



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

**“ADICION DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE
MECANISMOS PLANOS”**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA
ÁREA: INGENIERIA MECANICA
P R E S E N T A :
ROLDAN BADILLO MIGUEL ANGEL**



FES Aragón

**ASESOR:
M. en I. ALBERTO REYES SOLIS**

SAN JUAN DE ARAGÓN, ESTADO DE MÉXICO, 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a mi madre por todo lo que me ha dado, por sus consejos, por enseñarme a no darme nunca por vencido ante los momentos difíciles, por mostrar me que para el alcance y conclusión de mis metas no existe otro camino más que el trabajo duro y constante ,por brindarme todo su apoyo, cariño y comprensión.

A mi padre que siempre me ha apoyado que gracias a su carácter me ha enseñado a salir adelante, a sus regaños que me enseñaron a ser responsable y por todos sus consejos que me han ayudado a tener siempre algo que lograr y trabajar duro para alcanzarlo.

Agradezco a mi asesor M. En I. Alberto Reyes Solís por el apoyo brindado en el transcurso de la carrera, por todos los conocimientos que he adquirido de él, por su ayuda en desarrollo y conclusión de este trabajo, por sus enseñanzas y sobre todo por ser para mí en ejemplo a seguir.

Mi pareja Diana Vázquez Jiménez por el tiempo sacrificado para el desarrollo y conclusión de este trabajo de tesis, por estar junto a mí en las buenas y en las malas, y por apoyarme en todas y cada una de las metas que me he planteado.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	5
Capítulo I MECANISMOS.....	7
I.1 INTRODUCCIÓN	7
I.2 MÁQUINA.....	7
I.3 MECANISMO.....	7
I.4 TIPOS DE MOVIMIENTO	8
I.4.1 Rotación pura	8
I.4.2 Traslación pura	8
I.4.3 Movimiento complejo	8
I.5 ESLABONES.....	8
I.6 ARTICULACIONES CINEMÁTICAS O PARES CINEMÁTICOS.....	8
I.6.1 Pares inferiores	9
I.6.2 Pares superiores.....	10
I.6.3 Pares compuestos	11
I.7 CADENA CINEMÁTICA	11
I.8 CLASIFICACION DE LOS MECANISMOS.....	12
I.8.1 Mecanismos planos.....	12
I.8.2 Mecanismo esférico	13
I.8.3 Mecanismos espaciales	14
I.9 ANÁLISIS DE RESTRICCIÓN.....	14
I.9.1 Conectividad.....	15
I.9.2 Movilidad.....	15
I.9.3 Movilidad de mecanismos planos	15
I.9.4 Movilidad en mecanismos espaciales	17
I.9.5 Paradojas.....	17
I.9.6 Inversión.....	18
I.10 CONDICIÓN DE GRASHOF.....	19
I.10.1 En el caso de la clase I, $S+L < P+Q$	20
I.10.2 En el caso de la clase II, $S+L > P+Q$:	21
I.10.3 En el caso de la clase III. $S+L = P+Q$	21

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

I.11 CLASIFICACIÓN DE ESLABONAMIENTOS DE CUATRO BARRAS	23
Capítulo II ANÁLISIS ANALÍTICO DE MECANISMOS	26
II.1 INTRODUCCIÓN	26
II.2 REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN.	26
II.2.1 Representación de la posición.	26
II.2.2 Representación de la velocidad.	27
II.2.3 Representación de la aceleración	29
II.2.4 Casos especiales.	30
II.3 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE CIERRE PARA MECANISMOS DE 4 BARRAS.....	30
II.3.1 Solución de la ecuación de cierre para mecanismos de cuatro barras cuando el eslabón 2 es el eslabón de entrada.	31
II.3.2 Análisis cuando el acoplador es el eslabón de entrada.....	34
II.3.3 Ecuación de velocidad para mecanismos de 4 barras.....	35
II.3.4 Ecuaciones de aceleración para mecanismos de 4 barras.	35
II.4. ECUACIONES DE ANÁLISIS PARA UN CUERPO RÍGIDO DESPUÉS DE QUE LAS PROPIEDADES CINEMÁTICAS DE DOS PUNTOS SON CONOCIDAS.....	37
II.5 ECUACIONES ANALÍTICAS PARA MECANISMOS MANIVELA –CORREDERA.....	39
II.5.1 Solución para la ecuación de posición cuando θ_2 es el valor de entrada.....	41
II.5.2 Solución para la ecuación de posición cuando r_1 es el valor de entrada.	43
II.5.3 Solución para la ecuación de posición cuando θ_3 es el valor de entrada.	45
II.5.4 Ecuaciones de velocidad para un mecanismo biela-manivela.....	45
II.5.5 Ecuaciones de aceleración para un mecanismo biela-manivela.....	46
II.6. SACUDIMIENTO.....	48
Capítulo III ANÁLISIS DINÁMICO DE FUERZAS.....	51
III.1 INTRODUCCIÓN.....	51
III.2 CENTRO DE MASA Y GRAVEDAD.	51
III.2.1 Centro de masa.	51
III.2.2 Centro de gravedad.....	52
III.3 MOMENTO Y PRODUCTO DE INERCIA.....	52
III.3.1 Momento de inercia.....	53
III.3.2 Producto de inercia.	54
III.4 MÉTODO DE SOLUCIÓN NEWTONIANO.....	54

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

III.5 UN SOLO ESLABÓN EN ROTACIÓN PURA.	54
III.6 ANÁLISIS DE FUERZAS DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS.	56
III.7 ANÁLISIS DE FUERZAS DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS MANIVELA-CORREDERA.	59
III.8 ANÁLISIS DE FUERZAS; MECANISMOS CON MÁS DE CUATRO BARRAS.	61
III.9 FUERZAS Y PAR DE TORSIÓN DE SACUDIMIENTO.	61
III.10 CONTROL DEL PAR DE TORSIÓN DE ENTRADA: VOLANTES.	63
III.10.1 Variación del par de torsión.	63
III.10.2 Energía del volante.	64
III.10.3 Dimensionamiento del volante.	66
CAPÍTULO IV BALANCEO.	68
IV.1 INTRODUCCIÓN.	68
IV.1.1 Importancia del balanceo.	69
IV.1.2 Causas de desbalanceo.	69
IV.2 BALANCEO ESTÁTICO O BALANCEO EN UN SOLO PLANO.	69
IV.3 BALANCEO DINÁMICO.	73
IV.4 MÁQUINAS DE BALANCEO.	76
IV.5 PROCESO DE BALANCEO.	77
IV.6 TOLERANCIAS DE EQUILIBRADO.	79
CAPITULO V BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS.	80
V.1 INTRODUCCION.	80
V.2. BALANCEO DE FUERZAS EN MECANISMOS ARTICULADOS.	80
V.3. EFECTO DEL BALANCEO EN FUERZAS DE SACUDIMIENTO Y FUERZAS EN PASADORES.	84
V.4 EFECTO DEL BALANCEO EN EL PAR DE TORSIÓN DE ENTRADA.	85
V.5 BALANCEO DEL MOMENTO DE SACUDIMIENTO EN MECANISMOS.	86
Capítulo VI BALANCEO DE MÁQUINAS RECIPROCANTES MONOCILÍNDRICAS.	91
VI.1 INTRODUCCION.	91
VI.2. CINEMÁTICA DEL MECANISMO BIELA MANIVELA.	91
VI.3. FUERZA Y PARES DE TORSIÓN DEL GAS.	95
VI.4. MASAS EQUIVALENTES.	99
VI.5. FUERZAS DE INERCIA Y SACUDIMIENTO.	102
VI.6. PARES DE TORSIÓN DE INERCIA Y DE SACUDIMIENTO.	104
VI.7. PAR DE TORSIÓN TOTAL DEL MOTOR.	105

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

VI.8. VOLANTES.	106
VI.9. FUERZAS DE PASADOR EN UN MOTOR DE UN CILINDRO.	107
VI.10. BALANCEO DEL MOTOR DE UN CILINDRO.	114
VI.11. EFECTO DEL BALANCEO DEL CIGÜEÑAL EN LAS FUERZAS DE LOS PASADORES.....	116
Capítulo VII. BALANCEO DE MAQUINAS RECIPROCANES MULTICILINDRICAS.	118
VII.1. MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA.	118
VII.2. MOTORES EN LÍNEA.	118
VII.2.1.Fuerza de sacudimiento en motores en línea.....	119
VII.2.2Par de torsión de inercia en motores en línea.....	121
VII.2.3.Momento de sacudimiento en motores en línea.	122
VII.2.4 Encendido uniforme.....	124
VII.2.5.Motor de dos tiempos.	124
VII.2.5 Motor de cuatro tiempos.....	127
VII.3 CONFIGURACIÓN DE MOTORES EN V.	132
VII.3.1 Fuerza de sacudimiento en motores en V.	133
VII.3.2. Momento de sacudimiento en motores en V.....	135
VII.3.3. Par de torsión de inercia en motores en V.	136
VII.3.4.Par de torsión del gas.....	136
VII.4. BALANCEO DE MOTORES MULTICILINDROS.	137
VII.4.1. Pares de torsión de inercia desbalanceados.....	137
VII.4.2.Fuerzas y momento de sacudimiento desbalanceados.....	138
VII.4.3. V doce.	139
VII.4.4. V en ocho.	140
VII.4.5. V seis.	140
Capítulo VIII CASOS PRÁCTICOS	141
VIII.1 CASO PRACTICO BALANCEO ESTATICO	141
VIII.2 CASOc PRÁCTICO BALANCEO DINÁMICO.....	145
VIII.3 CASO PRÁCTICO BALANCEO DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS	157
VII.4.BALANCEO DE UN MOTOR DE UN CILINDRO.....	175
CONCLUSIONES	180
BIBLIOGRAFIA.....	181

INTRODUCCIÓN.

El hombre desde sus inicios, ha tratado de dominar las fuerzas de la naturaleza para su beneficio. Para ello, ha debido aprender a construir y utilizar artefactos ajenos a él, para satisfacer sus necesidades básicas, alimento, transporte entre otras. Con la llegada de la Revolución Industrial entre la segunda mitad del siglo XVIII y principios del XIX, en Inglaterra donde tuvo inicio, y el resto de Europa continental y de ahí al resto del mundo. La economía que antes de esta estaba basada en el trabajo manual fue reemplazada por otra dominada por la industria y la manufactura. La Revolución comenzó con la mecanización de las industrias textiles con su máquina Spinning la industria del transporte con el ferrocarril y su máquina de vapor. Estas nuevas máquinas favorecieron enormes incrementos en la capacidad de producción dando pauta para la producción y desarrollo de nuevos modelos de maquinaria. En la actualidad nuestra vida diaria está íntimamente ligada con el funcionamiento de las máquinas, ya que muchos de los productos que utilizamos a diario tanto para nuestras necesidades básicas como para las que no son tan básicas tienen todo un proceso detrás de ellas. Este proceso generalmente es llevado a cabo por máquinas bajo la supervisión del hombre.

Una máquina la cual es cualquier artefacto capaz de aprovechar, dirigir o regular una forma de energía para aumentar la velocidad de producción de trabajo o para transformarla en otra forma energética. Estas máquinas generalmente transforman un tipo de energía en otra mediante la actuación de uno o varios mecanismos. Las máquinas son dispositivos usados para cambiar la magnitud y dirección de aplicación de una fuerza. La utilidad de una máquina simple (palanca, cable, plano inclinado, rueda) es que permite desplegar una fuerza mayor que la que una persona podría aplicar solamente con sus músculos, o aplicarla de forma más eficaz. La relación entre la fuerza aplicada y la resistencia ofrecida por la carga contra la que actúa la fuerza se denomina ventaja teórica de la máquina.

El propósito de este trabajo de tesis es de presentar las fuerzas que ejercen los mecanismos planos sobre su bastidor o bancada y como pueden reducirse, ya que debido a el movimiento necesario para transformar un tipo de energía en otra en estos mecanismos transmiten fuerzas de sacudimiento que están íntimamente ligadas a la vida de la máquina y/o mecanismo, estas fuerzas dependen principalmente de la inercia de los elementos de estos mecanismos es decir de la masa de los mismos.

En el primer capítulo se presentan los conceptos básicos que constituyen un mecanismo su clasificación y algunas ecuaciones que nos permiten predecir de manera general si los mecanismos planos se moverán y como lo harán estos.

En el segundo capítulo abarca las ecuaciones cinemáticas de los mecanismos planos que nos permiten conocer la posición, velocidad y aceleración con base a un valor de entrada.

En el tercer capítulo se abordan las ecuaciones para encontrar las fuerzas que los miembros de los mecanismos transmiten entre ellos así como las fuerzas que ejercen estos hacia los elementos que soportan el mecanismo como las fuerzas o pares necesarios para producir el movimiento y la fuerza que se espera de estos.

En el cuarto capítulo se abordan los conceptos de balanceo la importancia de este, las causas de desbalanceo, el balanceo en uno y dos planos, se da una pequeña introducción a las máquinas de balanceo, el proceso y las tolerancias permisibles en el proceso.

En el quinto capítulo se aborda el balanceo de fuerzas en los mecanismos planos el efecto de balancear el par de torsión de entrada y el balanceo del momento de sacudimiento ya que tanto la fuerza y el par de sacudimiento se transmiten directamente al bastidor, es decir transmiten fuerzas vibratorias al elemento que los soporta.

En el sexto capítulo se abordan las fuerzas y pares de torsión de gas necesarias para el movimiento de máquinas recíprocantes monocilíndricas, las fuerzas de inercia y sacudimiento que este produce y el cómo se balancea este tipo de mecanismo.

En el séptimo capítulo se abordan el balanceo de máquinas recíprocantes multicilíndricas las diferentes configuraciones de los mecanismos dentro de este tipo de motores así como la forma en que se balancean estos tanto por la posición que ocupan los mecanismo en los motores como la configuración de encendido de los mecanismos.

En el octavo capítulo se abordan casos prácticos de balanceo en uno y dos planos de elementos sometidos a rotación, el balanceo de mecanismos articulados mediante la adición de contrapesos afín de contrarrestar las fuerzas que estos transmiten a su bastidor o bancada.

Y finalmente se presentan las conclusiones.

Capítulo I MECANISMOS

I.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de los mecanismos y las máquinas es una ciencia aplicada que sirve para comprender las relaciones entre la geometría y los movimientos de las piezas de unas máquinas o un mecanismo y las fuerzas que generen tales movimientos. La historia de los mecanismos se remite a tiempos de la prehistoria. Artesanos como los herreros y carpinteros también actúan como diseñadores de mecanismos. Una de las funciones originales de los ingenieros fue el diseño de mecanismos tanto para la guerra como para usos pacíficos. En tiempos del renacimiento encontramos a Leonardo da Vinci quien describió una gran variedad de mecanismos, la mayoría de ellos para propósitos militares. La era moderna en el diseño de mecanismos a lo largo de la ingeniería mecánica como una disciplina distinta, puede ser vista con el comienzo de James Watt.

El diseño de una máquina moderna es a menudo muy compleja. Por ejemplo para diseñar un nuevo motor, el ingeniero en automovilismo debe dar respuesta a muchas preguntas interrelacionadas. ¿Cuál es la relación entre el movimiento del pistón y el del cigüeñal?, ¿Cuáles serán las velocidades de deslizamiento y las cargas en las superficies lubricadas y que lubricantes existen para este fin? entre otras muchas cuestiones, es obvio que no todo se puede incluir en esta tesis, por tanto el propósito de ésta es el estudio de los mecanismos así como de sus métodos de balanceo.

I.2 MÁQUINA

Es una combinación de cuerpos resistentes acomodados para hacer que las fuerzas mecánicas de la naturaleza realicen trabajos acompañados por movimientos determinados.

Según la definición de Reuleaux^[1] una máquina es un conjunto de mecanismos acomodados para transmitir fuerza y realizar trabajo. Reuleaux consideraba todos los dispositivos que transmiten fuerza o energía como máquinas que utilizan mecanismos, como sus bloques de construcción para proporcionar las restricciones de movimiento necesarios.

I.3 MECANISMO

Son ensambles de miembros o eslabones sólidos. Los mecanismos transfieren movimiento y trabajo mecánico de uno o más actuadores a uno o más miembros de salida. Para propósitos del diseño cinemático, se debe de idealizar un mecanismo como una conexión cinemática, en la cual se asume que todos los miembros (eslabones) son perfectamente rígidos, y están conectados por articulaciones cinemáticas (pares cinemáticos).

De la definición de Reuleaux† de un mecanismo “*combinación de cuerpos resistentes conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo, y cuyo propósito es transformar el movimiento*” es evidente que se necesita tener una cadena cinemática cerrada con un *eslabón fijo*. Cuando se habla de que un eslabón fijo (bancada) se quiere dar a entender que se elige como marco de referencia para todos los demás eslabones, es decir, que los movimientos de todos los demás puntos del eslabonamiento se medirán con respecto a ese en particular ya que se le considera como fijo. Una vez que se designa el marco de referencia (y se satisfacen las condiciones anteriores), la cadena cinemática se convierte en un mecanismo.

† Reuleaux (1829-1905), especialista alemán en cinemática cuyo trabajo marcó el principio de un estudio sistemático de la cinemática. Para consultas adicionales, véase A. B. W. Kennedy, “Reuleaux Kinematics of Machinery”, Macmillan, Londres, 1879; publicado nuevamente por Dover, Nueva York, 1963.

I.4 TIPOS DE MOVIMIENTO

Un cuerpo rígido libre de moverse dentro de un marco de referencia, en el caso general, tendrá un movimiento complejo, el cual es una combinación simultánea de rotación y traslación. En el espacio tridimensional, puede haber rotación alrededor de un eje (cualquier eje oblicuo o uno de los ejes principales) y también traslación simultánea que se puede resolver en elementos a lo largo de tres ejes. En un plano o en un espacio bidimensional, el movimiento complejo se vuelve una combinación de rotación simultánea alrededor de un eje (perpendicular al plano) así como traslación descompuesta en elementos a lo largo de dos ejes en el plano. Para simplificar, se limitará este análisis al caso de sistemas cinemáticos planos (2D). Para este propósito, se definirán estos términos en movimiento plano como sigue.

I.4.1 Rotación pura

El cuerpo posee un punto (centro de rotación) que no tiene movimiento con respecto al marco de referencia "estacionario". Todos los demás puntos del cuerpo describen arcos alrededor del centro. Una línea de referencia trazada en el cuerpo cambia sólo su orientación angular.

I.4.2 Traslación pura

Todos los puntos del cuerpo describen trayectorias paralelas (curvilíneas o rectilíneas). Una línea de referencia trazada en el cuerpo cambia su posición lineal pero no su orientación angular.

I.4.3 Movimiento complejo

Una combinación simultánea de rotación y traslación. Cualquier línea de referencia trazada en el cuerpo cambiará tanto su posición lineal como su orientación angular. Los puntos en el cuerpo recorrerán trayectorias paralelas, y habrá, en todo instante, un centro de rotación, el cual cambiara continuamente de ubicación.

I.5 ESLABONES

Son bloques de construcción básicos de todos los mecanismos. Como se muestra en la figura 1.1 es un cuerpo rígido (supuesto) que posee por lo menos dos nodos que son puntos de unión con otros eslabones y se clasifican en base al número de nodos que poseen.

I.6 ARTICULACIONES CINEMÁTICAS O PARES CINEMÁTICOS

Se denomina a la forma de conexión entre dos o más eslabones y además es el aspecto más importante a examinar del mecanismo durante el análisis. Los pares cinemáticos permiten el movimiento relativo en varias direcciones mientras lo restringen en otras. Los tipos de movimiento que permiten están relacionados con el número de grados de libertad. El número de grados de libertad de la articulación es igual al número independiente de coordenadas necesarias para especificar la posición de la conexión relativa de las otras restricciones de la articulación.

