



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**MODELADO Y SIMULACIÓN
DE PATRONES URBANOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A:

ROBERTO MURCIO VILLANUEVA

DIRECTORA DE LA TESIS: DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO

MÉXICO, D.F.

2010.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Lista de Figuras	1
Lista de Tablas	2
Reconocimientos	3
Introducción	4
1. Modelado de ciudades. Planteamiento del problema e importancia	6
1.1 Hipótesis de investigación	7
1.2 Construcción y simulación computacional de los modelos.....	9
1.2.1 Algoritmos para construcción de agregados fractales	9
1.2.2 Lenguajes de programación	14
1.2.3 Arquitecturas de computadora	15
1.3 Caso de estudio: Gran zona central de México	16
2 El estado del arte en la modelación urbana	18
2.1 Antecedentes.....	19
2.2 Ecuaciones diferenciales y técnicas de clasificación de patrones [50, 51, 52].....	20
2.2.1 Ecuaciones diferenciales de crecimiento	20
2.2.2 Ecuaciones de flujo [14, 53].....	21
2.2.3 Modelos de clasificación supervisada [54, 55]	22
2.2.4 Crecimiento urbano como epidemia espacial [11, 56].....	23
2.3 Modelos de agregación fractal	25
2.3.1 Agregados Fractales [14]	25
2.3.2 Modelo de Agregación Limitada por Difusión [14, 15].....	28
2.3.3 Modelo de Percolación Correlacionada [63, 64, 65]	31
2.3.4 El modelo de Arthur - Accidentes históricos y retroalimentación positiva [68].....	34
2.3.5 El Modelo de Vicsek - Szalay (V-S) [73].....	37
2.3.6 Criticalidad Auto-Organizada [75, 76]	38
3 Construcción de modelos para morfología urbana	44
3.1 Migraciones urbanas basado en un modelo coloreado de Agregación Limitada por Difusión [79]	45
3.1.1 Teoría de migraciones urbanas	46
3.1.2 Modelo.....	47
3.1.3 Simulación	50

3.1.4 Resultados y discusión.....	52
3.1.5 Conclusiones.....	60
3.2 Modelo Vicsek-Szalay (V-S) para estructuras urbanas	61
3.2.1 Modelo	61
3.2.2 Experimentos y resultados	63
3.2.3 Ley de Zipf para áreas urbanas [96, 97]	68
3.2.4 Discusión.....	71
3.2.5 Conclusiones.....	74
3.3 Criticalidad Auto-Organizada en ciudades	75
3.3.1 Modelo	75
3.3.1 Experimentos y resultados	76
4 Análisis global	78
5 Conclusiones.....	80
6 Trabajo Futuro	83
6.1 Probabilidades de distribución en sistemas de agregación multi-agregado.....	83
6.2 Transiciones de fase urbanas	83
6.3 Modelo de morfología urbana integral: CDLA + V-S.....	84
Apéndice A Análisis de la complejidad en CA.....	85
Apéndice B Códigos computacionales.....	86
B.1 Segmentos del código en lenguaje C para representar el algoritmo de un DLA “sin rejilla.”	86
B.2 Segmentos del código en lenguaje C para calcular la posición de un punto dentro de un subconjunto espacial de una circunferencia	87
B.3 Código completo en NetLogo para generar las estructuras urbanas bajo el algoritmo de V-S	88
B.4 Sección de código en Visual Basic para obtener coordenadas x, y	89
Bibliografía.....	90
Glosario.....	94

Lista de Figuras

1.1 Patrones en la naturaleza dentro del grupo de patrones formados por agregación fractal	11
1.2 Ejemplos de autómatas celulares	14
1.3 Gran zona central de México	17
2.1 Zona Metropolitana del Valle de México a diferentes escalas y elementos	19
2.2 Ejemplos de objetos que crecen gracias a procesos de agregación fractal	28
2.3 Zona urbana de Berlín, 1925	29
2.4 DLA clásico	30
2.5 Simulación base para la ciudad de Cardiff, Gales, Reino Unido	31
2.6 DLA modificando su probabilidad de difusión	32
2.7 Ejemplos de un modelo para incendio forestal basado en percolación	33
2.8 Comparación entre información urbana real y el modelo de percolación correlacionada	34
2.9 Relaciones entre el potencial de crecimiento–población–desarrollo	37
2.10 Sección de un Montículo de Arena	40
2.11 Estructuras resultantes de varias perturbaciones locales en una malla	41
2.12 Distribución del tamaño de las avalanchas	41
3.1 Diagrama conceptual del proceso de modelado de patrones urbanos	45
3.2 Condiciones espaciales iniciales del modelo propuesto	46
3.3 CDLA	47
3.4 CDLA bi-dimensional de tres colores	49
3.5 Distribución inicial de las semillas	51
3.6 Porcentajes del total de partículas	54
3.7 Experimentos base y costo de la migración	55
3.8. Divisiones angulares	57
3.9 División angular de subconjuntos $\theta = 60^\circ$	59
3.10 Pruebas Shapiro-Wilk para Normalidad y graficas P-P	61
3.11 Ejemplos de configuraciones urbanas obtenidas a través de Vicsek-Szalay	66
3.12 Configuraciones para el par umbral $\Phi = 4.5$, tiempo $t = 500$	67
3.13 Agregados clasificados	71
3.14 Gráficas Log-Log	72
3.15. Dimensión Box	74
3.16 Transiciones “sprawl”-compacta	75
3.17 Etapas de simulación utilizando el algoritmo SOC para ciudades	78

Lista de Tablas

3.1 Parámetros iniciales para el área de estudio X	63
3.2 Ejemplo de la estructura de las matrices dimensionales	65
3.3 Comparativo entre dimensiones fractales	69
3.4 Parámetros iniciales para el área de estudio X bajo SOC	76

Reconocimientos

“Yo soy yo y mi circunstancia y si no la salvo a ella no me salvo yo”

José Ortega y Gasset. Meditaciones del Quijote, 1914

Aún cuando tomo la filosofía de (Ortega y) Gasset como cierta, debo reconocer que construir un trabajo doctoral no es una tarea unipersonal. Muchas son las circunstancias y personas que colaboraron en ella. Y sería injusto dejar fuera a tan sólo una.

De tal forma que va mi más sincero reconocimiento a todas las personas que alguna vez me han enseñado algo, así como a todas las personas que hicieron eso posible

Introducción

Las ciudades y los sistemas de ciudades, y la forma en que éstos se encuentran espacialmente distribuidos en el territorio, representan uno de los sistemas complejos [1, 2, 3] más interesantes en la actualidad¹. No sólo por los problemas sociales que representan y que afectan nuestra calidad de vida diaria, sino desde el punto de vista del computo científico, en cuanto al análisis de modelos matemáticos implementados en máquinas computadoras que nos ayuden en el entendimiento de las dinámicas subyacentes que inciden en la manera en que las ciudades se distribuyen e interactúan unas con otras en el territorio.

La mayoría de las ciudades en el mundo presentan en la actualidad una morfología “dispersa” o “extendida” conocida de manera general como urban sprawl [4, 5]. Estas morfologías conllevan a muchos de los problemas urbanos actuales, como son los largos tiempos de traslado entre las viviendas y los centros de trabajo; las grandes congestiones vehiculares; la destrucción de las tierras de cultivo y cinturones verdes, y otras tantas cuestiones ambientales [6, 7]. Es pues lógico que una de las metas de los urbanistas y planeadores urbanos en la actualidad es detener este proceso de dispersión y llevar a las ciudades a estructuras compactas, lo cual es complejo de abordar toda vez que la dinámica de estos procesos de expansión poblacional y ocupación del territorio no son comprendidos a fondo del todo.

La modelación de éstas expansiones urbanas y de su transición de morfologías extendidas a compactas, por su propia naturaleza compleja, ha mostrado ser complicada de abordar a través de una modelación matemática clásica, utilizando herramientas como son las ecuaciones diferenciales de crecimiento poblacional [8, 9], que en última instancia tratan de modelar a las morfologías urbanas como resultado de la suma de las decisiones que en conjunto y que de manera personal toman los habitantes de la ciudad. Esto implica tener ecuaciones con múltiples variables y relacionadas en varios niveles entre ellas. Es por esto que en esta investigación abordamos el problema de representar la distribución espacial de las ciudades desde enfoques que hagan énfasis en los procesos sociales y económicos a nivel regional que las generan, más que en todos y cada uno de los factores que van formando poco a poco la ciudad. Este dirección en la investigación que tomamos implica trabajar a escala pequeñas, es decir, representar las ciudades a escalas geográficas² de 1:1,000,000 a 1:1,500,000 [10], en donde es posible observar estructuras urbanas regionales cuya morfología no es afectada por los cientos de decisiones individuales al interior de la ciudad, es decir, decisiones tomadas en la escala geográfica 1:1.

En la actualidad, existen algunos acercamientos a la simulación de patrones urbanos bajo esta óptica de sistemas complejos, conocidos como modelos de agregación fractal, los cuales se discutirán a fondo en la sección 2. Se ha reportado [11, 12, 13] que algunos agregados fractales, en particular aquellos formados por

¹ En la actualidad se cuenta con varias acepciones de sistema complejo. En esta investigación nos vamos a referir sistemas complejos como aquellos sistemas formados por varias partes y mecanismos, cuyo comportamiento es emergente, es decir, no puede ser inferido de manera trivial por el comportamiento de sus partes. La cantidad de información necesaria para describir el comportamiento de tales sistemas es una medida de su complejidad.

² Una escala geográfica es la relación existente entre la distancia gráfica lineal que hay entre dos puntos en un mapa y la distancia lineal que existe entre dichos puntos en la superficie terrestre. Por ejemplo, si un mapa tiene una escala 1:1,000,000, cada centímetro del mapa corresponderán a 10 Km. lineales en el terreno.

ciertos procesos de crecimiento alejados del equilibrio [14]³, como son los de Agregación Limitada por Difusión [15, 16] y la percolación correlacionada [14, 16], son similares en forma, pero más importante aún, en mediciones topológicas y estadísticas, a las ciudades y sistemas de ciudades. En esta investigación, la adecuación y estudio de estos agregados a morfologías urbanas se hará utilizando herramientas del computo científico y de modelado computacional de sistemas dinámicos, como son los sistemas multi-agente y los autómatas celulares [11, 12, 17, 18].

Dicho lo anterior, podemos decir que los principales aportes al campo de las ciencias computacionales, urbanas y a las áreas del conocimiento relacionadas con agregados fractales que ésta investigación ofrece son:

- a) Los modelos y simulaciones aquí construidas para estudiar patrones urbanos refuerzan los reportes mencionados y se agregan junto con estas al estado del arte en la materia.
- b) Se muestran algunas ideas no exploradas sobre las interacciones entre ciudades y zonas metropolitanas al representarlas computacionalmente y estudiarlas bajo técnicas de análisis fractal [16, 19]
- c) Se formulan hipótesis de trabajo no reportadas sobre las interacciones entre estructuras de agregados fractales bajo geometrías restringidas y sobre sus posibles relaciones con fenómenos de transición de fase [20, 21, 22]⁴

Finalmente, y a manera de guía, los grandes bloques desarrollados en esta investigación fueron:

- Simulación computacional de morfologías y patrones urbanos. Para esto, se construyeron algoritmos computacionales para representar agregados fractales.
- Construcción de algoritmos clásicos de mecánica estadística [22, 23]⁵, en el sentido de ligar el comportamiento microscópico de los sistemas físicos con su comportamiento macroscópico, de modo que conociendo el comportamiento del primero se puedan averiguar detalles del comportamiento del segundo. En este punto se evaluó la pertinencia de construir programas de cómputo propietarios contra utilizar los proporcionados por algunos paquetes matemático-estadísticos en el mercado.

³ Entendemos la frase “sistemas alejados del equilibrio” en un sentido termodinámico.

⁴En termodinámica, una transición de fase es la transformación que se da en un sistema de una fase o estado de la materia en otro, por ejemplo el agua tiene una transición de fase al pasar de estado sólido a gaseoso.

⁵La mecánica estadística es la parte de la física que trata de determinar el comportamiento de un sistema formado por muchas partículas y permite predecir el comportamiento de sistemas macroscópicos a partir de consideraciones microscópicas de las partículas formantes, utilizando para ello herramientas estadísticas junto a leyes mecánicas.

1. Modelado de ciudades. Planteamiento del problema e importancia

Nuestra falta de conocimiento sobre los procesos que conllevan al crecimiento de la ciudad es tal que no sólo se refleja a nivel del planificador urbano, sino en la población general. En el imaginario colectivo, las ciudades son todavía aglomerados pertenecientes a la época de la expansión industrial: un lugar central, estructuras de carretera que permiten a las personas viajar desde y hacia este centro; zonas predominantemente urbanas que reflejan una estructura jerárquica y segregan los lugares donde se llevan a cabo actividades industriales y, por último, se encuentra la ciudad que está rodeada de una gran área esencialmente agrícola [24, 25]. En la actualidad, la realidad es muy diferente [25].

Las ciudades ya son un conjunto interconectado de estructuras. Basta conducir por ejemplo del Distrito Federal a Toluca. Salvo por una pequeña parte de bosque, prácticamente es una misma mancha urbana. A lo largo del camino vemos una mezcla de actividades que van desde usos de suelo habitacional pasando por todo tipo de usos comerciales hasta las áreas recreativas. Y lo mismo pasa a lo largo del país alrededor de todas las grandes metrópolis. De tal forma que nuestra idea tradicional de ciudad no se mantiene. Los centros económicos (Central Business District o CBD, por sus siglas en inglés) tienden a perder su monopolio económico, dando paso a que se formen ciudades con varios centros que están interconectados ya no sólo a través de carreteras, si no por medios como las redes de datos inalámbricas. Estas dinámicas urbanas reflejan varios procesos: demografía, economía, desplazamientos (de la vivienda hacia los centros laborales, movilidad residencial, etc.), entre otros. Todos estos procesos participan en el mantenimiento de los sistemas urbanos, reforzando sus tendencias a la estabilidad en un nivel macro-geográfico y estimulando o dejando surgir fluctuaciones, tales como alteraciones a un nivel micro-geográfico.

En este nuevo enfoque para entender la estructura espacial de nuestras ciudades necesitamos saber cómo es que pasamos de la ciudad industrial, mono céntrica a una posindustrial y poli céntrica. Parte de la respuesta está en darnos cuenta que el cambio urbano es un fenómeno dinámico, y no uno estático, en equilibrio, en el cual la estructura espacial del territorio y no la dinámica, es el agente principal para el cambio urbano. Es por esto, que el uso de conceptos de sistemas dinámicos, tomados de la física, la biología y la química están llenando los vacíos existentes de métodos rigurosos para estudiar los objetos fundamentales y complejas relaciones que forman a un sistema urbano en la actualidad [12, 26, 27].

Uno de los primeros conceptos que se tomaron de la física para abordar el concepto de la distribución espacial de la población y las actividades en el espacio geográfico [28] fue el concepto de densidad⁶. La medida de la densidad, aunque adecuada bajo ciertas circunstancias, sobre todo cuando se trata de poblaciones rurales, en la actualidad no se adaptó del todo bien al crecimiento espacial urbano y a las consecuentes dependencias económicas que se forman entre aglomeraciones urbanas conurbadas. Al existir redes comerciales extensas el significado conceptual de densidad refiriéndose a una relación directa entre la población urbana y la superficie ocupada como un indicador de aprovechamiento territorial, no es tan relevante. Dentro de las ciudades, existen grandes contrastes entre niveles de densidad urbana, vinculados a los más altos alquileres conectados a

⁶ En física, la densidad de una sustancia, simbolizada habitualmente por la letra griega ρ , es una magnitud referida a la cantidad de masa contenida en un determinado volumen.

ubicaciones centrales o más accesibles, que dan lugar a patrones de densidad regulares y heterogéneos, los cuales van disminuyendo mientras nos alejamos del centro hacia la periferia. Algunas de las medidas alternativas para analizar la distribución espacial de un fenómeno son las funciones de auto-correlación e índices de concentración [28, 29].

1.1 Hipótesis de investigación

En primera instancia, nos preguntamos qué factores hacen crecer y distribuirse a una población en un determinado terreno en una determinada época. Tenemos suficiente evidencia empírica [30] para asumir que la morfología de nuestras ciudades, al menos en las escalas geográficas en las que se basa esta investigación (1: 000, 000 - 1:500, 000) no depende de cientos de variables (actividades humanas), sino surge como resultado de una compleja relación entre variables aplicables a nivel regional [30, 31]. Como punto de partida, se han propuesto [11, 32] cinco indicadores regionales, cinco factores que en cierta medida dirigen a las actividades urbanas a centrarse en una determinada ubicación del terreno. Brevemente, estos factores pueden definirse de la siguiente manera:

1.1.1 Eventos aleatorios ε_i

Sabemos tan poco acerca del mecanismo base que hace que las ciudades evolucionen que en primera instancia podemos suponer que todas las decisiones para asentarse en uno u otro lugar son hechas aleatoriamente. En este contexto, *la aleatoriedad* es una condición que implica que la toma de decisiones es arbitraria y no puede ser explicada sino en términos del impulso individual de las personas. De tal forma que esta condición aleatoria puede considerarse como agregar “ruido blanco”⁷ al modelo.

1.1.2 Accidentes Históricos h_i

Esta parte se refiere primordialmente a la fundación histórica de las ciudades. En términos de nuestros modelos será el punto de inicio para el desarrollo de la ciudad.

1.1.3 Limitaciones físicas del terreno c_i

Las ciudades, en este momento de la historia, sufren necesariamente de un determinismo físico. Existen áreas donde es físicamente imposible construir estructuras urbanas, tales como carreteras o edificios.

1.1.4 Ventajas naturales n_i

Las ventajas naturales son el opuesto a c_i . Están relacionadas con los recursos que pueden ser explotados por la ciudad y determinan la decisión de asentarse en uno u otro lugar.

⁷ Tradicionalmente, el ruido blanco es una señal estocástica que se caracteriza porque sus valores de señal en dos instantes de tiempo diferentes no guardan correlación estadística. Una señal de ruido blanco contiene todas las frecuencias y todas ellas tienen la misma potencia. Lo mismo ocurre con la luz blanca, lo que motiva la denominación. En la actualidad, se le denomina ruido blanco a las variables estocásticas que influyen en un fenómeno. Es en este sentido de aleatoriedad que el concepto de ruido blanco se emplea en modelado de sistemas cuando se agregan factores aleatorios que no están correlacionados entre sí.

1.1.5 Ventajas comparativas vc_i

Este factor es el equivalente económico de ventajas naturales. En cualquier punto del desarrollo de una ciudad o un sistema de ciudades, existe una clara diferencia entre los distintos lugares en donde establecerse. Por ejemplo, la relación de los precios de tierra-vivienda, acceso a servicios básicos, número de escuelas en el barrio, entre otros, suelen ser factores tomados en cuenta por las personas para establecerse en algún lugar. Mientras más personas se establezcan alrededor de alguna ubicación espacial específica, grupos de personas comenzaran a acercarse a esa posición, gracias a que encontrarán mayores ventajas comparativas que en otra posición deshabitada. Creemos que este mecanismo es el principal constructor de la morfología urbana, y será nuestro factor primario para desarrollar crecimiento urbano y distribuciones espaciales en nuestro modelo.

De tal forma, que tomando en cuenta estos cinco factores, la distribución espacial D_i de una población sobre un terreno E , en una coordenada cartográfica i , en un tiempo t , puede expresarse como:

$$D_i(E, t) = f\{\varepsilon_i(t), h_i(t), c_i(t), n_i(t), vc_i(t)\} \quad (1.1)$$

donde la función f está asociada con varios procesos aún no especificados que colaboran para propiciar el crecimiento y la morfología de nuestras ciudades. La ecuación (1.1) debe de tomarse como una mera referencia, un punto de partida sobre el cual bordar sus elementos. De ninguna manera intentamos llegar a dar una expresión teórica formal para f y para $D_i(t)$, lo cual pensamos no es ni siquiera necesario agregar en nuestra aproximación.

Ahora bien, en la introducción mencionamos que las ciudades son sistemas complejos que en esta investigación se equiparan con sistemas alejados del equilibrio, en particular con los agregados fractales, de los cuales, en este trabajo, seleccionamos tres en particular: Agregación Limitada por Difusión (DLA), Percolación y aquellos que presentan una característica conocida como criticalidad auto-organizada (SOC)⁸.

Dicho lo anterior, podemos plantear que nuestra hipótesis de investigación es:

Los patrones formados por las ciudades y los sistemas de ciudades que se representan en un territorio E , se generan en base a los factores mencionados en la ecuación (1.1) y estos patrones pueden ser representados a través de modelos de agregación fractal.

Esta hipótesis implica que la dinámica que subyace en la formación de ciudades es la misma que la de varios fenómenos de crecimiento en la naturaleza que siguen patrones de agregación fractal, lo que implica que nuestras ciudades pudieran estar en la misma clase de universalidad que estos fenómenos. Hablaremos de estos agregados en la sección 2.

⁸ Estos tres modelos se explicaran a detalle en la sección 2

1.2 Construcción y simulación computacional de los modelos

La computación científica [33, 34] es un campo de la ciencia que se ocupa de construir modelos matemáticos y técnicas para soluciones numérica utilizando como principal herramienta maquinas computadoras para analizar y resolver problemas varios. Particularmente aquellos que para su estudio requieren de elaboración de modelos, múltiples simulaciones y generación de estadística para su mejor comprensión.

En esta investigación, la computación científica y sus técnicas son la herramienta fundamental para simular y estudiar nuestros modelos de patrones urbanos. Se simularon en primera instancia estructuras que representaran el crecimiento de agrados fractales, toda vez que, como hemos mencionado, estas son nuestra base para generar patrones urbanos. En la actualidad no existen gran cantidad de algoritmos para simular estos agregados, ni mucho software especializado para generar cientos de simulaciones de estos modelos, por lo que hubo que construir varios algoritmos y piezas de software “*ad hoc*” para esta investigación.

La información necesaria para estudiar los agregados de los que hablamos, a menudo es válida sólo si examinamos agregados extremadamente grandes, formados por miles de elementos, y en determinados experimentos, en el orden de millones, lo cual afecta de manera directa el tiempo de generación, clasificación y estudio de la información, y al buscar que esta investigación sea útil, se deben de entregar resultados en un tiempo razonable.

Esto nos obligó a analizar tres aspectos técnicos con respecto a la simulación computacional:

1. Algoritmos eficientes para construcción de patrones urbanos basados en agregados fractales
2. Lenguajes de programación adecuados para construir programas de cómputo basados en estos algoritmos
3. Arquitecturas de computadora (sistemas operativos e infraestructura de hardware) que soporten la demanda de computo que estos algoritmos plantean.

1.2.1 Algoritmos para construcción de agregados fractales

El problema al que nos enfrentamos es construir un algoritmo que represente visual y topológicamente, estructuras como las de la Figura 1.1. Existen varios métodos para enfrentar este problema, en particular para modelar morfologías urbanas se revisaron varias técnicas que se presentan en la sección 2 de este trabajo. En general, uno de los acercamientos tradicionales en modelación de sistemas físicos, es describir las variables que creemos conforman al fenómeno y sus interacciones. También recurrentemente sucede que al comenzar las simulaciones el investigador se da cuenta de que falta tal o cual variable para ajustar el modelo. En la medida que el sistema a modelar sea más complejo, el predecir cómo se desarrollara durante la investigación está claramente relacionado con la imposibilidad de agregar una multiplicidad de interacciones locales dentro de una multitud de objetos interactuando. De ahí que basar el modelo en reglas simples o interacciones que dan lugar a configuraciones espaciales no anticipadas es una constante al modelar sistemas complejos, como lo son las ciudades.

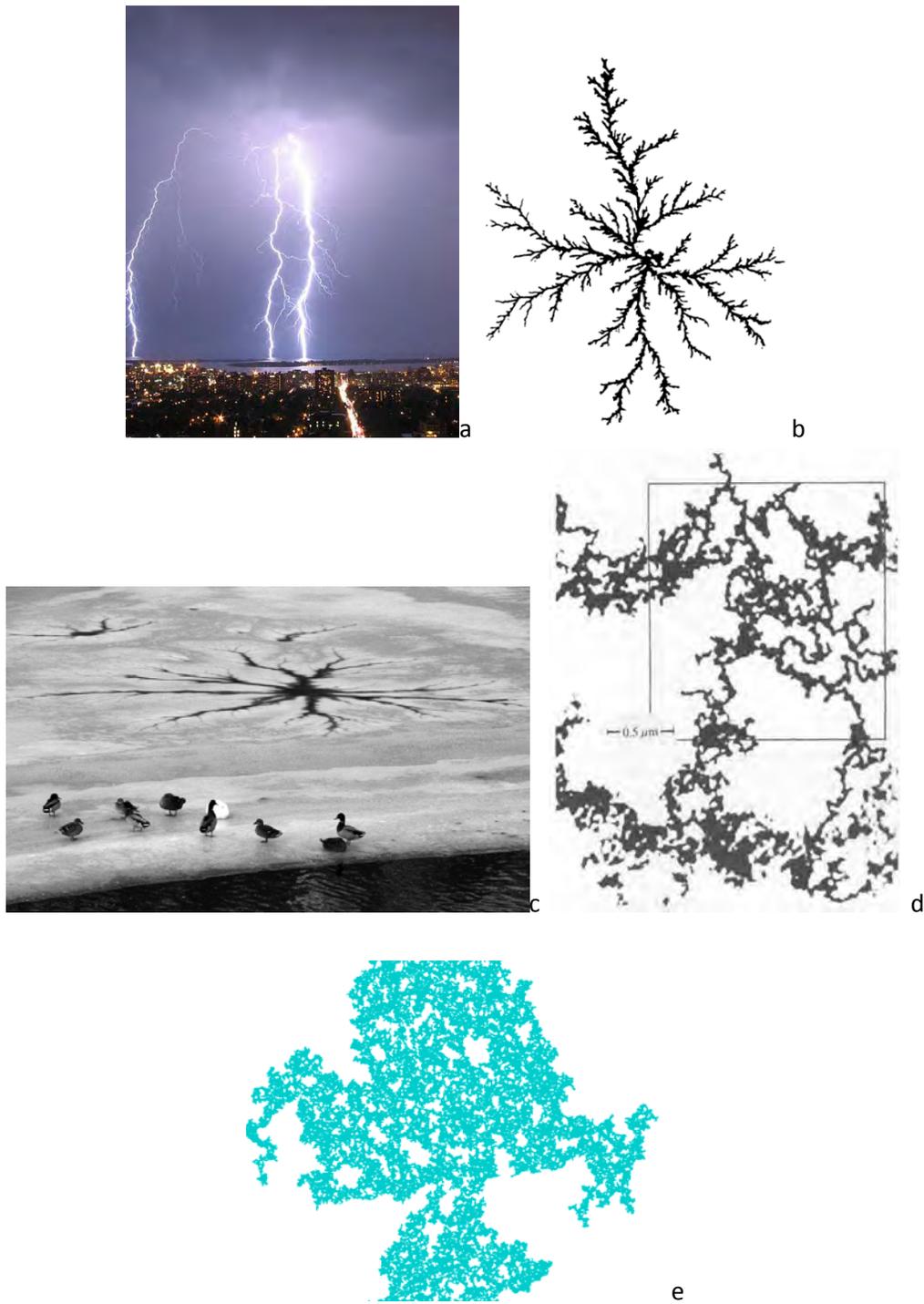


Figura 1.1 Siete ejemplos de patrones en la naturaleza que están dentro del grupo de patrones formados por agregación fractal. (a) Relámpago durante tormenta sobre Toronto, Canadá, (John R. Southern, 2003). (b) Metal de Wood fundido grabado en una fina capa de yeso de Paris (G. Daccord-Dowell-Schlumberger). (c) Grieta en el hielo formada por la invasión de agua relativamente tibia a través de agujeros en “hielo negro” (Fuente: C.A. Knight). Estos tres patrones comparten ciertas características morfológicas, como es su estructura ramificada. Estos fenómenos pueden ser modelados a través de un proceso DLA. (d): Agregado de partículas de hierro. El patrón formado se logra a través de un proceso de percolación (T.A. Witten). (f) Simulación de un proceso de percolación generado por computadora (Fuente: Alexis Monnerot-Dumaine)

Hay pues un cambio fundamental de paradigma: la dinámica se ha vuelto significativamente más importante que la estructura para demostrar los factores fundamentales del cambio. Los estados alejados del equilibrio, que manifiestan desequilibrio permanente en sus varias formas, pasando de periódicos a catastróficos a caóticos, se han convertido en el modo “habitual” en el cual se piensa los sistemas en general existen, por lo que un cambio en los algoritmos para representar estos sistemas también es pertinente.

En la búsqueda de algoritmos que puedan representar de manera más o menos natural las características antes expuestas, nos encontramos con un concepto ya clásico: los autómatas celulares, el cual en su definición es en extremo simple y que da como resultado estructuras complejas.

1.2.1.1 Autómatas Celulares [35, 36, 37]

La idea detrás de los autómatas celulares, o CA, por sus siglas en inglés y cuya abreviación es la más utilizada en la literatura, se basa en las células de los organismos vivos. Las células son comúnmente consideradas como los bloques de construcción básicos de la vida. Por lo tanto no es de sorprenderse que se haya intentado simplificar a la biología desarrollando modelos matemáticos que simulen la manera en la cual estos bloques llegan a formar organismos complejos. Tarea que ha demostrado ser por demás complicada en la práctica. En [36], Thompson produjo algunos de los primeros formalismos matemáticos para el proceso de crecimiento celular, pero no fue hasta el advenimiento de la computadora digital que los científicos comenzaron a especular que el desarrollo orgánico pudiera ser susceptible de computarse, y que el desarrollo celular pudiera ser un proceso de comunicación de información. Dos de los pioneros de la computación digital y científica, Turing y von Neumann, atacaron este problema en diferentes maneras, siendo von Neumann el primero que mostró al primer autómata celular en los años 50's [35].

Los CA son objetos computables que existen en un tiempo y un espacio particulares, cuyas características, usualmente llamadas estados, cambian de manera discreta y uniformemente en función de los estados de sus objetos vecinos, que son aquellos que están en su vecindad inmediata. Se asume a los objetos como espacios ocupados a los cuales llamamos células, con procesos para cambiar el estado de cada célula a través del tiempo y el espacio, usualmente expresados como reglas simples que controlan la influencia del vecindario sobre cada célula. Muchos son los sistemas que pueden representarse como CA, pero **la esencia de esta técnica de modelado consiste en asegurarse que los cambios en el espacio y el tiempo sean siempre generados localmente, por células que sean estrictamente adyacentes**. Esta representación logra que los CA simulen procesos donde la acción local genera un orden global, y donde este orden surge como consecuencia de aplicar reglas locales o descentralizadas. Sistemas que no puedan ser reducidos a modelos de procesos locales no son candidatos a utilizar CA.

Hay tres elementos básicos en un CA: la célula, el espacio donde existe el conjunto de células, y un conjunto de reglas de transición. De estos tres conceptos, podemos decir lo siguiente:

- a) Cada célula puede tomar un valor en los números enteros a partir de un conjunto finito de estados

b) Una malla es la estructura que representa un arreglo de células dado por $D_i = \{i\}, i = 1, 2, \dots, N$, donde i es el índice de la célula y N es el número total de células. En primera instancia, el índice i no implica ningún tipo de orden o jerarquía, tan sólo es una forma de etiquetar a cada célula. Este arreglo puede suponerse infinito o acotado dependiendo de la simulación. Decimos que la malla tiene dimensión $d > 0$, con $d \in \mathbb{Z}$.

c) Cada célula se caracteriza por su vecindad, la cual es un conjunto finito de células en las cercanías de la misma. El vecindario alrededor de cualquier célula i se define como Ω_i , donde el número de células en cada vecindario es K , y la cantidad de urbanización en cada vecindario al tiempo t es

$$N_i(t) = \sum_{k \in \Omega_i} D_k(t) \quad (1.2)$$

d) A todas las células de la malla se les aplica de manera homogénea una función de transición f que toma como argumentos los valores de la célula en cuestión y los valores de sus vecinos, y regresa el nuevo valor que la célula tendrá en la siguiente etapa de tiempo. Esta función f se aplica por cada paso discreto de tiempo. Finalmente, la regla de transición se puede expresar de manera genérica como

$$D_i(t + 1) \leftarrow f[D_k(t) \subset \Omega_i] \quad (1.3)$$

Existen algunas consideraciones y suposiciones extra que mencionar. Por ejemplo, la condición de homogeneidad es básica para el correcto funcionamiento del procedimiento. Se asume pues que las reglas de transición deben ser uniformes, estos es, deben de aplicar a cada célula, estado, y vecindario en todo tiempo; y que todo cambio de estado debe ser local, lo que implica que no hay acciones a la distancia. Hay condiciones que especifican los puntos de arranque y final de la simulación en el espacio y el tiempo, los cuales llamamos condiciones iniciales y de frontera, respectivamente. Las condiciones iniciales aplican a la configuración espacial a las células y sus estados al comienzo del proceso, así como al tiempo en el cual este comienza. Las condiciones de frontera se refieren a los límites en el espacio y/o tiempo sobre el cual se le permite operar al CA.

Por ejemplo, condiciones iniciales clásicas para el arreglo de células, en el tiempo $t=0$ son

$$D_c(0) = 1, D_i(0) = 0, \forall i \neq c \quad (1.4)$$

Es decir, algunas células se consideran “activas” u “ocupadas” (iguales a 1) y otras se consideran “no activas” o “desocupadas” (iguales a 0)

Y una regla de transición en cualquier tiempo t sería, por ejemplo

$$\text{si } \sum_{k \in \Omega_i, k \neq i} D_k(t) = 1 \text{ entonces } D_i(t + 1) = 1 \quad (1.5)$$

$$\text{en cualquier otro caso } D_i(t + 1) = 0$$

Es decir, si algún vecino de una célula i que se encuentra en un estado $D_i(t) = 0$, se encuentra en un estado $D_k(t) = 1$, entonces, en un tiempo $t = t+1$, la célula i cambia su estado a $D_i(t) = 1$.

Estos procesos de crecimiento y difusión son análogos a varios sistemas, desde cristales hasta crecimientos cancerosos. La morfología que se produce es muy simple en el sentido de que se basa en agregados compactos cuya forma está dictada por la malla que los soporta y por la influencia del vecindario.

Aunque los CA dan un peso igual a los objetos y sus relaciones en el espacio y el tiempo, la atención principal en las células significa que el escenario está organizado desde el punto de vista espacial, más que el temporal.

Aunque en primera instancia los CA pueden ser N-Dimensionales, en esta investigación consideramos solamente el caso 2-Dimensional por ser el más usual sobre el cual se simulan modelos matemáticos de ciudades.

El mayor problema en cuanto al modelado con CA, es la condición discreta de la malla. Si el sistema continuo puede volverse discreto asumiendo que la acción e interacciones locales caracterizan al sistema, entonces un CA es aplicable. Sin embargo, para problemas eminentemente continuos, suele ser bastante difícil asociar las células y estados del modelo con sus contrapartes en el sistema real. Por ejemplo, si para modelar una ciudad consideramos como sus elementos básicos a los sus edificios. Dentro de cada edificio, pueden existir distintas actividades, por lo que los edificios no pueden ser células; deben ser parte de los edificios, desagregadas hasta el punto donde cada actividad o estado individual se asocie con una sola célula. Por lo regular este problema no tiene solución dada la poca disponibilidad de información, y el nivel de agregación de esta, como se encuentra por ejemplo en la información censal.

