$\tau_{OCT} = \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

Sustituyendo la ecuación 1.26 en la ecuación 1.24 se obtiene la energía de deformación por distorsión.

$$U_s = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad \text{Ec.1.27}$$

Para un estado uniaxial de esfuerzos la ecuación 1.27 es

$$U_s = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2 \quad \text{Ec.1.28}$$

De acuerdo a esta teoría el material fallará cuando $\sigma_1 = \sigma_y$

Igualando las ecuaciones 1.27 y 1.28 y despejando σ_y

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{ocr} \leq \sigma_y \quad \text{Ec.1.29}$$

$$\sqrt{I_1^2 - 3I_2}, \sqrt{3J_2} \leq \sigma_y \quad \text{Ec.1.30}$$

Sustituyendo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_y \quad \text{Ec.1.31}$$

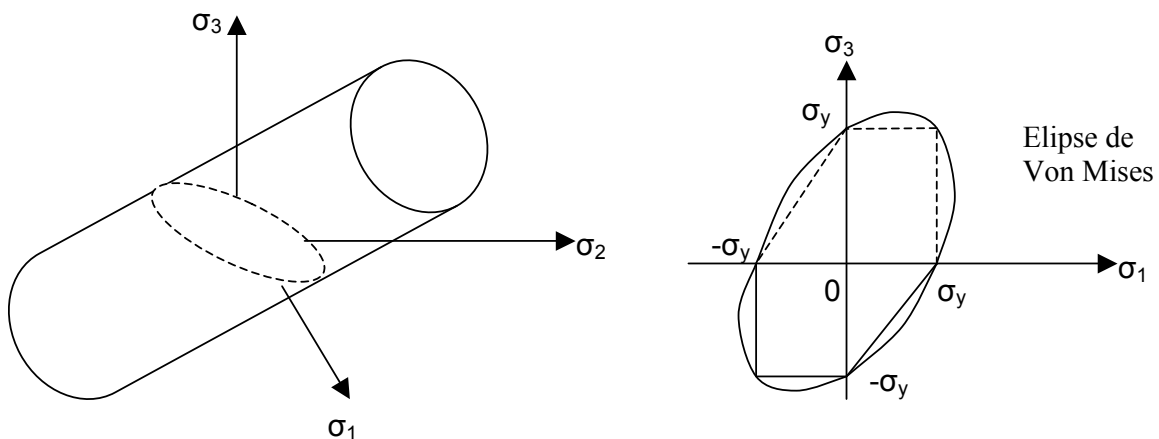


Figura 1.8 Teoría de la energía máxima de distorsión

La cedencia de la mayoría de los metales dúctiles es independiente de la presión hidrostática, sin embargo el comportamiento de varios materiales no metálicos, como rocas, concreto, etc., se caracteriza por depender de la presión hidrostática. Por lo que el invariante de esfuerzo I_1 no debe ser omitido.

1.3.3 Teoría del esfuerzo normal máximo

También conocido como la teoría de Rankine, la cual fue desarrollada en 1876 y supone que un material frágil fallará cuando el esfuerzo principal máximo en un punto exceda el esfuerzo normal último a la tensión, independientemente de los esfuerzos normales o cortantes que ocurran en otros planos a dicho punto.

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_{\max} \leq \sigma_{UTS}$$

$$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}J_2 \cos\theta + I_1 - 3\sigma_{UTS} = 0 \quad \text{Ec. 1.32}$$

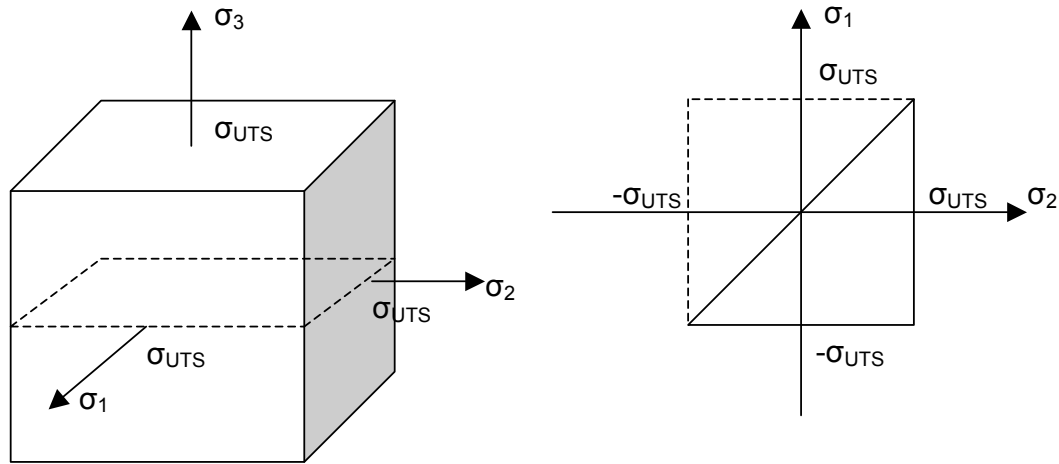


Figura 1.9 Teoría del esfuerzo máximo

Ante la presencia de cargas a compresión y con una presión confinada, este tipo de materiales presenta un falla a cortante dúctil. Sin embargo, bajo cargas a tensión, se observa una falla frágil bajo un esfuerzo a tensión bajo; por lo que el criterio de Rankine es a veces combinado con los criterios de Tresca o de Von Mises con el fin de aproximar el comportamiento de dichos materiales.

1.3.4 Teoría de Mohr

Desarrollada en 1900, puede ser considerada como una versión generalizada de la teoría de Tresca ya que ambas teorías asumen que el esfuerzo cortante máximo es el único decisivo en la falla. Sin embargo el criterio de Tresca asume un esfuerzo cortante constante mientras que Mohr considera el esfuerzo cortante en función del esfuerzo normal en el mismo plano.

$$\|\tau\| = f(\sigma) \quad \text{Ec. 1.33}$$

En términos generales, la teoría de Mohr asume que un material fallará en cierto plano cuando exista una combinación crítica del esfuerzo normal y cortante en dicho plano. Si un estado de esfuerzos se encuentra en la envolvente que es tangente al mayor de los círculos de Mohr que corresponden al esfuerzo, la falla ocurrirá. Cabe mencionar que esta teoría toma en cuenta el efecto del esfuerzo hidrostático.

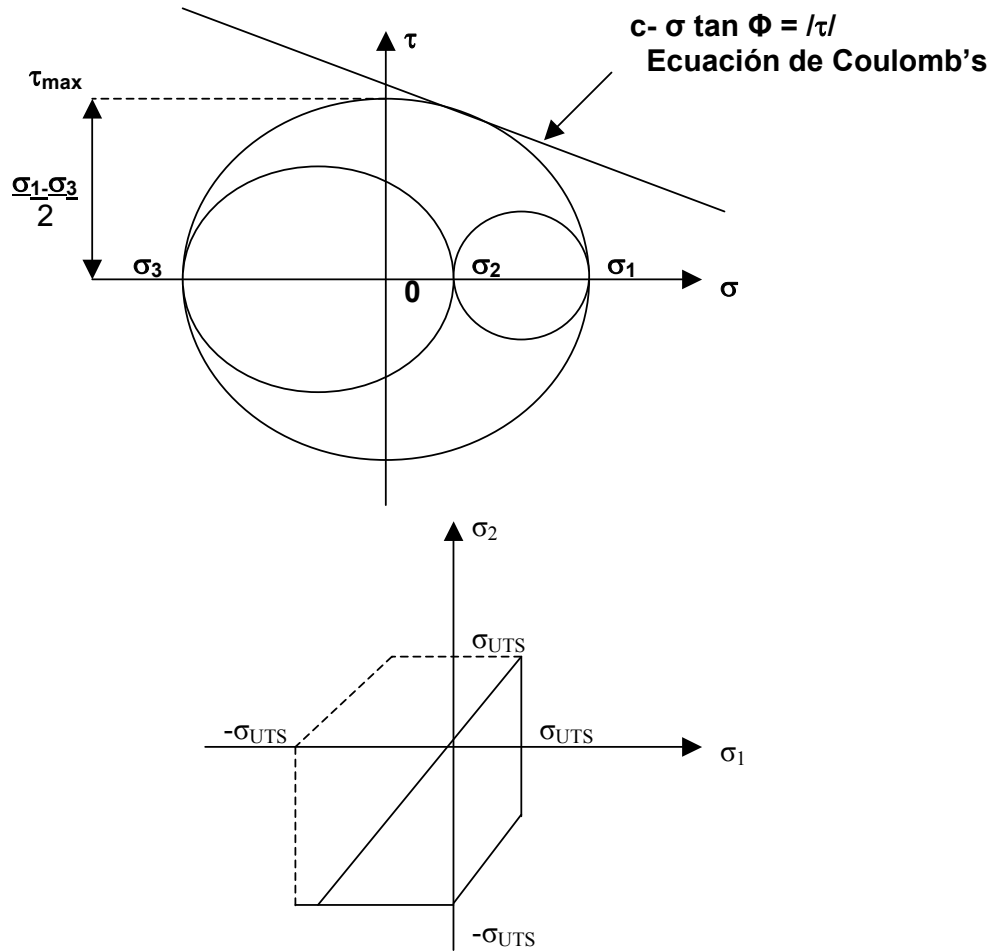


Figura 1.10 Teoría de Mohr

Donde c y Φ =constantes del material determinadas experimentalmente

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad \text{Ec.1.34}$$

El presente trabajo analiza la falla por fatiga en materiales dúctiles por lo que el criterio de la energía máxima de la distorsión será el utilizado.

1.5 Concentradores de esfuerzos

El estado de esfuerzos de un componente se ve afectado ante la presencia de discontinuidades geométricas, si dichas discontinuidades no son tomadas en cuenta al utilizar las teorías de falla, el componente podría fallar antes de lo previsto, por tal motivo es de suma importancia cuantificar los efectos de dichas discontinuidades para realizar una adecuada evaluación del diseño.

Las discontinuidades geométricas como agujeros, filetes, canales y ranuras, entre otros, son inevitables durante el diseño de un componente, el problema con dichas discontinuidades es que causan una concentración de esfuerzos, es decir, regiones donde los esfuerzos son mayores al esfuerzo nominal o promedio, debido a esto los concentradores de esfuerzos juegan un papel decisivo en los problemas de falla por fractura.

Para entender mejor el efecto de un concentrador de esfuerzos se puede considerar un plato plano sometido a cargas de tensión con líneas simulando el flujo de carga como se muestra en la Figura 1.11, debido a que la geometría del plato es uniforme, es posible observar un flujo de cargas igualmente espaciado, lo que da como resultado esfuerzos uniformes a lo largo del plato; si al mismo plato se le realiza un pequeño corte en la orilla, se observa que en la punta del corte el flujo de cargas se encuentra poco espaciado, lo que significa que existe un mayor flujo de carga en un área menor, es decir esfuerzos mayores en la punta del corte.

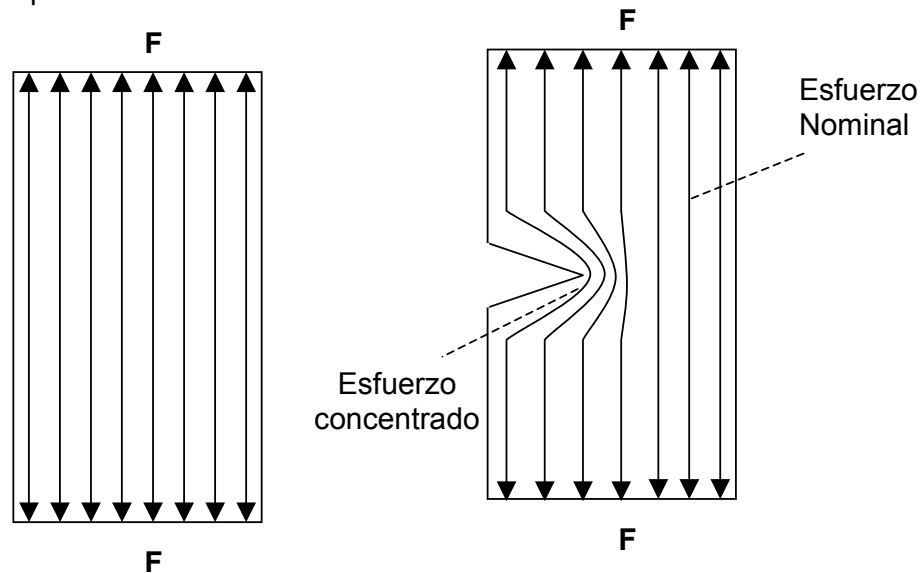


Figura 1.11 Efecto de un concentrador de esfuerzos en el flujo de carga

Esta discontinuidad geométrica no sólo causa una concentración de esfuerzos sino que también genera esfuerzos transversales como se muestra en la Figura 1.12.

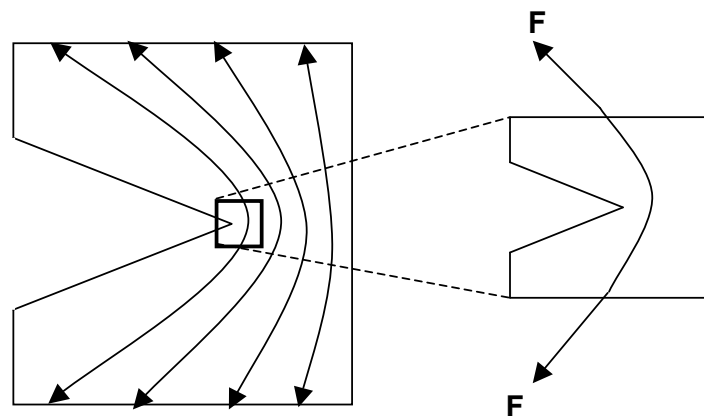


Figura 1.12. Esfuerzos transversales generados por el concentrador de esfuerzos

Este tipo de comportamiento ocurre en otras discontinuidades geométricas como las mencionadas anteriormente (Figura 1.13).

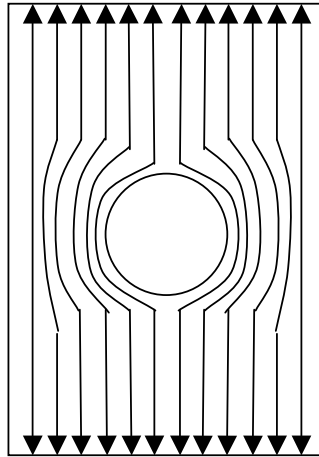


Figura 1.13. Flujo de cargas para un agujero circular

Los esfuerzos locales producidos por las discontinuidades geométricas equivalen a los esfuerzos nominales (alejados del concentrador) multiplicados por un factor. La proporción entre los esfuerzos locales y los esfuerzos nominales es el llamado concentrador de esfuerzos kt .

$$\sigma = kt\sigma_{nom} \quad Ec.1.35$$

Donde kt depende de la geometría del concentrador. Por ejemplo si se tiene un concentrador en forma elíptica como se muestra en la figura 1.14, este puede ser calculado mediante la ecuación 1.36:

$$kt = 1 + 2\frac{b}{a} \quad Ec.1.36$$

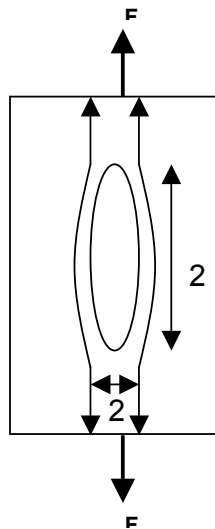


Figura 1.14. Concentrador de esfuerzos elíptico

En la ecuación 1.36 se observa que el valor del concentrador de esfuerzos de una elipse depende de la alineación de la ranura con respecto a la fuerza aplicada. Para una elipse con una razón $\frac{b}{a} = 4$ el concentrador de esfuerzo es igual a $kt = 9$, mientras que para un concentrador con razón igual a $\frac{a}{b} = 4$, el concentrador de esfuerzo es $kt = 1.5$.

En el caso de un agujero con razón $\frac{b}{a} = 1$, es decir un agujero circular donde $a = b$ el concentrador de esfuerzo es $kt = 3$

Los concentradores de esfuerzo para diversas geometrías han sido previamente determinados mediante la teoría de la elasticidad y mecánica del medio continuo, métodos computacionales como el elemento finito y métodos experimentales como la fotoelasticidad y el uso de galgas extensométricas. Estos valores pueden ser encontrados en la literatura. (Peterson's)

El concepto de concentrador de esfuerzos se encuentra limitado. De la ecuación 1.36 se puede observar que cuando a tiende a cero el concentrador de esfuerzos tiende a infinito y por ende el esfuerzo tiende a infinito, lo cual es físicamente imposible, por tal motivo el uso de concentradores de esfuerzos para pequeñas fisuras resulta incorrecto. Cuando se presenta este tipo de problemas en ingeniería es necesario utilizar el concepto de factor de intensidad de esfuerzos.

1.6 Factor de intensidad de esfuerzos

Los componentes o estructuras presentan comúnmente grietas debidas a diversos factores como son su uso, procesos de manufactura, defectos inherentes al material, etc.

Una grieta puede ser visualizada como un concentrador de esfuerzos elíptico cuyo radio tiende a cero, sin embargo, como se mencionó anteriormente, utilizar la definición de concentrador de esfuerzos para calcular su valor resulta incorrecto ($\sigma \rightarrow \infty$), por tal motivo ante la presencia de grietas o discontinuidades con radios muy pequeños es necesario hacer uso de un concepto utilizado en análisis por mecánica de la fractura llamado intensificador de esfuerzos.

Suponiendo una grieta ideal dentro de un material isotrópico lineal, el factor de intensidad de esfuerzos que define las componentes del esfuerzo en las inmediaciones del extremo de grieta o fisura puede ser calculado mediante la siguiente fórmula:

$$K = f\sigma \quad \text{Ec.1.37}$$

Donde

f = depende de la ubicación del punto en el que se determina el esfuerzo en relación con la ubicación del extremo de la grieta.

σ = esfuerzo

K = depende del nivel de esfuerzo y de la longitud de la grieta.

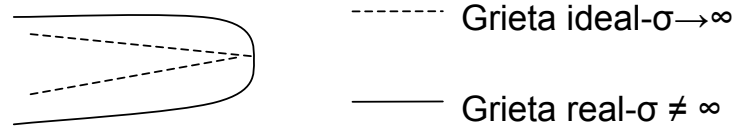


Figura 1.15 Grieta ideal y real

Cuando el valor de K llega a un valor crítico K_c la grieta se vuelve inestable y el cuerpo se rompe. El valor de K_c es una propiedad del material, cuanto mayor sea el valor de K_c , mayor será la resistencia del material al crecimiento de grietas, es decir el material será más tenaz.

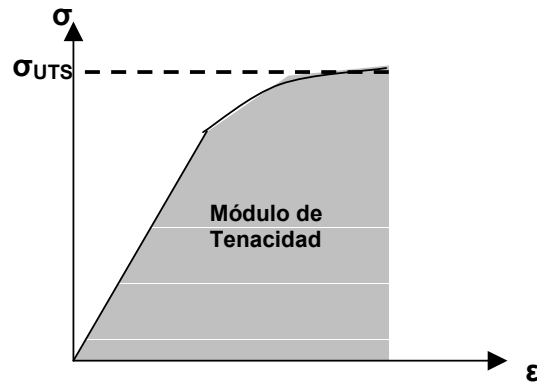


Figura 1.16. Módulo de tenacidad

El valor de K_c depende de la carga y temperatura a la cual está sometido el componente y de la geometría del mismo como se muestra en la Figura 1.17.

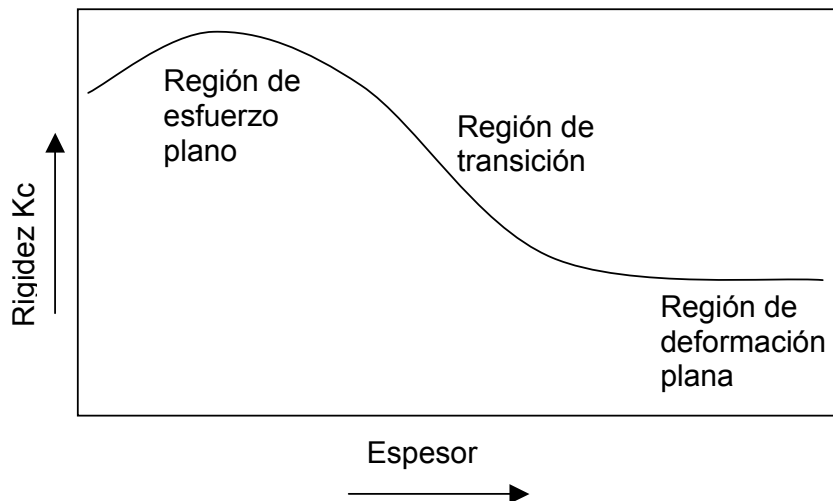


Figura 1.17. Rigidez vs. espesor

Una falla por fatiga puede ser propagada por alguno de los modos de falla mostrados en la figura 1.18 o por la combinación de estos.

- Modo I o de apertura
- Modo II o de deslizamiento
- Modo III o de torsión

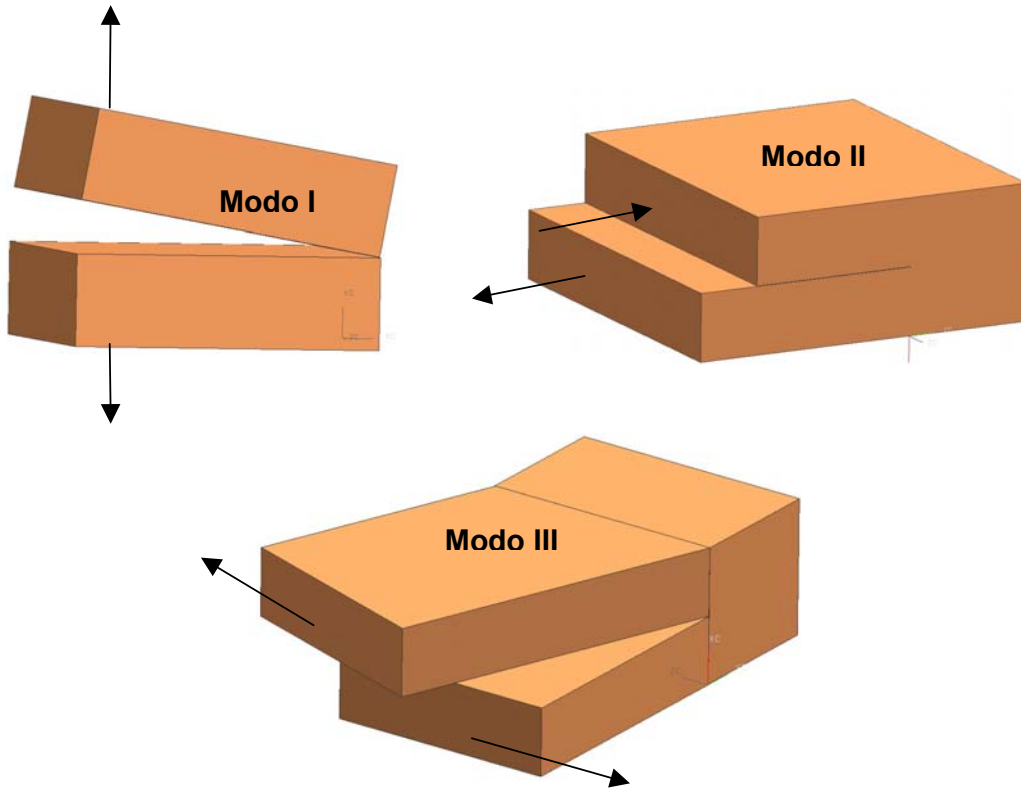


Figura 1.18. Modos de Falla

De los tres modos de falla, el Modo I es típicamente el más crítico para la propagación de grieta y en consecuencia el más crítico para la estimación de vida de un componente.

Para el Modo I el factor de intensidad de esfuerzos en una placa delgada infinita puede ser calculado mediante la ecuación:

$$K_I = \beta \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} \quad \text{Ec.1.38}$$

K_I - factor de intensidad de esfuerzos modo I

β - factor geométrico

a – tamaño de grieta

Una vez conocido el intensificador de esfuerzos y las cargas a las que está sometido el componente es posible conocer como se propagará una grieta, sin

embargo para entender el fenómeno de crecimiento de la grieta y sus ecuaciones es necesario conocer la relación que existe entre dicho intensificador y la energía del componente.

1.7 Criterio de la energía

Se sabe que el campo de esfuerzos alrededor de la iniciación de la grieta está dado por el intensificador de esfuerzos K , éste factor de intensidad tiene una relación directa con la liberación de energía elástica G . Si no se libera suficiente energía para pasar de la zona elástica a la zona plástica del material, la grieta no crecerá, por lo cual la rigidez del material depende de la energía absorbida por el crecimiento de grieta.

De acuerdo a ley de la conservación de energía el trabajo F realizado por una carga P es conservado por la energía de deformación U .

$$F - U = 0 \quad \text{Ec.1.39}$$

Donde

F se define como $F = \int P d\delta$

P =carga

δ = desplazamiento

Mientras el material se mantenga con un comportamiento dentro del rango elástico el trabajo realizado puede ser descrito como $F = \frac{1}{2} P\delta$ Ec.1.40

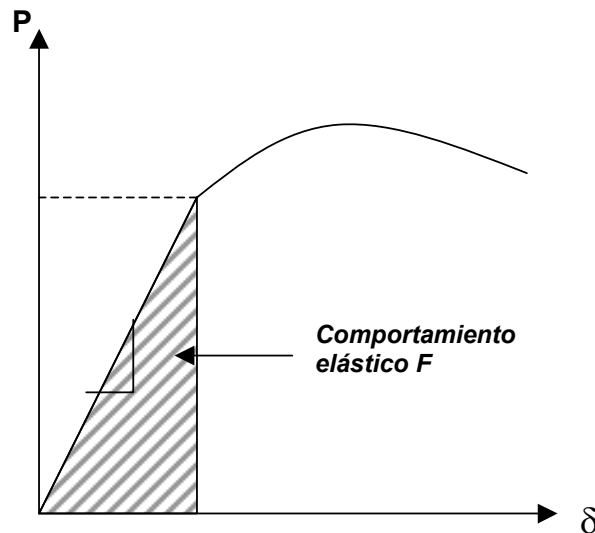


Figura 1.19 Comportamiento Elástico

De igual manera U puede ser determinado mediante la curva esfuerzo-deformación por la ecuación $U = \int \sigma de$. Ec.1.41. Donde el área bajo la curva en el rango elástico es:

$$U = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad \text{Ec. 1.42}$$

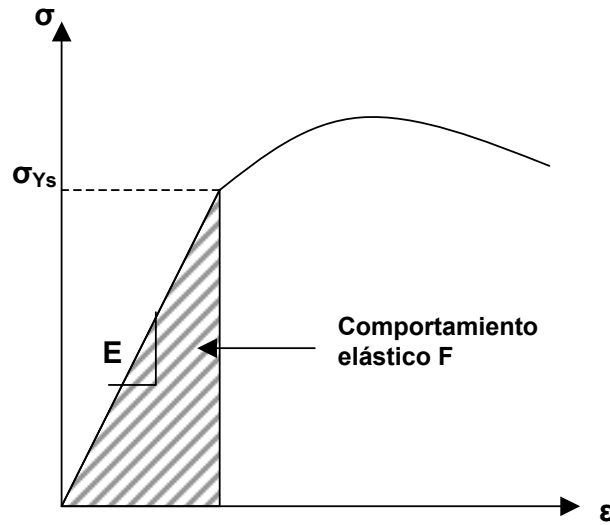


Figura 1.20 Ley de Hooke

Sustituyendo la ley de Hooke en la ecuación 1.42, se obtiene la ecuación que representa la energía de deformación en un elemento del material.

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{Ec. 1.43}$$

Debido a que dicha energía no es igual para cada elemento de un volumen, la energía total de un volumen o estructura se obtiene mediante la integral.

$$U = \iiint \frac{\sigma^2}{2E} dx dy dz \quad \text{Ec. 1.44}$$

Sustituyendo en la ecuación de la conservación de energía (Ec. 1.39)

$$\frac{1}{2} P\delta - \frac{\sigma^2}{2E} V = 0 \quad \text{Ec. 1.45}$$

La ecuación 1.45 es aplicable para un cuerpo que posee una grieta de tamaño $2a$, ya que asumiendo una región de pequeña plasticidad en la punta de la grieta el diagrama carga-desplazamiento sigue siendo lineal. En el caso de crecimiento de grieta $a + da$, se necesitará de una menor carga para causar el mismo desplazamiento debido a que la rigidez del cuerpo disminuye como se muestra en la Figura 1.21.

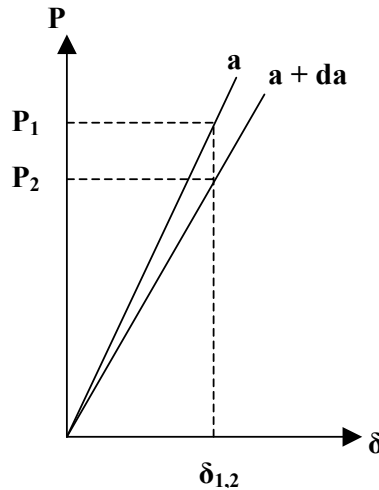


Figura 1.21 Crecimiento de grieta con desplazamiento constante

En el caso de que la carga se mantuviera constante, el desplazamiento tendría que aumentar para ocasionar un crecimiento de grieta. La energía durante este proceso debe ser conservada por lo que en la ecuación 1.39 posee un tercer término W , el cual representa el trabajo realizado durante la fractura del material a través de da .

Durante la fractura sobre da la carga debe realizar un trabajo dF , la energía de deformación debe sufrir un cierto cambio dU y cierta energía dW será requerida para fracturar el material; por lo tanto el criterio de la conservación de la energía para un cuerpo con una grieta es:

$$\frac{d}{da}(F - U - W) = 0 \quad \text{Ec.1.46}$$

Para que exista fractura sobre el cuerpo se debe cumplir la siguiente igualdad

$$\frac{d}{da}(F - U) = \frac{dW}{da} \quad \text{Ec.1.47}$$

De lo contrario no existirá energía suficiente para fracturar el material y la ecuación 1.39 será la que gobierne el comportamiento del material.

La energía total asociada con la grieta es la suma de la energía absorbida para crear nuevas superficies más la energía liberada al “descargar” las regiones en la punta de la grieta. Cada vez que la grieta crece, una cantidad de energía de deformación es liberada por el nuevo material “descargado” cerca de la grieta.

1.7.1 Liberación de energía

Considerando nuevamente la figura 1.21, se observa que al aumentar la grieta, la carga P_2 disminuye porque es más fácil mantener el desplazamiento δ_1 con

una grieta mayor. Sin embargo la carga no se mueve y por lo tanto no realiza trabajo:

$$dF = 0 \quad \text{Ec.1.48}$$

La energía de deformación decrece de $\frac{1}{2}P_1\delta_1$ a $\frac{1}{2}P_2\delta_1$ por lo que la ecuación 1.48 queda:

$$-\frac{dU}{da} = \frac{dW}{da} \quad \text{Ec.1.49}$$

donde $\frac{du}{da} < 0$

Examinando el caso en el que la carga se mantiene constante como se muestra en la figura 1.22.