En la clasificación de los mecanismos cinemáticos por Reuleaux^[1] (1876).- dividió los pares cinemáticos en "pares inferiores y superiores".



Figura 1.1 Eslabones de diferente orden

¹Reuleaux, F. (1963). *The Kinematics of Machinery* A .B .W . Kennedy. Troad. Dover Publications: Nueva York, pp.29-55.

I.6.1 Pares inferiores

Son aquellos en los cuales el contacto entre los eslabones ocurre en todos los puntos en uno o más segmentos de la superficie.

Estos pares están necesariamente limitados a un número relativamente pequeño de geometrías, los cuales experimentan un contacto superficial. De aquí que sólo existen seis diferentes tipos de pares inferiores figura 1.2, clasificados en base al movimiento relativo que ellos permiten.

Las articulaciones de pares inferiores son utilizadas frecuentemente en el diseño de mecanismos. Estos dan un buen servicio debido a que el desgaste es repartido sobre la superficie de contacto y debido a la pequeña tolerancia entre las superficies, proporcionan buenas condiciones para lubricación y un ajuste en la restricción del movimiento.

Los pares inferiores tales como juntas de revolución y juntas cilíndricas son frecuentemente simuladas por mecanismos tales como rodamientos de bolas en los cuales se encuentran varios elementos actuando en paralelo. El contacto real en las articulaciones de un rodamiento de bolas se encuentra en un par superior. De esta forma las propiedades de una baja fricción de los rodillos en contacto son explotados para obtener una articulación con poca fricción y una carga elevada y una relativa capacidad de velocidad que puede ser posible con una junta plana de revolución. Al mismo tiempo, el movimiento total relativo de la geometría de la articulación se conserva.

Conectividad (No. de Grados de libertad)	Nombre	Letra de Representación	Forma Típica	Representación Grafica
1	Revoluta Bisagra Par	R		 (plano) (espacio)
1	Prismatica Deslizamiento	P		 (plano) (espacio)
1	Tornillo Heliciodal	H		 (espacio)
2	Cilindrica	C		 (espacio)
3	Esferica Junta de Bola	S		 (espacio)
3	Junta Planar	P _L		 (espacio)

Figura 1.2 Pares inferiores

1.6.2 Pares superiores

Estos experimentan el contacto lineal o puntal como el contacto de rodamiento puro, o que se aproxima a esta condición. En el contacto de rodamiento puro, los puntos en una o dos superficies de articulación que están realmente en contacto con la otra superficie en cualquier instante están en descanso con respecto a la otra superficie. De hecho el deslizamiento de las superficies no es relativo, la fricción de la articulación y el desgaste son mínimos. Físicamente la limitación de este tipo de articulaciones es la intensidad del esfuerzo que experimenta el material en contacto. El esfuerzo es necesariamente alto debido a la pequeña área de contacto. Si los cuerpos fueran perfectamente rígidos el contacto ocurriría sólo en puntos discretos o a lo largo de una línea, el área de contacto sería cero y el esfuerzo crecería infinitamente, observe la figura 1.3

Los pares superiores son algunas veces remplazados por articulaciones de pares inferiores como en la figura 1.4. Por ejemplo en la articulación un sujetador en la ranura comienza con una junta de revolución y una junta prismática. Note que esto involucra la adición de miembros extras al mecanismo. En los dos casos en los cuales un par inferior es remplazado por un rodamiento de rodillos, o una articulación compuesta, los mecanismos son cinemáticamente equivalentes, esto significa que el movimiento relativo que se permite dentro de los dos cuerpos es el mismo aun cuando la articulación sea físicamente diferente.






Conectividad (No. de Grados de Libertad)	Nombre	Forma Típica	Comments
1	De Rodillos Cilindricos		El rodillo rota sobre esta linea en el momento en que se mueve. El rodillo no se desliza sobre la superficie que jira
2	Leva		La leva jira y se desliza sobre el seguidor
3	De Bolas		La esfera rota sin deslizarse
4	De Bolas En Un Cilindro		La esfera puede rotar sobre cualquier eje atraves de su centro y deslizarse a lo largo del eje del cilindro
5	De Punto Espacial En Contacto		El cuerpo rota sobre cualquier eje atraves del punto de contacto y se desliza en cualquier disreccion tangente al plano

Figura 1.3 Algunos pares superiores

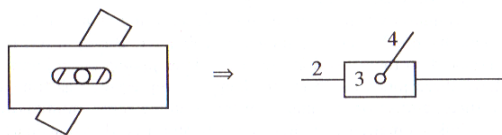


Figura 1.4 Remplazo de un par superior por una combinación equivalente de pares inferiores

I.6.3 Pares compuestos

Los pares inferiores tales como juntas de revolución y juntas cilíndricas son frecuentemente simuladas por mecanismos tales como rodamientos de bolas, en los cuales se encuentran varios elementos actuando en paralelo. El contacto real en las articulaciones de un rodamiento de bolas se encuentra en un par superior. De esta forma las propiedades de una baja fricción de los rodillos en contacto, son explotadas para obtener una articulación con poca fricción y una carga elevada y una relativa capacidad de velocidad que puede ser posible con una junta plana de revolución. Al mismo tiempo, el movimiento total relativo de la geometría de la articulación se conserva. Este es uno de los ejemplos de una articulación compuesta, es un mecanismo complejo pero es de gran valor cinemático equivalente a una articulación de revolución. Algunos ejemplos de articulaciones compuestas se muestran en la figura 1.5.


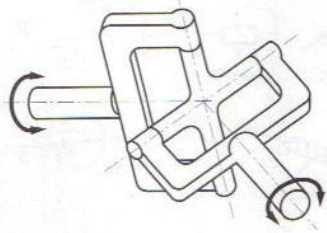
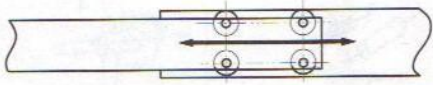
Conectividad	Nombre	Forma
1	Rodamiento de Bolas Rodamiento Antifricción	
2	Junta Universal Junta de Hooke Junta de Cardan	
1	Rodillos Deslizantes	

Figura 1.5 Algunos ejemplos de pares compuestos

I.7 CADENA CINEMÁTICA

Cuando varios eslabones están conectados permitiendo el movimiento entre ellos por medio de articulaciones llamadas “pares”, de modo que produzcan un movimiento controlado en respuesta a un movimiento suministrado, se dice que constituyen una cadena cinemática.

Según el género de movimiento realizado por los puntos de los eslabones, las cadenas cinemáticas se subdividen en *planas* y *espaciales*. *Las cadenas planas* son aquellas cuyos eslabones se mueven en planos paralelos. *Las cadenas espaciales* son aquellas en las que los puntos de los eslabones se mueven por curvas espaciales o por curvas planas que están en planos no paralelos.

Las cadenas cinemáticas suelen ser *abiertas* y *cerradas*. Se llama *cerrada*, si cada eslabón de la cadena se conecta por lo menos con otros dos, esta forma uno o más circuitos cerrados, de no ser así se denomina cadena *abierta*. Esto se muestra en la figura 1.6.

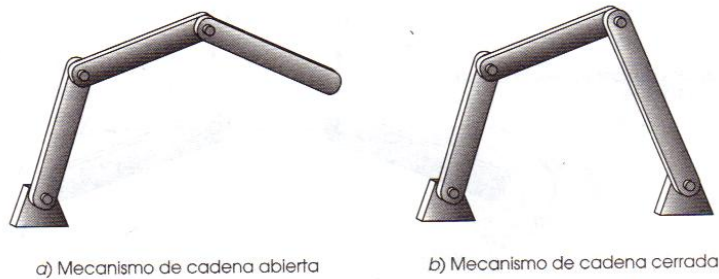


Figura 1.6 Cadena de mecanismos

I.8 CLASIFICACION DE LOS MECANISMOS

I.8.1 Mecanismos planos

Un mecanismo plano es aquel en el cual las velocidades de todos los puntos en los eslabones son direccionados a un plano paralelo, denominado plano de movimiento. Los únicos pares inferiores que son apropiados con el movimiento en un plano son las articulaciones de revolución y prismáticas. Los ejes de rotación de una junta de revolución deben ser normales al plano de movimiento porque de otra forma no permitirán el movimiento en el plano de los otros puntos. La dirección de deslizamiento de una articulación prismática debe ser paralela al plano de movimiento desde todos los puntos; en un eslabón conectado a otro por una conexión prismática se mueven en líneas paralelas a la dirección relativa de deslizamiento al segundo eslabón. Ocasionalmente otro tipo de pares inferiores aparecerán en un mecanismo plano. Pero ellos funcionan solo como una articulación de revolución o prismática.

Un método común de esquematización de los mecanismos planos es representar las articulaciones de revolución por pequeños círculos. Conexiones binarias, que tienen dos articulaciones montadas, son representadas como líneas uniendo a sus dos puntos. Conexiones ternarias, que tienen tres articulaciones son representadas como triángulos con las articulaciones en sus vértices, etc., como se muestra en la figura 1.7.

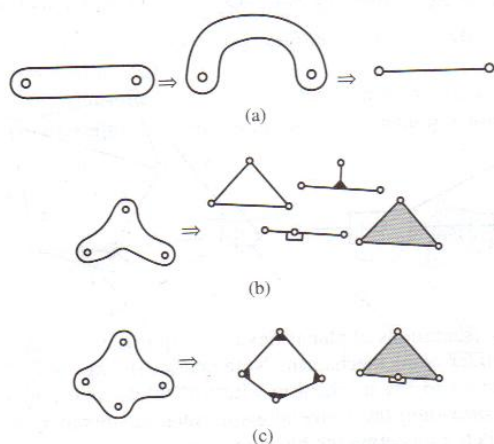


Figura 1.7 Representación de eslabonamientos. (a) Eslabón binario en el cual están montadas dos articulaciones. (b) Eslabón ternario. (c) Eslabón cuaternario; estos tienen tres y cuatro articulaciones respectivamente.

El término mecanismo es un tanto intercambiable con eslabonamiento. El uso normal es un término más genérico en comparación con sistemas de pares superiores o combinación de pares inferiores y superiores, mientras que el término de eslabonamiento tiende a ser restringido a sistemas sólo con pares inferiores. Mecanismos o eslabonamiento son generalmente representados por sus eslabones y articulaciones. Los eslabones son numerados tomando como referencia el marco fijo y comenzando con el número 1 en sentido horario.

Las articulaciones de un solo lazo son dadas a una designación simbólica por una secuencia en sentido horario comenzando y terminando con la articulación montada en el marco de referencia como se muestra en la figura 1.8.

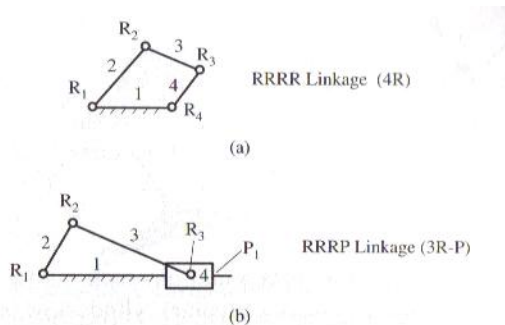


Figura 1.8 Designación de mecanismos de un solo lazo debido a sus articulaciones. Las articulaciones se numeran en sentido horario, comenzando y terminando con el eslabón fijo (bancada)

Los perfiles de las superficies de contacto de los pares superiores, tales como levas y seguidores, se representados en conexiones planas como las que se muestran en la figura 1.9. Estas superficies deben ser generalmente (no necesariamente circulares) cilíndricas de quien sus líneas rectas generadoras son perpendiculares al plano de movimiento. El perfil dibujado es, por lo tanto, la generación de la curva del cilindro como se muestra en la figura 1.10. El cilindro es generado por la traslación de la curva a lo largo de la línea recta en dirección normal a su plano. La familia de cilindros con una curva de generación circular es denominada cilindro circular derecho.

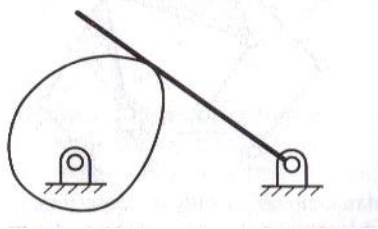


Figura 1.9 Representación de una leva con su seguidor. La cara del seguidor es un plano, por tanto es representado por una línea. La leva es representada por su perfil curvo.

1.8.2 Mecanismo esférico

Es aquel en el que cada eslabón tiene algún punto que se mantiene estacionario conforme el eslabonamiento se mueve, y en el que los puntos estacionarios de todos los eslabones están en una ubicación común; en otras palabras, el lugar geométrico de cada punto es una curva contenida dentro de una superficie esférica y las superficies esféricas están definidas por varios puntos arbitrariamente elegidos y son *concéntricos*. Por ende los movimientos de todas las partículas se pueden describir por completo mediante proyecciones radiales o “sombras”, proyectadas sobre

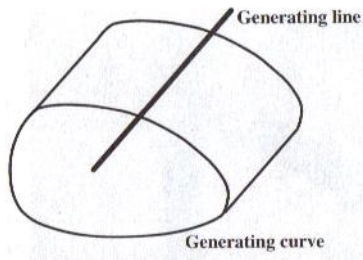


Figura 1.10 Cilindro general. La curva generadora es una curva plana. Su plano es normal a la línea generadora

la superficie de una esfera con un centro seleccionado en forma apropiada. La conexión universal de Hooke es quizá el ejemplo más conocido de un mecanismo esférico.

Eslabonamientos esféricos son aquellos que se componen exclusivamente de pares de revolución. Un par esférico no producirá restricciones adicionales, y por ende sería equivalente a una abertura en la cadena cinemática, en tanto que todos los demás pares inferiores poseen movimientos no esféricos. En el caso de eslabonamientos esféricos, los ejes de todos los pares de revoluta se deben intersectar en un punto.

I.8.3 Mecanismos espaciales

Estos no incluyen restricción alguna en los movimientos relativos de las partículas, la transformación del movimiento no es necesariamente coplanar, como tampoco es preciso que sea concéntrica. Un mecanismo espacial puede poseer partículas con lugares geométricos de doble curvatura. Cualquier eslabonamiento que comprenda un par de tornillo, es un ejemplo de un mecanismo espacial ya que el movimiento relativo dentro del par de tornillo es helicoidal.

La categoría abrumadoramente más numerosa de mecanismos planos y la de los esféricos son apenas unos cuantos casos especiales, o subconjuntos, de la categoría general de mecanismos espaciales. Estos se obtienen como una consecuencia de la geometría especial en las orientaciones particulares de los ejes de sus pares.

Considere un eslabonamiento de cuatro barras, que cuenta con cuatro eslabones conectados por cuatro pasadores cuyos ejes son paralelos. Este “paralelismo” es una hipótesis matemática y no una realidad. Los ejes tal y como se producen en un taller, sin importar lo bueno que este sea serán aproximadamente paralelos. Si están muy fuera del paralelismo habrá cierto amarre en el mecanismo y sólo se moverá debido a que los eslabones “rígidos” se flexionan y tuercen, produciendo cargas en los cojinetes. Si los ejes son casi paralelos, el mecanismo opera debido a la holgura de los rodamientos o flexibilidad de los eslabones. Una forma común de compensar las pequeñas faltas de paralelismo es conectar los eslabones con cojinetes autoalineantes, que son en realidad articulaciones esféricas que permiten rotaciones tridimensionales.

I.9 ANÁLISIS DE RESTRICCIÓN

El número de grados de libertad de un cuerpo es el número de coordenadas necesarias para especificar únicamente la posición relativa con respecto a un marco de referencia. De manera similar podemos llamar grados de libertad del sistema al *número mínimo de coordenadas necesarias para especificar únicamente la posición de todos los miembros de un sistema de cuerpos rígidos*. De hecho utilizaremos el concepto número de grados de libertad en tres distintas pero significativas formas. El primero es el número de grados de libertad de un cuerpo relativo

referidas al marco de referencia el cual debe estar definido. El segundo es el número de grados de libertad de la cadena cinemática. Y el tercero es el número de grados de libertad del mecanismo.

I.9.1 Conectividad

El número de grados de libertad de una articulación o **conectividad**. En adición a este término se aplicará al número de libertad relativa entre dos cuerpos. Igualmente, se utilizará el número de grados de libertad del mecanismo como **la movilidad** de la conexión.

Si una articulación cinemática se forma entre dos cuerpos rígidos que no están conectados **la conectividad**^[2] de la articulación es el número de grados de libertad de movimiento o también de uno de los dos cuerpos unidos, con respecto al otro.

I.9.2 Movilidad

La movilidad^[2] de un mecanismo es el número mínimo de coordenadas necesarias para especificar la posición de todos los eslabones del mecanismo con respecto a uno de ellos en particular seleccionado como marco de referencia o eslabón fijo, o el número de entradas que se necesita proporcionar para crear una salida predecible.

La movilidad, o número de grados de libertad de una conexión, se utilizada para determinar el número de variables necesarias para especificar la posición de todos los puntos en todos los miembros de la conexión. Estos se pueden localizar en función del tiempo. Una conexión tiene una movilidad de uno o más. Casi todas las conexiones tienen un grado de libertad. Sin embargo en la práctica del diseño moderno, las conexiones con dos o más grados de libertad están comenzando a ser más comunes. Si la movilidad es cero, o es negativa, como se determina con las ecuaciones pertinentes, entonces el ensamble es una estructura. Si la movilidad es cero la estructura esta estáticamente determinada, lo que significa que ningún movimiento es posible. Si la movilidad es negativa, la estructura está precargada lo que significa que no habrá ningún movimiento y además algunos esfuerzos pueden estar presentes en el momento del ensamble. La figura 1.11 muestra ejemplos de estos tres casos.

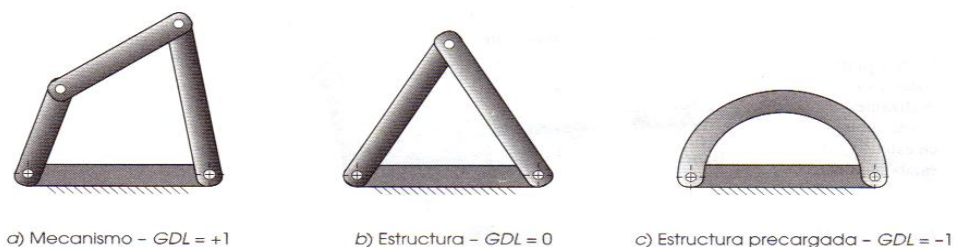


Figura 1.11 a) Mecanismos, b) Estructuras, c) Estructuras precargadas

I.9.3 Movilidad de mecanismos planos

Se debe considerar el número de eslabones, el número de juntas (pares cinamáticos o articulaciones) e interacciones entre ellos. La movilidad de cualquier ensamble de eslabones se puede pronosticar con una investigación de la condición de **Gruebler**^[3]. Cualquier eslabón en un plano tiene tres grados de libertad. Por consiguiente un sistema de **L** eslabones no conectados en el mismo plano tendrá **3L GDL** como se muestra en la figura 1.12, donde los dos eslabones no

²KENNETH J. WALDRON & GARY L. KINZEL.(1999). *Kinematics, Dynamics, And Design Of Machinery*. Jonh Wiley & Sons, Inc New York, p.12.

³Gruebler, M. (1917). *Getriebelehre*. Springer Verlag: Berlin

conectados tienen un total de **6 GDL**. Cuando estos eslabones están conectados por una **junta completa** (en la misma figura inciso b) Δy_1 y Δy_2 se combina como en Δy , y Δx_1 y Δx_2 en Δx . Esto elimina dos **GDL** y deja **4**. En la misma figura inciso c) la semijunta elimina sólo un **GDL** (porque una semijunta tiene **2 GDL**) y deja el sistema de dos eslabones conectados por una semijunta con un total de **5 GDL**. Además, cuando cualquier eslabón está conectado a tierra o unido al marco de referencia, se eliminarán sus **3 GDL**. Este razonamiento nos lleva a la ecuación de **Gruebler**.

