



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Trayectorias monocromáticas en digráficas
m-coloreadas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Luis Alberto Martínez Chigo

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Juan José Montellano



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Ante todo le agradezco a Dios todas las bondades que ha tenido conmigo. Agradezco a mis padres y hermano por las innumerables palabras de aliento que me han dado a largo de estos años.

A las familias Reyna Miranda y Mireles Morales por que, gracias a ellos, nunca sentí lejos el calor de una casa.

A Montse, por ser la luz en la oscuridad.

A Rubén por todas las cervezas y traspachadas que vivimos.

A Juan por las interminables pláticas ñoñas y no ñoñas que tuvimos.

A Pancho por enseñarme a ser una persona ubicada, literal.

A mis tíos, primos, abuelos.

Ojalá pudiera transmitir todo mis sentimientos pero alguien me enseñó que en ocasiones no existen palabras para decir lo que sientes. Gracias Amé.

Índice general

Introducción

*El color es el complemento de la forma y
la manifestación más clara de la vida.*

Antoni Gaudí (1852-1926)

La historia de la Teoría de Gráficas se remonta a 1736, cuando Leonhard Euler presentó un trabajo sobre el problema de los puentes Königsberg. Éste es considerado el nacimiento de la teoría. Desde ese momento se han desarrollado conceptos, como las *digráficas*, que han encontrado lugar en áreas como ciencias sociales, física, computación y economía. Sin embargo, en ocasiones, el fenómeno se presenta al revés, es decir, las definiciones nacen de algún problema específico. Tal es el caso de los *núcleos*, concepto introducido en 1944 por von Neumann y Morgenstern en su artículo *Theory of Games and Economic Behaviour*.

Posterior a eso, en 1996, aparece el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas, introducido por Hortensia Galeana Sánchez en su artículo *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge colored tournaments* [7]. Podemos pensar que este concepto es resultado de la fusión de dos definiciones: *núcleo* y *trayectoria monocromática*, siendo este último un concepto que nace de un problema propuesto por Paul Erdős. Una gran cantidad de trabajo e investigación se ha desarrollado alrededor de este concepto matemático de los núcleos por trayectorias monocromáticas.

El objetivo de este trabajo es presentar varios resultados relacionados con el concepto y mostrar algunos de los diversos caminos que se han tomado en la investigación. La tesis está organizada de la siguiente manera:

Los primeros dos capítulos tienen como finalidad presentar las definiciones

básicas de la Teoría de Gráficas y algunos resultados que serán esenciales a lo largo del trabajo.

En el capítulo tres, presentamos uno de los primeros teoremas mas importantes y la línea que se desarrollo a partir de él, llegando a resultados muy bellos.

Los capítulos cuatro y cinco se enfocan en exponer varios teoremas que muestran condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en torneos y cualquier digráfica, respectivamente.

En el capítulo seis introducimos y se revisan nuevas definiciones relacionadas con el concepto, en una búsqueda de cierta generalidad.

Finalmente en el capítulo siete se presenta una forma distinta de abordar el problema, desarrollada por los matemáticos Peter Arpin y Václav Linek y que, a nuestro parecer, es muy interesante. En él se definen ciertos grupos de digráficas y se estudian esos grupos dando lugar a condiciones necesarias para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas.

Capítulo 1

Definiciones básicas

1.1. Gráficas dirigidas

Una *gráfica dirigida* D es un par $D = (V, A)$ tal que $A \subseteq V \times V$, es decir, los elementos de A son subconjuntos *ordenados* de 2 elementos. Los elementos de V son llamados vértices de la gráfica dirigida y los elementos de A son llamados arcos o flechas. Es muy común utilizar el término *digráfica* para referirnos a una gráfica dirigida. La forma usual de representar pictóricamente una digráfica es colocar un punto por cada vértice y por cada elemento de A una flecha cuya dirección depende del orden del elemento, es decir, si u y v son 2 elementos de V y $(u, v) \in A$ entonces al par (u, v) le corresponde una flecha que va de u a v . En algunas ocasiones nos encontramos con arcos que empiezan y terminan en el mismo vértice; estos reciben un nombre especial, *lazos*. Decimos que un par de vértices son adyacentes si existe un arco entre ellos.

Ejemplo

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

$$A = \{(v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_3)\}.$$

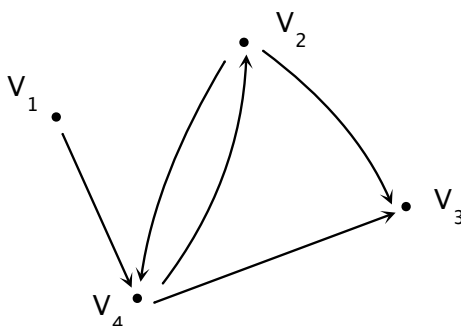


Figura 1.1: Digráfica de los conjuntos V y A .

El número de vértices de una digráfica D es su *orden* y lo denotaremos como $|V|$; el número de arcos o flechas de D es su *tamaño*. Las digráficas pueden ser finitas o infinitas, todo depende de su orden. En todo el trabajo trataremos con digráficas finitas salvo que se indique lo contrario.

Una digráfica D es *simple* cuando no tiene lazos y para cualesquiera dos vértices adyacentes de D existe un arco y sólo uno. En el resto del trabajo, exceptuando el capítulo final, se trabajaran con digráficas simples, las cuales por comodidad sólo llamaremos digráficas.

Sean $D = (V, A)$ y $D' = (V', A')$ dos digráficas. Decimos que D y D' son *isomorfas* si existe una función $\phi : V \rightarrow V'$ biyectiva tal que $(u, v) \in A$ si y sólo si $(\phi(u), \phi(v)) \in A'$ para todo par de vértices u, v de V . En la figura 1.2 se ilustran dos digráficas isomorfas cuya función es la siguiente: $\phi(v_1) = w_5, \phi(v_2) = w_2, \phi(v_3) = w_4, \phi(v_4) = w_1, \phi(v_5) = w_3$.

Si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$ se dice que D' es una *subdigráfica* de D o que D es una *supergráfica* de D' . Es más común encontrar el primer concepto en la literatura. Además, si D' contiene a todas los arcos de G que tienen a sus

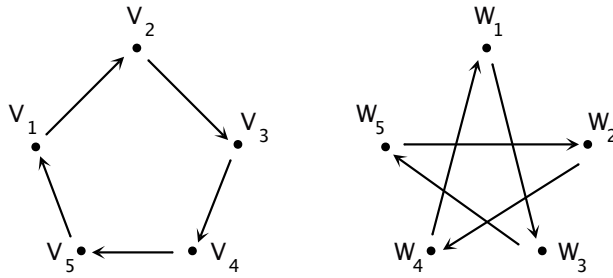


Figura 1.2: Digráficas isomorfas.

dos extremos en V' entonces decimos que D' es una *subdigráfica inducida* de D y que V' induce a D' . Otra forma de ver la definición es que D' se obtiene de borrar los vértices de $V - V'$ con sus arcos adyacentes y dejando intacto el resto de la digráfica. Denotamos a $D[U]$ con $U \subseteq V$ como la digráfica que induce U en D .

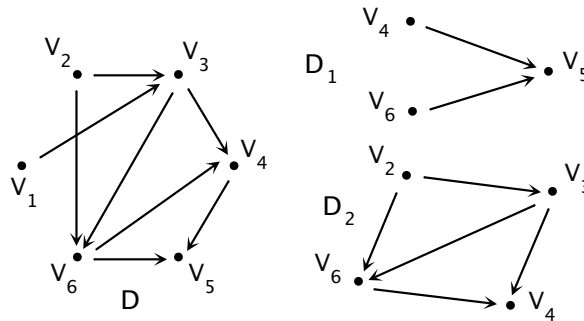


Figura 1.3: D_1 y D_2 subdigráficas inducidas de D .

Si U es un subconjunto de vértices de V , entonces $G[V \setminus U]$ lo abreviaremos como $G - U$. En otras palabras, $G - U$ es obtenido de G borrando todos

los vértices en U y sus arcos incidentes. Si $U = \{v\}$ es un sólo vértice, escribimos $G - v$ en lugar de $G - \{v\}$.

1.2. Grados en digráficas

La *invecindad* $N^-(v)$ de un vértice v se define como $N^-(v) = \{w \in D \mid (w, v) \in A(D)\}$, es decir, son aquellos vértices que están unidos a v por un arco que empieza en v . La *exvecindad* $N^+(v)$ de un vértice v se define como $N^+(v) = \{w \in D \mid (v, w) \in A(D)\}$ y son los vértices unidos a v con una flecha cuya punta termina en v .

El ingrado de un vértice, al que denotaremos como $d^-(v)$, es el número de arcos que empiezan en v . Análogamente, el exgrado $d^+(v)$ de un vértice es el número de arcos que terminan en v .

Dado $v \in V(D)$ y $S \subseteq V(D)$, diremos que un arco (x, y) de D es un vS -arco si $x = v$ y $y \in S$.

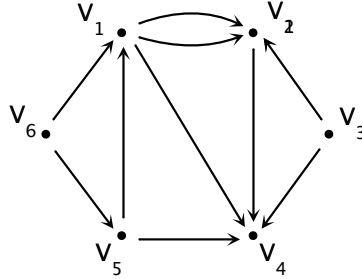
Dado U subconjunto de los vértices de D podemos definir $N^-(U)$ y $N^+(U)$ como sigue:

$$N^-(U) = \bigcup_{w \in U} N^-(w) - U. \quad (1.1)$$

$$N^+(U) = \bigcup_{w \in U} N^+(w) - U. \quad (1.2)$$

En la figura 1.4 se encuentra la digráfica H ; en esta digráfica, $N^-(v_1) = \{v_2, v_4\}$, $N^+(v_1) = \{v_5, v_6\}$, $d^+(v_1) = 3$ y $d^-(v_2) = 2$. Si $U = \{v_1, v_2\}$ entonces $N^-(U) = \{v_3, v_5, v_6\}$ y $N^+(U) = \{v_4\}$.

Observemos que los conceptos de vecindades y grados no siempre son iguales, las digráficas en donde coinciden son las digráficas simples.

Figura 1.4: Digráfica H

Existen algunas proposiciones respecto al ingrado y exgrado que son parecidos a los resultados en gráficas simples y cuyas pruebas omitimos.

Proposición 1.1. *Sea $D = (V, A)$ una digráfica, entonces:*

$$2|A| = \sum_{w \in V} (d^-(w) + d^+(w)).$$

Proposición 1.2. *Si $D = (V, A)$ es una digráfica entonces:*

$$|A| = \sum_{w \in V} d^-(w) = \sum_{w \in V} d^+(w).$$

$\delta^-(v)$ y $\Delta^-(v)$ las usaremos para denotar el ingrado mínimo y máximo, respectivamente. Cambiando $+$ por $-$ obtenemos los conceptos análogos para exgrado.

1.3. Conexidad en digráficas

Un *camino dirigido* en D es una secuencia finita $W = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ de vértices y arcos, de forma que el arco a_i inicia en v_{i-1} y termina en

v_i . Muy frecuentemente, en una digráfica simple, un camino dirigido $W = (v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n)$ se representa por la secuencia de sus vértices $W = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Una *trayectoria dirigida* en D es un camino dirigido que no repite vértices. Decimos que una trayectoria W es una uv trayectoria si el vértice inicial y final de W es u y v , respectivamente. Un *ciclo dirigido* es un camino dirigido $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ que sólo repite el vértice inicial y final, es decir $v_0 = v_n$. La longitud de una trayectoria $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ es n .

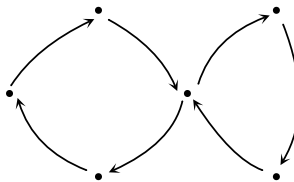


Figura 1.5: Digráfica fuertemente conexa.

Dos vértices u y v de una digráfica D están *conectados* si existe una uv trayectoria dirigida o una vu trayectoria dirigida y están *biconectados* si existen trayectorias en ambas direcciones. Una digráfica D es *débilmente conexa* si cualesquiera dos vértices u y v de D están conectados y es *fuertemente conexa* si cualquiera dos vértices u y v están biconectados. La biconexión induce una partición de los vértices, cuyos elementos de la partición son llamados componentes fuertemente conexas.

1.4. Clases de digráficas

Decimos que un arco (u, v) de D es *asimétrico* si (v, u) **no** es un arco de D ; de lo contrario decimos que (u, v) es simétrica. El conjunto de arcos

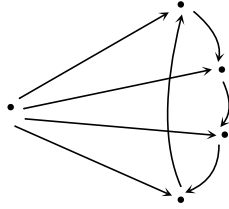


Figura 1.6: Digráfica conexa pero no fuertemente conexa.

asimétricos de una digráfica es conocido como $Asym(D)$ y de forma similar, $Sym(D)$ es el conjunto de todas las flechas simétricas. Una digráfica D es *asimétrica* si todos sus arcos son asimétricos; análogamente D es *simétrica* si todos sus arcos son simétricos.

Una digráfica asimétrica en donde cualesquiera dos vértices están unidos por exactamente un arco es conocido como un *torneo*. Esta clase de digráficas será primordial en el resto del trabajo, pues la mayor parte de los resultados sobre el tema se basan en este tipo de digráficas o en digráficas parecidas.

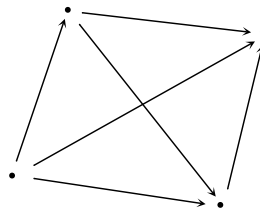


Figura 1.7: Digráfica transitiva

Finalmente, Una digráfica D es transitiva si siempre que (u, v) , (v, w) son

arcos de D entonces implica que (u, w) es un arco de D .

Capítulo 2

Resultados Previos

En este capítulo se presentan definiciones básicas, algunos resultados previos y un poco de historia en torno a los núcleos en digráficas.

2.1. Núcleos en digráficas

Definición 1. Dada una digráfica D y $S \subseteq V(D)$, decimos que S es independiente si no existe un arco entre ningún par de vértices en S . Es decir, $G[S]$ es la gráfica de $|S|$ vértices y ningún arco.

Definición 2. Dada una digráfica D y $S \subseteq V(D)$, decimos que S es absorbente si para cada vértice v en $V(D) \setminus S$ existe un vS arco.

Definición 3. Sea D una digráfica. $S \subseteq V(D)$ es un *núcleo* de D si S es independiente y absorbente.

Ejemplo: En la Figura 2.1, $S = \{v_1, v_4\}$ es un núcleo de D , pues S es independiente y existen los arcos (v_3, v_1) , (v_2, v_4) . Pero $S^* = \{v_2\}$ no es un núcleo, ya que no existe un arco de v_3 a v_2 .

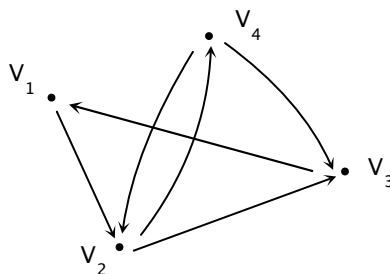


Figura 2.1: Digráfica con núcleo.

Definición 4. Decimos que una digráfica D es núcleo perfecta si cualquier subdigráfica inducida de D tiene un núcleo.

Definición 5. Decimos que D es núcleo perfecta crítica si D no tiene núcleo y para cualquier subdigráfica inducida propia de D tiene un núcleo, es decir, sólo D como tal no tiene núcleo.

Ejemplo:

La gráfica D (Figura 2.1) no es *núcleo perfecta*, pues la subdigráfica inducida por $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ no tiene núcleo, ya que es un ciclo de orden 3 (es fácil demostrar que todo ciclo dirigido de longitud impar no tiene núcleo).

A continuación demostraremos un par de teoremas que serán útiles en lo que resta del trabajo.

Teorema 2.1. *Si D es una digráfica transitiva entonces D tiene un núcleo.*

Demostración. Dado $A \subseteq V(D)$, definimos

$$\xi(A) = |\{z \in V(D) \mid \text{existe un } zA \text{ arco}\}|.$$

Sea S el subconjunto independiente que alcanza el valor máximo de ξ y de cardinal mayor. Esto es, si nos tomamos otro subconjunto independiente

S' entonces $\xi(S) \geq \xi(S')$ y si $\xi(S) = \xi(S')$ entonces $|S| \geq |S'|$. Vamos a demostrar que S es un núcleo de D .

La prueba es por contradicción. Por construcción S es independiente, así que, si S no es un núcleo entonces debe existir un vértice $v \in V(D) \setminus S$ tal que no existe un vS arco. Y además si no existe un Sv arco, entonces $S \cup v$ es un subconjunto independiente tal que $\xi(S \cup \{v\}) = \xi(S)$ y $|S \cup \{v\}| > |S|$, contradiciendo la elección de S . Por tanto existe un Sv arco.

Ahora, definimos $S^* = \{w \in V(S) \mid \text{existe el arco } (w, v)\}$, $S^* \neq \emptyset$ por lo mencionado en el párrafo anterior. Si cambiamos a S^* por v en S obtenemos un conjunto independiente R (i.e. $R = \{S \setminus S^*\} \cup \{v\}$), pues en caso contrario existe un vw ó wv arco con $w \in S \setminus S^*$, la primera opción es imposible pues v sería absorbido por S y la segunda opción implicaría que $w \in S^*$ y fue removido de S . A continuación probaremos la siguiente afirmación

Afirmación 1. *Sea $u \in V(D) \setminus S$ tal que existe un uS arco. Entonces existe un uR arco.*

Si $(u, w) \in A(D)$ con $w \in V(S) \setminus S^*$ entonces $w \in R$ y la afirmación es cierta. Si $w \in S^*$ entonces $(w, u) \in A(D)$ y la transitividad implica que $(u, v) \in A(D)$ con $v \in R$.

La afirmación anterior nos dice que el conjunto que era absorbido por S también es absorbido por R , y además R también absorbe a S^* , por lo tanto $\xi(R) \geq \xi(S) + |S^*| > \xi(S)$, contradiciendo la maximalidad de S . Por lo tanto, S es un núcleo de D . \square

Teorema 2.2. *Sea D una digráfica. Si cada ciclo dirigido de D tiene un arco simétrica entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Primero observemos que la propiedad de que cada ciclo dirigido de un digráfica D tiene un arco simétrico, se respeta bajo las gráficas inducidas de D , por lo cual es suficiente demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.3. Si cada ciclo dirigido de una digráfica D tiene un arco simétrico, entonces D tiene núcleo.

La demostración será por inducción sobre el orden de D . Para $n = 1, 2$ la proposición es trivial. Supongamos que la proposición funciona para todas las digráficas cuyo orden es menor que n .

Sea v_0 un vértice arbitrario de D . Por hipótesis de inducción existe $S_0 \subset D - \{v_0\}$, tal que S_0 es un núcleo de $D - \{v_0\}$. Si no existe un arco entre v_0 y S_0 entonces $S_0 \cup \{v_0\}$ es un núcleo de D . Si una de los arcos de la forma $v_0 S_0$, entonces S_0 es un núcleo de D . Así que podemos suponer que todos los arcos entre v_0 y S_0 son de la forma $S_0 v_0$.

Ahora sea $v_1 \in N^-(v_0) \cap S_0$, y por hipótesis de inducción existe $S_1 \subset D - \{v_1\}$, tal que S_1 es un núcleo de $D - v_1$. De forma análoga a lo anterior tenemos que hay arcos entre v_1 y S_1 , las cuales son únicamente de la forma $S_1 v_1$.

Para $i > 1$ sea $v_i \in N^-(v_{i-1}) \cap S_{i-1}$ y S_i el núcleo de $D - \{v_{i-1}\}$, por razones análogas a lo anterior entre S_i y v_i únicamente hay arcos de la forma $S_i v_i$.

Lo anterior nos genera una sucesión de vértices v_0, v_1, \dots, v_k con $v_k = v_i$ para alguna i distinta de k , pues $V(D)$ es finito, y por construcción tenemos que $(v_{i+1}, v_i) \in A(D)$ y $(v_i, v_{i+1}) \notin A(D)$ donde $v_{k+1} = v_0$, es decir el ciclo (v_0, v_1, \dots, v_k) es simple, contradiciendo la hipótesis. Por lo cual alguno de los S_i es núcleo de D . Así queda probada la proposición y por tanto el Teorema ??

□

Gracias al teorema anterior podemos encontrar una condición necesaria y suficiente para la existencia de núcleos en una clase de digráficas... Las digráficas completas.

Teorema 2.4. *Una digráfica D completa es núcleo perfecta si y sólo si cada ciclo dirigido de D tiene al menos un arco simétrico.*

Demostración. \Leftarrow) Esta parte corresponde al Teorema ?? pues es válido para cualquier digráfica D y ya fue demostrado.

\Rightarrow) Sea $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo dirigido de longitud n . Como D es núcleo perfecta entonces $D[V(\gamma)]$ tiene un núcleo S . Como cualquier subdigráfica inducida de una digráfica completa es completa, entonces $|S| = 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S = \{v_1\}$. Ya que v_1 es un núcleo, entonces para toda $i \neq \{2, \dots, n\}$ debe existir un $v_i v_1$ arco, en particular $(v_2, v_1) \in A(T)$ y (v_1, v_2) es el arco simétrico. \square

Hay otras condiciones suficientes para la existencia de núcleos en digráficas que, aunque no se usaron en el trabajo, vale la pena mencionarlos por las condiciones en sus hipótesis.

Teorema 2.5. *Una digráfica simétrica D es núcleo perfecta.*

Teorema 2.6. *Una digráfica D sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta, y su núcleo es único.*

Teorema 2.7. *Una digráfica D sin ciclos impares es núcleo perfecta.*

2.2. Núcleo por trayectorias monocromáticas

Definición 6. Decimos que una digráfica D está m -coloreada si los arcos de la digráfica D están coloreados con m colores.

Definición 7. Dada D una digráfica m -coloreada, decimos que una trayectoria dirigida en D es monocromática si todos sus arcos tienen el mismo color.

Ejemplo: En la Figura 2.2 (v_2, v_3, v_1) es una trayectoria monocromática de v_2 a v_1 , y (v_1, v_2, v_3) no es una trayectoria monocromática pues la trayectoria usa los colores rojo y azul.