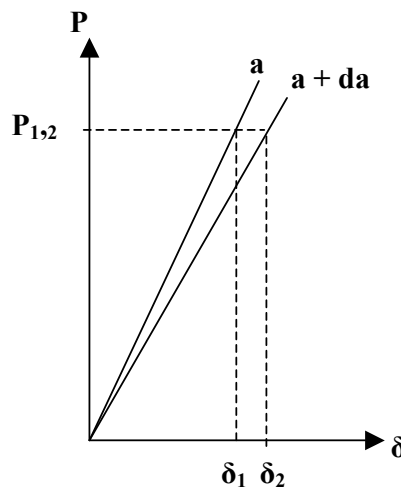


Figura 1.22 Crecimiento de grieta con carga constante

Se puede observar que la carga realiza un trabajo igual a

$$P_1(\delta_2 - \delta_1) \quad \text{Ec.1.50}$$

Mientras que la energía de deformación cambia de $\frac{1}{2}P_1\delta_1$ a $\frac{1}{2}P_2\delta_2$

$$P_1(\delta_2 - \delta_1) - \frac{1}{2}P_1(\delta_2 - \delta_1) = \frac{dW}{da} \quad \text{Ec.1.51}$$

$$\frac{1}{2}P_1(\delta_2 - \delta_1) = \frac{dW}{da} \quad \text{Ec.1.52}$$

Para ambos casos la energía es igual al cambio de la energía de deformación $\frac{dU}{da}$. En el caso de desplazamiento constante la energía resultante se da directamente por la liberación de la energía de deformación, en el segundo caso la energía de deformación aumenta, pero la carga realiza el doble de trabajo. Por lo que la energía liberada es igual al cambio en la energía de deformación y la ecuación 1.52 puede ser redefinida como

$$\frac{dU}{da} = \frac{dW}{da} \quad \text{Ec.1.53}$$

El lado izquierdo de la ecuación es llamado razón de liberación de energía y el lado derecho energía de fractura o resistencia a la fractura.

La ecuación resulta más sencilla sin embargo es necesario encontrar una expresión de la razón de liberación de energía cuando ésta es afectada por una grieta.

$$U = U_{\text{cuerpo sin grieta}} + U_{\text{debida a la grieta}} \quad \text{Ec.1.54}$$

Si se tiene un plato largo de longitud L , ancho W y espesor B con una grieta central $2a$, sometido a una carga uniforme a tensión, la energía de deformación de cada elemento del cuerpo sin fractura es igual a $\frac{1}{2} \sigma^2 / E$, por lo que la energía total del cuerpo es

$$U_{\text{cuerpo sin grieta}} = \frac{\sigma^2}{2E} LBW \quad \text{Ec.1.55}$$

El esfuerzo debido a la grieta dependerá del esfuerzo en la punta de la grieta, a su vez dicho esfuerzo en la punta es proporcional al esfuerzo aplicado, por lo que la energía de deformación debida a la grieta es proporcional a σ^2 / E y al espesor B .

Los términos de la ecuación 1.55 de liberación de energía deben tener las mismas dimensiones, por lo que se observa que la contribución de la grieta depende del tamaño de la misma.

$$U_{\text{debida a la grieta}} = C \frac{\sigma^2}{E} Ba^2 \quad \text{Ec.1.56}$$

donde C es un coeficiente adimensional igual a π .

Finalmente sustituyendo en la ecuación 1.54, la energía de liberación por unidad de espesor es:

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} LW + \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \quad \text{Ec.1.57}$$

$$\frac{dU}{da} = \frac{2\pi \sigma^2 a^2}{E} \quad \text{Ec.1.58}$$

Para una grieta con una sola punta la ecuación es:

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \quad \text{Ec.1.59}$$

Lo cual muestra que la fractura ocurre cuando:

$$\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} = \frac{dW}{da} \quad \text{Ec.1.60}$$

Una forma sencilla de visualizar la liberación de energía es mediante dos regiones triangulares cercanas a la grieta, dichas regiones se encuentran completamente “descargadas” y poseen un espesor a y una altura πa

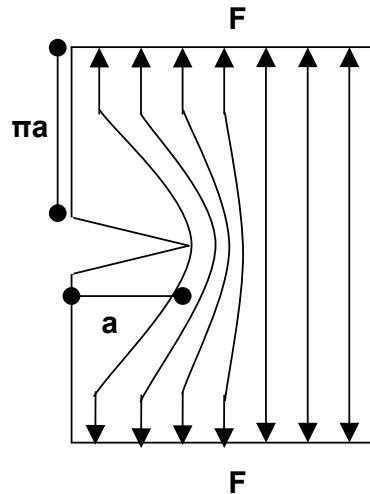


Figura 1.23 Regiones adyacentes a la grieta

Cuando la grieta ha crecido una cierta profundidad, la región de material adyacente a las superficies libres es “descargada” y su energía es liberada. Sin embargo para seguir formando la grieta, más planos deben ser fracturados por lo cual cierta cantidad de energía es absorbida por el material. La energía de superficie S asociada con la longitud de grieta a es

$$S = 2\gamma a \quad \text{Ec.1.61}$$

Donde γ es la energía de superficie y factor 2 representa las dos superficies que se han formado.

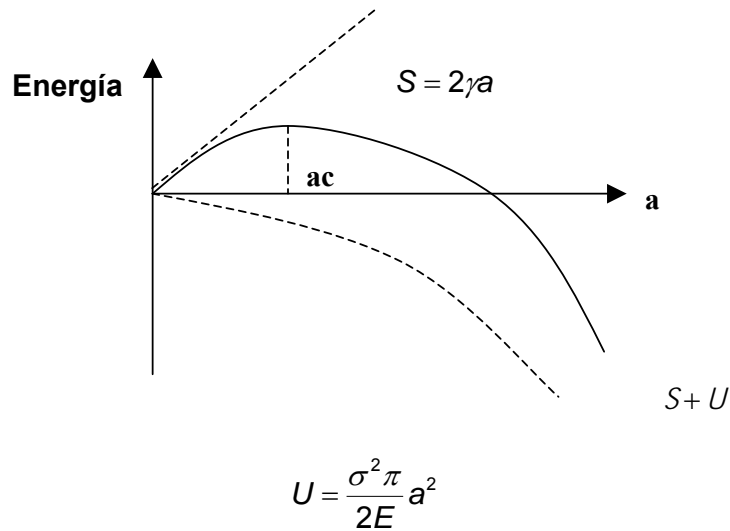


Figura 1.24 Energía durante el crecimiento de grieta.

A medida que la grieta crece, el término cuadrático domina a la energía de superficie, al llegar a la grieta crítica a_c la energía es disminuida al dejar crecer más la grieta.

La longitud crítica de la grieta puede ser calculado por:

$$\frac{\partial(S+U)}{\partial a} = 2\gamma - \frac{\sigma^2}{E} \pi a = 0 \quad \text{Ec.1.62}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad \text{Ec.1.63}$$

Una vez conocidas las condiciones mecánicas básicas que propician comunmente las fallas por fractura y asumiendo la existencia de una grieta (iniciación) es necesario entender de manera más detallada como ocurre el crecimiento de dicha grieta en una falla por fatiga.

2.1 Falla por Fatiga

Una falla por fatiga se define como el daño localizado y progresivo de un material ante la presencia de cargas cíclicas a niveles de esfuerzo significativamente inferiores al esfuerzo de ruptura del material.

Todos los materiales son anisotrópicos y no homogéneos; en cada grano del material el comportamiento anisotrópico se debe a los planos de los cristales que lo conforman y a que cuando una frontera de grano es cruzada, la orientación de dichos planos cambia. La no homogeneidad del material es debida no solo a su estructura sino también a la existencia de pequeñas partículas provenientes de la diferente composición química del material. Como resultado de la microestructura no uniforme, los esfuerzos no son distribuidos uniformemente.

La falla por fatiga usualmente comienza en regiones donde los esfuerzos son severos. Para el caso de metales dúctiles, los granos que presentan una orientación desfavorable en relación al esfuerzo aplicado, son los primeros en generar dislocaciones. A medida que más ciclos son aplicados, más dislocaciones son generadas hasta aproximarse a un nivel de saturación. Algunas de estas dislocaciones generan grietas en los granos; las cuales se esparcen a otros granos y se unen a otras grietas generadas de manera similar produciendo mayores grietas que propagan hasta que el material falla.

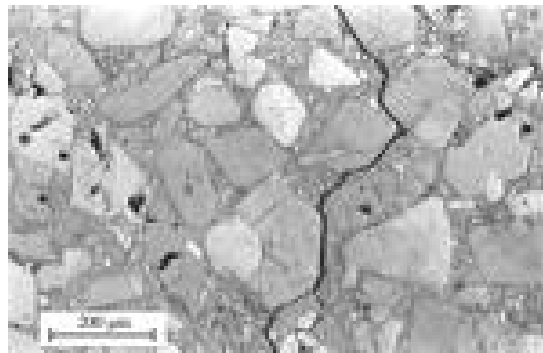


Figura 2.1. Grietas en un material [13]

En el caso de materiales menos dúctiles, el daño microestructural se esparce menos y tiende a concentrarse en los defectos del material.

Cuando la falla es dominada por el crecimiento de grieta, la fractura resultante, al ser observada macroscópicamente presenta:

- Un área relativamente suave cerca de su origen.
- Un área relacionada con el crecimiento de la grieta, la cual es usualmente plana y normal al esfuerzo de tensión aplicado.
- Superficies más rugosas que indican un crecimiento de grieta rápido, donde la razón de crecimiento se incrementa a medida que la grieta crece.
- Líneas curvas y concéntricas cercanas al origen de la grieta (marcas de playa), las cuales marcan el progreso de la grieta en varias fases como

resultado de niveles de esfuerzos, temperaturas y ambientes químicos alterados.

-El área final de la fractura, la cual es usualmente rugosa.



Figura 2.2. Falla por crecimiento de grieta [14]

Una falla por fatiga se caracteriza por:

-El proceso comienza con movimientos de dislocaciones, los cuales eventualmente generan grietas.

-A mayor rango de esfuerzo aplicado, menor será la vida por fatiga.

-El daño es acumulativo, es decir el material no se recupera al dejar de aplicar las cargas.

-La vida por fatiga se ve influenciada por diversos factores como temperatura, acabado superficial, microestructura, presencia de óxidos, esfuerzos residuales, etc.

-Para vidas muy altas (10^9 a 10^{10} ciclos) la falla ocurre por debajo del límite de fatiga teórico.

-La fatiga a bajos ciclos (generalmente menor que 10^3 ciclos) se asocia con plasticidad, por lo que parámetros basados en deformaciones deben ser utilizados para su predicción.

El estudio de vida por fatiga debe identificar los siguientes puntos:

- Estructuras críticas
- Perfil de cargas
- Geometría del componente
- Comportamiento del material
- Intervalos de inspección
- Consideraciones elásticas y plásticas de la mecánica de la fractura
- Cargas variables y estáticas de la estructura
- Efectos de los concentradores e intensificadores de esfuerzos
- Validación de los modelos de predicción mediante el uso de datos de campo y pruebas

Una falla por fatiga presenta tres fases:

- Iniciación de grieta
- Crecimiento estable de la grieta
- Crecimiento inestable de la grieta

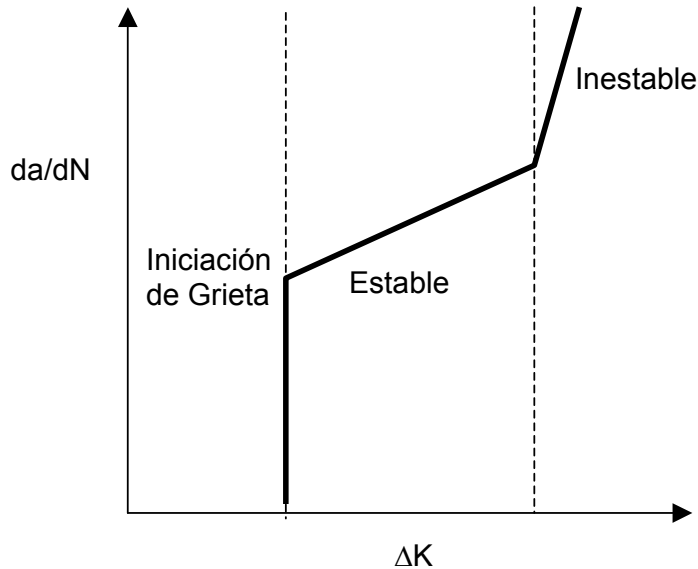


Figura 2.3. Fases de una falla por fatiga

El número total de vida por fatiga es la suma de la vida por iniciación de grieta mas la vida de la grieta en la fase estable.

Si la grieta crece lentamente con pequeños incrementos, se considera un crecimiento de grieta en fase estable, el crecimiento de una grieta en el periodo estable ocurre en dirección perpendicular al esfuerzo normal principal predominante, esta fase estable solo es posible, como se mencionó anteriormente, si el intensificador de esfuerzo es menor a la rigidez a la fractura del material K_c , con el tiempo la rigidez del material será menor al factor de intensidad de esfuerzos lo cual propiciará que la grieta crezca rápidamente y se vuelva inestable.

La fase inestable es muy corta en comparación con las otras dos fases, por tal motivo desde el punto de vista ingenieril no es tomado en cuenta.

2.2 Perfil de Cargas

Los componentes o estructuras con riesgo a fallas por fatiga se encuentran sometidos a diversos tipos de cargas cíclicas de amplitud constante y variable.

Los esfuerzos cíclicos entre los máximos y mínimos valores son representados mediante el esfuerzo alternante y el esfuerzo medio.

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \text{Ec.2.1}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \text{Ec.2.2}$$

El esfuerzo medio en conjunto con los parámetros R y A, ayudan a evaluar las cargas a compresión y a tensión que hay en un ciclo.

$$R = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad A = \frac{\sigma_{alt}}{\sigma_m} \quad \text{Ec. 2.3}$$

Si $R=0$ entonces se trata de un ciclo σ_{\max} - cero - σ_{\max}

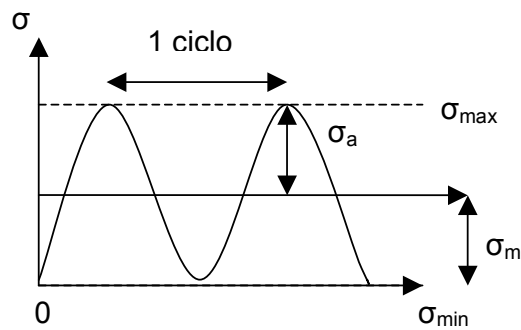


Figura 2.4. Ciclo σ_{\max} - cero - σ_{\max} ($R=0$)

Si $R > 0$ entonces σ_{\max} y σ_{\min} son ambos positivos (Figura 2.5) o ambos negativos (Figura 2.6).

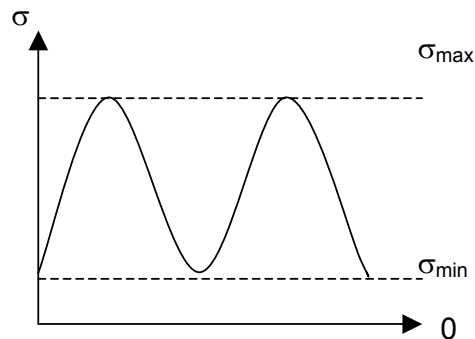


Figura 2.5. Ciclo totalmente a tensión ($R > 0$)

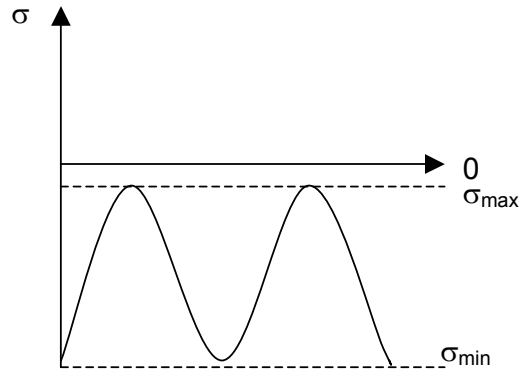


Figura 2.6. Ciclo totalmente a compresión ($R > 0$)

Si $R < 0$ entonces σ_{\min} es negativo

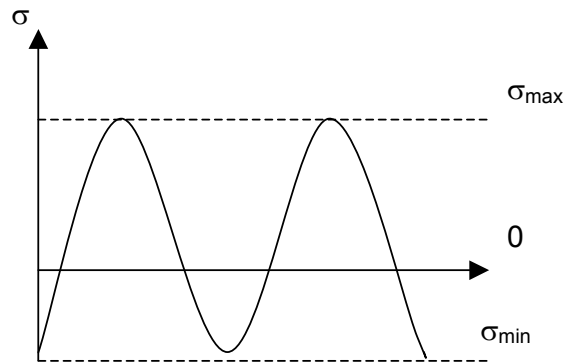


Figura 2.7. Ciclo Tensión-compresión ($R > 0$)

El conocer estos parámetros es de suma importancia ya que la teoría de mecánica de la fractura dice que una grieta se propagará mientras exista un esfuerzo a tracción.

Si dos componentes iguales se someten a una misma carga alternante pero poseen un esfuerzo medio diferente, la vida resultante para cada componente será diferente, por tal motivo es necesario tomar en cuenta el esfuerzo medio durante las predicciones de vida por fatiga.

Para cuantificar el efecto del esfuerzo medio en el cálculo de vida por bajos ciclos es necesario realizar una corrección del esfuerzo alternante. Esto es posible mediante el uso de la ecuación de Walker.

$$\sigma_w = \frac{\sigma_a}{(1-R)^{(1-m)}} \quad \text{Ec.2.4}$$

σ_a – Esfuerzo alternante

R – Relación de esfuerzos a tensión y compresión

m – Exponente de Walker (dependiente del material)

σ_w – Esfuerzo alternante equivalente

Otra manera de tomar en cuenta la presencia de esfuerzos medios, es convertir la amplitud de esfuerzo a un esfuerzo equivalente invertido, mediante el uso de las relaciones de Goodman, Gerber o Soderberg.

Relación de Goodman

$$\sigma_a = \sigma_e \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{UTS}} \right) \right] \quad Ec.2.5$$

Relación de Gerber

$$\sigma_a = \sigma_e \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{UTS}} \right) \right]^2 \quad Ec.2.6$$

Relación de Soderberg

$$\sigma_a = \sigma_e \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{YS}} \right) \right] \quad Ec.2.7$$

σ_a – Esfuerzo alternante

σ_m – Esfuerzo medio

σ_e – Limite de fatiga

σ_{YS} – Esfuerzo de cedencia

σ_{UTS} – Esfuerzo Ultimo a la tensión

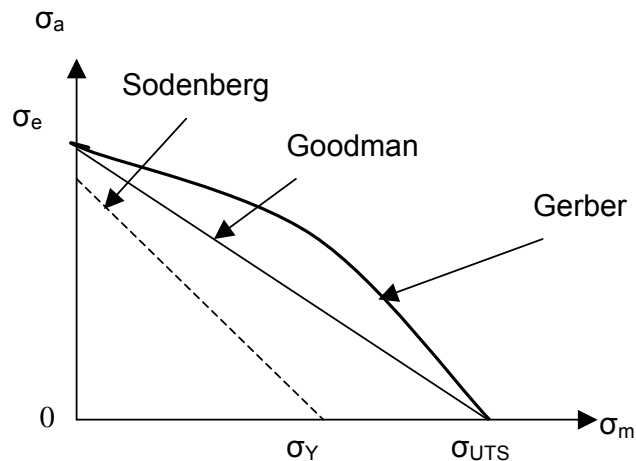


Figura 2.8. Curvas de Soderberg, Goodman y Gerber

De acuerdo a las teorías de Soderberg, Goodman y Gerber, un componente poseerá vida infinita (1×10^7) mientras la combinación de esfuerzo alternante y esfuerzo medio al que se encuentra sometido, se encuentre dentro de la curva respectiva a cada teoría.

En la realidad muy pocos componentes se encuentran sometidos a cargas constantes, por lo cual es necesario utilizar otros criterios para tomar en cuenta el daño acumulado por la presencia de cargas de amplitud variable.

La regla Palmaren-Miner establece que la fatiga ocurrirá cuando la suma de las fracciones de vida para cada carga sea igual a 1.

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad \text{Ec.2.8}$$

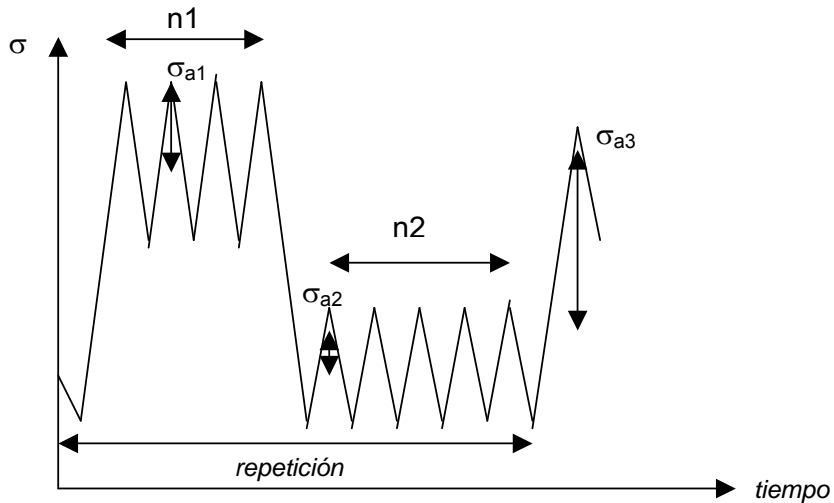


Figura 2.9. Cargas de amplitud variable

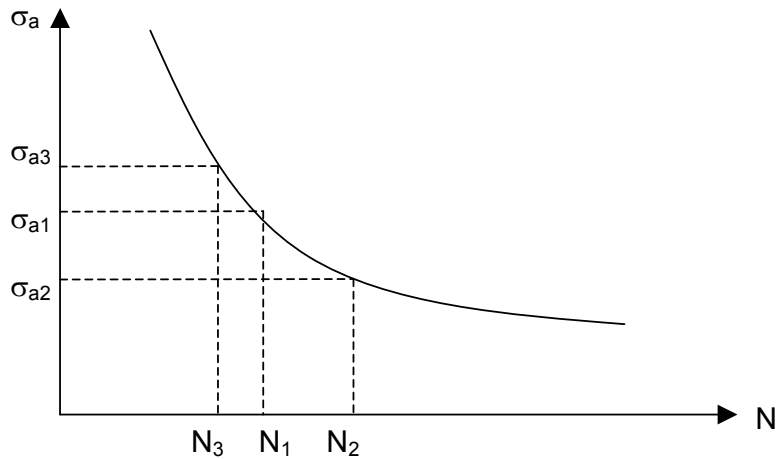


Figura 2.10. Diagrama Esfuerzo-vida

$$\text{Numero de repeticiones} \times \left[\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{1}{N_3} \right] = NT = 1 \quad \text{Ec.2.9}$$

Ante la presencia de perfiles de cargas muy complejos donde no es fácil identificar los ciclos más dañinos para el componente, es necesario utilizar técnicas como la del conteo o "rainflow". Esta técnica permite eliminar los ciclos menos dañinos del perfil de cargas, cuya contribución en la vida total del componente es muy pequeña o incluso despreciable, ya que dichos ciclos son generados por esfuerzos medios y alternantes pequeños (rangos pequeños) en comparación con el resto del perfil de cargas.

Por ejemplo para un componente de cierto material sometido a un perfil de cargas como el que se muestra en la figura 2.11.

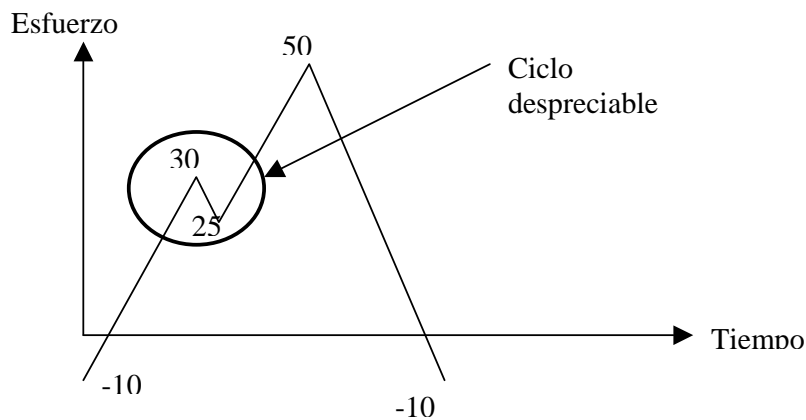


Figura 2.11. Ejemplo de eliminación de ciclos

Los esfuerzos medio y alternante para cada rango de esfuerzo son:

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &= \frac{-10 + 50}{2} = 20 & \sigma_{m2} &= \frac{30 + 25}{2} = 27.5 \\ \sigma_{a1} &= \frac{-10 - 50}{2} = 30 & \sigma_{a2} &= \frac{30 - 25}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de Walter y la curva Esfuerzo-vida del material ($A= 1$) se obtienen los ciclos para cada esfuerzo alternante.

$$N1 = 20,000 \text{ ciclos}$$

$$N2 = 1E9 \text{ ciclos}$$

Mediante la ecuación de Miner se calcula el daño acumulado, es decir la vida total del componente.

$$\left[\frac{n1}{N1} + \frac{n2}{N2} \right] = \frac{1}{NT}$$

$$\left[\frac{1}{20,000} + \frac{1}{1E9} \right] = \frac{1}{NT}$$

$$NT = \frac{1}{[.00005 + 1E - 9]}$$

$$NT = 19,999 \text{ ciclos}$$

De lo cual se concluye que la contribución del segundo rango de esfuerzos en la vida total del componente puede ser considerada como despreciable. (0.002%)

2.3 Teorías de Falla por Fatiga

Los métodos utilizados para predecir la vida de un componente se basan en tres teorías de falla por fatiga.

2.3.1 Método de Esfuerzo-Vida

Introducido en 1860, fue de los primeros métodos utilizados para estimar las fallas por fatiga. Se basa en curvas que representan el esfuerzo nominal contra los ciclos que soporta un componente antes de la falla por fatiga (iniciación + propagación de grieta).

Este método asume que la curva Esfuerzo-Ciclos (S-N) puede ser representada en una escala logarítmica mediante una recta definida por la siguiente ecuación:

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_f (2N_f)^b \quad \text{Ec.2.10}$$

σ_f = Coeficiente de esfuerzo-fatiga

b = exponente de esfuerzo-fatiga

La curva S-N puede ser afectada por diversos factores como el material, esfuerzos medios, esfuerzos residuales, frecuencia de cargas, geometría, acabado superficial, temperatura y medio ambiente.

Los valores de σ_f y b para los materiales más comúnmente utilizados en ingeniería pueden ser encontrados en literatura.

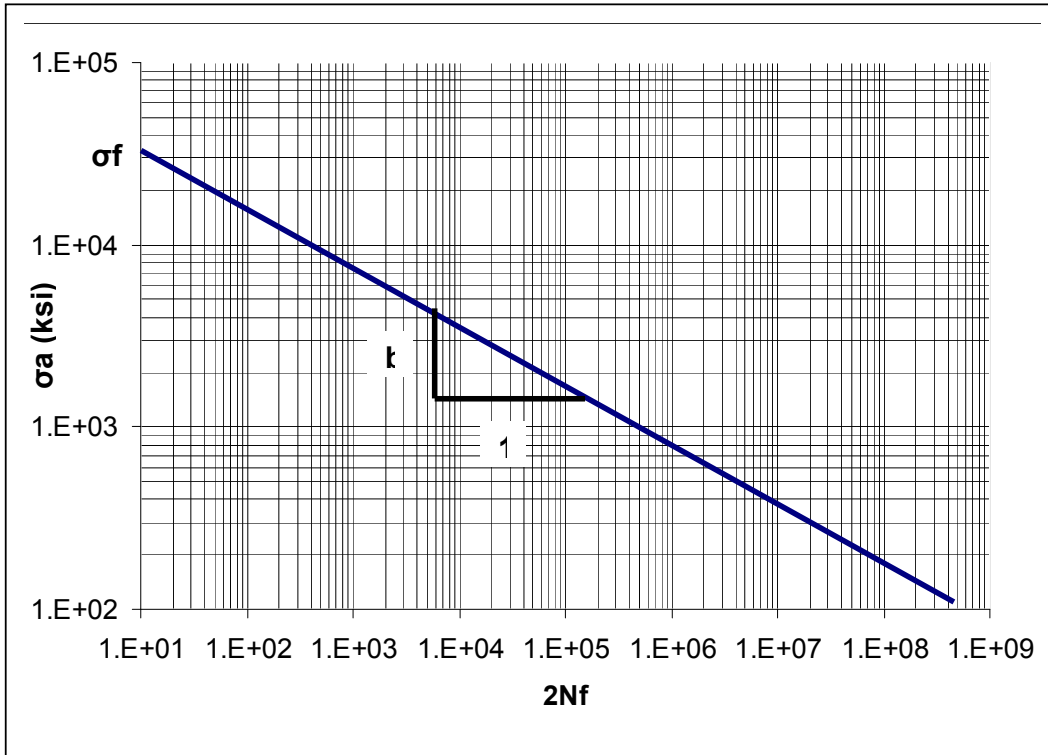


Figura 2.12 Método de Esfuerzo-Vida

Una de las limitantes de este método es que solo toma en cuenta los esfuerzos que se encuentran dentro del rango elástico del material, por lo cual es comúnmente utilizado para predecir vida de altos ciclos donde se tienen esfuerzos a alta frecuencia pero de magnitud pequeña.

