



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

**CONTROL COOPERATIVO DE  
SISTEMAS MULTIAGENTES  
Y SUS APLICACIONES**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A :

**ILEANA ANGÉLICA GRAVE AGUILAR**

TUTOR:

**DR. YU TANG XU**

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Luis Álvarez Icaza Longoria

Secretario: Dr. Héctor Benítez Pérez

Vocal: Dr. Yu Tang Xu

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Mihir Sen

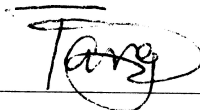
2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Marcos Ángel González Olvera

Lugar donde se realizó la tesis:

CIUDAD UNIVERSITARIA.  
MÉXICO, DISTRITO FEDERAL.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. YU TANG XU

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Tang', is written over a horizontal line.

**FIRMA**

Al Dr. Mihir Sen por su dedicación como tutor en la realización de esta Tesis.

# *Agradecimientos*

Agradezco a los Doctores Yu Tang Xu y Mihir Sen el tiempo y esfuerzo invertidos en asesorarme. Su calidad humana y pasión por su trabajo me enseñaron a analizar y apreciar de manera distinta los problemas de investigación. Aprecio profundamente todas las veces que estuvieron ahí para guiarme por el camino correcto y darme la oportunidad de expresar mis dudas e inquietudes por muy sencillas que ellas fueran.

A los Doctores del Colegio de Control les doy las gracias por su entrega al proporcionarme las herramientas necesarias para realizar este trabajo, cada una de las materias cursadas hizo de mí una mejor estudiante.

Le agradezco a mis padres que con su ejemplo me enseñaron la dedicación, la responsabilidad y el respeto. También les reconozco los sacrificios y desvelos que conllevan el trabajo y la educación de dos hijas. A mi hermana, le doy las gracias por compartir conmigo alegrías y tristezas. Todos han sido un gran soporte en esta y otras etapas de mi vida.

Quisiera expresar mi agradecimiento a Juan Carlos por sus consejos, ánimo y respaldo. Este ha sido un camino en el que hemos compartido muchas aventuras. Gracias por todas las asesorías proporcionadas a lo largo de la maestría. Agradezco también a su familia, quienes me han permitido convivir con ellos y me han alentado a seguir adelante.

A Anahí le doy las gracias por acompañarme este último año y dejarme conocerla un poco más. A ella y a mis compañeros de Control, les agradezco su solidaridad.

A la Universidad Nacional Autónoma de México le doy las gracias por proveer los recursos materiales e intelectuales para desarrollar este trabajo, así como también por las facilidades a las que fui merecedora por ser alumna de esta institución.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología le agradezco el apoyo proporcionado durante dos años para cursar las materias de maestría y la realización de esta tesis.

Agradezco al proyecto UNAM-PAPIIT 1N120009 por su apoyo en la conclusión de este trabajo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Metas . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.3. Alcances . . . . .	4
1.4. Estructura de tesis . . . . .	4
<b>2. Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1. Interconexión . . . . .	6
2.1.1. Teoría de Grafos . . . . .	6
2.1.2. Matriz Laplaciana . . . . .	8
2.2. Conceptos de Control No Lineal . . . . .	10
2.3. Sincronización . . . . .	13
<b>3. Sincronización de Sistemas Multi-Agentes</b>	<b>15</b>
3.1. Sincronización de agentes disipativos con retroalimentación de posición . . . . .	15
3.1.1. Sincronización de velocidad . . . . .	16
3.1.2. Sincronización de posición . . . . .	18
3.1.3. Implementación del Filtro . . . . .	20
3.1.4. Simulación . . . . .	21
<b>4. Sincronización de Sistemas Lagrangianos</b>	<b>27</b>
4.1. Sincronización con posición de referencia . . . . .	28

---

4.2. Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición . . . . .	31
4.3. Simulación . . . . .	34
4.3.1. Ley de Control 1: <i>Regulación</i> . . . . .	35
4.3.2. Ley de Control 2: <i>Sincronización con posición de referencia</i> . . . . .	36
4.3.3. Ley de Control 3: <i>Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición</i> . . . . .	39
4.3.4. Ley de Control 4: <i>Resultados obtenidos por Chung y Slotine</i> . . . . .	42
4.3.5. Ley de Control 5: <i>Sincronización con posición de referencia, retroalimentación de posición y entrada saturada</i> . . . . .	45
4.3.6. Comparación de resultados. . . . .	48
<b>5. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>

# Índice de figuras

2.1. Ejemplos de grafos: (a) Grafo dirigido balanceado, (b) Grafo no dirigido . . . . .	7
2.2. Grafo fuertemente conectado y balanceado . . . . .	8
2.3. Ejemplo de un grafo dirigido ponderado . . . . .	8
3.1. Ejemplo de una trayectoria dirigida que cruza a todos los agentes . . . . .	17
3.2. Grafo no dirigido tipo anillo para cuatro agentes . . . . .	21
3.3. Sincronización de velocidad bajo la ley de control (3.27), $i$ representa el número de agente. . . . .	25
3.4. Sincronización de velocidad con retroalimentación de posición bajo la ley de control (3.30), $i$ representa el número de agente . . . . .	25
3.5. Sincronización de posición bajo la ley de control (3.37), $i$ representa al número de agente. . . . .	26
4.1. Interconexión para tres brazos robóticos . . . . .	34
4.2. Gráfica de la posición para tres brazos robóticos considerando únicamente términos de regulación . . . . .	37
4.3. Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.36) . . . . .	37
4.4. Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.34) . . . . .	38
4.5. Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.36) . . . . .	38
4.6. Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37) . . . . .	43
4.7. Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37) . . . . .	43
4.8. Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.55) . . . . .	46
4.9. Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.55) . . . . .	46
4.10. Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37) con entrada saturada . . . . .	47
4.11. Gráfica de la entrada de control saturada para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37) . . . . .	47



---

4.12. Errores cuadráticos medios de sincronización y regulación . . . . .	50
4.13. Entradas de Control máximas . . . . .	50

## *Resumen*

En este trabajo de tesis se estudia el problema de sincronización de sistemas no lineales desde el punto de vista de control. En él, se unifican los principales conceptos sobre la teoría de sincronización en el contexto de sistemas disipativos.

Se diseñan nuevas leyes de control con diversos objetivos: El primero de ellos es lograr sincronización de velocidad o posición con retroalimentación de posición, mientras que el segundo es obtener sincronización en cierta posición deseada de sistemas Lagrangianos considerando los casos en que todos los estados son medibles, o sólo las salidas (posición) son medibles.

Los resultados se aplican a tres robots manipuladores interconectados en los que se logra sincronización en cierta posición deseada utilizando como salida a la posición.

## *Abstract*

Based on control theory, the synchronization problem of nonlinear systems is studied. The principal concepts on synchronization theory are unified in the context of dissipative systems.

New control laws are designed with different objectives: the first is to achieve velocity or position synchronization with feedback position, the second one is to obtain synchronization in certain desirable position of Lagrangian systems where all the states measurements or only output (position) measurements are considered.

The results are applied to three interconnected robot manipulators where synchronization is achieved to certain desirable position using the position as the output.

# Capítulo 1

## Introducción

En la naturaleza pueden observarse comportamientos cooperativos entre individuos; tales como parvadas de aves y bancos de peces que se reagrupan para evitar a los depredadores. Otro tipo de fenómenos naturales, son los grupos de luciérnagas que se iluminan al mismo tiempo, péndulos acoplados; entre otros [1]. Tales hechos ilustran el concepto de sincronización. Según la definición de la Real Academia Española, sincronizar es “hacer coincidir en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos”.

En las últimas décadas, diversos grupos de investigación han analizado la sincronización natural entre sistemas, donde el caso de osciladores acoplados a partir del modelo de Kuramoto [2–4] ha sido de especial interés.

Desde el punto de vista de control, se han estudiado las condiciones que permiten llevar determinadas variables de un grupo de sistemas (bajo una interconexión adecuada) a cierto valor común mediante leyes de control locales; definido formalmente como *consenso*. Entre los problemas de control abordados a partir de la teoría de sincronización se encuentran: la formación de vehículos aéreos no tripulados, redes sensoriales, generadores eléctricos, redes robóticas y la sincronización de osciladores caóticos, entre otros. Cada uno de estos grupos de sistemas está formado por sistemas autónomos que se comunican entre sí para cumplir con el objetivo final; los cuales son conocidos como *agentes*<sup>1</sup>. El caso de interés en esta tesis, es el de lograr sincronización entre agentes por medio de leyes de control locales.

---

<sup>1</sup>Según [5], un agente es un sistema computacional encapsulado que está situado en algún ambiente y puede actuar flexible y autónomamente en ese ambiente para alcanzar sus objetivos de diseño.

Ciertos comportamientos cooperativos se definen en la literatura mediante distintos conceptos, tales como el problema de consenso, la sincronización concurrente, *rendezvous* y *flocking*. En la sincronización concurrente, diversos grupos de agentes sincronizados interactúan entre sí. Se conoce como *rendezvous* al caso en el que múltiples robots llegan a una posición común desconocida mediante negociación entre ellos. La formación de vehículos imitando a las parvadas de aves se denomina *flocking*, según Reynolds [6] cada agente debe cumplir con tres principios básicos: evitar colisiones, intentar igualar la velocidad de sus compañeros cercanos y mantener la distancia entre ellos.

El problema de sincronización de sistemas dinámicos se ha estudiado extensamente para sistemas representados por dinámicas simples tales como integradores [7] o masas puntuales [8]. Considerando dinámicas reales, diversos algoritmos de sincronización se han desarrollado en los últimos años usando diferentes técnicas de control.

Chung y Slotine [9], han obtenido resultados sobre sincronización exponencial global para sistemas Lagrangianos con seguimiento de trayectoria. Además, consideran el caso de sincronización entre grupos de agentes; sin embargo, una de las limitantes de este trabajo es que es necesario aplicar la teoría de contracción [10] para el diseño de las leyes de control. Una aplicación interesante de sincronización distribuida para problemas de agrupamiento visual se publicó recientemente en [11].

El enfoque pasivo se estudia en [12, 13], en él se consideran cambios en la topología de comunicación y se plantean funciones de acoplamiento no lineales. Cabe mencionar, que en [13] también se analizan las leyes de control con retardos en la comunicación. Otro enfoque interesante y de gran utilidad es el de [14], donde mediante desigualdades matriciales se establece la interconexión estable para alcanzar estabilidad asintótica o sincronización de agentes disipativos y los resultados de [13] se presentan como un caso particular.

Dentro de las aplicaciones, se ha centrado gran esfuerzo de investigación en el control cooperativo de vehículos autónomos a partir de diferentes perspectivas: En [15] se considera a la comunicación de una manera intermitente y cambiante que se describe matemáticamente por una matriz variante en el tiempo y donde la dinámica del sistema es transformada a una forma canónica. A partir de la dinámica de un integrador [16], el problema de consenso es resuelto tomando en cuenta retardos en la comunicación y pérdida de datos, los resultados obtenidos son validados experimentalmente. La formación de robots móviles a través de linealización de salida se presenta en [17], donde se

obtienen tres leyes de control distintas con el objetivo de mejorar la respuesta en la implementación.

En la literatura, un algoritmo de consenso sin líder para sistemas Lagrangianos basado en el Laplaciano como matriz de interconexión se presenta en [18], mientras que en [13] se considera el problema desde el punto de vista pasivo. Sin embargo, en ambos casos, la sincronización no se logra en una referencia dada. Los trabajos mencionados anteriormente tienen la limitante común, del uso de la velocidad en la ley de control; lo que representa un inconveniente en su implementación. Cabe mencionar que el caso de sincronización y seguimiento de trayectoria para sistemas Lagrangianos utilizando retroalimentación de posición es atacado en [19] utilizando observadores.

En esta tesis, el problema de sincronización con retroalimentación de posición a una posición deseada es resuelto por medio de la utilización de un filtro de primer orden. En ella la teoría existente sobre técnicas de sincronización entrada-salida con acoplamiento lineal se utiliza para desarrollar leyes de control basadas en retroalimentación de posición que permitan lograr sincronización de la variable de interés. Cada uno de los agentes se considerará como una clase de sistemas no-lineales, específicamente sistemas disipativos. Los resultados obtenidos se aplican a manipuladores robóticos interconectados donde además el consenso es forzado a cierta posición deseada.

## 1.1. Metas

A partir del enfoque disipativo y definiendo una interconexión adecuada, se busca lograr sincronización de agentes usando como salida a la posición mediante el diseño de leyes de control en las que se utiliza un filtro de primer orden y a la función de almacenamiento de energía como parte de la función de Lyapunov. Se pretende aplicar los resultados obtenidos al caso de sistemas Lagrangianos considerando un caso mas complejo, sincronización en cierta posición deseada.

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es lograr la sincronización de sistemas multi-agentes (considerados como sistemas disipativos) utilizando retroalimentación de posición; además de conseguir sincronización a cierta posición deseada para el caso de sistemas Lagrangianos. Asimismo, su aplicación al problema de sincronización de robots manipuladores.

## 1.3. Alcances

Los resultados obtenidos pueden extenderse a los casos en los que se considera acoplamiento no lineal entre los agentes, retardos en la comunicación, cambios en la topología y distintos tipos de interconexión. También es posible diseñar leyes de control en las que existen incertidumbres en los parámetros o en los estados, analizar el efecto de las perturbaciones y considerar actuadores saturados. Además, se puede pensar en obtener sincronización concurrente de diversos grupos de agentes sincronizados que se comunican entre sí. A partir de la teoría de sincronización es posible analizar agentes no disipativos, realizar formación o seguimiento de sistemas con restricciones no-holonómicas y considerar otro tipo de aplicaciones.

## 1.4. Estructura de tesis

El trabajo de tesis se presenta con la siguiente estructura:

En el Capítulo 2 se presentan los conceptos necesarios para estudiar sistemas interconectados a partir de la teoría de grafos y la teoría de control; en él se incluyen las definiciones utilizadas a lo largo de la tesis.

En el Capítulo 3 se desarrolla una variación a la ley para sincronización de agentes disipativos con el objetivo de lograr sincronización de velocidad o posición de agentes distribuidos en una topología bidireccional utilizando como salida a la variable de posición.