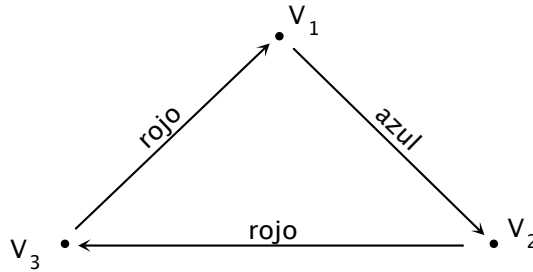


Figura 2.2: Torneo 2-coloreado de orden 3

Definición 8. Dada D una digráfica m -coloreada, decimos que una trayectoria dirigida de u a v es *cuasimonocromática* si todos los arcos de la trayectoria a excepción de a lo más uno tienen el mismo color.

Definición 9. Sea D una digráfica m -coloreada y γ un ciclo contenido en D , decimos que γ es un ciclo cuasimonocromático si todos sus arcos excepto uno tienen el mismo color.

Ejemplo: En la gráfica de la Figura 2.3, la trayectoria dirigida $T_0 = (v_5, v_1, v_2, v_3)$ que va de v_5 a v_3 es una trayectoria cuasimonocromática pues el arco (v_1, v_2) es de color azul mientras el resto son rojas. Las trayectorias dirigidas $T_1 = (v_4, v_5, v_1, v_2)$ y $T_2 = (v_5, v_1, v_2, v_3, v_4)$ **no** son trayectorias cuasimonocromáticas pues T_1 tiene dos arcos azules y dos rojas y T_2 usa tres colores.

Definición 10. Decimos que $S \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente por

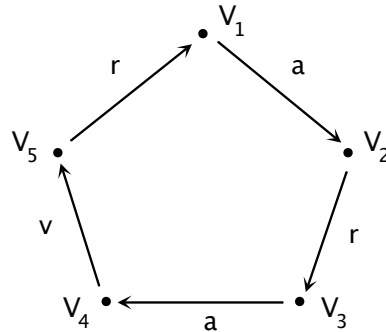


Figura 2.3: (v_2, v_3, v_4, v_5) es una trayectoria cuasimonocromática

trayectorias monocromáticas si para todo $v \in V(D)$ existe una trayectoria monocromática de v a w con $w \in S$.

Definición 11. $S \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas si para todo $v, w \in S$ **no** existe una trayectoria monocromática de v a w o de w a v .

Con la definición anterior podemos observar que si S es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas entonces S es independiente en el sentido de arcos. Lo anterior se debe a que un arco es una trayectoria de longitud 1 que sólo ocupa un color.

Definición 12. Un *núcleo por trayectorias monocromáticas de D* es un subconjunto S de $V(D)$, tal que S es absorbente e independiente por trayectorias monocromáticas.

Ejemplo: En la Figura 2.2, $S = \{v_1\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas pues es independiente, y (v_2, v_3, v_1) es una trayectoria de color rojo que pasa por todos los vértices de la digráfica.

El estudio de núcleo por trayectorias monocromáticas nace de un clásico problema propuesto por Erdős.

Problema. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿Existe un entero positivo $f(m)$ que para cualquier torneo m -coloreado contiene un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas de $f(m)$ vértices? En particular ¿ $f(3) = 3$?*

En 1982, B. Sands probó que $f(2) = 1$, es decir,

Teorema 2.8. *Sea T un torneo cuyos arcos son coloreados con dos colores. Entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier $w \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de w a v .*

De forma más general, probó la siguiente proposición:

Teorema 2.9. *Cualquier digráfica 2-coloreada tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Las proposiciones y teoremas aquí probados son el inicio de la teoría de núcleo por trayectorias monocromáticas. En México se ha trabajado por años en busca de condiciones suficientes para asegurar la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas y algunos teoremas que se obtuvieron han buscado resolver el problema planteado por Erdős.

2.3. Herramienta principal

En esta sección daremos definiciones y teoremas que resultan en la principal herramienta para demostrar que una digráfica tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Primero es importante observar la dificultad para mostrar que un conjunto de vértices es un núcleo por trayectorias monocromáticas pues se tiene que probar que no existe una trayectoria monocromática entre cualesquiera dos de ellos. Trabajar con trayectorias siempre es difícil, por ello introducimos la siguiente definición.

Definición 13. Sea D una digráfica m -coloreada. La cerradura de D es la multidigráfica $C(D)$ tal que $V(C(D)) = V(D)$ y $(u, v) \in A(C(D))$ coloreada de color i si y sólo si existe una trayectoria monocromática de color i de u a v en D .

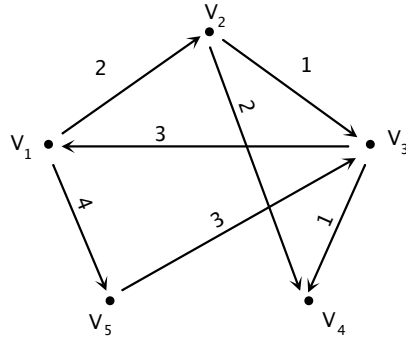


Figura 2.4: Digráfica D

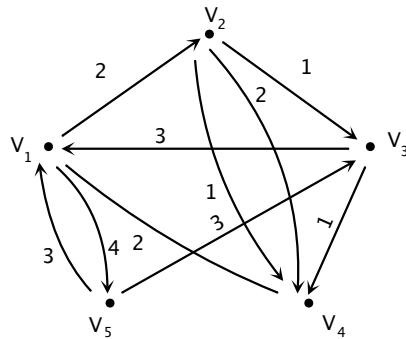


Figura 2.5: Cerradura de D

Es claro que si encontramos un núcleo por trayectorias monocromáticas en D entonces existe un núcleo en $C(D)$ y viceversa, resultando en el siguiente

teorema:

Teorema 2.10. *Sea D una digráfica m -coloreada. D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $C(D)$ tiene un núcleo.*

Trabajar en $C(D)$ resulta mucho más sencillo en el sentido que uno no necesita preocuparse por las trayectorias, sino por núcleos tradicionales y con ello utilizar los teoremas de la sección [2.1]. Ahora, si D es una digráfica completa entonces $C(D)$ también es una digráfica completa y podemos aplicar el Teorema ??, resultando en:

Teorema 2.11. *Sea D una digráfica completa m -coloreada. $C(D)$ es núcleo perfecta si y sólo si cada ciclo dirigido en $C(D)$ tiene un arco simétrico.*

El teorema anterior será de gran utilidad en capítulos posteriores pues aquellas condiciones que nos garanticen que $C(D)$ es núcleo perfecta, por el Teorema ??, nos sirven para garantizar la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas en D .

Capítulo 3

El comienzo...

3.1. Teorema de Shen Miggang

El teorema de esta sección es uno muy importante de la teoría de núcleos por trayectorias monocromáticas y por tal razón se merece un capítulo completo. Antes de enunciarlo daremos una pequeña definición.

Definición 14. En este capítulo a los dos torneos de orden 3, que son el ciclo dirigido y el torneo transitivo, cuyos arcos están pintados con tres colores los llamaremos C_3 y T_3 , respectivamente.

A continuación enunciamos el teorema de Shen Miggang, que encuentra una condición para forzar a que $f(m) = 1$. La belleza del teorema radica en la sencillez de la condición y en su prueba, la cual contiene argumentos bastante elegantes.

Teorema 3.1. *Sea T un torneo m -coloreado que no contiene T_3 's y C_3 's. Entonces existe un vértice v de T tal que para cada otro vértice x de T existe una trayectoria monocromática de x a v .*

Demostración. Probaremos el teorema por inducción sobre el orden del torneo y asumiendo que existe un torneo T , de orden n , para él cual resulta falso el teorema. Cuando $n = 1, 2$ el resultado es trivial así que supongamos que el resultado funciona para todos los torneos m -coloreados de orden menor a n , donde $n > 2$. Así que, por hipótesis de inducción, para cada vértice v de T existe otro vértice del torneo, al cual llamaremos $f(v)$, de T tal que para cada vértice x de $T - \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a $f(v)$. Otra forma de ver lo anterior es decir que T es un torneo mínimo que no cumple la condición.

Afirmación 2. Si $u \neq v$ entonces $f(u) \neq f(v)$, es decir, f es una función inyectiva.

Demostración. Supongamos que existe $u \neq v$ tal que $f(u) = f(v)$. Como $v \neq u$ entonces $v \in V(T) \setminus \{u\}$, y existe una trayectoria monocromática de v a $f(u)$ pero $f(u) = f(v)$, así que, existe una trayectoria monocromática de v a $f(v)$.

Por definición, $f(v)$ absorbe a todos los vértices de $V(T) \setminus \{v\}$ y por el párrafo anterior a v , por lo que $f(v)$ es un núcleo por trayectoria monocromáticas de T , contradiciendo nuestra suposición. \square

De la afirmación anterior, también podemos concluir que no existe una trayectoria monocromática de v a $f(v)$. En resumen, f es una biyección. Podemos renombrar los vértices del torneo de forma que $f(v_i) = v_{i+1}$.

Si continuamos iterando a f se genera una sucesión de vértices y como la cantidad de vértices es finita entonces los vértices se repiten y obtenemos una partición de los vértices en ciclos.

$$(v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{k_1}})(v_{m_1}, v_{m_2}, \dots, v_{m_{k_2}}), \dots, (v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_{k_t}})$$

donde:

$$\begin{aligned}
f(v_{l_1}) &= v_{l_2}, \dots, f(v_{l_{k_1}}) = v_{l_1} \cdot \\
f(v_{m_1}) &= v_{m_2}, \dots, f(v_{m_{k_2}}) = v_{m_1} \cdot \\
&\dots \\
f(v_{n_1}) &= v_{n_2}, \dots, f(v_{n_{k_t}}) = v_{n_1} \cdot
\end{aligned}$$

Si existe mas de un ciclo, entonces por hipotesis de induccion hay un vértice v en el conjunto $(v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{k_1}})$ tal que para cualquier otro vértice x de $(v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{k_1}})$ existe una trayectoria monocromática de x a v , contradiciendo nuestra suposicion, pues $v = f(w)$ para alguna $w \in (v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{k_1}})$, es decir el vértice anterior a v en el ciclo no es absorbido por él.

Por lo tanto, todos los vértices estan en un ciclo, a saber (v_1, v_2, \dots, v_n) . Ya que no existe una trayectoria monocromática de v_i a v_{i+1} , tenemos que $(v_{i+1}, v_i) \in A(D)$. Sea a_i el color del arco (v_{i+1}, v_i) respectivamente. Si $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1}$ entonces v_n se puede unir con v_1 con una trayectoria monocromática (v_n, \dots, v_2, v_1) de color a_1 . Esto contradice nuestra suposicion (recuerde que $f(v_n) = v_1$). Por lo anterior tenemos que existe a_s y a_{s-1} con $a_s \neq a_{s-1}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_{s-1} = 1$ y $a_s = 2$ (Véase Figura 3.1).

Como $v_{s-1} \in T - \{v_s\}$ entonces existe una trayectoria monocromática de v_{s-1} a v_{s+1} de un color b . Es facil ver que $b \neq 1$ y $b \neq 2$ ya que de lo contrario podemos unir a v_s con v_{s+1} con una trayectoria monocromática de color 1 o a v_{s-1} con v_s con una trayectoria monocromática de color 2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b = 3$. Sea u_1, u_2, \dots, u_t la trayectoria mas corta de v_{s-1} a v_{s+1} con color 3, donde $u_1 = v_{s-1}$ y $u_t = v_{s+1}$ (Véase Figura 3.2).

Denotemos a b_i el color del arco entre v_s y u_i , para $1 < i < t$. b_i no puede ser 3 pues de lo contrario podemos unir a v_{s-1} con v_s o v_s con v_{s+1} con una trayectoria monocromática de color 3. Como los arcos $\{v_s, u_1\}$ y $\{u_t, v_s\}$ tienen distintos colores entonces existe $i \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$ tal que los

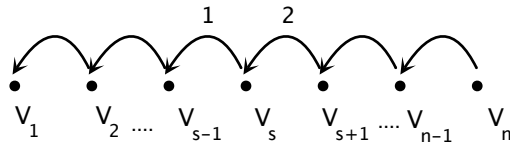


Figura 3.1: Arcos consecutivos cuyos colores son distintos

arcos $\{v_s, u_i\}$ y $\{v_s, u_{i+1}\}$ tienen colores distintos. Así que $v_s u_i u_{i+1}$ es un triángulo con tres colores distintos, contradiciendo nuestra hipótesis. ■

□

Corolario 3.2. Sea T un torneo 2-coloreado. Entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice de T existe una trayectoria monocromática de x a v .

Corolario 3.3. Supongamos que T, H_1, H_2, \dots, H_n son torneos m -coloreados sin triángulos 3-coloreados donde $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sea T^* el torneo formado por reemplazar cada vértice v_i de T con H_i y dejando todas los arcos entre H_i y H_j del mismo color como el arco entre v_i y v_j pero con direcciones arbitrarias. Entonces T^* contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T^* existe una trayectoria monocromática de x a v .

Demostración. Es claro que para cualesquiera tres vértices v_i, v_j, v_k los triángulos $v_i v_j v_k$ no pueden ser triángulos 3-coloreados. Así que tenemos las hipótesis del Teorema ?? y el corolario es verdadero. □

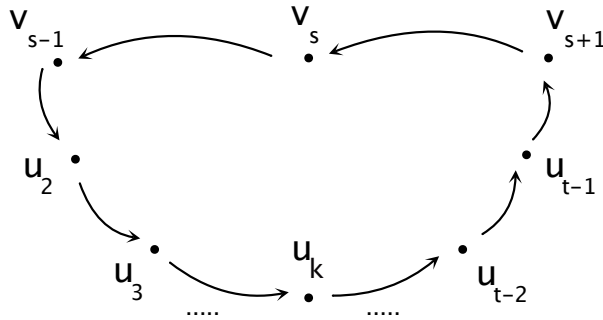


Figura 3.2:

Si en el teorema de Shen Miggang omitimos a T_3 , el resultado falla. Por ejemplo el torneo G_5 de la Figura 3.3 es 5-coloreado, de orden 5 y no contiene 3-ciclos 3-coloreados. Pero G_5 no contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de G_5 existe una trayectoria monocromática de x a v . De hecho, v_{i+1} no puede unirse a v_i via una trayectoria monocromática.

Para construir ejemplos mas grandes con $m = 5$ basta agregarle vértices uno por uno a G_5 , conectando cada vértice nuevo a los vértices previos por un arco coloreado con 1.

Similarmente, si insistimos en quitarle la condición de C_3 en el teorema de Shen Miggang, el resultado no es cierto. Por ejemplo, sea D_n el torneo 4-coloreado con vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que los arcos (v_1, v_2) , (v_2, v_3) y (v_3, v_1) son coloreados con color 1, 2 y 3 respectivamente, y todas las demás arcos son coloreados de color 4 y dirigidas como (v_i, v_j) , si $i > j$ (véase Figura 3.4). Obviamente D_n es un torneo 4-coloreado. Además, cualquier subtorneo transitivo de orden tres ocupa al menos un vértice que no es v_1, v_2 ó v_3 , con lo cual tiene al menos dos arcos pintados del color 4, y la digráfica es un torneo sin T_3 . Para ver que D_n no tiene un núcleo por trayectorias

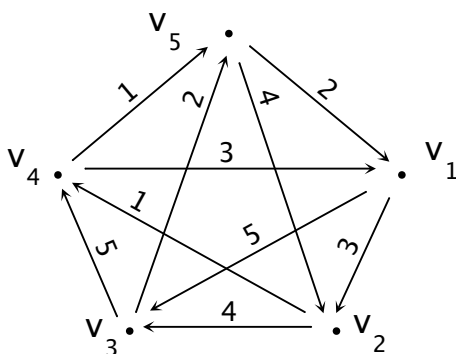


Figura 3.3: Contraejemplo si omitimos T_3

monocromáticas primero observemos que no existe una trayectoria dirigida de v_1 a v_m con $m \geq 4$, con lo cual, los únicos posibles candidatos para ser núcleos son v_1, v_2 y v_3 , pero v_i no absorbe a v_{i+1} (módulo 3), pues la única trayectoria que los une está conformada con dos arcos de distinto color.

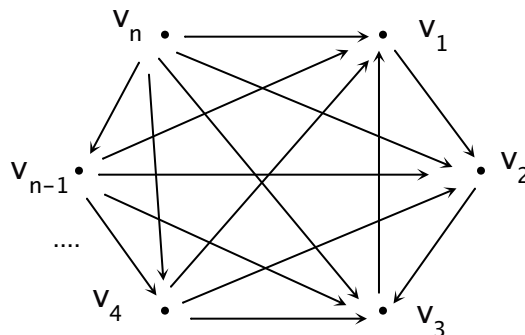


Figura 3.4: Contraejemplo si omitimos C_3

Así que si $m \geq 5$, la condición en el teorema “que no contiene T_3 , o C_3 ” no puede ser mejorada. En un sentido general el resultado principal es el mejor

resultado. Para los casos $m = 3$, no se ha encontrado un contraejemplo, así que el problema mencionado en el principio sigue abierto.

3.2. Generalizando a Shen Miggang

La sección anterior finalizó con algunos ejemplos los cuales mostraban que, en cierto sentido, el teorema demostrado por Shen Miggang es el mejor resultado posible cuando $m \geq 5$. Para $m = 4$ en el 2002 Hortensia Galeana dio un contraejemplo y mostró que el resultado también fallaba cuando omitimos la condición de “no contiene a C_3 ”. Ilustraremos el contraejemplo en un capítulo posterior.

De este modo, surge otra pregunta: ¿Podemos cambiar las condiciones en el teorema de Shen Miggang?. En esta sección se mostrarán algunos resultados que comparten alguna condición de Shen Miggang pero que no son equivalentes, cuando a simple vista uno puede sospechar que son condiciones más débiles.

Sin más preámbulo presentaremos el siguiente teorema:

Teorema 3.4. *Sea T un torneo m -coloreado. Si cada ciclo dirigido contenido en T de longitud a lo más 4 es un ciclo cuasimonocromático entonces $\mathcal{C}(T)$ es núcleo-perfecta.*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción. Supongamos que $\mathcal{C}(T)$ no es núcleo perfecta. Se sigue del Teorema ?? que existe un ciclo dirigido γ contenido en $Asym(\mathcal{C}(T))$.

Sea $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$ el ciclo dirigido de longitud mínima m contenido en $Asym(\mathcal{C}(T))$. Ahora haremos una serie de afirmaciones sobre el ciclo γ .

Afirmación 3. *γ está totalmente contenido en T .*

Si para alguna $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ se tiene que $(v_i, v_{i+1}) \notin A(T)$, como T es un torneo entonces $(v_{i+1}, v_i) \in A(T)$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 4. $l(\gamma) \geq 5$.

Supongamos que $l(\gamma) \leq 4$. La hipótesis nos asegura que γ es cuasimonocromático y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (v_0, v_1) es el arco con distinto color. Entonces $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_0)$ es una trayectoria monocromática de v_1 a v_0 por lo que $(v_1, v_0) \in \mathcal{C}(T)$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 5. γ no es monocromático.

Supongamos que γ es un ciclo dirigido monocromático. Entonces (v_1, \dots, v_0) es una trayectoria monocromática de v_1 a v_0 y $(v_1, v_0) \in A(T)$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 6. Para $v_i \in V(\gamma)$, $\{(v_i, v_j), (v_j, v_i)\} \subseteq A(\mathcal{C}(T))$ con $j \neq i - 1, i + 1$.

Sea $v_i, v_j \in V(T)$ tal que $j \neq i + 1, i - 1$. Como T es un torneo entonces $(v_i, v_j) \in A(T)$ ó $(v_j, v_i) \in A(T)$. Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que $i < j$ y $(v_i, v_j) \in A(T)$. Entonces el ciclo dirigido $\gamma' = (v_i, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, v_i)$ tiene longitud menor que m . Se sigue de la definición de γ que γ' tiene un arco simétrico en $\mathcal{C}(T)$. Así que, $(v_i, v_j) \in \text{Sym } \mathcal{C}(T)$. \square

Ya que γ no es monocromático, existen dos arcos consecutivos de γ con diferente color. Sin pérdida de generalidad el arco (v_0, v_1) es rojo y el arco (v_1, v_2) es azul.

Si suponemos que $(v_2, v_0) \in A(T)$ entonces (v_0, v_1, v_2, v_0) es un ciclo dirigido de longitud 3 cuasimonocromático. Como (v_0, v_1) y (v_1, v_2) están pintados

de rojo y azul respectivamente, entonces (v_2, v_0) está pintado de color rojo o azul. Si (v_2, v_0) es azul entonces (v_1, v_2, v_0) es una trayectoria dirigida de color azul de v_1 a v_0 y si (v_2, v_0) es roja entonces (v_2, v_0, v_1) es una trayectoria dirigida de color rojo de v_2 a v_0 , ambas contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Así que $(v_2, v_0) \notin A(T)$, pero la Afirmación ?? nos dice que $(v_2, v_0) \in \mathcal{C}(T)$, la combinación de ambas nos asegura que existe una trayectoria dirigida monocromática $\alpha = (v_2 = z_0, z_1, \dots, z_p = v_0)$ cuya longitud es mayor a 2.

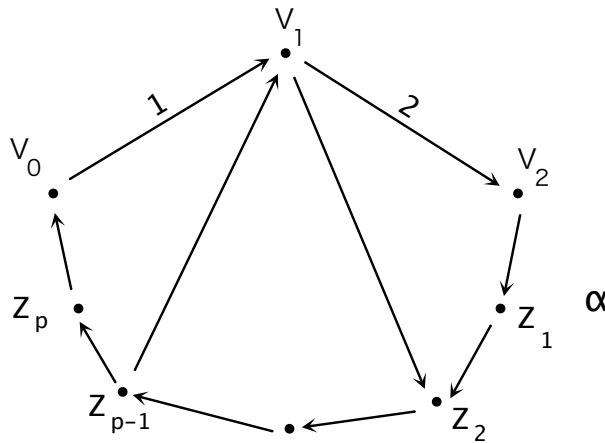


Figura 3.5: La trayectoria α

Afirmación 7. α no es azul.

