UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

r-reyes en torneos k-partitos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

JACOB REYES GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. RITA ESTHER ZUAZUA
VEGA

2010

.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por todo su apoyo y paciencia a lo largo de estos años. A ustedes les dedidco esta tesis.

También quiero agradecer a Rita Zuazua por todo el apoyo y entusiasmo que me brindó durante la elaboración de la tesis. Gracias por haber hecho de este período la etapa más disfrutable de toda la carrera.

Agradezco también a mis sinodales Dr. Bernardo Llano Pérez, Dra María Isabel Puga Espinoza, Dr. Juan José Montellanos Ballesteros y Mat. Ilán Abraham Goldfeder Ortiz por sus comentarios y sugerencias sobre esta tesis.

Índice general

Introducción ɪ

1. Definiciones básicas y preliminares **1**

2. r-reyes en torneos bipartitos **9**
2.1. 2-reyes en torneos bipartitos 9
2.2. 3-reyes en torneos bipartitos 10
2.3. 4-reyes en torneos bipartitos 13

3. 3-reyes en torneos 3-partitos **23**

Bibliografía **49**

Capítulo 1

Definiciones básicas y preliminares

En este capítulo damos los conceptos básicos y notación de teoría de las gráficas que utilizaremos durante todo el trabajo. Los únicos lema y teorema que presentamos y demostramos en esta sección justifican el estudio de *r-reyes* en torneos *k-partitos* que desarrollamos en los siguientes capítulos.

Definición 1.1 *Una gráfica G consiste de un conjunto $V(G)$ no vacío de elementos llamados vértices y una lista $E(G)$ de parejas no ordenadas de vértices llamadas aristas.*

Si la pareja (u, v) aparece dos o más veces en $E(G)$, decimos que (u, v) es una arista múltiple. (Figura 1)

Para w en $V(G)$, una arista de la forma (w, w) es llamada un lazo. (Figura 2)

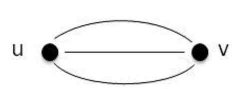


Figura 1

Figura 2

Diremos que dos vértices u y v son adyacentes si existe una arista que los tiene por extremos, es decir, la pareja $(u, v) \in E(G)$.

Por convención, si $(u, v) \in E(G)$ diremos que tenemos la arista uv ó vu.

En lo sucesivo sólo consideraremos gráficas finitas y simples, es decir, gráficas con un número finito de vértices, sin lazos y sin aristas múltiples.

Definición 1.2 *Decimos que una gráfica G es completa si cualesquiera dos vértices u y v de G son adyacentes. Denotaremos a la gráfica completa G de n vértices como K_n.*

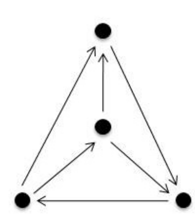
Podemos asignar una dirección u orientación a cada arista de tal forma que la arista uv es diferente de la arista vu

Definición 1.3 *Una arista dirigida o flecha es una arista uv en la cual u es el vértice inicial y v es el vértice final.*

Si uv es una arista dirigida decimos que u domina a v.

Definición 1.4 *Una gráfica dirigida D o digráfica, es una gráfica en la cual cada arista es una arista dirigida.*

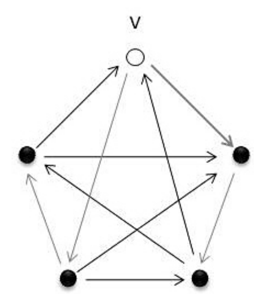
Ejemplo 1.1 *La siguiente figura muestra una digráfica de 4 vértices.*



A continuación vamos a definir una familia muy especial de digráficas que serán nuestros objetos de estudio durante el resto del trabajo.

Definición 1.5 *Un torneo T es una gráfica dirigida completa.*

Ejemplo 1.2 *La gráfica K_5 denota la gráfica completa de 5 vértices. En el siguiente ejemplo el torneo T es una gráfica completa dirigida de 5 vértices.*



Observemos que para la gráfica completa de n vértices K_n, se tienen asociados tantos torneos como diferentes orientaciones podamos asociarle a sus aristas.

Definición 1.6 *Dados vértices u y v de una digráfica D, una $uv-$trayectoria en D es una sucesión alternada de distintos vértices y flechas de D, que comienza en u y termina en v, tal que cada flecha es incidente del vértice inmediatamente precedente e incidente al vértice inmediatamente siguiente.*

Definición 1.7 *La longitud de una $uv-$trayectoria en una digráfica D es el número de aristas dirigidas en la trayectoria.*

Entre dos vértices fijos u, v de una digráfica D podemos no tener o tener un gran número de diferentes $uv-$trayectorias. Estamos interesados en aquellas trayectorias que tengan longitud mínima.

Definición 1.8 *Sean u y v vértices de una digráfica D. La distancia de u a v denotada como $d(u, v)$ es la mínima de las longitudes de las trayectorias de u a v.*
Si en la digráfica D no existe una uv-trayectoria diremos que la distancia de u a v es infinita.

Ejemplo 1.3 *En la figura 3 tenemos el ejemplo de una digráfica en la cual la distancia de cualquier vértice al vértice v_1 es infinita. Esto se debe al hecho de que v_1 es un transmisor y, por lo tanto, no existe una trayectoria de cualquier vértice hacia v_1, es decir, $d(v, v_1) = \infty$ para cualquier vértice v.*

En la figura 4 se muestra una digráfica en la cual existen varias trayectorias del vértice v_1 al vértice v_5, siendo $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5$ la trayectoria de mayor longitud y $v_1 \to v_2 \to v_5$ la trayectoria mínima y, por lo tanto, $d(v_1, v_5) = 2$.

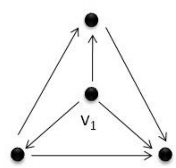


Figura. 3

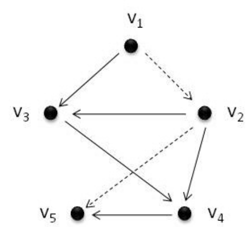


Figura.4

Definición 1.9 *Sea $u \in V(D)$. La exvecindad de u se define como $N^+(u) = \{x \in V(D) | u \to x\}$. Respectivamente, la invecindad de u se define como $N^-(u) = \{x \in V(D) | x \to u\}$.*

Definición 1.10 *La cardinalidad del conjunto $N^+(u)$ es el exgrado de u y lo denotamos como $d^+(u)$. Respectivamente, la cardinalidad del conjunto $N^-(u)$ es el ingrado de u y lo denotamos como $d^-(u)$.*

A lo largo de todo el trabajo, el ingrado y exgrado de un vértice van a jugar un papel importante, por lo que con frecuencia haremos referencia a la siguiente definición.

Definición 1.11 *Sea $u \in V(D)$. Decimos que u es un transmisor si $N^-(u) = \emptyset$, esto es si $d^-(u) = 0$. Similarmente, u es un receptor si $N^+(u) = \emptyset$, esto es si $d^+(u) = 0$.*

Observemos que en un torneo T si $v \in V(T)$ es un transmisor, la distancia de V a cualquier otro vértices es uno. Por otro lado, si $u \in V(T)$ es un receptor, la distancia de u a cualquier otro vértice es infinita.

Definición 1.12 *Sean $u \in V(T)$. Decimos que u es un rey del torneo T si para cualquier vértice v de T se tiene que $d(u, v) \leq 2$.*

En el ejemplo 1.2 podemos ver que el vértice v es un *rey* del torneo T.

El siguiente lema, probado por Landau, [4] demuestra que cualquier torneo T tiene al menos un *rey*.

Lema 1.1 *Sea T un torneo, entonces T tiene al menos un rey.*

Demostración. Sea $v \in V(T)$ tal que v es de máximo exgrado. Si v es un transmisor la afirmación es inmediata.

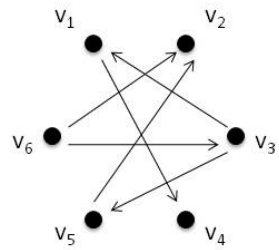
Supongamos que v no es un transmisor, entonces $V(T) = \{v\} \bigcup N^+(v) \bigcup N^-(v)$. Como $d(v, u) = 1$ para todo $u \in N^+(v)$, es suficiente demostrar que $d(v, y) = 2$ para todo $y \in N^-(v)$. Observemos que y es dominado por al menos un vértice $x \in N^+(v)$ ya que de no ser así, y dominaría a $N^+(v) \cup \{v\}$ con lo que $d^+(y) > d^+(v)$ lo cual contradice que v tenga exgrado máximo.

Por lo tanto tenemos la trayectoria $v \to x \to y$ y $d(v, y) = 2$. ■

Como consecuencia del lema de Landau, tenemos que el estudio de la existencia de reyes en torneos queda resuelto. Lo cual nos invita a estudiar este concepto en digráficas más complicadas que los torneos.

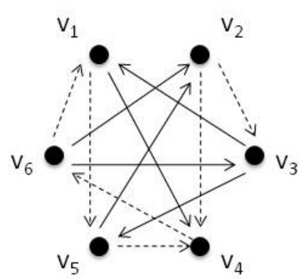
Definición 1.13 *Decimos que una gráfica G es una gráfica k-partita si existe una partición del conjunto de vértices de G en k conjuntos ajenos de vértices $V_1, V_2, ..., V_k$ tal que cualesquiera dos vértices u y $v \in V_i$, para $i \in \{1, 2, ..., k\}$ no son adyacentes. Nos referiremos a los conjuntos $V_1, V_2, ..., V_k$ como los elementos de la partición de $V(G)$.*

Ejemplo 1.4 *La siguiente gráfica es un ejemplo de una gráfica k-partita con $k = 3$ y la partición de los vértices está dada por los conjuntos $V_1 = \{v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_3, v_4\}$ y $V_3 = \{v_5, v_6\}$.*



Definición 1.14 *Un torneo k-partito* $T = T(V_1, V_2, ..., V_k)$ *es una gráfica completa k-partita orientada, es decir, existe una arista dirigida entre cualesquiera dos vértices* u, v *del torneo si y sólo si* u, v *se encuentran en diferentes elementos de la partición de* $V(T)$.

La gráfica del ejemplo 1.4 es una gráfica 3-*partita* orientada que no es un torneo 3-*partito*. Sin embargo, podemos completarla a un torneo 3-*partito* como se muestra en la siguiente figura.



La siguiente definición generaliza el concepto de rey para torneos k-*partitos*.

Definición 1.15 *Sea T un torneo k-partito, $k \geq 1$. Sean $u \in V(T)$. Si $d(u,v) \leq r$ para cada $v \in V(T)$ donde r es un entero positivo, decimos que u es un r-rey de T. El conjunto de todos los r-reyes de T se denota como $K_r(T)$ y su cardinalidad como $k_r(T)$.*

Al igual que en torneos, los vértices con exgrado máximo en un torneo *k-partito* tienen propiedades especiales.

Definición 1.16 *Sea T un torneo k-partito. El conjunto $M(V_i)$, $i = 1, 2, ..., k$ denota el conjunto de vértices de V_i con máximo exgrado, esto es, $M(V_i) = \{v \in V_i | \ d^+(v) \geq d^+(u) \ \forall u \in V_i\}$.*

Si pensamos en un torneo T con n vértices como un torneo *n-partito* donde la cardinalidad de cada conjunto de la partición de vértices es uno, Landau nos dice que T tiene un *r-rey* para cualquier entero positivo $r \geq 2$. Por lo tanto, la existencia de $r - reyes$ en un torneo T se vuelve trivial, por lo que a partir de ahora nos concentraremos en el estudio de *r-reyes* en torneos *k-partitos.*

Una condición necesaria para que un torneo T *k-partito*, $k \geq 1$, tenga un *r-rey* para cualquier valor de r es que T a lo más tenga un transmisor. Además el trasmisor es en este caso el *r-rey.*

Finalizamos este primer capítulo con el siguiente resultado que es similar al lema de Landau para el caso de torneos *k-partitos* con $k \geq 2$.

Teorema 1.1 *Si T es un torneo k-partito, $(k \geq 2)$, con a lo más un transmisor, entonces T tiene un 4-rey [7].*

Demostración. Sean $V_1, V_2, ..., V_k$ los elementos de la partición de $V(T)$. Para cada $i \in 1, 2, ..., k$, tomamos $v_i \in M(V_i)$, es decir, un vértice de exgrado máximo en V_i.

La subgráfica de T inducida por el conjunto de vértices $v_1, v_2, ..., v_k$ es un torneo T' y por el lema de Landau tiene un 2-rey, supongamos sin pérdida de generalidad que es v_1. Demostraremos que v_1 es un 4-rey en todo T.

Sea u cualquier vértice en T, digamos $u \in V_i$. Queremos encontrar una trayectoria dirigida de v_1 a u de longitud a lo más 4. En T' hay una trayectoria dirigida P de longitud a lo más 2 de v_1 a v_i. Si en T' también hay una trayectoria dirigida de longitud a lo más 2 de v_i a u terminamos. (De otra forma se tiene que u y v_i dominan (y son dominados) exactamente los mismos vértices ya que el exgrado de u es menor o igual que el de v_i).

Si $i \geq 2$, llamemos x al vértice en la trayectoria P tal que $x \to v_i$ domina a u. Ahora solo reemplazamos la flecha (x, v_i) de P por (x, u) por lo que tendríamos una trayectoria dirigida de v_1 a u de longitud a lo más 2.

Si $i = 1$ supongamos que T no tiene una trayectoria dirigida de longitud a lo más 2 de v_1 a u. Entonces v_1 y u dominan exactamente los mismos vértices. Como ambos vértices no pueden tener ingrado cero , existe un vértice z tal que $z \to u$ $(z \to v_1)$, $z \in v_j, j \geq 2$.