El Capítulo 4 se enfoca en la sincronización de sistemas Lagrangianos, en él se extienden los resultados obtenidos en [13] sobre sincronización de posición al caso de sincronización a cierta posición deseada. Posteriormente, mediante un enfoque similar al Capítulo 3, se trata el caso de sincronización con regulación empleando retroalimentación de posición. Los resultados se comparan con los del algoritmo presentado por Chung y Slotine [9] donde se utilizan la posición y velocidad.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo, se presentan las herramientas básicas utilizadas en el diseño de las leyes de control. En la sección 2.1, la teoría de grafos y la representación matricial permiten establecer distintas maneras de expresar la interconexión entre agentes. Los conceptos relacionados con disipatividad y que precisan la clase de sistemas a considerar se presentan en la sección 2.2. Finalmente, en la sección 2.3 se exponen la definición de sincronización y la forma general de las leyes de control para lograr sincronización.

### 2.1. Interconexión

#### 2.1.1. Teoría de Grafos

Una forma clara y simple para simbolizar el intercambio de información entre agentes es la teoría de grafos, la cual hace posible ver a cada sistema (sin importar su dinámica) como elementos conectados que buscan lograr cierto objetivo común. La conexión que existe entre dos elementos se identifica mediante líneas con flechas que representan la dirección de la comunicación, a tales líneas se les da el nombre de bordes y a cada elemento se le denomina vértice. Varias definiciones que son necesarias a lo largo de este trabajo, tomadas de [20], se presentan a continuación.

**Definición 2.1.** Un **grafo**  $\mathcal{G}$  es un conjunto finito  $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{v_1, \dots, v_N\}$ , cuyos elementos son llamados **nodos** o **vértices**, junto con el conjunto  $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  cuyos elementos son llamados **bordes**.

Si, para todo  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ , el conjunto  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  entonces se dice que el grafo es **no dirigido**. De otra forma, se le llama un **grafo dirigido**.

Una flecha con vértice  $v_i$  como cola y vértice  $v_j$  como cabeza representa a un borde  $(v_i, v_j)$  que está entrando con respecto a  $v_j$  y está saliendo con respecto a  $v_i$ . El **grado de entrada** de un vértice  $v \in \mathcal{G}$  es el número de bordes que tienen su vértice como cabeza. El **grado de salida** de un vértice  $v \in \mathcal{G}$  es el número de bordes que tienen su vértice como cola.

Si el grado de entrada equivale al grado de salida para todos los vértices  $v \in \mathcal{G}$ , entonces se dice que el grafo es **balanceado**.

Una **trayectoria** de longitud  $r$  en un grafo dirigido es una secuencia  $v_0, \dots, v_r$  de  $r + 1$  distintos vértices tales que para cada  $i \in \{0, \dots, r - 1\}$ ,  $(v_i, v_{i+1})$  es un borde.

Una **trayectoria débil** es una secuencia  $v_0, \dots, v_{i+1}$  de  $r + 1$  vértices distintos tales que para cada  $i \in \{0, \dots, r - 1\}$ ,  $(v_i, v_{i+1})$  o  $(v_{i+1}, v_i)$  es un borde.

Un grafo dirigido está **fuertemente conectado** si dos vértices cualquiera pueden ser unidos por una trayectoria y está **débilmente conectado** si dos vértices cualquiera pueden ser unidos por una trayectoria débil.

De las definiciones anteriores, se dice que un **grafo dirigido balanceado** es aquel en el que los bordes apuntan en cierta dirección y en el que el número de bordes que entran en cada nodo es igual al número de bordes que salen. Además de que un **grafo no dirigido** es balanceado por naturaleza ya que las relaciones entre pares de vértices es simétrica. Dos grafos simples para ilustrar este tipo de grafos se presentan en la Figura 2.1.

Un grafo fuertemente conectado y balanceado se muestra en la Fig. 2.2, en él se observa que a partir de cualquier nodo es posible alcanzar cualquier otro nodo que se encuentra en el grafo siguiendo la dirección en la que apuntan los bordes.

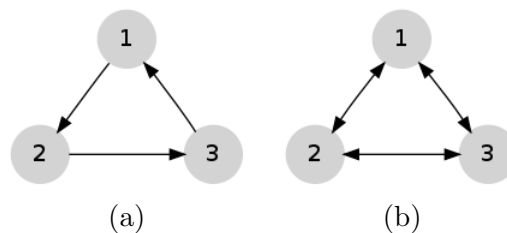


FIGURA 2.1: Ejemplos de grafos: (a) Grafo dirigido balanceado, (b) Grafo no dirigido

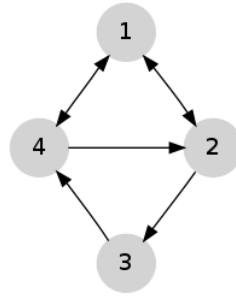


FIGURA 2.2: Grafo fuertemente conectado y balanceado

**Definición 2.2.** Un **grafo regular** es aquel en el que cada elemento en el grafo tiene el mismo número de vecinos.

Un **grafo ponderado** es un grafo que tiene una etiqueta numérica  $w(e)$  asociada con cada borde  $e$ , llamado el **peso** del borde  $e$ . Los pesos de los bordes pueden ser enteros, números racionales o números reales, los cuales representan un concepto como distancia, costo de conexión o afinidad [21]. En la figura 2.3 se muestra un ejemplo de un grafo dirigido ponderado.

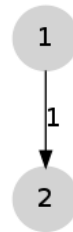


FIGURA 2.3: Ejemplo de un grafo dirigido ponderado

### 2.1.2. Matriz Laplaciana

Otra forma general, compacta y ampliamente utilizada para expresar la interconexión entre agentes es por medio de la matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$  [7], la cual se construye a través de la *Matriz de Adyacencia* y la *Matriz de Grado* de un grafo dirigido ponderado.

La **Matriz de Adyacencia** de un grafo dirigido ponderado  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$  es aquella en la que los elementos  $a_{ij}$  son no negativos y se forma a partir de las conexiones que existen entre los nodos del grafo. Si existe un borde que conecta al elemento  $i$  con el elemento

$j$  (respetando la dirección definida por el grafo), entonces al elemento  $a_{ij}$  se le asigna el peso asociado, de lo contrario se le asigna el valor de cero.

La **Matriz de Grado**  $\Delta = [\Delta_{ij}]$  de un grafo  $\mathcal{G}$  es una matriz diagonal donde

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_{ij} = 0, & i \neq j \\ \Delta_{ii} = \text{deg}_{out}(v_i), & i = j \end{cases}$$

$\text{deg}_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  es el grado de salida del nodo  $v_i$  y está dado por la suma de los elementos fila de la matriz de adyacencia.

A partir de las matrices anteriores, la **Matriz Laplaciana** asociada al grafo  $\mathcal{G}$  se construye como

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{L} = \Delta - \mathcal{A}, \quad (2.1)$$

es decir, los elementos de la matriz están dados por

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik}, & i = j \\ -a_{ij}, & j \neq i \end{cases} \quad (2.2)$$

Algunas propiedades importantes de la Matriz Laplaciana se enlistan a continuación:

1. La suma de los elementos de cada una de las filas es igual a cero.
2. Sus valores propios tienen parte real no-negativa.
3. Cero es un valor propio y el vector propio asociado es  $\mathbf{1}^T = [1, \dots, 1]$ ; por lo tanto  $\text{rango}(\mathcal{L}) \leq n - 1$ .
4. Para grafos fuertemente conectados el valor propio cero es simple,  $\text{rango}(\mathcal{L}) = n - 1$ .

En el diseño de la ley de control, será necesario en algunas ocasiones representar a la matriz Laplaciana como el producto de dos matrices, esto se puede lograr por medio del producto de Kronecker. Del álgebra lineal, el producto de Kronecker de dos matrices

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  se define como

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times np} \quad (2.3)$$

Una propiedad importante para  $\mathbf{A}, \mathbf{B} > 0$ , matrices positivas definidas, es que el producto de Kronecker  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  es positivo definido.

**2.1.** A continuación, se muestra un ejemplo sencillo en el que se obtiene la matriz Laplaciana a partir de la Matriz de Adyacencia y la Matriz de Grado correspondientes a la Figura 2.3.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2.2. Conceptos de Control No Lineal

En esta sección, se presentan los conceptos utilizados para desarrollar las leyes de control descentralizadas tomados de la teoría de control no lineal. El hecho de elegir sistemas con propiedades disipativas permite abarcar un espectro mas grande de sistemas, como sistemas pasivos o sistemas  $\mathcal{L}_2$ -estables, cuya estructura de información puede ser caracterizada mediante desigualdades matriciales [14]. Durante todos los capítulos cada uno de los agentes se representa por sistemas no lineales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + g_i(x_i)u_i \\ y_i &= h_i(x_i) \end{aligned} \quad (2.5)$$

considerados como sistemas disipativos.

**Suposición 2.1.**  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^p$ . La función  $f_i(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ , se asume que es localmente Lipschitz,  $g_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $h_i(\cdot) \in \mathbb{R}^p$  son continuas, y por conveniencia  $f_i(0) = 0$ ,  $h_i(0) = 0$ . Además, se asume que el sistema es alcanzable y de estado cero detectable.

La siguiente definición, generaliza de manera abstracta la propiedad de que la energía de un sistema físico puede ser incrementada únicamente a través de una fuente de suministro externa.

**Definición 2.3.** Asuma que asociado al sistema (2.5) existe una función  $w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada función de suministro, la cual es localmente integrable para cada entrada, es decir, satisface  $\int_{t_0}^{t_1} |w(u(t), y(t))| dt < \infty$  para todo  $t_1 \geq t_0$ ; esta función representa la energía externa recibida por el sistema [22].

Un sistema disipativo es aquel en que la energía almacenada en el sistema es menor o igual que la energía suministrada. Formalmente, se define por medio de la función de suministro.

**Definición 2.4.** El sistema (2.5) es *disipativo* con respecto a una velocidad de suministro  $w(u, y)$  si existe una función positiva semidefinida  $V(x) \in C^1$  llamada función de almacenamiento, tal que

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^T w(u(t), y(t)) dt \quad (2.6)$$

para toda  $x$  y todas las entradas  $u$  en todo tiempo finito  $T \geq 0$ .

Además, un sistema disipativo se puede definir a partir de una velocidad de suministro cuadrática como  $(Q, S, R)$ -Disipativo.

**Definición 2.5.** Un sistema es  $(Q, S, R)$ -Disipativo si es disipativo con respecto a una velocidad de suministro cuadrática

$$w(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u, \quad (2.7)$$

con  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , matrices constantes y  $Q = Q^T$ ,  $R = R^T$  simétricas [23].

Una clase de sistemas disipativos son los sistemas pasivos.

**Definición 2.6.** El sistema (2.5) es pasivo, si es disipativo con velocidad de suministro  $w(u, y) = u^T y$  [22].

**Definición 2.7.** (Sistemas estrictamente pasivos en los estados) Se dice que el sistema (2.5) es estrictamente pasivo en los estados si es disipativo con una función de suministro  $w = u^T y$ , existe una función de almacenamiento  $V(\cdot)$  positiva semidefinida y una función  $S(x)$  positiva definida tal que para todo  $t \geq 0$ :

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t u^T(s)y(s)ds - \int_0^t S(x(s))ds. \quad (2.8)$$

Si la igualdad permanece en la expresión anterior y  $S(x) \equiv 0$ , entonces se dice que el sistema es sin pérdidas.

Los sistemas estrictamente pasivos se pueden definir como sistemas  $(Q, S, R)$ -Disipativos a partir de la naturaleza de la pasividad estricta [24], con  $\beta \leq 0$

Si  $Q = 0$ ,  $S = \frac{1}{2}I$  y  $R = 0$  se dice que el sistema es **pasivo** con función de almacenamiento

$$\int_0^t u^T(s)y(s)ds \geq \beta. \quad (2.9)$$

Si  $Q = 0$ ,  $S = \frac{1}{2}I$  y  $R = -\varepsilon I$ ,  $\varepsilon > 0$ , se dice que el sistema es **estrictamente pasivo a la entrada** con función de almacenamiento

$$\int_0^t u^T(s)y(s)ds \geq \beta + \varepsilon \int_0^t u^T(s)u(s)ds. \quad (2.10)$$

Si  $Q = -\delta I$ ,  $\delta > 0$ ,  $S = \frac{1}{2}I$  y  $R = 0$  se dice que el sistema es **estrictamente pasivo a la salida** con función de almacenamiento

$$\int_0^t u^T(s)y(s)ds \geq \beta + \delta \int_0^t y^T(s)y(s)ds. \quad (2.11)$$

La utilidad de las definiciones anteriores se vislumbrará al momento de diseñar las leyes de control en los capítulos siguientes.

## 2.3. Sincronización

Formalmente, la sincronización de salida de  $N$  agentes está definida por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_j(t)| = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

donde  $i$  es el  $i$ -ésimo agente y  $j$  sus respectivos vecinos.

A partir de los resultados presentados en [14], en este trabajo se considera como agentes a sistemas no lineales  $(Q_i, S_i, R_i)$ -disipativos donde la dinámica de cada sistema tiene la forma (2.5) y la entrada de control está expresada en forma lineal como

$$u_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} K_i (y_i - y_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

donde  $\mathcal{N}_i$  es el conjunto de agentes transmitiendo sus salidas al agente  $i$  y  $K_i > 0$ . En esta notación, es claro que la entrada de control contiene la interconexión entre agentes pesada por una ganancia que representa la fuerza de conexión. De forma análoga, la entrada de control puede representarse por

$$u_i = - \sum_{j=1}^N h_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

Si  $i = j$ , entonces  $h_{ij}$  representa la ganancia local de retroalimentación y si  $i \neq j$ , representa la ganancia de acoplamiento. Si la ganancia de acoplamiento  $h_{ij} = 0$ , entonces no existe conexión del subsistema  $j$  al subsistema  $i$ . Esto permite definir una entrada general  $u$  como

$$u = -Hy \quad (2.15)$$

con  $H = \{h_{ij}\}$ , la matriz de interconexión, y  $y = [y_1, \dots, y_N]^T$ .