Si α es azul entonces $(v_1, v_2) \cup \alpha$ es una trayectoria monocromática v_1 a v_2 contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 8. α no es rojo.

Si α es rojo entonces $\alpha \cup (v_0, v_1)$ es una trayectoria monocromática de v_2 a v_1 contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Así que podemos decir que α es de

color negro. □

Afirmación 9. Para cada $i \geq 0$ tal que $2i < p$, $(v_1, z_{2i}) \in A(T)$.

Supongamos que existe $i \geq 0$ tal que $(v_1, z_{2i}) \notin A(T)$. Sea i_0 el mínimo índice que cumple la suposición, es decir, $(v_1, z_{2i_0}) \notin A(T)$. Como T es un torneo entonces $(z_{2i_0}, v_1) \in A(T)$. Como $(v_1, v_2) \in A(T)$ entonces $2i_0 \geq 2$ y $(v_1, z_{2i_0-2}) \in A(T)$ por la elección de i_0 . □

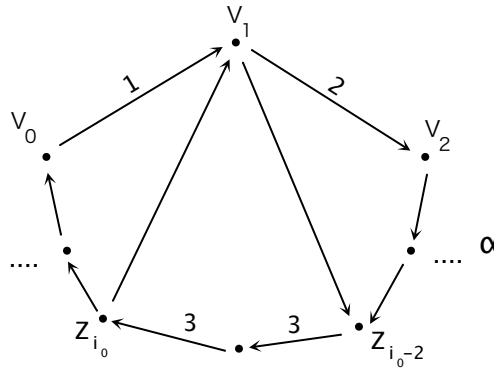


Figura 3.6: Índice i_0

Entonces $\gamma_4 = (v_1, z_{2i_0-2}, z_{2i_0-1}, z_{2i_0}, v_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 cuasimonocromático con (z_{2i_0-2}, z_{2i_0-1}) y (z_{2i_0-1}, z_{2i_0}) arcos de color negro, por lo que (v_1, z_{2i_0-2}) ó (z_{2i_0}, v_1) son de color negro.

Si (v_1, z_{2i_0-2}) es de color negro entonces

$$(v_1, z_{2i_0-2}) \cup (z_{2i_0-2}, z_{2i_0-1}, z_{2i_0}, \dots, z_p = v_0)$$

es una trayectoria monocromática de v_1 a v_0 , contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Si (z_{2i_0}, v_1) tiene color negro entonces $(z_0, z_1, \dots, z_{2i_0}) \cup (z_{2i_0}, v_1)$ es una trayectoria monocromática de v_2 a v_1 (recuerde que $v_2 = z_0$) contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. □

Para finalizar la demostración del teorema analizaremos los casos cuando p es par o impar.

Caso 1: p es par.

Es este caso $p-2$ también es par y ya que $p \geq 2$ tenemos que $p-2 \geq 0$. Por las afirmaciones antes demostradas tenemos que $\gamma_4 = (v_1, z_{p-2}, z_{p-1}, z_p = v_0, v_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 cuasimonocromático con dos arcos de color negro (las que pertenecen a α), con lo cual (v_1, z_{p-2}) ó (v_0, v_1) tiene color negro. Ya que (v_0, v_1) tiene color rojo la única posibilidad es que (v_1, z_{p-2}) sea negra y consecuentemente $(v_1, z_{p-2}, z_{p-1}, z_p = v_0)$ es una trayectoria monocromática de v_1 a v_0 , contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$.

Caso 2: p es impar.

Afirmación 10. *Si p es impar entonces para cada $i \geq 0$ tal que $1 \leq 2i+1 \leq p$, $(z_{2i+1}, v_1) \in A(T)$.*

Sea q el índice mas grande tal que $1 \leq 2q+1 \leq p$ y $(z_{2q+1}, v_1) \notin A(T)$. Ya que p es impar y $(z_p, v_1) \in A(T)$ entonces $2q+1 < p$. Así que $(z_{2q+3}, v_1) \in A(T)$ y como T es un torneo entonces $(v_1, z_{2q+1}) \in A(T)$. \square

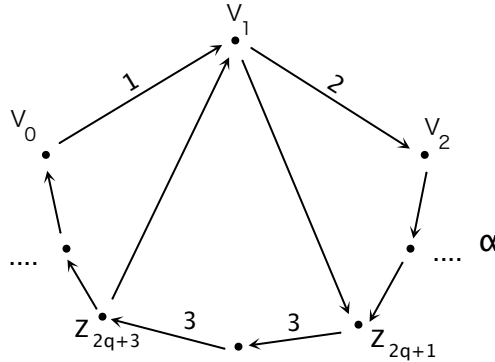


Figura 3.7: Índice $2q+1$

Del párrafo anterior se tiene que $(v_1, z_{2q+1}, z_{2q+2}, z_{2q+3}, v_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 cuasimonocromático con dos arcos negros, por lo que (v_1, z_{2q+1}) ó (z_{2q+3}, v_1) es de color negro. Si (v_1, z_{2q+1}) es de color negro entonces $(v_1, z_{2q+1}) \cup (z_{2q+1}, z_{2q+2}, \dots, z_p = v_0)$ es una trayectoria monocromática de color negro de v_1 a v_0 , contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Si (z_{2q+3}, v_1) es de color negro entonces $(v_2 = z_0, z_1, \dots, z_{2q+3}) \cup (z_{2q+3}, v_1)$ es una trayectoria monocromática de v_2 a v_1 y $(v_2, v_1) \in \mathcal{C}(T)$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$.

Afirmación 11. *Si p es impar entonces (z_1, v_1) tiene color azul.*

De la Afirmación ?? tenemos que $(z_1, v_1) \in A(T)$, así que $\gamma_3 = (v_1, v_2 = z_0, z_1, v_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 cuasimonocromático. Como (v_1, v_2) es azul y (z_0, z_1) es negro entonces (z_1, v_1) es de color negro o azul. Si (z_1, v_1) es negra entonces $(v_2 = z_0, z_1, v_1)$ es una trayectoria monocromática de v_2 a v_1 , por lo que $(v_2, v_1) \in A(\mathcal{C}(T))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Así que (z_1, v_1) es azul. \square

Afirmación 12. *Si p es impar entonces (v_1, z_{p-1}) tiene color rojo.*

Ya que p es impar, entonces $p - 1$ es par y la Afirmación ?? implica que $(v_1, z_{p-1}) \in A(T)$. De modo que $\gamma_3 = (v_1, z_{p-1}, z_p = v_0, v_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 y la hipótesis nos dice que γ_3 es cuasimonocromático. Ya que (z_{p-1}, z_p) es de color negro y (v_0, v_1) tiene color rojo, se sigue que (v_1, z_{p-1}) tiene color negro o rojo. Si (v_1, z_{p-1}) es negra entonces $(v_1, z_{p-1}, z_p = v_0)$ es una trayectoria monocromática de v_1 a v_0 , contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Concluiremos la prueba del teorema considerando los siguientes subcasos:

Subcaso 2.1: $(z_1, z_p) \in A(T)$. En este caso $\gamma_4 = (v_0, v_1, v_2 = z_0, z_1, z_p = v_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, con un arco de color azul, rojo y negro. Contradiendo la hipótesis.

Subcaso 2.2: $(z_p, z_1) \in A(T)$. En este caso $\gamma_4 = (z_1, v_1, z_{p-1}, z_p, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 policromático, contradiciendo la hipótesis.

Antes de continuar, introduciremos la definición de $\mathcal{C}(D)$ -monocromática. Esto nos servirá para presentar un resultado interesante.

Definición 15. Sea D una digráfica m -coloreada y $\gamma_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo dirigido de longitud n contenido en D . Decimos que γ_n es $\mathcal{C}(D)$ -monocromática si existe un subconjunto de $A(\mathcal{C}(D))$ tal que (v_i, v_{i+1}) para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tienen el mismo color.

Para ejemplificar el concepto de $\mathcal{C}(D)$ -monocromática contamos con el ejemplo de la Figura 3.8. $\gamma_3 = (v_2, v_4, v_6)$ es un ciclo que es $\mathcal{C}(D)$ -monocromático, pues en su cerradura podemos encontrar (v_6, v_2) , (v_2, v_4) y (v_4, v_6) arcos pintados de color 1. En realidad el concepto de que un ciclo γ_n es $\mathcal{C}(D)$ -monocromático, es que el ciclo en la cerradura está contenido en una digráfica completa. El ejemplo 3.8 no ilustra este concepto pues la gráfica de la derecha es solo parte de la cerradura, pero si uno termina de llenar la digráfica uno puede darse cuenta de que esta forma de ver el concepto no es falsa.

Teorema 3.5. *Sea T un torneo m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es un ciclo monocromático, entonces $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Probaremos que cualquier ciclo dirigido de longitud 4 es cuasimonocromático y el resultado es inmediato del teorema anterior.

Sea $\gamma_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ un ciclo dirigido de longitud 4, no monocromático. Como T es un torneo entonces $(v_1, v_3) \in A(T)$ ó $(v_3, v_1) \in A(T)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(v_1, v_3) \in A(T)$ y se sigue que (v_3, v_4, v_1, v_3) es un ciclo dirigido de longitud 3 monocromático, por lo que (v_3, v_4) y (v_4, v_1) tienen el mismo color.

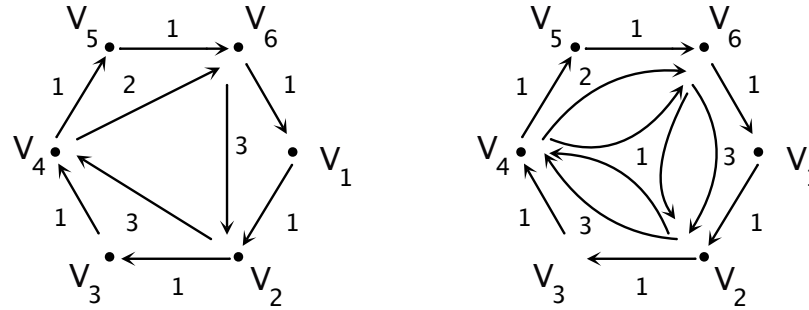


Figura 3.8: Digráfica D y parte de su cerradura (derecha)

Por otro lado, al menos (v_4, v_2) ó (v_2, v_4) es un arco de T y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(v_2, v_4) \in A(T)$, de modo que $\gamma_3 = (v_4, v_1, v_2, v_4)$ es un ciclo dirigido monocromático y (v_4, v_1) , (v_1, v_2) tienen el mismo color.

Por lo tanto, $(v_3, v_4), (v_4, v_1)$ y (v_1, v_2) tienen el mismo color y γ_4 es cuasi-monocromático. □

Teorema 3.6. *Sea T un torneo m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es $\mathcal{C}(T)$ -monocromático, entonces $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Por el Teorema ?? basta demostrar que cualquier ciclo dirigido de longitud k contenido en $\mathcal{C}(T)$ tiene un arco simétrico.

Sea $\gamma_k = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ un ciclo dirigido de longitud k y supongamos que $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$. Luego $\gamma \subseteq T$ y sea $q = \max\{i \in \mathbb{N} \mid (v_1, v_i) \in A(T)\}$. Como $(v_k, v_1) \in A(T)$ entonces $q < k$ y $(v_{q+1}, v_1) \in A(T)$.

Por lo tanto $\gamma_3 = (v_1, v_q, v_{q+1}, v_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 $\mathcal{C}(T)$ -monocromático, lo cuál implica que $\gamma_3 \subseteq \text{Sym}(\mathcal{C}(T))$, es decir (v_q, v_{q+1}) es un arco simétrico. \square

En 1998 se obtiene algo más general respecto a los teoremas anteriores

Definición 16. Sea D una digráfica m -coloreada. Decimos que un arco $(x, y) \in A(D)$ está obligado si **no** existe una trayectoria monocromática de y a x . Al conjunto de arcos obligados de la digráfica D lo denotaremos como $F(D)$ y $F_i(D)$ como el conjunto de arcos obligados de color i de la digráfica D .

Definición 17. Sea D una digráfica m -coloreada. Definimos la digráfica subyacente de D como $\tilde{D} = [V, F(D)]$, es decir \tilde{D} es la digráfica inducida por $F(D)$.

Ejemplo:

En la Figura 3.9 anterior el arco (v_1, v_4) no es obligado puesto que (v_4, v_5, v_1) es una trayectoria dirigida de color 1 y el arco (v_4, v_5) es obligado pues (v_5, v_1, v_4) es la única trayectoria dirigida y no es monocromática.

A continuación demostraremos ciertas proposiciones relacionadas con el concepto de arcos obligados.

Proposición 3.7. Sea T un torneo m -coloreado. T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas sí y sólo sí $\delta_T^+(x) = 0$ para alguna $x \in V(T)$, donde $\delta_T^+(x)$ es el ex-grado del vértice x .

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que T tiene un núcleo S por trayectorias monocromáticas. Como T es un torneo entonces $S = \{x\}$ para alguna $x \in V(T)$. Veamos que $\delta_T^+(x) = 0$. Si existe un arco obligado de la forma (x, y) con $y \in V(T)$, por definición no existe una trayectoria monocromática de y a x , contradiciendo que x es un núcleo de T .

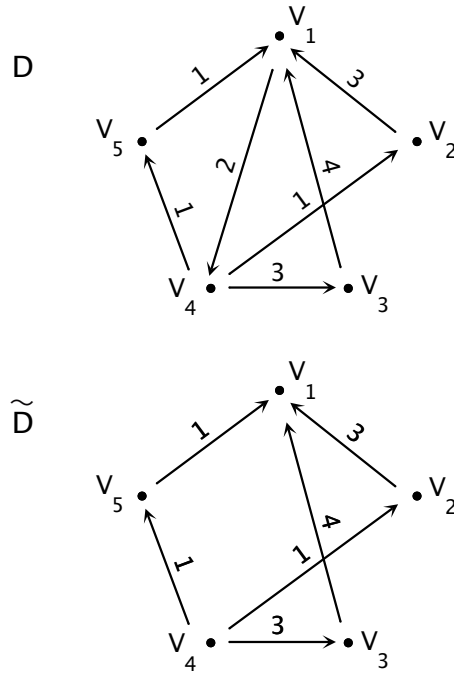


Figura 3.9: Digráfica D y su digráfica subyacente.

\Leftrightarrow) Sea $x \in V(T)$ tal que $\delta_T^+(x) = 0$ y $S = \{x\}$. Sea $y \in V(T) \setminus \{x\}$. Como T es un torneo y $\delta_T^+(x) = 0$ entonces el arco (x, y) no es obligado y por definición existe una trayectoria monocromática de y a x , lo cual implica que S es un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Proposición 3.8. *Sea \tilde{T} la digráfica subyacente de un torneo T . Si \tilde{T} es acíclica entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas*

Demostración. Supongamos que T no tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Por la proposición anterior $\delta_T^+(v) \neq 0$ para todo $v \in V(T)$.

Ahora construiremos una sucesión de la siguiente forma: sea v_0 un vértice arbitrario, por la observación anterior existe $v_1 \in V(T)$ tal que (v_0, v_1) es un arco obligado, de forma análoga existe $v_2 \in V(D)$ tal que (v_1, v_2) es un arco obligado. Continuando obtenemos una sucesión v_0, v_1, v_2, \dots tal que (v_i, v_{i+1}) es un arco obligado. Como T es finito entonces en algún momento se repite un vértice, así que podemos obtener un ciclo γ y como todos los arcos son obligados entonces $\gamma \subseteq F(D)$, contradiciendo que \tilde{T} es acíclica. Por lo que T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Definición 18. Sea D una digráfica k -coloreada. Decimos que D es *semitransitiva* si para $x, y, z \in V(D)$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ con $i \neq j$ tal que $(x, y) \in A_i(D)$ y $(y, z) \in A_j(D)$ se tiene que $(x, z) \in A(D)$. *Observación:* Si permitimos que $i = j$ entonces hablamos de transitividad.

Ejemplo: La gráfica de la Figura 3.10 es semitransitiva pues (v_1, v_2) es un arco, aunque se puede pensar que falta el arco (v_4, v_3) . Es necesario recalcar que en la definición no se permiten comparar arcos con el mismo color.

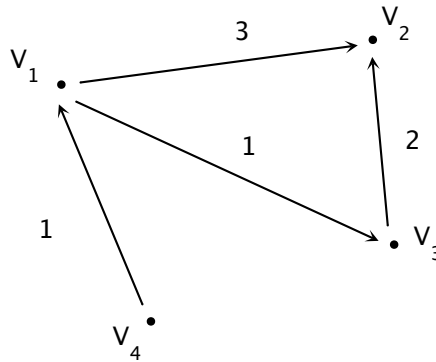


Figura 3.10: Digráfica semitransitiva pero no transitiva

De alguna forma se busca generalizar los Teoremas ?? y ??, y así fue como

Robert Woodrow, Pierre Ille y Gena Hahn propusieron en [2] la definición de la hipótesis \mathcal{H}_s .

Definición 19. Se define la hipótesis \mathcal{H}_s como sigue:

- (i) Para $s = 3$, \mathcal{H}_s corresponde a las hipótesis del Teorema de Shen-Miggang
- (ii) Para $s \geq 4$, \mathcal{H}_s es que cualquier ciclo de longitud s es cuasimonocromático y cualquier ciclo de longitud menor a s usa solo dos colores.

Ahora, el siguiente Teorema liga la hipótesis \mathcal{H}_s con la definición de semitransitiva.

Teorema 3.9. *Sea T un torneo k -coloreado que satisface \mathcal{H}_s para $s \geq 3$, entonces \tilde{T} es semitransitiva.*

Demostración. Dados i, j colores distintos y vértices x, y, z con $(x, y) \in F_i(D)$ y $(y, z) \in F_j(D)$, como T es un torneo, es suficiente demostrar que no existe una trayectoria monocromática de z a x . Así que, supongamos lo contrario y sea $W = (z = z_0, z_1, \dots, z_n = x)$ una trayectoria monocromática de color k . Si $k = i$ entonces $W \cup (x, y)$ es una trayectoria monocromática de z a y , contradiciendo que el arco (y, z) es obligado. Si $k = j$, $(y, z) \cup W$ es una trayectoria monocromática, contradiciendo que (x, y) es obligado, por lo cual $k \neq i, j$. Además, si el arco entre y y z_l con $1 \leq l \leq n$ está pintado de color k entonces $(z_0, z_1, \dots, z_l, y)$ es una trayectoria monocromática de z a y ó $(y, z_l, z_{l+1}, \dots, z_n = x)$ es una trayectoria monocromática de y a x , contradiciendo que los arcos son obligados. Por otro lado, como $(x, y, z = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = x)$ es un ciclo policromático entonces $n + 2 \geq s + 1$ y $n \geq s - 1$.

Primero supongamos que T cumple \mathcal{H}_s para $s = 3$. Sea $m = \max\{t \in \mathbb{N} \mid \text{el arco entre } y \text{ y } z_t \text{ tiene color } j\}$, tal m está bien definida pues (y, z_0)

tiene color j . Como no hay **torneos** de tamaño 3 policromáticos entonces el arco entre y y z_{m+1} tiene color k ó j y ya vimos que no puede ser de color k . Esto contradice la maximalidad de m , así que no existe una trayectoria monocromática de z a x y $(x, z) \in F(T)$, la idea es similar a la usada para demostrar el Teorema de Shen-Miggang.

Ahora supongamos que T satisface \mathcal{H}_s para $s \geq 4$ y probemos la siguiente afirmación.

Afirmación 13. *Si $(y, z_l) \in A(T)$ entonces $(y, z_{l+s-2}) \in A(T)$ para $l \in \{0, 1, \dots, n - s + 2\}$*

Supongamos lo contrario, que $(z_{l+s-2}, y), (y, z_l) \in A(T)$ entonces el ciclo dirigido $\gamma = (z_l, z_{l+1}, \dots, z_{l+s-2}, y, z_l)$ de longitud s es cuasimonocromático y como γ tiene al menos dos arcos de color k (pues $s - 2 \geq 2$) entonces (z_{l+s-2}, y) ó (y, z_l) tiene color k y ya vimos que eso no es posible. \square

La Afirmación ?? y el hecho de que $(y, z_0) \in A(T)$ implican que $(y, z_l) \in A(T)$ para $l \equiv 0 \pmod{s-2}$. Como $(z_n, y) \in A(T)$ entonces $n \not\equiv 0 \pmod{s-2}$ por lo que existen r, t enteros tales que $n = r + t(s-2)$ con $0 < r < s-2$ y ya que $(z_n, y) \in A(T)$ entonces $(z_l, y) \in A(T)$ para cada $l \equiv r \pmod{s-2}$.

Por lo anterior, $(z_0, z_1, \dots, z_r, y, z_0)$ es un ciclo de longitud $r + 2 < s$, así que no es policromático y (z_r, y) tiene color j . De forma similar si consideramos el ciclo $(z_{t(s-2)}, \dots, z_{r+t(s-2)}, y, z_{t(s-2)})$ obtenemos que $(y, z_{t(s-2)})$ tiene color i .

Finalmente, si (z_r, z_n) es un arco de la T (resp. $(z_n, z_r) \in A(T)$), entonces $(z_0, z_1, \dots, z_r, z_n, y, z_0)$ (resp. $(z_{t(s-2)}, \dots, z_n, z_r, y, z_{t(s-2)})$) es un ciclo de longitud $r + 2 < s$ policromático, contradiciendo la hipótesis \mathcal{H}_s . Por lo tanto no existe una trayectoria monocromática de z a x y $(x, z) \in F(D)$. \square

Teorema 3.10. *Sea T un torneo k -coloreado. Si \tilde{T} es semitransitiva entonces \tilde{T} es acíclica.*

Demostración. Supongamos que la implicación no se cumple y sea $\gamma = (u_0, \dots, u_m, u_0)$ un ciclo de longitud mínima contenido en \tilde{T} , en particular, γ también está contenido en T y por tanto coloreado. Si γ no es un ciclo monocromático entonces existen dos arcos consecutivos con distinto color, digamos (u_0, u_1) y (u_1, u_2) . Por ser T semitransitivo entonces (u_0, u_2) es un arco de T y podemos reducir el ciclo γ , llegando a una contradicción.

