



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Buscando pistas sobre la estructura
microscópica del espacio-tiempo”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

YURI BONDER GRIMBERG

DIRECTOR DE TESIS: DR. DANIEL E. SUDARSKY SAIONZ
MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS
MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En esta tesis se buscan pistas sobre una posible estructura del espacio-tiempo a escalas microscópicas. Se comienza argumentando que la relatividad general no puede ser una teoría fundamental de la naturaleza, lo que motiva la idea de que el espacio-tiempo a escalas microscópicas puede tener una estructura discreta. Se discute la evidencia que soporta el hecho de que dicha estructura debe respetar la invariancia de Lorentz y se presenta un modelo fenomenológico que permite buscar empíricamente sus efectos. La posibilidad de observar estos efectos es discutida y se describe un experimento con el que se ponen cotas sobre algunos de los parámetros libres del modelo. Más aún, se analiza la posibilidad de explorar con más detalle las consecuencias del modelo en otro experimento.

Motivado por las ideas descritas anteriormente se construye un modelo para explicar una discrepancia estadística en las mediciones de la velocidad de las moléculas de amoníaco en nubes interestelares. Una posible explicación de esta observación es que el cociente de masas electrón-protón dependa de la densidad del medio. Se propone entonces una interacción no-convencional entre la gravedad y la materia que genera una masa efectiva dependiente del entorno gravitacional. Sin embargo, los valores que deben tomar los parámetros del modelo para explicar las observaciones antes mencionadas entran en contradicción con experimentos, por lo que es posible descartar el modelo.

Otra conclusión que se obtiene del modelo fenomenológico para describir los efectos de la estructura microscópica de espacio-tiempo, es que las partículas en estados cuánticos (*i.e.*, cuya descripción no tiene un análogo clásico) podrían no satisfacer el principio de equivalencia. Por ello se intenta buscar violaciones empíricas de dicho

principio por partículas inestables. Con este objetivo en mente se formula un esquema que permite parametrizar violaciones al principio de equivalencia por partículas inestables, para lo que se parte de dos hechos: que las partículas inestables se describen por una masa compleja y que la mecánica cuántica no-relativista incorpora el principio de equivalencia (en el sentido que se obtienen los mismos resultados si se estudia una partícula bajo la acción de un potencial gravitacional Newtoniano en un sistema de referencia inercial, o si se considera libre pero en un sistema acelerado). Mezclando estos resultados se llega a la ecuación que satisface una partícula inestable si cumple con el principio de equivalencia, misma que se modifica para parametrizar violaciones a dicho principio. Además, se analiza la posibilidad de buscar este efecto en un experimento particular.

También se estudia la forma como se puede explorar el espacio-tiempo con partículas reales, mismas que son descritas por medio de la mecánica cuántica. La motivación es que, de acuerdo con la relatividad general, la geometría del espacio-tiempo se mide al identificar las trayectorias de partículas puntuales y libres con geodésicas. Debido a que las partículas, de acuerdo con la mecánica cuántica, no siguen trayectorias, surge la pregunta de cómo es posible medir la geometría del espacio-tiempo. En concreto, se plantea la posibilidad de asignar a una partícula cuántica una línea de mundo que la represente. Este problema es complicado por lo que se propone, como un primer paso, modelar a las partículas cuánticas por objetos clásicos y extendidos, mismos que pueden ser representados por su centro de masa. Se presenta una definición covariante del centro de masa en espacio-tiempos curvos y se discuten algunas de sus propiedades, entre las que destaca el hecho de que, aún si el objeto extendido es libre, la curva trazada por el centro de masa no es una geodésica. Por tal motivo, si se representa a un objeto extendido por su centro de masa y su trayectoria se identifica con una geodésica, no se estaría midiendo la geometría “real” del espacio-tiempo, sino una geometría efectiva que depende de las características del objeto usado. Se plantea un formalismo para extraer dicha geometría efectiva y se argumenta que no es posible medir consistentemente la geometría efectiva. Estos resultados conllevan a cuestionar el rol que puede tener la geometría cuando el espacio-tiempo debe ser explorado por partículas cuánticas.

Abstract

In this work we search for clues of a hypothetical microscopic structure of space-time. We begin by arguing that general relativity cannot be a fundamental theory of Nature, motivating the idea that spacetime at microscopic scales could have a discrete structure. We present some evidence supporting the fact that this microscopic structure must respect Lorentz invariance, and we build a phenomenological model that allows to empirically search for its consequences. We also discuss the possibility of observing the effects predicted by the model and we describe an experiment used to put bounds on some of its free parameters. Moreover, we analyze an other type of experiments in order to look for the consequences predicted by the model.

Inspired by this model we construct a scheme that could explain a statistical discrepancy on the measured velocity of ammonia molecules in interstellar clouds. A possible explanation for this observation is that electron to proton mass ratio depends on the medium density. Thus, we present a non-conventional interaction between gravity and matter that generates an effective mass depending on the gravitational environment. However, the values that the parameters of the model need to take in order to explain the observations are contradicted by experiments, discarding the model.

An other conclusion obtained from the phenomenological model built in order to look for effects of the discrete structure of spacetime on matter, is that particles in quantum states (*i.e.*, having no classical analog) could violate the equivalence principle. Therefore, we study the possibility that unstable particles violate this principle, starting by noticing two facts: unstable particles are described by a complex mass and non-relativistic quantum mechanics incorporates the equivalence principle (in

the sense that the same results are obtained if a particle is studied under the effects of a Newtonian gravitational potential in an inertial reference frame, or if it is considered free but in an accelerated frame). Combining these results it is possible to obtain the equation that describes an unstable particle if the equivalence principle is satisfied, and this equation is modified in order to parametrize violations to this principle. Furthermore, we suggest to look for these violations in a particular experimental setup.

In addition, we study the way spacetime can be explored with real particles, which are described by quantum mechanics. According to general relativity, spacetime geometry is obtained by identifying the trajectories of free point-like particles with geodesics. Given that, according to quantum mechanics, particles do not follow trajectories, how can spacetime geometry be measured? In order to attack this question we study if it is possible to assign a world-line to a quantum particle covariantly. This problem is complicated and we propose, as a first step, to model quantum particles by extended classical objects which are represented by its center of mass. We present a covariant definition of the center of mass in curved spacetime and we discuss some of its properties, including the fact that the center of mass of a free extended object does not follow a geodesic. Therefore, if an extended object is represented by its center of mass and its trajectory is identified with a geodesic, one would not measure the “real” spacetime geometry but an effective geometry that depends on the properties of the extended object. We outline a procedure built to extract this effective geometry and we argue that it is impossible to measure the effective geometry consistently. These results allow us to question the role of the geometric language when dealing with spacetime in the regime where it must be explored with quantum particles.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a las personas que estuvieron conmigo durante mi doctorado. En particular a Daniel quien me enseñó –además de muchas cosas de física– que la perseverancia, el entusiasmo, la amistad, el humor y la ética son fundamentales en la ciencia... y en la vida. Y además que “*piano piano se va lontano*”. A Chrysso-malis de quien aprendí que después de cualquier buen comentario puede haber una pregunta todavía mejor. A Alberto Güijosa por los buenos consejos y la motivación. A los demás sinodales, Hugo, Alejandro, Jerónimo y Pablo; sus comentarios, críticas y sugerencias me ayudaron a presentar un mejor trabajo. A todos mis profesores y a mis compañeros que hicieron que estos años sean muy amenos.

Agradezco al CONACyT por la beca doctoral con la que conté y a la UNAM por todas las oportunidades que me ha dado, en particular, al programa PAEP por el apoyo económico para participar en tantos eventos académicos. Al programa PAPIIT-UNAM IN119808-3 por la beca que tuve estos últimos meses. Y a la gente del posgrado en física de la UNAM, en especial a Yanalté.

Gracias a mis familiares y amigos, sobre todo a Pola, a mis papás y a mis hermanos por su apoyo y cariño durante todo este tiempo... y más.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación general y el punto de partida	1
1.2. Justificación para asumir la invariancia de Lorentz	8
1.2.1. Observaciones directas	8
1.2.2. Evidencia indirecta	10
2. Nueva fenomenología de gravedad cuántica	13
2.1. Fenomenología de gravedad cuántica invariante de Lorentz	14
2.1.1. El efecto dominante y el Hamiltoniano efectivo	21
2.1.2. Contacto con experimentos	28
2.2. Otros modelos fenomenológicos	35
2.2.1. La gravedad como explicación de una posible variación en el cociente de masas electrón-protón	35
2.2.2. Principio de equivalencia y partículas inestables	38
3. Explorando el espacio-tiempo con objetos reales	43
3.1. Motivación	43
3.2. El centro de masa relativista	45
3.2.1. Relatividad especial	45
3.2.2. Relatividad general	51
3.2.3. El centro de masa en términos de variables iniciales y sus pri- meras correcciones generadas por la curvatura	60
3.3. Geometría efectiva extraída con objetos extendidos	68
3.4. Un ejemplo	72

3.5. ¿Qué sigue?	76
4. Conclusiones	79
Apéndices	83
A. Notación y convenciones	83
B. Coordenadas asociadas con curvas	85
C. El principio de equivalencia y partículas inestables en un experimento COW	93
D. Paréntesis de Poisson entre posiciones y momentos iniciales	102
E. Operador de posición en mecánica cuántica relativista	107
Bibliografía	112

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación general y el punto de partida

La relatividad general, que es la teoría aceptada de la gravitación, modificó sustancialmente las nociones de espacio y tiempo al entenderlos como un ente unificado, el espacio-tiempo, que además es dinámico. Dicha teoría supone que el espacio-tiempo es una variedad diferencial métrica cuya geometría debe ser compatible con la materia de acuerdo con las ecuaciones de Einstein. El hecho de que la materia, que es la fuente del campo gravitacional, satisface los principios de la mecánica cuántica y algunos resultados encontrados en el marco de la relatividad general sugieren que la manera como se entiende el espacio-tiempo debe ser modificada para tener una descripción consistente de la naturaleza. Los principales argumentos en esta dirección son:

1. Cuando la materia se encuentra en super-posición de estados, es de esperarse que la gravedad responda “cuánticamente”. Se ha propuesto como solución tomar el valor de expectación del tensor de energía-momento de la materia con algún estado antes de igualarla a la geometría en las ecuaciones de Einstein. Esta propuesta, llamada gravedad semi-clásica [36], en ciertos casos es una buena aproximación pero no resuelve todos los problemas fundamentales ya que, por ejemplo, si se estudia una partícula en super-posición de estados de

posición, durante el proceso de colapso habría un cambio discontinuo y no-causal en la geometría.

2. Es bien sabido que si se toman las leyes de la termodinámica y se hacen las sustituciones

$$E \rightarrow M, \quad T \rightarrow \alpha\kappa, \quad S \rightarrow \frac{A}{8\pi G\alpha}, \quad (1.1)$$

donde E , T y S son, respectivamente, la energía, la temperatura y la entropía mientras que M , κ y A son la masa, la gravedad superficial y el área de un agujero negro estacionario, con G la constante de Newton (se utilizan unidades donde $c = \hbar = 1$) y α una constante aún indeterminada, se obtienen leyes que rigen a dichos agujeros negros [6]. Se sabe que E y M representan la misma cantidad física pero se pensaba que ahí terminaba la analogía porque se creía que los agujeros negros no tienen temperatura. Sin embargo, cuando se toman en cuenta efectos cuánticos se puede calcular que la temperatura de un agujero negro es $\kappa/2\pi k_B$ [58], siendo k_B la constante de Boltzmann. De esta forma se encuentra que $\alpha = (2\pi k_B)^{-1}$. Esto a su vez implica que, para que esta analogía sea completa, la entropía del agujero negro debe ser $S = k_B A/4G$ sugiriendo que el espacio-tiempo tiene una descripción fundamental no-trivial tal que hay $\sim e^{A/4G}$ micro-estados compatibles con el agujero negro descrito arriba.

3. La relatividad general contiene soluciones con singularidades, como los agujeros negros y el *Big Bang* que se da al inicio del universo. Estas singularidades son genéricas e inevitables, como se demostró en los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose (ver [57]). Este resultado conlleva a suponer que la relatividad general puede ser una teoría no-fundamental y se suele considerar que el rango de validez de la relatividad general está delimitado por la longitud, el tiempo y la energía (masa) de Planck, mismas que se obtienen al combinar las constantes fundamentales de la relatividad general y la mecánica cuántica

de la siguiente manera:

$$l_{Pl} \equiv \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}, \quad (1.2)$$

$$t_{Pl} \equiv \frac{l_{Pl}}{c} \approx 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad (1.3)$$

$$M_{Pl} \equiv \frac{c^4 l_{Pl}}{G} \approx 1.3 \times 10^{19} \text{ GeV}. \quad (1.4)$$

4. Se conocen cuatro interacciones en la naturaleza: la gravedad, la electromagnética, la débil y la fuerte. De éstas, todas excepto la gravedad se describen consistentemente en el formalismo de la teoría cuántica de campos¹. La gravedad cuántica entonces podría ayudar a construir un formalismo en el que todas las interacciones están unificadas, y a su vez es de esperarse que así se entienda mejor nuestro universo. De hecho, vale la pena mencionar que no se sabe cómo construir de forma satisfactoria una teoría cuántica de la gravedad sobre un fondo fijo en la que se supone que todas las partículas se propagan en un espacio-tiempo no-dinámico² y donde la interacción gravitacional es mediada por partículas sin masa, de espín 2 y cuya dinámica está regida por las ecuaciones de Einstein, ya que se llega a una teoría no-renormalizable que, por ende, no puede ser fundamental.
5. Aún en las teorías cuánticas de campo que son renormalizables, no se sabe cómo definir rigurosamente la teoría completa, *i.e.*, incluyendo la parte no lineal en los campos. Es posible entonces que una estructura discreta del espacio-tiempo dé lugar a un corte no-trivial en el espacio de momentos que ayude a lidiar con estos problemas.

A las teorías que pretenden incluir consistentemente a la relatividad general y a la mecánica cuántica, y que además describirían la estructura del espacio-tiempo a

¹Este formalismo permite unificar las fuerzas electromagnética y débil en la llamada interacción electro-débil

²En este enfoque se está despreciando el hecho de que la gravedad, además de ser una interacción, determina la estructura causal del espacio-tiempo.

escalas microscópicas, se les conoce genéricamente como teorías de gravedad cuántica y entre ellas destacan la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de lazos. La teoría de cuerdas parte de la suposición de que todas las partículas son en realidad distintas manifestaciones del mismo objeto unidimensional (llamado cuerda) y que, dependiendo de la forma como este objeto “vibra”, se perciben partículas con distintas características como su sabor, su carga y su espín. Al cuantizar una acción para las cuerdas que generaliza aquella de una partícula puntual, relativista puntual y libre (*i.e.*, sujeta únicamente a efectos gravitacionales), se obtienen todas las partículas permitidas por la teoría. Sorprendentemente, entre estas partículas se encuentra una partícula no-masiva y de espín 2 que además, a bajas energías, satisface las ecuaciones de Einstein, por lo que se considera como la portadora de la interacción gravitacional. El problema con esta teoría es que requiere de la existencia de dimensiones espacio-temporales adicionales a las 4 observadas. Además, en su formulación perturbativa esta teoría requiere de un espacio-tiempo de fondo que es no-dinámico, por lo que sufre de los problemas mencionados anteriormente.

Otro candidato prometedor para ser una teoría de gravedad cuántica satisfactoria es la gravedad cuántica de lazos. En este enfoque se cuantiza la geometría del espacio-tiempo partiendo del formalismo Hamiltoniano de la relatividad general en unas variables en las que algunas de las constricciones, que son resultado de trabajar con dicha versión Hamiltoniana [57], se pueden solucionar. Los principales logros de este acercamiento es que se obtiene un método no-perturbativo e independiente de un espacio de fondo para cuantizar la geometría espacio-temporal y que permite calcular la entropía de los agujeros negros satisfactoriamente. Sin embargo, no se ha podido completar el análisis de todas las constricciones ni se sabe cómo recuperar en detalle el límite clásico. (Para ver más detalles sobre este formalismo se recomienda la referencia [49]).

Los enfoques mencionados, y otros que no se mencionan en esta tesis, han obtenido resultados importantes pero no resuelven todos los problemas conceptuales que surgen al buscar una teoría cuántica de la gravedad y, sobre todo, no predicen efectos nuevos que puedan ser buscados experimentalmente. De hecho, uno de los mayores problemas que surgen al tratar de construir una teoría de gravedad cuántica satis-

factoria es la falta de resultados experimentales. Por tal motivo, uno de los objetivos de esta tesis es proponer formas para buscar empíricamente rastros de una estructura del espacio-tiempo distinta a la predicha por la relatividad general. Además, se intenta estudiar la relatividad general en regímenes donde los efectos cuánticos de la materia no se pueden despreciar, que es un escenario que sería idealmente descrito por una teoría cuántica de la gravedad, para tratar de encontrar pistas de la teoría de gravedad cuántica que se encuentra “detrás” de la relatividad general.

Es importante mencionar que hasta hace poco se creía que únicamente era posible observar efectos debidos a la gravedad cuántica al alcanzar la escala de Planck [32], que está lejos del alcance de la tecnología actual. No obstante, recientemente se ha considerado la posibilidad de que los efectos de la gravedad cuántica puedan ser detectados a través de violaciones a simetrías consideradas fundamentales en la física actual, como CPT, que requiere que la física sea invariante ante la combinación de conjugación de carga (C), inversión temporal (T) y paridad (P), o la invariancia de Lorentz [15, 16, 17, 38], que asegura que localmente todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes y que es la que se considera en esta tesis.

La invariancia de Lorentz se puede “romper” si existen direcciones o sistemas de referencia privilegiados en el espacio-tiempo. Los intentos por buscar estos sistemas de referencia se han centrado en explorar relaciones de dispersión modificadas, que también son predichas por varios candidatos a ser la teoría de gravedad cuántica [41]. La idea básica es que si hay un sistema de referencia privilegiado asociado con el campo vectorial W^a , se podría³ modificar la relación de dispersión de la siguiente manera:

$$p_a p^a = -m^2 + \frac{\xi}{M_{Pl}} E^3(W) + \dots, \quad (1.5)$$

donde $E(W) = -g_{ab} p^a W^b$ es la energía asociada con W^a y ξ es un parámetro real (que puede ser distinto para cada partícula). En esta última expresión los puntos suspensivos representan potencias mayores de $E(W)$, que no se escriben porque van suprimidos por mayores potencias de masa (que suele tomarse como M_{Pl}). Algu-

³Las correcciones radiativas generan todos los términos renormalizables que son compatibles con las simetrías del sistema. Así, si existe W^a , las correcciones radiativas generarían los términos que se discuten.

nos métodos experimentales para buscar violaciones a la invariancia de Lorentz se describen en la sección 1.2.1.

Otra forma de generar violaciones a la invariancia de Lorentz es invocando una longitud mínima invariante ya que ésta entra en conflicto con las contracciones de Lorentz. En esta dirección se han propuesto modelos, conocidos como relatividad especial deformada (*Deformed Special Relativity*), en los que dicha longitud invariante se introduce al cambiar el álgebra de Poincaré por una no-lineal [3]. El problema con estos esquemas es que sufren de graves problemas de interpretación y, aún si se deja esto de lado, estos modelos pueden ser prácticamente descartados por experimentos [31, 52].

En este trabajo se considera que la invariancia de Lorentz no se rompe en la naturaleza, de hecho, explorar las razones de esta hipótesis constituye el resto de este capítulo. Asumir que se mantiene la invariancia de Lorentz implica que si el espacio-tiempo a escalas microscópicas tiene una estructura no-trivial que sea discreta (o “granular”), ésta no es como se suele imaginar porque una estructura discreta “intuitiva” tiene asociado un sistema de referencia privilegiado (por ejemplo, aquel donde los elementos discretos que conforman al espacio-tiempo toman su forma más simétrica) y, por ende, viola la invariancia de Lorentz. Vale la pena mencionar que una estructura granular no necesariamente implica la existencia de direcciones privilegiadas. Por ejemplo, en gravedad cuántica de lazos el área mínima es el eigen-valor más pequeño del operador cuántico de área, mismo que tiene un espectro discreto. El espectro de dicho operador no cambia bajo transformaciones de Lorentz, lo que se modifica es su distribución de probabilidades [50]. Cabe agregar que en otros candidatos a ser la teoría de gravedad cuántica, a pesar de haber un espacio-tiempo con una estructura granular, se mantiene la invariancia de Lorentz. En esta dirección destacan los conjuntos causales [23, 53] donde el espacio-tiempo se reemplaza por una colección de eventos puntuales con un orden causal y cuya distribución es azarosa, salvo por el hecho de que su densidad está relacionada con el 4-volumen.

Con estas ideas en mente, en el capítulo 2 se presenta un análisis de carácter fenomenológico sobre las posibles manifestaciones de una hipotética estructura granular del espacio-tiempo que respeta la invariancia de Lorentz. Estas consideraciones

llevan a proponer un modelo concreto y bien definido en el que dicha estructura granular, cuya forma no se especifica, podría generar efectos detectables. Además, se incluyen cotas experimentales sobre algunos parámetros libres del modelo y se detalla un experimento que se está realizando donde el efecto podría observarse.

Ahora bien, el principio de equivalencia es uno de los principios más fundamentales de la relatividad general y afirma que localmente los sistemas en caída libre pueden ser descritos en el marco de la relatividad especial. Este principio implica que la gravedad es de naturaleza puramente geométrica y está incorporado en la relatividad general en el hecho de que el espacio-tiempo es una variedad diferencial. Es interesante que de acuerdo con el modelo fenomenológico descrito arriba, el efecto de la gravedad sobre la materia no desaparece cuando ésta se encuentra en caída libre, en una violación al principio de equivalencia. Esto sugiere que al considerar propiedades cuánticas de la materia y/o del espacio-tiempo, el principio de equivalencia podría dejar de ser válido, por lo que probablemente no es uno de los principios sobre los que se construya la teoría de gravedad cuántica. Esta idea motiva un modelo, discutido en el mismo capítulo e inspirado en el programa fenomenológico antes mencionado, que podría explicar una discrepancia estadística en la velocidad de las moléculas de amoníaco en nubes interestelares mediante una interacción no-convencional de la materia con la curvatura del espacio-tiempo. En esta misma dirección se propone (sección 2.2.2) una manera de parametrizar violaciones al principio de equivalencia por partículas inestables, mismas que deben describirse por medio de la mecánica cuántica.

Por otra parte, el principio de equivalencia únicamente se cumple en un límite que no es accesible en la práctica ya que, de acuerdo con la mecánica cuántica, las partículas no pueden considerarse infinitamente localizadas (salvo en los instantes en los que se mide su posición). Otra consecuencia de esta teoría es que las partículas no siguen trayectorias. Esto sugiere la siguiente pregunta: si las partículas no siguen trayectorias, y dado que la geometría del espacio-tiempo se explora identificando las líneas de mundo de objetos libres, puntuales y de prueba con sus geodésicas, ¿cómo es posible estudiar, en principio, la geometría del espacio-tiempo? Nótese que esta pregunta es particularmente relevante si se tiene en mente que existe una escala en la

que la geometría del espacio-tiempo debe ser explorada con partículas “cuánticas”. Esto da pie al trabajo presentado en el capítulo 3 donde se estudia la manera como se explora la geometría espacio-temporal utilizando objetos reales. Por supuesto, en este momento el análisis no pretende considerar objetos verdaderamente realistas, lo que sería inviable por su complejidad. Por ello, el estudio se limita a objetos clásicos extendidos a los que se les asigna una línea de mundo que los representa, y se estudia qué geometría es consistente con dicha curva. El resultado es que, con este método, la geometría no puede ser medida con precisión arbitraria, lo que a su vez conlleva a consecuencias importantes sobre su rol en una teoría cuántica de la gravedad. Finalmente, en el capítulo 4 se dan las conclusiones generales de toda la tesis. Antes de continuar, se recomienda revisar el apéndice A donde se especifica la notación y las convenciones usadas a lo largo de este trabajo.

1.2. Justificación para asumir la invariancia de Lorentz

Los argumentos para tomar la invariancia de Lorentz como una hipótesis en este trabajo se pueden dividir en dos: directos e indirectos. Ambos son argumentos basados en resultados empíricos. Se comienza con la discusión de los argumentos directos.

1.2.1. Observaciones directas

Como se menciona en la sección 1.1, la manera más común para buscar los efectos de dichas violaciones es suponiendo la existencia de un sistema de referencia privilegiado que modifica la relación de dispersión usual por aquella dada en la ecuación (1.5). A primera vista parece difícil medir efectos suprimidos por la escala de Planck, no obstante, aún efectos tan pequeños pueden magnificarse cuando suceden, por ejemplo, durante un tiempo suficientemente largo. Además, existen experimentos y observaciones de alta precisión donde dichos efectos son, en principio, detectables.

Algunos métodos con los que se han buscado manifestaciones de violaciones a la invariancia de Lorentz se describen a continuación:

1. Si hay un sistema de referencia privilegiado en el universo, en una buena aproximación la Tierra se mueve respecto a éste con periodo de un año por lo que sus efectos estarían modulados con periodo anual. En esta dirección destacan los experimentos de tipo Hughes-Drever en los que se intenta medir una señal con periodo anual en las líneas espectrales de núcleos atómicos [55, 56]. Vale la pena decir que los resultados obtenidos por medio de este tipo de experimentos son utilizados en el capítulo 2 para poner cotas a los parámetros libres del modelo descrito en dicho capítulo.
2. En las referencias [29, 30] se reporta que se ha logrado construir un péndulo de torsión que contiene alrededor de 10^{23} electrones polarizados y cuyo momento magnético es despreciable (con lo que evitan confundir el efecto buscado con acoplamientos magnéticos). Así, si hubiera un campo privilegiado que se acopla con partículas polarizadas, se induciría una torca en la balanza de torsión, misma que se puede medir con mucha precisión. Este tipo de experimentos están siendo usados para buscar los efectos predichos por el modelo fenomenológico de gravedad cuántica presentado en el capítulo 2.
3. Algunos modelos de gravedad cuántica, como la gravedad cuántica de lazos, sugieren que la velocidad de la luz podría depender de su polarización o su energía (ver, por ejemplo, [24, 25, 2]). De ser así, en observaciones astrofísicas se podrían detectar trazas de gravedad cuántica al medir una diferencia en el tiempo de arribo de un haz electromagnético.
4. Se sabe que rayos cósmicos cargados no pueden provenir de distancias cosmológicas con una energía por encima de $\sim 7 \times 10^{19}$ eV, valor conocido como el umbral GZK (por Greisen [27], Zatsepin y Kuzmin [59]), ya que estas partículas pierden parte de su energía al interactuar con la radiación cósmica de fondo. Sin embargo, se han observado en la Tierra rayos cósmicos con energía mayor al umbral GZK y una posible explicación a este hecho es que existan violaciones

a la invariancia de Lorentz [4]. Sin embargo, recientemente se ha recolectado evidencia que sugiere que los rayos cósmicos con energías superiores al umbral GZK provienen de fuentes cercanas [1].

5. Una modificación a la relación de dispersión como la propuesta en la ecuación (1.5) modificaría la radiación Cherenkov y de sincrotrón que emiten las partículas cargadas. La idea es usar el hecho de que dichas emisiones electromagnéticas se observan en remanentes de supernovas para poner cotas a las violaciones de la invariancia de Lorentz [33, 34, 42].

Esta es una lista parcial del tipo de experimentos donde se han buscado violaciones a la invariancia de Lorentz. Es significativo que ninguno de los experimentos que se ha realizado ha detectado evidencia de dichas violaciones. Sin embargo, han logrado poner cotas sobre el ξ de la ecuación (1.5) que parametriza las violaciones a la invariancia de Lorentz. Actualmente las mejores cotas provienen de observaciones astrofísicas [42] y ha concluido que $|\xi| \leq 9 \times 10^{-10}$, lo que apunta a descartar violaciones a la invariancia de Lorentz. Para una revisión más profunda del tema se recomiendan las referencias [41, 43]. Quizá un argumento más contundente para descartar las violaciones a la invariancia de Lorentz proviene de observaciones indirectas, mismo que se describe a continuación.

1.2.2. Evidencia indirecta

En esta sección se presenta un argumento dado en las referencias [18, 19] donde analizan las consecuencias de las correcciones radiativas en una teoría cuántica de campos sobre un espacio-tiempo de fondo granular, y en el que dicha granularidad determina un sistema de referencia preferencial que tiene asociada una 4-velocidad W^a . En particular se estudia una teoría con un campo escalar ϕ y un campo de Dirac ψ interactuando mediante el término $g\phi\bar{\psi}\psi$, siendo g una constante de acoplamiento. Se parte de la suposición de que los modos del campo no pueden ser más pequeños que la longitud de la granularidad, en analogía al modelo fonónico de Debye. Esta condición se debe cumplir en todo sistema de referencia e impone un corte en los

momentos de los campos, denotado por Λ y que se piensa que podría ser del orden del inverso de la longitud de Planck. Dicho corte se implementa en el sistema asociado con W^a por medio de la siguiente sustitución en los propagadores de todos los campos

$$\frac{1}{p^a p_a - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{f[|\vec{p}(W)|/\Lambda(W)]}{p^a p_a - m^2 + \Delta(p, W) + i\epsilon}, \quad (1.6)$$

donde m y p^a son, respectivamente, la masa y el momento de la partícula asociada con el campo en cuestión, f es una función real tal que $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$ cuya tarea es implementar el corte mencionado y $\Delta(p, W)$ es una modificación en la relación de dispersión como la que aparece en la ecuación (1.5).

Con esta modificación en los propagadores la auto-energía del campo escalar a un lazo se escribe como

$$\Pi(p) = \chi p^a p^b W_a W_b + \Pi^{(LI)}(p) + \mathcal{O}(p^4/\Lambda^4), \quad (1.7)$$

donde $\Pi^{(LI)}(p)$ es la parte de dicha auto-energía que respeta la invariancia de Lorentz. El parámetro que caracteriza la violación de la invariancia de Lorentz puede entonces ser calculado y de acuerdo con la referencia [19] este es

$$\chi = \frac{g^2}{6\pi^2} \left[1 + 2 \int_0^\infty dx x (f'(x))^2 \right]. \quad (1.8)$$

Lo interesante es que esta cantidad no es del orden de la longitud de Planck, como era de esperarse, de hecho, es independiente del corte Λ y $\chi \geq g^2/6\pi^2$ ya que $\int_0^\infty dx x (f'(x))^2 \geq 0$. Dado que al tomar en cuenta correcciones radiativas la relación de dispersión toma la forma $m^2 + \eta_{ab} p^a p^b + \Pi(p) = 0$, el primer término de la auto-energía (1.7) se obtendría de una teoría tipo Yukawa en un espacio-tiempo usual pero en el que se reemplaza la métrica η_{ab} por $\eta_{ab} + \chi W_a W_b$. Esto a su vez se traduciría en una modificación efectiva de la velocidad máxima de cada partícula. La diferencia de las velocidades máximas de las distintas partículas, Δc , se ha medido y su valor, dividido por la velocidad de la luz, c , es menor que 10^{-20} [15, 17]. Por otra parte, de acuerdo al modelo presentado en esta sección y usando las constantes

de acoplamiento de los campo cuánticos fundamentales conocidos, se puede estimar que $\Delta c/c \gtrsim 10^{-3}$ (ver [18, 19]), lo que prácticamente descarta la posibilidad de que coexista la teoría cuántica de campos con una granularidad que determina un sistema de referencia privilegiado⁴.

Los argumentos dados en esta sección llevan a tomar como premisa para el resto de la tesis que si el espacio-tiempo tiene alguna estructura microscópica no-trivial, ésta respeta la invariancia de Lorentz. En el siguiente capítulo se estudia la posibilidad de que existan manifestaciones fenomenológicas causadas por una hipotética granularidad del espacio-tiempo que respete la invariancia de Lorentz.

⁴La única manera de evitar esta conclusión es si la violación a la invariancia de Lorentz se cancela con contra-términos de dimensión 4 que también violan la invariancia de Lorentz. Sin embargo, para lograr esto se requiere un ajuste fino que es inaceptable en una teoría fundamental.

Capítulo 2

Nueva fenomenología de gravedad cuántica

En el capítulo 1 se argumenta que el espacio-tiempo puede tener una estructura discreta a escalas microscópicas. Además, se motiva la hipótesis que, en caso de existir dicha estructura, ésta debe mantener la invariancia de Lorentz. En este capítulo se presenta un modelo sobre la forma en la que una estructura granular del espacio-tiempo que respeta la invariancia de Lorentz podría ser detectada empíricamente. En particular, se estudia cómo dicha estructura afectaría a los campos fermiónicos. Además, se usan experimentos ya realizados para poner cotas en algunos de los parámetros libres del modelo y se describe un experimento que se está llevando a cabo en el que se podría ver evidencia del efecto buscado o, en su defecto, poner mejores cotas en los parámetros libres del modelo. En la última sección de este capítulo se presentan dos modelos que involucran distintos aspectos de la relatividad general y la mecánica cuántica: el primero utiliza a la gravedad como una posible explicación de unas observaciones astrofísicas que se detallan más adelante y el segundo está construido para estudiar desviaciones del principio de equivalencia por partículas inestables.