Para concluir el capítulo se presenta un teorema, tomado de [14], que permite comprobar de manera sistemática que la interconexión de  $N$  agentes es estable o que existe sincronización de salida.

**Teorema 2.8.** *Si existe una matriz diagonal  $D > 0$  tal que la matriz*

$$\hat{Q} = -H^T DRH + DSH + H^T S^T D - DQ \quad (2.16)$$



sea positiva definida, es decir,  $\hat{Q} > 0$ , entonces la red de  $N$  agentes  $(Q_i, S_i, R_i)$ -disipativos interconectados es asintóticamente estable. Si  $\hat{Q} \geq 0$  ( $\hat{Q}$  positiva semidefinida), el grafo está fuertemente conectado y  $H$  es la matriz Laplaciana; entonces los agentes se sincronizan de acuerdo a la definición (2.12). Los términos disipativos,  $(Q_i, S_i, R_i)$  están dados en forma compacta como  $Q = \text{diag}\{Q_i\}$ ,  $S = \text{diag}\{S_i\}$  y  $R = \text{diag}\{R_i\}$ .

## Capítulo 3

# Sincronización de Sistemas Multi-Agentes

### 3.1. Sincronización de agentes disipativos con retroalimentación de posición

En este capítulo los resultados reportados por Chopra y Spong [13] se extienden con el fin de generar una nueva ley de control basada en la retroalimentación de posición para lograr sincronización de velocidad o posición de sistemas  $(Q_i, S_i, R_i)$  – *Disipativos* del tipo  $\mathbf{Q}_i = 0$ ,  $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2}\mathbf{I}$  y  $\mathbf{R}_i = 0$  (sistemas pasivos). Las leyes de control obtenidas se aplican a masas puntuales y los resultados finales se comparan con los del algoritmo original, tomado de [13], en el que se utiliza retroalimentación de velocidad.

Cada sistema es no lineal expresado en la forma (2.5), es decir

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i),\end{aligned}\tag{3.1}$$

con las variables del sistema definidas como  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , la entrada  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$  y la salida  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^m$  y en el diseño, se considera que los agentes están interconectados por medio de un grafo no dirigido en forma de anillo o configuraciones en línea.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo final es que la ley de control contenga únicamente términos de posición, por lo que en la sección 3.1.3, se deriva un filtro de primer orden para cada uno de los agentes con la siguiente dinámica

$$\dot{\mathbf{z}}_i = -\mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}}_i \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$  y  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$ .

### 3.1.1. Sincronización de velocidad

A continuación, se diseña la ley de control para lograr sincronización de velocidad con retroalimentación de posición asumiendo que el sistema (2.5) es pasivo de  $\mathbf{u}_i \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_i$ . A partir de la ley de control (2.13) con ganancias  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}$  idénticas para todos los agentes, la entrada de control se considera de la forma

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

tomando como salida a la variable filtrada  $\mathbf{z}_i$  y  $\mathbf{K}$  definida como en la Ec. (3.2).

La función candidata de Lyapunov para los  $N$  agentes del sistema es

$$V = 2 \sum_{i=1}^N V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \quad (3.4)$$

donde  $V_i$  representa la función de almacenamiento de energía para el  $i$ -ésimo agente y  $\mathcal{N}_i$  es el conjunto de agentes transmitiendo sus salidas al agente  $i$ .

La derivada de la función candidata de Lyapunov está dada por

$$\dot{V} \leq 2 \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j) \quad (3.5)$$

la cual, al incluir la ley de control (3.3)

$$\dot{V} \leq -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j) \quad (3.6)$$

y sustituir la derivada de  $\mathbf{z}_i$  ec.(3.2), toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j). \end{aligned} \quad (3.7)$$

En la derivada de la función anterior, se aprecia que es necesario reescribirla de manera conveniente para continuar con el diseño; lo que se logra aprovechando las características del grafo considerado. En él, existen dos trayectorias dirigidas que van del primer al último agente, cruzando a todos los agentes interconectados en forma ordenada. Un ejemplo de estas trayectorias se muestra en las Figuras 2.1 (a) y 3.1 para el grafo representado en la Figura 2.1 (b). A una de estas trayectorias se le denomina  $\mathcal{N}_v$  y permite establecer las siguientes relaciones:

1. Es claro que al ser un grafo no dirigido, existen dos trayectorias dirigidas  $\mathcal{N}_v$ .

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \quad (3.8)$$

2. El término que expresa el producto de la entrada por la salida, se reescribe en términos de  $\mathcal{N}_v$  ya que la gráfica se conecta en ambas direcciones con el siguiente elemento.

$$-2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) = -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \quad (3.9)$$

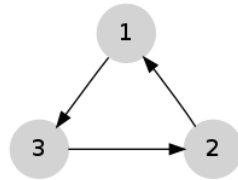


FIGURA 3.1: Ejemplo de una trayectoria dirigida que cruza a todos los agentes

Tales relaciones, facilitan escribir la derivada de la función candidata de Lyapunov como

$$\dot{V} \leq -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \leq 0. \quad (3.10)$$

A continuación, se considera el conjunto  $E = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N \mid \dot{V} \equiv 0\}$  caracterizado por todas las trayectorias en las que  $\{(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \equiv 0 \quad \forall j \in \mathcal{N}_i, \quad \forall i = 1, \dots, N\}$ . Por el principio de invarianza de LaSalle, todas las soluciones del sistema (3.1) en lazo cerrado con (3.3) convergen al conjunto invariante mas grande contenido en  $E$ , conforme  $t \rightarrow \infty$ . La definición de grafo **fuertemente conectado** permiten concluir que existe sincronización de la variable  $\mathbf{z}_i$ .

Dado que  $\mathbf{z}_i$  es la versión filtrada de la velocidad,

$$\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j \equiv 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j \equiv 0 \quad (3.11)$$

existe sincronización de velocidad. Finalmente, se observa que es posible alcanzar sincronización de velocidad utilizando retroalimentación de posición.

### 3.1.2. Sincronización de posición

El resultado de la sección anterior se puede extender al caso de sincronización de posición aplicando la ley de control

$$\mathbf{u}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{K} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{K}_p (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$  y  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p^T > 0$ . Con este propósito, se toma como función candidata de Lyapunov para los  $N$  agentes del sistema a

$$V = 2 \sum_{i=1}^N V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \quad (3.13)$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{V} \leq 2 \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p (\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \quad (3.14)$$

y al sustituir la ley de control (3.12) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \{-\mathbf{K}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) - \mathbf{K}_p(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)\} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j) \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Al incluir al filtro, Ec.(3.2), en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K}_p(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \end{aligned} \quad (3.16)$$

la derivada de la función candidata de Lyapunov debe ser reescrita aprovechando la interconexión definida para los sistemas. Ya que el grafo contiene una trayectoria dirigida  $\mathcal{N}_v$  que cruza a todos los agentes

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) &= -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \\ -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K}_p(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) &= -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T \mathbf{K}_p(\dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j) \end{aligned} \quad (3.17)$$

la derivada entonces está dada por

$$\dot{V} \leq -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \leq 0 \quad (3.18)$$

Lo que permitirá concluir sincronización a través de considerar la dinámica del sistema en el conjunto  $E = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N | \dot{V} \equiv 0\}$ . En ella se sabe que

$$\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j \equiv 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{y}}_j \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j = 0 \quad (3.19)$$

Como en el caso anterior, apartado 3.1.1, por el principio de invarianza de LaSalle y la definición de grafo fuertemente conectado se obtiene sincronización de posición.

### 3.1.3. Implementación del Filtro

En la definición del filtro Ec. (3.2), se considera a la velocidad como entrada, sin embargo, para poder implementarlo es necesario utilizar como salida a la posición. En esta sección se describe la derivación del filtro implementado.

A partir de la derivada de la ecuación  $\mathbf{z}_i - \mathbf{K}\mathbf{y}_i$ , se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{z}_i - \mathbf{K}\mathbf{y}_i) = \dot{\mathbf{z}}_i - \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}}_i \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{z}_i - \mathbf{K}\mathbf{y}_i) = -\mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}}_i - \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}}_i \quad (3.21)$$

y completando la derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{z}_i - \mathbf{K}\mathbf{y}_i) &= -\mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{y}_i - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{y}_i \\ &= -\mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{K}\mathbf{y}_i) - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{y}_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

se define una nueva variable  $\mathbf{w} = \mathbf{z}_i - \mathbf{K}\mathbf{y}_i$  y el sistema es reescrito como

$$\dot{\mathbf{w}}_i = -\mathbf{A}\mathbf{w}_i - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{y}_i \quad (3.23)$$

con la nueva ecuación para  $\mathbf{z}_i$

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{w}_i + \mathbf{K}\mathbf{y}_i \quad (3.24)$$

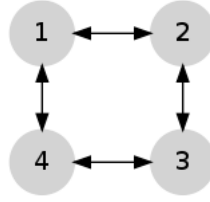


FIGURA 3.2: Grafo no dirigido tipo anillo para cuatro agentes

### 3.1.4. Simulación

En este apartado, se considera a cuatro agentes interconectados mediante un grafo no dirigido como el que se observa en la Fig. 3.2, donde la dinámica de cada uno está dada por masas puntuales de la forma

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_i &= \tau_i \\ y_i &= q_i \quad \forall i, q_i \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Con el objetivo de realizar una comparación de los resultados obtenidos, inicialmente se muestra la simulación para sincronización de velocidad utilizando retroalimentación de velocidad, posteriormente se presentan los resultados de las nuevas leyes de control basadas en retroalimentación de posición. Además, el diseño para el caso de sincronización de velocidad es desarrollado para clarificar la teoría expuesta.

En los casos que se requiere retroalimentación de posición, los filtros se definen como

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -aw_1 - aKy_1 \\ z_1 &= w_1 + Ky_1 \\ \dot{w}_2 &= -aw_2 - aKy_2 \\ z_2 &= w_2 + Ky_2 \\ \dot{w}_3 &= -aw_3 - aKy_3 \\ z_3 &= w_3 + Ky_3 \\ \dot{w}_4 &= -aw_4 - aKy_4 \\ z_4 &= w_4 + Ky_4 \end{aligned} \quad (3.26)$$



### 3.1. Sincronización de velocidad.

Las entradas de control para lograr sincronización, se especifican de acuerdo a la ley de control (2.13) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= -K(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - K(\dot{q}_1 - \dot{q}_4) \\
 \tau_2 &= -K(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) - K(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \\
 \tau_3 &= -K(\dot{q}_3 - \dot{q}_4) - K(\dot{q}_3 - \dot{q}_2) \\
 \tau_4 &= -K(\dot{q}_4 - \dot{q}_1) - K(\dot{q}_4 - \dot{q}_3)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

con  $K$  una constante positiva común para todos los sistemas y donde la matriz  $H$ , está dada por

$$H = \begin{bmatrix} K & -K & 0 & 0 \\ 0 & K & -K & 0 \\ 0 & 0 & K & -K \\ -K & 0 & 0 & K \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Se observa que  $H$  es la matriz Laplaciana, ver definición 2.2. Por otra parte, el grafo que representa la interconexión entre los agentes es un grafo tipo anillo (Fig. 3.2), fuertemente conectado y balanceado. Por el Teorema 2.8, con  $D = I$ , se puede garantizar que existe sincronización de salida.

En la simulación los parámetros considerados son  $K = 1$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 2$ ,  $m_3 = 3$ ,  $m_4 = 4$ , y  $\dot{q}_1(0) = 3$ ,  $\dot{q}_2(0) = 2$ ,  $\dot{q}_3(0) = -1$ ,  $\dot{q}_4(0) = 1.5$ . La sincronización de velocidades de los agentes está dada en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i = \frac{m_1 \dot{q}_1(0) + m_2 \dot{q}_2(0) + m_3 \dot{q}_3(0) + m_4 \dot{q}_4(0)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 1 \tag{3.29}$$

ya que la suma de momentos es invariante [13]. Los resultados se observan en la Figura 3.3.

### 3.2. Sincronización de velocidad con retroalimentación de posición.

Se verifica el caso de sincronización de velocidad con retroalimentación de posición para las entradas de control definidas de acuerdo a la ley de control (3.3) que, para el sistema

(3.25), están dadas por

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= -K(z_1 - z_2) - K(z_1 - z_4) \\
\tau_2 &= -K(z_2 - z_1) - K(z_2 - z_3) \\
\tau_3 &= -K(z_3 - z_2) - K(z_3 - z_4) \\
\tau_4 &= -K(z_4 - z_3) - K(z_4 - z_1)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Para ejemplificar el diseño, se presenta el desarrollo de la ley de control. La función candidata de Lyapunov considerada está dada por la función de almacenamiento de energía de cada uno de los agentes más los términos del filtro, es decir,

$$\begin{aligned}
V &= m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2 + m_3\dot{q}_3^2 + m_4\dot{q}_4^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(z_1 - z_2)^2 + \frac{1}{2}(z_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2}(z_3 - z_4)^2 + \frac{1}{2}(z_4 - z_1)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2}(z_3 - z_2)^2 + \frac{1}{2}(z_4 - z_3)^2 + \frac{1}{2}(z_1 - z_4)^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

la cual por simplicidad, puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
V &= m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2 + m_3\dot{q}_3^2 + m_4\dot{q}_4^2 \\
&\quad + (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_4)^2 + (z_4 - z_1)^2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

La derivada de la función candidata de Lyapunov está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2m_1\dot{q}_1\ddot{q}_1 + 2m_2\dot{q}_2\ddot{q}_2 + 2m_3\dot{q}_3\ddot{q}_3 + 2m_4\dot{q}_4\ddot{q}_4 \\
&\quad + 2(z_1 - z_2)(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + 2(z_2 - z_3)(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) \\
&\quad + 2(z_3 - z_4)(\dot{z}_3 - \dot{z}_4) + 2(z_4 - z_1)(\dot{z}_4 - \dot{z}_1)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

donde, sustituyendo los filtros para cada uno de los agentes Ec. (3.26) y sus respectivas leyes de control Ecs. (3.30) toma la forma

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2\dot{q}_1\tau_1 + 2\dot{q}_2\tau_2 + 2\dot{q}_3\tau_3 + 2\dot{q}_4\tau_4 \\
&\quad + 2(z_1 - z_2)(-az_1 + K\dot{q}_1 + az_2 - K\dot{q}_2) + 2(z_2 - z_3)(-az_2 + K\dot{q}_2 + az_3 - K\dot{q}_3) \\
&\quad + 2(z_3 - z_4)(-az_3 + K\dot{q}_3 + az_4 - K\dot{q}_4) + 2(z_4 - z_1)(-az_4 + K\dot{q}_4 + az_1 - K\dot{q}_1)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & 2\dot{q}_1\{-K(z_1 - z_2) - K(z_1 - z_4)\} + 2\dot{q}_2\{-K(z_2 - z_1) - K(z_2 - z_3)\} \\
& + 2\dot{q}_3\{-K(z_3 - z_2) - K(z_3 - z_4)\} + 2\dot{q}_4\{-K(z_4 - z_3) - K(z_4 - z_1)\} \\
& - 2a(z_1 - z_2)^2 + 2K(z_1 - z_2)(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - 2a(z_2 - z_3)^2 + 2K(z_2 - z_3)(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \\
& - 2a(z_3 - z_4)^2 + 2K(z_3 - z_4)(\dot{q}_3 - \dot{q}_4) - 2a(z_4 - z_1)^2 + 2K(z_4 - z_1)(\dot{q}_4 - \dot{q}_1)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

y se obtiene

$$\dot{V} = -2a(z_1 - z_2)^2 - 2a(z_2 - z_3)^2 - 2a(z_3 - z_4)^2 - 2a(z_4 - z_1)^2 \leq 0. \tag{3.36}$$

Considerando el conjunto invariante donde  $z_i - z_j \equiv 0$ , se puede comprobar que existe sincronización de velocidad.