Por otro lado, si γ es un ciclo monocromático entonces $(u_1, u_2, \dots, u_m, u_0)$ es una trayectoria monocromática de u_1 a u_0 , contradiciendo que (u_0, u_1) es un arco obligado. \square

Capítulo 4

Otras condiciones necesarias

4.1. Colores incidentes en cada vértice

En el capítulo anterior las condiciones suficientes para encontrar un núcleo por trayectorias monocromáticas en los torneos se basan en las formas de pintar los ciclos o subtorneos de cierto orden. De forma más general, en el tipo de coloración del torneo. Por otro lado, nos podemos preguntar si existe alguna condición que sea más local, es decir, donde no tengamos que analizar la digráfica en su totalidad, que de cierta forma es un poco tedioso. En el 2005 Hortensia Galeana y Rocío Rojas presentaron algunos resultados relacionados con este tipo de condiciones.

Comenzaremos la sección con una definición que es primordial en el capítulo.

Definición 20. Dada un vértice v de una digráfica D , definimos a $\xi(v)$ como el conjunto de colores de los arcos que tienen a v como un extremo y $|\xi(v)|$ como la cardinalidad del conjunto.

Definición 21. Decimos que un arco en la digráfica es un uv arco si empieza en u y termina en v .

Ejemplo:

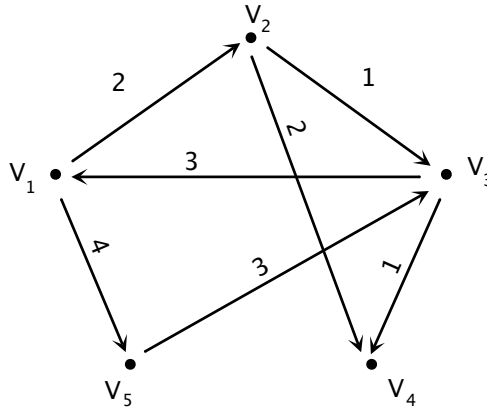


Figura 4.1: $\xi(v_1) = \{2, 3, 4\}$, $\xi(v_2) = \{1, 2\}$ y $\xi(v_3) = \{1, 2, 3\}$

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección y de él se desprenderán algunas proposiciones que se enunciarán más adelante.

Teorema 4.1. *Sea T un torneo 3-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es cuasimonocromático y para $v \in V(T)$ tenemos que $|\xi(v)| \leq 2$. Entonces $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que T es un torneo 3-coloreado con colores 1, 2 y 3. Primero observemos que si $v \in V(T)$ con $|\xi(v)| \leq 2$, entonces el conjunto de colores asignados a los arcos, con v como un extremo, en $\mathcal{C}(T)$ también tiene cardinalidad a lo más 2.

Probaremos que cada ciclo dirigido contenido en $\mathcal{C}(T)$ tiene un arco simétrico y el resultado es inmediato por el Teorema ??.

Sea γ_n un ciclo dirigido de longitud n . Si $\gamma_n \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$ entonces $\gamma_n \subseteq T$, de lo contrario existen $u, v \in V(\gamma_n)$ tales que $(u, v) \in A(\gamma)$ y $(u, v) \notin A(T)$, pero T es un torneo así que $(v, u) \in T$ y $(v, u) \in \mathcal{C}(T)$, contradiciendo que (u, v) era asimétrico.

Probaremos el resultado por inducción sobre la longitud del ciclo. Supongamos que $\gamma_3 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 tal que $\gamma_3 \subseteq \text{Asym}\mathcal{C}(T)$. Por argumentos ya mencionados $\gamma_3 \subseteq T$ y por la hipótesis tenemos que γ_3 es cuasimonocromático. Sin pérdida de generalidad supongamos que (v_0, v_1) es el arco con distinto color, con lo cual (v_1, v_2, v_0) es una trayectoria monocromática de v_1 a v_0 y (v_0, v_1) es un arco simétrico, contradiciendo que $\gamma_3 \subseteq \text{Asym}\mathcal{C}(T)$.

Supongamos que cualquier ciclo de longitud a lo más n tiene un arco simétrico. Ahora sea $\gamma_{n+1} = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ un ciclo de longitud $n + 1$. Probaremos que γ_{n+1} tiene un arco simétrico por contradicción. Por la antes demostrado $\gamma_{n+1} \subseteq T$.

A continuación demostraremos algunas afirmaciones sobre γ_{n+1} .

Afirmación 14. γ_{n+1} no es monocromático.

Si γ_{n+1} es monocromático, para cualesquiera dos vértices consecutivos existen dos trayectorias monocromáticas: El arco que los une y aquella que va de v_{i+1} a v_i recorriendo el resto de γ_{n+1} . Por tanto $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Sym } A(\mathcal{C}(T))$, contradiciendo la elección de γ_{n+1} . \square

Afirmación 15. Para $v_i, v_j \in V(\gamma_{n+1})$ tales que $j \neq i - 1, i + 1$ tenemos que $(v_i, v_j), (v_j, v_i) \in A(\mathcal{C}(T))$.

Como T es un torneo entonces (v_i, v_j) ó (v_j, v_i) es un arco de T , sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$ y $(v_j, v_i) \in A(T)$, entonces $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j) \cup (v_j, v_i)$ es un ciclo dirigido de longitud menor que $n + 1$ que por la hipótesis de inducción tal ciclo tiene un arco simétrico.

Ya que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j) \subseteq \gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$ entonces (v_j, v_i) es el arco simétrico del ciclo en $\mathcal{C}(T)$ y tenemos el resultado. \square

Afirmación 16. *Sea $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Si $(v_{i-1}, v_i) \in A(\mathcal{C}(T))$ tiene color a y $(v_i, v_{i+1}) \in A(\mathcal{C}(T))$ tiene color b , entonces todas las trayectorias monocromáticas de v_{i-1} a v_{i+1} y de v_{i+1} a v_{i-1} tienen color $c \neq a, b$.*

Por la Afirmación ?? $\{(v_{i+1}, v_{i-1}), (v_{i-1}, v_{i+1})\} \subseteq A(\mathcal{C}(T))$, por lo que existe una trayectoria monocromática T de v_{i+1} a v_{i-1} , digamos de color c . Si $c = a$ entonces $T \cup (v_{i-1}, v_i)$ es una trayectoria monocromática de color a de v_{i+1} a v_i y $(v_{i+1}, v_i) \in A(\mathcal{C}(T))$, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Si $c = b$ entonces $(v_i, v_{i+1}) \cup T$ es una $v_i v_{i-1}$ trayectoria monocromática y $(v_i, v_{i-1}) \in A(\mathcal{C}(T))$, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Por lo tanto, $c \neq a, b$. \square

Lo anterior y ya que $\xi(v) \leq 2$ nos dice que $\xi(v_i) = \{a, b\}$, $\xi(v_{i-1}) = \{a, c\}$ y $\xi(v_{i+1}) = \{b, c\}$, por lo que toda trayectoria entre v_{i-1} y v_{i+1} es de color $\xi(v_{i-1}) \cap \xi(v_{i+1}) = \{c\}$. \square

En resumen las afirmaciones ??, ?? y ?? nos dicen lo siguiente: Existen un par de arcos consecutivos (v_{i-1}, v_i) y (v_i, v_{i+1}) con distinto color, digamos 1 y 2, tal que todos los arcos entre v_{i-1} y v_{i+1} en $\mathcal{C}(T)$ son de color 3. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i = 0$, es decir, $i-1 = n$ e $i+1 = 1$. Además tenemos que $\xi(v_n) = \{1, 3\}$, $\xi(v_0) = \{1, 2\}$ y $\xi(v_1) = \{2, 3\}$.

Para continuar con la demostración vamos a considerar la forma en que está coloreado el arco (v_1, v_2) , que por lo mencionado en el párrafo anterior tenemos dos casos:

Caso 1: $(v_1, v_2) \in A(T)$ tiene color 3.

Definimos:

$$p = \min\{j \in \{2, \dots, n\} \mid \text{no existe } v_j v_{j+1} \text{ arco de color 3 en } \mathcal{C}(T)\}.$$

Notemos que p está bien definido pues $\xi(v_0) = \{1, 2\}$. A continuación demostraremos las siguientes propiedades sobre la elección de p .

Afirmación 17. *Existe un $v_i v_j$ arco de color 3 en $\mathcal{C}(T)$ con $1 \leq i < j \leq p$.*

Como $i, j \leq p$ entonces existen $v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_{i+2}, \dots, v_{j-1} v_j$ arcos de color 3 en $\mathcal{C}(T)$ y por la transitividad de $\mathcal{C}(T)$, existe un $v_i v_j$ de color 3 en $\mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 18. $p \leq n - 2$.

Supongamos que $p \geq n - 1$. La Afirmación ?? nos dice que existe un arco $v_1 v_{n-1}$ de color 3 en $\mathcal{C}(T)$. Además ya mostramos que existe una trayectoria monocromática de v_n a v_1 de color 3 lo cual nos dice que existe un arco $v_n v_1$ en $\mathcal{C}(T)$ de color 3. Combinando los dos resultados obtenemos que existe un arco $v_n v_{n-1}$ de color 3, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 19. *Todos los $v_{p+1} v_n$ arcos en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 1.*

Primero probemos la existencia de un arco de esa forma. De la afirmación anterior y la definición de p tenemos que $2 \leq p \leq n - 2$. Si $p = n - 2$ entonces $p + 1 = n - 1$ y $(v_{n-1}, v_n) \in A(\gamma_{n+1}) \subseteq A(\mathcal{C}(T))$; si $p < n - 2$ entonces $p + 1$ y n son dos vértices no consecutivos y se sigue de una proposición anterior que existe un arco de v_{p+1} a v_n en $\mathcal{C}(T)$.

Como $\xi(v_n) = \{1, 3\}$ entonces un $v_{p+1} v_n$ arco tiene color 1 ó 3 en $\mathcal{C}(T)$. Supongamos que existe un $v_{p+1} v_n$ arco de color 3. Como existen arcos $v_n v_1$ y $v_1 v_p$ de color 3 en $\mathcal{C}(T)$ entonces la transitividad de $\mathcal{C}(T)$ nos asegura que existe un arco $v_{p+1} v_p$ de color 3, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Por lo que, todo $v_{p+1} v_n$ arco tiene color 1. \square

Afirmación 20. *Todos los $v_p v_0$ arcos en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 2.*

Como $2 \leq p \leq n - 2$ entonces v_p y v_0 no son vértices consecutivos en γ_{n+1} , así que, existe un arco de la forma $v_p v_0$.

Como $\xi(v_0) = \{2, 3\}$ entonces un $v_p v_0$ arco tiene color 2 ó 3. Una proposición anterior nos dice que existe un $v_1 v_p$ arco de color 3 y si existe un arco $v_p v_0$ de color 3, combinando los resultados obtenemos que existe un $v_0 v_1$ arco de color 3 en $\mathcal{C}(T)$, contradiciendo que $\gamma_n \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Por lo tanto, todo $v_0 v_p$ arco tiene color 2. \square

Afirmación 21. *Todos los $v_0 v_2$ arcos en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 1.*

Como existen arcos $v_0 v_1$ y $v_1 v_2$ de color 2 y 3 respectivamente, aplicando la Afirmación ?? , toda trayectoria monocromática entre v_0 y v_2 tiene color 1, es decir todo $v_0 v_2$ arco en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1. \square

Afirmación 22. $p \geq 3$.

De la Afirmación ?? y como existe un arco $v_{p-1} v_p$ de color 3 vemos $\xi(v_p) = \{2, 3\}$. Por otro lado, $1 \in \xi(v_2)$ de las suposiciones que hicimos y $p \neq 2$. \square

Afirmación 23. $\xi(v_{p+1}) = \{1, 2\}$.

Ya que existe un $v_{p-1} v_p$ de color 3 y ya obtuvimos que $\xi(v_p) = \{2, 3\}$, de la Afirmación ?? obtenemos que $1 \in \xi(v_{p+1})$ y como $\xi(v_{p+1}) \cap \xi(v_p) \neq \emptyset$ entonces $2 \in \xi(v_{p+1})$, por lo que, $\xi(v_{p+1}) = \{1, 2\}$. \square

Afirmación 24. *Todos los $v_2 v_{p+1}$ arcos en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 1.*

La Afirmación ?? y que (v_1, v_2) tiene color 3 nos aseguran que $\xi(v_2) = \{1, 3\}$ y como $\xi(v_{p+1}) = \{1, 2\}$ entonces $\xi(v_2) \cap \xi(v_{p+1}) = 1$ y todo arco entre v_{p+1} y v_2 en $\mathcal{C}(T)$ es de color 1. \square

En resumen todo $v_0 v_2$, $v_2 v_{p+1}$ y $v_{p+1} v_n$ arco tienen color 2, combinando los resultados y la transitividad de $\mathcal{C}(T)$ nos aseguran que existe un arco de v_0 a v_n de color 2, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$.

Caso 2: $(v_1, v_2) \in A(T)$ tiene color 2.

Para empezar este caso definimos el siguiente índice:

$$q = \min\{j \in \{2, 3, \dots, n-1\} \mid \text{no existe } v_j v_{j+1} \text{ arco en } \mathcal{C}(T) \text{ de color } 2\}.$$

q está bien definido pues $\xi(v_n) = \{1, 3\}$, es decir, para $j = n-1$ no existe un $v_j v_{j+1}$ arco de color 2. De forma similar al *Caso 1*, tenemos que existe un arco $v_i v_j$ en $\mathcal{C}(T)$ con $1 \leq i < j \leq q$. A continuación consideraremos dos subcasos:

Subcaso 2.1: $q \geq 3$.

Para este subcaso probaremos las siguientes afirmaciones respecto a q .

Afirmación 25. $\xi(v_{q-1}) = \xi(v_q) = \{1, 2\}$.

Sea $i \in \{q-1, q\}$. Ya que $3 \leq q \leq n-1$ (recuérdese la hipótesis del subcaso 2.1), entonces v_i y v_0 son dos vértices no consecutivos y por la Afirmación ??, existe un $v_i v_0$ arco en $\mathcal{C}(T)$.

Como $\xi(v_0) = \{1, 2\}$ entonces los $v_i v_0$ arcos tiene color 1 ó 2. Como existe un $v_1 v_i$ arco de color 2, si para un $v_i v_0$ arco su color es 2, la transitividad de $\mathcal{C}(T)$ nos asegura que existe un $v_1 v_0$ arco, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. Así, todos los $v_i v_0$ arcos tienen color 1 y $1 \in \xi(v_i)$.

De la definición de q , existe un $v_{q-1} v_q$ arco de color 2 y $2 \in \xi(v_i)$, como $\xi(v_i) \leq 2$ se sigue que $\xi(v_i) = \{1, 2\}$. \square

Afirmación 26. *Todos los $v_q v_{q+1}$ en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 1.*

La afirmación anterior nos dice que $\xi(v_q) = \{1, 2\}$ y como no hay un arco $v_q v_{q+1}$ de color 2 (definición de q) entonces todos los arcos $v_q v_{q+1}$ tienen color 1. \square

Afirmación 27. *Todos los arcos $v_{q-1} v_{q+1}$ tienen color 3.*

Gracias a la Afirmación ?? y a una parte de la demostración de la Afirmación ?? existen arcos $v_{q-1}v_q$ y v_qv_{q+1} de colores 2 y 1, respectivamente. Aplicando la Afirmación ?? obtenemos que todos los arcos entre v_{q-1} y v_{q+1} en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 3. \square

De la última afirmación tenemos que $3 \in \xi(v_{q-1})$ y $|\xi(v_{q-1})| \geq 3$, contradiciendo la hipótesis del teorema. Por lo tanto este subcaso es imposible.

Subcaso 2.2: $q \leq 2$.

En este caso $q = 2$, pues (v_0, v_1) y (v_1, v_2) tienen color 2 en el ciclo γ_{n+1} . Las siguientes afirmaciones están relacionadas con q y nos servirán para concluir con la demostración de este subcaso.

Afirmación 28. $(v_2, v_3) \in A(T)$ tiene color 1 y los arcos entre v_3 y v_1 tienen color 3.

Como $q = 2$, entonces los arcos v_2v_3 están pintados de color 1 ó 3. Como un v_1v_2 tiene color 2, si existe v_2v_3 arco de color 3, aplicando la Afirmación ?? entonces todo arco entre v_1 y v_3 tiene color 1 y $1 \in \xi(v_1)$, contradiciendo que $\xi(v_1) = \{2, 3\}$. Por lo que todo arco entre v_1v_2 tiene color 1, en particular $(v_2, v_3) \in A(T)$. \square

Afirmación 29. $n \geq 4$.

Se sigue de la hipótesis de inducción. \square

Afirmación 30. $(v_3, v_4) \in A(T)$ tiene color 1.

De la Afirmación ?? obtenemos que $\xi(v_3) = \{1, 3\}$, por lo que $(v_3, v_4) \in A(T)$ tiene color 1 ó 3. Si (v_3, v_4) tiene color 3, entonces existen arcos consecutivos con tres colores distintos y regresamos al *Caso 1*. Así que debemos asumir que $(v_3, v_4) \in A(T)$ tiene color 1. \square

Afirmación 31. Todos los v_nv_2 arcos en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 1.

Como $n \neq 3$, se sigue de la Afirmación ?? que existe un arco de v_n a v_2 en $\mathcal{C}(T)$. De la hipótesis y la Afirmación ?? tenemos que $\xi(v_2) = \{1, 2\}$ y $\xi(v_n) = \{1, 3\}$, así que todo arco entre ellos tiene color 1. \square

Afirmación 32. $n \geq 5$

Cuando $n = 4$ tenemos, de la afirmación anterior, que todo arco de v_4 a v_2 es de color 1 y como existe un arco de v_3 a v_4 de color 1, entonces existe un arco de v_3 a v_2 , contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Afirmación 33. *Todos los v_4v_n arcos en $\mathcal{C}(T)$ tienen color 3.*

Ya que $\xi(v_n) = \{1, 3\}$ entonces un arco v_4v_n tiene color 1 ó 3. Si existe un arco de esa forma con color 1, de las Afirmaciones ?? y ?? obtenemos que existe un arco de v_3 a v_2 de color 1, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Para finalizar, observemos que todo arco de v_4 a v_n , de v_n a v_1 y de v_1 a v_3 tienen color 3 y la transitividad de $\mathcal{C}(T)$ nos asegura que existe un arco de v_4 a v_3 de color 3, contradiciendo que $\gamma_{n+1} \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(T)$. \square

Como una consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *Sea T un torneo 3-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es cuasimonocromático y para cada $v \in V(T)$ tenemos que $|\xi(v)| \leq 2$. Entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Ahora veamos el siguiente resultado

Proposición 4.3. *Sea T un torneo m -coloreado, con $m \geq 4$, tal que para cada $v \in V(T)$, $\xi(v) \leq 2$. Entonces cada subtorneo de orden 3 es cuasimonocromático.*

Demostración. Primero observemos que para cualesquiera $u, v \in V(T)$, $\xi(u) \cap \xi(v) \neq \emptyset$, pues el color del arco entre u y v está en ambos.

Ahora supongamos que existe un subtorneo de orden 3 con vértices digamos $\{u, v, w\}$, el cual no es cuasimonocromático. Sin pérdida de generalidad supongamos que el arco entre u y v tiene color 1, el arco entre v y w tiene color 2 y el arco entre w y u tiene color 3. De esta forma $\xi(u) = \{1, 3\}$, $\xi(v) = \{1, 2\}$ y $\xi(w) = \{2, 3\}$. Sea $x \in V(T)$ tal que $4 \in \xi(x)$. Como $\xi(x) \cap \xi(u) \neq \emptyset$ y $4 \notin \xi(u)$ entonces $\xi(x) = \{1, 4\}$ ó $\xi(x) = \{3, 4\}$ pero $\xi(x) \cap \xi(w) = \emptyset$ ó $\xi(x) \cap \xi(v) = \emptyset$, respectivamente, contradiciendo la observación. \square

De la Proposición ?? y el Teorema de Shen Minggang obtenemos el siguiente resultado de manera directa:

Teorema 4.4. *Sea T un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que para cada $v \in V(T)$ tenemos que $|\xi(v)| \leq 2$. Entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Capítulo 5

¿Y las digráficas?

5.1. Digráficas transitivas en el borde

En capítulos anteriores hemos encontrado condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en torneos m -coloreados. En este capítulo se dan condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas que no son torneos. Estas últimas son mucho más difíciles de estudiar pues no poseen las bondades de los torneos.

Empezaremos el capítulo con las definiciones de digráfica cuasitransitiva, cuasitransitivo en el borde y clase cromática.

Definición 22. Decimos que una digráfica D es cuasitransitiva si para cualesquiera vértices x, y y z distintos tales que, (x, y) y (y, z) son arcos de D , entonces (x, z) ó (z, x) es arco de D .

En la Figura 5.1 podemos observar la diferencia entre los conceptos de transitividad y cuasitransitividad, pues la digráfica es cuasitransitiva pero no transitiva; para la primera parte basta observar que cualesquiera tres

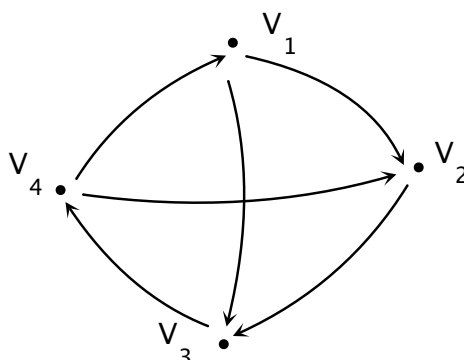


Figura 5.1: Digráfica cuasitranstiva

vértices son un subtorneo de orden tres y no es transitiva ya que hacen falta los arcos (v_2, v_4) y (v_3, v_1) . En realidad cualquier torneo de orden n que no sea transitivo es cuasitranstivo.

Definición 23. Un ciclo dirigido $C = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ para $k \geq 3$ es cuasitranstivo en la frontera si para cualquier $i = 1, 2, \dots, k$, (u_i, u_{i+2}) ó (u_{i+2}, u_i) es un arco de D .

Véase la Figura 5.1 para un ejemplo de la definición anterior.