Algunas veces, redefinir el modelo del sistema resuelve tales ambigüedades, sin embargo, para utilizar CA completamente, algunas restricciones deben asumirse; por ejemplo, una célula que represente una localidad geográfica, sólo podrá tener un uso de suelo o estado, que debería ser el uso de suelo dominante en esa localidad.

Algunos ejemplos de CA académicos⁹ se pueden ver en la siguiente Figura 1.2

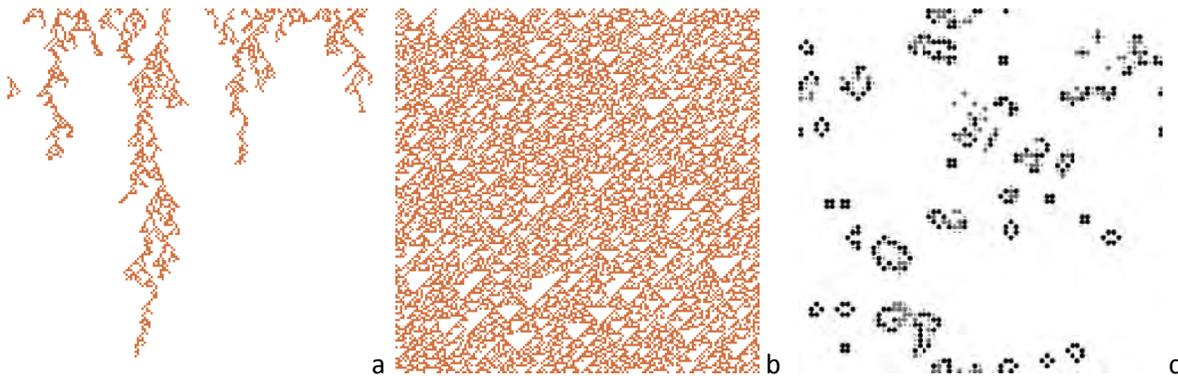


Figura 1.2 Ejemplos de autómatas celulares. a) y b) Son autómatas celulares no deterministas, sino estocásticos. Este tipo de CA son por lo regular modelos de sistemas “ruidosos” cuyos procesos no son fácilmente predecibles. c) Se muestra una etapa de una de las tantas variaciones del juego de la vida de Conway [38] que es uno de los arquetipos de problemas modelados por CA. (Fuente: Elaboración propia)

Para terminar, es interesante notar, desde un punto de vista teórico, que los CA 1-dimensionales caen solamente en cuatro distintas clases de universalidad. Un breve comentario acerca de esto se presenta en el apéndice A.

⁹ Les decimos académicos pues no están representando ningún objeto de la naturaleza en particular. Simplemente se están generando basados en algunas de las reglas propuestas en [103]

1.2.1.2 Algoritmos específicos para agregados particulares

Aún cuando como hemos mencionado que los CA se ajustan a las premisas que buscamos para el modelado de agregados como los de la Figura 1.1, estos nos son el único tipo de agregados que existen. Para simular este proceso, un CA como el expuesto resulta poco práctico. El algoritmo para este tipo de agregación se basa en el proceso conocido como Agregación Limita por Difusión (DLA por sus siglas en inglés). En la sección 2.3.1 comentaremos ampliamente este modelo y el algoritmo y técnicas necesarias para simularlo en una máquina computadora.

1.2.2 Lenguajes de programación

Para llevar a la práctica una simulación computacional de agregados fractales, que a la larga representarán asentamientos urbanos, basada en las técnicas que acabamos de explicar, necesitamos un lenguaje de programación¹⁰ que nos permita representar sus elementos de manera precisa. Por ejemplo, en el caso de los CA, debe ser capaz de representar a las células dentro de una malla y asociarle alguna propiedad a cada una de ellas.

Existen en el mercado gran cantidad de lenguajes de programación de propósito general que pueden realizar esta tarea, como C, C++, Java, PHP, por mencionar algunos.

De igual forma, existe gran variedad de software matemático especializado, con sus lenguajes propietarios, que nos pueden facilitar la tarea de programación al contar ya con librerías específicas para el manejo, por ejemplo, de la malla, a través de una representación matricial. En esta categoría se encuentran por ejemplo MatLab, Mathematica, Maple, entre otros.

Se hizo una evaluación exhaustiva de estas dos opciones y cada una presentó sus pros y sus contras. Utilizar un lenguaje de propósito general te permite controlar hasta el último detalle de la simulación, sin embargo, el tiempo de construcción es elevado. Mientras que utilizar paquetes comerciales acelera los tiempos de programación, pero repercute en el control total sobre el algoritmo. Aparte de que las simulaciones en estos paquetes suelen llevar más tiempo máquina que las hechas en lenguajes tipo C, por ejemplo.

Un tercer grupo de lenguajes que se analizó fueron los de propósito específico para generar autómatas celulares. Aquí podemos encontrar interfaces que nos permiten de manera sencilla plantear las condiciones iniciales y de frontera de la simulación; cuentan con funciones específicas que representan los elementos de un CA (células, malla, funciones de transición); además de contar con lenguajes propietarios que soportan los elementos básicos de un programa de cómputo (manejo de variables, estructuras de control y estructuras de decisión). La mayor parte de este software es de uso libre y desarrollado en universidades. Algunos ejemplos son: Five Cellular Automata¹¹, CellLab¹² y NetLogo, sobre el cual hablaremos en extenso más adelante).

Ahora bien, cabe resaltar que no todos nuestros algoritmos serán CA. El mismo tipo de análisis que hicimos para decidir qué lenguaje utilizar para los CA, lo realizamos para los algoritmos específicos para agregados fractales,

¹⁰ Un lenguaje de programación es un lenguaje artificial diseñado para expresar procesos en una máquina, particularmente en una computadora.

¹¹ <http://www.hermetic.ch/pca/pca.htm>

¹² <http://www.fourmilab.ch/cellab/>

como son los de “sin rejilla” (off-lattice). El resultado fue muy distinto. Si bien los paquetes comerciales generaban las estructuras fractales necesarias, su desempeño en cuanto a tiempo de ejecución fue por demás pobre. Más adelante veremos que para estas estructuras es necesario generar agregados de miles (en el mejor de los casos) de objetos para que puedan ser susceptibles de estudio. Para esta tarea, se desarrollaron programas propietarios en lenguaje C que tuvieran el balance adecuado entre velocidad de ejecución y manejo de memoria y almacenamiento masivo de datos.

Por último, estos dos grupos de algoritmos generaron una cantidad considerable de información. Estamos hablando del orden de 20 Gigabytes representados en archivos planos, y del orden de los 10 Gigabytes en archivos binarios. Para analizar este cúmulo de información se utilizaron varios paquetes estadísticos, como SPSS y Statistica, y apoyo de Mathematica y MatLab para algunos análisis. Pero, antes de poder alimentar a estos paquetes con la información necesaria, había que adecuar ésta a los formatos que estos paquetes la utilizan, por lo que se construyeron varios programas en lenguaje C de manipulación de archivos planos y binarios.

Las particularidades computacionales de cada algoritmo utilizado, así como de los programas de manipulación construidos se explicaran ampliamente en la sección correspondiente a cada uno de ellos.

1.2.3 Arquitecturas de computadora

Una vez que se han establecido los algoritmos a seguir y el lenguaje de cómputo con el cual se construirán, el siguiente paso es decidir bajo que arquitectura de cómputo se ejecutaran, la cual viene dada por:

1. Tipo y número de microprocesadores a utilizar
2. Capacidad de almacenamiento en disco y en memoria RAM
3. Sistema operativo

El número de microprocesadores afecta de manera directa el tipo de programación que se utilizará: secuencial o paralela. Para esta investigación se programó secuencialmente. La razón para esto es que se obtuvo un buen tiempo de respuesta, bajo las condiciones indicadas, en el acercamiento secuencial, por lo que no se vio necesidad de paralelizar el algoritmo. El hardware utilizado a lo largo de esta investigación fue el siguiente:

Estación de trabajo HP – Procesador Intel Xeon Dual-Core W3505 (2.53 GHz, 4 MB cache, 1066 MHz), memoria RAM de 3 GB 1333 MHz DDR3 ECC, Disco duro de 320 GB 7200 rpm SATA NCQ

En cuanto al sistema operativo y lenguajes de programación, como se mencionó, se evaluaron distintas arquitecturas. Al final, se optó por un enfoque mixto, utilizando cada pieza en donde mejor funcionara.

Para los programas generados en lenguajes propietarios y el análisis estadístico

Sistema Operativo Windows XP Professional 32-bit

Software de aplicación: NetLogo 4.0.4, Statistica para Windows versión 7.0, SPSS para Windows versión 13, MatLab para windows versión R2008a y Mathematica para windows versión 7.

Para los algoritmos de agregación particulares

Sistema operativo Solaris 10

Software de aplicación: Compilador para lenguaje C el GCC (GNU compiler collection)

Para los programas de manipulación de archivos

Sistema operativo Linux, distribución RedHat Desktop 5 y Windows XP Professional 32-bit

Software de aplicación: Compilador para lenguaje C el GCC (GNU compiler collection) y Microsoft Excel 2007

1.3 Caso de estudio: Gran zona central de México

Para finalizar el planteamiento del objeto de esta investigación, consideramos necesario para calibrar su validez, comparar nuestros modelos contra un referente en el mundo real. Hemos seleccionado un ejemplo por demás interesante: la zona central de México.

La Figura 1.3 muestra nuestra área de estudio, que a partir de este momento denominaremos **X**. Esta área representa la gran zona metropolitana¹³ central de México, la cual está integrada, principalmente, por las zonas metropolitanas de: Toluca (ZMT), Valle de México (ZMVM) y Puebla (ZMP). Este mapa se encuentra a una escala de 1:1, 500,000 bajo una proyección conforme de Lambert¹⁴. El área **X** concentra al 23% de la población total del país. Casi 24 millones de personas viven en un área de aproximadamente 12 km cuadrados [39].

¹³ Una zona metropolitana, en México, se define como el conjunto de dos o más municipios, cuya área urbana, funciones y actividades rebasan el límite del municipio que originalmente la contenía, incorporando como parte de sí misma o de su área de influencia directa a municipios vecinos, predominantemente urbanos, con los que mantiene un alto grado de integración socioeconómica [39]

¹⁴ Una proyección cartográfica es un método para representar la superficie de una esfera u otra forma en el plano. Todas las proyecciones distorsionan a la superficie transformada de alguna manera. Las transformaciones conformes, como la de Lambert aquí utilizada, preserva los ángulos de la superficie original, sobreponiendo un cono sobre la esfera de la tierra con dos referencias paralelas secantes al globo e intersecándolo.

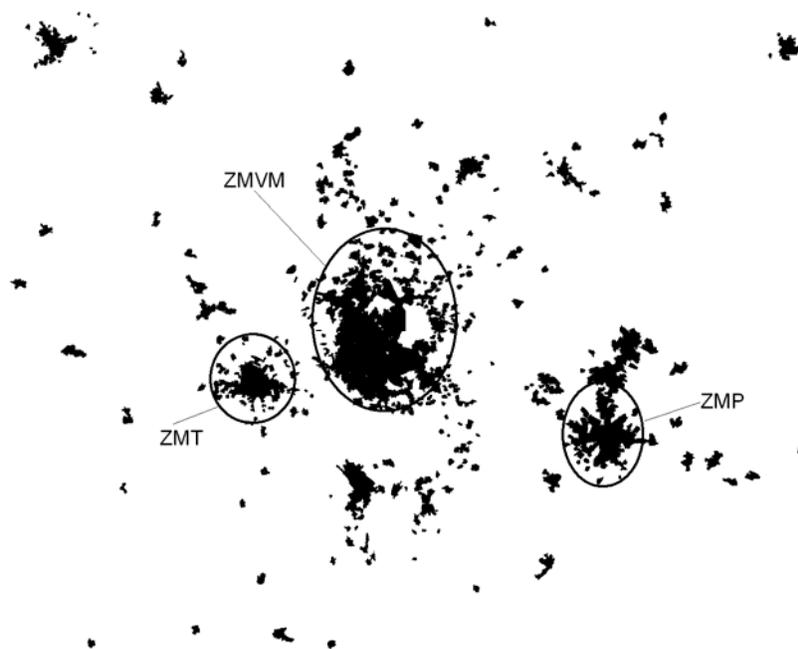


Figura 1.3 Gran zona central de México. La imagen vectorial¹⁵ que aquí se muestra se obtuvo a partir de una imagen de satélite a una escala de 1:500,000 utilizando una clasificación supervisada¹⁶. Se señalan cada una de las zonas metropolitanas principales mencionadas en el texto

¹⁵ Una imagen vectorial es una imagen digital formada por objetos geométricos independiente como segmentos, polígonos, arcos, etc., cada uno de ellos definido por distintos atributos matemáticos de forma, de posición, de color, etc.

¹⁶ Hablaremos más detenidamente sobre clasificaciones supervisadas en la sección 2.

2 El estado del arte en la modelación urbana

Cuando hablamos del estado del arte de algún tópico en particular, inmediatamente nos referimos a íconos en el desarrollo de un área en particular. Es el conocimiento que funge como referente al estudiar el problema. De tal forma, que el título del presente trabajo debería remitirnos a un modelo o modelos que englobaran los últimos estudios acerca de cómo modelar patrones urbanos.

La frase, *modelación urbana*, es lo suficientemente amplia como para dar cabida a varios objetos. Lo mismo se refiere a estudiar la relación que guardan los usos de suelo con el ingreso per cápita en una zona, que a la morfología de las manchas urbanas en esa misma zona.

Por lo tanto, hay tantos estados del arte como interpretaciones de modelación urbana existan. Necesitamos precisar el objeto del modelo urbano. En esta investigación, la acepción que utilizaremos va más enfocada al aspecto morfológico a gran escala, a los patrones que forman las ciudades al distribuirse en el terreno en que nacen y crecen. En la actualidad, no hay un consenso acerca de los fenómenos que influyen en estas distribuciones. Y esto es gracias a un factor que ha resultado, hasta la fecha por lo menos, complicado de modelar: el factor humano.

Las ciudades están formadas, en última instancia, por humanos. Y las estructuras que estos construyen. De tal forma que el factor humano está presente en toda escala. Desde la forma más o menos poligonal de una manzana, hasta las manchas amorfas de una zona metropolitana (Figura 2.1).

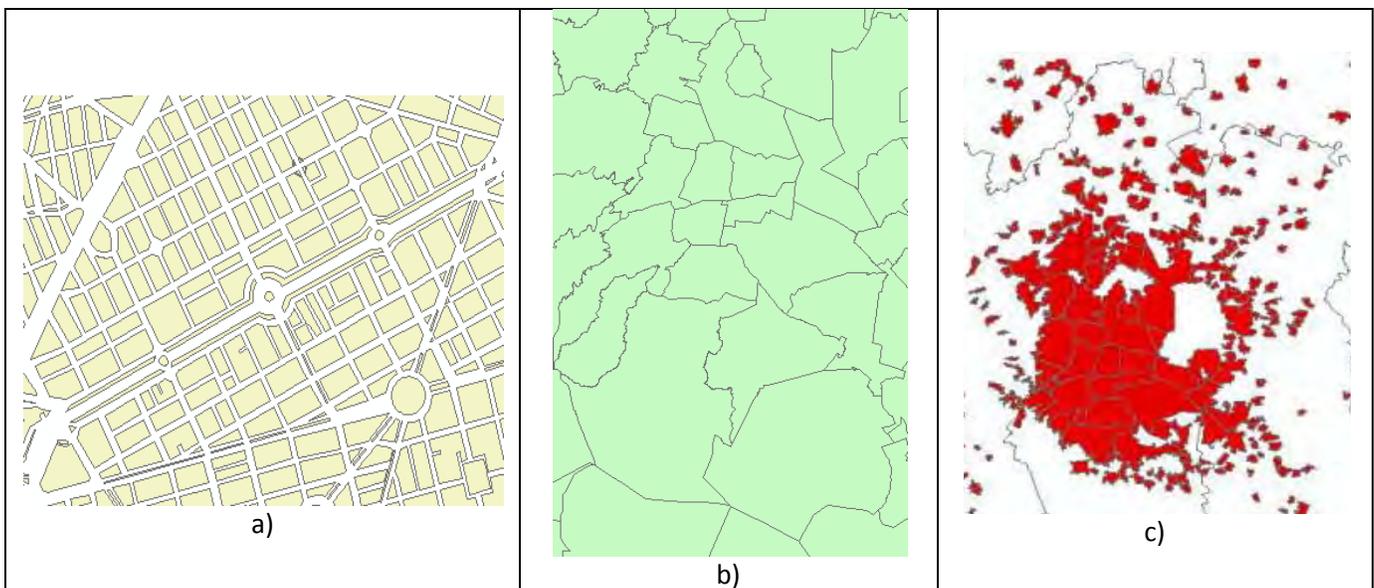


Figura 2.1 Zona Metropolitana del Valle de México a diferentes escalas y elementos. Se presentan las divisiones a nivel a) Manzana, b) Municipio y c) Regional con la mancha urbana formada por la composición de AGEBS o Áreas Geoestadísticas Básicas (Fuente: Marco Geoestadístico Básico 2005, INEGI)

Sin embargo, de manera empírica, sabemos que la influencia de las decisiones individuales, decae al aumentar la escala. Es decir, a nivel manzana las decisiones individuales tienen gran relevancia; a nivel regional estas

decisiones pueden comenzar a despreciarse y se pueden plantear modelos generales que tengan un grado de fiabilidad alto.

Bajo esta premisa, vamos a dividir en dos grandes grupos a los modelos y algoritmos para simulación urbana que en la actualidad se consideran como el estado del arte:

- a) Ecuaciones diferenciales y técnicas de clasificación de patrones, y
- b) Modelos de crecimiento y agregación fractal

2.1 Antecedentes

Este estado del arte del que hablamos, se viene construyendo desde los años 60's, con las ideas revolucionarias de Jane Jacobs [40], acerca de cómo el modelo de ciudad estaba agotado.

Hace 50-60 años, el crecimiento suburbano descontrolado, el crecimiento en el uso del automóvil y la reducción del transporte público masivo, fueron factores vistos como éxitos del desarrollo urbano. El tener completamente segmentada la ciudad se consideró un triunfo de la modernidad que permitiría que la calidad de vida de los ciudadanos creciera de manera significativa. Ahora vemos que las ciudades fueron víctimas de su propio éxito. Varios de los problemas actuales, por ejemplo, en cuanto a contaminación ambiental, tiempos de traslado hogar-trabajo aberrantes, mala calidad en servicios públicos, son algunas de las consecuencias directas de cómo se integraron nuestras ciudades con el terreno y entre ellas mismas.

Aunado a lo anterior, las teorías de cómo se estructuraron las ciudades en términos espaciales apenas existían. Aunque hubo una pequeña pero importante tradición económica de ubicación espacial así como ideas acerca de la estructura geográfica de los patrones de uso de la tierra, nunca se integraron pensamientos ni mecanismos acerca de cómo evolucionan las ciudades para convertirse en espacios ordenados. Se pensaba que los patrones que surgieron gracias a la organización radial concéntrica del uso de la tierra en torno a los principales centros comerciales e industriales, podían explicarse a través de simples modelos de mercado, donde los individuos y las empresas simplemente competían entre ellos por la tierra. Estos modelos se remontan a von Thünen (1826) [41], que a principios del siglo XIX sugirió que la tierra se utilizara de acuerdo a la capacidad del usuario para pagarla, hecho que se refleja en la densidad de su utilización y el alquiler que el usuario podría pagar. Todas estas ideas, junto con las teorías de localización de industrias entre el mercado y los recursos primarios, crearon la ilusión de que todos los elementos para desarrollar un conocimiento sólido y profundo acerca sistemas urbanos se encontraban ya dados.

Mientras tanto, Jacobs argumentaba que las ciudades debían de entenderse en términos de cómo los individuos se comportan y los procesos que utilizan para desarrollar su medio ambiente. Fue ella la primera en proponer que los problemas urbanos, son "problemas de complejidad organizada". De hecho, afirmaba que la ciudad es el ejemplo por excelencia de la complejidad organizada. Y poco a poco, al empezar a alterarse el paraíso urbano de los 50's, sus ideas, junto con algunos esfuerzos en economía urbana para ampliar el modelo von Thünen utilizando teorías de la microeonomía del consumidor y modelos más generales de equilibrio competitivo [42], empezaron a hacer evidente que lo que observamos en el patrón espacial de la ciudad necesita ser explicado de manera diferente. No pasó mucho tiempo para quienes estudiaban los fenómenos urbanos se dieran cuenta de

que las teorías de la época no podían hacer mucho más que proporcionar una explicación descriptiva de cómo las diferentes fuerzas económicas y sociales "podían" trabajar entre ellas.

Utilizando las nuevas corrientes científicas sobre complejidad, y, una vez más, las ideas de Jacobs, se han desarrollado nuevas teorías urbanas que tengan como eje central a patrones globales y variables a un nivel equivalente. Se mostró que las ciudades están mucho más alejadas del equilibrio de lo que se pensaba. La globalización, la capacidad de vivir en cualquier lugar dado suficiente acceso a los recursos, y la cada vez más grave huella ecológica han colaborado a que en la actualidad el paradigma sea completamente distinto, asegurando que las ciudades siempre estén fuera de equilibrio, y teniendo como uno de los principales retos detectar los procesos que generan los patrones que observamos. La única forma de obtener esta información, y comprobar si estos modelos se acercan a la realidad, es la simulación, dado que estas ideas no están definidas a través de ecuaciones precisas. Simulaciones aceptables no fueron posibles sino hasta mediados de los años 80's, aprovechando la potencia de los nuevos procesadores y computadoras que aparecieron en la época [43]. A partir de ese momento, los modelos han aumentado considerablemente su capacidad de incorporar información y reproducir patrones urbanos reales. Los datos con los cuales calibrar estos modelos están cada vez más al alcance para una sociedad en línea. Existe ahora la posibilidad de que tales modelos pueden ser comparados contra datos muy recientes y que los procesos para capturar la forma de las estructuras espaciales surjan y se desarrollen. En este punto, la **computación científica** ha jugado un papel fundamental al aportar técnicas matemáticas y computacionales para aprovechar esta disponibilidad de la información.

Después de Jacobs, la modelación urbana ha pasado por las más radicales aplicaciones [44], donde se explica la dinámica urbana como consecuencia de discontinuidades iniciadas por las catástrofes sobre el terreno; el modelo de Wilson [45] plantea que se pueden integrar en los modelos de estática clásica, las dinámicas urbanas y obtener algunas extensiones interesante compatibles con los modelos de bifurcación transversal y auto-organización [46, 47]. Han habido varios modelos sobre la base de la dinámica predador-presa [49]; modelos desarrollados en las ciencias biológicas [49]. Y así muchos otros.

2.2 Ecuaciones diferenciales y técnicas de clasificación de patrones [50, 51, 52]

2.2.1 Ecuaciones diferenciales de crecimiento

Englobamos aquí a todos aquellos modelos que plantean variaciones, tasas de cambio sobre una población para dar formulas que nos den la ubicación en todo momento de los elementos que conforman las manchas urbanas en un terreno en un tiempo específico. Existen una gran variedad de estos modelos, pero vale la pena mencionar aquellos basados en procesos de estructuras espaciales continuas y diferenciando entre dos escalas temporales diferentes: una "lenta" para aspectos demográficos y una "rápida" para la migración de individuos. Mencionamos en particular a estos modelos pues se basan en las mismas premisas que los que en esta investigación desarrollamos. Para estos modelos, la dinámica urbana debe tener en cuenta los factores mencionados en la ecuación 1.1 y las partes específicas que conforman a cada uno de ellos. Todos estos procesos enfocados a mantener el sistema urbano reforzando su tendencia a la estabilidad a escalas geográficas pequeñas (1:1,500,000), mientras que a escalas grandes (1:10,000) se refuerza su carácter dependiente de las decisiones individuales.

Por ejemplo, algunos de estos modelos consideran a la población establecida en una región que se representa como un dominio abierto y acotado $\Omega \subset R^2$. Se toma en cuenta la densidad de la población $u(E, t)$ en $E \in \Omega$ en el tiempo t , de tal forma que el número de individuos en el tiempo t en la región $\Omega_0 \subset \Omega$ está dado por $\int_{\Omega_0} u(E, t) dp$.

Las actividades económicas sobre Ω se determinan por la oferta de empleo. Suponiendo que esta oferta se clasifica en N actividades disjuntas, se toma en cuenta la densidad de empleos $v_k(E, t), k = 1, \dots, N$ tal que $\int_{\Omega_0} v_k(E, t) dE$ es el número de empleos de tipo k en la región $\Omega_0 \subset \Omega$ en el tiempo t .

En la dinámica poblacional toma en cuenta que los procesos demográficos se llevan a cabo más lentamente que las migraciones, de tal forma que se en estos modelos se trabaja con estas dos escalas temporales. Por lo tanto, la ley de balance para la densidad de la población $u(E, t)$ se puede escribir como $\frac{\partial u}{\partial t} = U(u, v) + kV(u)$, donde U es la parte demográfica y V representa las migraciones. El parámetro escalar $k > 0$ sirve para distinguir entre dos escalas temporales, modulando la velocidad de las migraciones comparadas con el factor demográfico de la variación en población.

La parte demográfica se formula como una ley logística, suponiendo que las actividades económicas tienen cierta influencia en el tamaño de la población: a mayor número de empleos, mayor la población. Lo cual es a cierto nivel consistente con las economías de aglomeración observadas en los sistemas de ciudades.

2.2.2 Ecuaciones de flujo [14, 53]

Si pensamos en las ciudades como estructuras en movimiento, en particular, como flujos desplazándose en un medio, abriéndose paso a través de un este, y cuya frontera, necesariamente es móvil, las ciudades entonces pertenecen al conjunto de sistemas que requieren de la solución de la ecuación de Laplace con una frontera en movimiento. Para estos problemas, los cuales conforman algunos de los paradigmas más simples en la formación de patrones, existen pocos resultados analíticos exactos. Los problemas más simples están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \Phi(x_s) &= 0, \\ \Phi(\infty) &= 1 \quad \text{y} \\ V(x_s) &= n(x_s) \cdot \nabla \Phi(x_s) = \nabla_n \Phi(x_s) \end{aligned}$$

Donde Φ es el campo escalar que obedece la ecuación de Laplace, x_s es un punto en la frontera en movimiento y $n(x_s)$ es el vector unitario perpendicular a la frontera en movimiento en x_s .

Sale de los alcances de este trabajo comentar sobre la definición específica de la ecuación de Laplace así como de algunas de las técnicas para su solución.

Este enfoque, aunque por demás interesante, plantea más dificultades que respuestas. Si bien las fronteras de las ciudades no son fijas, su cambio no es instantáneo. Los procesos urbanos por los cuales la ciudad se expande

tienen una escala temporal grande, por lo que su modelación a través de conocer la posición de x_s en cada t , nos daría información que no se representa en la realidad.

2.2.3 Modelos de clasificación supervisada [54, 55]

Este tercer grupo es de los más utilizados para proyecciones urbanas. Básicamente se trata de a partir de una imagen real del territorio, como por ejemplo algún producto raster¹⁷, iniciar un proceso estadístico para conocer el resultado de configuraciones hipotéticas futuras. Dentro del aprendizaje automático¹⁸, encontramos técnicas de clasificación que nos permiten agrupar muestras de acuerdo a criterios o métodos, estas técnicas son la clasificación supervisada y la no supervisada.

El objetivo de la clasificación dentro del aprendizaje automático consiste en la asignación de un objeto o un fenómeno físico a una de las diversas categorías o clases especificadas (se hace referencia a clase como una agrupación de objetos que tiene características comunes, o mejor dicho como un sinónimo de categoría). La clasificación es una técnica muy útil, usada en diversos campos como el de reconocimiento de patrones.

Clasificación supervisada

En la clasificación supervisada se cuenta con un conocimiento a priori de las estructuras a modelar, es decir, para la tarea de clasificar un objeto dentro de una categoría o clase se cuenta con modelos ya clasificados (objetos agrupados que tienen características comunes). Podemos diferenciar dos fases dentro de este tipo de clasificación:

La primera fase cuenta con un conjunto de entrenamiento o de aprendizaje (para el diseño del clasificador) y otro llamado de test o de validación (para clasificación). Estos conjuntos se utilizan para construir un modelo o regla general para la clasificación.

La segunda fase es el proceso per se de clasificar los objetos o muestras de las que se desconoce la clase a las que pertenecen.

Ejemplos de clasificación supervisada son: el diagnóstico de enfermedades, predicción de quiebra o bancarrota en empresas, reconocimiento de caracteres escritos a mano, en la minería de datos, etc. Y, por supuesto, predicción de configuraciones urbanas. Entre las técnicas dentro del grupo de clasificación supervisada se encuentran los algoritmos de clasificación por vecindad.

Las reglas de clasificación por vecindad están basadas en la búsqueda de un conjunto de los k prototipos más cercanos al patrón a clasificar.

La regla de clasificación por los k vecinos más cercanos o simplemente k -NN (k nearest neighbors) establece que un nuevo caso será clasificado en la clase donde sus vecinos a quienes representa son los más cercanos.

¹⁷ Una imagen raster tiene una estructura de datos que representa una rejilla rectangular de píxeles o puntos de color. Por lo regular se representan de manera digital aunque se pueden tener imágenes raster en papel.

¹⁸ El aprendizaje automático es una rama de la inteligencia artificial que se encarga de crear programas computacionales capaces de generalizar comportamientos a partir de una información no estructurada suministrada en forma de ejemplos. Es, por lo tanto, un proceso de inducción del conocimiento.

Regla del vecino más próximo. Considerando un espacio de representación, el caso a ser clasificado tomará la clase que está más cerca dentro de ese espacio.

Regla de los K vecinos más próximos (K-NN). El nuevo caso a ser clasificado se ubicará en la clase con más votos en el contexto de los K vecinos más cerca del conjunto de entrenamiento.

Además, dentro de los algoritmos de clasificación supervisada existen otros como los de tipo estadístico: el análisis del discriminante y el de Naive-Bayes.

El método de **análisis del discriminante** es una técnica estadística multivariante cuya finalidad es analizar si existen diferencias significativas entre grupos de objetos respecto a un conjunto de variables medidas sobre los mismos para, en el caso de que existan, explicar en qué sentido se dan y proporcionar procedimientos de clasificación sistemática de nuevas observaciones de origen desconocido en uno de los grupos analizados.

El método de **Naive-Bayes** es una de las técnicas más populares para clasificar información. Bayes es un clasificador empleado para representar distribuciones conjuntas de modo que permitan calcular la probabilidad a posteriori de un conjunto de clases dado un conjunto de características obtenidas de la información, y así clasificar los datos en la clase más probable.

Cada una de estas familias de modelos tiene aspectos a favor y en contra. Unos modelan ciertos aspectos urbanos mejor que otros, sin embargo, todos estos modelos presentan un gran inconveniente: se basan en la descripción micro del sistema, es decir, la descripción de la dinámica de sus componentes. Lo cual, eventualmente, implica que su exactitud es directamente proporcional al número de variables que se utilice.

2.2.4 Crecimiento urbano como epidemia espacial [11, 56]

Nivola [57] señala la circunstancia obvia de que las ciudades “sólo pueden crecer en cuatro direcciones: hacia adentro, hacia afuera, hacia arriba y hacia abajo...” con un crecimiento “que tiende a seguir los caminos más transitados, particularmente en los países desarrollados donde el territorio utilizable es abundante”. Tal crecimiento refleja una combinación de influencias y preferencias varias como el precio de la tierra, la densidad poblacional, medio ambiente, etc. Este proceso de urbanización trajo consigo la suburbanización vista como el crecimiento acumulado de la ciudad a través de adiciones en su periferia.

Para estudiar este efecto, se puede dividir el crecimiento poblacional sobre una zona E, en un tiempo t , en tres etapas: la etapa crecimiento establecido $Eg(t)$; la etapa nuevo crecimiento $Ng(t)$, el cual acaba de realizar la transición de territorio no habitado a habitado, y la etapa territorio disponible $A(t)$, que es uno de los factores detonantes del proceso de crecimiento poblacional en primer lugar. Cuando el territorio se ocupa por primera vez, las reservas comienzan a agotarse, y si estas son limitadas, eventualmente el crecimiento cesará mientras un límite C que pueda ser impuesto en el mercado se alcance. Este límite puede representarse en la siguiente ecuación:

$$Eg(t) + Ng(t) + A(t) = C, t = 0,1,2, \dots, T \quad (2.1)$$

De la ecuación (2.1) es claro que cualquier cambio en alguno de los estados del crecimiento debe de cumplir la siguiente restricción:

$$dEg(t)/dt + dNg(t)/dt + dA(t)/dt = 0 \quad (2.2)$$

El mecanismo en el modelo es unidireccional: el territorio disponible se convierte en nuevo crecimiento, el cual a su vez se convierte en crecimiento establecido: $A(t) \rightarrow Ng(t) \rightarrow Eg(t)$. El proceso suele empezar con todo el territorio $A(0)$ igual al límite $C - \varepsilon$, donde la fracción ε es la semilla del nuevo crecimiento que comenzara el proceso de crecimiento y de transición, es decir, $Ng(0) = \varepsilon$. El cambio fundamental se encuentra en el nuevo territorio ocupado por la adición de nuevos crecimientos, $dn(t)/dt$, y la transferencia de tales crecimientos a estados establecidos $dEg(t)/dt$. Entonces,

$$dNg(t)/dt = dn(t)/dt - dEg(t)/dt \quad (2.3)$$

La hipótesis aquí es que el nuevo crecimiento asociado con territorio disponible es una proporción α del producto $Ng(t)A(t)$. Se puede considerar $\alpha Ng(t)$ como la proporción del nuevo crecimiento que genera una unidad de nuevo crecimiento, y el número de tales unidades se define por la tierra disponible $A(t)$. La transferencia de nuevo crecimiento hacia su estado establecido es también una proporción γ de cada unidad de nuevo crecimiento $Ng(t)$. Con estas definiciones, la ecuación (2.3) se convierte en

$$dNg(t)/dt = \alpha Ng(t)A(t) - \gamma Ng(t) \quad (2.4)$$

El término $\alpha Ng(t)A(t)$ es un término de interacción que representa el mecanismo esencial de conversión en el modelo. Los otros dos componentes del cambio se convierten en

$$dEg(t)/dt = \gamma Ng(t) \quad (2.5)$$

$$dA(t)/dt = -dnt(t)/dt = -\alpha Ng(t)A(t) \quad (2.6)$$

Y aquí surge un asunto muy interesante en cuanto a la mecánica de estos modelos. Las ecuaciones (2.4) y (2.6) son idénticas a aquellas utilizadas en los modelos epidemiológicos. Si $Ng(t)$ se define como infecciones, $A(t)$ como sujetos susceptibles a infecciones y $Eg(t)$ como sujetos que se han recuperado de una enfermedad, entonces el modelo presentado puede ligarse al proceso infectivo que podría sufrir una población con la remoción gradual de aquellos infectados que se recuperaron o murieron. El mecanismo central del modelo es la interacción entre infectados y susceptibles a infectarse, y en este caso, $\alpha Ng(t)A(t)$ tiene la interpretación inmediata del número de infectados $dNg(t)$, la cual es una proporción α de todos los contactos potenciales entre infectados y susceptibles.

Estos modelos son fáciles de predecir: mientras el número de susceptibles decae, el número de nuevos infectados también cae, y en última instancia la epidemia termina. Al igual que la tierra disponible para nuevo crecimiento.