2.1. ¿Cómo hacer fenomenología de gravedad cuántica sin violar la invariancia de Lorentz?

Hasta hace poco se creía que la gravedad cuántica estaba lejos del alcance experimental ya que habría que llegar a la escala de Planck para observar sus efectos [32]. Como se discute en la sección 1, recientemente se ha planteado que podrían observarse trazas de gravedad cuántica rastreando desviaciones de las simetrías consideradas fundamentales, como es la invariancia de Lorentz. En esta sección se estudia la siguiente pregunta: suponiendo que el espacio-tiempo tiene estructura microscópica no-trivial que respeta la invariancia de Lorentz pero cuya forma exacta es desconocida, ¿cómo se podrían manifestar sus efectos?

El modelo que se construye está basado en una analogía muy simple con sólidos cristalinos que fue inicialmente considerada en [21]. La idea básica es la siguiente: cuando la simetría macroscópica de un cristal coincide con la simetría de sus celdas cristalinas fundamentales, no es posible detectar desviaciones de la simetría macroscópica sobre la superficie del cristal. Por otra parte, si dichas simetrías no coinciden, se espera que hayan desviaciones de la simetría macroscópica en la superficie del cristal, por lo que al observar esta discrepancia se puede inferir que la simetría microscópica del cristal no es la misma que la macroscópica. Por ejemplo, en un sólido cuya forma macroscópica es esférica y que microscópicamente tiene una estructura cúbica, la incompatibilidad entre las simetrías macroscópica y microscópicas se manifiesta, por ejemplo, a través de una “rugosidad” en su superficie.

Esta idea se traduce al espacio-tiempo si se considera que su estructura granular juega el papel de la celda cristalina y la simetría microscópica, en el caso del espacio-tiempo, es la invariancia de Lorentz. Siguiendo la analogía, en una región plana del espacio-tiempo, que es invariante de Lorentz, se tiene la situación donde las simetrías macro y microscópica coinciden. Por ende, y de acuerdo a la analogía descrita anteriormente, la estructura microscópica espacio-temporal no debe manifestarse en regiones planas del espacio-tiempo a través de una discrepancia con la simetría macroscópicas. Por otra parte, dado que el tensor de curvatura de Riemann, R_{abcd} , determina direcciones privilegiadas en todo punto del espacio-tiempo, enton-

ces, en las regiones del espacio-tiempo donde $R_{abcd} \neq 0$ se viola la invariancia de Lorentz. Como además R_{abcd} mide la desviación de una región del espacio-tiempo respecto al espacio-tiempo plano y siguiendo la analogía descrita anteriormente, se propone que se podrían detectar manifestaciones de dicha estructura microscópica en las regiones del espacio-tiempo con curvatura. Esto sugiere, a su vez, que los efectos de esta presunta granularidad del espacio-tiempo sobre la materia podrían manifestarse, a nivel fenomenológico, por medio de acoples no-convencionales entre el tensor de Riemann y la materia¹. Se define el tensor y el escalar de Ricci asociados con una métrica g_{ab} por $R_{ab} \equiv R_{acb}{}^c$ y $R \equiv R_{ab}g^{ab}$, respectivamente, donde $R_{abc}{}^d$ es el tensor de Riemann ligado a g_{ab} . El hecho es que, por las ecuaciones de Einstein, la parte de R_{abcd} correspondiente a R_{ab} y R es determinada localmente por el tensor de energía-momento de los campos de materia, T_{ab} , que a su vez depende localmente de dichos campos. Por tal motivo, un acople de la materia con el tensor o el escalar de Ricci sería indistinguible de una auto-interacción, no siendo posible considerarla empíricamente como indicación de la presencia de una estructura granular del espacio-tiempo. Por eso, en este trabajo se consideran los acoples de la materia con la parte del tensor de Riemann que no depende localmente del T_{ab} , es decir, con el tensor de Weyl, que en 4 dimensiones espacio-temporales se define por

$$W_{abcd} \equiv R_{abcd} - g_{a[c}R_{d]b} + g_{b[c}R_{d]a} + \frac{1}{3}Rg_{a[c}g_{d]b}. \quad (2.1)$$

Es sencillo notar que W_{abcd} tiene las mismas simetrías que R_{abcd} y que su traza, sobre todo par de índices, se anula. Además, dicho tensor es invariante ante transformaciones conformes de la métrica [57], *i.e.*, se obtiene el mismo tensor si se reemplaza la métrica g_{ab} por $\Omega^2 g_{ab}$ para cualquier función real del espacio-tiempo Ω .

El objetivo entonces es buscar maneras no-triviales de acoplar tensores relacionados con el tensor de Weyl y campos fermiónicos de forma que la interacción esté mínimamente suprimida por una masa grande, que se toma como la masa de Planck M_{Pl} .

¹Otra posibilidad que no se explora en este trabajo y que fue propuesta por H.A. Morales-Técotl (en una comunicación privada) es estudiar acoplamiento de la materia con la torsión. Por otra parte, es importante recalcar que el modelo fenomenológico que se construye no requiere de detalles sobre la forma de la granularidad del espacio-tiempo.

Los términos del Lagrangiano de dimensión de masa $n \geq 5$ son suprimidos por M_{Pl}^{4-n} , por lo tanto, los acoplos mínimamente suprimidos por una potencia entera de M_{Pl} son de dimensión 5. Primero se discute esta posibilidad aunque más adelante se llega a una propuesta en la que se usan potencias no-enteras de M_{Pl} .

Si se observa que el tensor de Weyl y los campos fermiónicos tienen dimensión 2 y 3/2, respectivamente, es posible notar que el término de acoplamiento $W_{abcd}\bar{\psi}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\psi$, donde ψ es el campo fermiónico en consideración y γ^a son las matrices de Dirac, es 5-dimensional. Teniendo en cuenta que cada derivada tiene dimensión 1 y que la traza del tensor de Weyl es cero, es fácil notar que el acople propuesto es el único que se puede formar entre el tensor de Weyl y campos fermiónicos que tiene dimensión 5. Sin embargo, por las simetrías del tensor de Weyl $W_{abcd}\bar{\psi}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\psi \propto W_{abcd}\epsilon^{abcd} = 0$ ya que el tensor de Riemann no tiene parte completamente anti-simétrica, y por lo tanto, tampoco la tiene el tensor de Weyl. Por tal motivo hay que buscar otras alternativas para acoplar al tensor de Weyl con los campos fermiónicos.

Una posibilidad es examinar algunos objetos relacionados con el tensor de Weyl pero con una estructura de índices diferente. Esto puede lograrse considerando al tensor de Weyl tipo (2, 2), $W_{ab}{}^{cd} = W_{[ab]}{}^{[cd]}$, como un mapeo $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es el espacio 6-dimensional de 2-formas. Además, la métrica del espacio-tiempo dota a \mathcal{S} con una métrica pseudo-Riemanniana $\mathcal{G}_{abcd} = g_{a[c}g_{d]b}$, donde g_{ab} es la métrica espacio-temporal.

Originalmente se propuso [21] usar los eigen-valores y eigen-formas del mapeo antes mencionado para formar los términos de acoplamiento deseados, sin embargo, es fácil ver que este mapeo no es hermitiano respecto a la métrica \mathcal{G}_{abcd} , lo que implica que sus eigen-valores no son reales. Esto a su vez tiene como consecuencia que el término de interacción propuesto en la referencia [21] tampoco sea hermitiano. La solución propuesta [7] es construir, con el tensor de Weyl y su adjunto respecto a \mathcal{G}_{abcd} , $W_{ab}^{\dagger cd}$, dos mapeos hermitianos de \mathcal{S} en \mathcal{S} :

$$(W_+)_{ab}{}^{cd} \equiv \frac{1}{2} \left(W_{ab}{}^{cd} + W_{ab}^{\dagger cd} \right), \quad (W_-)_{ab}{}^{cd} \equiv \frac{i}{2} \left(W_{ab}{}^{cd} - W_{ab}^{\dagger cd} \right), \quad (2.2)$$

Estos mapeos se pueden diagonalizar y sus eigen-valores $\lambda^{(\pm,s)}$ y eigen-formas $\Theta_{ab}^{(\pm,s)}$ pueden ser utilizados para la construcción de los términos de acople buscados. Los superíndices en los eigen-valores y eigen-formas indican con un signo + o - si corresponden al mapeo $(W_+)_{ab}{}^{cd}$ o $(W_-)_{ab}{}^{cd}$, respectivamente, y la etiqueta $s = 1, \dots, 6$ señala cuál de los eigen-valores y eigen-formas es. Se usa la inversa de \mathcal{G}_{abcd} , denotada por \mathcal{G}^{abcd} , para normalizar las eigen-formas no-nulas mediante

$$\mathcal{G}^{abcd}\Theta_{ab}^{(\pm,s)}\Theta_{cd}^{(\pm,s)} = \pm 1. \quad (2.3)$$

Sea $\epsilon_{ab}{}^{ef} = g^{ce}g^{df}\epsilon_{abcd}$, donde ϵ_{abcd} es el elemento de volumen espacio-temporal y $(\epsilon^{-1})_{ab}{}^{cd}$ tal que $\epsilon_{ab}{}^{cd}(\epsilon^{-1})_{cd}{}^{ef} = \delta_a^{[e}\delta_b^{f]}$, por las simetrías del tensor de Weyl se puede demostrar que

$$\epsilon_{ab}{}^{cd}W_{cd}{}^{ef}(\epsilon^{-1})_{ef}{}^{gh} = W_{ab}{}^{gh}, \quad \epsilon_{ab}{}^{cd}W_{cd}{}^{\dagger ef}(\epsilon^{-1})_{ef}{}^{gh} = W_{ab}{}^{\dagger gh}, \quad (2.4)$$

lo que implica

$$\epsilon_{ab}{}^{cd}(W_{\pm})_{cd}{}^{ef}(\epsilon^{-1})_{ef}{}^{gh} = (W_{\pm})_{ab}{}^{gh}. \quad (2.5)$$

Esto se traduce a su vez en el hecho de que si $\Theta_{ab}^{(\pm,s)}$ es una eigen-forma de $(W_{\pm})_{ab}{}^{cd}$ con norma negativa (positiva), entonces $\tilde{\Theta}_{ab}^{(\pm,s)} \equiv \epsilon_{ab}{}^{cd}\Theta_{cd}^{(\pm,s)}$ es también una eigen-forma de $(W_{\pm})_{ab}{}^{cd}$ con el mismo eigen-valor pero cuya norma es positiva (negativa). Así se demuestra que los mapeos $(W_{\pm})_{ab}{}^{cd}$ son siempre degenerados. Esto es un problema porque cualquier combinación lineal de eigen-formas degeneradas es una eigen-forma con el mismo eigen-valor y *a priori* no se sabe cual de estas combinaciones lineales hay que considerar en el modelo. Por tal motivo es necesario encontrar una receta canónica que discrimine entre estas combinaciones lineales. Para eso se usa la forma de volumen espacio-temporal y se toman las tres² eigen-formas con norma negativa que satisfacen

$$\epsilon^{abcd}\Theta_{ab}^{(\pm,l)}\Theta_{cd}^{(\pm,l)} = 0. \quad (2.6)$$

²Se está asumiendo que no hay eigen-formas nulas, en caso de haberlas no se toman en cuenta en el modelo debido a que no hay forma de fijar las ambigüedades asociadas con ellas. Además, se trabaja bajo la hipótesis de que no hay degeneraciones adicionales, lo que equivale a limitar este estudio a espacio-tiempos tipo I de acuerdo con la clasificación de Petrov [28].

Las tres eigen-formas $\Theta_{ab}^{(\pm,l)}$ que satisfacen las ecuaciones (2.3) y (2.6) y que tienen norma negativa se denotan por $\Xi_{ab}^{(\pm,l)}$. Para evitar ambigüedades al construir los objetos usados en el modelo, se propone encontrar primero las tres eigen-formas de norma negativa y las tres eigen-formas que satisfacen las mismas condiciones pero con norma positiva, que son las que entran en el modelo, se definen por $\tilde{\Xi}_{ab}^{(\pm,l)} \equiv \epsilon_{ab}{}^{cd}\Xi_{cd}^{(\pm,l)}$.

Los eigen-valores del tensor de Weyl tienen la misma dimensión que el tensor de Weyl mientras que sus eigen-formas se toman como adimensionales, por lo que la forma más natural de escribir la parte dominante del acoplamiento de Weyl y los campos fermiónicos en cuestión, teniendo en cuenta la inevitable degeneración mencionada anteriormente, es

$$\mathcal{L} = \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=\pm} \left[\xi^{(\alpha,l)} |\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2} \left(\frac{|\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{r^{(\alpha,l)}} \Xi_{ab}^{(\alpha,l)} + \tilde{\xi}^{(\alpha,l)} |\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2} \left(\frac{|\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\tilde{r}^{(\alpha,l)}} \tilde{\Xi}_{ab}^{(\alpha,l)} \right] \bar{\psi} \gamma^a \gamma^b \psi, \quad (2.7)$$

donde $\xi^{(\pm,l)}$ y $\tilde{\xi}^{(\pm,l)}$ son constantes de acoplamiento y $r^{(\pm,l)}$ y $\tilde{r}^{(\pm,l)}$ son otros parámetros libres del modelo. De hecho, $r^{(\pm,l)}$ y $\tilde{r}^{(\pm,l)}$ en principio pueden ser un número real cualquiera, *i.e.*, no son necesariamente enteros, por lo que los términos propuestos no necesariamente están suprimidos por una potencia entera de M_{Pl} , como se menciona anteriormente. Más aún, dichos parámetros deben ser mayores-iguales a -1 para que el término de acoplamiento desaparezca de manera continua en el límite de espacio-tiempo plano en el que $\lambda^{(\pm,l)} = 0$, como lo sugiere la analogía con la que se motiva el modelo.

La idea, en este punto, es lidiar con una ambigüedad restante en el término de acoplamiento construido. El problema es que tanto las eigen-formas $\Xi_{ab}^{(\pm,l)}$ como $-\Xi_{ab}^{(\pm,l)}$ satisfacen todas las condiciones que las definen³, por lo que no es claro cuáles de ellas deben aparecer en la densidad Lagrangiana (2.7). La observación clave es

³Esta ambigüedad fue notada por E.G. Adelberger (comunicación privada) y se propuso inicialmente que las constantes de acoplamiento presentes en la ecuación (2.7) podrían absorber el signo en cuestión.

que para dos 2-formas X_{ab} y Y_{ab} las combinaciones $\mathcal{G}(X, Y)X_{ab}Y_{cd}$ y $\epsilon(X, Y)X_{ab}Y_{cd}$ son independientes del signo de las 2-formas. Estos términos pueden combinarse con $\psi\gamma_a\gamma_b\psi$ para formar un término de acoplamiento de la forma

$$[\mathcal{G}(X, Y) + \chi\epsilon(X, Y)]g^{cd}X_{c[a}Y_{b]d}\bar{\psi}\gamma^{[a}\gamma^{b]}\psi, \quad (2.8)$$

siendo χ una constante indeterminada. De esta manera se tiene un mecanismo sencillo en el que las eigen-formas de $(W_{\pm})_{ab}{}^{cd}$ pueden combinarse para formar términos de acoplamiento libres de ambigüedades.

El término de acoplamiento más general y que no tiene ambigüedades es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi g^{\rho\sigma} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \sum_{l,m=1}^3 \\ & \left[\left(M^{(\alpha,\beta,l,m)} \mathcal{G}(\Xi^{(\alpha,l)}, \Xi^{(\beta,m)}) + N^{(\alpha,\beta,l,m)} \epsilon(\Xi^{(\alpha,l)}, \Xi^{(\beta,m)}) \right) \Xi_{\rho[\mu}^{(\alpha,l)} \Xi_{\nu]\sigma}^{(\beta,m)} \right. \\ & \left. + \left(\widetilde{M}^{(\alpha,\beta,l,m)} \mathcal{G}(\Xi^{(\alpha,l)}, \widetilde{\Xi}^{(\beta,m)}) + \widetilde{N}^{(\alpha,\beta,l,m)} \epsilon(\Xi^{(\alpha,l)}, \widetilde{\Xi}^{(\beta,m)}) \right) \Xi_{\rho[\mu}^{(\alpha,l)} \widetilde{\Xi}_{\nu]\sigma}^{(\beta,m)} \right], \quad (2.9) \end{aligned}$$

donde $M^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $N^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $\widetilde{M}^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $\widetilde{N}^{(\alpha,\beta,l,m)}$ son coeficientes formados a partir de los eigen-valores $\lambda^{(\pm,l)}$ con unidades de masa. En particular se propone que

$$M^{(\alpha,\beta,l,m)} = \xi^{(\alpha,\beta,l,m)} |\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/4} |\lambda^{(\beta,m)}|^{1/4} \left(\frac{|\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(\alpha,l)}} \left(\frac{|\lambda^{(\beta,m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(\beta,m)}}, \quad (2.10)$$

$$N^{(\alpha,\beta,l,m)} = \chi^{(\alpha,\beta,l,m)} |\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/4} |\lambda^{(\beta,m)}|^{1/4} \left(\frac{|\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{d^{(\alpha,l)}} \left(\frac{|\lambda^{(\beta,m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{d^{(\beta,m)}}, \quad (2.11)$$

$$\widetilde{M}^{(\alpha,\beta,l,m)} = \widetilde{\xi}^{(\alpha,\beta,l,m)} |\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/4} |\lambda^{(\beta,m)}|^{1/4} \left(\frac{|\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\widetilde{c}^{(\alpha,l)}} \left(\frac{|\lambda^{(\beta,m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\widetilde{c}^{(\beta,m)}}, \quad (2.12)$$

$$\widetilde{N}^{(\alpha,\beta,l,m)} = \widetilde{\chi}^{(\alpha,\beta,l,m)} |\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/4} |\lambda^{(\beta,m)}|^{1/4} \left(\frac{|\lambda^{(\alpha,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\widetilde{d}^{(\alpha,l)}} \left(\frac{|\lambda^{(\beta,m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\widetilde{d}^{(\beta,m)}}, \quad (2.13)$$

siendo $\xi^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $\tilde{\xi}^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $\chi^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $\tilde{\chi}^{(\alpha,\beta,l,m)}$, $c^{(\alpha,l)}$, $\tilde{c}^{(\alpha,l)}$, $d^{(\alpha,l)}$ y $\tilde{d}^{(\alpha,l)}$ los parámetros libres (adimensionales) del modelo, mismos que están sujetos a las restricciones

$$c^{(\alpha,l)}, \tilde{c}^{(\alpha,l)}, d^{(\alpha,l)}, \tilde{d}^{(\alpha,l)} \geq -1/2, \quad (2.14)$$

para asegurar que no hay divergencias si algún eigen-valor es cero (como sucede en un espacio-tiempo plano).

Es importante mencionar que los términos donde aparece la misma eigen-forma dos veces se anulan. Además, el hecho que $\epsilon_{abcd}\epsilon^{abef} = -4\delta_{[c}^e\delta_{d]}^f$ y $\epsilon_{abcd}\epsilon^{aefg} = -6\delta_{[b}^e\delta_c^f\delta_d^g$ implica las siguientes identidades:

$$X_{a[b}\tilde{Y}_{c]}^a = \tilde{X}_{a[b}Y_{c]}^a, \quad \tilde{X}_{a[b}\tilde{Y}_{c]}^a = -4X_{a[b}Y_{c]}^a, \quad (2.15)$$

donde la tilde representa la eigen-forma contraída con el elemento de volumen. Más aún, dos eigen-formas con $\alpha = \beta$ pero $l \neq m$ son \mathcal{G} -ortogonales dado que son eigen-formas de un operador \mathcal{G} -hermitiano. Por lo tanto, los términos que contienen $\mathcal{G}(\Xi^{(\alpha,l)}, \Xi^{(\alpha,m)})$ no aparecen en el término de acoplamiento. Por la misma razón y usando $\epsilon_{abef}\epsilon^{efcd} = -\mathcal{G}_{abcd}$ es fácil verificar que $\epsilon(\Xi^{(\alpha,l)}, \tilde{\Xi}^{(\alpha,m)}) = 0$ que también reduce los términos a considerar. Lo relevante es que estas identidades aseguran que el término (2.9) es el término más general que se puede construir. En la siguiente sección se muestra cómo obtener el Hamiltoniano efectivo para el régimen no-relativista (*i.e.*, de bajas energías), que es necesario para estudiar las implicaciones fenomenológicas del modelo.

Antes de continuar es importante discutir algunos aspectos contra-intuitivos del modelo. Por un lado, el término de acople al que se llega parece “poco natural”. Esto se piensa como una consecuencia de que dicho término se construye en el lenguaje de la relatividad general y se piensa que al tener una teoría de gravedad cuántica consistente, posiblemente se pueda escribir de forma sencilla. Por otro lado, en la construcción del modelo el elemento de volumen espacio-temporal aparece de forma rebuscada y como dicho objeto está relacionado con la paridad (P) y la inversión temporal (T), no debe ser sorprendente que se llegue a un comportamiento no-esperado

ante P y T. De hecho, vale la pena recordar que, a grandes rasgos, las interacciones conocidas respetan menos simetrías entre más débiles son, y la relatividad general rompe dramáticamente con esta tendencia. Por tal motivo es interesante que para construir este modelo fenomenológico de gravedad cuántica consistentemente es necesario introducir el elemento de volumen del espacio-tiempo. Más aún, el modelo incluye expresiones no analíticas (por la presencia de valores absolutos). Este hecho puede ser aceptado ya que se considera que el espacio-tiempo como una variedad diferencial es una descripción efectiva que emerge de una teoría más fundamental, y al estudiar fenómenos emergentes es común encontrar expresiones no-analíticas (ver, por ejemplo, la discusión sobre exponentes críticos presentada en la referencia [60]).

2.1.1. El efecto dominante y el Hamiltoniano efectivo

A pesar de que se espera que el efecto predicho por el modelo fenomenológico de gravedad cuántica sea mayor en regiones donde la curvatura del espacio-tiempo sea “grande”, por simplicidad y ya que se pretende comparar con experimentos hechos en la Tierra, se considera la aproximación de gravedad linealizada⁴ en la que las componentes de la métrica del espacio-tiempo se escriben como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo plano y $\gamma_{\mu\nu}$ es una perturbación pequeña⁵. Probablemente las coordenadas más adecuadas para esta sección son aquellas asociadas con la partícula sobre la que se hacen mediciones (discutidas en el apéndice B), sin embargo y cómo se argumenta al estudiar un caso concreto más adelante, está justificado utilizar coordenadas normales de Riemann, (t, \vec{x}) , asociadas con el punto y el instante de una medición. En estas coordenadas se tiene que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y se sigue la convención en la que los índices se “suben” con el inverso de la métrica

⁴Los neutrinos en supernovas podrían servir para buscar este efecto en regiones en las que las fuerzas de marea son grandes. Esta idea fue sugerida por D.V. Ahluwalia en comunicación privada.

⁵En el capítulo 3 se usa una métrica similar pero se introduce un parámetro de control ϵ multiplicando a la perturbación de la métrica de fondo y se desprecian los términos cuadrados en dicho parámetro. En este capítulo no hay complicaciones al trunca por lo que se omite dicho parámetro.

plana $\eta^{\mu\nu}$. Además, la norma se fija de la forma usual, es decir, imponiendo $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ donde $\bar{\gamma}_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}$ (ver [57]). Además, se usa la aproximación de partículas de prueba donde se desprecia la curvatura del espacio-tiempo generada por las partículas que se observan en el laboratorio y que son llamadas “pruebas”.

Dado que se considera el caso en el que no hay fuentes del campo gravitacional donde están las pruebas, el tensor de Weyl en ese punto coincide con el de Riemann, por lo que

$$W_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = -2\partial^{[\rho}\partial_{[\mu}\bar{\gamma}_{\nu]}^{\sigma]} + \delta_{[\mu}^{[\rho}\partial_{\nu]}\partial^{\sigma]}\bar{\gamma}, \quad (2.17)$$

donde $\bar{\gamma} \equiv \eta^{\mu\nu}\bar{\gamma}_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Einstein en el régimen linealizado son

$$\partial_\rho\partial^\rho\bar{\gamma}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento de las fuentes del campo gravitacional y se escribe explícitamente la constante gravitacional de Newton G . La solución a las ecuaciones anteriores se conoce del electromagnetismo, siendo

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 4G \int T_{\mu\nu}(x') \frac{\delta(t' - t_r)}{R} d^4x', \quad (2.19)$$

donde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ y $t_r = t - R/c$ es el llamado tiempo retardado. Obsérvese que se están escribiendo explícitamente los factores $1/c$ porque se desprecian los términos que van como c^{-2} .

A primer orden en $1/c$ las componentes de $T_{\mu\nu}$ en las coordenadas antes descritas son

$$T_{\mu\nu} = \delta_\mu^0\delta_\nu^0\rho + \frac{1}{c}(\delta_\mu^0\delta_\nu^k + \delta_\mu^k\delta_\nu^0)p_k, \quad (2.20)$$

donde ρ es la densidad de materia y p_k/c representa la k -ésima componente de la densidad de momento. Obsérvese que las ecuaciones de conservación en el régimen lineal, $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, implican

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{p}, \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.19) despreciando los términos $O(1/c^2)$ es posible observar que

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{\mu\nu} &= 4G \left(\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \int \frac{\rho(\vec{x}', t_r)}{R} d^3 x' + \frac{2}{c} \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^k \int \frac{p_k(\vec{x}', t_r)}{R} d^3 x' \right) \\
&= 4G \left[\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \left(\int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{R} d^3 x' - \frac{1}{c} \int \dot{\rho}(\vec{x}', t) d^3 x' \right) + \frac{2}{c} \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^k \int \frac{p_k(\vec{x}', t)}{R} d^3 x' \right] \\
&= 4G \left[\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{R} d^3 x' + \frac{2}{c} \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^k \int \frac{p_k(\vec{x}', t)}{R} d^3 x' \right], \tag{2.22}
\end{aligned}$$

donde en el segundo paso se hace una expansión de Taylor alrededor de t y en el último se usa la ecuación (2.21), el teorema de la divergencia y el hecho que se considera que las fuentes gravitacionales son compactas. Sean

$$\Phi_N = G \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{R} d^3 x', \quad \Pi^k = G \int \frac{p^k(\vec{x}', t)}{R} d^3 x', \tag{2.23}$$

donde Φ_N corresponde al potencial Newtoniano estándar. Con esto es posible escribir

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 4 \left[\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \Phi_N + \frac{2}{c} \delta_{(\mu}^0 \delta_{\nu)}^k \Pi_k \right], \tag{2.24}$$

y usando la ecuación (2.17) se obtiene

$$W_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = -4 \left(2\delta_{[\mu}^0 \eta^{0[\rho} + \delta_{[\mu}^{[\rho} \right) \partial_{\nu]} \partial^{\sigma]} \Phi_N - \frac{8}{c} \left(\delta_{[\mu}^0 \eta^{k[\rho} + \delta_{[\mu}^k \eta^{0[\rho} \right) \partial_{\nu]} \partial^{\sigma]} \Pi_k. \tag{2.25}$$

En este punto se introduce la notación de pares anti-simétricos de índices descrita en el apéndice A, mismos que son enumerados por números romanos y representados por letras latinas mayúsculas del principio del alfabeto. En esta notación un tensor de tipo (2, 2) que es anti-simétrico en sus dos pares de índices, $M_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$, se puede escribir como una matriz 6×6 de la forma

$$M_A{}^B \equiv \begin{pmatrix} M_I{}^I & M_{II}{}^{II} & \cdots & M_I{}^{VI} \\ M_{II}{}^I & M_{II}{}^{II} & \cdots & M_{II}{}^{VI} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{VI}{}^I & M_{VI}{}^{II} & \cdots & M_{VI}{}^{VI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

donde las letras mayúsculas y negritas representan matrices 3×3 . En particular y debido a sus simetrías, el tensor de Weyl se escribe de forma genérica [28] como

$$W_A{}^B = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices reales, simétricas y sin traza. De la parte superior-izquierda de la matriz en la ecuación (2.27) es posible leer

$$A_i{}^j = W_{0i}{}^{0j} = \partial_i \partial^j \Phi_N, \quad (2.28)$$

donde se omiten los términos $O(c^{-2})$. Claramente \mathbf{A} es simétrica y puede probarse que su traza es cero. De forma análoga y siendo ϵ_{ijk} el tensor totalmente anti-simétrico tal que $\epsilon_{123} = 1$, es posible mostrar que

$$\begin{aligned} B_i{}^j &= \frac{1}{4}(\epsilon^j{}_{mn} W_{0i}{}^{mn} - \epsilon_i{}^{mn} W_{mn}{}^{0j}) \\ &= \frac{1}{2c} \left[\epsilon^j{}_{mn} (\delta_i^{[m} \partial^{n]} \partial_t \Phi_N + 2\partial_i \partial^{[m} \Pi^{n]}) - \epsilon_i{}^{mn} (-\delta_{[m}^j \partial_{n]} \partial_t \Phi_N - 2\partial^j \partial_{[m} \Pi_{n]}) \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[\partial_i (\nabla \times \vec{\Pi})^j + \partial^j (\nabla \times \vec{\Pi})_i \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde la primera igualdad se puede verificar al comparar con la ecuación (2.27) y usando la propiedad de traza cero del tensor de Weyl, y en el segundo paso se usa

$$W_{0i}{}^{mn} = \frac{1}{c} \left(2\delta_i^{[m} \partial^{n]} \partial_t \Phi_N + 4\partial_i \partial^{[m} \Pi^{n]} \right), \quad (2.30)$$

$$W_{mn}{}^{0j} = \frac{1}{c} \left(-2\delta_{[m}^j \partial_{n]} \partial_t \Phi_N - 4\partial^j \partial_{[m} \Pi_{n]} \right), \quad (2.31)$$

que son casos particulares de la ecuación (2.25). La matriz \mathbf{B} también es simétrica y su traza es cero dado que es la divergencia de un rotacional. Más aún, por medio de

las ecuaciones (2.23-2.23) se pueden reexpresar \mathbf{A} y \mathbf{B} como

$$A_i^j = G \int \frac{3(x_i - x'_i)(x^j - x'^j) - R^2 \delta_i^j}{R^5} \rho(\vec{x}', t) d^3 x', \quad (2.32)$$

$$B_i^j = \frac{G}{c} \int \frac{(x_i - x'_i)L^j + (x^j - x'^j)L_i}{R^5} d^3 x', \quad (2.33)$$

donde $L_i = \epsilon_{ijk}(x^j - x'^j)p^k$.

