UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES DEL CONJUNTO POTENCIA DE UN CONTINUO EN SÍ MISMO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

M. en C. LEOBARDO FERNÁNDEZ ROMÁN

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ

MÉXICO, D.F. **SEPTIEMBRE, 2010**

Funciones del conjunto potencia de un continuo en sí mismo.

M. en C. Leobardo Fernández Román.

Índice general

Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados de funciones definidas en el conjunto potencia de un continuo. Presentamos dos funciones que definió Jones en [22], la función $\mathcal{T}$ y la función $\mathcal{K}$; la función $\mathcal{R}$ definida por David Bellamy y Lewis Lum en [5], y $\mathcal{H}$ y $\mathcal{J}$ definidas por Sandra Gorka en [18]. También presentamos dos nuevas funciones, $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{K}_a$, que se definen de forma similar a las que definió Jones, la principal diferencia es que éstas se definen en continuos arcoconexos. Presentamos propiedades de todas ellas y algunas relaciones.

En el capítulo 1 presentamos resultados ya conocidos de continuos, introducimos los conceptos de continuo aposindético, continuo conexo en pequeño y continuo semilocalmente conexo; así como los conceptos de continuos descomponibles e indescomponibles. Se presentan relaciones entre ellos y algunas propiedades. Además, presentamos el hiperespacio 2^X de subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo X y el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ de los subcontinuos de un continuo X, junto con la topología de la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris. En este capítulo también introducimos los conceptos de continuo arcoconexo y continuo suave por arcos y algunas propiedades de ellos, así como también los conceptos de continuos únicamente arcoconexos, dendroides, abanicos y finalmente los continuos irreducibles en los cuales estudiaremos algunas propiedades de las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ en el capítulo 2.

En el capítulo 2 defnimos las funciones en el conjunto potencia de un continuo X. Si $\Theta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es una de estas funciones, definimos los conceptos de continuo Θ-aditivo, continuo Θ-simétrico y continuo puntualmente Θ-simétrico. Presentamos las funciones $\mathcal{J}$ y $\mathcal{H}$ definidas en [18] y algunos ejemplos y propiedades de estas funciones e introducimos el concepto de continuo casi conexo en pequeño . Además, definimos la función $\mathcal{T}$, presentamos algunas propiedades y ejemplos de esta función, introducimos el concepto de continuos estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétricos, presentamos ejemplos y damos una caracterización de los abanicos suaves como aquéllos que son estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétricos (Teorema 2.3.6). También definimos la función $\mathcal{K}$, presentamos algunos ejemplos y propiedades, en particular, mostramos que la imagen de cualquier subconjunto cerrado de un continuo irreducible es conexa (Teorema 2.5.10) y estudiamos algunas relaciones entre las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ en continuos irreducibles, en particular mostramos que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ conmutan en continuos irreducibles (Teorema 2.5.15). Hacemos un estudio de los continuos irreducibles y $\mathcal{K}$-simétricos y damos una caracterización de los continuos irreducibles $\mathcal{K}$-simétricos como aquéllos que son indescomponibles o 2-indescompoibles (Teorema 2.6.8). También damos una caracterización de los continuos irreducibles para los cuales la función $\mathcal{T}$ es continua y son aquellos continuos que son continuamente irreducibles (Teorema 2.8.7).

En el capítulo 3 estudiamos la función $\mathcal{T}_a$, la cual se define de forma similar a la función $\mathcal{T}$ pero en continuos arcoconexos. Presentamos algunos ejemplos y propiedades que, en particular, muestran que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$ son diferentes y presentamos una caracterización de los continuos arcoconexos y localmente conexos como los continuos arcoconexos para los cuales la función $\mathcal{T}_a$ es la función identidad en 2^X (Corolario 3.1.7). Introducimos los conceptos de continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo, continuo colocalmente arcoconexo, continuo $\mathcal{T}_a$-aditivo y continuo $\mathcal{T}_a$-simétrico y estudiamos algunas propiedades de estos continuos. Estudiamos el comportamiento de la función $\mathcal{T}_a$ en continuos únicamente arcoconexos, en particular, en dendroides y también en continuos cíclicamente arcoconexos. Por último, estudiamos la continuidad de la función $\mathcal{T}_a$ y comportamiento de esta función en continuos homogéneos.

En el capítulo 4 definimos las funciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}_a$, presentamos algunos ejemplos y propiedades que muestran que las funciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}_a$ son diferentes. Damos condiciones bajo las cuales estas dos funciones coinciden y estudiamos relaciones que se tienen entre las funciones $\mathcal{R}$, $\mathcal{K}_a$ y $\mathcal{T}_a$. Presentamos un ejemplo donde la función $\mathcal{R}$ es continua.

Capítulo 1

Preliminares

Es este capítulo veremos las definiciones básicas, notación y algunos de los teoremas que nos servirán a lo largo de este trabajo.

1.1. Notación

En esta sección presentamos la notación básica que utilizaremos. Dados un espacio X y A y B subconjuntos de X:

- $Int_X(A)$ denota el interior de A con respecto al espacio X.
- $Cl_X(A)$ denota la cerradura de A con respecto al espacio X.
- $Fr_X(A)$ denota la frontera de A con respecto al espacio X.
- $A \subseteq B$ denota a la expresión A es subconjunto de B (puede ser que $A = B$).
- subconjunto propio quiere decir que no puede pasar que $A = B$.
- $A \setminus B$ denota a la diferencia A menos B como conjuntos.

- $\mathcal{V}_\varepsilon^d(A)$ denota a la bola abierta de radio ε alrededor de A con la métrica d.
- un arco es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$.
- S^1 denota la circunferencia unitaria, una curva cerrada simple es un espacio homeomorfo a S^1.
- $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los enteros positivos.
- $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales.

Observación 1.1.1. *Si en la notación anterior no hay ambigüedad con respecto al espacio en el que estamos trabajando o la métrica que se está utilizando, le quitamos los subíndices o superíndices que lo indican.*

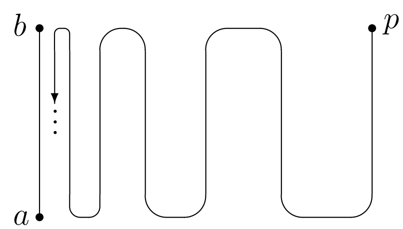
1.2. Continuos

Comenzamos con las siguientes definiciones.

Definición 1.2.1. *Un* continuo *es un espacio métrico compacto conexo y no vacío.*

Un ejemplo de un continuo es la cerradura de la gráfica de la curva $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$. Este ejemplo lo mencionaremos a lo largo de este trabajo por lo que ponemos aquí su definición.

Definición 1.2.2. *Sea X la cerradura de la gráfica de la curva $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, donde $x \in (0, \frac{2}{\pi}]$. Nos referiremos a este continuo X como la* curva $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$. *En la siguiente figura, X es la curva $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$. Al segmento ab le decimos* barra límite *de X y al punto p le decimos* punto extremo *de X.*



Definición 1.2.3. *Sea X un espacio métrico. Un* subcontinuo *de X es un subconjunto compacto y conexo de X.*

Definición 1.2.4. *Sean X un continuo y $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Una* componente *de A es un subconjunto conexo maximal de A.*

Notamos que las componentes de un subconjunto A siempre son cerradas en A ya que la cerradura de un conjunto conexo es conexa.

Definición 1.2.5. *Un continuo X es* descomponible *si X se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios de X.*

Definición 1.2.6. *Un continuo X es* indescomponible *si cada vez que X se escriba como la unión de dos subcontinuos A y B de X, $X = A \cup B$, entonces $A = X$ o $B = X$. Se dice que X es* hereditariamente indescomponible *si cada subcontinuo de X es indescomponible.*

Un ejemplo de un continuo hereditariamente indescomponible es el pseudoarco, el cual definimos a continuación.

Definición 1.2.7. *Un* pseudoarco *es un continuo no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible.*

Para un estudio más detallado del pseudoarco ver [7], [26], [38] y [12].

Para probar el Teorema 1.2.9, necesitamos probar primero el siguiente lema.

Lema 1.2.8. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X tal que $X \setminus A$ no es conexo. Si U y V son subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos de X tales que $X \setminus A = U \cup V$, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X.*

Demostración. Como $X \setminus (A \cup U) = V$, entonces $A \cup U$ es cerrado y, por tanto, compacto. Análogamente, $A \cup V$ es compacto.

Ahora, para ver que $A \cup U$ es conexo, supongamos que no lo es. Entonces existen dos subconjuntos ajenos cerrados no vacíos K y L de X tales que $A \cup U = K \cup L$. Como A es conexo podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A \subseteq K$. Notemos que, en este caso, $L \subseteq U$. Entonces, $L \cap Cl(V) = \emptyset$. Así, $X = L \cup (K \cup Cl(V))$, lo cual es una contradicción, ya que L y $K \cup Cl(V)$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Por lo tanto, $A \cup U$ es conexo. Análogamente, $A \cup V$ es conexo. □

Teorema 1.2.9. *Un continuo X es descomponible si y sólo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Supongamos primero que X es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Notemos que $X \setminus B$ es un subconjunto abierto contenido en A. Por lo tanto, $Int(A) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que A es un subcontinuo propio de X con interior no vacío. Si $X \setminus A$ es conexo, entonces $Cl(X \setminus A)$ es un subcontinuo propio de X y $X = A \cup Cl(X \setminus A)$. Así, X es descomponible.

Supongamos que $X \setminus A$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos abiertos ajenos no vacíos U y V de X tales que $X \setminus A = U \cup V$. Por el Lema 1.2.8, $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X y $X = (A \cup U) \cup (A \cup V)$. Por lo tanto, X es descomponible. □

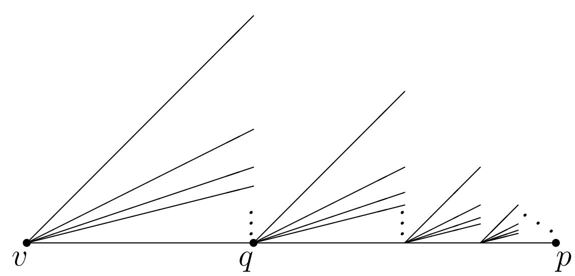
Corolario 1.2.10. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todos los subcontinuos propios de X tienen interior vacío.*

Definición 1.2.11. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es conexo en pequeño en p si para cada vecindad U de p, existe una vecindad conexa V de p tal que $p \in V \subseteq U$.*

Definición 1.2.12. *Sean X un continuo X y $p \in X$. Decimos que X es localmente conexo en p si para cualquier vecindad U que contiene a p, existe un abierto conexo V de X tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que X es localmente conexo si lo es en todos sus puntos.*

Un ejemplo de un continuo que es conexo en pequeño en un punto p pero que no es localmente conexo en ese punto es el siguiente.

Ejemplo 1.2.13. *Sea X el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$:*



Este continuo es conexo en pequeño en p y no es localmente conexo en p.

En el Teorema 1.2.15 probaremos que globalmente las nociones de conexidad en pequeño y de conexidad local coinciden. Para esto necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.14. *Un continuo es localmente conexo si y sólo si las componentes de conjuntos abiertos son abiertas.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un abierto de X y C una componente de U. Para cada $x \in C$, existe un conjunto abierto y conexo V_x tal que $x \in V_x \subseteq U$. Entonces $C \cup V_x$ es un subconjunto conexo de U. Como C es una componente, entonces $V_x \subseteq C$. Por lo tanto, cada punto de C es un punto interior de C. Así, C es abierta.

Ahora, supongamos que las comoponentes de conjuntos abiertos son abiertas. Sean $x \in X$ y U un abierto de X que contiene a x. Sea C la componente de U que contiene a x. Por hipótesis, C es abierta. Entonces C es un conjunto abierto y conexo tal que $x \in C \subseteq U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. $\square$

Teorema 1.2.15. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en todos sus puntos.*

Demostración. Claramente, si X es localmente conexo, entonces X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Supongamos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Sean U un subconjunto abierto de X y C una componente de U. Si $x \in C$, entonces existe una vecindad conexa W de x contenida en U, esto es, $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Como W es un subconjunto conexo de U y $W \cap C \neq \emptyset$, entonces $W \subseteq C$. Así, x es un punto interior de C y, por lo tanto, C es abierta. Por el Teorema 1.2.14, X es localmente conexo. $\square$

Una noción importante para nuestro trabajo es la de aposindesis la cual definimos a continuación.

Definición 1.2.16. *Sean X un continuo y p y $q \in X$. Decimos que X es aposindético en p con respecto a q si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{q\}$. Decimos que X es aposindético en p si X es aposindético en p con respecto a cualquier punto de $X \setminus \{p\}$. Por último, decimos que X es aposindético si X es aposindético en todos sus puntos.*

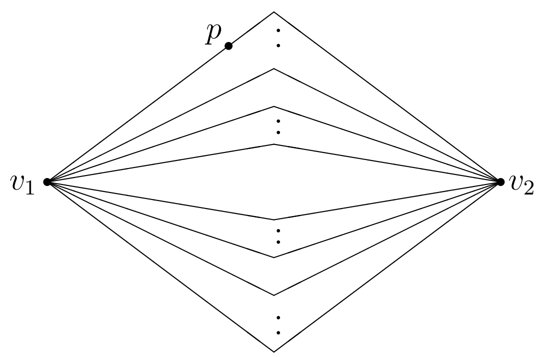
El concepto de aposindesis es más general que el de conexidad en pequeño.

Teorema 1.2.17. *Si X es un continuo que es conexo en pequeño en el punto p, entonces X es aposindético en dicho punto.*

Demostración. Sean X un continuo, $p \in X$ un punto para el cual X es conexo en pequeño en p y $q \in X \setminus \{p\}$. Sea U un abierto de X tal que $p \in U$ y $q \notin U$. Como X es regular existe un abierto V de X tal que $p \in V \subseteq Cl(V) \subseteq U$. Como X es conexo en pequeño en p, existe una vecindad conexa A de p tal que $p \in A \in Cl(A) \subseteq V$. Como $V \subseteq X \setminus \{q\}$, entonces X es aposindético en p con respecto a q. Como q fue arbitrario, entonces X es aposindético en p. □

La suspensión sobre el conjunto de Cantor es un ejemplo de un continuo aposindético que sólo es conexo en pequeño en los vértices.

Ejemplo 1.2.18. *Sea X la suspensión sobre el conjunto de Cantor con vértices v_1 y v_2. Sea p un punto de $X \setminus \{v_1, v_2\}$. Entonces, X es aposindético en p pero no es conexo en pequeño en p.*



Definición 1.2.19. *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es semilocalmente conexo en x si para cada conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ tiene una cantidad finita de componentes. Decimos que X es semilocalmente conexo si lo es en todos sus puntos.*

El siguiente resultado relaciona las Definiciones 1.2.16 y 1.2.19. Una demostración de este resultado se puede encontrar en [29, Teorema 1.7.17].

Teorema 1.2.20. *Un continuo X es aposindético si y sólo si X es semilocalmente conexo.*

1.3. Hiperespacios

En esta sección definimos a los hiperespacios de continuos que es donde vamos a definir las funciones $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{K}_a$. Enunciaremos teoremas que nos serán de gran utilidad, aunque en este trabajo no estudiaremos hiperespacios. Por lo que solamente pondremos la referencia adecuada para ver sus demostraciones.

Definición 1.3.1. *Dado un espacio métrico y compacto X, definimos el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos* como el conjunto:

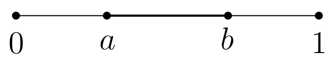
$$2^X = \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

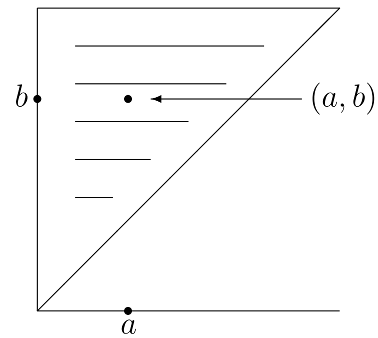
Definición 1.3.2. *Dado un espacio métrico y compacto X, definimos el hiperespacio de subcontinuos de X como el conjunto:*

$$\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}.$$

Mostramos aquí un ejemplo del hiperespacio de subcontinuos de un continuo.

Ejemplo 1.3.3. *Dado el continuo $X = [0,1]$, se puede construir un modelo para el hiperespacio de subcontinuos de X de la siguiente forma: a cada subcontinuo $[a,b]$ de $[0,1]$ le asociamos la pareja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*





Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [29, Teorema 1.8.3].

Teorema 1.3.4. *Sea X un continuo. La función $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ dada por:*

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq \mathcal{V}^d_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq \mathcal{V}^d_\varepsilon(A)\}$$

es una métrica para 2^X, donde d es la métrica en X.

Definición 1.3.5. *La métrica para 2^X del Teorema 1.3.4 se conoce como la métrica de Hausdorff para 2^X.*

Notación 1.3.6. *Sea X un espacio métrico y compacto. Dada una colección finita de conjuntos abiertos de X, $U_1, U_2, ..., U_n$, definimos:*

$$\Big\langle U_1, U_2, ..., U_n \Big\rangle = \Big\{ A \in 2^X \;\Big|\; A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para } 1 \leq k \leq n \Big\}.$$

Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [42, Teorema 0.11]

Teorema 1.3.7. *Sea X un espacio métrico y compacto. Si*

$$\mathcal{B} = \Big\{ \Big\langle U_1, U_2, ..., U_n \Big\rangle \;\Big|\; U_1, U_2, ..., U_n \text{ son abiertos de } X \text{ y } n \in \mathbb{N} \Big\},$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología en 2^X.

Definición 1.3.8. *La topología para 2^X del Teorema 1.3.7 se conoce como la topología de Vietoris para 2^X.*

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [42, Teorema 0.13]

Teorema 1.3.9. *Sea X un espacio métrico y compacto. La topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris para 2^X coinciden.*

A continuación definimos los conceptos de límite inferior y límite superior.

Definición 1.3.10. *Sean X un espacio métrico y compacto y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos de X. Definimos el límite inferior y el límite superior como sigue:*

$$\begin{gathered}\text{lím inf} A_i = \{x \in X \mid \textit{para cada abierto } U \textit{ de } X \textit{ tal que } x \in U,\, U \cap A_i \neq \emptyset \\ \textit{para toda } i \textit{ salvo un número finito}\};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{lím sup} A_i = \{x \in X \mid \textit{para cada abierto } U \textit{ de } X \textit{ tal que } x \in U,\, U \cap A_i \neq \emptyset \\ \textit{para una infinidad de índices } i\}.\end{gathered}$$

Se sigue de la definicion 1.3.10 que $\text{lím inf} A_i \subseteq \text{lím sup} A_i$. Si $\text{lím inf} A_i = \text{lím sup} A_i$ podemos definir el concepto de límite.

Definición 1.3.11. *Sean X un espacio métrico y compacto, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos de X y $A \subseteq X$. Decimos que A es el límite de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ si:*

$$\text{lím inf} A_i = A = \text{lím sup} A_i$$

En este caso se denota como $\text{lím}\, A_i = A$.

1.4. Continuos arcoconexos y suaves por arcos

En esta sección daremos las definiciones de continuos arcoconexos y de continuos suaves por arcos así como algunas propiedades de estos continuos.

Definición 1.4.1. *Un continuo X es arcoconexo si para cualesquiera dos de sus puntos, existe un arco en X que los une.*

Una prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [43, Teorema 8.23].

Teorema 1.4.2. *Cualquier continuo localmente conexo es arcoconexo.*

Definición 1.4.3. *Una métrica convexa en un espacio X es una métrica, d, para X que induce la topología en X y para la cual los puntos medios siempre existen, esto es: para cualesquiera x y $y \in X$, existe $z \in X$ tal que*

$$d(x, z) = \frac{1}{2} d(x, y) = d(z, y)$$

Demostraciones del siguiente teorema se encuentran en [6] y [39].

Teorema 1.4.4. *Cualquier continuo localmente conexo admite una métrica convexa.*

Demostraciones de la siguiente proposición se encuentran en [42, (0.65.3)(a)] o en [41, 2.7].

Proposición 1.4.5. *Sea X un continuo con métrica convexa d. Entonces para cualesquiera dos puntos x y y de X, existe un subconjunto γ de X tal que $x, y \in \gamma$ y γ es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(x, y)]$.*

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.4.5 y la utilizaremos más adelante.