2.3 Modelos de agregación fractal

Los modelos del punto 2.2 se basan en ecuaciones que hay que resolver analítica o numéricamente, y que obviamente pueden simularse a través de un programa de cómputo. Ahora bien, una de las características de los sistemas complejos (como las ciudades), es que las soluciones analíticas para las ecuaciones que los describen son en exceso complicadas de resolver y consumen cientos de horas en tiempo de procesamiento computacional, o simplemente, no existen. Por esto, se puede adoptar otro enfoque para tratar de modelar y simular este tipo de sistemas: a través de modelos que hacen énfasis en las características macroscópicas del sistema y en las grandes reglas que lo hacen funcionar, más que en las interacciones y propiedades de cada una de las partes que lo conformen, siguiendo en enfoque mecánico estadístico.

Bajo este enfoque, y junto con la ayuda de la computación científica, es que se ha obtenido mucha información acerca de ciertos objetos y procesos conocidos como fractales, los cuales han demostrado modelar de manera cercana varios procesos en la naturaleza, en particular, a los sistemas de ciudades.

2.3.1 Agregados Fractales [14]

No tenemos en la actualidad una definición universalmente aceptada para el concepto de fractal. Sin embargo, si un objeto o fenómeno presenta propiedades de auto-similitud estadística, o puede definirse a través de leyes de potencia que lo caractericen a distintas escalas podemos hablar. Estas características tienen consecuencias directas en la dimensión del objeto o fenómeno en cuestión [58].

Brevemente, recordemos que la noción de dimensión es fundamental en matemáticas, pues nos da un parametrización precisa de la complejidad conceptual o visual de cualquier objeto, geométrico o no, como lo es el tiempo por ejemplo. De manera tradicional, consideramos a un punto, una línea, un cuadrado, un cubo como objetos con dimensiones 0, 1, 2 y 3 respectivamente. Estas dimensiones enteras nos dan cierta idea de algunas características de los objetos, por ejemplo, que hay objetos que cubren “más espacio” que otros. Un cubo 3-dimensional cubre en mayor proporción de un espacio en R^3 que un cuadrado 2-dimensional en el mismo R^3 . Formalmente, a estas dimensiones clásicas se les conoce como dimensiones topológicas o de Lebesgue. Sin embargo, conforme ha ido avanzando nuestro conocimiento de la naturaleza, nos hemos encontrado que estas dimensiones no son suficientes para describir los objetos y fenómenos del mundo real. Por lo que se han desarrollado varios tipos de dimensiones que midan distintas características de la naturaleza. Una dimensión en particular, la dimensión de Hausdorff¹⁹ [59] toma valores por lo regular fraccionarios, por lo que, entre otras cosas, podemos utilizarla para conocer qué tanto de un espacio n-dimensional, ocupa un objeto y como se está distribuyendo espacialmente sobre él.

¹⁹ En matemáticas, la dimensión de Hausdorff (también conocida como dimensión Hausdorff-Besicovitch) es un número real no negativo asociado a cualquier espacio métrico. Esta dimensión generaliza la noción de dimensión de un espacio vectorial real. Esto es, la dimensión de Hausdorff de un espacio vectorial n-dimensional es igual a n, por lo que la dimensión de Hausdorff de un punto, una línea y un plano es 1, 2 y 3, correspondientemente. Sin embargo, existen varios conjuntos irregulares que tienen una dimensión de Hausdorff no-entera. El concepto fue presentado por primera vez en 1918 por el matemático Felix Hausdorff. Varios de los avances en la técnica de cómo calcular esta dimensión en conjuntos altamente irregulares se deben a Abram Samoilovitch Besicovitch.

Existen varios métodos para calcular en la práctica esta dimensión, cada uno con peculiaridades correspondientes al aspecto físico que se quiera medir. En esta investigación utilizaremos más adelante dos por demás conocidos: el método de conteo de cajas y el de masa-radio²⁰

En la mayoría de los modelos que implican procesos de agregación, las estructuras en crecimiento se representan por agregados de sitios ocupados en una rejilla, o agregados de formas simples, como las esferas. En términos generales, un agregado es un conjunto de objetos conectados o asociados. La mayoría de los modelos de crecimiento basados en rejillas pueden ser descritos igualmente como configuraciones de uniones “rotas” y “no rotas” de nodos o como sitios llenos o vacíos en la rejilla. Varias reglas de conectividad se han usado para determinar si dos sitios llenos pertenecen al mismo agregado, pero en la mayoría de los casos solo los sitios “vecinos cercanos” (nn por sus siglas en inglés) se consideran como conectados. Por lo tanto, dos sitios conectados pertenecen al mismo agregado si están conectados por un camino que consiste únicamente de pasos entre sitios llenos nn. Los sitios nn sobre una rejilla d-dimensional se definen como sitios que comparten una interface (d-1)-dimensional.

Podemos entonces decir que un agregado fractal es un objeto con las características del punto anterior, que además es un objeto fractal, en el sentido que lo hemos expuesto.

Son varios los modelos de agregados fractales que podemos encontrar (Figuras 1.1 y 2.2), en particular, aquí tomaremos dos para los modelos de ciudades: los modelos de agregación limitada por difusión (DLA) y el de percolación. Estos dos son probablemente de los más importantes y más estudiados modelos para la formación de patrones fractales. El modelo de percolación es uno de los mejor entendidos por la comunidad científica. Por otro lado, el DLA da un excelente ejemplo de las líneas que se están siguiendo para definir las características de escalamiento en patrones fractales y para desarrollar un mejor entendimiento teórico del origen de sus propiedades. En el presente, no existe un acercamiento teórico que nos permita una predicción cuantitativa detallada acerca de la geometría de los agregados generados por modelos simples de crecimiento a partir únicamente de las reglas establecidas para este crecimiento.

²⁰ Ambos métodos se utilizan en la sección 3.2.2

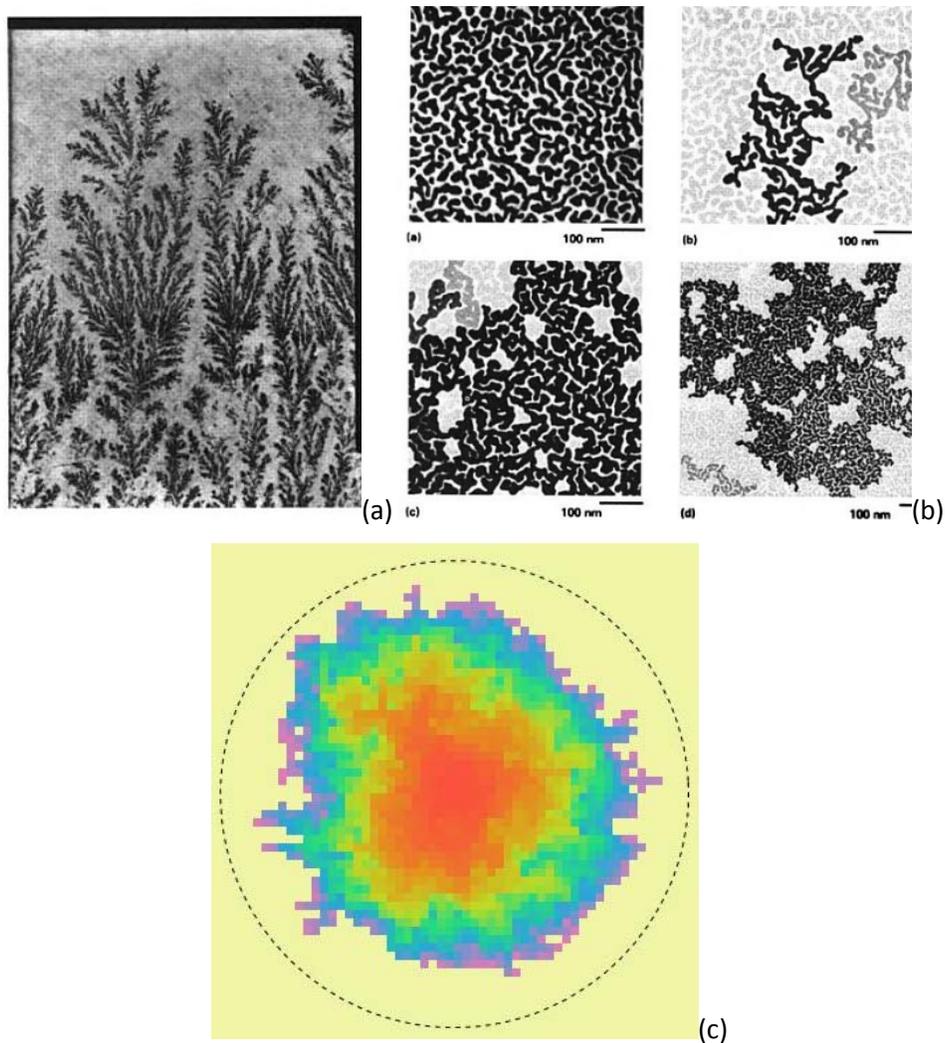


Figura 2.2 Ejemplos de objetos que crecen gracias a procesos de agregación fractal

(a) Modelo DLA para un pseudofosil de MnO₂ que ha crecido en las calizas tableadas de Solnhofen, Alemania. Fuente: [15, pag.328]. (b) Modelos de percolación para representaciones digitalizadas de un electrón en transición de una capa delgada de oro depositada vía un haz de electrones sobre un sustrato de SiN₄ a temperatura ambiente. Fuente: [15, pag.383]. (c) Modelo Eden tipo B²¹ para modelar crecimiento de tumores en el cuerpo humano. Fuente: "Tumor Growth Model" from The Wolfram Demonstrations Project <http://demonstrations.wolfram.com/TumorGrowthModel/>

²¹ El modelo Eden tipo B es un modelo de agregación básica en el cual se selecciona una célula en una rejilla, después, aleatoriamente, se selecciona una de sus células vecinas, y se repite el proceso.

2.3.2 Modelo de Agregación Limitada por Difusión [14, 15]

La figura 2.3 muestra una estructura urbana ramificada con un centro cuasi compacto. Estas estructuras son resultado de varios factores, como son la densidad poblacional, la construcción de vías de comunicación y muchos otros ya mencionados. Estructuras como ésta se repiten en la gran mayoría de las ciudades del planeta

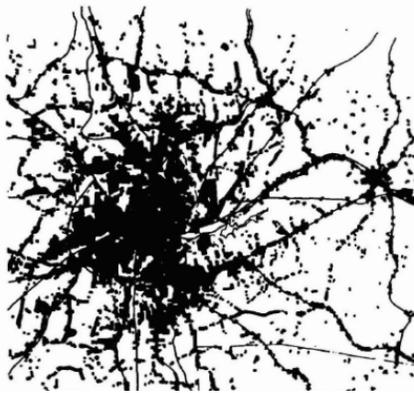


Figura 2.3 Zona urbana de Berlín, 1925. Fuente: [12]

Por otro lado, en la naturaleza, existen varios problemas interesantes de transporte en los cuales la difusión o dirige el comportamiento de la partícula. La formación de redes de ríos, arterias, deposición de iones y la cristalización entre otros fenómenos (ver Figura 1.1) poseen formas ramificadas. Una de las teorías para este fenómeno es que la formación de agregados obedece a que probablemente estos siguen algún tipo de regla relacionadas con potenciales electrostáticos, de ahí que un modelo que utilice las matemáticas utilizadas en electrostática sea una de las primeras opciones de modelado. En 1981, Tom Witten y Leonard Sander [16], desarrollan una simulación para este tipo de procesos naturales llamada Agregación Limitada por Difusión o DLA por sus siglas en inglés (ver Figura 2.4). Este modelo genera agregados de partículas o poblaciones altamente ramificadas con auto-similitud²² con respecto a un punto fijo.

El proceso de agregación propuesto por el DLA es bastante simple (Algoritmo 2.1), sin embargo, produce estructuras por demás complejas y su solución analítica exacta, aun está por definirse. Este proceso, en primera instancia, puede definirse sobre \mathbb{R}^n , sin embargo, su uso más extendido es el caso $n=2$, por lo que sin pérdida de generalidad, el algoritmo que a continuación explicamos es para este caso, entendiendo que el proceso es el mismo para cualquier valor positivo de n .

²² La auto-similitud es una característica que presentan algunos objetos en donde el todo tiene la misma forma que una o más de sus partes. En el mundo real varios objetos presentan –por lo menos de manera estadística– esta característica, como son las líneas costeras [59]. De manera formal, decimos que un espacio topológico compacto T es auto-similar si existe un conjunto finito S que indexa a un conjunto de homeomorfismos no suprayectivos $\{f_s\}_{s \in S}$ para el cual $T = \bigcup_{s \in S} f_s(T)$

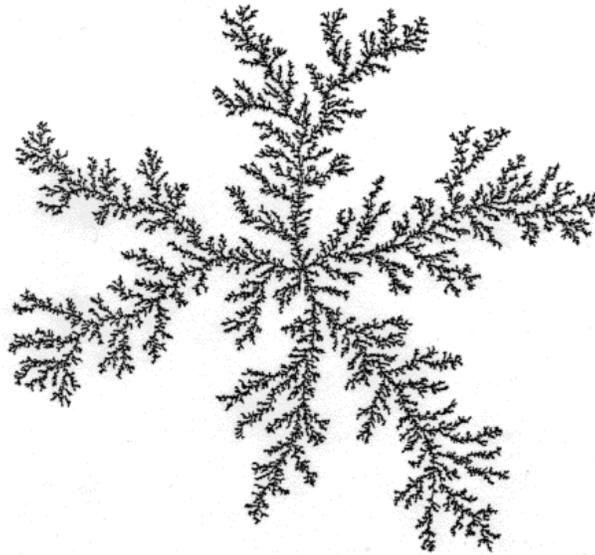


Figura 2.4 DLA clásico. Fuente: elaboración propia.

Algoritmo 2.1 Proceso de agregación median Agregación Limitada por Difusión

1. Se comienza fijando una partícula p_0 , que denominamos semilla o centro en una posición (x_0, y_0) . A este conjunto formado por la semilla le llamamos C_1 .
2. Se genera una partícula p en un punto aleatorio \bar{x} en un círculo de radio R con centro en (x_0, y_0) .
3. La partícula p comienza entonces a desplazarse en el espacio a través de un movimiento Browniano [60]²³.
4. Si, al estar en su movimiento, p se encuentra en algún vecino cercano de (x_0, y_0) entonces “se agrega” a p_0 , quedando fija en la posición en que se encuentre. Con esto se forma el conjunto C_2
5. Se repiten el proceso a partir del punto 2.

Este procedimiento forma las estructuras mostradas en la Figura 2.4

Formalmente, podemos definir el concepto de “se agrega” dotándolo de una métrica particular al espacio donde se genera el DLA. Sea

$$d(\bar{x}, C_i) = \inf\{|\bar{x} - \bar{y}|, \bar{y} \in C_i\} \quad (2.7)$$

²³ El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió éste fenómeno en 1827. Él observó que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente. El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por los átomos del fluido sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo provocando el movimiento observado.

una métrica sobre R^2 . Entonces, dado ε pequeño, se cumple que $d(\bar{x}, C_i) < \varepsilon, C_{i+i} = C_i \cup \{\bar{x}\}$ y el nuevo agregado es C_{i+i} . En otras palabras, una partícula en difusión (mueve) vía una trayectoria Browniana y si se encuentra dentro de algún área de tolerancia de la estructura existente, entonces se le agrega. Existen variaciones en cuanto a los puntos 3, 4 y la métrica propuesta, pero básicamente el algoritmo 2.1 es el algoritmo estándar para DLA.

Este modelo ha servido de base para simulación urbana desde ya algunos años [12] de manera aceptable, como el que se muestra en la Figura 2.5, sin embargo, son varias las interrogantes que levanta en cuanto a su validez teórica con respecto a los crecimientos urbanos. Varias de las propiedades del DLA no se reflejan en los datos cuantitativos de las zonas urbanas reales. Por ejemplo, las predicciones de DLA en cuanto a densidades de población urbana son bastante diferentes de los datos observados y los límites urbanos bien definidos no se contabilizan siempre por los brazos del DLA [61].

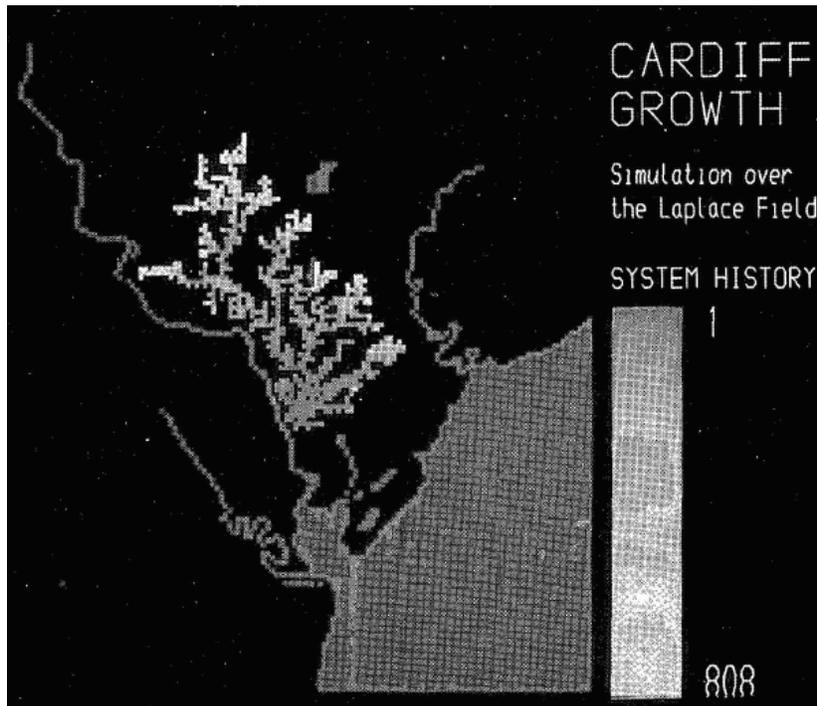


Figura 2.5 Simulación base para la ciudad de Cardiff, Gales, Reino Unido. Fuente: [12]

Una variante de este modelo [11, 55] es alterar directamente la probabilidad de difusión en el DLA, haciéndola proporcional al potencial de crecimiento, así como se muestra en la siguiente ecuación

$$\rho_i(t) = \gamma [P_i(t)]^\eta \quad (2.8)$$

Donde ρ es la probabilidad de difusión en la posición i , en cualquier tiempo t ; γ es una constante de escalamiento y $P_i(t)$ es el potencial de crecimiento poblacional en el punto i , en cualquier tiempo t ; η es un exponente que se utiliza para manipular la estructura del DLA clásico, y se establece en el rango $0 \leq \eta \leq \infty$.

Cuando $\eta = 1$, la forma clásica dendrítica del DLA se genera; cuando $\eta \rightarrow 0$, resultan formas circulares compactas; y cuando $\eta \rightarrow \infty$, las estructuras se vuelven lineares.

La ecuación (2.8) es interesante para cuestiones urbanas, puse el parámetro η se puede asociar con el nivel de tecnología. Para las ciudades basadas en el automóvil, donde las direcciones lineales son predominantes, η debe de ser alto, en contraste a las ciudades en donde caminar es una actividad predominante, en donde su valor será pequeño y hay más accesos a distancias iguales desde la periferia, sin importar el tamaño y la dinámica de crecimiento de la ciudad. Esto sugiere que para generar morfologías urbanas más realistas que estén acordes con los cambios tecnológicos que se van ocurriendo, se debería empezar con una ciudad peatonal y moverse hacia una basada en el automóvil (ver Figura 2.6).

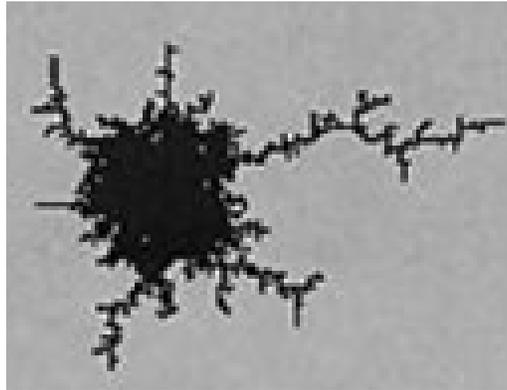


Figura 2.6 DLA modificando su probabilidad de difusión, variando η de menor a mayor a medida que la ciudad crece. Fuente [11].

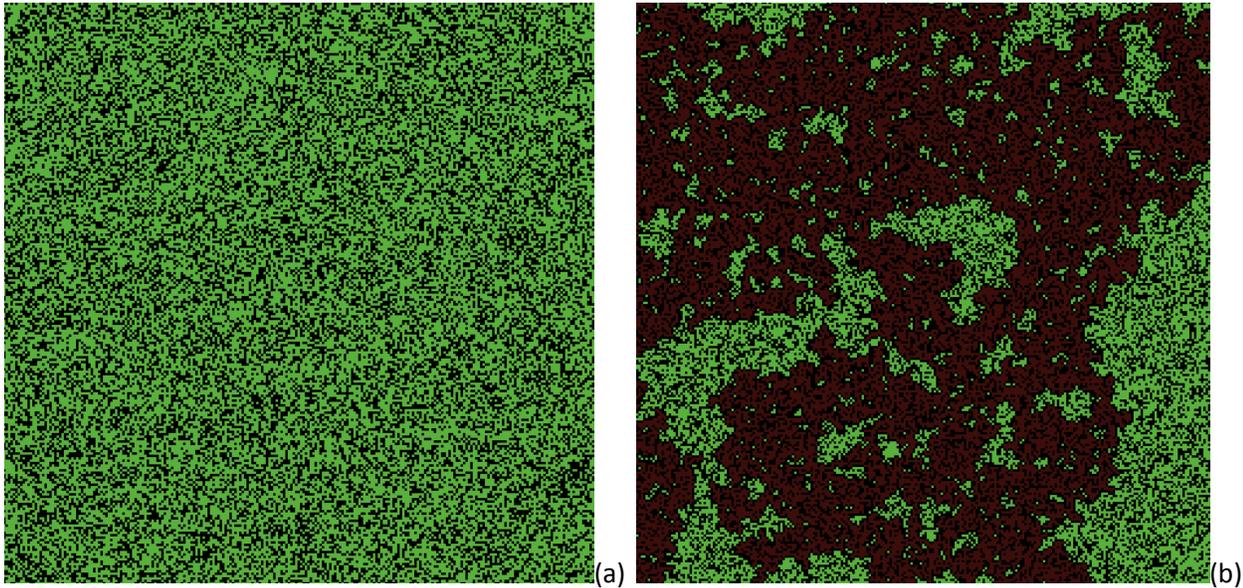
Como se puede apreciar, los centros de estas formas ya son diferentes al DLA tradicional, creando estructuras cuya morfología es más parecida con los asentamientos urbanos reales. Avistamientos raros.

2.3.3 Modelo de Percolación Correlacionada [63, 64, 65]

El concepto de percolación es uno de los modelos mejor estudiados en física estadística, pues, al igual que el DLA, modela un rango amplio de fenómenos de la física, la química, urbanismo, astronomía, incendios forestales, etc. (ver Figura 2.2 (b) y Figura 2.7). Originalmente, un proceso de percolación se refiere al movimiento y filtrado de fluidos a través de materiales porosos. De manera general la teoría de la percolación nos dice cuando un sistema se encuentra macroscópicamente abierto a ciertos fenómenos, como los flujos de tráfico vehicular, o cuánto petróleo se puede extraer de alguna cuenca, y en cuanto tiempo.

La modelación de sistemas basada en percolación se basa, una vez más, en una rejilla en donde cada posición puede o no, estar ocupada. Los sitios ocupados forman agregados continuos que tratan de modelar las características de fenómenos reales. En particular, un sistema percolado muestra una transición de fase continua en un valor finito p , el cual, en una rejilla regular, está caracterizado por la formación de un agregado suficientemente grande para expandirse a todo el sistema. Decimos que un sistema con tal característica “percola” o es “percolado”. Mientras el estado de transición de fase se va aproximando a partir de valores de p pequeños, el tamaño promedio del agregado diverge de una manera que simula la divergencia de las fluctuaciones del acercamiento de una transición continua de fase en un sistema térmico. De hecho, se pueden definir también funciones y longitudes de correlación de la misma manera que en modelos termodinámicos, y, por lo tanto, medir exponentes críticos para la transición.

El punto en el cual el proceso de percolación transita de un sistema abierto a uno cerrado, se conoce como el umbral de percolación en el sistema, cantidad con la cual estaremos trabajando en nuestras aplicaciones de patrones urbanos. El comportamiento del sistema en las vecindades de este umbral es de interés primordial para muchos fenómenos de transporte y de transiciones de fase.



2.7 Ejemplos de un modelo para incendio forestal basado en percolación. (a) Muestra el estado inicial de un bosque hipotético. (b) Muestra el mismo bosque después de sufrir un incendio. Podemos ver como las áreas en negro (bosque quemado) forman un solo gran agregado. Fuente: Elaboración propia.

De igual forma que en el DLA, el algoritmo general (Algoritmo 2.2) es en extremo simple.

Algoritmo 2.2 Proceso general de percolación.

1. Se define una rejilla de $N \times N$ en R^2 . El algoritmo se puede extender fácilmente para rejillas en R^n .
2. A cada posición de la rejilla se le establece aleatoriamente una probabilidad p de estar “ocupada”.
3. A cada posición de la rejilla se le establece aleatoriamente una probabilidad $1 - p$ de estar “no ocupada”.
4. Se comienzan a generar partículas en posiciones aleatorias.

Ahora bien, el modelo básico de percolación, se puede extender de tal manera, que cada uno de los sitios ocupados, tenga relación con todos los demás sitios ocupados del sistema, es decir, que este correlacionado con ellos a través de una función particular. Este paso es necesario pues pensamos que las ciudades, al ser entes complejos, no están del todo desarticulados sus elementos unos de otros. Teniendo mayor influencia entre sí vecinos cercanos. Este tipo de correlaciones se encuentran es una gran variedad de sistemas, como son biológicos, físicos, económicos y geológicos [66]. Como podemos ver, son prácticamente los sistemas que hemos venido exponiendo presentan características complejas y fractales.

Una de las técnicas más exactas para modelar estas correlaciones, se explica en [67] y se basa en una técnica muy utilizada en procesamiento de señales: el método del filtrado de Fourier o FFM. Considérese una secuencia

en L^2 de números aleatorios no correlacionados $\{u(r)\}$, $r = (i, j)$, $i, j = 1, \dots, L$. La función de correlación es $\langle u(r) u(r') \rangle \sim \delta_{r,r'}$ con $\delta_{r,r'}$ la delta de Kronecker, y las llaves $\langle \rangle$ denotan un promedio con respecto a la distribución Gaussiana. Se utiliza la secuencia $\{u(r)\}$ para generar una nueva secuencia $\{n(r)\}$, con una función de correlación que tenga una ley de potencias de amplio rango $C(l)$ de la forma

$$C(l) \equiv \langle u(r) u(r') \rangle = (1 + l^2)^{-\alpha/2} \quad (2.8)$$

donde $l = |r - r'|$, y α es el exponente de correlación.

La ecuación (2.8) se utiliza en [65] para generar estructuras urbanas tomando las siguientes consideraciones:

(i) La densidad de población $u(r)$ en las ciudades se ajusta a la relación

$$u(r) = e^{-\lambda r} \quad (2.9)$$

donde r es la distancia radial desde el distrito central de negocios (CDB) situado en el centro, y λ es el gradiente de densidad.

(ii) De igual forma, tomamos en cuenta el hecho de que en los sistemas urbanos, las personas, los edificios, las unidades urbanas en general, no se posicionan al azar. Por el contrario, existen correlaciones derivadas del hecho de que cuando una unidad se encuentra en un lugar determinado, la probabilidad de desarrollo en unidades adyacentes aumenta naturalmente, es decir, cada sitio no es independiente, y cada sitio no ocupado por una unidad, está ocupado con una probabilidad que depende de la ocupación de sus vecinos más cercanos.

El algoritmo general para generar estructuras urbanas bajo esta técnica no es sencillo como los algoritmos anteriores, pues involucra varias operaciones en cada posición para establecer las correlaciones.

Algoritmo 2.3 Generación de estructuras urbanas a través de un método de FFM

1. Se genera una secuencia 2-dimensional $\{u\{r\}\}$ la cual se construye como se mencionó en los párrafos anteriores y se le aplica la ecuación (2.7) para obtener $\{n\{q\}\}$, la secuencia correlacionada.
2. Se considera que las unidades se posicionan en la rejilla con una probabilidad que se comporta como la ecuación 2.9. Por lo tanto, se relaja el supuesto de que la concentración p es constante para todos los puntos en
3. La rejilla, y se considera que las unidades urbanas se posicionan con una probabilidad de ocupación $p(r) \equiv \rho(r)/\rho_0$, que se comporta de la misma manera que la observada en las ciudades.

Al aplicar estas reglas, se está realmente modelando un problema de percolación correlacionada en presencia de un gradiente de concentración.

Los resultados obtenidos, se reportan bastante aceptables, tanto morfológicos como estadísticos en cuanto a la dinámica de las ciudades. Algunos ejemplos de las estructuras creadas se muestran en la Figura 2.8

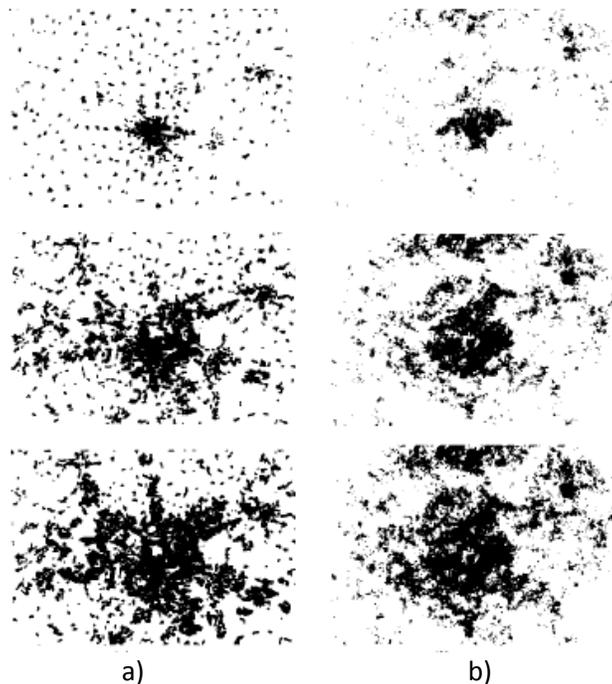


Figura 2.8 Comparación cualitativa entre información urbana real y el modelo de percolación correlacionada. (a) Tres etapas del crecimiento en el tiempo de la ciudad de Berlín y sus alrededores. El marco temporal, de arriba para abajo, corresponde a 1875, 1920 y 1945. (b) Estructuras urbanas simuladas para cada uno de los periodos de tiempo correspondientes creadas por el algoritmo 2.3. Fuente [65]

2.3.4 El modelo de Arthur - Accidentes históricos y retroalimentación positiva [68]

Todo cambio en los sistemas físicos o humanos, está relacionados con la escala del objeto o fenómeno en cuestión. En la actualidad, la teoría de economías de aglomeración [69] está siendo ampliamente aceptada para explicar el crecimiento, desarrollo y morfología de nuestras ciudades. El crecimiento tiene lugar como un retorno a escala²⁴ constante, que se incrementa o se decrementa, el cual refleja el cómo las tecnologías de producción y consumo son utilizadas. En esencia, tal crecimiento sucede como una retroalimentación positiva sobre un estado existente [70, 71].

El concepto de retroalimentación positiva se refiere a una situación donde algún efecto causa más de ese efecto, es decir, la retroalimentación que recibe el sistema resulta en la amplificación o crecimiento en las salidas del sistema. Por ejemplo, cuando se deja caer una piedra en un estanque, las ondas concéntricas que se forman son cada vez más y más grandes al crecer el radio. Esto es gracias a que cada una se retroalimenta positivamente con las ondas anteriores.

²⁴ En economía y medios de producción, el retorno a escala se refiere a los cambios en salidas subsecuentes dados por cambios proporcionales en todas las entradas (donde todas las entradas se incrementan por un factor constante). Si el incremento en la salida es en la misma proporción que el cambio en la entrada, entonces tenemos un retorno a escala constante (CRTS). Si la salida se incrementa menos que la proporción del cambio, estamos ante un retorno a escala decremental (DRS). Si la salida se incrementa más que la proporción del cambio, estamos ante un retorno a escala incremental (IRS)

Bajo una retroalimentación positiva muy intensa, la mayoría de los sistemas se moverán rápidamente a un estado límite, donde el límite comúnmente está dado por factores externos, o se moverán a un nuevo estado donde la retroalimentación positiva es de alguna forma imposible. Una de las consecuencias que suelen darse en sistemas con retroalimentación positiva es la oscilación del sistema.

Entonces, el decir que la retroalimentación positiva con retorno a escala es un proceso de crecimiento en el que los sistemas que crecen o se expanden, como las ciudades, lo hacen de tal forma que se retroalimentan del mismo crecimiento que generan, siendo este proporcional a los procesos que en primera instancia lo generan.

Podemos comenzar a sistematizar estas ideas de la siguiente manera:

El cambio en el potencial de crecimiento de una población se asume como una proporción de su tamaño actual como:

$$\Delta P_i(t) = \lambda P_i(t) \quad \lambda \geq 0 \quad (2.10)$$

Donde λ es la tasa de crecimiento y Δ representa la tasa de cambio. $P_i(t)$ ya se mencionó en la ecuación (2.8), y su significado aquí, y en todo el texto es el mismo.

La relación lineal en (2.10) puede escribirse en términos del incremento en t como

$$P_i(t + 1) = P_i(t) + \Delta P_i(t) = (1 + \lambda)P_i(t) \quad (2.11)$$

Aplicando recursión sobre (2.11), obtenemos la siguiente relación de crecimiento

$$P_i(t + 1) = (1 + \lambda)^T P_i(t) \quad (2.12)$$

Donde es claro que el crecimiento es en última instancia un cálculo exponencial.

Ahora bien, las aglomeraciones urbanas generadas por (2.12), como el lector se podrá haber dado cuenta, pueden representar el cambio tanto en población asociada con el desarrollo, como en potencial para el desarrollo. Incluso, puede medir como desarrollo solamente. Esta lógica se representa en la Figura 2.9, donde la población y el desarrollo se presentan ambos como funciones del potencial y como funciones uno del otro.

Esto nos permite definir una medida del potencial que incluya varios de los factores que influyen en que en cierta posición espacial se genere crecimiento y en otra no. Por ejemplo, uno de los métodos clásicos en física social para determinar el potencial de crecimiento o desarrollo en una posición, es el índice de la proximidad económica entre zonas, que se basa en calcular el potencial en función del tamaño y la distancia (accesibilidad) que tiene esta posición con respecto a las demás en la región. Estos potenciales se pueden considerar en términos absolutos o relativos, como medidas relacionadas a cantidades físicas tales como el tamaño de la zona y distancia que hay entre ella y las demás regiones o centros urbanos. Por ejemplo, el método gravitacional [72] es muy útil para determinar la influencia de una posición o región con respecto a la zona en la que se localiza. En términos de CA, diríamos con respecto del vecindario de la célula.

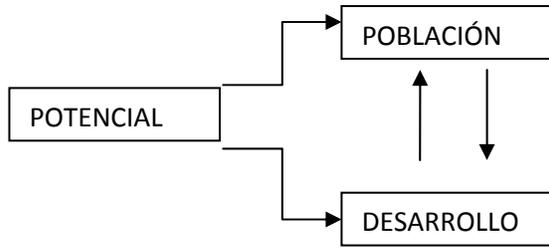


Figura 2.9 Relaciones entre el potencial de crecimiento – población – desarrollo. Necesariamente, antes de que la población crezca o se desarrolle, debe de existir el potencial para esto, de tal forma que el potencial se calcula a priori. Pero entre el desarrollo y lo población no hay una jerarquía de cuál es antes que el otro. El crecimiento poblacional puede propiciar el desarrollo urbano y viceversa. Fuente: Elaboración propia.