Por el caso anterior (donde $i \geq 2$) existe una trayectoria dirigida Q de longitud a lo más 4 de v_1 a z. Si Q tiene longitud a lo más 3, entonces agregamos la flecha (z, u) a Q. Si Q tiene longitud 4, entonces existe un vértice $y \in Q$ tal que $y \to z$ y $y \to v_1$ por la minimalidad de Q, ya que si $v_1 \to y$ entonces tendríamos la trayectoria dirigida $v_1 \to y \to z$ lo cual no es posible. Entonces $y \to u$ (ya que v_1 y u son dominados por los mismos vértices). Al reemplazar la flecha (y, z) de Q por la flecha (y, u) tenemos una trayectoria dirigida de longitud 4 de v_1 a u. Por lo tanto T tiene un 4-rey. ■

En los siguientes capítulos veremos resultados sobre la existencia y distribución de *r-reyes* con $r = 2, 3, 4$ en torneos *k-partitos* con $k \geq 1$.

Capítulo 2

r-reyes en torneos bipartitos

En el capítulo anterior vimos que un torneo T siempre tiene al menos un *rey* y que los torneos *k-partitos* con a lo más un transmisor tienen siempre al menos un 4-*rey*. En este capítulo nos concentraremos en los torneos 2-partitos o bipartitos y estudiaremos la existencia y distribución de *r-reyes* para $r = 2, 3, 4$.

Dos de los resultados principales del capítulo son el teorema 2.6 que nos caracteriza la existencia de torneos bipartitos con un número dado de 4-*reyes*, y el teorema 2.7 que caracteriza los torneos bipartitos sin transmisores y sin 3-*reyes* con exactamente ocho 4-*reyes*.

Denotemos como $T(A, B)$ un torneo bipartito donde A y B son los conjuntos de vértices de la partición. Si para cualquier vértice $b \in B$ existe un vértice $a \in A$ tal que a domina a b escribimos $A \rightrightarrows B$.

2.1. 2-reyes en torneos bipartitos

El siguiente resultado nos resuelve el problema de la existencia de *reyes* en torneos bipartitos.

Lema 2.1 *Un vértice v de un torneo bipartito $T(A, B)$ es un rey si y sólo si es el único transmisor en T.*

Demostración. Sea $v \in K_2(T)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v \in K_2(A)$. Entonces $d(v, B) = 1$. Por lo tanto v es un transmisor en $T(A, B)$ y ningún vértice de B puede ser un transmisor. Además como v es un *rey* de T, se tiene que $d(v, x) = 2$ para cualquier $x \in A - \{v\}$, por lo tanto v es el único transmisor.

Ahora supongamos que $v \in A$ es el único transmisor de $T(A, B)$. Entonces $v \to B$, es decir, $d(v, B) = 1$ y $d^-(y) > 0$ para todo $y \in A - \{v\}$, es decir, existe al menos un $w \in B$ tal que $w \to y$ de donde se sigue que $d(v, A - \{v\}) = 2$. De esta forma $v \in K_2(T)$. ∎

Una consecuencia inmediata del lema anterior y del hecho de que una condición necesaria para que cualquier torneo T tenga un *rey* es que a lo más tenga un transmisor, es el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Un torneo bipartito contiene a lo más un rey.*

Podemos entonces concluir que el estudio de los *reyes* en torneos bipartitos no es muy interesante. Por lo que continuaremos con el estudio de 3 y 4 reyes.

2.2. 3-reyes en torneos bipartitos

El siguiente lema nos da una caracterización de los 3-*reyes* en torneos bipartitos.

Lema 2.2 *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito. Un vertice $v \in A$ es un 3-rey si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$N^+(v) \nsubseteq N^+(x)$ para cada $x \in A - \{v\}$;*
2. *B no contiene transmisores.*

Demostración. Sea $v \in K_3(A)$ y $x \in A - \{v\}$. Entonces se tiene que $d(v, x) = 2$. Esto implica que existe $t \in B$ tal que $v \to t$ y $t \to x$. Por lo tanto, $N^+(v) \nsubseteq N^+(x)$. Ahora como para cada $y \in B$ existe una vy- trayectoria de longitud 1 ó 3, se tiene que $d^-(y) > 0$, es decir, B no tiene transmisores.

Ahora supongamos que v satisface (1) y (2). Veamos que $v \in K_3(T)$. Como $N^+(v) \nsubseteq N^+(x)$ para cada $x \in A - \{v\}$ existe $w \in B$ tal que $v \to w$ y $w \to x$ de donde se tiene que $d(v, A - \{v\}) = 2$. Sea $y \in B$. Si $y \in N^+(v)$ entonces $d(v, y) = 1$, por lo tanto supongamos $y \in N^-(v)$.

Como no hay transmisores en B existe $x \in A - \{v\}$ tal que $x \to y$, como $d(v, x) = 2$ al agregar la flecha $x \to y$ se tiene que $d(v, y) = 3$. Por lo tanto $d(v, V(T)) \leq 3$, es decir, $v \in K_3(T)$. ■

Notación Vamos a decir que un torneo bipartito $T(A, B)$ es de tipo $(m, p; n, q)_3$ si $|A| = m$, $|B| = n$, $k_3(A) = p$ y $k_3(B) = q$.

Una pregunta natural es la siguiente ¿bajo qué condiciones existe un torneo bipartito $T(A, B)$ tal que $K_3(T) = V(T)$?. Soltes [8] dio la respuesta en el siguiente teorema.

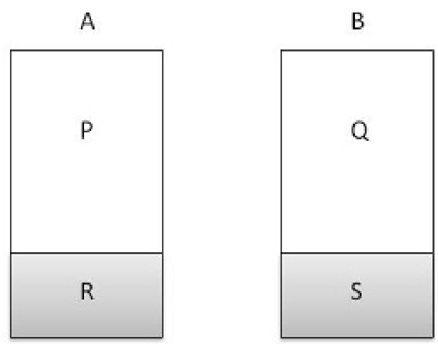
Teorema 2.1 *Un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, m; n, n)_3$, $m \geq n \geq 2$ existe si y sólo si $m \leq (\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$.*

El teorema de Soltes nos permite obtener el siguiente resultado más general.

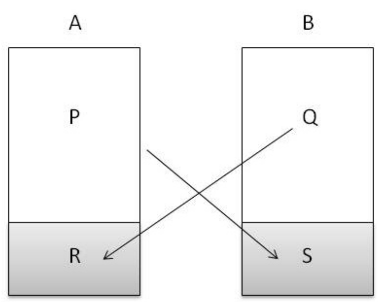
Teorema 2.2 *Si m, n, p y q son enteros tal que $m \geq p$, $n \geq q$, $2 \leq q \leq p \leq (\binom{q}{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor})$ entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, p; n, q)_3$.*

Demostración. Por el teorema de Soltes, existe un torneo bipartito $T(P, Q)$ tal que $K_3(T) = V(T)$, y $|P| = p$, $|Q| = q$. Es decir, es un torneo del tipo $(p, p; q, q)_3$. Ahora definiremos un torneo bipartito $T(A, B)$ tal que

1. $A = P \cup R$, $P \cap R = \emptyset$, $|R| = m - p$; $B = Q \cup S$, $Q \cap S = \emptyset$, $|S| = n - q$.



2. Las flechas entre P y Q son inducidos por $T(P,Q)$; $A \to S$, $Q \to R$. Afirmamos que $K_3(T(A,B)) = P \cup Q$ ya que $d(P,Q) \leq 3$, $P \to S$ y $d(P,R) = 2$, de forma similar $d(Q,P) \leq 3$, $d(Q,S) = 2$ y $Q \to R$.



Observemos que $A \to S$ y y R solamente domina a S por lo que ni en S ni en R pueden haber 3-*reyes*.

De esta forma el torneo bipartito $T(A,B)$ es del tipo $(m,p;n,q)_3$. ■

Concluímos los resultados sobre 3-*reyes* en torneos bipartitos con el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *Sea $T(A,B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Un vértice $w \in A$ es un 3-rey de T si y sólo si $d(w,x) = 2$ para cada $x \in A - \{w\}$. Análogamente si $w \in B$.*

Demostración. Supongamos que $w \in K_3(T)$ y $w \in A$. Si existe $y \in A - \{w\}$ tal que $d(w,y) \neq 2$, entonces se tiene que $d(w,y) \geq 4$, lo cual es una contradicción ya que estamos suponiendo que w es un 3-rey de T.

Ahora supongamos que $d(w,x) = 2$ para cada $x \in A - \{w\}$. Probemos que $w \in K_3(T)$. Sea $y \in B$. Si $w \rightarrow y$, entonces $d(w,y) = 1$. Si $y \rightarrow w$, como T no tiene transmisores, existe $x \in A$ tal que $x \rightarrow y$. De esta forma se tiene que $d(w,y) \leq d(w,x) + d(x,y) = 3$. Por lo tanto w es un 3-*rey*. ■

Un torneo bipartito $T(A,B)$ puede no tener r-*reyes* para algún r. Por ejemplo, cualquier torneo con dos o más transmisores no tiene r-*reyes* para todo entero positivo r. También hemos visto que la existencia de un transmisor implica la existencia de un único *rey*.

Además si en un torneo bipartito $T(A,B)$ dos vértices u y $v \in M(A)$ tienen la misma exvecindad, es decir, dominan a los mismos vértices, entonces ni u ni v pueden ser 3-*reyes*. La justificación de este hecho es simple, ya que si, por ejemplo u fuera un 3-*rey*, entonces se tendría que $d(u,v) = 2$. Esto implicaría que existe un vértice $y \in B$ tal que $u \rightarrow y$ y $y \rightarrow v$ lo cual no es posible puesto que estamos suponiendo que u y v tienen la misma exvecindad. De la misma forma se tiene que v no puede ser un 3-*rey*.

2.3. 4-reyes en torneos bipartitos

A continuación veremos algunos resultados sobre la existencia de 4-*reyes* en torneos bipartitos. La siguiente proposición nos garantiza la existencia de 4-*reyes* en torneos bipartitos sin transmisores.

Proposición 2.1 *Sea $T(A,B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Si $x \in M(A)$ entonces $x \in K_4(T)$.*

Demostración. Sea $x \in M(A)$ y sean B_1 y B_2 la partición de B tales que $x \to B_1$ y $B_2 \to x$. Como no hay transmisores en T, dado $b_2 \in B_2$ existe $a \in A$ tal que $a \to b_2$ y como $d^+(x) \geq d^+(a)$ existe $b_1 \in B_1$ tal que $b_1 \to a$. Entonces se tiene la trayectoria $x \to b_1 \to a \to b_2$ y por lo tanto $d(x, B_2) = 3$.

Por otro lado, si $a \in A - M(A)$ se tiene que $d(x, a) = 2$ ya que existe $b \in B$ tal que $x \to b$ y $b \to a$. Ahora sea $a \in M(A)$. Si $N^+(x) = N^+(a)$ existe $u \in A$ tal que se tiene la trayectoria $x \to B_1 \to u \to B_2 \to a$ de donde $d(x, a) = 4$. Si $N^+(x) \neq N^+(a)$ entonces $d(x, a) = 2$ ya que existe $b \in B$ tal que $x \to b$ y $b \to a$. Por lo tanto $x \in K_4(T)$. ■

El siguiente lema nos demuestra que si un 4-*rey* en un torneo bipartito tiene exvecindad máxima, es decir, pertenece a $M(A)$, entonces todos sus invecinos también son 4-*reyes*.

Lema 2.3 *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Si $x \in M(A)$ entonces $N^-(x) \subseteq K_4(T)$.*

Demostración. Por la proposición anterior $x \in K_4$ y $d(x, B) \leq 3$. Entonces para $y \in N^-(x)$, $d(y, B) \leq 4$. Ahora hay que mostrar que $d(y, A) \leq 3$. Si $v \in N^+(y)$ es trivial. Supongamos entonces que $v \to y$. Como $d^+(x) \geq d^+(v)$, $y \to x$ y $v \to y$, existe un vértice $z \in B$ tal que $x \to z$ y $z \to v$. Así se tiene la trayectoria $y \to x \to z \to v$ y por lo tanto $d(y, A) \leq 3$ como se quería demostrar. ■

Ahora no sólo podemos determinar la existencia de 4-*reyes* en un torneo bipartito $T(A, B)$ sin transmisores, sino que además el siguiente teorema nos garantiza la existencia de al menos cuatro 4-*reyes* en $T(A, B)$. Más adelante se dará un resultado similar para el caso de torneos bipartitos sin transmisores y sin 3-*reyes*.

Teorema 2.4 *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Entonces $K_4(A) \geq 2$ y $K_4(B) \geq 2$.*

Demostración. Primero notemos que como T no tienes transmisores $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$. Sea $x \in M(A)$ y $y \in M(B)$. Entonces $x, y \in K_4(T)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \to y$. Como x no es transmisor existe $z \in B$ tal que $z \to x$. Por el lema 2.3, $z \in K_4(T)$. Por lo tanto, $K_4(B) \geq 2$.

Si existe un vértice $t \in A - \{x\}$ tal que $d^+(t) = d^+(x)$ ó $t \to y$, entonces por un argumento similar al caso anterior se tiene que $t \in K_4(T)$.

Ahora supongamos que $y \to A - \{x\}$. Sea u un vértice de exgrado máximo en $N^-(x)$ y v un vértice de A tal que $v \to u$. Afirmamos que v es un 4-rey. Como u es un 4-rey por el lema 2.3, $d(u, A) \leq 3$ y por lo tanto $d(u, A) \leq 4$. También se tiene que $d(v, N^+(x) \cup N^+(v)) \leq 3$. Nos falta demostrar que $d(v, N^-(x) \cap N^-(v)) = 3$. Sea $w \in N^-(x) \cap N^-(v)$. Como $v \to u$, $w \to v$ y $d^+(u) \geq d^+(w)$, existe $t \in A$ tal que $u \to t$ y $t \to w$. Por lo tanto de la trayectoria $v \to u \to t \to w$ se tiene que $d(v, B) \leq 3$. Así, $v \in K_4(T)$ con lo que el teorema queda demostrado. ■

Notación: Un torneo bipartito $T(A, B)$ se dice que es de tipo $(m, p; n, q)_4$ si $|A| = m$, $|B| = n$, $k_4(A) = p$ y $k_4(B) = q$.