Proposición 1.4.6. *Sea X un continuo con una métrica convexa d. Entonces para cualquier subcontinuo A de X y cualquier $r > 0$,*

$$C_d(r, A) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq r\}$$

es un subcontinuo arcoconexo de X.

Definición 1.4.7. *Sean X un continuo arcoconexo y $v \in X$. Decimos que X es suave por arcos en v si hay una función continua $A_v : X \to \mathcal{C}(X)$ tal que:*

(i) $A_v(v) = \{v\}$.

(ii) *Para cada $x \in X \setminus \{v\}$, $A_v(x)$ es un arco de v a x en X.*

(iii) *si $y \in A_v(x)$, entonces $A_v(y) \subseteq A_v(x)$.*

Decimos que X es suave por arcos si existe un punto $v \in X$ tal que X es suave por arcos en v. En este caso denotamos a los arcos $A_v(x)$ por vx. Decimos que X es débilmente suave por arcos si existe un punto $v \in X$ tal que para cualquier sucesión convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, $\liminf A_v(x_n) = A_v(x)$ para algún $x \in X$.

Como ejemplos de continuos suaves por arcos tenemos a los dendroides suaves (Definición 1.5.7), conos sobre espacios métricos compactos, continuos métricos fuertemente convexos. Ver [16].

Como una consecuencia del Teorema I-1-A [16] obtenemos el siguiente lema que nos será de utilidad más adelante.

Lema 1.4.8. *Sea X un continuo suave por arcos en un punto v. Entonces para cada subconjunto cerrado H de X, el conjunto $W = \bigcup_{x \in H} vx$ es un subcontinuo arcoconexo de X.*

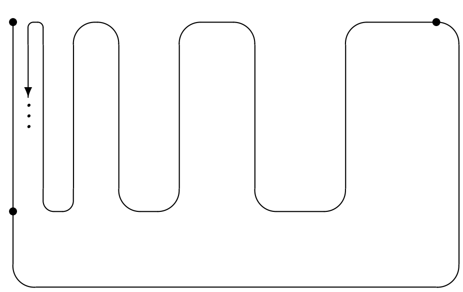
Demostración. Por definición, el conjunto W es arcoconexo. Falta ver que W es cerrado. Para esto, sea $z \in Cl(W)$. Como $z \in Cl(W)$, existe una sucesión $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq W$ tal que $\lim_{i\to\infty} z_i = z$. Para cada $z_i \in W$, existe $x_i \in H$ tal que $z_i \in vx_i$. Como H es cerrado, existe una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a un punto x de H. Como X es suave por arcos, la sucesión de arcos $\{vx_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge al arco vx. Ahora, como para cada $i \in \mathbb{N}$, $vz_i \subseteq vx_i$ y, como X es suave por arcos, entonces $vz \subseteq vx$. Así, $z \in vx$. Esto es, $z \in W$ y, por lo tanto, W es cerrado. □

1.5. Continuos únicamente arcoconexos

Definición 1.5.1. *Sea X un continuo arcoconexo. Decimos que X es únicamente arcoconexo si no contiene curvas cerradas simples.*

Como ejemplos de continuos únicamente arcoconexos tenemos al arco o al círculo de Varsovia el cual definimos a continuación.

Definición 1.5.2. *Sea Y la curva sen$(\frac{1}{x})$ en $\mathbb{R}^2$. El círculo de Varsovia es el continuo que se obtiene al pegar el continuo Y con un arco α de forma tal que, un punto extremo del arco α se identifica con un punto extremo de la barra límite de Y y el otro punto extremo del arco α con el punto extremo de Y.*



Teorema 1.5.3. *Sean X un continuo únicamente arcoconexo y $x \in X$. Si M y N son subcontinuos arcoconexos de X tales que $x \in Int(M) \cap Int(N)$, entonces $M \cap N$ es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $x \in Int(M \cap N)$.*

Demostración. Sean X un continuo arcoconexo y $x \in X$. Sean M y N dos subcontinuos arcoconexos de X tales que $x \in Int(M) \cap Int(N)$. Claramente $x \in Int(M \cap N)$. Para ver que $M \cap N$ es arcoconexo, sean $x, y \in (M \cap N)$. Como M es arcoconexo existe un arco α de x a y en M. Como N es arcoconexo existe un arco β de x a y en N. Por hipótesis X es únicamente arcoconexo, lo que implica que $\alpha = \beta$. Así, $M \cap N$ es arcoconexo. $\square$

Definición 1.5.4. *Un continuo X es unicoherente si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexa. Un continuo X es hereditariamente unicoherente si cada subcontinuo de X es unicoherente.*

Como ejemplos de continuos unicoherentes tenemos el arco y la curva $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

Definición 1.5.5. *Un dendroide es un continuo arcoconexo hereditariamente unicoherente.*

Ejemplos de dendroides son el arco y el continuo del Ejemplo 1.2.13.

El siguiente teorema es un resultado ya conocido pero incluimos la demostración por conveniencia para el lector.

La siguiente caracterización de los dendroides que presentamos la necesitaremos más adelante.

Teorema 1.5.6. *Un continuo X es un dendroide si y sólo si X es únicamente arcoconexo y hereditariamente arcoconexo.*

Demostración. Sea X un dendroide. Por [43, Ejercicio 10.58], tenemos que cada subcontinuo de X es nuevamente un dendroide, lo que implica que X es hereditariamente arcoconexo. Si X contiene un curva cerrada simple, entonces X no es hereditariamente unicoherente. Por lo tanto, X es únicamente arcoconexo y hereditariamente arcoconexo.

Ahora, supongamos que X es un continuo únicamente arcoconexo y hereditariamente arcoconexo y sea W un subcontinuo de X. Sean A y B subcontinuos de X tales que $W = A \cup B$. Por el Teorema 1.5.3, $A \cap B$ es conexo. Por lo tanto, X es hereditariamente unicoherente. □

Definición 1.5.7. *Un dendroide D es suave en un punto $p \in D$ si para cada sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a un punto x en D, se tiene que $\lim px_i = px$. Se dice que un dendroide D es suave si existe un punto $p \in D$ para el cual D es suave en p.*

Definición 1.5.8. *Un punto de ramificación de un dendroide es un punto común a por lo menos tres arcos que no se intersectan en ningún otro punto.*

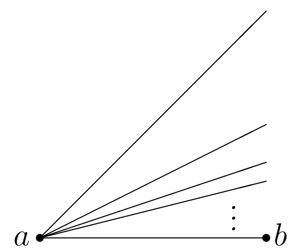
Notemos que el continuo X del Ejemplo 1.2.13 es un dendroide suave en el punto v y que los puntos v y q (además de muchos otros) son puntos de ramificación de X.

Definición 1.5.9. *Un abanico es un dendroide con exactamente un punto de ramificación. El punto de ramificación de un abanico se llama el vértice.*

Observación 1.5.10. *Un abanico es suave si lo es en su vértice.*

Un ejemplo de un abanico suave es el abanico armónico, el cual definimos a continuación.

Definición 1.5.11. *El abanico armónico es el continuo, en $\mathbb{R}^2$, que se obtiene de unir con segmentos de recta el punto $(0,0)$ con cada elemento de la cerradura del conjunto $E = \{(1, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*



Las siguientes definiciones las utilizaremos más adelante.

Definición 1.5.12. *Se dice que un punto de un continuo es un punto extremo si es un punto extremo de cualquier arco que lo contenga.*

Definición 1.5.13. *Una pata de un abanico es el único arco que une el vértice con un punto extremo.*

Las siguiente definición la tomamos de [27].

Definición 1.5.14. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $p \in X$. Definimos el orden del punto de corte débil con respecto a p de la siguiente manera; para $x, y \in X$, $x \leq_p y$ si y sólo si $x \in [p, y]$, donde $[p, y]$ denota la intersección de todos los subcontinuos de X que contienen a p y a y.*

Observación 1.5.15. *Si X es un dendroide, entonces $\leq_p$ es un orden parcial y $[p, x]$ es un arco para cada $x \in X$.*

1.6. Continuos irreducibles

En el capítulo 2 estudiaremos algunas propiedades de las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ en continuos irreducibles. Aquí damos las definiciones de continuo irreducible y débilmente irreducible y algunas propiedades de estos continuos. Para un estudio más amplio de continuos irreducibles ver [25] y [45].

Definición 1.6.1. *Un continuo X es irreducible si existen dos puntos de X tales que ningún subcontinuo propio de X los contiene.*

Como ejemplos de continuos irreducibles tenemos al arco, que es irreducible entre sus puntos extremos, o a la curva $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, que es irreducible entre cualquier punto de la barra límite y el punto extremo.

Lema 1.6.2. *Sea X un continuo descomponible. Supongamos que X es irreducible entre p y q. Sean $P^* = \{x \in X \mid X$ es irreducible entre x y $q\}$ y $Q^* = \{x \in X \mid X$ es irreducible entre p y $x\}$. Entonces para cada $p' \in P^*$ y cada $q' \in Q^*$, X es irreducible entre p' y q'.*

Demostración. Sea X un continuo descomponible e irreducible entre p y q. Sean $p' \in P^*$ y $q' \in Q^*$. Entonces X es irreducible entre p' y q y también X es irreducible entre p y q'. Por [25, Lema, pág.196], X es irreducible entre p' y q' o X es irreducible entre p' y p. Como X es decomponible, entonces $P^* \cap Q^* = \emptyset$, ya que si $z \in P^* \cap Q^*$, entonces hay tres puntos de X, p, q y z tales que X es irreducible entre cada dos de estos tres puntos y, por [43, Corolario 11.20], X es indescomponible lo cual es una contradicción. Entonces $P^* \subseteq X \setminus Q^*$. Como $X \setminus Q^*$ es la composante de p [43, Teorema 11.4], entonces X no es irreducible entre p y p'. Por lo tanto, X es irreducible entre p' y q'. □

Teorema 1.6.3. *Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si C es un subcontinuo de X tal que $X \setminus C$ no es conexo, entonces $X \setminus C$ es la unión de dos subconjuntos abiertos conexos, uno contiene a a y el otro contiene a b. Más aún, si $a \in C$, entonces $X \setminus C$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \setminus C$ no es conexo. Entonces existen dos subconjutos abiertos ajenos no vacíos U y V de X tales que $X \setminus C = U \cup V$. Por el Lema 1.2.8, $A = C \cup U$ y $B = C \cup V$ son subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, $A \cap B = C$, $A \neq X$ y $B \neq X$.

Como X es irreducible entre a y b, $\{a,b\} \cap C = \emptyset$. Si $\{a,b\} \cap C \neq \emptyset$, entonces alguno, A o B, es un subcontinuo propio de X que contiene a a y a b, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{a,b\} \cap C = \emptyset$. Supongamos que $a \in U$ y $b \in V$.

Notamos que como A y B son subcontinuos propios de X, ni A ni B pueden contener a $\{a,b\}$.

Como A es un subcontinuo propio de X y $a \in A$, afirmamos que $V = X \setminus A$ es conexo. Para ver esto, supongamos que $X \setminus A$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos K y L de X tales que $X \setminus A = K \cup L$. Como $b \in X \setminus A$, podemos suponer que $b \in K$. Entonces, por el Lema 1.2.8, $A \cup K$ es un subcontinuo propio de X tal que $\{a,b\} \subseteq A \cup K$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V = X \setminus A$ es conexo. Análogamente, $U = X \setminus B$ es conexo.

Un argumento similar muestra que si $a \in C$, entonces $X \setminus C$ es conexo. $\square$

Definición 1.6.4. *Un continuo X es débilmente irreducible si el complemento de cualquier unión finita de subcontinuos de X tiene un número finito de componentes.*

Como ejemplo de un continuo débilmente irreducible tenemos la curva cerrada simple.

El Teorema 1.6.5 muestra que cualquier continuo irreducible es débilmente irreducible. Una demostración de este teorema se encuentra en [29, Teorema 1.7.29].

Teorema 1.6.5. *Si X es un continuo irreducible, entonces X es débilmente irreducible.*

Capítulo 2

Funciones del conjunto potencia

Las funciones que principalmente estudiaremos a lo largo de este trabajo son funciones definidas en el conjunto potencia de un continuo. Aquí damos la definición de una función cuyo dominio y contradominio es el conjunto potencia de un espacio métrico compacto. Cuando hablamos de continuidad de las funciones restringiremos el dominio de estas a 2^X y se trabajará con la topología que induce la métrica de Hausdorff 2^X.

2.1. Conjunto potencia

Definiremos funciones en el conjunto potencia de un continuo.

Notación 2.1.1. *Dado un espacio métrico y compacto X, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X, esto es:*

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Definición 2.1.2. *Dado un espacio métrico y compacto X. Una función del conjunto potencia de X en sí mismo es una función*

$$\Theta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X).$$

Definición 2.1.3. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y $B \in 2^X$. Decimos que X es Θ-aditivo si*

$$\Theta(A \cup B) = \Theta(A) \cup \Theta(B).$$

Definición 2.1.4. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y $B \in 2^X$. Decimos que X es Θ-simétrico si se cumple que:*

$$\Theta(A) \cap B \neq \emptyset \text{ si y sólo si } A \cap \Theta(B) \neq \emptyset.$$

Definición 2.1.5. *Sean X un espacio métrico y compacto y p y $q \in X$. Decimos que X es puntualmente Θ-simétrico si se cumple que:*

$$p \in \Theta(\{q\}) \text{ si y sólo si } q \in \Theta(\{p\})$$

Definición 2.1.6. *Sea X un espacio métrico y compacto. Se dice que Θ se estaciona si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\Theta^{n+1}(A) = \Theta^n(A)$$

para cada $n \geq N$ y para cada $A \in \mathcal{P}(X)$, donde $\Theta^n = \underbrace{\Theta \circ \Theta \circ \cdots \circ \Theta}_{n \text{ veces}}$
Para el caso particular de $n = 2$ se dice que Θ es idempotente, esto es, si:

$$\Theta^2(A) = \Theta(A)$$

para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.

Como ejemplos de funciones definidas en el conjunto potencia de un espacio métrico y compacto tenemos las funciones $\mathcal{J}$ y $\mathcal{H}$. Estas funciones las define Sandra Gorka, [18].

Definición 2.1.7. *Sea X un espacio métrico y compacto. Definimos la función $\mathcal{J}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como sigue. Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$:*

$\mathcal{J}(A) = X \setminus \{x \in X \mid$ *existen un conjunto cerrado* U *y un subcontinuo* W *de* X *tales que* $x \in Int(U), W \subseteq Int(U)$, $Int(W) \neq \emptyset$ *y* $U \cap A = \emptyset\}$

Ejemplo 2.1.8. *Consideremos* X *como la curva* $sen(\frac{1}{x})$. *Entonces* $\mathcal{J}(A) = A$ *para cada* $A \in 2^X$.

La función $\mathcal{J}$ está relacionada con el concepto de continuo casi conexo en pequeño el cual definimos a continuación.

Definición 2.1.9. *Sean* X *un continuo y* $p \in X$. *Decimos que* X *es* casi conexo en pequeño en p *si para cada conjunto abierto* U *de* X *que contiene a* p, *existe un subcontinuo* W *de* X *tal que* $Int(W) \neq \emptyset$ *y* $W \subseteq U$. *Decimos que* X *es* casi conexo en pequeño *si lo es en todos sus puntos.*

Ejemplo 2.1.10. *El abanico armónico (Ejemplo 1.5.11) es un continuo casi conexo en pequeño en todos sus puntos.*

Las demostraciones de los siguientes teoremas se pueden encontrar en [18].

Teorema 2.1.11. *Un continuo* X *es casi conexo en pequeño si y sólo si* $\mathcal{J}(A) = A$ *para cada* $A \in 2^X$.

Teorema 2.1.12. *Un continuo es* X *es indescomponible si y sólo si* $\mathcal{J}(A) = X$ *para cada* $A \in 2^X$.

Teorema 2.1.13. *Si* X *es un continuo, entonces para cada* $A \in 2^X$, $\mathcal{J}(A) = A$ *o* $\mathcal{J}(A) = X$. *Por lo tanto* $\mathcal{J}$ *siempre es idempotente.*

A continuación definimos la función $\mathcal{H}$ y presentamos algunos resultados de ésta.

Definición 2.1.14. *Sea* X *un espacio métrico y compacto. Definimos la función* $\mathcal{H}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *como sigue. Para cada* $A \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mathcal{H}(A) = X \setminus \{p \in X \mid \text{ existe un conjunto cerrado } C \text{ de } X \text{ tal que } p \in Int(C), \text{ cada componente de } C \text{ tiene interior vacío y } C \cap A = \emptyset\}$$

Ejemplo 2.1.15. *Consideremos $X = [0,1]$. Entonces $\mathcal{H}(A) = X$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

El Ejemplo 2.1.15 es un caso particular del siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [18, Teorema 44].

Teorema 2.1.16. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $\mathcal{H}(A) = X$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

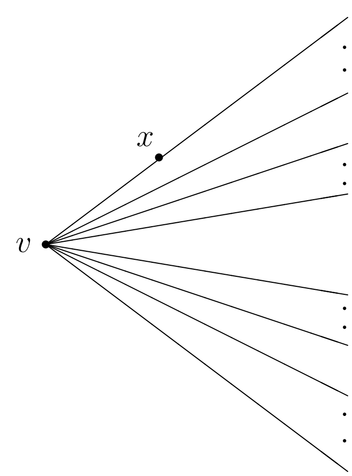
El Teorema 2.1.16 se puede generalizar al Teorema 2.1.17. Una demostración se encuentra en [18, Teorema 47].

Teorema 2.1.17. *Si X es un continuo casi conexo en pequeño en todos sus puntos, entonces $\mathcal{H}(\emptyset) = X$ y, por lo tanto, $\mathcal{H}(A) = X$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [18, Teorema 62].

Teorema 2.1.18. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces X es localmente conexo en x si y sólo si $x \in \mathcal{H}(\emptyset)$.*

Ejemplo 2.1.19. *Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor cuyo vértice es v. Entonces, para cada $x \in X$, $\mathcal{H}(\{x\}) = \{v, x\}$.*



Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [18, Teorema 50].

Teorema 2.1.20. *Si X es un continuo indescomponible, entonces $\mathcal{H}(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$.*

El círculo de pseudoarcos (ver [8] y [12]) es un ejemplo que muestra que el recíproco del Teorema 2.1.20 no se tiene, esto es, para cada punto del círculo de pseudoarcos, x, $\mathcal{H}(\{x\}) = \{x\}$ y sin embargo el círculo de pseudoarcos es un continuo descomponible.

Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [18, Teorema 51].

Teorema 2.1.21. *Si X es un continuo indescomponible, entonces $\mathcal{H}(A) = A$ para cada $A \in 2^X$.*

El siguiente resultado afirma que cualquier continuo es $\mathcal{H}$-aditivo. Una demostración de este hecho se puede encontrar en [18, Teorema 54].

Teorema 2.1.22. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y $B \in 2^X$. Entonces $\mathcal{H}(A \cup B) = \mathcal{H}(A) \cup \mathcal{H}(B)$.*

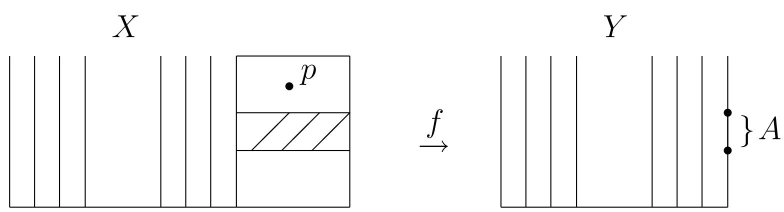
Notación 2.1.23. *Denotamos $\mathcal{H}_X$ a la función $\mathcal{H}$ definida en el espacio X y $\mathcal{H}_Y$ a la función $\mathcal{H}$ definida en el espacio Y.*

Definición 2.1.24. *Sean X y Y espacios de Hausdorff y $f\colon X \to Y$. Se dice que f es monótona si $f^{-1}(y)$ es conexa para cada $y \in Y$.*

En [18], Tabla C.1, pág. 117, Sandra Gorka pregunta que si dada una función monótona $f\colon X \to Y$, donde X y Y son espacios compactos de Hausdorff, se tiene alguna relación de contenciones entre $\mathcal{H}_X f^{-1}(A)$ y $f^{-1}\mathcal{H}_Y(A)$.