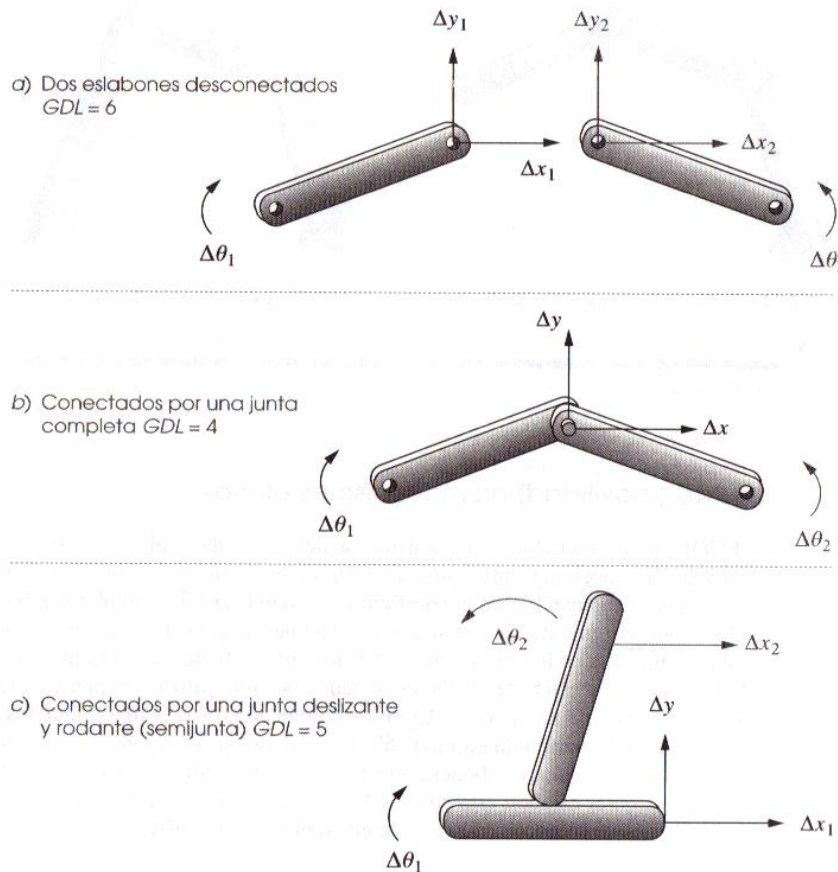


Figura 1.12 Las articulaciones eliminan grados de libertad

$$M = 3L - 2J - 3G \dots\dots\dots 1.1$$

Donde: M=grados de libertad o movilidad

L=número de eslabones

J=número de juntas

G=número de eslabones conectados a tierra

Es conveniente observar que en cualquier mecanismo real, aun cuando más de un eslabón de la cadena cinemática esté conectada al tierra, el efecto neto será crear un eslabón unido a tierra de

mayor orden y más grande, ya que sólo puede haber un plano de bancada, por lo tanto G siempre es uno y la ecuación de Gruebler se convierte a:

$$M = 3(L - 1) - 2J \dots\dots\dots 1.2$$

El valor de J en las dos últimas ecuaciones refleja el valor de todas las juntas en el mecanismo. Esto es, las semijuntas cuentan con ½ porque sólo eliminan un **GDL**. Lo anterior es menos confuso si se utiliza la modificación propuesta por **Kutzbach** a la ecuación de **Gruebler** dada por:

$$M = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2 \dots\dots\dots 1.3$$

Donde: M=grados de libertad o movilidad

L=número de eslabones

J₁=número de juntas de 1 GDL

J₂=número de juntas de 2 GDL

El valor de J₁ y J₂ en estas ecuaciones debe ser determinado con cuidado para considerar todas las juntas completas semijuntas y múltiples en cualquier eslabonamiento. Las juntas múltiples cuentan con un **GDL** menor que el número de eslabones unidos en dicha junta y se agrega a la categoría completa (J₁). El **GDL** de cualquier mecanismo se puede determinar rápidamente a partir de esta expresión antes de que se invierta tiempo en el diseño más detallado. Es importante notar que en esta ecuación no se incluye información sobre tamaños y formas de los eslabones.

I.9.4 Movilidad en mecanismos espaciales

El método utilizado para determinar la movilidad de un mecanismo plano se puede ampliar para tres dimensiones. Cada eslabón no conectado entres espacios tiene 6 GDL y uno de los 6 pares inferiores se puede utilizar para conectarlos, al igual que los pares superiores con más libertad. Una junta de un grado de libertad elimina 5 GDL, una de dos GDL elimina 4 etc. La bancada elimina 6 GDL esto conduce a la ecuación de movilidad de **Kutzbach** para eslabonamientos espaciales.

$$M = 6(L - 1) - 5J_1 - 4J_2 - 3J_3 - 2J_4 - J_5 \dots\dots\dots 1.4$$

I.9.5 Paradojas

Como el criterio de Gruebler no presta atención a las formas y tamaños de los eslabones, *puede proporcionar resultados equivocados* en el caso de configuraciones geométricas únicas por ejemplo la figura **1.13 a)** muestra una estructura (**GDL=0**) con los eslabones ternarios de forma arbitraria. Este arreglo de eslabones en ocasiones se llama “**quinteto E**” y al hecho de que tiene cinco eslabones, incluida la bancada.

La figura **1.13 b)** muestra el mismo quinteto **E** con eslabones ternarios rectos, paralelos y con nodos equiespaciados. Los tres binarios también son iguales en longitud. Como se puede ver, esta configuración geométrica peculiar se moverá a pesar de que la condición de **Gruebler** diga lo contrario.

La figura **1.13 c)** muestra un mecanismo muy común que no cumple el criterio de **Gruebler**. La junta entre las dos ruedas puede ser prefijada para que no permita el deslizamiento, siempre que se disponga de la suficiente fricción. Si no ocurre deslizamiento, entonces ésta es una junta de un grado de libertad, o completa, que permite sólo movimiento angular relativo (**Δθ**) entre las ruedas.

Con esta suposición, existen 3 eslabones y 3 juntas completas, y de la ecuación de **Gruebler** se predice un GDL cero. Sin embargo, este eslabonamiento si se mueve $GDL=1$, por que la distancia entre centros, o la longitud del eslabón 1, es exactamente igual a la suma de los radios de las dos ruedas.

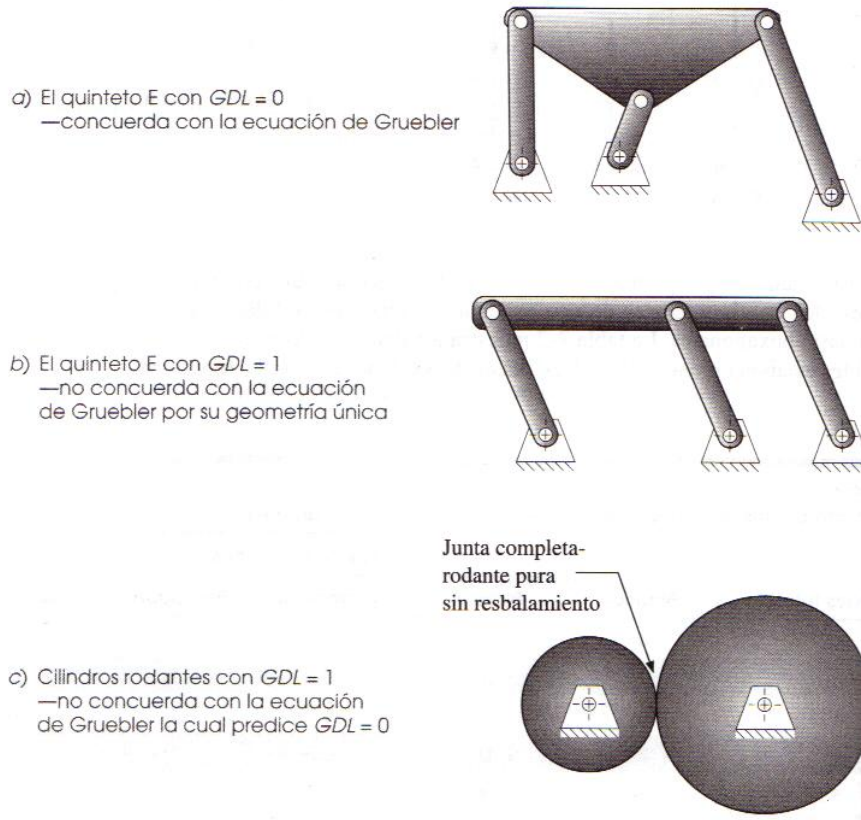


Figura 1.13 Paradojas de Gruebler; eslabonamientos que no se comportan como predice la ecuación de Gruebler

1.9.6 Inversión

Una inversión es creada por la conexión a tierra de un eslabón diferente en la cadena cinemática. Por tanto existen muchas inversiones de un eslabonamiento.

Los movimientos que resultan de cada inversión pueden ser muy diferentes, pero algunas inversiones de un eslabonamiento pueden producir movimientos similares a otras inversiones del mismo eslabonamiento. En estos casos, sólo algunas de las inversiones pueden tener movimientos enteramente diferentes. Se denotara las *inversiones que tienen movimientos enteramente diferentes* como **inversiones distintas**.

La figura 1.14 muestra cuatro inversiones del eslabonamiento de corredera-manivela de cuatro barras y todas tienen movimientos distintos. La inversión número 1, con el eslabón 1 como bancada y su corredera en traslación pura, es la más común y se utiliza en motores de pistones. La inversión número 2 se obtiene al fijar el eslabón 2 y produce el mecanismo de retorno rápido Whitworth o limadora de manivela, en el que la corredera tiene movimiento complejo. La inversión número 3 se obtiene al fijar el eslabón 3 y da a la corredera rotación pura. La inversión número 4 se obtiene al fijar el eslabón 4 y se utiliza en mecanismos manuales de bombas de pozo, en los

que la manija es el eslabón 2 (extendido) y el eslabón 1 baja hasta la tubería del pozo para montar un pistón en su extremo inferior.

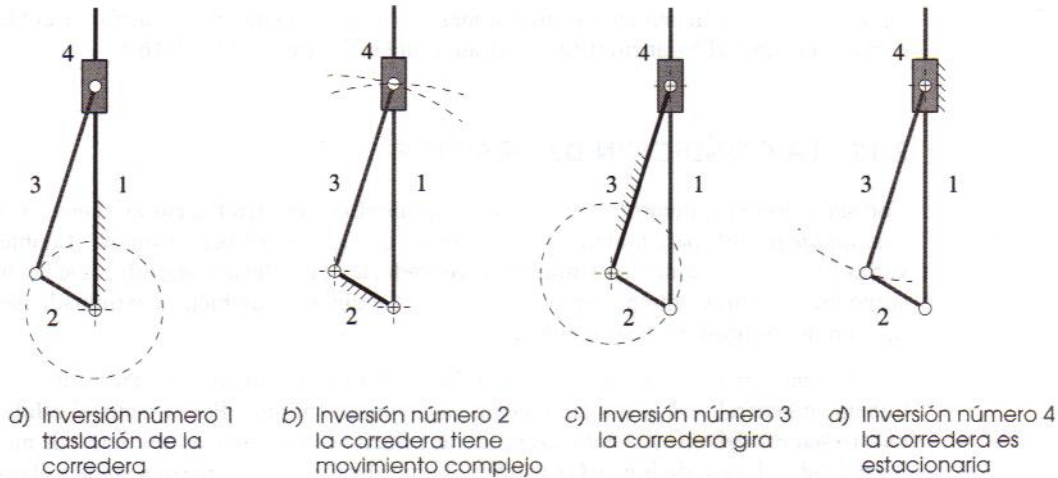


Figura 1.14 Cuatro inversiones distintas del mecanismo de manivela-corredera de cuatro barras (cada eslabón negro es estacionario todos los eslabones de tono claro se mueven)

I.10 CONDICIÓN DE GRASHOF

Con anterioridad se demostró que el eslabonamiento de cuatro barras es el mecanismo articulado más simple posible para movimiento controlado, con grado de libertad simple. También aparece con varias formas tales como la de manivela-corredera y la de leva seguidor. De hecho es el dispositivo más común y omnipresente utilizado en maquinaria. También es extremadamente variado en función de los tipos de movimiento que puede generar.

La sencillez es la marcha de un buen diseño. La menor cantidad de partes que puede realizar el trabajo en general será la solución menos cara y más confiable. Por lo tanto, el eslabonamiento de cuatro barras deberá estar entre las primeras soluciones a problemas de control de movimiento a ser investigado. La **condición de Grashof**^[4] es una relación muy simple que predice el comportamiento de rotación o rotabilidad de las inversiones de un eslabonamiento de cuatro barras basado sólo en las longitudes de los eslabones.

Sea:

S= longitud del eslabón más corto

L= longitud del eslabón más largo

P= longitud de un eslabón restante

Q= longitud del otro eslabón restante

Luego si: $S + L \leq P + Q$1.5

⁴Grashof, F. (1883). *Theoretische Maschinenlehre*, Vol 2. Voss: Hamburgo

El eslabonamiento **es de Grashof** si por lo menos un eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto al plano de la bancada. Esta se llama cadena cinemática de **clase I**. Si la desigualdad no es cierta, entonces el eslabonamiento **no es de Grashof** y ningún eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto a cualquier otro eslabón. Ésta es una cadena cinemática de **clase II**.

Hay que observar que los enunciados anteriores se aplican sin importar el orden de ensamble de los eslabones. Esto es, la determinación de la condición de Grashof puede hacerse con base en un conjunto de eslabones no ensamblados. Ya sea que se ensamble después en una cadena cinemática en S, L, P, Q o S, P, L, Q o en cualquier otro orden no cambiara la condición de Grashof.

Los movimientos posibles de un eslabonamiento de cuatro barras dependerán tanto de la condición de Grashof como de la inversión elegida. Las inversiones se definirán con respecto al eslabón más corto. Los movimientos son:

I.10.1 En el caso de la clase I, $S+L < P+Q$

Si se fija cualquier eslabón adyacente al más corto se obtiene un mecanismo **manivela-balancín**, donde el eslabón más corto girara por completo y el otro eslabón oscilara pivoteado a la bancada.

Si se fija el eslabón más corto, se obtendrá un **doblo-manivela**, en la que ambos eslabones pivoteados a la bancada realiza revoluciones completas, así como lo hace el acoplador.

Si se fija el eslabón opuesto al más corto, se obtendrá un **doblo-balancín** de Grashof, en el que ambos eslabones pivoteados a la bancada oscilaran y solo el acoplador realiza una revolución completa.

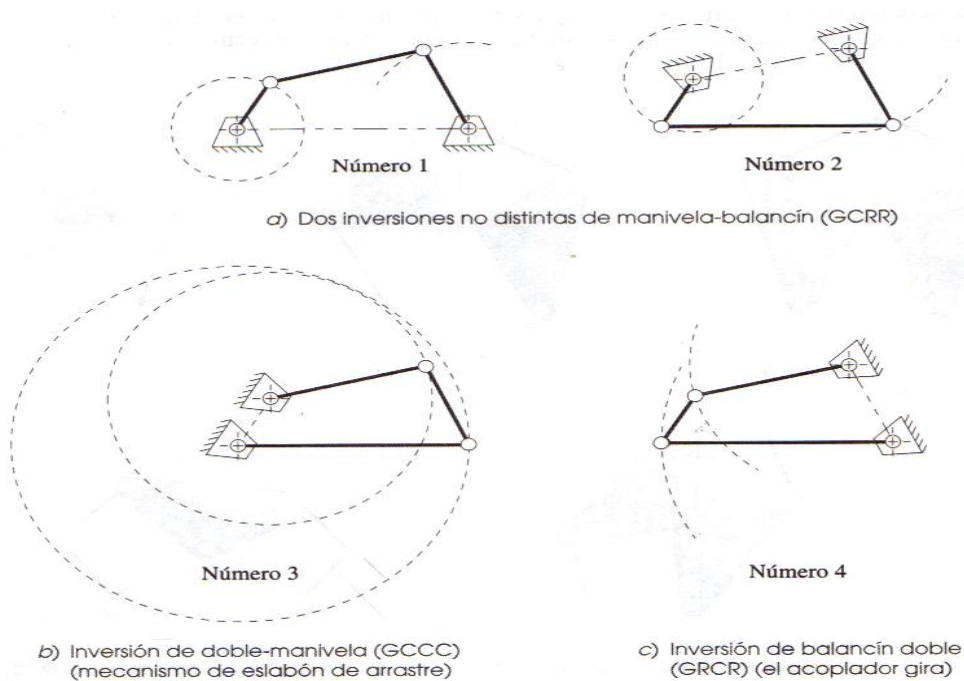


Figura 1.15 Todas las inversiones del eslabonamiento de Grashof de cuatro barras

I.10.2 En el caso de la clase II, $S+L>P+Q$:

Todas las inversiones serán **balancines triples** ^[5] en los que ningún eslabón puede girar por completo.

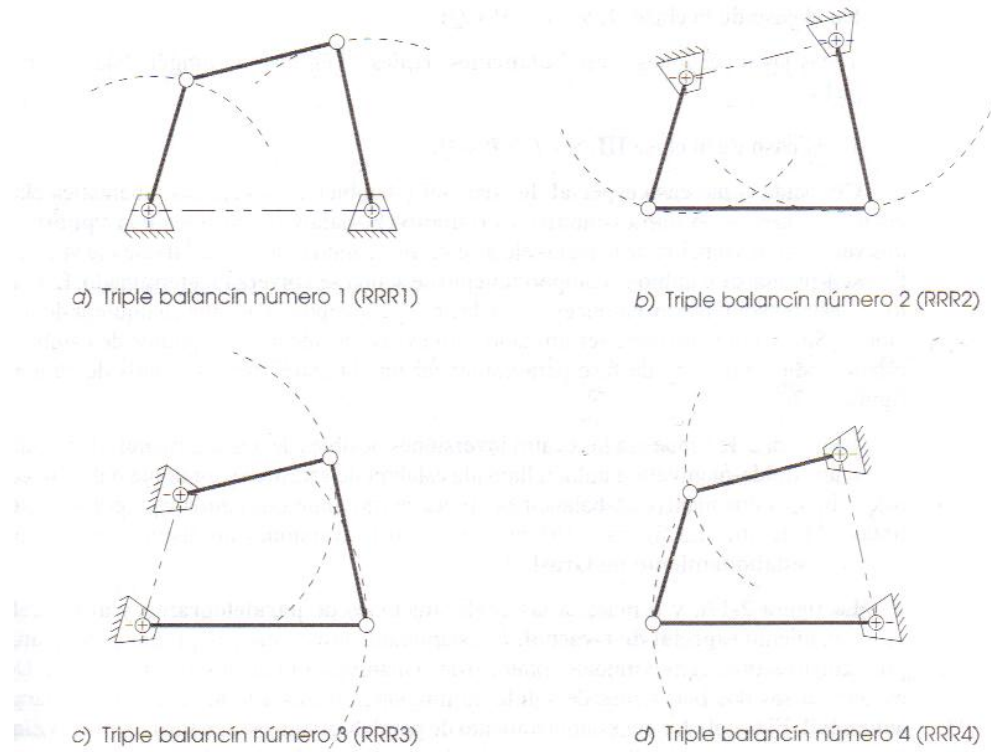


Figura 1.16 Todas las inversiones del eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof son balancines triples

⁵Paul, B. (1979). *A Reassessment of Grashof's Criterion*. Journal of Mechanical Design, **101**(3) pp.515-518.