En la simulación, los parámetros de la ley de control se definen como  $a = 2, K = 2$  y se observa en la Figura 3.4, que existe sincronización de velocidad a pesar de utilizar únicamente retroalimentación de posición. Los resultados obtenidos son semejantes al caso de sincronización con términos de velocidad Figura 3.3.

### 3.3. Sincronización de posición con retroalimentación de posición.

El segundo punto es verificar que existe sincronización de posición con la ley de control (3.12), de acuerdo a esta ley, las entradas para cada uno de los agentes están dadas por

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & -K(z_1 - z_2) - K(z_1 - z_4) - K(x_1 - x_2) - K(x_1 - x_4) \\
\tau_2 = & -K(z_2 - z_1) - K(z_2 - z_3) - K(x_2 - x_1) - K(x_2 - x_3) \\
\tau_3 = & -K(z_3 - z_2) - K(z_3 - z_4) - K(x_3 - x_2) - K(x_3 - x_4) \\
\tau_4 = & -K(z_4 - z_3) - K(z_4 - z_1) - K(x_4 - x_3) - K(x_4 - x_1)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

con  $a = 2, K = 2$ .

En la Figura 3.5, se aprecia la sincronización de posición de los cuatro agentes. Los resultados son satisfactorios ya que se logra sincronización a la posición deseada, además se observa que es posible lograr sincronización de posición con retroalimentación de posición.

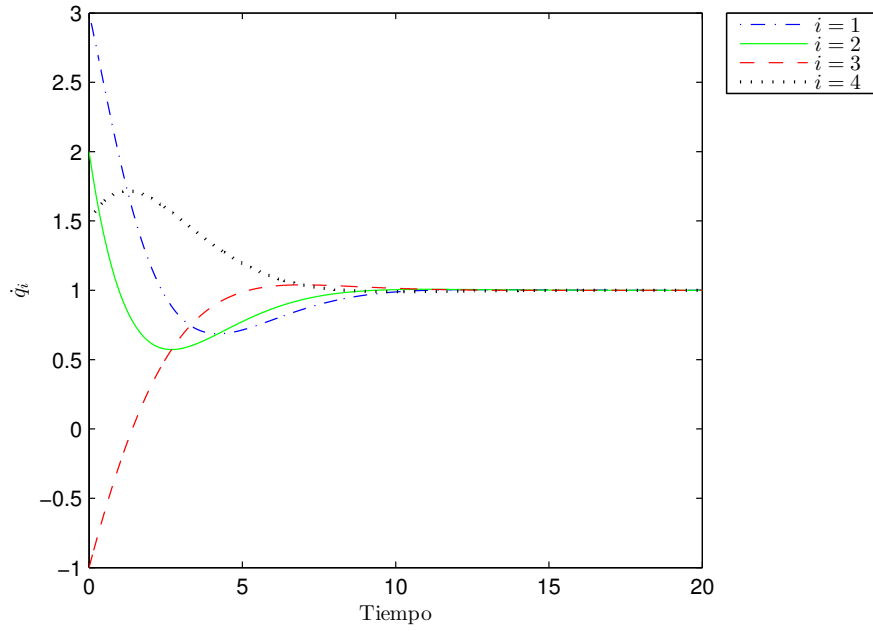


FIGURA 3.3: Sincronización de velocidad bajo la ley de control (3.27),  $i$  representa el número de agente.

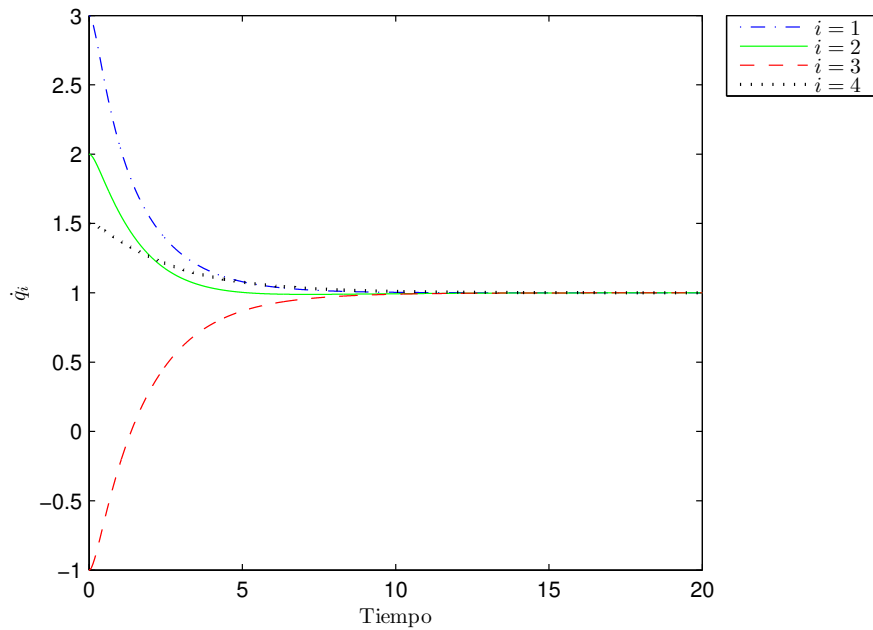


FIGURA 3.4: Sincronización de velocidad con retroalimentación de posición bajo la ley de control (3.30),  $i$  representa el número de agente

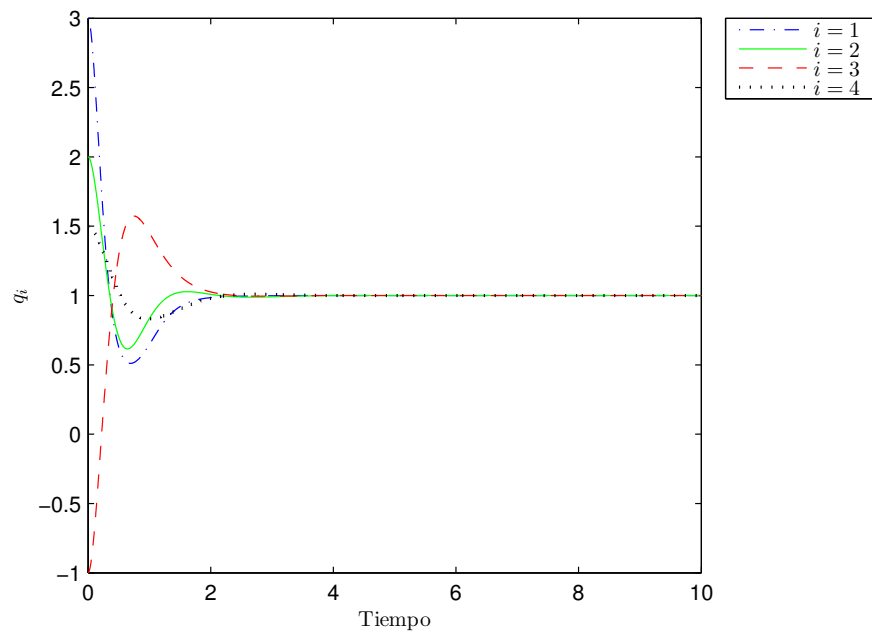


FIGURA 3.5: Sincronización de posición bajo la ley de control (3.37),  $i$  representa al número de agente.

## Capítulo 4

# Sincronización de Sistemas Lagrangianos

En este capítulo se muestra una aplicación de la teoría de sincronización de agentes cuyo objetivo final es lograr sincronización de  $n$  robots totalmente actuados a cierta posición deseada utilizando retroalimentación de posición. En la sección 4.1 se hace una extensión a los resultados sobre sincronización de posición para sistemas pasivos presentados en [13] con el fin de lograr sincronización a la posición deseada; mientras que en la sección 4.2, se aborda el objetivo principal de este capítulo. En la parte de simulación, los resultados se comparan con los obtenidos por Chung y Slotine [9].

En la literatura, con el propósito de lograr cierta formación de vehículos autónomos, se trata el problema de sincronización con posición de referencia, por ejemplo en [17], robots móviles no-holonómicos se transforman a dinámicas de doble integrador considerando una topología fija. Por otra parte, Arcak [12] utiliza la pasividad como técnica para la coordinación de grupos de agentes a un conjunto compacto pre-establecido. El caso de seguimiento de trayectoria de agentes representados por sistemas Lagrangianos se expone en [9] y [19], en este último se propone el uso de observadores para lograr seguimiento de trayectoria usando únicamente sensores de posición.

A lo largo de este trabajo, se considera a cada robot representado por

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) = \tau_i, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$  son las coordenadas generalizadas para el sistema con  $n$  grados de libertad,  $\tau_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas generalizadas,  $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia simétrica positiva definida,  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i$  es el vector de fuerzas Centrípetas y de Coriolis y  $\mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales. La matriz  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  tiene cierta propiedad que hace a la matriz  $\dot{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  antisimétrica [25].

Cada uno de los robots es un sistema  $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{S}_i, \mathbf{R}_i)$ –*Disipativo* del tipo  $\mathbf{Q}_i = 0$ ,  $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2}\mathbf{I}$  y  $\mathbf{R}_i = 0$ . Para facilitar el diseño, la ley de control para lograr sincronización se desarrolla a partir del sistema en lazo cerrado con la ley de control de regulación.

El objetivo de control en el caso de regulación tradicional, es hacer que el error de posición  $\mathbf{e}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_d$  y el error de velocidad  $\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{q}}_d$ , donde  $\mathbf{q}_d$  es la posición de referencia para las variables de configuración, tiendan a cero  $\mathbf{e}_i(t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_i(t) \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ .

El sistema (4.1) puede reescribirse a partir de su dinámica de error de la siguiente manera

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) = \tau_i, \quad (4.2)$$

el cual será el sistema a utilizar para desarrollar la ley de sincronización en las siguientes secciones.

## 4.1. Sincronización con posición de referencia

En esta sección, se resolverá el problema de sincronización de posición a cierta posición deseada considerando retroalimentación de posición y velocidad para sistemas pasivos, bajo una gráfica de interconexión balanceada (definición 2.1) como una modificación a los resultados presentados en [13].

El sistema (4.2) en lazo cerrado con la ley de control para lograr regulación [26] y una nueva entrada  $\bar{\tau}_i$

$$\tau_i = \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_i - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_i + \bar{\tau}_i, \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas positivas definidas; genera el nuevo sistema a sincronizar

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{K}_p\mathbf{e}_i = \bar{\tau}_i. \quad (4.4)$$

el cual es pasivo de  $\bar{\tau}_i$  a  $\dot{\mathbf{e}}_i$ .

Sin embargo, para lograr el objetivo final, es necesario que el sistema sea pasivo a una salida en la que la posición sea observable; por este motivo se eligen  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_d\mathbf{\Lambda}$ , con  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal positiva definida, y la entrada  $\bar{\tau}_i$  de la forma

$$\bar{\tau}_i = -\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_i + \mathbf{u}_i \quad (4.5)$$

El sistema (4.4) en lazo cerrado con la entrada de control (4.5) está dado por

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}_i) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)(\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_i) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i. \quad (4.6)$$

De las manipulaciones anteriores; el sistema a sincronizar con una nueva variable  $\mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_i$  tomada como la salida del sistema, se representa por

$$\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{C}_i\mathbf{r}_i + \mathbf{K}_d\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i \quad (4.7)$$

con función de almacenamiento de energía

$$V_i = \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T\mathbf{M}_i\mathbf{r}_i. \quad (4.8)$$

De la derivada de la función de almacenamiento

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \mathbf{r}_i^T\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T\dot{\mathbf{M}}_i\mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{r}_i^T\{\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_i\mathbf{r}_i - \mathbf{K}_d\mathbf{r}_i\} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T\dot{\mathbf{M}}_i\mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{r}_i^T\mathbf{u}_i - \mathbf{r}_i^T\mathbf{K}_d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T(\dot{\mathbf{M}}_i - 2\mathbf{C}_i)\mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{r}_i^T\mathbf{u}_i - \mathbf{r}_i^T\mathbf{K}_d\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

es posible observar que el sistema (4.7) es estrictamente pasivo a la salida, es decir, es un sistema  $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{S}_i, \mathbf{R}_i)$  – *Disipativo* de la forma  $\mathbf{Q}_i = -\mathbf{K}_d\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2}\mathbf{I}$  y  $\mathbf{R}_i = 0$ . El término  $\frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T(\dot{\mathbf{M}}_i - 2\mathbf{C}_i)\mathbf{r}_i$  se cancela dado que  $\dot{\mathbf{M}}_i - 2\mathbf{C}_i$  es antisimétrica.