En esta notación la métrica \mathcal{G}_{abcd} y el elemento de volumen se expresan localmente como

$$\mathcal{G}_{AB} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_A^B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son las matrices cero e identidad, respectivamente. Más aún, los operadores hermitianos toman localmente la forma

$$(W_+)_A^B = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (W_-)_A^B = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

por lo que para obtener sus eigen-valores y eigen-formas se deben primero diagonalizar \mathbf{A} y \mathbf{B} . Si se supone que se conocen $\vec{a}^{(l)}$, $\vec{b}^{(l)}$, $\alpha^{(l)}$ y $\beta^{(l)}$ tales que

$$A_i^j a_j^{(l)} = \alpha^{(l)} a_i^{(l)}, \quad B_i^j b_j^{(l)} = \beta^{(l)} b_i^{(l)}, \quad (2.36)$$

donde $l = 1, 2, 3$, entonces los eigen-valores de $(W_{\pm})_A^B$ son

$$\lambda^{(+,l)} = \alpha^{(l)}, \quad \lambda^{(-,l)} = \beta^{(l)}, \quad (2.37)$$

y las eigen-formas de norma negativa, que en la notación en uso se escriben como vectores columna de seis componentes, toman la forma

$$\Xi_A^{(+,l)} = \begin{pmatrix} \vec{a}^{(l)} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \Xi_A^{(-,l)} = \begin{pmatrix} \vec{b}^{(l)} \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Es importante recalcar que, dado que \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices reales y simétricas, sus eigen-valores y las componentes de sus eigen-vectores son reales. Además, dichos eigen-vectores forman triadas ortogonales por lo que, para que las eigen-formas dadas en las ecuaciones (2.38) satisfagan $\mathcal{G}(\Xi^{(\pm,l)}, \Xi^{(\pm,l)}) = -1$, únicamente deben normalizarse con el producto escalar usual del espacio euclidiano. Más aún, éstas eigen-formas satisfacen la condición (2.6) por lo que son las que entran en el modelo. Las eigen-formas de norma positiva se obtienen al contraer a las de norma negativa con el elemento de volumen, siendo:

$$\tilde{\Xi}_A^{(+,l)} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ -\vec{a}^{(l)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Xi}_A^{(-,l)} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ -\vec{b}^{(l)} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Para obtener el Hamiltoniano efectivo de bajas energías hay que notar que el término de acoplamiento entre los campos fermiónicos y la curvatura propuestos en el modelo que se está estudiando tiene la forma $-1/2h_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\psi$, misma que aparece en la Extensión al Modelo Estándar (SME) [17]. La diferencia con la SME es que en dicho modelo $h_{\mu\nu}$ se toma como un campo tensorial constante mientras que en este caso depende del entorno gravitacional. En el modelo en cuestión lo que entra en el lugar del $h_{\mu\nu}$ de la SME es

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} = & -2g^{\rho\sigma} \times \\ & \sum_{\alpha,\beta} \sum_{l,m=1}^3 \left[(M^{(\alpha,\beta,l,m)} \mathcal{G}(\Xi^{(\alpha,l)}, \Xi^{(\beta,m)}) + N^{(\alpha,\beta,l,m)} \epsilon(\Xi^{(\alpha,l)}, \Xi^{(\beta,m)})) \Xi_{\rho[\mu}^{(\alpha,l)} \Xi_{\nu]\sigma}^{(\beta,m)} \right. \\ & \left. + (\tilde{M}^{(\alpha,\beta,l,m)} \mathcal{G}(\Xi^{(\alpha,l)}, \tilde{\Xi}^{(\beta,m)}) + \tilde{N}^{(\alpha,\beta,l,m)} \epsilon(\Xi^{(\alpha,l)}, \tilde{\Xi}^{(\beta,m)})) \Xi_{\rho[\mu}^{(\alpha,l)} \tilde{\Xi}_{\nu]\sigma}^{(\beta,m)} \right]. \quad (2.40) \end{aligned}$$

En la aproximación que dicho $H_{\mu\nu}$ es constante dentro de la región donde está la prueba y durante la medición, es posible usar el resultado de la SME para el Hamiltoniano no-relativista [37], con lo que se llega a

$$\mathcal{H}_{NR} = \epsilon^{ijk} \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_i + \left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{P}}{M} \right) \frac{P_i}{M} \right) H_{jk} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{P^2}{M^2} \right) \frac{P_i}{M} \sigma_j H_{0k} \right], \quad (2.41)$$

donde \vec{P} y M son el momento y la masa de la prueba, respectivamente, y σ_i son las matrices de Pauli.

Partiendo de la ecuación (2.40) y usando $\Xi_{jk}^{(\pm,l)} = \tilde{\Xi}_{0i}^{(\pm,l)} = 0$ es posible observar que

$$H_{0i} = \sum_{l,m=1}^3 (\tilde{N}^{(+,-,l,m)} - \tilde{N}^{(-,+,m,l)}) \vec{a}^{(l)} \cdot \vec{b}^{(m)} (\vec{a}^{(l)} \times \vec{b}^{(m)})_i, \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_i{}^{jk} H_{jk} = \sum_{l,m=1}^3 (M^{(+,-,l,m)} - M^{(-,+,m,l)}) \vec{a}^{(l)} \cdot \vec{b}^{(m)} (\vec{a}^{(l)} \times \vec{b}^{(m)})_i, \quad (2.43)$$

que a su vez implica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{NR} = & \sum_{l,m=1}^3 \vec{a}^{(l)} \cdot \vec{b}^{(m)} (\vec{a}^{(l)} \times \vec{b}^{(m)})_k \\ & \left[\left(\sigma^k + \left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{P}}{M} \right) \frac{P^k}{M} \right) (M^{(+,-,l,m)} - M^{(-,+,m,l)}) \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{P^2}{M^2} \right) \frac{(\vec{P} \times \vec{\sigma})^k}{M} (\tilde{N}^{(+,-,l,m)} - \tilde{N}^{(-,+,m,l)}) \right], \quad (2.44) \end{aligned}$$

que es el Hamiltoniano que puede ser comparado con experimentos para probar el modelo que se estudia en este trabajo. Nótese que si la prueba está en reposo, el Hamiltoniano no-relativista toma la forma

$$\mathcal{H}_{NR} = \sum_{l,m=1}^3 (M^{(+,-,l,m)} - M^{(-,+,m,l)}) \vec{a}^{(l)} \cdot \vec{b}^{(m)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}^{(l)} \times \vec{b}^{(m)}). \quad (2.45)$$

Además, obsérvese que

$$M^{(+,-,l,m)} - M^{(-,+,m,l)} = \Delta\xi^{(l,m)} |\lambda^{(+,l)}|^{1/4} |\lambda^{(-,m)}|^{1/4} \left(\frac{|\lambda^{(+,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(+,l)}} \left(\frac{|\lambda^{(-,m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(-,m)}}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{N}^{(+,-,l,m)} - \tilde{N}^{(-,+,m,l)} = \Delta\tilde{\chi}^{(l,m)} |\lambda^{(+,l)}|^{1/4} |\lambda^{(-,m)}|^{1/4} \left(\frac{|\lambda^{(+,l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\tilde{d}^{(+,l)}} \left(\frac{|\lambda^{(-,m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{\tilde{d}^{(-,m)}}, \quad (2.47)$$

donde se definen $\Delta\xi^{(l,m)} \equiv \xi^{(+,-,l,m)} - \xi^{(-,+,m,l)}$ y $\Delta\tilde{\chi}^{(l,m)} \equiv \tilde{\chi}^{(+,-,l,m)} - \tilde{\chi}^{(-,+,m,l)}$.

Para terminar esta sección hay que notar que a pesar de que el modelo que se presenta es covariante, las expresiones para H_{0i} y H_{jk} no parecen estar relacionadas covariantemente. Esto se debe a que se desprecian los términos $O(c^{-2})$ y que las transformaciones que mezclan a H_{0i} y H_{jk} involucran un factor c^{-1} . Además, vale la pena recalcar que si se logra medir el efecto predicho en esta sección, cosa que por sí misma sería interesante, no se contaría con una prueba contundente de la presencia de una granularidad invariante de Lorentz sino de la existencia de la interacción propuesta entre la curvatura y la materia, cuya causa podría ser distinta a la considerada en esta tesis. A continuación se discute cómo es posible buscar los efectos del Hamiltoniano efectivo empíricamente.

2.1.2. Contacto con experimentos

La presencia de las matrices de Pauli en el Hamiltoniano no-relativista (2.45) indica que la materia no-polarizada no es sensible al efecto descrito arriba. Esto hace que la búsqueda de este efecto sea complicada porque la materia generalmente no está polarizada. Más aún, la materia polarizada tiene por lo general momento magnético, por lo que la interacción magnética podría opacar los efectos predichos por el modelo. En esta sección se muestra que a pesar de estas complicaciones es posible buscar dichos efectos y, de hecho, ya se han encontrado cotas para algunos parámetros del modelo.

Primeras cotas en los parámetros libres

En la referencia [10] se encuentran cotas sobre los H_{0i} de la SME en experimentos de tipo Hughes-Drever (discutidos en la sección 1.2.1), mismas que se resumen de forma simple por $H_{0i} \leq 10^{-27}$ GeV. Se podría pensar que estas cotas no son relevantes para el modelo ya que, en contraste con la SME, el $H_{\mu\nu}$ en este esquema está determinado por las fuentes gravitacionales alrededor del laboratorio, que no varían con un periodo anual. Sin embargo, las fuerzas de marea que ejerce el Sol sobre los objetos en la Tierra, y que en principio afectan a los $H_{\mu\nu}$ del modelo, varían precisamente con un periodo de un año gracias a que la órbita terrestre es elíptica. Por ello se calcularon [8] los H_{0i} causados por tales fuerzas de marea, al orden descrito en la sección anterior y a primer orden en la excentricidad de la órbita terrestre $\varepsilon \approx 0.0167$. Considerando las diferencias en H_{0i} durante el perihelio y el afelio y comparando con las cotas de [10] se obtiene que algunos de los parámetros libres del modelo deben cumplir

$$e^{-115\tilde{d}^{(+,l)} - 120\tilde{d}^{(-,m)}} |\Delta\tilde{\chi}^{(l,m)}| \leq 10^6, \quad (2.48)$$

donde en esta última expresión (l, m) solamente toman los valores $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$ y $(3, 3)$.

Estas son las primeras cotas que se han puesto sobre los parámetros libres del modelo y no son demasiado fuertes. Es posible que un experimento similar sea útil para poner mejores cotas si, por ejemplo, se usa un período asociado con las fuerzas de marea que ejerce la Luna en la Tierra, mismas que son mucho más grandes que las del efecto analizado. En la siguiente parte se analiza un experimento en el que tal vez se pueda ver el efecto predicho por el modelo o, en su defecto, sea útil para encontrar mejores cotas sobre los parámetros libres.

Búsqueda del efecto con un péndulo de espín

El propósito de esta sección es mostrar que es posible hacer otro tipo de experimentos para probar el modelo. La idea es usar el “péndulo de espín” desarrollado por

el grupo Eöt-Wash [29, 30] que tiene una polarización efectiva equivalente a $\sim 10^{23}$ electrones pero con un momento magnético despreciable. Esto se logra, a grandes rasgos, juntando dos materiales, un ferromagneto y un paramagneto, y ajustando la proporción de cada material hasta cancelar el momento magnético total, logrando que el dispositivo sea prácticamente insensible a campos magnéticos externos y, por tal motivo, que no se confunda el efecto buscado con una interacción magnética. Este péndulo de espín se puede poner en una balanza de torsión donde cualquier torca ejercida sobre ella puede ser medida con una precisión asombrosa. La idea concreta es producir un entorno gravitacional controlado usando como fuentes dos objetos densos que se disponen en el plano horizontal de forma simétrica respecto al péndulo de espín. Como el modelo involucra el “movimiento” de las fuentes gravitacionales por la presencia de su densidad de momento en la matriz \mathbf{B} , en una manifestación del efecto relativista conocido como “arrastre gravitacional” (*frame dragging*), entonces el momento angular de la Tierra es relevante en el cálculo en cuestión. De hecho, si se desprecia este efecto, la matriz \mathbf{B} sería nula, con lo que el Hamiltoniano no-relativista predicho por el modelo desaparece, como se ve en la ecuación (2.44). Además, se espera que al cambiar la orientación de las fuentes haya un cambio en la respuesta de la balanza de torsión. Los detalles de este cálculo se publicaron en [9] y se presentan a continuación.

El análisis se hace primero para un sólo electrón como prueba. Para ello se utilizan coordenadas normales de Riemann asociadas con la posición de dicha partícula y el instante en el que se hace la medición. De hecho, las coordenadas más naturales para este cálculo son aquellas asociadas con la línea de mundo de la prueba (construidas en el apéndice B). No obstante, como se está calculando la torca en la dirección vertical y dado que los dos sistemas de referencia en cuestión se relacionan por una aceleración en la misma dirección, la componente vertical de la torca calculada en estos dos sistemas de referencia instantáneamente coincide y, por ende, trabajar usando las coordenadas normales de Riemann descritas anteriormente está justificado. Además, se escogen de forma que las coordenadas espaciales x , y y z estén asociadas con una triada ortonormal tipo “mano derecha” donde las coordenadas x y y apuntan, respectivamente, hacia el oeste y el sur. De esta forma, en el origen, *i.e.*, donde está el

electrón y al instante de la medición, la métrica se escribe como $diag(-1, 1, 1, 1)$, lo que no implica que el tensor de Weyl, que está conformado por segundas derivadas de la métrica, se anule en dicho punto.

La matriz \mathbf{A} correspondiente a las fuentes puestas en el laboratorio (denotada con un subíndice L) se calcula utilizando la ecuación (2.28). Asumiendo que estas fuentes son puntuales, que tienen masa m y que están localizadas en $(\pm d \cos \theta, \pm d \sin \theta, z_0)$, donde $0 \leq \theta < \pi$ y $d > 0$, se encuentra

$$\mathbf{A}_L = \frac{Gmd^2}{(d^2 + z_0^2)^{5/2}} \times \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos(2\theta) - 2z_0^2/d^2 & 3 \sin(2\theta) & 0 \\ 3 \sin(2\theta) & 1 - 3 \cos(2\theta) - 2z_0^2/d^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 4z_0^2/d^2 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Además, dado que estas fuentes están en reposo se tiene que $\mathbf{B}_L = 0$.

Para calcular los efectos debidos a la Tierra, incluyendo a su rotación, en lugar de utilizar las ecuaciones (2.28) y (2.29), se usa una estrategia distinta. Partiendo de la métrica de Kerr se calcula el tensor de Weyl linealizado y luego se transforma al sistema de referencia asociado con el electrón. Con este procedimiento se encuentra que la contribución de la Tierra (señalada con el subíndice \oplus) es

$$\mathbf{A}_\oplus = \frac{GM}{R^3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{B}_\oplus = \frac{3JG}{R^4} \begin{pmatrix} \cos \theta_L & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_L & -\sin \theta_L \\ 0 & -\sin \theta_L & -2 \cos \theta_L \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

donde θ_L representa la colatitud del laboratorio, y R , M y J representan el radio, la masa y el momento angular de la Tierra, respectivamente.

Como se está trabajando en el régimen linealizado se tiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\oplus + \mathbf{A}_L, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\oplus. \quad (2.52)$$

Por ello, los eigen-valores de \mathbf{A} y \mathbf{B} son

$$\alpha^{(1)} = \frac{2GM}{R^3} - \frac{2Gm(d^2 - 2z_0^2)}{(d^2 + z_0^2)^{5/2}}, \quad \beta^{(1)} = \frac{3GJ}{R^4} \cos \theta_L, \quad (2.53)$$

$$\alpha^{(2)} = -\frac{GM}{R^3} - \frac{2Gm}{(d^2 + z_0^2)^{3/2}}, \quad \beta^{(2)} = \frac{3GJ}{2R^4} (-\cos \theta_L - \sqrt{5 \cos^2 \theta_L + 4}), \quad (2.54)$$

$$\alpha^{(3)} = -\frac{GM}{R^3} + \frac{2Gm(2d^2 - z_0^2)}{(d^2 + z_0^2)^{5/2}}, \quad \beta^{(3)} = \frac{3GJ}{2R^4} (-\cos \theta_L + \sqrt{5 \cos^2 \theta_L + 4}), \quad (2.55)$$

mientras que sus eigen-vectores ortonormales toman la forma:

$$\vec{a}^{(1)} = (0, 0, 1), \quad \vec{b}^{(1)} = (1, 0, 0), \quad (2.56)$$

$$\vec{a}^{(2)} = |\cos \theta|(-\tan \theta, 1, 0), \quad \vec{b}^{(2)} = (0, -3 \cos \theta_L + S, 2 \sin \theta_L)/N_+, \quad (2.57)$$

$$\vec{a}^{(3)} = |\sin \theta|(\cot \theta, 1, 0), \quad \vec{b}^{(3)} = (0, -3 \cos \theta_L - S, 2 \sin \theta_L)/N_-, \quad (2.58)$$

con

$$S \equiv \sqrt{5 \cos^2 \theta_L + 4}, \quad N_\pm \equiv \sqrt{10 \cos^2 \theta_L \mp 6S \cos \theta_L + 8}. \quad (2.59)$$

Nótese que se está suponiendo que $\sin \theta_L > 0$, por lo que las expresiones para $\vec{b}^{(2)}$ y $\vec{b}^{(3)}$ son válidas en toda la Tierra exceptuando los polos.

Suponiendo que la polarización efectiva del péndulo de espín corresponde a la de $N(\approx 10^{23})$ electrones apuntando en la dirección $\hat{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, el valor de expectación del Hamiltoniano no-relativista (2.45) es

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_{NR} \rangle = N \sum_{l,m=1}^3 & \left[\Delta \xi^{(l,m)} |\alpha^{(l)}|^{1/4} |\beta^{(m)}|^{1/4} \left(\frac{|\alpha^{(l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(+,l)}} \left(\frac{|\beta^{(m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(-,m)}} \right. \\ & \left. \vec{a}^{(l)} \cdot \vec{b}^{(m)} (\hat{n} \cdot \vec{a}^{(l)} \times \vec{b}^{(m)}) \right], \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde se usa que los estados de cada electrón son tales que $\langle \vec{\sigma} \rangle = \hat{n}$. La energía total

y la torca que siente la balanza de torsión deben cumplir

$$E = -N\hat{n} \cdot \vec{w}, \quad \vec{T} = N\hat{n} \times \vec{w}, \quad (2.61)$$

para algún 3-vector \vec{w} . Al comparar la expresión de E con la ecuación (2.60) se puede leer el valor de \vec{w} , mismo que se inserta en la expresión para \vec{T} . Los experimentales miden la componente z de la torca, que según procedimiento antes descrito satisface

$$T_z = \frac{N \sin \theta_L}{S} \sum_{l,m=1}^3 \Delta \xi^{(l,m)} |\alpha^{(l)}|^{1/4} |\beta^{(m)}|^{1/4} \left(\frac{|\alpha^{(l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(+,l)}} \left(\frac{|\beta^{(m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(-,m)}} (f_y^{(l,m)} \cos \varphi - f_x^{(l,m)} \sin \varphi), \quad (2.62)$$

donde $f_i^{(l,m)} \equiv S \vec{a}^{(l)} \cdot \vec{b}^{(m)} (\vec{a}^{(l)} \times \vec{b}^{(m)})_i / \sin \theta_L$. Los valores de $f_x^{(l,m)}$ y $f_y^{(l,m)}$ se presentan en la siguiente tabla:

l	m	$f_x^{(l,m)}$	$f_y^{(l,m)}$
1	1	0	0
1	2	-1	0
1	3	1	0
2	1	0	0
2	2	$\cos^2 \theta$	$\cos \theta \sin \theta$
2	3	$-\cos^2 \theta$	$-\cos \theta \sin \theta$
3	1	0	0
3	2	$\sin^2 \theta$	$-\cos \theta \sin \theta$
3	3	$-\sin^2 \theta$	$\cos \theta \sin \theta$

Denotando ΔT_z la precisión experimental para medir T_z y suponiendo que la señal con la que se ha conjeturado no se observa, el resultado del experimento será que el valor absoluto del lado derecho de la ecuación (2.62) es menor que ΔT_z . Si además se asume, como suele hacerse en este tipo de análisis, que no hay cancelaciones fortuitas

entre los términos de esta suma se concluye

$$|\Delta\xi^{(l,m)}| |\alpha^{(l)}|^{1/4} |\beta^{(m)}|^{1/4} \left(\frac{|\alpha^{(l)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(+,l)}} \left(\frac{|\beta^{(m)}|^{1/2}}{M_{Pl}} \right)^{c^{(-,m)}} < \frac{\Delta T_z}{N}, \quad (2.63)$$

donde se usa $\sin\theta_L/S \leq 1/2$, $|f_x^{(l,m)}| \leq 1$ y $|f_y^{(l,m)}| \leq 1$. Obsérvese que la relación (2.63) sólo tiene sentido para términos en los que $f_x^{(l,m)}$ y $f_y^{(l,m)}$ son distintos de cero.

De la ecuación (2.63) y gracias a que N es un número grande y que la precisión de los experimentos puede llegar a ser muy buena, queda claro que este experimento pondría cotas a los parámetros libres del modelo mucho más fuertes que las presentadas en la sección 2.1.2. Además, en todo este análisis no se usa el hecho que el experimento es sensible al ángulo θ y repitiendo el experimento para distintos valores de θ se pueden controlar mejor los errores experimentales. Nótese que el efecto de arrastre gravitacional de la Tierra es muy pequeño por lo que las cotas podrían mejorar de forma significativa si las fuentes gravitacionales puestas en el laboratorio se movieran respecto a la prueba, generando un mayor arrastre gravitacional. Más aún, se ha argumentado que este experimento es importante incluso si la señal no se observa, sin embargo, la precisión que se alcanzaría permite pensar que si este efecto es real, se podría medir en este tipo de experimentos. Al momento de la redacción de esta tesis, estos experimentos se estaban realizando por los autores de [29, 30].

Por último, resulta que el efecto predicho por el modelo es independiente de la dirección del momento angular de la Tierra ya que únicamente aparece su valor absoluto⁶, por lo que no hay un cambio de signo al cambiar la dirección del momento angular, como podría esperarse. Un ejemplo sencillo donde algo similar sucede es en un fluido formado por moléculas cilíndricas (sin orientación) en presencia de un vórtice. En este caso las moléculas se alinean a lo largo de la dirección del flujo (por la diferencia de las velocidades) y se espera que la disposición de las moléculas sea independiente de la dirección del momento angular del fluido, en analogía a lo que sucede en el modelo fenomenológico de gravedad cuántica descrito en este capítulo. Al estudiar el modelo descrito en esta sección se concluye que la gravedad podría

⁶Esta propiedad fue notada por E.G. Adelberger (comunicación privada).

afectar de forma no-convencional a la materia polarizada, que está en un estado netamente cuántico, *i.e.*, que no tiene análogo clásico. El resto de este capítulo se dedica a estudiar otros modelos en los que la gravedad interactúa con materia en estados cuánticos de forma inesperada.

2.2. Otros modelos fenomenológicos que combinan la gravedad y la mecánica cuántica

En esta sección se presentan dos modelos fenomenológicos que “mezclan” aspectos de la gravedad con efectos debidos a la mecánica cuántica. El primero de ellos, que en cierta medida es una generalización del modelo presentado anteriormente, pretende explicar unas observaciones astrofísicas por medio de un acoplamiento no-mínimo de los campos cuánticos de materia y el tensor de Weyl. Hay que mencionar que este modelo, a pesar de ser interesante porque no requiere la introducción de campos que no han sido observados, ha sido descartado por otros experimentos. El otro modelo es una forma de parametrizar posibles violaciones del principio de equivalencia por partículas inestables y se propone una forma de acotar experimentalmente al parámetro libre que implementa dicha parametrización.

2.2.1. La gravedad como explicación de una posible variación en el cociente de masas electrón-protón

En esta sección⁷ se presenta un modelo propuesto como una explicación alternativa de unas observaciones astrofísicas reportadas en la referencia [40]. La evidencia astrofísica en cuestión se obtuvo al observar nubes interestelares que se encuentran en la vía láctea. En particular, se midieron algunas líneas espectrales de la molécula del amoníaco con lo que se obtiene una discrepancia estadística en las velocidades radiales aparentes de dichas moléculas. Como los autores de la referencia [40] señalan,

⁷Esta parte del trabajo se realiza en colaboración con F.A. Teppa-Pannia, S.J. Landau y D. Sudarsky.

una explicación viable de estas observaciones es suponer que el cociente de masas electrón-protón, μ , depende de la densidad del medio. De hecho, μ debe satisfacer

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \equiv \frac{\mu_{NI} - \mu_{\oplus}}{\mu_{\oplus}} \sim 10^{-8}, \quad (2.64)$$

donde μ_{\oplus} y μ_{NI} corresponden, respectivamente, al μ en la Tierra y el observado en una nube interestelar.

El efecto descrito suele explicarse introduciendo un campo escalar, llamado “camaleón”, que al acoplarse con la materia de una forma particular dependiente de la densidad del ambiente, adquiere una masa y un potencial efectivo [45]. El problema con esta explicación es la falta de evidencia experimental de que dicho campo existe. Por ello, en este trabajo se construye un modelo alternativo basado en las ideas de que la curvatura, reflejando efectos ligados con una granularidad del espacio-tiempo, puede afectar el comportamiento de la materia de una manera exótica. A primera vista parece extraño que la gravedad, que suele despreciarse al calcular la masa de las partículas, provea la explicación al fenómeno en cuestión, sin embargo, hay que recordar que en esta tesis se considera que la relatividad general es una descripción efectiva de una teoría cuántica de la gravedad, en cuyo lenguaje este tipo de interacciones podrían expresarse de forma natural.

Más aún, se sabe que en las nubes intergalácticas la densidad de partículas es 19 órdenes de magnitud menor que en la Tierra [40], lo que refuerza la hipótesis de que el entorno gravitacional, que está íntimamente relacionado con la densidad de materia, podría afectar el valor de μ . El objetivo entonces es encontrar una forma de acoplar la gravedad y la materia que a nivel fenomenológico explique la dependencia de μ en la densidad. En particular se trabaja con campos fermiónicos ψ_i , donde i es una etiqueta para el sabor. Para poder explicar las observaciones en cuestión, se usa una función escalar, f , que depende del entorno gravitacional por medio del tensor

de Weyl⁸, misma que se introduce por medio del reemplazamiento

$$m_i \rightarrow m_i^{(ef)} = m_i(1 + \xi_i f(W)), \quad (2.65)$$

en los términos de masa y donde ξ_i son parámetros fenomenológicos que pueden ser distintos para cada sabor. Se propone, por simplicidad, tomar

$$f = W_{abcd}W^{abcd} \equiv W^2, \quad (2.66)$$

misma que tiene dimensiones (de masa) 4, por lo que ξ_i tiene dimensiones -4 . Nótese que como se intenta generar una modulación en la masa, que es escalar, no hay necesidad de introducir efectos “direccionales”, como los usados en la sección 2.1, que contienen eigen-formas de operadores relacionados con el tensor de Weyl. En el límite de bajas energías se puede considerar al protón como una partícula fundamental por lo que el cociente de la masa efectiva del electrón y el protón, que es lo que se mediría, es

$$\mu^{(ef)} = \frac{m_e^{(ef)}}{m_p^{(ef)}} = \frac{m_e(1 + \xi_e W^2)}{m_p(1 + \xi_p W^2)} \approx \frac{m_e}{m_p} (1 + \Delta\xi W^2), \quad (2.67)$$

donde se usa el hecho que $\xi_i W^2 \ll 1$, dado que el modelo estándar funciona con alta precisión en la Tierra, y se define $\Delta\xi \equiv \xi_e - \xi_p$. Dado que W^2 se determina por el entorno gravitacional y éste a su vez puede depender de la densidad del medio, queda claro que el modelo propuesto podría explicar el fenómeno en cuestión.

Para calcular W^2 en las situaciones de interés se modela la influencia gravitacional de la Tierra por la métrica exterior de Schwarzschild donde el elemento de línea, en las coordenadas usuales de Schwarzschild t, r, θ y φ , está dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.68)$$

siendo M la masa de la Tierra. Como esta métrica es solución de las ecuaciones de

⁸En principio se podría acoplar la materia con el tensor de curvatura pero, como se discute en la sección 2.1, los acoplos de la materia con el tensor de Ricci, son auto-interacciones que fenomenológicamente no son interesantes.

Einstein en el vacío, W^2 coincide con el escalar de Kretschmann $R_{abcd}R^{abcd}$, mismo que está dado por

$$W^2 = \frac{48G^2M^2}{r^6}. \quad (2.69)$$

En la aproximación, respaldada por su baja densidad, en la que en la nube interestelar $W^2 \approx 0$ se tiene

$$\left| \frac{\Delta\mu}{\mu} \right|^{(ef)} \equiv \left| \frac{\mu_{NI}^{(ef)} - \mu_{\oplus}^{(ef)}}{\mu_{\oplus}^{(ef)}} \right| \approx |\Delta\xi| \frac{48M^2}{R^6}, \quad (2.70)$$

siendo R el radio de la Tierra. Usando los valores numéricos de M y R y la estimación dada en la ecuación (2.64) se llega a

$$|\Delta\xi| \approx 4.7 \times 10^{-74} \text{ eV}^{-4}. \quad (2.71)$$

Recapitulando, en este modelo se supone que los electrones y protones interactúan con la gravitación por medio de acoplos $\xi_i W^2 \bar{\psi}_i \psi_i$. No obstante, dado que estos términos de acoplamiento no se anulan en caída libre y como la universalidad de la caída libre se ha probado experimentalmente con muy alta precisión [51], es posible descartar el modelo, como se va a reportar próximamente.

2.2.2. Principio de equivalencia y partículas inestables

Es notable la cantidad de estudios realizados con el objeto de probar empíricamente el principio de equivalencia (ver [51] como un ejemplo), sin embargo, la mayoría de estos trabajos usan partículas en estados que pueden ser descritos clásicamente. Quizá el primer experimento en el que se explora cómo las partículas en un estado cuántico (*i.e.*, sin análogo clásico) “sienten” la gravedad es el experimento COW (por Colella, Overhauser y Werner [14]). En este experimento se separa un haz de partículas en dos y se hace pasar cada parte de este haz por regiones con distinto potencial gravitacional. Al juntar las dos partes del haz se mide la diferencia en la fase. Vale la pena recalcar que las partículas del haz entran en super-posición de seguir las distintas trayectorias, que es un comportamiento que no tiene análogo clásico.

Por otra parte, a lo largo de esta tesis se argumenta que las partículas en estados cuánticos podrían interactuar con la gravedad de manera no-convencional. Dado que las partículas inestables están en estados cuánticos, y en el afán entender mejor las consecuencias de dicho principio con partículas cuánticas, se construye⁹ un modelo fenomenológico que permite parametrizar posibles violaciones del principio de equivalencia por partículas inestables. Es importante aclarar que en esta sección se entiende que un sistema satisface el principio de equivalencia si su descripción en un marco de referencia inercial cuando está sometida a un campo gravitacional uniforme es indistinguible de aquella en la que se considera al sistema libre pero “visto” desde un marco uniformemente acelerado.

Antes de presentar el modelo vale la pena retomar el experimento COW y discutir el rol del principio de equivalencia en la mecánica cuántica ordinaria con partículas estables. Es interesante que el experimento COW es descrito correctamente por la ecuación de Schrödinger si se incluye el potencial gravitacional Newtoniano. No obstante, este experimento no explora la interacción entre las partículas en estados cuánticos y la gravedad en el sentido de la relatividad general porque, como se explica en la referencia [13], los resultados experimentales encontrados también se observarían en ausencia de gravedad si se somete al dispositivo en el que se lleva a cabo el experimento a una aceleración constante. Esto se puede entender a partir del hecho de que en la mecánica cuántica ordinaria se satisface el principio de equivalencia. A continuación se presenta la demostración de este resultado (que está reportado en la referencia [26]).

El punto de partida es la ecuación de Schrödinger en un marco de referencia inercial \vec{x}', t' :

$$i\partial_{t'}\psi(\vec{x}', t') = -\frac{1}{2m}\nabla'^2\psi(\vec{x}', t'). \quad (2.72)$$

Para pasar a un sistema uniformemente acelerado \vec{x}, t (respecto al sistema \vec{x}', t') se

⁹Es un trabajo hecho en colaboración con E. Fischbach, D.E. Krause, H. Hernández-Coronado y D. Sudarsky.

hacen las sustituciones

$$\vec{x}' \rightarrow \vec{x} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \quad t' \rightarrow t = t', \quad (2.73)$$

donde \vec{a} es constante. Esto implica además que

$$\nabla' = \nabla, \quad \partial_{t'} = \partial_t - t\vec{a} \cdot \nabla, \quad (2.74)$$

con lo que la ecuación (2.72) se reescribe como

$$i(\partial_t - t\vec{a} \cdot \nabla)\psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}, t). \quad (2.75)$$

Haciendo el ansatz $\psi(\vec{x}, t) = e^{i\alpha(\vec{x}, t)}\phi(\vec{x}, t)$, omitiendo los argumentos de las funciones y multiplicando con $e^{-i\alpha}$ se obtiene

$$-(\partial_t\alpha)\phi + i\partial_t\phi + t\vec{a} \cdot \nabla\alpha\phi - it\vec{a} \cdot \nabla\phi = -\frac{1}{2m}(i\nabla^2\alpha\phi - (\nabla\alpha)^2\phi + 2i\nabla\alpha \cdot \nabla\phi + \nabla^2\phi). \quad (2.76)$$

Para cancelar los términos con $\nabla\phi$ se escoge $\alpha = m\vec{a} \cdot \vec{x} + f(t)$, siendo $f(t)$ una función aún indeterminada. Al sustituir en la ecuación (2.76) se obtiene

$$-m\vec{a} \cdot \vec{x}\phi - (\partial_t f)\phi + i\partial_t\phi + \frac{1}{2}mt^2\vec{a}^2\phi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\phi. \quad (2.77)$$

Usando el hecho que todavía se tiene la libertad de fijar $f(t)$, que se toma como $f(t) = m\vec{a}^2t^3/6$, se llega a

$$i\partial_t\phi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\phi + m\vec{a} \cdot \vec{x}\phi, \quad (2.78)$$

que es la ecuación de Schrödinger para una partícula sujeta a un potencial $V = m\vec{a} \cdot \vec{x}$. Nótese que, si la masa inercial y la masa gravitacional coinciden y \vec{a} es la aceleración de la gravedad, entonces V es el potencial de un campo gravitacional uniforme, por lo que, hasta una fase $\alpha = m\vec{a} \cdot \vec{x} + m\vec{a}^2t^3/6$, se demuestra que el principio de equivalencia se cumple en mecánica cuántica para partículas estables.