I.10.3 En el caso de la clase III. $S+L=P+Q$

Conocida como **el caso especial de Grashof** y también como cadena cinemática **clase III**, todas las inversiones serán **dobles-manivelas** o **manivela-balancín**, pero tendrá “**puntos de cambio**”, dos veces por revolución, de la manivela de entrada cuando todos los eslabones se vuelven colineales. En estos puntos de cambio el comportamiento de salida se volverá indeterminado. El comportamiento del eslabonamiento es entonces impredecible ya que puede asumir cualquiera de dos configuraciones. Su movimiento debe ser limitado para evitar que alcance los puntos de cambio o utilizar un eslabón adicional fuera de fase para garantizar un “arrastre” de los puntos de cambio, véase la figura 1.17 c.

La figura 1.15 muestra las cuatro inversiones posibles del caso **Grashof**: dos manivelas-balancines, un doble-manivela (también llamada eslabón de arrastre) y un doble balancín con acoplador rotatorio. Las dos manivelas-balancines producen movimientos similares y por lo tanto no son distintas una de otra. La figura 1.16 muestra cuatro inversiones no distintas, todos los balancines triples de eslabonamientos **no Grashof**.

La figura 1.17 a y b muestra las configuraciones de **paralelogramo** y **antiparalelogramo** del eslabonamiento **especial de Grashof**. El eslabonamiento de paralelogramo es muy útil, ya que duplica exactamente el movimiento rotatorio de la manivela impulsora en la impulsada, un uso

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

común es el acoplar los dos balancines de salida de limpiaparabrisas a todo el ancho del parabrisas de un automóvil. El acoplador del eslabonamiento de paralelogramo está en traslación curvilínea, y permanece en el mismo ángulo mientras que todos los puntos en ella describen trayectorias circulares idénticas. A menudo se utiliza para este movimiento paralelo, en la puerta trasera de un camión y en robots industriales.

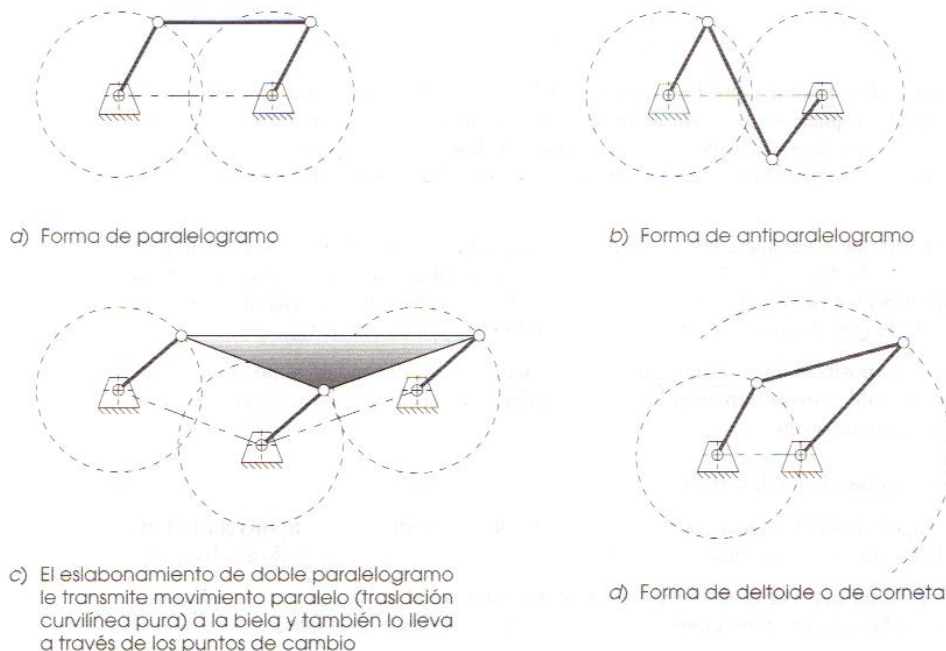


Figura 1.17 Algunas formas del eslabonamiento de Grashof de caso especial

El eslabonamiento en configuración de antiparalelogramo (también llamado “mariposa” o “corbata de moño”) también es una doble manivela, pero la manivela de salida tiene una velocidad angular diferente a aquella de la manivela de entrada. Se puede observar que los puntos de cambio permiten que el eslabonamiento cambie de manera impredecible entre las formas de paralelogramo y antiparalelogramo cada 180 grados a menos que se utilicen algunos eslabones más para sostener las posiciones. Esto se puede lograr agregando un eslabonamiento acompañante desfasado acoplado a la misma manivela, como se muestra en la figura 1.17 c). Una aplicación común de este eslabonamiento de doble paralelogramo fue utilizado en las locomotoras de vapor, conectaba las ruedas motrices entre sí. Los puntos de cambio se manejaban al proporcionar el eslabonamiento duplicado, 90 grados fuera de fase, al otro lado del eje de la locomotora. Cuando un lado estaba en un punto de cambio, el otro lo impulsa.

La disposición de **doble paralelogramo** mostrada en la figura 1.17 c) es bastante útil, ya que produce un acoplador en traslación que permanece horizontal en todas las posiciones. Las dos etapas de paralelogramo del eslabonamiento están desfasadas, de modo que cada una lleva a la otra a sus puntos de cambio. La figura 1.17 c) muestra la configuración **deltoide** o de **cometa** que es una doble-manivela en la cual la manivela más corta realiza dos revoluciones por cada una de las realizadas por la manivela larga. Este también se llama eslabonamiento **isósceles** o mecanismo **Galloway**, en honor de su descubridor.

No hay nada bueno o malo con respecto a la condición de Grashof. Los eslabonamientos de las tres clases son igualmente útiles en su lugar. Si, por ejemplo, es necesario un eslabonamiento de

limpiaparabrisas impulsado por un motor, puede que se desee un eslabonamiento de manivela-balancín Grashof de caso no especial, con el fin de tener un eslabón rotatorio para la entrada del motor, más una etapa de configuración de paralelogramo para acoplar los dos lados como antes se describió. Si es necesario controlar los movimientos de una rueda de automóvil sobre los baches, puede que se desee un eslabonamiento de balancín triple no Grashof para movimiento oscilatorio de desplazamiento corto. Si se desea duplicar con exactitud algún movimiento de entrada en algún lugar remoto, puede que se desee un eslabonamiento de paralelogramo Grashof de caso especial, como el que se utiliza en la máquina de dibujo. En cualquier caso, esta condición determinada de manera simple dice mucho sobre el comportamiento esperado de un diseño propuesto de eslabonamiento de cuatro barras antes de la construcción de modelos o prototipos.

I.11 CLASIFICACIÓN DE ESLABONAMIENTOS DE CUATRO BARRAS

Barker^[6] desarrollo un esquema de clasificación que permite predecir el tipo de movimiento que se puede esperar de un eslabonamiento de cuatro barras con base en los valores de sus relaciones de eslabones. Las características de movimiento angular de un eslabonamiento son independientes de los valores absolutos de las longitudes de sus eslabones. Esto permite que las longitudes de los eslabones se normalicen al dividir tres de ellas entre la cuarta para crear relaciones dimensionales que definan su geometría.

Sean las longitudes de los eslabones designados r_1, r_2, r_3, r_4 (todas positivas y no cero), donde el subíndice 1 indica la bancada, 2 el eslabón impulsor, 3 el acoplador y 4 el eslabón restante (de salida). Las relaciones de eslabón se forman entonces al dividir cada longitud de eslabón entre r_2 y se obtiene: $\lambda_1 = r_1/r_2, \lambda_3 = r_3/r_2, \lambda_4 = r_4/r_2$.

Cada eslabón se designará con una letra basada en su tipo de movimiento cuando se conecta a los demás eslabones. Si un eslabón puede realizar una revolución completa con respecto a los demás eslabones, se llama manivela (**C**), y si no, balancín(**R**). Al movimiento del eslabonamiento ensamblado basado en su condición de Grashof e inversión se le puede dar entonces un código de letra tal como GCRR para una manivela-balancín de Grashof o GCCC para un mecanismo de doble-manivela Grashof (eslabón de arrastre). Los diseñadores de movimiento C y R siempre se mencionan con el fin de eslabón de entrada, acoplador, eslabón de salida. El prefijo G indica un eslabonamiento de Grashof, S un caso especial de Grashof (punto de cambio) y sin prefijo un eslabonamiento de no Grashof.

La tabla 1.1 muestra 14 tipos de eslabonamiento de cuatro barras de Barker basados en este esquema de designación. Las primeras cuatro son las inversiones Grashof, las cuatro siguientes son balancines triples de no Grashof y las últimas seis son eslabonamientos Grashof de caso especial.

Baker también define un “espacio de solución” cuyos ejes son las relaciones de eslabón $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ como se muestra en la figura 1.18 . **Estos valores de las relaciones teóricamente se extienden hasta el infinito, pero para cualquiera eslabonamiento práctico, las relaciones pueden limitarse a un valor razonable.**

Con el fin de que los cuatro eslabones se ensamblen, el más largo debe ser más corto que la suma de los otros tres.

$$L < (S + P + Q)$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Tabla 1.1 Clasificación completa de Barker de mecanismos de cuatro barras planos. Tomada de la referencia [6], s=eslabón más corto, l=eslabón más largo, Gxxx=Grashof, RRRx=no Grashof, Sxx=Caso especial

Tipo	s + l vs. p + q	Inversión	Clase	Designación de Barker	Código	También conocido como
1	<	$L_1 = s =$ bancada	I-1	manivela-manivela-manivela de Grashof	GCCC	doble manivela
2	<	$L_2 = s =$ entrada	I-2	manivela-balancín-balancín de Grashof	GCRR	manivela-balancín
3	<	$L_3 = s =$ acoplador	I-3	balancín-manivela-balancín de Grashof	GRCR	doble balancín
4	<	$L_4 = s =$ salida	I-4	balancín-balancín-manivela de Grashof	GRRC	balancín-manivela
5	>	$L_1 = l =$ bancada	II-1	balancín-balancín-balancín clase 1	RRR1	triple balancín
6	>	$L_2 = l =$ entrada	II-2	balancín-balancín-balancín clase 2	RRR2	triple balancín
7	>	$L_3 = l =$ acoplador	II-3	balancín-balancín-balancín clase 3	RRR3	triple balancín
8	>	$L_4 = l =$ salida	II-4	balancín-balancín-balancín clase 4	RRR4	triple balancín
9	=	$L_1 = s =$ bancada	III-1	manivela-manivela-manivela con punto de cambio	SCCC	doble manivela SC*
10	=	$L_2 = s =$ entrada	III-2	manivela-balancín-balancín con punto de cambio	SCR	manivela-balancín SC
11	=	$L_3 = s =$ acoplador	III-3	balancín-manivela-balancín con punto de cambio	SR	doble balancín SC
12	=	$L_4 = s =$ salida	III-4	balancín-balancín-manivela con punto de cambio	SR	balancín-manivela SC
13	=	dos pares iguales	III-5	punto de cambio doble	S2X	paralelogramo o deltoide
14	=	$L_1 = L_2 = L_3 = L_4$	III-6	punto de cambio triple	S3X	cuadrado

Si $L=(S+P+Q)$, entonces los eslabones pueden ser ensamblados pero no se moverán, así que esta condición proporciona un criterio para separar las regiones de no movilidad de las regiones que permiten el movimiento dentro del espacio de solución. La aplicación de este criterio en función de las tres relaciones de eslabonamiento definen cuatro planos de movilidad cero que limitan el espacio de solución.

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \dots \dots 1.6$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 + 1 + \lambda_4 \dots \dots 1.7$$

$$\lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_3 + 1 \dots \dots 1.8$$

$$\lambda_1 = 1 + \lambda_3 + \lambda_4 \dots \dots 1.9$$

La aplicación de la condición de Grashof $S+L=P+Q$ (en función de las relaciones de eslabonamiento definen tres planos adicionales en los que todos los mecanismos de punto de cambio.

$$1 + \lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_4 \dots \dots 1.20$$

$$1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_4 \dots \dots 1.21$$

$$1 + \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_3 \dots \dots 1.22$$

El octante positivo de este espacio, limitado por los planos $\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_3 - \lambda_4$ y los cuatro planos de movilidad cero (ecuaciones 16 a 19) contienen ocho volúmenes que están separados por los planos de punto de cambio (ecuaciones 20-22). Cada volumen contiene mecanismos únicos para una de las primeras ocho clasificaciones de la tabla 1.1. Estos ocho volúmenes están en contacto uno con el otro en el espacio de solución, pero para mostrar sus formas se "separaron

las piezas” en la figura 1.18. Los seis mecanismos de punto de cambio restantes de la tabla 1.1 existen sólo en los planos de punto de cambio que son las caras de contacto entre los ocho volúmenes. Para más detalles sobre este espacio de solución y el sistema de clasificación de Barker de los que permite el espacio en esta tesis, vea la referencia ^[6]

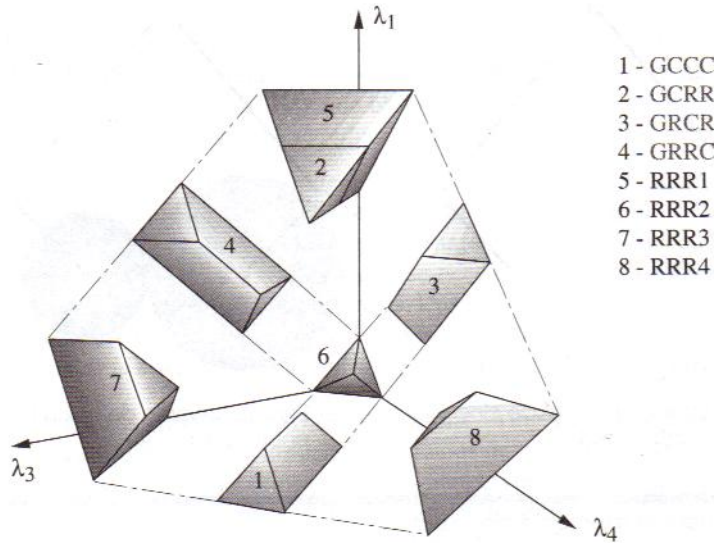


Figura 1. 18 Espacio para la solución de Barker del eslabonamiento de cuatro barras. Adaptado de la referencia [6]

⁶Barker, C. (1985). A complete Classification of Planar Fourbar Linkages. Mechanism And Machine Theory, 20(6), pp.535-554

Capítulo II ANÁLISIS ANALÍTICO DE MECANISMOS

II.1 INTRODUCCIÓN

Existen varias técnicas graficas para encontrar la posición, velocidad, y aceleración de mecanismos. Sin embargo, hay diversas circunstancias por las cuales es preferible utilizar técnicas analíticas que pueden emplearse en la realización de un programa de computadora, en cualquier circunstancia en la que la repetitividad o un considerable análisis se requieren. El uso de la computadora es altamente deseable.

Las restricciones geométricas asociadas al mecanismo pueden ser formuladas utilizando vectores de desplazamiento, velocidad, y ecuaciones cerradas de aceleración. La ecuación de desplazamiento cerrado está basada en la observación de que se pueden trazar dos circuitos equivalentes conectando puntos en el mismo vector de cierre. Por ejemplo en un mecanismo de cuatro barras como el mostrado en la figura 2.1 se puede llegar al punto C partiendo del punto A también por el camino del punto B o por el punto D.

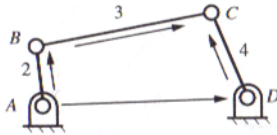


Figura 2.1 Cierre de un mecanismo de cuatro barras

Es conveniente representar los términos de las ecuaciones de cierre por los vectores y los procedimientos desarrollados, especialmente para mecanismos planos y también se pueden aplicar de la misma forma para aproximarlas a los mecanismos espaciales. Otro método popular para los mecanismos planos, el cual involucra un poco más de trabajo computacional, es el de los números complejos, en el que las componentes del vector son expresadas en un término real y un término imaginario.

La tendencia es trabajar con coordenadas transformando los operadores. Para esta se establece un grupo de coordenadas del cuerpo fijo en cada junta, y el producto de una serie de coordenadas de junta-junta transformando los operadores. Cuando este producto continúa alrededor del cierre del mecanismo entero, este debe ser igualado al operador identidad. La ecuación operador resultante puede ser manipulada, si se requiere y equiparar los elementos correspondientes.

II.2 REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN.

II.2.1 Representación de la posición.

Para el propósito de desarrollar un modelo analítico, se puede definir la posición de la cadena de puntos por una cadena de vectores. El punto será asociado con la unión en un mecanismo de la misma manera, pero ellos no deben fijarse a una junta específica, como se muestra en la Fig. 2.2.

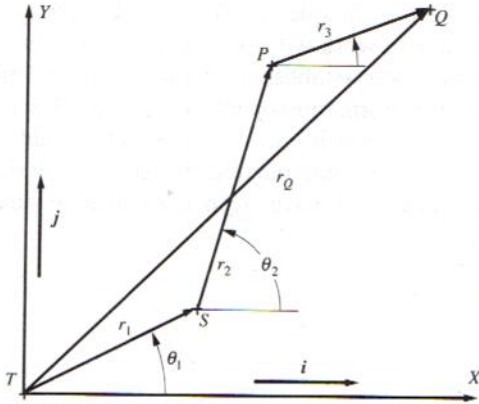


Figura 2.2 Representación de la cadena de puntos para fijar los vectores

La posición del punto Q en el marco de referencia fijo es:

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \dots \dots \dots \mathbf{2.1}$$

Cada vector se representa por una flecha \mathbf{r}_i y el ángulo θ_i como se muestra en la figura 2.3. Todos los ángulos se miden en sentido anti horario partiendo de la línea paralela que representa el eje x fijo al marco de referencia.

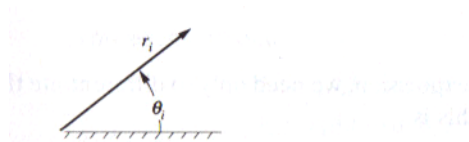


Figura 2.3 Notación utilizada para los vectores

De modo que para la ecuación 2.1 en las componentes x y y haciendo uso de los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} respectivamente, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= r_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) \\ \mathbf{r}_2 &= r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) \\ \mathbf{r}_3 &= r_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \mathbf{2.2}$$

$$\mathbf{r}_k = r_k(\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) \quad , \quad k=1,2,3 \quad \dots \dots \dots \mathbf{2.3}$$

II.2.2 Representación de la velocidad.