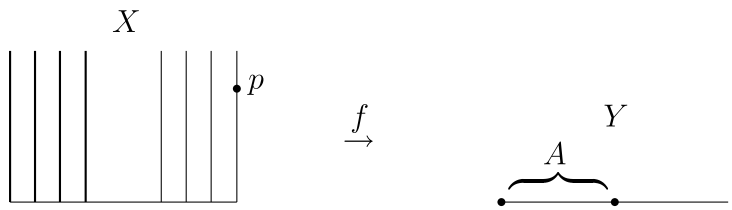
A continuación presentamos un ejemplo en el cual la inclusión $\mathcal{H}_X f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}\mathcal{H}_Y(A)$ no se cumple:

Ejemplo 2.1.25. *Sean X el continuo que es un peine de Cantor con un 2-celda pegada del lado derecho (como se ve en la figura de la página siguiente) y Y un peine de Cantor. Definimos $f\colon X \to Y$ como la proyección de la 2-celda sobre el segmento del extremo derecho del peine de Cantor. La función f, así definida, es monótona. Consideremos un intervalo A en el segmento del extremo derecho de Y. Podemos ver que $\mathcal{H}_X f^{-1}(A)$ es la 2-celda a la derecha de X (Teorema 2.1.18 y Definición 2.1.14), es decir, $p \in \mathcal{H}_X f^{-1}(A)$ mientras que $f^{-1}\mathcal{H}_Y(A)$ es sólo la parte de la 2-celda que, en la figura, tiene las líneas diagonales. Por lo tanto, $p \notin f^{-1}\mathcal{H}_Y(A)$. Entonces, en general, no se da la contención $\mathcal{H}_X f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}\mathcal{H}_Y(A)$.*



El siguiente ejemplo muestra que, en general, la inclusión inversa tampoco se tiene.

Ejemplo 2.1.26. *Sean X un peine de Cantor y Y el intervalo $[0,1]$. Definimos $f\colon X \to Y$ como la función proyección sobre el intervalo $[0,1]$. Esta función, así definida, es monótona y podemos ver que, si A es el intervalo $[0,\frac{1}{2}]$, entonces $p \in f^{-1}\mathcal{H}_Y(A)$, ya que, como $[0,1]$ es localmente conexo, $\mathcal{H}_Y(A) = [0,1]$ (Ejemplo 2.1.15). Sin embargo, $p \notin \mathcal{H}_X f^{-1}(A)$. Por lo que, en general, no se da la contención $f^{-1}\mathcal{H}_Y(A) \subseteq \mathcal{H}_X f^{-1}(A)$.*



Los Ejemplos 2.1.25 y 2.1.26 muestran que, en general, no se tiene ninguna de las contenciones a la pregunta en [18].

Con respecto a la continuidad de funciones, ésta la estudiaremos únicamente en continuos. Para esto necesitamos las definiciones de cuándo una función es semicontinua superiormente, inferiormente y continua.

Definición 2.1.27. *Sean X un continuo, $\Theta\colon 2^X \to 2^X$ una función y U un conjunto abierto de X. Si el conjunto $\{A \in 2^X \mid \Theta(A) \subseteq U\}$ es abierto en 2^X, entonces decimos que Θ es semicontinua superiormente. Si el conjunto $\{A \in 2^X \mid \Theta(A) \cap U \neq \emptyset\}$ es abierto en 2^X, entonces decimos que Θ es semicontinua inferiormente. Finalmente, decimos que Θ es continua si Θ es semicontinua superiormente y semicontinua inferiormente.*

2.2. La función $\mathcal{T}$, ejemplos y propiedades

F.B. Jones definió la función $\mathcal{T}$ en [22] para estudiar continuos aposindéticos. Posteriormente se ha investigado mucho. Por ejemplo, se ha utilizado para estudiar la contractibilidad de continuos [3]. Saber cuándo existe una función continua y suprayectiva de un continuo en su cono [4]. Para estudiar los productos simétricos de continuos [28]. Se han dado familias de continuos para los cuales $\mathcal{T}$ es continua [30] y [34]. Se ha caracterizado la clase de continuos homogéneos para los cuales $\mathcal{T}$ es continua [31]. Se ha utilizado para dar una caracterización de una curva cerrada simple como un continuo homogéneo y hereditariamente descomponible [36]. Recientemente se ha estudiado la idempotencia de $\mathcal{T}$ en productos de continuos [35].

Comenzamos con la definición de la función $\mathcal{T}$.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio métrico y compacto. Definimos la función $\mathcal{T}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: para cada $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{T}(A) = X \setminus \{x \in X \mid$ existe $W \in \mathcal{C}(X)$ tal que $x \in Int(W)$ y $W \cap A = \emptyset\}$.*

Se siguen de la definición de la función $\mathcal{T}$ los siguientes resultados. Las demostraciones se pueden encontrar en [29].

Observación 2.2.2. *Sea X un espacio métrico y compacto. Si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A)$ es cerrado en X.*

Proposición 2.2.3. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y $B \in \mathcal{P}(X)$. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}(B)$.*

Ejemplo 2.2.4. *Sea $X = \{0\} \bigcup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \{0\}$. Esto se sigue del hecho de que el único subcontinuo de X con interior vacío es $\{0\}$.*

El siguiente resultado nos dice bajo qué condiciones la imagen del conjunto vacío es el conjunto vacío.

Teorema 2.2.5. *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si X tiene una cantidad finita de componentes.*

Demostración. Primero supongamos que X tiene una cantidad finita de componentes. Sean $x \in X$ y C la componente de X que contiene a x. Notamos que C es cerrada, por lo que C es un subcontinuo de X. Ahora, $X \setminus C$ es una unión finita de cerrados, por lo tanto cerrado y, así, C es un abierto de X. Entonces $x \in Int(C) \subseteq C \subseteq X \setminus \emptyset = X$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$. Entonces para cada $x \in X$, existe un subcontinuo W_x de X tal que $x \in Int(W_x) \subseteq W_x \subseteq X \setminus \emptyset = X$. Notamos que la familia $\{Int(W_x) \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} Int(W_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} \subseteq X$. Así, X es la unión de una cantidad finita de continuos. Por lo tanto, X tiene una cantidad finita de componentes. $\square$

Corolario 2.2.6. *Si X es un continuo, entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$*

El siguiente teorema nos dice que en un continuo, la imagen, bajo la función $\mathcal{T}$, de subcontinuos son subcontinuos. Una demostración se puede encontrar en [29, Teorema 3.1.21].

Teorema 2.2.7. *Sea X un continuo. Si W es un subcontinuo de X, entonces $\mathcal{T}(W)$ es nuevamente un subcontinuo de X.*

El siguiente resultado nos dice la relación que hay entre el concepto de aposindesis (Definición 1.2.16) y la función $\mathcal{T}$. Una demostración de este teorema se encuentra en [29, Teorema 3.1.28].

Teorema 2.2.8. *Un continuo X es aposindético si y sólo si $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$.*

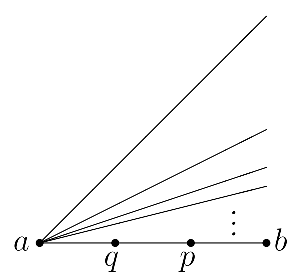
2.3. Continuos estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétricos

Algunos resultados de la función $\mathcal{T}$ se enuncian a continuación. Comenzaremos con la definición de continuo estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.

Definición 2.3.1. *Se dice que un continuo X es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico si para cualesquiera dos puntos distintos p y q de X tales que $p \in \mathcal{T}(\{q\})$, se tiene que $q \notin \mathcal{T}(\{p\})$.*

Todos los continuos localmente conexos son estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétricos. Un ejemplo de un continuo estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico que no es loclamente conexo en todos sus puntos es el abanico armónico.

Ejemplo 2.3.2. *Sean X el abanico armónico y p y q dos puntos distintos de X. Si X es localmente conexo en p o en q, entonces $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$ o $\mathcal{T}(\{q\}) = \{q\}$, por lo que, en caso de que X sea localmente conexo en alguno de los puntos p o q se cumple la Definición 2.3.1. Si X no es localmente conexo ni en p ni en q, entonces p y q están en la barra límite de X (véase la siguiente figura). Entonces es fácil verificar que $\mathcal{T}(\{q\}) = \overline{qb}$ y $\mathcal{T}(\{p\}) = \overline{pb}$. Así, $p \in \mathcal{T}(\{q\})$ pero $q \notin \mathcal{T}(\{p\})$. Por lo tanto, X es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.*



El siguiente resultado nos muestra que los continuos suaves por arcos son estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétricos.

Teorema 2.3.3. *Sea X un continuo suave por arcos. Entonces X es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.*

Demostración. Sean X un continuo suave por arcos y v un punto en el cual X es suave por arcos. Sean p y q puntos distintos de X tales que $p \in \mathcal{T}(\{q\})$. Entonces $q \in W$ para cada subcontinuo W de X tal que $p \in Int(W)$. Afirmamos que $q \in vp$.

Primero veamos que $vp \subseteq vq$ o $vq \subseteq vp$. Supongamos que existe un punto $z \in vp \cap vq \setminus \{p, q\}$ tal que $vz = vp \cap vq$. Sea $r > 0$ tal que $Cl(\mathcal{V}_r(p)) \cap \{z, q\} = \emptyset$ y $Cl(\mathcal{V}_r(q)) \cap \{z, p\} = \emptyset$. Por el Lema 1.4.8, $W = \bigcup_{x \in Cl(\mathcal{V}_r(p))} vx$ es un subcontinuo de X que contiene a p en su interior. Como $p \in \mathcal{T}(\{q\})$, tenemos que $q \in W$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$ para cada $n > N$. Entonces, para cada $n > N$, existe $x_n \in \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(p)$ tal que existe $y_n \in \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(q)$ tal que $v \leq_v y_n \leq_v x_n$ ya que si para cada $x \in \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(p)$ no existiera tal $y \in \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(q)$, entonces, por el Lema 1.4.8, $M = \bigcup_{x \in Cl(\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(p))} vx$ sería un subcontinuo de X tal que $p \in Int(M)$ y $M \cap \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(q) = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $p \in \mathcal{T}(\{q\})$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p y existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a q tal que $v \leq_v y_n \leq_v x_n$. Como $q \in \lim vx_n$, entonces $\lim vx_n \neq vp$, lo cual es una contradicción ya que X es suave por arcos en v. Entonces, $vp \subseteq vq$ o $vq \subseteq vp$.

Ahora supongamos que $p \in vq$. Sea $r > 0$ tal que $q \notin \mathcal{V}_r(p)$. Por el Lema 1.4.8, $W = \bigcup_{x \in Cl(\mathcal{V}_r(p))} vx$ es un subcontinuo de X tal que $p \in Int(W)$. Un argumento similar al que dimos en el párrafo anterior muestra que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p y existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a q tales que $v \leq_v y_n \leq_v x_n$. Como $q \in \lim vx_n$, entonces $\lim vx_n \neq vp$ lo que contradice el hecho de que X es suave por arcos en v. Por lo tanto, $q \in vp$.

Finalmente, sea $r > 0$ tal que $Cl(\mathcal{V}_r(p)) \cap Cl(\mathcal{V}_r(q)) = \emptyset$. Como $q \in vp$, utilizando nuevamente el Lema 1.4.8, $W = \bigcup_{x \in Cl(\mathcal{V}_r(q))} vx$ es un subcontinuo de X que contiene a q en su interior y $p \notin W$. Así, $q \notin \mathcal{T}(\{p\})$. Por lo tanto, X es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico. $\square$

Como cada dendroide suave es un continuo suave por arcos [16, Teorema II-4-B], tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.4. *Sea X un dendroide suave. Entonces X es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.*

El recíproco del Teorema 2.3.3 en general no es cierto como lo muestra el

Ejemplo 2.3.7, pero el recíproco es cierto cuando el continuo es un abanico. Para esto necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 2.3.5. *Sean F un abanico con vértice v y p un punto en $F \setminus \{v\}$. Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en F que converge a p, entonces el arco vp está contenido en* $\liminf vp_n$.

Demostración. Supongamos que existe un punto $l \in vp$ tal que $l \notin \liminf$ vp_n. Entonces existen un conjunto abierto U de F y una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $vp_{n_k} \cap U = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\limsup vp_{n_k}$ es un subcontinuo de F [29, Teorema 1.2.29], $v \in vp_{n_k}$ para cada n_k y $\lim p_{n_k} = p$. Entonces $vp \subseteq \limsup vp_{n_k}$. Esto implica que $l \in \limsup vp_{n_k}$. Entonces existe una subsucesión $\{n_{k_r}\}_{r=1}^{\infty}$ de $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que existe $l_{n_{k_r}} \in vp_{n_{k_r}}$ tal que $\lim l_{n_{k_r}} = l$. Así, existe $R \in \mathbb{N}$ tal que $vp_{n_{k_r}} \cap U \neq \emptyset$ para cada $r \geq R$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $vp \subseteq \liminf vp_n$. □

Teorema 2.3.6. *Sea F un abanico. Entonces F es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico si y sólo si F es suave.*

Demostración. Sea F un abanico con vértice v y supongamos que F no es suave. Entonces existen un punto p en F y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p pero $\limsup vp_n \neq \liminf vp_n$. Por el Lema 2.3.5, $vp \subseteq \liminf vp_n$, entonces $\limsup vp_n \neq vp$. Notamos que $vp \subseteq \limsup vp_n$. Sean $q \in \limsup vp_n \setminus vp$ y e_p el punto final de la pata de F que contiene a p. Entonces existe una subsucesión $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un punto $q_{n_i} \in vp_{n_i}$ tal que $\{q_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a q y $p_{n_i} \notin ve_p$.

Consideramos dos casos:

Caso (i). $p \in vq$.

Sea W un subcontinuo de F que contiene a p en su interior. Entonces existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_i} \in W$ para cada $n_i \geq N$. Como W

es arcoconexo [43, Ejercicio 10.58] y $q_{n_i} \in vp_{n_i}$ para cada $n_i \in \mathbb{N}$, entonces $q_{n_i} \in W$ para cada $n_i \geq N$. Así, $q \in W$. Esto implica que $p \in \mathcal{T}(\{q\})$. Ahora, si M es un subcontinuo de F que contiene a q en su interior, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_{n_i} \in M$ para cada $n_i \geq N$. Como $q_{n_i} \in vp_{n_i}$ y M es únicamente arcoconexo (Teorema 1.5.6), entonces los arcos vq_{n_i} y vq están contenidos en M para $n_i \geq N$. Como $p \in vq$, entonces $p \in M$. Esto implica que $q \in \mathcal{T}(\{p\})$. Por lo tanto, F no es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.

Caso(ii). $p \notin vq$.

Sea $r \in vq \setminus \{v, q\}$. Como $\limsup q_{n_i}p_{n_i}$ es un subcontinuo de F [29, Teorema 1.2.29] que contiene a q y a p, $\limsup q_{n_i}p_{n_i}$ contiene el arco qp [43, Ejercicio 10.58]. Entonces hay una sucesión $\{r_{n_i}\}_{n_i=1}^{\infty}$ que converge a r tal que, para cada $n_i \in \mathbb{N}$, $r_{n_i} \in q_{n_i}p_{n_i}$. Así, r está en la misma situación que p en el Caso (i); i.e, $q_{n_i} \in vr_{n_i}$, y las sucesiones $\{q_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{r_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ convergen a q y a r, respectivamente. Entonces, $q \in \mathcal{T}(\{r\})$ y $r \in \mathcal{T}(\{q\})$. Por lo tanto, F no es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.

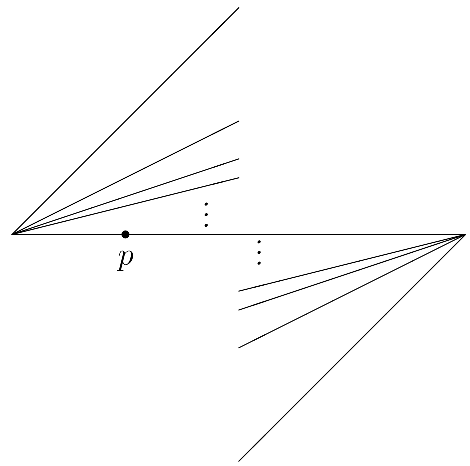
Ahora, si F es un abanico suave por arcos, por el Corolario 2.3.4, tenemos que F es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico. $\square$

El siguiente ejemplo contesta de manera negativa a una pregunta de David P. Bellamy [29, Pregunta 7.2.10] mostrando un dendroide que es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico pero no es suave. Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\overline{ab}$ denota el arco convexo que une a y b.

Ejemplo 2.3.7. *Sea X el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$:*

$$X = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(-1,0)(0,\frac{1}{n})}\Big) \cup \Big(\overline{(-1,0)(1,0)}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(1,0)(0,-\frac{1}{n})}\Big).$$

No es difícil ver que este dendroide es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico pero no es suave.



Notación 2.3.8. *Dados un dendroide X y un punto $p \in X$, denotamos por $\mathcal{D}(X, p)$ al conjunto de todos los arcos en X de la forma $[p, x]$ (Definición 1.5.14). Consideramos a $\mathcal{D}(X, p)$ como un subespacio de 2^X.*

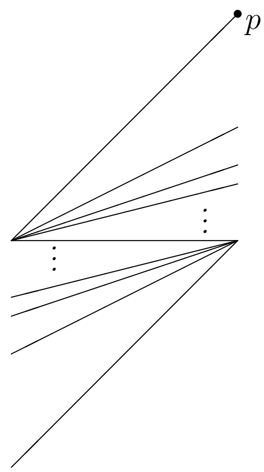
Definición 2.3.9. *Sea X un dendroide. Decimos que X es débilmente suave si $\mathcal{D}(X, p)$ es un subconjunto compacto de 2^X para algún $p \in X$.*

Como cada dendroide débilmente suave es un continuo débilmente suave por arcos [23], el siguiente ejemplo muestra que el Teorema 2.3.3 no se puede generalizar a un continuo débilmente suave por arcos. Para más información sobre continuos débilmente suaves por arcos ver [23] y [27].

Ejemplo 2.3.10. *Sea X el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$:*

$$X = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(0,0)(1,\frac{1}{n})}\Big) \cup \Big(\overline{(0,0)(1,0)}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(1,0)(0,-\frac{1}{n})}\Big).$$

Sea p el punto $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Vemos que p es un punto de X. No es difícil ver que este dendroide es débilmente suave en el punto p pero no es estrictamente puntualmente $\mathcal{T}$-asimétrico.



2.4. La función $\mathcal{K}$, ejemplos y propiedades

F. B. Jones también define la función $\mathcal{K}$ en [22]. Aunque no ha sido tan investigada como la función $\mathcal{T}$, sí ha sido bastante estudiada. Por ejemplo, se ha usado la función $\mathcal{K}$ para estudiar a los continuos planos [19], [20] y [21]. También se ha utilizado para estudiar descomposiciones monótonas de continuos [46] y para investigar continuos para los cuales existe un continuo irreducible y hereditariamente descomponible entre cualesquiera dos de sus puntos [47]. Recientemente se demostró que, bajo ciertas condiciones, la continuidad de $\mathcal{T}$ implica la continuidad de $\mathcal{K}$ y que la implicación inversa, en general, no es cierta [33].

Comenzamos con la definición de la función $\mathcal{K}$.

Definición 2.4.1. *Sea X un un espacio métrico y compacto. Definimos la función $\mathcal{K}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: para cada $A \in \mathcal{P}(X)$,*

$$\mathcal{K}(A) = \bigcap\{W \mid W \in \mathcal{C}(X) \text{ y } A \subseteq Int(W)\}.$$

Se sigue, de la definición de la función $\mathcal{K}$, los siguientes resultados ya conocidos.

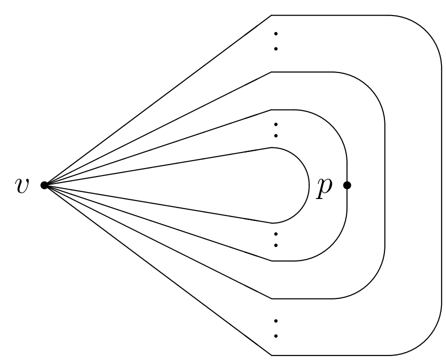
Observación 2.4.2. *Sea X un continuo. Si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq \mathcal{K}(A)$ y $\mathcal{K}(A)$ es cerrado en X.*

La siguiente proposición nos dice que la función $\mathcal{K}$ preserva contenciones.