El siguiente objetivo es ver cómo se debe modificar la discusión anterior si se consideran partículas inestables. La observación clave es que la ecuación de Schrödinger para una partícula inestable debe reflejar que los polos del propagador se encuentran en $E^2 = \vec{p}^2 + (m - i\Gamma/2)^2$, donde m y Γ son reales siendo Γ la tasa de decaimiento de la partícula en cuestión. Obsérvese que la presencia de Γ genera que, en el sistema de reposo de la partícula, hayan soluciones que decaen exponencialmente, reflejando la propiedad de la partícula de ser inestable. En el caso no-relativista se tiene que m es mucho más grande que $|\vec{p}|$ y Γ , por lo que

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m - i\frac{\Gamma}{2} + O\left(\frac{p^4}{m^3}, \frac{p^2\Gamma}{m^2}\right), \quad (2.79)$$

y la ecuación de tipo Schrödinger que se deduce a partir de esta relación de dispersión es

$$i\partial_t\psi = \left(-\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + m - i\frac{\Gamma}{2}\right)\psi, \quad (2.80)$$

en donde se omiten los términos que se desprecian. Si se repite el análisis hecho para partículas estables pero ahora partiendo de la ecuación (2.80) se encuentra que, si se cumple el principio de equivalencia, una partícula inestable no-relativista satisface

$$i\partial_t\psi = \left(-\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + m - i\frac{\Gamma}{2} + m\Phi_N\right)\psi, \quad (2.81)$$

siendo Φ_N el potencial gravitacional Newtoniano. Se busca parametrizar violaciones del principio de equivalencia por partículas inestables. Esto puede obtenerse añadiendo a lo que se encuentra dentro de los paréntesis en el lado derecho de la ecuación (2.81) una función suave de Γ y Φ_N que debe anularse cuando Γ o Φ_N son cero, ya que en tales circunstancias no se esperan violaciones al principio de equivalencia. Si se hace una expansión de Taylor de esta función alrededor de $\Gamma = \Phi_N = 0$ es posible notar que el término dominante es de la forma $-i\xi\Gamma\Phi_N/2$, siendo ξ un parámetro complejo y adimensional desconocido. La idea entonces es que ξ debe ser determinado por los experimentos y que en caso de ser cero implica que las partículas inestables

satisfacen el principio de equivalencia. Por lo tanto, la ecuación fenomenológica que se propone es

$$i\partial_t\psi = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + m - i\frac{\Gamma}{2} + \left(m - i\xi\frac{\Gamma}{2} \right) \Phi_N \right) \psi. \quad (2.82)$$

Este modelo podría contrastarse con experimentos si se hace pasar un haz de partículas inestables por un dispositivo tipo COW. El cálculo se presenta en el apéndice C en el que se obtiene que, en el caso que, por simplicidad, $\xi \in \mathbb{R}$ y para un haz cuya energía se encuentra centrada alrededor de E y donde p es el porcentaje del haz que viaja por la trayectoria inferior, la probabilidad de detección de partículas que no decaen si se deja el dispositivo prendido por un tiempo largo va como

$$P \propto \left(1 + 2\sqrt{p(1-p)} \right) \left(1 - \Gamma\mu L - \frac{1}{2}\xi\Gamma\mu g A \right) + \left(p - \frac{1}{2} \right) \xi\Gamma\mu g A \cos\theta - \sqrt{p(1-p)}m^2\mu^2g^2A^2\cos^2\theta, \quad (2.83)$$

con $\mu \equiv \sqrt{E/2m}$, g es la aceleración gravitacional, L y A son la longitud (horizontal) y el área encerrada por el dispositivo COW, respectivamente, y θ es el ángulo entre la dirección vertical del dispositivo y la vertical de acuerdo al campo gravitacional. Es importante mencionar que para ser consistentes con las aproximaciones hechas anteriormente, se desprecian los términos $O(\mu^3)$. Además, para el caso $p = 1/2$ y $\Gamma = 0$ se recupera la expresión típica para estos experimentos (ver la referencia [14]). Más aún, el término proporcional a $\Gamma\mu L$ se entiende del hecho que entre más largo sea el dispositivo COW, más tiempo pasan en él las partículas inestables y por lo tanto, decaen en un mayor porcentaje. Finalmente, debido a que el término lineal en $\cos\theta$ desaparece si $\xi = 0$, al buscar esta dependencia en θ se podrían poner cotas sobre el parámetro en cuestión.

En este capítulo se han estudiado varias maneras en las que una estructura no-trivial del espacio-tiempo a escalas microscópicas, cuya forma explícita se desconoce, podría influir a la materia. A continuación se estudia cómo repercute el hecho que la materia es “cuántica” al ser usada para explorar el espacio-tiempo.

Capítulo 3

Explorando el espacio-tiempo con objetos reales

Hasta ahora se ha estudiado cómo una estructura no-trivial del espacio-tiempo afecta a la materia. En este capítulo se deja de lado la posibilidad de que el espacio-tiempo sea granular y se analiza la forma en la que a través de la materia, cuya descripción se hace mediante la mecánica cuántica, se puede explorar el espacio-tiempo de la relatividad general.

3.1. Motivación

Las partículas puntuales juegan un papel importante en el marco conceptual de la teoría de la relatividad general. Un ejemplo de esto son las geodésicas que son las trayectorias espacio-temporales que siguen dichas partículas cuando no son sometidas a fuerzas externas. De hecho, la geometría del espacio-tiempo se encuentra, operacionalmente, al seguir las trayectorias de partículas libres y de prueba, mismas que se identifican con las geodésicas de la geometría buscada. Por otra parte, la geometría sólo puede ser explorada con los objetos reales presentes en el universo, que no son puntuales en el sentido que, según la mecánica cuántica, no tienen una posición y un momento simultáneamente definidos, por lo que no se les puede asignar una

trayectoria. Esto implica que hay un límite en la precisión con la que se puede conocer la geometría del espacio-tiempo, y de hecho, sugiere que a escalas microscópicas es prácticamente imposible explorar dicha geometría.

El objetivo principal de este capítulo es buscar un mecanismo covariante para asignar una trayectoria a un sistema cuántico, misma que lo represente al momento de explorar la geometría espacio-temporal. Dado que éste es un problema complicado y a pesar de que existen diferencias importantes, se propone, como un primer paso, modelar a los sistemas cuánticos con objetos clásicos y extendidos, ya que en los dos casos los objetos con los que se explora la geometría no siguen una (única) trayectoria. Más aún, se supone que estos objetos extendidos son de prueba y que se propagan en un espacio-tiempo conocido. Concretamente, la idea es representar a los objetos extendidos por su centro de masa, mismo que puede definirse de forma covariante en relatividad general. Esta idea, en general, no puede aplicarse operacionalmente ya que no es posible “seguir” la trayectoria del centro de masa cuando éste se encuentra dentro del objeto extendido. No obstante, el análisis teórico que se desprende conlleva a conclusiones interesantes sobre la geometría que se deduce al explorar el espacio-tiempo con objetos extendidos, sugiriendo que el lenguaje geométrico podría no ser el adecuado para describir la estructura microscópica del espacio-tiempo.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: primero se encuentra una definición covariante del centro de masa en relatividad especial de la que se aprenden lecciones importantes que son usadas al generalizar esta noción a espacios curvos. La receta para encontrar el centro de masa en espacio-tiempos con curvatura se detalla presentando primero las hipótesis generales y algunas definiciones, después los pasos de la construcción y finalmente se bosquejan algunas demostraciones matemáticas importantes. Con el objeto de calcular los paréntesis de Poisson entre las componentes del centro de masa, la receta se presenta para el caso particular en el que el objeto extendido está compuesto por partículas puntuales, libres, masivas y de prueba se obtiene el centro de masa en el régimen de “gravedad linealizada”. Además, se presenta un formalismo diseñado para encontrar parte de la geometría que se “lee” al seguir al centro de masa. Se muestra un ejemplo de toda la construcción para una geometría particular en el régimen linealizado y, finalmente, se describen algunas

posibles líneas de investigación futuras.

3.2. El centro de masa relativista

La propagación de objetos extendidos en espacio-tiempos curvos se ha estudiado desde los inicios de la relatividad general. El trabajo más significativo en esta dirección es el de Papapetrou [46] quien analizó la dinámica, en un espacio-tiempo genérico, de un objeto que rota, en el límite que no tiene extensión, mediante el estudio de los momentos multipolares de su tensor energía-momento T_{ab} . Al intentar generalizar el resultado de Papapetrou a objetos con extensión, surge el problema de escoger covariantemente el punto a partir del cual se hace la expansión multipolar. Esta es quizá la razón principal por la que se buscaron definiciones covariantes del centro de masa en relatividad general. Antes de presentar la manera como se construye el centro de masa en espacio-tiempos con curvatura, vale la pena comenzar describiendo como se puede definir de manera covariante en relatividad especial.

3.2.1. Relatividad especial

Esta sección está basada en el artículo de Pryce [47] donde se hace un recuento de las distintas definiciones del centro de masa en relatividad especial y se discuten algunas de sus propiedades. La situación específica que se examina es la de un espacio-tiempo plano descrito en coordenadas Minkowskianas y en el que se propaga una colección de N partículas clásicas y puntuales. Las coordenadas de la línea de mundo y las componentes del momento de la i -ésima partícula son, respectivamente, $q_{(i)}^\mu(t)$, $p_{(i)}^\mu$. Se asume que el parámetro t de las líneas de mundo coincide con la coordenada temporal del espacio-tiempo y que dichas curvas están parametrizadas de forma que $q_{(i)}^0(t) = t$ para todas las partículas. Más aún, la masa de la i -ésima partícula, $m_{(i)}$, se define por la relación $\eta_{\mu\nu} p_{(i)}^\mu p_{(i)}^\nu = -m_{(i)}^2$ y, se asume, por simplicidad, que no hay fuerzas externas, por lo que $p_{(i)}^\mu$ no depende de t . Se define el momento total de la

colección de partículas como

$$p^\mu = \sum_{i=1}^N p_{(i)}^\mu, \quad (3.1)$$

y su momento angular total respecto del punto $x = (t, \vec{x})$ es

$$j^{\mu\nu}(x) = 2 \sum_{i=1}^N (q_{(i)}(t) - x)^{[\mu} p_{(i)}^{\nu]}. \quad (3.2)$$

Es importante observar que

$$j^{\mu\nu}(x) = 2 \sum_{i=1}^N q_{(i)}(t)^{[\mu} p_{(i)}^{\nu]} - 2x^{[\mu} p^{\nu]} = m^{\mu\nu} - 2x^{[\mu} p^{\nu]}, \quad (3.3)$$

donde, debido a que aparece frecuentemente, se define $m^{\mu\nu} \equiv j^{\mu\nu}(t, \vec{0})$. Por último, la masa total del sistema, m , se define a partir de la relación $-m^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ (nótese que $m \neq \sum_{i=1}^N m_{(i)}$).

Las principales definiciones, propuestas por Pryce, del centro de masa de la colección de partículas puntuales son:

- (a) Para cada valor del parámetro t , se calcula el centro de masa en un sistema de referencia Minkowskiano arbitrario ponderando la posición de cada partícula con su masa entre la masa total, es decir, las coordenadas del centro de masa en el sistema de referencia antes mencionado son

$$x_{(a)}^\mu(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_{(i)} q_{(i)}^\mu(t)}{m}. \quad (3.4)$$

- (b) Se calcula el centro de masa igual que en (a) pero en el sistema de referencia Minkowskiano particular en el que la parte espacial del momento total es cero, *i.e.*, en el marco de referencia donde $\vec{p} = \vec{0}$. Esto se hace para todo t y se encuentra una curva, misma que puede ser expresada en cualquier sistema de referencia.

- (c) Se define el centro de masa igual que (a) pero en este caso se pondera las

posiciones de las partículas con su energía, $p_{(i)}^0$, normalizada por la energía total p^0 . Las coordenadas del centro de masa en dicho sistema de referencia están dadas por

$$x_{(c)}^\mu(t) = \frac{\sum_{i=1}^N p_{(i)}^0 q_{(i)}^\mu(t)}{p^0}. \quad (3.5)$$

- (d) Para todo t , se calcula el centro de masa igual que en (c) pero en el sistema de referencia Minkowskiano en el que $\vec{p} = \vec{0}$. Una vez encontrada la curva trazada por el centro de masa, ésta se transforma a cualquier sistema de referencia.

Además, Pryce propone cuatro condiciones que debería cumplir la definición ideal del centro de masa, mismas que se enumeran a continuación:

1. Ser independiente del sistema de referencia en el que se calcula (covariancia).
2. Estar en reposo en el marco de referencia en el que $\vec{p} = \vec{0}$.
3. En la ausencia de fuerzas externas, la curva trazada por el centro de masa debe ser una geodésica.
4. Los paréntesis de Poisson entre todas las componentes espaciales del centro de masa deben ser cero.

El centro de masa calculado a partir de la definición (a) depende del marco de referencia y, en general, no tiene la propiedad de estar en reposo en el sistema donde $\vec{p} = \vec{0}$. Además, si las partículas interactúan entre sí, el centro de masa dado en la definición (a) no sigue una geodésica. La única propiedad que satisface esta definición de centro de masa es que sus componentes espaciales tienen paréntesis de Poisson nulos entre sí. El centro de masa definido por (b) cumple con las mismas condiciones que la definición (a) salvo por el hecho que, por construcción, es independiente del marco de referencia. El centro de masa de acuerdo con la definición (c) está en reposo en el marco de referencia en el que $\vec{p} = \vec{0}$, sigue una geodésica en ausencia de fuerzas externas pero no es covariante. Además, sus diferentes componentes no tienen paréntesis de Poisson nulos entre sí (por involucrar tanto la posición como la energía de las partículas y debido a que la energía depende de los momentos).

Finalmente, el centro de masa de la definición (d) satisface las mismas propiedades que el centro de masa definido en (c) pero además, por construcción, es covariante. Hay que mencionar también que todas estas definiciones se reducen a la definición Newtoniana del centro de masa en el límite no-relativista y que cuando únicamente se considera una partícula, el centro de masa coincide su posición.

De las definiciones del centro de masa mencionadas anteriormente, la definición (d) es considerada como la mejor por lo que en esta tesis se trabaja con ella. A pesar que Pryce no lo verifica y como lo discuten en la referencia [12], es posible notar que la definición (d) del centro de masa no es “asociativa”, es decir, no se puede calcular primero el centro de masa de un subgrupo de partículas y utilizarlo para representar a dicho subgrupo al calcular el centro de masa de todo el sistema. Las razones por las que no se cumple esta propiedad y la forma de solucionarlo se reportan en la referencia [12] y se discuten en la sección 3.5.

Para encontrar una expresión para las coordenadas del centro de masa según la definición (d), primero es conveniente estudiar la definición (c). Es inmediato demostrar, a partir de la ecuación (3.5), que las componentes del centro de masa calculado con la definición (c) son

$$x_{(c)}^{\mu}(t) = \frac{tp^{\mu} + m^{\mu 0}}{p^0}. \quad (3.6)$$

Si el sistema de referencia utilizado está asociado con una familia de observadores cuya 4-velocidad tiene componentes n^{μ} , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$x_{(c)}^{\mu}(t) = \frac{tp^{\mu} + m^{\mu\nu}n_{\nu}}{p^{\rho}n_{\rho}}. \quad (3.7)$$

La definición (d) del centro de masa se encuentra a partir de la (c) pero en el caso particular donde $n^{\mu} = p^{\mu}/m$ por lo que el centro de masa según la definición (d) de Pryce es

$$x_M^{\mu}(t) = \frac{tmp^{\mu} + m^{\mu\nu}p_{\nu}}{-m^2}. \quad (3.8)$$

Finalmente, si se usa el parámetro $\tau \equiv x_M^0(t)$, el centro de masa toma la forma

$$x_M^\mu(\tau) = \tau \frac{p^\mu}{p^0} + \frac{m^{0i} p_i p^\mu - m^{\mu\nu} p_\nu p^0}{p^0 m^2}. \quad (3.9)$$

Es fácil ver que, si se supone que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, como p^μ y $m^{\mu\nu}$ son constantes, entonces $dx_M^\mu/d\tau = p^\mu/p^0$ que es constante y temporal, por lo que la curva centro de masa es una geodésica temporal. La observación más importante que se hace en este capítulo es que la curva centro de masa en espacio-tiempos con curvatura en general no es una geodésica. Esto significa que al explorar espacio-tiempos curvos con objetos extendidos que son representados por su centro de masa, no se “lee” la geometría de fondo, ya que las curvas que se considerarían como geodésicas (*i.e.*, el centro de masa), en realidad no lo son.

En este punto es conveniente definir el momento angular intrínseco del objeto extendido, llamado también espín en un abuso de lenguaje por usar un término de la mecánica cuántica, y denotado por $s^{\mu\nu}$. Para entender esta definición hay que tomar en cuenta que al medir el momento angular de un objeto extendido respecto a un punto arbitrario hay una contribución orbital y otra intrínseca. Sin embargo, si se calcula el momento angular total a partir del centro de masa, la contribución orbital se anula y todo el momento angular medido es intrínseco. Por tal motivo se define el espín de un objeto extendido como su momento angular total respecto al centro de masa, es decir,

$$s^{\mu\nu} \equiv j^{\mu\nu}(x_M). \quad (3.10)$$

A continuación se demuestra una relación entre el momento total y el espín que es muy importante ya que también se satisface en espacio-tiempos con curvatura (si se utilizan las definiciones de momento total y espín dadas en la sección 3.2.2). De las ecuaciones (3.3) y (3.10), se puede notar que

$$p_\mu s^{\mu\nu} = p_\mu m^{\mu\nu} - p_\mu x_M^\mu p^\nu - m^2 x_M^\nu, \quad (3.11)$$

con lo que, usando la expresión del centro de masa dada en la ecuación (3.9), se

prueba explícitamente

$$p_\mu s^{\mu\nu} = 0. \quad (3.12)$$

Si se cuenta con definiciones para el momento total y el espín, esta expresión puede tomarse como el punto de partida para definir el centro de masa en relatividad general. Sin embargo, en esta tesis y con el afán de motivar la definición usada, se construye paso a paso el centro de masa y después se prueba que satisface una relación análoga a (3.12).

Como se menciona al inicio de esta sección, el centro de masa que se está utilizando tiene paréntesis de Poisson no-nulos entre sus componentes espaciales. Para hacer este cálculo se escoge una hiper-superficie de tiempo coordinado t constante, Σ_t , y se asume que en ella se satisfacen los paréntesis canónicos¹ entre $q_{(i)}^\mu(t)$ y $p_{(i)}^\mu$. Con esto y dado que el centro de masa en Σ_t puede expresarse en términos de $q_{(i)}^\mu(t)$ y $p_{(i)}^\mu$, se calculan los paréntesis de Poisson en cuestión, obteniendo

$$\{x_M^i, x_M^j\} = \frac{s^{ij}}{m^2} + 2\frac{p^{[i}s^{j]0}}{m^2 p^0}. \quad (3.13)$$

Es interesante mencionar que, como se nota por los autores de la referencia [11], relaciones similares a (3.13) aparecen en otras partes de la literatura. El ejemplo más relevante es el de la referencia [35] donde, al generalizar el álgebra de Poincaré para incluir un operador posición, encuentra que los conmutadores entre las componentes de este operador son parecidas al lado derecho de la ecuación (3.13). Otra característica interesante es que la relación (3.13) es válida también en el límite que el objeto al que se le calcula el centro de masa es puntual ya que en este caso el momento angular intrínseco cumple $s^{ij} = 0$.

De esta sección se concluye que para construir un centro de masa de forma covariante en relatividad especial es crucial utilizar el sistema de referencia donde $\vec{p} = \vec{0}$.

¹Los paréntesis de Poisson que involucran partículas distintas son automáticamente cero. Además, como $q_{(i)}^0(t) = t$ es un parámetro fijo, tiene paréntesis de Poisson nulo con los demás $q_{(i)}^\mu$ y los $p_{(i)}^\mu$. Más aún, para calcular los paréntesis de Poisson que involucran a $p_{(i)}^0$ se usa el hecho que $p_{(i)}^0 = \sqrt{\vec{p}_{(i)}^2 + m_{(i)}^2}$ y que $m_{(i)}$ tiene paréntesis de Poisson nulos con $q_{(i)}^\mu$ y $p_{(i)}^\mu$.

Si además se ponderan las posiciones de las partículas con sus energías (normalizadas por la energía total), se demuestra que los paréntesis de Poisson entre las componentes espaciales del centro de masa son proporcionales al espín del objeto extendido y que, en ausencia de fuerzas externas, la curva que trazada por el centro de masa es una geodésica temporal. En la siguiente sección se generaliza esta definición del centro de masa a espacio-tiempos con curvatura.

3.2.2. Relatividad general

En esta sección se describe una definición del centro de masa de un objeto extendido, descrito por su tensor de energía-momento T_{ab} , que generaliza a aquella dada en la sección 3.2.1 ya que puede aplicarse en espacio-tiempos con curvatura y que fue propuesta originalmente por Dixon [22]. Para ello se comienza enumerando las hipótesis con las que se trabaja, siguiendo a la referencia [5], donde originalmente se presentaron las demostraciones matemáticas discutidas abajo.

Hipótesis

En este punto conviene detallar el marco conceptual en el que se lleva a cabo esta investigación. Se consideran espacio-tiempos de 4 dimensiones, que tienen una métrica pseudo-Riemanniana g_{ab} y una orientación temporal dada. En particular, se consideran únicamente espacio-tiempos globalmente hiperbólicos. La materia a la que se le quiere asociar un centro de masa es clásica. Se supone además que el tensor de energía-momento de la materia, T_{ab} , tiene soporte T convexo² y localizado (para toda hiper-superficie de Cauchy Σ , se tiene que $T \cap \Sigma$ es compacto en la topología inducida en Σ), cumple con la condición de energía dominante (para todo vector temporal que apunta al futuro t^a , el vector $T^{ab}t_b$ es temporal y apunta al futuro) y satisface la relación de conservación $\nabla_a T^{ab} = 0$, siendo ∇_a el operador derivada asociado con g_{ab} .

Para que la construcción del centro de masa pueda ser generalizada a espacios curvos hay que suponer que para todo $x \in T$, el conjunto $O(x) \equiv T \cap (J^+(x) \cup J^-(x))^c$,

²Si T no es convexo, entonces se puede tomar su completación convexa como se discute en [5].

donde $J^+(x)$ y $J^-(x)$ son, respectivamente, el futuro y pasado causal del punto x , es un entorno normal convexo, es decir, que para todo par de puntos $y, z \in O(x)$ existe una única geodésica totalmente contenida en $O(x)$ que une dichos puntos. Esta hipótesis se garantiza si la curvatura del espacio-tiempo en la región donde está el objeto extendido es suficientemente pequeña. Además, para demostrar que el centro de masa que se define abajo traza una curva temporal y diferenciable también se debe suponer que el radio de curvatura es mucho más grande que el tamaño del objeto extendido, lo que se asume en esta tesis. Las condiciones precisas que debe satisfacer la curvatura para tener una definición consistente del centro de masa se encuentran en la referencia [5]. A continuación se definen algunos objetos que son usados a lo largo de toda la sección.

Definiciones

En relatividad especial el centro de masa se construye sumando las coordenadas Minkowskianas de las posiciones de las partículas, sin embargo, en un espacio-tiempo con curvatura no tiene sentido sumar coordenadas por lo que se busca representar las posiciones de cada partícula, respecto al punto x , por vectores en V_x . Con el propósito de ligar puntos con vectores se define el mapeo exponencial sobre el punto x , $\exp_x(\cdot)$, mismo que a cada vector en V_x le asigna un punto del espacio-tiempo. En concreto, el vector $v^a \in V_x$ se mapea al punto al que se llega al recorrer una distancia afín 1 (a partir x) la geodésica cuya tangente en x y respecto al parámetro afín utilizado³ es v^a . Es importante notar que $\exp_x(0) = x$ y que, para vectores cuya norma es suficientemente pequeña, este mapeo es 1 a 1.

Al calcular el centro de masa de un objeto extendido, la contribución de cada pedazo debe tomarse “al mismo tiempo”. Para tener una noción de simultaneidad respecto a un vector temporal $v^a \in V_x$, se define el conjunto de todos los puntos a los que se llega siguiendo geodésicas cuya tangente en x es ortogonal a v^a , mismo que se denota por $\Gamma_{x,v}$. Claramente $\Gamma_{x,v}$ es una hiper-superficie (al menos en una vecindad de x) de carácter espacial.

³Esto asegura que la definición sea independiente del parámetro afín que se utilice.

Para definir el momento total de un objeto extendido es necesario sumar el momento de cada pedazo que lo conforma. Para eso todos estos momentos deben ser “llevados” a un mismo espacio tangente, donde la suma de vectores está definida. Los vectores son llevados de un punto a otro por transporte paralelo a lo largo de geodésicas. Se denota por $\Pi_x[\cdot]$ al operador que transporta paralelamente a un tensor (de cualquier rango) desde el punto en el que se encuentra y hasta el punto x , sobre una geodésica que une estos dos puntos. Este operador está bien definido sólo cuando hay una única geodésica que une los puntos en cuestión, es decir, en un entorno normal convexo.

Al calcular el momento total del objeto extendido es necesario escoger el instante en el que se consideran las contribuciones de cada pedazo de dicho objeto. Este instante puede ser determinado por una 4-velocidad, como se discute arriba. Por ello, se define el momento total del objeto extendido en el punto $x \in T$ y respecto a la 4-velocidad $v^a \in V_x$ como

$$P^a(x, v) = \int_{\Gamma_{x,v}} \Pi_x[T^{ab}(y)n_b(y)]\sqrt{h}d^3y, \quad (3.14)$$

donde $n^a(y)$ es el vector normal a $\Gamma_{x,v}$ en el punto y , que además es unitario y apunta al futuro, y $\sqrt{h}d^3y$ es el elemento de 3-volumen correspondiente (ver la figura 3.1). Las hipótesis bajo las que se está trabajando aseguran que $\Gamma_{x,v} \cap T$, que es la región de integración, sea una hiper-superficie suave. Además, entre todo punto $y \in \Gamma_{x,v} \cap T$ y el punto x hay una única geodésica, por lo que el operador $\Pi_x[\cdot]$ se aplica sin ambigüedades.

Por otra parte, debido a que T_{ab} satisface la condición de energía dominante, al hecho de que el transporte paralelo respeta el carácter temporal de un vector y ya que es la “suma” de vectores temporales orientados al futuro, se tiene que $P^a(x, v)$ es temporal. Es posible probar también que esta definición del momento total se vuelve independiente del punto y la 4-velocidad en un espacio-tiempo plano y de hecho se reduce a la ecuación (3.1) para partículas puntuales. Similarmente a lo hecho en relatividad especial, la masa total del objeto extendido en x y dependiente de la 4-velocidad $v^a \in V_x$, $M(x, v)$, se define a partir de la relación $-M^2(x, v) =$

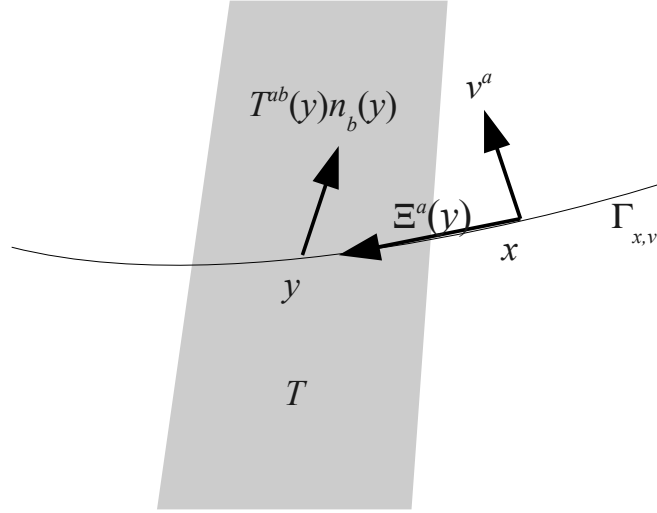


Figura 3.1: Esquema espacio-temporal donde se muestra en gris la región T que contiene al objeto extendido, la hiper-superficie de simultaneidad asociada con el vector temporal $v^a \in V_x$, llamada $\Gamma_{x,v}$, y los vectores $T^{ab}(y)n_b(y) \in V_y$ y $\Xi^a(y) \in V_x$ que representan, respectivamente, el momento y la posición respecto a x del pedazo del objeto extendido en el punto y .

$$g_{ab}(x)P^a(x, v)P^b(x, v).$$

Para definir el momento angular total del objeto extendido es necesario contar con vectores que contengan la información de la posición de cada pedazo del objeto extendido. Como se menciona anteriormente, esto se puede lograr por medio del mapeo exponencial. Así, si se pretende codificar en un vector la posición del punto y respecto al punto x se busca $\Xi^a(y) \in V_x$ tal que $\exp_x(\Xi(y)) = y$ (estos vectores se muestran en la figura 3.1). Con esto, el momento angular total del objeto extendido en el punto x y asociado con el vector temporal $v^a \in V_x$ se define por

$$J^{ab}(x, v) = 2 \int_{\Gamma_{x,v}} \Xi^{[a}(y) \Pi_x[T^{b]c}(y)n_c(y)] \sqrt{h} d^3y, \quad (3.15)$$

donde se usa que $\Xi^a(y)$ y $\Pi_x[T^{ab}(y)n_b(y)]$ representan, respectivamente, la posición y el momento del pedazo del objeto extendido que se encuentra en y . Nótese que $J^{ab}(x, v)$ es un tensor sobre el punto x . Además, es fácil ver que si $y \in \Gamma_{x,v}$, entonces, $g_{ab}(x)\Xi^a(y)v^b = 0$, por lo que más adelante se construyen los $\Xi^a(y)$ imponiendo esta condición. Esta definición también se reduce a la ecuación (3.2) en el límite correspondiente.

Para definir el momento y el momento angular total de un objeto extendido, es necesario utilizar un vector temporal. A continuación se presenta una receta para encontrar un campo de 4-velocidades, que además de ser la generalización de aquel que en relatividad especial “ve” al objeto extendido en reposo, es útil para obtener una definición de los campos de momento y momento angular total del objeto extendido, ya que provee de una noción de simultaneidad.

Receta para encontrar el sistema de reposo

Para obtener una definición covariante del centro de masa en relatividad especial es necesario usar un sistema de referencia, asociado con un campo de 4-velocidades, en el que el objeto extendido está en reposo. Algo análogo sucede en relatividad general y esta parte de la tesis se dedica a detallar el procedimiento con el que se encuentra dicho campo de 4-velocidades. Con este propósito se define un mapeo entre elementos del conjunto

$$\mathcal{K}_x = \{v^a \in V_x | g_{ab}v^a v^b = -1 \text{ y que apuntan al futuro}\}. \quad (3.16)$$

Sea $v^a \in \mathcal{K}_x$, el mapeo $\phi_x^a : \mathcal{K}_x \rightarrow \mathcal{K}_x$ se define por

$$\phi_x^a(v) = \frac{P^a(x, v)}{\sqrt{-g_{bc}P^b(x, v)P^c(x, v)}}. \quad (3.17)$$

Se denota por $U^a(x)$ al elemento de \mathcal{K}_x con la propiedad

$$U^a(x) = \phi_x^a(U(x)), \quad (3.18)$$

mismo que, por ser un punto fijo del mapeo ϕ_x^a y aplicando los métodos que se discuten más adelante, existe y es único [5]. Haciendo esto para cada punto en T se encuentra un campo vectorial $U^a(x)$ que corresponde con la velocidad de un observador en x que ve al objeto extendido lo más en reposo posible⁴.

Usando el campo $U^a(x)$ se puede definir, para cualquier punto $x \in T$, $P^a(x) \equiv P^a(x, U(x))$, $M(x) \equiv M(x, U(x))$ y $J^{ab}(x) \equiv J^{ab}(x, U(x))$, conocidos como el momento, la masa y el momento angular total en x , respectivamente. Nótese que estos objetos son campos en T , es decir, están definidos sobre cada pedazo del objeto extendido. Una vez que se cuenta con el campo de 4-velocidades $U^a(x)$, se puede construir el centro de masa, que es lo que se presenta a continuación.