Todas las ideas anteriores, se representan en el modelo de crecimiento urbano de Arthur. El modelo comienza con una distribución aleatoria del potencial de crecimiento $P_i(0)$ a través de zonas espaciales definidas en una malla cuadrada con $i = (1, 2, \dots, n)$.

En segundo lugar, el modelo asume una distribución aleatoria de los potenciales de crecimiento dada por:

$$P_i(0) = \varepsilon_i \quad (2.13)$$

donde ε_i es el ruido blanco que inicia potencialmente el crecimiento a partir de un accidente histórico h_i . El cambio del potencial $\Delta P_i(0)$ no se calcula directamente, sino que simplemente se trabaja con los totales $P_i(t)$ en cada período de tiempo.

A continuación, Arthur fija la tasa de crecimiento a

$$1 + \lambda = \mu P_i(t)^{(\alpha-1)} \quad (2.14)$$

donde μ es una constante de escalamiento y α es una medida del retorno a escala. Comenzando en $t = 0$, podemos ir observando la evolución sobre t del modelo como

$$\left. \begin{aligned} P_i(1) &= (1 + \lambda)P_i(0) = \mu P_i(0)^\alpha \\ P_i(2) &= \mu P_i(1)^\alpha \\ &\vdots \\ P_i(t) &= \mu P_i(t-1)^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Aplicando recursión sobre (2.15), la forma general para los potenciales en cualquier momento t se representa como

$$P_i(t) \propto \mu^t P_i(0)^{\alpha^t} \quad (2.16)$$

donde el retorno a escala α puede tomar los siguientes valores, llevándonos a conclusiones distintas:

Si $\alpha=1$, el retorno a escala es constante y la tasa de crecimiento es lineal;

Si $0 < \alpha < 1$ los retornos disminuyen, ocasionando que las posiciones con mayor potencial lo pierdan a costa de las posiciones con menores potenciales;

Si $\alpha > 1$, los retornos aumentan, ocasionando que las posiciones con mayor potencial sean cada vez más grandes a expensas de los lugares con menores potenciales, lo cual, en la realidad, es el escenario más común. El potencial máximo $[\max\{P_i(t)\}]$ eventualmente dominará a todo el sistema, ya que crece a expensas de todas las demás posiciones.

Una forma de simular computacionalmente la ecuación 2.16 es utilizando las técnicas mencionadas de CA. Establecemos la malla de $N \times N$ posiciones donde el potencial se suele normalizar como una probabilidad $\hat{P}_i(t) = P_i(t) / \sum_i P_i(t)$ en cada iteración.

La cuestión práctica interesante del modelo de Arthur, es establecer el valor α . Este valor varía dependiendo del asentamiento urbano de que se trate. Como mencionamos, valores mayores a 1 de α llevarán al sistema urbano a ser dominado rápidamente por una sola estructura.

2.3.5 El Modelo de Vicsek - Szalay (V-S) [73]

Tamás Vicsek y Alexander S. Szalay propusieron un proceso estocástico tipo CA para modelar la distribución fractal de galaxias. Su enfoque y resultados se adaptan fácilmente [11] para modelar la distribución espacial de las zonas urbanas a la escala utilizada en este trabajo, a través del mecanismo ec_i . Esta es la base para la teoría de economías de aglomeración [69], lo que significa que "así como la materia en el sistema solar se concentra en un pequeño número de cuerpos (los planetas y sus satélites), la vida económica se concentra en un número bastante limitado de los asentamientos humanos (ciudades y sistemas de ciudades). Además, así como hay planetas grandes y pequeños, hay grandes y pequeños asentamientos humanos con muy diferentes combinaciones de empresas y los hogares".

Vicsek y Szalay intentan establecer que si en una determinada malla L , una celda, que representa un elemento de masa, llegara a formar parte de una galaxia o no. Esta decisión se toma basándose en dos parámetros:

1. Potencial de pertenecer a una galaxia en la posición i , y
2. Un umbral determinado que regula ese potencial.

Estas dos ideas se han adaptado de manera reciente [11], para explicar y simular estructuras urbanas, como se indica a continuación:

A. Potencial de pertenecer a un asentamiento urbano en la posición i .

Podemos reescribir la ecuación (2.12) de tal forma que defina a la tasa de crecimiento λ como una función de la media del potencial de una célula tomando en cuenta una vecindad restringida alrededor de cada ella. En esta investigación, como mencionamos en la sección 1, utilizaremos como vecindad tipo para todas las células, una vecindad de von Neumann [74] Ω_i . Establecemos que dentro de la vecindad, la tasa de crecimiento es nula, i.e. $\lambda=0$. Con esto la ecuación (2.5) se convierte en

$$P_i(t + 1) = \sum_{j \in \Omega_i} P_j(t) / 5 \quad (2.13)$$

Finalmente se agrega ruido blanco en cada periodo de tiempo t , para representar al factor ε_i

$$P_i(t + 1) = \sum_{j \in \Omega_i} P_j(t) / 5 + \varepsilon_i(t) \quad (2.14)$$

donde $\varepsilon_i(t)$, por razones de simplicidad, es 1 o -1 con la misma probabilidad para cada uno. En el modelo original V-S, ε_i representa las fluctuaciones de densidad aleatorias iniciales en el universo. Este último ajuste destruye cualquier tendencia hacia el equilibrio, pues el ruido blanco se reintroduce continuamente en el sistema como parte de la retroalimentación positiva.

Es claro que la forma final de (2.12) depende básicamente de la función $P_i(t)$, y para calcularlo inicialmente se pueden ocupar varios factores, entre ellos, por ejemplo, el índice de proximidad comentado en la sección anterior. En V-S, $P_i(0) = \varepsilon_i$, para todo i , por lo que cada ubicación en este modelo tiene un valor inicial de 1 o -1.

B. Un umbral dado que regula cuando un potencial $P_i(t)$ será convertido en un área urbana.

En V-S, se argumenta que el crecimiento tendrá lugar cuando el potencial alcanza un determinado umbral, y que en futuro periodos de tiempo, este crecimiento persistirá. No importa si su potencial en la posición i cae por debajo del umbral establecido en algún tiempo t en el futuro, si el potencial de esa posición ha cruzado el umbral, este crecimiento persistirá. Formalmente:

$$\text{si } P_i(t) > \Phi \text{ y } D_i(t-1) = 0 \text{ entonces } D_i(t) = 1 \text{ en cualquier otro caso } D_i(t) = 0 \quad (2.15)$$

Donde Φ es el umbral de desarrollo y $D_i(t)$ es la célula en cuestión.

2.3.6 Criticalidad Auto-Organizada [75, 76]

La Criticalidad Auto-Organizada o SOC por sus siglas en inglés no es en sí misma un modelo físico, sino una característica que comparten los sistemas dinámicos espacialmente extendidos o los sistemas complejos [77]. Peter Bak y su grupo desarrollaron una teoría para sistemas de gran escala, de naturaleza compleja, que sugiere que existen sistemas que a medida que evolucionan, en el tiempo y el espacio, comienzan a alcanzar un umbral crítico que los lleva a un estado de “frágil” equilibrio, el cual se mantiene a través de un proceso de auto-organización. Se puede decir que SOC es una teoría de un “caos débil” el cual se puede aplicar a varios sistemas, naturales o artificiales, cuya dinámica consista de la acción de agentes locales los cuales generan patrones globales altamente ordenados. Algunos de los sistemas en los cuales se está identificando esta criticalidad son: sismos, incendios forestales, ecosistemas, evolución y origen de la vida y mercados bursátiles por citar algunos.

En un sistema que presente SOC, al iniciarse algún movimiento en tiempo y espacio, las reacciones en cadena que resultan de tales movimientos siguen distribuciones en tiempo y espacio que ocurren en todas las escalas, de tal forma que pueden ir desde un simple movimiento aislado hasta movimientos múltiples que involucran a todas las actividades del sistema, y no existe una longitud característica para la cadena de eventos en términos de su duración, ni un número característico para el número de actividades involucradas. Pero, la frecuencia de estas longitudes y número de actividades, si sigue un patrón característico a lo largo de diferentes escalas de tiempo y espacio. De hecho, experimentos sobre sistemas teóricos sugiere que estas cantidades siguen algunas leyes de potencia.

Lo anterior, en [75], se expresa de la siguiente manera:

“El sistema se volverá estable precisamente en el punto en que la red de estado mínimo de actividades se ha roto al nivel donde el movimiento no puede comunicarse a través de distancias infinitas. En este punto no existe longitud de escala medible, y consecuentemente, escala de tiempo”

Para ejemplificar este fenómeno, en [75, 76] se desarrolla lo que en la actualidad se conoce como el ejemplo canónico para SOC: los montículos de Arena.

Montículos de Arena

Supongamos que empezamos desde cero a construir una la pila de arena mediante la adición al azar de granos de arena, un grano a la vez. La pila al ir creciendo, aumentará su pendiente. Finalmente, la pendiente alcanzará un valor crítico, llamado "ángulo de reposo"; si más arena se agrega, esta se comenzará a deslizar, provocando una o varias avalanchas de arena, colapsándose hasta que alcance un estado crítico, que es apenas estable con respecto a futuras perturbaciones. El estado crítico es un atractor para la dinámica: mientras la pila se construye, crece el tamaño de las avalanchas, hasta que en un punto crítico las hay del tamaño del sistema mismo, y la energía se disipada en todas las escalas de longitud. Una vez alcanzado el punto crítico, el sistema permanece allí. Es decir, se auto organiza. El comportamiento de los sistemas en este punto crítico “auto-organizado” se caracteriza por una serie de exponentes críticos - que están conectados por relaciones escalares - y los sistemas obedecen una "escala de tamaño finito" así como los sistemas estadísticos en equilibrio en el punto crítico.

El modelo se basa en una malla cuadrada, como las descritas en la sección 1.2.1.1. Las columnas de arena están representadas por los vínculos entre los vecinos más cercanos en la dirección x y en la dirección. En cada posición $i = (x,y)$ de la malla, se define la pendiente media de la diagonal $z(x,y)$, es decir, es la suma de la alturas de las diferencias en la dirección x (ver Figura 2.10) en el tiempo t.

2	1	7
4	10	1
8	6	2

Figura 2.9 Disposición de pendientes en el tiempo t para cada posición (x, y) en el modelo de montículos de arena. Por ejemplo, la posición (2,2) tiene una pendiente media igual a 10 unidades, mientras que la posición (1,3) tiene una pendiente media de 7 unidades.

Para iniciar el proceso, se agrega un grano de arena en la posición (x, y), lo cual hace que se aumente su pendiente en una unidad: $z(x,y) \rightarrow z(x,y) + 1$. Si al agregar el grano, el valor de la posición $z(x,y)$ es superior a cierta pendiente crítica fija z_c , una unidad de arena se derrumba a los niveles inferior, por ejemplo, a los que conformen un vecindario von Neuman. En términos de las posiciones de la rejilla, expresamos estas ideas como:

Si $z(x,y) > z_c$

$$z(x,y) \rightarrow z(x,y) - 4, \quad (2.16)$$

$$z(x,y \pm 1) \rightarrow z(x,y \pm 1) + 1,$$

$$z(x \pm 1,y) \rightarrow z(x \pm 1,y) + 1$$

La dinámica resultante de este proceso implicará interacciones entre vecinos más cercanos con su física básica sin cambios; cuestión que es análoga a un modelo Ising simple²⁵. En principio la pendiente es un campo vectorial, pero es más fácil trabajar con el campo escalar z , y estas reglas incorporan la física fundamental involucrada, es decir, el montículo de arena es el pretexto para mostrar la dinámica expuesta en (2.16), la cual se aplica en un principio a sistemas dinámicos en general.

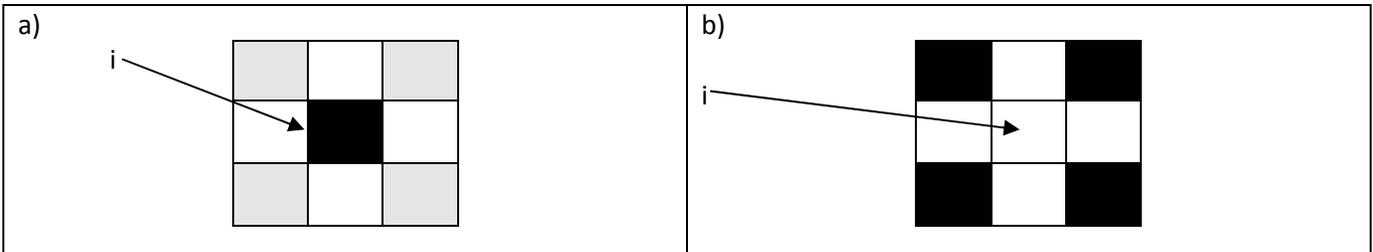


Figura 2.10 Sección de un Montículo de Arena. El estado del sistema se representa por una malla que representan las diferencias en pendientes entre los distintos puntos del montículo. a) La posición $i = (x, y)$ representada por la célula en negro representa una posición con una pendiente en estado casi crítico, es decir, si un solo grano de arena más cae en esta posición, el umbral se excede y ocurre una avalancha. Su vecindario von Neumann (células representadas en gris) se encuentra casi en el mismo estado, con dos granos de arena más superaran el umbral establecido. b) Suponemos que cae una partícula por fin cayó en i , por lo que pierde 4 unidades las cuales se agregan a su vecindario von Neumann.

Al crecer la malla y avanzar en el tiempo la simulación de éste modelo, las avalanchas se extenderán a los vecinos y , luego a los vecinos de estos, en una reacción en cadena, amplificándose a los sitios que estén conectados, por lo general, con más de dos sitios mínimamente estables, y la avalancha eventualmente se propaga a lo largo de la toda la malla. El estado de estabilidad mínima es por lo tanto inestable con respecto a las pequeñas fluctuaciones y no puede representar un punto fijo de atracción para la dinámica. A medida que el sistema evoluciona aún más, se generarán estados cada vez más estables, y estos impedirán la propagación del ruido. Por lo que se puede esperar que el sistema se acerque, a través de un proceso de auto-organización, a un estado crítico con una función de correlación de leyes de potencia para cantidades físicamente observables, incluyendo el espectro de potencia. La pendiente del *montículo de Arena*, (o la "presión") aumentará hasta el punto donde el sistema se vuelve estacionario: esto está garantizado por el estado crítico auto-organizado, pero no el estado con una estabilidad mínima. La pendiente del estado crítico es menor en comparación con la pendiente del estado de estabilidad mínima, de ahí que al perturbar el estado crítico localmente, agregando una unidad, o cambiando localmente la pendiente, esperamos que la perturbación crezca a través de todas las longitudes de escala. Es decir, una perturbación determinada puede llevar desde el movimiento de una sola unidad hasta una avalancha. La falta de una escala de longitud característica nos lleva directamente a la falta de una escala de tiempo característica para las fluctuaciones.

²⁵ El modelo Ising se explica en la sección 6.2

Un resultado típico de una simulación en 2D del procedimiento anterior se puede ver en la Figura 2.11

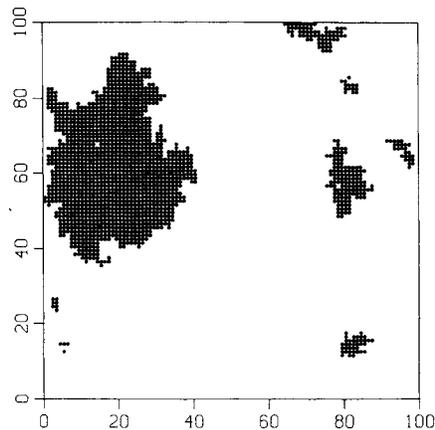


Figura 2.11 Estructuras resultantes de varias perturbaciones locales en una malla de 100x100. Cada agregado se inicio por una perturbación en particular. Fuente [76].

Un resultado importante de esta simulación, es que se verifican leyes de potencia que surgen de manera natural en el sistema, por ejemplo existe una relación de este tipo entre la distribución de frecuencia del tamaño de las avalanchas $D(s)$, la cual sigue una ley de potencias del tipo $D(s) \sim s^{-1}$, que se obtiene a partir de calcular la pendiente de la siguiente grafica

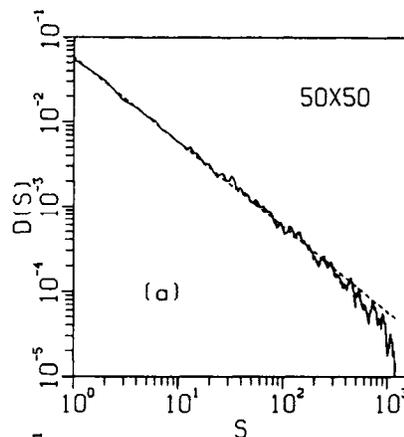


Figura 2.12 Distribución del tamaño de las avalanchas obtenidas en la simulación de la grafica 2.9, donde la s representa el tamaño de las avalanchas y $D(s)$ la frecuencias con que estos tamaños aparecen a lo largo del tiempo de creación del montículo. Fuente [77].

El caso particular del montículo de arena, puede generalizarse a varios sistemas dinámicos, en una o más dimensiones. La pendiente z_n , se puede considerar como presión, energía, información, crecimiento físico, etc., la cual aumenta hasta precisamente el punto donde la “avalancha” (propagación o transporte del fenómeno en el sistema) termina y el sistema se vuelve estacionario. Una menor pendiente impedirá el transporte, y con una mayor la salida superará a la entrada por un tiempo hasta que la estacionalidad se restaure.

2.3.6.1 SOC en Ciudades

Todas las ideas de SOC, pueden adaptarse a través de algunas técnicas de la computación científica de manera casi inmediata a nuestro objeto de estudio: los patrones urbanos. Dentro de este capítulo del estado del arte de la modelación urbana, este ocupa un lugar especial, pues su aplicación es de lo más reciente e innovador dentro de la modelación de morfologías urbanas.

Al igual que los montículos de arena, las ciudades cambian, es un hecho innegable. Pasan de un estado a otro todo el tiempo. Cambian a través de la agregación de nuevas actividades como son nacimientos, migraciones, nuevos desarrollos inmobiliarios, etc. Y la mayor parte de las actividades cambian a través de procesos de redistribución, como lo es la reubicación. Cada vez que una actividad cambia su localización, dispara una reacción en cadena en la cual otras actividades son motivadas a moverse, pues los agentes económicos que componen dichas actividades se reajustan a las nuevas circunstancias. La evidencia empírica que se observa es que la ciudad continúa existiendo con básicamente la misma morfología mientras estas reacciones en cadena suceden, y que tales reacciones no continúan indefinidamente. Y más importante aún, son consistentes con algún parámetro espacial pues mantienen la morfología y la organización existente en la ciudad.

En primera instancia, se asume que una población se distribuye en una ciudad de acuerdo a una ley (empírica) de potencia [77] que relaciona la densidad de población $\rho(r)$ a una distancia r desde el CBD de la siguiente manera:

$$\rho(r) \sim r^{-\alpha} \quad (2.17)$$

Donde r es el radio medido desde el CBD (Central Business District) de la ciudad, que por lo regular se encuentra en el núcleo de esta, y α es un gradiente de densidad.

De igual forma, asumimos que el parámetro α se mantiene constante a través del tiempo, aunque esto en la realidad parece disminuir gradualmente al crecer la ciudad. El parámetro α influye en la densidad de la población, no en el proceso SOC en sí mismo, por lo que para efectos prácticos, en esta investigación, α se mantendrá constante al paso del tiempo. En términos del modelo de montículos de arena, la pendiente crítica de la distribución de la población en la ciudad es controlada por α . Fijando $\alpha = 0.3$, es fácil simular el crecimiento de una ciudad hipotética utilizando (2.17). El algoritmo de construcción es como sigue:

Algoritmo 2.2 – Generación de estructuras urbanas a través de un método SOC

1. Se establece una partícula central en una posición i relacionada con el CBD de la ciudad.
2. Se generan una partícula en la posición r . El conjunto probabilidad que se forma es proporcional a $\rho(r)$, con la restricción que la densidad central $\rho(0)$ tiene una capacidad de $Z(0)$ unidades de población, donde $Z(0) \gg n$ unidades.
3. Las demás capacidades $Z(r)$ se determinan a partir de este valor central utilizando (2.16).
4. Al localizarse una nueva partícula en una posición i se verifica la capacidad de esta posición.
 - a. Si el número total de unidades en i excede su capacidad, n partículas se remueven y se reposicionan en su vecindario von Neumann. Si estas células adyacentes exceden sus capacidades, n unidades se remueven y el proceso de reposicionamiento continúa hasta que un equilibrio dentro de las capacidades que sea consistente con la densidad de superficie se alcance. Esto siempre ocurre, pues el campo de crecimiento de la ciudad es lo suficientemente

- b. grande y las capacidades están muy bien determinadas para asegurar que la simulación es factible.
- c. Si el número total de unidades en i NO excede su capacidad, se repite desde el paso 3.

Cuando las capacidades son excedidas, los reposicionamientos son el equivalente a las avalanchas en el modelo montículo de arena: ocurren en tal forma que el umbral crítico impuesto por el parámetro α se mantiene.

En resumen, SOC ha demostrado ser un buen candidato para explicar la evolución de la dinámica que presentan sistemas cuyas características temporales/espaciales son aparentemente fractales.

3 Construcción de modelos para morfología urbana

Para esta investigación, hemos construido tres modelos basados en agregados fractales, economías de aglomeración, retroalimentación positiva y el concepto de SOC, conceptos todos descritos en la sección anterior, los cuales serán simulados a través de algoritmos computacionales.

Hay que recordar que la base de nuestros algoritmos serán los autómatas celulares explicados en la sección 1.2.1.1. De igual forma, recordemos que los modelos se verificaran sobre una zona específica del mundo real: la zona central de México (sección 1.3) que llamamos área o zona X.

De manera esquemática, nuestro proceso de modelación será el de la Figura 3.1

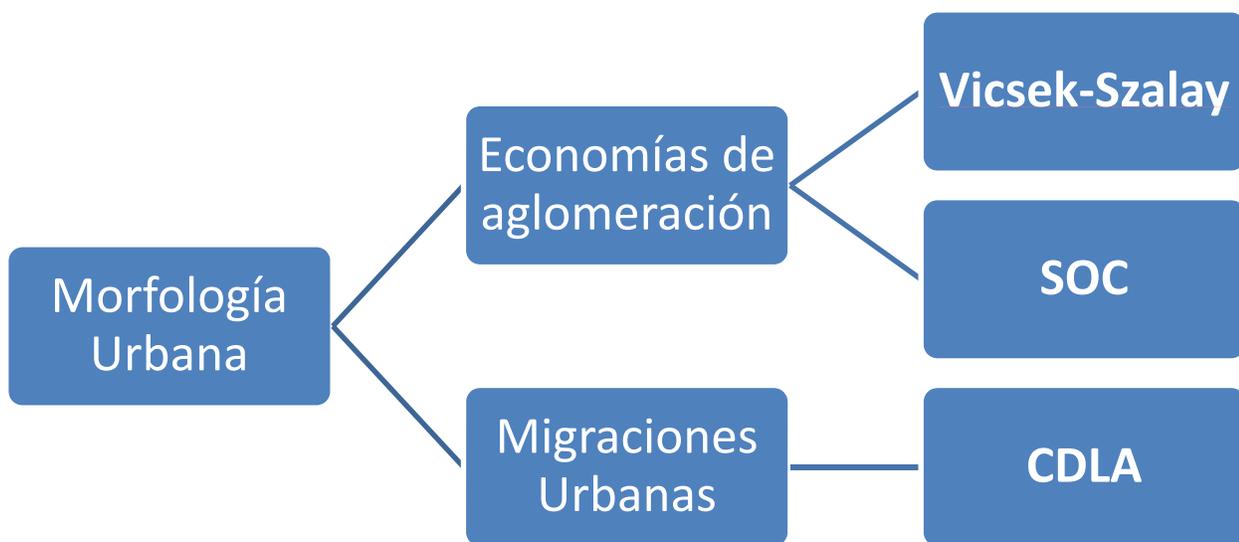


Figura 3.1 Diagrama conceptual del proceso de modelado de patrones urbanos. CDLA son las siglas para Colored Diffusion Limited Aggregation (sección 3.1); SOC son las siglas para Self-Organized Criticality (sección 2.3.5)

Cada uno de los tres modelos construidos, comparte un conjunto básico de consideraciones generales que a continuación se listan:

1. Los tres modelos representan al área de estudio X mostrada en el punto 1.3.
2. Los tres modelos se basaron en tres de los cinco factores comentados en el punto 1.2: **los eventos aleatorios, los accidentes históricos y las ventajas comparativas**. La razón por la que excluir a los otros dos factores de nuestros modelos se abordará más adelante.
3. Los modelos de V-S y SOC, al estar basados por completo en el concepto de CA, se simulan en una rejilla rectangular de 320 x 240 células denominada **L**. Esta rejilla se encuentra a la misma escala y posee la misma proyección cartográfica que X. El modelo de DLA se realiza en un espacio conocido como “sin rejilla” el cual, junto con las razones para no utilizar una rejilla, se explicaran en la sección 3.1.

4. Como la zona de estudio X contiene tres zonas metropolitanas, definiremos siempre tres accidentes históricos iniciales como se muestra en la Figura 3.2

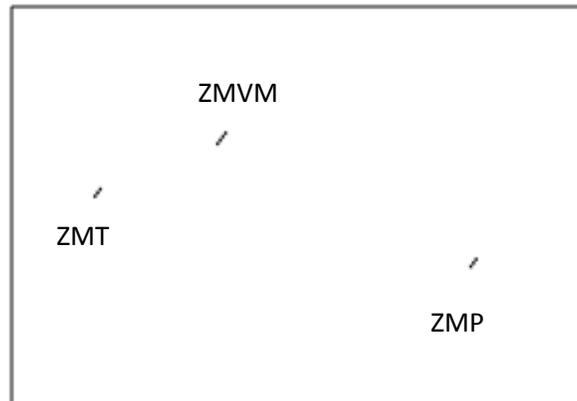


Figura 3.2 Condiciones espaciales iniciales del modelo propuesto. Fuente: Elaboración propia

3.1 Migraciones urbanas basado en un modelo coloreado de Agregación Limitada por Difusión [79] ²⁶

Aún con las limitaciones mencionadas en el punto 2.3.1, proponemos al DLA como un paso original en la modelación urbana. Esto con el fin de centrarse en la morfología general de agregados, en particular con la ruta y la tasa de convergencia de la probabilidad de crecimiento angular a una distribución normal para agregados debido a interacciones en el área metropolitana por la migración. Por lo tanto, desarrollamos un modelo de equipo basado en un DLA modificado, conocido como DLA coloreado (CDLA) [80], junto con algunas ideas sobre el crecimiento de agregados en un entorno competitivo [81] como herramientas para estudiar la migración urbana entre áreas metropolitanas y de la morfología urbana resultante en algunas escalas.

Un DLA coloreado en bajo una geometría restringida es un modelo que estudia la probabilidad de crecimiento y el grupo de morfologías que surgen al modificar un DLA de tal forma que tenga más de un centro y cada agregado pueda ser identificado a través de algún parámetro, por ejemplo, un color. De ahí el nombre de DLA coloreado o CDLA.

Este modelo permite estudiar hacia donde probablemente crecerá más la ciudad en términos de las migraciones externas que a ella llegan, así como la probabilidad de crecimiento de los subconjuntos angulares, su tipo y la vía de convergencia a una distribución normal. Aquí, los colores significan, en las semillas, distintas zonas metropolitanas, y en las partículas, preferencia inicial para agregarse a una zona en particular. Por ejemplo, una partícula que se crea con color 1, tendría en primera instancia preferencia para agregarse a la zona metropolitana de color 1.

²⁶ Esta sección fue publicada en el artículo: Colored diffusion-limited aggregation for urban migration [80]

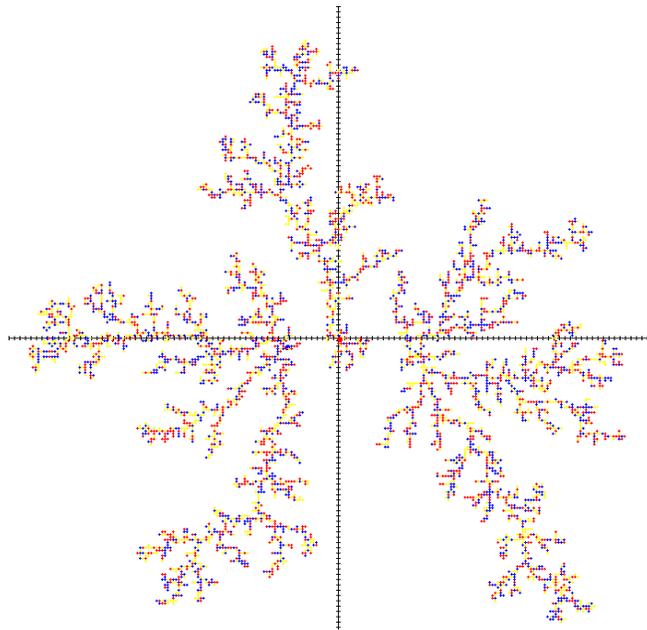


Figura 3.3 CDLA. Fuente: Elaboración propia

En primera instancia, nos preguntamos por qué la gente decide mudarse de un lugar a otro. ¿Hay alguna razón del por qué un grupo de personas cambiaría su forma de vida en un lugar geográfico específico, para comenzar una nueva en uno nuevo? Nuevas oportunidades surgen en diferentes lugares. Las cosas podrían simplemente no estar funcionando en casa, o, quizás, están mejorando en otro lugar. Es la diferencia entre el presente y la expectativa de otras oportunidades lo que pone las decisiones de la gente en movimiento. Cuando este sentimiento crece más y más y no existen barreras en el camino, una migración tiene lugar.

Para este primer acercamiento, nos basamos únicamente en una de las características de la dinámica urbana, la migración.

3.1.1 Teoría de migraciones urbanas

Para que una migración ocurra, se necesitan tres características importantes [72].

(a) Complementariedad. Para migrar entre dos lugares, debe existir una oferta en un lugar y una necesidad en otro. La relación de oferta - demanda debe ser complementaria. Planteemos un "contraejemplo": Si el lugar A, fabrica abrigos de invierno y el lugar B es de clima tropical, la complementariedad es casi nula.

(b) La oportunidad de intervención. La complementariedad entre lugares puede generar algún tipo de intercambio sólo en la ausencia de oportunidades de intervención. Si consideramos el movimiento potencial entre los lugares A y B, deberíamos considerar también cualquier lugar C entre ellos que pueda actuar como punto de intervención o destino alternativo. Una zona metropolitana atraerá más personas a ella si sus oportunidades de empleo son mejores que en otras zonas metropolitanas. Muchas más cosas se moverán entre A y B, si no existe C. En cierta forma, las oportunidades de intervención son como "esponjas espaciales" que obtienen potencial influencia entre lugares complementarios.

(c) Costo de la migración (transferencia). Además de las oportunidades de intervención y la complementariedad, la tercera condición que actúa sobre las interacciones espaciales es la transferencia o la fricción generada por distancia. La transferencia es un peso en tiempo real y costo. Si el tiempo y costo de moverse una distancia es demasiado grande, el movimiento no tendrá lugar, independientemente de la complementariedad y la ausencia de oportunidades de intervención. Si las personas ya han migrado a un lugar, y esta migración tuvo un costo alto, es poco probable que la migración continúe.

El costo de la migración juega un papel clave en los procesos de crecimiento de las ciudades y los sistemas que estas forman [27, 28], y es una de las principales condiciones que conforma la morfología urbana. Proponemos a un CDLA como un primer paso para construir sistemas urbanos, en particular nuestra área de estudio X. Un CDLA puede formularse en un espacio D-dimensional, D siendo cualquier entero positivo. En esta investigación, nos centramos en el caso de 2-dimensional.

3.1.2 Modelo

3.1.2.1 Construcción teórica

Al tener el área de estudio X tres centros, el modelo CDLA que construimos tiene tres centros iniciales, que representan cada uno a tres accidentes históricos con colores A, B y C, para ZMVM, ZMT y ZMP respectivamente. Cada uno de estos centros tiene ciertas coordenadas espaciales (que se precisaran más adelante) que hacen que las distancias lineales entre ellos estén necesariamente en la misma proporción en la que se encuentran en X. A estas distancias las denominamos $d(A, B)$, $d(A, C)$ y $d(B, C)$, con $d(B, C)$ siendo la mayor de las tres, pues representa la distancia lineal entre la ZMT y ZMP.

Al igual que en el CDLA tradicional, debemos definir un radio de lanzamiento R_0 tal que $R_0 \gg d(B, C)$. Sobre este radio se crea una nueva partícula con la misma probabilidad de ser de color A, B o C. El radio R_0 crece de forma dinámica con la formación del agregado. A continuación, se realiza el proceso estándar de un DLA (sección 2.3.2); es decir, la partícula recientemente creada comienza un movimiento browniano hasta entrar en contacto con los centros A, B, o C o superar el radio de muerte definido; esto se lleva a cabo de forma recursiva con el fin de producir agregados de color A, B, C llamados M_A , M_B , M_C , respectivamente.

Resta agregarle a este proceso las características de las migraciones urbanas, complementariedad, oportunidad de intervención y costo de la migración, las cuales se representan de la siguiente manera:

(a) Complementariedad. Esta regla se satisface de manera trivial en un CDLA clásico. La gente se desplaza de un lugar a otro para complementar sus necesidades. En nuestro modelo, la naturaleza de las unidades urbanas (partículas) es agregarse, y la naturaleza de un clúster en crecimiento es que se le agreguen. En términos simples, es un proceso de crecimiento en un DLA clásico.

(b) Oportunidad de intervención. En un CDLA como el descrito anteriormente, esta característica se satisface también de manera trivial. Un grupo de personas en migración llega desde un punto a otro, si no existe entre estos otro punto que actúe como una fuente de intervención.

Una unidad urbana creada en R_0 se agregaría al área metropolitana M_C , si y sólo si en su caminata aleatoria no hace contacto con otra unidad urbana de M_A o M_B , tal como se realiza en CDLA. Ver figura 3.4.

(c) Costos de la migración. Aquí es donde proponemos nuevas reglas sobre el modelo, incorporando el concepto de gravedad para dinámicas urbanas [72], que nos dice qué área metropolitana atraerá a más personas. Los geógrafos suelen representar este hecho mediante el uso de radios de influencia [72], que pueden estar definidos como una circunferencia de C_i , $i = A, B, C$, con radio $r > 0$ y que se centra en un determinado accidente histórico con centro h_i , $i = A, B, C$. Modelamos el costo de migración imponiendo la siguiente condición sobre un CDLA: si una partícula de cualquier color, en su caminata aleatoria, se encuentra contenida propiamente en C_i , la unidad cambia su color a i , y sólo puede agregarse al agregado formado a partir de h_i . Con esta regla modelamos el grado de influencia de un agregado M_A , M_B o M_C sobre la partícula en movimiento. Mientras $r \rightarrow \infty$ en C_i , la influencia del agregado de color i es mayor sobre el sistema urbano. Una unidad partícula está contenida propiamente en C_i si y solo si $|\bar{Z}| < r$, donde \bar{Z} es el vector formado por una partícula con posición espacial (x, y) y el centro de una zona metropolitana (x_i, y_i) . Aquí $|\bar{Z}|$ representa la norma euclidiana de \bar{Z} .