2.3.2 Método de Deformación Local

El método de deformación local es más exacto que el método de esfuerzo-vida, fue introducido en 1960 y asume que la amplitud de deformación puede ser dividida en dos partes, la elástica y la plástica:

$$\varepsilon_T = \underbrace{\frac{\sigma_f}{E} (2N_f)^b}_{\text{Plástico}} + \underbrace{\varepsilon_f (2N_f)^c}_{\text{Elástico}} \quad \text{Ec.2.11}$$

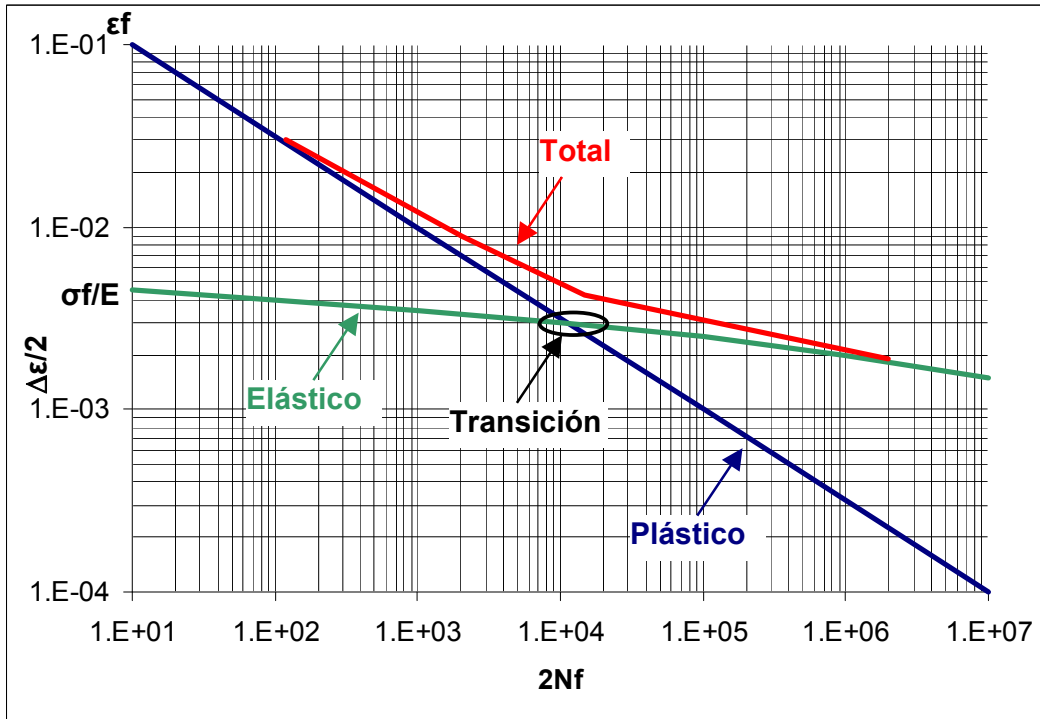


Figura 2.13. Método de Deformación Local

Como se muestra en la figura 2.13 para vidas cortas el término plástico es dominante, mientras que para periodos largos de vida la porción elástica es el término dominante. Cuando solo el término elástico está presente, la ecuación 2.11 se convierte en la ecuación utilizada en el método esfuerzo-deformación

El punto de intersección entre las curvas elástica y plástica es llamado punto de transición de vida por fatiga ya que separa la fatiga por comportamiento plástico (fatiga por bajos ciclos) de la fatiga por comportamiento elástico (fatiga por altos ciclos).

A pesar de que el método por deformación proporciona una predicción de vida más exacta, desde un punto de vista de diseño no es un método práctico, ya que en la actualidad no existen publicaciones o tablas de concentradores de deformaciones.

2.3.3 Mecánica de la Fractura

El método de mecánica de la fractura es un método muy utilizado para la predicción de vida en componentes ya que se trata de un método de tolerancia al daño, es decir que el hecho de que exista una grieta en cierto componente no implica que la vida útil de dicho componente haya terminado ya que la grieta o defecto puede ser monitoreado y es posible estimar la vida remanente del componente.

Este método asume que el componente estructural tiene un defecto intrínseco capaz de presentar un periodo considerable de grieta estable antes de que se presente la falla catastrófica. La propagación de grieta ocurre como resultado de un daño local y de la falla del material.

Los métodos basados en esfuerzo y deformación local se utilizan para calcular la vida total de un componente (iniciación más propagación de grieta), la aplicación de mecánica de la fractura es útil para predecir únicamente la vida por propagación de grieta. La vida de propagación toma en cuenta los ciclos que soporta el material desde el tamaño inicial de la grieta hasta el tamaño que posee la grieta al volverse inestable.

Existen diversos métodos de mecánica de la fractura para la resolución de problemas de falla por fatiga. El uso de estos depende del tipo de problema a atacar y de la aproximación de solución deseada.

Uno de los métodos comúnmente utilizado es el método Lineal-Elastico por sus siglas en inglés LEFM (Linear Elastic Fracture Mechanics).

2.3.3.1 LEFM (Linear Elastic Fracture Mechanics)

El método de mecánica de la fractura lineal-elástico, asume que el material se comporta de acuerdo a la ley de Hooke, es decir que los esfuerzos plásticos en la punta de la grieta se encuentra dentro de una pequeña región por lo cual es posible asumir un comportamiento lineal del material.

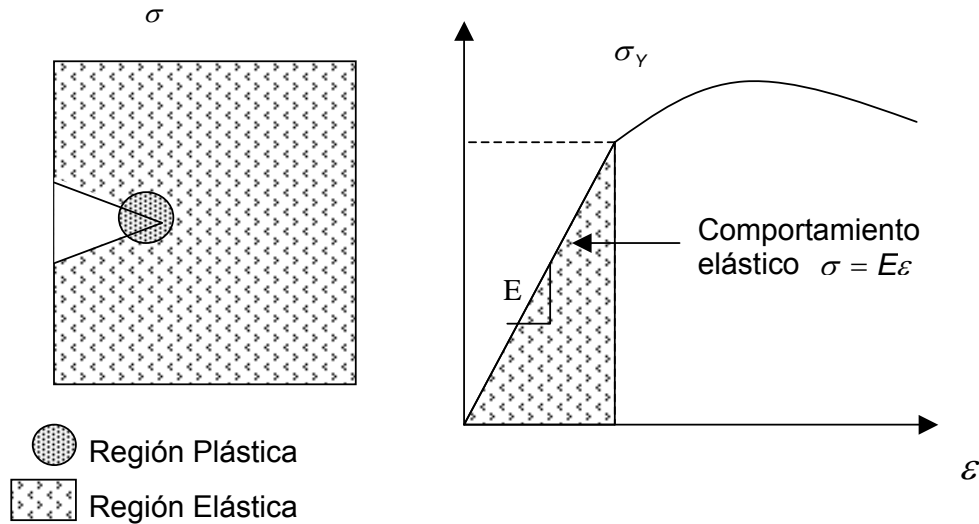


Figura 2.14. Método de LEFM

Si la zona de deformación plástica en la punta de la grieta es muy grande, como ocurre comúnmente en materiales altamente dúctiles, el método LEFM deja de ser válido debido a que puede acarrear errores de cálculo. Cuando se tienen valores por arriba del 80% de carga o momento puramente plástico, es necesario utilizar otros métodos de mecánica de la fractura como el método elasto-plástico donde el parámetro J es utilizado para describir el estado de esfuerzos/deformaciones en la punta de la grieta.

Como se mencionó anteriormente la tenacidad es una propiedad del material que representa su resistencia a la fractura; si el factor de intensidad de esfuerzos K alrededor de la grieta sobrepasa el valor de tenacidad K_c del material éste fallara catastróficamente. A medida que la grieta crece, el valor de K cambia (Figura 2.15), por tal motivo es necesario conocer el valor del factor de intensidad de esfuerzos a medida que la grieta se propaga.

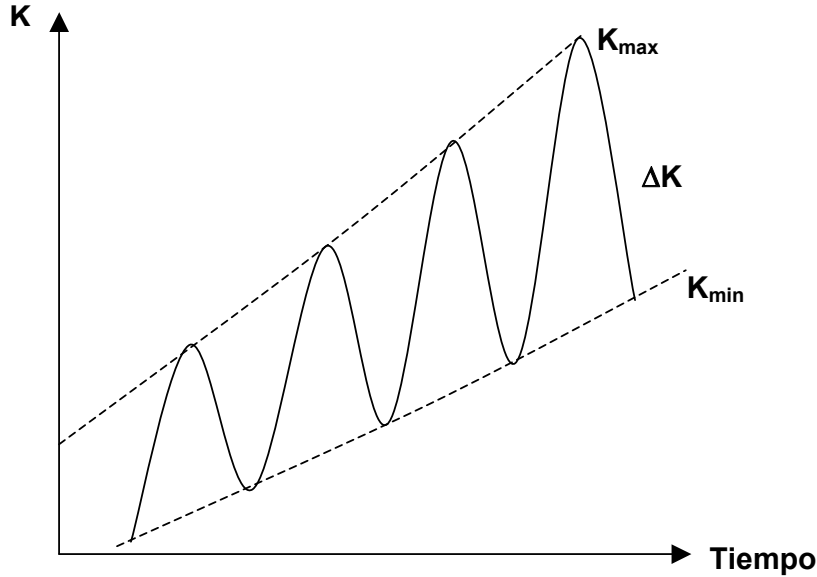


Figura 2.15. Método de LEFM

Para una grieta como la mostrada en la figura 2.14, sometida a un Modo I de carga, los esfuerzos normales y cortantes pueden ser calculados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \right) \\ \sigma_z &= 0 \quad \text{Esfuerzo plano} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad \text{Ec.2.12}$$

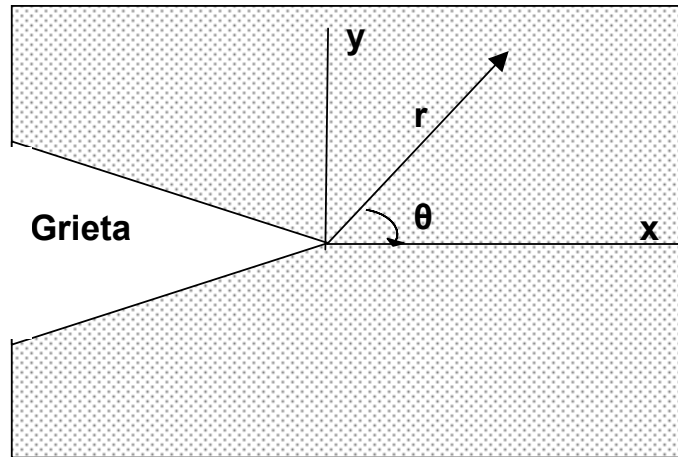


Figura 2.16. Grieta Modo I

De las ecuaciones 2.12 se observa que para $\theta = 0^\circ$ (plano perpendicular a la carga aplicada) el esfuerzo cortante es cero y los esfuerzos en la dirección x y y son iguales. A medida que x crece, es decir al alejarse de la punta de la grieta, los esfuerzos disminuyen.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{Ec.2.13}$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$$

El valor de K_I puede ser obtenido realizando el siguiente razonamiento:

Dado que se asume un comportamiento lineal, es posible concluir que los esfuerzos en cualquier parte del componente son proporcionales a la carga aplicada.

$$\sigma_y \div \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{Ec.2.14}$$

El esfuerzo, no únicamente depende de la carga si no del tamaño de la grieta a; a medida que la grieta crece el esfuerzo será mayor, por lo que la ecuación 2.14 se redefine como

$$\sigma_y \div \frac{\sigma a}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{Ec.2.15}$$

Realizando un análisis dimensional

$$\sigma_y \div \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{Ec.2.16}$$

Finalmente la proporcionalidad se convierte en igualdad mediante el uso de una constante llamada C.

$$\sigma_y = \frac{C\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{Ec.2.17}$$

Estudios previos de mecánica de la fractura han demostrado que

$$C = \sqrt{\pi}$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{\pi}\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{Ec.2.18}$$

Con lo que se concluye que $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ Ec.2.19

El uso de la ecuación 2.19 se encuentra limitado a una placa infinita con una grieta como la mostrada en la figura 2.13; sin embargo, con el fin de ampliar su campo de aplicación esta ecuación puede ser redefinida como:

$$K_I = \beta\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{Ec.2.20}$$

Donde

a= tamaño de la grieta

σ = esfuerzo nominal (esfuerzo alejado de la punta de la grieta)

β = factor geométrico f(geometría, ubicación de la grieta y tipo de carga)

La tabla 1 muestra algunos valores de β para grietas relativamente pequeñas sometidas a esfuerzos de tensión.

Tipo de grieta	β
Grieta centrada en un plato	1
Grieta a través del espesor	1.12
Grieta superficial en medio circulo	0.73
Grieta en esquina	0.72

Tabla 2.1. Factor geométrico

En la literatura es posible encontrar los valores de β para diferentes tipos de grietas sometidos a diferentes tipos de carga.

Las predicciones de vida por LEFM se realizan tomando en cuenta dos relaciones:

- El campo de esfuerzos alrededor de la iniciación de la grieta (ΔK)
- La razón de crecimiento de la grieta (da/dn)

La razón de crecimiento de grieta por fatiga (FCGR por sus siglas en inglés, Fatigue Crack Growth Rate) expresada como da/dN contra ΔK puede ser tomada como una propiedad fundamental del material como lo es el esfuerzo a la cedencia o el esfuerzo último a la tensión.

Correlación entre da/dN y ΔK

Relación de Paris

En 1963 Paris y Erdogan demostraron la existencia de una correlación entre da/dN y ΔK , argumentando que si ΔK caracteriza la magnitud de los esfuerzos por fatiga en la punta de la grieta, entonces también puede caracterizar la razón de crecimiento de la grieta, por lo que la ecuación 2.20 puede ser representada por lo que se conoce como la ecuación de Paris:

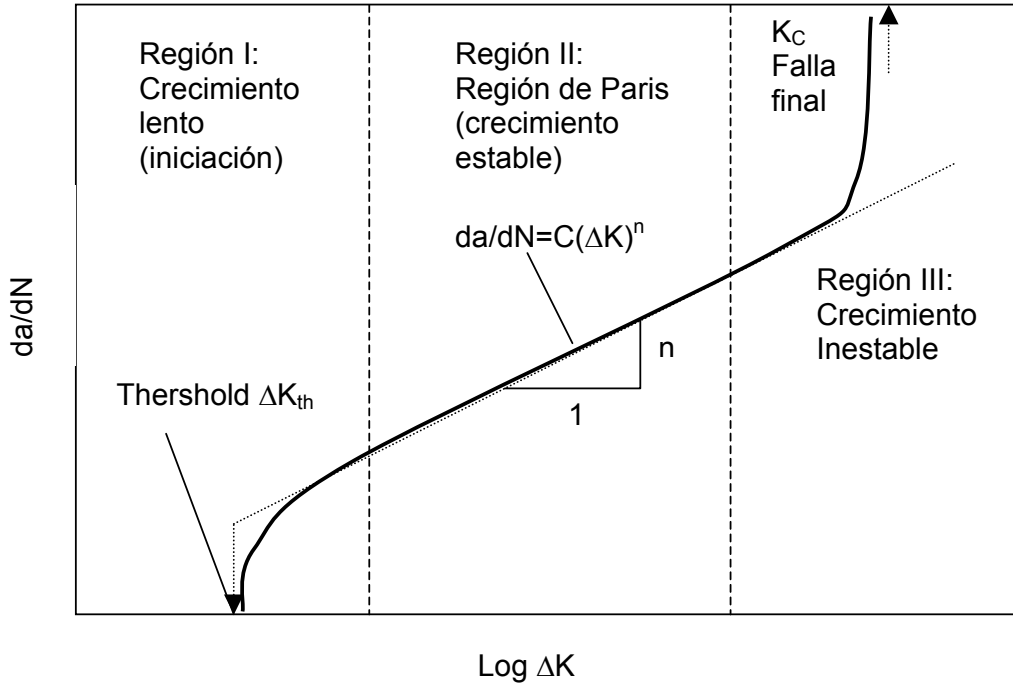


Figura 2.17 Ecuación de Paris

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad \text{Ec.2.21}$$

$$\Delta K = \beta \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad \text{Ec.2.22}$$

Relación de Sigmoidal

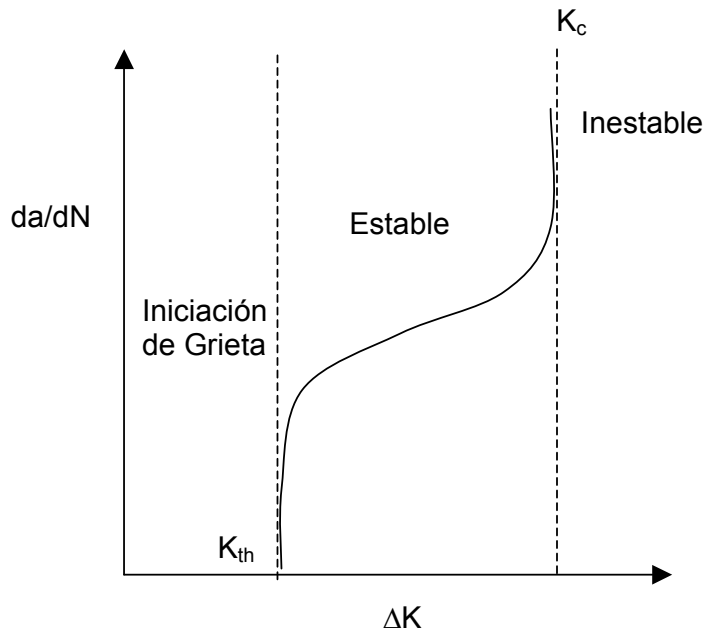


Figura 2.18 Ecuación Sigmoidal

$$\frac{da}{dN} = \exp(C) \left(\frac{\Delta K}{K_{th}} \right)^m \left[\ln \left(\frac{\Delta K}{K_{th}} \right) \right]^n \left[\ln \left(\frac{K_c}{K_{th}} \right) \right]^p \quad Ec.2.23$$

C, m, n, p= constantes del material

m = pendiente de la grieta (constante del material)

ΔK= K_{max}-K_{min}. Rango del factor de de intensidad de esfuerzos producido por una carga cíclica de rango Δσ

K_{th} = thershold, es el valor de tenacidad del material que debe ser excedido para que la grieta crezca

K_c = Tenacidad crítica, es el valor de tenacidad del material que debe ser alcanzado para que la fractura o falla catastrófica ocurra

El valor de la razón da/dn no es solo dependiente de ΔK si no también del valor medio de K, por lo cual es necesario conocer el valor de R.

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad Ec.2.24$$

En la ecuación anterior se puede observar que el valor de R, al igual que en predicciones de iniciación de grieta, depende del tipo cargas que se tenga durante la misión. Por lo cual de igual manera es necesario considerar la presencia de esfuerzos medios.

Como se expuso anteriormente, para realizar cálculos de propagación de grieta es necesario conocer el comportamiento del material durante la fractura, es decir las propiedades y constantes particulares del material. Dichas propiedades son comúnmente obtenidas mediante pruebas de fatiga del material.

Estas pruebas pueden llegar a ser muy complejas y costosas, especialmente si se realizan en el componente real; sin embargo mediante el uso de probetas convencionales es posible obtener el nivel de precisión requerido para obtener resultados confiables en el análisis de propagación de grieta.

3.1 Vida por Fatiga

La vida por fatiga consiste en los ciclos necesarios para iniciar la grieta mas los ciclos para propagarla; cuando la falla por fatiga es causada por grandes inclusiones o grietas preexistentes, la vida total consiste únicamente en los ciclos necesarios para propagar la grieta. Las pruebas de fatiga realizadas en especímenes generalmente caracterizan la vida total por fatiga de cierto material, sin embargo estas pruebas no toman en cuenta las grietas preexistentes o defectos que reducen o eliminan la fase de iniciación de grieta, por tal motivo las pruebas y caracterización del crecimiento de grieta por fatiga son utilizados para predecir la razón de crecimiento a la cual una grieta crece al someterse a cargas de fatiga.

LEFM esta basado en el análisis del campo de esfuerzos, el cual muestra que el campo de esfuerzos elásticos en la región de la punta de la grieta puede ser descrito únicamente por el factor de intensidad de esfuerzos K . Este mismo método es utilizado para caracterizar la razón de crecimiento de grieta por fatiga da/dN en términos del rango del factor de intensidad de esfuerzos ΔK .

Cuando un componente o espécimen que contienen una grieta se encuentra sometido a cargas cíclicas, la longitud de grieta a , incrementa con el número de ciclos N si la amplitud de carga ΔP , la razón de carga R y la frecuencia de los ciclos v se mantienen constantes. La razón da/dN se incrementa a medida que el tamaño de grieta crece durante una cierta prueba.

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{R,v} = f(\Delta P, a) \quad \text{Ec. 3.1}$$

Donde f es función de la geometría del espécimen, del tamaño de la grieta y la configuración de las cargas a las que dicho componente es sometido.

Las pruebas de FCGR comienzan con la selección del tamaño y geometría de espécimen, la técnica de medición de longitud de grieta y la aplicación de los datos obtenidos de la prueba.

Las pruebas son generalmente realizadas a temperatura ambiente, sin embargo se puede utilizar cualquier ambiente líquido o gaseoso a cierta temperatura para determinar el efecto de la temperatura, corrosión o alguna otra reacción química.

La adquisición de datos validos y consistentes para la región I de la curva de Paris es complicada ya que el comportamiento de la grieta se vuelve muy sensible al material, al medio ambiente y a la prueba utilizada. Dentro de esta región, los mecanismos de fatiga del material que disminuyen la razón de crecimiento de grieta son más significativos, por tal motivo resulta demasiado costoso el obtener el valor verdadero de K_{th} ; incluso en algunos materiales esta propiedad puede no existir, por tal motivo generalmente los diseñadores se interesan más en el FCGR cerca del régimen de "thershold" (resistencia a la

extensión estable de una grieta bajo cargas cíclicas). El ASTM E 647 establece los requerimientos para realizar una prueba de threshold.

Para la medición del crecimiento de grieta en cualquier región, la capacidad de resolución de la técnica debe ser conocida. El cambio mínimo en el crecimiento de la grieta a ser medida debe ser diez veces la precisión de medición de la longitud de grieta.

Para cargas no continuas se recomienda que la reducción de la carga máxima no exceda el 10% de la carga máxima previa.

Para realizar una adecuada selección del espécimen, la capacidad de resolución y el gradiente de K deben ser conocidos ya que si el dispositivo de medición no es el adecuado el espécimen puede separarse en dos antes de que la razón de threshold sea identificada. Para evitar este problema es necesario generar una gráfica de control de intensidad de esfuerzo (K vs a) previo a la selección del espécimen.

Cuando se utiliza un nuevo dispositivo de medición, un nuevo tipo de material o se presenta un cambio en alguno de los factores utilizados en pruebas anteriores, es necesario realizar una prueba a amplitud constante posterior a la disminución K en la prueba con el fin de comparar los dos métodos

3.2 Selección y preparación del espécimen

Los dos tipos de especímenes comúnmente utilizados son:

- Especímen a tensión con grieta en medio.
- Especímen de tipo compacto

Sin embargo cualquier espécimen puede ser utilizado mientras se conozca la solución del factor de intensidad de esfuerzos.

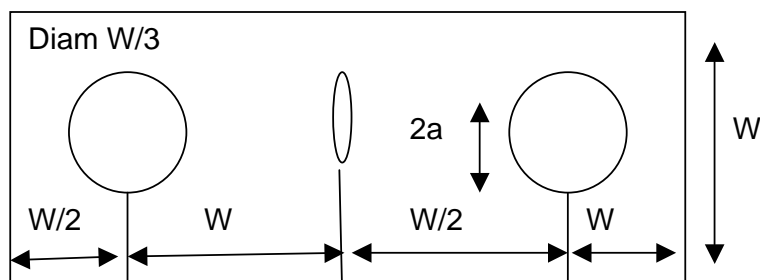


Figura 3.1 Especímen de pruebas de LFCG

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{B} \sqrt{\frac{\pi \alpha}{2W}} \quad \text{Sec} \quad \frac{\pi \alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{2a}{W}; \text{válido para } \frac{2a}{W} < 0.95 \quad \text{Ec. 3.2}$$

$B = \text{espesor del espécimen}$

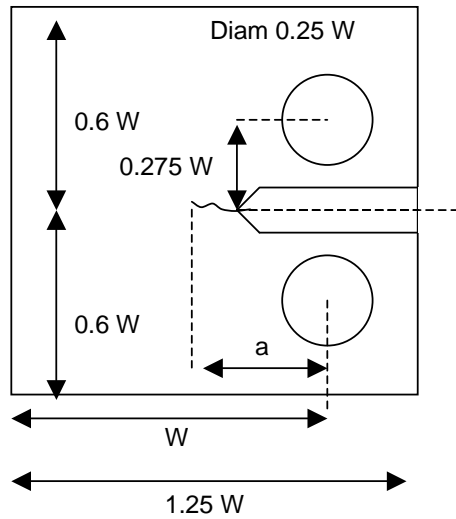


Figura 3.2 Espécimen de pruebas de LFCG

$$\Delta K = \frac{\Delta P(2 + \alpha)}{B\sqrt{W}(1 - \alpha)^{3/2}} (0.886 + 4.64\alpha - 13.32\alpha^2 + 14.72\alpha^3 - 5.6\alpha^4) \quad \text{Ec. 3.2}$$

$$\alpha = \frac{a}{W}; \text{válido para } \frac{a}{W} = 0.2$$

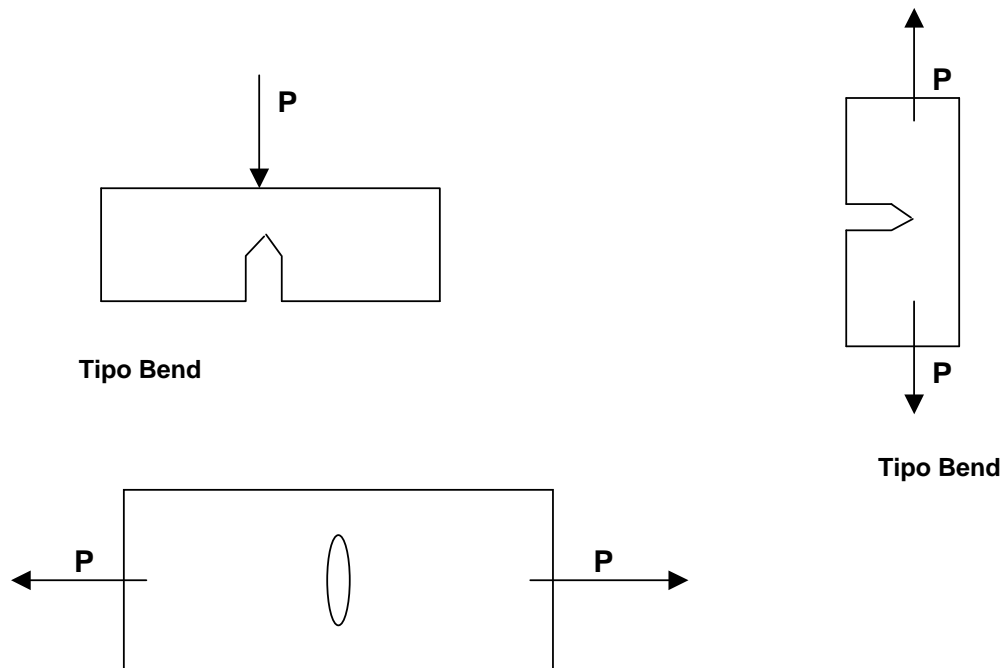


Figura 3.3 Especímenes de pruebas de LFCG

Se debe tener en cuenta cual es el rango de aplicación de la solución del factor de intensidad de esfuerzos para cada espécimen, por ejemplo para las

especímenes de las figuras 3.1 y 3.2 el rango de aplicación de los factores de intensidad de esfuerzos es $2a/W < 0.95$ y $a/W > 0.2$ respectivamente. El uso de expresiones de intensidad de esfuerzo fuera de los rangos aplicables produciría errores significativos.

Si se toman en cuenta las reglas de LEFM, el espécimen debe ser predominantemente elástico. Aunque no existe un requerimiento mínimo de espesor del espécimen se considera que este depende de la aplicación del mismo. Las características del material, el tamaño de espécimen, el tamaño de grieta y las cargas aplicadas determinaran si el espécimen es predominantemente elástico.

3.2.1 Espesor del espécimen

A pesar de que una gran variedad de espesores de espécimen son utilizados, se debe tener en cuenta que la curvatura de grieta en el espécimen se incrementara a medida que el espesor aumenta. Debido a que las soluciones del factor de intensidad de esfuerzos se basan en grietas rectas, una gran cantidad de curvatura de grieta puede conducir a errores en las lecturas si no se realizan las correcciones adecuadas.

3.2.2 Microestructura del material

El material y su microestructura juegan un papel importante en la selección de la geometría del espécimen. Los materiales con microestructuras anisotrópicas debidas a procesos como el laminado o forjado pueden tener grandes variaciones en el FCGR en diferentes direcciones, en tales casos la orientación del espécimen debe ser seleccionada de tal manera que represente las orientaciones de cargas esperadas durante el servicio.

Con el fin de eliminar los efectos del tamaño de grano, se recomienda que el espesor del espécimen sea mayor a 30 veces el diámetro del grano.

3.2.3 Cargas

Las condiciones de carga también deben ser consideradas durante la selección de la geometría y tamaño del espécimen. Estas consideraciones incluyen la razón de carga R , el esfuerzo residual y los gradientes de intensidad de esfuerzo K . Todos los especímenes son adecuados para cargas a tensión ($R > 0$), sin embargo cuando se requiere realizar una prueba para cargas con R negativa el espécimen debe ser cargado simétricamente.

La razón a la cual K decrece a medida que la grieta se extiende a un amplitud de carga constante esta dado por la función geométrica $f(a/w)$ y debe ser considerada durante la selección de espécimen.

3.2.4 Equipo

Las pruebas mecánicas más modernas utilizan marcos servohidráulicos. Al seleccionar el espécimen es importante estar conscientes de la capacidad de carga del actuador, para así garantizar precisión, frecuencia y capacidad de aplicación de la carga.

3.2.5 Preparación del espécimen

Si se desean realizar ranuras en el espécimen es necesario tomar en cuenta el radio de la ranura ρ para la selección del método de corte.

Posteriormente el espécimen es pulido para permitir la adecuada medición del tamaño de grieta. Este pulido se realiza comúnmente utilizando los métodos estándares de metalografía.

Las funciones de calibración de K encontradas en el ASTM son válidas para grietas puntiagudas con rangos de longitud especificados. Por tal motivo antes de realizar la prueba es necesario generar dicha grieta para evitar los efectos del maquinado de la ranura. El proceso para generar la grieta es conocido como preagrietamiento.

Para la mayoría de los metales el preagrietamiento es un proceso relativamente sencillo que puede ser realizado bajo cargas o desplazamientos controlados. Éste es realizado a una intensidad de esfuerzos suficiente para causar la iniciación de grieta en la ranura y propagarla a una longitud que elimine el efecto de dicha ranura.

Debido a cambios microestructurales, esfuerzos residuales o desalineación del espécimen, la grieta puede crecer no uniformemente en 2 superficies. Si en las longitudes de grieta de las dos superficies varía por mas de $0.025W$ o $0.25B$ (lo que sea menor), la operación de preagrietamiento no fue exitosa y los resultados de la prueba no serán válidos

3.2.6 Mediciones

El realizar mediciones precisas de la extensión de grieta por fatiga es esencial para determinar rangos de crecimiento de grieta confiables.

El objetivo de las pruebas de FCGR es generar una historia de a contra N bajo ciertas condiciones de carga. Esta información es generada mediante la aplicación de cargas cíclicas de cierta magnitud y frecuencia.

Cuando sea posible la frecuencia de la prueba debe mantenerse constante, sin embargo en ocasiones es necesario disminuir dicha frecuencia para realizar las mediciones.

Las cargas más utilizadas durante las pruebas son las cargas en forma de onda senoidales o de diente de sierra. Las primeras son muy utilizadas cuando

se tienen sistemas servohidráulicos, mientras que las segundas son utilizadas cuando se desea hacer mediciones a temperaturas elevadas.