Proposición 2.4.3. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y $B \in \mathcal{P}(X)$. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{K}(B)$.*

El siguiente ejemplo nos muestra que en un continuo, la imagen bajo la función $\mathcal{K}$ de un subcontinuo no necesariamente es un subcontinuo.

Ejemplo 2.4.4. *Sean Y la suspensión sobre el conjunto de Cantor con vértices v_1 y v_2 y X el espacio que se obtiene al identificar v_1 con v_2. Sea v el punto en que se identificaron los vértices v_1 y v_2. Si p es cualquier punto de $X \setminus \{v\}$, entonces $\mathcal{K}(\{p\}) = \{v, p\}$, que no es conexo.*



Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [18, Teorema 36].

Teorema 2.4.5. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces la función $\mathcal{K}$ es continua para X.*

Un resultado de la función $\mathcal{K}$ es el siguiente.

Teorema 2.4.6. *Si X es un continuo, entonces $\mathcal{K}(A) = \bigcup\{\mathcal{K}(\{a\}) \mid a \in A\}$ para cada $A \in \mathcal{C}(X)$.*

Demostración. Como $\bigcup\{\mathcal{K}(\{a\}) \mid a \in A\} \subseteq \mathcal{K}(A)$, solamente necesitamos probar que $\mathcal{K}(A) \subseteq \bigcup\{\mathcal{K}(\{a\}) \mid a \in A\}$.

Sea $z \in X \setminus \bigcup\{\mathcal{K}(\{a\}) \mid a \in A\}$. Entonces $z \in \bigcap\{X \setminus \mathcal{K}(\{a\}) \mid a \in A\}$. Así, para cada $a \in A$, existe un subcontinuo M_a de X tal que $a \in Int(M_a)$ y $z \notin M_a$. Entonces $\{Int(M_a)\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Int(M_{a_i})$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_{a_i}$. Entonces M es un subcontinuo de X tal que $A \subseteq Int(M)$ y $z \notin M$. Entonces, $z \in X \setminus \mathcal{K}(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(A) = \bigcup\{\mathcal{K}(\{a\}) \mid a \in A\}$. $\square$

El Teorema 2.4.6 nos dice que en cualquier continuo X hay un cierto tipo de $\mathcal{K}$-aditividad cuando esta función se evalúa en los subcontinuos de X.

Observación 2.4.7. *Notamos que el resultado correspondiente al Teorema 2.4.6 para la función $\mathcal{T}$ no es cierto. Sea X la suspensión sobre el conjunto de Cantor (Ejemplo 1.2.18) con vértices v_1 y v_2. Si A es un arco en X que contiene a v_1 y v_2 como puntos extremos, entonces $\mathcal{T}(A) = X$ mientras que $\bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) \mid a \in A\} = A$.*

2.5. Algunas relaciones entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$

La Observación 2.4.7 es la primera relación entre las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ que mostramos. En esta sección presentamos más relaciones entre estas dos funciones.

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [18, Teorema 160].

Teorema 2.5.1. *Si X es un continuo puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico o puntualmente $\mathcal{K}$-simétrico, entonces $\mathcal{T}(\{x\}) = \mathcal{K}(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

Como consecuencia de los Teoremas 2.4.6 y 2.5.1 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.2. *Si X es un continuo puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico, entonces para cada $A \in \mathcal{C}(X)$ tenemos que $\mathcal{K}(A) = \bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) \mid a \in A\}$.*

Como consecuencia de los Teoremas 2.2.8 y 2.5.2 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.5.3. *Si X es un continuo aposindético y puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico, entonces $\mathcal{K}(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{C}(X)$.*

El siguiente lema es fácil de verificar y será utilizado en las pruebas de los Teoremas 2.5.10 y 2.6.8.

Lema 2.5.4. *Si X es un continuo indescomponible, entonces $\mathcal{K}(A) = X$ para cada $A \in 2^X$.*

Teorema 2.5.5. *Si X es un continuo débilmente irreducible, entonces para cada $A \in 2^X$, $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$.*

Demostración. Sean X un continuo débilmente irreducible y $A \in 2^X$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{K}(A)$. Entonces existe un subcontinuo M de X tal que $A \subseteq Int(M) \subseteq M$ y $x \notin M$. Como X es débilmente irreducible, $X \setminus M$ tiene un número finito de componentes. Sea C la componente de $X \setminus M$ que contiene a x. Entonces $Cl(C)$ es un subcontinuo de X que contiene a x en el interior [29, Lema 1.6.2] y $Cl(C) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. $\square$

Por el Teorema 1.6.5, cada continuo irreducible es débilmente irreducible. Entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.5.6. *Sea X un continuo irreducible. Entonces para cada $A \in 2^X$, $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$.*

El siguiente teorema muestra que la inclusión opuesta a la que nos da el Teorema 2.5.5 es cierta para subcontinuos.

Teorema 2.5.7. *Si X es un continuo débilmente irreducible, entonces $\mathcal{T}(A) = \mathcal{K}(A)$ para cada $A \in \mathcal{C}(X)$.*

Demostración. Sean X un continuo débilmente irreducible y $A \in \mathcal{C}(X)$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Como X es débilmente irreducible y W es un subcontinuo de X, entonces $X \setminus W$ tiene una cantidad finita de componentes. Sea M la componente de $X \setminus W$ que contiene a A. Como M es conexa y abierta en X, $Cl(M)$ es un subcontinuo de X tal que $A \subseteq M \subseteq Cl(M)$ y $x \notin Cl(M)$. Así, $x \in X \setminus \mathcal{K}(A)$. Esto implica que $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{T}(A)$. La otra inclusión se sigue del Teorema 2.5.5. □

Corolario 2.5.8. *Si X es un continuo irreducible, entonces $\mathcal{T}(A) = \mathcal{K}(A)$ para cada $A \in \mathcal{C}(X)$.*

Observación 2.5.9. *Observemos que el Corolario 2.5.8 es una extensión de [33, Teorema 3.8] para la clase de continuos irreducibles, ya que no se requiere de la continuidad de $\mathcal{T}$. También notemos que cada continuo irreducible es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico [29, Corolario 3.1.37].*

Ahora probaremos que la imagen bajo $\mathcal{K}$ de cualquier subconjunto cerrado de un continuo irreducible X es conexa.

Teorema 2.5.10. *Si X es un continuo irreducible, entonces $\mathcal{K}(A)$ es conexo para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Sean X un continuo que es irreducible entre los puntos p y q y $A \in 2^X$. Si $\mathcal{K}(A) = X$, entonces $\mathcal{K}(A)$ es conexo. Supongamos que $\mathcal{K}(A) \neq X$. Así, por el Lema 2.5.4, X es descomponible. Sean $P^* = \{x \in X \mid X$ es irreducible entre x y $q\}$ y $Q^* = \{x \in X \mid X$ es irreducible entre p y $x\}$. Notemos que $p \in P^*$ y $q \in Q^*$. Consideramos dos casos:

Caso (i). *Supongamos que $A \cap Cl(P^*) \neq \emptyset$.*

Observamos que $A \cap Cl(Q^*) = \emptyset$. Si $A \cap Cl(Q^*) \neq \emptyset$, entonces para cualquier subcontinuo M de X tal que $A \subseteq Int(M)$, existen un punto $p' \in M \cap P^*$ y un punto $q' \in M \cap Q^*$. Entonces, por el Lema 1.6.2, $M = X$; y así, $\mathcal{K}(A) = X$, pero estamos suponiendo que $\mathcal{K}(A) \neq X$. Entonces $A \cap Cl(Q^*) = \emptyset$. Como A es compacto, existe un número positivo r tal que $\mathcal{V}_r(A) \cap Cl(Q^*) = \emptyset$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$ para cada $n > N$. Dado $n > N$, sea Q_n la componente de $X \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(A)$ que contiene a q. Por [25, Teorema 3, p. 193], $Cl(X \setminus Q_n)$ es un subcontinuo de X para cada $n > N$. Notemos que $A \subseteq Int(Cl(X \setminus Q_n)) \subseteq Cl(X \setminus Q_n)$. Sea $H = \bigcap_{n>N} Cl(X \setminus Q_n)$. Vemos que H es un subcontinuo de X [29, Teorema 1.7.2]. Afirmamos que $H = \mathcal{K}(A)$. Por definición, $\mathcal{K}(A) \subseteq H$. Supongamos que existe un punto $z \in H \setminus \mathcal{K}(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $A \subseteq Int(W)$ y $z \notin W$. Como $A \subseteq Int(W)$, existe un número $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(A) \subseteq W$; y así, por [43, Teorema 5.6], $Q_n \cap W \neq \emptyset$ para cada $n > N_0$. Como $A \subseteq Int(W)$ y $A \cap Cl(P^*) \neq \emptyset$, existe un punto $p' \in P^*$ tal que $p' \in W$. También, $z \in Q_n$ para cada $n > N_0$. Si $z \notin Q_m$, para alguna $m > N_0$, entonces $W \cup Q_m$ es un subcontinuo de X tal que $p', q \in W \cup Q_m$ pero $z \notin W \cup Q_m$, lo cual, por el Lema 1.6.2, contradice el hecho de que X es irreducible entre p' y q.

Así, $z \in Q_n$ para cada $n > N_0$. Sea $l > N_0$. Entonces $z \in Q_l$, $p' \in W$, $q \in Q_l$ y $W \cap Q_l \neq \emptyset$. Entonces $X = W \cup Q_l$. Esto implica que $X \setminus Q_l \subseteq W$. Como W es cerrado, $Cl(X \setminus Q_l) \subseteq W$. Pero $z \in Cl(X \setminus Q_l)$. Así, $z \in W$, lo cual es una contradicción. Entonces $H \subseteq \mathcal{K}(A)$. Por lo tanto, $H = \mathcal{K}(A)$.

Caso (ii). *Supongamos que $A \cap Cl(P^*) = \emptyset$ y que $A \cap Cl(Q^*) = \emptyset$.*

Como A es compacto, existe un número positivo r tal que $\mathcal{V}_r(A) \cap Cl(P^*) = \emptyset$ y $\mathcal{V}_r(A) \cap Cl(Q^*) = \emptyset$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$ para cada $n > N$. Dado $n > N$, sean P_n la componente de $X \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(A)$ que contiene a p y Q_n la componente de $X \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(A)$ que contiene a q. Por [25, Teorema 3, p. 193], para cada $n > N$, $Cl(X \setminus P_n)$ y $Cl(X \setminus Q_n)$ son subcontinuos de X. También, por [25, Teorema 4, p. 193], $X \setminus (P_n \cup Q_n) = (X \setminus P_n) \cap (X \setminus Q_n)$ es conexo. Observemos que $A \subseteq (X \setminus P_n) \cap (X \setminus Q_n)$. Sea $H = \bigcap_{n>N} Cl((X \setminus P_n) \cap (X \setminus Q_n))$. Notemos que, igual que en el caso (i), H es un subcontinuo de X. Afirmamos que $H = \mathcal{K}(A)$. Por definición, $\mathcal{K}(A) \subseteq H$. Supongamos que existe un punto $z \in H \setminus \mathcal{K}(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $A \subseteq Int(W)$ y $z \notin W$. Notemos que $z \in Cl((X \setminus P_n) \cap (X \setminus Q_n))$ para cada $n > N$. Como $A \subseteq Int(W)$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > N$ y $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(A) \subseteq W$ para cada $n > N_0$. Así, por [43, Teorema 5.6], $P_n \cap W \neq \emptyset$ y $Q_n \cap W \neq \emptyset$ para cada $n > N_0$. Ahora, $z \in P_n \cup Q_n$ para cada $n > N_0$. Si $z \notin P_m \cup Q_m$, para alguna $m > N_0$, entonces $P_m \cup W \cup Q_m$ es un subcontinuo de X que contiene a p y a q y $z \notin P_m \cup W \cup Q_m$, lo cual contradice el hecho de que X es irreducible entre p y q. Entonces $z \in P_n \cup Q_n$ para cada $n > N_0$. Como X es irreducible, $P_n \cup Q_n$ no es conexo y podemos suponer que $z \in Q_n$ para cada $n > N_0$. Sea $l > N_0$. Entonces $z \in Q_l \setminus P_l$. Como $p \in P_l \cup W$ y $q \in Q_l$, entonces $P_l \cup W \cup Q_l = X$. Entonces $X \setminus Q_l \subseteq P_l \cup W$; así, $Cl(X \setminus Q_l) \subseteq P_l \cup W$. Esto implica que $Cl(X \setminus P_l) \cap Cl(X \setminus Q_l) \subseteq Cl(X \setminus Q_l) \subseteq P_l \cup W$. Como $z \in Cl(X \setminus P_l) \cap Cl(X \setminus Q_l)$, tenemos que $z \in P_l \cup W$, lo cual es una contradicción. Así, $H \subseteq \mathcal{K}(A)$. Por lo tanto, $H = \mathcal{K}(A)$. $\square$

Observación 2.5.11. *Notemos que el Teorema 2.5.10 no es cierto para continuos débilmente irreducibles. Para ver esto, sea S^1 la circunferencia unitaria. Entonces S^1 es débilmente irreducible y $\mathcal{K}$ es la identidad en 2^{S^1} [18, Teorema 26].*

En el Teorema 2.5.15 probamos que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ conmutan al restringirlas a subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo irreducible X. Para la demostración de este resultado necesitamos un par de lemas y la siguiente definición.

Definición 2.5.12. *Sean X un continuo y $A \subseteq X$. Decimos que un punto $z \in X$ es un punto de corte débil de X que separa a A si $z \in M$ para cualquier subcontinuo M de X tal que $A \subseteq M$.*

Lema 2.5.13. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Si $W_C(A)$ es el conjunto de todos los puntos de corte débil de X que separan a A, entonces $W_C(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$.*

Demostración. La prueba del lema se sigue de la definición de punto de corte débil que separa a un conjunto y de la definición de la función $\mathcal{K}$. $\square$

Lema 2.5.14. *Sean X un continuo irreducible y $A \in 2^X$. Si W es un subcontinuo de X tal que $\mathcal{T}(A) \subseteq Int(W)$, entonces $\mathcal{K}(A) \subseteq Int(W)$.*

Demostración. Sea X un continuo irreducible entre p y q. Sean $A \in 2^X$ y W un subcontinuo de X tal que $\mathcal{T}(A) \subseteq Int(W)$. Supongamos que $\mathcal{K}(A) \nsubseteq Int(W)$. Sea $y \in \mathcal{K}(A) \setminus Int(W)$. Como $\mathcal{T}(A) \subseteq Int(W)$, $y \notin \mathcal{T}(A)$. Entonces existe un subcontinuo M de X tal que $y \in Int(M) \subseteq M \subseteq X \setminus A$. Como X es irreducible, $X \setminus M$ tiene a lo más dos componentes. Si A está contenido en una de esas componentes, digamos C_1, entonces $Cl(C_1)$ es un subcontinuo de X tal que $A \subseteq Int(Cl(C_1)) \subseteq Cl(C_1) \subseteq X \setminus \{y\}$, pero esto contradice el hecho de que $y \in \mathcal{K}(A)$. Entonces, $X \setminus M = C_1 \cup C_2$ donde $A \cap C_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2\}$. Podemos suponer que $p \in C_1$ y $q \in C_2$. Entonces, cualquier punto de $Int(M)$ es un punto de corte débil de X que separa a A. Si hay un punto $z \in Int(M)$ que no fuera un punto de corte débil de X que separa a A, entonces existiría un subcontinuo R de X tal que $A \subseteq R$ y $z \notin R$. Pero esto implicaría que $Cl(C_1) \cup R \cup Cl(C_2)$ sería un subcontinuo propio de X que contendría a p y a q, lo cual es una contradicción. Entonces, por el Lema 2.5.13, $Int(M) \subseteq W$. Así, $y \in Int(W)$ lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto, $\mathcal{K}(A) \subset Int(W)$. $\square$

Teorema 2.5.15. *Si X es un continuo irreducible, entonces $\mathcal{T}(\mathcal{K}(A)) = \mathcal{K}(\mathcal{T}(A))$ para cada $A \in 2^X$.*

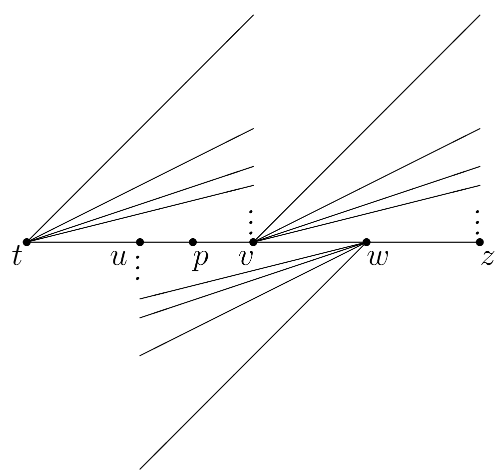
Demostración. Sea $A \in 2^X$. Primero veamos que $\mathcal{K}(\mathcal{T}(A)) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{K}(A))$. Por el Corolario 2.5.6 tenemos que $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$. Entonces $\mathcal{K}(\mathcal{T}(A)) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{K}(A))$.

Por el Teorema 2.5.10, $\mathcal{K}(A)$ es conexo y, por el Teorema 2.5.7, $\mathcal{K}(\mathcal{K}(A)) = \mathcal{T}(\mathcal{K}(A))$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(\mathcal{T}(A)) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{K}(A))$.

Para la otra contención, sea $x \in X \setminus \mathcal{K}(\mathcal{T}(A))$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $\mathcal{T}(A) \subseteq Int(W)$ y $x \notin W$. Por el Lema 2.5.14, $\mathcal{K}(A) \subseteq Int(W)$. Como X es irreducible, $X \setminus W$ tiene a lo más dos componentes. Sea C la componente de $X \setminus W$ que contiene a x. Entonces $Cl(C)$ es un subcontinuo de X tal que $x \in Int(Cl(C)) \subseteq Cl(C) \subseteq X \setminus \mathcal{K}(A)$. Así, $x \in X \setminus \mathcal{T}(\mathcal{K}(A))$. Entonces, $\mathcal{T}(\mathcal{K}(A)) \subset \mathcal{K}(\mathcal{T}(A))$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(\mathcal{K}(A))$. □

El siguiente ejemplo muestra que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ en general no conmutan.

Ejemplo 2.5.16. *Sea X el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$:*



Sean t, v y w los vértices de los abanicos armónicos de la figura. Notemos que u, v y z son los puntos límite de los extremos de las patas de los abanicos. Si p está entre u y v se tiene que $\mathcal{K}(\mathcal{T}(\{p\})) = \mathcal{K}(\overline{uv}) = \overline{tw}$, mientras que $\mathcal{T}(\mathcal{K}(\{p\})) = \mathcal{T}(\overline{tw}) = \overline{tz}$.

2.6. Continuos irreducibles y $\mathcal{K}$-simétricos

En esta parte daremos una carecterización de los continuos irreducibles $\mathcal{K}$-simétricos (Teorema 2.6.8).

Teorema 2.6.1. *Sea X un continuo $\mathcal{K}$-simétrico. Si para cada punto $x \in X$ $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$, entonces X no es irreducible.*

Demostración. Supongamos que X es irreducible entre p y q. Sean $P^* = \{x \in X \mid X \text{ es irreducible entre } x \text{ y } q\}$ y $Q^* = \{x \in X \mid X \text{ es irreducible entre } p \text{ y } x\}$. Por el Lema 1.6.2, X es irreducible entre p' y q', para cada $p' \in P^*$ y cada $q' \in Q^*$.