La entrada de control para lograr sincronización, semejante a (2.13), es

$$\mathbf{u}_i = -K_s \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.10)$$

con salida  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathcal{N}_i$  el conjunto de agentes transmitiendo su salida al agente  $i$  y  $K_s$  una constante positiva.

Para probar la convergencia, se considera como función candidata de Lyapunov a

$$V = 2 \sum_{i=1}^N V_i \quad (4.11)$$

donde  $V_i$  es la función de almacenamiento de energía para el agente  $i$ , Ec.(4.8). Su derivada está dada por

$$\dot{V} = 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{r}_i, \quad (4.12)$$

a partir de los resultados obtenidos en (4.9) y la entrada de control (4.10), es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_i - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{r}_i \\ &= -2K_s \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_d \mathbf{r}_i \\ &= -2K_s \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i + 2K_s \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_d \mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como la gráfica es balanceada, el número de bordes que entran en un nodo es igual al número de bordes que salen, la siguiente relación

$$2K_s \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i = K_s \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i + K_s \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j \quad (4.14)$$

tomada de [13], permite reducir la derivada a

$$\dot{V} = -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_d \mathbf{r}_i - K_s \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \leq 0. \quad (4.15)$$

A continuación, se considera el conjunto invariante en el que  $\mathbf{r}_i \equiv 0$  y  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \equiv 0$ , por el principio de invarianza de LaSalle y que la gráfica es fuertemente conectada, existe sincronización de posición a la posición deseada ya que

$$\mathbf{r}_i \equiv 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_d) \equiv 0 \quad (4.16)$$

Por lo tanto, existe convergencia de  $\dot{\mathbf{q}}_i \rightarrow 0$  y  $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_d$ .

## 4.2. Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición

El sistema a controlar es el sistema (4.2), el cual es pasivo de  $\tau_i$  a  $e_i$ . Semejante al capítulo 3, se define un filtro

$$\dot{\mathbf{z}}_i = -\mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{K}_d\dot{e}_i \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$  y  $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^T > 0$ .

Para lograr únicamente regulación con retroalimentación de posición, la entrada del sistema (4.2) se considera como

$$\tau_i = \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_p e_i - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_i, \quad (4.18)$$

con  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p^T > 0$  y función candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado

$$V_i = \frac{1}{2} \dot{e}_i^T \mathbf{M}_i \dot{e}_i + \frac{1}{2} e_i^T \mathbf{K}_p e_i + \frac{1}{2} \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i \quad (4.19)$$

cuya derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{e}_i^T \mathbf{M}_i \ddot{e}_i + \frac{1}{2} \dot{e}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \dot{e}_i + e_i^T \mathbf{K}_p \dot{e}_i + \mathbf{z}_i^T \dot{\mathbf{z}}_i \\ &= \dot{e}_i^T \{-\mathbf{C}_i \dot{e}_i - \mathbf{K}_p e_i - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_i\} + \frac{1}{2} \dot{e}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \dot{e}_i + e_i^T \mathbf{K}_p \dot{e}_i + \mathbf{z}_i^T \{-\mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{K}_d \dot{e}_i\} \\ &= -\mathbf{z}_i^T \mathbf{A}\mathbf{z}_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

es negativa semi-definida.

A partir del conjunto invariante  $E = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N | \dot{V} \equiv 0\}$  caracterizado por todas las trayectorias en las que  $\{\mathbf{z}_i \mathbf{A} \mathbf{z}_i \equiv 0 \quad \forall j \in \mathcal{N}_i, \quad \forall i = 1, \dots, N\}$  y por el principio de invarianza de LaSalle, todas las soluciones del sistema (4.2) en lazo cerrado con (4.18) convergen al conjunto invariante mas grande contenido en  $E$ , conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Para lograr sincronización, una nueva entrada  $\bar{\tau}_i$  es incluida al sistema (4.2) en lazo cerrado con la ley de control (4.18). El nuevo sistema está dado por

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{K}_d \mathbf{z}_i + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_i = \bar{\tau}_i. \quad (4.21)$$

La entrada,

$$\bar{\tau}_i = -\mathbf{K}_{ps} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) - \mathbf{K}_d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \quad (4.22)$$

es propuesta como la diferencia de la posición y la versión filtrada del error de velocidad para lograr sincronización de posición a la posición deseada.

Para continuar con el diseño, se define como candidata a función de Lyapunov a

$$V = 2 \sum_{i=1}^N V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \quad (4.23)$$

cuya derivada corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\dot{\mathbf{e}}_i^T \{\bar{\tau}_i - \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{e}}_i - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_i - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_i\} + \dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{e}}_i + 2\dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{z}_i^T \{-\mathbf{A} \mathbf{z}_i + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_i\} \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps} (\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j), \end{aligned} \quad (4.24)$$

y donde  $V_i$  está dada por la ecuación (4.19). Con los resultados obtenidos en la ecuación (4.20), se reduce la expresión anterior a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T \mathbf{A} \mathbf{z}_i + 2 \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{e}}_i^T \bar{\tau}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T (\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j) \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps} (\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sustituyendo la entrada ec. (4.22), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T \mathbf{A} \mathbf{z}_i + 2 \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{e}}_i^T \left\{ -\mathbf{K}_{ps} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) - \mathbf{K}_d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \right\} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \left\{ -\mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) \right\} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) \\
 &= -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T \mathbf{A} \mathbf{z}_i - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Ya que la gráfica de interconexión tiene una trayectoria dirigida que cruza a todos los agentes, denominada  $\mathcal{N}_v$ , la siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) \\
 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j) \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) &= -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j)^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \\
 -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) &= -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\dot{\mathbf{e}}_i - \dot{\mathbf{e}}_j)^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

permiten reescribir la derivada como

$$\dot{V} = -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T \mathbf{A} \mathbf{z}_i - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_v} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j) \leq 0 \tag{4.29}$$

Considerando el conjunto invariante donde  $\mathbf{z}_i \equiv 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_i = 0$  y  $\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j \equiv 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_j = 0$ , a partir del sistema (4.2) en lazo cerrado con la entrada de control (4.22) se obtienen  $N$  ecuaciones de la forma

$$-\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_p \mathbf{e}_i - \mathbf{K}_{ps} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = 0. \quad (4.30)$$

Para simplificar el resultado final, las ecuaciones anteriores son expresadas en forma del producto de Kronecker a partir del vector de error  $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{e}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$  y la matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$  (sin considerar las ganancias de control dentro de las gráficas) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} -(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{K}_p) \mathbf{e} - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{K}_{ps}) \mathbf{e} &= 0 \\ -\underbrace{(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{K}_p + \mathcal{L} \otimes \mathbf{K}_{ps})}_{\mathbf{L}} \mathbf{e} &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

con  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{K}_{ps} \in \mathbb{R}^n$  matrices de ganancias diagonales positivas definidas y  $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  una matriz identidad, la matriz  $\mathbf{L}$  es positiva definida. Gracias a esto y al principio de invarianza de LaSalle, es posible concluir que existe sincronización de posición a la posición deseada.

### 4.3. Simulación

En esta sección, las leyes de control desarrolladas a lo largo de este capítulo se aplican al caso de tres brazos robóticos interconectados como se muestra en la Figura 4.1. En la primera parte, se comparan los resultados del caso de regulación y regulación con sincronización, mientras que en la parte final se compara la ley con retroalimentación de posición con la desarrollada por Chung y Slotine en [9].

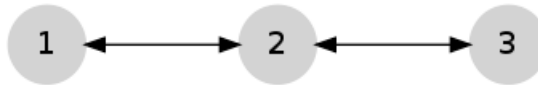


FIGURA 4.1: Interconexión para tres brazos robóticos

Cada uno de los agentes es un robot manipulador de dos grados de libertad, la posición está descrita por un vector  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$  de ángulos de la articulación y las entradas están dadas por el vector de torques  $\tau_i \in \mathbb{R}^2$  aplicado a las uniones de cada robot. A partir de [27], el primer agente está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1) &= \begin{bmatrix} 2.351 + 0.168 \cos(q_{12}) & 0.102 + 0.084 \cos(q_{12}) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_{12}) & 0.102 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) &= \begin{bmatrix} -0.168 \sin(q_{12}) \dot{q}_{12} & -0.084 \sin(q_{12}) \dot{q}_{12} \\ 0.084 \sin(q_{12}) \dot{q}_{11} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_1) &= g \begin{bmatrix} 3.921 \sin(q_{11}) + 0.168 \sin(q_{11} + q_{12}) \\ 0.168 \sin(q_{11} + q_{12}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

mientras que el segundo y tercer agente a sincronizar se definen al igual que [28], con matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(\mathbf{q}_2) = \mathbf{M}_3(\mathbf{q}_3) &= \begin{bmatrix} 8.77 + 1.02 \cos(q_{22}) & 0.76 + 0.51 \cos(q_{22}) \\ 0.76 + 0.51 \cos(q_{22}) & 0.62 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) = \mathbf{C}_3(\mathbf{q}_3, \dot{\mathbf{q}}_3) &= \begin{bmatrix} -0.51 \sin(q_{22}) \dot{q}_{22} & -0.51 \sin(q_{22}) (\dot{q}_{21} + \dot{q}_{22}) \\ 0.51 \sin(q_{22}) \dot{q}_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{q}_2) = \mathbf{G}_3(\mathbf{q}_3) &= g \begin{bmatrix} 7.6 \sin(q_{21}) + 0.63 \sin(q_{12} + q_{22}) \\ 0.63 \sin(q_{21} + q_{22}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

en las que  $g = 9.81m/s^2$  representa la aceleración gravitacional. Las posiciones iniciales y la posición de referencia común para los agentes son  $\mathbf{q}_1 = [0.3, 0.7]^T$ ,  $\mathbf{q}_2 = [0.2, 0.5]^T$ ,  $\mathbf{q}_3 = [0, 0.2]^T$  y  $\mathbf{q}_d = [0.8, 0.1]^T$ ; respectivamente.

#### 4.3.1. Ley de Control 1: *Regulación.*

Se presentan los resultados de regulación tradicional para la ley de control (4.3) con  $\bar{\tau}_i = 0$ , la entrada para cada uno de los robots está dada por

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1) \Lambda \dot{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \lambda \mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_d \mathbf{r}_1 - \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_1) \\ \tau_2 &= -\mathbf{M}_2(\mathbf{q}_2) \Lambda \dot{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \lambda \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_d \mathbf{r}_2 - \mathbf{G}_2(\mathbf{q}_2) \\ \tau_3 &= -\mathbf{M}_3(\mathbf{q}_3) \Lambda \dot{\mathbf{e}}_3 - \mathbf{C}_3(\mathbf{q}_3, \dot{\mathbf{q}}_3) \lambda \mathbf{e}_3 - \mathbf{K}_d \mathbf{r}_3 - \mathbf{G}_3(\mathbf{q}_3) \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}_1, & \mathbf{r}_1 &= \dot{\mathbf{e}}_1 + \lambda \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{e}_2 &= \dot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}_2, & \mathbf{r}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_2 + \lambda \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{e}_3 &= \dot{\mathbf{q}}_3 - \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}_3, & \mathbf{r}_3 &= \dot{\mathbf{e}}_3 + \lambda \mathbf{e}_3
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$\mathbf{K}_d$  y  $\mathbf{\Lambda}$  son matrices diagonales positivas definidas. En la simulación, se considera a  $\mathbf{K}_d = 2\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda} = 2\mathbf{I}$  y  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$  una matriz identidad. Los resultados se muestran en la Figura 4.2 y se observa convergencia a la posición deseada en diferentes instantes de tiempo.

#### 4.3.2. Ley de Control 2: Sincronización con posición de referencia.

A partir de la teoría desarrollada en la sección 4.1, se proponen las siguientes entradas de control:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= -\mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1)\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\lambda\mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_d\mathbf{r}_1 - K_{ds}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_1) \\
 \tau_2 &= -\mathbf{M}_2(\mathbf{q}_2)\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\lambda\mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_d\mathbf{r}_2 - K_{ds}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - K_{ds}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) - \mathbf{G}_2(\mathbf{q}_2) \\
 \tau_3 &= -\mathbf{M}_3(\mathbf{q}_3)\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}_3 - \mathbf{C}_3(\mathbf{q}_3, \dot{\mathbf{q}}_3)\lambda\mathbf{e}_3 - \mathbf{K}_d\mathbf{r}_3 - K_{ds}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{G}_3(\mathbf{q}_3)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

En la simulación, las ganancias de la ley de control se toman como  $\mathbf{K}_d = 2\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda} = 2\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$  una matriz identidad y  $K_{ds} = 40$ ; es posible observar que las posiciones convergen a la posición deseada de manera sincronizada Fig. 4.3; mientras que si se considera únicamente a las ganancias de regulación, (como se muestra en el apartado 4.3.1) lo hacen en tiempos distintos. Por lo tanto, como lo expresa la definición (2.12) la sincronización permite garantizar la convergencia de sistemas diferentes en el mismo instante de tiempo. La entrada de control para la ley de sincronización se muestra en la Figura 4.5.