Como se dio en el caso de 3-*reyes*, el siguiente teorema da las condiciones de existencia de un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, p; n, q)_4$.

Teorema 2.5 *Dados m, n, p, q enteros tales que $m \geq n > 0$, $n \geq q > 0$, existe un torneo bipartito $T(A, B)$ de tipo $(m, p; n, q)_4$ excepto para los siguientes casos:*

1. $(m, 1; n, q)_4$, $n \geq q > 0$,
2. $(m, p; n, 1)_4$, $m \geq p > 0$,
3. $(1, 0; 1, 0)_4$.

Demostración.

1. El torneo bipartito $(m, 1; n, q)_4$ no tiene transmisores , ya que si tuviera uno, entonces $p = 0$ ó $q = 0$. Así, por el teorema 2.4 cada conjunto de la partición contiene al menos dos 4-*reyes*, pero $p = 1$. Por lo tanto, no existe un torneo bipartito del tipo $(m, 1; n, q)_4$, $n \geq q > 0$.

2. De forma análoga al caso (1) vemos que no existe un torneo del tipo $(m, p; n, 1)_4$.

3. Es trivial, ya que A ó B tiene un transmisor, por lo que p y q no pueden ser ambos cero.

Ahora supongamos que $m \geq n \geq 2$ y $(m,p;n,q)_4$ no es ninguno de los casos anteriores. Consideraremos unos casos particulares y para cada uno construiremos el torneo bipartito correspondiente. En estas construcciones las flechas no especificados están orientados de B a A.

1. $(m,0;n,0)_4$: Tomamos todas las flechas de $A \rightarrow B$. De esta forma los vértices de A son todos transmisores y $d(v,u) = \infty$ para cualesquiera $v,u \in A$. Por lo tanto $p = 0$ y $q = 0$.

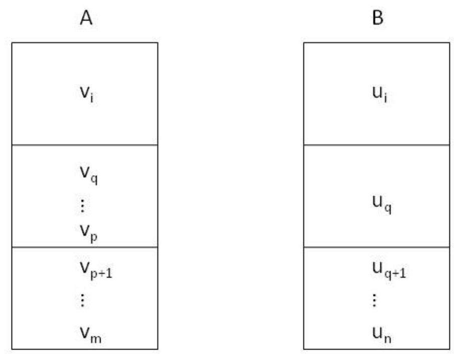
2. $(m,1;n,0)_4$: Sea $T(A,B)$ el torneo bipartito tal que hay un único transmisor v en A, entonces por el lema 2.1 v es un *rey*, entonces v es un 4-*rey* y $d(u,v) = \infty$ para cualquier vértice $u \in V(T)$. Por lo tanto $p = 1$ y $q = 0$.

3. $(m,0;n,1)_4$: El argumento es análogo al caso (2).

4. El último caso que necesitamos ver es $(m,p;n,q)_4$: $p \geq 2$, $q \geq 2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p \geq q$. Sea $A_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{q-1}\}$, $A_2 = \{v_q, ..., v_p\}$, $A_3 = \{v_{p+1}, ..., v_m\}$, $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_{q-1}\}$ $B_2 = \{u_q\}$ $B_3 = \{u_{q+1}, ..., u_n\}$ la partición de los conjuntos A y B respectivamente, del torneo bipartito $T(A,B)$.

Definimos la orientación de la siguiente forma:
Si $v_i \in A_1, v_i \rightarrow \{u_i, B_3\}$ para $i = 1, 2, ..., q-1$, $A_2 \rightarrow \{B_2, B_3\}$, $A_3 \rightarrow B_3$.

Claramente no hay 4-*reyes* en B_3 ni en A_3 ya que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rightarrow B_3$ y A_3 solamente domina a B_3.



Veamos que $K_4(A) = A_1 \cup A_2 = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$.

Si $v_i \in A_1$ entonces $d(v_i, u_i) = 1$. Si $v_i \in A_1$ y $u \in B_1$, $i \neq j$, se tiene la trayectoria $v_i \to u_i \to v_j \to u_j$ y en consecuencia $d(A_1, B_1) \leq 3$. Por otro lado, como $B_1 \to A_2$ se tiene que $d(A_1, A_2) = 2$ y $d(A_1, B_2) = 3$ y como $A_1 \rightrightarrows B_1 \to A_3 \to B_3$ se tiene que $d(A_1, A_3) = 2$ y $d(A_1, B_3) = 3$

Finalmente para demostrar que $K_4(B) = B_1 \cup B_2 = \{u_1, ..., u_q\}$ observemos que $d(B_1, A_1) \leq 3$. Ahora consideremos las trayectorias $B_1 \to A_2 \to B_2 \to A_3 \to B_3$ y $B_2 \to A_1 \rightrightarrows B_1 \to A_2$ lo que demuestra que $K_4(B) = B_1 \cup B_2$.

Por lo tanto $T(A, B)$ es del tipo $(m, p; n, q)_4$ con $p \geq 2$ y $q \geq 2$.

■

Los siguientes lemas nos serán de gran utilidad para la demostración de los dos resultados principales de este capítulo, los teoremas 2.6 y 2.7.

Lema 2.4 *Sean u y v dos vértices en un torneo bipartito T sin transmisores. Si $u \in K_4(T)$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$, entonces $v \in K_4(T)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u, v \in A$. Como v domina a los mismos vértices que u, y $u \in K_4(T)$ se tiene que $d(v, B) \leq 3$ y $d(v, A - \{u\}) \leq 4$. Basta ver que $d(v, u) \leq 4$. Como $N^+(u) \subseteq N^+(v)$, si existe $b \in B$ tal que $v \to b$ y $b \to u$ entonces $d(v, u) = 2$. De lo contrario, como no hay transmisores en T existe $a \in A$ tal que $b \to a$ para alguna $b \in N^+(v) = N^+(u)$ y existe alguna $y \in N^-(v) = N^-(u)$ tal que $a \to y$. Por lo tanto considerando la trayectoria $v \to b \to a \to y \to u$ se tiene que $d(v, u) = 4$ y $v \in K_4(T)$. ■

Lema 2.5 *Sea T un torneo bipartito sin transmisores y $k_3(T) = 0$. Para cada $u \in K_4 \cap A$, existe $v \in K_4(T) \cap A$ tal que $d(u, v) = 4$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Similarmente para cada $u \in K_4 \cap B$.*

Demostración. Supongamos que $u \in K_4(T) \cap A$. Como $k_3(T) = 0$, existe $v \in A$ tal que $d(u, v) = 4$. Es claro que $v \to N^+(u)$; de otra forma se tendría que $d(u, v) = 2$. Por lo tanto $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Por el lema 2.4 se tiene que $v \in K_4(T)$. ■

Corolario 2.2 *Sea T un torneo bipartito sin transmisores y $k_3(T) = 0$. Sea $w \in M(A)$. Para cada $u \in N^-(w)$, existe $v \in K_4(T) \cap A$, tal que $d(u, v) = 4$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Similarmente si $w \in M(B)$.*

Demostración. Sea $u \in N^-(w)$, donde $w \in M(A)$. Entonces $u \in K_4(T)$ y por el lema 2.5 se tiene que $d(u, v) = 4$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. ■

Corolario 2.3 *Sea T un torneo bipartito sin transmisores y $k_3(T) = 0$. Sea $u \in M(A)$. Entonces existe $v \in K_4(T) \cap M(A)$ tal que $d(u, v) = 4$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Similarmente si $u \in M(B)$.*

Demostración. Supongamos que $u \in M(A)$. Por la proposición 2.1 se tiene que $u \in K_4(T)$ y por el lema 2.5 existe $v \in K_4(T) \cap A$ tal que $d(u, v) = 4$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Ahora, como $u \in M(A)$ se tiene que $N^+(u) = N^+(v)$, y por lo tanto $v \in M(A)$ ■

Lema 2.6 *Sea T un torneo bipartito sin transmisores y $k_3(T) = 0$. Sea $u \in K_4(T) \cap A$, y $v \in N^-(u)$. Si $v \notin K_4(T)$, existe $w \in K_4(T) \cap (A - \{w\})$ tal que $N^+(u) \subseteq N^+(w)$ y $d(v, w) \geq 5$. Similarmente si $u \in K_4(T) \cap B$.*

Demostración. Supongamos que $u \in K_4(T) \cap A$, y $d(u,x) \in \{1,3\}$ para cada $x \in B$. Como $v \to u$, se tiene que $d(v,x) \leq 4$ para cada $x \in B$. Si $v \notin K_4(T)$, existe $w \in A - \{u\}$ tal que $d(v,w) \geq 5$. Ahora supongamos que existe un vértice $y \in N^+(u) - N^+(w)$. Entonces $u \to y \to w$, de esta forma se tiene que $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w) = 3$, lo que contradice que $d(v,w) \geq 5$. Por lo tanto $N^+(u) = N^+(w)$ y como $u \in K_4(T)$ se tiene que $w \in K_4(T)$. ■

El siguiente teorema [3] nos garantiza la existencia de al menos ocho 4-*reyes* en un torneo bipartito sin transmisores.

Teorema 2.6 *Sea T un torneo bipartito sin transmisores y $k_3(T) = 0$. Entonces*

1. *T contiene el torneo bipartito H de la figura 1 como subdigráfica; y*

2. *$\mid K_4(T) \cap A \mid \geq 4$. Similarmente $\mid K_4(T) \cap B \mid \geq 4$.*

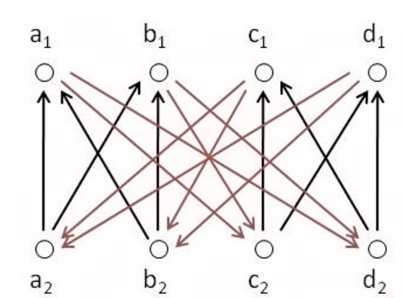


Figura. 1

Demostración. Primero veamos que T contiene a la subgráfica inducida H. Sea $a_1 \in M(A)$ y $a_2 \in M(B)$. Por el lema 2.4 se tiene que $\{a_1, a_2\} \subseteq K_4(T)$. Supongamos que $a_2 \to a_1$. Por el corolario 2.2 existe $b_2 \in K_4(T) \cap (M(B) - \{a_2\})$ tal que $d(a_2, b_2) = 4$ y $N^+(a_2) = N^+(b_2)$. De lo anterior se tiene que $b_2 \to a_1$. De la misma forma se tiene que existe $b_1 \in K_4(T) \cap (M(A) - \{a_1\})$ tal que $d(a_1, b_1) = 4$, $N^+(a_1) = N^+(b_1)$ y $\{a_2, b_2\} \to b_1$ ya que si no fuera así se tendría que $d(b_1, a_1) = 2$. Ahora, como T no tiene transmisores, existe $c_1 \in N^-(a_2) = N^-(b_2)$. Por el lema 2.3 se tiene que $c_1 \in K_4(T)$, y por el corolario 2.2 existe $d_1 \in K_4(T) \cap (A - \{c_1\})$ tal que $d(c_1, d_1) = 4$ y $N^+(c_1) \cup N^+(d_1)$. De esta forma se tiene que $d_1 \to \{a_2, b_2\}$. Como $d_1 \to \{a_2, b_2\} \to a_1$ y $d^+(d_1) \leq d^+(a_1)$, existen $c_2, d_2 \in B$, $c_2 \neq d_2$, tales que $a_1 \to \{c_2, d_2\} \to d_1$, ya que, de otra forma se tendría que $d^+(d_1) \geq d^+(a_1)$ lo cual es una contradicción. Observemos que como $N^+(c_1) \subseteq N^+(d_1)$, $\{c_2, d_2\} \to c_1$. Como los ocho pares de vértices son distintos, se tiene que T contiene a H como subdigráfica.

Por como se construyó la subdigráfica H, se tiene que $\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \subseteq K_4(T) \cap A$ y $\{a_2, b_2\} \subseteq K_4(T) \cap B$. Se tiene entonces que $\mid K_4(T) \cap A \mid \geq 4$. Veamos ahora que $\mid K_4(T) \cap B \mid \geq 4$. Primero veamos que $N^-(d_1) \cap K_4(T) \neq \emptyset$. Supongamos que $N^-(d_1) \cap K_4(T) = \emptyset$. Sea u un vértice de exgrado máximo en $N^-(d_1)$. Como $N^+(c_1) \subseteq N^+(d_1)$ se tiene que $u \to c_1$. Como $u_1 \to d_1$ se tiene que $d_1 \in K_4(T)$ y $u \notin K_4(T)$ por el lema 2.6, existe $e_1 \in K_4(T) \cap (A - \{d_1\})$ tal que $N^+(d_1) \subseteq N^+(e_1)$ y $d(u, e_1) \geq 5$. Notemos que $e_1 \notin \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ y $e_1 \to \{a_2, b_2, u\}$. Como $N^-(e_1) \neq \emptyset$, tomamos $e_2 \in N^-(e_1)$. Observemos que $e_2 \to N^+(u)$; de otra forma se tendría que $d(u, e_1) \leq 3$, lo cual es una contradicción. De esta forma $e_2 \to N^u \cup \{e_1\}$, de aquí se tiene que $e_2 \in N^-(d_1)$ con $d^+(e_2) \geq d^+(u) + 1$. Esto, sin embargo, contradice la elección de u. De lo anterior se concluye que $N^-(d_1) \cap K_4(T) \neq \emptyset$. Sea $u \in K_4(T) \cap N^-(d_1)$. Por el lema 2.5, existe $v \in K_4(T) \cap B$ tal que $d(u, v) = 4$ y $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Como $d_1 \to \{a_2, b_2\}$, $u \notin \{a_2, b_2\}$. Por otro lado, como $N^+(u) \subseteq N^+(v)$, se tiene que $v \notin \{a_2, b_2\}$. Así, $\{a_2, b_2, u, v\} \subseteq K_4(T)$. Por lo tanto $\mid K_4(T) \cap B \mid \geq 4$

■

Hemos visto en el teorema 2.6 que cualquier torneo bipartito T sin transmisores y sin $3 -$ *reyes* tiene al menos ocho 4-*reyes*. El siguente teorema [3] caracteriza completamente todos los torneos bipartitos T con exactamente $k_4(T) = 8$

Teorema 2.7 *Sea T un torneo bipartito sin transmisores y $k_3(T) = 0$. Entonces $k_4(T) = 8$ si y sólo si T es el torneo bipartito de la figura 2, donde $A_1 \cup B_1 = K_4(T)$ y la subdigráfica inducida por $A_2 \cup B_2$ es un torneo bipartito arbitrario.*

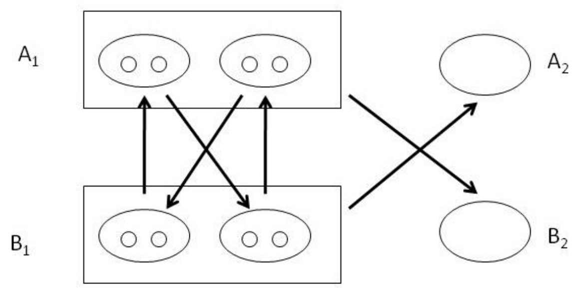


Figura.2

Demostración. Por el teorema 2.6, $\mid K_4(T) \cap A \mid \geq 4$ y $\mid K_4(T) \cap B \mid \geq 4$, y T contiene como subdigráfica el torneo bipartito H de la Figura 1. Además $K_4(T) \cap A = \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ y $\{a_2, b_2\} \subseteq K_4(T) \cap B$. Supongamos que $c_2 \notin K_4(T)$. Entonces como $c_2 \to d_1 \in K_4(T)$, por el lema 2.7, existe un vértice $e_1 \in K_4(T) \cap A$ tal que $d(c_2, e_1) \geq 5$ y $N^+(d_1) \subseteq N^+(e_1)$. Se observa que $e_1 \notin \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ y por tanto $\mid K_4(T) \cap A \mid \geq 5$ lo cual es una contradicción. De esta forma $c_2 \in K_4(T)$ y, de forma similar, $d_2 \in K_4(T)$. Por lo tanto $K_4(T) = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$.