Para determinar la velocidad del punto \mathbf{Q} , \mathbf{r}_Q , se puede diferenciar, de modo que:

$$\mathbf{v}_Q = \dot{\mathbf{r}}_Q = \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}}_3 \dots \dots \dots \mathbf{2.4}$$

Donde

$$\dot{r}_k = \frac{dr_k}{dt} \dots\dots\dots 2.5$$

Nótese que en general, tanto la magnitud como la dirección de r_k pueden cambiar cuando se deriva la ecuación 2.3 de modo que:

$$\dot{r}_k = \dot{r}_k(\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) + r_k(-\dot{\theta}_k \sin \theta_k \mathbf{i} + \dot{\theta}_k \cos \theta_k \mathbf{j}) \dots\dots\dots 2.6$$

O

$$\dot{r}_k = (\dot{r}_k \cos \theta_k - r_k \dot{\theta}_k \sin \theta_k) \mathbf{i} + (\dot{r}_k \sin \theta_k + r_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k) \mathbf{j} \dots\dots\dots 2.7$$

Si r_k es el vector que define la posición relativa entre dos puntos **P** y **Q**, y el cuerpo **B** está moviéndose relativo al marco de referencia **R** como se muestra en la figura 2.4, de modo que:

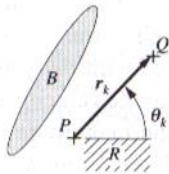


Figura 2.4 Vector de posición entre dos puntos

$$\dot{r}_k(\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) = {}^B \mathbf{v}_{Q/P} \dots\dots\dots 2.8$$

Y

$$r_k \dot{\theta}_k(-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) = {}^R \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{Q/P} \dots\dots\dots 2.9$$

La ecuación 2.8 puede ser verificada reconociendo que ésta da la componente de la velocidad asociada con la magnitud del vector entre los dos puntos. Esta componente va en la dirección del vector r_k . El segundo término puede ser verificado calculando el producto cruz. Reconociendo que:

$${}^R \boldsymbol{\omega}_B = \dot{\theta}_k \mathbf{k}$$

Y

$$\mathbf{r}_{Q/P} = \mathbf{r}_k = r_k(\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j})$$

De modo que

$${}^R\omega_B \times \mathbf{r}_{Q/P} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_k \\ r_k \cos \theta_k & r_k \sin \theta_k & 0 \end{bmatrix} = -\dot{\theta}_k r_k \sin \theta_k \mathbf{i} + \dot{\theta}_k r_k \cos \theta_k \mathbf{j} = \dot{\theta}_k r_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j})$$

Así que la ecuación 2.4 puede ser expresada como:

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{k=1}^3 \dot{r}_k (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) + r_k (-\dot{\theta}_k \sin \theta_k \mathbf{i} + \dot{\theta}_k \cos \theta_k \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.10}$$

O

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{k=1}^3 (\dot{r}_k \cos \theta_k - r_k \dot{\theta}_k \sin \theta_k) \mathbf{i} + (\dot{r}_k \sin \theta_k + r_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k) \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{2.11}$$

II.2.3 Representación de la aceleración

Para obtener la expresión de la aceleración se necesita diferenciar la expresión de la velocidad, esto es:

$$\mathbf{a}_Q = \ddot{\mathbf{r}}_Q = \ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_3 \dots \dots \dots \mathbf{2.12}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}$$

Porque los vectores se han definido de la misma manera como en la figura 2.3, la forma para derivarlos debe ser la misma. Por lo tanto, se puede desarrollar la expresión con un vector general \mathbf{r}_k .

Cabe hacer notar que una vez más, ambas magnitud y dirección de \mathbf{r}_k puede cambiar, de modo que para diferenciar la ecuación 2.6 utilizando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \ddot{r}_k (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) + r_k \ddot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) - r_k \dot{\theta}_k^2 (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) + 2\dot{r}_k \dot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.13}$$

O

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \left[(\ddot{r}_k - r_k \dot{\theta}_k^2) \cos \theta_k - (r_k \ddot{\theta}_k + 2\dot{r}_k \dot{\theta}_k) \sin \theta_k \right] \mathbf{i} + \left[(\ddot{r}_k - r_k \dot{\theta}_k^2) \sin \theta_k + (r_k \ddot{\theta}_k + 2\dot{r}_k \dot{\theta}_k) \cos \theta_k \right] \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{2.14}$$

Como en este caso para la ecuación de la velocidad se pueden comparar las componentes del vector indicado en la ecuación 2.13.

$$\dot{r}_k (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) = {}^B\alpha_{Q/P} \dots \dots \dots \mathbf{2.15}$$

$$r_k \dot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) = {}^R\alpha_B \times \mathbf{r}_{Q/P} \dots \dots \dots \mathbf{2.16}$$

$$-r_k \dot{\theta}_k^2 (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) = {}^R \boldsymbol{\omega}_B \times ({}^R \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{Q/P}) \dots \dots \dots \mathbf{2.17}$$

Y

$$2\dot{r}_k \dot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) = 2{}^R \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{v}_{Q/P} \dots \dots \dots \mathbf{2.18}$$

Estas pueden ser verificadas por diferentes cálculos.

Si se adhieren las componentes individuales, se puede obtener la aceleración del punto Q

$$\mathbf{a}_Q = \sum_{k=1}^3 \left[\ddot{r}_k (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) + r_k \ddot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) - r_k \dot{\theta}_k^2 (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) + 2\dot{r}_k \dot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) \right] \dots \dots \dots \mathbf{2.19}$$

O

$$\mathbf{a}_Q = \sum_{k=1}^3 \left[\left[(\ddot{r}_k - r_k \dot{\theta}_k^2) \cos \theta_k - (r_k \ddot{\theta}_k + 2\dot{r}_k \dot{\theta}_k) \sin \theta_k \right] \mathbf{i} + \left[(\ddot{r}_k - r_k \dot{\theta}_k^2) \sin \theta_k + (r_k \ddot{\theta}_k + 2\dot{r}_k \dot{\theta}_k) \cos \theta_k \right] \mathbf{j} \right] \dots \dots \dots \mathbf{2.20}$$

II.2.4 Casos especiales.

Las ecuaciones 2.6, 2.13 o 2.7, 2.14 son las formas más generales de las ecuaciones de velocidad y aceleración. Sin embargo, en muchos mecanismos algunos términos adquieren el valor de cero por condiciones especiales asociadas a la forma en la cual los vectores están definidos. Es posible para cualquiera de los términos involucrados en las ecuaciones de velocidad y la aceleración adquirir el valor de cero; sin embargo, un caso común es que la magnitud de la posición del vector sea constante. Este es el caso cuando el vector define la posición relativa de dos puntos en una conexión. Cuando esto pasa, \dot{r} y \ddot{r} son cero. Por lo tanto las expresiones de velocidad y aceleración son:

$$\dot{\mathbf{r}}_k = r_k \dot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.21}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = r_k \ddot{\theta}_k (-\sin \theta_k \mathbf{i} + \cos \theta_k \mathbf{j}) - r_k \dot{\theta}_k^2 (\cos \theta_k \mathbf{i} + \sin \theta_k \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.22}$$

O

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \left[-r_k \dot{\theta}_k^2 \cos \theta_k - r_k \ddot{\theta}_k \sin \theta_k \right] \mathbf{i} + \left[-r_k \dot{\theta}_k^2 \sin \theta_k + r_k \ddot{\theta}_k \cos \theta_k \right] \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{2.23}$$

II.3 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE CIERRE PARA MECANISMOS DE 4 BARRAS.

El procedimiento utilizado para resolver las ecuaciones para mecanismos de 4 barras es similar a los procedimientos utilizados para las ecuaciones asociadas con la mayoría de los mecanismos simples.

La condición de cierre ejemplifica la condición de que un mecanismo debe de cerrar por sí mismo. Para un mecanismo de 4 barras como el mostrado en la figura 2.5, la ecuación de cierre será:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \dots\dots\dots 2.24$$

$$r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j}) = r_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) + r_4(\cos \theta_4 \mathbf{i} + \sin \theta_4 \mathbf{j}) \dots\dots\dots 2.25$$

Reescribiendo la ecuación anterior en sus componentes tenemos:

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 \dots\dots\dots 2.26$$

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 \dots\dots\dots 2.27$$

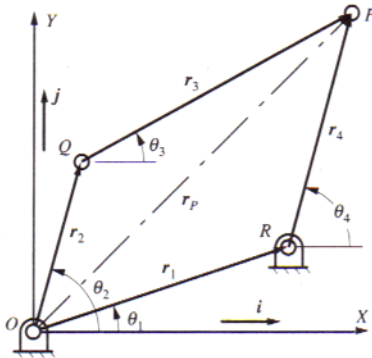


Figura 2.5 Condición de vector de cierre para un mecanismo de cuatro barras. La posición del punto P obtenido por la adición de los vectores r_2 y r_3 debe ser la misma que la obtenida por la adición de los vectores r_1 y r_4 . Note que r_1 es un vector constante que describe el eslabón constante del mecanismo, de modo que, θ_1 es constante.

Las ecuaciones 2.26 y 2.27 son las ecuaciones de cierre, y ellas deben de satisfacer totalmente el movimiento del mecanismo. El vector base será constante (bancada), de modo que r_1 y θ_1 son constantes. Si θ_2 es el ángulo del eslabón de entrada OQ , es necesario resolver las ecuaciones 2.26 y 2.27 para θ_3 y θ_4 , en términos de θ_2 , una vez obtenidas esas expresiones se puede obtener $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4$ y $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$ en términos $\theta_2, \dot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_2$ por derivación. Las velocidades y las aceleraciones de los puntos en los mecanismos pueden entonces ser obtenida de las ecuaciones tipo 2.11 y 2.19, reconociendo que la magnitud de todos los vectores son constantes ($\dot{r}_k = \ddot{r}_k = 0$).

Cuando θ_3 está dado como el acoplador pero es el eslabón de entrada se resolverán las ecuaciones 2.26 y 2.27 θ_2 y θ_4 , en términos de θ_3 . El procedimiento para realizarlo es de manera similar cuando θ_2 es el eslabón de entrada.

II.3.1 Solución de la ecuación de cierre para mecanismos de cuatro barras cuando el eslabón 2 es el eslabón de entrada.

El primer paso es identificar la variable a determinar, cuando la ecuación de posición involucra dos ángulos desconocidos el procedimiento de solución es despejar la función trigonométrica involucrando el ángulo para eliminar θ_3 utilizando las ecuaciones 2.26 y 2.27.

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2 \dots\dots\dots 2.28$$

$$r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2 \dots\dots\dots \mathbf{2.29}$$

Note que el ángulo θ_1 es conocido y constante. Ahora elevando al cuadrado ambas ecuaciones, sumándolas tomando en cuenta que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2 r_1 r_4 (\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) - 2 r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) - 2 r_2 r_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) \dots\dots\dots \mathbf{2.30}$$

Con la ecuación **2.30** se encuentra el ángulo θ_4 , en términos del ángulo de entrada θ_2 y el ángulo constante θ_1 pero no explícitamente. Para obtener una expresión explícita, se simplifica la ecuación **2.30**, combinando el coeficiente de $\cos \theta_4$ y $\sin \theta_4$:

$$A \cos \theta_4 + B \sin \theta_4 + C = 0 \dots\dots\dots \mathbf{2.31}$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 r_1 r_4 \cos \theta_1 - 2 r_2 r_4 \cos \theta_2 \\ B &= 2 r_1 r_4 \sin \theta_1 - 2 r_2 r_4 \sin \theta_2 \\ C &= r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2 r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \mathbf{2.32}$$

Para resolver la ecuación **2.31** por identidades trigonométricas se obtiene:

$$\sin \theta_4 = \frac{2 \tan(\frac{\theta_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_4}{2})} \dots\dots\dots \mathbf{2.33}$$

$$\cos \theta_4 = \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_4}{2})} \dots\dots\dots \mathbf{2.34}$$

Después de sustituir y simplificar se tiene:

$$(C - A)t^2 + 2Bt + (A + C) = 0$$

Donde

$$t = \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$$

Resolviendo para t

$$t = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4(C-A)(A+C)}}{2(C-A)} = t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{(C-A)} \dots\dots\dots \mathbf{2.35}$$

Y

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} t \dots\dots\dots \mathbf{2.36}$$

Donde $\sigma = \pm 1$ es el signo que identifica el modo de ensamble. Note que $\tan^{-1} t$ es para un rango válido de $-\pi/2 \leq \tan^{-1} t \leq \pi/2$. De modo que θ_4 , tomara valores de $-\pi \leq \theta_4 \leq \pi$, a menos que el mecanismo sea del tipo Grashof II en una posición en el extremo del rango de movimiento. Tienen dos soluciones para θ_4 correspondiente a los valores de σ y ambos son válidos. Estos corresponden a las dos formas de ensamblar el mecanismo. Una vez seleccionado el valor para σ correspondiente a la forma de ensamble el signo en el mecanismo permanece del mismo modo para θ_2 .

Debido a que la raíz de la ecuación **2.35**, la variable t , puede ser compleja ($A^2 + B^2 < C^2$), esto significa que el mecanismo no puede ser ensamblado en la posición especificada. Como se muestra en la figura **2.6**.

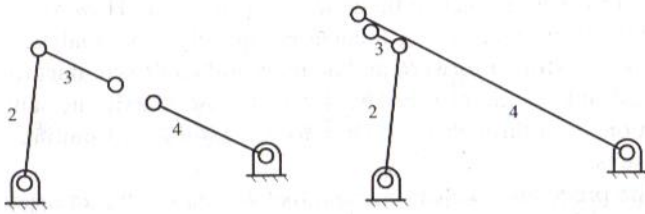


Figura 2.6 El mecanismo del tipo Grashof II no puede ser ensamblado en posiciones que son la transición entre la solución del ramal. La variable t es compleja en este caso

Para obtener el valor de θ_3 basta dividir la ecuación 2.29 entre 2.28.

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right] \dots \dots \dots 2.37$$

Cabe notar que para encontrar el cuadrante donde se encuentra el ángulo θ_3 es necesario mantener el signo tanto en el numerador como en el denominador

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right] \dots \dots \dots 2.38$$

Las dos soluciones determinadas por $\sigma = \pm 1$ se muestran en la figura 2.7.

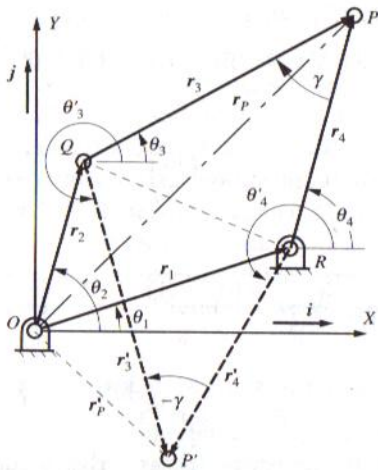


Figura 2.7 Dos posibles posiciones (P y P') del punto P para un valor determinado de θ_2 . Note que QP'R es la imagen de espejo de QPR sobre la línea QR. De modo que son las dos posibles soluciones diferentes para el ángulo θ_3 y los dos valores de θ_4 correspondientes a las dos posibles posiciones del punto P.

Note que las posiciones de r_3 y r_4 son simétricas sobre la línea QR: de modo que el ángulo $\gamma = \theta_4 - \theta_3$ tiene la misma magnitud, pero signo opuesto; esto sólo significa la forma en la que fue ensamblado el mecanismo como se muestra gráficamente.

Una vez calculadas todas las variables angulares es relativamente fácil calcular las coordenadas para cualquier punto en el vector de cierre utilizado en la ecuación de cierre. En particular las coordenadas Q, P y R están determinadas por:

$$r_Q = r_2 = r_2(\cos \theta_2 i + \sin \theta_2 j) \dots \dots \dots 2.39$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_P &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j}) \\ \mathbf{r}_P &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 = r_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) + r_4(\cos \theta_4 \mathbf{i} + \sin \theta_4 \mathbf{j}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2.40$$

Y

$$\mathbf{r}_R = \mathbf{r}_1 = r_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) \dots\dots\dots 2.41$$

II.3.2 Análisis cuando el acoplador es el eslabón de entrada.

Cuando el acoplador es el eslabón de entrada es difícil analizarlo gráficamente. El procedimiento analítico es más simple. El procedimiento es similar cuando el eslabón de entrada es el eslabón 2.

Para este procedimiento, se asume que θ_1 y $\theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$ son conocidos y $\theta_4, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_4$ y $\theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$ son las variables a determinar: Todas las longitudes de los eslabones y θ_1 son constantes. Para resolverlo se emplearán las ecuaciones 2.26 y 2.27 aislando cualquier termino θ_2 o θ_4 . Es recomendable seleccionar θ_2 de forma que:

$$r_2 \cos \theta_2 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_3 \cos \theta_3 \dots\dots\dots 2.42$$

$$r_2 \sin \theta_2 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_3 \sin \theta_3 \dots\dots\dots 2.43$$

Comparando las ecuaciones 2.42, 2.43 con 2.28 y 2.29 la única diferencia es el intercambio de 2 y 3. De modo que podemos usar directamente las ecuaciones anteriores para determinar las posiciones y ángulos si intercambiamos con cuidado 2 por 3.

Cuando el acoplador el eslabón de entrada, existe un modo de ensamble similar a cuando el eslabón de entrada es el eslabón 2, como se muestra en la figura 2.8. Es necesario conocer el modo apropiado antes de comenzar el análisis. Sin embargo, una vez ensamblado es lo mismo para cualquier posición de entrada del mecanismo.

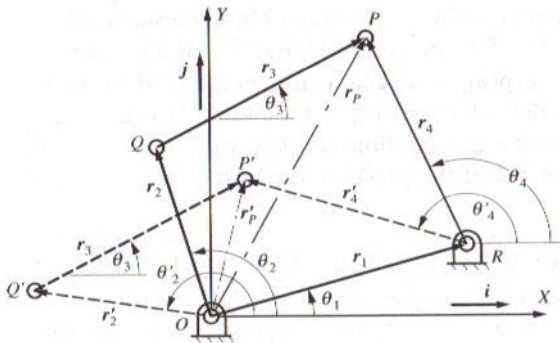


Figura 2.8 Dos posibles posiciones (P y P') de el punto P para un valor de entrada de θ_3 y los dos posibles valores de θ_2 y θ_4 correspondientes a los dos posibles posiciones del punto P.

El movimiento del acoplador como eslabón de entrada en un mecanismo de 4 barras será menor de 360° excepto si se trata de un mecanismo de 4 barras del tipo I, donde la base del acoplador es la más pequeña del mecanismo, cuando el movimiento del mecanismo alcanza sus límites, los eslabones 2 y 4 serán paralelos.

II.3.3 Ecuación de velocidad para mecanismos de 4 barras.

Derivando la ecuación 2.24 se tiene:

$$\mathbf{r}'_p = \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_4 \dots\dots\dots 2.44$$

La ecuación escrita en términos de sus componentes, es el resultado de derivar las ecuaciones 2.26 y 2.27, recordando que la longitud de todos los eslabones y de θ_1 son constantes:

$$r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \dots\dots\dots 2.45$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \dots\dots\dots 2.46$$

De modo que si $\dot{\theta}_2$ es conocido sólo se tiene $\dot{\theta}_3$ y $\dot{\theta}_4$ y si $\dot{\theta}_3$ es conocida las únicas incógnitas son $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_4$. En ambos casos estas ecuaciones pueden ser resueltas fácilmente utilizando un sistema lineal de ecuaciones. o en forma matricial las ecuaciones 2.45 y 2.46 puede ser reordenada y reescrita como:

$$\begin{bmatrix} -r_j \sin \theta_j & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_j \cos \theta_j & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.47$$

Donde $M=2$ y $J=3$ cuando $\dot{\theta}_2$ es la velocidad de entrada y $M=3$ y $J=2$ cuando $\dot{\theta}_3$ es la velocidad de entrada.

Una vez calculadas las velocidades angulares, es fácil encontrar las velocidades lineales para cualquier punto del vector de cierre. Las velocidades de los puntos **P** y **Q** son:

$$\mathbf{r}'_Q = \mathbf{r}'_2 = r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}) \dots\dots\dots 2.48$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}'_P &= \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_3 = (-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3) \mathbf{j} \\ \mathbf{r}'_P &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_4 = (-r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4) \mathbf{i} + (r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4) \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2.49$$

II.3.4 Ecuaciones de aceleración para mecanismos de 4 barras.

Para encontrar la ecuación de aceleración basta con derivar la ecuación 2.44 de donde:

$$\mathbf{r}''_p = \mathbf{r}''_2 + \mathbf{r}''_3 = \mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}''_4 \dots\dots\dots 2.50$$

La derivación de las ecuaciones 2.45 y 2.46 dan las componentes para las ecuaciones de la aceleración.