Definición 24. Sea D una digráfica m -coloreada. Una clase cromática de D es el conjunto de arcos de un mismo color. Decimos que una clase cromática S es cuasitranstiva si la digráfica inducida por S en D es una digráfica cuasitranstiva.

Abusando de la notación, en lo que resta del capítulo, denotaremos la subdigráfica inducida por los arcos de la clase cromática solo con su color. A continuación demostraremos la siguiente proposición.

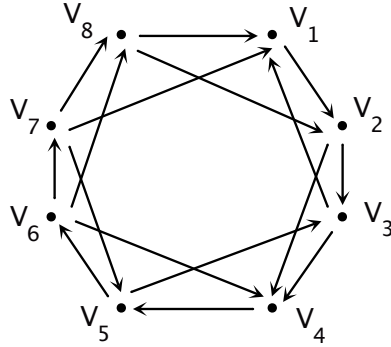


Figura 5.2: Ciclo dirigido cuasitransitivo en la frontera

Proposición 5.1. *Sea D una digráfica cuasitransitiva. Supongamos que $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una trayectoria dirigida de longitud mínima de x_1 a x_k . Entonces $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta y $(x_j, x_i) \in A(D)$ para cualquier $j > i + 1$, a menos que $k = 4$, en cuyo caso el arco entre x_1 y x_k puede estar ausente.*

Demostración. Primero analicemos los casos $k = 3$ y $k = 4$, para después probar la proposición por inducción sobre la longitud de la trayectoria mínima.

Para $k = 3$, $P = (x_1, x_2, x_3)$, y por la cuasitransitividad, tenemos que (x_1, x_3) ó (x_3, x_1) es un arco de D . Si (x_1, x_3) es un arco de D entonces P no era la trayectoria mínima entre x_1 y x_3 , por lo que, $(x_3, x_1) \in A(D)$ y la proposición es verdadera.

Para $k = 4$, $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, y de forma similar al caso anterior, (x_3, x_1) y (x_4, x_2) son arcos de D y la proposición es verdadera.

Para $k = 5$, $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Como (x_1, x_2, x_3, x_4) es una trayectoria de longitud mínima, basta demostrar que (x_4, x_1) , (x_5, x_i) para $i = 1, 2, 3$ son arcos de D . La cuasitransitividad y la minimalidad de P , nos aseguran

que (x_5, x_3) es arco de D y como $(x_3, x_1) \in A(D)$ entonces (x_5, x_1) es arco de D . Por otro lado, como $(x_5, x_1), (x_1, x_2) \in A(D)$ entonces $(x_5, x_2) \in A(D)$ ó $(x_2, x_5) \in A(D)$, la última no es posible pues P es de longitud mínima, así que, $(x_5, x_2) \in A(D)$. Además, $(x_4, x_5), (x_5, x_1) \in A(D)$, con lo cual $(x_4, x_1) \in A(D)$.

Supongamos que la proposición es válida para $k \geq 5$. Sea $T = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ una trayectoria de longitud $k + 1$. Como (x_1, x_2, \dots, x_k) es una trayectoria de longitud k mínima entre x_1 y x_k , entonces la proposición es válida para ese pedazo de T . Así que, basta demostrar que (x_{k+1}, x_i) es un arco de D para $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Como (x_{k-1}, x_k) y (x_k, x_{k+1}) son arcos de D entonces (x_{k+1}, x_{k-1}) es un arco de D , de lo contrario se contradice la minimalidad de P . Además, ya que $(x_{k-1}, x_{k-3}) \in A(D)$ y P es de longitud mínima, se tiene que $(x_{k+1}, x_{k-3}) \in A(D)$. De forma similar, como $(x_{k-3}, x_{k-2}) \in A(D)$ entonces $(x_{k+1}, x_{k-2}) \in A(D)$. En resumen, $(x_{k+1}, x_{k-1}), (x_{k+1}, x_{k-2}), (x_{k+1}, x_{k-3}) \in A(D)$. De esta forma, vamos descendiendo de dos en dos vértices hasta terminar en x_1 , y la proposición queda demostrada. \square

Corolario 5.2. *Si una digráfica cuasitransitiva D tiene una trayectoria dirigida de x a y pero $(x, y) \notin A(D)$, entonces $(y, x) \in A(D)$, o existen vértices u, v distintos de x y y , tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son trayectorias dirigidas en D .*

Demostración. Sea P una trayectoria de longitud mínima entre x y y . Si $l(P) \neq 4$, entonces (y, x) es un arco de D por la proposición anterior.

Si $l(P) = 4$, entonces $P = (x, u, v, y)$ para $u, v \in V(D) \setminus \{x, y\}$. Además, la cuasitransitividad y minimalidad de P nos aseguran que (v, x) y (y, u) son arcos de D , y (y, u, v, x) es una trayectoria dirigida. \square

Una consecuencia inmediata del corolario anterior, es el siguiente

Corolario 5.3. *Si una digráfica cuasitransitiva D tiene una trayectoria dirigida de x a y pero no existe una trayectoria dirigida de y a x , entonces $(x, y) \in A(D)$.*

Demostración. Sea P una trayectoria dirigida mínima de x a y y supongamos que $l(P) \geq 2$. Si $l(P) \neq 4$ entonces $(y, x) \in A(D)$ y si $l(P) = 4$, entonces existen vértices u, v tales que (y, u, v, x) es una trayectoria dirigida, en ambos casos contradiciendo que no existe una trayectoria dirigida de y a x . \square

También, gracias al Corolario ??, podemos probar la siguiente proposición que nos será útil en las siguientes demostraciones.

Proposición 5.4. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que cualquier clase cromática es cuasitransitiva. Si C_k es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, entonces C_k es un ciclo dirigido contenido en la parte asimétrica de D .*

Demostración. Sea $C_k = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$, un ciclo dirigido asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Como (u_i, u_{i+1}) es un arco en la cerradura de D , entonces existe una trayectoria dirigida de color A de u_i a u_{i+1} , y tiene sentido tomarse la trayectoria P de color A mínima entre u_i y u_{i+1} .

Si nos restringimos a $D[A]$, P está contenido en $D[A]$. Ahora supongamos que (u_i, u_{i+1}) no es un arco de D . Como cada clase cromática es cuasitransitiva podemos aplicar el Corolario ?? a $D[A]$. De esta forma, (u_{i+1}, u_i) es un arco de $D[A]$ (y también arco de D) o existe una trayectoria (u_{i+1}, u, v, u_i) en $D[A]$, pero como pertenece a $D[A]$, tal trayectoria tiene color A , en ambos casos se tiene que $(u_{i+1}, u_i) \in A(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo la asimetría de C_k . Entonces (u_i, u_{i+1}) es un arco de D que además es asimétrico pues es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. \square

Proposición 5.5. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que*

(i) *Cualquier ciclo dirigido es cuasitransitivo en el borde.*

(ii) *D no contiene triángulos policromáticos.*

Supongamos que para $k \geq 3$, $C_k = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathcal{C}(D)$ de longitud mínima y para alguna $i \in 1, 2, \dots, k$, u_i es un vértice donde C_k cambia de color B a R . Entonces:

a) $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin A(D)$ y $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in A(D)$;

b) *Existe una trayectoria monocromática de u_{i+1} a u_{i-1} de color G diferente de B y R .*

Demostración. Por la Proposición ??, C_k es un ciclo dirigido en D . Además, podemos pedir que C_k sea un ciclo dirigido de longitud mínima. Ya que C_k es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$ entonces C_k no es monocromático y existe un vértice u_i tal que (u_{i-1}, u_i) y (u_i, u_{i+1}) tienen color B y R , respectivamente.

Primero demostraremos el inciso a) por contradicción. Supongamos que $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in A(D)$. Entonces $C_3 = (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i-1})$ es un ciclo dirigido de longitud 3 y por el inciso (ii), C_3 no es policromático, y (u_{i+1}, u_{i-1}) tiene color B ó R . Si (u_{i+1}, u_{i-1}) tiene color B entonces (u_{i+1}, u_{i-1}, u_i) es una trayectoria dirigida de color B y $(u_{i+1}, u_i) \in A(D)$, contradiciendo que C_k es un ciclo dirigido asimétrico. De forma similar, si (u_{i+1}, u_{i-1}) tiene color R entonces (u_i, u_{i-1}) es un arco de $\mathcal{C}(D)$, llegando a la misma contradicción.

Como C_k es cuasitransitivo en el borde, entonces (u_{i-1}, u_{i+1}) ó (u_{i+1}, u_{i-1}) es un arco de D . Por el párrafo anterior, la segunda opción no es posible, y $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in A(D)$. Y el inciso a) queda demostrado.

Para el inciso b), como $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in A(D)$ entonces $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in A(\mathcal{C}(D))$. Así que, $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k)$ es un ciclo dirigido de longitud $k-1$ en $\mathcal{C}(D)$, y tal ciclo tiene un arco asimétrico pues de lo contrario contradice

la elección de C_k . Como todos los arcos a excepción de (u_{i-1}, u_{i+1}) pertenecen a C_k entonces ese arco es el arco simétrico. Es decir, $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in A(\mathcal{C}(D))$ y existe una trayectoria dirigida T de u_{i+1} a u_{i-1} de color G .

Si $G = B$ entonces $T \cup (u_{i-1}, u_i)$ es una trayectoria dirigida de color B y $(u_{i+1}, u_i) \in A(\mathcal{C}(D))$, lo cual es absurdo pues C_k es asimétrico. De forma análoga, si $G = R$ se tiene que (u_i, u_{i-1}) es un arco de $\mathcal{C}(D)$, llegando a la misma contradicción. Así la proposición queda demostrada. \square

Con todo lo demostrado, estamos listos para probar el primer teorema para digráficas generales.

Teorema 5.6. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que*

- (i) *Las clases cromáticas son cuasitransitivas;*
- (ii) *Los ciclos dirigidos son cuasitransitivos en el borde;*
- (iii) *D no contiene triángulos policromáticos.*

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Para este teorema probaremos que cualquier ciclo dirigido en la cerradura de D tiene un arco simétrico y el Teorema ?? nos asegura el resultado.

Supongamos que existe un ciclo dirigido asimétrico $C_k = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ en la cerradura de D y podemos pedir que C_k sea de longitud mínima. Gracias a la Proposición ?? C_k está totalmente contenido en D . Además, C_k no es monocromático, pues en caso contrario todos sus arcos serían simétricos.

Como C_k cumple las condiciones (ii) y (iii), podemos aplicar los resultados de la Proposición ?. Es decir, sea u_i un vértice de C_k tal que (u_{i-1}, u_i)

tiene color B y (u_i, u_{i+1}) tiene color R . Entonces (u_{i+1}, u_{i-1}) no es un arco de D , (u_{i-1}, u_{i+1}) es un arco de D y existe una trayectoria dirigida T de color G de u_{i+1} a u_{i-1} con G distinto de B y R . $u_i \notin V(T)$, de lo contrario (u_i, u_{i-1}) es un arco de la cerradura de D , contradiciendo que C_k es asimétrico.

El arco (u_{i-1}, u_{i+1}) no está pintado de color G , por que si no, tenemos que $D[u_{i-1}, u_i, u_{i+1}]$ es un torneo transitivo de orden 3 policromático. De este modo, (u_{i-1}, u_{i+1}) está pintado de color B ó R y la clase cromática de G no contiene a ese arco. Por otro lado, podemos pedir que T sea una trayectoria de longitud mínima, y ya tenemos las hipótesis del Corolario ???. Así que, existen vértices v, w distintos a u_{i-1}, u_{i+1} tales que (u_{i+1}, v, w, u_{i-1}) y (u_{i-1}, v, w, u_{i+1}) son trayectorias dirigidas en G .

De lo anterior obtenemos que $(u_i, u_{i+1}, v, w, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido y la condición (iii) nos asegura que es cuasitransitivo en el borde. Por lo que, (u_i, v) ó (v, u_i) es un arco de D .

Caso 1. (u_i, v) es un arco de D . En este caso (u_i, v) no está pintado de color G , pues en caso contrario, (u_i, v, w, u_{i-1}) es una trayectoria dirigida de color G y $(u_i, u_{i-1}) \in A(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que C_k es asimétrico. Por otro lado, $D[u_i, u_{i+1}, v]$ es un torneo transitivo de orden 3 con (u_i, u_{i+1}) de color B y (u_{i+1}, v) de color G , así que (u_i, v) tiene el color B . De forma similar, $D[u_{i-1}, u_i, v]$ es un torneo transitivo de orden 3 con (u_{i-1}, v) de color G y tenemos que (u_i, v) es de color R . Contradiendo que B y R son colores distintos.

Caso 2. (v, u_i) es un arco de D . Tampoco (v, u_i) está pintado de color G , pues de lo contrario, implicaría que (u_{i+1}, u_i) es un arco de la cerradura de D . De igual forma al inciso anterior (v, u_i) está pintado de color B y R , contradiciendo que son colores distintos. \square

Del último teorema obtenemos el siguiente corolario, que es una condición

más débil del teorema de Shen Miggang,

Corolario 5.7. *Sea T un torneo m -coloreado tal que*

- (i) *Las clases cromáticas son cuasitransitivas;*
- (ii) *T no contiene triángulos policromáticos.*

Entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Para aplicar el Teorema ??, hace falta demostrar que cualquier ciclo dirigido es cuasitransitivo en el borde.

Sea C_k un ciclo dirigido de longitud k , basta observar que $T[V(C_k)]$ (la gráfica inducida por los vértices del ciclo) es un torneo de tamaño k , y C_k cumple la definición de cuasitransitividad en el borde. \square

En capítulos anteriores, la condición de triángulos policromáticos en el teorema de Shen Miggang se ha podido sustituir por la hipótesis H_s . A continuación se presenta un teorema similar para digráficas m -coloreadas con sus clases cromáticas cuasitransitivas.

Teorema 5.8. *Sea D un digráfica m -coloreada tal que*

- (i) *Cualquier clase cromática es cuasitransitiva;*
- (ii) *Cualquier ciclo dirigido es cuasitransitivo en el borde;*
- (iii) *Existe una $k \geq 4$ tal que, cualquier ciclo dirigido de longitud k es cuasimonocromático y cualquier ciclo dirigido de longitud l con $3 \leq l \leq k - 1$ no es policromático.*

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Comenzaremos la prueba del mismo modo que los anteriores. Supongamos que existe un ciclo asimétrico $C_k = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ en $\mathcal{C}(D)$ y que además sea un ciclo de longitud mínima. Por la Proposición ??, C_k es un ciclo dirigido contenido en D .

Por otro lado, existe u_i en los vértices del ciclo C_k tal que (u_{i-1}, u_i) y (u_i, u_{i+1}) son arcos con colores distintos, digamos B y R . Ya que D y C_k satisfacen las hipótesis de la Proposición ?? tenemos que $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in A(D)$, $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin A(D)$ y que existe una trayectoria dirigida de color G de u_{i+1} a u_{i-1} con G distinto de B y R . Denotaremos a tal trayectoria por $P = (u_{i+1}, v_1, v_2, \dots, v_t, u_{i-1})$ y podemos pedir sin problemas que P sea de longitud mínima. Para concretar la prueba se analizarán los siguientes casos:

Caso 1. *El arco (u_{i-1}, u_{i+1}) no está pintado de color G .*

Por la hipótesis (ii), las clases cromáticas de D son cuasitransitivas. Como P es de color G , está completamente contenida en la digráfica inducida por la clase cromática de color G , además es de longitud mínima en la digráfica inducida. Aplicando el Corolario ?? (recordemos que $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin A(D)$) existen vértices v_1, v_2 , ambos distintos de u_{i-1}, u_{i+1} , tales que $(u_{i-1}, v_1, v_2, u_{i+1})$ y $(u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1})$ son trayectorias dirigidas de color G .

Entonces, $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 5 policromático, pues en él aparecen los colores G , B y R . Si $k \geq 5$, llegamos a una contradicción con la hipótesis (iii). Por lo que, basta revisar este caso cuando $k = 4$. Para ello, construiremos un ciclo de longitud 4 policromático y necesitaremos la ayuda de las siguientes afirmaciones:

Afirmación 34. *(v_1, u_i) es un arco de D y tiene color R .*

Por la hipótesis (ii), $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido cuasitransitivo y (u_i, v_1) ó (v_1, u_i) es un arco de D . Si (u_i, v_1) es un arco de D , entonces

$(u_i, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 y por la suposición es cuasimonocromático. Como (v_1, v_2) y (v_2, u_{i-1}) tienen color G y (u_{i-1}, u_i) color B entonces (u_i, v_1) tiene color G , lo cual implica que (u_i, v_1, v_2, u_{i-1}) es una trayectoria dirigida de color G y $(u_i, u_{i-1}) \in A(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que C_k es asimétrico.

Entonces (v_1, u_i) es un arco de D y (v_1, u_i, u_{i+1}, v_1) es un ciclo dirigido de longitud 3 que no es policromático. Como tal ciclo tiene un arco de color G y un arco de color R entonces (v_1, u_i) tiene color G ó R . Si (v_1, u_i) tiene color G entonces (u_{i+1}, v_1, u_i) es una trayectoria de color G , contradiciendo la asimetría de C_k . Así, la única posibilidad es que (v_1, u_i) este pintado de color R . \square

Afirmación 35. (u_i, v_2) es un arco de D y tiene color B .

Considerando el ciclo $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$, obtenemos que (v_2, u_i) ó (u_i, v_2) es un arco de D , pues todo ciclo es cuasitransitivo. Si (v_2, u_i) es un arco de D entonces $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 cuasimonocromático y (v_2, u_i) es de color G . Lo anterior nos asegura que (u_{i+1}, v_1, v_2, u_i) es una trayectoria dirigida de color G , contradiciendo la asimetría de C_k .

Así que, (u_i, v_2) es un arco de D y si consideramos el ciclo (v_2, u_{i-1}, u_i, v_2) obtenemos que (u_i, v_2) tiene color B . \square

Con las afirmaciones ?? , ?? y recordando como elegimos a v_1, v_2 , concluimos que $(u_i, v_2, u_{i+1}, v_1, u_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que tiene a (u_i, v_2) de color B , (v_1, u_i) de color R y (v_2, u_{i+1}) de color G , es decir, es un ciclo policromático, contradiciendo la condición (iii) del teorema.

Caso 2. El arco (u_{i-1}, u_{i+1}) está pintada de color G .

Para este caso encontraremos un ciclo dirigido policromático de longitud menor o igual a k , para lo cual, utilizaremos ideas basadas en pruebas anteriores.

Recordando que P es de longitud mínima en la digráfica inducida por la clase cromática de G , tenemos que $D[V(P)]$ es una digráfica completa (no olvidemos que en este caso (u_{i-1}, u_{i+1}) es un arco de color G), y $(u_{i-1}, v_j) \in A(D)$ para $j = 1, 2, \dots, t-1$, $(v_m, v_j) \in A(D)$ para $t \geq m > t+1$ y $(v_j, u_{i+1}) \in A(D)$ para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$.

Por otra parte, si existe $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ tal que (u_i, v_j) es un arco de D entonces $(u_i, v_j, v_{j+1}, \dots, v_t, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido y con la hipótesis (ii), tenemos que (u_i, v_{j+1}) ó (v_{j+1}, u_i) es un arco de D . Similarmente, si existe j entre 1 y t tal que (v_j, u_i) es un arco de D entonces $(u_i, v_1, \dots, v_j, u_i)$ es un ciclo dirigido y (v_{j-1}, u_i) ó (u_i, v_{j-1}) es un arco de D .

Las últimas aseveraciones nos servirán para probar las siguientes afirmaciones que serán cruciales para terminar la prueba.

Afirmación 36. $\alpha = \min\{j \in \{1, 2, \dots, t\} : (v_j, u_i) \in A(D)\}$ está bien definido y $\alpha < k - 2$.

Veamos que α está bien definido. Como $(u_i, u_{i+1}, v_1, \dots, v_t, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido de longitud $t+3$ policromático entonces $t > k-3$ y la hipótesis (ii) nos asegura que (u_i, v_1) ó (v_1, u_i) es un arco de D . Si (v_1, u_i) es arco de D , α está bien definida. Si (u_i, v_1) es arco de D entonces (u_i, v_2) ó (v_2, u_i) es un arco de D y así sucesivamente. Por lo anterior, si α no está definida entonces (u_i, v_j) para toda $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ y como $t > k-3$ entonces $(u_i, v_{t-(k-3)}, v_{t-(k-4)}, \dots, v_t, u_{i-1}, u_i)$ es un ciclo dirigido de longitud k que no es cuasicromático pues $(u_i, v_{t-(k-3)})$ no tiene color G y (u_{i-1}, u_i) tiene color B , contradiciendo la condición (iii).

Ahora probemos la segunda parte de la afirmación por contradicción. Supongamos que $\alpha \geq k-2$. De la definición de α , para $k < \alpha$, (u_i, v_k) es un arco de D . De modo que:

$$C_k = (u_i, v_{\alpha-(k-2)}, v_{\alpha-(k-3)}, \dots, v_\alpha, u_i)$$

es un ciclo dirigido de longitud k que no es cuasicromático, pues $(u_i, v_{\alpha-(k-2)})$ y (v_α, u_i) no tiene color G , contradiciendo la condición (iii). \square

Afirmación 37. $\beta = \max\{j \in \{1, 2, \dots, t\} : (u_i, v_j) \text{ es un arco de } D\}$ está bien definida y $\beta > t - (k - 3)$.

Se usa un argumento similar a la Afirmación ?? \square

Para terminar la prueba del Caso 2 analizaremos los subcasos cuando $\alpha > \beta$ y $\alpha < \beta$.

Subcaso 2.1 $\alpha < \beta$

Si $\beta - \alpha \geq k - 2$, entonces

$$(u_i, v_\beta, v_{\beta-(k-3)}, v_{\beta-(k-2)}, \dots, v_{\beta-1}, v_\alpha, u_i)$$

es un ciclo dirigido de longitud k (recordando las primeras observaciones de este caso) que no es cuasicromático, pues (v_α, u_i) y (u_i, v_β) no tienen color G .

Si $\beta - \alpha \leq k - 3$, entonces

$$(u_i, v_\gamma, v_{\gamma+1}, \dots, v_\alpha, \dots, v_\beta, v_{\beta+1}, \dots, v_\delta, u_i)$$

con $\delta - \gamma = k - 2$, es un ciclo dirigido que no es cuasimonocromático.