Se observa que $d^-(a_1) = d^-(b_1) = d^-(a_2) = d^-(b_2) = 2$; de otra forma, como $\{a_1, a_2, b_1, b_2\} \subseteq M(A) \cup M(B)$, por el lema 2.5, se tendría que $K_4(T) \geq 9$. Por lo tanto se tiene:

1. $\{a_1, b_1\} \to B - \{a_2, b_2\}$ y
2. $\{a_2, b_2\} \to A - \{c_1, d_1\}$.

Notemos que $d^-(d_1) \geq 2$ ya que $\{c_2, d_2\} \to d_1$.

Afirmación 2.1 $d^-(d_1) = 2$ *y* $d_1 \to B - \{c_2, d_2\}$.

Demostración. Supongamos que $d^-(d_1) \geq 3$. Sea $e_2 \in N^-(d_1) - \{c_2, d_2\}$. Como $e_2 \notin K_4(T)$ y $e_2 \to d_1$, por el lema 2.7, existe $e_1 \in K_4(T) \cap A$ tal que $d(e_2, e_1) \geq 5$ y $N^+(d_1) \subseteq N^+(e_1)$. De lo anterior se tiene que $\mid K_4(T) \cap A \mid \geq 5$

lo cual es una contradicción. Por tanto $d^-(d_1) = 2$ y $d_1 \to B - \{c_2, d_2\}$. ■

De forma similar, $d^-(c_1) = 2$ y $c_1 \to B - \{c_2, d_2\}$. Así $c_1, d_1 \in M(A)$ y $N^+(c_1) = N^+(d_1)$. Notemos que $d^-(c_2) \geq 2$ ya que $\{a_1, b_1\} \to c_2$.

Afirmación 2.2 *$d^-(c_2) = 2$ y $c_2 \to A - \{a_1, b_1\}$.*

Demostración. Supongamos que $d^-(c_2) \geq 3$. Sea $e_1 \in N^-(c_2) - \{a_1, b_1\}$. Como $e_1 \to c_2 \to d_1 \to B - \{c_2, d_2\}$ y $d(e_1, z) \leq 3$ para cada $z \in B - \{d_2\}$. También, como $e_1 \to c_2 \to \{c_1, d_1\} \to a_2 \to A - \{c_1, d_1\}$ y $d(e_1, z) \leq 4$ para cada $z \in A$. De esta forma $d_2 \to e_1$; de lo contrario se tendría que $e_1 \in K_4(T)$. Como $d_2 \in K_4(T) \cap B$ y $d(d_2, z) \in \{1, 3\}$ para cada $z \in A$. Notemos que $d(d_2, z) = 2$ para cada $z \in B - \{c_2\}$ ya que $d_2 \to d_1 \to B - \{c_2, d_2\}$. Como $d_2 \to e_1 \to c_2$ se tiene que $d_2 \in K_3(T)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $d^-(c_2) = 2$ y $c_2 \to A - \{a_1, b_1\}$. ■

De forma similar, $d^-(d_2) = 2$ y $d_2 \to A - \{a_1, b_1\}$. Así $c_2, d_2 \in M(B)$ y $N^+(c_2) = N^+(d_2)$ con lo cual queda demostrado el teorema.

■

Capítulo 3

3-reyes en torneos 3-partitos

Hemos visto resultados sobre la existencia de 3-*reyes* en torneos bipartitos y la existencia y distribución de 4-*reyes* en torneos k-partitos para $k \geq 2$. Además se estableció la existencia de torneos bipartitos con 4-reyes y $k_3(T) = 0$. Como consecuencia se tiene que los resultados sobre 3-*reyes* están lejos de ser extensos. En esta sección veremos el teorema principal de esta tesis sobre la existencia de 3-*reyes* en torneos tripartitos demostrado por Petrovic [6].

Como ya hemos mencionado, un torneo tripartito $T(A, B, C)$ es una gráfica completa tripartita orientada con partición del conjunto de vértices en conjuntos A, B, y C. Sea X el conjunto de 3-*reyes* en A, Y el conjunto de 3-*reyes* en B y Z el conjunto de 3-*reyes* en C.

Si $x_1 \in X$ consideremos la siguiente partición de $V(T) - \{x_1\}$: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde $d(x_1, A_i) = d(x_1, B_i) = d(x_1, C_i) = i$. Esta partición la llamamos la partición de $V(T)$ con respecto a x_1.

En esta capítulo daremos todas las posibles distribuciones de 3-*reyes* en torneos tripartitos.

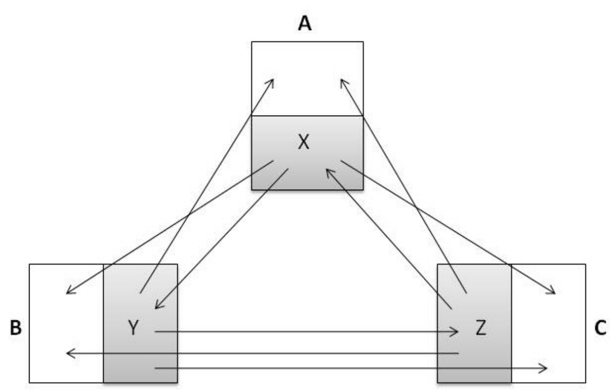
Notación: Un torneo tripartito $T(A, B, C)$ es del tipo $(a, x; b, y; c, z)$ si $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|X| = x$, $|Y| = y$, $|Z| = z$.

Si existe un torneo tripartito $T(A, B, C)$ del tipo $(a, x; b, y; c, z)$, diremos que tenemos una 6-*tupla* admisible.

El teorema principal de este trabajo, caracteriza todas las 6-*tuplas* admisibles.

A continuación vamos a presentar ocho casos típicos de 6-*tuplas* admisibles:

1. En el primer caso consideramos $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ que podríamos pensarlo como el ejemplo más general de una 6-tupla $(a, x; b, y; c, z)$ admisible. En el torneo tripartito siguiente, las aristas que no aparecen pueden orientarse arbitrariamente y alguno de los conjuntos $A - X$, $B - Y$, $C - Z$ pueden ser vacíos.



2. Si $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z = 0$ tenemos una 6-tupla admisible definido por las siguientes particiones de vértices y adyacencias:

   $x \geq y = k \geq 2, X = x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_{k-1} \cup X_k$, $|X_k| \geq 1, Y = y_1 \cup y_2 \cup ... \cup y_k$;

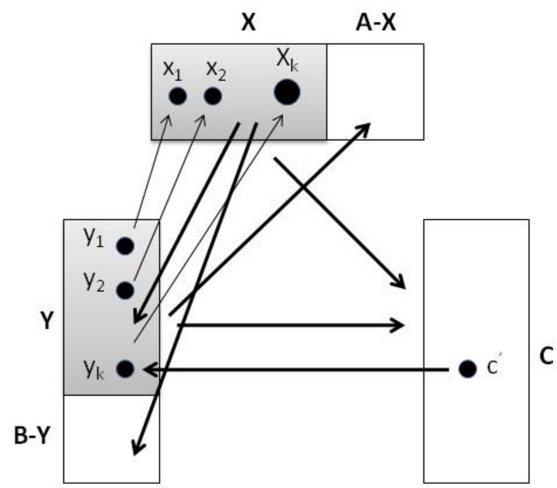
   $X \to B$ excepto $y_i \to x_i$, $i = 1, ..., k-1$ y $y_k \to X_k$;

   $B \to C$ excepto $c^{\prime} \to y_k$;

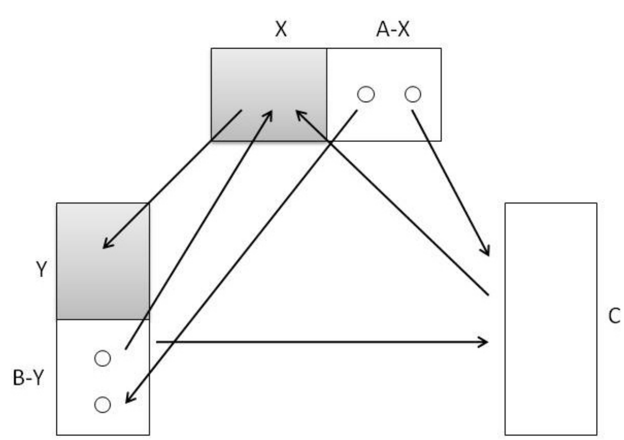
   $Y \to A - X$, $A \to C$;

   Los conjuntos $A - X$ y $B - Y$ pueden ser vacíos.

   Hay que notar que $c^{\prime}$ no es un 3-*rey* ya que $d(c^{\prime}, x_1) = 4$.

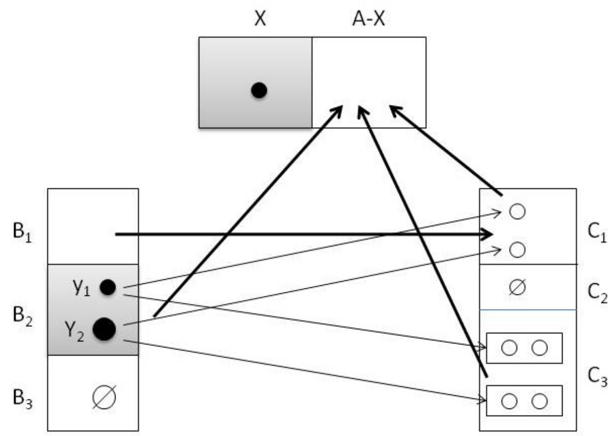


3. Para este caso consideramos $x > 0$, $a-x \geq 2$, $y > 0$, $b-y \geq 2$. Notemos que $d(A-X, A-X) = d(B-Y, B-Y) = d(C, B-Y) = 4$.

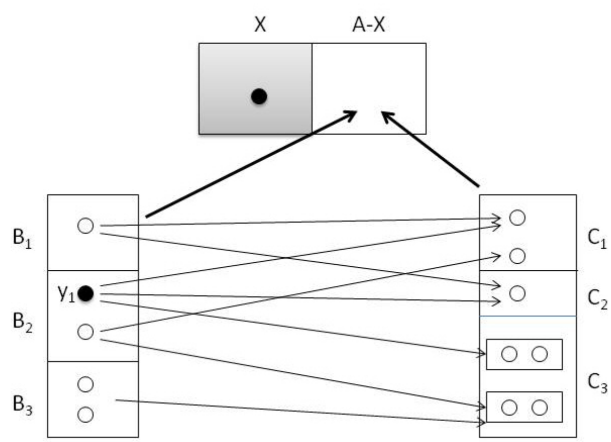


4. Para el caso $x = 1$, $a - x \leq 1$, $y \geq 2$, $b - y \leq 1$, $z = 0$, $c \geq 6$, tenemos las siguientes particiones de los conjuntos A, B y C con respecto a x_1; $Y = \{y_1\} \cup Y_2$, $|Y_2| \geq 1$.

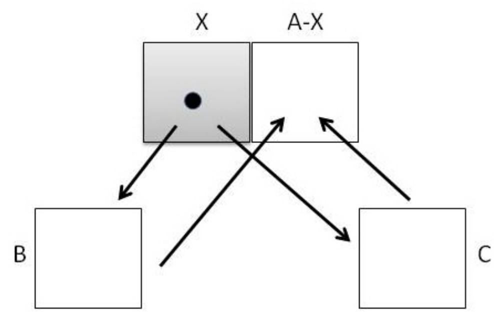
Las aristas que no están especificadas están orientadas de C a B;
Los conjuntos B_1 y $A - X$ pueden ser vacíos.