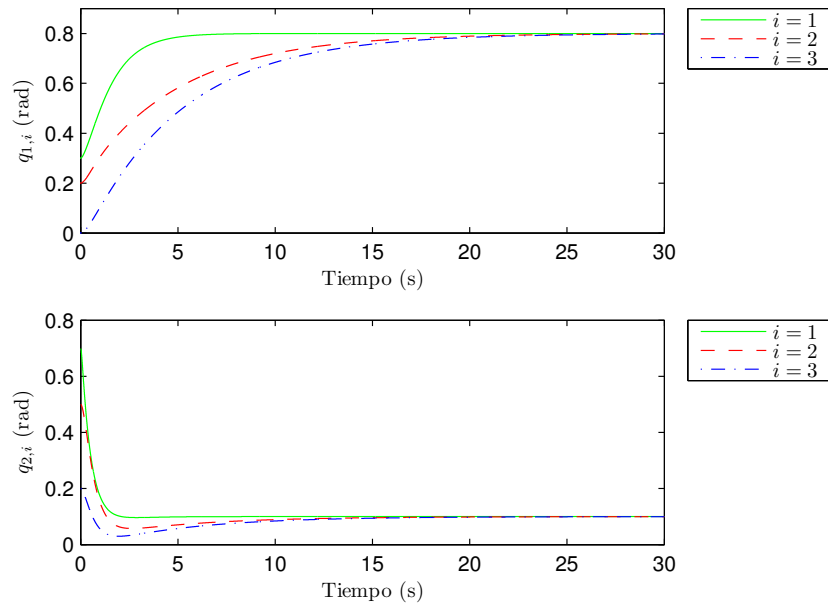


FIGURA 4.2: Gráfica de la posición para tres brazos robóticos considerando únicamente términos de regulación

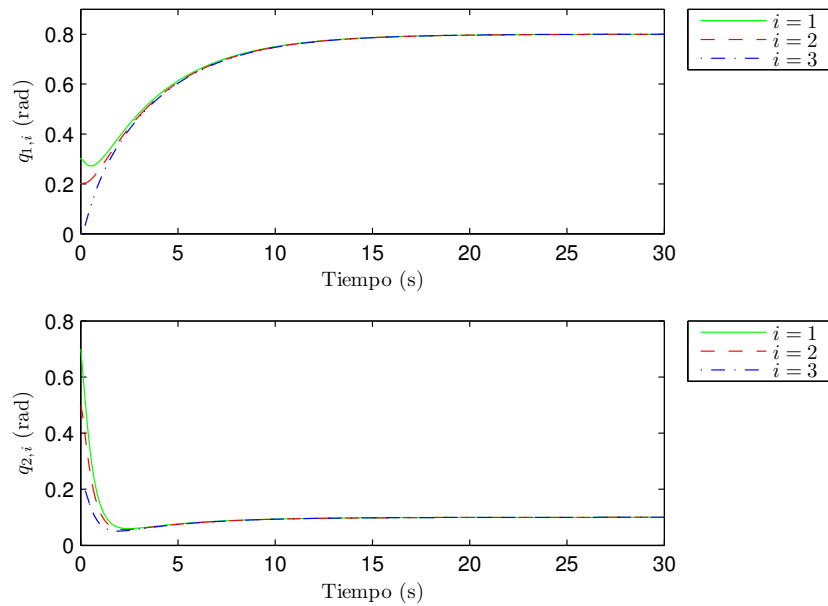


FIGURA 4.3: Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.36)



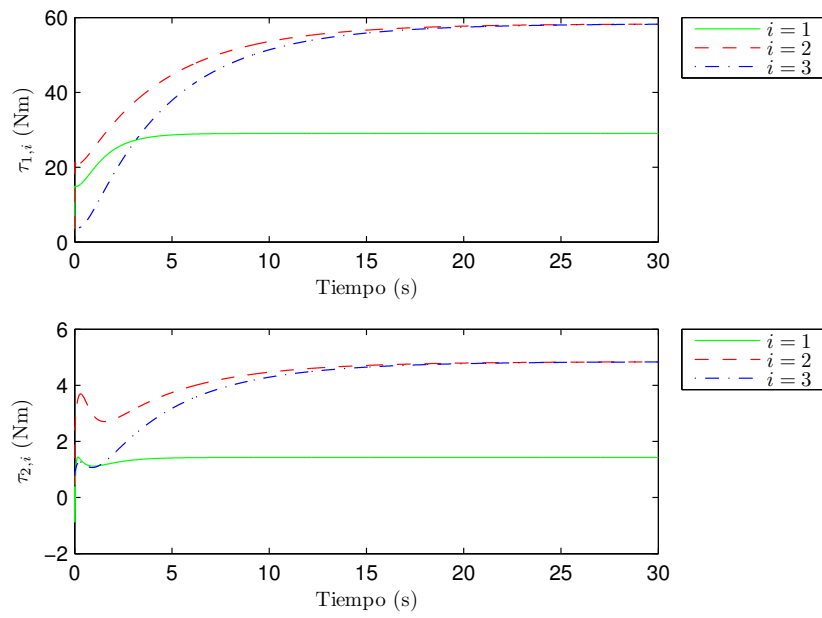


FIGURA 4.4: Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.34)

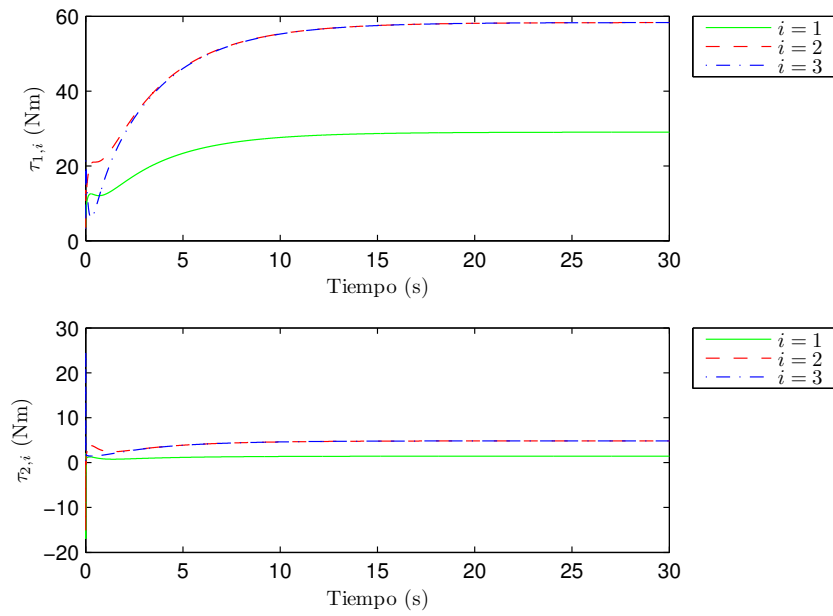


FIGURA 4.5: Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.36)

### 4.3.3. Ley de Control 3: Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición.

Los resultados del algoritmo presentado en la sección 4.2 se aplican al caso de tres brazos robóticos para ejemplificar el diseño.

La entrada de control para cada uno de los agentes se considera como

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_1 - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_1) \\
\tau_2 &= -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_2 - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) - \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) - \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) \\
&\quad - \mathbf{G}_2(\mathbf{q}_2) \\
\tau_3 &= -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_3 - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_3 - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) - \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2) - \mathbf{G}_3(\mathbf{q}_3).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Para comprobar que esta entrada de control cumple con el objetivo de lograr sincronización a la posición desada, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V &= \dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1 \\
&\quad + \dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2 \\
&\quad + \dot{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{e}_3^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_3 + \mathbf{z}_3^T \mathbf{z}_3 \\
&\quad + (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \\
&\quad + (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) \\
&\quad + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^T \mathbf{K}_{ps} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\
&\quad + (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)^T \mathbf{K}_{ps} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Su derivada

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -2\mathbf{z}_1^T \mathbf{A} \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{A} \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_3^T \mathbf{A} \mathbf{z}_3 \\
&\quad + 2\dot{\mathbf{e}}_1^T \overline{\tau}_1 + 2\dot{\mathbf{e}}_2^T \overline{\tau}_2 + 2\dot{\mathbf{e}}_3^T \overline{\tau}_3 \\
&\quad + 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T (\dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2) \\
&\quad + 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T (\dot{\mathbf{z}}_2 - \dot{\mathbf{z}}_3) \\
&\quad + 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^T \mathbf{K}_{ps} (\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) \\
&\quad + 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)^T \mathbf{K}_{ps} (\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

con la entrada de control (4.37)

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -2\mathbf{z}_1^T \mathbf{A}\mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{A}\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_3^T \mathbf{A}\mathbf{z}_3 \\
&\quad + 2\dot{\mathbf{e}}_1^T \{-\mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - \mathbf{K}_{ds}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)\} \\
&\quad + 2\dot{\mathbf{e}}_2^T \{-\mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) - \mathbf{K}_{ds}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) - \mathbf{K}_{ds}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)\} \\
&\quad + 2\dot{\mathbf{e}}_3^T \{-\mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) - \mathbf{K}_{ds}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)\} \\
&\quad + 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T \{-\mathbf{A}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2)\} \\
&\quad + 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T \{-\mathbf{A}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3)\} \\
&\quad + 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) + 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3), \tag{4.40}
\end{aligned}$$

puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -2\mathbf{z}_1^T \mathbf{A}\mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{A}\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_3^T \mathbf{A}\mathbf{z}_3 \\
&\quad - 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) \\
&\quad - 2\dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - 2\dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - 2\dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) - 2\dot{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \\
&\quad - 2\dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - 2\dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) - 2\dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) - 2\dot{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2) \\
&\quad + 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) + 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3) \\
&\quad + 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) + 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3) \\
\\
&= -2\mathbf{z}_1^T \mathbf{A}\mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{A}\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_3^T \mathbf{A}\mathbf{z}_3 \\
&\quad - 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) \\
&\quad - 2(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2)^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - 2(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3)^T \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \\
&\quad - 2(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2)^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - 2(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3)^T \mathbf{K}_d(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) \\
&\quad + 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) + 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3) \\
&\quad + 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2) + 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)^T \mathbf{K}_{ps}(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Finalmente, la derivada de la función de Lyapunov

$$\dot{V} = -2\mathbf{z}_1^T \mathbf{A}\mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{A}\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_3^T \mathbf{A}\mathbf{z}_3 - 2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - 2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)^T \mathbf{A}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) \tag{4.42}$$

es negativa semi-definida.

Para concluir estabilidad asintótica del sistema interconectado, se considera el conjunto invariante donde

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 &\equiv 0 \\ \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 &\equiv 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

por lo tanto,  $\dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\mathbf{q}}_2 = \dot{\mathbf{q}}_3 = 0$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_1 = \ddot{\mathbf{q}}_2 = \ddot{\mathbf{q}}_3 = 0$ . Además de que se puede concluir sincronización de velocidad ya que  $\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_3 = 0$ .

La entrada de cada uno de los agentes en ese conjunto está dada por

$$\begin{aligned} -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) &= 0 \\ -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= 0 \\ -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_3 - \mathbf{K}_{ps}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Sin embargo, hace falta garantizar que existe sincronización a la posición deseada. Para visualizar el resultado, las entradas del sistema interconectado se escriben en forma matricial a partir del vector de error  $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \mathbf{e}_3^T]^T \in \mathbb{R}^6$ .

Los términos de regulación, se pueden expresar en la forma del producto de Kronecker

$$(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{K}_p) \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_p & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (4.45)$$

donde

$$\mathbf{I}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Para los términos de sincronización, la matriz Laplaciana (tomando los pesos de la gráfica de interconexión como la unidad) y la matriz de ganancias de sincronización están dadas por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ps} = \begin{bmatrix} K_{ps1} & 0 \\ 0 & K_{ps2} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

En la forma del producto de Kronecker

$$(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_{ps} & 0 \\ -\mathbf{K}_{ps} & 2\mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_{ps} \\ 0 & -\mathbf{K}_{ps} & \mathbf{K}_{ps} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (4.48)$$

Finalmente, se obtiene una expresión compacta de las entradas

$$(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{K}_p)\mathbf{e} + (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{K}_p + \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{e} \quad (4.49)$$

con

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_{ps} & 0 \\ -\mathbf{K}_{ps} & \mathbf{K}_p + 2\mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_{ps} \\ 0 & -\mathbf{K}_{ps} & \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_{ps} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (4.50)$$

una matriz positiva definida. Por el principio de invarianza de LaSalle se puede concluir que  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = 0$  y existe sincronización de posición a la posición deseada.

Los valores utilizados en simulación se definen a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 90 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \mathbf{K}_{ds} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ps} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

En la Figura 4.6 se muestra la posición de cada uno de los agentes y se observa que existe sincronización de posición a la referencia dada, mientras que en la Figura 4.7 se presentan las fuerzas de control.

#### 4.3.4. Ley de Control 4: *Resultados obtenidos por Chung y Slotine.*

Chung y Slotine [9] presentan un resultado muy interesante sobre sincronización de sistemas Lagrangianos y control cooperativo a través de una variación a la matriz Laplaciana tradicional, su trabajo se enfoca en lograr sincronización con seguimiento de trayectoria de  $N$  agentes interconectados garantizando estabilidad exponencial bajo la teoría de contracción [10]. En esta sección únicamente se presenta una aplicación al caso de

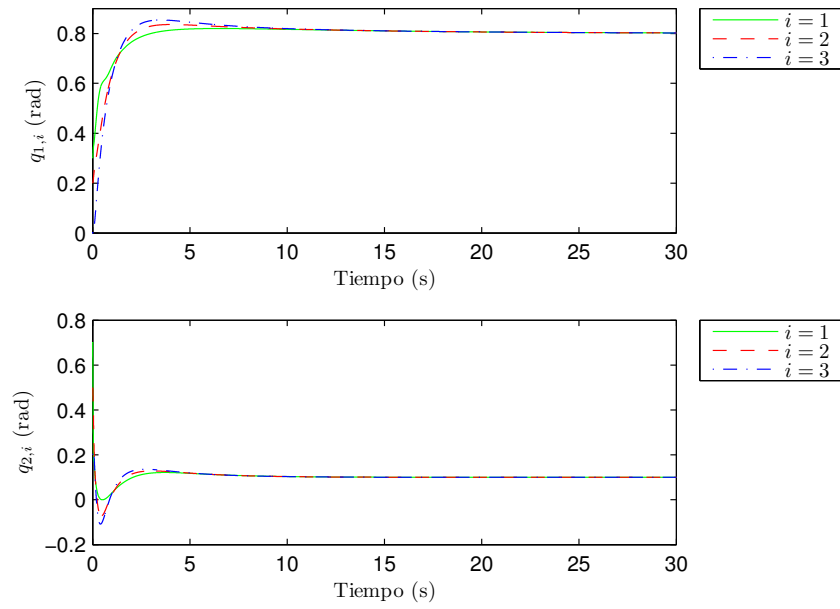


FIGURA 4.6: Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37)

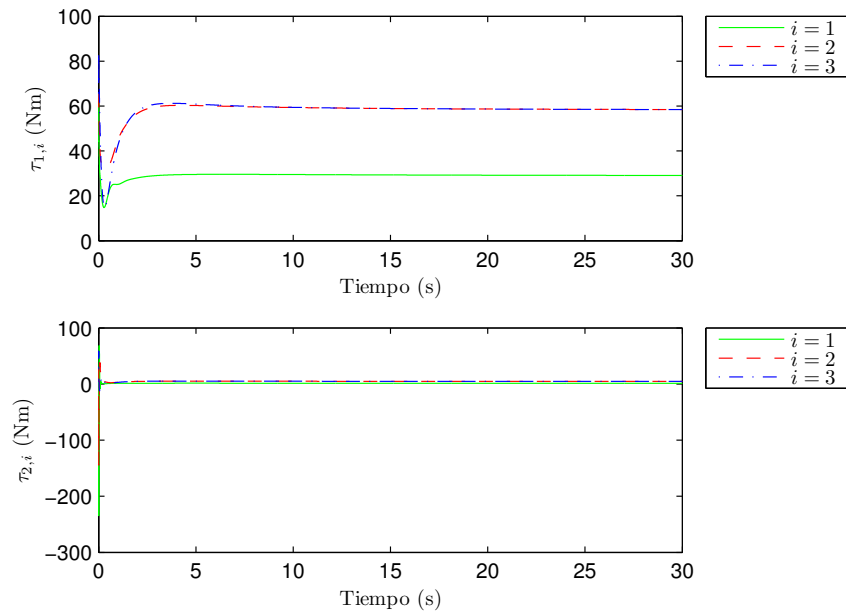


FIGURA 4.7: Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37)

regulación de los tres brazos robóticos presentados con anterioridad, con el objetivo de comparar los resultados obtenidos en las secciones 4.1 y 4.2.