Subcaso 2.2 $\alpha > \beta$.

Es este caso, por las definiciones de α y β , se tiene que $\beta = \alpha - 1$. Así que:

$$(u_i, v_\gamma, v_{\gamma+1}, \dots, v_\alpha, v_\beta, v_{\beta+1}, \dots, v_\delta, u_i)$$

es un ciclo dirigido de longitud k que no es cuasimonocromático, contradiciendo la condición (iii).

Por lo tanto, (u_{i-1}, u_{i+1}) no puede estar pintada de algún color, y la contradicción viene de suponer que C_k es asimétrico. \square

Proposición 5.9. *Sea D una digráfica asimétrica m -coloreada tal que*

- (i) *Cualquier clase cromática es cuasitransitiva;*
- (ii) *D no contiene torneos de orden tres policromáticos.*

Si $(u, v) \in A(D)$ es asimétrica en $\mathcal{C}(D)$, entonces no existe un ciclo dirigido de orden 3 que contenga a (u, v) .

Demostración. Probaremos esta afirmación por contradicción. Supongamos que existe un arco asimétrico (u, v) en D y un ciclo dirigido $C_3 = (u, v, w, u)$ (es decir C_3 contiene a (u, v)). Por la condición (i), C_3 tiene a dos de sus arcos pintados del mismo color, digamos B , y sin pérdida de generalidad supongamos que (u, v) y (v, w) son los arcos de C_3 con color B .

Como la clase monocromática de color B es cuasitransitiva entonces (u, w) ó (w, u) es un arco de D con color B . Si (u, w) es un arco de D entonces el arco (u, w) es simétrico ((w, u) está en C_3), contradiciendo la asimetría de D . Por lo tanto, la única posibilidad es que (w, u) es un arco pintado de color B . Lo anterior nos dice que C_3 es un ciclo dirigido monocromático y (u, v) es un arco asimétrico, contradiciendo la hipótesis. \square

Teorema 5.10. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que*

- (i) *Cualquier clase cromática es cuasitransitiva;*
- (ii) *Cualquier ciclo induce una digráfica cuasitransitiva;*
- (iii) *D no contiene ciclos dirigidos policromáticos de orden 3.*

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Para demostrar este teorema haremos uso del Teorema ??, es decir, probaremos que cualquier ciclo dirigido contenido en $\mathcal{C}(D)$ tiene un arco simétrico.

Supongamos que la afirmación anterior no es cierta para la digráfica D , es decir, existe $C_k = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ ciclo dirigido en $\mathcal{C}(D)$ tal que $C_k \subseteq \text{Asym } \mathcal{C}(D)$. Por la Proposición ??, C_k es un ciclo dirigido contenido en D . Por (ii), C_k induce una digráfica cuasitransitiva y entonces (u_1, u_3) ó (u_3, u_1) es un arco de D .

Si (u_3, u_1) es un arco de D entonces (u_1, u_2, u_3, u_1) es un ciclo de orden 3, contradiciendo la Proposición ??, pues (u_1, u_2) es un arco asimétrico en $\mathcal{C}(D)$ y las condiciones (i) y (ii) de la proposición son las condiciones (i) y (iii) del teorema. Así que, el único chance es que (u_1, u_3) es un arco de D . Como (u_1, u_3) y (u_3, u_4) son arcos de D y los vértices pertenecen a C_k entonces (u_4, u_1) ó (u_1, u_4) es un arco de D . Si (u_4, u_1) es un arco de D se tiene que (u_1, u_3, u_4, u_1) es un ciclo de orden 3 que contiene a (u_3, u_4) , llegando a la misma contradicción. Continuando de esta manera obtenemos que (u_1, u_j) con $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Pero entonces (u_1, u_{k-1}, u_k, u_1) es un ciclo dirigido de orden 3 que contiene a (u_{k-1}, u_k) , contradiciendo la Proposición ??.

Por lo tanto, C_k tiene un arco simétrico y el Teorema ?? nos asegura la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

El teorema anterior nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 5.11. *Sea T un torneo m -coloreado tal que*

- (i) *Cualquier clase cromática es cuasitransitiva;*
- (ii) *D no contiene ciclos dirigidos policromáticos de orden tres.*

Entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas

Demostración. Como T es un torneo entonces cualquier ciclo dirigido C_k induce un torneo de orden k y todo torneo es una digráfica cuasitransitiva por definición. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema ?? al torneo T y entonces existe un núcleo por trayectorias monocromáticas.

□

Capítulo 6

Mas allá de trayectorias monocromáticas

6.1. Trayectorias cuasimonocromáticas

Después de estudiar los núcleos por trayectorias monocromáticas uno puede plantear definiciones similares sustituyendo la palabra "monocromáticas". Utilizaremos la definición de cuasimonocromáticas, ya usada en capítulos anteriores, para dar una definición análoga de núcleo.

Definición 25. Sea D una digráfica m -coloreada. Decimos que $S \subseteq V(D)$ es un *conjunto absorbente* por trayectorias cuasimonocromáticas si para todo $v \in V(D) \setminus S$ existe una trayectoria cuasimonocromática de v a w con $w \in S$.

Definición 26. Sea D una digráfica m -coloreada. Decimos que $S \subseteq V(D)$ es un *conjunto independiente* por trayectorias cuasimonocromáticas si, para todo $v, w \in S$, no existe una trayectoria cuasimonocromática de v a w y de w a v .

Definición 27. Sea D una digráfica m coloreada. Decimos que $S \subseteq V(D)$ es un *núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas* si S es un conjunto absorbente e independiente por trayectorias cuasimonocromáticas.

Ejemplos:

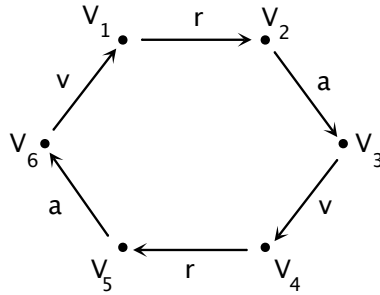


Figura 6.1: Digráfica con núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas

En la Figura 6.1, si tomamos $S = \{v_1, v_4\}$, S es un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas, pues para todo $w \in V(D) \setminus S$ existe una trayectoria de longitud 2 a S y las trayectorias entre v_1 y v_4 son todas de longitud al menos tres que por la construcción usan exactamente tres colores.

En la Figura 6.2, no existe un vértice v_i tal que absorba al resto por trayectorias cuasimonocromáticas. Basta tomar el vértice v_{i-1} , el cual tiene una única trayectoria dirigida de longitud 4 a v_i y si esta fuera cuasimonocromática implicaría que existen tres arcos coloreados por el mismo color, lo cual por construcción no se tiene. Por tanto, si existe núcleo este tiene al menos dos vértices pero, para cualesquier par de vértices v, w se tiene que $d(v, w) \leq 2$ ó $d(w, v) \leq 2$ lo cual implica que S no es independiente por trayectorias cuasimonocromáticas y por lo tanto que la digráfica no tiene núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas.

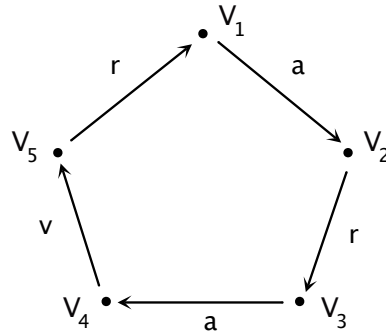


Figura 6.2: Digráfica sin núcleo por trayectorias monocromáticas

Con los ejemplos anteriores vemos que existen casos en que hay núcleos por trayectorias cuasimonocromáticas y casos en los cuales no.

Pregunta. ¿Son equivalentes las definiciones de núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas y por trayectorias monocromáticas?

La respuesta a esta pregunta es no. De hecho los siguientes ejemplos nos muestran que no tenemos ninguna de las implicaciones.

En la Figura 6.3, si tomamos $S = \{v_1, v_4, v_7\}$, para cada $v \in V(D) \setminus S$ existe una trayectoria de v a S de longitud menor o igual a 2 y los vértices de S están separados por trayectorias dirigidas de longitud al menos 3, las cuales, por la construcción usan al menos tres colores, por lo tanto S es un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas. Por otro lado, cada vértice $v \in V(D)$ absorbe a lo más un vértice por trayectorias monocromáticas, precisamente al que pertenece a su invecindad, así que si D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas W entonces $|W| \geq 5$, pero si tomamos cualesquiera 5 vértices en D al menos 2 están a distancia uno, contradiciendo la independencia de W , por lo tanto D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

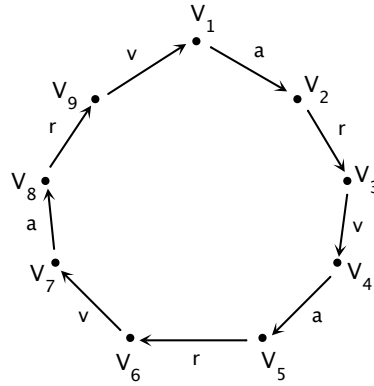


Figura 6.3: Sí cuasimonocromática, no monocromática

En la Figura 6.4, tomando $Q = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, Q es un núcleo por trayectorias monocromáticas. Supongamos que la digráfica tiene un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas, digamos R . Solo v_2 absorbe a 3 vértices de la digráfica por trayectorias cuasimonocromáticas mientras el resto absorbe exactamente a 2, así que $|R| \geq 3$. Pero si tomamos 3 vértices en la digráfica entonces 2 vértices quedan a distancia menor o igual a 2, contradiciendo la independencia por trayectorias cuasimonocromáticas de R . Por lo tanto la digráfica no tiene un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas.

Pregunta. ¿Todo dígrafa D tiene un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas?

La respuesta a la pregunta es no, y de ejemplos funcionan las figuras 6.4 y 6.2, pero si podemos obtener un resultado importante en este sentido:

Teorema 6.1. *Toda dígrafa D m -coloreada tiene un conjunto absorbente por trayectorias cuasimonocromáticas.*

El cual es un resultado inmediato del siguiente Teorema de Bollobas:

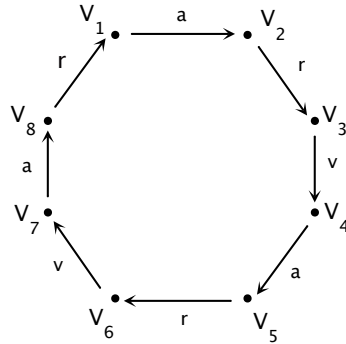


Figura 6.4: No cuasimonocromática, sí monocromática.

Teorema 6.2. *Toda digráfica D tiene un conjunto $S \subseteq V(D)$, tal que S es independiente y si $v \in V(D) \setminus S$ entonces $d(v, S) \leq 2$.*

Ejemplo: En la Figura 6.4, $S = \{v_1, v_4, v_6\}$ puede ser uno de los conjuntos que cumplen el teorema 2 pero S no es un independiente por trayectorias cuasimonocromáticas.

De hecho el Teorema ?? habla de independencia por arcos, lo cual no equivale a la independencia por trayectorias cuasimonocromáticas y es por ello que el teorema no nos asegura la existencia de un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas. En la otra dirección, la implicación es verdadera. A pesar de esto, el teorema de Bollobas nos sirve para un tipo de digráficas, los torneos.

Teorema 6.3. *Todo torneo T m -coloreado tiene un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas.*

Demostración. Por el Teorema ??, existe $S \subseteq V(T)$ tal que S es absorbente por trayectorias cuasimonocromáticas. Además por ser T un torneo

tenemos que $|S| = 1$ por el cual S es independiente por trayectorias cuasi-monocromáticas. \square

6.2. Trayectorias k -cromáticas

Definición 28. Dada una digráfica D m -coloreada, decimos que una trayectoria dirigida T de u a v es k -cromática si los arcos de T usan exactamente k colores.

Ejemplo:

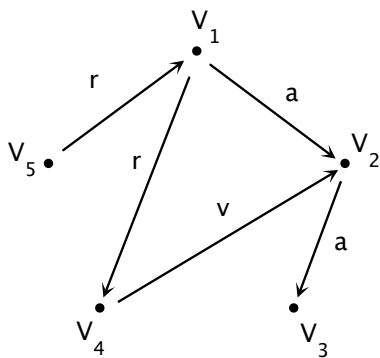


Figura 6.5: Digráfica con trayectorias 3-cromáticas.

En la digráfica de la Figura 6.5, las trayectorias $T_1 = (v_1, v_4, v_2, v_3)$, $T_2 = (v_5, v_1, v_2)$ y $T_3 = (v_1, v_2, v_3)$ son trayectorias dirigidas 3-cromática, 2-cromática y 1-cromática, respectivamente.

A continuación presentamos la definición de núcleo por trayectorias k -cromáticas.

Definición 29. Dada D una digráfica m -coloreada y $S \subseteq V(D)$, decimos que S es un conjunto absorbente por trayectorias k -cromáticas si para todo $v \in V(D) \setminus S$ existe una trayectoria dirigida j -cromática de v a w con $1 \leq j \leq k$ y $w \in S$.

Definición 30. Dada D una digráfica m -coloreada y $S \subseteq V(D)$, decimos que S es un conjunto independiente por trayectorias k -cromáticas si para todo $u, v \in S$ no existe una trayectoria dirigida j -cromática de u a v con $1 \leq j \leq k$.

En relación a estas dos definiciones debemos hacer unas cuantas observaciones para entenderlas mejor. La primera es que, dado un conjunto S absorbente por trayectorias k -cromáticas, S también es un conjunto absorbente por trayectorias l -cromáticas para $l > k$. Para ello podemos sustituir k por cualquier número más grande en la desigualdad de la Definición ?? sin afectar a las trayectorias j -cromáticas.

La segunda observación está relacionada con la Definición ?. Si un subconjunto S es independiente por trayectorias k -cromáticas entonces S también es independiente por trayectorias m -cromáticas para $m < k$. De forma similar a la observación anterior, basta sustituir k por un número más pequeño en la desigualdad para darse cuenta que la independencia del conjunto S no es afectada.

La tercera observación es, dado un subconjunto S , siempre podemos encontrar $r, s \in \mathbb{N}$ tal que S es un conjunto absorbente por trayectorias r -cromáticas e independiente por trayectorias s -cromáticas. Estas observaciones verán su utilidad con la siguiente definición.

Definición 31. Dada D una digráfica m -coloreada y $S \subseteq V(D)$, decimos que S es un núcleo por trayectorias k -cromáticas, si S es un conjunto absorbente e independiente por trayectorias k -cromáticas.

Con la tercera observación puede pasar por la mente de uno que todo subconjunto S es un núcleo por trayectorias k -cromáticas para alguna $k \in \mathbb{N}$, sin embargo esta afirmación es incorrecta. Dados $r, s \in \mathbb{N}$ según la observación 3, la observación 2 nos afirma que S es absorbente por trayectorias m -cromáticas con $m \in \{r, r + 1, \dots\}$ y que es independiente por trayectorias n -cromáticas para $n \in \{1, \dots, s\}$. Si $\{r, r + 1, \dots\} \cap \{1, \dots, s\} = \emptyset$ entonces S no puede ser un núcleo por trayectorias k -cromáticas, por ello es necesario buscar la mínima r y la máxima s para que tal intersección pueda dejar de ser vacía.

Ejemplos:

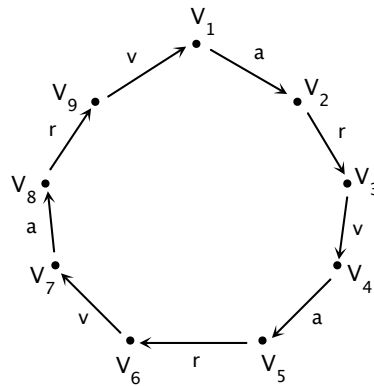


Figura 6.6: Digráfica con núcleo 2-cromático

En la Figura 6.6, veamos que $S = \{v_1, v_4, v_7\}$ es un núcleo por trayectorias 2-cromáticas para la digráfica. Para todo $v \in V(D) \setminus S$ existe una trayectoria de longitud menor o igual a 2 a algún elemento de S por lo que S es absorbente por trayectorias 2-cromáticas. Por otro lado, dados $u, v \in S$, u y v están separados por al menos una trayectoria de longitud 3 que, por la construcción, usa 3 colores así que no existe una trayectoria k -cromática con $k \leq 2$ y S es independiente por trayectorias 2-cromáticas.

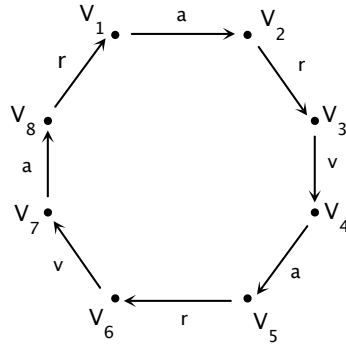


Figura 6.7: Digráfica sin núcleo 2-cromático

En la Figura 6.7, primero observemos que cada $v \in V(D)$ absorbe exactamente a 2 vértices por trayectorias k -cromáticas con $k \leq 2$ por lo que si la digráfica tiene un núcleo por trayectorias 2-cromáticas entonces $|S| \geq 3$; pero si tomamos tres vértices en la digráfica podemos encontrar $v, w \in S$ tal que $d(v, w) \leq 2$ contradiciendo la independencia de S .

Observación. *Toda trayectoria cuasimonocromática es una trayectoria 2-cromática pero no viceversa. Esto nos lleva a la siguiente pregunta.*

Pregunta. *¿Todo núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas es un núcleo por trayectorias 2-cromáticas?*

La respuesta es no y la Figura 6.8 nos sirve como ejemplo. Cualquier v_i es un núcleo 2-cromático y $S = \{v_1, v_5\}$ es un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas. Es decir, v_1 , como tal, no es un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas pues no puede absorber a v_5, v_4, v_3 y v_2 .

Además, existen digráficas las cuales tienen un núcleo por trayectorias 2-cromáticas pero sin núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas. En la

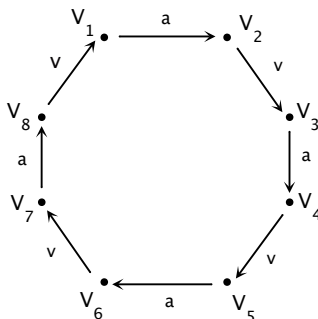


Figura 6.8: v_1 es un núcleo 2-cromático pero no cuasimonocromático

Figura 6.9, cualquier v_i es un núcleo 2-cromático. Por otro lado, supongamos que tiene un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas S , cualquier vértice en la digráfica absorbe a sus tres anteriores por trayectorias cuasimonocromáticas. Por tanto, $|S| \geq 3$ pero esto implica que existen cuya distancia es menor igual a 3, y por tanto no son independientes por trayectorias cuasimonocromáticas.

La siguiente pregunta nace de forma natural para analizar que las definiciones 29 y 30 estén bien definidas.

Pregunta. Sea D es una digráfica m -coloreada, ¿ D tiene un núcleo k -cromático si y sólo si D tiene un núcleo $(k + 1)$ -cromático?

La respuesta es no, en ambas direcciones, y los siguientes teoremas nos ayudarán a visualizarlo. La idea detrás de cada uno de los teoremas radica en dos cosas:

- i)* Colorear la digráfica de modo tal que la longitud de la trayectoria corresponda con el número de colores usados en ella.

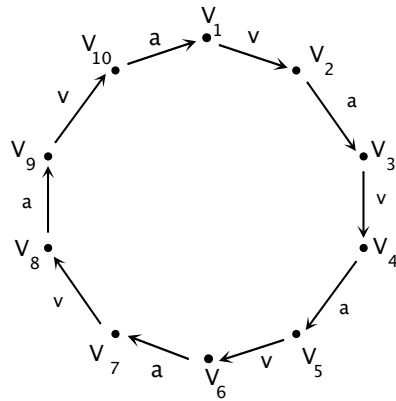


Figura 6.9: Digráfica con un núcleo 2-cromático pero no cuasimonocromático

- ii) El argumento usado para observar que la digráfica de la Figura 6.8 no tiene un núcleo por trayectorias cuasimonocromáticas. Es decir, encontrar una cota para el tamaño del núcleo, si es que existe, y contradecir la independencia.

El primer inciso nos servirá para no preocuparnos por la coloración sino por la longitud de la trayectoria y de esta forma saber cuantos vértices absorbe cada uno y el segundo, adecuando, para demostrar que no es un n -núcleo con la n que requerimos.

Teorema 6.4. *Para toda $k \in \mathbb{N}$, existe una digráfica D y una coloración de sus arcos, tal que D tiene un núcleo k -cromático pero D no tiene un núcleo $(k+1)$ -cromático.*

Demostración. Sea $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_m, v_1)$ el ciclo dirigido con m vértices donde $m = (k+1)(k+3)$. Al arco (v_i, v_{i+1}) le asignaremos el color i módulo $(k+3)$, es decir, γ es una digráfica $(k+3)$ -coloreada. Como $k+3$ divide a m entonces la digráfica está pintada de forma que cualquier trayectoria

de longitud $l \leq k + 3$ está pintada con exactamente l colores y cuando $l \geq k + 3$ la trayectoria contiene los $k + 3$ colores y arcos cuyos colores se repiten. Supongamos que γ tiene un núcleo S por trayectorias $(k + 1)$ -cromáticas.

Afirmación 38. $|S| \geq k + 2$

Cada $v \in S$ absorbe a lo más a $(k + 1)$ vértices por trayectorias j -cromáticas con $1 \leq j \leq k + 1$ pues estamos en un ciclo dirigido y cualquier vértice a distancia al menos $k + 2$ usa al menos $k + 2$ colores. Si la afirmación fuera falsa entonces S absorbe a lo más a $(k + 1)(k + 1)$ vértices lo cual implica que $|V(\gamma)| = m \leq (k + 1)^2 + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)$, contradiciendo la elección de m . \square

Afirmación 39. *Existen $v, w \in S$ tal que $d(v, w) \leq k + 1$*

De lo contrario y ya que $|S| \geq k + 2$ tendríamos que $l(\gamma) \geq (k + 2)^2$, recordando que estamos eligiendo al menos $k + 2$ puntos en un ciclo cuya distancia es al menos $k + 2$ entre ellos. Pero lo anterior implica que $m = l(\gamma) \geq (k + 2)^2 > (k + 1)(k + 3) = m$, contradiciendo la elección de m .