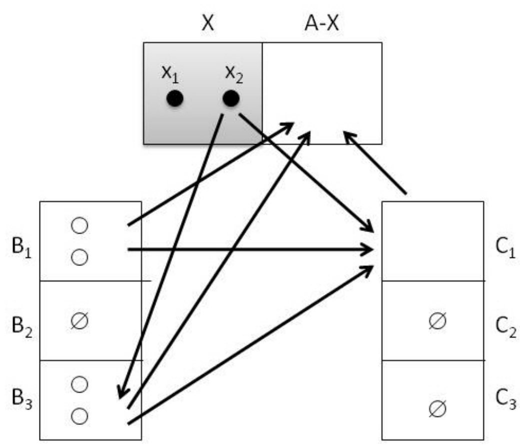
5. Considerando $x = 1$, $a - x \leq 1$, $y = 1$, $b - y \geq 4$, $z = 0$, $c \geq 7$, $|B_1| \geq 1$ $|C_2| \geq 1$ se tiene el siguiente torneo:



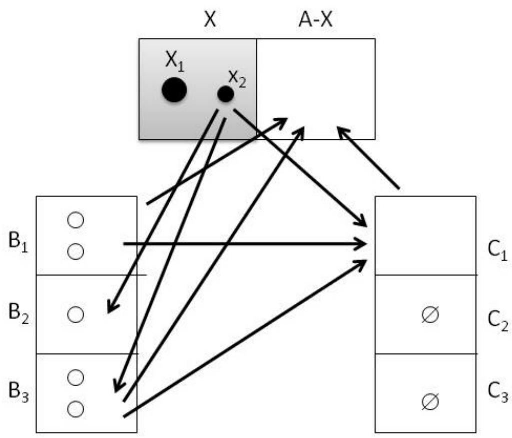
6. Si $x = 1$, $y = z = 0$, las aristas entre B y C pueden orientarse arbitrariamente. El conjunto $A - X$ puede ser vacío.



7. Si $x = 2$, $y = 0$, $b \geq 4$, $z = 0$. El conjunto $A - X$ puede ser vacío.



8. Por último, sea $x = 3$, $y = 0$, $b \geq 5$, $z = 0$. Las particiones de los conjuntos B y C son con respecto a x_1. Las aristas no especificadas entre B y C_1 están orientadas de C_1 a B. Además, $X = X_1 \cup \{x_2\}$, $|X_2| \geq 2$.



Podemos resumir lo anterior en la siguiente Proposición.

Proposición 3.1 *Con la notación anterior, las siguientes* 6*-tuplas son admisibles:*

1. $(a, x > 0; b, y > 0; c, z > 0)$,
2. $(a, x \geq 2; b, y \geq 2; c, 0)$,
3. $(a, x > 0; b, y \geq 2; c, 0)$,
4. $(a, 1; b, y \geq 2; c \geq 6, 0)$,
5. $(a, 1; b, 1; c \geq 7, 0)$,
6. $(a, 1; b, 0; c, 0)$,
7. $(a, 2; b, 0; c, 0)$,
8. $(a, x \geq 3; b, 0; c, 0)$.

A continuación veamos una serie de lemas necesarios para la demostración de la proposición 3.2. Iniciaremos con algunos resultados para torneos bipartitos que nos serán de gran utilidad en el resto del capítulo.

Lema 3.1 *Si $T(A,B)$ es un torneo bipartito sin transmisores en B, entonces existe $u \in A$ tal que $d(u,B) \leq 3$.*

Demostración. Sea $M(A)$ el conjunto de vértices de A con exgrado máximo. Sea $u \in M(A)$, si u es transmisor entonces $d(u,B) = 1$. Si u no es transmisor entonces sea B_1, B_2 una partición de B tal que $u \to B_1$ y $B_2 \to u$. Sea $w \in B_2$ y $a \in A$ tal que $a \to w$, a existe ya que en B no hay transmisores. Si $d^+(u) = n$ entonces $d^+(a) \leq n$. Como $w \in N^+(a)$ entonces $|N^+(a) \cap B_1| \leq n - 1$, entonces existe $b \in B_1$ tal que $b \to a$. Por lo tanto, considerando la trayectoria $u \to b \to a \to w$ se tiene que $d(u,w) = 3$, por lo que para todo $w \in B$, $d(u,B) \leq 3$. ■

Lema 3.2 *Si $T(A,B)$ es un torneo bipartito sin transmisores y $|A| \leq 3$, entonces A contiene un 3-rey de T.*

Demostración.
Sabemos que como en T no hay transmisores $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$, por lo que $2 \leq |A| \leq 3$. Si $|M(A)| = 1$, supongamos $M(A) = \{u\}$, por el lema anterior sabemos que $d(u,B) \leq 3$. Sea $a \in A$, existe $v \in B$ tal que $u \to v$ y $v \to a$, entonces consideramos la trayectoria $u \to v \to a$ se tiene que $d(u, A-u) = 2$, por lo tanto $u \in K_3(T)$.

Sea $|M(A)| = 2$, $M(A) = \{u,v\}$. Si $N^+(u) \neq N^+(v)$ existe $b \in B$ tal que $u \to b$ y $b \to u$ así $d(u,v) = 2$ y por el caso anterior se tiene que $d(u,V(T)) \leq 3$ y $d(v,V(T)) \leq 3$. Por lo tanto $M(A) = \{u,v\} \subseteq K_3(T)$. Si $N^+(u) = N^+(v)$ entonces $A = \{u,v,w\}$ se tiene que $w \in K_3(T)$ ya que $w \to N^-(u) = N^-(v)$ de tal forma que $d(w, M(A)) = 2$ y $d(w, N^+(u) = N^+(v)) \leq 3$. Por lo tanto $d(w, V(T)) \leq 3$.

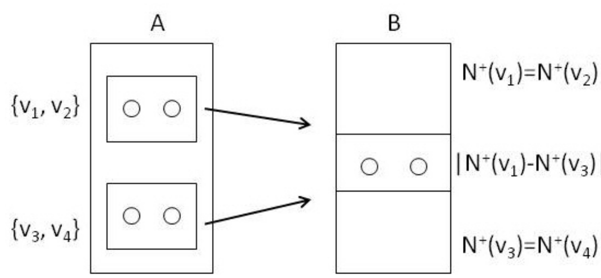
Finalmente supongamos que $|M(A)| = 3$, $M(A) = A = \{u,v,w\}$. Si $N^+(u) = N^+(v) = N^+(w)$ implicaría que hay transmisores en B si $N^+(u) = N^+(v) = N^+(w) \subset B$, o bien, transmisores en A si $N^+(u) = N^+(v) = N^+(w) = B$. Por lo tanto existe un vértice, digamos u tal que $N^+(u) \neq N^+(v)$ y $N^+(u) \neq N^+(w)$ entonces por el lema 3.1 $d(u,B) \leq 3$ y $d(u,\{v,w\}) = 2$ por lo demostrado anteriormente. Por lo tanto $u \in K_3(T)$. ■

El siguiente lema nos muestra la estructura de algunos torneos bipartitos sin transmisores y sin 3-*reyes*.

Lema 3.3 *Sea $T(A,B)$ un torneo bipartito sin transmisores y sin 3-reyes. Si $|A| = 4$ y $|B| \geq 4$ entonces la estructura de $T(A,B)$ es la siguiente:*

1. $A = \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\}$, $N^+(v_1) = N^+(v_2)$, $N^+(v_3) = N^+(v_4)$ *y*

2. $N^+(v_1) \subset N^+(v_3) = B$, $|N^+(v_1) - N^+(v_3)| \geq 2$, $|N^+(v_3) - N^+(v_1)| \geq 2$.



Demostración. Sea $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Primero vamos a mostrar que $|M(A)| = 2$ ó $|M(A)| = 4$. Si $|M(A)| = 1$, $M(A) = \{u\}$ entonces $u \in K_3(T)$ como vimos en la demostración del lema anterior, lo que contradice que $K_3(T) = \emptyset$. Supongamos ahora que $|M(A)| = 3$, $M(A) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Si existe v_i tal que $N^+(v_i) \neq N^+(v_j)$ y $N^+(v_i) \neq N^+(v_k)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ entonces, por lo visto en el lema anterior se tiene que $v_i \in K_3(T)$. En caso contrario, si $N^+(v_1) = N^+(v_2) = N^+(v_3)$ se tiene que $v_4 \in K_3(T)$, en ambos casos contradecimos que $K_3(T) = \emptyset$.

Entonces $|M(A)| = 2$ ó $|M(A)| = 4$. Supongamos que $|M(A)| = 2$, $M(A) = \{v_1, v_2\}$. Como $K_3(T) = \emptyset$ entonces $N^+(v_1) = N^+(v_2)$, ya que en caso contrario se tendría que $M(A) \subset K_3(T)$. Como $N^+(v_1) = N^+(v_2)$ se tiene que $N^-(v_1) = N^-(v_2)$. Como $T(A,B)$ no tiene transmisores $N^-(v_1) = N^-(v_2) \neq \emptyset$, esto es $N^+(v_1) = N^+(v_2) \neq B$ de donde se sigue que $N^-(v_1) = N^-(v_2) \subset N^+(v_3) \cup N^+(v_4)$. Sea $d^+(v_3) \geq d^+(v_4)$ y supongamos que $N^+(v_3) \neq N^+(v_4)$, entonces existe $b \in B$ tal que $v_3 \to b$, $b \to v_4$ y $v_3 \to b \to \{v_1, v_2\}$ ya que $b \in N^-(v_1) = N^-(v_2)$. De tal forma que $d(v_3, A) = 2$ y $d(v_3, N^-(v_3)) = 3$ por lo que $v_3 \in K_3(T)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N^+(v_3) = N^+(v_4)$.

Ahora supongamos $|M(A)| = 4$, $M(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Como se vio en el caso $N^+(v_i) \neq N^+(v_j), N^+(v_k), N^+(v_l)$ para algún $i \in \{1,2,3,4\}$, $\{i,j,k,l\} =$

$\{1,2,3,4\}$ implicaría que $v_i \in K_3(T)$ lo que contradice que $K_3(T) = \emptyset$. Si $N^+(v_1) = N^+(v_2) = N^+(v_3) = N^+(v_4)$ entonces habría transmisores, lo cual no es posible. Por lo tanto existen pares $\{i,j\}$ y $\{k,l\}$, $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, de tal forma $N^+(v_i) = N^+(v_j) \neq N^+(v_k) = N^+(v_l)$. Podemos tomar $\{i,j\} = \{1,2\}$ y $\{k,l\} = \{3,4\}$ con lo que queda demostrado (1).

Como $T(A,B)$ no tiene transmisores, en particular B tampoco tiene transmisores, se tiene que $N^+(v_1) \cup N^+(v_3) = B$. De forma similar se tiene que $|N^+(v_1) - N^+(v_3)| \geq 1$. Si $|N^+(v_1) - N^+(v_3)| = 1$, $N^+(v_1) - N^+(v_3) = \{u\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $u \in N^+(v_1)$, entonces $d(u,v_3) = 1$, $d(u,N^+(v_3)) = 2$ t $d(u,v_1) = 3$. Por lo tanto $u \in K_3(T)$ lo cual es una contradicción ya que $K_3(T) = \emptyset$. Así, $|N^+(v_1) - N^+(v_3)| \geq 2$. Por simetría se tiene que $|N^+(v_3) - N^+(v_1)| \geq 2$ con lo que queda probado (2). ■

Veamos ahora algunos resultados básicos para torneos tripartitos.

Lema 3.4 *Sea $T(A,B,C)$ un torneo tripartito con $X = \{x_1\}$ y sea A_1, A_2, A_3 la partición de $A - X$ con respecto a x_1. Entonces $A_1 = A_3 = \emptyset$, esto es, $d(x_1, A - x_1) = 2$ para $A - x_1 \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $A - X = \emptyset$ no hay nada que probar. Sea $a_1 \in A - X$. Si a_1 domina a todos los vértices dominados por x_1, entonces a_1 también es un 3-rey, lo cual es una contradicción ya que $X = \{x_1\}$. De esta forma existe $v \in B \cup C$ tal que $x_1 \to v$ y $v \to a_1$ de donde se tiene que $d(x_1, a_1) = 2$. ■

El siguiente lema nos da un criterio simple para determinar cuando un vértice $v \in B_2 \cup C_2 \cup B_3 \cup C_3$ es un 3-*rey*.

Lema 3.5 *Sea $T(A,B,C)$ un torneo tripartito con $X = \{x_1\}$ y sea B_i (respectivamente C_i), $i = 1,2,3$ la partición de B (respectivamente C) con respecto a x_1. Si $v \in B_2 \cup C_2 \cup B_3 \cup C_3$ y $d(v, B_3 \cup C_3) \leq 3$ entonces $v \in K_3(T)$.*

Demostración. Como $d(x_1, v) = 2$ ó $d(x_1, v) = 3$ se sigue que $v \to x_1$, esto es, $d(v, x_1) = 1$. Como $d(x_1, B_1 \cup C_1) = 1$, $d(x_1, B_2 \cup C_2) = 2$ y $d(x_1, A - X) = 2$ por el lema 3.4, se tiene que $d(v, B_1 \cup C_1) \leq 2$, $d(v, B_2 \cup C_2) \leq 3$ y $d(v, A - X) \leq 3$ y como $d(v, B_3 \cup C_3) \leq 3$ entonces $d(v, V(T)) \leq 3$, por lo tanto $v \in K_3(T)$: ■

Recordemos que dados subconjuntos A y $B \in V(T)$, si para cualquier vértice $v \in B$ existe un vértice $u \in A$ tal que $u \to v$, escribimos $A \rightrightarrows B$.