Como $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$ para cada $x \in X$, obtenemos que $Cl(P^*) \cap Cl(Q^*) = \emptyset$; de otra forma, si $z \in Cl(P^*) \cap Cl(Q^*)$, entonces cualquier subcontinuo W tal que $z \in Int(W)$ debe contener algún $p' \in P^*$ y algún $q' \in Q^*$. Así, $W = X$ y $\mathcal{K}(\{z\}) = X$ lo cual es una contradicción. Sea $y \in X \setminus (Cl(P^*) \cup Cl(Q^*))$. Sea U un conjunto abierto tal que $y \in U \subseteq Cl(U) \subseteq X \setminus (Cl(P^*) \cup Cl(Q^*))$. Como X es irreducible, entonces $X \setminus U$ no es conexo. Sean P la componente de $X \setminus U$ que contiene a p y Q la componente de $X \setminus U$ que contiene a q. Por [25, Teorema 3, pág. 210], $P^* \subseteq P$ y $Q^* \subseteq Q$. Por [25, Teorema 4, pág. 193], $X \setminus (P \cup Q)$ es conexo y $U \subseteq X \setminus (P \cup Q)$. Entonces, $Cl(X \setminus (P \cup Q))$ es un subcontinuo de X que contiene a y en su interior. Esto implica que $\mathcal{K}(\{y\}) \cap (P^* \cup Q^*) = \emptyset$. Sin embargo, $\mathcal{K}(\{p, q\}) = X$; i.e., $y \in \mathcal{K}(\{p, q\})$ lo que contradice el hecho de que X es $\mathcal{K}$-smétrico. Por lo tanto, X no es irreducible. $\square$

Notemos que los continuos irreducibles son $\mathcal{T}$-simétricos [29, Corolario 3.1.37]. Reescribiendo el enunciado del Teorema 2.6.1, vemos que la mayoría de los continuos irreducibles no son $\mathcal{K}$-simétricos.

Corolario 2.6.2. *Si X es un continuo $\mathcal{K}$-simétrico irreducible, entonces existe un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{K}(\{x\}) = X$.*

Ahora necesitamos la definición de continuos n-indescomponibles.

Definición 2.6.3. *Un continuo X es n-indescomponible si* (1) *X es la unión de n continuos tales que ninguno de ellos está contenido en la unión de los otros y* (2) *X no es la unión de $n+1$ de tales continuos.*

Notemos que [10, Teorema 7] se puede enunciar como sigue:

Teorema 2.6.4. *Sea X es un continuo. Entonces existe un entero positivo n tal que X es n-indescomponible si y sólo si la colección $\mathcal{E} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$ es finita.*

Teorema 2.6.5. *Sean X un continuo irreducible y $x_0 \in X$. Si $\mathcal{T}(\{x_0\}) = X$, entonces la colección $\mathcal{E} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$ es finita.*

Demostración. Primero notemos que si X es indescomponible, entonces $\mathcal{E} = \{X\}$ [29, Teorema 3.1.34]. Por lo que $\mathcal{E}$ es finita.

Supongamos que X es descomponible e irreducible entre los puntos a y b. Sea x_0 un punto de X tal que $\mathcal{T}(\{x_0\}) = X$. Como X es irreducible, X es $\mathcal{T}$-simétrico [29, Corolario 3.1.37]. Así, X es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico. Entonces, como $\mathcal{T}(\{x_0\}) = X$, $x_0 \in \mathcal{T}(\{a\}) \cap \mathcal{T}(\{b\})$. Entonces, como X es irreducible, $X = \mathcal{T}(\{a\}) \cup \mathcal{T}(\{b\})$.

Ahora probamos que $Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{b\})) = \mathcal{T}(\{a\})$. Supongamos que existe $x \in \mathcal{T}(\{a\}) \setminus Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{b\}))$. Entonces $Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{b\}))$ es un subcontinuo de X [25, Teorema 3, pág. 193] tal que $a \in Int(Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{b\}))) \subset Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{b\})) \subset X \setminus \{x\}$. Entonces, $a \notin \mathcal{T}(\{x\})$. Como X es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico [29, Corolario 3.1.37], $x \notin \mathcal{T}(\{a\})$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{b\})) = \mathcal{T}(\{a\})$. Así, $\mathcal{T}(\{a\})$ es irreducible entre a y cada punto de $Fr(\mathcal{T}(\{a\}))$ [25, Teorema 7, pág. 194]. Con un argumento similar se puede mostrar que $x_0 \in Cl(X \setminus \mathcal{T}(\{a\}))$, de donde tenemos que $x_0 \in Fr(\mathcal{T}(\{a\}))$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(\{a\})$ es irreducible entre a y x_0. De forma similar, $\mathcal{T}(\{b\})$ es irreducible entre b y x_0.

Sea $x \in X$. Si $x \in \mathcal{T}(\{a\}) \cap \mathcal{T}(\{b\})$, entonces $\mathcal{T}(\{x\}) = X$. Supongamos que $x \in \mathcal{T}(\{a\}) \setminus \mathcal{T}(\{b\})$. Como X es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico [29, Corolario 3.1.37], $a \in \mathcal{T}(\{x\})$. Entonces, $\mathcal{T}(\{x\}) = \mathcal{T}(\{a\})$, ya que $x \notin \mathcal{T}(\{b\})$. De forma similar, si $x \in \mathcal{T}(\{b\}) \setminus \mathcal{T}(\{a\})$, $\mathcal{T}(\{x\}) = \mathcal{T}(\{b\})$. Así, $\mathcal{E} = \{X, \mathcal{T}(\{a\}), \mathcal{T}(\{b\})\}$. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ tiene tres elementos. □

Una prueba del siguiente teorema se encuentra en [44, Teorema 2].

Teorema 2.6.6. *Un continuo X es n-indescomponible si y sólo si X es la unión de n continuos indescomponibles tales que ninguno de ellos está contenido en la unión de los restantes.*

Teorema 2.6.7. *Sea X un continuo n-indescomponible. Si $n \geq 3$, entonces X no es irreducible o $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Como X es un continuo n-indescomponible, por el Teorema 2.6.6, $X = \bigcup_{j=1}^{n} Z_j$, donde Z_j es un subcontinuo indescomponible de X, $j \in \{1, \ldots, n\}$ y ningún Z_j es un subconjunto de la unión de los otros continuos. Consideramos dos casos:

Caso (i). $\bigcap_{j=1}^{n} Z_j \neq \emptyset$.

Notemos que, como $n \geq 3$, X no es irreducible.

Caso (ii). $\bigcap_{j=1}^{n} Z_j = \emptyset$.

Entonces existe $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $Z_{j_1} \cap Z_{j_2} = \emptyset$. Entonces tenemos dos posibilidades:

(a) si $x \in Z_{j_1}$, entonces $Z_{j_2} \setminus \mathcal{K}(\{x\}) \neq \emptyset$ y $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$. De forma similar, si $x \in Z_{j_2}$, entonces $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$;

y

(b) si $x \in \bigcup\{Z_\ell \mid \ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2\}\}$, entonces $\mathcal{K}(\{x\}) \subset \bigcup\{Z_\ell \mid \ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2\}\}$, y $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$. Entonces, $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$ para cada $x \in X$.

Por lo tanto, X no es irreducible o $\mathcal{K}(\{x\}) \neq X$ para cada $x \in X$.

□

Teorema 2.6.8. *Sea X un continuo irreducible. Entonces X es $\mathcal{K}$-simétrico si y sólo si X es indescomponible o 2-indescomponible.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo irreducible $\mathcal{K}$-simétrico. Así, por el Corolario 2.6.2, existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{K}(\{x_0\}) = X$. Entonces $\mathcal{T}(\{x_0\}) = X$ (Teorema 2.5.1). De donde, por el Teorema 2.6.5, la colección $\mathcal{E} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$ es finita. Así que existe un entero positivo n tal que X es n-indescomponible (Teorema 2.6.4). Entonces, por el Teorema 2.6.7, $n \leq 2$. Por lo tanto, X es indescomponible o 2-indescomponible.

Ahora, si X es indescomponible, $\mathcal{K}(\{x\}) = X$ para toda $x \in X$, por el Lema 2.5.4. Supongamos que X es 2-indescomponible. Entonces existen dos subcontinuos indescomponibles H y L de X tales que $X = H \cup L$, $H \setminus L \neq \emptyset$ y $L \setminus H \neq \emptyset$. Observemos que, como H y L son indescomponibles cuya unión es X, para cada $A \in 2^X$, $\mathcal{K}(A) \in \{X, H, L\}$. De aquí se sigue que X es $\mathcal{K}$-simétrico. □

2.7. Continuos tipo λ

Presentamos una prueba diferente de un resultado, con respecto a la función $\mathcal{T}$, de R. W. FitzGerald [15, pág. 169], que dice que dado un continuo tipo λ (Definición 2.7.1), X, la descomposición monótona semicontinua superiormente más fina $\mathcal{G}$ de X tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco, se puede expresar en términos de la función $\mathcal{T}$ (Teorema 2.7.5). Presentamos el resultado correspondiente para la función $\mathcal{K}$ (Teorema 2.7.6).

Definición 2.7.1. *Un continuo X es tipo λ si X es irreducible y cada subcontinuo indescomponible de X tiene interior vacío.*

Una demostración del siguiente teorema se encuentra en [45, Teorema 10].

Teorema 2.7.2. *Un continuo X es de tipo λ si y sólo si X admite una descomposición semicontinua superiormente $\mathcal{G}$ tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es un continuo denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco. Además $\mathcal{G}$ es la descomposición más fina de X con estas propiedades.*

Definición 2.7.3. *Sea X un continuo, $\mathcal{G}$ una descomposición de X y $q\colon X \to X/\mathcal{G}$ la función cociente. Decimos que la descomposición $\mathcal{G}$ es monótona si $q^{-1}(\chi)$ es conexo para cada $\chi \in X/\mathcal{G}$.*

Notamos que la descomposición $\mathcal{G}$ de el Teorema 2.7.2 es monótona.

Lema 2.7.4. *Sea X un continuo de tipo λ. Sean $\mathcal{G}$ la descomposición monótona semicontinua superiormente más fina de X tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco, y $q : X \twoheadrightarrow [0,1]$ la función cociente. Si $x \in X$ y $A \subset q^{-1}(q(x))$, entonces $\mathcal{T}(A) \subset q^{-1}(q(x))$.*

Demostración. Sea $y \in X \setminus q^{-1}(q(x))$. Entonces $q(y) \neq q(x)$. Esto implica que existe un subintervalo cerrado $[r,t]$ de $[0,1]$ tal que $q(y) \in Int_{[0,1]}([r,t])$ y $q(x) \in [0,1] \setminus [r,t]$. De donde se sigue que $q^{-1}(q(x)) \cap q^{-1}([r,t]) = \emptyset$. Como q es monótona, $q^{-1}([r,t])$ es un subcontinuo de X. Por construcción, $y \in Int_X(q^{-1}([r,t]))$. Por lo tanto, $y \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A) \subset q^{-1}(q(x))$. $\square$

Teorema 2.7.5. *Si X es un continuo tipo λ, entonces $\{\mathcal{T}^2(\{x\}) \mid x \in X\}$ es la descomposición monótona semicontinua superiormente más fina $\mathcal{G}$ de X tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco.*

Demostración. Sean $\mathcal{G}$ la descomposición monótona semicontinua superiormente más fina de X tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco y $q\colon X \twoheadrightarrow [0,1]$ la función cociente. Observemos que $\mathcal{G} = \{q^{-1}(q(x)) \mid x \in X\}$.

Sea $x \in X$. Notemos que $\mathcal{T}(\{x\}) \subset q^{-1}(q(x))$, por el Lema 2.7.4. Por [45, Teorema 18, pág. 26], existe $z \in q^{-1}(q(x))$ tal que $\mathcal{T}(\{z\}) = q^{-1}(q(x))$. Como X es $\mathcal{T}$-simétrico [29, Corolario 3.1.37] y $x \in \mathcal{T}(\{z\})$, tenemos que $z \in \mathcal{T}(\{x\})$. Entonces, $q^{-1}(q(x)) = \mathcal{T}(\{z\}) \subset \mathcal{T}^2(\{x\}) \subset q^{-1}(q(x))$ (donde la última inclusión se tiene por el Lema 2.7.4). Así, $\mathcal{T}^2(\{x\}) = q^{-1}(q(x))$. Como x es un punto arbitrario de X, $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}^2(\{x\}) \mid x \in X\}$. □

Como consecuencia del Teorema 2.7.5 y el Corolario 2.5.8, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.7.6. *Si X es un continuo tipo λ, entonces $\{\mathcal{K}^2(\{x\}) \mid x \in X\}$ es la descomposición monótona semicontinua superiormente más fina $\mathcal{G}$ de X tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco.*

2.8. Continuidad de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$

Para hablar de continuidad de las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{K}$ necesitamos restringir el dominio de éstas a 2^X. (Definición 2.1.27)

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [17, Teorema 7].

Teorema 2.8.1. *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si para cada $x \in X$, $\mathcal{K}$ es continua en $\{x\}$, entonces $\mathcal{K}$ es continua.*

La idea de la demostracción del Teorema 2.8.1 es el hecho de que $\mathcal{K}(\{x\})$ es conexo para cada $x \in X$. Como $\mathcal{K}(\{x\})$ es conexo, para cada $x \in X$ cuando X es un continuo irreducible, entonces la demostración del Teorema 2.8.2 es muy similar a la prueba del Teorema 2.8.1, por lo que la omitiremos.

Teorema 2.8.2. *Sea X un continuo irreducible. Si para cada $x \in X$, $\mathcal{K}$ es continua en $\{x\}$, entonces $\mathcal{K}$ es continua.*

Para probar el teorema de continuidad de la función $\mathcal{T}$ (Teorema 2.8.7), necesitamos los siguientes resultados.

Lema 2.8.3. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $\mathcal{A} = \{\mathcal{T}(\{a\}) \mid a \in A\}$. Si $\mathcal{T}$ es continua en $\{x\}$ para cada $x \in X$, entonces $\mathcal{A}$ es cerrado en 2^X.*

Demostración. Sea $B \in Cl_{2^X}(\mathcal{A})$. Entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A tales que la sucesión $\{\mathcal{T}(\{a_n\})\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B. Como A es compacto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $a \in A$. Como $\mathcal{T}$ es continua en $\{x\}$ para cada $x \in X$, $B = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}(\{a_n\}) = \mathcal{T}(\{a\})$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrado en 2^X. $\square$

Teorema 2.8.4. *Sea X un continuo tal que $\mathcal{T}(A) = \bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) \mid a \in A\}$ para todo $A \in 2^X$. Si $\mathcal{T}$ es continua en $\{x\}$ para cada $x \in X$, entonces $\mathcal{T}$ es continua.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dadas por la continuidad uniforme de $\mathcal{T}|_{\mathcal{F}_1(X)}$.

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $\mathcal{H}(A,B) < \delta$. Sean $\mathcal{A} = \{\mathcal{T}(\{a\}) \mid a \in A\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}(\{b\}) \mid b \in B\}$. Por el Lema 2.8.3, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subconjuntos cerrados de 2^X. Sea $\mathcal{T}(\{a\}) \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{H}(A,B) < \delta$, existe $b \in B$ tal que $\mathcal{H}(\{a\},\{b\}) < \delta$. Entonces, por la elección de δ, $\mathcal{H}(\mathcal{T}(\{a\}), \mathcal{T}(\{b\})) < \varepsilon$. Así, $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon}^{\mathcal{H}}(\mathcal{B})$. De forma similar $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon}^{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\mathcal{H}_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \varepsilon$, donde $\mathcal{H}_2$ es la métrica de Hausdorff en 2^{2^X} inducida por $\mathcal{H}$. Entonces, por [42, 1.48],

$\mathcal{H}(\cup\mathcal{A},\cup\mathcal{B}) \leq \mathcal{H}_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \varepsilon$. Por hipótesis, $\mathcal{T}(A) = \cup\mathcal{A}$ y $\mathcal{T}(B) = \cup\mathcal{B}$. Por lo que hemos probado que si $\mathcal{H}(A,B) < \delta$, entonces $\mathcal{H}(\mathcal{T}(A),\mathcal{T}(B)) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es continua. □

Corolario 2.8.5. *Sea X un continuo $\mathcal{T}$-aditivo. Si $\mathcal{T}$ es continua en $\{x\}$ para todo $x \in X$, entonces $\mathcal{T}$ es continua.*

Demostración. Como X es $\mathcal{T}$-aditivo, $\mathcal{T}(A) = \bigcup\{\mathcal{T}(\{a\}) \mid a \in A\}$ para todo $A \in 2^X$ [29, Corolario 3.1.46]. Así, el corolario se sigue del Teorema 2.8.4. □

Necesitamos ahora la definición de continuo continuamente irreducible. Para esto vemos que en el Teorema 2.7.2 se prueba que un continuo X es de tipo λ si y sólo si X admite una descomposición monótona semicontinua superiormente $\mathcal{G}$ tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ es denso en ninguna parte y $X/\mathcal{G}$ es un arco. Además, $\mathcal{G}$ es la descomposición más fina de X con estas propiedades. Cada elemento de $\mathcal{G}$ se llama un *nivel* de X. Siguiendo [37] tenemos la siguiente definición. (Véase también [34]).

Definición 2.8.6. *Sea X un continuo tipo λ. Decimos X es* continuamente irreducible *si la descomposición $\mathcal{G}$ de X es continua.*

Ahora caracterizamos la clase de continuos irreducibles para los cuales la función $\mathcal{T}$ es continua.

Teorema 2.8.7. *Sea X un continuo irreducible. Entonces $\mathcal{T}$ es continua para X si y sólo si X es continuamente irreducible.*

Demostración. Notamos que si X es continuamente irreducible, entonces $\mathcal{T}$ es continua para X [34, Teorema 3.2].

Supongamos que X es un continuo irreducible para el cual $\mathcal{T}$ es continua. Como X es irreducible, X es $\mathcal{T}$-simétrico [29, Corolario 3.1.37]. Entonces X es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico. Como también $\mathcal{T}$ es continua, tenemos que $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$ es una descomposición continua y monótona de X tal que $X/\mathcal{G}$ es un continuo localmente conexo y los elementos de $\mathcal{G}$ son densos en ninguna parte [32, Teorema 3.8]. Como X es irreducible y la función cociente $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es monótona, $X/\mathcal{G}$ es un continuo irreducible [25, Teorema 3, pág. 192]. Entonces, $X/\mathcal{G}$ es un arco. Así, X es un continuo del tipo λ. Como $\mathcal{T}$ es continua, X es continuamente irreducible [34, Teorema 3.2]. □

Ahora caracterizamos la clase de continuos irreducibles para los cuales la función $\mathcal{K}$ es continua, para lo cual necesitamos la definición de subcontinuos terminales.

Definición 2.8.8. *Sea X un continuo. Decimos que un subcontinuo W de X es un subcontinuo terminal de X si para cualquier otro subcontinuo N de X tal que $W \cap N \neq \emptyset$, se tiene que $W \subseteq N$ o $N \subseteq W$.*

Teorema 2.8.9. *Sea X un continuo irreducible. Entonces $\mathcal{K}_X$ es continua para X si y sólo si X es continuamente irreducible.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K}_X$ es continua. Como X es irreducible, X es $\mathcal{T}_X$-simétrico [29, Corolario 3.1.37]. Entonces X es $\mathcal{T}_X$-aditivo [29, Teorema 3.1.44] y puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico. Como X es puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico, $\mathcal{K}_X(\{x\}) = \mathcal{T}_X(\{x\})$, por Teorema 2.5.1. Como $\mathcal{K}_X$ también es continua, $\mathcal{T}_X$ es continua en $\{x\}$ para toda $x \in X$. Así, por el Corolario 2.8.5, $\mathcal{T}_X$ es continua. Por lo tanto, por el Teorema 2.8.7, X es continuamente irreducible.

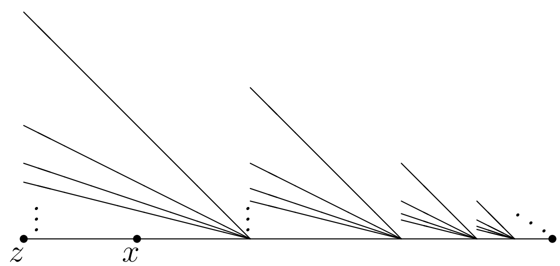
Ahora, supongamos que X es un continuo continuamente irreducible. Sea $q\colon X \twoheadrightarrow [0,1]$ la función cociente. Entonces $q^{-1}(t)$ es un subcontinuo terminal de X para toda $t \in [0,1]$ [34, Lema 3.3]. Como q es monótona, abierta y cada $q^{-1}(t)$ es un continuo terminal $\mathcal{K}_X(A) = q^{-1}\mathcal{K}_{[0,1]}q(A)$ para cada $A \in 2^X$ [33, Teorema 3.2]. Sea $\Im(q)\colon 2^{[0,1]} \to 2^X$ dada por $\Im(q)(B) = q^{-1}(B)$. Como q es continua y abierta, tenemos que $\Im(q)$ y 2^q son continuas ([24, Teorema 2, pág. 165] y [42, (1.168)], respectivamente). Como $\mathcal{K}_{[0,1]}$ es continua [18, Teorema 27] y $\mathcal{K}_X = \Im(q) \circ \mathcal{K}_{[0,1]} \circ 2^q$, $\mathcal{K}_X$ es continua.