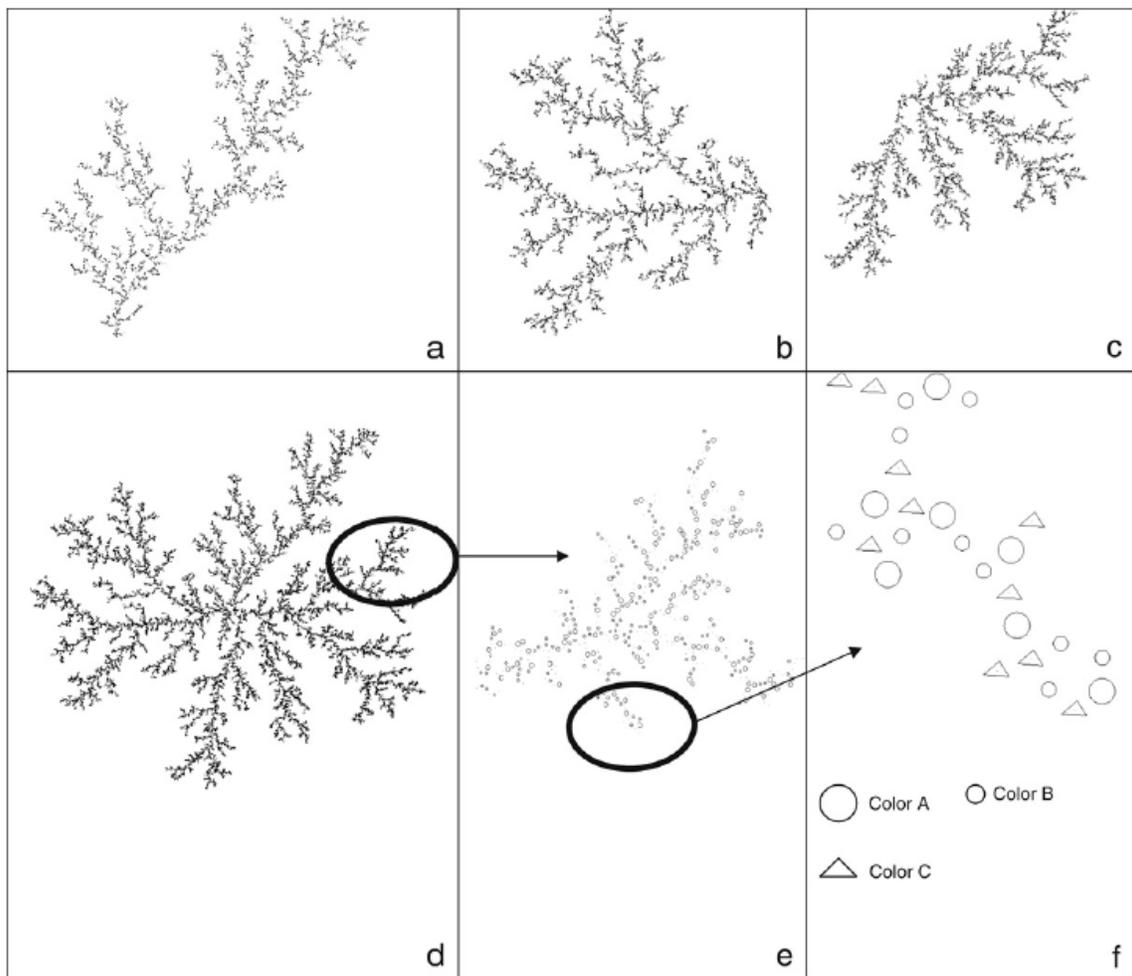


Figura 3.4 CDLA bi-dimensional de tres colores, con semilla de color A en $(0,0)$, color B en $(0.00019; 0.00003)$ y color C en $(0.00028, 0.00006)$. (a), (b) and (c) son los agregados A, B, C, respectivamente. (d) Ensamble de los agregados A, B and C. (e) Acercamiento sobre agregado C; donde se ven los distintos colores de las partículas. (f) Otro acercamiento sobre C donde podemos apreciar con mayor detenimiento. Fuente [79]

3.1.2.2 Construcción computacional

En el modelo CDLA, nuestra área de estudio X se representa en un espacio que se conoce como “sin rejilla” (off-lattice). Es decir, en lugar de tener una rejilla donde las células pueden ser localizadas en posiciones enteras (con posiciones i para cada célula iguales a 1, 2, 3,...n) tenemos a $i \in \mathbb{R}^2$, de tal forma que cada célula puede ser localizada en posiciones como $i = (0.0001, 0.0001)$, $i = (0.0001, 0.0002)$, etc. La razón para esto está estrechamente ligada a la necesidad de aumentar el número de células y la imposibilidad técnica de representar esto en las computadoras y lenguajes de programación actuales a través de las rejillas tradicionales. Ya en la sección 2.3.2 explicamos el algoritmo clásico para un DLA. En la práctica, este algoritmo ha demostrado ser por demás ineficiente para generar agregados de miles de partículas. La complejidad computacional estimada para el algoritmo clásico de DLA es $O(N^2)$, donde N es el número de partículas en el agregado. Al aumentar N , los recursos computacionales como son la memoria y el tiempo de procesamiento en CPU tienden a saturarse. Para $N=10000$, el tiempo de computo se estima en 100, 000,000 iteraciones, cada una con su correspondiente uso de memoria. Este hecho ha llevado a la necesidad de modificar estos algoritmos para que se reduzca el número de iteraciones y se optimice el uso de la memoria.

El algoritmo “sin rejilla” que utilizamos para modelar nuestros CDLA es similar al descrito en [82], con una distancia mínima de agregación fija de 0.00005, es decir, nuestra unidad urbana es de diámetro es 0.0001 y no se permiten sobre posiciones. A diferencia de [82] nosotros no utilizamos paralelismo, sino ejecutamos un solo proceso secuencial. Esto definitivamente impacta en el número de partículas N generadas. En [82] reportan 10^9 partículas, mientras que nosotros generamos como máximo 3×10^5 . Sin embargo, este hecho es irrelevante para los resultados particulares sobre migraciones urbanas que buscábamos. Esto se explica un poco más adelante.

En el algoritmo tradicional, cada vez que una partícula da un paso en su caminata aleatoria, necesita comprobar que tan alejada se encuentra del agregado. Además, recordemos que en un DLA, el crecimiento se concentra en las puntas del agregado. Es decir, muy pocas nuevas partículas se depositan en las partes internas de los brazos del DLA y la mayoría se agrega en las puntas más alejadas del centro. Por lo tanto, si se organiza la información espacial del agregado de alguna forma en que los puntos más alejados del centro sean los primeros en verificarse, se mejoraría significativamente el tiempo de ejecución.

Existe desde hace varios años una estructura con la cual podemos modelar esta situación. Las listas ligadas²⁷. Lo que tendremos será que cada nodo de la lista representará a un punto y se organizan de acuerdo en que tan alejados se encuentra cada nodo del centro. Los más alejados serán aquellos al principio de la lista, haciéndolos accesibles de manera más rápida, evitando las búsquedas exhaustivas en toda la lista.

Cada vez que una nueva partícula se agrega al DLA, se inserta en su lugar correspondiente en la lista ligada. Es decir, se recorre la lista nodo a nodo hasta que la distancia de la partícula revisada al centro es mayor que la distancia de la partícula agregada al centro. De esta forma, agregamos este punto al nodo exactamente anterior al último revisado, con lo cual la lista queda ordenada en base a los que están más alejados del centro.

²⁷ Una lista ligada es una estructura de datos computacional que se basa en la idea de que la información se puede organizar de manera ordenada y secuencial. En una lista cada átomo de información tiene una posición única y ordenada de tal forma que la lista se puede recorrer de manera progresiva, es decir, de la posición 1 se pasa a la 2, de la 2 a la 3, de la n a la $n+1$.

La tarea de encontrar la partícula más cercana a aquella en movimiento se vuelve pues una tarea relativamente sencilla. Las partículas más cercanas a la partícula moviéndose (en difusión) son aquellas que por lo regular se encuentran en las puntas de las ramas del agregado, por lo que recorreremos la lista hasta que los radios de las partículas en el agregado son más pequeños que el de la partícula en difusión. Mientras recorremos la lista, vamos llevando la cuenta de la distancia más pequeña encontrada hasta ese momento entre el agregado y la partícula en difusión. Entonces, por la desigualdad del triángulo, si A es la partícula en difusión y B es un punto en el agregado, se cumple que $|A| \leq |A - B| + |B|$. Así, la distancia entre los puntos es mayor que la diferencia entre sus radios. Si la distancia entre los radios es mayor que la distancia más corta d_{min} encontrada hasta el momento, la distancia entre los puntos es seguramente mayor que d_{min} . Esto implica que sólo debemos examinar aquellos puntos con radios más pequeños que la partícula en difusión donde $|A| - |B| \leq d_{min}$, y podemos dejar de buscar en el punto B si $|A| - |B| \geq d_{min}$, pues $|B| \geq |C| \Rightarrow |A - C| \geq |A - B|$

Aunado a esta adecuación del algoritmo tradicional, se necesita tener especial cuidado en el lenguaje de cómputo y la arquitectura computacional en la cual se implantaran estos nuevos algoritmos. Por ejemplo, utilizando paquetes comerciales tipo MatLab, Mathematica o Maple, al ser grandes consumidores de recursos por si solos, el algoritmo de DLA tiende a ser bastante ineficiente en cuanto al tamaño de N. Después de varias pruebas se eligió construir el algoritmo en lenguaje C el cual nos permite un control casi completo de la memoria de la máquina.

Así como el lenguaje de programación es fundamental para el buen desempeño del algoritmo, así lo es el compilador y el sistema operativo donde se ejecute. Para el algoritmo “sin-rejilla” la combinación que mejor resultado nos dio fue el compilador gcc²⁸ bajo Solaris 10.

En el apéndice B se muestra algunas secciones del código en lenguaje C para este algoritmo.

3.1.3 Simulación

Primero, establecimos una distancia mínima de agregación fija de 0.00005, es decir, nuestra unidad urbana es de diámetro es 0.0001 y no se permiten traslapos.

Los tres accidentes históricos se posicionan de la siguiente manera: ZMVM, con centro de color A en (0, 0); ZMT con centro de color B en (0.00019; 0.00003) y la ZMP con centro de color C en (0.00028, 0,00006), como se muestra en la Figura 3.5 (a).

Para simular el modelo de migración, establecimos dos tipos de experimento:

1. Base. Se trata de un CDLA como se ha explicado, utilizando como centros las tres áreas metropolitanas definidas. El CDLA toma en cuenta que no existe ningún beneficio en compartir alguna afinidad con algún agregado en particular. Una muestra de la morfología resultante de este experimento se muestra en la Figura 3.5 (b).

²⁸ GCC es parte del proyecto GNU, el cual tiene como objetivo mejorar el compilador usado en los sistemas GNU incluyendo la variante GNU/Linux. GNU Compiler Collection (colección de compiladores GNU) es un conjunto de compiladores creados por el proyecto GNU. GCC es software libre y lo distribuye la FSF bajo la licencia GPL.

2. Costo de la migración. Se trata de un CDLA modificado construido bajo los conceptos de migración. Definimos cuatro radios diferentes de influencia sobre ZMVM: $r_1=0.00010$; $r_2=0.00020$; $r_3=0.00030$; $r_4=0.00040$. Estos radios se definen en el agregado, una vez que las partículas ya se han agregado y consideradas como puntos. Nuestra elección es hecha de tal forma que podamos modelar una ciudad con poca influencia (r_1), influencia media (r_2, r_3) y una gran influencia (r_4) sobre el sistema urbano [42,83].

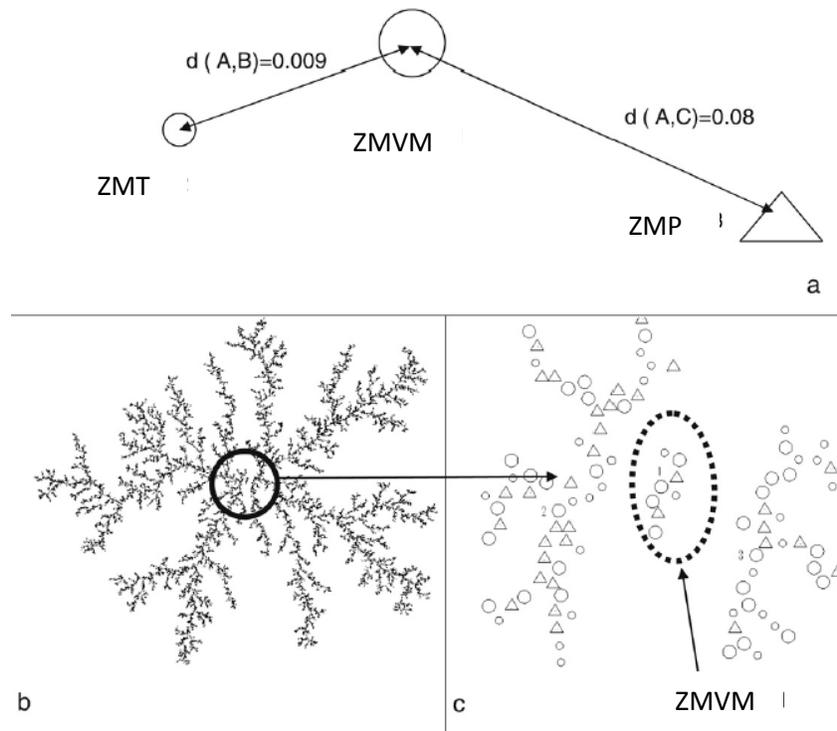


Figura 3.5 (a) Distribución inicial de las semillas. La distancia entre cada par de semillas es muy pequeña, $d(A, B)=0.009$; $d(A,C)=0.08$. (b) Áreas metropolitanas 1, 2, 3 juntas en una única gran zona metro. Cada zona tiene $N_j=20,000$. Al área marcada se le hace un acercamiento en (c), donde se resaltan las partículas de ZMVM. Los centros de cada agregado se encuentran marcados con números. El efecto de “screening” está presente de tal manera que la ZMVM se encuentra prácticamente muerta para todas las escalas. Aunque la porción del espacio que ocupa con respecto a todo el sistema es mínima, su efecto es muy fuerte, dejando una zona vacía en el núcleo del sistema. Fuente [79].

Para cada experimento, se definieron 9 diferentes valores o escalas para N : 1×10^3 , 2×10^3 , 5×10^3 , 1×10^4 , 1.5×10^4 , 2×10^4 , 2.5×10^4 , 3×10^4 , 3.5×10^4 . Adicionalmente, para el experimento 2, para cada N , se probaron los 4 radios de influencia descritos. Para cada configuración, se ejecutaron 100 corridas computacionales, para generar validez estadística en los resultados. En total, construimos 4500 agregados, 2-dimensionales.

3.1.4 Resultados y discusión

Antes de comentar e interpretar los resultados obtenidos, vamos a explicar los programas que fueron necesarios construir, para utilizar la información obtenida.

Cada una de las 3500 configuraciones obtenidas se almacenó en un número igual de archivos planos²⁹, cada uno con la siguiente estructura:

# experimento	Coordenada X	Coordenada Y	Color
1	0	0	A
1	0.0001	0.0002	A
.	.	.	.
2	0	0	A
2	0.0003	0.0002	B
.	.	.	.
.	.	.	.
100	0	0	A
100	0.0006	0.0001	C
.	.	.	.

La primera columna representa el número de experimento en el cual nos encontramos. Las dos siguientes columnas son la posición espacial de una partícula que pertenece a ese experimento. El cuarto renglón nos dice del color de la partícula (A, B o C). El número de renglones por cada experimento, depende del número de partículas que contenga la configuración generada precisamente por ese experimento.

Para comenzar a estudiar estos resultados, primero debemos obtener la estadística básica por experimento. Pero como cada experimento consta de 100 corridas por configuración todas las cantidades se deben expresar como el promedio sobre 100 configuraciones

El trabajar con archivos planos nos presenta varias ventajas, como son su independencia en cuanto al sistema operativo y su facilidad de poder utilizarse casi de manera directa en varios de los programas de análisis estadístico utilizados en esta investigación, como es Statistical y SPSS.

En particular, para obtener estadística básica como lo es el número de partículas generadas por agregado en cada configuración, se utilizó SPSS. Los datos obtenidos sugieren que existe una fuerte correlación entre la distancia del centro de la ciudad, la migración y el número de agregados de partículas. En la Figura 3.6 podemos ver los porcentajes del número total de partículas para cada zona metropolitana, tanto para el experimento base como el de costo de migración. El número total de partículas en ZMVM muestra una tendencia a no ser más que el 10% o el 18% del número total de partículas en el sistema. La fracción espacial ocupada por esta zona no es de ninguna manera significativa para todo el sistema. La ZMVM tiene algún efecto sobre el experimento de migración con un radio de influencias $r = 0.00010$ y $r = 0.00020$, a medida que $N \rightarrow \infty$, esta zona se encuentra prácticamente muerta para todas las escalas en ambos experimentos. Esto es consecuencia de la posición

²⁹ Los archivos de planos o de texto son aquellos que están compuestos únicamente por texto sin formato, sólo caracteres. Estos caracteres se pueden codificar de distintos modos dependiendo de la lengua usada. Algunos de los sistemas de codificación más usados son: ASCII, ISO-8859-1 o Latín-1, Unicode, etc.

espacial particular de ZMVM, justamente entre las zonas ZMT y ZMP. La posición de los centros de los agregados M_A , M_B y M_C hace que la ZMVM se comporte como el centro de un DLA clásico, por lo que esta área experimenta un fuerte efecto de screening [14, 65, 84].

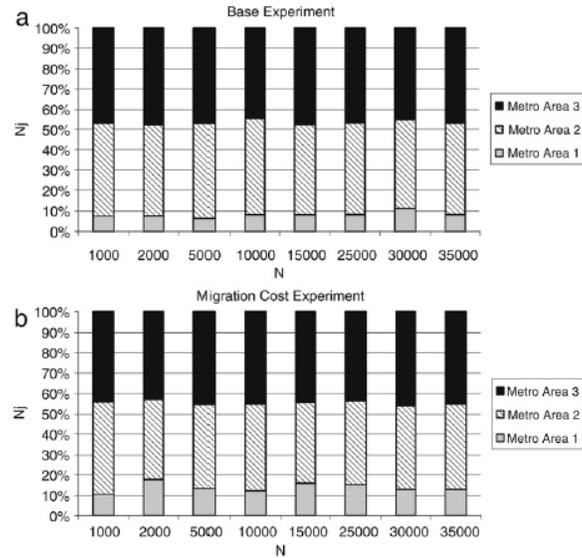


Figura 3.6 Porcentajes del total de partículas para cada área metropolitana. La fracción ocupada por ZMVM es considerablemente menor que la correspondiente a ZMT y a la ZMP, debido al efecto de screening impuesto por la posición espacial de la primera. Hay que hacer notar que este hecho es independiente de la escala. (a) Experimento base; las zonas ZMT y ZMP tienen casi el mismo porcentaje de partículas de color C: 45% cada uno. (b) Experimento con migración; las partículas de color C agregadas a la ZMVM implican una pérdida en el ZMT, dejándolo con aproximadamente el 40%. Fuente [79].

Para radios de influencia mayores, $r=0.00030$ y $r=0.00040$, la ZMVM toma el control del sistema, capturando partículas que en el experimento base y con radios de influencia pequeños fueron parte de ZMT y ZMP, hasta el punto que estos dos agregados están completamente muertos. Una vez que estas partículas están dentro de su radio de influencia, se cambia su color y se ve obligada a agregarse a ZMVM. En el límite, con radios de influencia pequeños, recuperamos el experimento de la base, mientras que para radios grandes el sistema no es más que un DLA clásico, con una región central de color A del tamaño de su radio de influencia, y más allá de este punto con partículas de colores A, B y C. Por lo tanto, para nuestro análisis desechamos estos casos triviales y centramos nuestro análisis en el radio $r=0.00020$. Ambos experimentos (base y costo de migración), para la ZMT y la ZMP, con radios de influencia $r_1=0.00010$ y $r_2=0.00020$, tienen un crecimiento no acotado; es decir, mientras $N \rightarrow \infty, N_j \rightarrow \infty$, para $j = ZMT, ZMP$. La relación $N_{ZMP} > N_{ZMT}$ se mantiene para todas las escalas y el crecimiento de ambas zonas sigue una función polinomial, pero ZMP crece más rápido [85] que el ZMT (véase Figura 3.7).

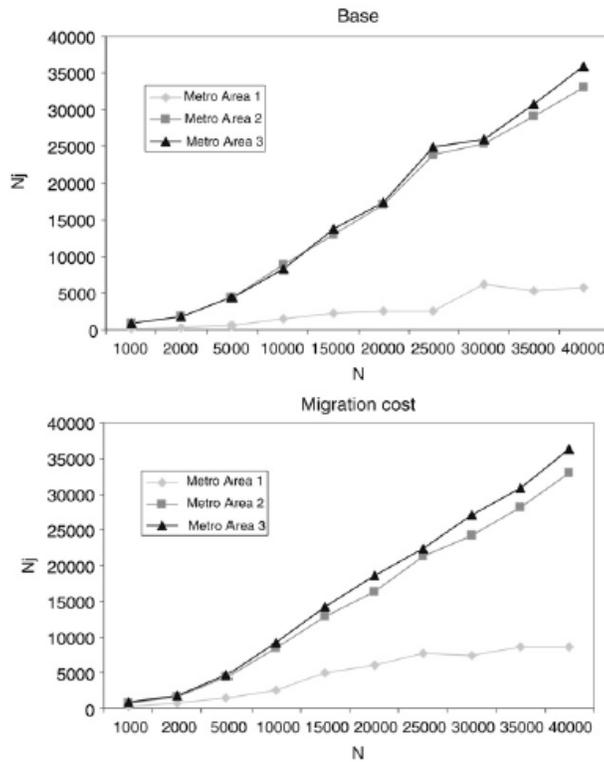


Figura 3.7 Las graficas (a) y (b) (experimento base y costo de la migración respectivamente) muestran la relación entre el máximo número de unidades urbanas en el sistema N , versus el número real de unidades generadas N_j , para diferentes valores de N . Todas las cantidades son el promedio sobre 100 experimentos. Fuente [79].

Una vez más, estos hechos pueden explicarse como resultado de la posición espacial de las tres zonas metropolitanas [81]. La distancia entre el centro de la ZMP y el centro de la ZMVM es más grande que la que existe entre los centros de ZMVM y la ZMT, por lo que la ZMP tiene más espacio para crecer más rápido que la ZMT (Figura 3.5 (a)). Estas diferencias entre el número de partículas son más significativas para el experimento base; la ZMVM deja de crecer después de $N=2,000$, mientras que para los experimentos de costo de migración sigue viva hasta $N=15,000$ (pero sólo para partículas con color A). Se trata de un resultado esperado, ya que el radio de influencia de la ZMVM está capturando más partículas. Sin embargo, cuando $N \rightarrow \infty$, su radio de influencia no es suficiente para superar su posición inicial en el espacio, como hemos explicado anteriormente.

Dicho lo anterior, a partir de este momento, sólo tomaremos en cuenta el experimento de costo de la migración, con radio de influencia $r=0.00020$. La distancia entre centros desempeña un papel fundamental en el número de partículas N_j , por lo que se espera que distintas configuraciones iniciales conduzcan a diferentes N_j . Este hecho nos lleva a pensar que para un mejor entendimiento de cómo el costo de la migración está afectando a la morfología del área metropolitana, N_j no es suficiente. Tenemos que mirar cómo se distribuyen las partículas en el espacio, por lo que dividimos el área espacial de cada zona metropolitana en subconjuntos angulares. En términos geográficos, buscamos las direcciones en la que crecen estas distintas zonas.

En términos generales, el costo de migración impone una convergencia más lenta a una distribución de probabilidad angular que el experimento base, donde una probabilidad de crecimiento normal se logra en $N=10,000$, mientras que en el costo de la migración la convergencia a una probabilidad de crecimiento normal se obtiene hasta $N=25,000$.

Para comprender plenamente la influencia del costo de la migración sobre todo el sistema, y cómo esta afecta a la morfología del agregado, estudiamos las distribuciones de probabilidad de crecimiento angular de cada uno de estos agregados. En otras palabras, nos referimos a la distribución de probabilidad de crecimiento de un agregado (como una parte de un sistema de agregados) en una dirección determinada a partir del centro de éste definida por un ángulo específico. Por razones prácticas dividimos cada agregado en subconjuntos angulares que se construyen como sigue:

(a) Dividimos el espacio alrededor de cada centro en secciones CS_i , $i=1, \dots, k$, $k=4, 6, 8$, con $\theta = 45^\circ, 60^\circ$ y 90° , como puede verse en la Figura 3.8.

(b) Para cualquier sector CS_i , definimos el conjunto de todos los puntos de que están contenidos propiamente en la sección como el conjunto $S_i M_j(CS_i) \subseteq M_j$ $j=1, 2$ y 3 , donde, por simplicidad en la notación $j=1$ representa a la ZMVM, $j=2$ a la ZMT y $j=3$ a la ZMP. Ver Figura 3.8.

Nuestros agregados, así como lo hacen las ciudades [86,87], no crecen de la misma manera en cualquier dirección angular, especialmente cuando el costo de la migración está en juego. Por lo tanto, antes de proceder a analizar morfologías y distribuciones de probabilidad de crecimiento en cada $SM_j(CS_i)$, debemos establecer las condiciones para que los subconjuntos tengan las suficiente partículas para pensar que realmente están afectando a la morfología de clúster y pueden definir una distribución de probabilidad [88]. Entonces, para saber si una sección angular cuenta con el número adecuado de partículas damos la siguiente definición:

(c) Sea N_j la cardinalidad de M_j y $N(CS_i)$ la cardinalidad de $SM_j(CS_i)$. Entonces definimos un subconjunto $SM_j(CS_i)$ como “vivo” si $SM_j(CS_i)$ es al menos la mitad de N_j dividido entre k (el número de sectores) y entre 3 (el número de colores); de lo contrario, $SM_j(CS_i)$ esta “muerto”. Es decir, su dimensión de Hausdorff es cero, en el límite $N \rightarrow \infty$ y se puede desechar de nuestros análisis morfológicos pues no producirá ningún crecimiento en el límite de grandes números.

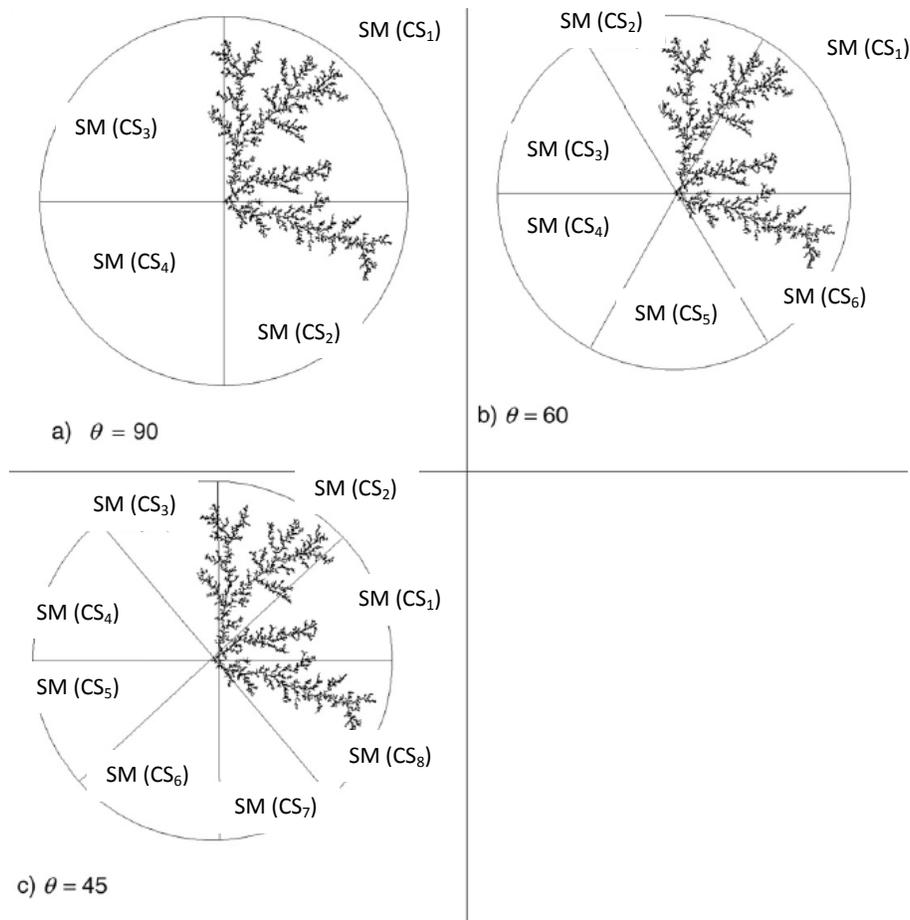


Figura 3.8. Divisiones angulares sobre área metropolitana 3. (a), (b) y (c) muestran como se construyen los subconjuntos angulares sobre M_3 con $N_j = 10,000$. Fuente [79].

Es oportuno mencionar, que para generar estos subconjuntos, se debió construir un programa de cómputo, en lenguaje C, que recibe como entrada uno de los archivos planos mencionados que contienen los puntos de cada agregado y da como salida otro archivo plano con la siguiente estructura:

# experimento	# partículas total	# partículas color A	# partículas color B	# partículas color C
1	1	0	0	1
1	13	6	3	4
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
2	3	0	2	1
.

Estos archivos, que son la separación por subconjuntos de 60° cada uno, se encuentran divididos en grupos de 6 líneas por experimento, por lo que su tamaño es fijo: 600 líneas por 5 columnas. Cada una de las líneas de un conjunto representa a un subconjunto angular en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir, la primera línea del conjunto es el subconjunto angular con $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$, la segunda con $60^\circ < \theta \leq 120^\circ$, la tercera con $120^\circ < \theta \leq 180^\circ$, la cuarta con $180^\circ < \theta \leq 240^\circ$, la quinta con $240^\circ < \theta \leq 300^\circ$, y la sexta con $300^\circ < \theta \leq 360^\circ$.

La primera columna del archivo muestra el número de experimento; la segunda el número total de partículas que existen en ese subconjunto y de la tercera a la quinta columna es el número de partículas por color de ese subconjunto. En el ejemplo, vemos que para el experimento uno de esa configuración particular, los conjuntos 3, 4 y 5 tienen cero partículas, mientras que el conjunto 2 tiene un de 13 partículas, repartidas en 6 de color A, 3 de color B y 4 de color C.

En la práctica, para conocer a que subconjunto pertenece una partícula con coordenadas (x, y) que pertenece al agregado M , con centro en C_i , y poder construir el archivo anterior, basta con encontrar el ángulo que forma con el eje de las X 's el vector anclado en C_i generado por la partícula en (x, y) . Para esto utilizamos la identidad trigonométrica $\theta = \arccos(d/x)$, donde d es la distancia euclidiana entre el centro C_i y la coordenada (x, y) .

En términos del programa de cómputo, programamos dos funciones f y g , tal que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que recibe como entrada un vector en \mathbb{R}^3 definidos por (x, y, cq) y regresa el ángulo buscado; mientras que $g: \mathbb{R} \rightarrow S$, tiene como entrada al ángulo θ y $S \in [1,2,3,4,6,7,8]$ regresa el número de subconjunto angular al que pertenece la partícula, el cual puede ser un número entero entre 1 y 4, 1 y 6 ó 1 y 8, dependiendo de la división angular que estemos utilizando, $\theta = 45^\circ, 60^\circ$ ó 90° . En el apéndice B, podemos ver el segmento de código en lenguaje C que representa estas dos funciones.

Ya con estos archivos, calculamos la función de distribución de probabilidad que representa mejor el proceso de crecimiento para cada $SM_j(P_i)$ $\theta = 45^\circ, 60^\circ$ y 90° y encontramos algunas diferencias importantes entre cada experimento. Como se mencionó, este proceso de crecimiento se estudia en nuestro modelo como una función del número de unidades urbanas N , por lo que la distribución de probabilidad de crecimiento se calcula sólo con respecto a esta variable.

Para alcanzar el objetivo de esta sección, y como una consideración práctica, elegimos $\theta = 60^\circ$ para trabajar nuestra hipótesis y proporcionar conclusiones significativas.

Como anticipamos, los subconjuntos de la ZMVM se encuentran todos muertos para ambos experimentos, todos los colores y todos los subconjuntos angulares en $N > 15,000$. Sin embargo, el efecto de ZMVM sobre el sistema es una cuestión importante a discutir.

En la ZMT, $\theta = 60^\circ$, para ambos experimentos, los subconjuntos, $SM_2(CS_1)$ y $SM_2(CS_6)$ están muertos. Para ZMP, $\theta = 60^\circ$, para ambos experimentos, los subconjuntos, $SM_3(CS_3)$ y $SM_3(CS_4)$ están muertos. En el experimento de costo de migración, además de estos subconjuntos, los subconjuntos, $SM_2(CS_5)$ y $SM_3(CS_2)$ también están muertos. En el experimento base estos subconjuntos ($SM_2(CS_5)$ y $SM_3(CS_2)$) convergen a una distribución Normal. La Figura 3.9 muestra gráficamente un ejemplo de estos subconjuntos.

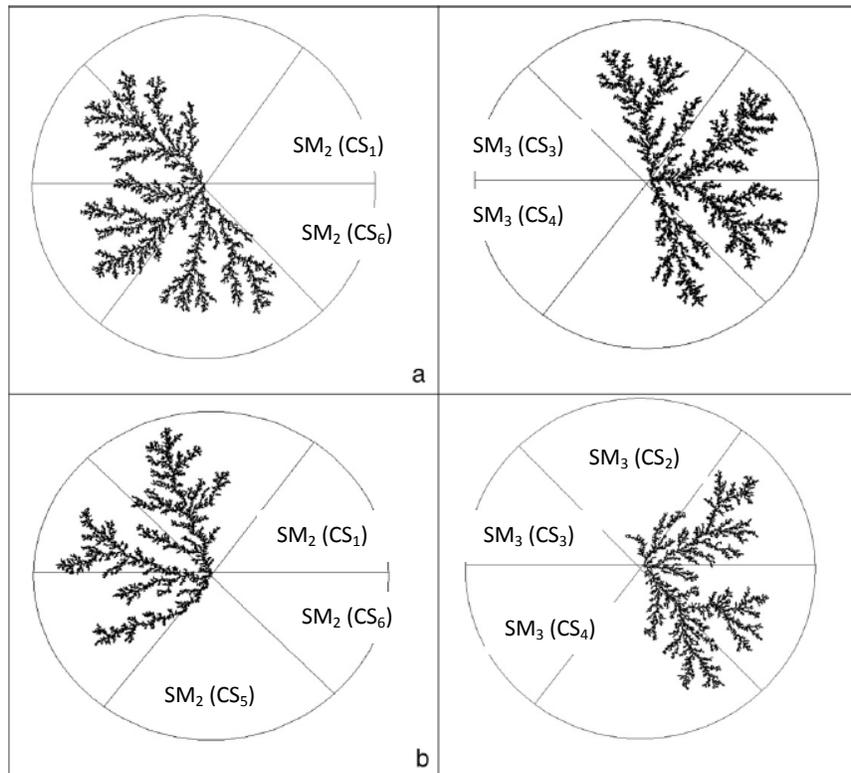


Figura 3.9 Cuatro gráficas mostrando la división angular de subconjuntos, $\theta = 60^\circ$, definida para $N=2.5 \times 10^4$. El efecto de la posición espacial es tan fuerte que los subconjuntos en contacto directo entre ellos están muertos. Para las ZMT y ZMP (a) experimentos base y (b) experimentos con costo de migración. Fuente [79].