En la actualidad existen varios tipos de pruebas de FCGR

- Amplitud constante
- Aplicación de cargas manuales
- Carga continua

3.2.7 Caracterización de la superficie de fractura

Los especímenes utilizados durante las pruebas de fatiga también son utilizados para identificar las interacciones de la grieta con la microestructura del material. Esto se hace mediante el uso de microscopía electrónica.

Los primeros tres capítulos de este trabajo muestran los conocimientos básicos necesarios para realizar cálculos de propagación de grieta en componentes sometidos al modo I de carga y con un comportamiento del material dentro del rango elástico.

Para comenzar el cálculo de propagación de grieta en un componente es necesario conocer, entre otras cosas, el valor, dirección y comportamiento de los esfuerzos que propagan dicha grieta. Para esto es necesario conocer las cargas a las que se encuentra sometida la parte a analizar (componentes de esfuerzo y misión), los concentradores de esfuerzo (geometría) y el plano de propagación (esfuerzos principales, gradientes). Esto puede realizarse mediante cálculos a mano o mediante el uso de software especializados en análisis por elemento finito.

4.1 Análisis de elemento Finito

El método de elemento finito es un método numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de un sistema. El método se basa en dividir el cuerpo, estructura o medio continuo en una serie de subdominios denominados elementos finitos; dichos elementos son entidades que conectan conjuntos de puntos representativos llamados nodos, el conjunto de nodos y elementos recibe el nombre de malla.

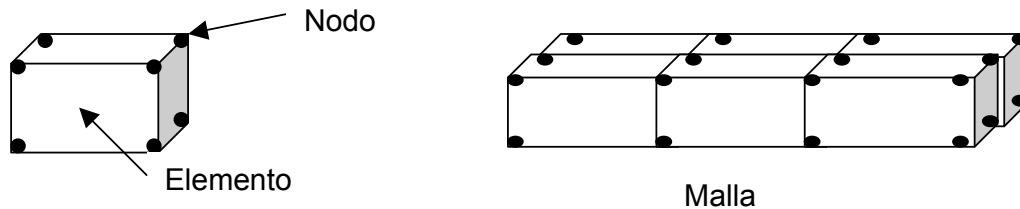


Figura 4.1 Elemento y malla

En dicha malla se establecen las ecuaciones de elemento finito a resolver, ya que un elemento define la relación entre los grados de libertad y las fuerzas asociadas a uno o más nodos. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre nodos se puede escribir en forma de ecuaciones lineales, la matriz de dicho sistema de ecuaciones recibe el nombre de matriz de rigidez del sistema. El tamaño de la matriz de rigidez depende del número total de grados de libertad que existen en el elemento por lo que el número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos y a los grados de libertad en cada nodo. Por ejemplo un elemento de 8 nodos con 3 grados de libertad en cada nodo, producirá una matriz de rigidez de 24 por 24.

La mayoría de las matrices de rigidez para elementos estructurales son cuadradas, simétricas, singulares y positivas semi-definidas. Una excepción a este tipo de matrices es la matriz de rigidez debida a la fricción, la tiene la propiedad de ser anti-simétrica.

Una vez establecidas todas las matrices del sistema, se procede a obtener una matriz global, la cual posee las mismas propiedades de las matrices elementales de las cuales se deriva. Con este ensamble que contiene todas las ecuaciones que define el sistema se procede a la resolución del mismo.

No siempre es posible determinar por medio de un programa de elemento finito la matriz de rigidez del sistema, en algunos casos es más fácil determinar las ecuaciones de la matriz de manera experimental, es por esto que algunos programas de elemento finito permiten introducir directamente la matriz de rigidez del sistema en vez de calcularla.

Una propiedad importante de la resolución del elemento finito es la convergencia, si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas la solución numérica calculada converge rápidamente hacia una solución exacta del sistema de ecuaciones, sin embargo la resolución del sistema de ecuaciones se vuelve más compleja y por ende consume más tiempo.

Existen diversos métodos para solucionar las ecuaciones del elemento finito, los tres métodos más comunes son: método de ancho de banda, método por ondas y método iterativo.

En general un análisis por elemento finito se divide en tres pasos:

-Pre-proceso: Etapa en la cual se define el problema a resolver (tipo de elemento finito, materiales, características geométricas, etc.)

-Solución: etapa en la cual se asignan las condiciones de frontera del modelo, cargas aplicadas, tipo de análisis a resolver, método de resolución etc. Cabe mencionar que debido a que la matriz de rigidez global es una matriz singular, es necesario especificar suficientes grados de libertad con el fin de prevenir movimiento de cuerpo rígido y por ende obtener singularidades.

-Post-proceso: Etapa en la cual se realiza la interpretación y validación de resultados. Es recomendable validar, en la medida de lo posible, los resultados obtenidos. Por ejemplo, con el fin de verificar si la densidad de malla es la adecuada y/o si las cargas y restricciones son aplicadas de manera correcta, es recomendable aplicar cargas unitarias, resolver el modelo y verificar si los resultados de esfuerzos y/o deformaciones se aproximan a resultados obtenidos de cálculos a manos sencillas ($\sigma = F/A$, $\sigma = MC/I$, $\sigma = Pr/t$, etc.); en el caso de regiones de concentradores es posible comparar los esfuerzos concentrados con valores obtenidos en la literatura. Cuando se tiene una geometría demasiado compleja, se recomienda hacer simplificaciones como limitar la geometría y utilizar modelos en 2D o los resultados de fuerzas en los nodos; una vez que se verifica que la aplicación de cargas y restricciones es la adecuada, se aplican los valores reales de condiciones de frontera al modelo detallado. De esta manera se puede evitar obtener resultados incorrectos y gastar recursos de manera innecesaria, sobre todo en la resolución de perfiles de cargas extensos.

El éxito del análisis por elemento finito depende de la manera en el cual éste es utilizado y como son interpretados los resultados. Debido a que el uso de programas de elemento finito se ha vuelto más común, es fácil caer en el error de tratar de resolver cualquier problema que se tenga por medio del elemento finito, ya que en muchas ocasiones un simple cálculo a mano es suficiente.

4.2 Análisis de propagación de grieta

Para el análisis de vida (ciclos) de componentes críticos y/o costosos sometidos a diversos tipos de cargas (mecánicas y térmicas), en ocasiones es necesario obtener resultados más cercanos a la realidad, con el fin de tomar decisiones de diseño óptimas.

Mediante el uso de programas de elemento finito es posible calcular concentradores de esfuerzos en geometrías complejas no encontrados en la literatura; así como la variación de dichos esfuerzos en una determinada dirección.

A continuación se muestra el cálculo del gradiente de esfuerzos debido a un agujero circular en una placa infinita; este ejemplo es uno de los más comunes en la literatura, sin embargo el propósito es mostrar la metodología utilizada. En el capítulo 5 se muestra la resolución de este problema mediante la aplicación de la mecánica de medio continuo.

4.2.1 Pre-proceso

Elemento: Solid 45 (Quad- 8 nodos, UX, UY, UZ)

Material: $E = 7E8$, densidad =

Geometría:

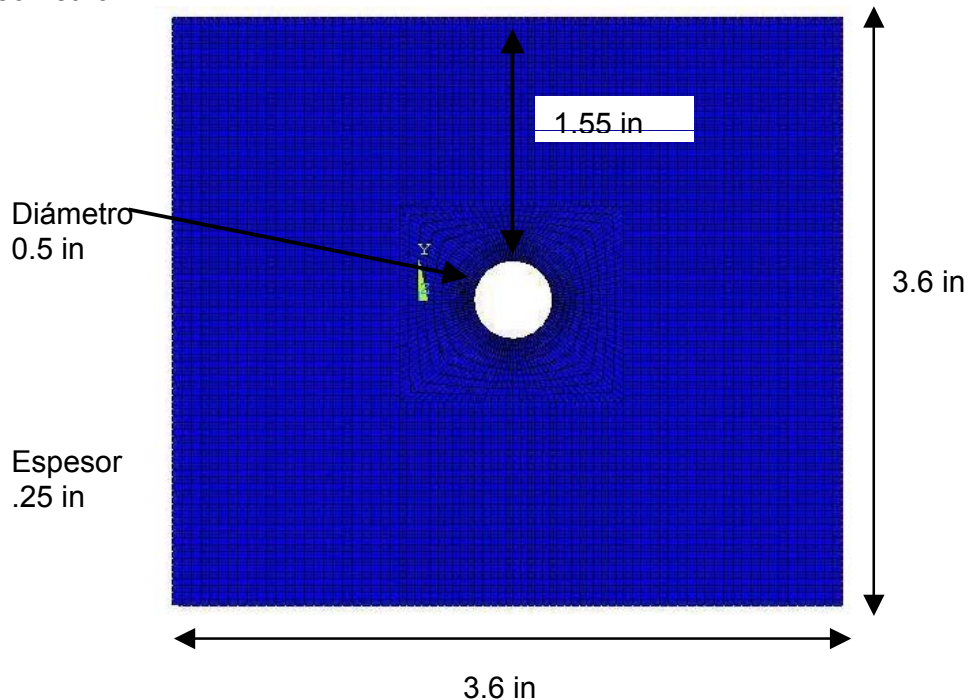


Figura 4.2 Modelo de Elemento Finito

4.2.2 Solución

Temperatura = 70 °F constante

Solver = Sparse Solver

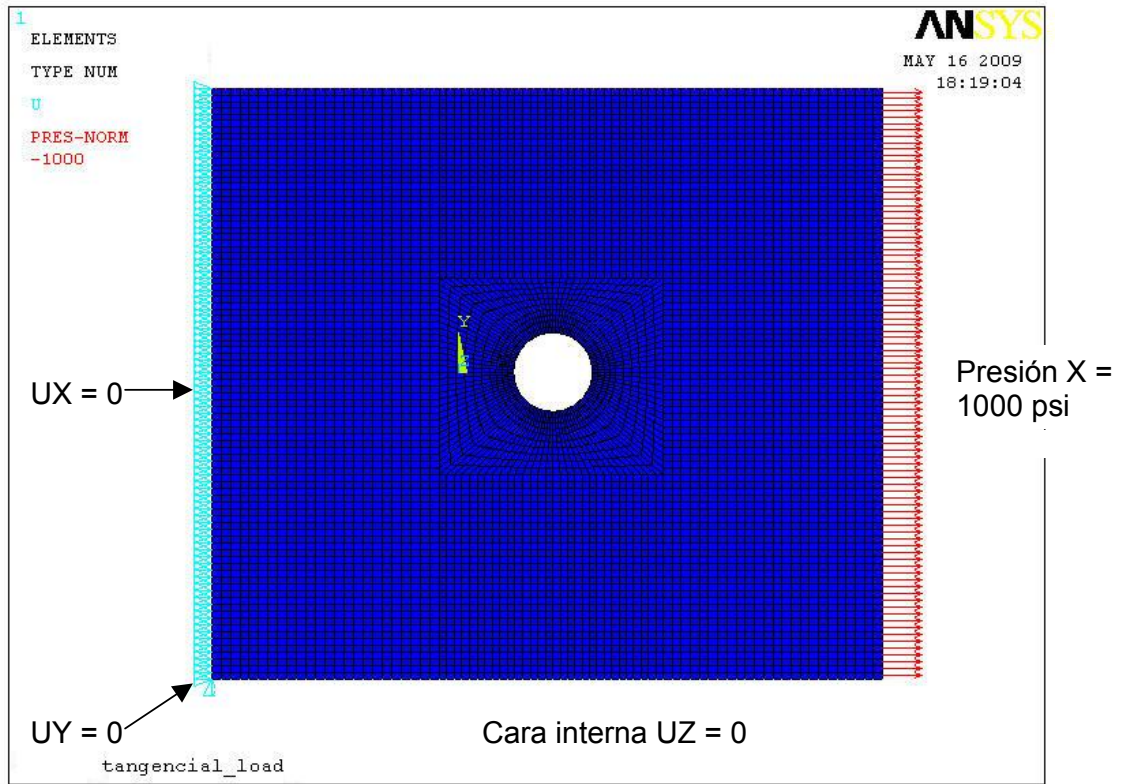


Figura 4.3 Carga Uniaxial

4.2.3 Post-proceso

Esfuerzo tangencial con respecto al sistema coordenado local csys, 11 (sistema cilíndrico en el centro del agujero)

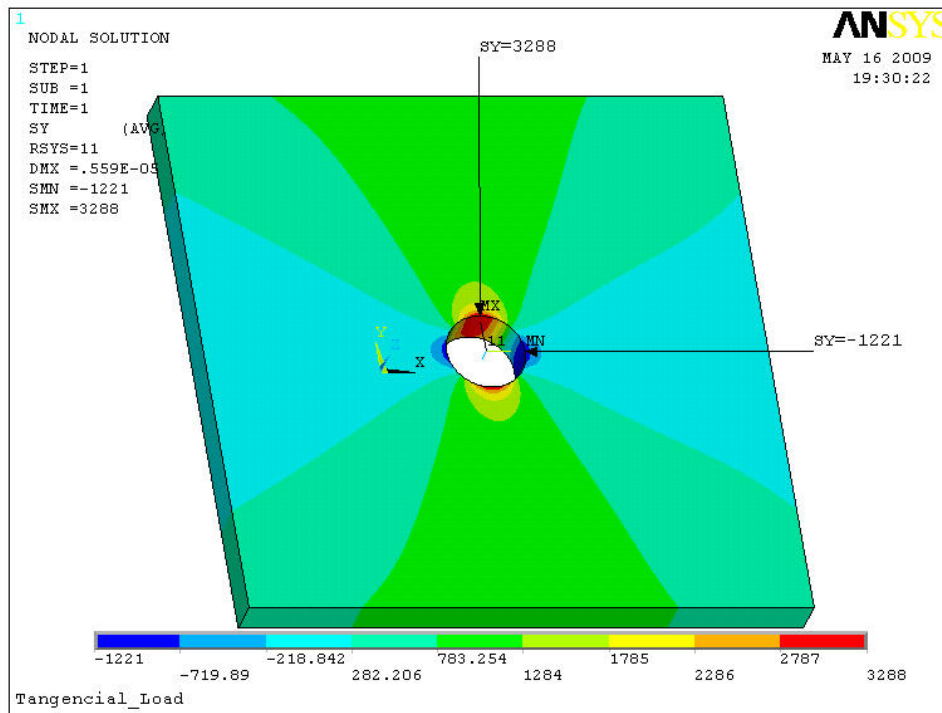


Figura 4.4 Concentrador de esfuerzos para carga uniaxial

Concentrador de esfuerzo a $90^\circ = 3.288$

Concentrador de esfuerzo a $0^\circ = -1.221$

Asumiendo la existencia de una grieta en la orilla del agujero, el esfuerzo principal mayor será el que cause la propagación de la grieta en un plano perpendicular a si mismo.

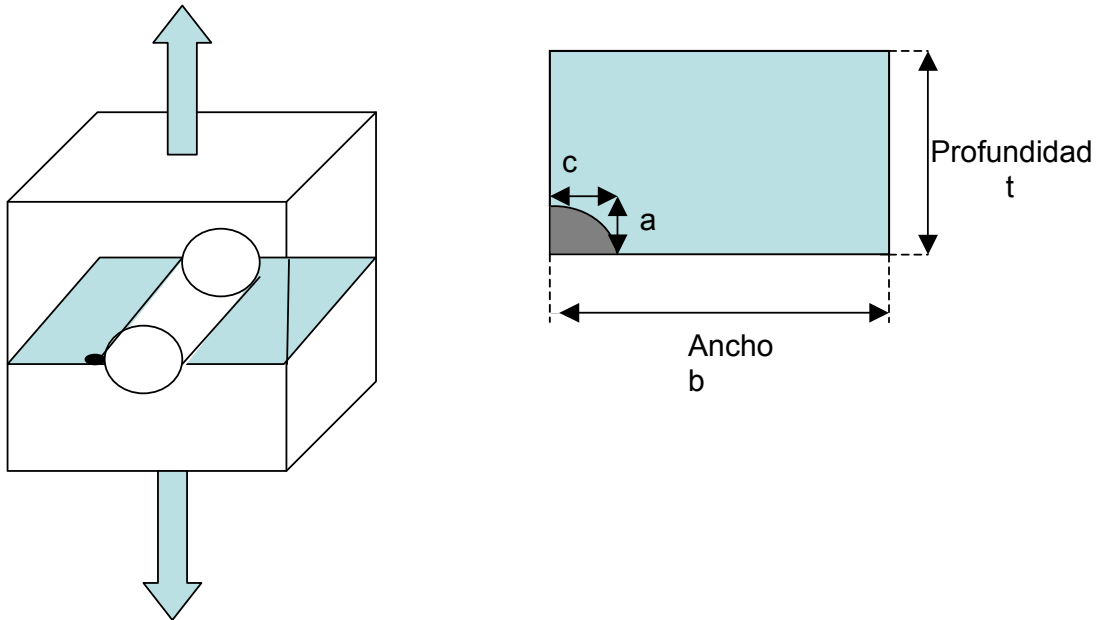


Figura 4.5 Probeta para grieta en esquina de un agujero

Para este ejemplo, resulta obvio que el esfuerzo principal se encuentra alineado con el esfuerzo tangencial, sin embargo ante la presencia de cargas complejas la alineación del primer principal no es tan fácil de identificar, por tal motivo resulta de gran utilidad graficar el primer principal así como sus vectores.

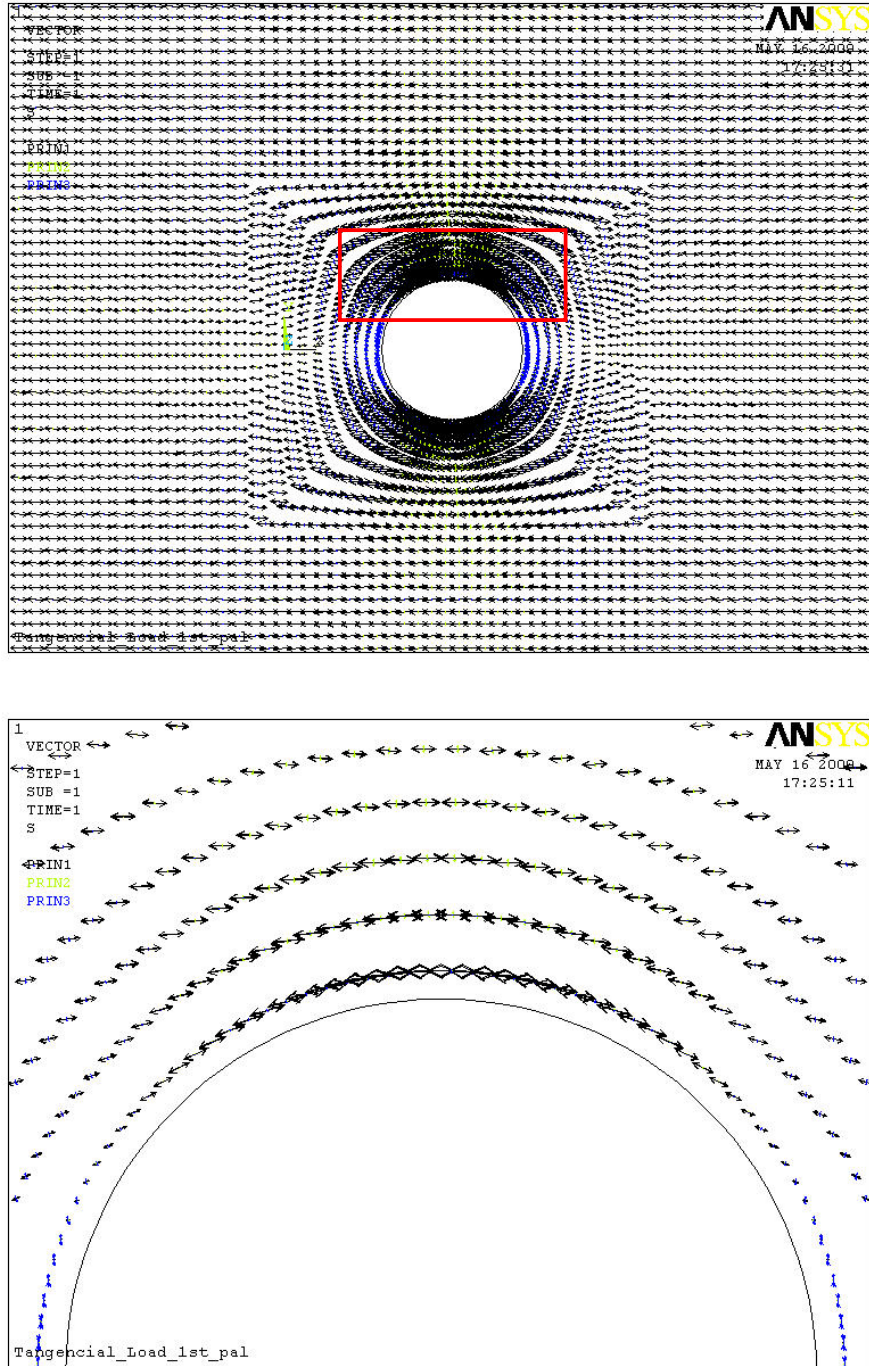


Figura 4.6 Gráfica de Vectores de esfuerzos principales

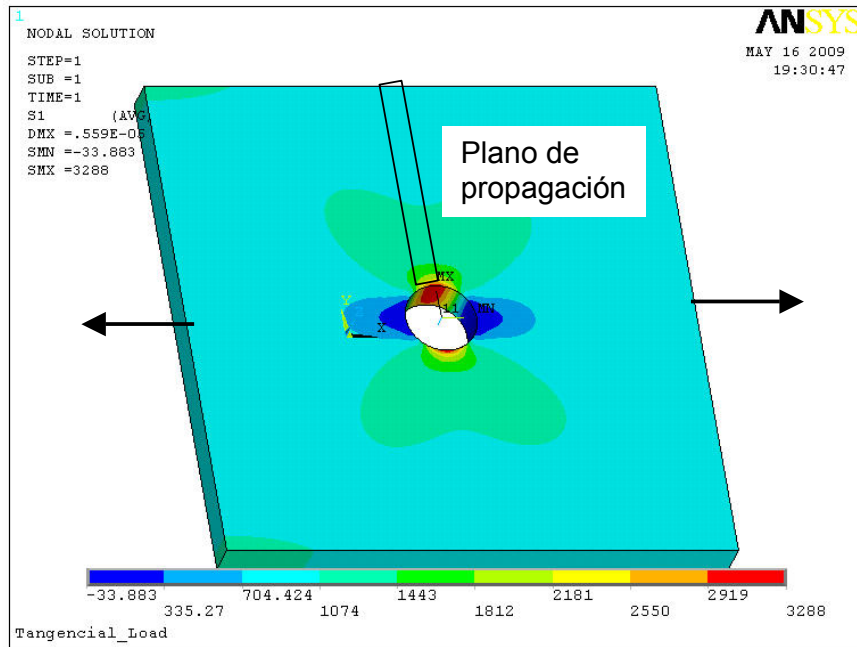


Figura 4.7 Plano de propagación de grieta para esfuerzo uniaxial

Una vez identificado el plano de crecimiento de la grieta es posible obtener la variación de esfuerzos a lo largo y ancho de dicho plano.



Figura 4.8 Gradiente de esfuerzo

Mediante el uso de “paths” en ansys es posible conocer el valor de esfuerzo en cada nodo.

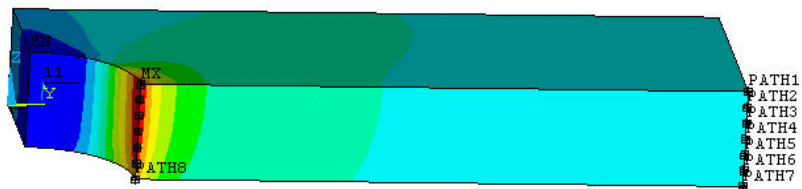


Figura 4.9 “paths” en Ansys para la obtención del gradiente de esfuerzos

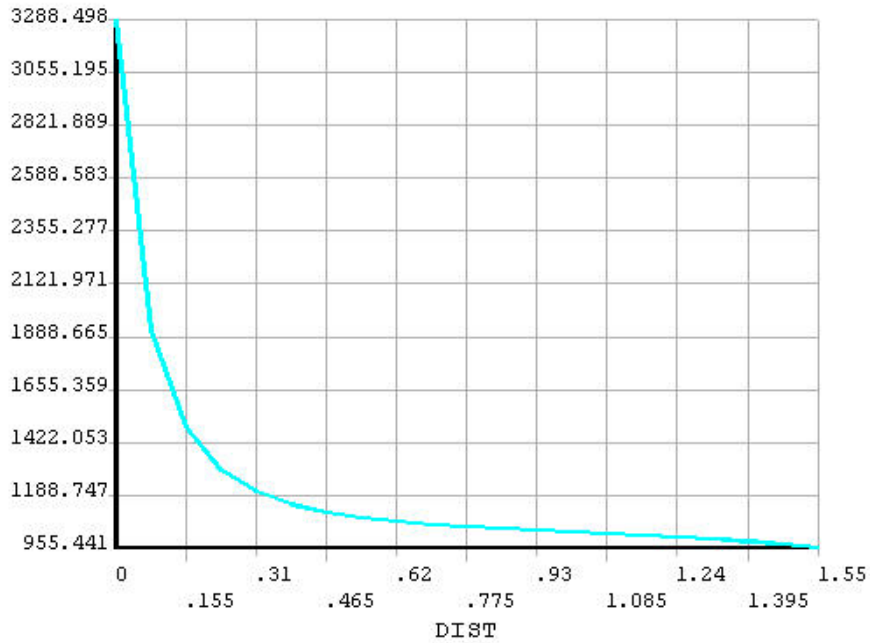


Figura 4.10 Gradiente de esfuerzos en 1D

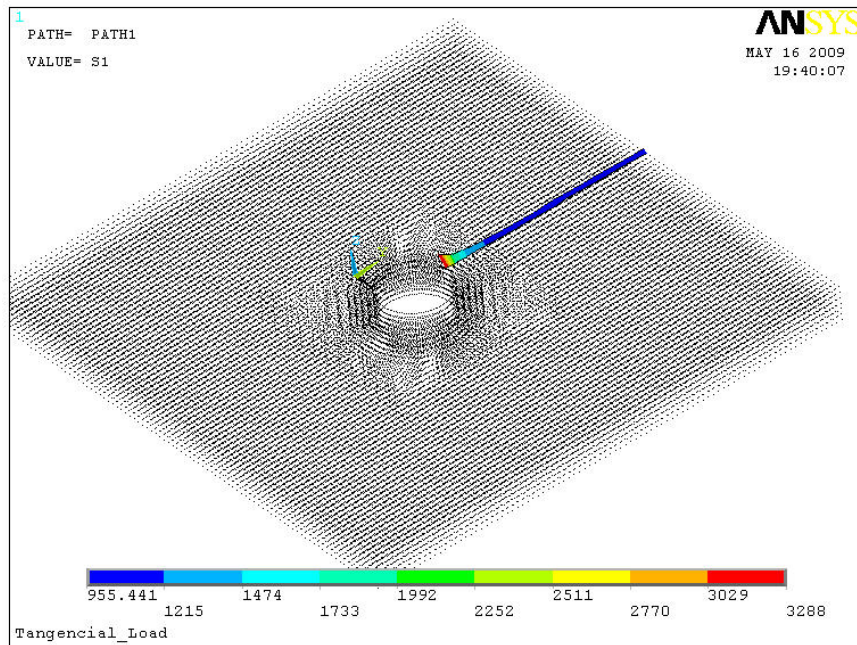


Figura 4.11 Gradiente de esfuerzos en 2D

El análisis de propagación de grieta debido a gradientes de esfuerzo constante puede ser realizado mediante ecuaciones sencillas encontradas en libros de texto; mientras que para gradientes 1D y 2D el cálculo debe ser realizado mediante el uso de funciones de peso.

Debido al alcance del presente trabajo, únicamente se realizarán cálculos con gradientes de esfuerzo constantes.