La afirmación anterior nos dice que esos dos vértices están unidos por una trayectoria de longitud a lo más $k + 1$ y que por tanto tal trayectoria usa a lo más $k + 1$ colores, contradiciendo la k -independencia de S .

Por otro lado, $S = (v_1, v_{k+2}, v_{2k+3}, \dots, v_{(k+1)(k+2)+1})$ es un núcleo por trayectorias k -cromáticas, pues $v_{(q)(k+1)+1}$ con $0 \leq q \leq k + 2$ absorbe a todos los vértices entre $v_{(q-1)(k+1)+1}$ y él mismo por trayectorias j -cromáticas con $1 \leq j \leq k$. Y entre elementos de S hay al menos una distancia mayor o igual a $k + 1$ que por la coloración tales trayectorias usan al menos $k + 1$ colores. Así que S es un núcleo por trayectorias k -cromáticas.

Teorema 6.5. *Para toda $k \in \mathbb{N}$, existe una digráfica D y una coloración de sus arcos, tal que D tiene núcleo $(k + 1)$ -cromático pero D no tiene núcleo*

k -cromático.

Demostración. Sea $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_m, v_1\}$ el ciclo dirigido con $m = k(k + 2)$ donde el arco (v_i, v_{i+1}) está pintada de color i módulo $k + 2$. De forma similar al teorema anterior, pintamos los arcos de esta forma para que la longitud represente el número de colores usados en la trayectoria. Esto último, gracias a que $k + 2$ divide a m . Para probar que γ no tiene un núcleo k -cromático procederemos por contradicción. Supongamos que existe S es un núcleo por trayectorias k -cromáticas.

Afirmación 40. $|S| \geq k + 1$

Primero observemos, que al igual que la afirmación 38, para $v \in S$ v absorbe a lo más a k vértices por trayectorias j -cromáticas con $1 \leq j \leq k$. Si la afirmación no es cierta entonces $|S| \leq k$ y como S es núcleo entonces $V(\gamma) = |S| + |\{\text{vértices absorbidos por } S\}| \leq k + k(k) = (k)(k + 1) < k(k + 2)$ (los vértices totales son los que absorbe S y los de S), contradiciendo la elección de m .

Por otro lado como S es independiente entonces para todo $u, v \in S$ tenemos que $d(u, v) \geq k + 1$, pero como tenemos que tomar $k + 1$ vértices en un ciclo cada uno separado por al menos $k + 1$ de los otros entonces $l(\gamma) \geq (k + 1)^2 > k(k + 2)$, contradiciendo la elección de m . Por lo tanto γ no tiene núcleo k -cromático.

Ahora, sea $S = \{v_1, v_{(k+2)+1}, v_{(2k+4)+1}, \dots, v_{(k-1)(k+2)+1}\}$. S es un núcleo por trayectorias $k + 1$ -cromáticas, pues para toda $v \in V(\gamma) \setminus S$ existe $w \in S$ tal que $d(v, w) \leq k + 1$, y para todo $x, y \in S$ tenemos que $d(x, y) \geq p(k + 2)$ con $p \geq 1$ lo cual implica que usan los $k + 2$ colores por la construcción. \square

Ahora nos podemos preguntarnos sobre la equivalencia de la definición para números más grandes. Para ello tenemos el siguiente par de teoremas:

Teorema 6.6. *Para toda $k, s \in \mathbb{N}$ con $k < s$, existe una digráfica D tal que, D tiene un núcleo k -cromático pero D no tiene un núcleo s -cromático*

Demostración. Usaremos las ideas de las afirmaciones anteriores. Denotaremos a $\gamma = (w_1, w_2, \dots, w_m, w_1)$ donde $m = (k + 1)(s + 2)$ y pintamos al arco (v_i, v_{i+1}) del color n modulo $s + 2$. Supongamos que la digráfica tiene un núcleo G por trayectorias s -cromáticas, de forma similar a los dos teoremas anteriores, tenemos que $|G| \geq k + 2$ pues cada vértice en γ absorbe a lo más s vértices por trayectorias s -cromáticas.

Por otro lado, cada vértice de G tiene que estar a distancia al menos $s + 1$ de los otros vértices del núcleo G debido a la independencia. Entonces la longitud del ciclo $\gamma \geq (k + 2)(s + 1) > (k + 1)(s + 2)$, ya que $k < s$, contradiciendo la elección de m . Además, el conjunto $S = \{w_1, w_{(k+1)+1}, w_{2(k+1)+1}, \dots, w_{(s+1)(k+1)+1}\}$ es un núcleo por trayectorias k -cromáticas. \square

Con una prueba similar, que ya no mencionaremos, se puede demostrar que:

Teorema 6.7. *Para toda $k, s \in \mathbb{N}$ con $k > s$, existe una digráfica D y una coloración de sus arcos, tal que tiene un núcleo s -cromático pero D no tiene un núcleo k -cromático.*

Capítulo 7

Otro punto de vista...

7.1. Introducción.

En capítulos anteriores hemos estudiado algunas condiciones suficientes para obtener núcleos y conjuntos absorbentes en torneos ó digráficas m -coloreadas.

Es esta parte abordaremos el problema de una manera distinta. Para ello introduciremos algunas definiciones sobre operaciones en digráficas.

Definición 32. Sean D_1, D_2 dos digráficas. La digráfica $D_1 \bullet D_2$, definida como $V(D_1 \bullet D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$ y $A(D_1 \bullet D_2) = A(D_1) \cup A(D_2) \cup (V(D_1) \times V(D_2))$, es la suma lineal de las digráficas D_1 y D_2 .

Definición 33. Dada una digráfica D . El reverso de D es la digráfica D^{-1} tal que $V(D^{-1}) = V(D)$ y $A(D^{-1}) = \{(x, y) : (y, x) \in A(D)\}$.

Definición 34. Sea G una digráfica y $C_1, C_2, \dots, C_n \subseteq V(G)$ tales que:

- (i) $C_1 \cup C_2 \dots \cup C_n$ es una partición de $V(G)$

(ii) Cada digráfica inducida por C_i es un torneo simétrico.

(iii) Si $(C_i \times C_j) \cap A(G) \neq \emptyset$ entonces $C_i \times C_j \subseteq A(G)$.

Entonces la digráfica G' , con $V(G') = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ y $(C_i, C_j) \in A(G')$ si y sólo si $(C_i \times C_j) \cap A(G) \neq \emptyset$, es la *contracción* de G .

Las definiciones anteriores nos ayudarán a establecer algunos teoremas para conocer y trabajar mejor con los elementos de algunas estructuras. A continuación se presenta la definición principal de esta sección, la digráfica de restricciones.

Definición 35. Sea D una digráfica coloreada en sus vértices y G una multidigráfica cuyos arcos son coloreados con los vértices de D , es decir, existe una función $\phi : A(G) \rightarrow V(D)$. En este caso decimos que G es una *multidigráfica coloreada por D* .

Definición 36. Sea G una multidigráfica coloreada por D . Decimos que un camino o trayectoria (v_0, v_1, \dots, v_n) en G es un D -camino o D -trayectoria si y sólo si $(\phi((v_0, v_1)), \phi((v_1, v_2)), \dots, \phi((v_{n-1}, v_n)))$ es un camino en D . En este caso decimos que el camino o trayectoria es D -admisibles.

En las definiciones anteriores también podemos llamar a D la digráfica de restricciones de G , pues D nos dice que cambios de colores están permitidos en las trayectorias dirigidas de G . Por ejemplo, si queremos obtener una digráfica de restricciones que represente a las trayectorias monocromáticas basta dibujar m vértices y un loop en cada uno de ellos, el loop indica que solo podemos formar trayectorias admisibles con arcos del mismo color.

Algo muy importante a notar en la definición de D -camino y D -trayectoria, es que todo arco es una D -trayectoria. Es decir, dado (v_0, v_1) en G bajo la función ϕ se ve como $\phi((v_0, v_1))$ en D , el cual es un camino trivial. Esta observación nos servirá mas adelante para probar un teorema.

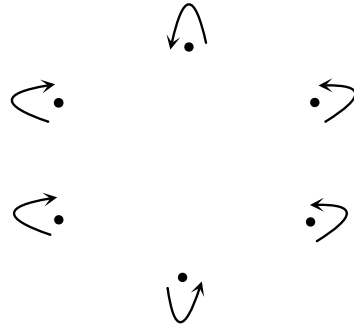


Figura 7.1: Gráfica de restricciones de las trayectorias monocromáticas

Después de las definiciones anteriores es natural pensar en dada una gráfica de restricciones D y G coloreada por D , cuándo podemos encontrar un *núcleo* respecto a las trayectorias permitas por D , pero antes que nada tenemos que reformular la definición de núcleo.

Definición 37. Sea G una multidigráfica coloreada por D . Decimos que un subconjunto $P \subseteq V(G)$ es un conjunto D – *absorbente* si para cada $x \in V(G) - P$ existe un D – *camino* de x a un elemento de P . Un subconjunto $R \subseteq V(G)$ es un conjunto D -independiente si entre cualesquiera dos elementos de R no existe un D -camino y un subconjunto S de vértices es un D -núcleo si S es D -independiente y D -absorbente.

Debemos notar que en la definición anterior manejamos el término *camino* en lugar de *trayectoria*, que se ha venido manejando en las diferentes definiciones de núcleo, y es natural pensar que cambia radicalmente lo que hemos trabajado, pero todo lo contrario. Cuando en la definición sólo hablamos de trayectorias monocromáticas el uso de caminos o trayectorias es indistinto, pues de todo camino se puede obtener una trayectoria que además sigue siendo monocromática. Pero cuando no sólo hablamos de trayectorias

monocromáticas puede darse el caso que la trayectoria obtenida del camino sea no admisible como vemos a continuación.

La gráfica de restricciones D de la Figura 7.2 nos dice que los cambios permitidos son: 1 al 2, 2 al 3 y 3 al 1. Por otro lado, en la Figura 7.3, la digráfica G tiene un D -camino entre u y v que es moviéndose por toda la gráfica pero no existe una D -trayectoria pues es necesario pasar del color 1 al 3, lo que no está permitido. Por eso el uso en nuestra definición de camino.

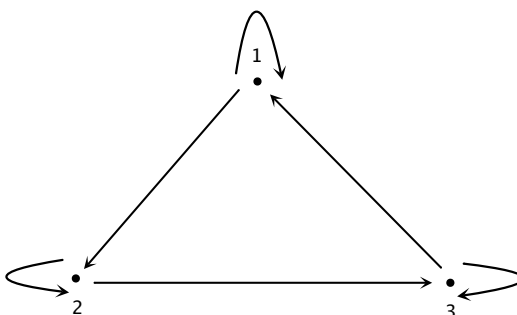


Figura 7.2: Gráfica D

Con la digráfica de restricciones podemos enunciar, en su lenguaje, algunos resultados que se han obtenido, como el siguiente resultado de Sands.

Teorema 7.1. *Cualquier multidigráfica 2-coloreada G tiene un núcleo S por trayectorias monocromáticas*

El cual podemos traducir, en el lenguaje de digráfica de restricciones, como:

Teorema 7.2. *Sea $D = (A, V)$ donde $V = \{1, 2\}$ y $A = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Si G es un multidigráfica coloreada por D entonces G tiene un D -núcleo.*

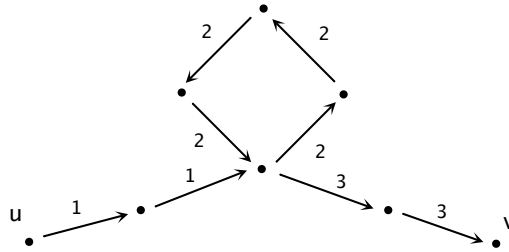


Figura 7.3: Gráfica G coloreada por D

7.2. Clasificación.

La digráfica D usada en el Teorema ?? es muy especial ya que no importa que digráfica G tomemos, siempre va a existir un D -núcleo en G . Ese tipo de digráficas van a formar nuestra primera clase y a partir de ella definiremos las restantes.

Definición 38. Decimos que una digráfica D es del tipo 3, si cualquier multidigráfica G coloreada por D tiene un D -núcleo. \mathcal{B}_3 es el conjunto de todas las digráficas del tipo 3.

Definición 39. Una digráfica D es del tipo 2, si cualquier multidigráfica G coloreada por D tiene un conjunto D -absorbente e independiente (en el sentido de arcos). \mathcal{B}_2 es el conjunto de tales digráficas.

Definición 40. Una digráfica D es del tipo 1, si cualquier torneo T coloreado por D tiene un D -núcleo. Al conjunto de las digráficas del tipo 1 lo llamaremos \mathcal{B}_1 .

Ahora que contamos con nuestra clasificación, tenemos que revisar que tales conjuntos no son vacíos. La digráfica D definida en el resultado de Sands

está en \mathcal{B}_3 y en \mathcal{B}_1 . De hecho, de las definiciones obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.3. *Con la notación anterior, $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$.*

Demostración. La prueba se basa en la observación que hicimos que un arco es D -camino y por tanto si un conjunto de vértices es D -independiente, en particular es independiente en el sentido tradicional. \square

Estudiar las estructuras de las clases pueden dar paso a teoremas muy interesantes y de cierta forma equivalentes al de Sands. Probaremos que las contenciones son propias, algunos teoremas que caracterizan a las gráficas que no pertenecen a las clases y algunas propiedades necesarias para pertenecer a alguna. A continuación se enuncia algunas propiedades básicas y que involucran operaciones.

Teorema 7.4. *Las siguientes propiedades son verdaderas:*

- (1) *Si $D \in \mathcal{B}_i$ para $i = 1, 2, 3$, entonces cualquier vértice de D tiene un loop.*
- (2) *Si $D \in \mathcal{B}_i$ y D_1 es una subdigráfica inducida de D entonces $D_1 \in \mathcal{B}_i$.*
- (3) *Sea D' una contracción de D . Entonces $D \in \mathcal{B}_i$ si y sólo si $D' \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$.*
- (4) *Si $D \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$ y $V(D_1) = V(D)$, $A(D) \subseteq A(D_1)$ entonces $D_1 \in \mathcal{B}_i$.*

Demostración. (1) Supongamos que existe una digráfica $D \in \mathcal{B}_1$ y un vértice en $u \in V(D)$ tal que no tiene un loop, es decir, un arco de la forma (u, u) . Retomando una observación anterior, si un loop falta nos dice que un arco coloreado por u Tomemos la digráfica C_3 definida en capítulos anteriores. Coloreemos tal digráfica con el color u , claramente tal coloración en C_3 no tiene un D -núcleo pues, gracias a una observación anterior, al faltar un

loop los únicos caminos permitidos son trayectorias de tamaño uno para arcos coloreados por ese vértice. Por tanto, el D -núcleo necesita al menos dos vértices, lo que contradice la D -independencia. Por otro lado, la D -independencia implica la independencia por arcos y entonces tampoco existe un conjunto S independiente y D -absorbente.

(2) Si $D_1 \notin \mathcal{B}_3$ existe una digráfica G coloreada por D_1 que no tiene un D_1 -núcleo. Como D_1 es una subdigráfica de D entonces G también está coloreada por D . Cuando consideramos a D no hemos agregado arcos entre los vértices de D_1 (pues D es gráfica inducida), así que, los D -caminos que involucran sólo a vértices de D_1 son los D_1 -caminos permitidos y G no puede tener un D -núcleo, contradiciendo que $D \in \mathcal{B}_3$. Para $i = 1, 2$ la prueba es similar.

(3) Supongamos que $D \in \mathcal{B}_i$ y sea $V(D) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ la partición que induce la contracción D' . Sea G una digráfica coloreada con los vértices de D' . Si un arco de G está pintado con C_i repintamos este arco con cualquier $c \in C_i$. Supongamos que $(u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n = v)$ es un D' -camino y que $\phi((u_i, u_{i+1})) = b_i \in V(D)$ donde b_i es el color asignado a la nueva coloración. Si probamos que (b_i, b_{i+1}) es un arco en D entonces $(u = u_1, u_2, \dots, u_n = v)$ es un D -camino. Si $b_i, b_{i+1} \in C_k$ como cada elemento de la partición induce una digráfica completa, en particular (b_i, b_{i+1}) es un arco. Si $b_i \in C_k$ y $b_{i+1} \in C_j$, como $(u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n = v)$ es un D' -camino entonces $(C_k, C_j) \in A(D')$ y por la definición de contracción $C_k \times C_j \subseteq A(D)$ entonces $(b_i, b_{i+1}) \in A(D)$.

De forma similar podemos demostrar que si existe un D -camino entre x, y vértices de G entonces existe un D' -camino entre x y y . Sea G una digráfica coloreada por D . Recoloreamos los arcos de G como sigue: Si el arco está pintado con $c \in V(D)$ entonces le asignamos el color C_i donde C_i es el único vértice de la contracción que tiene a c . Claramente existe D' -camino entre $x, y \in V(G)$ si y sólo si D -camino entre $x, y \in V(G)$. Con estas dos

observaciones obtenemos que $D \in \mathcal{B}_i$ si y sólo si $D' \in \mathcal{B}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

(4) Como los vértices son los mismos y $A(D) \subseteq A(D_1)$ entonces cualquier D -camino también es un D_1 -camino. La observación anterior nos dice que cualquier conjunto D -absorbente es un conjunto D_1 -absorbente y la independencia por arcos de un conjunto también se mantiene. \square

En las siguientes secciones estudiaremos por separado cada una de las clases, tratando de encontrar caracterizaciones para que una multidigráfica pertenezca a cierta clase y, de esta forma, obtener ejemplos para probar que las contenciones del Teorema ?? son propias.

7.3. La clase \mathcal{B}_2

Comenzaremos nuestro análisis con \mathcal{B}_2 , debido a que la clasificación está completa y su caracterización no es difícil de establecer. El trabajo de esta sección nos permitirá desarrollar el trabajo de las siguientes secciones donde se estudiarán las clasificaciones restantes.

Proposición 7.5. *Si $D_1, D_2 \in \mathcal{B}_2$ entonces $D_1 \bullet D_2 \in \mathcal{B}_2$*

Demostración. Sea G una multidigráfica coloreada por $D_1 \bullet D_2$. Para $i = 1, 2$, sea G_i la subdigráfica de G con $V(G_i) = V(G)$ y sus arcos son los arcos de G que estén pintados con los vértices de D_i . De la hipótesis obtenemos que G_i tiene un subconjunto S_i que es D_i -absorbente e independiente por arcos. Si consideramos la digráfica inducida por S_1 en G_2 , la hipótesis nos asegura que tal digráfica tiene un subconjunto S_2 que es D_2 -absorbente e independiente por arcos. S_2 es independiente en G ya que $A(G) = A(G_1) \cup A(G_2)$, y S_2 es un $D_1 \bullet D_2$ -absorbente pues: 1) Si $x \in S_1 - S_2$ entonces existe un D_2 -camino de x a algún vértice de S_2 . 2) Si $x \in V(G) - S_1$ entonces existe un D_1 -camino de x a algún vértice w de S_1 y el caso anterior nos

asegura que existe un D_2 camino de w a S_2 , ambos caminos se pueden pegar por la suma lineal, terminando la demostración de la proposición. \square

El siguiente Teorema, del cual omitiremos la prueba, nos enuncia la caracterización de la clase \mathcal{B}_2 .

Teorema 7.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1). $D \in \mathcal{B}_2$.
- (2). D^c no tiene ciclos impares.

7.4. La clase \mathcal{B}_3

Con la ayuda de la caracterización de \mathcal{B}_2 podemos obtener algunas digráficas que están en \mathcal{B}_3 . En esta sección mostraremos que G_1 donde, $V(G_1) = \{r, b, g\}$ y $A(G_1) = V(G_1) \times V(G_1) - \{(b, g)\}$, está en \mathcal{B}_3 . Clasificaremos las 16 digráficas de orden tres con loops no isomorfas y al clasificarlas obtendremos que \mathcal{B}_3 es un conjunto propio de \mathcal{B}_2 .

El siguiente teorema es un resultado útil para ver si una digráfica está en \mathcal{B}_3 .

Teorema 7.7. *Sea $W = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ un camino en D tal que:*

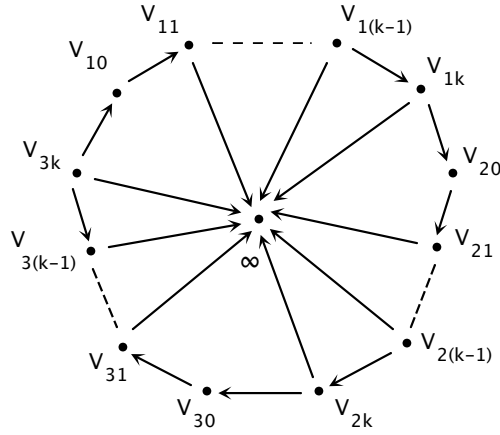
- (1) *Para x_j , con $0 \leq j \leq k - 1$, existe $c_j \in V(D)$ tal que $(x_j, c_j) \notin A(D)$;*
- (2) *$(x_k, x_0) \notin A(D)$.*

Entonces $D \notin \mathcal{B}_3$.

Demostración. Sea G la digráfica dada por:

$$V(G) = \{v_{ij} : i \in \{1, 2, 3\} \text{ y } j \in \{0, 1, \dots, k\}\} \cup \infty;$$

$$A(G) = \{(v_{ij}, v_{i(j+1)}) : 0 \leq j \leq k-1\} \cup \{(v_{ij}, \infty) : i \in \{1, 2, 3\} \text{ y } 1 \leq j \leq k\} \\ \cup \{(v_{ik}, v_{(i+1)0}) : i \in \{1, 2, 3\}\}$$

Figura 7.4: Digráfica G

Coloreamos los arcos de G como sigue:

- (1) Para cada $0 \leq j \leq k-1$ pintamos el arco $(v_{ij}, v_{i(j+1)})$ con $v \neq \infty$ de color x_k ;
- (2) Para $i = 1, 2, 3$ pintamos el arco $(v_{ik}, v_{(i+1)k})$ de color x_k .
- (3) Para cada $1 \leq j \leq k$ pintamos el arco (w_{ij}, ∞) de color c_{j-1} .