La estructura permitida para garantizar sincronización es la de gráficas balanceadas y regulares. La matriz Laplaciana modificada que define la interconexión entre los agentes es estrictamente positiva definida  $\mathbf{L} > 0$ , la cual contiene dos matrices de ganancias en sus elementos  $\mathbf{K}_1 > 0$  y  $\mathbf{K}_2 > 0$ . La definición de la matriz Laplaciana modificada permite garantizar sincronización y seguimiento de trayectoria incluso con diferentes escalas de tiempo.

El error entre la posición actual  $\mathbf{q}_i$  y la trayectoria de referencia  $\mathbf{q}_d(t)$  se define como  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ . A partir de la variable de error, la velocidad deseada común con el error de posición

$$\dot{\mathbf{q}}_{i,r} = \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (4.53)$$

es definida como la velocidad de referencia, con  $\mathbf{\Lambda}$  una matriz diagonal positiva definida.

La ley de control para el  $i$ -ésimo agente está dada por

$$\begin{aligned} \tau_i = & \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_{i,r} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_{i,r} + \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_1(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{i,r}) + \mathbf{K}_2(\dot{\mathbf{q}}_{i-1} - \dot{\mathbf{q}}_{i-1,r}) \\ & + \mathbf{K}_2(\dot{\mathbf{q}}_{i+1} - \dot{\mathbf{q}}_{i+1,r}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

la cual expresada en términos de una nueva variable compuesta  $\mathbf{s}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{i,r}$  y de acuerdo a la gráfica de interconexión 4.1, es de la forma

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_{1,r} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_{1,r} + \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 \\ \tau_2 &= \mathbf{M}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_{2,r} + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \dot{\mathbf{q}}_{2,r} + \mathbf{G}_2(\mathbf{q}_2) - \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_3 \\ \tau_3 &= \mathbf{M}_3(\mathbf{q}_3) \ddot{\mathbf{q}}_{3,r} + \mathbf{C}_3(\mathbf{q}_3, \dot{\mathbf{q}}_3) \dot{\mathbf{q}}_{3,r} + \mathbf{G}_3(\mathbf{q}_3) - \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_3 + \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_3 + \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{1,r} &= \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{q}}_d); & \mathbf{s}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{q}}_{1,r}; & \dot{\mathbf{q}}_{1,r} &= \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_d) \\ \ddot{\mathbf{q}}_{2,r} &= \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\dot{\mathbf{q}}_2 - \dot{\mathbf{q}}_d); & \mathbf{s}_2 &= \dot{\mathbf{q}}_2 - \dot{\mathbf{q}}_{2,r}; & \dot{\mathbf{q}}_{2,r} &= \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_d) \\ \ddot{\mathbf{q}}_{3,r} &= \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_d); & \mathbf{s}_3 &= \dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_{3,r}; & \dot{\mathbf{q}}_{3,r} &= \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_d) \end{aligned} \quad (4.56)$$

La matriz Laplaciana modificada que representa la interconexión,

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_2 & 0 \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 \\ 0 & -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

es positiva definida para  $\mathbf{K}_1 - 2\mathbf{K}_2 > 0$ . Con el objetivo de lograr sincronización antes que seguimiento de trayectoria, la ganancia de seguimiento  $\mathbf{K}_1 - 2\mathbf{K}_2$ , debe ser menor que la ganancia de sincronización  $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ . Las ganancias consideradas en la implementación son  $\mathbf{K}_1 = 10\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}_2 = 4\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda} = 2\mathbf{I}$  con  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$  una matriz identidad. Los resultados para sincronización de posición a la referencia deseada se presentan en la Figura 4.8 y la entrada de control en la Figura 4.9.

#### 4.3.5. **Ley de Control 5: *Sincronización con posición de referencia, retroalimentación de posición y entrada saturada.***

En la Figura 4.7 se observa que la entrada para la ley de control (4.37) presenta una magnitud considerablemente grande en la unión número dos del  $i$ -ésimo robot; para fines prácticos, se considera a los actuadores saturados en la simulación y se analiza si son robustos ante saturaciones y efectos no lineales. Los valores utilizados son  $\|\tau_1\|_\infty \leq 70$  y  $\|\tau_1\|_\infty \leq 10$ . Las figuras 4.10 y 4.11 muestran los resultados, en ellas se percibe que el efecto de la saturación es el de lograr sincronización con cierto sobrepaso al valor deseado.



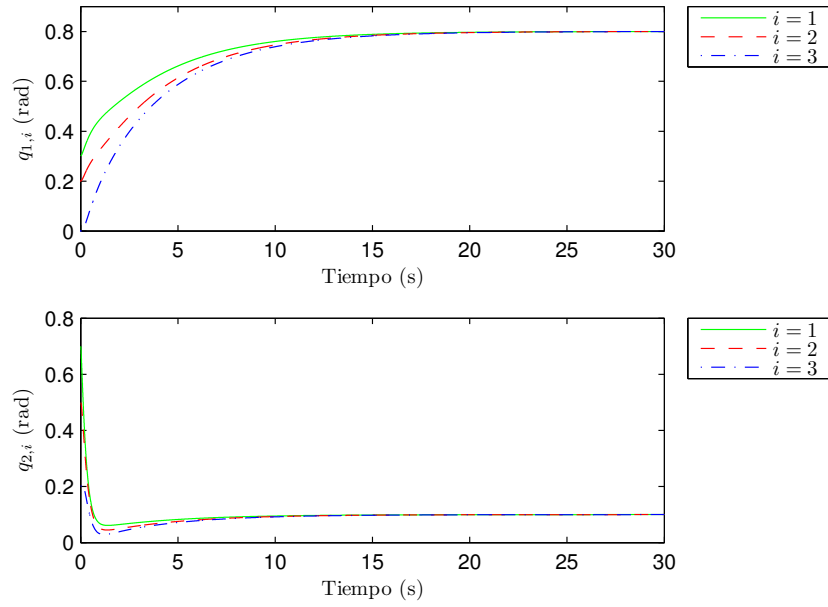


FIGURA 4.8: Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.55)

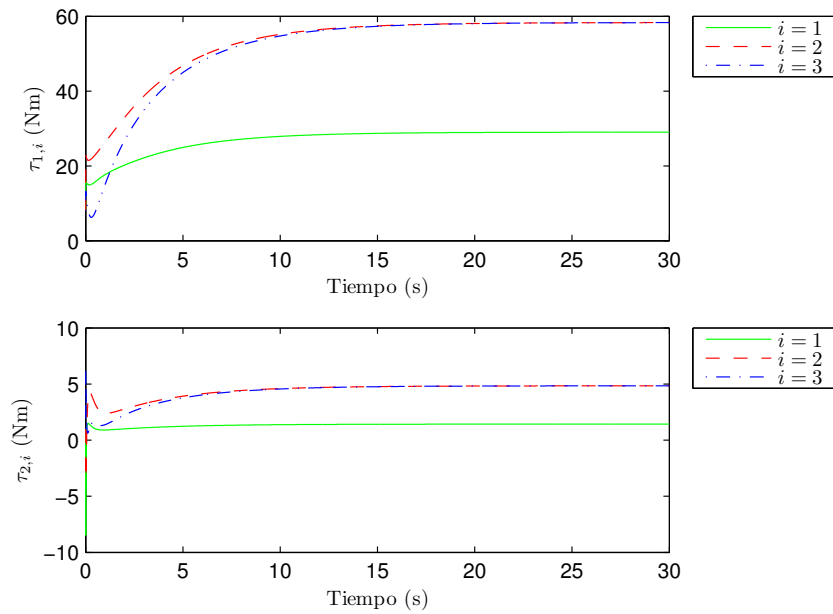


FIGURA 4.9: Gráfica de la entrada de control para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.55)

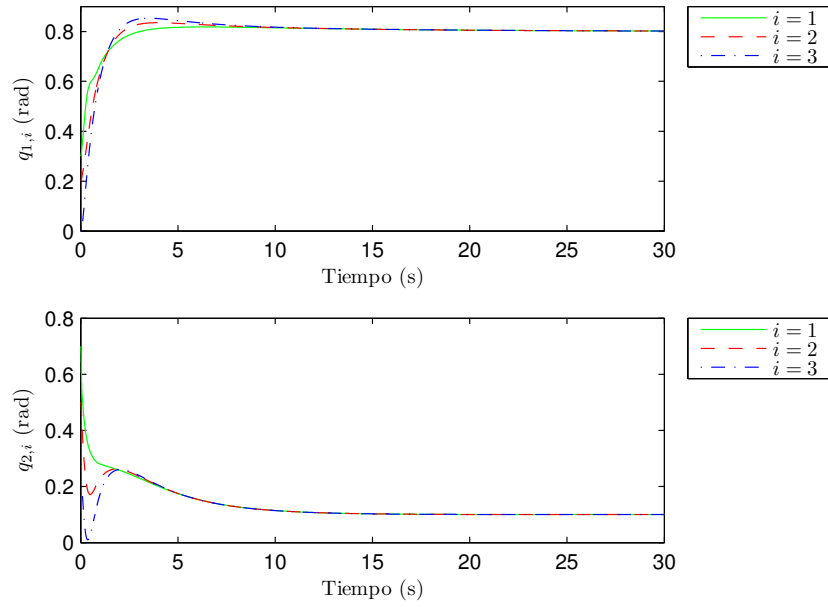


FIGURA 4.10: Gráfica de la posición para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37) con entrada saturada

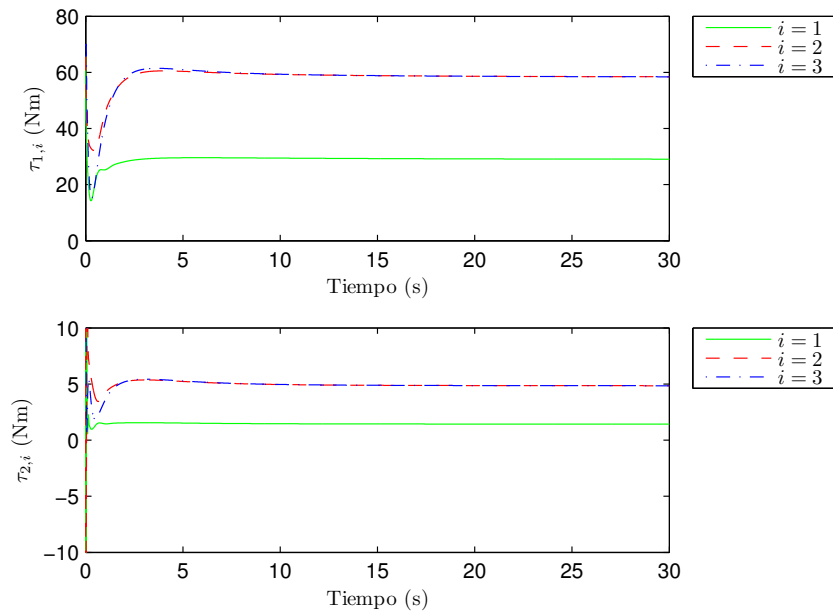


FIGURA 4.11: Gráfica de la entrada de control saturada para tres brazos robóticos bajo la ley de control (4.37)

### 4.3.6. Comparación de resultados.

Con el objetivo de evaluar el desempeño de los controladores presentados, se utiliza el valor cuadrático medio

$$\mathbf{f}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt} \quad (4.58)$$

de los errores de sincronización y regulación. Esto permitirá tener una medida de tales errores y realizar una comparación cuantitativa, se considera que cierta ley de control tiene mejor desempeño si su error cuadrático medio es menor respecto a los demás.

El error de sincronización, para el caso de los tres robots se toma como la diferencia entre el agente  $i$  y su vecino, por lo tanto, existen tres errores a analizar,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{s,1} &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{s,2} &= \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{s,3} &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Los errores de regulación se definen como la diferencia entre el agente  $i$  y la posición deseada, es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_d \\ \tilde{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_d \\ \tilde{\mathbf{q}}_3 &= \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_d. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Por simplicidad, a las leyes de control presentadas en este capítulo se les nombrará como

LC1. Regulación.

LC2. Sincronización con posición de referencia.

LC3. Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición.

LC4. Resultados obtenidos por Chung y Slotine.

LC5. Sincronización con posición de referencia, retroalimentación de posición y entrada saturada.