Noción del centro de masa

En analogía con lo hecho en el caso de relatividad especial, el centro de masa se define usando el sistema de referencia donde el objeto extendido está lo más en reposo posible y ponderando la posición de cada parte del objeto extendido con su energía. La idea es construir un mapeo que toma puntos en T y da puntos en el espacio-tiempo, mismo que al punto $x \in T$ lo asocia con el punto

$$S(x) \equiv \exp_x \left[\frac{U_b(x) \int_{\Gamma_{x,U(x)}} \Xi^a(y) \Pi_x [T^{bc}(y) n_c(y)] \sqrt{\hbar} d^3 y}{U_d(x) \int_{\Gamma_{x,U(x)}} \Pi_x [T^{de}(y) n_e(y)] \sqrt{\hbar} d^3 y} \right], \quad (3.19)$$

donde $\Xi^a(y) \in V_x$. Nótese que lo que está dentro de estos corchetes es un vector en x , además, $-U_a(x) \Pi_x [T^{ab}(y) n_b(y)]$ es la energía respecto a $U^a(x)$ del pedazo que está en un volumen $\sqrt{\hbar} d^3 y$ alrededor del punto y . Como además $\Xi^a(y)$ representa la posición del punto y , la parte dentro de los corchetes son posiciones ponderadas por

⁴Se puede construir otro campo vectorial, propuesto en la referencia [5], que ve al objeto extendido “lo más en reposo posible”. Para ello se define para todo $v^a \in \mathcal{K}_x$, el mapeo $s_x(v) = -v_a P^a(x, v)$ que representa algo como la energía medida por un observador con 4-velocidad v^a . El campo en cuestión es entonces aquel que minimiza a s_x . En esta tesis no se utiliza esta definición alternativa ya que con ella no se llega a una relación análoga a (3.12) en espacios curvos [5] y porque, al ser un procedimiento que requiere una minimización, se vuelve complicado al trabajar perturbativamente, como se hace en la sección 3.2.3.

energía dividido por la energía total. Más aún, como se muestra en la referencia [5], es posible mostrar que la imagen del mapeo S está contenida en T .

La idea es utilizar el mapeo $S : T \rightarrow T$ para definir el centro de masa de un objeto extendido. El lado derecho de la ecuación (3.19) puede pensarse como el centro de masa a partir del punto x . Así, se define el centro de masa (de forma independiente de un punto) como el punto fijo del mapeo S , es decir, aquel punto $X_M \in T$ tal que $S(X_M) = X_M$. En un espacio-tiempo como en el que se está trabajando se tiene que $x = \exp_x(v)$ si y sólo si $v^a = 0$ por lo que, si X_M es el punto fijo del mapeo S , se satisface

$$\begin{aligned}
0 &= U_b(X_M) \int_{\Gamma_{X_M, U(X_M)}} \Xi^a(y) \Pi_{X_M}[T^{bc}(y)n_c(y)] \sqrt{h} d^3y \\
&= 2U_b(X_M) \int_{\Gamma_{X_M, U(X_M)}} \Xi^{[a}(y) \Pi_{X_M}[T^{b]c}(y)n_c(y)] \sqrt{h} d^3y \\
&= U_b(X_M) J^{ab}(X_M),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde se usa el hecho que, por construcción, $g_{ab}U^a\Xi^b = 0$ y la definición (3.15). Recordando que $P^a(x) = M(x)U^a(x)$ y definiendo el espín como $S^{ab} \equiv J^{ab}(X_M)$, de forma análoga a lo hecho en la sección 3.2.1, se llega a

$$0 = P_b(X_M)S^{ab}, \tag{3.21}$$

es decir, en espacio-tiempos con curvatura se satisface una propiedad análoga a (3.12).

Es claro que el mapeo S no tiene un único punto fijo punto debido a que el centro de masa traza una curva en T , sin embargo, lo que se busca es que el procedimiento genere una única curva centro de masa. Este resultado es demostrado en la referencia [5] y la demostración se esboza en la siguiente sección.

Existencia y unicidad de la curva centro de masa

En esta sección se dan partes de las pruebas, presentadas por primera vez en la referencia [5], de existencia y unicidad del centro de masa (entendido, a partir de ahora, como una curva). En la misma referencia se demuestra que dicha curva es

temporal, diferenciable e inextendible.

Los primeros pasos son definir el conjunto $Z'(T)$ que contiene todas las curvas temporales, diferenciables e inextendibles que están totalmente contenidas en T , y extender, punto a punto, el mapeo $S(x)$ en un mapeo S_{ext} que toma elementos de $Z'(T)$. De esta forma, el centro de masa se define como aquella curva $X_M(\tau)$ tal que $S_{ext}(X_M(\tau)) = X_M(\tau)$. Para demostrar que el punto fijo de S_{ext} existe y es único se construye un espacio métrico completo, es decir, un espacio métrico⁵ en el que toda sucesión de Cauchy converge (con respecto a la métrica del espacio). Se comienza tomando como espacio $Z'(T)$ y se define una métrica tal que, para cualquier $k', k'' \in Z'(T)$

$$d(k', k'') = \sup_{x(\tau) \in Z'(T)} \left(\sup_{\tau} (geod(\Gamma_{x(\tau), U[x(\tau)]} \cap k', \Gamma_{x(\tau), U[x(\tau)]} \cap k'')) \right), \quad (3.22)$$

donde $geod(\cdot, \cdot)$ es la distancia geodésica entre dos puntos. Es decir, dada una curva $x(\tau)$, se toma un punto en ella, $x(\tau_0)$, se toman las intersecciones de $\Gamma_{x(\tau_0), U[x(\tau_0)]}$ con las curvas k' y k'' y se calcula la distancia geodésica entre estos puntos. Finalmente se varía sobre el parámetro τ y sobre todas las posibles curvas $x(\tau) \in Z'(T)$ hasta encontrar el supremo.

La métrica (3.22) está bien definida ya que, por hipótesis, las distancias geodésicas involucran puntos dentro de un entorno normal convexo (de lo contrario podría haber más de una geodésica conectando los puntos en cuestión, y por ende, más de un valor para la distancia geodésica entre ellos). Además, como $geod(\cdot, \cdot)$ es simétrico y, dado que los puntos cuya distancia geodésica se calcula están relacionados espacialmente, es no-negativo, entonces $d(k', k'') = d(k'', k') \geq 0$ para todo $k', k'' \in Z'(T)$. Más aún,

⁵Un espacio métrico es un conjunto M con una función distancia $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (también llamada métrica pero que no se debe confundir con la métrica pseudo-Riemanniana del espacio-tiempo) tal que para todo $x, y, z \in M$ satisface:

1. $d(x, y) \geq 0$ y sólo es igual a cero si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo).

es posible demostrar que $d(k', k'')$ es cero únicamente si $k' = k''$. Para probar esta afirmación se supone que $k' \neq k''$, entonces se puede verificar que siempre existe una curva $x'(\tau) \in Z'(T)$ y un punto $x'(\tau_0)$ en dicha curva tales que $geod(\Gamma_{x(\tau_0), U[x(\tau_0)]} \cap k', \Gamma_{x(\tau_0), U[x(\tau_0)]} \cap k'') > 0$, por lo que $d(k', k'') \neq 0$. Para que la definición dada en la ecuación (3.22) sea una métrica falta demostrar que cumple con la desigualdad del triángulo. Esto último se sigue del hecho que para cualesquiera tres puntos $x, y, z \in T$ espacialmente relacionados, $geod(x, y) + geod(y, z) \geq geod(x, z)$, lo que se traduce [5] a $d(k', k) + d(k, k'') \geq d(k', k'')$ para todo $k, k', k'' \in Z'(T)$.

Dado un espacio con una métrica, existe un procedimiento estándar, descrito en la referencia [48], para añadir elementos al espacio hasta volverlo un espacio completo respecto a su métrica. La completación de $Z'(T)$ respecto a la métrica (3.22) se denota por $Z(T)$. Es importante estar conscientes que al tomar la completación se está permitiendo que en $Z(T)$ existan elementos que no cumplen con todas las características de los elementos de $Z'(T)$, es decir, pueden haber elementos que no sean curvas temporales, diferenciables e inextendibles⁶. Un mapeo $f : Z(T) \rightarrow Z(T)$ se dice estrictamente contractivo si existe un $\lambda \in (0, 1)$ tal que $d(f(k'), f(k'')) \leq \lambda d(k', k'')$ para todo par $k', k'' \in Z(T)$. Para demostrar la existencia y unicidad de la curva centro de masa se usa el teorema de mapeos contractivos [48] que dice que todo mapeo estrictamente contractivo de un espacio métrico completo a sí mismo tiene un único punto fijo. Lo que falta entonces para demostrar que la imagen del mapeo S_{ext} existe y es única es probar que S_{ext} es estrictamente contractivo. Este parte de la demostración, pese a ser intuitivamente factible, es complicada y se refiere a la referencia [5] para ver la demostración completa.

En este punto se ha argumentado que existe un único punto fijo del mapeo S_{ext} que se define como el centro de masa y que está contenido en $Z(T)$. Dado que $Z'(T) \subset Z(T)$, el centro de masa podría ser una curva temporal, diferenciable y contenida en T más sin embargo, esto no está asegurado, ya que también podría estar en $Z(T) - Z'(T)$. La parte de la demostración en la que se verifica que, bajo las hipótesis de trabajo, la curva centro de masa es temporal, diferenciable e inextendible se omite en este trabajo pero, de nuevo, puede encontrarse en la referencia [5]. Cabe

⁶Formalmente los elementos de $Z(T)$ ni siquiera son curvas sino clases de equivalencia de curvas.

señalar que en este trabajo se construye explícitamente la curva centro de masa en la aproximación de gravedad linealizada con lo que es posible verificar que, a ese orden de aproximación, dicha curva existe, es única, diferenciable, inextendible y temporal. Es importante tener en mente que, en general, el centro de masa no es una geodésica del espacio-tiempo, de hecho, en el ejemplo presentado en la sección 3.4 esto se muestra explícitamente.

3.2.3. El centro de masa en términos de variables iniciales y sus primeras correcciones generadas por la curvatura

El objetivo es encontrar los paréntesis de Poisson entre las componentes espaciales del centro de masa en un espacio-tiempo curvo. Para lograrlo se repite la estrategia seguida en el caso de relatividad especial: se toma un objeto extendido compuesto por N partículas puntuales, masivas y libres y se calculan dichos paréntesis en términos de aquellos “canónicos” entre la posición y el momento en una hiper-superficie de datos iniciales Σ_0 (estos paréntesis de Poisson canónicos se obtienen en el apéndice D). Por tal motivo es necesario encontrar primero el centro de masa del objeto extendido en cuestión en términos de $q_{(i)} \in \Sigma_0$ y $p_{(i)}^a \in V_{q_{(i)}}$, que son, respectivamente, las posiciones y momentos iniciales de la i -ésima partícula. A continuación se describe el formalismo usado para encontrar el centro de masa como función de dichos datos iniciales, mismo que, por simplicidad, se estudia asumiendo que el tamaño del objeto extendido es mucho más pequeño que el radio de curvatura del espacio-tiempo, por lo que únicamente se considera la parte dominante de los efectos debidos a la curvatura.

Primero se describe la definición del centro de masa para el objeto extendido en cuestión. Se parte de tomar un punto x_0 y una 4-velocidad $U_0^a \in V_{x_0}$ arbitrarios y se buscan los vectores $\Xi_{(i)}^a(x_0, U_0) \in V_{x_0}$ (uno de ellos se muestra en la figura 3.2) tales que

$$g_{ab}(x_0)U_0^a\Xi_{(i)}^b(x_0, U_0) = 0, \quad (3.23)$$

$$\exp_{x_0}(\Xi_{(i)}(x_0, U_0)) = y_{(i)}(x_0, U_0), \quad (3.24)$$

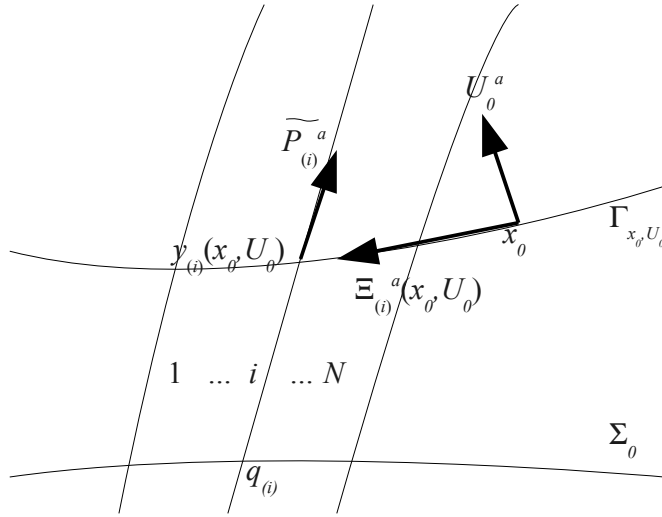


Figura 3.2: Un objeto extendido compuesto por N partículas de prueba, libres, puntuales y masivas. Se muestra también la hiper-superficie Σ_0 donde se conocen las posiciones iniciales $q_{(i)}$, la hiper-superficie de simultaneidad Γ_{x_0, U_0} asociada con la 4-velocidad $U_0^a \in V_{x_0}$ y la intersección de dicha hiper-superficie y la línea de mundo de la i -ésima partícula, $y_{(i)}$. Además, se incluye el momento $\tilde{P}_{(i)}^a \in V_{y_{(i)}}$ de la i -ésima partícula y el vector que contiene la información de la posición de dicha partícula respecto al punto x_0 en el instante asociado con U_0^a , denotado por $\Xi_{(i)}^a(x_0, U_0)$.

donde $y_{(i)}(x_0, U_0)$ es el punto que está en la intersección de la línea de mundo de la i -ésima partícula y la hiper-superficie Γ_{x_0, U_0} . Los vectores $\Xi_{(i)}^a(x_0, U_0)$ tienen la información de la posición de la i -ésima partícula al tiempo “instantáneo” asociado con U_0^a de acuerdo con la noción descrita al definir las superficies de simultaneidad.

El siguiente paso es llevar los momentos de cada partícula de $y_{(i)}(x_0, U_0)$, denotados por $\tilde{P}_{(i)}^a(x_0, U_0)$ (incluidos en la figura 3.2), al punto x_0 por transporte paralelo a lo largo de la única geodésica que une dichos puntos. Obsérvese que en este paso se hace un desvío de la receta original donde el momento de cada pedazo del objeto extendido está dado por $T^{ab}n_b$ que es el momento medido por un observador cuya

4-velocidad es normal a la hiper-superficie de integración y que no necesariamente coincide con $\tilde{P}_{(i)}^a(x_0, U_0)$. Sin embargo, es posible argumentar que esta diferencia es despreciable en el régimen perturbativo en el que se pretende trabajar. El momento de la i -ésima partícula transportado a x_0 se denota por $P_{(i)}^a(x_0, U_0)$. Sumando los momentos de cada partícula se obtiene un momento total en x_0 que depende de U_0^a y que se representa por $P^a(x_0, U_0)$.

La 4-velocidad $U^a(x_0) \in V_{x_0}$ del observador que ve al objeto extendido “lo más en reposo posible” se encuentra al resolver

$$U^a(x_0) = \frac{P^a(x_0, U(x_0))}{\sqrt{-g_{bc}(x_0)P^b(x_0, U(x_0))P^c(x_0, U(x_0))}}. \quad (3.25)$$

Esto se hace en todo punto $x \in T$ hasta encontrar el campo de 4-velocidades $U^a(x)$ asociado con observadores que ven al objeto extendido “lo más en reposo posible”. Con este campo se define al campo de momento total como

$$P^a(x) = P^a(x, U(x)). \quad (3.26)$$

Además, se define el campo de momento angular por

$$J^{ab}(x) = 2 \sum_{i=1}^N \Xi_{(i)}^{[a}(x, U(x)) P_{(i)}^{b]}(x, U(x)), \quad (3.27)$$

donde se usa que $\Xi_{(i)}^a(x, U(x))$ y $P_{(i)}^a(x)$ juegan el papel de la posición respecto a x y el momento de la i -ésima partícula, respectivamente.

Una vez construidos estos objetos, la forma más sencilla de encontrar la curva centro de masa, $X_M(\tau)$, es resolviendo la ecuación (3.21):

$$g_{ab}(X_M(\tau))P^a(X_M(\tau))J^{bc}(X_M(\tau)) = 0. \quad (3.28)$$

La hipótesis de que el tamaño del objeto extendido es mucho más pequeño que el radio de curvatura del espacio-tiempo justifica usar la aproximación y las coordenadas

discutidas en el apéndice B, por lo que las componentes de la métrica son de la forma

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(x) + O(\epsilon^2), \quad (3.29)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y ϵ es un parámetro pequeño que puede pensarse como extraído de las componentes del tensor de curvatura.

En este régimen es posible escribir a la geodésica parametrizada de forma afín por s con punto inicial q y tal que su tangente en q (respecto al parámetro afín s) es v^a de la forma

$$\gamma^\mu(s; q, v) = q^\mu + sv^\mu + \epsilon \delta \gamma^\mu(s; q, v) + O(\epsilon^2), \quad (3.30)$$

donde $\delta \gamma^\mu(0; q, v) = \partial_s \delta \gamma^\mu(0; q, v) = 0$. De hecho, dado que los símbolos de Christoffel cumplen

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{\epsilon}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\rho \delta g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma \delta g_{\rho\nu} - \partial_\nu \delta g_{\rho\sigma}) + O(\epsilon^2), \quad (3.31)$$

es fácil ver que la ecuación de geodésicas (parametrizadas de manera afín) implica

$$\epsilon \delta \gamma^\mu(s; q, v) = -v^\rho v^\sigma \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds'' \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(q + s''v). \quad (3.32)$$

Por otra parte, el transporte paralelo del vector $t^a \in V_q$ del punto q a $\gamma(s; q, v)$ a lo largo de la geodésica correspondiente, tiene componentes $\Pi_\nu^\mu(s; q, v)t^\nu$ donde

$$\Pi_\nu^\mu(s; q, v) = \delta_\nu^\mu + \epsilon \delta \Pi_\nu^\mu(s; q, v) + O(\epsilon^2), \quad (3.33)$$

con $\delta \Pi_\nu^\mu(0; q, v) = 0$. Más aún, usando la ecuación de transporte paralelo y los resultados obtenidos para la ecuación de geodésicas se nota que

$$\epsilon \delta \Pi_\nu^\mu(s; q, v) = -v^\rho \int_0^s ds' \Gamma_{\nu\rho}^\mu(q + s'v). \quad (3.34)$$

Obsérvese que con estas herramientas se puede calcular a orden ϵ cualquier geodésica y el transporte paralelo de un vector sobre geodésicas. A continuación se utilizan estos resultados para calcular el centro de masa a dicho orden.

Dados un punto x_0 y una 4-velocidad $U_0^a \in V_{x_0}$, existe $S_{(i)}(x_0, U_0)$ tal que la

línea de mundo de la i -ésima partícula, $\gamma_{(i)}(s; q_{(i)}, p_{(i)})$, evaluada a $s = S_{(i)}(x_0, U_0)$ se encuentra en la hiper-superficie Γ_{x_0, U_0} . Se denota dicho punto por

$$y_{(i)}(x_0, U_0) = \gamma_{(i)}(S_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)}), \quad (3.35)$$

y una vez se conoce es posible encontrar las componentes de $\Xi_{(i)}^a(x_0, U_0)$. Haciendo el ansatz

$$\Xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) = \xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) + \epsilon \delta \xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) + O(\epsilon^2), \quad (3.36)$$

$$S_{(i)}(x_0, U_0) = s_{(i)}(x_0, U_0) + \epsilon \delta s_{(i)}(x_0, U_0) + O(\epsilon^2), \quad (3.37)$$

las ecuaciones (3.23) y (3.24) se reescriben como

$$0 = U_0 \cdot \xi_{(i)}(x_0, U_0) + \epsilon U_0 \cdot \delta \xi_{(i)}(x_0, U_0) + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(x_0) U_0^\mu \xi_{(i)}^\nu(x_0, U_0) + O(\epsilon^2), \quad (3.38)$$

$$0 = -x_0^\mu - \xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) - \epsilon \delta \xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) - \epsilon \delta \gamma^\mu(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0)) + q_{(i)}^\mu \\ + (s_{(i)}(x_0, U_0) + \epsilon \delta s_{(i)}(x_0, U_0)) p_{(i)}^\mu + \epsilon \delta \gamma^\mu(s_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)}) + O(\epsilon^2), \quad (3.39)$$

donde \cdot representa el producto con la métrica η . De esta última ecuación y a orden ϵ^0 se obtiene

$$\xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) = -x_0^\mu + q_{(i)}^\mu + s_{(i)}(x_0, U_0) p_{(i)}^\mu. \quad (3.40)$$

Al mismo orden la condición (3.38) implica

$$s_{(i)}(x_0, U_0) = \frac{(x_0 - q_{(i)}) \cdot U_0}{p_{(i)} \cdot U_0}. \quad (3.41)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.38) y (3.39) se llega a

$$\delta s_{(i)}(x_0, U_0) = \frac{1}{U_0 \cdot p_{(i)}} \left[-U_0 \cdot \delta \gamma(s_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)}) \right. \\ \left. + U_0 \cdot \delta \gamma(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0)) - \delta g_{\mu\nu}(x_0) U_0^\mu \xi_{(i)}^\nu(x_0, U_0) \right], \quad (3.42)$$

$$\delta\xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0) = \delta s_{(i)}(x_0, U_0)p_{(i)}^\mu + \delta\gamma^\mu(s_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)}) - \delta\gamma^\mu(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0)), \quad (3.43)$$

por lo que se han calculado $\Xi_{(i)}^\mu(x_0, U_0)$ y $S_{(i)}(x_0, U_0)$ a primer orden en ϵ .

Según la receta del centro de masa ahora es necesario llevar el momento de la i -ésima partícula del punto $y_{(i)}(x_0, U_0)$, denotado $\tilde{P}_{(i)}^\mu(x_0, U_0)$, al punto x_0 haciendo transporte paralelo a lo largo de la única geodésica que une dichos puntos. Dado que en una geodésica su vector tangente se transporta paralelamente, se tiene

$$\tilde{P}_{(i)}^\mu(x_0, U_0) = p_{(i)}^\mu + \epsilon\delta\Pi_\nu^\mu(s_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)})p_{(i)}^\nu + O(\epsilon^2). \quad (3.44)$$

Sea $P_{(i)}^\mu(x_0, U_0)$ el vector que se obtiene al transportar paralelamente a $\tilde{P}_{(i)}^\mu(x_0, U_0)$ al punto x_0 a lo largo de la geodésica que conecta los puntos inicial y final, entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(i)}^\mu(x_0, U_0) &= \Pi_\nu^\mu(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0))P_{(i)}(x_0, U_0)^\nu \\ &= P_{(i)}^\mu(x_0, U_0) + \epsilon\delta\Pi_\nu^\mu(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0))p_{(i)}^\nu + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde se usa que al transportar paralelamente un vector a lo largo de una trayectoria cerrada que no encierra área se obtiene el vector original y que $P_{(i)}^\mu(x_0, U_0) = p_{(i)}^\mu + O(\epsilon)$. Despejando y usando la ecuación (3.44) se encuentra

$$P_{(i)}^\mu(x_0, U_0) = p_{(i)}^\mu + \epsilon\delta\Pi_\nu^\mu(s_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)})p_{(i)}^\nu - \epsilon\delta\Pi_\nu^\mu(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0))p_{(i)}^\nu + O(\epsilon^2), \quad (3.46)$$

que es el vector buscado.

De acuerdo con la discusión anterior, el momento total en x_0 asociado a U_0^a es

$$P^\mu(x_0, U_0) = \sum_{i=1}^N P_{(i)}^\mu(x_0, U_0). \quad (3.47)$$

Es fácil demostrar que la parte a orden ϵ^0 del momento total está dada por $p^\mu = \sum_{i=1}^N p_{(i)}^\mu$. Sea $\epsilon\delta p^\mu(x_0, U_0(x_0))$ tal que $P^\mu(x_0, U_0(x_0)) = p^\mu + \epsilon\delta p^\mu(x_0, U_0(x_0)) + O(\epsilon^2)$,

entonces se tiene

$$\epsilon \delta p^\mu(x_0, U_0(x_0)) = \epsilon \sum_{i=1}^N [\delta \Pi_\nu^\mu(s_{(i)}(x_0, U_0); q_{(i)}, p_{(i)}) - \delta \Pi_\nu^\mu(1; x_0, \xi_{(i)}(x_0, U_0))] p_{(i)}^\nu. \quad (3.48)$$

Para buscar el campo de 4-velocidades $U^\mu(x)$ que satisface la ecuación (3.25) se hace el ansatz $U^\mu(x) = u^\mu + \epsilon \delta u^\mu(x) + O(\epsilon^2)$. A orden cero se encuentra que $u^\mu = p^\mu/m$ con $m \equiv \sqrt{-p \cdot p}$. La parte proporcional a ϵ es entonces

$$\begin{aligned} \epsilon \delta u^\mu(x) &= -u^\mu + \frac{p^\mu + \epsilon \delta p^\mu(x, u)}{\sqrt{-g_{\rho\sigma}(x)(p^\rho + \epsilon \delta p^\rho(x, u))(p^\sigma + \epsilon \delta p^\sigma(x, u))}} \\ &= \epsilon u^\mu \left(\frac{1}{2} \delta g_{\rho\sigma}(x) u^\rho u^\sigma + u \cdot \frac{\delta p(x, u)}{m} \right) + \epsilon \frac{\delta p^\mu(x, u)}{m}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

con lo que se tiene el campo vectorial $U^a(x)$ al orden al que se está trabajando.

El momento angular total se calcula a partir de la ecuación (3.27) y la parte a orden ϵ^0 queda dada por

$$j^{\mu\nu}(x) = 2 \sum_{i=1}^N \xi_{(i)}^{[\mu}(x, u) p_{(i)}^{\nu]} = m^{\mu\nu} - 2x^{[\mu} p^{\nu]}, \quad (3.50)$$

siendo $m^{\mu\nu} \equiv 2 \sum_{i=1}^N q_{(i)}^{[\mu} p_{(i)}^{\nu]}$. Debido a que el campo $U^a(x)$ tiene una corrección a orden ϵ se tiene que

$$\begin{aligned} s_{(i)}(x, U) &= \frac{(x - q_{(i)}) \cdot U}{p_{(i)} \cdot U} \\ &= s_{(i)}(x, u) - \epsilon \frac{\xi_{(i)}(x, u) \cdot \delta u}{p_{(i)} \cdot u} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{(i)}^\mu(x, U) &= -x^\mu + q_{(i)}^\mu + s_{(i)}(x, U) p_{(i)}^\mu + \epsilon \delta \xi_{(i)}^\mu(x, u) + O(\epsilon^2) \\ &= \Xi_{(i)}^\mu(x, u) - \epsilon \frac{\xi_{(i)}(x, u) \cdot \delta u}{p_{(i)} \cdot u} p_{(i)}^\mu + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde δu^μ está evaluado en x . Tomando en cuenta estas correcciones y definiendo

$\epsilon \delta j^{\mu\nu}(x)$ tal que $J^{\mu\nu}(x) = j^{\mu\nu}(x) + \epsilon \delta j^{\mu\nu}(x) + O(\epsilon^2)$, es posible escribir

$$\begin{aligned} \epsilon \delta j^{\mu\nu}(x) = & 2\epsilon \sum_{i=1}^N \left[\xi_{(i)}^{[\mu}(x, u) (\delta \Pi_{\rho}^{\nu]}(s_{(i)}(x, u); q_{(i)}, p_{(i)}) p_{(i)}^{\rho} \right. \\ & \left. - \delta \Pi_{\rho}^{\nu]}(1; x, \xi_{(i)}(x, u)) p_{(i)}^{\rho} + \delta \xi_{(i)}^{[\mu}(x, u) p_{(i)}^{\nu]} \right], \end{aligned}$$

con lo que también se ha calculado el momento angular total al orden de interés.

Para encontrar la curva centro de masa se utiliza la ecuación (3.28), misma que, usando las expansiones en ϵ y la ecuación (3.50), se traduce en

$$\begin{aligned} 0 = & [\eta_{\mu\nu}(p^{\mu} + \epsilon \delta p^{\mu}(X_M)) + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(X_M) p^{\mu}] (m^{\nu\rho} - X_M^{\nu} p^{\rho} + p^{\nu} X_M^{\rho}) \\ & + \epsilon \eta_{\mu\nu} p^{\mu} \delta j^{\nu\rho}(X_M) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como se hace en la sección 3.2.1, se busca la curva centro de masa en la parametrización donde $X_M^0(\tau) = \tau$. Despejando la parte proporcional a X_M^{μ} de la componente cero de la ecuación (3.53) y sustituyendo en esa misma ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = & [\eta_{\mu\nu}(p^{\mu} + \epsilon \delta p^{\mu}(X_M)) + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(X_M) p^{\mu}] \left(m^{\nu\rho} - \frac{p^{\rho}}{p^0} m^{\nu 0} + p^{\nu} X_M^{\rho} - \frac{p^{\rho}}{p^0} p^{\nu} \tau \right) \\ & + \epsilon \eta_{\mu\nu} p^{\mu} \left(\delta j^{\nu\rho}(X_M) - \frac{p^{\rho}}{p^0} \delta j^{\nu 0}(X_M) \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Haciendo el ansatz $X_M^{\mu} = x_M^{\mu} + \epsilon \delta x_M^{\mu}$ y estudiando el orden ϵ^0 se encuentra

$$x_M^{\rho}(\tau) = \tau \frac{p^{\rho}}{p^0} + \frac{1}{m^2} \eta_{\mu\nu} p^{\mu} \left(m^{\nu\rho} - \frac{p^{\rho}}{p^0} m^{\nu 0} \right), \quad (3.55)$$

que, como es de esperarse, es precisamente la expresión de la curva centro de masa (3.9) obtenida en la sección 3.2.1. A orden ϵ se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon \delta x_M^{\rho} = & \frac{1}{m^2} [\eta_{\mu\nu} \epsilon \delta p^{\mu}(x_M) + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(x_M) p^{\mu}] \left(m^{\nu\rho} - \frac{p^{\rho}}{p^0} m^{\nu 0} + p^{\nu} x_M^{\rho} - \frac{p^{\rho}}{p^0} p^{\nu} \tau \right) \\ & + \epsilon \frac{1}{m^2} \eta_{\mu\nu} p^{\mu} \left(\delta j^{\nu\rho}(x_M) - \frac{p^{\rho}}{p^0} \delta j^{\nu 0}(x_M) \right), \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde x_M está evaluado en τ y está dado por la ecuación (3.55). De esta forma se ha encontrado la expresión de la curva centro de masa a primer orden en el parámetro ϵ , para una métrica general y para una colección de partículas puntuales, libres y masivas. Como se muestra en el ejemplo presentado en la sección 3.4, el centro de masa no es una geodésica del espacio-tiempo. Esto motiva la siguiente sección donde se estudia la posibilidad de que exista una “geometría efectiva” tal que el centro de masa sea una geodésica de dicha geometría.

3.3. Geometría efectiva extraída con objetos extendidos

Como se demuestra en la sección 3.2.2, sobre cualquier punto de la curva centro de masa, $X_M(\tau)$, el campo vectorial $V^a(x) \equiv g_{bc}(x)P^b(x)J^{ca}(x)$ se anula. Esta es la propiedad que se utiliza para extraer la geometría efectiva por medio de un objeto extendido. Suponiendo que no hay fuerzas externas y definiendo $T^a(\tau)$ como la tangente a $X_M(\tau)$, entonces para todo τ se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b V^a) \Big|_{X_M(\tau)} \\
&= (T^c \nabla_c T^b) \nabla_b V^a \Big|_{X_M(\tau)} + T^b T^c \nabla_b \nabla_c V^a \Big|_{X_M(\tau)} \\
&= (\dot{T}^b + \Gamma_{cd}^b T^c T^d) (\partial_b V^a + \Gamma_{bc}^a V^c) \Big|_{X_M(\tau)} + T^b T^c \nabla_b (\partial_c V^a + \Gamma_{cd}^a V^d) \Big|_{X_M(\tau)} \\
&= \dot{T}^b W_b^a + T^b T^c (S_{bc}^a + 2\Gamma_{db}^a M_c^d), \tag{3.57}
\end{aligned}$$

donde se utiliza repetidamente el hecho de que $V^a(X_M(\tau)) = 0$, se definen $\dot{T}^a \equiv T^b \partial_b T^a$, $W_b^a \equiv \partial_b V^a \Big|_{X_M(\tau)}$ y $S_{bc}^a \equiv \partial_{(b} \partial_{c)} V^a \Big|_{X_M(\tau)}$ y se omite el argumento que recuerda que los Γ_{bc}^a están evaluados en X_M .