Afirmamos que G no tiene un D -núcleo. Para ver esto observemos que ∞ es un elemento minimal y si existe un subconjunto S que sea D -núcleo entonces $\infty \in S$. Todos los v_{ij} con $j \neq 0$ son absorbidos por ∞ , pues $(v_{ij}, \infty) \in A(G)$, pero ninguno de los vértices v_{10}, v_{20}, v_{30} es absorbido por ∞ con un D -camino por que eso implicaría el uso de un arco con color c_j y esto sólo se puede lograr si usamos el arco pintado por x_j , es decir (x_j, c_j) es un arco de D , contradiciendo la hipótesis. Además, cualesquiera dos

vértices de v_{10}, v_{20}, v_{30} están unidos por un D -camino y ninguno absorbe a los otros dos, recordemos que $(x_k, x_0) \notin A(D)$. Así que, G no tiene un D -núcleo. \square

El siguiente resultado descarta algunas digráficas de pertenecer a \mathcal{B}_3 .

Teorema 7.8. *Las siguientes digráficas no están en \mathcal{B}_3 .*

$$(1) V(D_1) = \{r, b, g\}, A(D_1) = \{(r, r), (b, b), (g, g), (r, b), (r, g)\};$$

$$(2) V(D_2) = \{u, r, b, g\}, A(D_2) = V(D_2) \times V(D_2) - \{(b, u), (g, r), (b, g), (g, b)\}.$$

Demostración. Para ver que $D_1 \notin \mathcal{B}_3$ consideremos la digráfica G_1 :

$$V(G_1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$A(G_1) = \{(i, i+1), (i, i+3) : i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\};$$

y donde los arcos $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,5)$ y $(5,2)$ están pintados de color r ; los arcos $(0,1)$, $(2,3)$ y $(4,5)$ de color g y los arcos $(1,2)$, $(3,4)$ y $(5,0)$ de color b . Supongamos que existe un D -núcleo, S , y sin pérdida de generalidad que $0 \in S$. Como 0 no absorbe a 1 entonces $|S| \geq 2$ pero:

- 1) $2, 4 \notin S$ pues existe un D -camino entre $2, 4$ y 0 .
- 2) $1, 5, 3 \notin S$ por que son adyacentes a 0 , llegando a una contradicción.

Por lo que no existe D -núcleo en G_1 .

El ejemplo del inciso (2) es la digráfica G_2 definida por:

$$V(G_1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$A(G_1) = \{(i, i+1), (i, i+3) : i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\};$$

y cuyos arcos $(0,3)$, $(2,5)$ y $(4,1)$ están pintados de u ; $(3,0)$, $(5,2)$ y $(1,4)$ de r ; $(0,1)$, $(2,3)$, $(4,5)$ de g y $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,0)$ de b . Sea S un D -núcleo

de G_2 y supongamos que $0 \in S$. Como 0 no absorbe por un D -camino a 4 entonces $|S| \geq 2$. Por otro lado, $1, 5, 3 \notin S$ ya que son adyacentes a 0 y $2, 4 \notin S$ pues existe un D -camino de 0 a 2 y 4, luego $S = \{0\}$, llegando a una contradicción. \square

Notemos que D_1 no es una contracción de D_2 . Por otra parte, D_1^c no tiene ciclos impares y el teorema 7.6 nos asegura que $D_1 \in \mathcal{B}_2$.

Teorema 7.9. Si $V(D_1) = \{r, b, g\}$ y $A(D_1) = \{(r, r), (b, b), (g, g), (r, b), (r, g)\}$ entonces $D_1 \in \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_3$.

Con el teorema anterior hemos logrado uno de nuestros objetivos, mostrar que la contención entre \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 es propia. El siguiente resultado nos da un ejemplo de una digráfica distinta a la de Sands que se encuentra en \mathcal{B}_3 .

Teorema 7.10. Sea D_5 una digráfica con $V(D_5) = \{\text{rojo}, \text{azul}, \text{verde}\}$ y $A(D_5) = V(D_5) \times V(D_5) - \{(\text{azul}, \text{verde})\}$, entonces $D_5 \in \mathcal{B}_3$.

Demostración. Antes de empezar la prueba, definiremos la *cerradura* de una digráfica G coloreada por los vértices de D_5 . La definición de cerradura es distinta a la usada en otros capítulos y sólo la usaremos en esta prueba.

Definición 41. Consideremos las siguientes dos operaciones:

- (1) Si (x, y) está pintado de color rojo entonces introducimos los arcos (x, y) pintados de azul y verde si no estuvieran presentes.
- (2) Si existe un D_5 -camino (x, z, \dots, u, y) de forma que (x, z) y (u, y) tienen el mismo color entonces introducimos el arco (x, y) con el mismo color de (x, z) y (u, y) .

Como G es una digráfica finita podemos aplicar las dos operaciones antes mencionadas hasta no poder agregar otro arco. La digráfica obtenida es \overline{G} , la cerradura de G .

Proposición 7.11. *Sea G una digráfica coloreada por D_5 y \overline{G} la cerradura de G . Si $x \neq y$ y x tiene un D_5 -camino a y , entonces unos de los siguientes caminos existen en \overline{G}*

- (1) (x, y) pintado de verde.
- (2) (x, y) pintado de azul.
- (3) (x, z, y) donde (x, z) y (z, y) pintados de verde y azul, respectivamente.
- (4) (x, z_1, z_2, y) donde sus arcos están pintados de azul, rojo y verde.

La demostración de esta proposición es bastante sencilla. Consideraremos tres casos que son las posibles longitudes del D_5 -camino entre x y y .

Caso 1. $l(C) = 1$, si el arco (x, y) está pintado de azul o verde no hay nada que probar. Si (x, y) está pintado de rojo entonces en \overline{G} se introducen arcos (x, y) pintados de verde y azul, y la proposición es válida.

Caso 2. $l(C) = 2$. Existen 9 formas posibles de colorear a la trayectoria. Sin embargo, por la definición de D_5 camino, la sucesión $(azul, verde)$ no está permitida. La deseada es $(verde, azul)$ y en las restantes podemos aplicar las operaciones para obtener una del tipo (1) ó (2). Por ejemplo, si tenemos $(azul, rojo)$ entonces sustituimos rojo por azul y obtenemos $(azul, azul)$ la cual se ve reducida a un solo arco pintado de azul.

Caso 3. $l(C) = 3$. Al igual que en el caso 2 podemos aplicar las operaciones para reducir las trayectorias. Por ejemplo, en la trayectoria $(verde, rojo, azul)$ el arco rojo se puede cambiar por azul o verde, pues es una operación de la cerradura, resultando en $(verde, verde, azul)$ o $(verde, azul, azul)$ y ambas resultan en $(verde, azul)$ por la operación (2). En los casos como $(azul, rojo, azul)$ la operación (2) la reduce a un solo arco. El único que no se puede reducir es la combinación $(azul, rojo, verde)$ pero esa corresponde al punto (4) de la proposición.

Caso 4. $l(C) \geq 4$. Por el principio de las casillas al menos dos arcos tienen el mismo color, usando la operación 2 reducimos la trayectoria. Aplicamos repetidamente el argumento anterior hasta llegar a un caso anterior.

Con los cuatro casos abarcados la proposición queda demostrada. \square

Afirmación 41. *Si S es D -independiente y D -absorbente en \overline{G} entonces S también funge como tal en G y viceversa.*

Demostración. La afirmación se basa en el hecho de que los cuatro caminos de la Proposición 7.11 son D_5 -caminos. Esto es, dados dos vértices u, v , existe un D_5 -camino de u a v en G si y sólo si existe un D_5 -camino de u a v en \overline{G} . \square

De la afirmación anterior podemos suponer que $G = \overline{G}$ y además podemos suponer que G es un contraejemplo de orden mínimo del teorema.

Continuemos con la demostración. Para $x, y \in V(G)$ definimos $x \preceq_a y$ si y sólo si $x = y$ ó (x, y) tiene color azul en G , y $x \preceq_b y$ si y sólo si $x = y$ ó (x, y) tiene color verde. Como $G = \overline{G}$ no es difícil ver que \preceq_a y \preceq_b son cuasiordenes. Sea $B \subseteq V(\overline{G})$ tal que para cualquier pareja $x, y \in B$ $x \preceq_a y$ y $y \preceq_a x$ y maximal con respecto a esa propiedad. Además sea $K = \{y \in V(G) : \text{existe un arco de } y \text{ a } B \text{ con color verde}\} \cup B$.

Afirmación 42. *Si $V(G) - K = \emptyset$ entonces G tiene un D -núcleo.*

Basta tomarse $S = \{x\}$ con $x \in B$, pues para cualquier $y \in B$ existe el arco (y, x) de color azul y si $y \in K - B$ entonces existe (y, z) de color verde con $z \in B$ y la trayectoria (y, z, x) es un D_5 -camino. \square

De la afirmación anterior podemos suponer que $Q_1 = G[V(G) - K] \neq \emptyset$. Por inducción, sea S un D -núcleo para Q_1 .

Afirmación 43. Sean x, y vértices distintos de S . Si existe un D_5 camino en G de x a y entonces hay un camino de la forma (x, z_1, z_2, z) con los arcos de color azul, rojo y verde, respectivamente.

Para probar esta afirmación sólo necesitamos revisar los casos de la Proposición 7.11 pues supusimos que $G = \overline{G}$. No son posibles los casos cuando (x, y) es verde ó (x, y) es azul pues Q_1 es una subdigráfica inducida de G y S es independiente en Q_1 . También (x, z, y) con colores verde y azul, respectivamente, es imposible, pues la D_5 -independencia de S en Q_1 obliga a z a pertenecer al conjunto K y tenemos los siguientes casos:

Caso 1) $z \in B$. Como (x, z) es de color verde entonces $x \in K$, llegando a una contradicción (recordemos que $x \in S \subseteq V(G) - K$).

Caso 2) $z \in K - B$. De la definición de K existe $u \in B$ tal que (z, u) es un arco de color verde. Como (x, z) también es de color verde, la transitividad nos asegura que (x, u) es un arco y además pintado de verde, por lo que $x \in K$, llegando a una contradicción (recordemos que $x \in S$).

Por lo que sólo nos queda la opción 4 de la Proposición 7.11 y la afirmación queda probada. \square

Para aligerar la notación, dados dos vértices $x, y \in V(G)$ diremos que $x \rightarrow y$ es *va* ó *arv* cuando exista una trayectoria de x a y con los colores verde-azul ó azul-rojo-verde.

Definimos, para $x, y \in S$, que $x < y$ si y sólo si existe un D_5 camino de x a y en G , recordemos que S es un D -núcleo en Q_1 . La afirmación anterior es esencial para ver que el nuevo orden sobre los vértices de S es un cuasiorden. Supongamos que $x < y$ y $y < z$. Si $x = y$ ó $y = z$, no hay nada que probar. Cuando $x \neq y$ y $y \neq z$ entonces aplicando la afirmación anterior obtenemos que $x \rightarrow y$ es arv y $y \rightarrow z$ es arv; pegando ambas trayectorias y aplicando la operación del tipo 2 de la cerradura obtenemos que $x \rightarrow z$ es arv, es decir, $x < z$.

Sea S_1 el conjunto de elementos máximos de S con respecto a $<$. Entonces S_1 es D_5 -independiente, de lo contrario existe un D_5 -camino en G de x a y y $x < y$, contradiciendo la maximalidad de x . Además, para $y \in Q_1$ existe un D_5 -camino a $u \in S$ y sucede que $u \in S_1$ ó $u \in S - S_1$. En el último caso existe $v \in S_1$ tal que $u < v$ y pegando los dos caminos llegamos a que existe un D_5 -camino de y a v , en otras palabras, S_1 absorbe a Q_1 . Para terminar la prueba consideraremos dos últimos casos:

Caso 2.1) Para cada $x \in B$ existe $s \in S_1$ tal que x tiene un D_5 -camino a s en G . En este caso S_1 absorbe al resto de K , ya que para $y \in K - B$ existe $u \in B$ tal que (x, u) tiene color verde y de u sale un D_5 -camino que empieza con azul o verde pudiéndose pegar ambos caminos. Por consiguiente, S_1 es un D_5 -núcleo.

Caso 2.2) Existe un $x_0 \in B$ tal que x_0 no se puede unir a ninguna $s \in S_1$ por un D_5 -camino en G . Ahora sea S_2 el conjunto de aquellos vértices de S_1 que son D_5 -absorbidos por x_0 . Aseguramos que $\{S_1 - S_2\} \cup \{x_0\}$ es un D_5 -núcleo para G . $\{S_1 - S_2\} \cup \{x_0\}$ es D_5 -independiente por que así lo construimos. Ahora sea $z \in V(G) - (\{S_1 - S_2\} \cup \{x_0\})$. Si $z \in K \cup S_2$ z es absorbido por x_0 . Por otro lado, supongamos que $z \in V(Q_1) \setminus S_1$ y que z no es absorbido por $S_1 - S_2$, entonces hay un D_5 -camino T de z a S_2 . Como para cada $w \in S_2$ existe un arv camino a x_0 (Afirmación 44) la unión de T con el arv es un D_5 -camino de z a x_0 en G .

Con ambos casos revisados, la prueba está completa.

Con este teorema hemos concluido la sección referente a la clase \mathcal{B}_3 .

7.5. La clase \mathcal{B}_1

En esta sección se mostrarán algunos resultados referente a la estructura de \mathcal{B}_1 y algunos ejemplos de digráficas que pertenecen a ella, omitiendo la

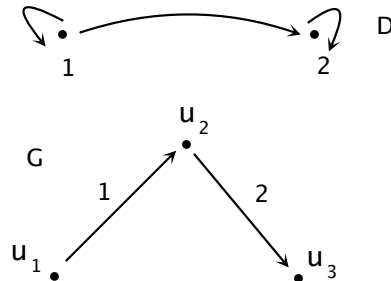
demostración por su longitud. Comenzaremos con el siguiente teorema:

Teorema 7.12. *Un torneo T tiene un D -núcleo si y sólo si T^{-1} tiene una D^{-1} -fuente.*

Demostración. Sea T un torneo coloreado por D y supongamos que T tiene un subconjunto S que es D -núcleo. Como T es un torneo entonces $S = \{x\}$. Aseguramos que S es una D^{-1} -fuente para T^{-1} . Para cualquier $y \in V(T^{-1}) = V(T)$ existe un D -camino de y a x en T , digamos $W = (y = u_1, u_2, \dots, u_k = x)$, pues $\{x\}$ es un D -núcleo. Si $\phi((u_i, u_{i-1}), (u_{i-1}, u_{i-2})) = (b_i, b_j)$ entonces (b_i, b_j) es un arco de D^{-1} pues (b_j, b_i) es un arco de D . Por lo que, W^{-1} es un D^{-1} -camino de x a y en T^{-1} y $S = \{x\}$ es un D^{-1} -fuente. El inverso de la prueba es similar. \square

Sin embargo, el reverso de un D -camino no necesariamente es un D -camino, como se muestra en el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 1. *El reverso de un D -camino es un D -camino.*



En la gráfica G , (u_1, u_2, u_3) es un D -camino pero (u_3, u_2, u_1) no es D -camino pues no está permitido ir del vértice 2 al 1.

A pesar del contraejemplo anterior, tenemos el siguiente resultado que liga los D -núcleos y las D -fuentes en torneos coloreados por D .

Teorema 7.13. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (1) *Todos los torneos T coloreados por D tienen un D -núcleo.*
- (2) *Todos los torneos T coloreados por D tienen una D -fuente.*
- (3) *Todos los torneos T coloreados por D tienen una D -fuente o un D -núcleo.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2). Sea T_n un torneo de orden n coloreado por D . Considera la secuencia $T_n, T_{n-1}, \dots, T_2, T_1$ donde T_i es el torneo obtenido de borrar un D -núcleo a T_{i+1} . Claramente T_1 es la D -fuente buscada.

(2) \Rightarrow (3). En particular todos los torneos tienen una D -fuente.

(3) \Rightarrow (1). Sea T_n como en la primera implicación. Si T_n tiene un D -núcleo no hay nada que demostrar y podemos suponer que T_n tiene una D -fuente x_n . T_{n-1} es el torneo que resulta de borrar x_n a T_n . Si T_{n-1} tiene un D -núcleo, $S = \{y_{n-1}\}$, entonces S absorbe a todos los vértices de T_{n-1} y a x_n (recordemos que al ser x_n fuente existe un D -camino de x_n a y_{n-1}) y por lo tanto S es un D -núcleo de T_n . Otra vez, podemos asumir que T_{n-1} tiene una D -fuente x_{n-1} . De forma similar a T_{n-1} construimos la secuencia de torneos $T_{n-2}, T_{n-3}, \dots, T_1$. Claramente T_1 es el D -núcleo buscado. \square

La combinación de los teoremas anteriores nos da el siguiente resultado para la clase \mathcal{B}_1 .

Teorema 7.14. *$D \in \mathcal{B}_1$ si y sólo si $D^{-1} \in \mathcal{B}_1$.*

Demostración. \Rightarrow) Sea T un torneo coloreado por D y T^{-1} el reverso del torneo con la misma coloración de los arcos. T^{-1} tiene un D -núcleo debido a que $D \in \mathcal{B}_1$. Aplicando el Teorema 7.13, T tiene una D^{-1} fuente y del Teorema 7.14 T tiene un D^{-1} -núcleo. Como T es arbitrario, entonces $D^{-1} \in \mathcal{B}_1$.

\Leftarrow) Similar al caso anterior. \square

Los teoremas anteriores obviamente son resultados respecto a la estructura de la clase \mathcal{B}_1 . Los siguientes teoremas son herramientas para buscar un ejemplo de una digráfica en \mathcal{B}_1 y que no esté en \mathcal{B}_2 .

Teorema 7.15. *Si $|V(D)| \leq 4$ entonces $D \in \mathcal{B}_1$ si y sólo si $D \in \mathcal{B}_2$.*

Demostración. \Rightarrow) Sea $D \in \mathcal{B}_1$ por el Teorema 7.7 basta demostrar que D^c no tiene ciclos impares. Suponiendo lo contrario, existe un ciclo de la forma (u_1, u_2, u_3, u_1) en D^c (recordemos que $|V(D)| \leq 4$). Tomemos a C_3 y pintemos sus arcos con u_1, u_2 y u_3 . Claramente C_3 , con esa coloración, no tiene D -camino de longitud 2 y de ahí se ve que no tiene D -núcleo, contradiciendo el hecho que $D \in \mathcal{B}_1$. Por lo tanto, $D \in \mathcal{B}_2$.

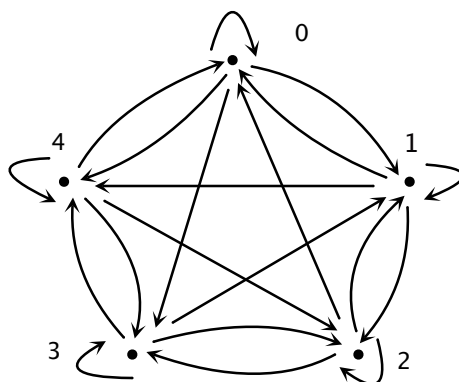
\Leftarrow) Se sigue de que $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ □

Si queremos encontrar una digráfica $D \in \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$ entonces D tiene que cumplir las siguientes condiciones:

- (1) El orden de D es mayor o igual a 5.
- (2) D^c tiene un ciclo de longitud impar mayor que 3.

El siguiente teorema nos muestra que la digráfica más obvia que cumple ambas condiciones es la buscada.

Teorema 7.16. *Sea D_1 la digráfica dada por $V(D_1) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $A(D_1) = V(D_1) \times V(D_1) - \{(c, c+2) : c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$. Entonces $D_1 \in \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$.*

Figura 7.5: Digráfica D_1

La prueba del último teorema la omitiremos por su longitud, es una prueba muy muy larga y hace uso de una notación bastante tediosa, aún así las ideas que utiliza son maravillosas y se puede consultar en [?].

Bibliografía

- [1] Shen Miggang, *On monochromatic Paths in m -coloured Tournaments*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 45 (1988) 108-111.
- [2] Gena Hahn, Pierre Ille, Robert Woodrow, *Absorbing sets in arc-coloured tournaments*, Discrete Mathematics 283 (2004) 93-99.
- [3] Hortensia Galeana-Sánchez, Rocío Rojas Monroy, *Monochromatic Paths and at most 2-Coloured Arc Sets in Edge-Coloured Tournaments*, Graphs and Combinatorics 21 (2005) 307-317
- [4] Hortensia Galeana-Sánchez, *Kernels in edge-colored digraphs*, Discrete Mathematics 184 (1998) 87-99.
- [5] Hortensia Galeana-Sánchez, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Discrete Mathematics 282 (2004) 275-276.
- [6] Hortensia Galeana-Sánchez, Bernardo Llano, Juan José Montellano-Ballesteros, *Kernels by Monochromatic Directed Paths in m -Coloured Digraphs With Quasi-Transitive Chromatic Classes*. Por aparecer, Ars Combinatoria.
- [7] Hortensia Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Mathematics 156 (1996) 103 -112.

-
- [8] Peter Arpin, Václav Linek, *Reachability Problems in Edge-Coloured Digraphs*, Discrete Mathematics 307 (2007) 2276-2289.
- [9] B. Sands, N. Sauer, Robert Woodrow, *On Monochromatic Paths in Edge-Coloured Digraphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 33 (1982) 271-275.
- [10] C. Berge, P. Duchet, *Recent Problems and Results About Kernels in Directed Graphs*. Discrete Mathematics 86 (1990) 27-31.
- [11] Hortensia Galeana-Sánchez, Bernardo Llano, Juan José Montellano-Ballesteros, *Absorbent Sets and Kernels by Monochromatic Directed Paths in m -Coloured Tournaments*, Australian Journal of Combinatorics Vol. 40 (2008) 197-209.
- [12] Reinhard Diestel, Graph Theory Third Edition 2005, Springer-Verlag, Heidelberg Graduate Texts in Mathematics Volume 173.
- [13] Gary Chartrand, Introductory Graph Theory.