Esfuerzos biaxiales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$$

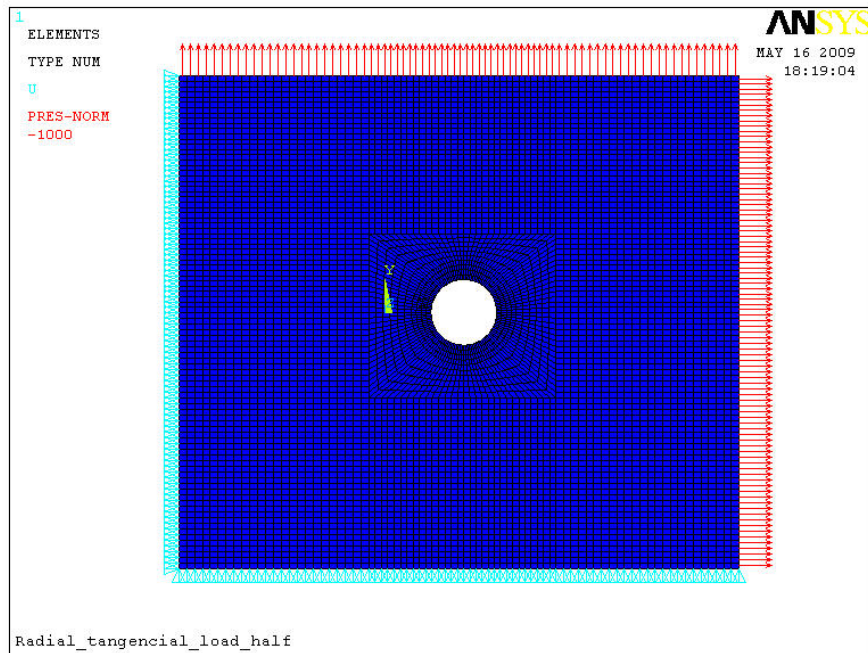


Figura 4.12 Cargas biaxiales

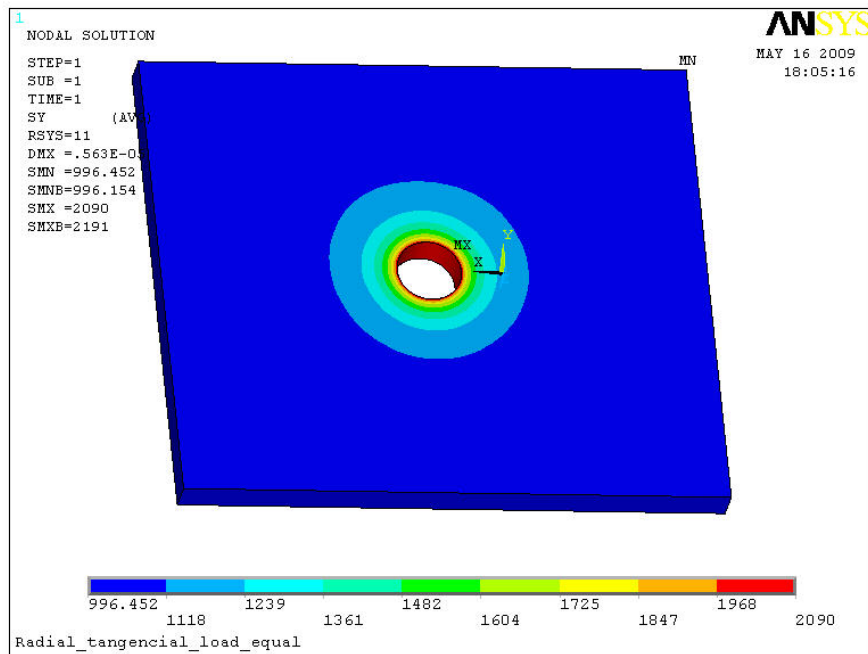


Figura 4.13 Concentrador de esfuerzos alrededor del agujero

Concentrador de esfuerzo constante 360° = 2.090

$$\sigma_1 = 1 \text{ y } \sigma_2 = 0.5$$

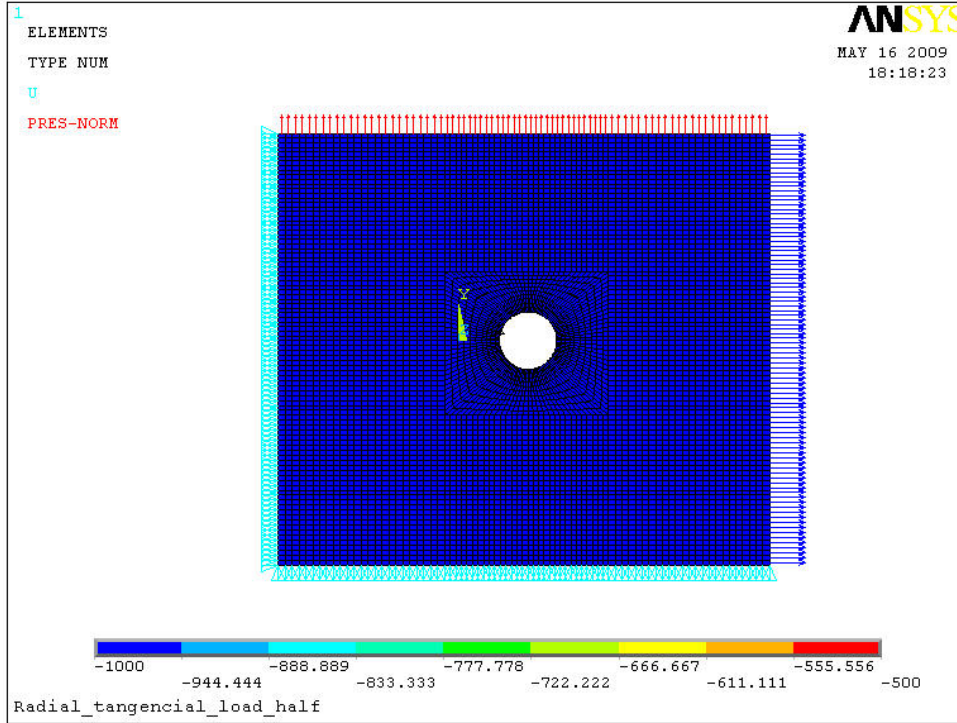
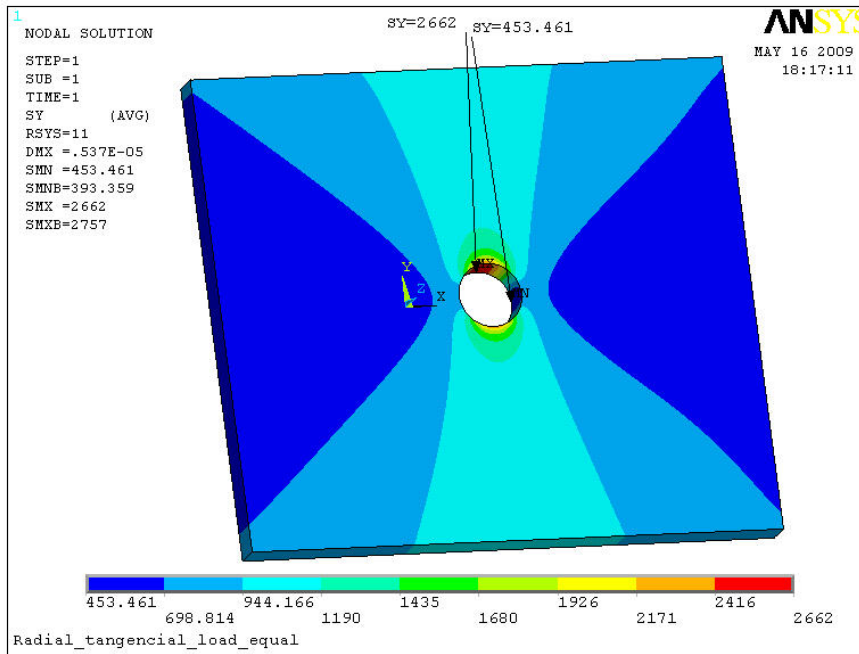


Figura 4.14 Cargas biaxial $\sigma_2 = 0.5 \sigma_1$



Concentrador de esfuerzo a $90^\circ = 2.662$

Concentrador de esfuerzo a $90^\circ = 0.453$

Una vez conocidos los esfuerzos en el componente a analizar es posible realizar el cálculo del factor de intensidad de esfuerzos ante la presencia de un cierto tipo de grieta; para posteriormente calcular la vida por fatiga de dicho componente.

Existen diversos programas de elemento finito que calculan el valor del intensificador de esfuerzos mediante el modelado del tipo de grieta; sin embargo durante el diseño o rediseño de un componente generalmente es preferible describir dicho intensificador mediante ecuaciones ya que de manera sencilla es posible incrementar el tamaño de grieta hasta que ocurra la falla.

Durante el análisis de esfuerzos en componentes con geometrías complicadas, sometidos a diversos tipos de cargas y misiones, el análisis por medio de elemento finito requiere de más recursos como son tiempo, hardware, experiencia, etc., lo cual vuelve al análisis más costoso; por tal motivo es común realizar análisis de elemento finito en 2D. Sin embargo a pesar de que estos análisis son más económicos, no siempre es posible capturar con ellos el comportamiento detallado del estado de esfuerzos. En el caso del análisis de componentes críticos en ocasiones es necesario contar con ese detalle para tomar una decisión de diseño adecuada.

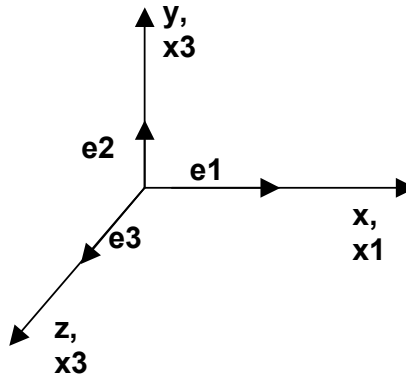
Por ejemplo cuando se desea analizar una junta atornillada en un arreglo circular de varios agujeros es común realizar modelos de elemento finito en 2D en los cuales los agujeros son modelados con geometrías continuas y materiales ortotrópicos. La finalidad del uso de estos materiales es disminuir las propiedades en ciertas direcciones para simular la pérdida de rigidez debido a la falta de material (agujeros). Sin embargo este tipo de análisis no toma en cuenta la presencia de los concentradores de esfuerzos debidos al agujero; el uso de la función de Airy permite corregir los esfuerzos tanto en la orilla del agujero así como la influencia que este tiene al alejarse de él.

Como se mencionó anteriormente, con el fin de optimizar recursos comúnmente se realizan análisis elásticos de elemento finito, sin embargo es posible obtener valores de esfuerzos mayores a la cedencia e incluso a la ruptura del material. Como se trata de un análisis lineal, dichos valores no son reales pero pueden ser corregidos sin la necesidad de realizar un análisis elasto-plástico, mediante la regla de Neuber.

5.1 Función de esfuerzos de Airy

Airy propuso una solución a un sistema de ecuaciones diferenciales, a la función solución (función biarmónica) se le denomina como función de Airy, la cual en el caso de esfuerzos se denomina como función de esfuerzos de Airy.

En un estado de deformación plana se tiene:



$\epsilon_{11} = \epsilon_x$	$\sigma_{11} = \sigma_x$
$\epsilon_{12} = 2\gamma_{xy}$	$\sigma_{12} = \tau_{xy}$
$\epsilon_{22} = \epsilon_y$	$\sigma_{22} = \sigma_y$
$\epsilon_{33} = \epsilon_z = 0$	$\sigma_{33} = \sigma_z \neq 0$

Considerando que no existen fuerzas de cuerpo o que su efecto es despreciable y que además el sistema se encuentra en equilibrio estático.

(Ecuación de Cauchy $\frac{\delta\sigma_{ij}}{\delta x_j} = 0$).

$$\frac{\delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\delta\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{Ec. 5.1}$$

$$\frac{\delta\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\delta\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{Ec. 5.2}$$

$$\frac{\delta\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Ec. 5.3}$$

Derivando la ecuación 5.1 con respecto a x_1 , la ecuación 5.2 con respecto a x_2 y sumando ambas ecuaciones, se obtiene la relación que existe entre los 3 esfuerzos (ecuación de compatibilidad).

$$\frac{\delta^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\delta^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\delta^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2} \quad \text{Ec. 5.4}$$

En términos de deformaciones

$$\frac{\delta^2\epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\delta^2\epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\delta^2\epsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} \quad \text{Ec. 5.5}$$

La ecuación de compatibilidad asegura que el medio continuo se deforma de manera compatible sin desarrollar grietas o discontinuidades.

Para un material sólido, homogéneo, lineal e isotrópico es posible conocer las deformaciones en función de los esfuerzos mediante la ley de Hooke.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(\sigma_{33}(1+\nu) - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = 0 \quad (\text{deformación plana}) \quad \text{Ec. 5.6} \\ \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{11}(1+\nu) - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{22}(1+\nu) - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) \quad \text{Ec. 5.7} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{12}(1+\nu) - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}))\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación 5.6 en 5.7

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu^2\sigma_{22} - \nu^2\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{22}) \quad \text{Ec. 5.8} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu(1+\nu)}((1+\nu)\sigma_{12}) = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12}\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.8 en la ecuación de compatibilidad (5.5)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu(1+\nu)}\left[\frac{\delta^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu\frac{\delta^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2\frac{\delta^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2\frac{\delta^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}\right] + \\ \frac{1}{2\mu(1+\nu)}\left[\frac{\delta^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu\frac{\delta^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2\frac{\delta^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2\frac{\delta^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right] - \frac{2}{2\mu}\left[\frac{\delta^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\right] = 0\end{aligned} \quad \text{Ec. 5.9}$$

Sustituyendo la ecuación 5.9 en 5.4

$$\frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left[\frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} \right] + \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left[\frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right] - \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right] = 0 \quad \text{Ec. 5.10}$$

Multiplicando la ecuación 5.10 por $(1+\nu)$ y agrupando

$$(1-\nu^2) \frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + (1-\nu^2) \frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + (1-\nu^2) \frac{\delta^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + (1-\nu^2) \frac{\delta^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} = 0$$

$$(1-\nu^2) \left(\frac{\delta^2}{\partial x_1^2} + \frac{\delta^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad \text{Ec. 5.11}$$

Donde $\nu \neq 0$

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad \text{Ec. 5.12}$$

Con el fin de simplificar la búsqueda de soluciones que satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales 5.1, 5.2 y 5.12, en 1873 G.B. Airy definió una función de esfuerzo ϕ mediante la cual pueden ser obtenidas las componentes del esfuerzo en dos dimensiones.

$$\sigma_{11} = \frac{\delta^2 \phi}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\delta^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \text{Ec. 5.13}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\delta^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Al sustituir las ecuaciones 5.13 en las ecuaciones 5.1 y 5.2 se observa que satisface el equilibrio.

Al sustituir las en la ecuación 5.12 se obtiene la función de esfuerzos de Airy.

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \equiv \nabla^2 \left(\frac{\delta^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) \equiv \nabla^2 (\nabla^2 \phi) \equiv \nabla^4 \phi = 0 \quad \text{Ec. 5.14}$$

Cualquier función $\phi(x,y)$ que satisfaga la ecuación 5.14 también satisfará las ecuaciones de equilibrio, las de compatibilidad geométrica y las de elasticidad y su solución será única.

5.2 Campo de esfuerzos alrededor de agujero circular

En 1886 Kirsch utilizó la función de esfuerzos de Airy para definir la variación del campo de esfuerzos alrededor de agujero circular. Considerando un agujero de radio a en una placa infinita sometido a esfuerzos uniaxiales de tensión como el que se muestra en la figura 5.1, la función de Airy puede ser descrita en coordenadas polares como:

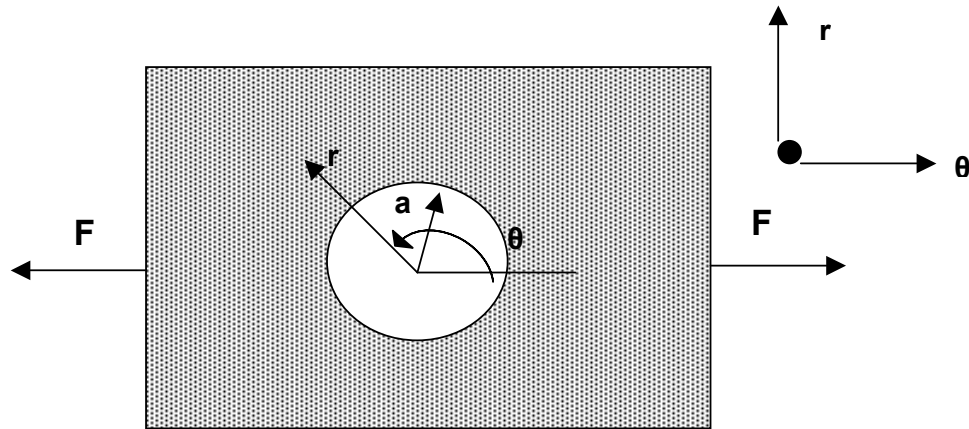


Figura 5.1 Parámetros de un agujero

$$\nabla^4 \phi = \left(\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2}{\delta \theta^2} \right) \left(\frac{\delta^2 \phi}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \phi}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 \phi}{\delta \theta^2} \right) = 0 \quad \text{Ec. 5.15}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\delta \phi}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 \phi}{\delta \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\delta^2 \phi}{\delta r^2} \quad \text{Ec. 5.16}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{1}{r} \frac{\delta \phi}{\delta r} \right)$$

σ_r – esfuerzo radial

σ_θ – esfuerzo circunferencial

$\tau_{r\theta}$ – esfuerzo cortante

Para resolver la ecuación 5.16 es necesario establecer las condiciones de frontera del problema.

En la periferia del agujero

$$r = a, \quad \sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad \tau_{r\theta} = 0$$

Mientras que lejos del agujero para un esfuerzo σ se tiene

$$r = \infty, \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$$

σ – esfuerzo nominal (alejado del agujero)

Sustituyendo en la ecuación 5.15

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{\delta^2 f}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta f}{\delta r} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0 \quad \text{Ec. 5.17}$$

Donde $f = f(r) = \frac{\phi}{\cos 2\theta}$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad \text{Ec. 5.18}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \left(-1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

De las ecuaciones 5.18 se concluye que los esfuerzos circunferenciales mínimo y máximo ocurren a 0° y 90° respectivamente (Figuras 5.3 y 5.4)

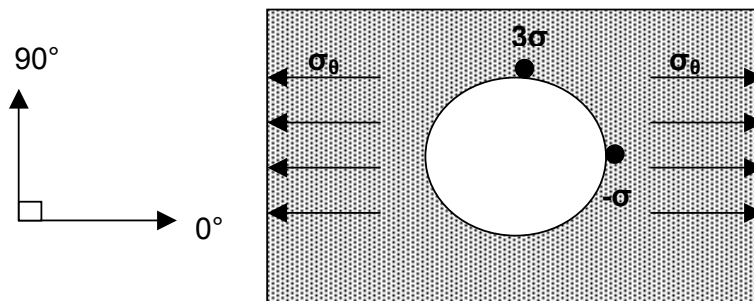


Figura 5.3 Variación del concentrador de esfuerzos alrededor de un agujero

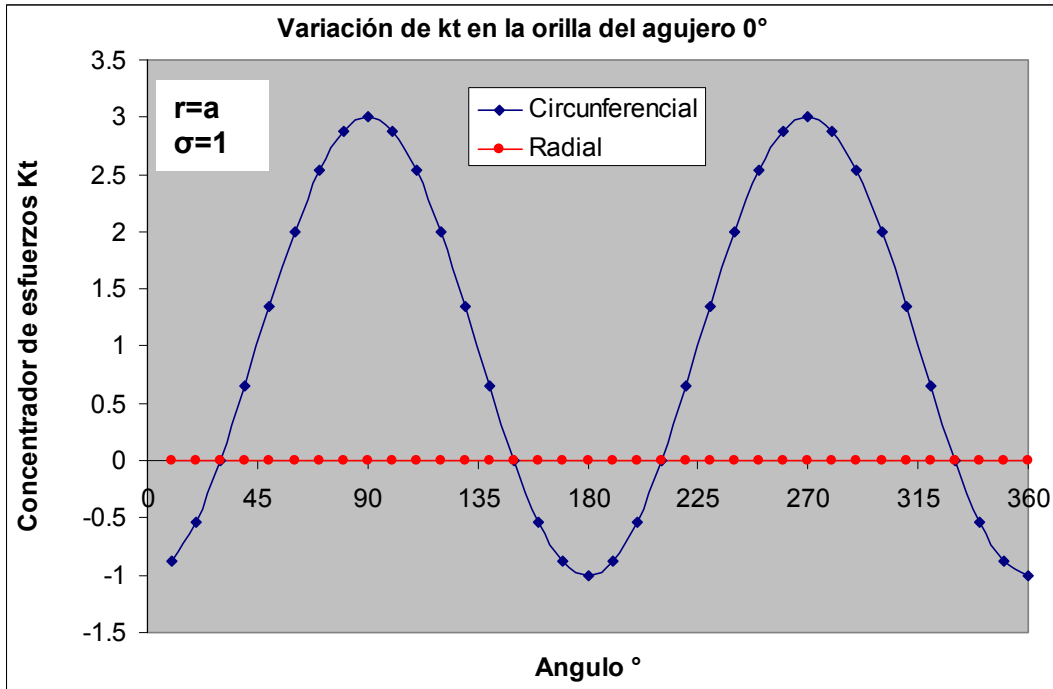


Figura 5.4 Variación del concentrador de esfuerzos alrededor de un agujero 2

Con lo cual se concluye que en la orilla de un agujero circular, el concentrador de esfuerzos no depende del tamaño del agujero, no importa que tan grande o pequeño sea éste, el máximo esfuerzo circunferencial local a 90° se verá multiplicado por un factor de 3.

A 90° al alejarse del agujero el concentrador de esfuerzos decae rápidamente en la dirección circunferencial, mientras que en la dirección radial ocurrirá lo contrario como se muestra en la figura 5.5.

En la periferia del agujero, así como en planos paralelos o perpendiculares a la carga aplicada, el esfuerzo cortante es igual a cero. Mientras que a 45° de estos planos, y al alejarse del agujero, el esfuerzo cortante absoluto es máximo.

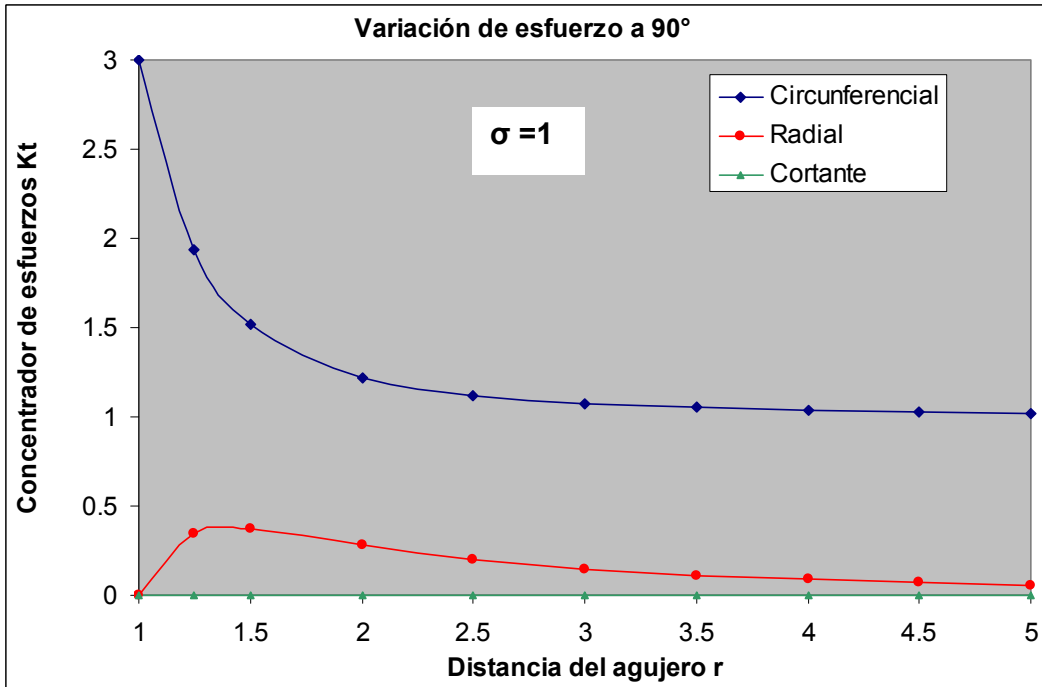


Figura 5.5 Variación del concentrador de esfuerzos al alejarse del agujero

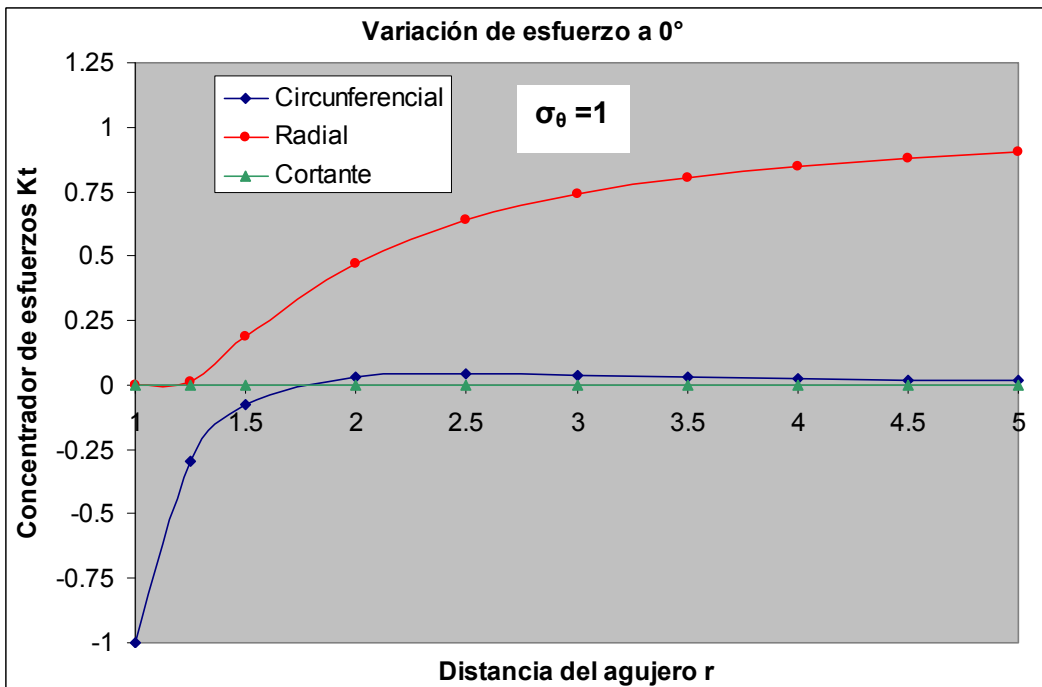


Figura 5.6 Variación del concentrador de esfuerzos al alejarse del agujero 2

La principal consideración que se debe hacer al utilizar la ecuación de Kirsch es que la placa infinita debe ser cuando menos 3 veces más grande que el diámetro del agujero, de lo contrario la ecuación no será confiable.

Ante la presencia de esfuerzos biaxiales a tensión el factor de concentración de esfuerzos puede ser calculado mediante superposición.

Suponiendo que se desea calcular el concentrador de esfuerzos en la orilla del agujero mostrado en la figura 5.7.

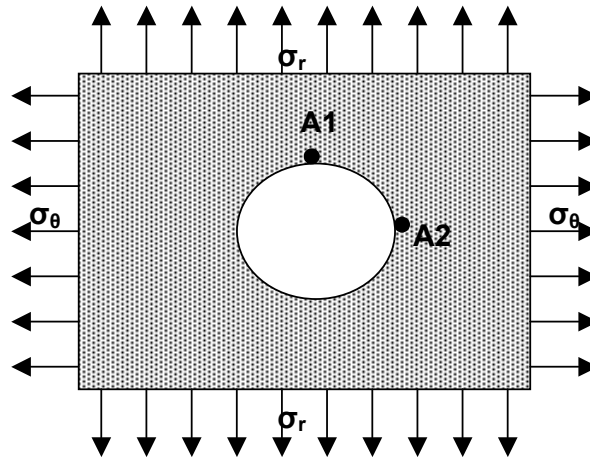


Figura 5.7 Agujero sometido a esfuerzos biaxiales

Si las magnitudes de los esfuerzos radiales y circunferenciales aplicados son $\sigma_r = \sigma_1$ y $\sigma_\theta = \sigma_2$ respectivamente, sustituyendo en las ecuaciones 5.10 las componentes de esfuerzos en la orilla ($r=a$) debidas a σ_1 son

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1(1 - 2\cos 2\theta) \quad \text{Ec. 5.19}$$

Y debidas a σ_2 donde $\theta = \theta + \pi/2$

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2(1 + 2\cos 2\theta) \quad \text{Ec. 5.20}$$

Superponiendo las ecuaciones 5.19 y 5.20.

$$\sigma_{\theta T} = (\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\theta \quad \text{Ec.5.21}$$

Suponiendo que $\sigma_1 \leq \sigma_2$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\theta A1} = \sigma_2 \left(3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\theta A2} = \sigma_2 \left(3 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right)$$

Ec. 5.22

Para $\sigma_1 = 0.5$ y $\sigma_2 = 1$

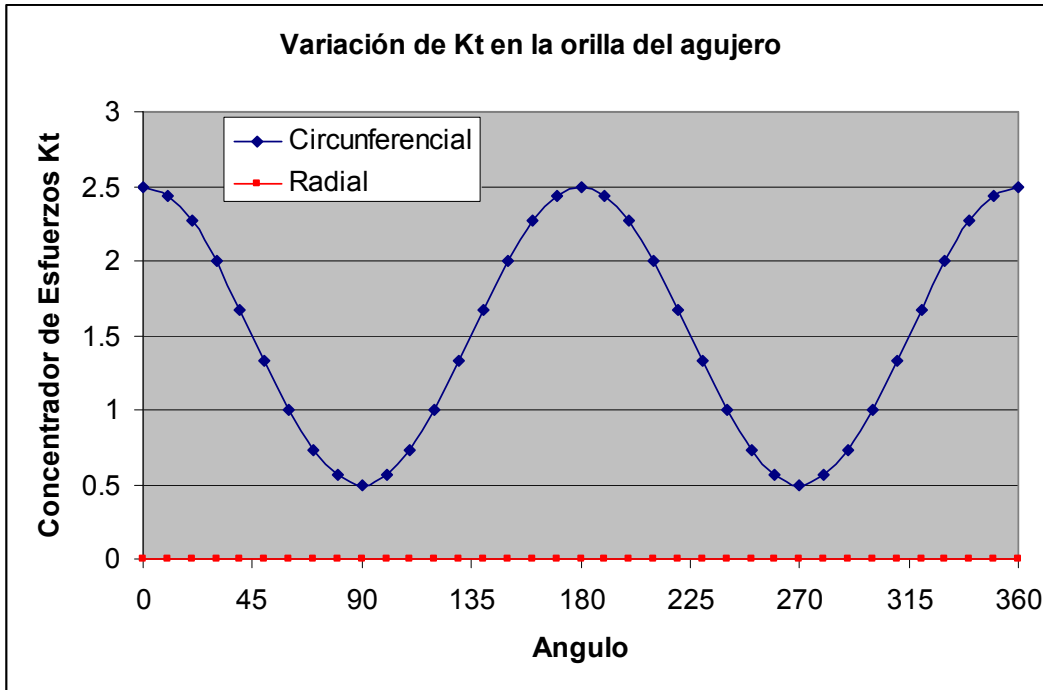


Figura 5.7 Variación del concentrador de esfuerzos alrededor del agujero $\sigma_1 = \sigma_2$

Si los esfuerzos σ_1 y σ_2 son iguales, el concentrador de esfuerzos se mantiene constante alrededor de la orilla del agujero y es igual a la suma de los esfuerzos biaxiales.

El concentrador de esfuerzos en dirección radial (al alejarse del agujero) puede también ser calculado mediante superposición.

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

Ec. 5.23

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \left(-1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

Ante la presencia de estados de esfuerzos más complejos, como el mostrado en la figura 5.8 el principio de superposición sigue siendo válido. En la literatura se puede encontrar las ecuaciones y gráficas para el cálculo de concentradores de esfuerzos ante la presencia de cargas cortantes, de flexión, etc.