Lema 3.6 *Sea $T(A,B,C)$ un torneo tripartito con $X = \{x_1\}$ y sea B_i (respectivamente C_i), $i = 1,2,3$ la partición de B (respectivamente C) respecto a x_1. Entonces:*

1. $x_1 \to B_1 \cup C_1$

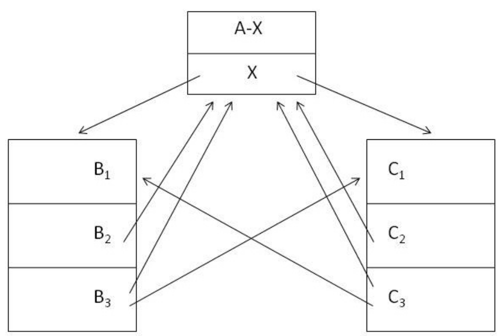
2. $B_2 \cup B_3 \cup C_2 \cup C_3 \to x_1$

3. $B_3 \to C_1$, $C_3 \to B_1$

4. $B_1 \rightrightarrows C_2$, $C_1 \rightrightarrows B_2$, $B_2 \cup (A - X) \rightrightarrows C_3$, $C_2 \cup (A - X) \rightrightarrows B_3$

5. *Si $B_1 = \emptyset$ (respectivamente $C_1 = \emptyset$) entonces $C_2 = \emptyset$ (respectivamente $B_2 = \emptyset$)*

6. *Si $Y \neq \emptyset$ (respectivamente $Z \neq \emptyset$) entonces $B_2 \cup B_3 \cup C_2 \cup C_3 \neq \emptyset$.*



Demostración.

1. Es inmediato que $x_1 \to B_1 \cup C_1$ por como se definió la partición de B y C respecto a x_1.

2. Como $d(x_1, B_2 \cup C_2) = 2$ y $d(x_1, B_3 \cup C_3) = 3$ se tiene que $d(B_2 \cup C_2, x_1) = 1$ y $d(B_3 \cup C_3, x_1) = 1$, por lo tanto $B_2 \cup C_2 \cup B_3 \cup C_3 \to x_1$.

3. Como $d(x_1, C_1) = 1$ y $d(x_1, B_3)$ entonces $d(C_1, B_3) \geq 2$. Por lo tanto $B_3 \to C_1$. De forma análoga se tiene que $C_3 \to B_1$.

4. Sabemos que $d(x_1, C_2) = 2$. Sea $x_1 \to y \to c_2$ la trayectoria de x_1 a c_2 para algún $c_2 \in C_2$ donde y es un vértice que se encuentra a distancia 1 de x_1, entonces, por como se definieron las particiones de B y C, se tiene que $y \in B_1$. Por lo tanto $B_1 \rightrightarrows C_2$.

   De forma similar para $C_1 \rightrightarrows B_2$.

   Ahora veamos que $B_2 \cup (A - X) \rightrightarrows C_3$. Sabemos que $d(x_1, C_3) = 3$. Consideremos la trayectoria $x_1 \to y_1 \to y_2 \to c_3$ para algún $c_3 \in C_3$, entonces $d(x_1, y_2) = 2$, es decir, $y_2 \in A - X$ por el lema 3.4, ó bien, $y_2 \in B_2$. Por lo tanto $B_2 \cup (A - X) \rightrightarrows C_3$.

   De forma similar se tiene que $C_2 \cup (A - X) \rightrightarrows B_3$.

5. Por el caso anterior tenemos que $B_1 \rightrightarrows C_2$, es decir, dado $c_2 \in C_2$ siempre existe un $b_1 \in B_1$ tal que $b_1 \to c_2$. Por lo tanto si $B_1 = \emptyset$ entonces $C_2 = \emptyset$. (Respectivamente si $C_1 = \emptyset$ se tiene que $B_2 = \emptyset$).

6. Supongamos que $B_2 \cup B_3 \cup C_2 \cup C_3 = \emptyset$. Sea $y \in Y$, entonces $y \in B_1$ y $d(y, V(T)) \leq 3$ pero $d(y, x_1) = \infty$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B_2 \cup B_3 \cup C_2 \cup C_3 \neq \emptyset$. (Respectivamente si $Z = \emptyset$).

■

Lema 3.7 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $X = \{x_1\}$, $|Y| \geq 1$, $Z = \emptyset$ y $|A - X| \leq 1$. Si B_i (respectivamente C_i), $i = 1, 2, 3$ es la partición de B (respectivamente C) respecto a x_1, entonces no hay transmisores en B_3 en el torneo bipartito inducido $T(B_3, C_3)$.*

Demostración. Sea $B_3^{'}$ el conjunto de transmisores de B_3 en $T(B_3, C_3)$, esto es $B_3^{'} = \{v \in B_3 | v \to C_3\}$.
Mostraremos que $B_3^{'} = \emptyset$. Consideremos dos casos.

1. Si $C_2 = \emptyset$, entonces $A - X \rightrightarrows B_3$. Por el lema 3.6(d), $A - X = \{a_1\}$, $a_1 \to B_3$. Entonces:

   - $d(a_1, C_3) = 2$ ya que $a_1 \to B_3$, entonces $a_1 \to B_3^{'} \to C_3$,
   - $d(a_1, C_1) = 2$ ya que $a_1 \to B_3$ y $B_3 \to C_1$ por el lema 3.6(c),
   - $d(a_1, B_1) \leq 3$ ya que $a_1 \to B_3$, entonces ya que $a_1 \to B_3^{'} \to C_3 \to B_1$ por el lema 3.6(c),

- $d(a_1, B_2) \leq 3$ ya que $a_1 \to B_3' \to C_1 \rightrightarrows B_2$ por el lema 3.6(c) y 3.6(d),
- $d(a_1, x_1) = 2$ ya que $a_1 \to B_3 \to x_1$.

Por lo tanto $d(a_1, V(T)) \leq 3$, y $a_1 \in K_3(T)$. Una contradicción ya que $X = \{x_1\}$.

2. Si $C_2 \neq \emptyset$. Definimos el conjunto $B'' = \{v \in B_3' | v \to C_2\}$ y consideremos los siguientes dos subcasos.

   (b1) Sea $B'' = \emptyset$. Entonces $C_2 \rightrightarrows B_3'$, por el lema 3.1 existe $u \in C_2$ tal que $d(u, B_3') \leq 3$ en $T(B_3', C_2)$. Ahora, como $d(u, B_3) = d(u, B_3') + d(B_3', C_3) + d(C_3, B_3) = 3$ y $d(u, C_3) = 2$ por el lema 3.5 $u \in K_3(T)$. Una contradicción ya que $Z = \emptyset$.

   (b2) Sea $B'' \neq \emptyset$. Por el lema 3.6(d) $a_1 \to B_3''$, $\{a_1\} = A - X$. Como en el caso (a) se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

De los casos anteriores se tiene que $B_3'' = \emptyset$ como se quería probar. ■

Lema 3.8 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $X = \{x_1\}$, $|Y| \geq 1$, $Z = \emptyset$ y $|A - X| \leq 1$. Si B_i y C_i, $i = 1, 2, 3$ son las particiones de B y C respecto a x_1, entonces $|C_3| \geq 4$.*

Demostración. Supongamos que $|C_3| \leq 3$. Consideremos dos casos.

(a) Existen transmisores en $T(B_3, C_3)$. Por el lema anterior pertenecen a C_3. Sea $C_3' = \{v \in C_3 | v \to B_3\}$.

(Si $B_3 = \emptyset$ tomemos $C_3' = C_3$). Denotemos por $M(C_3')$ el conjunto de todos los vértices de C_3' que tienen exgrado máximo en $T(A, B, C)$, esto es,
$M(C_3') = \{v \in C_3' | d_T^+ = max_{u \in C_3'} d_T^+(u)\}$

Consideremos los subcasos $|M(C_3')| = 1$, $|M(C_3')| = 2$ y $|M(C_3')| = 3$ y veamos que no son posibles.

1. $|M(C_3')| = 1$, $M(C_3') = \{v_1\}$. Como $v_1 \in C_3'$ entonces $v_1 \to B_3$. Sea $v \in C_3 - \{v_1\}$, entonces existe $b \in B_3$ tal que $v_1 \to b$ y $b \to v$. Por lo

tanto $d(v_1, B_3 \cup C_3) \leq 3$ y por el lema 3.5 $v_1 \in K_3(T)$, una contradicción a $Z = \emptyset$.

2. $|M(C^{;}_3)| = 2$, $M(C^{;}_3) = \{v_1, v_2\}$. Si $N^+_T(v_1) \neq N^+_T(v_2)$ entonces $M(C^{;}_3) \subset K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Entonces $N^+_T(v_1) = N^+_T(v_2)$ y $N^-_T(v_1) = N^-_T(v_2)$. Sea el conjunto $B^{;}_2 = \{v \in B_2 | v \to \{v_1, v_2\}\}$.

   Notemos que $B^{;}_2 \neq \emptyset$ y posiblemente $B^{;}_2 = B_2$. De lo contrario, $a_1 \to \{v_1, v_2\}$, $\{a_1\} = A - X$, de esta forma:

   - $d(a_1, x_1) = 2$ ya que $\{v_1, v_2\} \to x_1$,
   - $d(a_1, B_1) = 2$ ya que $\{v_1, v_2\} \to B_1$,
   - $d(a_1, C_1) = 3$,
   - $d(a_1, B_2) \leq 2$,
   - $d(a_1, C_2) \leq 3$,
   - $d(a_1, B_3) = 2$,
   - $d(a_1, C_3) = 3$.

   Por lo tanto $d(a_1, V(T)) \leq 3$, es decir, $a_1 \in K_3(T)$ lo cual no es posible ya que $X = \{x_1\}$.

   Afirmamos lo siguiente:

   - $B^{;}_2 \to C^{;;}_3$ para $C^{;;}_3 = \{C_3 - \{v_1, v_2\}\} \neq \emptyset$. De la suposición de $|C_3| \leq 3$ se sigue que $C^{;;}_3 \leq 1$. Si $C^{;;}_3 = \emptyset$ no hay nada que probar. Sea $C^{;;}_3 = \{v_3\}$. Si $v_3 \to u$ para alguna $u \in B^{;}_2$ entonces $d(v_3, C_3) = 2$ y $d(v_3, B_3) = 3$, es decir, $d(v_3, B_3 \cup C_3) \leq 3$, y por el lema 2.5 se tiene que $v_3 \in K_3(T)$. Una contradicción ya que $Z = \emptyset$. Entonces $B^{;}_2 \to v_3$, es decir, $B^{;}_2 \to C^{;;}_3$.

   - $B^{;}_2 \to C_2$. Si existe $u \in C_2$ y $v \in B^{;}_2$ tal que $u \to v$ se tendría que $d(u, B_3) \leq 3$ y $d(u, C_3) \leq 3$ por el caso anterior. Por lo tanto, por el lema 3.5 se tiene que $u \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$.

   - $B^{;}_2 \to A - X$. De lo contrario $A - X = a_1 \to v$ para alguna $v \in B^{;}_2$. Entonces por el caso anterior:

- $d(a_1, C_1) = 3$,
- $d(a_1, B_1) = 3$,
- $d(a_1, C_2) \leq 2$,
- $d(a_1, B_2) \leq 3$,
- $d(a_1, C_3) = 2$,
- $d(a_1, B_3) \leq 3$,
- $d(a_1, x_1) = 2$.

Por lo tanto $d(a_1, V(T)) \leq 3$ y $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

Ahora observemos el torneo bipartito $T(C_1, B'_2)$.Como $C_1 \rightrightarrows B_2$ se tiene que $C_1 \rightrightarrows B'_2$, por el lema 3.1 existe $u \in C_1$ tal que $d(u, B'_2) \leq 3$. Como

- $d(u, B_2) = 1$,
- $d(u, C_2) = 2$ por el caso anterior,
- $d(u, C_3) = 2$ por lo visto en el primer punto,
- $d(u, a_1) = 1$,
- $d(u, B_3) = 3$.

Por lo tanto $d(u, V(T)) \leq 3$, es decir, $u \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$.

3. $|M(C'_3)| = 3$. Entonces $M(C'_3) = C'_3 = C_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$. Si existen v_i, v_j, v_k, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ tales que $N^+_T(v_i) \neq N^+_T(v_j), N^+_T(v_k)$, entonces $v_i \in K_3(T)$ como se había argumentado antes, lo que contradice que $Z = \emptyset$. Así se tiene que $N^+_T(v_i) = N^+_T(v_j), N^+_T(v_k)$ y el argumento se extiende de forma análoga a (2).

(b) Consideremos ahora el segundo caso, cuando no hay transmisores en $T(B_3, C_3)$. Podemos suponer $2 \leq |C_3| \leq 3$ y $|B_3| \geq 2$ por lo siguiente:

Consideremos los subcasos $|C_3| = 1$ y $C_3 = \emptyset$ y $|B_3| = 1$ y $B_3 = \emptyset$ y veamos que no son posibles.

- Sea $|C_3| = 1$, $C_3 = \{u\}$. Si $B_3 \neq \emptyset$ entonces existen transmisores en B_3 o C_3 lo que contradice la hipótesis de que no hay transmisores en $T(B_3, C_3)$. Si $B_3 = \emptyset$ entonces se tiene que:

- $d(u, x_1) = 1$,
- $d(u, a_1) = 2$,
- $d(u, C_2) = 2$ ya que $C_3 \to B_1 \rightrightarrows C_2$ y
- $d(u, B_2) = 3$ ya que $C_3 \to x_1 \to C_1 \rightrightarrows B_2$.

Entonces $u \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$.

- Sea $C_3 = \emptyset$. El caso $B_3 \neq \emptyset$ podría considerarse como el caso en que B_3 contiene transmisores. Sin embargo, esto no es posible por el lema 3.6(d). Si $B_3 = \emptyset$ y $C_2 \neq \emptyset$ se tiene que:

- $d(C_2, x_1) = 1$,
- $d(C_2, C_1) = 2$ ya que $C_2 \to x_1 \to C_1$,
- $d(C_2, B_1) = 2$ ya que $C_2 \to x_1 \to B_1$,
- $d(C_2, A - X) \leq 3$ ya que $C_2 \to x_1 \to C_1 \to A - X$,
- $d(C_2, B_2) \leq 3$ ya que $C_2 \to x_1 \to C_1 \rightrightarrows B_2$.