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 = r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \dots\dots\dots 2.51$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 = r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \dots\dots\dots 2.52$$

Cuando $\dot{\theta}_2$ es conocida a lo largo de todas las posiciones y de los términos de velocidad, las únicas incógnitas son $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_4$ y cuando $\dot{\theta}_3$ es conocida a lo largo de todas las posiciones y de los términos de velocidad, las únicas incógnitas son $\ddot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_4$. Una vez más esto puede ser resuelto con un sistema de ecuaciones lineales. La forma matricial de las ecuaciones (2.51) y (2.52) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} -r_j \sin \theta_j & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_j \cos \theta_j & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M + r_j \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_j \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_j + r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.53$$

Donde $M=2$ y $J=3$ cuando $\dot{\theta}_2$ es la velocidad de entrada y $M=3$ y $J=2$ cuando $\dot{\theta}_3$ es la velocidad de entrada.

Una vez calculadas las aceleraciones angulares, es fácil encontrar las aceleraciones lineales para cualquier punto del vector de cierre. Las velocidades de los puntos **P** y **Q** son:

$$\dot{r}_Q = \dot{r}_2 = (-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \mathbf{j} \dots\dots\dots 2.54$$

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \left. \begin{aligned} &-(r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ &\quad - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) \mathbf{j} \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{r}_P = \dot{r}_1 + \dot{r}_4 = (-r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4) \mathbf{i} + (r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4) \mathbf{j} \dots\dots\dots 2.55$$

Tabla 2.1 Resumen de las ecuaciones para posición, velocidad y aceleración de mecanismos de 4 barras. Entiéndase que cuando el eslabón de entrada es el eslabón **2** $M=2$ y $J=3$. Cuando el eslabón de entrada es el eslabón **3** $M=3$ y $J=2$. El número de los miembros y puntos fueron definidos en base a la figura **2.5**.

Position

$$\begin{aligned} A &= 2r_1 r_4 \cos \theta_1 - 2r_M r_4 \cos \theta_M \\ B &= 2r_1 r_4 \sin \theta_1 - 2r_M r_4 \sin \theta_M \\ C &= r_1^2 + r_M^2 + r_4^2 - r_2^2 - 2r_1 r_M (\cos \theta_1 \cos \theta_M + \sin \theta_1 \sin \theta_M) \\ \theta_4 &= 2 \tan^{-1} \left[\frac{-B + \sigma \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A} \right], \quad \sigma = \pm 1 \\ \theta_j &= \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_M \sin \theta_M}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_M \cos \theta_M} \right] \\ r_Q &= r_2 = r_2 (\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) \\ r_P &= r_2 + r_3 = r_2 (\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3 (\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j}) \\ &= r_1 + r_4 = r_1 (\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) + r_4 (\cos \theta_4 \mathbf{i} + \sin \theta_4 \mathbf{j}) \\ r_R &= r_1 = r_1 (\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) \end{aligned}$$

Velocity

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -r_j \sin \theta_j & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_j \cos \theta_j & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{Bmatrix} \\ \dot{r}_Q = \dot{r}_2 &= r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}) \\ \dot{r}_P &= (-r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4) \mathbf{i} + (r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4) \mathbf{j} \end{aligned}$$

Accelerations

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -r_j \sin \theta_j & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_j \cos \theta_j & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M + r_j \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_j \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_j + r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{Bmatrix} \\ \ddot{r}_Q = \ddot{r}_2 &= (-r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \mathbf{j} \\ \ddot{r}_P &= -(r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4) \mathbf{i} + (r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4) \mathbf{j} \end{aligned}$$

II.4. ECUACIONES DE ANÁLISIS PARA UN CUERPO RÍGIDO DESPUÉS DE QUE LAS PROPIEDADES CINEMÁTICAS DE DOS PUNTOS SON CONOCIDAS.

Frecuentemente se requiere conocer los valores cinemáticos de un punto fijo a un cuerpo rígido en el mecanismo, que no están relacionados directamente al vector de cierre, estos valores se pueden conocer en general para cualquier punto.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Considere la figura 2.9. Se asume que **A** y **B** son dos puntos fijos a cualquier eslabón, denominado eslabón **5** y un tercer punto está definido relativo a la línea entre los puntos **A** y **B** por el ángulo β y la distancia $r_{C/A}$ representado en la figura como r_6 . Entonces la posición lineal, velocidad y aceleración del punto **C** pueden ser calculadas si se conoce lo siguiente: $r_A, r'_A, r''_A, \theta_5, \dot{\theta}_5, \ddot{\theta}_5$, de modo que la posición del punto **C** está definida como:

$$r_C = r_A + r_6$$

O
$$r_C = r_A + r_6(\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j}) \dots \dots \dots 2.56$$

Donde
$$\theta_6 = \beta + \theta_5 \dots \dots \dots 2.57$$

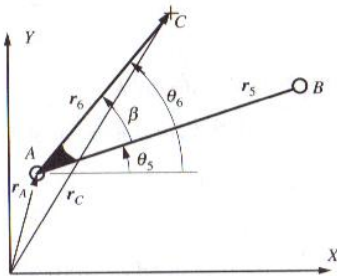


Figura 2.9 Cálculo de las propiedades cinemáticas de un punto en un mecanismo después de que las propiedades de posición, velocidad, aceleración del mecanismo son conocidas.

Reconociendo que β es constante, la velocidad del punto **C** está determinada por:

$$r'_C = r'_A + r_6 \dot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j}) \dots \dots \dots 2.58$$

Y la aceleración dada por:

$$r''_C = r''_A + r_6 \ddot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j}) - r_6 \dot{\theta}_5^2 (\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j}) \dots \dots \dots 2.59$$

Note que $\theta_5, \dot{\theta}_5, \ddot{\theta}_5$ se asume que son conocidas; sin embargo a veces sólo se conoce la posición, velocidad y aceleración de dos puntos (**A** y **B**), de modo que se pueda calcular $\theta_5, \dot{\theta}_5, \ddot{\theta}_5$ y proseguir en la realización de los cálculos. El ángulo medido a partir del eje **x** puede ser calculado con los vectores de posición de **A** y **B**.

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left[\frac{r_{By} - r_{Ay}}{r_{Bx} - r_{Ax}} \right]$$

Y la velocidad angular puede ser calculada reordenando la ecuación 2.58 en términos de los puntos **A** y **B**.

$$r'_B = r'_A + r_5 \dot{\theta}_5 (-\sin \theta_5 \mathbf{i} + \cos \theta_5 \mathbf{j})$$

Donde
$$\dot{\theta}_5 = \frac{r'_{Bx} - r'_{Ax}}{r_5 \sin \theta_5} = \frac{r'_{By} - r'_{Ay}}{r_5 \cos \theta_5}$$

De forma similar se obtiene la aceleración reescribiendo la ecuación 2.58.

$$\mathbf{r}_B'' = \mathbf{r}_A'' + r_5 \ddot{\theta}_5 (-\sin \theta_5 \mathbf{i} + \cos \theta_5 \mathbf{j}) - r_5 \dot{\theta}_5^2 (\cos \theta_5 \mathbf{i} + \sin \theta_5 \mathbf{j})$$

Donde:
$$\ddot{\theta}_5 = \left[-\frac{(\ddot{r}_{Bx} - \ddot{r}_{Ax}) + r_5 \dot{\theta}_5^2 \cos \theta_5}{r_5 \sin \theta_5} \right] = \left[\frac{(\ddot{r}_{By} - \ddot{r}_{Ay}) + r_5 \dot{\theta}_5^2 \sin \theta_5}{r_5 \cos \theta_5} \right]$$

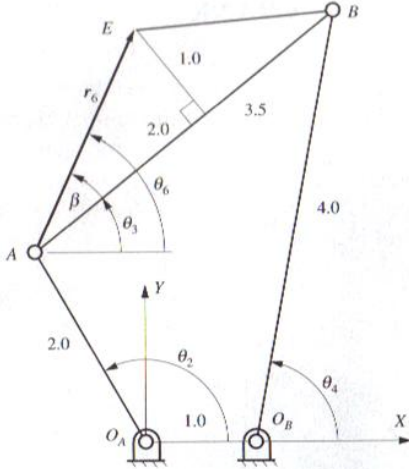


Figura 2.10 Punto arbitrario en un mecanismo

Tabla 2.2 Resumen de ecuaciones para posición, velocidad y aceleración para un punto arbitrario en un cuerpo rígido. Los vectores de posición están definidos en la figura 2.10

If \mathbf{r}_A and \mathbf{r}_B are given instead of θ_5 , $\dot{\theta}_5$, and $\ddot{\theta}_5$, first compute θ_5 , $\dot{\theta}_5$, and $\ddot{\theta}_5$ using the following:

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left[\frac{r_{By} - r_{Ay}}{r_{Bx} - r_{Ax}} \right]$$

$$\dot{\theta}_5 = -\frac{\dot{r}_{Bx} - \dot{r}_{Ax}}{r_5 \sin \theta_5} = \frac{\dot{r}_{By} - \dot{r}_{Ay}}{r_5 \cos \theta_5}$$

$$\ddot{\theta}_5 = -\frac{(\ddot{r}_{Bx} - \ddot{r}_{Ax}) + r_5 \dot{\theta}_5^2 \cos \theta_5}{r_5 \sin \theta_5} = \frac{(\ddot{r}_{By} - \ddot{r}_{Ay}) + r_5 \dot{\theta}_5^2 \sin \theta_5}{r_5 \cos \theta_5}$$

Position

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + r_6 (\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j})$$

$$\theta_6 = \beta + \theta_5$$

Velocity

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{r}}_A + r_6 \dot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j})$$

Accelerations

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{r}}_A + r_6 \ddot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j}) - r_6 \dot{\theta}_5^2 (\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j})$$

II.5 ECUACIONES ANALÍTICAS PARA MECANISMOS MANIVELA – CORREDERA.

Después de los mecanismos de 4 barras, el mecanismo biela-manivela es probablemente el mecanismo más comúnmente utilizado. Este aparece en los motores de combustión interna figura 2.11 y en numerosos equipos y dispositivos industriales figura 2.12 y otras aplicaciones. Este mecanismo se presenta en la figura 2.14. Para desarrollar la ecuación de cierre, se localizan los vectores r_2 y r_3 . Para formar la otra parte de la ecuación de cierre, se dibujan dos vectores, uno paralelo al eje de deslizamiento r_1 y r_4 perpendicular al mismo. Las variables asociadas a esta ecuación de cierre se muestran en la figura 2.14 de modo que la ecuación de cierre para un mecanismo biela-manivela es:

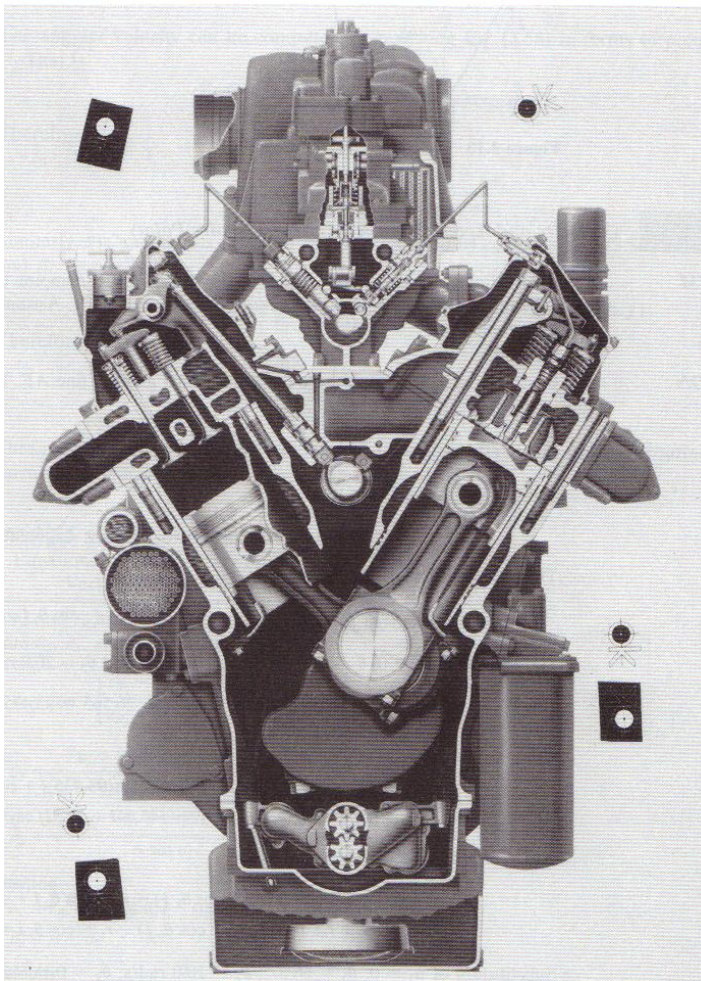


Figura 2.11 Motor de combustión interna. Un ejemplo de un mecanismo manivela-corredera. Donde la manivela es el eslabón de salida.

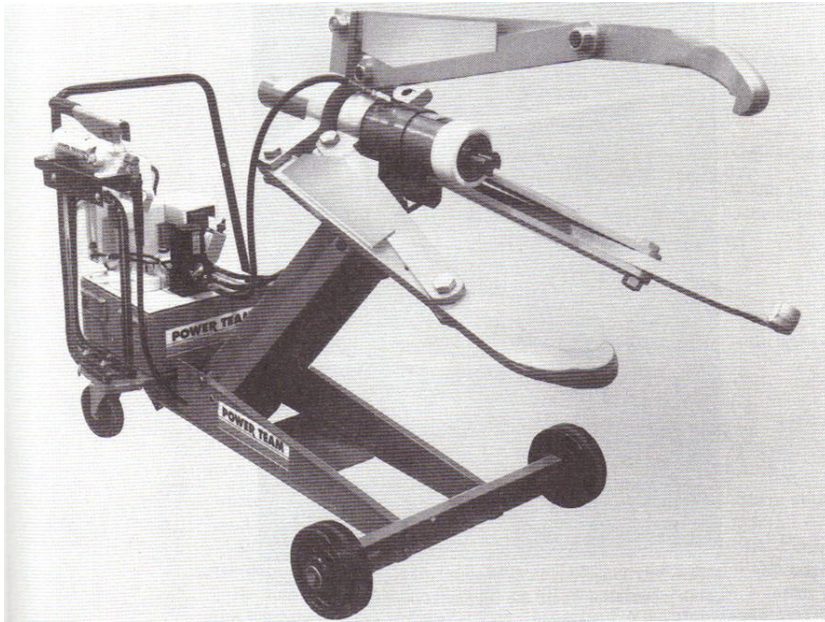


Figura 2.12 Eje de arrastre hidráulico .Un ejemplo de un mecanismo manivela –corredera donde la corredera es el eslabón de entrada

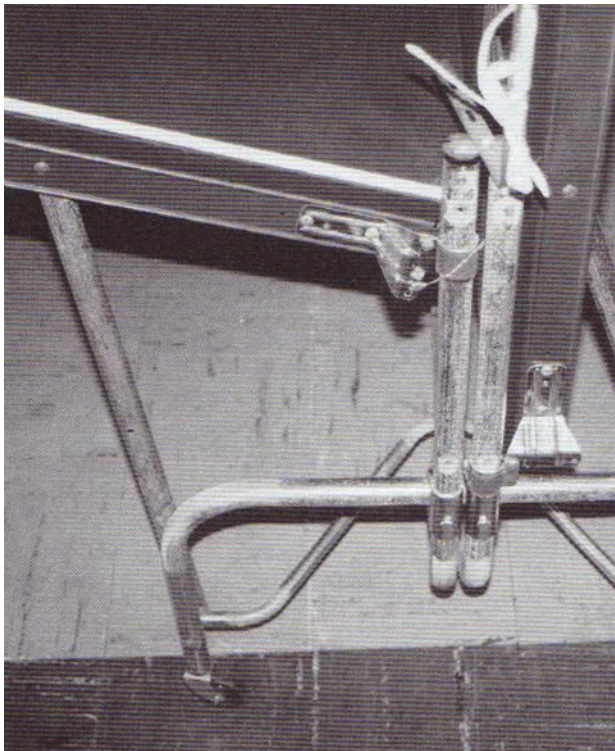


Figura 2.13 Mesa de Ping-Pong. Un ejemplo de un mecanismo manivela-corredera donde el acoplador es el eslabón de entrada.

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \dots \dots \dots \mathbf{2.60}$$

$$O \quad \mathbf{r}_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + \mathbf{r}_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j}) = \mathbf{r}_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}) + \mathbf{r}_4(\cos \theta_4 \mathbf{i} + \sin \theta_4 \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.61}$$

Donde $\theta_4 = \theta_1 + \pi/2 \dots \dots \dots \mathbf{2.62}$

Reescribiendo la ecuación 2.61 y reordenando sus componentes tenemos:

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 \dots \dots \dots \mathbf{2.63}$$

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 \dots \dots \dots \mathbf{2.64}$$

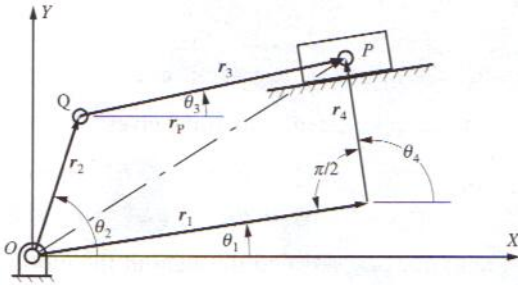


Figura 2.14 Condición del vector de cierre para un mecanismo manivela-corredera. La posición del punto P es obtenida por la adición del vector \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 , es la misma que la obtenida por la adición de los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_4 .

El vector \mathbf{r}_1 puede variar en magnitud pero es constante en su dirección. El vector \mathbf{r}_4 será constante. Por lo tanto \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}_4 , θ_1 y θ_4 son constantes. Si se tiene θ_2 es necesario resolver las ecuaciones 2.63 y 2.64 para θ_3 y \mathbf{r}_1 en términos de θ_2 . Si tenemos \mathbf{r}_1 es necesario resolver las ecuaciones 2.63 y 2.64 para θ_2 y θ_3 . Finalmente, si se conoce θ_3 es necesario resolver las ecuaciones 2.63 y 2.64 para θ_2 y \mathbf{r}_1 . Una vez conocidos estos valores se pueden calcular las velocidades y aceleraciones por derivación.

II.5.1 Solución para la ecuación de posición cuando θ_2 es el valor de entrada.

El procedimiento consiste en eliminar θ_3 despejando de las ecuaciones 2.63 y 2.64 de modo que:

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2 \dots \dots \dots \mathbf{2.65}$$

$$r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2 \dots \dots \dots \mathbf{2.66}$$

Cabe notar que θ_1 es un valor conocido pero \mathbf{r}_1 varía y es una incógnita. Ahora elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones tenemos:

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2 r_1 r_4 (\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) - 2 r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) - 2 r_2 r_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) \dots \dots \dots \mathbf{2.67}$$

Con la ecuación 2.67 se encuentra \mathbf{r}_1 en una expresión cuadrática en términos de las otras variables conocidas. Para obtener una expresión explícita, se simplifica la ecuación 2.67, combinando los coeficientes en términos de \mathbf{r}_1 :

$$r_1^2 + Ar_1 + B = 0 \dots \dots \dots \mathbf{2.68}$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 r_4 (\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) - 2 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ B &= r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2 r_2 r_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2.69$$

Resolviendo para r_1 se tiene:

$$r_1 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2} = \dots\dots\dots 2.70$$

Donde $\sigma = \pm 1$ es el signo que identifica el modo de ensamble. Para este tipo de mecanismo existen dos formas de ensamble como se muestra en la figura 2.15.

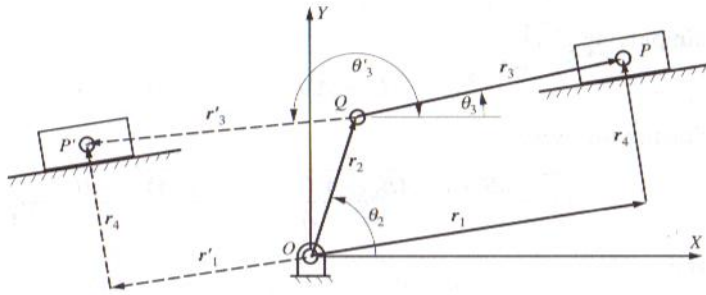


Figura 2.15 La dos posibles posiciones (P y P') del punto P para un valor de θ_2 de un mecanismo de manivela-corredera.