Para llegar a una ecuación de tipo geodésicas y así poder leer los símbolos de Christoffel efectivos (*i.e.*, aquellos que si se usan en una ecuación tipo geodésicas, tienen como solución al centro de masa), se busca invertir el tensor W_b^a que multiplica a \dot{T}^a . Por simplicidad, se verifica que esto sea posible únicamente en espacio-tiempos que son prácticamente planos, en los que está justificado usar coordenadas normales

asociadas con una curva, en las que la métrica toma la forma (ver el apéndice B)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(x) + O(\epsilon^2). \quad (3.58)$$

Si se desprecian por un momento los términos proporcionales a ϵ , se puede trabajar con un sistema de coordenadas Minkowskiano adaptado al campo que ve al objeto extendido en reposo, es decir, un sistema de coordenadas tal que

$$u^a(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^a. \quad (3.59)$$

Debido a que

$$V^\mu(x) = \eta_{\rho\sigma} p^\rho j^{\mu\sigma}(x) + O(\epsilon) = \eta_{\rho\sigma} p^\rho m^{\mu\sigma} - 2\eta_{\rho\sigma} p^\rho x^{[\mu} p^{\sigma]} + O(\epsilon), \quad (3.60)$$

se tiene que

$$W_\rho{}^\mu = m^2(\delta_\rho^\mu + \delta_\rho^0 \delta_0^\mu) + O(\epsilon), \quad (3.61)$$

donde se usa que $p^\mu = m\delta_0^\mu$ y $m^{\mu\nu}$ son constantes, ya que se supone que no hay fuerzas externas. En particular se nota que $W_0{}^\mu = O(\epsilon)$, con lo que se muestra que $W_\rho{}^\mu$ no es invertible al orden que se está trabajando. Sin embargo, como se muestra más adelante, para encontrar los símbolos de Christoffel efectivos es suficiente invertir la parte espacial de $W_\mu{}^\nu$, es decir, la matriz 3×3 cuyas componentes son $W_i{}^j = m^2\delta_i^j + O(\epsilon)$ y que es claramente invertible. Observando que se cuenta con la libertad de reparametrizar la curva centro de masa y haciéndolo de forma que

$$g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = -1, \quad (3.62)$$

se obtiene

$$\dot{T}^0 = \dot{T}^i \frac{T_i}{T^0} + O(\epsilon), \quad (3.63)$$

por lo que basta encontrar una ecuación de tipo geodésicas para \dot{T}^i , misma que puede calcularse si se invierte $W_i{}^j$.

Escribiendo $W_\rho{}^\mu = m^2(\delta_\rho^\mu + \delta_\rho^0 \delta_0^\mu) + \epsilon \delta w_\rho{}^\mu + O(\epsilon^2)$, la componente i de la ecuación

(3.57) toma la forma

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{T}^0 W_0^i + \dot{T}^j W_j^i + T^\mu T^\nu (S_{\mu\nu}^i + 2\Gamma_{\rho\mu}^i W_\nu^\rho) \\
&= m^2 \dot{T}^j \left(\delta_j^i + \epsilon \frac{T_j}{m^2 T^0} \delta w_0^i + \epsilon \frac{1}{m^2} \delta w_j^i \right) \\
&\quad + T^\mu T^\nu (S_{\mu\nu}^i + 2m^2 \Gamma_{\rho\mu}^i (\delta_\nu^\rho + \delta_0^\rho \delta_\nu^0)) + O(\epsilon^2), \tag{3.64}
\end{aligned}$$

donde se usa la ecuación (3.63) y el hecho que $\Gamma_{\rho\mu}^i = O(\epsilon)$. El objeto que multiplica a \dot{T}^j se puede invertir trivialmente, con lo que se llega a

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{T}^k + T^\mu T^\nu \left(\delta_i^k - \epsilon \frac{T_i}{m^2 T^0} \delta w_0^k - \epsilon \frac{1}{m^2} \delta w_i^k \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{m^2} S_{\mu\nu}^i + 2\Gamma_{\rho\mu}^i (\delta_\nu^\rho + \delta_0^\rho \delta_\nu^0) \right) + O(\epsilon^2) \\
&= \dot{T}^k + T^\mu T^\nu \left(\frac{1}{m^2} S_{\mu\nu}^k + 2\Gamma_{\rho\mu}^k (\delta_\nu^\rho + \delta_0^\rho \delta_\nu^0) \right) + O(\epsilon^2). \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Obsérvese que el último paso se sigue de $S_{\mu\nu}^k = O(\epsilon)$ y $\Gamma_{\rho\mu}^k = O(\epsilon)$. Además, combinando las ecuaciones (3.63) y (3.65) es posible obtener

$$0 = \dot{T}^0 + T^\mu T^\nu \left(\frac{1}{m^2} S_{\mu\nu}^k + 2\Gamma_{\rho\mu}^k (\delta_\nu^\rho + \delta_0^\rho \delta_\nu^0) \right) \frac{T_k}{T^0} + O(\epsilon^2). \tag{3.66}$$

Usando las ecuaciones (3.65) y (3.66) se nota que el centro de masa sigue una ecuación de tipo geodésicas, es decir, una de la forma

$$0 = \dot{T}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma T^\mu T^\nu, \tag{3.67}$$

en la que los símbolos de Christoffel efectivos están dados por

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma = \left(\delta_k^\sigma + \delta_0^\sigma \frac{T_k}{T^0} \right) \left(\frac{1}{m^2} S_{\mu\nu}^k + 2\Gamma_{\rho\mu}^k (\delta_\nu^\rho + \delta_0^\rho \delta_\nu^0) \right) + \gamma_{\mu\nu}^\sigma + O(\epsilon^2), \tag{3.68}$$

donde $\gamma_{\mu\nu}^\sigma$ es un tensor indeterminado tal que $\gamma_{\mu\nu}^\sigma T^\mu T^\nu = 0$.

Es notable que con este cálculo relativamente simple se puede extraer una parte

de la geometría efectiva que se “leería” al explorar el espacio-tiempo con objetos extendidos. Además, resulta que en el límite de relatividad especial el efecto generado por los símbolos de Christoffel efectivos se anula, lo que es consistente con el resultado que el centro de masa en dicho límite sigue geodésicas. Este hecho por sí sólo es interesante ya que dice que si no hay curvatura, con cualquier objeto extendido se puede explorar el espacio-tiempo y hacer una medición acertada de la geometría. En el caso que hay curvatura resulta interesante que, además de la contribución de la métrica a los $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}$, hay un efecto, codificado en $S_{\rho\sigma}^{\mu}$, debido al momento y el momento angular total del objeto extendido, lo que indica que la geometría que se extrae al usar objetos extendidos depende de las características de los mismos.

La libertad de fijar los $\gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$ puede entenderse por el hecho que el procedimiento no extrae todos los símbolos de Christoffel efectivos sino únicamente aquellos a lo largo de la tangente al centro de masa. Es importante notar que esto mismo sucede en el caso idealizado en el que se intenta conocer la geometría del espacio-tiempo con partículas puntuales: para conocer toda la geometría en la vecindad de un punto se deben hacer pasar varias partículas puntuales y libres de forma que pasen por dicho punto con distintas tangentes (*i.e.*, distintos momentos). No obstante, parece que no se puede hacer lo mismo con objetos extendidos ya que la geometría que se extrae siguiendo el centro de masa depende de su momento total, por lo que con cada objeto extendido se mide una geometría efectiva distinta. Esto implica que con este método no es posible “leer” la geometría efectiva en la vecindad de un punto, y dado que únicamente tiene sentido hablar de la geometría extraída usando partículas reales, sugiere que la geometría, en principio, no puede ser medida.

Como se ve en el ejemplo discutido en la siguiente sección, la geometría efectiva difiere de la geometría “real” del espacio-tiempo por una cantidad muy pequeña, lo que explica el hecho que las observaciones concuerden con las predicciones de la relatividad general. Sin embargo, en la situación hipotética en la que se explora una región microscópica del espacio-tiempo, como se debe hacer con partículas cuánticas, parece que no es posible extraer toda la información geométrica. Esto motiva la idea de que los grados de libertad de una teoría de la gravedad válida a escalas microscópicas no son geométricos.

De hecho, la única forma en la que parece factible extraer toda la geometría efectiva en un punto es si se hace perturbativamente, ya que en ese caso el efecto de la rotación es despreciable, o si se tiene un espacio-tiempo donde la curvatura está concentrada en una región y los objetos extendidos se “tiran” desde la región plana. En la región plana se saben rotar de forma rígida los objetos extendidos y la idea es que entonces se lanzarían objetos extendidos “iguales” pero rotados. Suponiendo que se tienen todos símbolos de Christoffel efectivos en una vecindad del punto, se puede calcular el tensor de Riemann en dicho punto con lo que se pueden expresar las componentes de la métrica en dicha vecindad en coordenadas normales de Riemann. A continuación se presenta un cálculo concreto donde se obtienen, entre otras cosas, los símbolos de Christoffel efectivos en la dirección de la tangente al centro de masa y se observa cómo éstos dependen de las características del objeto extendido usado.

3.4. Un ejemplo

Para hacer un cálculo concreto se toma un objeto extendido que se propaga un espacio-tiempo tal que la métrica, en coordenadas de Fermi asociadas con una geodésica, toma la forma simple (ver el apéndice B)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \left(1 - \frac{\epsilon}{18} R x^i x^j \delta_{ij} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.69)$$

donde R es una constante tal que el escalar de Ricci cumple $\epsilon R + O(\epsilon^2)$. Los símbolos de Christoffel no-nulos asociados con este sistema de coordenadas son

$$\Gamma_{00}^i(t, \vec{x}) = -\frac{\epsilon R}{18} x^i + O(\epsilon^2), \quad (3.70)$$

$$\Gamma_{0i}^0(t, \vec{x}) = \frac{\epsilon R}{18} x_i + O(\epsilon^2), \quad (3.71)$$

$$\Gamma_{jk}^i(t, \vec{x}) = \frac{\epsilon R}{18} (\delta_{jk} x^i - \delta_j^i x_k - \delta_k^i x_j) + O(\epsilon^2), \quad (3.72)$$

donde al orden de interés los índices latinos se “bajan” con la identidad. Con estas expresiones los operadores descritos en la sección 3.2.3 toman la forma

$$\epsilon\delta\gamma^0(s; q, v) = -\frac{\epsilon R}{18}v^0v^i\left(s^2q_i + \frac{s^3}{3}v_i\right), \quad (3.73)$$

$$\epsilon\delta\gamma^i(s; q, v) = \frac{\epsilon R}{18}\left(v^iv_j - \frac{1}{2}\delta_j^iv \cdot v\right)\left(s^2q^j + \frac{s^3}{3}v^j\right), \quad (3.74)$$

$$\epsilon\delta\Pi_0^0(s; q, v) = -\frac{\epsilon R}{18}v^i\left(sq_i + \frac{s^2}{2}v_i\right), \quad (3.75)$$

$$\epsilon\delta\Pi_i^0(s; q, v) = -\frac{\epsilon R}{18}v^0\left(sq_i + \frac{s^2}{2}v_i\right), \quad (3.76)$$

$$\epsilon\delta\Pi_0^i(s; q, v) = \frac{\epsilon R}{18}v^0\left(sq^i + \frac{s^2}{2}v^i\right), \quad (3.77)$$

$$\epsilon\delta\Pi_j^i(s; q, v) = -\frac{\epsilon R}{18}\left[sv_jq^i - sv^iq_j - \delta_j^iv^k\left(sq_k + \frac{s^2}{2}v_k\right)\right]. \quad (3.78)$$

Se asume que el objeto extendido está conformado por dos partículas (de prueba) libres, masivas y puntuales, que están en reposo en la superficie de datos iniciales (compuesta por los puntos con coordenada $t = 0$), que tienen la misma masa, $m/2$, y que inicialmente se encuentran separadas por una distancia a en dirección de la coordenada x^1 . Más concretamente, los datos iniciales son:

$$q_{(1)}^\mu = 0, \quad q_{(2)}^\mu = a\delta_1^\mu, \quad p_{(1)}^\mu = p_{(2)}^\mu = \frac{m}{2}\delta_0^\mu. \quad (3.79)$$

Siguiendo la receta del centro de masa en el régimen linealizado y en términos de datos iniciales (dada en la sección 3.2.3), el centro de masa del sistema es

$$X_M^\mu(\tau) = \left(\tau, \frac{a}{2} + \epsilon\lambda, \epsilon\lambda, \epsilon\lambda\right) + O(\epsilon^2), \quad (3.80)$$

donde

$$\lambda \equiv \frac{Ra}{72}\left(\tau^2 + \frac{a^2}{4}\right). \quad (3.81)$$

Nótese que el centro de masa está parametrizado de forma que $X^0(\tau) = \tau$. Además, en el límite de relatividad especial el centro de masa se encuentra en reposo en el

punto $x^i = \delta_1^i a/2$, que es precisamente lo que se esperaba. También es importante mencionar que las correcciones al centro de masa debidas a la curvatura van como ϵRa , que por hipótesis es una cantidad pequeña. Más aún, si se toma el límite en el que el tamaño del objeto extendido, a , va a cero, entonces el centro de masa es una geodésica. No se ha hecho mención anteriormente pero en espacio-tiempos con curvatura la tangente a la curva centro de masa no coincide con el momento total normalizado sobre dicha curva. Esto se puede mostrar explícitamente en este ejemplo ya que la 4-velocidad del sistema “que ve al objeto extendido lo más en reposo posible”, que es proporcional al momento total, es

$$U^\mu(X_M) = \delta_0^\mu \left(1 + \epsilon \frac{Ra^2}{144} \right) + \delta_1^\mu \epsilon \frac{Ra\tau}{36}, \quad (3.82)$$

que evidentemente no coincide con la tangente (normalizada) del centro de masa. Este es un ejemplo de una propiedad que satisface el centro de masa en relatividad especial y que no se sigue cumpliendo en el caso en el que hay curvatura.

Más aún, de los resultados del apéndice D se sigue

$$\{q_{(m)}^i, q_{(n)}^j\} = O(\epsilon^2), \quad (3.83)$$

$$\{q_{(m)}^i, p_{(n)}^j\} = \delta_{mn} \delta^{ij} \left(1 + \frac{\epsilon R}{18} q_{(m)}^k \delta_{kl} q_{(m)}^l \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.84)$$

$$\{q_{(m)}^i, p_{(n)}^0\} = \delta_{mn} \frac{p_{(m)}^i}{p_{(m)}^0} \left(1 - \frac{\epsilon R}{18} q_{(m)}^j \delta_{jk} q_{(m)}^k \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.85)$$

$$\{p_{(m)}^0, p_{(n)}^i\} = \delta_{mn} \frac{\epsilon R}{18 p_{(m)}^0} \left(m_{(m)}^2 q_{(m)}^i - 2 p_{(m)}^i q_{(m)}^j \delta_{jk} p_{(m)}^k \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.86)$$

$$\{p_{(m)}^i, p_{(n)}^j\} = -4 \delta_{mn} \frac{\epsilon R}{18} q_{(m)}^{[i} p_{(m)}^{j]} + O(\epsilon^2), \quad (3.87)$$

donde se supone que los paréntesis de Poisson entre partículas distintas se anulan. Además, hay que recordar que $q_{(m)}^0 = 0$ y τ tienen paréntesis de Poisson nulos con los demás objetos. Estas expresiones permiten calcular los paréntesis de Poisson entre

las componentes del centro de masa a orden lineal. Es fácil notar que

$$\{X_M^i, X_M^j\} = \{x_M^i, x_M^j\} + \epsilon\{x_M^i, \delta x_M^j\} + \epsilon\{\delta x_M^i, x_M^j\} + O(\epsilon^2), \quad (3.88)$$

por lo que basta calcular $\{x_M^i, x_M^j\}$ con las ecuaciones (3.83-3.87), mientras que $\{x_M^i, \delta x_M^j\}$ se puede obtener con la precisión necesaria usando esas mismas ecuaciones pero despreciando los términos $O(\epsilon)$. Al hacer esto y evaluar el resultado en los datos iniciales dados en (3.79), se obtiene que, para este caso particular,

$$\{X_M^i, X_M^j\} = O(\epsilon^2). \quad (3.89)$$

Dado que el espín del objeto extendido y tensor de Weyl del espacio-tiempo son cero (al orden que se está trabajando), esta última ecuación sugiere que $\{X_M^i, X_M^j\}$ podría depender de estas dos cantidades, lo que además es consistente con lo obtenido en relatividad especial.

Por último, si el centro de masa fuera una geodésica del espacio-tiempo (no necesariamente parametrizada de manera afín), entonces tendría que satisfacer la ecuación

$$\alpha \dot{X}_M^\mu = \ddot{X}_M^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{X}_M^\rho \dot{X}_M^\sigma, \quad (3.90)$$

donde los puntos son derivadas respecto al parámetro τ y α es una función arbitraria sobre la curva centro de masa. La componente cero de esta ecuación es

$$\alpha = \Gamma_{\rho\sigma}^0 \dot{X}_M^\rho \dot{X}_M^\sigma = \frac{\epsilon R}{9} (X_M)_i \dot{X}_M^0 \dot{X}_M^i + O(\epsilon^2) = O(\epsilon^2), \quad (3.91)$$

donde se usan las ecuaciones (3.70-3.72) y el hecho que $\dot{X}_M^i = O(\epsilon)$. Por tal motivo, para que el centro de masa sea una geodésica es necesario que las componentes espaciales de la ecuación (3.90) cumplan

$$0 = \ddot{X}_M^i + \Gamma_{00}^i (\dot{X}_M^0)^2 + \Gamma_{jk}^i \dot{X}_M^j \dot{X}_M^k + O(\epsilon^2) = \ddot{X}_M^i + \Gamma_{00}^i + O(\epsilon^2) = \ddot{X}_M^i - \frac{\epsilon Ra}{36} \delta_1^i + O(\epsilon^2). \quad (3.92)$$

Esta ecuación se satisface para la componente $i = 1$, pero no para el resto de las

componentes espaciales. De hecho, para que se cumpla la ecuación anterior habría que reemplazar

$$\Gamma_{00}^1(X_M) \rightarrow \tilde{\Gamma}_{00}^1(X_M) = \Gamma_{00}^1(X_M) + O(\epsilon^2), \quad (3.93)$$

$$\Gamma_{00}^2(X_M) \rightarrow \tilde{\Gamma}_{00}^2(X_M) = \Gamma_{00}^2(X_M) - \frac{\epsilon Ra}{36} + O(\epsilon^2), \quad (3.94)$$

$$\Gamma_{00}^3(X_M) \rightarrow \tilde{\Gamma}_{00}^3(X_M) = \Gamma_{00}^3(X_M) - \frac{\epsilon Ra}{36} + O(\epsilon^2). \quad (3.95)$$

Si se hacen estas sustituciones en la ecuación (3.90), dejando el resto de los símbolos de Christoffel intactos, se tiene la ecuación de tipo geodésicas satisfecha por el centro de masa, por lo que se ha obtenido la geometría efectiva descrita en la sección anterior. En este caso fue fácil encontrar parte de la geometría efectiva “leída” por el centro de masa y no fue necesario llevar a cabo el procedimiento discutido en la sección 3.3. Dado que los $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu$ dependen de a , se observa explícitamente que la geometría efectiva es distinta según sea el tamaño del objeto extendido, como se anticipa en la sección 3.3. Más aún, se nota explícitamente que de todos los $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu$ este procedimiento únicamente permite extraer los $\Gamma_{00}^i(X_M)$, lo que también se menciona en la sección anterior.

El trabajo presentado en este capítulo conlleva conclusiones interesantes sobre la geometría del espacio-tiempo y la forma como ésta se puede explorar. Sin embargo, todavía quedan muchas cosas por investigar en esta dirección, algunas de las cuales se enumeran en la siguiente sección.

3.5. ¿Qué sigue?

En esta sección se enumeran algunas direcciones por las que se podría continuar este trabajo así como algunas preguntas que podrían atacarse.

Objetos extendidos más realistas y geometrías más generales

Una dirección en la que se puede continuar el trabajo presentado en este capítulo es sustituyendo la colección de partículas puntuales que conforman al objeto extendi-

do por un fluido perfecto. En este caso se podría comparar al centro de masa con las cantidades geométricas que describen a una congruencia de geodésicas, mismas que satisfacen la ecuación de Raychaudhuri [57]. También se pueden estudiar espacio-tiempos más generales para investigar, por ejemplo, cómo se relaciona la geometría efectiva con las propiedades de los objetos extendidos. De hecho, con el tratamiento perturbativo descrito en este capítulo, se podría extraer toda la geometría efectiva en un punto ya que las correcciones de “rotar” a los objetos extendidos serían del orden que se desprecia, lo que permitiría indagar la posibilidad de definir covariantemente una geometría promedio al menos en dicho régimen, que es un concepto interesante por sí mismo.

Asociatividad en la definición del centro de masa

Como se menciona en la sección 3.2.1, la receta del centro de masa no es “asociativa”, es decir, al calcular el centro de masa de un objeto extendido compuesto por partículas puntuales, no es posible, en general, obtener primero el centro de masa de un subconjunto de dichas partículas y usar este punto para representar al subconjunto cuando se realiza el cálculo del centro de masa de todo el objeto extendido. En la referencia [12] se describe la causa en el caso en que el espacio-tiempo es plano: la receta del centro de masa utilizada considera únicamente partículas puntuales, que no tienen espín, pero un conjunto de partículas puntuales puede tener espín, mismo que no se toma en cuenta al representarlo por su centro de masa. La propuesta hecha en la referencia [12] es incluir el espín de cada componente del objeto extendido al calcular el momento total y después utilizar la ecuación (3.12) para encontrar el centro de masa. Resulta que con esta modificación, el centro de masa se vuelve asociativo por lo que sería interesante investigar si es posible hacer algo similar en la definición del centro de masa en relatividad general para que también sea asociativa.

¿Y las partículas cuánticas?

En una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo general el tensor de energía-momento del campo cuántico es un operador y es de esperarse que con él se

pueda realizar la construcción del centro de masa. En este caso el centro de masa sería un operador que podría ser pensado como el operador posición. El hecho de que clásicamente las componentes espaciales del centro de masa tienen paréntesis de Poisson no-nulos entre sí implica que no es posible medir simultáneamente y con infinita precisión todas las componentes de la posición de un sistema cuántico.

Lo primero que se propone es investigar la relación general que satisfacen los paréntesis de Poisson de las componentes del centro de masa. Este es un cálculo complicado porque los paréntesis de Poisson están asociados con el formalismo Hamiltoniano, mismo que requiere de una foliación del espacio-tiempo. Por el contrario, la definición del centro de masa se basa en un campo vectorial (el de las 4-velocidades de los observadores que verían al objeto extendido “lo más en reposo posible”) que en general no es globalmente ortogonal a hiper-superficies, por lo que no hay una foliación natural del espacio-tiempo asociada con un objeto extendido. De hecho, se sabe del caso en el que el espacio-tiempo es plano que dichos paréntesis dependen del espín del objeto extendido, por lo que parece interesante estudiar las implicaciones cuánticas de este resultado. Además, se espera que estos paréntesis de Poisson también dependan de la curvatura en el entorno del objeto, por lo que, recordando que el principio de equivalencia únicamente se satisface para partículas puntuales, parece entonces que la misma curvatura podría indicar cuándo es posible hacer que su efecto sobre un estado del campo cuántico “desaparezca”.

Vale la pena aclarar que el operador posición así construido no sería la generalización del operador de posición para mecánica cuántica relativista definido por Newton y Wigner (descrito en el apéndice E), ya que para este último sus distintas componentes conmutan entre sí. Además, no hay forma de traducir el formalismo de Newton y Wigner a espacios curvos ya que éste utiliza el operador de traslaciones espacio-temporales que no se sabe definir cuando hay curvatura.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se estudian posibles manifestaciones de una presunta estructura discreta del espacio-tiempo y la forma como se puede explorar su geometría con partículas reales. En particular, se asume que la relatividad general no es una teoría fundamental y se buscan pistas de los principios que puedan sustentar una teoría cuántica de la gravedad consistente. Se parte de observar que una estructura granular del espacio-tiempo que viola la invariancia de Lorentz está prácticamente descartada ya que, si existiera, sus efectos ya hubieran sido detectados. Es difícil imaginar una estructura discreta del espacio-tiempo que no viole la invariancia de Lorentz, no obstante, en el capítulo 2 se estudian posibles consecuencias empíricas de dicha estructura. El modelo que se construye es covariante y no sufre de ambigüedades. Además, el hecho de que se puedan poner cotas sobre sus parámetros libres implica que es posible contrastarlo con experimentos, de hecho, se presenta el análisis de un experimento con el que se están buscando empíricamente los efectos que predice el modelo, mismos que, en caso de ser observados, constituirían la primera evidencia experimental de una estructura del espacio-tiempo distinta a la considerada por la relatividad general. Es importante mencionar también que, aún si el efecto conjeturado por el modelo no se observa, este trabajo es relevante debido a que en tal caso se contarían con nuevas cotas experimentales que podrían poner a prueba a algunos de los candidatos a ser la teoría cuántica de la gravedad.

El término de acoplamiento al que se llega en el modelo parece poco natural.

Esto se piensa como una consecuencia del hecho de que el modelo está formulado en el lenguaje de un espacio-tiempo suave y posiblemente dicho término se vea natural si se escribe usando los grados de libertad de una teoría cuántica de la gravedad. Por otra parte, es interesante recalcar que el modelo parece violar el principio de equivalencia en el sentido de que, por la forma como se acopla la gravedad con la materia, la gravedad no desaparece cuando las partículas se encuentran en caída libre. Sin embargo vale la pena recordar que, como se discute en la referencia [39], no existe una formulación satisfactoria del principio de equivalencia a nivel cuántico. Además, el modelo sugiere que una teoría microscópica del espacio-tiempo podría incluir violaciones a paridad e invariancia temporal.

Un formalismo fenomenológico, inspirado en el modelo descrito anteriormente, se utiliza para explicar una observación astrofísica que puede ser entendida si el cociente de masas protón-electrón depende de la densidad del medio. El modelo que se construye para explicar la dependencia de dicho cociente tiene las ventajas de no involucrar campos que no han sido observados, ser covariante y no violar la invariancia de Lorentz. La idea básica es que la gravedad se acopla de manera no-mínima a los distintos campos cuánticos modificando el término usual de masa de forma que dependa del entorno gravitacional. Sin embargo, como se discute en la sección 2.2.1, los experimentos hechos en la Tierra permiten descartar el modelo. Aún así, la exploración de este modelo ejemplifica el tipo de ideas en las que está basada esta tesis: la gravedad, cuyas implicaciones más profundas se desconocen ya que no se comprende su versión cuántica, podría tener alcances insospechados y proveer explicaciones viables de fenómenos con los que no se suele asociar.

El modelo fenomenológico de gravedad cuántica deja otra lección: la gravedad podría afectar de forma inusual a la materia en un estado netamente cuántico, *i.e.*, que no tiene análogo clásico. Esto se motiva por la observación de que, en el modelo fenomenológico de gravedad cuántica presentado en esta tesis, sólo la materia polarizada siente el efecto causado por la hipotética granularidad del espacio-tiempo, dando pie a la pregunta ¿puede la gravedad afectar de forma insospechada a la materia cuando ésta se encuentra en estados cuánticos? Con esta serie de ideas en mente se propone una forma de parametrizar violaciones al principio de equivalencia por

partículas inestables, mismas que sólo pueden ser explicadas por medio de la mecánica cuántica. Se parte del hecho que en mecánica cuántica no-relativista se cumple el principio de equivalencia en el sentido de que se obtienen los mismos resultados al describir una partícula en un sistema de referencia inercial sujeta a un campo gravitacional uniforme y al estudiarla libre pero vista desde un marco de referencia acelerado. Por otra parte, para describir una partícula inestable se supone que su masa es compleja. Juntando estas dos ideas se llega a la ecuación que, si satisface el principio de equivalencia, describe a una partícula inestable, no-relativista y cuya constante de decaimiento es pequeña. Introduciendo un término adicional a esta ecuación, que contiene un parámetro fenomenológico a ser determinado por los experimentos, se obtiene la ecuación que parametriza violaciones del principio de equivalencia. Se propone entonces probar esta ecuación haciendo pasar un haz de partículas inestables por un experimento tipo COW y se argumenta que, de haber violaciones al principio de equivalencia, en este experimento podían ser observadas.

Por otra parte, el hecho de que las partículas, cuya descripción fundamental es cuántica, no sigan trayectorias entra en contradicción con la manera como se explora el espacio-tiempo según la relatividad general. Dado que un objeto extendido (clásico) tampoco sigue una (única) trayectoria, se modela a las partículas reales por dichos objetos, mismos que se representan por su centro de masa (que puede definirse de forma covariante). La sorpresa es que, aún en ausencia de fuerzas externas, el centro de masa no sigue geodésicas del espacio-tiempo, por lo que si se usan objetos reales para “leer” la geometría identificando las trayectorias de sus centros de masa con geodésicas, no se está midiendo la geometría “real” del espacio-tiempo.

En esta tesis se describe un formalismo para obtener la geometría que se “lee” si se representa a los objetos extendidos libres por su centro de masa. Resulta que dicha geometría depende de las características de los objetos extendidos como su momento y momento angular. Como para extraer toda la información geométrica de un punto del espacio-tiempo se necesitan varios objetos extendidos que pasen por dicho punto con distintas direcciones y dado que la geometría que se extrae depende del momento del objeto extendido, se concluye que en general no es posible obtener todas las componentes de la geometría efectiva. Esto sugiere que quizá no exista una

forma covariante de medir la geometría del espacio-tiempo, lo que a su vez implicaría que el espacio-tiempo a escalas microscópicas no debe describirse geoméricamente (lo que refuerza las ideas planteadas en las referencias [20, 54]). Esta es la consecuencia más importante de esta parte del trabajo.

Asimismo, parece posible construir, en el marco de una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo general, un operador posición a partir de la definición del centro de masa. Se sabe que las componentes espaciales del centro de masa tienen paréntesis de Poisson no-nulos entre sí, por lo que, de acuerdo a una noción de posición asociada con este operador, en general los estados de los campos cuánticos no pueden ser localizados. En particular, se sabe que para partículas con espín las componentes espaciales del operador posición conjeturado no conmutarían, por lo que no existirían estados localizados para estas partículas. Esto implica que no se pueden desaparecer todos los efectos de la gravedad cuando estas partículas se encuentran en caída libre, lo que viola el principio de equivalencia (esto se suma al efecto de Papapetrou [46] que asegura que las partículas con espín no siguen geodésicas cuando hay curvatura). Es interesante que el modelo fenomenológico de gravedad cuántica presentado en esta tesis sugiere que las partículas con espín podrían ser sensibles a efectos no-convencionales causados por la gravedad y que, en particular, implican violaciones al principio de equivalencia. El objetivo futuro de este estudio es construir el operador de posición descrito porque, además de ser útil en la teoría cuántica de campos, daría indicios del grado de aproximación con el que puede implementarse el principio de equivalencia.

Este trabajo tiene como propósito principal apuntar en ciertas direcciones que deben ser exploradas más arduamente al buscar una teoría cuántica de la gravedad plenamente satisfactoria. Además del aprendizaje que se desprenda de los experimentos que se proponen en esta tesis, han surgido pistas sobre cómo puede (o más bien, de cómo no debe) formularse una teoría de la gravedad válida a escalas microscópicas, ayudando a focalizar los esfuerzos hechos en esta dirección.

Apéndice A

Notación y convenciones

Durante todo el trabajo se usa una métrica espacio-temporal con signatura $+2$ y los tensores geométricos más importantes se definen de la misma forma que en la referencia [57]. Además, los capítulos 1 y 2 está escrito en unidades donde $c = \hbar = 1$, mientras que en el capítulo 3 se utilizan unidades donde $c = G = 1$. En general los índices se “bajan” y “suben” con la métrica del espacio-tiempo y su inversa, pero cuando hay más de una métrica, éstas se escriben explícitamente.

Los índices latinos del principio del alfabeto a, b, c, d, e , son índices abstractos, es decir, únicamente señalan el carácter tensorial del objeto en cuestión. En algunas ocasiones se intercambia la contracción de índices abstractos por la evaluación de un tensor, por ejemplo: $G_{ab}T^aS^b = G(T, S)$. Cuando los tensores se escriben como el argumento de una función, sus índices se omiten para evitar confusiones. Más aún, se usa la notación usual para señalar que un par de índices aparece de forma simétrica o anti-simétrica, es decir,

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \quad T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}), \quad (\text{A.1})$$

y el espacio tangente al punto x del espacio-tiempo se denota por V_x .

Los índices griegos representan las componentes espacio-temporales de un tensor y por lo mismo corren de 0 a 3, mientras que los índices latinos de la mitad del alfabeto, es decir, i, j, k, l, m y n únicamente representan las componentes 1, 2 y 3.