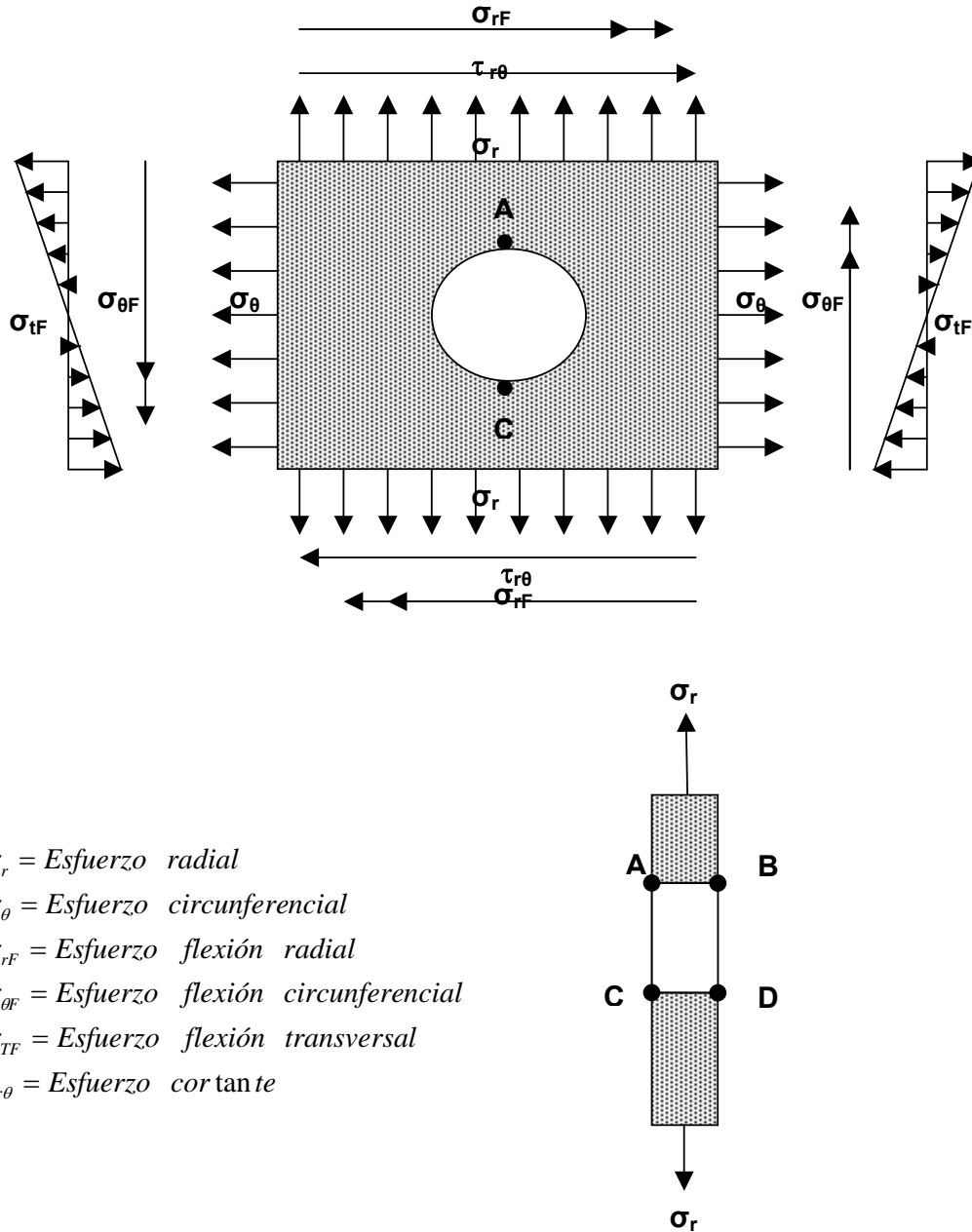


Figura 5.8 Agujero sometido a esfuerzos de tensión, flexión y cortante.

Una vez conocidos los concentradores de esfuerzos para un cierto ángulo, es posible calcular un esfuerzo equivalente en cualquier localización de la circunferencia del agujero.

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{rA} + \sigma_{rB} + \sigma_{rC} + \sigma_{rD}}{4} \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_{\theta A} + \sigma_{\theta B} + \sigma_{\theta C} + \sigma_{\theta D}}{4}$$

$$\sigma_{rF} = \frac{\left(\frac{\sigma_{rA} + \sigma_{rC}}{2} - \frac{\sigma_{rB} + \sigma_{rD}}{2} \right)}{2} \quad \sigma_{\theta F} = \frac{\left(\frac{\sigma_{\theta A} + \sigma_{\theta C}}{2} - \frac{\sigma_{\theta B} + \sigma_{\theta D}}{2} \right)}{2}$$

$$\sigma_{TF} = \frac{\left(\frac{\sigma_{rA} + \sigma_{rB}}{2} - \frac{\sigma_{rC} + \sigma_{rD}}{2} \right)}{2}$$

Ec. 5.24

$$\sigma_{EQV} = K_r(\sigma_r) + K_\theta(\sigma_\theta) + K_{rF}(\sigma_{rF}) + K_{\theta F}(\sigma_{\theta F}) + K_{TF}(\sigma_{TF}) + K_\tau(\sigma_\tau)$$

El conocer la variación del el concentrador de esfuerzos alrededor de un agujero permite calcular como se ve afectado el estado de esfuerzo al alejarse de dicho agujero, lo cual servirá para cálculos de propagación de grieta, ya que dicho estado de esfuerzos permitirá calcular el intensificador de esfuerzos ante la presencia de una grieta.

5.3 Aplicación de la función de Airy

La función de Airy puede utilizarse en cálculos sencillos, por ejemplo se tiene una placa de dimensiones 10" X 10" X 0.5" en la que se sabe que el esfuerzo nominal (uniaxial) es 20 ksi y se desea calcular como propagaría una grieta de .030" X .015" si se maquinara un agujero de 0.5" a la mitad de dicha placa.

Mediante la función de Airy es posible obtener un gradiente de esfuerzos en 1D perpendicular al primer esfuerzo principal.

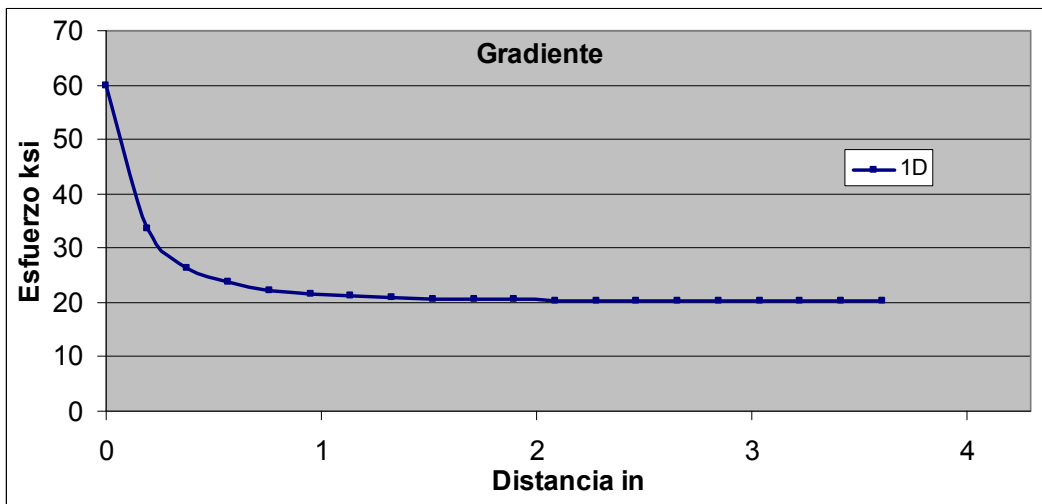


Figura 5.9 Gradiente 1D al alejarse del agujero.

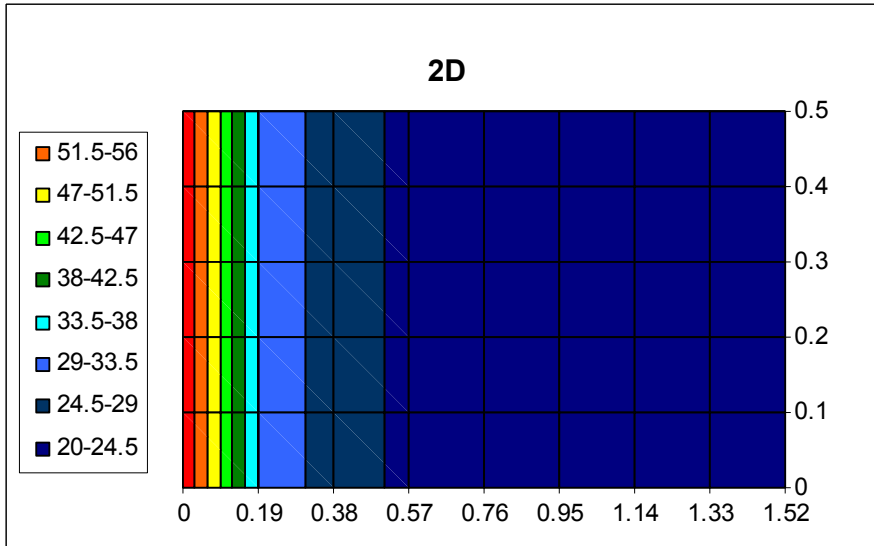


Figura 5.10 Gradiente 1D al alejarse del agujero.

De las figuras 5.9 y 5.10 se puede observar que al alejarse aproximadamente 1" del agujero el gradiente de esfuerzos tiende al valor nominal de esfuerzos, es decir, el agujero deja de tener influencia en el estado de esfuerzos.

En el caso de conocer la variación de esfuerzos a través del espesor del agujero, es posible aplicar de igual manera la función de Airy.

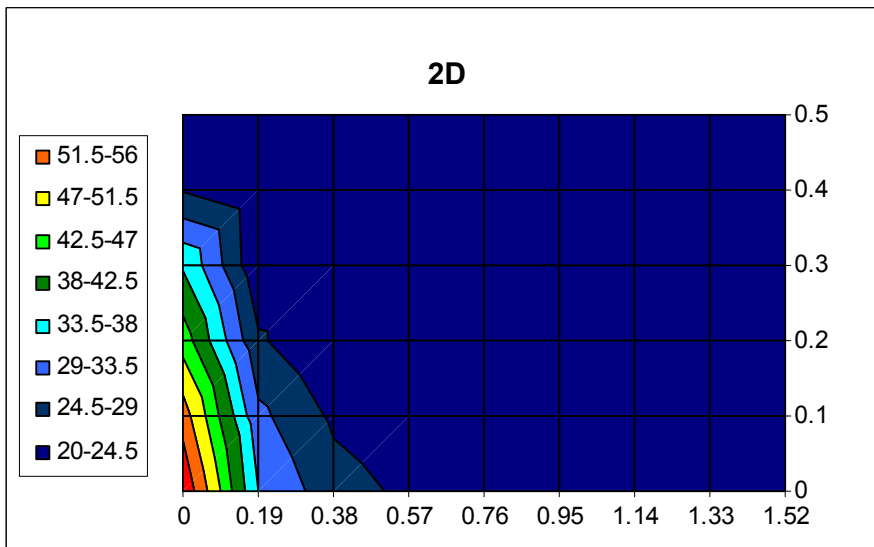


Figura 5.11 Gradiente 2D al alejarse del agujero

Para el cálculo de propagación de grieta en modo I con un de estado de esfuerzos más complejo es necesario calcular el primer esfuerzo principal, ya que la grieta correrá en un plano perpendicular a éste. Una vez conocido la dirección de este plano es posible utilizar la función de Airy para realizar el ajuste del gradiente de esfuerzo en 1D o 2D.

La función de Airy permite calcular la “forma” o variación del gradiente de esfuerzos al alejarse un agujero circular, dicha “forma” es multiplicada por el valor nominal de esfuerzos sin la influencia del agujero; sea cual sea el valor del esfuerzo nominal, la “forma” del gradiente se mantiene.

Normalizando los gradientes obtenidos mediante el análisis de elemento finito y la función de Airy, es posible comparar la “forma” de los gradientes.

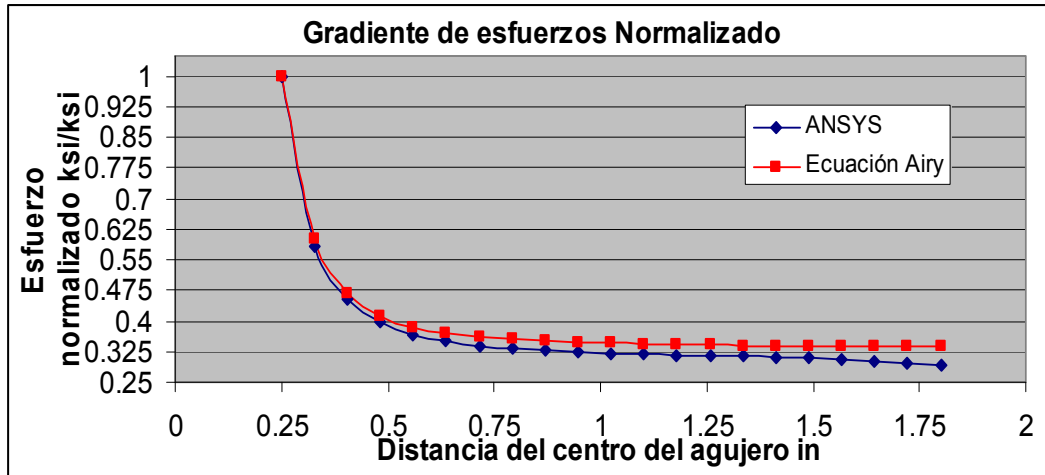


Figura 5.12 comparación de gradientes 1D

De la figura 5.12 es posible observar que la forma del gradiente obtenido por la función de Airy resulta ser más conservadora ya que para cualquier distancia el esfuerzo normalizado es mayor que el obtenido mediante el análisis por elemento finito.

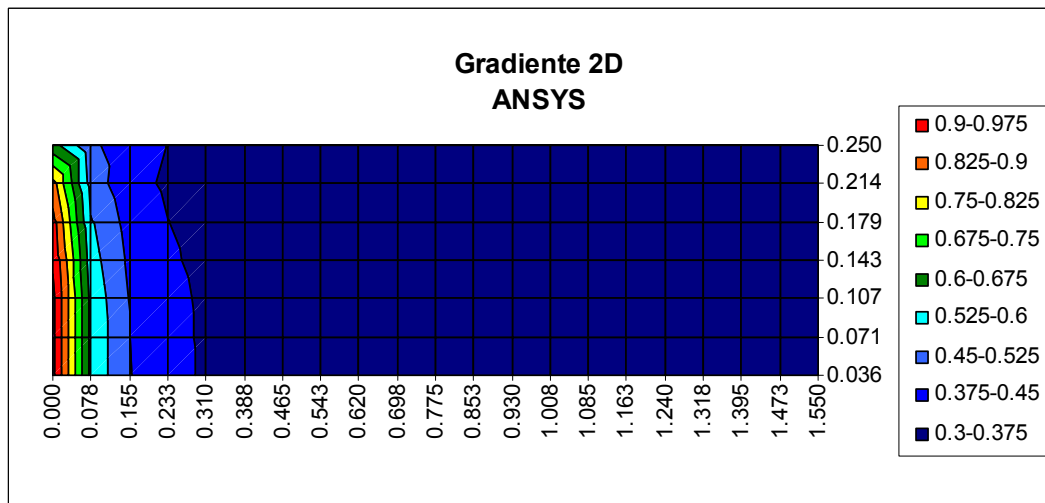


Figura 5.13 Gradiente 2D ANSYS

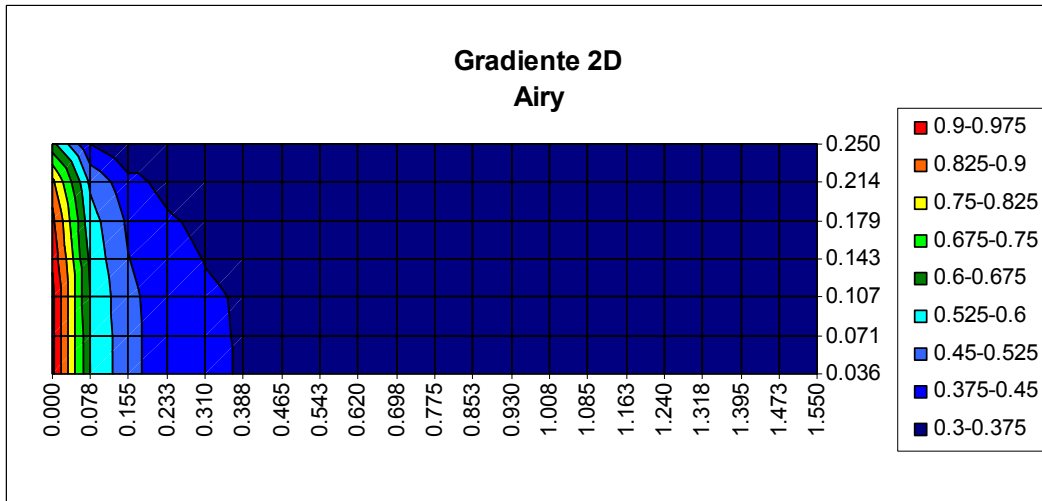


Figura 5.14 Gradiente 2D Airy

5.4 Regla de Neuber

Cuando en un análisis elástico se obtienen valores de esfuerzos por encima de la cedencia del material; dichos valores resultan ser irreales y demasiado conservadores ya que no reflejan el comportamiento plástico del material después de la cedencia. Estos esfuerzos son conocidos como pseudos-esfuerzos.

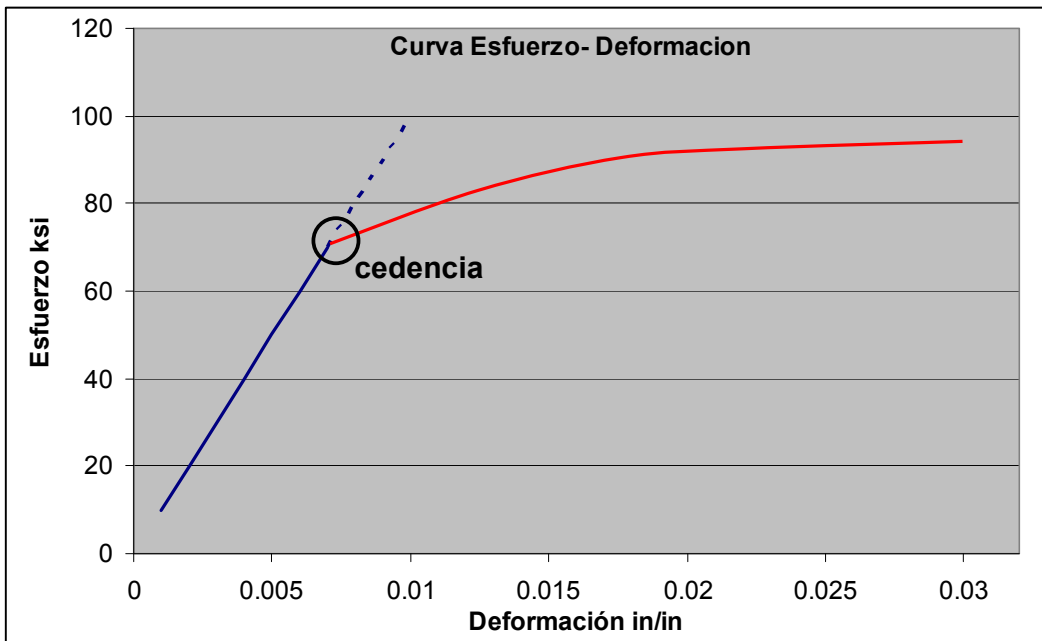


Figura 5.15 Comportamiento Elasto-plástico de un material

Mediante la regla de Neuber es posible relacionar los esfuerzos y deformaciones locales con sus valores nominales, lo cual permite determinar el valor real del esfuerzo considerando la plasticidad.

Para un comportamiento lineal, el esfuerzo es definido como:

$$\sigma = Kt * S \quad \text{Ec. 5.25}$$

$$S = E * e \quad \text{Ec. 5.26}$$

donde

σ – Esfuerzo local

Kt – Concetrador de esfuerzos

S – Esfuerzo Nominal

E – Módulo de Young

ε – Deformación local

e – Esfuerzo Nominal

$$Kt = K\sigma = K\varepsilon \quad \text{Ec. 5.27}$$

Cuando ocurre la cedencia:

$$\sigma = K\sigma * S \quad \text{Ec. 5.28}$$

$$\varepsilon = K\varepsilon * e$$

$$Kt^2 = K\sigma K\varepsilon \quad \text{Ec. 5.29}$$

$$Kt = (K\sigma K\varepsilon)^{1/2}$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.28 en 5.29

$$Kt = \left(\frac{\sigma \varepsilon}{S e} \right)^{1/2} \quad \text{Ec. 5.30}$$

Despejando la ecuación 5.30 y sustituyendo la ecuación 5.26 se obtiene

$$\sigma \varepsilon = e S k t^2 = \frac{S}{E} S k t^2 = \frac{(Kt S)^2}{E} \quad \text{Ec. 5.31}$$

La ecuación 5.31 representa una hipérbola, la cual es conocida como la hipérbola de Neuber.

Finalmente el esfuerzo y la deformación real están relacionados por la curva esfuerzo- deformación (elastoplástico) representada por la ecuación 5.32.

$$\varepsilon = \varepsilon e + \varepsilon p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H} \right)^{1/n} \quad \text{Ec. 5.32}$$

Donde H y n son constantes del material.

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 5.31 y 5.32 se obtiene la intersección de las curvas; el valor del esfuerzo en dicha intersección es el esfuerzo corregido por Neuber.

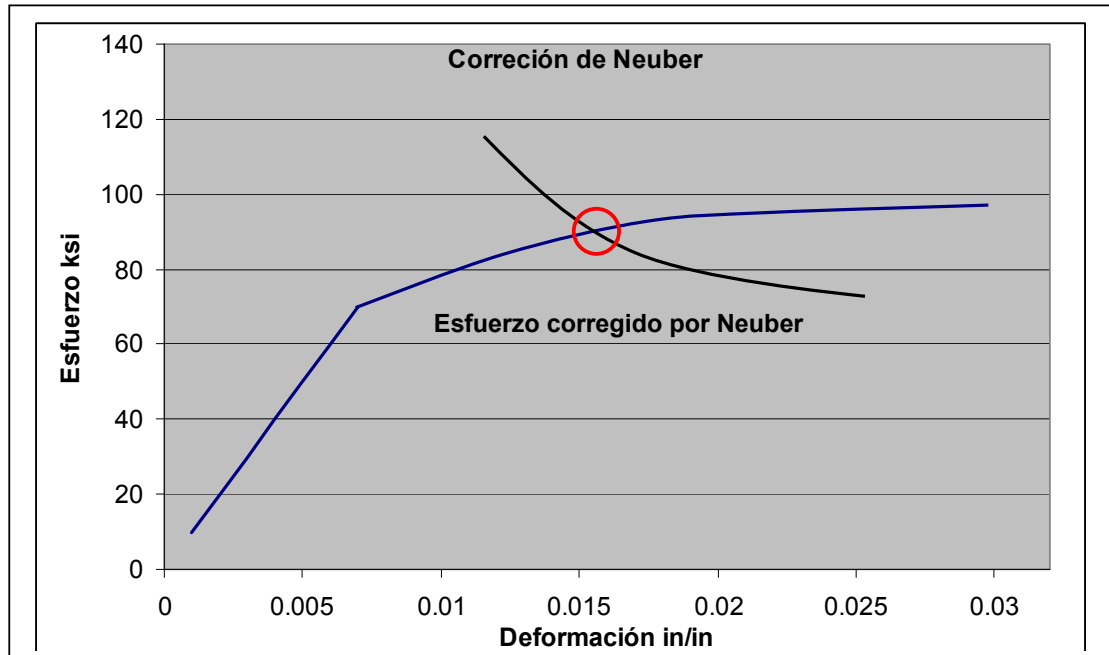


Figura 5.16 Corrección de Neuber

Al usar la regla de Neuber es necesario tomar en cuenta las siguientes consideraciones con el fin de evitar resultados incorrectos o poco conservadores:

- Neuber no debe ser utilizado cuando existan grandes deformaciones plásticas.
- Neuber solo debe ser utilizado para corregir esfuerzos locales, no para esfuerzos nominales ya que una vez que ocurre la plasticidad en la zona nominal, se requieren cargas muy pequeñas para generar grandes deformaciones.
- La corrección de Neuber no debe ser aplicada en los casos en los que se tenga cargas por desplazamientos controlados como son las cargas térmicas (gradientes térmicos) o desplazamientos directamente aplicados ya que los esfuerzos obtenidos de dichos análisis elásticos son a su vez los pseudo-esfuerzos elásticos.

Conociendo el valor y comportamiento de los esfuerzos que propagarán la grieta, se hace uso de los conceptos de mecánica de la fractura para calcular la vida útil del componente ante la presencia cíclica de dichos esfuerzos.

6.1 Análisis de Propagación de Grieta

Ante la presencia de estados de esfuerzo complejos, resulta difícil predecir con exactitud la vida por propagación de grieta y la resistencia a la fractura de un componente, por tal motivo diversos investigadores han hecho uso de métodos analíticos, experimentales y estimaciones ingenieriles para calcular los factores de intensidad de esfuerzos para placas finitas.

En la actualidad existen muy pocas soluciones exactas para componentes en tres dimensiones, dichas soluciones asumen placas infinitas; para el caso de placas finitas todas las soluciones son obtenidas mediante aproximaciones analíticas [1].

Los resultados obtenidos de un análisis de propagación de grieta varían de acuerdo a la metodología, nivel de esfuerzos, parámetros del material, métodos iterativos, y otras consideraciones utilizadas durante el cálculo.

A continuación se mostrará y comparará el cálculo y resultados de propagación de una grieta superficial centrada con gradiente constante mediante dos diferentes metodologías. La primera metodología utiliza ecuaciones encontradas comúnmente en libros de mecánica de la fractura [1]; la segunda utiliza ecuaciones publicadas en artículos de la NASA, las cuales fueron obtenidas mediante análisis de elemento finito y ajustadas mediante experimentos [6].

Los cálculos y comparación de resultados de ambas metodologías se realizaron mediante un macro de Visual Basic en Excel.

Las especificaciones de diseño del macro son:

6.1.1 Calidad y Confiabilidad:

Además de comparar los resultados de ambas metodologías, los resultados obtenidos mediante el macro serán comparados con un software de dominio restringido y especializado para el cálculo de propagación de grieta.

Los resultados comparados son el número de ciclos y el factor de intensidad de esfuerzos en dirección de a , para un cierto crecimiento de grieta da .

Adicionalmente el macro realizará cálculos de propagación de grieta en la esquina en un agujero circular; dichos cálculos serán comparados únicamente con el software de dominio restringido.

Debido a que el software especializado que se utiliza para comparar los resultados es de dominio restringido; no es posible presentar los resultados cuantitativos obtenidos de dicha comparación. Dicho software es utilizado para el diseño de componentes de turbomaquinaria y fue validado mediante experimentos.

6.1.2 Competencia:

La competencia de este macro son los programas de cálculo de propagación de grieta de dominio público que pueden ser encontrados en la red; así como software especializados utilizados en la industria.

La elección de la herramienta a utilizar para el cálculo de propagación de grieta, dependerá de la exactitud de resultados requerida así como de disponibilidad de recursos.

6.1.3 Cliente:

El macro propuesto en conjunto con el presente trabajo escrito, pretenden servir de ayuda para el entendimiento de cálculos sencillos de propagación de grieta, específicamente para personas no familiarizadas con el tema.

Todas las ecuaciones utilizadas para la realización del macro pueden ser encontradas en la literatura.

6.1.4 Limitantes:

Los cálculos del macro asumen gradientes de esfuerzo constantes y cargas de tipo 0 – esfuerzo máximo a tensión – 0 ($R=0$). Al final del capítulo se proponen mejoras al macro para ampliar su campo de aplicación.

6.1.5 Funcionamiento:

Con el fin de explicar el funcionamiento del macro, se definirá un caso de estudio.

Se tiene una grieta y una probeta como la mostrada en la figura 6.1 y se desean calcular los ciclos necesarios para que la grieta en dirección de a crezca .001 in, de .015 in a .016 in. La probeta se encuentra sometida a un esfuerzo de tensión de 90 ksi.

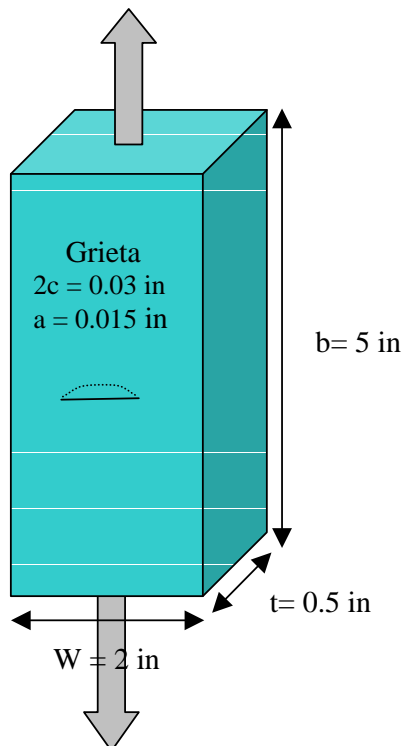


Figura.6.1 Probeta par una grieta semi-elíptica superficial centrada

Como se mencionó en capítulos anteriores, mediante la ecuación de Paris es posible correlacionar el intensificador de esfuerzos en la punta de la grieta con el tamaño de la grieta y el número de ciclos a los que está sometido el componente.

$$da / dN = CK_{eff}^n \quad Ec. 6.1$$

C y n son constantes dependientes del material, por lo que una vez calculado el intensificador de esfuerzos en la punta de la grieta, es posible conocer el crecimiento de la grieta después de cierto número de ciclos de carga o viceversa, el número de ciclos que tarda en crecer la grieta a una cierta longitud.

De la ecuación 6.1 se obtiene:

$$N_2 - N_1 = \frac{a_2 - a_1}{da/dN} = \frac{a_2 - a_1}{CK_{eff}^n} \quad Ec. 6.2$$

6.1.5.1 Cálculo 1

Para una grieta superficial centrada

$$K_{eff} = \sigma(\pi a)^{1/2} \beta = \sigma(\pi a)^{1/2} \left(\frac{1.12}{\phi^{1/2}} \right) \quad Ec. 6.3$$

Donde ϕ depende de la relación $a/2c$

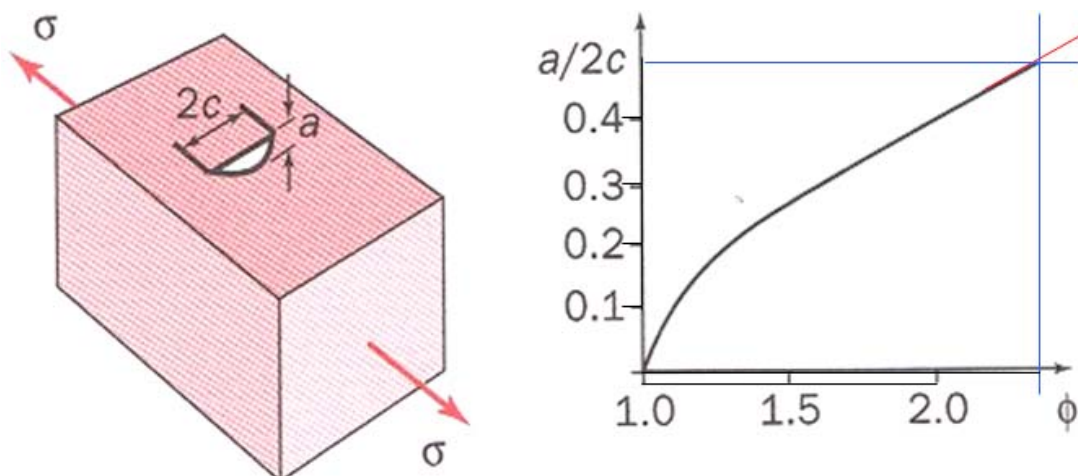


Figura .6.2 Parámetro ϕ

Haciendo una regresión polinomial se tiene que: $y = -2.0384x^3 + 6.793x^2 + 0.1043x + 1.0047$

Donde $y = \Phi$ y $x = a/2c$

En este ejemplo $a/2c = 0.5$ por lo que $\Phi = 2.5$ y K_{eff} inicial es

$$K_{eff} = \sigma(\pi a)^{1/2} \left(\frac{1.12}{\phi^{1/2}} \right) = 90((\pi)(0.016))^{1/2} \left(\frac{1.12}{2.5^{1/2}} \right)$$

$$K_{eff} = 14.6$$

El valor de K_{eff} es mayor al $K_{th} = 12.29$ del material lo cual significa que la grieta se encuentra dentro de la fase de crecimiento estable y continuará creciendo.