□

2.9. Algunos otros resultados

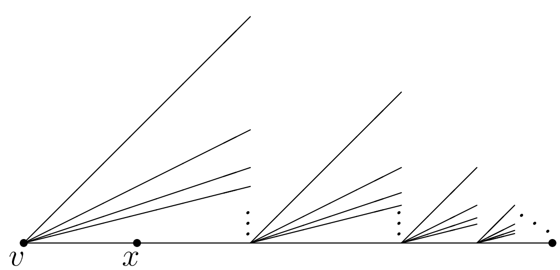
En esta última sección de este capítulo presentamos un ejemplo que responde a la pregunta 5 de la página 118 de [18]. El Ejemplo 2.9.1 es de un continuo para el cual la función $\mathcal{T}$ se estaciona (ver Definición 2.1.6), mientras que la función $\mathcal{K}$ no se estaciona. También presentamos el Ejemplo 2.9.2 que muestra un continuo para el cual la función $\mathcal{K}$ se estaciona mientras que la función $\mathcal{T}$ no se estaciona.

Ejemplo 2.9.1. *Sea X el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$:*



Es fácil verificar que $\mathcal{T}^n(\{x\}) = \overline{xz}$ para cada $n \geq 1$ pero $\mathcal{K}^{n+1}(\{x\}) \neq \mathcal{K}^n(\{x\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.9.2. *Sea X el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$:*



Es fácil verificar que $\mathcal{K}^n(\{x\}) = \overline{vx}$ para cada $n \geq 1$ pero $\mathcal{T}^{n+1}(\{x\}) \neq \mathcal{T}^n(\{x\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

La función $\mathcal{T}_a$

La función $\mathcal{T}_a$ se define de forma similar a como Jones definió la función $\mathcal{T}$, la principal diferencia es que la función $\mathcal{T}_a$ requiere que el continuo en el que se define sea arcoconexo.

3.1. La función $\mathcal{T}_a$, ejemplos y algunas propiedades

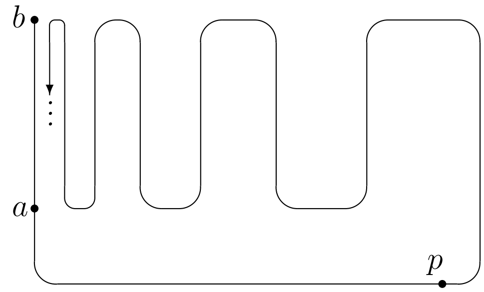
Comenzamos con la definicón de la función T_a.

Definición 3.1.1. *Sea X un un continuo arcoconexo. Definimos la función $\mathcal{T}_a\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: para cada $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{T}_a(A) = X \setminus \{x \in X \mid$ existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A\}$.*

Observación 3.1.2. *De la definición de $\mathcal{T}_a$ es fácil ver que $\mathcal{T}_a(\emptyset) = \emptyset$ y para cada $A \in 2^X$, $A \subseteq \mathcal{T}_a(A)$ y $\mathcal{T}_a(A) \in 2^X$. También, de la definición, es fácil ver que si A y $B \in 2^X$ tales que $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{T}_a(A) \subseteq \mathcal{T}_a(B)$.*

El siguiente ejemplo muestra que, en general, $\mathcal{T}(A) \neq \mathcal{T}_a(A)$.

Ejemplo 3.1.3. *Sea X el círculo de Varsovia con barra límite el segmento ab. Podemos ver que, si p es un punto de X que no está en la barra límite, $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$, mientras que $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\} \cup ab$.*



Recordemos que un continuo X es indescomponible si y sólo si $\mathcal{T}(A) = X$ para todo $A \in 2^X$ [29, Teorema 3.1.34]. Uno se podría preguntar qué pasa en el caso de la función $\mathcal{T}_a$; i.e, ¿Existe un continuo arcoconexo X tal que $\mathcal{T}_a(A) = X$ para todo $A \in 2^X$? En [1] se construye un continuo arcoconexo tal que todos sus subcontinuos arcoconexos propios tienen interior vacío. Esto nos muestra que existen continuos arcoconexos para los cuales la función $\mathcal{T}_a$ es constante.

Definición 3.1.4. *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$. Decimos que X es arcoconexo en pequeño en p si para cualquier conjunto abierto U de X que contiene a p, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Decimos que X es arcoconexo en pequeño si lo es en todos sus puntos.*

El continuo del Ejemplo 1.2.13 es un continuo que es arcoconexo en pequeño en el punto p y que no es localmente conexo.

Teorema 3.1.5. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es arcoconexo en pequeño en cada uno de sus puntos si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es arcoconexo en pequeño en todos sus puntos. Por definición, X es conexo en pequeño en todos sus puntos, así, por Teorema 1.2.15, X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo. Por Teorema 1.4.4, podemos suponer que X tiene métrica convexa. Sean p un punto de X y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Sea $r > 0$ tal que $\mathcal{V}_r(p) \subseteq U$. Por la Proposición 1.4.6, $Cl(\mathcal{V}_{\frac{r}{2}}(p))$ es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $p \in \mathcal{V}_{\frac{r}{2}}(p) \subseteq Cl(\mathcal{V}_{\frac{r}{2}}(p)) \subseteq U$. Así, X es arcoconexo en pequeño en todos sus puntos. $\square$

Teorema 3.1.6. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es arcoconexo en pequeño si y sólo si $\mathcal{T}_a(A) = A$ para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Supongamos que X es arcoconexo en pequeño y sea $A \in 2^X$. Por la Observación 3.1.2, $A \subseteq \mathcal{T}_a(A)$. Sea $x \in X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es un abierto y X es regular, existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U \subseteq Cl(U) \subseteq X \setminus A$. Como X es arcoconexo en pequeño, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Como $Cl(U) \cap A \subseteq (X \setminus A) \cap A = \emptyset$, entonces $W \subseteq X \setminus A$. Lo que implica que $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a(A) = A$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{T}_a(A) = A$ para cada $A \in 2^X$. Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto de X que contiene a p. Como $X \setminus U \in 2^X$, entonces $\mathcal{T}_a(X \setminus U) = X \setminus U$ y $p \notin \mathcal{T}_a(X \setminus U)$. Así, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus (X \setminus U)$. Esto implica que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Entonces, X es arcoconexo en pequeño en p. Como p fue arbitrario, X es arcoconexo en pequeño (Definición 3.1.4). $\square$

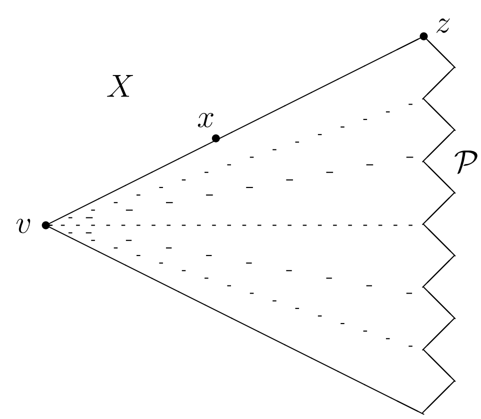
Como consecuencia de los Teoremas 3.1.5 y 3.1.6 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.7. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $\mathcal{T}_a(A) = A$ para todo $A \in 2^X$.*

Definición 3.1.8. *Sean X un continuo arcoconexo y p y $q \in X$. Decimos que X es aposindético por arcoconexos en p con respecto a q si existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{q\}$. Decimos que X es aposindético por arcoconexos en p si X es aposindético por arcoconexos en p con respecto a cualquier punto de $X \setminus \{p\}$. Finalmente, decimos que X es aposindético por acrcoconexos si X es aposindético por arcoconexos en cada uno de sus puntos.*

El cono sobre el pseudoarco es un ejemplo de un continuo arcoconexo que es aposindético pero que no es aposindético por arcoconexos.

Ejemplo 3.1.9. *Sea X el cono sobre el pseudoarco $\mathcal{P}$. Entonces X es aposindético pero no es aposindético por arcoconexos. Para $x \in X \setminus \mathcal{P}$ sea z el punto extremo del arco que une v con $\mathcal{P}$ y contiene a x. Entonces $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$, mientras que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \overline{xz}$, donde $\overline{xz}$ denota el segmento de recta de x a z.*



Teorema 3.1.10. *Sean X un continuo arcoconexo y A un subconjunto cerrado de X. Si $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$, entonces X es aposindético por arcoconexos en x con respecto a cada punto de A.*

Demostración. Sean $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$ y $a \in A$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Como $X \setminus A \subseteq X \setminus \{a\}$, entonces W es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{a\}$. Por lo tanto, X es aposindético por arcoconexos en x con respecto a a. $\square$

Teorema 3.1.11. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es aposindético por arcoconexos si y sólo si $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\}$ para cada $p \in X$.*

Demostración. Supongamos que X es aposindético por arcoconexos. Por la Observación 3.1.2 tenemos que $\{p\} \subseteq \mathcal{T}_a(\{p\})$. Sea $q \in X \setminus \{p\}$. Como X es aposindético por arcoconexos, existe un continuo arcoconexo W tal que $q \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$. Esto implica que $q \in X \setminus \mathcal{T}_a(\{p\})$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\}$ para cada $p \in X$. Sean p y q puntos distintos de X. Como $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\}$, existe un continuo arcoconexo W tal que $q \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$, lo que implica que X es aposindético por arcoconexos en q con respecto a p. Como p y q fueron arbitrarios, X es aposindético por arcoconexos. $\square$

Observación 3.1.12. *Podemos ver, de la definición de las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$, que si X es un continuo arcoconexo entonces $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}_a(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

También, como consecuencia de las definiciones de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.13. *Sea X un continuo arcoconexo. Si X es hereditariamente arcoconexo, entonces $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}_a(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

Definición 3.1.14. *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$. Decimos que X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en p si para cualquier subconjunto abierto U de X que contiene a p, hay un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es la unión de un número finito de continuos arcoconexos ajenos dos a dos. Decimos que X es fuertemente semilocalmente arcoconexo si X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en p para cada $p \in X$.*

Teorema 3.1.15. *Sean X un continuo arcoconexo y $x \in X$. Entonces X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en x si y sólo si $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.*

Demostración. Sean X un continuo arcoconexo y $x \in X$. Supongamos que X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en x y sea $y \in X \setminus \{x\}$. Sea U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $y \notin Cl(U)$. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en x, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es la unión de un número finito de continuos arcoconexos. Como $y \in X \setminus V$, entonces la comoponente de y en $X \setminus V$ es un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $y \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus \{x\}$. Lo que implica que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto que contiene a p. Para cada $y \in X \setminus \{p\}$ existe un subcontinuo arcoconexo W_y de X tal que $y \in Int(W_y) \subseteq W_y \subseteq X \setminus \{p\}$. La familia $\{Int(W_y) \mid y \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$. Como $X \setminus U$ es un compacto, existen $y_1, y_2, ..., y_n \in X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Sea $V = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Entonces $X \setminus V$ es la unión de un número finito de subcontinuos arcoconexos de X. Por lo tanto, X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en p. $\square$

Definición 3.1.16. *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$. Decimos que X es colocalmente arcoconexo en p si para cualquier subconjunto abierto U de X que contiene a p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es arcoconexo. Decimos que X es colocalmente arcoconexo si X es colocalmente arcoconexo en p para cada $p \in X$.*

Teorema 3.1.17. *Si X es fuertemente semilocalmente arcoconexo sin puntos de corte, entonces X es colocalmente arcoconexo.*

Demostración. Sea X un continuo arcoconexo, fuertemente semilocalmente arcoconexo y sin puntos de corte. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo, entonces X es semilocalmente conexo (Definición 1.2.19) y sin puntos de corte. Se sigue de [48, Corolario 6.22], que para cada $x \in X$, existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $X \setminus U$ es conexo. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es la unión de una cantidad finita de subcontinuos arcoconexos de X. Sean $K_1, K_2, ..., K_n$ subcontinuos arcoconexos de X tales que $X \setminus V = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Entonces $X \setminus U \subseteq K_j$ para alguna $j \in \{1, 2, ..., n\}$, ya que si tenemos que $(X \setminus U) \cap K_i \neq \emptyset$ y $(X \setminus U) \cap K_j \neq \emptyset$ con $i \neq j$, entonces $X \setminus U$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo que $X \setminus U \subseteq K_j$ para alguna $j \in \{1, 2, ..., n\}$. De aquí se sigue que $X \setminus K_j$ es un conjunto abierto de X tal que $x \in X \setminus K_j \subseteq U$ cuyo complemento, K_j, es arcoconexo. Por lo tanto, X es colocalmente arcoconexo. □

Como consecuencia de los Teoremas 3.1.15 y 3.1.17 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.18. *Sean X un continuo arcoconexo sin puntos de corte y $x \in X$. Entonces X es colocalmente arcoconexo en x si y sólo si $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.*

Definición 3.1.19. *Sea X un continuo. Una base de filtro $\mathcal{F}$ en X es una familia $\mathcal{F} = \{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ de subconjuntos de X tal que para cada $\omega \in \Omega$, $A_\omega \neq \emptyset$ y para cada par ω_1 y $\omega_2 \in \Omega$, existe $\omega_3 \in \Omega$ tal que $A_{\omega_3} \subseteq A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2}$.*

Lema 3.1.20. *Sea X un continuo arcoconexo. Si $\mathcal{F}$ es una base de filtro de conjuntos cerrados de X, entonces $\mathcal{T}_a(\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\}) = \bigcap\{\mathcal{T}_a(G) \mid G \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración. Sabemos, por la Observación 3.1.2, que $\mathcal{T}_a(\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\}) \subseteq \bigcap\{\mathcal{T}_a(G) \mid G \in \mathcal{F}\}$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\})$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus (\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\})$. Como W es compacto, existen $G_1, G_2, ..., G_n$ en $\mathcal{F}$ tales que $W \subseteq X \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} G_i)$. Entonces $W \cap (\bigcap_{i=1}^{n} G_i) = \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ es una base de filtro, existe un conjunto cerrado G en $\mathcal{F}$ tal que $G \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Esto implica que $W \cap G = \emptyset$. Así, $p \in X \setminus \mathcal{T}_a(G)$. Por lo tanto, $p \in X \setminus \bigcap\{\mathcal{T}_a(G) \mid G \in \mathcal{F}\}$. $\square$

Teorema 3.1.21. *Sea X un continuo arcoconexo. Si para cada punto $x \in X$ y para cada par de subcontinuos arcoconexos W_1 y W_2 de X tales que $x \in Int(W_j)$, $j \in \{1,2\}$, existe un subcontinuo arcoconexo W_3 de X tal que $x \in Int(W_3)$ y $W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo (Definición 2.1.3).*

Demostración. Sean A_1 y A_2 dos subconjuntos cerrados de X. Como $\mathcal{T}_a(A_1) \cup \mathcal{T}_a(A_2) \subseteq \mathcal{T}_a(A_1 \cup A_2)$, necesitamos probar que $\mathcal{T}_a(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{T}_a(A_1) \cup \mathcal{T}_a(A_2)$. Para esto, sea x un punto en $X \setminus (\mathcal{T}_a(A_1) \cup \mathcal{T}_a(A_2))$. Entonces $x \in (X \setminus \mathcal{T}_a(A_1)) \cap (X \setminus \mathcal{T}_a(A_2))$. Se sigue que existen dos subcontinuos arcoconexos W_1 y W_2 de X tales que $x \in Int(W_j) \subseteq W_j \subseteq X \setminus A_j$, $j \in \{1,2\}$. Por hipótesis, existe un subcontinuo arcoconexo W_3 de X tal que $x \in Int(W_3) \subseteq W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$ y $W_1 \cap W_2 \subseteq X \setminus (A_1 \cup A_2)$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A_1 \cup A_2)$. $\square$

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.21 es el siguiente resultado.

Corolario 3.1.22. *Si X es un dendroide, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Teorema 3.1.23. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo si y sólo si para cada familia Λ de subconjuntos cerrados de X, cuya unión es cerrada en X, se tiene que $\mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\}) = \bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\}$.*

Demostración. Supongamos que X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Por la Observación 3.1.2, sabemos que $\bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\})$. Sea x un punto de $X \setminus (\bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\})$. Para cada $L \in \Lambda$ sea $F(L) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado y } L \subseteq Int(A)\}$.

Caso (1) Si $L = \emptyset$, entonces $\emptyset \in F(L)$. Como $\mathcal{T}_a(\emptyset) = \emptyset$, tenemos que $\emptyset = \mathcal{T}_a(L) = \bigcap\{\mathcal{T}_a(A) \mid A \in F(L)\}$.

Caso (2) Si $L \neq \emptyset$, entonces $F(L)$ es una base de filtro de subconjuntos cerrados de X. Como $\bigcap\{A \mid A \in F(L)\} = L$, entonces $\mathcal{T}_a(L) = \mathcal{T}_a(\bigcap\{A \mid A \in F(L)\})$. Por el Lema 3.1.20, $\mathcal{T}_a(L) = \bigcap\{\mathcal{T}_a(A) \mid A \in F(L)\}$. Entonces para cada $L \in \Lambda$, $x \in X \setminus (\bigcap\{\mathcal{T}_a(A) \mid A \in F(L)\})$. Así, para cada $L \in \Lambda$, existe $A_L \in F(L)$ tal que $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A_L)$.

Ahora, $\{Int(A_L) \mid L \in \Lambda\}$ es una cubierta abierta de $\bigcap\{L \mid L \in \Lambda\}$. Como $\bigcap\{L \mid L \in \Lambda\}$ es compacto, existen $L_1, L_2, ..., L_m \in \Lambda$ tales que $\bigcap\{L \mid L \in \Lambda\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m Int(A_{L_j})$. Entonces, por hipótesis y utilizando inducción matemática, tenemos que $\mathcal{T}_a(\bigcup_{j=1}^m A_{L_j}) = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{T}_a(A_{L_j})$. Entonces $\mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\}) \subseteq \bigcup_{j=1}^m \mathcal{T}_a(A_{L_j})$. Como para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A_{L_j})$, se sigue que $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\})$. Así, tenemos que $\mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\}) \subseteq \bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\}$.

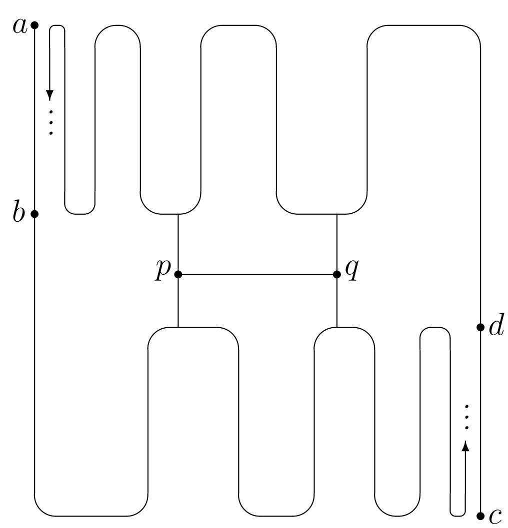
La otra implicación es clara. $\square$

Corolario 3.1.24. *Sea X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si K es un subcontinuo de X tal que $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$, entonces $\mathcal{T}_a(K)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Sean X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo y K un subcontinuo de X tal que $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$. Por hipótesis y por el Teorema 3.1.23, $\mathcal{T}_a(K) = \mathcal{T}_a(\bigcup_{x\in K}\{x\}) = \bigcup_{x\in K}\mathcal{T}_a(\{x\})$. Como $K \cup \mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$, entonces $\bigcup_{x\in K}(K \cup \mathcal{T}_a(\{x\}))$ es conexo. Como $K \subseteq \bigcup_{x\in K}\mathcal{T}_a(\{x\})$, entonces tenemos que $\bigcup_{x\in K}(K\cup\mathcal{T}_a(\{x\})) = K \cup (\bigcup_{x\in K}\mathcal{T}_a(\{x\})) = \bigcup_{x\in K}\mathcal{T}_a(\{x\}) = \mathcal{T}_a(K)$, lo que prueba que $\mathcal{T}_a(K)$ es conexo. □

El siguiente ejemplo muestra que en el Corolario 3.1.24 no se puede quitar la hipóteis de que el continuo sea $\mathcal{T}_a$-aditivo.