Finalmente, los índices mayúscula del principio del alfabeto latino representan pares anti-simétricos de índices del espacio-tiempo, mismos que se enumeran con número romanos con la siguiente convención: $I = 01$, $II = 02$, $III = 03$, $IV = 23$, $V = 31$ y $VI = 12$. Siempre que haya un término con un par de cualquiera de los índices antes mencionados repetidos significa que hay suma sobre todos los valores que toma dicho índice. Los índices distintos a los antes mencionados se escriben entre paréntesis y, a pesar de que aparezcan repetidos, no se entiende la suma sobre sus posibles valores.

La notación vectorial de poner flechas sobre los vectores y escribir las matrices en negritas se usa exclusivamente para 3-vectores y matrices 3×3 . En el contexto de teoría de campos ψ denota un campo fermiónico y $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, donde γ^μ son las matrices de Dirac. Se utiliza la siguiente convención para dichas matrices:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

con σ_i representando las matrices de Pauli convencionales. Finalmente se usan los símbolos \Re y \Im para denotar las partes real e imaginaria, respectivamente.

Apéndice B

Coordenadas asociadas con curvas

En este apéndice se introducen una forma de construir coordenadas espacio-temporales que son utilizadas varias veces en la tesis. Estas coordenadas están asociadas con una curva \mathcal{C} que es temporal, suave e inextendible y pueden ser pensadas como las más naturales que usaría un observador. Al final del apéndice se expresa la métrica en estas coordenadas. Se parte de un espacio-tiempo descrito por un sistema de coordenadas arbitrario $x^{\mu'}$ y en el que las componentes del tensor métrico están dadas por $g_{\mu'\nu'}$. Se denota por u^a al vector tangente a \mathcal{C} respecto a su tiempo propio t . En el punto (arbitrario) $\mathcal{C}(0)$ se toma conjunto de vectores¹ \tilde{e}_μ^a tales que

$$g_{ab}\tilde{e}_\mu^a\tilde{e}_\nu^b = \eta_{\mu\nu}, \quad \tilde{e}_0^a = u^a, \quad (\text{B.1})$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Estos vectores se extienden a un campo e_μ^a sobre \mathcal{C} imponiendo

$$u^a\nabla_a e_\mu^b = e_\mu^a a_a u^b - e_\mu^a u_a a^b, \quad e_\mu^a(t=0) = \tilde{e}_\mu^a, \quad (\text{B.2})$$

donde $a^a \equiv u^b\nabla_b u^a$ es la aceleración de \mathcal{C} . Nótese que las ecuaciones (B.2) se reducen a las de transporte paralelo cuando $a^a = 0$ (en este caso a las coordenadas construidas en este apéndice se les conoce como coordenadas de Fermi). Las ecuaciones (B.2) se

¹No se deben confundir a los índices que representan componentes con los que indican a qué vector de la tétrada se esté refiriendo.

imponen ya que los vectores obtenidos con dichas ecuaciones cumplen

$$g_{ab}e_{\mu}^ae_{\nu}^b = \eta_{\mu\nu}, \quad e_0^a = u^a, \quad (\text{B.3})$$

para todo t . Esto se demuestra al notar que sobre toda la curva \mathcal{C} se mantiene la ortonormalidad:

$$\begin{aligned} u^c \nabla_c (g_{ab} e_{\mu}^a e_{\nu}^b) &= g_{ab} (e_{\nu}^b u^c \nabla_c e_{\mu}^a + e_{\mu}^a u^c \nabla_c e_{\nu}^b) \\ &= e_{\mu}^a a_a e_{\nu}^b u_b - e_{\mu}^a u_a e_{\nu}^b a_b + e_{\mu}^a u_a e_{\nu}^b a_b - e_{\mu}^a a_a e_{\nu}^b u_b = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Sea p un punto del espacio-tiempo suficientemente cerca de \mathcal{C} para que existan $t, s \in \mathbb{R}$ y un único $v^a \in V_{\mathcal{C}(t)}$ tales que²

$$g_{ab}v^a u^b = 0, \quad g_{ab}v^a v^b = 1, \quad \exp_{\mathcal{C}(t)}(sv) = p. \quad (\text{B.5})$$

Es posible ver que existen coeficientes Ω^i que satisfacen

$$v^a = \Omega^i e_i^a, \quad \delta_{ij} \Omega^i \Omega^j = 1. \quad (\text{B.6})$$

Con esto se definen las coordenadas de p asociadas a \mathcal{C} , x^{μ} , como $x^0 = t$, $x^i = s\Omega^i$.

El objetivo es encontrar las componentes de la métrica cerca de \mathcal{C} en las coordenadas x^{μ} . Para ello se hace la expansión

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = g_{\mu\nu}(\mathcal{C}(t)) + x^i [\partial_i g_{\mu\nu}]_{\mathcal{C}(t)} + \frac{1}{2} x^i x^j [\partial_i \partial_j g_{\mu\nu}]_{\mathcal{C}(t)} + O(x^3). \quad (\text{B.7})$$

La idea es buscar entonces expresiones para la métrica y sus derivadas espaciales en $\mathcal{C}(t)$. Para demostrar que $g_{\mu\nu}(\mathcal{C}(t)) = \eta_{\mu\nu}$ primero se necesitan encontrar las componentes de e_{μ}^a en las coordenadas asociadas con \mathcal{C} . Con ese propósito se nota que

$$v^a = \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^a = \frac{\partial x^i}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a = \Omega^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a, \quad (\text{B.8})$$

²La definición del mapeo \exp_x se encuentra en la sección 3.2.2.

con lo que es posible observar, al comparar esta relación con la ecuación (B.6), que

$$e_i^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a. \quad (\text{B.9})$$

Además,

$$e_0^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^a, \quad (\text{B.10})$$

por lo que las componentes de e_μ^a en las coordenadas x^μ son $e_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$. Con esto obtenemos que las componentes de estos mismos vectores en el sistema de coordenadas $x^{\mu'}$, de acuerdo con la ley de transformación de vectores, son

$$e_\nu^{\mu'} = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right)_c e_\nu^\mu = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right)_c. \quad (\text{B.11})$$

Esta ecuación permite calcular las componentes de la métrica en \mathcal{C} en las nuevas coordenadas ya que

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{C}) = g_{\mu'\nu'}(\mathcal{C}) \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right)_c \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right)_c = g_{\mu'\nu'}(\mathcal{C}) e_\mu^{\mu'} e_\nu^{\nu'} = \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.12})$$

donde se usan la ley de transformación de los tensores y las ecuaciones (B.11) y (B.3).

Para encontrar las componentes de las primeras derivadas espaciales de la métrica en \mathcal{C} primero se calculan los símbolos de Christoffel en dicha curva. Usando el hecho que las curvas por las que se llega de $\mathcal{C}(t)$ al punto p son geodésicas con tangente $v^a(s)$ tal que $v^a(0) = v^a$, se tiene que

$$0 = v^\nu(s) \nabla_\nu v^\mu(s) = v^\nu(s) \partial_\nu v^\mu(s) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu v^\nu(s) v^\rho(s). \quad (\text{B.13})$$

En particular para $s = 0$ se obtiene

$$0 = \partial_s v^\mu(s)|_{s=0} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(\mathcal{C}) v^\nu v^\rho = \Gamma_{ij}^\mu(\mathcal{C}) \Omega^i \Omega^j, \quad (\text{B.14})$$

donde se usa que para todo s

$$v^\mu(s) = \Omega^i \delta_i^\mu, \quad (\text{B.15})$$

lo que a su vez proviene de escribir la ecuación (B.8) en componentes. Como este resultado es válido para todo punto cercano a \mathcal{C} , entonces se tiene

$$\Gamma_{ij}^\mu(\mathcal{C}) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Por otra parte, de la ecuación (B.2) se obtiene

$$0 = u^\rho \partial_\rho e_\mu^\sigma + u^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma(\mathcal{C}) e_\mu^\nu - e_\mu^\rho a_\rho u^\sigma + e_\mu^\rho u_\rho a^\sigma = \Gamma_{\mu 0}^\sigma(\mathcal{C}) - a_\mu \delta_0^\sigma - \delta_\mu^0 a^\sigma, \quad (\text{B.17})$$

donde se usa repetidamente $e_\mu^\rho = \delta_\mu^\rho$ y $u^\rho = e_0^\rho$. Debido a que $a^\mu = \delta_i^\mu a^i$, los únicos símbolos de Christoffel que en estas coordenadas son distintos de cero sobre \mathcal{C} son

$$\Gamma_{i0}^0(\mathcal{C}) = a_i, \quad \Gamma_{00}^i(\mathcal{C}) = a^i. \quad (\text{B.18})$$

De la ecuación que relaciona a los símbolos de Christoffel con la métrica se tiene

$$2\eta_{\mu\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^\nu(\mathcal{C}) = [\partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\rho\sigma}]_{\mathcal{C}}. \quad (\text{B.19})$$

En particular

$$-2a_i = -2\Gamma_{i0}^0(\mathcal{C}) = [\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{i0} - \partial_0 g_{i0}]_{\mathcal{C}} = \partial_i g_{00}|_{\mathcal{C}}. \quad (\text{B.20})$$

Además, el hecho que $\partial_0 g_{\rho\sigma}|_{\mathcal{C}} = 0$ permite demostrar que

$$0 = \eta_{kl}\Gamma_{i0}^l(\mathcal{C}) - \Gamma_{ik}^0(\mathcal{C}) = \partial_i g_{0k}|_{\mathcal{C}}, \quad (\text{B.21})$$

$$0 = \eta_{kl}\Gamma_{ij}^l(\mathcal{C}) + \eta_{jl}\Gamma_{ik}^l(\mathcal{C}) = \partial_i g_{jk}|_{\mathcal{C}}. \quad (\text{B.22})$$

Es decir,

$$\partial_\mu g_{\rho\sigma}|_{\mathcal{C}} = -2\delta_\rho^0 \delta_\sigma^0 \delta_\mu^i a_i. \quad (\text{B.23})$$

Para incluir efectos debidos a la curvatura del espacio-tiempo se necesitan calcular las segundas derivadas de la métrica en \mathcal{C} . Para ello se consideran cuatro familias uni-paramétricas de geodésicas. La primera de estas familias está determinada por

las geodésicas que salen de los puntos $\mathcal{C}(t)$ con los coeficientes Ω^i fijos. Si se extiende el valor de la coordenada t sobre toda la 2-superficie generada por esta familia de geodésicas mediante la prescripción que t sea constante a lo largo de cada geodésica, el vector de desviación está dado por $\xi_0^a = (\partial/\partial t)^a$. Otra familia está formada por aquellas geodésicas que salen del mismo punto fijo $\mathcal{C}(t)$ con todos los posibles valores de Ω^1 pero con Ω^2 y Ω^3 fijos. Habrá otra familia cuando se varía Ω^2 y una más para el caso es el que Ω^3 es variable. En estos tres últimos casos los vectores de desviación son $\xi_i^a = (\partial/\partial \Omega^i)^a$. Además, por ser vectores de desviación cumplen

$$v^a \nabla_a (v^b \nabla_b \xi_\mu^c) = -R_{adb}{}^c v^a v^b \xi_\mu^d. \quad (\text{B.24})$$

Al expandir esta ecuación se obtiene

$$0 = \ddot{\xi}_\mu^c + 2\Gamma_{ab}^c v^a \dot{\xi}_\mu^b + v^a v^b \xi_\mu^d (\partial_a \Gamma_{bd}^c + \Gamma_{ae}^c \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{de}^c \Gamma_{ab}^e + R_{adb}{}^c), \quad (\text{B.25})$$

donde el punto significa derivada parcial en la dirección v^a . Antes de obtener la expresión correspondiente en componentes nótese que cerca de \mathcal{C}

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu(s) = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu|_{s=0} + s v^\nu \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu|_{s=0} + O(s^2) = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu|_{s=0} + s \Omega^i \partial_i \Gamma_{\rho\sigma}^\mu|_{s=0} + O(s^2), \quad (\text{B.26})$$

donde se usa $v^\mu(s) = \Omega^i \delta_i^\mu$. Debido a que $\xi_0^\rho = \delta_0^\rho$, se obtiene, al sustituir en la ecuación (B.25), que para el caso $\mu = 0$:

$$0 = \Omega^j \Omega^k [\partial_j \Gamma_{k0}^\rho + \Gamma_{\sigma j}^\rho \Gamma_{0k}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^\rho \Gamma_{jk}^\sigma + R_{j0k}{}^\rho]_{s=0}. \quad (\text{B.27})$$

Esto a su vez implica

$$\partial_{(j} \Gamma_{k)0}^\rho \Big|_{s=0} = R_{0(jk)}{}^\rho \Big|_{s=0} - \delta_0^\rho a_j a_k, \quad (\text{B.28})$$

donde se usan las expresiones de los símbolos de Christoffel sobre \mathcal{C} . Más aún, de la ecuación del tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel se obtiene

$$\partial_{[j} \Gamma_{k]0}^\rho \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} R_{jk0}{}^\rho \Big|_{s=0} + \Gamma_{0[j}^\sigma \Big|_{s=0} \Gamma_{k]\sigma}^\rho \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} R_{jk0}{}^\rho \Big|_{s=0}, \quad (\text{B.29})$$

con lo que se llega a

$$\begin{aligned}
\partial_j \Gamma_{k0}^\rho \Big|_{s=0} &= \partial_{(j} \Gamma_{k)0}^\rho \Big|_{s=0} + \partial_{[j} \Gamma_{k]0}^\rho \Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} R_{0jk}^\rho \Big|_{s=0} + \frac{1}{2} R_{0kj}^\rho \Big|_{s=0} - \frac{1}{2} R_{jk0}^\rho \Big|_{s=0} - \delta_0^\rho a_j a_k \\
&= R_{0jk}^\rho \Big|_{s=0} - \delta_0^\rho a_j a_k.
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Análogamente, del caso $\mu = i$ se obtiene, usando $\xi_i^\rho = s\delta_i^\rho$ y la ecuación (B.26), que

$$0 = s\Omega^j \Omega^k \left[3\partial_j \Gamma_{ki}^\rho + \Gamma_{j\sigma}^\rho \Gamma_{ki}^\sigma - \Gamma_{i\sigma}^\rho \Gamma_{jk}^\sigma + R_{jik}^\rho \right]_{s=0} + O(s^2), \tag{B.31}$$

de lo que se sigue

$$0 = \left[3\partial_{(j} \Gamma_{k)i}^\rho + \Gamma_{\sigma(j}^\rho \Gamma_{k)i}^\sigma - \Gamma_{i\sigma}^\rho \Gamma_{jk}^\sigma - R_{i(jk)}^\rho \right]_{s=0} = \left[3\partial_{(j} \Gamma_{k)i}^\rho - R_{i(jk)}^\rho \right]_{s=0}. \tag{B.32}$$

Como además se cumple

$$\partial_{[j} \Gamma_{k]i}^\rho \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} R_{jki}^\rho \Big|_{s=0} + \Gamma_{i[j}^\sigma \Big|_{s=0} \Gamma_{k]\sigma}^\rho \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} R_{jki}^\rho \Big|_{s=0}, \tag{B.33}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial_j \Gamma_{ki}^\rho \Big|_{\mathcal{C}} &= \partial_{(j} \Gamma_{k)i}^\rho \Big|_{\mathcal{C}} + \partial_{[j} \Gamma_{k]i}^\rho \Big|_{\mathcal{C}} \\
&= \frac{1}{3} R_{i(jk)}^\rho(\mathcal{C}) - \frac{1}{2} R_{jki}^\rho(\mathcal{C}) \\
&= -\frac{1}{3} [R_{jik}^\rho(\mathcal{C}) + R_{jki}^\rho(\mathcal{C})].
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Dado que se conocen las componentes de los símbolos de Christoffel a lo largo de \mathcal{C} , se tiene que la derivada parcial en la dirección u^a es

$$\partial_0 \Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 2\delta_0^\mu \delta_{(\rho}^0 \delta_{\sigma)}^i \partial_0 a_i + \delta_i^\mu \delta_\rho^0 \delta_\sigma^0 \partial_0 a^i. \tag{B.35}$$

Con esto llega a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} [\partial_0 \Gamma_{k0}^\rho - \partial_k \Gamma_{00}^\rho]_{s=0} &= \partial_{[0} \Gamma_{k]0}^\rho \Big|_{s=0} \\
 &= -\frac{1}{2} R_{0k0}^\rho \Big|_{s=0} + \Gamma_{0[0}^\sigma \Big|_{s=0} \Gamma_{k]\sigma}^\rho \Big|_{s=0} \\
 &= -\frac{1}{2} R_{0k0}^\rho \Big|_{s=0} - \frac{1}{2} \delta_i^\rho a_k a^i. \tag{B.36}
 \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\partial_k \Gamma_{00}^\rho \Big|_{s=0} = R_{0k0}^\rho \Big|_{s=0} + \delta_i^\rho a_k a^i + \partial_0 \Gamma_{k0}^\rho \Big|_{s=0} = R_{0k0}^\rho \Big|_{s=0} + \delta_i^\rho a_k a^i + \delta_0^\rho \partial_0 a_k, \tag{B.37}$$

con lo que se terminan de calcular las primeras derivadas de todas las componentes de los símbolos de Christoffel.

Para conocer las componentes de las segundas derivadas de la métrica se deriva la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica, obteniendo:

$$2(\partial_\sigma g_{\mu\lambda}) \Gamma_{\nu\rho}^\lambda + 2g_{\mu\lambda} \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\lambda = \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\sigma \partial_\rho g_{\nu\mu} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho}. \tag{B.38}$$

Al evaluar sobre \mathcal{C} y usar las expresiones para la métrica y sus primeras derivadas en dicha curva se llega a

$$-8\delta_\mu^0 \delta_\sigma^i \delta_{(\nu}^0 \delta_{\rho)}^j a_i a_j + 2\eta_{\mu\lambda} [\partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\lambda]_{\mathcal{C}} = [\partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\sigma \partial_\rho g_{\nu\mu} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho}]_{\mathcal{C}}. \tag{B.39}$$

Sumando esta ecuación con ella misma pero con los índices μ y ρ intercambiados se obtiene

$$\partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} \Big|_{\mathcal{C}} = -4\delta_\mu^0 \delta_\sigma^i \delta_{(\nu}^0 \delta_{\rho)}^j a_i a_j - 4\delta_\rho^0 \delta_\sigma^i \delta_{(\nu}^0 \delta_{\mu)}^j a_i a_j + \eta_{\mu\lambda} [\partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\lambda]_{\mathcal{C}} + \eta_{\rho\lambda} [\partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\lambda]_{\mathcal{C}}, \tag{B.40}$$

con lo que a su vez es posible obtener

$$\partial_i \partial_j g_{00}|_{\mathcal{C}} = 2R_{0ij0}(\mathcal{C}) - 2a_i a_j, \quad (\text{B.41})$$

$$\partial_i \partial_j g_{0l}|_{\mathcal{C}} = \frac{4}{3} R_{0(ij)l}(\mathcal{C}), \quad (\text{B.42})$$

$$\partial_i \partial_j g_{kl}|_{\mathcal{C}} = \frac{2}{3} R_{k(ij)l}(\mathcal{C}). \quad (\text{B.43})$$

Finalmente, usando la ecuación (B.7) se pueden escribir las componentes de la métrica cerca de \mathcal{C} como

$$g_{00}(t, \vec{x}) = -1 - 2a_i(t)x^i + x^i x^j [R_{0ij0}(\mathcal{C}(t)) - a_i(t)a_j(t)] + O(x^3), \quad (\text{B.44})$$

$$g_{0l}(t, \vec{x}) = \frac{2}{3} x^i x^j R_{0ijl}(\mathcal{C}(t)) + O(x^3), \quad (\text{B.45})$$

$$g_{kl}(t, \vec{x}) = \delta_{kl} + \frac{1}{3} x^i x^j R_{kijl}(\mathcal{C}(t)) + O(x^3), \quad (\text{B.46})$$

que son las expresiones que se usan repetidamente en la tesis.

Apéndice C

El principio de equivalencia y partículas inestables en un experimento COW

Este apéndice se dedica a analizar cómo se propaga un haz de partículas inestables de acuerdo al modelo descrito en la sección 2.2.2 en un experimento COW [14]. Este experimento consiste en dividir un haz de partículas en dos, dejar que cada uno viaje a distinta altura (por ende, en regiones con distinto potencial gravitacional) y finalmente volver juntar dichos haces (ver el diagrama del experimento en la figura C.1).

Se usa un sistema de referencia cartesiano adaptado al experimento donde x y z son, respectivamente, las coordenadas horizontal y vertical, como se muestra en la figura C.1. Recuérdese que en los segmentos horizontales el potencial Newtoniano, Φ_N , es constante por lo que las partículas que provienen de $x \rightarrow -\infty$ se pueden describir por combinaciones lineales de funciones de onda de la forma

$$\psi(\vec{x}, t) = B e^{ikx - iEt}, \quad (\text{C.1})$$

donde E es una constante real y B una constante de normalización. Obsérvese que las coordenadas y y z se omiten al estudiar segmentos horizontales. Al sustituir en

la ecuación fenomenológica propuesta en la sección (2.2.2),

$$i\partial_t\psi = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + m - i\frac{\Gamma}{2} + \left(m - i\xi\frac{\Gamma}{2} \right) \Phi_N(\vec{x}) \right) \psi, \quad (\text{C.2})$$

la función de onda (C.1) se obtiene

$$E = \frac{k^2}{2m} + m - i\frac{\Gamma}{2} + \left(m - i\xi\frac{\Gamma}{2} \right) \Phi_N(z), \quad (\text{C.3})$$

por lo que k debe satisfacer

$$k^2 = 2m \left[E - \left(m - i\xi\frac{\Gamma}{2} \right) \Phi_N(z) - \left(m - i\frac{\Gamma}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.4})$$

La solución de la ecuación (C.2) en los segmentos verticales, $\chi(z)$, cumple

$$E\chi(z) = \left(-\frac{1}{2m}\partial_z^2 + m - i\frac{\Gamma}{2} + \left(m - i\xi\frac{\Gamma}{2} \right) \Phi_N(z) \right) \chi(z), \quad (\text{C.5})$$

y cuya forma explícita no se escribe porque no es relevante para lo que se busca calcular. Para encontrar cómo se propagan los elementos de la base de ondas planas por el dispositivo COW, se analiza por separado el efecto de cada uno de los dos separadores (*beam splitters*) y los dos espejos sobre un elemento genérico de la base de ondas planas.

El primer separador se localiza en el origen del sistema de coordenadas y es necesario resolver una ecuación de conservación del flujo de probabilidad en este punto. Si se marca con I al haz inicial, con II y III la parte que se va por el segmento vertical y horizontal, respectivamente (ver la figura C.1). Después de pasar por el primer separador, entonces las funciones de onda correspondientes son

$$\psi_I(x, t) = B_I e^{ik_1x - iEt}, \quad (\text{C.6})$$

$$\psi_{II}(x, t) = C\chi(z)e^{-iEt}, \quad (\text{C.7})$$

$$\psi_{III}(x, t) = B_{III}e^{ik_1x - iEt}, \quad (\text{C.8})$$

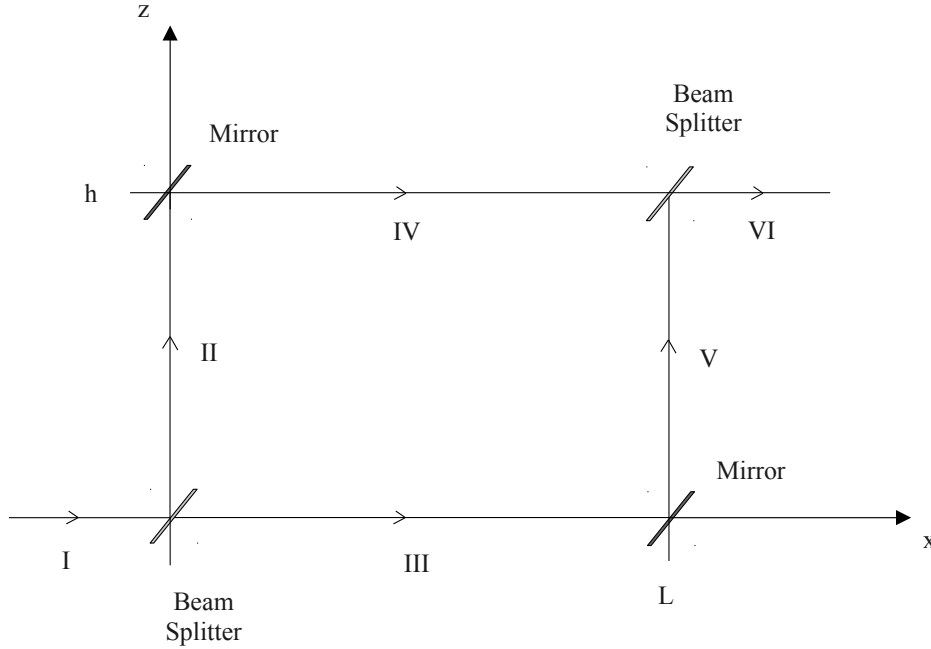


Figura C.1: Esquema del dispositivo COW en el que se indican las coordenadas, los nombres de cada segmento y la posición de los separadores (*beam splitter*) y espejos (*mirror*).

donde k_l es la misma k definida arriba pero para un valor fijo del potencial Newtoniano a lo largo del segmento horizontal inferior y C es una constante de normalización (compleja) tal que en el separador se cumple $\chi(0) = 1$. La ecuación de conservación de flujo es

$$|\vec{j}_I| = |\vec{j}_{II}| + |\vec{j}_{III}|, \quad (\text{C.9})$$

donde $\vec{j}_I = \Im(\psi_I^* \nabla \psi_I)/m$ y hay definiciones análogas para las otras funciones de onda. Nótese que la función de onda es discontinua en el separador, sin embargo,

esto se debe la aproximación que se usa donde los haces viajan por líneas y se desprecia el ancho de los separadores. Suponiendo que $\vec{j}_{III} = p\vec{j}_I$ para algún $0 \leq p \leq 1$ y normalizando $\psi_I(x, t)$ de forma que, en el separador, $|\vec{j}_I| = 1$ (lo que fija $|B_I| = \sqrt{m/\Re k_l}$) se obtiene

$$1 - p = \frac{|C|^2}{m} \Im(\chi^*(0)\chi'(0)) = \frac{|C|^2}{m} \Im(\chi'(0)), \quad (\text{C.10})$$

donde se usa la ecuación (C.7). Adicionalmente, se considera que la fase en los dos haces que salen del separador es igual a la fase del haz entrante, y algo análogo en los espejos, ya que al final los dos haces acumulan la misma fase y sólo se busca la diferencia entre dichas fases. Por esto, si se asume que $B_I = |B_I|$, se tiene $B_{III} = \sqrt{p}B_I$ y $C = |C|$.

Ahora se calcula la parte de la función de onda que se propaga por la trayectoria superior en el dispositivo COW. Etiquetando con IV a la función de onda en el segmento horizontal superior, como se muestra en la figura C.1, se tiene

$$\psi_{IV} = B_{IV}e^{ik_u x - iEt}, \quad (\text{C.11})$$

donde k_u es la k correspondiente en el segmento superior. En este caso la ecuación de conservación del flujo es $|\vec{j}_{II}| = |\vec{j}_{IV}|$ que implica

$$C^2 \Im(\chi^*(h)\chi'(h)) = |B_{IV}|^2 \Re(k_u), \quad (\text{C.12})$$

donde se usa el hecho que el espejo en cuestión está localizado en el punto $x = 0$, $z = h$. Dado que la fase de las funciones de onda entrantes y salientes coincide, se sigue

$$\psi_{IV} = \sqrt{\frac{(1-p)m \Im(\chi^*(h)\chi'(h))}{\Im(\chi'(0)) \Re(k_u)}} \text{fase}(\chi(h)) e^{ik_u x - iEt}, \quad (\text{C.13})$$

donde se usan las relaciones (C.10) y (C.12).

A continuación se estudia la parte inferior del dispositivo. Etiquetando con V a

la función de onda en el segmento vertical en $x = L$, se puede escribir

$$\psi_V = D\chi(z)e^{-iEt}, \quad (\text{C.14})$$

donde D es una constante de normalización. En este caso la ecuación de conservación del flujo en el espejo inferior, que se localiza en $x = L$, $z = 0$, se puede reescribir como

$$|D| = |B_{III}|e^{-\Im(k_l)L} \sqrt{\frac{\Re(k_l)}{\Im(\chi'(0))}}. \quad (\text{C.15})$$

Más aún, comparando la fase de ψ_{III} y ψ_V en dicho punto se encuentra que la fase de D es $e^{i\Re(k_l)L}$. Entonces

$$\psi_V = e^{ik_lL - iEt} \sqrt{\frac{mp}{\Im(\chi'(0))}} \chi(z), \quad (\text{C.16})$$

donde se usa $B_{III} = \sqrt{mp/\Re(k_l)}$.

En el separador que se encuentra en la parte superior, localizado en $x = L$, $z = h$, hay que combinar las funciones de onda ψ_{IV} y ψ_V en una nueva función de onda horizontal Ψ_E . Para eso primero hay que estudiar el efecto del separador sobre ψ_V que cambia la dirección del flujo hacia la dirección del eje x . Si se denota por $\psi_{VI} = B_{VI}e^{ik_u x - iEt}$ a la parte horizontal de la función de onda producida a partir de ψ_V por la rotación, la condición $|\vec{j}_V| = |\vec{j}_{VI}|$ implica

$$|B_{VI}| = e^{\Im(k_u - k_l)L} \sqrt{\frac{mp}{\Re(k_u)}} \sqrt{\frac{\Im(\chi^*(h)\chi'(h))}{\Im(\chi'(0))}}. \quad (\text{C.17})$$

El argumento de conservación de la fase permite fijar

$$B_{VI} = |B_{VI}|e^{i\Re(k_l - k_u)L} \text{fase}(\chi(h)), \quad (\text{C.18})$$

por lo que

$$\psi_{VI} = \sqrt{\frac{mp}{\Re(k_u)}} \sqrt{\frac{\Im(\chi^*(h)\chi'(h))}{\Im(\chi'(0))}} e^{i(k_l - k_u)L} \text{fase}(\chi(h)) e^{ik_u x - iEt}. \quad (\text{C.19})$$

Con este resultado se calcula

$$\Psi_E = \psi_{IV} + \psi_{VI} = \Lambda e^{ik_u x - iEt} \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{-i\Delta k L} \right]. \quad (\text{C.20})$$

donde se define

$$\Lambda \equiv \sqrt{\frac{m\Im(\chi^*(h)\chi'(h))}{\Im(\chi'(0))\Re(k_u)}} \text{fase}(\chi(h)), \quad (\text{C.21})$$

y $\Delta k \equiv k_u - k_l$.

La función de onda Ψ_E es un elemento de la base de ondas planas que son solución del dispositivo COW. Se busca la forma en la que un paquete de ondas cuya energía está centrada alrededor de E_0 se propaga en dicho sistema. Este paquete se describe por

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(E)}{\Lambda} \Psi_E dE, \quad (\text{C.22})$$

donde $f(E)/\Lambda$ es una función centrada en E_0 . Si el detector está localizado justo después del separador superior, es decir, en $x = L$, la probabilidad de detectar una partícula del paquete Ψ al tiempo t está dada por

$$\begin{aligned} P(t) = |\Psi(L, t)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(E') f(E) e^{-ik_u^*(E')L + iE't} \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{i\Delta k^*(E')L} \right] \\ &\quad \times e^{ik_u(E)L - iEt} \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{-i\Delta k(E)L} \right] dE' dE, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

donde se escribe explícitamente los argumentos E y E' para evitar confusiones. Como el detector captura partículas por un período largo de tiempo (que se considera infinito) sin distinguir el orden en el que arriban las partículas, la probabilidad de

que el detector capture una partícula es

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(L, t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(E') f(E) e^{-ik_u^*(E')L - iE't} e^{ik_u(E)L - iEt} \\
 &\quad \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{i\Delta k^*(E')L} \right] \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{-i\Delta k(E)L} \right] dE' dE dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E'-E)t} dt \right) f^*(E') f(E) e^{-ik_u^*(E')L} e^{ik_u(E)L} \\
 &\quad \times \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{i\Delta k^*(E')L} \right] \left[\sqrt{1-p} + \sqrt{p} e^{-i\Delta k(E)L} \right] dE' dE \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(E)|^2 e^{-2\Im(k_u)L} \left[(1-p) + p e^{2\Im(\Delta k)L} \right. \\
 &\quad \left. + 2\sqrt{p(1-p)} \cos(\Re(\Delta k)L) e^{\Im(\Delta k)L} \right] dE \\
 &\approx |f(E_0)|^2 \Delta E e^{-2\Im[k_u(E_0)]L} \left[(1-p) + p e^{2\Im[\Delta k(E_0)]L} \right. \\
 &\quad \left. + 2\sqrt{p(1-p)} \cos(\Re[\Delta k(E_0)]L) e^{\Im[\Delta k(E_0)]L} \right], \tag{C.24}
 \end{aligned}$$

donde en el último paso se aproxima la integral por su valor en el pico de $f(E)$ por un cierto ancho ΔE .