Para los conjuntos que siguieron vivos, el cálculo en sí de la distribución se llevo a cabo en dos etapas:

1. Generar las distribuciones de frecuencia en cuanto a N para cada experimento, y
2. Los datos obtenidos en el punto, pasarlos por varias pruebas para decidir qué tipo de distribución de probabilidad representan.

El punto 1 se llevó a cabo en el paquete estadístico SPSS el cual cuenta con todas las facilidades para leer los archivos planos generados y con las herramientas necesarias para exportar el análisis de frecuencias obtenido también a archivos planos.

El punto 2 se realizó en el paquete estadístico Statistical el cual, a diferencia de SPSS cuenta con un motor mucho más robusto de pruebas de hipótesis nula para distintos tipos de distribuciones de probabilidad (Weibull, Exponencial, Normal, Pareto, Gamma, etc.)

En ambos experimentos, las distribuciones de probabilidad de crecimiento que convergen a través de diferentes rutas y tasas a una distribución Normal corresponden a $SM_2(CS_3)$, $SM_2(4)$, $SM_2(CS_2)$, $SM_3(CS_1)$, $SM_3(CSP_5)$ y $SM_3(CS_6)$. Para los subconjuntos vivos en las áreas 2 y 3, calculamos las distribuciones de probabilidad, subconjunto por subconjunto, para $N= 1000, 10,000, 25,000$ y $35,000$. Sobre estas escalas, llevamos a cabo una

prueba Shapiro-Wilk W [89] para la hipótesis nula de que una distribución de probabilidad de crecimiento del subconjunto $SM_j(CS_i)$ sigue una distribución normal.

Para la prueba W utilizamos el algoritmo AS R94 se describe en [90], que maneja datos con y sin supervisión y es válido para muestras menores a 5000 datos (todos nuestros experimentos, como mencionamos, se realizan sobre muestras de 100 experimentos). Este algoritmo requiere 2 valores de entrada: los datos a probar X y el nivel significativo A para la prueba W y devuelve tres valores: W , que es el valor Shapiro-Wilk; H , que puede tomar el valor 0 (no rechazar la hipótesis nula) o 1 (rechazar la hipótesis nula); y Pr , la probabilidad de obtener un resultado particular, dado que la hipótesis nula sea cierto.

Por ejemplo, en el experimento base, en la ZMT con $N = 35,000$, obtenemos histogramas y graficas Q-Q³⁰, para subconjuntos $SM_2(CS_4)$ y $SM_2(CS_5)$, para determinar sus valores T . El valor A se establece en 0,05 para ambos casos [90]. Los parámetros W , H y Pr obtenidos indican que podemos considerar que la distribución es Normal para estos subconjuntos. Ver Figura 3.10 (a) y (b).

En el experimento de costo de migración, ZMP, el subconjunto $SM_3(CS_2)$, la prueba de normalidad W falla para todas las escalas, así que necesitamos buscar otras distribuciones de probabilidad de crecimiento. Para $N=1,000$ encontramos que este subconjunto se comporta como una distribución exponencial; en $N=10,000$ obtenemos una distribución gamma y para $N > 25,000$ el subconjunto está muerto. Mostramos graficas P-P³¹ de estos resultados en la figura 3.10 (c) y (d).

Encontramos que en nuestro modelo los experimentos base y costo de migración, para cualquier $SM_j(CS_i)$, la probabilidad de crecimiento angular siempre converge en distribución [91] a una distribución de probabilidad Normal o está muerto, mientras $N \rightarrow \infty$. Esta convergencia depende de la posición relativa espacial de los subconjuntos en un agregado y los demás subconjuntos en el sistema; los subconjuntos muertos de las zonas 2 y 3 son las que están en contacto directo con el ZMVM, mientras que los subconjuntos que convergen a una distribución normal se encuentran alejados de este agregado.

En términos generales, dos subconjuntos $SM_j(CS_k)$ y $SM_h(CS_i)$ están en contacto directo si la distancia entre cualquier semilla s_1 de $SM_j(CS_k)$ y $SM_h(CS_i)$ es menor que o igual a la distancia entre cualquiera semillas s_1 y s_2 de $SM_h(CS_i)$, es decir $d(s_1, SM_h(CS_i)) \leq d(s_1, s_2)$. En cualquier otro caso, los dos subconjuntos están alejados uno del otro. Por lo tanto, estos resultados implican que la distribución de probabilidad de crecimiento de los subconjuntos angulares $SM_j(CS_i)$ converge a una distribución Normal mientras $N \rightarrow \infty$ y puede ser expresada como una función de la cantidad máxima de partículas y la distancia entre las semillas de las áreas metropolitanas y subconjuntos angulares.

³⁰ En estadística, las gráficas Q-Q son gráficas de probabilidad que se utilizan para comparar dos distribuciones de probabilidad comparando los cuantiles de cada una. Si las dos distribuciones son en efecto similares, los puntos en la gráfica Q-Q se encontrarán aproximadamente en la línea $y=x$.

³¹ Una gráfica P-P compara dos funciones de distribución de probabilidad acumulada. Dadas dos distribuciones F y G , grafica $(F(z), G(z))$, de tal forma que para una entrada z , la salida es un par de números que representan qué porcentaje de f y qué porcentaje de g se encuentra en o por debajo de z . La línea de comparación es $y=x$, de tal forma que las dos distribuciones son iguales si y sólo si la gráfica coincide con esta línea.

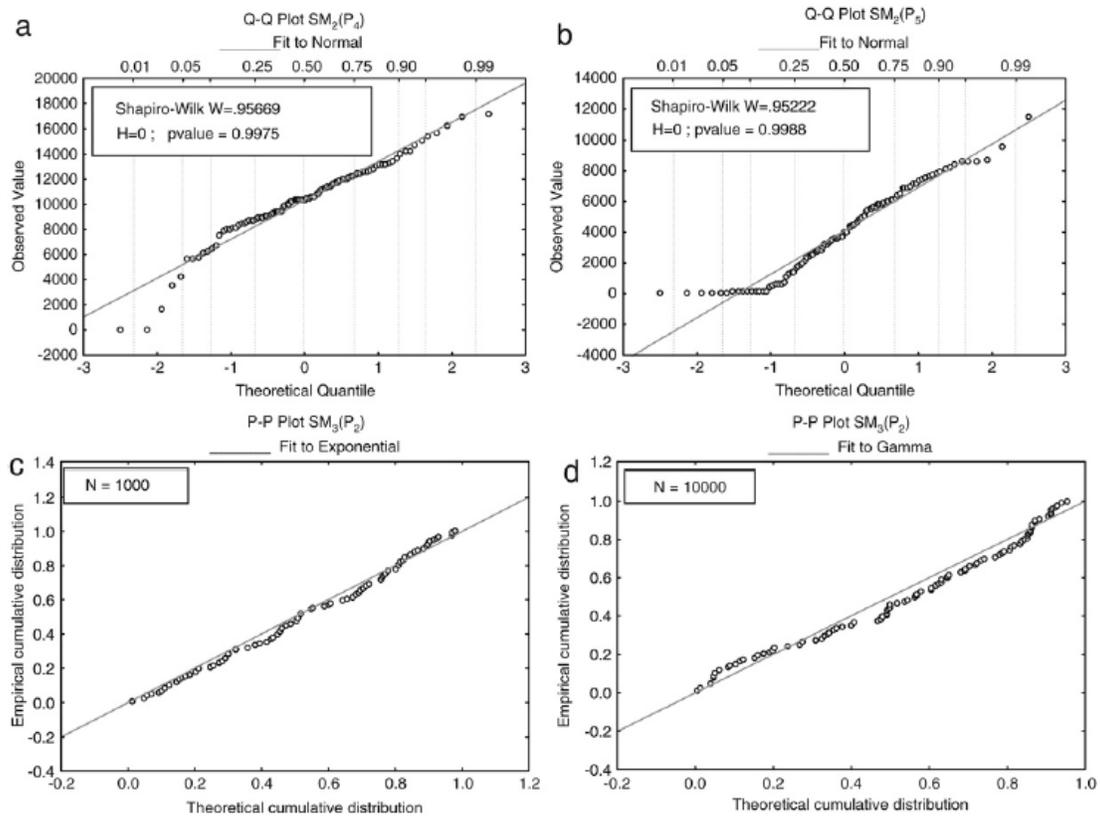


Figura 3.10 (a) y (b) son las pruebas Shapiro-Wilk para Normalidad, realizadas sobre los subconjuntos $SM_2(CS_4)$ y $SM_2(CS_5)$ del área metropolitana 2 y $N=35,000$, experimento base. La prueba de Shapiro-Wilks, con importante nivel de significancia igual a 0.05, resulta en valores de H iguales a cero y valores significativos de p igual a 0.99, que determinan que nuestra hipótesis nula de distribución de normalidad para la distribución de probabilidad de crecimiento es una suposición razonable para estos subconjuntos [89]. (c) y (d) muestra las graficas P-P para el subconjunto $SM_3(CS_2)$ a dos escalas, $N=1,000$ y $N=10,000$, en el experimento de costos de migración. Con N pequeñas, la distribución se adecua mejor por una distribución exponencial. Cuando N empieza a crecer, la distribución de subconjunto oscila entre las distribuciones de probabilidad exponencial y gamma. Finalmente, este subconjunto muere. Fuente [89].

3.1.5 Conclusiones

Nuestros resultados muestran que la morfología y la distribución de probabilidad de subconjuntos angulares en agregados dependen fuertemente de su posición espacial o topografía inicial, como en [81], y junto con su importancia particular (radio de influencia), estos factores desempeñan un papel importante en los resultados finales de un modelo urbano. Distancia y escala comienzan a surgir como los factores clave en el número de agregados de partículas, subconjuntos muertos y vivos y convergencia a una distribución de probabilidad Normal. Esta convergencia no se da siempre en la misma forma, pues se observó que es a partir de un cierto valor de N que podemos hablar de una distribución eminentemente Normal y que para valores menores, se generan distintas distribuciones. Un subconjunto angular puede tener distribución de probabilidad Normal a partir de cierta $N = n$, pero para $N < n$, puede tener distribuciones distintas, como Gammas o Exponenciales.

La correspondencia entre nuestro modelo de migración y zonas metropolitanas reales, aunque se describe en este documento, debe ser cuidadosamente considerada. Solo exploramos uno de los aspectos de la dinámica urbana: migración. En este sentido, los datos producidos por nuestro modelo muestran congruencia con la mecánica de este fenómeno:

(a) Si la influencia del área metropolitana no alcanza a grandes distancias en su región, o el costo de la migración es de alguna manera demasiado [42, 72], la oportunidad de intervención será la principal razón para permanecer en algún lugar.

(b) En la teoría de economías de aglomeración [69], que en la actualidad es una de las teorías principales de crecimiento urbano, la posición espacial de las ciudades (agregados) y su relación económica y desarrollo (radio de influencia) sobre un área son algunos de los factores claves para su crecimiento.

(c) La distribución espacial de las zonas urbanas (distancia entre los centros urbanos) es un factor clave sobre cómo las personas migran a ellos. Esto, junto con el radio de influencia, configura la distribución de las personas sobre el espacio físico. A primera vista, siempre podemos decir que en nuestro modelo

$$DP(SM_j(CS_i), N, d) = \begin{cases} Normal \\ 0 \end{cases}, \text{ en el limite } N \rightarrow \infty, \text{ donde } DP(SM_j(CS_i), N, d) \quad (3.1)$$

es la distribución de probabilidad de un subconjunto angular $SM_j(CS_i)$, con un número de partículas N y a una distancia d de los demás subconjuntos angulares en el sistema. Una DP igual 0 significa que ese subconjunto angular se encuentra muerto.

En esta sección hemos abordado la evolución de $DP(SM_j(CS_i), N, d)$ con respecto a N y se muestra cómo la distancia entre centros desempeña un papel muy importante en la definición matemática de DP. Hemos demostrado que la tasa y la ruta de convergencia de la distribución de probabilidad de crecimiento de subconjuntos angulares a una distribución Normal no es la misma si el costo de migración tiene lugar. En nuestras simulaciones computacionales, mientras la distancia entre el subconjunto de $SM_j(CS_i)$ y subconjunto $SM_k(CS_i)$ se hace más grande, las distribuciones de probabilidad de crecimiento relacionados de los subconjuntos angulares se acercaran a una distribución Normal más rápido que para subconjuntos con una distancia pequeña entre ellos (especialmente cuando los subconjuntos están en contacto directo).

3.2 Modelo Vicsek-Szalay (V-S) para estructuras urbanas

Ya hemos establecido en la ecuación (2.14) cómo el modelo V-S de crecimiento de galaxias puede ser interpretado y modificado para modelar el crecimiento de urbano, como se documenta en [11]. Aquí presentamos las modificaciones realizadas en este modelo para representar nuestra área de estudio X.

3.2.1 Modelo

3.2.1.1 Construcción teórica

Para comenzar, imponemos sobre el modelo las condiciones iniciales establecidas al principio de esta sección 3. Para esta parte, los accidentes históricos están representados a través de un potencial inicial y un número inicial

de partículas para cada zona metropolitana, dependiendo de su fecha de fundación y su importancia económica y cultural - dentro del área de estudio X - alrededor de 1500 a.d. A mayor número de partículas y/o potencial, mayor la importancia en zona. La tabla 3.1 muestra estas disposiciones iniciales.

Por lo tanto, en el tiempo $t = 0$, todas las posiciones de la rejilla, excepto las ocupados por los accidentes históricos, tiene un potencial $P_i(t) = \varepsilon_i$, con ε_i con valores de 1 o -1 de manera aleatoria. Estos valores de ε_i , mucho menores que los potenciales iniciales de los accidentes históricos, tratan de representar en cierta medida esta situación de que hay lugares más propicios que otros para que un población crezca, debido a circunstancias que no son medibles a la escala en que estamos trabajando. Y son necesariamente pequeños para promover que la acumulación de población siga en primera instancia a los accidentes históricos, pues estos superan el umbral de crecimiento inmediatamente.

Tabla 3.1. Parámetros iniciales para el área de estudio X

Zona Metropolitana (accidente histórico h_i)	Potencial inicial	# inicial de partículas
ZMT	5.0	3
ZMVM	20.0	4
ZMP	10.0	3

Al estar basado en CA, el modelo evoluciona en periodos enteros, que pueden representar un tiempo t , con $t=1, 2, 3, \dots, N$, de tal forma que tenemos distintas configuraciones para distintos valores de t . En cada paso, se aplica (2.14) sobre toda la rejilla, lo que altera el valor del potencial para cada célula en cada paso.

A diferencia del modelo de CDLA, aquí no necesitamos grandes cantidades de partículas para comenzar a obtener información relevante, por las características propias de los agregados que se forman, que están relacionados con el modelo de percolación (sección 2.3.2). La simulación termina hasta que se alcanza un cierto tiempo t , no un número preestablecido de partículas.

3.2.1.2 Construcción computacional

En el modelo V-S nuestra área de estudio X se representa a través de un CA (sección 1.2.1.1). Para esto, evaluamos dos opciones:

- a) Construir a partir de cero todo un programa que genere CA con las reglas descritas,
- b) Utilizar alguno de los muchos software comerciales que existen para programar CA.

Cada opción tiene ventajas y desventajas. Con la opción a) tenemos el control total de la simulación en cuanto a las salidas y el formato que queramos darle, el manejo de la memoria, etc. A diferencia de la opción b) que te obliga a adecuarte a los parámetros establecidos por el software. Sin embargo, esta opción permite reducir considerablemente la curva de aprendizaje y el tiempo de desarrollo, pues se aprovecha una solución ya probada, a diferencia de la opción a).

Después de evaluar a conciencia las dos alternativas, y toda vez que el objetivo de esta investigación no es crear software para construir autómatas celulares, se decidió utilizar un software libre creado por la universidad de

Northwestern, Evanston, IL, llamado NetLogo³². La ventaja que presenta sobre otros paquetes similares es que basa su lenguaje en otro muy conocido, sobre todo por sus capacidades pedagógicas: Logo³³, lenguaje que a su vez representa la esencia del paradigma de la modelación compleja: reglas simples nos llevan a resultados complejos. Escapa al objetivo de este escrito ahondar en el funcionamiento de NetLogo y Logo, basta decir que al comparar su desempeño contra todas las demás opciones, en cuanto a CA se refiere, este fue superior por mucho. Sobre todo en la relación velocidad de ejecución - tiempo de construcción, por lo que fue nuestra opción en esta investigación para generar los agregados urbanos que buscamos.

En cuanto al lenguaje en sí, NetLogo ofrece una sintaxis mezcla C con Smalltalk³⁴ en cuanto a la declaración de variables sin tipo.

Ahora bien, regresando al modelo que nos ocupa, en términos de programación, el algoritmo es en extremo simple, sólo hay que seguir los pasos descritos en la descripción teórica. El único detalle que hay que tomar en cuenta, es llevar el control del potencial de cada célula en cada tiempo t , para si este rebasa el umbral establecido, se marca a la célula en cuestión como ocupada. El código completo en NetLogo para esto, se encuentra en el apéndice B.

3.2.2 Experimentos y resultados

Para simular el modelo V-S para ciudades, construimos varias configuraciones urbanas con diferentes umbrales Φ y diferentes tiempos t . Hemos seleccionado los umbrales $\Phi \in [1...19] \in \mathbb{Z} \cup 19.9$ y tiempos $t \in [10, 20, 50, 100, 500, 800]$. Esta selección obedece a una cuestión práctica. Los umbrales los vamos recorriendo en pasos enteros pues las variaciones, para la escala en la que estamos trabajando, son mínimas para umbrales fraccionarios. Se llega hasta 19.9 pues el potencial máximo impuesto sobre la ZMVM es de 20. Potenciales mayores a este valor no dan resultado diferentes en forma, sólo en tiempo t . En cuanto a la selección de los tiempos t , tratamos más adelante mencionamos la razón para estos valores.

Es decir, de manera inicial tenemos una matriz R de 20×6 , definida por el producto $\Phi \times t$. Esto nos deja con un universo de 120 experimentos diferentes, sobre los que llevamos a cabo 100 ejecuciones para cada uno, al igual que el modelo CDLA para así poder derivar estadística básica. Esto nos deja con un total de 12,000 distintas configuraciones, y para cada uno de ellas, se calculó su dimensión fractal mediante dos métodos diferentes: "box-counting" [92, 93] (D_b) y masa-radio (D_{mr}) [94, 95]. Para D_{mr} dos puntos se definen como origen: el CDB de VMMA y el centro de masa de X. Para ambos centros, se realizó el análisis masa-radio sobre 17 radios concéntricos, con una milla de separación entre cada uno de ellos.

³² <http://ccl.northwestern.edu/netlogo>

³³ Logo es un lenguaje de alto nivel con un paradigma de programación híbrido entre funcional y estructurado. Fue diseñado con fines didácticos por Danny Bobrow, Wally Feurzeig y Seymour Papert en los años sesenta. Ha sido muy difundido desde entonces para mostrar conceptos fundamentales de programación. Una característica más explotada de Logo es poder producir gráficos de tortuga, es decir, poder dar instrucciones a una tortuga virtual mediante palabras escritas.

³⁴ Smalltalk es uno de los primeros lenguajes completamente orientado a objetos, de tal forma que un programa en Smalltalk consiste únicamente de objetos, desde un número natural n hasta un servidor web es considerado un objeto.

Tenemos entonces no una matriz, sino tres: una para la dimensión box-counting, una para la dimensión masa-radio CDB y otra para la dimensión masa-radio centro de masa: M_b , M_{rd} y M_{rc} respectivamente. Llenamos cada posición de estas matrices con las dimensiones fractales obtenidas sobre el promedio de 100 corridas por experimento. Cada una de estas tres matrices tiene una estructura como la mostrada en la tabla 3.2

Para evaluar qué configuración umbral- tiempo (Φ, t) es la más adecuada para utilizar como un modelo de X , necesitamos realizar pruebas tanto visuales como numéricas, y por visual, nos referimos tan sólo en una forma aproximada que podamos utilizar como punto de partida. Los umbrales pequeños y grandes nos dan configuraciones visuales que nada tienen que ver con X . Las primeras abarcan todo el espacio y las segundas, apenas cubren una pequeña fracción de él. Totalmente irrealista ambos. La figura 3.11 muestra algunos experimentos particulares para ilustrar esta situación.

Tabla 3.2 Ejemplo de la estructura de las matrices M_b , M_{rd} and M_{rc}

$\Phi \backslash t$	10	30	60	100	500	800
1	1.9238	1.9467	1.951	1.952	2	2
2	1.6814	1.8395	1.898	1.923	1.951	2
.						
19.9	0	0	0	0.579	0.6363	0.6874

La mejor opción visual para X fue el par formado por $\Phi = 4.5$, $t = 500$. Tiene las mismas tres zonas muy bien definidas en el centro y clústeres satélite, al igual que Φ . En aproximadamente el 75% de las imágenes, obtenemos la curva que se forma en la parte inferior de VMMA. Algunos ejemplos de esta configuración se muestran en la Figura 3.12.

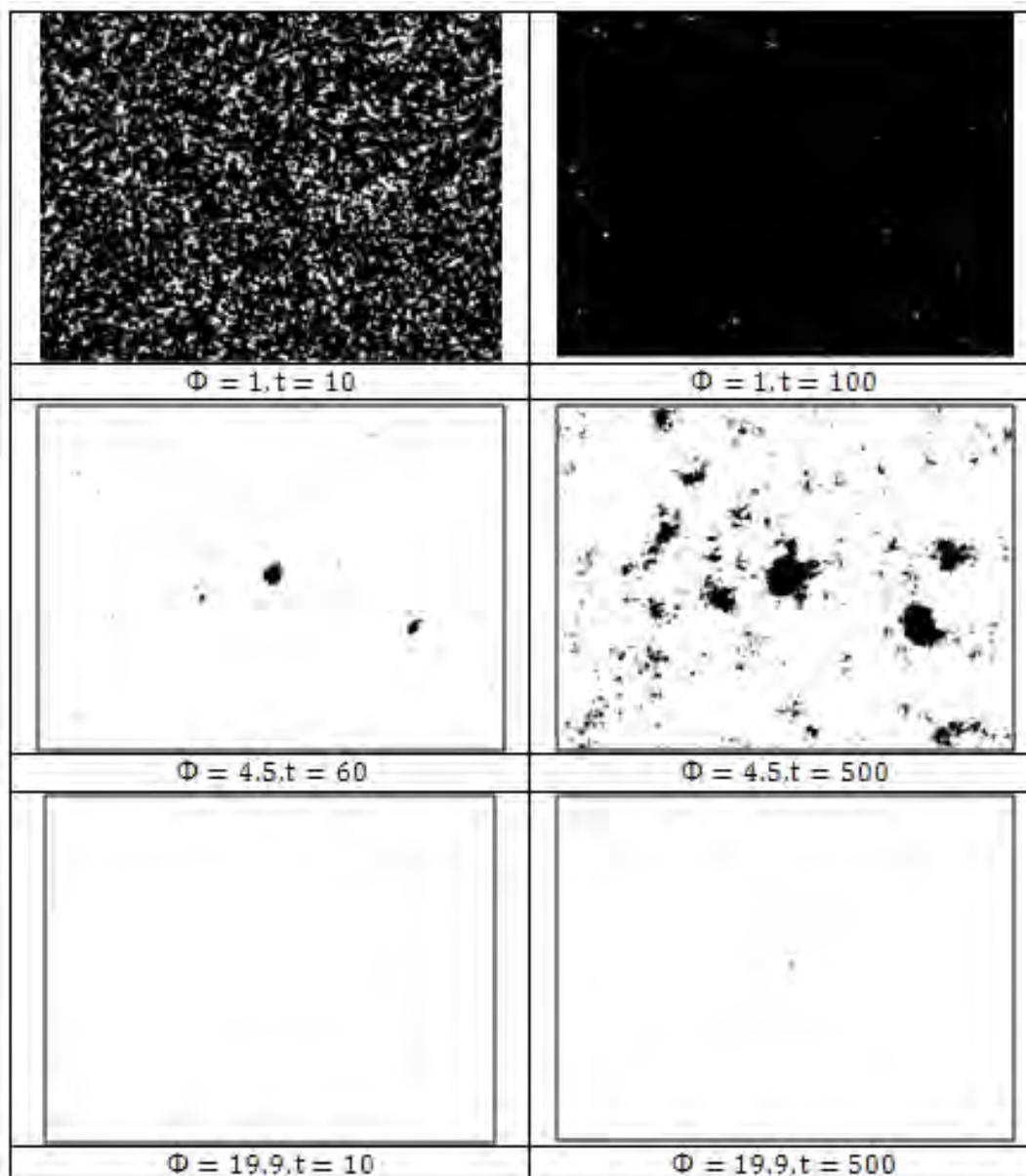


Figura 3.11 Ejemplos de configuraciones urbanas obtenidas a través de V-S (fondo blanco, asentamientos urbanos en negro). Mientras más se aumenta el potencial Φ , la generación de estructuras es cada vez menos frecuente, necesitando mayores tiempos t para aparecer. Fuente: Elaboración propia

Pero la morfología está lejos de ser, por si sola, un buen criterio final, por lo que se utilizan los valores calculados en M_B , M_{rd} y M_{rc} para investigar si el par formado por $\Phi = 4.5$, $t = 500$, es realmente la mejor opción. Medir las dimensiones fractales de patrones urbanos, puede ayudarnos a encontrar descripciones nuevas para la variedad de morfologías urbanas. Con este tipo de análisis podemos obtener, por ejemplo, la identificación de los umbrales en la organización espacial de la ciudad o la determinación de diferentes tipos de organización espacial. La dimensión fractal D_b nos dice cuánta área ocupada las estructuras urbanas, mientras que el D_{mr} nos da una idea de donde estas estructuras están en el espacio. Juntas, estas dos dimensiones fractales podrían permitir la identificación de los tipos de ciudad o patrones urbanos con propiedades bien identificados.

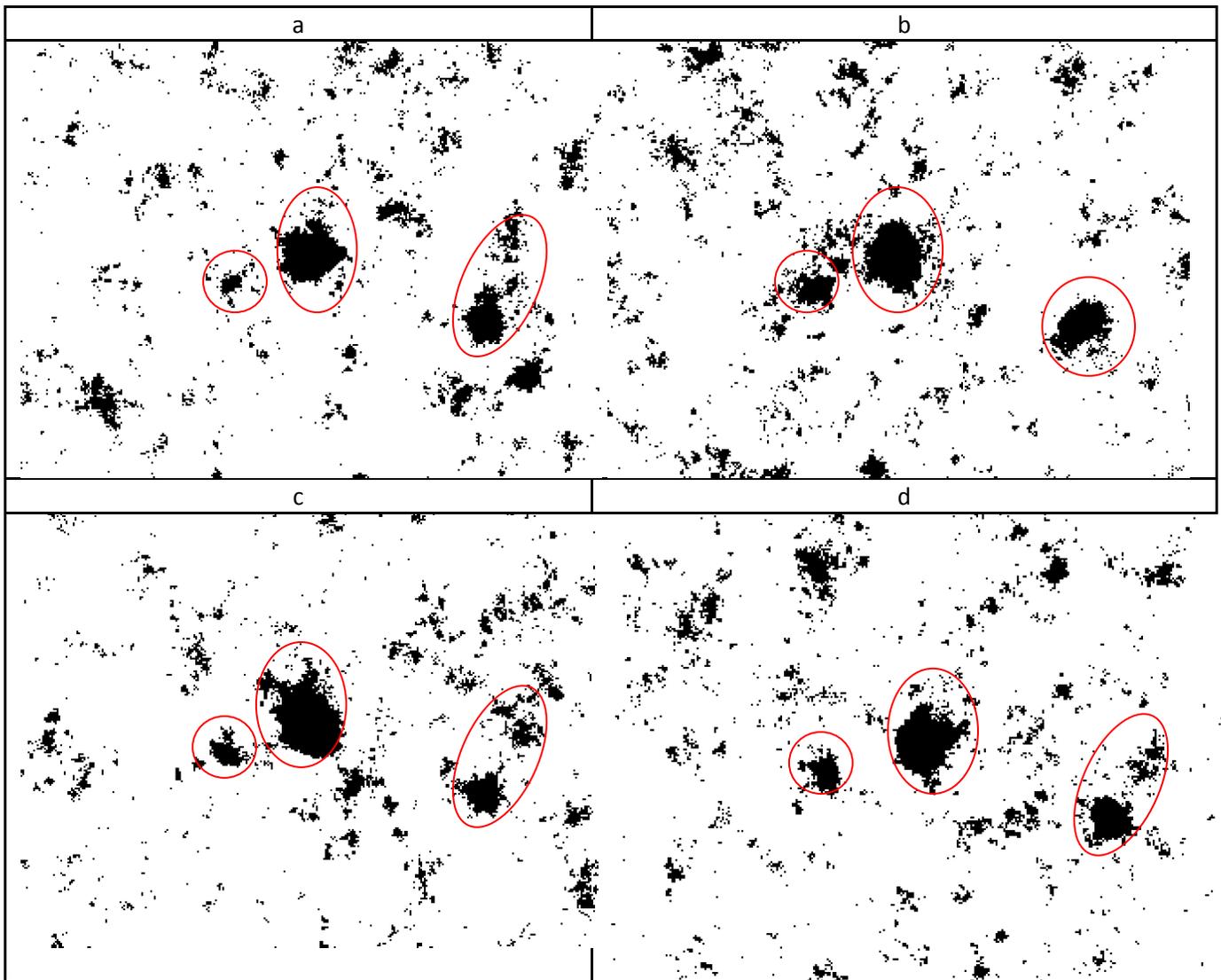


Figura 3.12 Las configuraciones mostradas en a, b , c y d son cuatro ejemplos de las cien generadas para el par umbral $\Phi = 4.5$, tiempo $t = 500$. Se circulan las tres zonas que se forman en todas y cada de las configuraciones obtenidas. Fuente: Elaboración propia

Ya en la práctica, para medir estas dimensiones se cae una vez más en la disyuntiva de seleccionar la estrategia óptima para el propósito de este trabajo, que puede ser tanto construir programas propietarios que calculen las dimensiones requeridas o utilizar software comercial que realice esta tarea.

Al igual que con NetLogo, evaluamos varios paquetes que calculan la dimensión de agregados de distintas maneras. Existen aquellos que reciben como entrada archivos planos con las coordenadas de los agregados; los hay que reciben archivos binarios de imágenes y realizan el cálculo sobre éstas. Después de la evaluación realizada, que tuvo que ver con la precisión que en los datos se obtienen (cuestión que se calibró midiendo

estructuras cuya dimensión ya es conocida) se selecciono el paquete llamado Fractalyse³⁵, desarrollado por el centro de investigación ThéMA (CNRS – Université de Franche-Comté). Para utilizar este software, primero debemos transformar las estructuras generadas por NetLogo a imágenes blanco y negro en formato BMP, que es uno de los formatos soportados por Fractalyse. En principio, esto no representa ningún problema, salvo que tenemos 600 distintas estructuras que analizar, pues dijimos que sólo nos centraríamos en el par $\Phi = 4.5$, $t = 500$. Realizar esta tarea manualmente consumiría demasiado tiempo. Lo que se hizo fue construir dos rutinas computacionales que hicieran esta tarea de manera automática.

Primero se modificó el programa original de NetLogo que una vez terminada la estructura, la exportara a un archivo en formato BMP. De tal forma que se tuvieron 600 imágenes. Ahora bien, en este punto nos encontramos con una de las dificultades de trabajar con software comercial y no tener el control total. Las imágenes exportadas son en blanco y negro, como las que necesita Fractalyse, pero, las estructuras urbanas son la parte blanca y el espacio vacío la negra, de tal forma que al querer calcular la dimensión de esta imagen Fractalyse toma como el objeto a analizar lo que esté en negro. La solución fue construir un programa en lenguaje C que leyera cada una de las imágenes exportadas e invirtiera los valores de los pixeles. Donde hubiera 0 pusiera 1, y donde hubiera 1 pusiera 0. Esto, repetimos, sobre 600 imágenes.

Segundo, una vez con las imágenes corregidas se construyó un nuevo programa en lenguaje Visual C++ que, tomara el archivo BMP de un directorio y se lo pasará como parámetro a Fractalyse y este a su vez, calculara las tres dimensiones requeridas. Para esto, hubo que programar un pequeño módulo que interactuara con el API de Windows XP para ejecutar y manipular el archivo ejecutable (exe) de Fractalyse para que hiciera de manera automática lo que necesitábamos.

Una vez concluido este proceso, tenemos 1,800 dimensiones, 600 por cada tipo, D_b y las dos D_{mr} . Para finalizar, simplemente se obtiene la media de cada tipo para tener 3 dimensiones promedio finales. Para efectos de comparativos se calculó las mismas tres dimensiones sobre el área X , para así conocer si el par umbral-tiempo seleccionado es no sólo adecuado visualmente.

La tabla 3.3 presenta estos comparativos. Como podemos ver, en promedio, los valores D_b para nuestro modelo y X sólo difieren en 0.004 unidades, mientras que para D_{mr} basado en el CDB, lo hacen sólo en 0.029 unidades. Con respecto a D_{mr} basado en el centro de masa, que es el que se aleja un poco más con respecto a X , y cuya matriz M_{rc} se encuentra casi vacía³⁶, podemos argumentar que este tipo de dimensión es muy sensible a las modificaciones espaciales, por lo que, en términos del análisis realizado, esta dimensión se desecha como parámetro válido para modelo.

³⁵ El software Fractalyse se especializa en calcular la dimensión fractal de áreas urbanas sobre imágenes TIFF o BMP en blanco y negro. Calcula varios tipos de dimensiones fractales, entre los que se encuentran los dos que necesitamos, box-counting y masa-radio.

³⁶ No había suficiente información significativa en la mayoría de las estructuras obtenidas para calcular la dimensión masa-radio.

Tabla 3.3 Comparativo entre las dimensiones fractales obtenidas para X y para el modelo propuesto

	Dimensión Box-Counting	Dimensión Masa-Radio, CBD	Dimensión Masa-Radio, centro de masa
Área de estudio X	1.474	1.284	1.643
Modelo Propuesto, $\Phi = 4.5, t=500$	1.479	1.229	1.446

Por lo tanto, la pareja formada por $\Phi = 4.5, t = 500$ no es sólo una buena elección visual, es también un buen ajuste topológico en cuanto a la forma en que se están cubriendo el plano, para nuestro caso de estudio. Para corroborar aún más fehacientemente esta situación, realizamos un análisis más sobre el modelo, consistente en investigar si la llamada ley de Zipf³⁷ (o del tamaño-rango) se está cumpliendo.

3.2.3 Ley de Zipf para áreas urbanas [96, 97]

Una notable regularidad estadística empírica, hallada en las distribuciones de tamaño de ciudades en muchos países, entre otros muchos fenómenos, es que se aproxima muy bien por una distribución de Pareto [98]. Las distribuciones de Pareto se definen como $Pr(X \leq x) = 1 - (x/a)^{-\delta}, x \geq a$. Ahora bien, la ley de Zipf o regla del “rank-size” afirma que la distribución de tamaño de una ciudad cumple $\delta = 1$ para la distribución de Pareto. En otras palabras, que la distribución tenga parámetro “forma” igual a 1. Para verificar esto, las ciudades en un país cualquiera se deben ordenar (clasificar) en cuanto al tamaño de su población. A la de mayor población se le da el rango 1, a la que le sigue el rango 2 y así sucesivamente hasta la ciudad con el menor número de población, a la cual se le da el rango n. Una vez hecho esto, se comprueba que la información rango-población (rank-size) siga la distribución de Pareto con las características explicadas.