Ejemplo 3.1.25. *Sea X el continuo de la siguiente figura. Si W es el segmento horizontal $\overline{pq}$, es fácil verificar que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in W$, es decir, $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in W$, pero vemos que $\mathcal{T}_a(W) = W \cup \overline{ab} \cup \overline{cd}$ que no es conexo.*



Teorema 3.1.26. *Sea X un continuo arcoconexo. Si X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Demostración. Sean X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-simétrico y A y B subconjuntos cerrados de X. Como $\mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B) \subseteq \mathcal{T}_a(A \cup B)$, necesitamos probar que $\mathcal{T}_a(A \cup B) \subseteq \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Sea $x \in \mathcal{T}_a(A \cup B)$. Entonces $\{x\} \cap \mathcal{T}_a(A \cup B) \neq \emptyset$. Como X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, $\mathcal{T}_a(\{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{T}_a(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ o $\mathcal{T}_a(\{x\}) \cap B \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{T}_a(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Como X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, $\{x\} \cap \mathcal{T}_a(A) \neq \emptyset$, lo que implica que $x \in \mathcal{T}_a(A)$. Entonces, $x \in \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Por lo tanto, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. □

Teorema 3.1.27. *Sea X un continuo arcoconexo tal que $\mathcal{T}_a(A) = A$ o que $\mathcal{T}_a(A) = X$ para cada A en 2^X. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo y $\mathcal{T}_a$-simétrico.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}_a(A) = A$ para cada subconjunto cerrado A de X. Entonces $\mathcal{T}_a(A \cup B) = A \cup B = \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Así, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si $A \cap \mathcal{T}_a(B) = \emptyset$, entonces $A \cap B = \emptyset$ y $\mathcal{T}_a(A) \cap B = \emptyset$. Así, X es $\mathcal{T}_a$-simétrico.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}_a(A) = X$ para cada subconjunto cerrado A de X. Entonces $\mathcal{T}_a(A \cup B) = X = \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Así, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Por último, como $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}_a(A) \cap B \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_a(B) \cap A \neq \emptyset$, por lo que X es $\mathcal{T}_a$-simétrico. □

Teorema 3.1.28. *Sea X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo y puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-simétrico.*

Demostración. Sea X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo y puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X tales que $A \cap \mathcal{T}_a(B) = \emptyset$. Entonces para cada $x \in A$ y para cada $y \in B$, $x \notin \mathcal{T}_a(\{y\})$. Como X es puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico tenemos que $y \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$ para cada $x \in A$ y para cada $y \in B$. Ahora, como X es $\mathcal{T}_a$-aditivo, entonces $\mathcal{T}_a(A) = \mathcal{T}_a(\bigcup_{x \in A} \{x\}) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{T}_a(\{x\})$ (Teorema 3.1.23). Así, $y \notin \mathcal{T}_a(A)$ para ninguna $y \in B$. Lo que implica que $B \cap \mathcal{T}_a(A) = \emptyset$. Por lo tanto, X es $\mathcal{T}_a$-simétrico. □

Teorema 3.1.29. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces $\mathcal{T}_a$ es idempotente en X si y sólo si para cada subcontinuo arcoconexo W de X y para cada $x \in Int(W)$ existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}_a$ es idempotente en X. Sean W un subcontinuo arcoconexo de X y $x \in Int(W)$. Entonces $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(X \setminus W)$. Como $\mathcal{T}_a$ es idempotente en X, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a^2(X \setminus W)$. Esto implica que existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq X \setminus \mathcal{T}_a(X \setminus W) \subseteq X \setminus (X \setminus W) = W$. Por lo tanto, $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$.

Ahora supongamos que para cada subcontinuo arcoconexo W de X y para cada $x \in Int(W)$, existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$. Sea $B \in \mathcal{P}(X)$. Por la Observación 3.1.2 tenemos que $\mathcal{T}_a(B) \subseteq \mathcal{T}_a^2(B)$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(B)$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus B$. Por hipótesis, existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$. Como $Int(W) \cap \mathcal{T}_a(B) = \emptyset$, entonces $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq X \setminus \mathcal{T}_a(B)$. Así, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a^2(B)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a$ es idempotent en X. □

3.2. Continuos únicamente arcoconexos

En esta sección se presentan algunas propiedades de la función $\mathcal{T}_a$ en continuos únicamente arcoconexos.

Como consecuencia de los Teoremas 3.1.21 y 1.5.3 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Si X es un continuo únicamente arcoconexo, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Observación 3.2.2. *Por el Teorema 3.2.1, podemos ver que el recíproco del Teorema 3.1.26 no es cierto. Como el Círculo de Varsovia es únicamente* *arcoconexo entonces es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si x es un punto en la barra límite y y es un punto que no está en la barra límite, es fácil verificar que $x \in \mathcal{T}_a(\{y\})$, pero $y \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$.*

Como consecuencia del Corolario 3.1.24 y el Teorema 3.2.1 tenemos este otro resultado.

Corolario 3.2.3. *Sean X un continuo únicamente arcoconexo y K un subcontinuo de X. Si $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$, entonces $\mathcal{T}_a(K)$ es un subcontinuo de X.*

Ahora veremos un resultado de la función $\mathcal{T}_a$ en dendroides.

Teorema 3.2.4. *Sea X un dendroide. Si X no es localmente conexo, entonces existe $p \in X$ tal que $\mathcal{T}_a(\{p\}) \neq \{p\}$.*

Demostración. Sea X un dendroide que no es localmente conexo. Entonces hay un punto p de X tal que X no es conexo en pequeño en p. Así que existe $\delta > 0$ tal que si V es una vecindad de p y $V \subseteq \mathcal{V}_\delta(p)$, V no es conexo. Sean V una vecindad de p tal que $p \in V \subseteq Cl(V) \subseteq \mathcal{V}_\delta(p)$ y B la componente de $Cl(V)$ que contiene a p. Entonces, por [49, Teorema 12.1, pág. 18], tenemos:

(i) existen una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de $Cl(V)$ y un subcontinuo A de B que contiene a p tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, y si $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$,

(ii) $p \in A$,

(iii) si $x \in A$, entonces X no es conexo en pequeño en x,

(iv) $A \subseteq \mathcal{V}_\delta(p)$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{V}_\delta(p)$ tal que $x_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Sean $q \in A \setminus \{p\}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{V}_\delta(p)$ tal que $y_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = q$.

Sea α_i el arco que une a x_i con p. Si existen una cantidad infinita de arcos α_i que contienen a q entonces $p \in \mathcal{T}_a(\{q\})$, ya que si $p \notin \mathcal{T}_a(\{q\})$ entonces existiría un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W)$ y $q \notin W$. Como W es arcoconexo, X es un dendroide, y $p \in Int(W)$, existe un número natural N tal que el arco α_i está contenido en W para cada $i \geq N$. Pero, como $q \notin W$, esto implica que existe sólo una cantidad finita de arcos α_i que contienen a q, lo cual es una contradicción. En consecuencia $p \in \mathcal{T}_a(\{q\})$ y, así, $\mathcal{T}_a(\{q\}) \neq \{q\}$. Si sólo hay una cantidad finita de arcos α_i que contienen a q, entonces, como X es únicamente arcoconexo, hay una cantidad infinita de arcos β_i que unen y_i con q que contienen a p. Entonces $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$ y, así, $\mathcal{T}_a(\{p\}) \neq \{p\}$. □

Observación 3.2.5. *Usando el hecho de que en los dendroides (en general, en los continuos hereditariamente arcoconexos) las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$ coinciden, el Teorema 3.2.4 implica también que, si X es un dendroide que no es localmente conexo, entonces existe un punto p en X tal que $\mathcal{T}(\{p\}) \neq \{p\}$.*

3.3. Continuos cíclicamente arcoconexos

Ahora estudiamos la función $\mathcal{T}_a$ en continuos cíclicamente arcoconexos, los cuales definimos a continuación.

Definición 3.3.1. *Sea X un continuo arcoconexo. Decimos que X es cíclicamente arcoconexo si cualquier par de puntos de X están contenidos en una curva cerrada simple.*

Una curva cerrada simple y la suspensión sobre el conjunto de Cantor (Ejemplo 1.2.18) son ejemplos de continuos cíclicamente arcoconexos

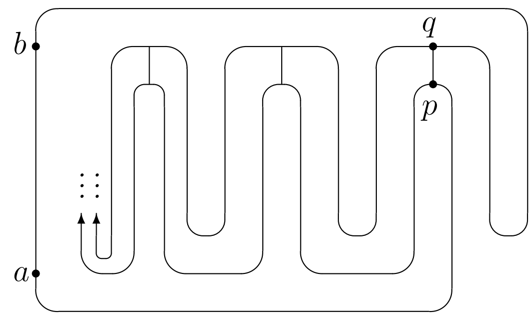
Teorema 3.3.2. *Si X es un continuo cíclicamente arcoconexo, entonces para cada $x \in X$, $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo.*

Demostración. Sean X un continuo cíclicamente arcoconexo y $x \in X$. Supongamos que $\mathcal{T}_a(\{x\})$ no es conexo para algún $x \in X$. Entonces existen dos subconjuntos cerrados ajenos A y B de X tales que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = A \cup B$. Supongamos que $x \in A$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq U$ y $Cl(U) \cap B = \emptyset$. Entonces $Fr(U) \cap \mathcal{T}_a(\{x\}) = \emptyset$ y, así, para cada $z \in Fr(U)$, existe un subcontinuo arcoconexo K_z de X tal que $z \in Int(K_z) \subseteq K_z \subseteq X \setminus \{x\}$. Como $Fr(U)$ es compacto, existen $z_1, z_2, ..., z_n \in Fr(U)$ tales que $Fr(U) \subseteq \bigcup_{i=1}^n Int(K_{z_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_{z_i}$. Sean $V = U \setminus (\bigcup_{i=1}^n K_{z_i})$ y $Y = X \setminus V = (X \setminus U) \cup (\bigcup_{i=1}^n K_{z_i})$. Por [43, Teorema 5.4], Y tiene una cantidad finita de componentes. Notamos que $B \subseteq X \setminus Cl(U) \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus V = Y$, en otras palabras, $B \subseteq Int(Y)$. Sean $b \in B$ y C la componente de Y que contiene a b. Entonces C es un subcontinuo de X tal que $b \in Int(C) \subseteq C \subseteq X \setminus \{x\}$. Si C es arcoconexo, entonces $b \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$, lo cual es una contradicción. Supongamos que C no es arcoconexo. Podemos suponer que $K_{z_i} \cap C \neq \emptyset$ si $1 \leq i \leq l$ y $K_{z_i} \cap C = \emptyset$ si $i > l$. Sea $D = C \cup \bigcup_{i=1}^l K_{z_i}$. Entonces D es un subcontinuo de X tal que $b \in Int(D)$. Como X es cíclicamente arcoconexo, entonces $X \setminus \{x\}$ es arcoconexo. Para cada $i \in \{1, 2, ..., l\}$, sea α_i un arco en $X \setminus \{x\}$ de b a un punto en K_{z_i}. Sea $E = D \cup \bigcup_{i=1}^l \alpha_i$. Como $X \setminus \{x\}$ es arcoconexo, cada arcocomponente de C intersecta a algún K_{z_i} para alguna $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Entonces E es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $b \in Int(E) \subseteq E \subseteq X \setminus \{x\}$, lo que implica que $b \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$ así obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo. □

Corolario 3.3.3. *Sea X un continuo cíclicamente arcoconexo y $\mathcal{T}_a$-aditivo. Entonces $\mathcal{T}_a(W)$ es un subcontinuo de X para cada subcontinuo W de X.*

El siguiente ejemplo que aparece en [5, pág. 390] muestra que si X es cíclicamente arcoconexo y W es un subcontinuo de X, entonces $\mathcal{T}_a(W)$ no necesariamente es conexo.

Ejemplo 3.3.4. *Consideremos el continuo cíclicamente arcoconexo X como* *el continuo que aparece en la siguiente página. Sean J la barra límite ab y W el segmento pq. Podemos ver que $\mathcal{T}_a(W) = W \cup J$ que no es conexo. Esto muestra, según el Corolario 3.3.3, que este continuo X no es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*



3.4. Continuidad de la función $\mathcal{T}_a$

En esta sección estudiaremos la continuidad de la función $\mathcal{T}_a$.

Teorema 3.4.1. *La función $\mathcal{T}_a$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Sean U un conjunto abierto de X y $\mathcal{U} = \{A \in 2^X \mid \mathcal{T}_a(A) \subseteq U\}$. Por la Definición 2.1.27, necesitamos probar que $\mathcal{U}$ es abierto. Sea $B \in Cl(2^X \backslash \mathcal{U})$. Entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X \backslash \mathcal{U}$ tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_a(B_n) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Sea $x_n \in \mathcal{T}_a(B_n) \cap (X \setminus U)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$, de hecho para algún $x \in X \setminus U$. Afirmamos que $x \in \mathcal{T}_a(B)$. Supongamos que $x \notin \mathcal{T}_a(B)$, entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus B$. Como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $B_n \subseteq X \setminus W$ y $x_n \in Int(W)$. Sea $n \geq N$, entonces $x_n \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus B_n$. Esto implica que $x_n \in X \setminus \mathcal{T}_a(B_n)$, lo cual es una contradicción. Entonces, $x \in \mathcal{T}_a(B) \cap (X \setminus U)$ y, así, $B \in 2^X \setminus \mathcal{U}$. Por lo tanto, $2^X \setminus \mathcal{U}$ es cerrado y $\mathcal{U}$ es abierto. $\square$

Teorema 3.4.2. *Sea X un continuo arcoconexo $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si $\mathcal{T}_a$ es continua en $F_1(X)$, entonces $\mathcal{T}_a$ es continua en 2^X.*

Demostración. Por el Teorema 3.4.1, es suficiente probar que $\mathcal{T}_a$ es semicontinua inferiormente. Sea U un conjunto abierto de X. Definimos $\mathcal{U} = \{A \in 2^X \mid \mathcal{T}_a(A) \cap U \neq \emptyset\}$. Por la Definición 2.1.27, necesitamos ver que $\mathcal{U}$ es un abierto en 2^X. Sean $B \in Cl(2^X \setminus \mathcal{U})$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X \setminus \mathcal{U}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Entonces $\mathcal{T}_a(B_n) \cap U = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $B \notin 2^X \setminus \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{T}_a(B) \cap U \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathcal{T}_a(B) \cap U$. Por el Teorema 3.1.23, como X es $\mathcal{T}_a$-aditivo, entonces $\mathcal{T}_a(B) = \bigcup_{x\in B} \mathcal{T}_a(\{x\})$ y $y \in \mathcal{T}_a(\{x\})$ para alguna $x \in B$. Como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, sea $x_n \in B_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por hipótesis, $\mathcal{T}_a$ es continua en $F_1(X)$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_a(\{x_n\}) = \mathcal{T}_a(\{x\})$. En consecuencia, existe $y_n \in \mathcal{T}_a(\{x_n\})$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Como $y \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U$ para cada $n \geq N$. Esto implica que $\mathcal{T}_a(\{x_n\}) \cap U \neq \emptyset$, para $x_n \in B_n$ y $n \geq N$. Entonces $\mathcal{T}_a(B_n) \cap U \neq \emptyset$ para $n \geq N$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}_a(B_n) \cap U = \emptyset$. Así, $B \in 2^X \setminus \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es abierto en 2^X. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a$ es semicontinua inferiormente en X. $\square$

Como consecuencia del Corolario 3.1.7, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4.3. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces la función $\mathcal{T}_a$ es continua.*

Teorema 3.4.4. *La función $\mathcal{T}_a$ es continua en el Círculo de Varsovia.*

Demostración. Sean X el círculo de Varsovia y J la barra límite de X. Sabemos que X es únicamente arcoconexo. Por el Corolario 3.2.1, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Entonces para cada $A \in 2^X$, $\mathcal{T}_a(A) = \mathcal{T}_a\big(\bigcup_{x\in A}\{x\}\big)$. Por el Teorema 3.1.23 se tiene que $\mathcal{T}_a\big(\bigcup_{x\in A}\{x\}\big) = \bigcup_{x\in A} \mathcal{T}_a(\{x\})$. Por otro lado, $\bigcup_{x\in A} \mathcal{T}_a(\{x\}) = \bigcup_{x\in A}(J \cup \{x\}) = J \cup \bigcup_{x\in A}\{x\} = J \cup A$. De donde se tiene que $\mathcal{T}_a(A) = J \cup A$.

Ahora, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_a(A_n) = \lim_{n\to\infty} (J \cup A_n) = \left(\lim_{n\to\infty} J\right) \cup \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = J \cup A = \mathcal{T}_a(A).$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}_a$ es continua.

□

3.5. Continuos homogéneos

Comenzamos con la definición de continuo homogéneo.

Definición 3.5.1. *Un continuo X es homogéneo si para cualesquiera dos puntos x y y de X, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.*

Lema 3.5.2. *Sea X un continuo arcoconexo. Si $h : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{T}_a(A)) = \mathcal{T}_a(h(A))$ para cada subconjunto A de X.*

Demostración. Sean A un subconjunto de X y $x \in X \setminus h(\mathcal{T}_a(A))$. Entonces $h^{-1}(x) \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$. En consecuencia, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $h^{-1}(x) \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Esto implica que $x \in Int(h(W)) \subseteq h(W) \subseteq X \setminus h(A)$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(h(A))$.

Ahora, sea $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(h(A))$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus h(A)$. Entonces $h^{-1}(x) \in h^{-1}(Int(W)) \subseteq h^{-1}(W) \subseteq h^{-1}(X\setminus h(A))$. Por lo que $h^{-1}(x) \in Int(h^{-1}(W)) \subseteq h^{-1}(W) \subseteq X \setminus A$. Así, $h^{-1}(x) \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$. Por lo tanto $x \in h(X \setminus \mathcal{T}_a(A))$. □

Teorema 3.5.3. *Sea X un continuo arcoconexo homogéneo. Entonces para cada $x \in X$, $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.*

Demostración. Sea X un continuo arcoconexo y homogéneo. Por el Teorema de la página 280 de [2] tenemos que X es colocalmente arcoconexo. Como X es homogéneo, X no tiene puntos de corte [43, Teorema 6.6] y, por el Corolario 3.1.18, tenemos que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$. □

Como una consecuencia de los Teoremas 3.1.11 y 3.5.3 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.5.4. *Si X es un continuo arcoconexo y homogéneo, entonces X es aposindético por arcoconexos.*

Teorema 3.5.5. *Sea X un continuo arcoconexo homogéneo. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es $\mathcal{T}_a$-aditivo y sea $A \in 2^X$. Entonces $\mathcal{T}_a(A) = \mathcal{T}_a(\bigcup_{x\in A}\{x\})$. Por el Teorema 3.1.23 tenemos que $\mathcal{T}_a(\bigcup_{x\in A}\{x\}) = \bigcup_{x\in A}\mathcal{T}_a(\{x\})$. Por el Teorema 3.5.3, $\bigcup_{x\in A}\mathcal{T}_a(\{x\}) = \bigcup_{x\in A}\{x\} = A$. Así, $\mathcal{T}_a(A) = A$. Entonces, por el Corolario 3.1.7, X es localmente conexo.

Ahora, si X es localmente conexo y A y $B \in 2^X$, entonces $A\cup B$ es cerrado. Otra vez, por el Corolario 3.1.7, $\mathcal{T}_a(A\cup B) = A\cup B = \mathcal{T}_a(A)\cup\mathcal{T}_a(B)$. Por lo tanto, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. $\square$

3.6. Algunos otros resultados

En esta parte aplicaremos la función $\mathcal{T}_a$ a dos continuos, X y Y. Para distinguir cuando aplicamos la función a X la denotaremos como ${}_X\mathcal{T}_a$, mientras que cuando la apliquemos en el continuo Y la denotaremos como ${}_Y\mathcal{T}_a$.