Los valores cuadráticos medios de los errores de sincronización y regulación de cada una de las uniones de los robots se presentan en la Tabla 4.1, mientras que en la Figura 4.12

se observan los errores cuadráticos medios de los vectores de error de sincronización y posición. En ella se aprecia que el error de sincronización es menor en la Ley de Control 2: *Sincronización con posición de referencia*. Por lo tanto, desde el punto de vista de sincronización, esta ley cumple mejor el objetivo. Este resultado se esperaba ya que las ganancias de control fueron elegidas para tal propósito,  $\mathbf{K}_s = 40\mathbf{I}$  donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$ . Es importante recalcar, que a lo largo de las simulaciones, las ganancias de control para todas las leyes de control se eligieron para obtener sincronización antes que regulación.

El objetivo principal de este capítulo es comparar la Ley de Control con retroalimentación de posición y la de Chung y Slotine. La Ley que busca cumplir al mismo tiempo con el objetivo de sincronización y regulación es la número 3: *Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición*, que incluso al considerar a los actuadores saturados (Ley número 5), presenta el mejor desempeño. Sin embargo, el diseño de la ley de control hace más difícil lograr sincronización mucho antes que regulación; en este sentido, la ley de control número cuatro: *Resultados obtenidos por Chung y Slotine* es más simple de implementar.

Otro punto importante a destacar, es que al contrastar los errores de sincronización con los de regulación, se advierte que lograr una mayor sincronización implica aumentar el error a la posición deseada. Tal situación debe ser valorada dependiendo de la aplicación en la que se esté interesado.

En la Tabla 4.2 y en la Figura 4.13 se aprecian los torques máximos para cada una de las leyes de control y cada uno de los agentes. Como se mencionó en el apartado 4.3.5, la Ley de Control que presenta un torque máximo es la número 3: *Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición*, ésta continua siendo de utilidad a pesar de considerar a los actuadores saturados.

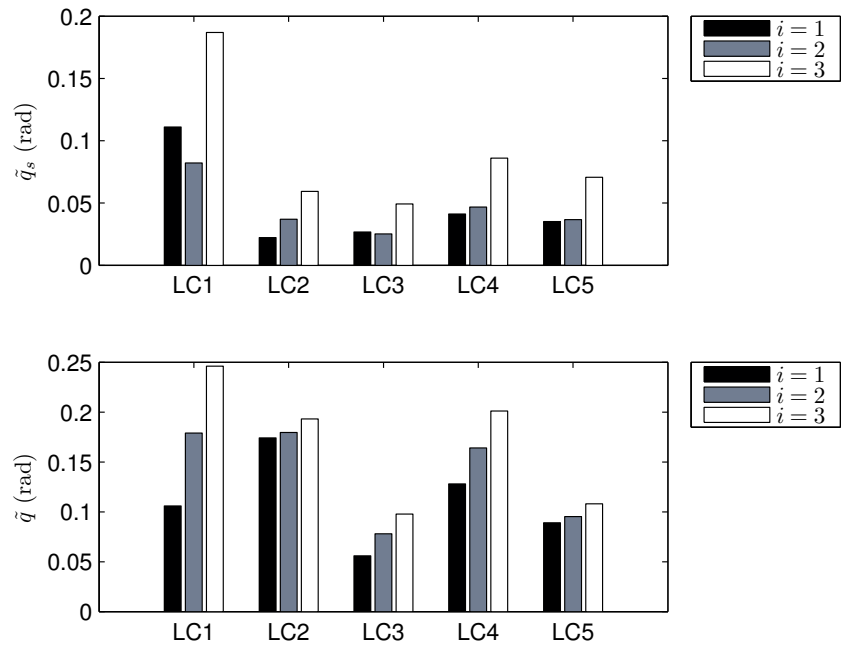


FIGURA 4.12: Errores cuadráticos medios de sincronización y regulación

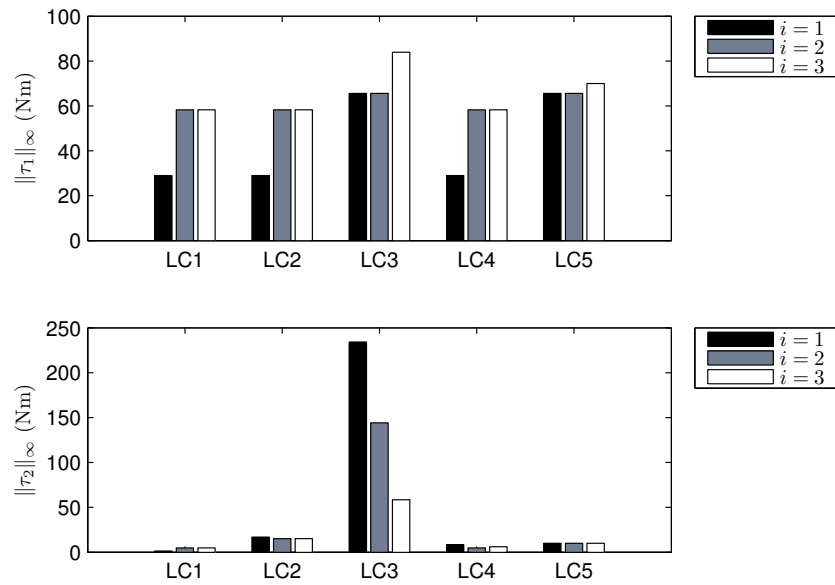


FIGURA 4.13: Entradas de Control máximas

Ley de Control	Agente	$\tilde{q}_{s_1}$ (rad)	$\tilde{q}_{s_2}$ (rad)	$\tilde{q}_1$ (rad)	$\tilde{q}_2$ (rad)
LC1	1	$109.0 \times 10^{-3}$	$20.2 \times 10^{-3}$	$89.3 \times 10^{-3}$	$57.5 \times 10^{-3}$
	2	$71.0 \times 10^{-3}$	$39.7 \times 10^{-3}$	$173.4 \times 10^{-3}$	$47.9 \times 10^{-3}$
	3	$178.0 \times 10^{-3}$	$56.2 \times 10^{-3}$	$245 \times 10^{-3}$	$26.6 \times 10^{-3}$
LC2	1	$13.0 \times 10^{-3}$	$18.4 \times 10^{-3}$	$16.3 \times 10^{-3}$	$58.9 \times 10^{-3}$
	2	$23.9 \times 10^{-3}$	$28.2 \times 10^{-3}$	$17.4 \times 10^{-3}$	$41.7 \times 10^{-3}$
	3	$36.7 \times 10^{-3}$	$46.7 \times 10^{-3}$	$19.2 \times 10^{-3}$	$19.6 \times 10^{-3}$
LC3	1	$24.3 \times 10^{-3}$	$11.3 \times 10^{-3}$	$51.0 \times 10^{-3}$	$22.9 \times 10^{-3}$
	2	$22.6 \times 10^{-3}$	$11.1 \times 10^{-3}$	$72.4 \times 10^{-3}$	$29.2 \times 10^{-3}$
	3	$45.8 \times 10^{-3}$	$18.1 \times 10^{-3}$	$93.3 \times 10^{-3}$	$29.3 \times 10^{-3}$
LC4	1	$39.4 \times 10^{-3}$	$12.2 \times 10^{-3}$	$121 \times 10^{-3}$	$43.1 \times 10^{-3}$
	2	$41.3 \times 10^{-3}$	$21.9 \times 10^{-3}$	$161 \times 10^{-3}$	$35.0 \times 10^{-3}$
	3	$79.1 \times 10^{-3}$	$33.7 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-3}$	$23.0 \times 10^{-3}$
LC5	1	$25.4 \times 10^{-3}$	$24.3 \times 10^{-3}$	$52.8 \times 10^{-3}$	$72.4 \times 10^{-3}$
	2	$21.8 \times 10^{-3}$	$29.5 \times 10^{-3}$	$75.4 \times 10^{-3}$	$58.6 \times 10^{-3}$
	3	$46.4 \times 10^{-3}$	$53.4 \times 10^{-3}$	$96.0 \times 10^{-3}$	$50.8 \times 10^{-3}$

TABLA 4.1: Errores de sincronización y regulación

Ley de Control	Agente	$\ \tau_1\ _\infty$ (Nm)	$\ \tau_2\ _\infty$ (Nm)
LC1. Regulación.	1	29.0	1.4
	2	58.2	4.8
	3	58.2	4.8
LC2. Sincronización con posición de referencia.	1	29.0	16.8
	2	58.3	15.1
	3	58.3	15.1
LC3. Sincronización con posición de referencia y retroalimentación de posición.	1	65.6	234.26
	2	65.6	144.21
	3	83.9	58.42
LC4. Resultados obtenidos por Chung y Slotine.	1	29.0	8.4
	2	58.3	4.8
	3	58.3	6.2
LC5. LC3 con entrada saturada.	1	65.6	10
	2	65.6	10
	3	70	10

TABLA 4.2: Entradas de control máximas para cada una de las uniones

## Capítulo 5

# Conclusiones y Trabajo Futuro

Se generó una nueva ley de control basada en retroalimentación de posición para el problema de sincronización de velocidad y sincronización de posición de agentes disipativos, lo cual simplifica la implementación de leyes de control para sincronización de sistemas reales.

Se estudió el caso de sincronización de posición a cierta posición deseada para sistemas Lagrangianos en el que se extendió la solución existente para sistemas pasivos [13] y se desarrolló una nueva ley de control con retroalimentación de posición.

Los resultados obtenidos se compararon con los obtenidos por Chung y Slotine [9] y se comprobó que la Ley de Control desarrollada presenta un buen desempeño para lograr sincronización y regulación, incluso al considerar saturación en los actuadores.

Como trabajo futuro, ambos resultados pueden ser analizados considerando retardos en la comunicación, diferentes grafos de interconexión, cambios en la topología, pérdidas de comunicación, incertidumbres en los parámetros o la presencia de perturbaciones en las mediciones. Todos estos aspectos se pueden incorporar al diseño de la ley de control con el fin de obtener una ley de control que logre mejores resultados en la implementación.

Otro aspecto importante, es que el estudio se realizó a partir de un filtro de primer orden, por lo tanto, para el caso de sincronización y seguimiento de trayectoria con retroalimentación de posición se necesita diseñar un observador; y aunque existen trabajos al respecto ej. [19], este hecho abre un amplio campo de investigación.

Además, la teoría de sincronización muestra que existen ganancias de acoplamiento entre sistemas que pueden ser aprovechadas para mejorar la respuesta del grupo, esto sugiere ver los problemas de control como sistemas interconectados. Tal hecho pretende ser explotado para ser aplicado a otro tipo de sistemas tales como sistemas biológicos, sistemas térmicos o al control de estructuras civiles.



# Bibliografía

- [1] Strogatz, S. H.: *SYNC: The Emerging Science of Spontaneous Order*. New York Hyperon, 2003.
- [2] Kuramoto, Y.: *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*. En *Lecture Notes in Physics*, volumen 39. Springer, 1975.
- [3] Kuramoto, Y.: *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, 1984.
- [4] Strogatz, S. H.: *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*. *Physica D.*, 143:1–20, 2000.
- [5] Wooldridge, M.: *Agent-based software engineering*. Volumen 144, páginas 26–37, Febrero 1997.
- [6] Reynolds, C. W.: *Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model*. En *SIGGRAPH '87*, volumen 21, páginas 25–34, 1987.
- [7] Olfati-Saber, R. y Murray, R. M.: *Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1520–1533, Septiembre 2004.
- [8] Lee, D. y Spong, M. W.: *Stable Flocking of Inertial Agents on Balanced Graphs*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8), Agosto 2007.
- [9] Chung, S. J. y Slotine, J. J.E.: *Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems*. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(3):686–700, Junio 2009.
- [10] Lohmiller, W. y Slotine, J. J.E.: *On Contraction Analysis for Nonlinear Systems*. *Automatica*, 34(6):683–696, Junio 1998.

- 
- [11] Yu, G. y Slotine, J. J.E.: *Visual grouping by neural oscillator networks*. Transactions on neural networks, 20(12):1871–1884, Diciembre 2009.
- [12] Arcak, M.: *Passivity as a Design Tool for Group Coordination*. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(8):1380–1389, Agosto 2007.
- [13] Chopra, N. y Spong, M. W.: *Passivity-based control of multi-agent systems*. Advances in Robot Control: From Everyday Physics to Human-like Movements. Springer-Verlag, 2006.
- [14] Hirche, S. y Hara, S.: *Stabilizing interconnection characterization for multi-agent systems with dissipative properties*. En *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, páginas 1571–1577, 2008.
- [15] Qu, Z., Wang, J. y Hull, R. A.: *Cooperative Control of Dynamical Systems With Application to Autonomous Vehicles*. IEEE Transactions on Automatic Control, 53(4), Mayo 2008.
- [16] Ren, W., Chao, H., Bourgeois, W. y Sorensen, N.: *Experimental Validation of Consensus Algorithms for Multivehicle Cooperative Control*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 16(4), Julio 2008.
- [17] Lawton, J. R. T., Beard, R. W. y Young, B. J.: *A Decentralized Approach to Formation Maneuvers*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 19(6):933–941, Diciembre 2003.
- [18] Ren, W.: *Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems*. International Journal of Control, 82(11):2137–2149, Noviembre 2009.
- [19] Rodriguez-Angels, A. y Nijmeijer, H.: *Mutual Synchronization of Robots via Estimated State Feedback: A Cooperative Approach*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 12(4):542–554, Julio 2004.
- [20] Godsil, C. y Royle, G.: *Algebraic Graph Theory*. Número 207 en *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2001.
- [21] Goodrich, M. T. y Tamassia, R.: *ALGORITHM DESIGN: Foundations, Analysis and Internet examples*. John Wiley & Sons, 2002.
- [22] Sepulchre, R., Jankovic, M. y Kokotovic, P.: *Constructive Nonlinear Control*. Springer, 1997.

- 
- [23] Willems, J. C.: *Dissipative Dynamical Systems-Part I: General theory*. Arch. Rational Mechanics Analysis, (45):321–351, 1972a.
- [24] Brogliato, I., Lozano, R., Maschke, B. y Egeland, O.: *Dissipative systems analysis and control: theory and applications*. Springer-Verlag, 2007.
- [25] Slotine, J. J.E. y Li, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [26] Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [27] Reyes, F. y Kelly, R.: *Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm*. Mechatronics, (11):267–282, 2001.
- [28] Kruise, L.: *Modeling and control of a flexible beam and a robot arm*. Tesis de Doctorado, Univ. of Twente, Enschede, 1990.