Nos dedicamos pues a investigar si las estructuras urbanas generadas por nuestro modelo cumplen con esta ley. Para esto, primero debemos establecer cuáles estructuras en nuestro modelo forman conjuntos espaciales que se agreguen en representaciones concisas de ciudades. Este análisis, obviamente, debe llevarse a cabo sobre las 100 estructuras formadas por el par $\Phi = 4.5, t=500$, para así sacar un promedio espacial de los agregados que se forman con más frecuencia y que pueden considerarse como ciudades individuales dentro del área de estudio.

Para esto, realizamos un análisis de agregados [99, 100]³⁸ sobre cada una de las 100 estructuras generadas utilizando un algoritmo conocido como Subtractive Clustering [101], el cual pertenece a una familia de métodos para análisis de agregados conocida como Fuzzy Clustering, en donde se relaja la regla de pertenencia, de tal forma que un dato en lugar de pertenecer o no, a un agregado, puede pertenecer a varios en distintos grado, es

³⁷ La ley de Zipf, nombrada en honor del profesor George Kingsley Zipf (1902-1950), observa que la frecuencia en la ocurrencia de un evento P, vista como función de un rango i, donde el rango se determina precisamente por la frecuencia de ocurrencia mencionada, es una ley de potencia $P_i \sim 1/i^\alpha$ con el exponente α cercano a la unidad. Esta ley, se ha observado en muchas situaciones, por ejemplo, la frecuencia en que aparece una misma palabra en un texto.

³⁸ Un análisis de agregados, también conocido como análisis de segmentación, crea grupos o agregados de información. Estos agregados se forman de tal manera que los objetos en un mismo agregado son muy similares entre sí y los objetos en diferentes agregados son muy distintos entre ellos. Las medidas de similaridad dependen del tipo de información. En esta investigación, se trata de información espacial.

decir, por ejemplo, que puede pertenecer a los agregados A y B, pero su grado de pertenencia es de 0.60 para A y de 0.40 B.

Llevar este algoritmo a la práctica, nos pone en la constante disyuntiva computacional de esta tesis: construir programas propietarios o utilizar software comercial. En esta ocasión la decisión no es tan complicada, dado que en la actualidad existen varios paquetes matemáticos que implementan con gran precisión los algoritmos de agregación. En particular, los paquetes MatLab, Mathematica y Maple, soportan el subtrahente clustering de manera total. Se realizó el análisis en los tres paquetes, no encontrando diferencias significativas en el análisis entre los tres, por lo que se decidió utilizar los datos obtenidos en MatLab por su facilidad para exportar la información generada.

Sin embargo, para poder utilizar estos tres paquetes, se debe de contar con las coordenadas de las partículas que forman los agregados organizadas en el formato correcto para alimentar a estos paquetes. En general, los tres piden archivos planos con las coordenadas (x, y) ordenadas en renglones. Eso no sería ningún problema de si el programa con el cual generamos los agregados lo hubiésemos construido nosotros, pero como mencionamos se utilizó el paquete NetLogo para esta tarea, el cual, tiene facilidades para exportar las partículas obtenidas a archivos cvs (separados por comas) con un formato muy particular que incluye mucha más información que la que necesitamos para el análisis de agregados. De tal forma que lo primero que se tuvo que hacer fue programar algunos macros en VisualBasic que leyeran los 100 archivos cvs, limpiaran toda la información extra y crearon un archivo de salida en formato plano con la estructura necesaria, para cada uno de los paquetes evaluados. Se muestran varias secciones de estos códigos en el apéndice B. Adicionalmente, al tratarse de varios archivos, se programó en el lenguaje de cada paquete, rutinas para procesarlos todos de manera automática. Una vez realizado el análisis de agregados para las 100 configuraciones, se debe realizar el promedio espacial sobre los agregados obtenidos, para vislumbrar cómo y cuántas ciudades está formando el modelo. Este promedio se llevó a cabo de dos maneras: una cuantitativa y otra espacial. Se hizo el promedio entre el número de agregados clasificados para las 100 configuraciones, clasificando 6 agregados.

Este mismo análisis se llevó a cabo sobre el área de estudio X, para tener parámetros reales de comparación, clasificándose 8 agregados. La figura 3.13 muestra estas clasificaciones.

Una vez que se establecen los agregados, los ordenamos de mayor a menor de acuerdo a su tamaño (medido en número de partículas en cada agregado). Después le asignamos al de mayor número el rango 1, al siguiente el rango 2 y así sucesivamente hasta n, asignado al de menor número de partículas. Al trazar estos valores en un gráfico de log-log, obtenemos una relación lineal; por lo tanto la regla de "rank-size" se está cumpliendo. La Figura 3.14 presenta los gráficos log-log junto con los ajustes para X y una de las configuraciones urbanas producidas por nuestro modelo de regresión lineal. La norma de los residuos fue de 1.53 y 0.09 para X y para nuestro modelo respectivamente, lo que confirma su condición lineal.

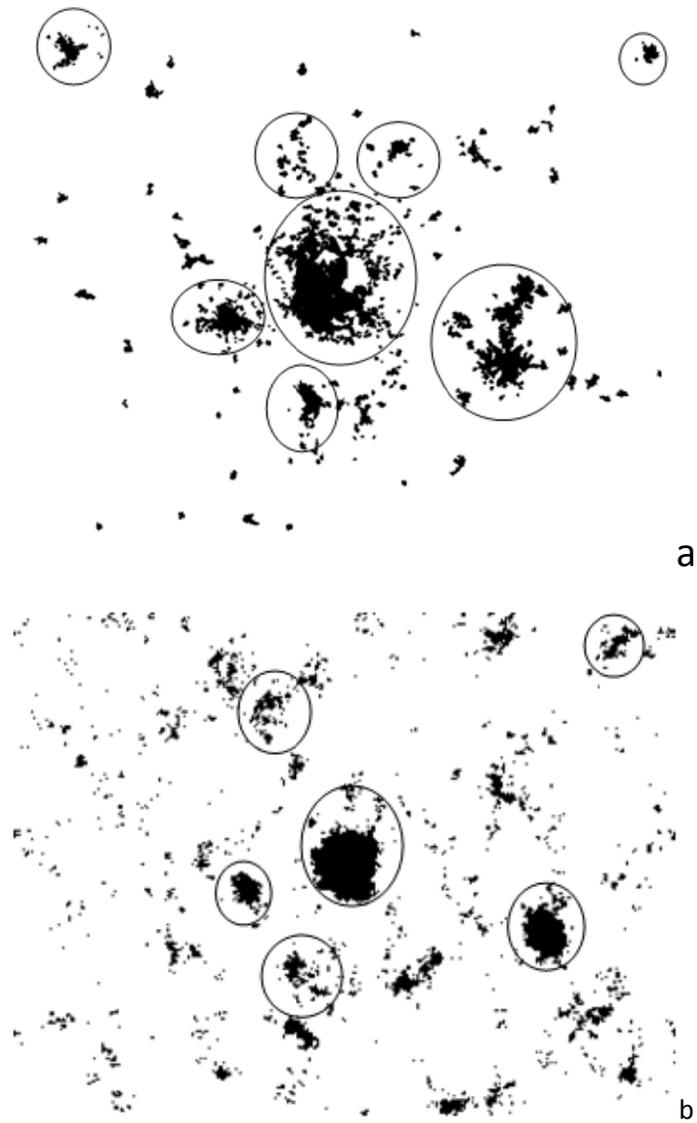


Figure 3.13 Se muestran en (a) el área de estudio X y los 8 agregados clasificados, mientras que (b) es un ejemplo de una las configuraciones formadas por nuestro modelo con los parámetros $\sigma=4.5$, $t=500$. En este caso se aprecian los 6 agregaos formados por el algoritmo de Subtractive Clustering. Fuente: Elaboración propia

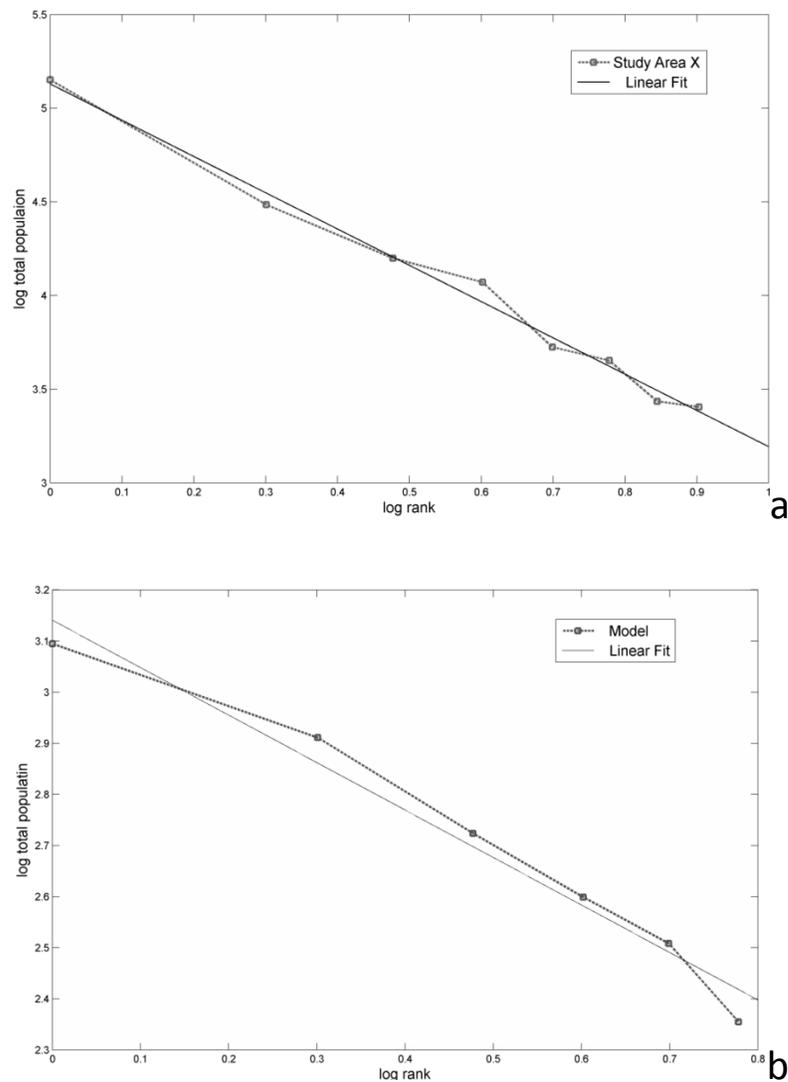


Figura 3.14 Gráficas Log-Log para (a) área de estudio X y (b) promedio sobre 100 configuraciones generadas, parámetros, $\Phi = 4.5$, $t=500$. La regresión lineal no es solo visualmente aceptable, pero los valores obtenidos para la norma de los residuos nos confirman que la regla del “rank-size” se cumple tanto en nuestro modelo como en nuestra área de estudio X

3.2.4 Discusión

Después de revisar todos los datos obtenidos, y basado en la precisión de la dimensión fractal entre nuestra área de estudio y las estructuras desarrolladas por nuestro modelo, llegamos a la conclusión que esta adecuación al modelo V-S para zonas urbanas, con parámetros $\Phi = 4.5$, $t = 500$, es un buen ajuste morfológico para X.

Uno de las novedades del modelo obtenido con esta adecuación, es que cumple con el proceso de acumulación urbana sugerido por Krugman [102]:

1. Por debajo de un cierto nivel de concentración, simplemente no hay suficientes actividades para mantener el proceso de acumulación y/o para generar aglomeraciones externas. Esta situación es la que se modela con umbrales pequeños.
2. Una vez alcanzado el nivel mínimo de concentración, la acumulación espacial de las actividades se puede implementar y retroalimentación positiva refuerza el crecimiento. Situación que se modela con umbrales intermedios y altos.
3. Más allá de cierto nivel, el proceso de acumulación se convierte en poco eficaz debido a la congestión de las actividades y las aglomeraciones externas retrasan el proceso de crecimiento. Este punto se alcanza en cierta medida con umbrales intermedios, sin embargo, por la mecánica intrínseca en nuestro modelo, esta situación no prevalece al paso del tiempo.

Ahora bien, como mencionamos al principio de ésta sección 3, dejamos fuera del modelo dos de los factores que impulsan el crecimiento urbano: de modelo: restricción física c_i y las ventaja natural n_i . Es claro que el terreno físico, en el que crecen las ciudades, conforma su morfología final. No obstante, teniendo en cuenta las estructuras obtenidas y su precisión, nos llevan a creer que el factor n_i debe incluirse en el modelo cuidadosamente y dependerá del área metropolitana de particular. Por ejemplo, miremos con mayor detenimiento la parte inferior de X (Figura 1.3). La curva se compone de asentamientos urbanos reales, delimitados por una serie de montañas. Pero, como hemos mencionado en la sección 3.2.1, se obtiene esta misma curva en nuestro modelo, sin colocar algún tipo de restricción del crecimiento en esta área. Los fenómenos subyacentes relacionados con esta situación deben ser estudiados cuidadosamente más adelante.

En su forma actual, todas las configuraciones de nuestro modelo cubren completamente a la rejilla en donde se generan, pero no lo hacen de la misma manera. Configuraciones “*esparcidas*” (sprawl) que son la generadas por umbrales medianos, llenan el espacio con varios agregados al mismo tiempo (parecido a un modelo de percolación), mientras que umbrales altos lo hacen como un agregado monolítico (siguiendo un modelo de Eden [14]). Este comportamiento se debe estudiar más a fondo para investigar los vínculos entre crecimiento urbano y las transiciones de fase, especialmente en su relación con el modelo de Ising [103]. Precisamente una de las limitaciones en nuestro modelo es este problema de que todas las configuraciones eventualmente llenan el espacio. Si dejamos que $t \rightarrow \infty$, nuestro modelo nos da un asentamiento poco realista. Todas las configuraciones convergerán eventualmente a $D = 2$, es decir

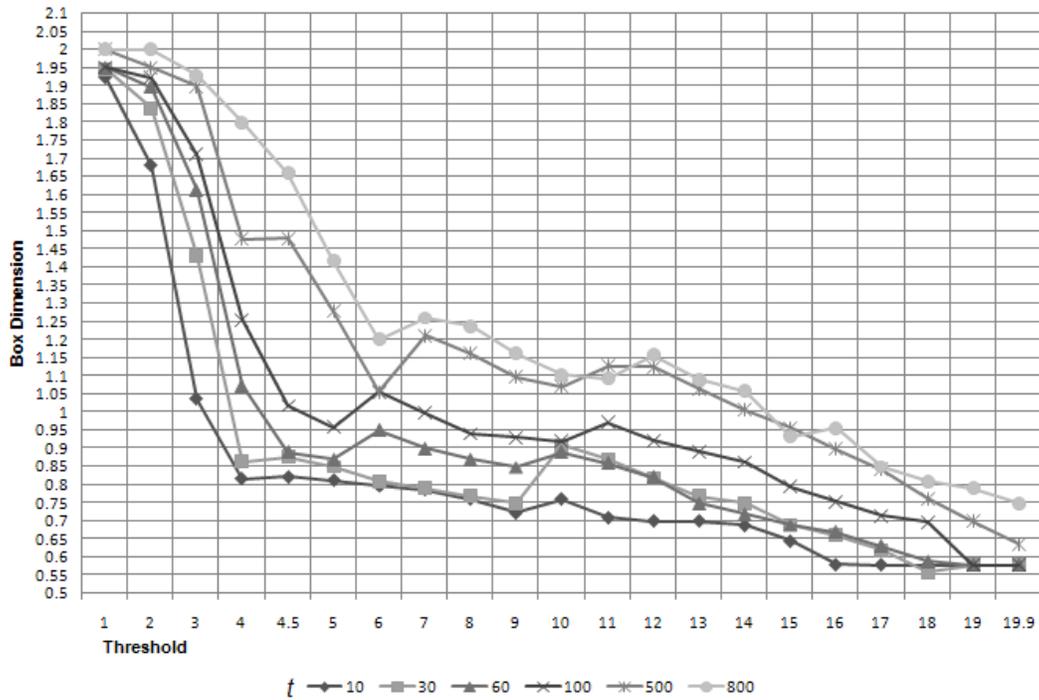
$$\text{Si } P_i(0) = k, k > Z \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} D_b = 2 \text{ para toda } i$$

En la actualidad, las ciudades no crecen cubriendo todo el espacio posible, no importa cuánto tiempo transcurra desde su fundación.

Por último, nos gustaría discutir la relación entre las dimensiones fractales y la distribución espacial de X . En la Figura 3.15 (a) mostramos el comportamiento de Φ vs. D_b . La dimensión $D_b \rightarrow 0$ mientras $\Phi \rightarrow \infty$, para toda t . La Figura 3.15 (b) presenta un acercamiento de la gráfica Φ vs D_b . Entre $t = 6$ y $t = 7$ D_b sufre un pequeño incremento en su valor. Lo mismo ocurre entre $t = 11$ y $t = 12$. La regularidad de la gráfica $D_b - \Phi$ es notable, y nos lleva a pensar que las transiciones entre configuraciones sprawl y compactas, toda vez que estas están

definidas precisamente por $D_b - \Phi$, son independientes de escala con respecto a t y pensamos sigue alguna ley de potencia³⁹, cuyo cálculo sale por el momento de los alcances de esta tesis.

Estas irregularidades o "saltos" en el valor de D_b aparecen cada vez que algún agregado gana tamaño utilizando las partículas de otro. Esta situación se ejemplifica con una de las configuraciones particulares generadas por el modelo en la Figura 3.16



a

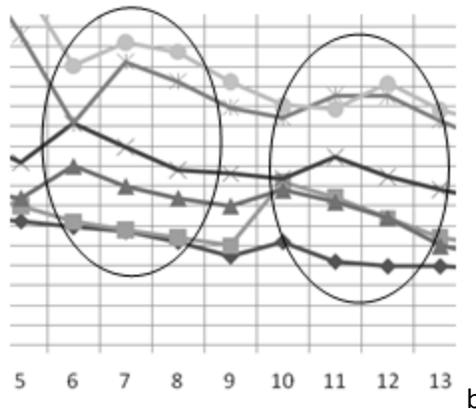


Figura 3.15. a) Dimensión Box D_b graficada como una función del umbral Φ sobre 6 diferentes tiempos t . b) El momento en que ocurren estas transiciones está marcado por el pequeño incremento en la dimensión fractal D_b y la pérdida de agregados en la morfología del sistema urbano.

³⁹ Una ley de potencia es una relación polinomial que tiene la propiedad de ser invariante en escala. En su forma más simple, una ley de potencia relaciona dos variables bajo la regla $f(x) = ax^k + o(x^k)$, donde a y k son constantes y $o(x^k)$ es una función asintótica a x^k . A k se le conoce como el exponente de escalamiento.

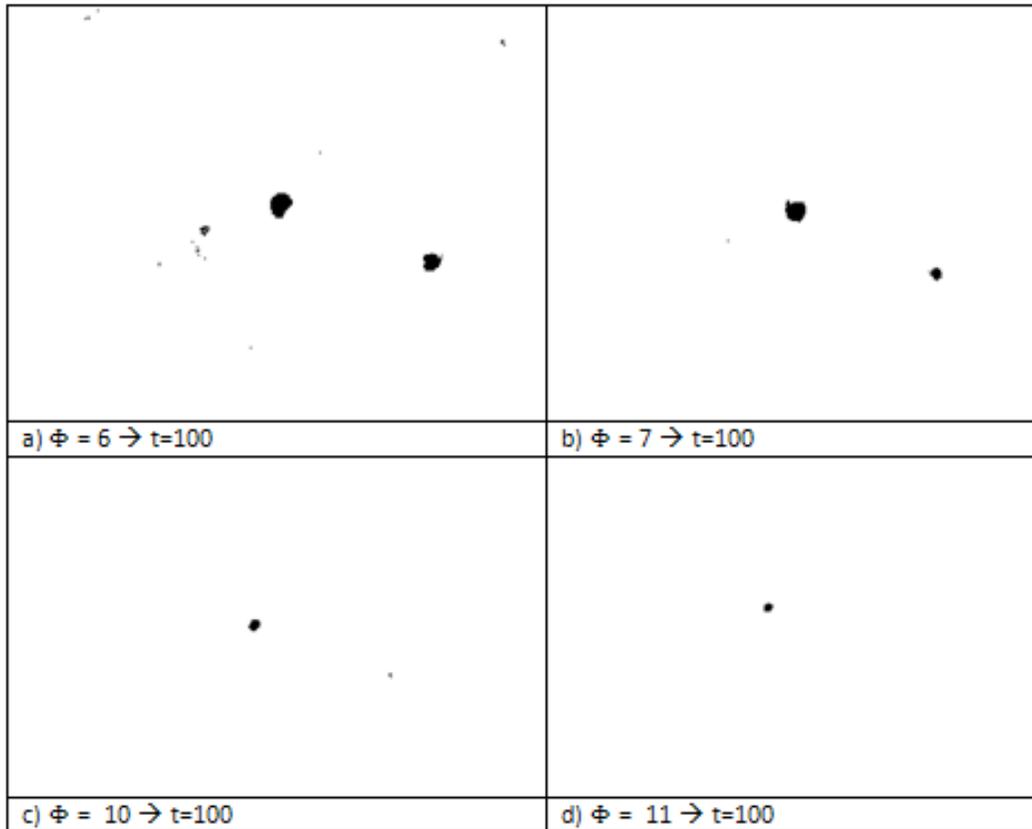


Figura 3.16 a) Configuración de agregados con tres estructuras bien definidas al centro y algunas zonas satélite alrededor de ellas. Para el mismo tiempo t , la configuración en b) muestra la pérdida de varios agregados debido al incremento en el potencial Φ de 5 a 6. Lo mismo sucede entre c) y d). La transición de configuraciones “esparcidas” a compactas se está reflejando en la información a través del incremento en la dimensión D_b .

3.2.5 Conclusiones

Debido a los resultados topológicos y visuales obtenidos, concluimos que este modelo V-S, con las adecuaciones realizadas y con parámetros $\Phi = 4.5$, $t = 500$, es un buen ajuste, en un sentido espacial, para X . Más aún, lo probamos sobre otras zonas metropolitanas mexicanas con las mismas características (varios conglomerados urbanos distribuidos en un terreno físico) y el modelo da los mismos resultados satisfactorios. A primera vista, creemos que nuestro modelo podría extenderse a cualquier zona metropolitana en el mundo con las características espaciales aquí expuestas.

3.3 Criticalidad Auto-Organizada en ciudades

En la sección 2.3.4 explicamos cómo los conceptos de SOC pueden aplicarse en modelos de morfología urbana. En esta sección explicaremos la construcción práctica de las adecuaciones realizadas a este modelo así como su simulación computacional y los resultados obtenidos.

3.3.1 Modelo

3.3.1.1 Construcción teórica

Al igual que en los dos modelos anteriores, para iniciar, imponemos sobre el modelo las condiciones establecidas al principio de esta sección 3. Para esta parte, los accidentes históricos están representados a través de una capacidad inicial igual a $Z(0) = k$ unidades de población, dependiendo de su fecha de fundación y su importancia económica y cultural - dentro del área de estudio X- alrededor de 1500 a.d., al igual que en el modelo de V-S, a mayor capacidad inicial, mayor la importancia en la zona. La tabla 3.4 muestra estas disposiciones iniciales.

A continuación se calculan las capacidades $Z(r)$ de cada una de las células en la rejilla basándose en la ecuación 2.15 y tomando como centro del sistema al centro de la ZMVM

Por lo tanto, en el tiempo $t = 0$, todas las posiciones de cuadrícula, excepto las ocupadas por los accidentes históricos, tiene una capacidad variable dependiendo de su distancia euclidiana con el centro mencionado.

Tabla 3.4 Parámetros iniciales para el área de estudio X en el modelo basado en SOC

Zona Metropolitana	Capacidad inicial
ZMT	40
ZMVM	110
ZMP	80

A continuación se comienza a avanzar en t , en pasos enteros, de tal forma que tenemos distintas configuraciones para $t=1$, $t=2$, etc. En cada paso, se agrega una partícula de manera aleatoria sobre la rejilla, teniendo una mayor probabilidad de agregación mayor en un radio de influencia r establecido alrededor de la ZMVM.

Cada vez que se agrega una partícula, siguiendo el algoritmo descrito en la sección 2.3.5.1, se verifica si se supera la capacidad preestablecida de esta. De ser el caso, una avalancha sucede así como se explicó en la sección mencionada.

A diferencia del modelo de CDLA, aquí no necesitamos grandes cantidades de partículas para comenzar a obtener información relevante, por las características propias de los agregados que se forman, que están relacionados con el modelo de percolación (sección 2.3.2) y con el modelo Eden [14]. La simulación termina hasta que se alcanza un cierto tiempo t , no un número preestablecido de partículas.

3.2.1.2 Construcción computacional

Utilizamos el mismo paquete NetLogo mencionado en el modelo V-S para representar las lógicas de agregación y avalanchas descritas.

El algoritmo es el mismo que el algoritmo 2.2, salvo que en lugar de tener un solo CBD tenemos tres, cada uno con una capacidad inicial correspondiente a las zonas indicadas en la tabla 3.4.

3.3.1 Experimentos y resultados

Se diseñaron experimentos a distintas escalas de t. Algunos ejemplos se pueden apreciar en Figura 3.17. Como se puede ver, en principio, el modelo no corresponde a las estructuras observadas en el área de estudio X, a diferencia de V-S. Si bien contiene tres estructuras principales, estas son básicamente platos circulares y no vemos la formación de los agregados satélite que en V-S y en X se aprecian. Más importante aún, las dimensiones fractales obtenidas bajo el método de box-counting no tienen punto de comparación con X. En cuanto a las dimensiones fractales a través de masa-radio, los valores no son confiables, por la naturaleza misma de este algoritmo, y de igual manera los valores obtenidos no son comparables con X.

El modelo de SOC, de la forma en cómo fue adecuado, para el área y la escala geográfica que nos ocupa, hasta donde podemos observar, no resultó ser una buena opción.

Dos son las razones que hemos investigado para esto.

1. La escala. SOC trabaja de manera muy local, expandiendo las avalanchas a todos los niveles, pero su influencia inmediata mayor es en su vecindario. Los cambios que SOC genera no se alcanzan a representar a la escala tan chica que estamos manejando (1:500,000) de ahí que las interacciones entre agregados, que es lo que moldea a la morfología del sistema, sean prácticamente nulas.
2. Las reglas de interacción planteadas entre agregados no fueron lo suficientemente explícitas ni en el sentido del CDLA ni en el sentido de V-S, donde la influencia de cada agregado se refleja en los demás.

Así las cosas, se abandonó este modelo por el momento. De ninguna manera se piensa que el modelo no funciona para ciudades, pero hay que poner especial atención en los dos puntos mencionados, para, que sin definir demasiadas reglas sobre el modelo, podamos obtener resultados que se asemejen a la realidad.

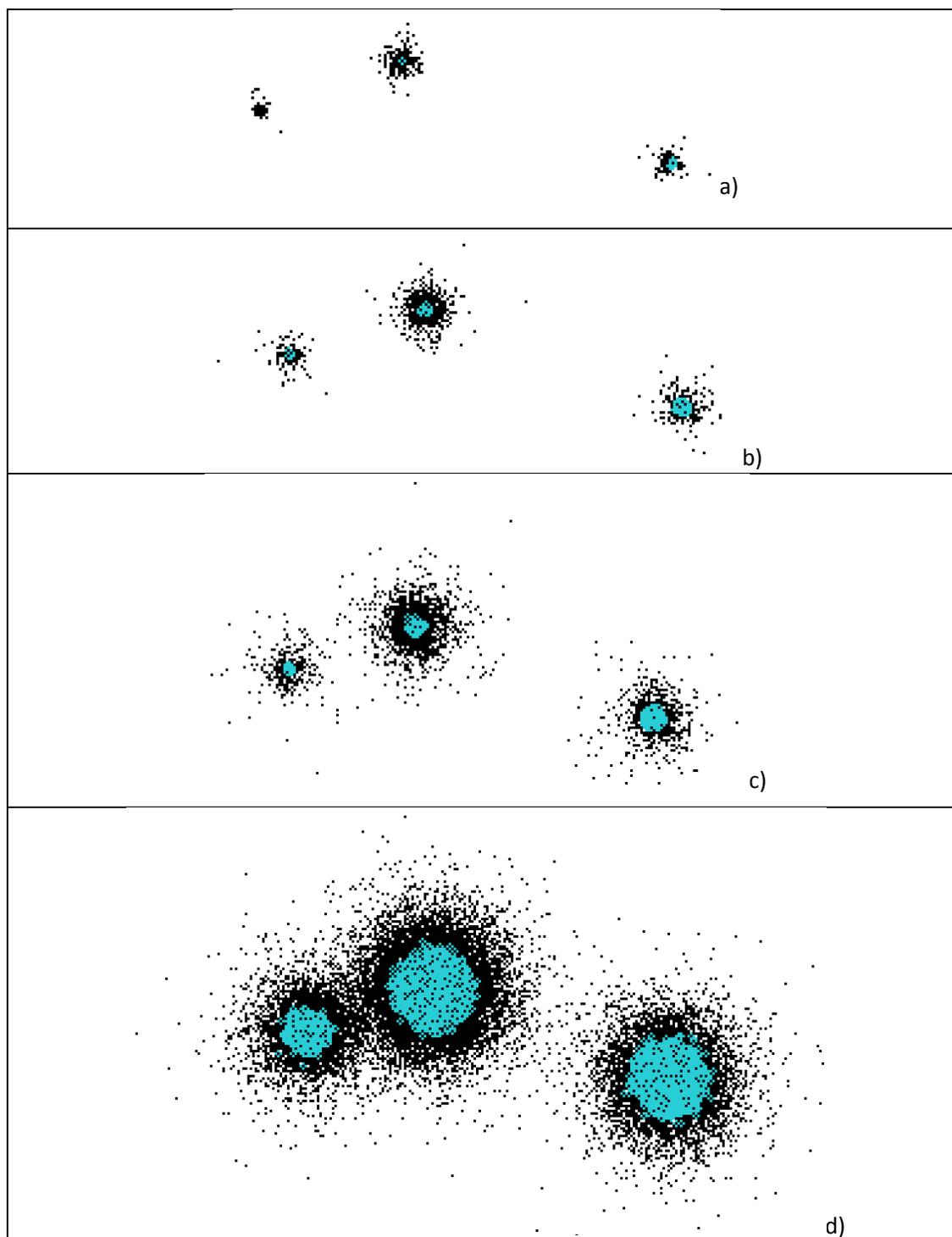


Figura 3.17. Cuatro etapas de una misma simulación utilizando el algoritmo SOC para ciudades. a) $t=300$, b) $t=3,000$, c) $t=10,000$ y d) $t=115,000$. La imagen clara que se ve al centro de cada estructura representa todos los sitios en los que ha sucedido por lo menos una vez una avalancha.

4 Análisis global

Hemos desarrollado tres modelos para analizar los patrones urbanos que se forman al asentarse y crecer un población en un territorio específico: CDLA, V-S modificado y SOC modificado. En particular, se observó la gran área central de México, la cual comprende sobre todo a tres grandes zonas metropolitanas: Valle de México, Toluca y Puebla. Esta observación se llevó a cabo a una escala geográfica de 1:1,500,000.

Dos de los tres modelos, así como fueron planteados, resultaron en simulaciones adecuadas a la realidad en dos aspectos fundamentalmente: morfológico y topológico, es decir, se adecuan visual y estructuralmente en un porcentaje aceptable al área de estudio planteada. Estos modelos son el CDLA y el V-S modificado. En cuanto al modelo SOC modificado, que falló en estos dos aspectos, se deberá replantear su mecánica para esta escala, sobre todo el uso de la ecuación (2.17) para evitar estas configuraciones circulares que, por lo menos a esta escala, no tienen símil con la realidad.

Ahora bien, en cuanto al modelo CDLA, su valía estriba en que los mecanismos que plantea, se reflejan en los procesos migratorios que suceden en la realidad, en cuanto a la posición espacial en donde finalmente se asentará un grupo de personas en migración. Por sí sólo, este modelo no puede formar las estructuras urbanas en el territorio, pero puede complementar al modelo V-S, para, primero, utilizarlo a una escala más grande (1:500,000 por ejemplo), y, segundo, proveerlo de mecanismos de agregación urbana espaciales más acordes con la realidad. Este modelo nos ofrece también una línea de estudio teórica por demás interesante. Son pocos los resultados que “predicen” la morfología final de sistemas de agregados. La definición formal de la ecuación (3.1) podría aportar un resultado teórico al respecto.

El segundo modelo, el V-S es, como se mencionó, el que realiza el mejor ajuste teórico a nuestra zona de estudio. Existe creemos una razón fundamental para esto, que es el mecanismo por el cual se generaron los potenciales: las economías de aglomeración. Una vez establecido el potencial inicial, o, en términos geográficos, establecido el centro económico, cultural, político, religioso de la ciudad, las demás zonas empiezan a supeditar en mayor o menor medida sus potenciales de crecimiento a este. A mayores potenciales –a mayor economía– mayor atracción de unidades urbanas. Sin embargo, la exactitud morfológica del modelo es, como se comentó, sorprendente. Existen varios aspectos que pensamos tal vez vayan más allá de las economías de aglomeración que tienen que ver con la mecánica intrínseca de los cambios constantes en cada unidad de t . Estos cambios se van de alguna forma acumulando hasta cierto punto que hace que se estabilice o se destruya abruptamente la morfología del sistema, y aun con esto, sus características topológicas, como las dimensiones calculadas, siguen ciertos patrones en distintas t . Esta característica nos da la idea de que el fenómeno se está auto-organizando, cuestión que viene a complementar la idea actual [12] de que las ciudades son objetos fractales. Cuestión que se da casi por descontado al utilizar solamente el CDLA como modelo base.

Subyace en la construcción de estos modelos el concepto de objeto fractal, por lo que no es casual que el análisis topológico realizado se base en técnicas de análisis fractal. No solamente por la clara imposibilidad de caracterizar a estas estructuras utilizando geometría Euclidiana, sino por la consistencia de sus propiedades a través de diferentes escalas y sus similitudes, al cambiar de estado o fase, con modelos de conocida naturaleza fractal, como el fenómeno de percolación.

Finalmente, queremos retomar algo que se comentó repetidas ocasiones. Dijimos que mucho del enfoque a través de CA era gracias a que las ciudades eran sistemas complejos y mencionamos algunas de las razones para pensar esto. Los modelos construidos, en su conjunto, pensamos envuelven una de las bases de los sistemas complejos. Reglas sencillas llevan a resultados que no se pueden conocer *a priori*. Esto es obvio en nuestros modelos, pues todos en mayor o menor medida, en alguna parte de su formación contienen procesos estocásticos, con los cuales queremos representar nuestra incapacidad de conocer o representar las millones de decisiones individuales y colectivas que construyen la forma de nuestras ciudades. Sin embargo, al igual que en los sistemas complejos, nuestros modelos al paso del tiempo evolucionan a estructuras que en su conjunto siguen ciertos parámetros fijos, ciertas leyes de potencia que hacen que el fenómeno no sea estocástico del todo. La información obtenida en los modelos desarrollados nos da evidencia de la característica compleja de las ciudades y los sistemas de ciudades, lo que implica, afortunadamente, que nos son caóticos, por lo que podemos si bien no predecirlos por el momento, si explicar varias características morfológicas y espaciales de ellas.