Definición 3.6.1. *Dados dos continuos X y Y. Una función $f : X \to Y$ se dice que es abierta si la imagen de cualquier abierto de X bajo f es un abierto en Y, esto es, $f(U)$ es abierto en Y para cada abierto U de X.*

Teorema 3.6.2. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es abierta entonces para cada subconjunto B de Y se cumple que ${}_Y\mathcal{T}_a(B) \subseteq f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$.*

Demostración. Sean $B \in 2^Y$ y $y \in Y \setminus f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X \setminus {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in$

$X \setminus {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))$, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus f^{-1}(B)$. Como f es abierta, entonces $f(x) \in Int(f(W)) \subseteq f(W) \subseteq Y \setminus B$. Esto implica que $y \in Y \setminus {}_Y\mathcal{T}_a(B)$. Por lo tanto, ${}_Y\mathcal{T}_a(B) \subseteq f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$. $\square$

Teorema 3.6.3. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si $f^{-1}(W)$ es arcoconexo para cada subcontinuo arcoconexo W de Y, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Demostración. Sean $B \in 2^Y$ y $y \in Y \setminus {}_Y\mathcal{T}_a(B)$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de Y tal que $y \in Int(W) \subseteq W \subseteq Y \setminus B$. Notemos que $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Como f es continua y $f^{-1}(y)$ es compacto, $f^{-1}(y) \subseteq Int(f^{-1}(W))$. Entonces para cada $x \in f^{-1}(y)$, $x \notin {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))$. Así, $f^{-1}(y) \cap {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)) = \emptyset$. Si $f(x) \in f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$, entonces $f^{-1}(y) \cap {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, $y \in Y \setminus f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$. Por lo tanto, $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$. $\square$

Como consecuancia de los teoremas 3.6.2 y 3.6.3 tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.6.4. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva y abierta. Si $f^{-1}(W)$ es arcoconexo para cada subcontinuo arcoconexo W de Y, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) = {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Corolario 3.6.5. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es hereditariamente arcoconexo, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Los siguientes dos corolarios se aplican a dendroides.

Corolario 3.6.6. *Sean X un dendroide y Y un continuo arcoconexo. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Corolario 3.6.7. *Sean X un dendroide y Y un continuo arcoconexo. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y abierta, entonces ${}_Y\mathcal{T}_a(B) = f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$ para cada subconjunto B de Y.*

Capítulo 4

Las funciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}_a$

La función $\mathcal{R}$ la definieron David P. Bellamy y Lewis Lum en los puntos de los continuos homogéneos arcoconexos para demostrar que éstos son cíclicamente arcoconexos [5]. Posteriormente Benjamin Espinoza y Sergio Macías definieron $\mathcal{R}$ en el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo arcoconexo e hicieron un estudio detallado de dicha función [11].

4.1. Las funciones $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}_a$

Comenzamos con las definiciones de la función $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}_a$.

Definición 4.1.1. *Sea X un continuo arcoconexo. Definimos la función $\mathcal{R}$: $2^X \to 2^X$ como sigue: para cada $A \in 2^X$,*

$$\mathcal{R}(A) = \bigcap \{Cl(U) \mid U \text{ es arcoconexo y } A \subseteq Int(U)\}.$$

Definición 4.1.2. *Sea X un continuo arcoconexo. Definimos la función $\mathcal{K}_a$: $2^X \to 2^X$ como sigue: para cada $A \in 2^X$,*

$$\mathcal{K}_a(A) = \bigcap \{W \in \mathcal{C}(X) \mid W \text{ es arcoconexo y } A \subseteq Int(W)\}.$$

Observación 4.1.3. *Por definición, si X es un continuo arcoconexo, entonces $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{K}_a(A)$ para cada $A \in 2^X$.*

El siguiente ejemplo muestra que las funciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}_a$ son diferentes.

Ejemplo 4.1.4. *Sean Y el cono sobre el pseudoarco con vértice v y P el pseudoarco en la base de Y. Sea L una compactación del rayo $[0, \infty)$ que empieza en v y tiene como residuo a P, donde $L \cap Y = \{v\} \cup P$. Sea $X = Y \cup L$. Si p es un punto en P, $\mathcal{R}(\{p\}) = \overline{vp} \cup P \cup L$, sin embargo $\mathcal{K}_a(\{p\}) = X$.*

Teorema 4.1.5. *Sea X un continuo arcoconexo. Si X es fuertemente semilocalmente arcoconexo, entonces $\mathcal{K}_a(\{p\}) = \mathcal{R}(\{p\})$, para cada $p \in X$.*

Demostración. Por la Observación 4.1.3, tenemos que $\mathcal{R}(\{p\}) \subseteq \mathcal{K}_a(\{p\})$. Necesitamos probar que $\mathcal{K}_a(\{p\}) \subseteq \mathcal{R}(\{p\})$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{R}(\{p\})$. Entonces existe un subconjunto arcoconexo U de X tal que $p \in Int(U)$ y $x \notin Cl(U)$. Entonces existe un subconjunto abierto N de X tal que $x \in N \subseteq Cl(N) \subseteq X \setminus Cl(U)$. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo y $x \in N$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq Cl(V) \subseteq X \setminus Cl(U)$ y $X \setminus V$ es la unión de un número finito de subcontinuos arcoconexos de X. Sea C el subcontinuo de $X \setminus V$ que contiene a p. Entonces $p \in Int(C) \subseteq C \subseteq X \setminus \{x\}$. Esto implica que $x \notin \mathcal{K}_a(\{p\})$. Por lo tanto, $\mathcal{K}_a(\{p\}) \subseteq \mathcal{R}(\{p\})$. $\square$

El siguiente resultado nos dice que en continuos arcoconexos y colocalmente arcoconexos las funciones $\mathcal{K}_a$ y $\mathcal{R}$ coinciden.

Teorema 4.1.6. *Si X es un continuo arcoconexo y colocalmente arcoconexo, entonces $\mathcal{K}_a(A) = \mathcal{R}(A)$, para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Por la Observación 4.1.3, tenemos que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{K}_a(A)$. Necesitamos probar que $\mathcal{K}_a(A) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{R}(A)$. Entonces existe un subconjunto arcoconexo U de X tal que $A \subseteq Int(U)$ y $x \notin Cl(U)$. Entonces existe un subconjunto abierto N de X tal que $x \in N \subseteq Cl(N) \subseteq X \setminus Cl(U)$.

Como X es colocalmente arcoconexo y $x \in N$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq Cl(V) \subseteq X \setminus Cl(U)$ y $X \setminus V$ es arcoconexo. Así, $x \notin \mathcal{K}_a(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{K}_a(A) \subseteq \mathcal{R}(A)$. □

Teorema 4.1.7. *Sean X un continuo arcoconexo y p y $q \in X$. Entonces $p \in \mathcal{K}_a(\{q\})$ si y sólo si $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$.*

Demostración. Supongamos que $q \notin \mathcal{T}_a(\{p\})$, entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $q \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$. Esto implica que $p \notin \mathcal{K}_a(\{q\})$. Ahora, si $p \notin \mathcal{K}_a(\{q\})$, entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $q \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$. Esto implica que $q \notin \mathcal{T}_a(\{p\})$. □

Como consecuencia de la Observación 4.1.3 y del Teorema 4.1.7 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.8. *Sean X un continuo arcoconexo y p y $q \in X$. Si $p \in \mathcal{R}(\{q\})$, entonces $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$.*

Teorema 4.1.9. *Sean X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo y p y $q \in X$. Si $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$, entonces $p \in \mathcal{R}(\{q\})$.*

Demostración. Supongamos que $p \notin \mathcal{R}(\{q\})$. Entonces existe un subconjunto arcoconexo U de X tal que $q \in Int(U)$ y $p \notin Cl(U)$. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo y $p \in X \setminus Cl(U)$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subseteq X \setminus Cl(U)$ y $X \setminus V$ es la unión de un número finito de subcontinuos arcoconexos. Sea W la componente de $X \setminus V$ que contiene a q. Entonces $q \in Int(W)$, lo que implica que $q \notin \mathcal{T}_a(\{p\})$. □

Como consecuencia de la Observación 4.1.3 y el Teorema 4.1.9 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.10. *Sean X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo y p y $q \in X$. Si $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$, entonces $p \in \mathcal{K}_a(\{q\})$.*

Como consecuencia del Teorema 4.1.7, el Corolario 4.1.8, el Teorema 4.1.9 y el Corolario 4.1.10 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.1.11. *Sean X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo y p y $q \in X$. Entonces*

(1) $p \in \mathcal{K}_a(\{q\})$ *si y sólo si* $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$.

(2) $p \in \mathcal{R}(\{q\})$ *si y sólo si* $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$.

Para los siguientes resultados necesitamos las definiciones de continuo $\mathcal{R}$-simétrico, $\mathcal{T}_a$-simétrico, $\mathcal{K}_a$-simétrico, puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico, puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico y puntualmente $\mathcal{K}_a$-simétrico. Esto lo hacemos siguiendo las Definiciones 2.1.4 y 2.1.5.

Teorema 4.1.12. *Sea X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo. Entonces X es puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico si y sólo si X es puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico.*

Demostración. Sea X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo y supongamos que X es puntulmente $\mathcal{R}$-simétrico. Sean p y q dos puntos en X tales que $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$. Por el Teorema 4.1.9, $p \in \mathcal{R}(\{q\})$. Como X es puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico $q \in \mathcal{R}(\{p\})$. Por el Corolario 4.1.8, $p \in \mathcal{T}_a(\{q\})$. Por lo tanto, X es puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico. La prueba del recíproco es similar. $\square$

Corolario 4.1.13. *Sea X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo. Entonces X es puntualmente $\mathcal{K}_a$-simétrico si y sólo si X es puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico.*

Corolario 4.1.14. *Sea X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo. Entonces X es puntualmente $\mathcal{K}_a$-simétrico si y sólo si X es puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico.*

Teorema 4.1.15. *Sea X un continuo fuertemente semilocalmente arcoconexo. Entonces*

(1) *Si X es $\mathcal{R}$-simétrico, entonces $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{T}_a(A)$ para cada $A \in 2^X$.*

(2) *Si X es $\mathcal{K}_a$-simétrico, entonces $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{T}_a(A)$ para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Supongamos que X es $\mathcal{R}$-simétrico. Sean $A \in 2^X$ y x un punto de X tales que $x \notin \mathcal{T}_a(A)$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Esto implica que $\mathcal{R}(\{x\}) \cap A = \emptyset$. Como X es $\mathcal{R}$-simétrico, $\mathcal{R}(A) \cap \{x\} = \emptyset$. Entonces $x \notin \mathcal{R}(A)$, lo que prueba (1). La prueba de (2) se hace de forma similar. □

Teorema 4.1.16. *Sea X un continuo arcoconexo. Si X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, entonces $\mathcal{T}_a(A) \subseteq \mathcal{K}_a(A)$ para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y x en X tales que $x \notin \mathcal{K}_a(A)$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $A \subseteq Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{x\}$. Esto implica que $A \cap \mathcal{T}_a(\{x\}) = \emptyset$. Como X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, $\mathcal{T}_a(A) \cap \{x\} = \emptyset$. Entonces $x \notin \mathcal{T}_a(A)$. □

Proposición 4.1.17. *Sean X un continuo arcoconexo, $A \in 2^X$ y $x \in X \setminus A$. Si X es colocalmente arcoconexo en x, entonces $x \notin \mathcal{R}(A)$.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $x \in X \setminus A$ tales que X es colocalmente arcoconexo en x. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U \subseteq Cl(U) \subseteq X \setminus A$. Como X es colocalmente arcoconexo en x, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es arcoconexo. Entonces $A \subseteq X \setminus Cl(U) \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus \{x\}$. Esto implica que $x \notin \mathcal{R}(A)$. □

Corolario 4.1.18. *Si X es un continuo colocalmente arcoconexo, entonces $\mathcal{R}(A) = A$ para todo $A \in 2^X$.*

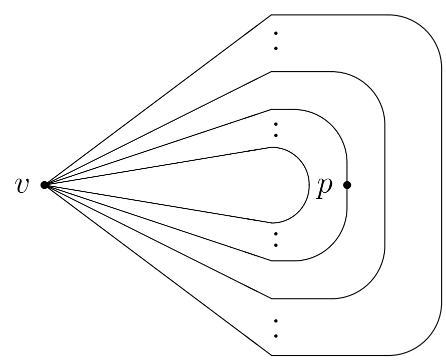
La demostración de la siguiente proposición es análoga a la demostración de la Proposición 4.1.17 por lo que la omitimos.

Proposición 4.1.19. *Sean X un continuo arcoconexo, $A \in 2^X$ y $x \in X \setminus A$. Si X es colocalmente arcoconexo en x, entonces $x \notin \mathcal{K}_a(A)$.*

Corolario 4.1.20. *Si X es un continuo colocalmente arcoconexo, entonces $\mathcal{K}_a(A) = A$ para todo $A \in 2^X$.*

El continuo del Ejemplo 4.1.21 es un continuo arcoconexo para el cual la función $\mathcal{R}$ es continua, como se prueba en el Teorema 4.1.23.

Ejemplo 4.1.21. *Sean Y la suspensión sobre el conjunto de Cantor con vértices v_1 y v_2 y X el espacio que se obtiene al identificar v_1 con v_2. Sea v el punto en que se identificaron los vértices v_1 y v_2.*



Para la prueba del Teorema 4.1.23 necesitamos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [11, Teorema 4.16].

Teorema 4.1.22. *Un continuo es $\mathcal{R}$-aditivo si y sólo si para cualquier $\Lambda \subseteq 2^X$ tal que $\bigcup \Lambda \in 2^X$, se tiene que $\mathcal{R}\Big(\bigcup \Lambda\Big) = \bigcup \Big\{\mathcal{R}(L) \mid L \in \Lambda\Big\}$.*

Teorema 4.1.23. *La función $\mathcal{R}$ es continua en el continuo del Ejemplo 4.1.21.*

Demostración. Sea X el continuo del Ejemplo 4.1.21. Primero veamos que para cada subconjunto cerrado A de X se tiene que $\mathcal{R}(A) = \{v\} \cup A$. Esto se sigue de que si $x \in X \setminus A$ y $x \neq v$, entonces X es colocalmente arcoconexo en x y, por la Proposición 4.1.17, $x \notin \mathcal{R}(A)$. Además, para cada cerrado A, $v \in \mathcal{R}(A)$.

Ahora veamos que X es $\mathcal{R}$-aditivo. Sean A y B dos cerraos de X. Por el párrafo anterrior, $\mathcal{R}(A) = \{v\} \cup A$, $\mathcal{R}(B) = \{v\} \cup B$ y $\mathcal{R}(A \cup B) = \{v\} \cup (A \cup B)$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(A \cup B) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$.

Ahora, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(A_n) = \lim_{n\to\infty} (\{v\} \cup A_n) = \left(\lim_{n\to\infty} \{v\}\right) \cup \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \{v\} \cup A = \mathcal{R}(A).$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es continua. $\square$

Bibliografía

[1] G. Acosta, G. G. Andablo, P. Krupski, S. Macías y P. Pyrih, *An arcwise connected continuum without non-boundary proper arcwise connected subcontinua*, Mathematica Pannonica, 13/1 (2002), 85–89.

[2] D. P. Bellamy, *Arcwise connected homogeneous metric continua are collocaly arcwise connected*, Houston J. Math., 11 (1985), 277–281.

[3] D. P. Bellamy y J. J. Charatonik, *The set function $\mathcal{T}$ and contractibily of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 25 (1977), 47–49.

[4] D. P. Bellamy y C. L. Hagopian, *Mapping continua onto their cones*, Colloq. Math., 41 (1979), 53–56.

[5] D. P. Bellamy y L. Lum, *The cyclic connectivity of homogeneous arcwise connected continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 266 (1981), 389–396.

[6] R. H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 1101–1110.

[7] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math., 1 (1951), 43–51.

[8] R. H. Bing y F. B. Jones, *Another homogeneous plane continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 171–192.

[9] C. E. Burgess, *Continua which are the sum of a finite number of indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 234–239.

[10] C. E. Burgess, *Separation properties and n-indecomposable continua*, Duke Math. J., 23 (1956), 595–599.

[11] B. Espinoza y S. Macías, *On the set function $\mathcal{R}$*, Topology Appl., 154 (2007), 2988–2996.

[12] L. Fernández, *El pseudoarco y el círculo de pseudoarcos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.

[13] L. Fernández, *On strictly point $\mathcal{T}$-asymmetric continua*, Topology Proc., 35 (2010), 91–96.

[14] L. Fernández y S. Macías, *The set functions $\mathcal{T}$ and $\mathcal{K}$ and irreducible continua*, por aparecer en Colloq. Math.

[15] R. W. FitzGerald, *Connected sets with a finite disconnection property*, in *Studies in Topology* (N. M. Stavrakas and K. R. Allen, editors), Academic Press, New York, 1975, 139–173.

[16] J. B. Fugate, G. R. Gordh Jr. y Lewis Lum, *Arc-smooth continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 265 (1981), 545–561.

[17] Jack T. Goodykoontz, Jr., *Some functions on hyperspaces of hereditarily unicoherent continua*, Fund. Math., 95 (1977), 1–10.

[18] S. Gorka, *Several set functions and continuos maps*, Ph. D. Dissertation, University of Delaware, 1997.

[19] C. L. Hagopian, *A cut point theorem for plane continua*, Duke Math. J., 38 (1971), 509–512.

[20] C. L. Hagopian, *Schlais' Theorem extends to λ connected plane continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 265–267.

[21] C. L. Hagopian, *Charaterizations of λ connected plane continua*, Pacific J. Math., 49 (1973), 371–375.

[22] F. B. Jones, *Concerning nonaposyndetic continua*, Amer. J. Math., 70 (1948), 403–413.

[23] A. Koyama, *Weakly arc-smooth continua I*, Glasnik Math. 22 (42) (1987), 171–185.

[24] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[25] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[26] W. Lewis, *The pseudo-arc*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), 25–77.

[27] L. Lum, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math., 83 (1974), 111–120.

[28] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc., 22 (1997), 281–296.

[29] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[30] S. Macías, *A class of one-dimensional, nonlocally connected continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous*, Houston J. Math., 32 (2006), 161–165.

[31] S. Macías, *Homogeneous continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous*, Topology Appl., 153 (2006), 3397–3401.

[32] S. Macías, *A decomposition theorem for a class of continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous*, Colloq. Math., 109 (2007), 163–170.

[33] S. Macías, *On the continuity of the set function $\mathcal{K}$*, Topology Proc., 34 (2009), 167–173.

[34] S. Macías, *On continuously irreducible continua*, Topology Appl., 156 (2009), 2357–2363.

[35] S. Macías, *On the idempotency of the set function $\mathcal{T}$*, por aparecer en Houston J. Math.

[36] S. Macías y S. B. Nadler, Jr., *On hereditarily decomposable homogeneous continua*, Topology Proc., 34 (2009), 131–145.

[37] L. Mohler y L. G. Oversteegen, *On the structure of tranches in continuously irreducible continua*, Colloq. Math., 54 (1987), 23–28.

[38] E. E. Moise, *An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerates subcontinua*, Tras. Amer. Math. Soc., 63 (1948), 581–594.

[39] E. E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 1111–1121.

[40] W. T. Moreland, Jr., *Some properties of four set valued functions*, Master's thesis, University of Delaware, June 1970.

[41] S. B. Nadler, Jr., *A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 67 (1977), 167–176.

[42] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[43] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[44] P. M. Swingle, *Generalized indecomposable continua*, Amer. J. Math., 52 (1930), 647–658.

[45] E. S. Thomas, Jr., *Monotone decompositons of irreducible continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 50 (1966), 1–74.

[46] E. J. Vought, *Monotone decompositions of Hausdorff continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 56 (1976), 371–376.

[47] E. J. Vought, *ω–connected continua and Jones' $\mathcal{K}$ function*, Proc. Amer. Math. Soc., 91 (1984), 633–636.

[48] G.T. Whyburn, *Semi-locally connected sets*, Amer. J. Math., 61 (1939), 733-749. MR **1**, 31.

[49] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.

Índice alfabético