Nótese que la interferencia que ocurre involucra sólo componentes con el mismo valor de E definiendo una relación entre los números de onda de las rutas superior e inferior. Si se considera el caso particular en el que $\xi \in \mathbb{R}$ y se escribe $k \equiv \alpha + i\beta$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se puede reexpresar la ecuación (C.4) como

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2m(E - m - m\Phi_N), \quad 2\alpha\beta = m\Gamma(1 + \xi\Phi_N). \tag{C.25}$$

Entonces $\beta = m\Gamma(1 + \xi\Phi_N)/2\alpha$ y si se define $v \equiv \alpha/m$, se encuentra

$$v = \frac{1}{2m} \left(e + \sqrt{e^2 + m^2\gamma^2} \right), \tag{C.26}$$

donde $e \equiv 2m(E - m - m\Phi_N)$ y γ es el factor de Lorentz. En este punto se utiliza el hecho que $\Gamma \ll m$ para escribir

$$k \approx mv + \frac{i\Gamma}{2v} (1 + \xi\Phi_N). \tag{C.27}$$

Obsérvese que v se suele interpretar como la velocidad cuya energía cinética asociada, $mv^2/2$, es $E - m\Phi_N - m$. Además, hay que notar que v depende de z a través del potencial Newtoniano, entonces se usa v_l y v_u para representar las velocidades en los segmentos horizontales inferior y superior, respectivamente. De la expresión (C.24) se obtiene

$$\begin{aligned}
P &\approx |f(E_0)|^2 \Delta E e^{-\Gamma L(1+\xi\Phi_{Nu})/v_u} \left[(1-p) + pe^{-\Gamma L[v_u-v_l+\xi(v_u\Phi_{Nl}-v_l\Phi_{Nu})]/v_l v_u} \right. \\
&\quad \left. + 2\sqrt{p(1-p)} \cos(mL(v_u - v_l)) e^{-\Gamma L[v_u-v_l+\xi(v_u\Phi_{Nl}-v_l\Phi_{Nu})]/2v_l v_u} \right] \\
&= |f(E_0)|^2 \Delta E \left[(1-p)e^{-\Gamma L(1+\xi\Phi_{Nu})/v_u} + pe^{-\Gamma L(1+\xi\Phi_{Nl})/v_l} \right. \\
&\quad \left. + 2\sqrt{p(1-p)} \cos(mL(v_u - v_l)) e^{-\Gamma L(v_l+v_u)/2v_l v_u} e^{-\frac{\xi\Gamma L}{2}\left(\frac{\Phi_{Nl}}{v_l} + \frac{\Phi_{Nu}}{v_u}\right)} \right]. \quad (\text{C.28})
\end{aligned}$$

donde se omite escribir que v_l y v_u se evalúan a E_0 .

Finalmente se buscan las expresiones para v_l y v_u para cualquier ángulo θ entre la dirección vertical del dispositivo COW y la dirección vertical determinada por la gravedad. El potencial gravitacional en términos de θ para las trayectorias inferior y superior es, respectivamente,

$$\Phi_{Nl} = g\frac{h}{2}(1 - \cos\theta), \quad \Phi_{Nu} = g\frac{h}{2}(1 + \cos\theta), \quad (\text{C.29})$$

siendo g la aceleración gravitacional. Como además se consideran partículas no-relativistas, $v \approx c$, entonces,

$$v_l \approx \sqrt{\frac{2}{m}E_0 - gh(1 - \cos\theta) - 2} \approx \sqrt{\frac{2}{m}E_0} \left(1 - \frac{mgh}{4E_0}(1 - \cos\theta) - \frac{m}{2E_0} \right), \quad (\text{C.30})$$

$$v_u \approx \sqrt{\frac{2}{m}E_0 - gh(1 + \cos\theta) - 2} \approx \sqrt{\frac{2}{m}E_0} \left(1 - \frac{mgh}{4E_0}(1 + \cos\theta) - \frac{m}{2E_0} \right), \quad (\text{C.31})$$

donde también se desprecian los términos cúbicos en $\sqrt{m/E_0}$. Definiendo $\mu \equiv \sqrt{m/2E_0}$ y $A \equiv Lh$, que es el área encerrada por el dispositivo COW, y sustitu-

yendo en la ecuación (C.28) se llega a

$$\begin{aligned}
 P &\approx |f(E_0)|^2 \Delta E e^{-\Gamma L \mu (1 + \xi g h / 2)} \left[(1 - p) e^{-\xi \Gamma A \mu g \cos(\theta) / 2} + p e^{\xi \Gamma A \mu g \cos(\theta) / 2} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sqrt{p(1 - p)} \cos(m A \mu g \cos \theta) \right] \\
 &\approx |f(E_0)|^2 \Delta E \left[\left(1 + 2 \sqrt{p(1 - p)} \right) \left(1 - \Gamma \mu L - \frac{1}{2} \xi \Gamma \mu g A \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(p - \frac{1}{2} \right) \xi \Gamma \mu g A \cos \theta - \sqrt{p(1 - p)} m^2 \mu^2 g^2 A^2 \cos^2 \theta \right], \quad (C.32)
 \end{aligned}$$

donde en el último paso se expande al mismo orden que antes. Esta es la expresión relevante que se busca y que se usa en la sección 2.2.2.

Apéndice D

Paréntesis de Poisson entre posiciones y momentos iniciales en espacio-tiempos curvos

En este apéndice se calculan los paréntesis de Poisson entre las posiciones y los momentos de una partícula relativista, puntual, libre, de masa $m > 0$ en un espacio-tiempo cuya métrica tiene componentes $g_{\mu\nu}$. La acción que describe la dinámica de esta partícula es

$$S = -m \int d\tau = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu} = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu} dt, \quad (\text{D.1})$$

donde la integral se hace sobre una posible trayectoria, τ es el tiempo propio de la partícula y el punto representa la derivada (total) respecto a $t = q^0$. De la última igualdad se puede leer que un Lagrangiano para este sistema es

$$L = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu}, \quad (\text{D.2})$$

con las componentes de la métrica evaluadas en la posición de la partícula. Entonces los momentos conjugados satisfacen

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m\gamma g_{\mu i} \dot{q}^\mu, \quad (\text{D.3})$$

siendo $\gamma \equiv (-g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu)^{-1/2}$ una función estrictamente mayor que cero. Sea h^{ij} tal que $g_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$, es decir, la matriz inversa de aquella formada por las componentes espaciales de la métrica, entonces

$$\dot{q}^i = h^{ij} \left(\frac{\pi_j}{m\gamma} - g_{0j} \right). \quad (\text{D.4})$$

Más aún, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} &= -g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = -g_{00} - 2g_{0i} \dot{q}^i - g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= -g_{00} - 2g_{0i} h^{ik} \left(\frac{\pi_k}{m\gamma} - g_{0k} \right) - g_{ij} h^{ik} h^{jl} \left(\frac{\pi_k}{m\gamma} - g_{0k} \right) \left(\frac{\pi_l}{m\gamma} - g_{0l} \right) \\ &= g_{0k} h^{kl} g_{0l} - g_{00} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\pi_k}{m} h^{kl} \frac{\pi_l}{m}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

donde se usa la ecuación (D.4). Despejando se llega a

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + \pi_k h^{kl} \pi_l / m^2}{g_{0m} h^{mn} g_{0n} - g_{00}}}. \quad (\text{D.6})$$

En esta última ecuación se fija el signo por la condición $\gamma > 0$. Con esta expresión es posible obtener el Hamiltoniano del sistema dado por

$$H = (\dot{q}^k \pi_k - L)_{\dot{q}=\dot{q}(q,\pi)} = \sqrt{g_{0m} h^{mn} g_{0n} - g_{00}} \sqrt{\pi_k h^{kl} \pi_l + m^2} - \pi_k h^{kl} g_{0l}. \quad (\text{D.7})$$

Es importante notar que este Hamiltoniano está asociado con la foliación del espacio-tiempo por superficies de tiempo coordinado t constante. Además, se puede verificar directamente que las ecuaciones de movimiento provenientes de este Hamiltoniano

son equivalentes a las ecuaciones geodésicas parametrizadas por t .

Si se imponen paréntesis de Poisson canónicos al tiempo $t = 0$, es decir,

$$\{q^i(0), \pi_j(0)\} = \delta_i^j, \quad \{q^i(0), q^j(0)\} = \{\pi_i(0), \pi_j(0)\} = 0, \quad (\text{D.8})$$

entonces se puede demostrar que esta estructura se mantiene para todo t , *i.e.*, que los paréntesis de Poisson cumplen¹

$$\{q^i(t), \pi_j(t)\} = \delta_i^j, \quad \{q^i(t), q^j(t)\} = \{\pi_i(t), \pi_j(t)\} = 0. \quad (\text{D.9})$$

Partiendo de estas relaciones, se calculan los paréntesis de Poisson de q^i y los momentos de la partícula, que son de la forma $p^\mu = \alpha \dot{q}^\mu$, siendo $\alpha > 0$ una constante tal que $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2$. Es posible notar que $m^2 = -g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \alpha^2 \gamma^{-2}$, por lo que $\alpha = m\gamma$. En particular nótese que $p^0 = m\gamma$. Con esto se tiene

$$\{q^i, p^j\} = \{q^i, m\gamma \dot{q}^j\} = \{q^i, h^{jk}(\pi_k - m\gamma g_{0k})\} = h^{ij} - mh^{jk} g_{0k} \frac{\partial \gamma}{\partial \pi_i}, \quad (\text{D.10})$$

donde se usa que $g_{\mu\nu}$ y h^{ij} no dependen de π_i . Además, como

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \pi_i} = \frac{h^{ik} \pi_k}{m^2 \gamma (g_{0m} h^{mn} g_{0n} - g_{00})} = \frac{h^{il} g_{0l} + p^i / p^0}{m (g_{0m} h^{mn} g_{0n} - g_{00})}, \quad (\text{D.11})$$

entonces se cumple

$$\{q^i, p^j\} = h^{ij} - h^{jl} g_{0l} \frac{h^{ik} g_{0k} + p^i / p^0}{g_{0m} h^{mn} g_{0n} - g_{00}}. \quad (\text{D.12})$$

¹Con el tipo de argumentos que se usan en este apéndice es fácil ver que $\{q^i, \dot{q}^j\} = \{q^j, \dot{q}^i\}$. Este resultado junto con la identidad de Jacobi permite demostrar que $\{q^i, q^j\}$ no cambia en el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \{q^i, q^j\} = \{\{q^i, q^j\}, H\} = -\{\{H, q^i\}, q^j\} - \{\{q^j, H\}, q^i\} = \{\dot{q}^i, q^j\} - \{q^j, \dot{q}^i\} = 0.$$

Con un análisis similar es posible deducir que el resto de las relaciones de conmutación entre q^i y π_i también son constantes en el tiempo.

Debido a que m es constante y $g_{\mu\nu}$ no depende de los momentos conjugados

$$0 = \{q^i, -m^2\} = \{q^i, g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu\} = 2g_{\mu\nu}p^\mu \{q^i, p^\nu\} = 2g_{\mu 0}p^\mu \{q^i, p^0\} + 2g_{\mu n}p^\mu \{q^i, p^n\}, \quad (\text{D.13})$$

lo que implica

$$\{q^i, p^0\} = \frac{-g_{\mu n}p^\mu}{g_{\nu 0}p^\nu} \{q^i, p^n\} = \frac{h^{ik}g_{0k} + p^i/p^0}{g_{0m}h^{mn}g_{0n} - g_{00}}, \quad (\text{D.14})$$

que es el paréntesis de Poisson entre posiciones y componentes del momento que faltaba.

Falta calcular los paréntesis de Poisson entre los p^μ . Se comienza con

$$\begin{aligned} \{p^0, p^i\} &= \{m\gamma, h^{ik}(\pi_k - m\gamma g_{0k})\} \\ &= m\{\gamma, h^{ij}\}(\pi_j - m\gamma g_{0j}) + mh^{ij}\{\gamma, \pi_j\} - m^2\gamma h^{ij}\{\gamma, g_{0j}\} \\ &= mh^{ij} \left(p^\mu g_{\mu j, k} \frac{\partial \gamma}{\partial \pi_k} + \gamma_{, j} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde se denota la derivada parcial de f respecto a la i -ésima coordenada por $f_{,i}$ y en la última igualdad se usa $h^{ij}_{,k}g_{jl} = -h^{ij}g_{jl,k}$. Al calcular $\gamma_{,i}$ explícitamente se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma_{,i} &= \frac{p^0}{2m(g_{0m}h^{mn}g_{0n} - g_{00})} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{(p^0)^2} g_{k\mu} h^{kl}_{,i} g_{l\nu} - (g_{0m}h^{mn}g_{0n} - g_{00})_{,i} \right) \\ &= \frac{p^0}{2m(g_{0m}h^{mn}g_{0n} - g_{00})} \left(\frac{p^m p^n}{(p^0)^2} g_{mn,i} - 2\frac{p^\mu}{p^0} h^{kl} g_{0l} g_{k\mu,i} + g_{00,i} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Los paréntesis de Poisson entre las componentes espaciales del momento son:

$$\begin{aligned} \{p^i, p^j\} &= \{h^{ik}(\pi_k - m\gamma g_{0k}), h^{jl}(\pi_l - m\gamma g_{0l})\} \\ &= -2h^{k[i} \{h^{j]l}, \pi_k - m\gamma g_{0k}\} (\pi_l - m\gamma g_{0l}) + h^{ik} \{\pi_k - m\gamma g_{0k}, \pi_l - m\gamma g_{0l}\} h^{jl} \\ &= 2h^{k[i} h^{j]l} \left(\delta_k^m - m g_{0k} \frac{\partial \gamma}{\partial \pi_m} \right) g_{\mu l, m} p^\mu + 2mh^{k[i} h^{j]l} \gamma_{, k} g_{0l}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Finalmente, se escriben los paréntesis de Poisson obtenidos arriba a orden lineal en la curvatura del espacio-tiempo. Se parte del supuesto que la curvatura del espacio-

tiempo es pequeña de forma tal que las componentes de la métrica se pueden escribir de la forma

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon \delta g_{\mu\nu}(x) + O(\epsilon^2), \quad (\text{D.18})$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica Minkowskiana del espacio plano. Es fácil probar que

$$h^{ij}(x) = \delta^{ij} - \epsilon \delta^{ik} \delta^{jl} \delta g_{kl}(x) + O(\epsilon^2). \quad (\text{D.19})$$

De la ecuación (D.12) se tiene

$$\{q^i, p^j\} = \delta^{ij} - \epsilon \delta^{ik} \delta^{jl} \delta g_{kl} - \epsilon \delta^{jl} \delta g_{0l} \frac{p^i}{p^0} + O(\epsilon^2), \quad (\text{D.20})$$

donde, en esta expresión y en todas las siguientes, la métrica está evaluada en el punto con coordenadas q^i y t . La ecuación (D.14) implica a su vez

$$\{p^i, p^0\} = \frac{p^i}{p^0} (1 - \epsilon \delta g_{00}) + \epsilon \delta^{ik} \delta g_{0k} + O(\epsilon^2). \quad (\text{D.21})$$

Los paréntesis entre los momentos se calculan de la misma forma, obteniendo:

$$\{p^0, p^i\} = m \delta^{ij} \left(\epsilon p^\mu \delta g_{\mu j, k} \frac{\partial \gamma}{\partial \pi_k} + \gamma_{,j} \right) + O(\epsilon^2), \quad (\text{D.22})$$

$$\{p^i, p^j\} = 2\epsilon \delta^{k[i} \delta^{j]l} \delta g_{\mu l, k} p^\mu + O(\epsilon^2), \quad (\text{D.23})$$

donde en la última expresión se usa

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \pi_i} = \frac{p^i}{p^0 m} + O(\epsilon), \quad \gamma_{,i} = \frac{\epsilon p^0}{2m} \left(\frac{p^m p^n}{(p^0)^2} \delta g_{mn, i} + \delta g_{00, i} \right) + O(\epsilon^2), \quad (\text{D.24})$$

con lo que se tienen todos los paréntesis de Poisson entre las posiciones y los momentos iniciales a orden lineal en la curvatura del espacio-tiempo.

Apéndice E

Operador de posición en mecánica cuántica relativista

Este apéndice está basado en la referencia [44] donde se construye un operador de posición en mecánica cuántica relativista. La idea es presentarlo porque es la única formulación de un operador relativista de posición y de esta tesis se deriva una posible definición de dicho operador válida en teoría cuánticas de campos en espacio-tiempos generales. En el formalismo presentado en este apéndice se asume que los sistemas con los que se trabaja tienen definida la acción bajo los generadores del grupo de Poincaré y se buscan los principios físicos que permitan encontrar operadores de posición. Esto ya indica que esta construcción no es generalizable a espacio-tiempos curvos.

Si se conoce la función de onda de un estado centrado alrededor del origen espacio-temporal ψ y el operador de traslación espacio-temporal por a^μ , $T(a)$, entonces la función de onda del sistema localizado en cualquier otro punto con coordenadas x^μ es $T^{-1}(x)\psi$. Por tal motivo se busca la función de onda de un estado localizado en el origen, misma que debe satisfacer los siguientes postulados:

- (a) Los estados que representan un sistema localizado en el origen forman un espacio lineal cerrado S_0 , es decir, la superposición de dos estados localizados en el origen es otro estado localizado en dicho punto.

- (b) Los elementos del conjunto S_0 son invariantes ante rotaciones alrededor del origen y reflexiones espaciales (P) y temporales (T).
- (c) Si ψ es un estado localizado en el origen, los estados $T^{-1}(x)\psi$ para todo punto $x^m \neq 0$ son ortogonales a todos los estados de S_0 (porque el operador de posición debe ser hermitiano y por eso sus eigen-funciones son ortogonales).
- (d) Los generadores del grupo de Poincaré pueden aplicarse a los estados localizados.

Por simplicidad, se consideran únicamente partículas relativistas con masa m y sin espín, mismas que satisfacen la ecuación de Klein-Gordon y

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (\text{E.1})$$

donde p^μ representa el momento de la partícula. Sean $\psi(\vec{p})$ y $\phi(\vec{p})$ dos funciones de onda de estados localizados expresadas en el espacio de momentos, se define el producto interno invariante de Lorentz entre ellas como

$$(\psi, \phi) = \int \frac{d^3p}{p^0} \psi^*(\vec{p}) \phi(\vec{p}). \quad (\text{E.2})$$

La función de onda asociada a $\phi(\vec{p})$ en el espacio de coordenadas es

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{p^0} \phi(\vec{p}) e^{-ix_\mu p^\mu}, \quad (\text{E.3})$$

con el entendido de que siempre que aparece p^0 se refiere al lado derecho de la ecuación (E.1).

El espacio vectorial generado por funciones de la forma $Y_m^j(\theta, \varphi) f(p)$ donde $p = |\vec{p}|$, θ y φ son las componentes en coordenadas esféricas del 3-momento, $Y_m^j(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos y $f(p)$ son funciones arbitrarias (que también dependen de j), es invariante ante rotaciones alrededor del punto $\vec{p} = \vec{0}$. Estas funciones también son invariantes ante reflexiones espaciales. El operador de reflexión temporal T actuando

sobre una de estas funciones da

$$T[Y_m^j(\theta, \varphi)f(p)] = Y_m^{j*}(-\theta, -\varphi)f^*(p) = Y_m^j(\theta, \varphi)f^*(p), \quad (\text{E.4})$$

que por el postulado (b) es igual a $Y_m^j(\theta, \varphi)f(p)$, de donde se concluye que $f(p)$ son funciones reales. Dado que el operador de traslación espacio-temporal en el espacio de momentos es de la forma

$$T(a)\psi = e^{-ia^\mu p_\mu}\psi, \quad (\text{E.5})$$

entonces, para una traslación puramente espacial y por el postulado (c) se tiene

$$0 = (T(0, \vec{a})\psi, \psi) = \int \frac{d^3p}{p^0} |\psi(\vec{p})|^2 e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}}, \quad (\text{E.6})$$

donde $\vec{a} \neq 0$. De la transformada de Fourier inversa se concluye entonces que $|\psi(p)|^2/p^0$ es una constante, por lo que $|\psi(p)| \propto \sqrt{p^0}$. Esto, junto con el hecho de que $f(p)$ es real, implica que el único armónico esférico que cumple con los postulados pedidos es aquel donde $j = 0$, por lo que la función de onda en el espacio de momentos de un sistema localizado alrededor del origen es

$$\psi_{\vec{0}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{p^0}. \quad (\text{E.7})$$

De esta forma la función de onda en el espacio de momentos de un estado localizado en el punto con coordenadas $(0, \vec{x})$ es

$$\psi_{\vec{x}}(\vec{p}) = T(0, -\vec{x})\psi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{p^0} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}. \quad (\text{E.8})$$

Usando la ecuación (E.3) se obtiene que la función de onda de este estado en el

espacio de coordenadas es

$$\begin{aligned}
\psi_{\vec{x}}(t, \vec{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{p^0} \psi_{\vec{x}}(\vec{p}) e^{-itp^0} e^{i\vec{y}\cdot\vec{p}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{p^0}} e^{i(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-itp^0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2 dp \sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{p^0}} e^{i|\vec{x}-\vec{y}|p \cos\theta} e^{-itp^0} \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{dp}{\sqrt{p^0}} \frac{p}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sin(|\vec{x}-\vec{y}|p) e^{-itp^0}. \tag{E.9}
\end{aligned}$$

Esta función evaluada en $t = 0$ tiene el siguiente comportamiento: tiende a cero como $e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}$ cuando $|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow \infty$ y diverge como $|\vec{x}-\vec{y}|^{-5/2}$ cuando $|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow 0$, lo que es consistente con el hecho de que describe un estado localizado en \vec{x} .

Las componentes del operador de posición, X^i , se definen por medio de la función de onda de estados localizados en el espacio de momentos a partir de la relación

$$X^i \psi_{\vec{x}}(\vec{p}) = x^i \psi_{\vec{x}}(\vec{p}). \tag{E.10}$$

Una función de onda general en el espacio de momentos $\phi(\vec{p})$ puede escribirse como combinación lineal de las funciones de onda de estados localizados $\psi_{\vec{x}}(\vec{p})$ de la forma

$$\phi(\vec{p}) = \int d^3x (\psi_{\vec{x}}(\vec{p}), \phi(\vec{p})) \psi_{\vec{x}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3x \sqrt{\frac{p^0}{k^0}} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{p})} \phi(\vec{k}), \tag{E.11}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
X^i \phi(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3x \sqrt{\frac{p^0}{k^0}} x^i e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{p})} \phi(\vec{k}) \\
&= \left(i \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{i}{2} \frac{p^i}{(p^0)^2} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3x \sqrt{\frac{p^0}{k^0}} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{p})} \phi(\vec{k}) \\
&= \left(i \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{i}{2} \frac{p^i}{(p^0)^2} \right) \phi(\vec{p}), \tag{E.12}
\end{aligned}$$

donde se usa la ecuación (E.1). De esta forma, el operador de posición en el espacio de momentos es

$$X^i = i \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{i}{2} \frac{p^i}{(p^0)^2}. \quad (\text{E.13})$$

Este operador puede transformarse al espacio de coordenadas obteniendo

$$X^i \phi(x) = x^i \phi(x) + \frac{1}{8\pi} \int d^3y \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_i}, \quad (\text{E.14})$$

que contiene como primer término el operador de posición que se usa en la mecánica cuántica ordinaria. Es importante notar que las distintas componentes del operador de posición obtenidas con este análisis conmutan entre sí, por lo que no puede coincidir con un operador posición construido a partir del centro de masa relativista que se usa en esta tesis.

Bibliografía

- [1] J. Abraham et al. Correlation of the highest-energy cosmic rays with nearby extragalactic objects. *Science*, 318:938, 2007.
- [2] J. Alfaro, H.A. Morales-Técotl, and L.F. Urrutia. Loop quantum gravity and light propagation. *Phys. Rev. D*, 65:103509, 2002.
- [3] G. Amelino-Camelia. Relativity: Special treatment. *Nature*, 418:34, 2002.
- [4] G. Amelino-Camelia and T. Piran. Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and the TeV-photon paradoxes. *Phys. Rev. D*, 64:036005, 2001.
- [5] W. Beiglböck. The center-of-mass in Einsteins theory of gravitation. *Comm. Math. Phys.*, 5:106, 1967.
- [6] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333, 1973.
- [7] Y. Bonder and D. Sudarsky. Quantum gravity phenomenology without Lorentz invariance violation: a detailed proposal. *Class. Quantum Grav.*, 25:105017, 2008.
- [8] Y. Bonder and D. Sudarsky. Unambiguous quantum gravity phenomenology respecting Lorentz symmetry. *Rep. Math. Phys.*, 64:169, 2009.
- [9] Y. Bonder and D. Sudarsky. Searching for spacetime granularity: analyzing a concrete experimental setup. *AIP Conf. Proc.*, 1256:157, 2010.

- [10] F. Canè, D. Bear, D. Phillips, M. Rosen, C.L. Smallwood, R.E. Stoner, R.L. Walsworth, and V.A. Kostelecký. Bound on Lorentz and CPT violating boost effects for the neutron. *Phys. Rev. Lett.*, 93:230801, 2004.
- [11] C. Chryssomalakos, H. Hernández-Coronado, E. Okon, and P. Vázquez-Montejo. Towards a first-principles approach to spacetime noncommutativity. *J. Phys.: Conference Series*, 68:012003, 2007.
- [12] C. Chryssomalakos, H. Hernández-Coronado, and E. Okon. Center of mass in special and general relativity and its role in an effective description of spacetime. *J. Phys.: Conference Series*, 174:012026, 2009.
- [13] C. Chryssomalakos and D. Sudarsky. On the geometrical character of gravitation. *Gen. Rel. Grav.*, 35:605, 2003.
- [14] R. Colella, A.W. Overhauser, and S.A. Werner. Observation of gravitationally induced quantum interference. *Phys. Rev. Lett.*, 34:1472, 1975.
- [15] S. Coleman and S.L. Glashow. High-energy tests of Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 59:116008, 1999.
- [16] D. Colladay and V.A. Kostelecký. CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, 55:6760, 1997.
- [17] D. Colladay and V.A. Kostelecký. Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58:116002, 1998.
- [18] J. Collins, A. Perez, and D. Sudarsky. Lorentz invariance violation and its role in quantum gravity phenomenology. In Daniele Oriti, editor, *Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter*. Cambridge University Press, 2009.
- [19] J. Collins, A. Perez, D. Sudarsky, L.F. Urrutia, and H. Vucetich. Lorentz invariance and quantum gravity: An additional fine-tuning problem? *Phys. Rev. Lett.*, 93:191301, 2004.

- [20] A. Corichi, M.P. Ryan, and D. Sudarsky. Quantum geometry as a relational construct. *Mod. Phys. Lett. A*, 17:555, 2002.
- [21] A. Corichi and D. Sudarsky. Towards a new approach to quantum gravity phenomenology. *Int. J. Mod. Phys. D*, 14:1685, 2005.
- [22] W.G. Dixon. A covariant multipole formalism for extended test bodies in general relativity. *Il Nuovo Cimento*, 34:317, 1964.
- [23] F. Dowker, J. Henson, and R.D. Sorkin. Quantum gravity phenomenology, Lorentz invariance and discreteness. *Mod. Phys. Lett. A*, 19:1829, 2004.
- [24] R. Gambini and J. Pullin. Nonstandard optics from quantum spacetime. *Phys. Rev. D*, 59:124021, 1999.
- [25] R.J. Gleiser and C.N. Kozameh. Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence. *Phys. Rev. D*, 64:083007, 2001.
- [26] D.M. Greenberger and A.W. Overhauser. Coherence effects in neutron diffraction and gravity experiments. *Rev. Mod. Phys.*, 51:43, 1979.
- [27] K. Greisen. End to the cosmic-ray spectrum? *Phys. Rev. Lett.*, 16:748, 1966.
- [28] G.S. Hall. *Symmetries, Curvature Structure in General Relativity*. World Scientific Press, 2004.
- [29] B.R. Heckel, E.G. Adelberger, C.E. Cramer, T.S. Cook, S. Schlamminger, and U. Schmidt. Preferred-frame and CP-violation tests with polarized electrons. *Phys. Rev. D*, 78:092006, 2008.
- [30] B.R. Heckel, C.E. Cramer, T.S. Cook, E.G. Adelberger, S. Schlamminger, and U. Schmidt. New CP-violation and preferred-frame tests with polarized electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 97:021603, 2006.
- [31] S. Hossenfelder. Bounds on an energy-dependent and observer-independent speed of light from violations of locality. *Phys. Rev. Lett.*, 104:140402, 2010.

- [32] C.J. Isham. Structural issues in quantum gravity. *arxiv*, gr-qc:9510063, 1995.
- [33] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly. TeV astrophysics constraints on Planck scale Lorentz violation. *Phys. Rev. D*, 66:081302, 2002.
- [34] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly. A strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity. *Nature*, 424:1019, 2003.
- [35] T.F. Jordan and N. Mukunda. Lorentz-covariant position operators for spinning particles. *Phys. Rev.*, 132:1842, 1963.
- [36] C. Kiefer. The semiclassical approximation to quantum gravity. In J. Ehlers and H. Friedrich, editors, *Canonical gravity: From classical to quantum*. Springer, Berlin, 1994.
- [37] V.A. Kostelecký and C. Lane. Nonrelativistic quantum Hamiltonian for Lorentz violation. *J. Math. Phys.*, 40:6245, 1999.
- [38] V.A. Kostelecký and S. Samuel. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. *Phys. Rev. D*, 39:683, 1989.
- [39] C. Lämmerzahl. On the equivalence principle in quantum theory. *Gen. Rel. Grav.*, 28:1043, 1996.
- [40] S.A. Levshakov, P. Molaro, A.V. Lapinov, D. Reimers, C. Henkel, and T. Sakai. Searching for chameleon-like scalar fields with the ammonia method. *A&A*, 512:44, 2010.
- [41] S. Liberati and L. Maccione. Lorentz violation: Motivation and new constraints. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 59:245, 2009.
- [42] L. Maccione, S. Liberati, A. Celotti, J.G. Kirk, and P. Ubertini. Gamma-ray polarization constraints on planck scale violations of special relativity. *Phys. Rev. D*, 78:103003, 2008.
- [43] D. Mattingly. Modern tests of Lorentz invariance. *Living Rev. Rel.*, 8:5, 2005.

- [44] T.D. Newton and E.P. Wigner. Localized states for elementary systems. *Rev. Mod. Phys.*, 21:400, 1949.
- [45] K.A. Olive and M. Pospelov. Environmental dependence of masses and coupling constants. *Phys. Rev. D*, 77:043524, 2008.
- [46] A. Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity. *Proc. Roy. Soc. A*, 209:248, 1951.
- [47] M.H.L. Pryce. The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles. *Proc. Roy. Soc. Lon. A*, 195:62, 1948.
- [48] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, San Diego, 1980. pg. 150–151.
- [49] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [50] C. Rovelli and S. Speziale. Reconcile planck-scale discreteness and the Lorentz-fergald contraction. *Phys. Rev. D*, 67:064019, 2003.
- [51] S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T.A. Wagner, J.H. Gundlach, and E.G. Adelberger. Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. *Phys. Rev. Lett.*, 100:041101, 2008.
- [52] R. Schützhold and W.G. Unruh. Large-scale nonlocality in “doubly special relativity” with an energy-dependent speed of light. *JETP Lett.*, 78:431, 2003.
- [53] R.D. Sorkin. Causal sets: Discrete gravity. In A. Gomberoff and D. Marolf, editors, *Proceedings of the Valdivia Summer School*, 2002.
- [54] D. Sudarsky. Unspeakables and the epistemological path toward quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, 17:425, 2008.
- [55] D. Sudarsky, L.F. Urrutia, and H. Vucetich. Observational bounds on quantum gravity signals using existing data. *Phys. Rev. Lett.*, 89:231301, 2002.

- [56] D. Sudarsky, L.F. Urrutia, and H. Vucetich. Bounds on stringy quantum gravity from low energy existing data. *Phys. Rev. D*, 68:024010, 2003.
- [57] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [58] R.M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics, 1994.
- [59] G.T. Zatsepin and V.A. Kuzmin. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. *JETP Lett.*, 4:78, 1966.
- [60] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2010.