En este caso como en el mecanismo de 4 barras el signo de σ determina el modo de ensamble. Una vez seleccionado el valor para correspondiente a la forma de ensamble el signo en el mecanismo real permanece del mismo modo para θ_2 .

Cuando la raíz de la ecuación 2.70, la variable r_1 , es compleja ($A^2 < 4B^2$), esto significa que el mecanismo no puede ser ensamblado en la posición especificada, como se muestra en la figura 2.16.

Una vez determinado el valor de r_1 las ecuaciones 2.65 y 2.66 se pueden resolver para el valor de θ_3 . Dividiendo la ecuación 2.66 por 2.65 obtenemos θ_3 .

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right] \dots\dots\dots 2.71$$

Cabe notar que para encontrar el cuadrante donde se encuentra el ángulo θ_3 es necesario mantener el signo tanto en el numerador como en el denominador al igual que en el mecanismo de 4 barras.

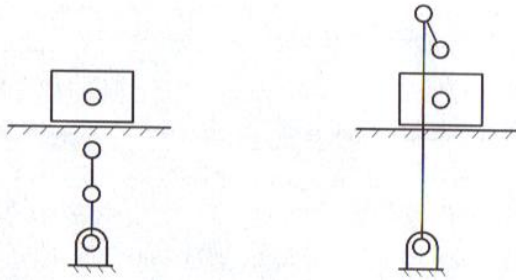


Figura 2.16 Configuración determinada por la solución compleja para un mecanismo manivela-corredera.

Una vez que todos los valores angulares. Se conocen, es relativamente fácil calcular las coordenadas para cualquier punto del vector de cierre en la ecuación de cierre. En particular las coordenadas para el punto **P** y **Q** están determinadas por:

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_2 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.72}$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{2.73}$$

II.5.2 Solución para la ecuación de posición cuando r_1 es el valor de entrada.

Cuando se conoce r_1 se sigue el mismo procedimiento de la ecuación 2.63 y 2.64 hasta la ecuación 2.67 y la simplificación se da de la siguiente forma:

$$A \cos \theta_2 + B \sin \theta_2 + C = 0 \dots \dots \dots \mathbf{2.74}$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} A &= -2 r_1 r_2 \cos \theta_1 - 2 r_2 r_4 \cos \theta_4 \\ B &= -2 r_1 r_2 \sin \theta_1 - 2 r_2 r_4 \sin \theta_4 \\ C &= r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2 r_1 r_4 (\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \mathbf{2.75}$$

Para resolver la ecuación 2.74 por identidades trigonométrica se pueden utilizar las ecuaciones 2.33 y 2.34 de donde se obtiene:

$$\sin \theta_2 = \frac{2 \tan(\frac{\theta_2}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_2}{2})} \dots \dots \dots \mathbf{2.33}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta_2}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_2}{2})} \dots \dots \dots \mathbf{2.34}$$

Después de sustituir y simplificar se tiene:

$$(C - A)t^2 + 2Bt + (A + C) = 0$$

Donde

$$t = \tan(\frac{\theta_2}{2})$$

Resolviendo para t

$$t = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4(C-A)(A+C)}}{2(C-A)} = t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{(C-A)} \dots\dots\dots 2.76$$

Y $\theta_2 = 2 \tan^{-1} t \dots\dots\dots 2.77$

Donde $\sigma = \pm 1$ es el signo que identifica el modo de ensamble. Note que el término $\tan^{-1} t$ es para un rango válido de $-\pi/2 \leq \tan^{-1} t \leq \pi/2$, de modo que θ_2 , tomara valores de $-\pi \leq \theta_2 \leq \pi$. Se tienen dos soluciones para θ_2 correspondiente a los valores de σ y ambas son válidas. Estas corresponden a las dos formas de ensamblar el mecanismo como se muestra en la figura 2.17. Una vez seleccionado el valor para σ correspondiente a la forma de ensamble el signo en el mecanismo real permanece del mismo modo para r_1 .

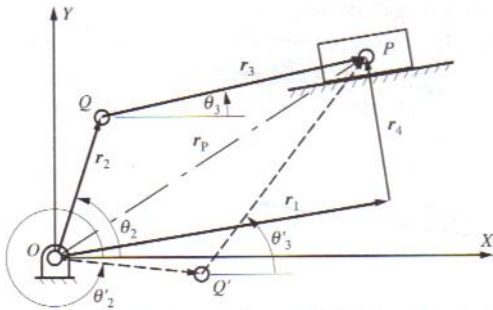


Figura 2.17 Dos posibles modos de ensamble cuando la posición r_1 , de la corredera es el eslabón de entrada.

Debido a que la raíz de la ecuación 2.76, la variable t , puede ser compleja $(A^2+B^2) < C^2$, esto significa que el mecanismo no puede ser ensamblado en la posición especificada. Como se muestra en la figura 2.18.

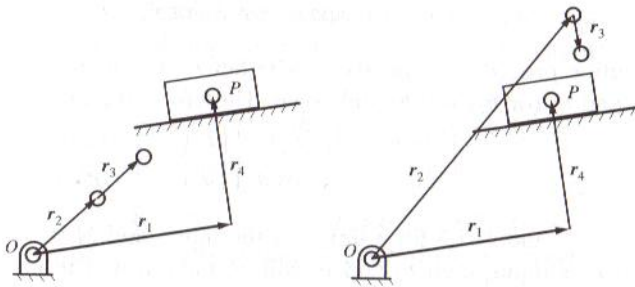


Figura 2.18 Mecanismo manivela-corredera que no puede ser ensamblado en la posición seleccionada para r_1 . En este caso la variable t es compleja

Ahora se pueden resolver las ecuaciones 2.65 y 2.66 para θ_3 , ecuación 2.71, manteniendo el signo para ubicar el cuadrante en el que se encuentra el ángulo, note que la posición r_2 y r_3 son simétricas con respecto a la línea OP.

Una vez más, calculados todos los valores angulares, es fácil calcular las coordenadas para cualquier punto utilizando la ecuación de cierre. Las coordenadas para los puntos P y Q están determinadas por la ecuaciones 2.63 y 2.64.

II.5.3 Solución para la ecuación de posición cuando θ_3 es el valor de entrada.

Cuando el eslabón acoplador es el valor de entrada, los valores para θ_3 y sus derivadas son conocidos. El procedimiento para resolver las ecuaciones de posición, es el mismo empleado cuando θ_2 es el valor de entrada. De modo que se puede simplificar éste en una tabla de resultados

Para este procedimiento, se puede asumir que θ_1 , θ_3 , $\dot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_3$ son conocidos y r_1 , r'_1 y r''_1 serán las incógnitas. Los eslabones r_2 , r_3 y θ_1 son constantes. Para el análisis de posiciones, se comienza a partir de las ecuaciones 2.63 y 2.64, **despejando** en términos de θ_2 o θ_4 . Es recomendable comenzar con θ_2 , el resultado de las ecuaciones es:

$$r_2 \cos \theta_2 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_3 \cos \theta_3 \dots\dots\dots 2.78$$

$$r_2 \sin \theta_2 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_3 \sin \theta_3 \dots\dots\dots 2.79$$

De una comparación con de las ecuaciones 2.78, 2.79 con las ecuaciones 2.65 y 2.66 se puede observar que el termino 2 esta intercambiado por el termino 3. Por lo tanto, se puede utilizar la el mismo proceso de solución de la sección II.V.1 si intercambiamos también 2 y 3.

Cuando el acoplador es el eslabón de entrada la forma de ensamble es similar a cuando el eslabón de entrada es el eslabón 2, como se ilustra en la figura 2.19. Es necesario conocer el modo apropiado de ensamble antes de finalizar el análisis. Sin embargo, una vez conocido el modo de análisis, éste es lo mismo para todas las posiciones de entrada.

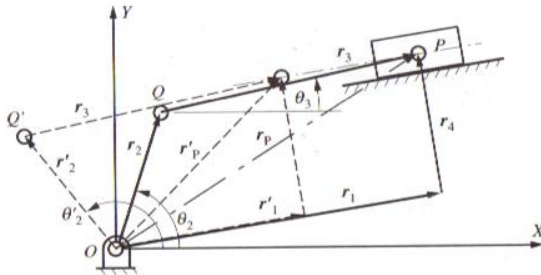


Figura 2.19 Dos posibles modos de ensamble cuando el acoplador es el eslabón de entrada.

II.5.4 Ecuaciones de velocidad para un mecanismo biela-manivela.

El procedimiento para obtener las ecuaciones de velocidad parte de diferenciar la ecuación (3.60) dando por resultado:

$$r'_p = r'_2 + r'_3 = r'_1 + r'_4 \dots\dots\dots 2.80$$

Cuando esta ecuación es escrita en términos de sus componentes, el resultado es el mismo que al diferenciar las ecuaciones 2.63 y 2.64. Reconociendo que r_2 , r_3 , r_4 , θ_1 y θ_4 son constantes, el resultado será.

$$-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = r'_1 \cos \theta_1 \dots\dots\dots 2.81$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = r'_1 \sin \theta_1 \dots\dots\dots 2.82$$

El procedimiento de solución depende tanto de r_1, θ_2 o θ_3 . Si θ_2 (o θ_3) es la entrada entonces r_1 y $\dot{\theta}_3$ ($\dot{\theta}_2$) serán las incógnitas. De modo que la matriz a resolver sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & r_j \sin \theta_j \\ \sin \theta_1 & -r_j \cos \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{\theta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{bmatrix} \dots\dots\dots \mathbf{2.83}$$

Cuando M=2 y J=3 el eslabón de entrada es 2, y cuando M=3 y J=2 el eslabón de entrada es 3. Si r_1 es la entrada, entonces $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_3$ serán las incógnitas. De modo que la matriz a resolver sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ r_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \mathbf{2.84}$$

Conociendo los valores de las ecuaciones **2.83** y **2.84** se puede calcular las velocidades para los puntos **Q** y **P** con:

$$r'_Q = r'_2 = r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}) \dots\dots\dots \mathbf{2.85}$$

$$r'_P = r'_2 + r'_3 = (-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3) \mathbf{j} \dots\dots\dots \mathbf{2.86}$$

II.5.5 Ecuaciones de aceleración para un mecanismo biela-manivela.

El proceso de análisis para las ecuaciones de aceleración se obtienen de diferenciar la ecuación **(3.80)** obteniendo:

$$r''_P = r''_2 + r''_3 = r''_1 + r''_4$$

Cuando es escrita en términos de sus componentes, resultado de derivar las ecuaciones **2.81** y **2.82**, se obtendrá:

$$-r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 = \ddot{r}_1 \cos \theta_1 \dots\dots\dots \mathbf{2.87}$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 = \ddot{r}_1 \sin \theta_1 \dots\dots\dots \mathbf{2.88}$$

Como fue para el caso de las velocidades el procedimiento de solución depende tanto de $\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ o r''_1 . Si $\ddot{\theta}_2$ ($\ddot{\theta}_3$) es la entrada entonces r''_1 y $\ddot{\theta}_3$ ($\ddot{\theta}_2$) serán las incógnitas, de modo que la matriz a resolver es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & r_j \sin \theta_j \\ \sin \theta_1 & -r_j \cos \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r''_1 \\ \ddot{\theta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M - r_j \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_j \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_j \end{bmatrix} \dots\dots\dots \mathbf{2.89}$$

Si r''_1 es la entrada entonces $\ddot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_3$ serán las incógnitas y la matriz a resolver será la siguiente:

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + r''_1 \cos \theta_1 \\ r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + r''_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \mathbf{2.90}$$

Una vez calculadas las aceleraciones angulares, es muy fácil conocer las aceleraciones lineales para cualquier punto del vector de cierre. La aceleración de los puntos **Q** y **P** están dados por:

$$r''_Q = r''_2 = (-r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \mathbf{j} \dots\dots\dots \mathbf{2.91}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_3 = -(r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) \mathbf{j} \dots\dots\dots \mathbf{2.92}$$

Ahora que las ecuaciones han sido desarrolladas es muy fácil introducir estos valores en un programa de computadora. Para facilitar esta tarea se resumen estas ecuaciones en las tablas **2.3** y **2.4**

Tabla 2.3 Resumen de las ecuaciones para posición, velocidad y aceleración para mecanismos biela manivela. Entiéndase que cuando el eslabón de entrada es el eslabón **2 M=2 y J=3**. Cuando el eslabón de entrada es el eslabón **3 M=3 y J=2**. El número de los miembros y puntos fueron definidos en base a la figura **2.14**

Position

$$A = 2r_4(\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) - 2r_M(\cos \theta_1 \cos \theta_M + \sin \theta_1 \sin \theta_M)$$

$$B = r_M^2 + r_4^2 - r_J^2 - 2r_M r_4(\cos \theta_M \cos \theta_4 + \sin \theta_M \sin \theta_4)$$

$$r_1 = \frac{-A + \sigma \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \sigma = \pm 1$$

$$\theta_J = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_M \sin \theta_M}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_M \cos \theta_M} \right]$$

$$\mathbf{r}_Q = r_2 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j})$$

Velocity

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & r_J \sin \theta_J \\ \sin \theta_1 & -r_J \cos \theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_Q = r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_P = (-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3) \mathbf{j}$$

Accelerations

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & r_J \sin \theta_J \\ \sin \theta_1 & -r_J \cos \theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \cos \theta_J \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \sin \theta_J \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_Q = (-r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \mathbf{j}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_P = -(r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) \mathbf{j}$$

Tabla 2.4 Resumen de las ecuaciones para posición, velocidad y aceleración para mecanismos biela-manivela cuando la corredera (eslabón 4) es el eslabón de entrada. El número de los miembros y puntos fueron definidos en base a la figura 2.14

Position

$$A = -2r_1r_2 \cos \theta_1 - 2r_2r_4 \cos \theta_4$$

$$B = -2r_1r_2 \sin \theta_1 - 2r_2r_4 \sin \theta_4$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 + 2r_1r_4(\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4)$$

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-B + \sigma \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A} \right], \quad \sigma = \pm 1$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right]$$

$$r_Q = r_2 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j})$$

$$r_P = r_2 + r_3 = r_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3(\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j})$$

Velocity

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{r}_1 \sin \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{r}_Q = r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j})$$

$$\dot{r}_P = (-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3) \mathbf{j}$$

Accelerations

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + \ddot{r}_1 \cos \theta_1 \\ r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + \ddot{r}_1 \sin \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{r}_Q = (-r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \mathbf{j}$$

$$\ddot{r}_P = -(r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3) \mathbf{i} + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) \mathbf{j}$$

II.6. SACUDIMIENTO.

La derivada con respecto al tiempo de la aceleración se llama *sacudimiento, pulsación o choque*. El nombre es apropiado por que invoca la imagen apropiada de este fenómeno. **Sacudimiento** es la *tasa de cambio con respecto al tiempo de la aceleración*. La fuerza es proporcional a la aceleración. Una aceleración rápidamente cambiante implica una fuerza rápidamente cambiante. ¡Las fuerzas rápidamente cambiantes tienden a “sacudir” el objeto de un lado a otro!. Probablemente ya ha experimentado este fenómeno durante un viaje en automóvil. Si al conductor le gustan los “arrancones” y acelera violentamente cuando se pone la luz verde en el semáforo, usted sufrirá una gran sacudimiento porque su aceleración ira de cero a un valor bastante grande de una manera repentina.

El control y reducción al mínimo del sacudimiento en el diseño de máquinas con frecuencia es de interés, en especial si se desean bajas vibraciones. Las grandes magnitudes de sacudimiento tienden a excitar las frecuencias naturales de vibración de las máquinas o estructura en las cuales están montados e incrementa la vibración y los niveles de ruido.

El procedimiento para calcular el sacudimiento en un mecanismo es una extensión directa de los métodos mostrados en el análisis de aceleración. Sea el sacudimiento angular representado por:

$$\varphi = \ddot{\theta} = \frac{d^3 \theta}{dt^3} = \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{d\alpha}{dt} \dots \dots \dots \mathbf{2.93}$$

Y el lineal por:

$$J = \frac{d^3 r}{dt^3} = \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{da}{dt} \dots \dots \dots \mathbf{2.94}$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Para obtener el sacudimiento en un mecanismo de cuatro barras, la ecuación para el lazo vectorial de la aceleración, se diferencia con respecto al tiempo. Considérese la siguiente ecuación:

$$\dot{r}_p = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4 \dots \dots \dots \mathbf{2.50}$$

La derivación de las ecuaciones **2.45** y **2.46** nos da las componentes para las ecuaciones de la aceleración:

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 = r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \dots \dots \mathbf{2.51}$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 = r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \dots \dots \mathbf{2.52}$$

Por lo tanto al derivar estas ecuaciones obtendremos la ecuación para el sacudimiento obteniendo:

(Componente x)

$$\begin{aligned} & -r_2 \dot{\theta}_2^3 \sin \theta_2 + 3r_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ & -r_3 \dot{\theta}_3^3 \sin \theta_3 + 3r_3 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 \\ & + r_4 \dot{\theta}_4^3 \sin \theta_4 - 3r_4 \dot{\theta}_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 = 0 \dots \dots \mathbf{2.95} \end{aligned}$$

(Componente y)

$$\begin{aligned} & -r_2 \dot{\theta}_2^3 \cos \theta_2 - 3r_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ & -r_3 \dot{\theta}_3^3 \cos \theta_3 - 3r_3 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 \\ & + r_4 \dot{\theta}_4^3 \cos \theta_4 + 3r_4 \dot{\theta}_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 - r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 = 0 \dots \dots \mathbf{2.96} \end{aligned}$$

Estas se resuelven simultáneamente para $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_4$ que son las únicas incógnitas. El sacudimiento angular motriz $\ddot{\theta}_2$, si no es cero debe ser conocido para resolver el sistema. Todos los demás factores en las ecuaciones **2.95** y **2.96**, están definidos o fueron calculados en el análisis de posición, velocidad y aceleración. Para simplificar estas expresiones los términos conocidos se concederán como constantes temporales.