Entonces $C_2 \subset K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Así, supongamos que $B_3 = C_2 = \emptyset$. Como $C_1 \rightrightarrows B_2$, por el lema 3.1 existe $v \in C_1$ tal que $d(v, B_2) \leq 3$. Consideremos el conjunto $B_2^+ = N_{B_2}^+(v)$. Supongamos que $A - X = \emptyset$ o bien, existe $u \in B_2^+$ tal que $u \to a_1$, $A - X = \{a_1\}$. Entonces como

- $d(v, B_2) \leq 3$ y
- $d(v, B_2) \leq 3$,

se tiene que $d(v, V(T)) \leq 3$ y por lo tanto $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Por otro lado, si $a_1 \to B_2^+$ se tiene que:

- $d(a_1, x_1) = 2$ ya que $a_1 \to B_2^+ \to x_1$,

- $d(a_1, B_1) = 3$,
- $d(a_1, C_1) = 3$ y
- $d(a_1, B_2) \leq 3$.

Por el lema 3.1, se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

- Sea $B_3 = \emptyset$. El caso fue discutido en (a) cuando $C_3' = C_3$.

- Sea $|B_3| = 1$. Como $T(B_3, C_3)$ no tiene transmisores, $C_3 = \emptyset$. Sea $B_3 = \{u\}$. Si $w \to u$ para algún $w \in C_2$, entonces, por el lema 3.5 $w \in K_3(T)$ contradiciendo que $Z = \emptyset$. De otra forma $u \to C_2$, posiblemente $C_2 = \emptyset$, y $a_1 \to u$, así se tiene que:

- $d(a_1, x_1) = 2$,
- $d(a_1, B_1) = 3$,
- $d(a_1, C_1) = 3$,
- $d(a_1, C_2) \leq 2$,
- $d(a_1, B_3) = 1$.

Por lo tanto $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

Así tenemos que $2 \leq |C_3| \leq 3$, $|B_3| \geq 2$. Por el lema 3.2 existe un 3-rey, digamos $v \in C_3$ en $T(B_3, C_3)$, lo que contradice que $Z = \emptyset$. Con lo cual se concluye que $|C_3| \geq 4$

■

Lema 3.9 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $X = \{x_1\}$, $|Y| \geq 1$, $Z = \emptyset$ y $|A - X| \leq 1$. Entonces $|C| \geq 6$.*

Demostración. Supongamos que $|C| \leq 5$. Por el lema 3.8 $|C_3| \geq 4$. Nos basta probar que los casos $|C_3| = 4$ y $|C_3| = 5$ son imposibles.

Si $|C_3| = 5$, esto es, $C_3 = C$, entonces $C_1 = C_2 = \emptyset$ y consecuentemente $B_2 = \emptyset$ ya que por el lema 3.6(d) $C_1 \rightrightarrows B_2$. Entonces $A - X = \{a_1\}$, $a_1 \to (B_3 \cup C_3)$ por el lema 3.6(d), y como $d(a_1, x_1) = 2$, $d(a_1, B_1) = 2$

se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ contradiciendo que $X = \{x_1\}$. Así, $|C_3| = 4$ y $|C_1 \cup C_2| = 1$

Consideremos los siguientes casos y veamos que no son posibles.

(a) Primero supongamos que $C_1 = \{u\}$, $C_2 = \emptyset$. Entonces $u \to B_2$ y como $C_2 = \emptyset$, $a_1 \to B_3$ por el lema 3.6(d).

1. $u \to a_1$. Entonces:

   - $d(u, a_1) = 1$
   - $d(u, x_1) = 2$ ya que $u \to B_2 \to x_1$
   - $d(u, B_1) \leq 3$ ya que $u \to B_2 \to x_1 \to B_1$
   - $d(u, B_2) = 1$
   - $d(u, C_3) = 2$ ya que $u \to B_2 \cup \{a_1\}$ y $(B_2 \cup \{a_1\}) \rightrightarrows C_3$.

   De lo anterior se tiene que $u \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$.

2. $a_1 \to u$. Entonces:

   - $d(a_1, x_1) = 2$ ya que $a_1 \to B_3 \to x_1$,
   - $d(a_1, B_1) = 3$ ya que $a_1 \to B_3 \to x_1 \to B_1$,
   - $d(a_1, B_2) \leq 2$ ya que $a_1 \to u \to B_2$,
   - $d(a_1, B_3) = 1$,
   - $d(a_1, C_3) \leq 3$ ya que $a_1 \to u \to B_2$ y $a_1 \cup B_2 \rightrightarrows C_3$.

   De lo anterior se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

   (b) Ahora consideremos el caso $C_1 = \emptyset$, $C_2 = \{u\}$. Como $C_1 = \emptyset$ entonces $B_2 = \emptyset$ ya que $C_1 \rightrightarrows B_2$ y consecuentemente $a_1 \to C_3$. Por el lema 3.7 B_3 no puede tener transmisores en $T(B_3, C_3)$, esto es, $C_3 \rightrightarrows B_3$. Entonces:

   - $d(a_1, x_1) = 2$ ya que $a_1 \to C_3 \to x_1$,
   - $d(a_1, B_1) = 2$ ya que $a_1 \to C_3 \to B_1$,
   - $d(a_1, C_2) \leq 3$ ya que $a_1 \to C_3 \to B_1 \rightrightarrows C_2$,

- $d(a_1, B_3) \leq 2$ ya que $a_1 \to C_3 \rightrightarrows B_3$,
- $d(a_1, C_3) = 1$.

Lo anterior implica que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$. Por lo tanto se concluye que $|C| \geq 6$. ■

Lema 3.10 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $|X| = |Y| = 1$, $Z = \emptyset$, $|A - X| \leq 1$ y $|C| \geq 6$. Si $|C| \geq 6$ y $C_2 = \emptyset$ entonces $|C_1| > 2$.*

Demostración. Supongamos que $|C_1| = 2$, $C_2 = \emptyset$. Consideremos dos casos y veamos que no son posibles.

1. No hay transmisores en $T(B_3, C_3)$. El caso $B_3 = \emptyset$ es discutido en (2). Tomemos $B_3 \neq \emptyset$ y, como $C_2 = \emptyset$, por el lema 3.6(d) se tiene que $A - X = \{a_1\}$ $a_1 \to B_3$. Entonces:

   - $d(a_1, x_1) = 2$,
   - $d(a_1, C_1) = 2$,
   - $d(a_1, B_1) = 3$ ya que $a_1 \to B_3 \to x_1 \to B_1$,
   - $d(a_1, B_2) \leq 3$ ya que $a_1 \to B_3 \to C_1 \rightrightarrows B_2$,
   - $d(a_1, C_3) \leq 2$ ya que $a_1 \to B_3$ y no hay transmisores en $T(B_3, C_3)$.

   Por lo tanto $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

2. Hay transmisores en $T(B_3, C_3)$. Por el lema 3.7 pertenecen a C_3. Sea $C_3' = \{v \in C_3 | v \to B_3\}$.

   Si $B_3 = \emptyset$ tomamos $C_3' = C_3$. Definimos $M(C_3')$ como el conjunto de vértices de C_3' que tienen exgrado máximo en $T(A, B, C)$
   $M(C_3') = \{v \in C_3' | d_T^+(v) = max_{v \in C_3'} d_T^+(u)\}$
   Veamos ahora que los subcasos $|M(C_3')| = 1$, $|M(C_3')| = 2$, $|M(C_3')| = 3$, $|M(C_3')| = 4$ no son posibles.

   - Si $|M(C_3')| = 1$, $M(C_3') = \{v\}$. Entonces:

- $d(v, B_3) = 1$,
- $d(v, C_3) = 2$.

Entonces por el lema 3.5 $v \in K_3(T)$, una contradicción a $Z = \emptyset$

- Si $|M(C_3')| = 2$, $M(C_3') = \{v_1, v_2\}$. Si $N_T^+(v_1) \neq N_T^+(v_2)$ existe $x \in V(T)$ tal que $v_1 \to x$ y $x \to v_2$, entonces $v_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Así $N_T^+(v_1) = N_T^+(v_2)$. Primero consideremos el caso $B_3 \neq \emptyset$. Como $C_2 = \emptyset$, $A - X = \{a_1\}$ y $a_1 \to B_3$, si $a_1 \to \{v_1, v_2\}$ se tiene que $d(a_1, \{v_1, v_2\}) = 2$ y como en el caso (1) se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$. Así $\{v_1, v_2\} \to a_1$. Entonces existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$, entonces como $d(y, B_3 \cup C_3) \leq 3$, por el lema 3.5 se tiene que $y \in K_3(T)$. Como $|Y| = 1$, $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$ (posiblemente $B_2 - \{y\} = \emptyset$). Notemos que $y \to a_1$. De otra forma $v_1 \in K_3(T)$ ya que $v_1 \to a_1 \to y \to v_2$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Además $\{v_3, v_4\} \to y$, $\{v_3, v_4\} = C_3 - \{v_1, v_2\}$. De hecho $v_3 \to y$ y $y \to v_4$ (respectivamente $v_4 \to y$ y $y \to v_3$) implica que $v_3 \in K_3(T)$ ya que $v_3 \to y \to \{v_1, v_2\} \to B_3$ y $d(v_3, B_3 \cup C_3) \leq 3$ (respectivamente $v_4 \in K_3(T)$) lo que contradice que $Z = \emptyset$. Por otro lado $y \to \{v_3, v_4\}$ implica que $u \in K_3(T)$, donde $u \in C_1$ y $u \to y$. Una contradicción a $Z = \emptyset$. De forma similar se tiene que $\{v_3, v_4\} \to a_1$. Además $N_T^+(v_3) \neq N_T^+(v_4)$ implica que $v_i \in K_3(T)$, $i \in \{3, 4\}$, ya que $\{v_3, v_4\} \to y$ de donde se tiene que $d(v_i, B_3 \cup C_3) \leq 3$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. De esta forma $N_T^+(v_3) = N_T^+(v_4)$. Como $\{v_3, v_4\} \to a_1$, existe $v \in B_2 - \{y\}$ tal que $v \to \{v_3, v_4\}$ de donde $d(v, B_3 \cup C_3) \leq 3$ ya que $y \to \{v_1, v_2\}$, y por lo tanto $v \in K_3(T)$, una contradicción a $|Y| = 1$.

Sea $B_3 = \emptyset$. Primero supongamos que $\{v_1, v_2\} \to a_1$ ó $A = X = \{x_1\}$. En ambos casos existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$ ya que $(A - X) \cup B_2 \rightrightarrows C_3$. De esta forma $d(y, C_3) \leq 3$ y por el lema 3.5 $y \in K_3(T)$. Como $|Y| = 1$, $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$. De manera similar $\{v_3, v_4\} \to y$ y $N_T^+(v_3) = N_T^+(v_4)$. Si existe $v \in B_2 - \{y\}$ tal que $v \to \{v_3, v_4\}$ entonces $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $|Y| = 1$. Así $\{v_3, v_4\} \to B_2 - \{y\}$ ó $B_2 - \{y\} = \emptyset$. Entonces como $\{v_3, v_4\} \to B_2$ y $a_1 \to \{v_3, v_4\}$, se tiene que:

- $d(a_1, x_1) = 2$,

- $d(a_1, B_1) = 2$,
- $d(a_1, C_1) = 3$ ya que $a_1 \to \{v_3, v_4\} \to x_1 \to C_1$,
- $d(a_1, B_2) = 2$,
- $d(a_1, C_3) \leq 3$.

Por lo tanto $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

Ahora supongamos que $a_1 \to \{v_1, v_2\}$. Si $\{v_1, v_2\} \to B_2$ entonces $a_1 \in K_3(T)$ ya que:

- $d(a_1, x_1) = 2$,
- $d(a_1, B_1) = 3$,
- $d(a_1, C_1) = 3$,
- $d(a_1, B_2) \leq 2$ ya que $\{v_1, v_2\} \to B_2$,
- $d(a_1, C_3) \leq 3$ ya que $a_1 \cup B_2 \rightrightarrows C_3$.

Lo anterior contradice que $X = \{x_1\}$. Entonces existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$. Como se vio arriba $y \in K_3(T)$ y como $|Y| = 1$, $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$. Como $d(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}) = 2$ y $a_1 \to \{v_1, v_2\}$ se tiene que $B_2 - \{y\} \neq \emptyset$. Si $a_1 \to y$ entonces $d(a_1, B_2) \leq 2$ ya que $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$. Por lo tanto $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$. De aquí que $y \to a_1$. De forma similar se tiene que $\{v_3, v_4\} \to y$, $N_T^+(v_3) = N_T^+(v_4)$ y $\{v_3, v_4\} \to a_1$. Lo anterior implica que existe $v \in B_2 - \{y\}$ tal que $v \to \{v_3, v_4\}$ de forma que $d(v, \{v_3, v_4\}) = 1$ y $d(v, \{v_1, v_2\}) = 2$ y por tanto $d(v, C_3) \leq 2$ y por el lema 3.5 se tiene que $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $|Y| = 1$.

Sea $B_3 = \emptyset$. Primero supongamos que $\{v_1, v_2\} \to a_1$ ó $A - X = \{x_1\}$. En ambos casos existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$ y por lo tanto se tiene que $y \in K_3(T)$. Por otro lado, como —Y—=1, $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$. Por una razón similar se tiene que $\{v_3, v_4\} \to y$ y $N_T^+(v_3) = N_T^+(v_4)$. Si existe $v \in B_2 - \{y\}$ tal que $v \to \{v_3, v_4\}$, entonces $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $|Y| = 1$. De esta forma, $\{v_3, v_4\} \to B_2 - \{y\}$ ó $B_2 - \{y\} = \emptyset$. Como $\{v_3, v_4\} \to B_2$ y $a_1 \to \{v_3, v_4\}$, se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

Ahora supongamos que $a_1 \to \{v_1, v_2\}$. Si $\{v_1, v_2\} \to B_2$ entonces $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$. De esta forma existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$. Por un argumento similar al caso anterior se tiene que $y \in K_3(T)$ y como $|Y| = 1$, $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$. Hay que notar que $d(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}) = 2$ y $a_1 \to \{v_1, v_2\}$ implica que $B_2 - \{y\} \neq \emptyset$. Si $a_1 \to y$ entonces $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$. De aquí que $y \to a_1$. Si procedemos de forma similar tenemos que $\{v_3, v_4\} \to y$, $N_T^+(v_3) = N_T^+(v_4)$ y $\{v_3, v_4\} \to a_1$. Lo anterior implica que existe $v \in B_2 - \{y\}$ y $v \to \{v_3, v_4\}$. Por lo tanto $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $|Y| = 1$.