5 Conclusiones

Aunque los modelos expuestos en este trabajo se han diseñado para mencionar cómo algunas dinámicas urbanas pueden explicar la estructura espacial de las ciudades, es claro que nuestros modelos son “caricaturas” del mundo real. Más aún, son realmente modelos de modelos, pues simulan al área de estudio X, que es una imagen vectorial de la imagen satelital real. Son *simulacra*, algo que reemplaza a la realidad con su representación, substituyendo los signos de la realidad por su “realidad”. Es decir, que aunque nuestros modelos representan elementos de ciudades reales, también contienen idealizaciones de estos elementos, que se introducen para acentuar las conclusiones que obtenemos de ellos vía la simulación computacional. En [75, 76], Bak da a entender que los sistemas complejos desafían los métodos convencionales que buscan simplicidad. En los sistemas complejos no existe tal, pues siempre existe la posibilidad de que estos sistemas evolucionen en formas inesperadas. Por lo tanto, la predictibilidad y la certeza, dos de los pilares de la ciencia, y más aún, dos de los fundamentos tradicionales de las teorías urbanas hace una generación, se ponen en duda cuando se trata de teorizar y simular sistemas complejos de ciudades.

En principio, nuestros modelos parecen cumplir con el principio de parsimonia⁴⁰, pero suelen generar resultados insospechados y sorprendentes. Modelos como el V-S son un ejemplo claro de esto, en donde resultados que no son obvios o intuitivos, emergen a partir de reglas relativamente simples que forman procesos por demás complicados. De hecho, nuestros modelos intentan extraer la esencia de los procesos dinámicos que generan crecimiento urbano, pero invariablemente las abstracciones realizadas se enfocan en resultados genéricos más que en predicciones específicas.

Nuestro paradigma de análisis ha sido la experimentación, la exploración de la solución o el espacio de parámetros por lo que la consistencia y efectividad de nuestros modelos puede evaluarse. Todo esto bajo la tutela de la computación científica. Los autómatas celulares son esencialmente técnicas para implementar procesos locales tales como la difusión espacial a través de un conjunto de reglas que identifican condiciones específicas e incorporan acciones locales en vecindarios restringidos. El sólo hecho de que estemos tratando con cientos de células a la vez de inmediato limita la extensión a la cual podemos encontrar información sobre los objetos de nuestro interés. En cualquier estimación, necesitamos trabajar con promedios y agregaciones de nuestros objetos. Dado que nuestros modelos hacen uso constante de movimientos y cálculos aleatorios y tendemos a no estar interesados en predicciones específicas *per se*, sino en los estados estables, y sin poder calibrar ninguno de nuestros modelos en formas convencionales, como es agregar o restringir variables.

Otra de los cuestionamientos que surgen de inmediato es acerca de si estos modelos son aplicables o no a la vida diaria de nuestras ciudades, señalando su falta de aplicación en políticas públicas reales. Lo cual es cierto. Nuestro acercamiento al estudio de patrones urbanos no está diseñado para dar predicciones que sirvan como base de políticas urbanas. Aunque pudiera ser hasta cierto punto sencillo el adecuar estos a situaciones más prácticas, somos escépticos de que este sea el camino adecuado. Nuestros modelos contienen una multitud de supuestos que limitan su aplicabilidad y restringen su comprobación.

⁴⁰ El principio de parsimonia, en ciencia, establece que de manera general la solución más simple suele ser la mejor.

Bajo estas premisas, nuestros modelos simplemente nos dan puntos de vista acerca de las ciudades, utilizando algoritmos computacionales para experimentar nuestras teorías, y así dan un punto de partida informado para gestionar, controlar, diseñar y planear a la luz de este conocimiento.

Ahora bien, en cuanto a los patrones en sí, desde su aspecto teórico y como parte de una serie de patrones que se observan en la naturaleza, en varias partes de esta investigación se ha señalado que estos modelos sugieren procesos intrínsecos en dinámicas que aún están por descubrirse; leyes de universalidad que pueden integrar los patrones urbanos generados con patrones naturales cuya ambiente de gestación y escala es completamente distinta. De ninguna manera hemos presentado tal teoría en esta investigación. Esto a todas luces es una tarea complicada y compleja, toda vez que las ciudades están compuestas de una multiplicidad de actores que perciben el mundo de maneras muy diferentes, sin embargo, existen caminos sobre los cuales podemos bordar tal teoría, como lo es las economías de aglomeración mencionadas, la cual concibe a las ciudades como entes compuestos de agentes que compiten por el espacio a través del mercado generando distintos potenciales de crecimiento. Estas teorías son en muchos sentidos complementarias y consistentes con las ideas que aquí desarrollamos, pero no son centrales. Aquí hemos tomado una postura más pragmática. Nuestro acercamiento al problema es bajo las ideas de la física más que de la economía. Para concluir este argumento, una teoría que generalice la estructura espacial en términos de la física y sea consistente con las dinámicas utilizadas para generar los patrones emergentes obtenidos es lo que buscamos. En esta búsqueda, nuestros modelos son más geométricos que geográficos, más físicos que económicos, simplificando y explicando el orden existente a través de varias escalas espaciales y temporales, que no son otras que las nociones sobre las cuales las geometrías fractales se han construido.

Es esta aplicación de sistemas fractales la cual hace esta teoría relevante para el estudio de la morfología de ciudades. La idea de que las ciudades presentan una auto-similitud ha estado presente ya por un tiempo en la literatura. Durante la última década las ideas sobre fractalidad se han aplicado a ciudades, explotando su evidente auto-similitud que existe entre y en las ciudades a través de sus varios órdenes jerárquicos tales como lugares centrales, redes de transporte y leyes de escalamiento que son consistentes con las densidades urbanas.

No hay una demostración explícita de que bajo estos preceptos las ciudades sean objetos fractales, pues no era el fin último de este trabajo. Uno de los problemas implícitos en este enfoque fractal, es la manera en como explicamos la agregación de patrones espaciales. Por ejemplo, la característica estudiada del "*rank-Size*", nos muestra una clara firma fractal de una complejidad subyacente. Sin embargo, no es una relación espacial, y las ciudades son, en primera instancia objetos espaciales, existen y ocupan un terreno físico en el planeta, y compiten unas con otras en el espacio; y los modelos, no importa su parsimonia, que no contengan características que sepamos como esenciales a las ciudades para su formación, no pueden considerarse en primera instancia como modelos adecuados.

El problema que esto implica, es que al agregar detalle espacial nuestros modelos suelen ser menos plausibles. Podría pensarse que lo que necesitamos es una teoría más coherente de dinámicas y geometrías fractales. Pero tal vez haya que tomar esto con reservas, toda vez que las huellas o firmas fractales encontradas pueden ser simplemente fenómenos omnipresentes en la naturaleza de los sistemas de agregación, no relacionados de manera significativa con el desarrollo urbano, y emergen como resultado de las restricciones geométricas impuestas en nuestros modelos. En resumen, no tenemos una teoría general de cómo el espacio se está estructurando en ciudades y sistemas de ciudades que se pueda derivar encontrando alguna dinámica

consistente con escalamientos fractales conocidos. Batty y Longley [11, 12] sugieren que los fractales son simplemente medidas de la estructura del sistema, más que una evidencia de una dinámica subyacente por descubrir.

En las ciudades, la movilidad es una característica central. Este hecho se explora en nuestros modelos de CDLA y de SOC, sin embargo no alcanzan a explorarse y homologarse de manera extensa con el modelo de V-S que es que mejor simula la realidad de nuestra área de estudio X. Para lograr esta integración, a distintas escalas, necesitamos examinar las redes sociales y económicas que existen sobre la estructura espacial de las ciudades y representar como estas estructuras cambian y evolucionan. Necesitamos desarrollar una teoría equivalente de cómo estas redes y sus procesos son consistentes con lo que sabemos acerca de la estructura fractal y escalamiento en ciudades. Estas son algunas de las líneas de investigación que se tomarán en un futuro donde el énfasis en la teoría y en la experimentación computacional deberán ser igual de importantes. Requerimos juntar a la geometría y la dinámica, con las ideas emergentes de economía en las ciudades, los modelos de transporte y el los fenómenos de transición de fase. Utilizando estas ideas, creemos que un entendimiento más sólido de la forma en que nuestras ciudades están estructuradas y cómo se desarrollan puede llegar a obtenerse, y con esto, saber hasta dónde podemos diseñarlas.

6 Trabajo Futuro

Esta investigación ha dado pie a varias cuestiones que al momento han quedado abiertas y de las cuales se desprenden las siguientes líneas de investigación.

6.1 Probabilidades de distribución en sistemas de agregación multi-agregado

En cuanto al modelo CDLA para migraciones urbanas, creemos que es posible dar una expresión explícita para la ecuación (3.1)

$$P(SM_j(P_i), N, d) = \begin{cases} Normal \\ 0 \end{cases}, \text{ en el límite } N \rightarrow \infty,$$

de tal forma que la distribución de las ramas de cada agregado i en un sistema de N agregados pueda ser dada sin necesidad de realizar ninguna simulación, con tal solo saber a priori el centro de cada agregado i y la distancia y posición relativa entre cada uno de los centros.

Esta expresión deberá de clarificar el concepto de “sextantes (conjuntos) en contacto directo” y como, sin importar la distancia entre los centros de cada agregado en el sistema, los sextantes de distintos agregados, que se encuentren en esta situación de contacto directo, eventualmente estarán “muertos”.

6.2 Transiciones de fase urbanas

Esta investigación es el resultado más ambicioso que se espera obtener. Existe en la actualidad suficientes trabajos teóricos y experimentales acerca de transiciones de fase en termodinámica y sus grupos de renormalización correspondientes. Uno de los modelos más utilizados para comprender estos fenómenos es el conocido como modelo Ising [103, 104, 105], que es un modelo físico propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos. Se trata de un modelo paradigmático de la Mecánica Estadística, en parte porque fue uno de los primeros en aparecer, pero sobre todo porque es de los pocos modelos útiles (no sólo pedagógicamente) que tiene solución analítica exacta para el caso 1-dimensional. Esto lo hace muy útil para ensayar nuevos tipos de aproximaciones y luego comparar con el resultado real.

Por otro lado, los agregados generados por los distintos umbrales del V-S, pueden asociarse de manera total, en los umbrales pequeños, y de manera local, en los umbrales medianos y grandes, con el modelo de percolación, pues al irse llenando la rejilla, los agregados de células conectadas por vecinos cercanos se reconocen como parte del mismo agregado. Como se mencionó en la sección 2.3.3 los modelos de percolación se han usado ampliamente para desarrollar un mejor entendimiento de la estructura y las propiedades de medios multi-fase, de hecho, son pivote para el estudio de sistemas físicos complejos que exhiben transiciones de fase, y dan una liga entre los modelos de crecimiento alejados del equilibrio y la mecánica estadística en equilibrio.

De tal forma que pensamos podemos encontrar un común denominador entre los resultados teóricos probados del modelo Ising y su liga con el modelo de percolación, con el modelo V-S modificado, y, por lo tanto, con morfología de ciudades002E

Parte de esta investigación, nos llevará a establecer una ley de potencia que relacione al umbral de crecimiento con la dimensión fractal obtenida del agregado. Lo que no remitiría inmediatamente a pensar en la independencia escalar de los fenómenos urbanos.

6.3 Modelo de morfología urbana integral: CDLA + V-S

La tercera línea de investigación que intentamos realizar a mediano plazo es construir un modelo integral de morfología urbana, así como lo muestra la Figura 3.1, en el cual se integren los modelos CDLA (migraciones o crecimiento de afuera hacia adentro de la ciudad) y Vicsek-Szalay (crecimiento de adentro hacia afuera de la ciudad). Para esto hay que crear una nueva pieza de software que combine las estructuras generadas en V-S con el proceso CDLA. El problema aquí es decidir que escala elegir. Tenemos miles de estructuras urbanas generadas con V-S, pero no todas serán adecuadas para este modelo conjunto, toda vez que algunas llenan ya el espacio completamente, lo cual impediría todo crecimiento; otras ocupan una fracción mínima del espacio, lo que haría que se obtuviera un CDLA mono-céntrico.

Una vez seleccionada la escala, el modelo resultante pensamos formará estructuras urbanas más cercanas a la realidad en cuanto a su proceso de formación, pues las ciudades en la realidad crecen tanto por migraciones externas como por expansión de las zonas consolidadas urbanas. Este nuevo modelo, en primera instancia, esperamos que no difiera mucho ni visual ni estadísticamente de V-S, pero dará mayor certidumbre hacia un posible cálculo sobre probabilidades espaciales de crecimiento de las ciudades.

Al igual que nuestros otros modelos expuestos en este trabajo, el modelo de agregación resultante no se encuentra reportado en la literatura por lo que se agregaría al estado del arte en cuanto a crecimiento por agregación se refiere.

Apéndice A Análisis de la complejidad en CA

En [106] Wolfram presenta evidencia de que todos los CA 1-dimensionales caen en cuatro distintas clases de universalidad. Tres clases presentan un comportamiento análogo a puntos límite, ciclos límite y atractores caóticos. Para la cuarta clase, el comportamiento al incrementar su tiempo de generación es impredecible.

Como mencionamos, esta herramienta ha resultado por demás útil para representar sistemas complejos, dado que un CA muy simple, puede dar lugar a estructuras complejas a través un conjunto de reglas espaciales sencillas que describen diferentes procesos dinámicos discretos del sistema. El número de reglas, dado como D^{D^k} , crece rápidamente al aumentar el número de estados D y vecindarios k .

Wolfram presenta uno de los análisis más completos con los que se cuenta en la actualidad sobre las posibles estructuras y comportamientos que pueden tener los CA de acuerdo a sus D y k iniciales. De su trabajo se desprende que los CA contienen todas las propiedades clásicas de comportamientos dinámicos asociados con las formulaciones matemáticas tradicionales para sistemas dinámicos. Los CA pueden clasificarse en cuatro grandes tipos:

- a) CA que convergen a configuraciones fijas, homogéneas que son inamovibles. Son equivalentes a puntos límites, y no revelan ningún orden. Decimos que estos autómatas están prácticamente “inhabilitados”.
- b) CA que convergen a estructuras periódicas, las cuales se repiten sobre ciclos límite fijos, equivalentes a atractores simples.
- c) CA que muestran patrones no periódicos que son evidencia de caos revelando convergencia a atractores extraños.
- d) CA que muestran patrones ordenados altamente localizables que tienen periodos transitorios bastante largos antes de que mueran o se ciclen. Estos patrones, que muestran una complejidad considerable, han llevado a la especulación de que estas estructuras representan a la realidad misma.

Una de las maneras más efectivas para medir la complejidad en términos de las configuraciones espaciales formadas por los CA, es la que usa la medición clásica para la entropía de Shanon (Shannon, Weaver 1949). Para cada uno de los D^k vecindarios distintos, en cada periodo de tiempo t , se cuenta el número de vecindarios $N_k(t)$ que están asociados con cada uno de tipos de vecindario y entonces se a cada uno se les construye su probabilidad como $p_k(t) = N_k(t)/N$. La entropía o medida del desorden en esta distribución está dada por:

$$H(t) = -\sum_k p_k(t) \log p_k(t)$$

En este caso, la medida varía con el tiempo, y en lo que estamos interesados es en las trayectorias de entropía, las cuales indican como el CA se dirige hacia cualquiera de los estados estables descritos en las clases de complejidad (a)-(b).

Apéndice B Códigos computacionales

B.1 Segmentos del código en lenguaje C para representar el algoritmo de un DLA “sin rejilla.”

Los puntos se representan como estructuras de datos que contienen las coordenadas x, y, el color de la partícula y la distancia al centro r. Adicionalmente contiene el orden num en que el punto fue agregado a la estructura.

```
struct punto {
    float x;
    float y;
    unsigned int color;
    double r;
    int num;
    char div;
    struct punto * izq;
    struct punto * der;
};
typedef struct punto PUNTO;
typedef struct punto * APPUNTO;
APPUNTO posact; // partícula en difusión

//creamos tres estructuras para cada una de las zonas metropolitanas
root1 = malloc(sizeof(PUNTO));
root2 = malloc(sizeof(PUNTO));
root3 = malloc(sizeof(PUNTO));

// Definimos un radio de nacimiento cercano al arrancar el algoritmo.
const double TOL=(double)0.00005; //Tolerancia de adhesión
radionac = 5*TOL;
```

Para generar una partícula aleatoria con un color 1, 2 o 3 sobre una circunferencia, se construyó el siguiente código

```
p = drand48(); // generamos un número aleatorio entre 0 y 1
if (p <= 0.33) // la particular tiene la misma probabilidad de ser o de color1, color2 o color3
    color=1;
else if (p > 0.33 && p <= 0.66)
    color=2;
else
    color=3;
//seleccionar un punto en el círculo de nacimiento
angmov = 2*PI*(double)rand()/(double)RAND_MAX;
/*a posact se le agrega la posición x y la posición y,. Las posiciones x,y se obtiene a partir de una simple regla trigonométrica*/
posact->x =(float)( radionac * cos(angmov));
posact->y =(float) (radionac * sin(angmov));
// a posact se le agrega la distancia de la partícula genera al centro establecido del DLA
posact->r =(double)(sqrt(posact->x*posact->x + posact->y*posact->y));
/*finalmente se pone el número de agregación que le corresponde y se le asigna el color calculado*/
posact->num = i;
posact->color = color;
```

```

// se obtiene la distancia de la partícula al agregado
if (posact->r > radionac+10*TOL)
    distpaso= posact->r-radionac+5*TOL;

// si la partícula está muy cerca de un agregado, que se pegue al a ese agregado.
if(distpaso <= TOL) {/*dependiendo de donde entro es el root que se pasa*/
    if(root==1)
        insertaPunto(&root1, posact->x,posact->y,posact->color);
    else if (root==2)
        insertaPunto(&root2, posact->x,posact->y,posact->color);
else
    insertaPunto(&root3, posact->x,posact->y,posact->color);

```

En cuanto a los radios de influencia, tan sólo se calcula, en cada movimiento, si la partícula cae dentro de algún radio establecido

```

if (dist =(double)(sqrt(((posact->x-root1->x)^2+( posact->y-root1->y)^2)) < nradio)

    posact->color = color1;

```

B.2 Segmentos del código en lenguaje C para calcular la posición de un punto dentro de un subconjunto espacial de una circunferencia

Para obtener a que sección pertenece un punto específico, pasamos este punto como parámetro a una función, junto con la distancia del punto al centro de la circunferencia y la coordenada x de este centro.

```

unsigned int getSection(float x,float y,double d,float cx){
    double r=0.0;
    x-=cx;
    if (x==0){
        if(y>=0)
            return 2;
        else
            return 5;
    }
    if (y==0){
        if(x>=0)
            return 1;
        else
            return 4;
    }
    if (d==0)
        d=1;

    tr = x/d;
    if (tr < 1.000000 && tr > -1.000000)
        r=fabs(acos(tr));
    else

```

```

r = 0.0;
r=(180.00*r)/M_PI;
if(x>0 && y>0){
    return compareA(r);
}
if(x>0 && y<0){
    if (r>60)
        return 6;
    else return 5;
}
if(x<0 && y>0){
    return compareA(r);
}
if(x<0 && y<0){
    if (r>120)
        return compareA(r+60);
    else
        return compareA(r+180);
}
//return 1;
}

```

```

unsigned int compareA(double r){
    if (r>=0 && r<60) return 1;
    if (r>=60 && r<120) return 2;
    if (r>=120 && r<180) return 3;
    if (r>=180 && r<240) return 4;
    if (r>=240 && r<300) return 5;
    if (r>=300 && r<360) return 6;
}

```

B.3 Código completo en NetLogo para generar las estructuras urbanas bajo el algoritmo de V-S

```

patches-own [potential new-potential seedp]
globals [cIndex fileName filePlots fileView]
to setup
    clear-all
    ask patches [ set potential one-of [1 -1] ]
    set cIndex 0
    update-plots
end

```

```

to go
    ask patches [ set new-potential (potential + sum [potential] of neighbors4) / 5 + one-of [1 -1] ]
    ask patches [ set potential new-potential
        ask patch 160 120 [set potential 20.0]
        ask patch 161 121 [set potential 20.0]
        ask patch 162 122 [set potential 20.0]
        ask patch 159 119 [set potential 20.0]

        ask patch 256 84 [set potential 10.0]
        ask patch 257 85 [set potential 10.0]
    ]
end

```

```

ask patch 258 86 [set potential 10.0]

    ask patch 112 104 [set potential 4.8]
    ask patch 113 105 [set potential 4.8]
    ask patch 114 106 [set potential 4.8]
    if potential > threshold [ set pcolor white ]
]
update-plots
tick

```

B.4 Sección de código en Visual Basic para obtener coordenadas x, y

```

Sub creaxy()
For j = 1 To 100
  c = Trim(Str(j))
  file = "MyWord" + c + ".csv"
  filec1 = "C:\docto\netlogolvicsek\p45\4_3\" + file
  'Workbooks.Open Filename:="C:\docto\netlogolvicsek\p45\MyWord1.csv"
  Workbooks.Open Filename:=filec1
  Workbooks.Add
  file1 = "Myxy" + c + ".xlsx"
  filec = "C:\docto\netlogolvicsek\p45\4_3\" + file1
  'ActiveWorkbook.SaveAs Filename:="C:\docto\netlogolvicsek\p45\milibro.xlsx", _
  ActiveWorkbook.SaveAs Filename:=filec, _
  Count = 0
  For i = 17 To 77377
    Windows(file).Activate
    ActiveWindow.WindowState = xlNormal
    li = Trim(Str(i))
    cadT = "C" + li
    Range(cadT).Select
    If ActiveCell.FormulaR1C1 <> 0 Then
      x = "A" + li
      y = "B" + li
      Range(x).Select
      vx = ActiveCell.FormulaR1C1
      Range(y).Select
      vy = ActiveCell.FormulaR1C1
      Windows(file1).Activate
      ActiveWindow.WindowState = xlNormal
      Count = Count + 1
      lc = Trim(Str(Count))
      cadT = "A" + lc
      Range(cadT).Select
      ActiveCell.FormulaR1C1 = vx
      cadT = "B" + lc
      Range(cadT).Select
      ActiveCell.FormulaR1C1 = vy
    End If
  Next i
  Windows(file1).Activate
  ActiveWorkbook.Save
  ActiveWorkbook.Close
  Windows(file).Activate
  ActiveWindow.WindowState = xlNormal
  ActiveWorkbook.Close
Next j
End Sub

```

Bibliografía

- [1] M.M. Novak, Editor, *Complexus Mundi. Emergent Patterns in Nature*. World Scientific Publishing Company, Singapur.2006.
- [2] S.Y. Auyang, *Foundations of complex-system theories in economics, evolutionary biology, and statistical physics*. Cambridge University Press, Nueva York. 1998.
- [3] S. Wolfram, *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Inc. Illinois. 2002.
- [4] R. Abler, J.S. Adams, P. Gould, *Spatial Organization. The Geographer's view of the world*. Prentice Hall, New Jersey. 1971.
- [5] G.D. Squires, *Urban Sprawl: Causes, Consequences, and Policy Responses*. Urban Institute Press, District of Columbia. 2002.
- [6] H. Frumkin, L. Frank, R.J. Jackson, *Urban: Sprawl and Public Health: Designing, Planning, and Building for Healthy Communities*. Island Press, Washington, DC. 2004.
- [7] J. Norman, H.L. MacLean, M. ASCE, C.A. Kennedy, *J. Urban Plng. and Devel.* 132, 1 (2006). 10.
- [8] C. Andersson, K. Lindgren, S. Rasmussen, R. White, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 026204.
- [9] W. Weaver, C. E. Shannon, *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, Illinois. 1998.
- [10] S.L. Holloway, S.P. Rice, G. Valentine, Editors, *Key concepts in geography*, Sage, Londres. 2003.
- [11] M. Batty , *Cities and Complexity: Understanding Cities with Cellular Automata, Agent-Based Models, and Fractals*, The MIT Press, Massachusetts. 2007.
- [12] M. Batty, P. Longley, *Fractal Cities*, Academic Press, CA. 1994
- [13] H.A. Makse, J.S. Andrade Jr., M. Batty, S. Havlin, H.E. Stanley, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 7054
- [14] P. Meakin, *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*, Cambridge University Press, NY. 1998
- [15] T.A. Witten, L.M. Sander, *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981) 1400.
- [16] T. Vicsek, A.S. Szalay, *Phys. Rev. Lett.* 58, (1987) 2818.
- [17] S. Bura, F. Guérin-Pace, H. Mathian, D. Pumain, L. Sanders, *Geogr Anal* 28-2 (1996) 161
- [18] H. Couclelis, *Environ Plann B* 17 (1985). 585.
- [19] M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego. 1993
- [20] H. E. Stanley, *Introduction to phase transitions and critical phenomena*, Oxford University Press, North Carolina.1987
- [21] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Perseus Publishing, Tennessee. 1992.
- [22] R. K. Pathria , *Statistical Mechanics*. Butterworth Heinemann, UK. 2001.
- [23] D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press North Carolina.1987
- [24] H. Hoyt, *The Structure and Growth of Residential Neighbourhoods in American Cities*, Federal Housing Administration, Washington DC. 1939.
- [25] E.Burton, *Urban Stud* 37:11 (2000) 1969.
- [26] H.A. Makse, J.S. Andrade Jr., M. Batty, S. Havlin, H.E. Stanley, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 7054
- [27] C. Andersson, K. Lindgren, S. Rasmussen, R. White, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 02620
- [28] P. Haggett, *American Behavioral Scientist* 22-1 (1978) 151
- [29] H. A. Makse, S. Havlin, M. Schwartz, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* 53, (1996) 5445
- [30] P.M. Allen, *Cities and Regions as self-organizing systems: Models of Complexity*, Gordon and Breach Science Publishers, New York. 1997.
- [31] Alexander,A. *Archit. Forum* 122-1 (Part I) (1965) 58 ,122-2 (Part II) (1965) 58.
- [32] M. Fragkias, K.C. Seto, *Plann B: Plann Design* 34 (2007) 858

- [33] B. Avraamovich, A. Avron, N. Dershowitz, A. Rabinovich, editors, Pillars of Computer Science, Springer, Alemania. 2008.
- [34] A.B. Tucker, Computer science handbook. CRC Press, Florida. 2004
- [35] S. Wolfram. Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 601
- [36] B Chopard, M Droz, Cellular automata modeling of physical systems. Cambridge University Press, NY. 1998
- [37] A. Deutsch, S. Dormann, Cellular automaton modeling of biological pattern formation: characterization, applications, and analysis. Birkhäuser, Alemania .2005.
- [38] Martin Gardner. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". Scientific American 223 (1970): 120-123.
- [29] SEDESOL-CONAPO-INEGI, Delimitación de las zonas metropolitanas de México 2005, Gobierno de México, México. 2007.
- [40] J. Jacobs. The death and life of Great American Cities, Random House, New York. 1961.
- [41] Enciclopedia Libre Universal en Español - Teoría de ubicación de Von Thünen, http://enciclopedia.us.es/index.php/Teoria_de_ubicacion_de_Von_Thunen
- [42] M. Fujita, P.R. Krugman, A.J. Venables, The Spatial Economy: Cities, regions and international trade, MIT press, Massachusetts. 1999.
- [43] P. E. Ceruzzi, A history of modern computing. MIT Press, Massachusetts. 2003.
- [44] J. W. Forrester. Urban Dynamics, MIT Press, Urban Dynamics. 1969.
- [45] A.G. Wilson, G. Leonardi, Urban Dynamics. Designing an integrated model, Routledge, Londres. 1981.
- [46] Nicholas G. I. Prigogine, Self Organization in Non-Equilibrium Systems. Wiley, New York, 1977.
- [47] Prigogine, I. et al. "The laws of nature and the evolution of complexity" Goals in a Global Community, Pergamon, New York. 1977.
- [48] M. Begon, C. Townsend, J. Harper, Ecology: Individuals, populations and communities. Blackwell Science, London. 1996.
- [49] D. S. Dendrinos, H. Mullally, Environ Plann A 15(4) (1983) 543.
- [50] J. El Ghordaf et al. Nonlinear Analysis: Real World Applications 10 (2009) 2945-2960
- [51] P.M. Allen, M. Sanglier, Geogr Anal 11 (1979) 256.
- [52] H. Couclelis, Environ Plann A, 17 (1985) 585.
- [53] D. J. Acheson, Elementary Fluid Dynamics. Clarendon Press, Gloucestershire, 1990
- [54] T. M. Lillesand, R. W. Kiefer, Remote Sensing and Image Interpretation, Wiley & Sons Inc., USA 1999
- [55] Clark Labs, Clark University, Idrisi Guide Volume 2. Classification of Remotely Sensed Imagery. Chapter 5, pages 57-78, Massachusetts, 2006.
- [56] N.P. Lagerlöf, From Malthus to Modern Growth: Can Epidemics Explain the Three Regimes? Presented at: Population Dynamics and the Macro Economy, Harvard Center for Population and Development Studies, Massachusetts, 2000
- [57] P.S. Nivola, Laws of the landscape: How Policies Shape Cities in Europe and America. Brookings Institution Press, Washington, D.C, 1999.
- [58] B. B. Mandelbrot Science 156 (1967) 636
- [59] F. Hausdorff, *Äußeres Maß der und de la dimensión*, Mathematische Annalen **79** (1-2) (1919) 157
- [60] Brown, R., Phil. Mag. 4 (1828) 161.
- [61] G.K. Zipf, Human Behavior and the Principle of Least Effort, Harvard University Press, MA, 1949
- [62] Y. Couder, F. Argoul, A. Arnéodo, J. Maurer, M. Rabaud. Phys. Rev. A 42, (1990) 3499–3503
- [63] D. Stauffer and A. Aharony, Introduction to Percolation Theory, 2nd edition, Taylor&Francis, London, 1994.
- [64] M. Sahimi, Applications of Percolation Theory, Taylor&Francis, London, 1994.
- [65] H.A. Makse, J.S. Andrade Jr., M. Batty, S. Havlin, H.E. Stanley, Phys. Rev. E 58 (1998) 7054-7062
- [66] F. Family and T. Vicsek, editors, Dynamics of fractal Surfaces, World scientific, Singapore, 1991.

- [67] H. A. Makse, S. Havlin, M. Schwartz, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* 53, 5445 (1996)
- [68] W.B. Arthur, *J. of Evol Econ.* 3, 1 (1993) 1-22
- [69] M. Fujita, J.F. Thisse, *Economics of Agglomeration. Cities, Industrial Location, and Regional Growth*, Cambridge University Press, Massachusetts, 2002.
- [70] A.Korotayev , D. Khaltourina, *Introduction to Social Macrodynamics: Secular Cycles and Millennial Trends*. URSS, Moscow, 2006.
- [71] A. Duncan, *Feed or Feedback: Agriculture, Population Dynamics and the State of the Planet*. Tuross Head, Australia, 2007.
- [72] R. Abler, J.S. Adams, P. Gould, *Spatial Organization. The Geographer's view of the world*, Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [73] T. Vicsek, A. Szalay.. *Phys. Rev. Lett.* 58, (1987) 2818.
- [74] E. W. Weisstein, "von Neumann Neighborhood." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/vonNeumannNeighborhood.html>.
- [75] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 381
- [76] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. *Phys. Rev. A* 38 (1988) 364
- [77] M. Courbage *J. Phys Conf. Ser.* 7 (2005) 86
- [78] C. Clark, *J. R. Stat. Soc. Ser. A, Vol. 114* (1951) 490
- [79] R. Murcio, S. Rodriguez-Romo, *Phys A* 388 (2009) 2689-2698
- [80] V. Tchijov, J. Keller, S. Rodríguez-Romo, *Rev. Mexicana Fis.* 3 (1997) 348.
- [81] A.A. Moreira, D.R. Paula, R.N. Costa Filho, J.S. Andrade Jr., *Phys. Rev. E* 73 (2006) 065101.
- [82] H. Kaufman, A. Vespignani, B.B. Mandelbrot, L. Woog, *Phys. Rev. E* 52 (1995) 5602.
- [83] R.E. Whitmore, *Graphical and mathematical investigation of the differences in travel time factors for the gravity model, Trip Distribution Formula in Several Specific Urban Areas*, Civil Engineering Department, University of Tennessee, TN, 1965.
- [84] S. Schwarzer, S. Havlin, H.E Stanley, *Phys. Rev. E* 49 (1994) 1182.
- [85] M. Spivak, *Calculus*, 3rd ed., Publish or Perish Press, CA, 1994.
- [86] M. F. Goodchild, J. Proctor, *Geogr Env Model* 1 (1997) 5
- [87] A. Anas, R. Arnott, K. A., *JEL* 36 (1998) 1426.
- [88] Workshop for estimating and interpreting probability density functions, Bank for international settlements, Monetary and Economic Department, Basel, Switzerland, 1999
- [89] S.S. Shapiro, M.B. Wilk, *Biometrika* 52 (1965) 591.
- [90] J. P. Royston, *App. Stat.* 44 (1995) 547.
- [91] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, 2da ed., Wiley & Sons, USA 1999.
- [92] L.S. Liebovitch, T. Toth *Phys Lett A* 141 8-9 (1989) 386.
- [93] W. von Bloh, H. J. Schellnhuber *Phys. Rev. A* 42 (1990) 1874.
- [94] J. Theiler, *J. Opt. Soc. Am. A* 7 (1990) 1055.
- [95] B.Mandelbrot,. *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman , San Francisco, 1983
- [96] J. Eaton, Z. Eckstein, *Reg. Sci. Urban Econ.* 27 (1997) 443.
- [97] K. T. Soo, *Reg. Sci. Urban Econ.* 35,3 (2005) 239.
- [98] W. Weisstein, "Pareto Distribution." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ParetoDistribution.html>
- [99] M. S. Aldenderfer, R.K. Blashfield, *Cluster analysis*. Sage Publications, Quantitative Applications in the Social Sciences Series No. 44, California, 1984.
- [100] L. Kaufman, P.J.Rousseeuw, *Finding groups in data: An introduction to cluster analysis*, Wiley-Interscience, 2005.
- [101] S.Chiu, *J Intell Fuzzy Syst* 2,3 (1994) 457
- [102] P. Krugman, *J Polit Econ* 99 (1991) 483
- [103] E. Ising, *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus*, *Z. Phys.* 31 (1925) 253

[104] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J.Fisher, M.E.J. Newman, The theory of Critical Phenomena. Oxford University Press, Massachusetts, 1992.

[105] R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press Inc., London, 1982.

[106] S. Wolfram, Physica D 10, 1-2 (1984) 1.

Glosario

E_g Etapa donde se encuentra crecimiento poblacional establecido en una zona E , posiblemente rodeado por otros asentamientos urbanos.

N_g Etapa en la que se da nuevo crecimiento poblacional en una zona E que recientemente acaba de establecerse en dicha zona.

A Etapa en la que se encuentra territorio disponible para crecimiento poblacional en una zona E .

ρ Probabilidad de difusión de una partícula en un punto $\bar{x} \in \mathcal{R}$

\mathcal{R} Conjunto de los números Reales.

u Densidad de la población en una zona E

P Es el potencial de crecimiento poblacional en el punto $\bar{x} \in \mathcal{R}$

CS Sección angular de un conjunto espacial circular

Z Conjunto de los números Enteros

Φ Umbral para el potencial de crecimiento urbano

CDB Central Business District

D_b Dimensión fractal box-counting

D_{mr} Dimensión masa-radio