Sustituyendo en las ecuaciones 6.1 y 6.2

$$da/dN = CK_{eff}^n = 7.42 \times 10^{-11} (14.6)^{3.474} = 8.23 \times 10^{-7}$$

$$N_2 - N_1 = \frac{a_2 - a_1}{da/dN} = \frac{0.016 - 0.015}{8.23 \times 10^{-7}} = 1,215 \text{ ciclos}$$

Lo que indica que son necesarios 1,215 ciclos de 0 ksi a 90 ksi a 0 ksi (Figura 5.3) para tener un crecimiento de .001 in en dirección de **a**.

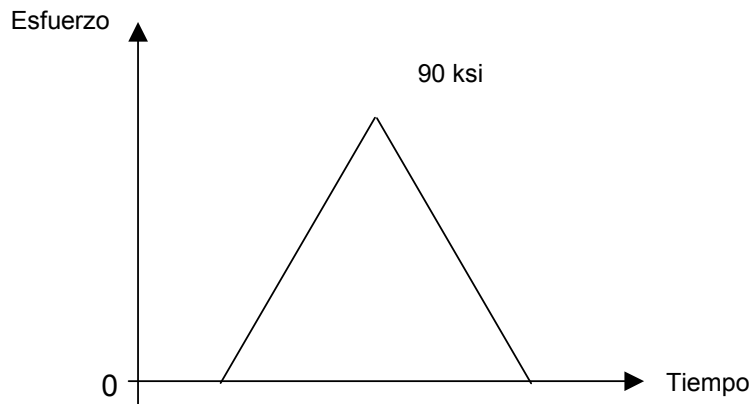


Figura 6.3 Misión 0 – 90 ksi – 0

Ya que a y c están sometidos al mismo número de ciclos, el crecimiento de grieta en la dirección de c se obtiene de la siguiente ecuación

$$N_2 - N_1 = \frac{a_2 - a_1}{da/dN} = \frac{c_2 - c_1}{dc/dN} \text{ Ec. 6.4}$$

$$c_2 - c_1 = \frac{dc/dN(a_2 - a_1)}{da/dN} \quad \text{Ec. 6.5}$$

Debido a que dc/dN depende del crecimiento de grieta, es necesario utilizar un proceso iterativo hasta que la igualdad se cumpla.

6.1.5.2 Cálculo 2

Las ecuaciones para calcular los factores de intensidad de esfuerzo mediante este método, provienen de análisis de elemento finito 3D realizado en placas finitas sometidas a cargas remotas de tensión y flexión únicamente.

Dichas ecuaciones se encuentran en función de algunas propiedades del agujero, del componente y de la grieta preexistente como son: ángulo paramétrico, profundidad de grieta, longitud de grieta, espesor de la placa y radio del agujero. El ancho de la placa también fue tomado en cuenta para el desarrollo de las ecuaciones, sin embargo este efecto fue calculado mediante estimaciones ingenieriles.

Estas ecuaciones son sólo válidas para ciertos rangos de a/t , a/c y r/t y el intensificador de esfuerzos está dado por:

$$K_{eff} = (S_t + H_s S_b)^{1/2} \left(\pi \frac{a}{Q} \right)^{1/2} F_s \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{b}, \phi \right) \quad \text{Ec. 6.7}$$

donde:

S_t = Esfuerzo nominal uniforme a tensión

S_b = Esfuerzo nominal uniforme a flexión en la fibra externa = $3M/bt^2$

H_s = Multiplicador de flexión para una grieta superficial.

Q = Factor de forma para grietas semi-elípticas

F_s = Factor de corrección para una grieta superficial sometida a tensión.

Las ecuaciones completas se muestran en el Anexo B.

Los resultados del Cálculo 2 indican que son necesarios 1,581 ciclos de 0 ksi a 90 ksi a 0 ksi para tener un crecimiento de .001 in en dirección de **a**.

Para ambos casos (Cálculo 1 y Cálculo 2), estos cálculos se repiten incrementando el tamaño de grieta en una dirección hasta que:

-El valor de K_{eff} sea igual al valor K_C del material, lo que indica que la grieta ha entrado a la fase inestable y solo requerirá de un ciclo mas para que ocurra falla catastrófica del componente.

-La falla de fatiga por sección neta del material se presenta cuando el área remanente para el crecimiento de la grieta sea tan pequeña que falle al no soportar la carga.

-La dimensión de la grieta sea igual al espesor o al ancho de la probeta, lo cual significa que la grieta puede seguir creciendo en una sola dirección, sin embargo dicho crecimiento debe ser calculado mediante otro tipo de grieta. En el caso del ejemplo mostrado, cuando el crecimiento de grieta en dirección a sea igual 0.1 in (espesor de la probeta); el tipo de grieta cambiará de grieta semi-elíptica superficial a grieta central “pasada” como se muestra en la figura 6.4

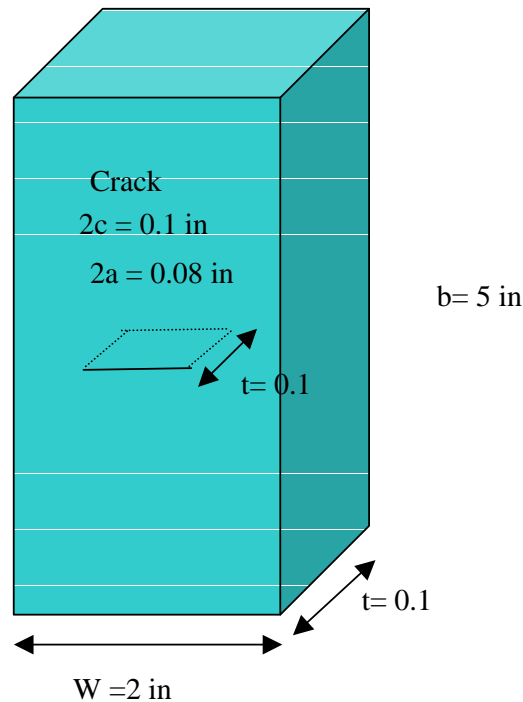


Figura 6.4 Probeta por una grieta superficial centrada “pasada”

donde

Cálculo 1:

$$K_{eff} = \sigma(\pi a)^{1/2} \beta = \sigma(\pi a)^{1/2} \left(\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2} \quad \text{Ec. 6.6}$$

El macro no incluye transiciones de grieta, ni fallas por sección neta del material.

Debido a que las ecuaciones del Cálculo 2 fueron obtenidas mediante análisis de elemento finito y ajustadas mediante experimentos, estas son más exactas que las del Cálculo 1, ya que simulan una situación más cercana a la realidad.

Los parámetros de entrada para el macro de Excel son:

- a – grieta inicial a 90°
- c – grieta inicial a 0°
- da – crecimiento de grieta en dirección de a
- b – ancho de la probeta
- t – profundidad de la probeta
- Fs – Esfuerzo a tensión o primer esfuerzo principal (perpendicular al crecimiento de grieta)
- Fb o M – Esfuerzo a flexión o momento (perpendicular al crecimiento de grieta)
- C y n – propiedades del material
- Kc – Tenacidad crítica del material

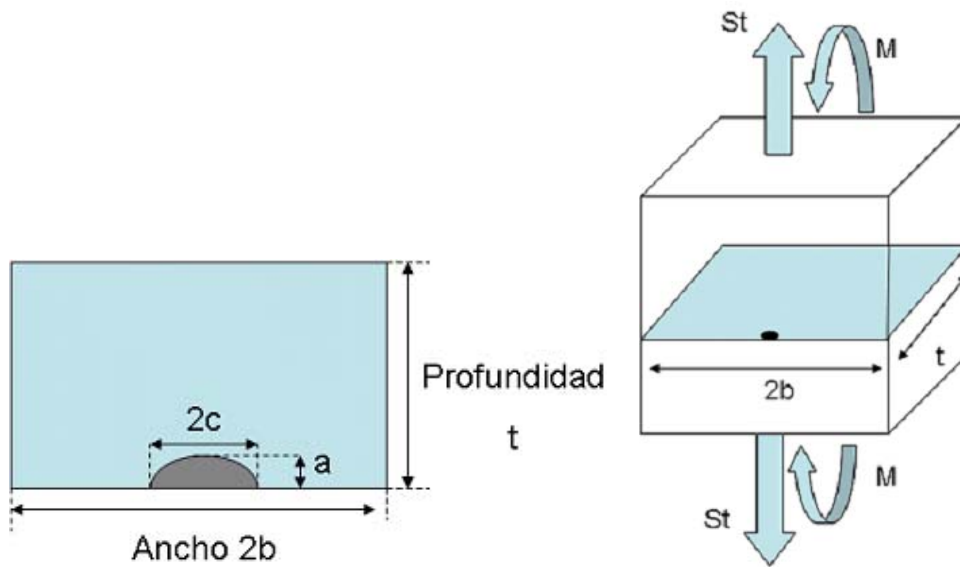


Figura 6.5 Parámetros y cargas para grieta superficial

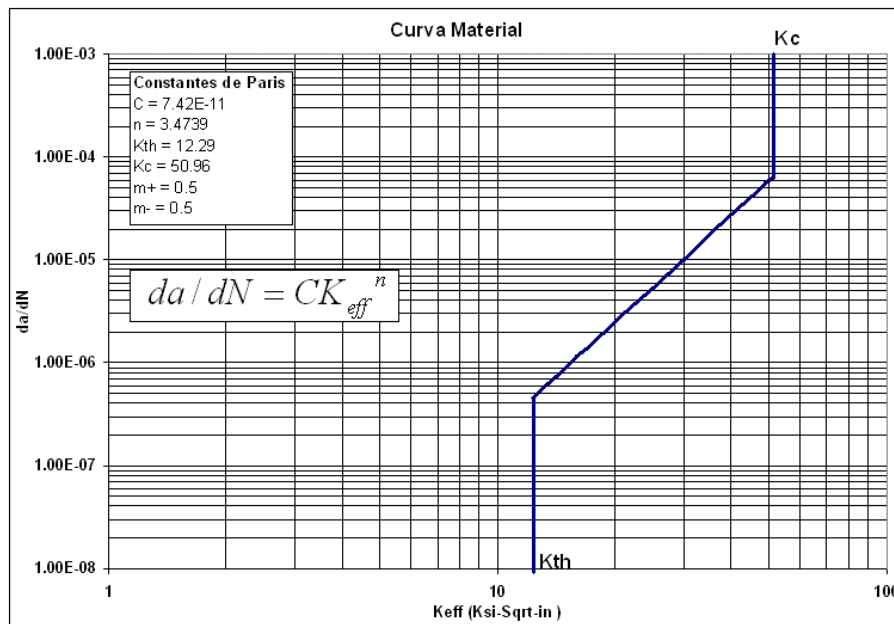


Figura 6.6 Propiedades del material

Los resultados obtenidos mediante el macro son:

- a- crecimiento de grieta a 90°
- c – crecimiento de grieta a 0° (únicamente para el Cálculo 2)
- Ka – intensificador de esfuerzos en a
- Kc – intensificador de esfuerzos en c (únicamente para el Cálculo 2)
- N – número de ciclos por cada crecimiento da.

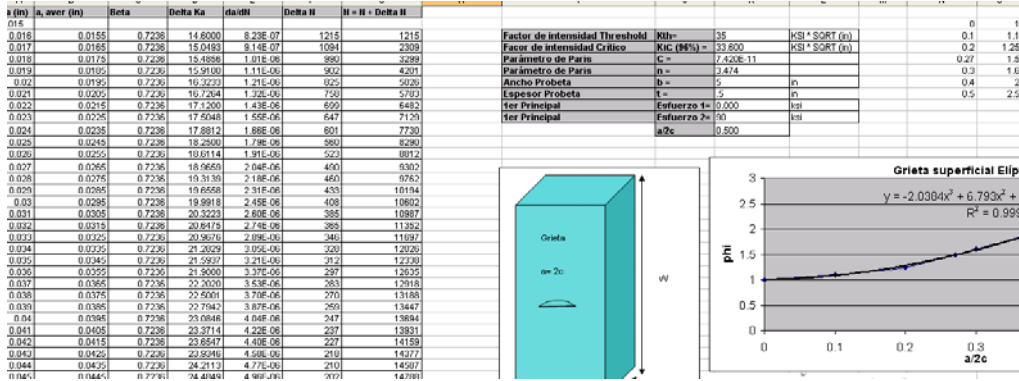


Figura 6.6 Resultados del Macro Cálculo 1

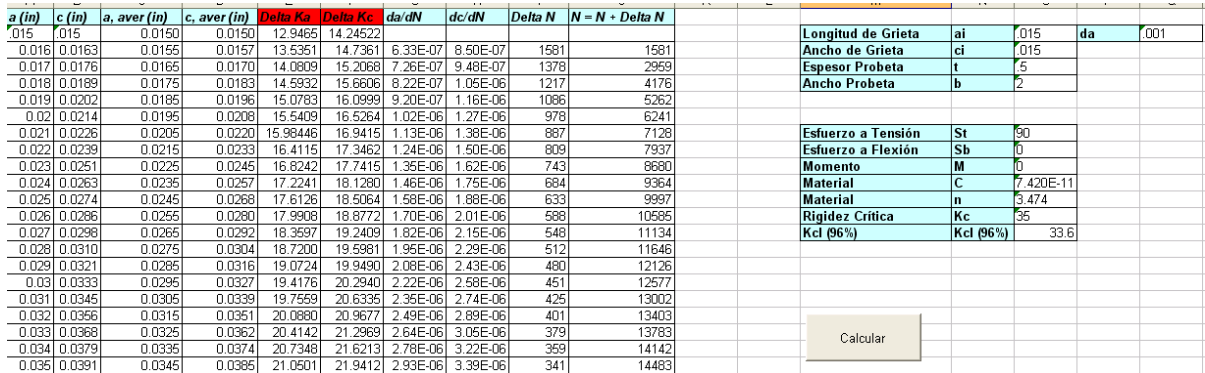


Figura 6.6 Resultados del Macro Cálculo 2

Así como una gráfica del número de ciclos contra el crecimiento de grieta en dirección de a y de c (únicamente para el Cálculo 2).

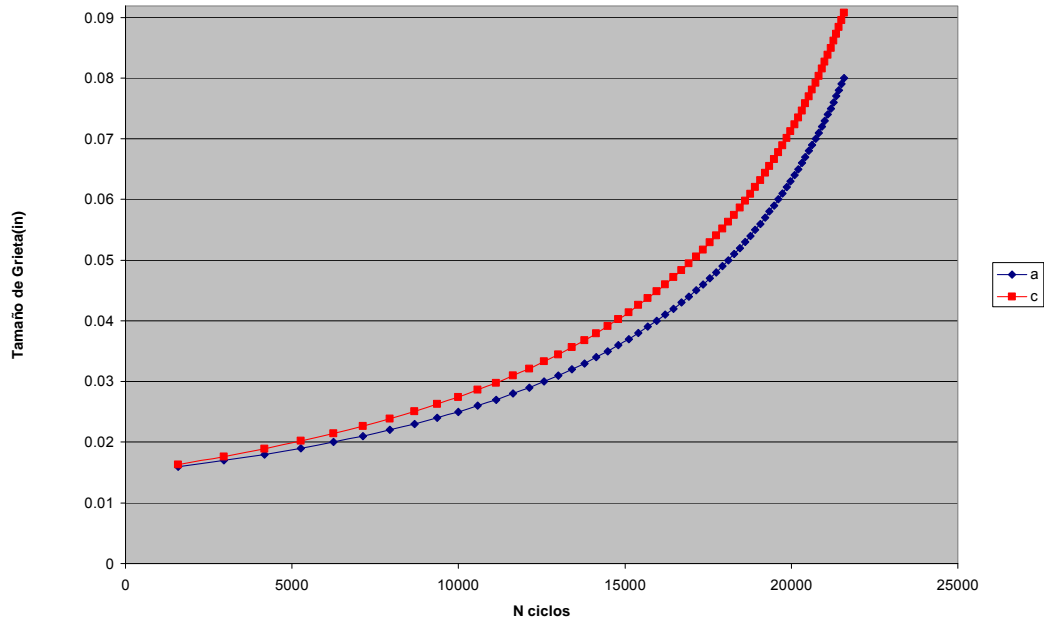


Figura 6.7 Número de ciclos vs tamaño de grieta

Para el cálculo del crecimiento de grieta en dirección de c (Cálculo 2) se utilizó un método iterativo el cual busca los valores que satisfagan la ecuación 6.8

$$da \frac{KC^n}{KA^n} - dc = 0 \quad \text{Ec. 6.8}$$

Para esto se evalúa la ecuación 6.8 para casos extremos de crecimiento en c y para el crecimiento real o deseado en a.

	KC1	KC2	KA1	KA2
a	a+da	a+da	a+da	a+da
c	c + 1E-9	c +.5	c + 1E-9	c +.5

$$da \frac{KC1^n}{KA1^n} - 1E - 9 = f \text{ min} \quad \text{Ec. 6.9}$$

$$da \frac{KC}{KA} \frac{2^n}{2^n} - .5 = f \text{ max}$$

Si los dos valores obtenidos en las ecuaciones 6.9 son negativos o positivos simultáneamente significa que no existen valores reales que satisfagan la ecuación 6.8. De lo contrario es posible disminuir el valor absoluto de (fmax-fmin) hasta encontrar la raíz de la ecuación es decir el valor de dc y calcular el valor real de Kc.

6.2 Comparación Resultados:

Al comparar los resultados de los dos cálculos se observa que para el primer incremento $da = .001$, existe una diferencia menor al 2% entre los valores del intensificador de esfuerzos Ka y de 30.12% entre los ciclos totales NT. Siendo el cálculo con ecuaciones básicas (Cálculo 1) el más conservador.

Para el último cálculo en cual la grieta se vuelve inestable ($Ka = K_{crítica}$), la diferencia entre los intensificadores de esfuerzo Ka y los ciclos totales NT es menor, .29% y 12.08% respectivamente. El cálculo 1 sigue siendo el más conservador y el cálculo 2 el más cercano a la realidad.

	a1	a2	da	Ka	Diferencia	NT	Diferencia
Cálculo	in	in	in	ksi * raíz (in)	%	ciclos	%
Iniciación							
1	0.015	0.016	0.001	14.6		1,215	
2	0.015	0.016	0.001	14.773	1.19%	1,581	30.12%
Falla							
1	0.084	0.085	0.001	33.651		19,328	
2	0.08	0.081	0.001	33.8164	0.49%	21,663	12.08%

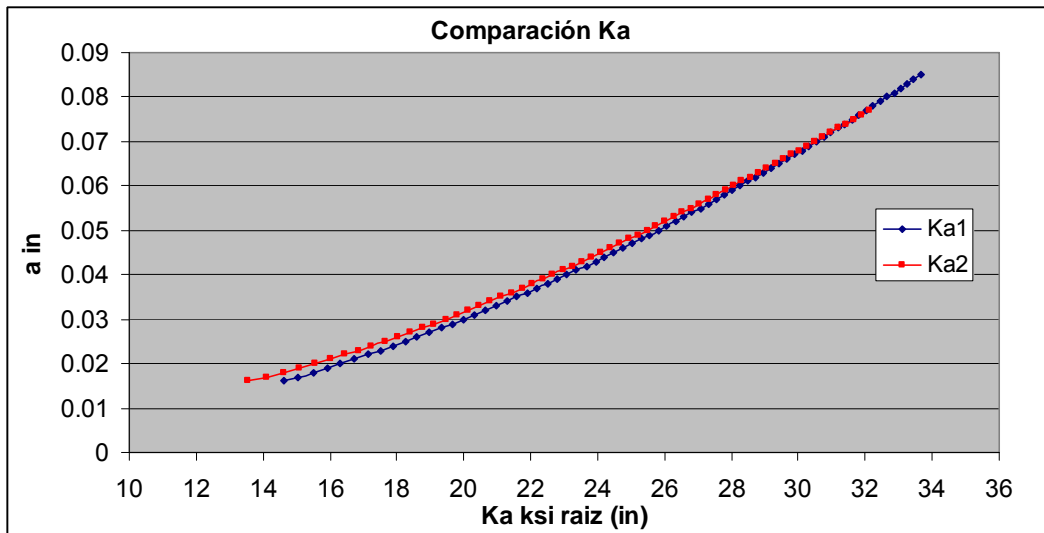


Figura 6.8 Ka Cálculo1 vs Cálculo 2

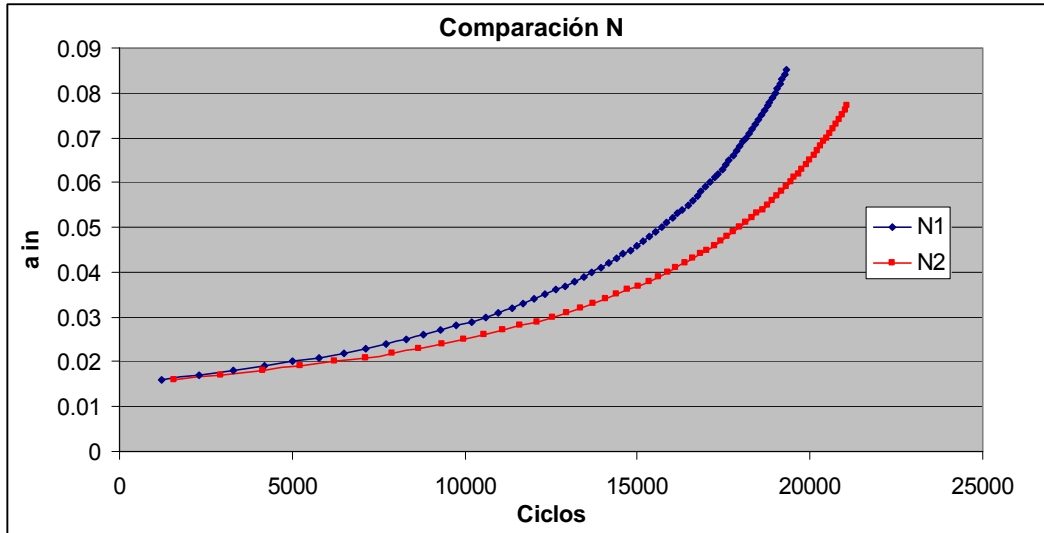


Figura 6.9 Ciclos Cálculo1 vs Cálculo 2

Ambos cálculos fueron comparados con resultados obtenidos de un programa especializado para el cálculo de propagación de grietas en turbomaquinaria; los resultados del cálculo 2 presentaron menor diferencia. Con lo cual queda demostrada la validez del macro para el cálculo de grietas superficiales centradas.

Las ecuaciones para el cálculo de una grieta en la esquina de un agujero circular (Anexo C) también fueron programadas en el macro de Visual Basic; además de los parámetros de entrada para el cálculo de una grieta superficial es necesario definir el diámetro del agujero y si se desea modelar una sola grieta o dos grietas (una en cada esquina del agujero).

Los resultados del macro para la propagación de grieta de esquina en un agujero circular también fueron validados mediante los resultados obtenidos del software especializado.

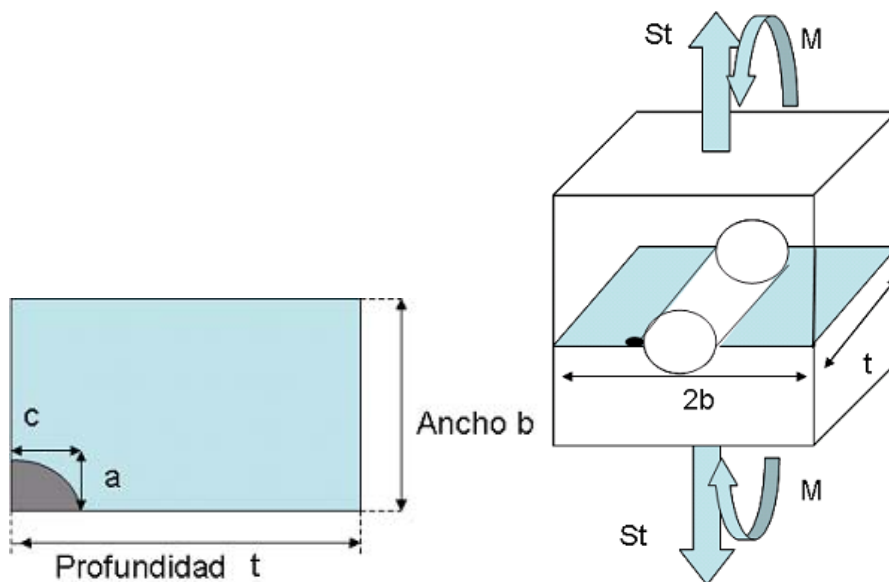


Figura 6.10 Parámetros y Cargas para grieta en la esquina de un agujero

6.3 Mejoras:

Los cálculos mostrados asumen gradientes constantes y cargas de tipo 0-esfuerzo a tensión máximo. (R=0). Para cargas en el que el parámetro R es diferente de cero es necesario calcular los intensificadores de esfuerzo mínimo y máximo y realizar la corrección del esfuerzo alternante mediante la ecuación de Walker.

Si se desea realizar el cálculo de propagación tomando en cuenta la variación de esfuerzos a través del componente (ancho y/o espesor) es necesario hacer uso de las funciones de peso.

Asumiendo condiciones de carga simétricas al plano de propagación de grieta (Modo I) en un material lineal e isotrópico; una vez conocido el intensificador de esfuerzos para una condición de cargas KI^1 es posible conocer el intensificador de esfuerzos para una segunda condición de cargas KI^2 a través de la ecuación de Rice.

$$KI^2 = \frac{E}{2KI^1} \left[\int_{\Gamma} Ti \frac{\partial ui^1}{\partial a} \partial\Gamma + \int_A Fi \frac{\partial ui^1}{\partial a} dA \right] \quad Ec. 6.10$$

donde

Γ -Perímetro

A – área

ui – desplazamiento en x y y.

Debido a que los sistemas de carga 1 y 2 son arbitrarios, KI^2 no depende de KI^1 Y ui^1 por lo que

$$h(xi) = \frac{E}{2KI^1} \frac{\partial ui^1}{\partial a} \quad Ec. 6.11$$

Las funciones de peso son tensores de primer orden los cuales dependen únicamente de la geometría del cuerpo con grieta. Por lo que KI para una grieta un cuerpo en dos dimensiones puede ser expresado de la siguiente manera:

$$KI = \int_{\Gamma_c} p(x)h(x)dx$$

$p(x)$ – esfuerzo normal sobre el plano de propagación sin grieta

Γ_c – perímetro de la grieta

$h(x)$ – intensificador de esfuerzos resultante de una fuerza unitaria aplicada a una distancia x.

Mediante la adición de las funciones de peso al macro, es posible obtener resultados más cercanos a la realidad, sin embargo la complejidad de dicho cálculo y como consecuencia los recursos necesarios para realizarlo se incrementan.

Por tal motivo, ante la presencia de gradientes de esfuerzos en el plano de propagación de la grieta, es de suma importancia evaluar el beneficio que representará utilizar las funciones de peso.

Por ejemplo, se desea evaluar si un componente cumple con una vida útil remanente de N_t ciclos. Al calcular el estado de esfuerzo al que se encuentra sometido el componente se observa que los esfuerzos que abren la grieta se concentran en una discontinuidad geometría (filete) y disminuyen al alejarse de esta.

Debido a que los esfuerzos disminuyen a medida que se alejan del concentrador de esfuerzos (inicio de la grieta), se concluye que si se utilizan funciones de peso durante el cálculo de propagación de grieta, se obtendrá una vida útil (ciclos) mayor y más cercana a lo que ocurre en la realidad. Sin embargo, es posible que la vida útil requerida (N_t) pueda ser obtenida asumiendo un gradiente constante; para tal caso el uso de funciones de peso no aportaría ningún beneficio a la evaluación del componente.

Por el contrario, si lo que se desea es optimizar el diseño del componente, el uso de las funciones de peso sería lo más adecuado.

Como se mencionó anteriormente existen diversas metodologías y herramientas para realizar un análisis de propagación de grieta, el uso y la elección de las mismas dependerá del objetivo del análisis.

Conclusiones:

El presente trabajo muestra que mediante el uso de conocimientos de dominio público, es posible realizar de manera sencilla y con pocos recursos, cálculos de propagación de grieta en cualquier componente que se encuentre sometido a cargas cíclicas.

Mediante la herramienta desarrollada es posible obtener de manera rápida, resultados para diferentes cálculos de propagación de grieta que permitan, además de comparar los resultados entre las 2 metodologías propuestas, realizar un análisis de sensibilidad de resultados ante la variación de diferentes parámetros como son: esfuerzo al que se encuentra sometido el componente, tamaño de grieta, material, ancho y espesor del componente (Ver Anexo D). Dicho análisis de sensibilidad servirá de ayuda en la toma de decisiones durante el diseño de un componente sometido a cargas cíclicas ya que permitirá identificar el o los parámetros a ser modificados para optimizar y mejorar el diseño.

Por ejemplo:

- Evaluar si es necesario modificar la geometría del componente con el fin de disminuir las concentraciones de esfuerzo o colocar los concentradores en zonas de menor esfuerzo.
- Definir los rangos de cargas a los que puede trabajar de manera segura el componente durante su vida útil o antes de la siguiente inspección de grietas.
- Determinar los valores máximos permisibles de tamaño de grieta durante la inspección del componente.
- Seleccionar el material a utilizar en base a sus defectos inherentes y/o propiedades mecánicas.
- Modificar la geometría del componente (agregar o quitar material) en diferentes direcciones.
- Elegir la metodología a ser utilizada durante el análisis de propagación de grieta en base al rango de incertidumbre que se tenga de los parámetros utilizados durante el cálculo (rangos de operación, datos del material, procesos e instrumentos de inspección y medición, etc.).

Sea cual sea la metodología y/o herramienta utilizada durante el cálculo de propagación de grieta, se recomienda tomar las siguientes consideraciones:

- La precisión deseada en los cálculos de fallas por fatiga depende en gran medida de los recursos disponibles y de la función del componente a analizar.

En componentes en los cuales una falla puede representar pérdidas humanas y/o económicas es deseable optimizar el diseño del mismo (costo vs. precisión).