- Si $|M(C_3')| = 3$, $M(C_3') = \{v_1, v_2, v_3\}$. Si $N_T^+(v_i) \neq N_T^+(v_j), N_T^+(v_k)$ para algún $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces $v_i \in K_3(T)$, una contradicción ya que $Z = \emptyset$. De esta forma, $N_T^+(v_i) = N_T^+(v_j) = N_T^+(v_k)$, sin importar si $B_3 \neq \emptyset$ o $B_3 = \emptyset$.

- Si $|M(C_3')| = 4$, entonces $M(C_3') = C_3$ y el caso es similar a los dos previos. Por lo tanto $|C_1| > 2$.

■

Lema 3.11 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $|X| = |Y| = 1$, $Z = \emptyset$, $|A - X| \leq 1$ y $|C| \geq 6$. Si $|C_3| = 4$ y $|C_1| = 1$ entonces $|C_2| \geq 2$.*

Demostración. Supongamos que $|C_1| = |C_2| = 1$. Sea $C_1 = \{u\}$ y $C_2 = \{v\}$

1. No hay transmisores en $T(B_3, C_3)$. Nuevamente como el caso $B_3 = \emptyset$ es examinado en (2) tomamos $B_3 \neq \emptyset$. Si $A = X$ entonces $v \to B_3$ por el lema 3.6(d), entonces $v \in K_3(T)$ ya que $d(v, C_3) = 2$ al no haber transmisores en $T(B_3, C_3)$ y como consecuencia del lema 3.5, lo cual contradice que $Z = \emptyset$. de esta forma se tiene que $A - X = \{a_1\}$ y $\{a_1, v\} \rightrightarrows B_3$. Si $v \to a_1$ se tiene que $d(v, B_3) \leq 2$ y $v \in K_3(T)$ como se vio anteriormente. Si $a_1 \to v$ se tiene que $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

2. Hay transmisores en $T(B_3, C_3)$. Por el lema 3.7 los transmisores están en C_3. Sea C_3' el conjunto de transmisores y sea $M(C_3')$ el subconjunto

de vértices de C'_3 que tienen máximo exgrado en T. (Si $B_3 = \emptyset$ tomamos $C'_3 = C_3$).

Consideremos los casos $|M(C'_3)| = 1$, $|M(C'_3)| = 3$, $|M(C'_3)| = 4$, $|M(C'_3)| = 2$ y veamos que no son posibles.

- Si $|M(C'_3)| = 1$, $M(C'_3) = \{v\}$. Entonces $d(v, B_3) = 1$, y como v es el único transmisor, existe $u \in B_3$ tal que $v \to u \to v_2$, lo mismo para v_3 y v_4, por lo tanto $d(v, C_3) = 2$ y por el lema 3.5 $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$.

- Si$|M(C'_3)| = 3$, $M(C'_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$. El caso es similar al lema previo.

- Si $|M(C'_3)| = 4$, $M(C'_3) = C_3$. Nuevamente el caso es similar al visto en el lema anterior.

- Si $|M(C'_3)| = 2$. Sea $M(C'_3) = \{v_1, v_2\}$ y $C_3 - M(C'_3) = \{v_3, v_4\}$. Primero suponemos que $\{v_1, v_2\} \to a_1$ ó $A = X$. Entonces existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$. Si $\{v_1, v_2\} \to a_1$ entonces:

- $d(y, B_3) = 2$ ya que $y \to \{v_1, v_2\} \to B_3$,
- $d(y, C_3 - M(C'_3)) \leq 3$ ya que $y \to \{v_1, v_2\} \to B_3 \rightrightarrows \{v_3, v_4\}$,
- $d(y, v) \leq 3$ ya que $B_2 \cup (A - X) \rightrightarrows C_3$.

Por lo tanto, por el lema 3.5 $y \in K_3(T)$.

Si $A = X$ se tiene que:

- $d(y, B_3) = 2$,
- $d(y, C_3 - \{v_1, v_2\}) = 1$.

Como $|Y| = 1$ $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$ (posiblemente $B_2 - \{y\} = \emptyset$). Además $y \to a_1$, ya que si $a_1 \to y$ y $v_1 \to a_1 \to y \to v_2$ implica que $v_1 \in K_3(T)$, ya que $d(v_1, C_3 - \{v_1, v_2\}) = 2$ y $d(v_1, B_3) = 1$, lo cual contradice que $Z = \emptyset$. Si $v \to B_2$ entonces:

- $d(v, B_3) \leq 3$,
- $d(v, C_3) = 2$.

Por lo tanto $v \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Entonces existe $w \in B_2$ tal que $w \to v$. Como $u \to B_2$ entonces se tiene que:

- $d(u, x_1) = 2$,
- $d(u, B_1) \leq 3$,
- $d(u, B_3) \leq 3$,
- $d(u, v) = 2$,
- $d(u, C_3) = 2$.

Por lo tanto $u \in K_3(T)$ lo que contradice que $Z = \emptyset$. Ahora supongamos que $a_1 \to \{v_1, v_2\}$. Si $\{v_1, v_2\} \to B_2$ entonces:

- $d(a_1, x_1) = 2$,
- $d(a_1, u) = 3$ ya que $a_1 \to \{v_1, v_2\} \to B_3 \to u$,
- $d(a_1, B_1) = 2$ ya que $a_1 \to \{v_1, v_2\} \to B_1$,
- $d(a_1, B_1) \leq 2$,
- $d(a_1, B_3) \leq 2$,
- $d(a_1, C_3 - \{v_1, v_2\}) \leq 3$,
- $d(a_1, v) \leq 3$ ya que $a_1 \to \{v_1, v_2\} \to B_1 \rightrightarrows v$.

Por lo tanto $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$. Así, existe $y \in B_2$ tal que $y \to \{v_1, v_2\}$. Como antes $\{v_1, v_2\} \to B_2 - \{y\}$ (posiblemente $B_2 - \{y\} = \emptyset$). Como $a_1 \to y$ implica que $a_1 \in K_3(T)$ suponemos que $y \to a_1$. Como se vio anteriormente se tiene que $v \in K_3(T)$ ó $u \in K_3(T)$ lo cual no es posible.

Por lo tanto, $|C_2| \geq 2$ como se quería probar.

■

Lema 3.12 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $|X| = |Y| = 1$, $Z = \emptyset$ y $|A - X| \leq 1$. Entonces $|C| \geq 7$.*

Demostración. De acuerdo con el lema 3.9 basta mostrar que el caso $|C| = 6$ es imposible. Como $|C_3| \geq 4$ (lema 3.8) consideremos los siguientes tres casos.

1. Si $|C_3| = 6$. Entonces $C_1 = C_2 = B_2 = \emptyset$ lo que implica que $A - X = \{a_1\}$, $a_1 \to (B_3 \cup C_3)$ y $a_1 \in K_3(T)$ ya que $d(a_1, x_1) = 2$ y $d(a_1, B_1) = 3$. Una contradicción a $X = \{x_1\}$.

2. Si $|C_3| = 5$. Entonces $|C_1 \cup C_2| = 1$ y la demostración es similar a la del lema 3.9.

3. Si $|C_3| = 4$. Existen tres subcasos característicos.

   (c') $|C_1| = 2$, $C_2 = \emptyset$ no es posible por el lema 3.10.

   (c'') $C_1 = \emptyset$, $|C_2| = 2$. Como $C_1 = \emptyset$ implica que $B_2 = \emptyset$, entonces $A - X = \{a_1\}$ y $a_1 \to C_3$ de donde se tiene que

   - $d(a_1, x_1) = 2$,
   - $d(a_1, C_2) \leq 3$ ya que $a_1 \to C_3 \to B_1 \rightrightarrows C_2$,
   - $d(a_1, B_3) \leq 2$.

   Por lo tanto $a_1 \in K_3(T)$ lo que contradice que $X = \{x_1\}$.

   (c''') $|C_1| = |C_2| = 1$. Por el lema 3.11 este caso no es posible y de esta forma queda completa la prueba.

■

Las demostraciones de los siguientes lemas son similares a la prueba del lema 3.12.

Lema 3.13 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $|X| = 2$ y $Y = Z = \emptyset$. Entonces $|B| \geq 4$ ó $|C| \geq 4$.*

Lema 3.14 *Sea $T(A, B, C)$ un torneo tripartito con $|X| \geq 3$ y $Y = Z = \emptyset$. Entonces $|B| \geq 5$ ó $|C| \geq 5$.*

Proposición 3.2 *Las siguientes* 6*-tuplas de enteros no negativos* $(a, x; b, y; c, z)$*,* $a \geq x$*,* $b \geq y$*,* $c \geq z$*, no son admisibles. Simétricamente respecto a* x*,* y*,* z*.*
(a) $x = 1$*,* $a - x \leq 1$*,* $y \geq 2$*,* $b - y \leq 1$*,* $z = 0$*,* $c \leq 5$*;*
(b) $x = 1$*,* $a - x \leq 1$*,* $y = 1$*,* $b - y \leq 1$*,* $z = 0$*,* $c \leq 6$*;*
(c) $x = 2$*,* $y = 0$*,* $b \leq 3$*,* $z = 0$*,* $c \leq 3$*;*
(d) $x \geq 3$*,* $y = 0$*,* $b \leq 4$*,* $z = 0$*,* $c \leq 4$*.*

Demostración. Por el lema 3.9, si $x = 1$, $a - x \leq 1$, $y \geq 2$ y $z = 0$, entonces $c \geq 6$. Por lo tanto el caso (a) no es posible.

De forma similar, si $x = 1$, $a - x \leq 1$, $y = 1$ y $z = 0$, entonces por el lema 3.12 se tiene que $c \geq 7$ con lo cual, el caso (b) no es posible.

Si $x = 2$, $b \leq 3$ y $y = z = 0$ entonces $c \geq 4$ por el lema 3.13, y por lo tanto el caso (c) no es posible.

Por último, si $x \geq 3$, $y = z = 0$ y $b \leq 4$, entonces por el lema 3.14 se tiene que $c \geq 5$, y por tanto el caso (d) tampoco es posible.
■

Observación 3.1 *Para cualesquiera valores de enteros no negativos* a*,* x*,* b*,* y*,* c *y* z *cualquier* 6-tupla $(a, x; b, y; c, z)$ *debe ser alguno de los siguientes casos:*

1. *Los valores* x*,* y*,* z *son diferentes de cero. Este representa el caso más general y es enunciado en el caso típico* 1*.*
2. *Si* $x > 0$*,* $y > 0$ *y* $z = 0$*. Para este caso, existen diferentes posibilidades:*
   - *Si* $x = 1$ *y* $y = 1$*, la* 6-tupla *es admisible si* $c \geq 7$ *por el lema 3.12, y no es admisible si* $c \leq 6$ *por la proposición 3.2(b).*
   - *Si* $x \geq 2$ *y* $y \geq 2$ *es admisible por la proposición 3.1(2).*
   - *Si* $x = 1$ *y* $y \geq 2$ *la* $6 - tupla$ *es admisible si* $c \geq 6$ *por el lema 3.9, y no es admisible si* $c \leq 5$ *por la proposición 3.2(a).*
3. *Si* $x > 0$*,* $y = 0$ *y* $z = 0$*. De nuevo, existen diferentes posibilidades para este caso:*

- *Si* $x = 1$ *es admisible por la proposición 3.1(6).*
- *Si* $x = 2$ *es admisible si* $c \geq 4$ *por el lema 3.13. Y no es admisible si* $b \leq 3$ *y* $c \leq 3$ *por la proposición 3.2(c).*
- *Si* $x \geq 3$ *es admisible si* $c \geq 5$ *por el lema 3.14. Y no es admisible si* $b \leq 4$ *y* $c \leq 4$ *por la proposición 3.2(d).*

De esta forma se cubren todos las posibilidades de una 6-*tupla* $(a, x; b, y; c, z)$ para diferentes valores de a, x, b, y, c y z con respecto a x y por lo tanto, podemos determinar para qué valores la 6-*tupla* es admisible.

Concluimos con el teorema de caracterización de las 6-*tuplas* admisibles para torneos tripartitos.

Teorema 3.1 *Para cualesquiera valores de* a*,* x*,* b*,* y*,* c*,* z*, una* 6*-tupla* $(a, x; b, y; c, z)$ *debe ser alguna de los ocho casos típicos (admisibles), o bien, alguno de los casos que no son posibles enunciados en la proposición 3.2 tomados con respecto a* x *(no admisibles), y que son casos simétricos respecto a* y *y* z*.*

Demostración. Por la proposición 3.1 y la proposición 3.2 junto con la observación 3.1 queda demostrado el teorema. ■

Bibliografía

[1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Digraphs Theory, Algorithms and Applications, Springer, London, 2000.

[2] K.M. Koh, B.P. Tan, Kings in multipartite tournaments, *Discrete Math. 147 (1995)* **171-183**.

[3] K.M. Koh, B.P. Tan, Number of 4-kings in bipartite tournaments with no 3-kings, *Discrete Math. 167/168 (1997)* 411-418.

[4] H.G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies, III: the condition for a score structure, Bull. *Math. Biophys. 15 (1953)* **143-148**.

[5] V. Petrovic, Kings in bipartite tornaments, *Discrete Math. 173 (1997)* **187-196**.

[6] V. Petrovic, M. Treml, 3-kings in 3-partite tournaments, *Discrete Math. 308 (2008)* **277-286**.

[7] V. Petrovic, C. Thomassen, Kings in k-partite tournaments, *Discrete Math. 98 (1991)* **237-238**.

[8] L. Soltes, Orientations of graphs minimizing the radius or the diameter, *Math. Slovaca 36 (1986)* **289-296**.

[9] B.P. Tan, On 3-kings and 4-kings in multipartite tournaments, *Discrete Math. 306 (2006)* **2702-2710**.