En ocasiones un simple cálculo a mano puede bastar para obtener el diseño óptimo, en los casos en los cuales es necesario obtener un cálculo más cercano a la realidad, por ejemplo, con el fin de reducir costos en manufactura, materiales y a la vez obtener el margen de seguridad deseado; es necesario

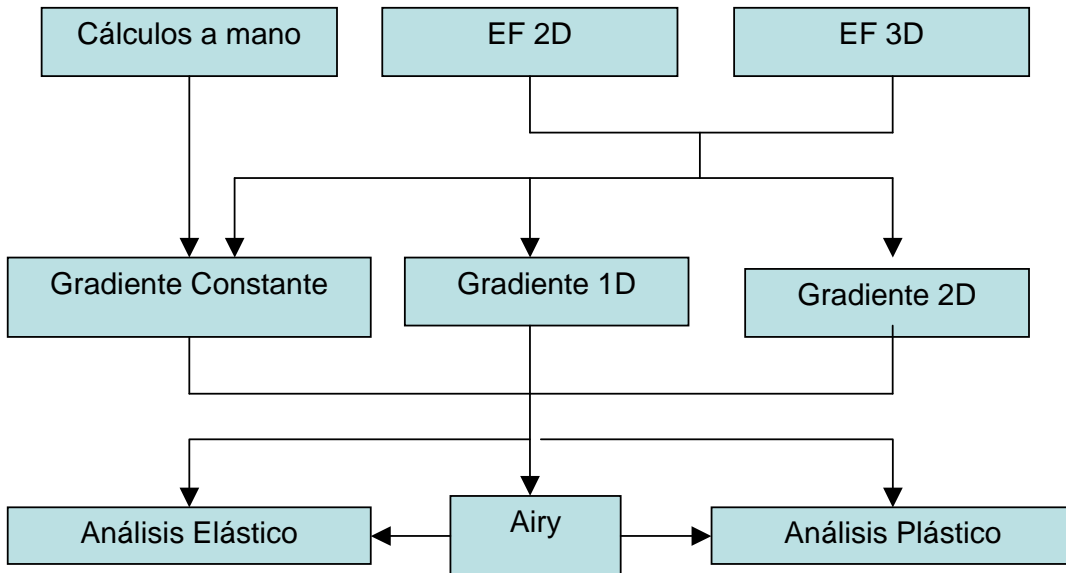
realizar análisis más complejos. Sin embargo en la mayoría de las ocasiones el realizar un análisis más realista que nos permita lograr el objetivo del diseño, no implica replicar de manera exacta las condiciones geométricas y de operación del componente.

Mediante el uso, adaptación y conjunción de diferentes metodologías es posible obtener el diseño deseado sin incrementar de manera significativa los recursos utilizados.

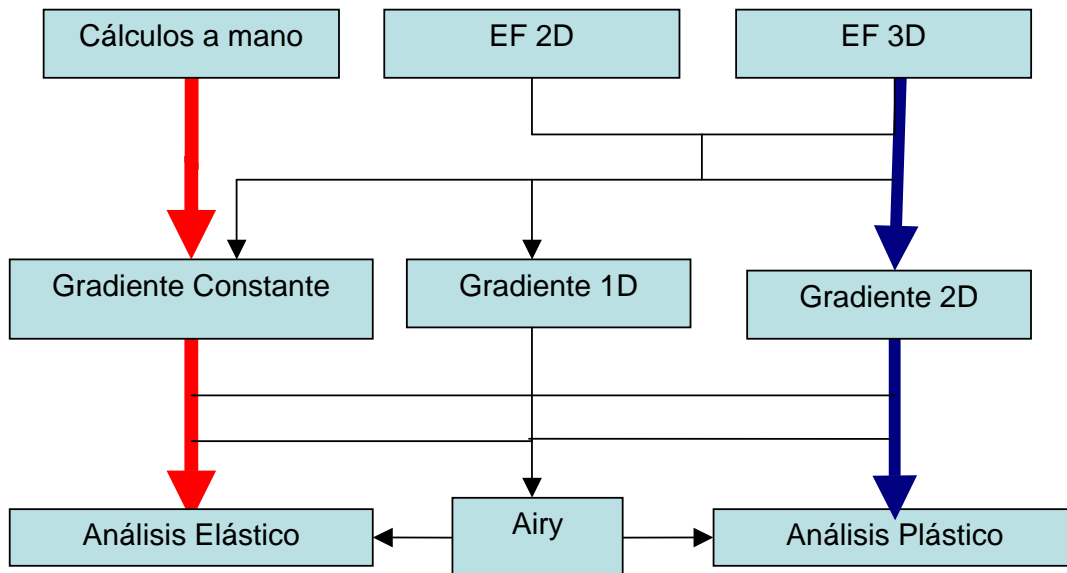
-Durante la evaluación de un componente es de suma importancia tener claro el objetivo de dicha evaluación, de esta manera la decisión de la metodología y recursos a utilizar resulta más sencilla y con mayores posibilidades de satisfacer el propósito de la misma.

Si se desea evaluar la capacidad estructural remanente de una pieza dañada que aun debe cumplir con un cierto porcentaje de vida útil, un cálculo conservador (sobrado) sin mucho detalle puede ser suficiente. Por el contrario en caso de que se desee cambiar la geometría de la pieza con el fin de reducir costos; un cálculo conservador pudiera no ser el adecuado.

En la figura se muestra el diagrama de flujo simplificado de un análisis de propagación de grieta.



-Las líneas gruesas azul y roja muestran la metodología más y menos detallada respectivamente. La opción más detallada requiere mayores recursos; sin embargo en general es recomendable comenzar el análisis con cálculos a mano (esfuerzos, concentradores de esfuerzos, etc.) ya que si es necesario realizar un análisis más complejo los cálculos a mano servirán para corroborar que los resultados obtenidos de un más complejo, como un análisis de elemento finito, sean correctos.



-La función de esfuerzos de Airy permite de manera sencilla obtener esfuerzos más realistas sin necesidad de hacer análisis complejos de elemento finito y/o pruebas mecánicas. El utilizar de manera adecuada la función de Airy puede reducir significativamente los recursos necesarios en un análisis.

-El uso de la función de esfuerzos de Airy para ajustar el gradiente en agujero circular debe ser utilizado únicamente en los casos en que esfuerzos por cargas mecánicas sean predominantes. Debido a que el concentrador de esfuerzos en un agujero depende del tipo de cargas y de la geometría del agujero; cuando los esfuerzos que abran la grieta (perpendiculares al plano de propagación) se deban a cargas biaxiales y triaxiales es necesario utilizar la función de Airy con el método de superposición para obtener adecuadamente dicho concentrador.

-Cuando se obtengan resultados de esfuerzos que sobrepasen el esfuerzo de cedencia del material, no siempre es necesario y/ conveniente realizar un análisis plástico, en su lugar es posible realizar un ajuste de Neuber que corrija los esfuerzos elásticos que se encuentran por encima de la cedencia.

-Mediante el cálculo de vida por propagación de grieta es posible cuantificar los ciclos que aguantará un componente durante toda su vida útil. Sin embargo, con el fin de optimizar recursos, es posible diseñar un componente para que aguante cierta cantidad de ciclos antes de ser inspeccionado (mantenimiento); durante esta inspección comúnmente se busca grietas en el componente mediante el uso de pruebas no destructivas (corrientes de Eddy, líquidos penetrantes, rayos X etc.). Ya sea que durante la inspección se encuentre o no una grieta, es posible calcular mediante la regla de Miner la vida remante del material antes de la siguiente inspección.

En los casos de que la vida remante no sea la deseada es posible hacer una evaluación para decidir si es posible y/o deseable realizar una reparación en el componente o si resulta más conveniente reemplazarlo.

-Al realizar análisis de propagación de grieta es de suma importancia, entre otras cosas, entender los conceptos básicos del método utilizado ya que un cálculo incorrecto puede llevar a predicciones incorrectas que ocasionen fallas catastróficas.

- Es necesario entender la importancia de los concentradores de esfuerzos, ya que son una de las principales causas de fallas por fatiga. Por tal motivo es deseable realizar diseños que minimicen dichos concentradores; esto nos es una tarea sencilla debido es necesario contar, entre otras cosas, con conocimientos en manufactura (procesos, herramientas, maquinaria, acabados etc.) que permitan realizar diseños factibles y realistas.

- El intensificador de esfuerzos y por ende el cálculo de propagación de grieta depende en gran medida del perfil de cargas al cual se encuentra sometido el componente. En ocasiones no es posible conocer en su totalidad dicho perfil; sin embargo si se conoce el esfuerzo máximo en el componente es posible asumir un perfil conservador. Ante el desconocimiento del funcionamiento de un componente, un error común es asumir un perfil 0- esfuerzo a tensión máximo - 0. Debido a que la vida del componente depende no únicamente del esfuerzo alternante si no también del esfuerzo medio, resulta más conservador utilizar un perfil de cargas con inversión. (-esfuerzo a tensión máximo – 0 - +esfuerzo a tensión máximo).

-Lo expuesto en este trabajo tiene el fin de dar una introducción a los conceptos básicos de fallas por fatiga. La información aquí recabada permite realizar cálculos sencillos de propagación de grieta, sin embargo no importa la complejidad del cálculo siempre debe contar con un buen juicio ingenieril, el cual permita interpretar y validar de manera correcta los resultados y evitar incongruencias.

Anexo A: Esfuerzos Principales

$$\sigma_n^3 - \sigma_n^2 I_1 + \sigma_n I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_a = 2S \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \frac{1}{2} + I_1$$

$$\sigma_b = 2S \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 120^\circ\right) + \frac{1}{2} + I_1$$

$$\sigma_c = 2S \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 240^\circ\right) + \frac{1}{2} + I_1$$

$$S = \left(\frac{1}{3}R\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{Q}{2T}\right)$$

$$R = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2$$

$$Q = \frac{1}{3}I_1 I_2 - I_3 - \frac{2}{27}I_1^3$$

$$T = \left(\frac{1}{27}R^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

Anexo B: Ecuaciones para grieta superficial

$$K = (\sigma_t + H_j \sigma_b) \sqrt{\pi \frac{a}{Q}} F_j$$

$$F_j = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4 \right] g f_\phi f_w$$

$$H_j = H_1 + (H_2 - H_1) \text{Sin}^p \phi$$

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65} \quad \text{para } \frac{a}{c} < 1$$

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{c}{a} \right)^{1.65} \quad \text{para } \frac{a}{c} > 1$$

$$F_s = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4 \right] g f_\phi f_w$$

$$f_\phi = \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 \text{Cos}^2 \phi + \text{Sin}^2 \phi \right]^{1/4}$$

$$f_w = \left[\text{Sec} \left(\frac{\pi c}{2b} \left(\frac{a}{t} \right)^{0.5} \right) \right]^{1/2}$$

Para $a / c < 1$

$$M_1 = 1.13 - 0.09 \left(\frac{a}{c} \right)$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{a}{c}}$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \frac{a}{c}} + 14 \left(1 - \frac{a}{c} \right)^{24}$$

$$g = 1 + \left[0.1 + 0.35 \left(\frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \text{Sin} \phi)^2$$

$$H_s = H_1 + (H_2 - H_1) \text{Sin}^p \phi$$

$$p = 0.2 + \frac{a}{c} + 0.6 \frac{a}{t}$$

$$H_1 = 1 - 0.34 \frac{a}{t} - 0.11 \frac{a}{c} \frac{a}{t}$$

$$H_2 = 1 + G_{21} \frac{a}{t} + G_{22} \left(\frac{a}{t} \right)^2$$

$$G_{21} = -1.22 - 0.12 \frac{a}{c}$$

$$G_{22} = 0.55 - 1.05 \left(\frac{a}{c} \right)^{0.75} + 0.47 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.5}$$

Para $a / c > 1$

$$M_1 = \left(\frac{c}{a} \right)^{0.5} \left(1 + 0.04 \frac{c}{a} \right)$$

$$M_2 = 0.2 \left(\frac{c}{a} \right)^4$$

$$M_3 = -0.11 \left(\frac{c}{a} \right)^4$$

$$g = 1 + \left[0.1 + 0.35 \left(\frac{c}{a} \right) \left(\frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin \phi)^2$$

$$p = 0.2 + \frac{c}{a} + 0.6 \frac{a}{t}$$

$$H_1 = 1 + G_{11} \frac{a}{t} + G_{12} \left(\frac{a}{t} \right)^2$$

$$H_2 = 1 + G_{21} \frac{a}{t} + G_{22} \left(\frac{a}{t} \right)^2$$

$$G_{11} = -0.04 - 0.41 \frac{c}{a}$$

$$G_{12} = 0.55 - 1.93 \left(\frac{c}{a} \right)^{0.75} + 1.38 \left(\frac{c}{a} \right)^{1.5}$$

$$G_{21} = 0.55 - 0.72 \left(\frac{c}{a} \right)^{0.75} + 0.14 \left(\frac{c}{a} \right)^{1.5}$$

Anexo C: Ecuaciones para grieta en la esquina de un agujero

$$K_{eff} = (S_t + H_{ch} S_b)^{1/2} \left(\pi \frac{a}{Q} \right)^{1/2} F_{ch} \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{b}, \frac{r}{t}, \frac{r}{b}, \phi \right)$$

$$0.2 < a/c < 2$$

$$a/t < 1$$

$$0.5 < r/t < 2$$

$$(r+c)/b < 0.5$$

$$0 < \phi < \pi/2$$

$$F_{ch} = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 g_3 g_4 f_\phi f_w$$

$$f_\phi = \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right]^{1/4}$$

$$f_w = \left[\sec \left(\frac{\pi c}{2b} \left(\frac{a}{t} \right)^{0.5} \right) \right]^{1/2}$$

Para $a/c < 1$

$$M_1 = 1.13 - 0.09 \left(\frac{a}{c} \right)$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{a}{c}}$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \frac{a}{c}} + 14 \left(1 - \frac{a}{c} \right)^{24}$$

$$g_1 = 1 + \left[0.1 + 0.35 \left(\frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin \phi)^2$$

$$g_2 = \frac{1 + 0.358\lambda + 1.425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2.156\lambda^4}{1 + 0.13\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{c}{r} \cos(\mu\phi)}$$

$$\mu = 0.85 \text{ tension}$$

$$\mu = 0.85 - 0.25 \left(\frac{a}{t} \right)^{0.25} \text{ flexión}$$

$$g_3 = \left(1 + 0.04 \frac{a}{c}\right) \left[1 + 0.1(1 - \cos\phi)^2\right] \left[0.85 + 0.15 \left(\frac{a}{t}\right)^{0.25}\right]$$

$$g_4 = 1 - 0.7 \left(1 - \frac{a}{t}\right) \left(\frac{a}{c} - 0.2\right) \left(1 - \frac{a}{c}\right)$$

$$f_\phi = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$f_w = \left\{ \sec\left(\frac{\pi c}{2b}\right) \sec\left[\frac{\pi(2r + nc)}{4(b-c) + 2nc} \left(\frac{a}{t}\right)^{0.5}\right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$n = 1$ 1 grieta

$n = 2$ 2 grietas simétricas

$$H_s = H_1 + (H_2 - H_1) \sin^p \phi$$

$$p = 0.1 + 1.3 \frac{a}{t} + 1.1 \frac{a}{c} - 0.7 \frac{a}{c} \left(\frac{a}{t}\right)$$

$$H_1 = 1 + G_{11} \frac{a}{t} + G_{12} \left(\frac{a}{t}\right)^2 + G_{13} \left(\frac{a}{t}\right)^3$$

$$H_2 = 1 + G_{21} \frac{a}{t} + G_{22} \left(\frac{a}{t}\right)^2 + G_{23} \left(\frac{a}{t}\right)^3$$

$$G_{11} = -0.43 - 0.74 \frac{a}{c} - 0.84 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$G_{12} = 1.25 - 1.19 \frac{a}{c} + 4.39 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$G_{13} = -1.94 + 4.22 \frac{a}{c} - 5.51 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$G_{21} = -1.5 - 0.04 \frac{a}{c} - 1.73 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$G_{22} = 1.71 - 3.17 \frac{a}{c} + 6.84 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$G_{23} = -1.28 + 42.71 \frac{a}{c} - 5.22 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

Para $a/c > 1$

$$M_1 = \left(\frac{c}{a}\right)^{0.5} \left(1 + 0.04 \frac{c}{a}\right)$$

$$M_2 = 0.2 \left(\frac{c}{a}\right)^4$$

$$M_3 = -0.11 \left(\frac{c}{a}\right)^4$$

$$g_1 = 1 + \left[0.1 + 0.35 \left(\frac{c}{a}\right) \left(\frac{a}{t}\right)^2\right] (1 - \sin\phi)^2$$

$$g_2 = \frac{1 + 0.358\lambda + 1.425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2.156\lambda^4}{1 + 0.13\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{c}{r} \cos(\mu\phi)}$$

$$g_3 = \left(1.13 - 0.09 \frac{c}{a}\right) \left[1 + 0.1(1 - \cos\phi)^2\right] \left[0.85 + 0.15 \left(\frac{a}{t}\right)^{0.25}\right]$$

$$g_4 = 1$$

$$f_\phi = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi\right]^{1/4}$$

$$f_w = \left\{ \sec\left(\frac{\pi c}{2b}\right) \sec\left[\frac{\pi(2r + nc)}{4(b - c) + 2nc} \left(\frac{a}{t}\right)^{0.5}\right] \right\}^{1/2}$$

$$p = 0.1 + 1.3 \frac{a}{t} + 1.1 \frac{a}{c} - 0.7 \frac{a}{c} \left(\frac{a}{t}\right)$$

$$H_1 = 1 + G_{11} \frac{a}{t} + G_{12} \left(\frac{a}{t}\right)^2 + G_{13} \left(\frac{a}{t}\right)^3$$

$$H_2 = 1 + G_{21} \frac{a}{t} + G_{22} \left(\frac{a}{t}\right)^2 + G_{23} \left(\frac{a}{t}\right)^3$$

$$G_{11} = -2.07 + 0.06 \frac{c}{a}$$

$$G_{12} = 4.35 + 0.16 \frac{c}{a}$$

$$G_{13} = -2.93 - 0.3 \frac{c}{a}$$

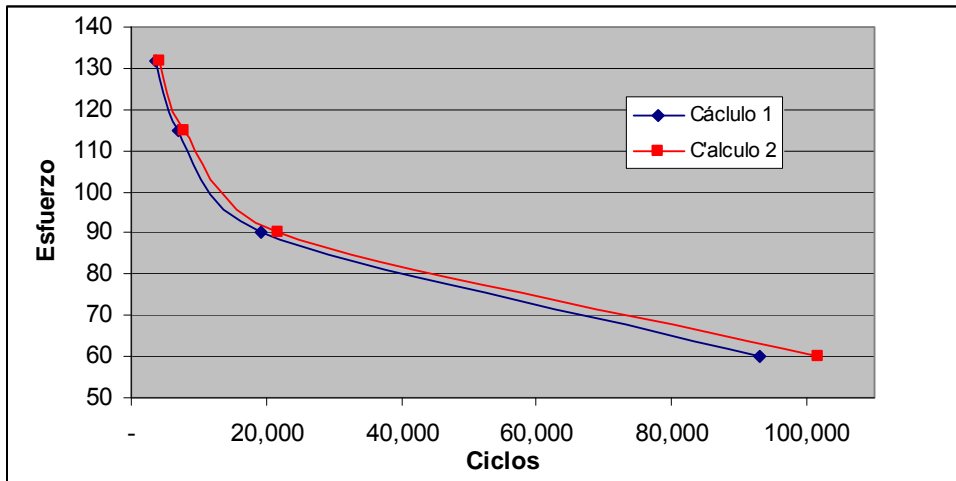
$$G_{21} = -3.64 + 0.37 \frac{c}{a}$$

$$G_{22} = 5.87 - 0.49 \frac{c}{a}$$

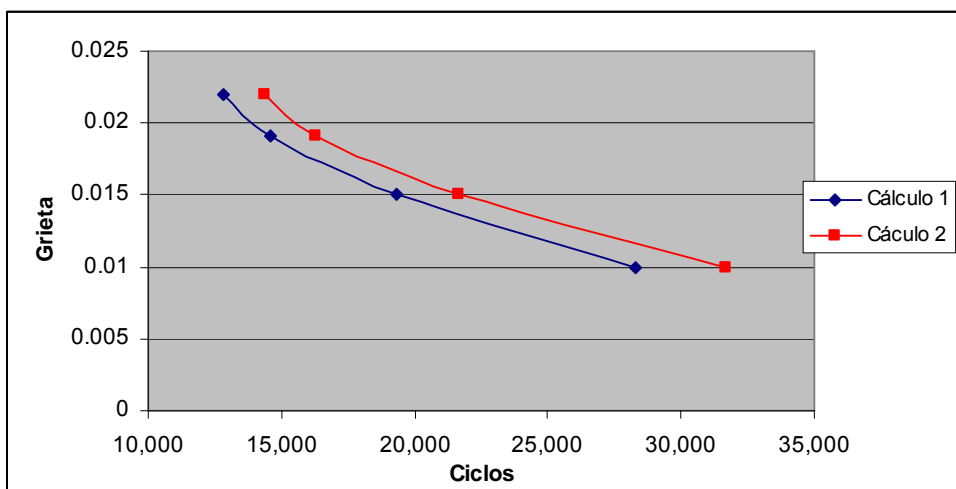
$$G_{23} = -4.32 + 0.53 \frac{c}{a}$$

Anexo D: Variación de Parámetros

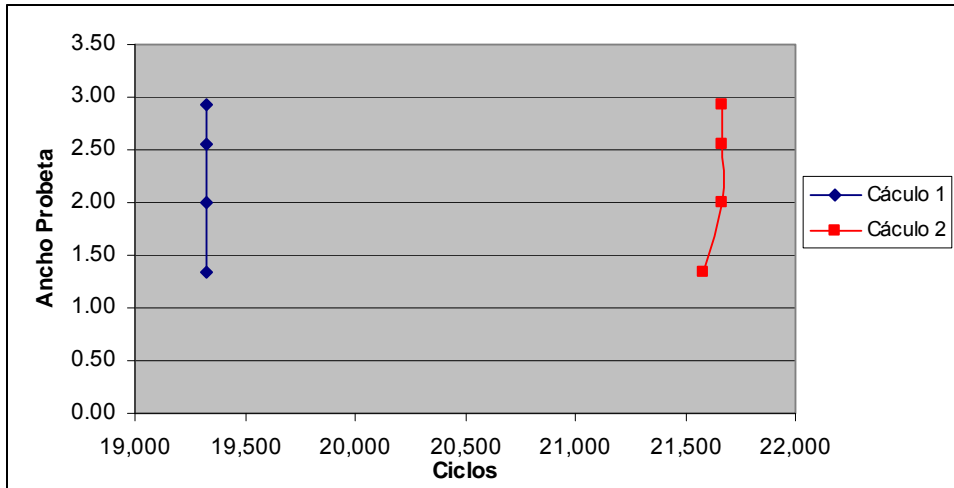
Cálculo 1	Cálculo 2	Esfuerzo ksi	Diferencia
93,114	101,738	60	9.26%
19,328	21,663	90	12.08%
6,837	7,727	115	13.02%
3,620	4,147	132	14.56%



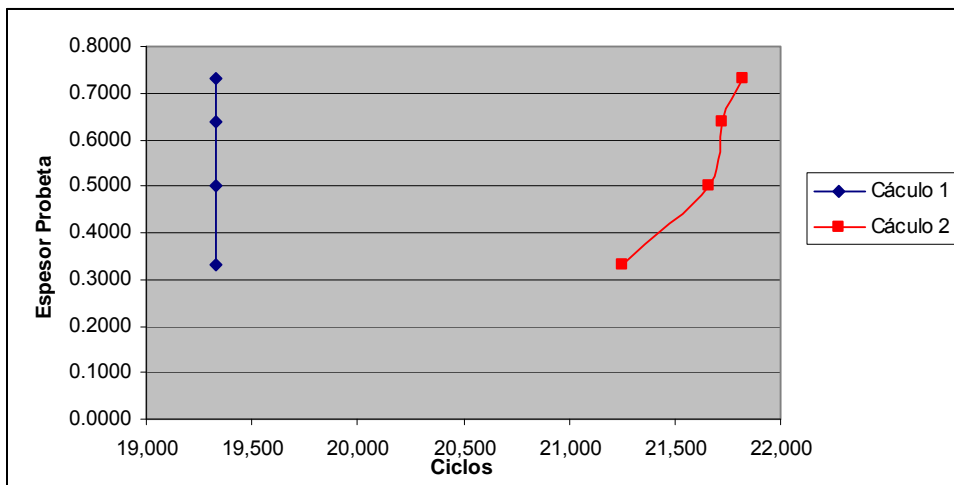
Cálculo 1	Cálculo 2	Grieta in	Diferencia
28,295	31,695	0.01	12.01%
19,328	21,663	0.015	12.08%
14,614	16,303	0.0192	11.56%
12,846	14,395	0.022	12.06%

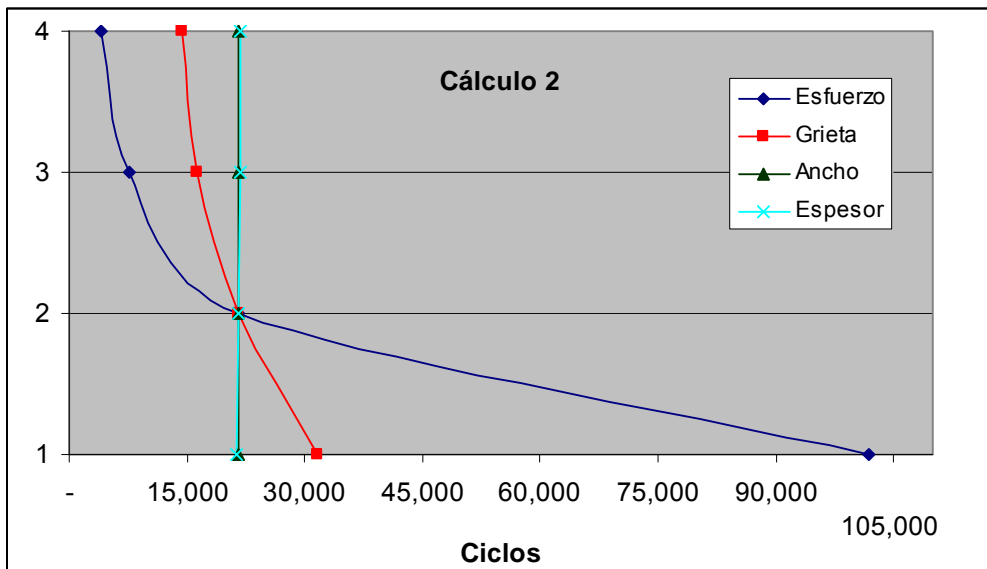
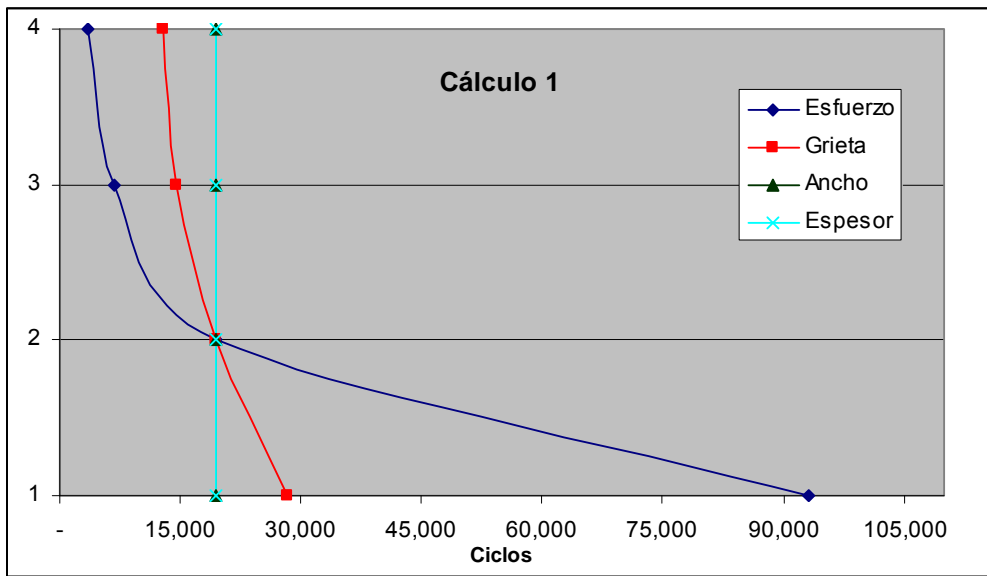


Cálculo 1	Cálculo 2	Ancho in	Diferencia
19,328	21,585	1.33	11.68%
19,328	21,663	2	12.08%
19,328	21,663	2.56	12.08%
19,328	21,664	2.93	12.09%



Cálculo 1	Cálculo 2	Espesor in	Diferencia
19,328	21,248	0.3333	9.93%
19,328	21,663	0.5000	12.08%
19,328	21,722	0.6389	12.39%
19,328	21,822	0.7333	12.90%





Bibliografía:

1. Anderson T.L., "Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications", Second Edition, Hardcover, Dec 16, 1994.
2. ASTM Designation: E 647-05, "Standard Test Method for Measurements of Fatigue Crack Growth Rates"
3. Dowling Norman "Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformations, Fracture and Fatigue" (2nd Edition)
4. Irwin George R., "The Historical Development of Our Understanding of Fracture"
5. Kaplan Mitchell P., Wolff Timothy A. "Fatigue-Life Assessment", EAD Aerospace, Inc.
6. Newman J.C., Raju I. S., "NASA Technical Memorandum 85793 Stress-Intensity Factor Equations For Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies Subjected to Tension and Bending Loads", April 1984.
7. Pilkey Walter D., "Peterson's Stress Concentration Factors", Second Edition, 1997.
8. Roylance David , " Closed-Form Solutions", Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, February 21, 2001.
9. Roylance David, "Introduction to Fracture Mechanics" ", Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, June 14, 2001.
10. Ugural Ansel C., Fenster Saul K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", Third Edition.
11. Wai-Fai Chen, Da-Jian Han, D.J. Han, "Plasticity for Structural Engineers", First Edition, 2007.
12. www.fatiguecalculator.com
13. www.fgg.uni-lj.si/kmk/esdep/master/wg12/I0200.htm
14. <http://imechanica.org/node/2979> crack
15. <http://www.me.fau.edu/~salivar/NEUBERRL.pdf>
16. http://www.paulin.com/Library/Fatigue_Info/Hinnant_Review_of_Master_SN_Neuber_Rule_in_Div_2_Rewrite.pdf

Trabajo a Futuro:

-Utilizar funciones de peso para realizar cálculos de propagación de grieta en componentes con esfuerzos variables a través del plano de propagación. (Gradientes 1D y 2D).

-Crear una interfaz entre un programa de cálculo de propagación de grieta y un programa de elemento finito, la cual permita calcular el esfuerzo principal (plano de propagación), extraer esfuerzos de un elemento finito, realizar los ajustes deseados (Airy, Neuber, concentradores, etc.), calcular los ciclos de propagación y mostrar un reporte de resultados. (Gráficas, márgenes de seguridad, etc.). Una ventaja importante de dicha interfaz es que permitiría realizar de manera rápida iteraciones para encontrar el diseño óptimo. (Diseño de experimentos)

-Realizar experimentos, pruebas y análisis de elemento finito los cuales en conjunto con conocimientos ingenieriles permitan desarrollar ecuaciones para el ajuste de gradientes de esfuerzos ante la presencia de otro tipo de concentradores de esfuerzos.

-Debido a que en la realidad siempre existe una zona de deformación plástica en la grieta (punta de la grieta), proponer una metodología para el cálculo de propagación de grieta mediante un análisis plástico y compararlo con los resultados de un análisis elástico.

-Realizar programas que permitan el cálculo de propagación para modos de falla I y II.