De esta forma a partir de la ecuación **2.95** se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} A &= -r_2 \dot{\theta}_2^3 \sin \theta_2 & D &= -r_3 \dot{\theta}_3^3 \sin \theta_3 & G &= -3r_4 \dot{\theta}_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ B &= 3r_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 & E &= 3r_3 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 & H &= -r_4 \sin \theta_4 \\ C &= r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 & F &= r_4 \dot{\theta}_4^3 \sin \theta_4 & K &= r_3 \sin \theta_3 \end{aligned} \right\} \mathbf{2.97}$$

De donde la ecuación **2.95** se reduce a:

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{-A-B-C-D-E-F-G-H\ddot{\theta}_4}{K} \dots \dots \mathbf{2.98}$$

Observe que la ecuación **2.98** define el $\ddot{\theta}_3$ en función de $\ddot{\theta}_4$ a continuación se reduce la ecuación **2.96**:

$$\left. \begin{aligned} L &= r_2 \dot{\theta}_2^3 \cos \theta_2 & P &= r_3 \dot{\theta}_3^3 \sin \theta_3 & S &= r_4 \dot{\theta}_4^3 \cos \theta_4 \end{aligned} \right\} \mathbf{49}$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$$M = 3r_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \qquad Q = 3r_3 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 \qquad T = 3r_4 \dot{\theta}_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 \qquad \mathbf{2.99}$$

$$N = r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \qquad R = r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 \qquad U = r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4$$

$$R\theta_3''' - U\ddot{\theta}_4 - L - M + N - P - Q + S + T = 0 \dots \mathbf{2.100}$$

Sustituyéndola ecuación **2.100** en la ecuación **2.98** obtenemos:

$$\frac{-RA-RB-RC-RD-RE-RF-RG-KL-KM+KN-KP-KQ+KS+KT}{K U+RH} = \ddot{\theta}_4 \dots \mathbf{2.101}$$

Una vez encontrados los sacudimientos angulares se pueden encontrar los sacudimientos en las juntas del pasador.

$$J_2 = (-r_2 \dot{\theta}_2^3 \sin \theta_2 + 3r_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2) \mathbf{i} + (-r_2 \dot{\theta}_2^3 \cos \theta_2 - 3r_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2) \mathbf{j}$$

$$J_3 = (-r_3 \dot{\theta}_3^3 \sin \theta_3 + 3r_3 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3) \mathbf{i} + (-r_3 \dot{\theta}_3^3 \cos \theta_3 - 3r_3 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3) \mathbf{j}$$

$$J_4 = (r_4 \dot{\theta}_4^3 \sin \theta_4 - 3r_4 \dot{\theta}_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4) \mathbf{i} + (r_4 \dot{\theta}_4^3 \cos \theta_4 + 3r_4 \dot{\theta}_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 - r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4) \mathbf{j}$$

2.102

Así como el sacudimiento en cualquier punto fuera después que se conocen los valores de dos puntos derivando la siguiente expresión:

$$\ddot{r}_C = \ddot{r}_A + r_6 \ddot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j}) - r_6 \dot{\theta}_5^2 (\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j}) \dots \mathbf{2.59}$$

Capítulo III ANÁLISIS DINÁMICO DE FUERZAS

III.1 INTRODUCCIÓN.

En materia de dinámica de máquinas se debe tomar en cuenta el estudio del movimiento y la geometría (*cinemática*) y el estudio de la relación entre las fuerzas y el movimiento (*cinética*), y manejar esta información en términos de las fuerzas y torcas que activan el movimiento de la maquinaria. Esta información es esencial para calcular los esfuerzos internos en los miembros de la maquinaria y la deflexión de los mismos. Debido a que se producen estos esfuerzos, existen dos causas principales en que un miembro puede fallar, son la deformación y la fractura provocada por esfuerzo excesivo, vibración e interferencia debida a la excesiva deflexión elástica, esta información es obviamente crucial para el diseño de maquinaria.

El cálculo del esfuerzo y deflexión en miembros de maquinaria no está considerado en esta tesis, sin embargo, en este capítulo se proporcionarán las ecuaciones para el cálculo de las fuerzas actuando a lo largo de un miembro. Esto incluye fuerzas de reacción en base a las fuerzas que son suministradas desde otros miembros, torcas producidas por el mismo peso del elemento y otras tales como fuerzas centrífugas y fuerzas externas.

III.2 CENTRO DE MASA Y GRAVEDAD.

III.2.1 Centro de masa.

El centro de masa ^[8] el punto donde puede considerarse que está concentrada toda la masa de un cuerpo para estudiar determinados aspectos de su movimiento. El centro de masas de una esfera de densidad uniforme está situado en el centro de la esfera. El centro de masas de una varilla cilíndrica de densidad uniforme está situado a la mitad de su eje. En algunos objetos, el centro de masas puede estar fuera del objeto.

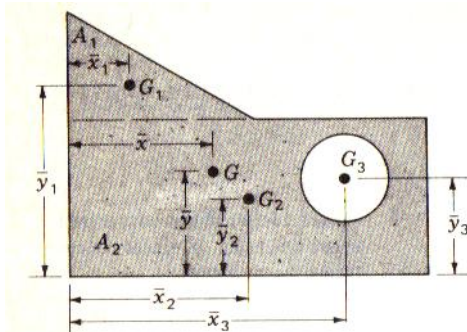


Figura 3.1 Forma compuesta

Las ecuaciones para encontrar las coordenadas del centro de masa cuando la geometría se puede descomponer en geometrías conocidas, como en la figura 3.1. Son las siguientes:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=N} A_i} \dots\dots\dots 3.1$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=N} A_i} \dots\dots\dots 3.2$$

El conjunto más general de las ecuaciones para localizar el centro de masa en un plano, utilizando la integración en lugar de la suma son las siguientes:

$$x = \frac{\int x' dA}{\int dA} = \frac{1}{A} \int x' dA \dots\dots\dots 3.3$$

$$y = \frac{\int y' dA}{\int dA} = \frac{1}{A} \int y' dA \dots\dots\dots 3.4$$

⁸ Joseph Edward Shigley & John Josheph Uicker, Jr. (1988). Teoría de maquinas y mecanismos. McGraw-Hill pp448.

Donde x' y y' son las distancias al centro del área dA , medidas en dirección paralela a los ejes x y y respectivamente.

Para cuerpos tridimensionales, las ecuaciones anteriores se pueden escribir en términos de masa en lugar de áreas; de modo que obtendríamos:

$$x = \frac{\int x' dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int x' dm \dots\dots 3.5 \quad y = \frac{\int y' dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int y' dm \dots\dots 3.6 \quad z = \frac{\int z' dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int z' dm \dots\dots 3.7$$

III.2.2 Centro de gravedad

El centro de gravedad ^[9] es el punto de aplicación del peso en un cuerpo, y siempre es el mismo punto, sea cual sea la posición del cuerpo.

Para determinar el centro de gravedad hay que tener en cuenta que toda partícula de un cuerpo situada cerca de la superficie terrestre está sometida a la acción de una fuerza, dirigida verticalmente hacia el centro de la Tierra, llamada fuerza gravitatoria.

Cuando se trata de cuerpos de dimensiones muy pequeñas frente a la Tierra, se puede admitir que las fuerzas gravitatorias que actúan sobre las distintas partículas del cuerpo son paralelas y de magnitud constante. Por tanto, se puede calcular la posición del centro de gravedad hallando la recta de acción de la resultante de esas fuerzas. Si el cuerpo es homogéneo, el centro de gravedad coincide con su centro geométrico.

Las ecuaciones para determinar el centro de gravedad son muy similares a las del centro de masa:

$$x = \frac{\int x' dW}{\int dW} = \frac{1}{W} \int x' dW \dots\dots 3.8 \quad y = \frac{\int y' dW}{\int dW} = \frac{1}{W} \int y' dW \dots\dots 3.9 \quad z = \frac{\int z' dW}{\int dW} = \frac{1}{W} \int z' dW \dots\dots 3.10$$

Si un cuerpo es tan pequeño que la aceleración de la gravedad es la misma para todas las partículas, entonces el centro de masas y el de gravedad coinciden.

III.3 MOMENTO Y PRODUCTO DE INERCIA.

III.3.1 Momento de inercia.

El momento de inercia es la resistencia que un cuerpo en rotación opone al cambio de su velocidad de giro. A veces se denomina inercia rotacional. El momento de inercia desempeña en la rotación un papel equivalente al de la masa en el movimiento lineal.

El *momento de inercia* ^[10] se define como la integral del “segundo momento”, en torno a un eje, de todos los elementos de masa dm que compone el cuerpo. Considérese el cuerpo rígido que aparece en la figura 3.2, el momento de inercia en torno al eje z es:

⁹ Harry R. Nara (1964). *Mecánica Vectorial Para Ingenieros Parte 1: Estática*. Limusa Wiley S.A Mexico. D.F.p 63

¹⁰ R.C. Hibbeler. Séptima Edición (1996). *Ingeniería Mecánica Dinámica*. Pearson Educación México Edo. Mex. pp 312, 517

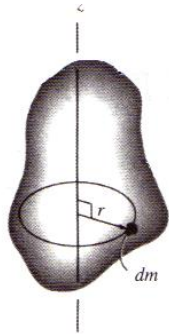


Figura 3.2 Masa rotando con respecto a un eje

$$I = \int_m r^2 dm \quad \dots\dots 3.11$$

El momento de inercia para el elemento diferencial **dm** del cuerpo en torno a cualquiera de los tres ejes de coordenadas se define como el producto de la masa del elemento y el cuadrado de la distancia mínima, con respecto del eje, hacia dicho elemento por ejemplo como se observa en la figura, $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$ de modo que el momento de inercia de **dm** en torno del eje x es:

$$dI_{xx} = r_x^2 dm = (y^2 + z^2) dm \dots\dots 3.12$$

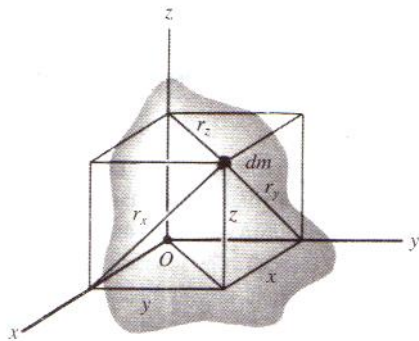


Figura 3. 3 Masa rotando con respecto a un plano

El momento de inercia I_{xx} del cuerpo se determina al integrar esta expresión en toda la masa del cuerpo. Por lo tanto para cada uno de los ejes se tiene.

$$I_{xx} = \int_m r_x^2 dm = \int_m (y^2 + z^2) dm \dots\dots 3.13$$

$$I_{yy} = \int_m r_y^2 dm = \int_m (x^2 + z^2) dm \dots\dots 3.14$$

$$I_{zz} = \int_m r_z^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm \dots\dots 3.15$$

En este caso se observa que el momento de inercia siempre es una cantidad positiva, ya que se trata de la sumatoria del producto de la masa **dm**, que siempre es positiva, y del cuadrado de las distancias.

III.3.2 Producto de inercia.

El *producto de inercia* de un elemento diferencial ^[10] dm se define con respecto de un conjunto de *dos planos ortogonales* como el producto de masa del elemento y las distancias perpendiculares (o las más cortas) existentes desde los planos al elemento. Por ejemplo, con respecto de los planos $y-z$ y $x-z$ el producto de inercia dI_{xy} para el elemento dm que aparece en la figura 3.3 es.

$$dI_{xy} = xydm$$

También es notorio que $dI_{xy} = dI_{yx}$, Al integrar para el total de la masa el producto de inercia del cuerpo correspondiente a cada combinación de planos podría expresarse como

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy dm \dots\dots 3.16 \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz dm \dots\dots 3.17 \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz dm \dots\dots 3.18$$

A diferencia del momento de inercia, que siempre es positivo, el producto de inercia podrá ser positivo, negativo o igual a cero. El resultado depende de los signos de las dos coordenadas que varían independientemente una de otra. En particular, si uno o ambos planos ortogonales son *planos de simetría* de la masa, el *producto de inercia* con respecto a los mismos será cero.

III.4 MÉTODO DE SOLUCIÓN NEWTONIANO.

El análisis de fuerzas dinámicas se puede realizar con diversos métodos el que proporciona mayor información sobre las fuerzas internas en un mecanismo sólo requiere el uso de la ley de newton. Estas se escriben como la suma de todas las fuerzas y los pares de torsión presentes en el sistema:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \dots\dots 3.19 \quad \sum \mathbf{T} = I_G \alpha \dots\dots 3.20$$

Donde \mathbf{F} es fuerza en \mathbf{N} , \mathbf{a}_G es la aceleración del centro de masa en $\mathbf{m/s}^2$, \mathbf{T} es el momento resultante de la fuerza del sistema actuando en el centro de masa del cuerpo, I_G es la matriz de inercia cuyos ejes coordenados tienen su origen en el centro de masa, y α es la aceleración angular del cuerpo, referida al centro de masa.

También es conveniente sumar por separado las componentes de las fuerzas en la dirección x y y , con el sistema coordenado elegido a nuestra conveniencia. Todos los pares de torsión en el sistema bidimensional están en la dirección Z .

$$\sum F = ma_x \dots\dots 3.21 \quad \sum F = ma_y \dots\dots 3.22 \quad \sum T = I_G \alpha \dots\dots 3.23$$

Estas tres ecuaciones deben escribirse para cada cuerpo en movimiento del sistema lo cual conduce a un conjunto de ecuaciones simultáneas para cualquier sistema. Estas ecuaciones no consideran la fuerza gravitacional en un eslabón (peso). Si las aceleraciones cinemáticas son grandes comparadas con la gravedad, lo cual a menudo sucede, las fuerzas producidas por el peso pueden ignorarse en el análisis dinámico. Si los elementos de la máquina son robustos o se mueven lentamente con aceleraciones cinemáticas pequeñas, o ambos casos, puede ser necesario incluir el peso de los elementos en el análisis. El peso se puede tratar como una fuerza externa que actúa en el **CG** del miembro a un ángulo constante.

III.5 UN SOLO ESLABÓN EN ROTACIÓN PURA.

Considere el eslabón único en rotación pura mostrado en la figura 3.4. En este tipo de problemas primero se deberá resolver toda la cinemática del problema .Es decir, todas las aceleraciones de

¹⁰R.C. Hibbeler. Séptima Edición (1996). *Ingeniería Mecánica Dinámica*. Pearson Educación México Edo. Mex. pp 312, 517

los elementos rotatorios y las aceleraciones lineales de los **CG** (centros de gravedad) de todos los miembros en movimiento para todas las posiciones de interés. También, se deben conocer la masa de cada elemento y el momento de inercia de masa I_G . Además, pueden existir fuerzas o pares de torsión aplicados a cualquier elemento del sistema, figura 3.4.

Primero se dispone un sistema de coordenadas local no rotativo en cada elemento móvil localizado en su **CG**, (en este ejemplo sólo se tiene un elemento móvil). Todas las fuerzas externas aplicadas ya sea las producidas por otros elementos conectados o por otros sistemas, deben tener sus puntos de aplicación localizados en el sistema coordenado local. La figura 3.4 b muestra un diagrama de cuerpo libre del eslabón móvil 2. La junta de pasador en O_2 del eslabón 2 tiene una fuerza F_{12} generada por la unión del eslabón 1, cuyas componentes x y y son F_{12x} y F_{12y} . Estos subíndices se leen como “la fuerza del eslabón 1 sobre el 2” en la dirección x o y . El esquema de notación con subíndices se utiliza para indicar en qué par de fuerzas “acción-reacción” se determina.

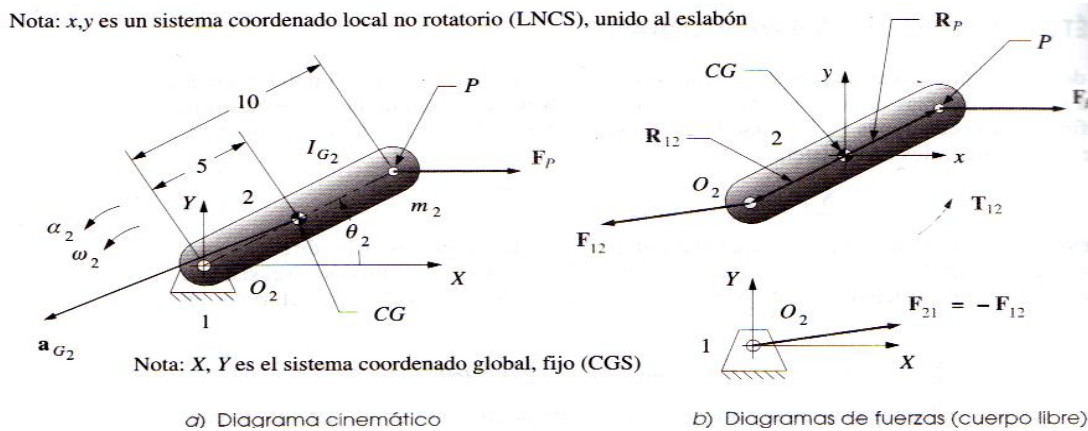


Figura 3.4 Análisis de fuerzas dinámicas de un solo eslabón en rotación pura

También, existe una fuerza externa F_P aplicada, mostrada en el punto P con componentes F_{P_x} y F_{P_y} . Los vectores de posición R_{12} y R_P definen, respectivamente, los puntos de aplicación de estas fuerzas. Estos vectores de posición se definen con respecto al sistema coordenado local en el **CG** del elemento. Se deben descomponer en sus componentes x y y , y estar disponible un par de torsión fuente en el eslabón para impulsarlo a las aceleraciones cinemáticamente definidas. Esta es una de las incógnitas que debe determinarse. El par de torsión fuente es el *par suministrado desde la bancada hasta el eslabón motriz 2*, por lo que se designa como T_{12} . Las otras dos incógnitas de este ejemplo son las componentes de la fuerza en la junta de pasador F_{12x} y F_{12y} .

Se tienen tres incógnitas y tres ecuaciones con lo que es posible resolver el sistema. Ahora escribimos las ecuaciones 3.24 y 3.25 para el eslabón móvil 2. Cualquiera de las fuerzas o pares de torsión aplicadas cuyas direcciones sean conocidas, deben conservar los signos apropiados en sus componentes. Supóngase que todas las fuerzas y pares de torsión desconocidos son positivos, sus signos verdaderos “saldrán a la luz”.

$$\sum F = F_P + F_{12} = m_2 a_G \dots\dots 3.24$$

$$\sum T = T_{12} + (R_{12} \times F_{12}) + (R_P \times F_P) = I_G \alpha \dots\dots 3.25$$

La ecuación para las fuerzas puede descomponerse en sus dos componentes. La ecuación para los pares de torsión contiene dos términos vectoriales de producto cruz que representan pares de torsión producidos por las fuerzas aplicadas a cierta distancia del **CG**. Cuando estas ecuaciones se desarrollan se tiene:

$$F_{P_x} + F_{12_x} = m_2 a_{G_x} \dots\dots 3.26$$

$$F_{P_y} + F_{12_y} = m_2 a_{G_y} \dots\dots 3.27$$

$$T_{12} + (R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x}) + (R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}) = I_G \alpha \dots\dots 3.28$$

De modo que ahora tenemos un sistema de ecuaciones de 3x3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G_x} - F_{P_x} \\ m_2 a_{G_y} - F_{P_y} \\ I_G \alpha - (R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}) \end{bmatrix} \dots\dots 3.29$$

III.6 ANÁLISIS DE FUERZAS DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS.

La figura **3.5** muestra un mecanismo de 4 barras. Todas las magnitudes de los eslabones, sus posiciones, ubicaciones de los centros de gravedad, las aceleraciones de los centros de gravedad y las velocidades y las aceleraciones angulares, se determinaron previamente con el análisis cinemático. Se requieren encontrar las fuerzas que actúan en todas las juntas de pasador del mecanismo para una o más posiciones. Este mecanismo tiene tres eslabones móviles de acuerdo con las ecuaciones **3.19** y **3.20** y proporcionan tres ecuaciones para cualquier eslabón o cuerpo rígido en movimiento; se espera tener un sistema de ecuaciones de 9x9.

La figura **3.5 b** muestra los diagramas de cuerpo libre de todos los eslabones con todas las fuerzas mostradas, estos incluyen una fuerza externa **F_P** que actúan en el punto **P** del eslabón 3, también se muestra un par de torsión externo **T₄** que actúa sobre el eslabón 4. Estas cargas externas son producidas por algún otro mecanismo (dispositivo, persona, cosa, etc.). Que ejerce una fuerza de empuje o torsión contra el movimiento del mecanismo. Cualquier eslabón puede tener un sin número de cargas y pares de torsión externos que actúan en él. Obsérvese que si estuviera presente un sistema de fuerzas más complicado, también se reduciría la combinación a una sola fuerza y par de torsión de cada eslabón.

Para encontrar las fuerzas en los pasadores se requiere que las fuerzas y pares de torsión externos se determinen para todas las posiciones de interés. Se resolverá para un elemento del par de fuerzas de acción-reacción y en cada junta, así como para el par de torsión motriz **T₁₂** que debe suministrarse al eslabón 2 para mantener el estado cinemático como se definió. La convención de subíndices para las fuerzas es la siguiente: **F₁₂** es la fuerza de 1 sobre dos y **F₃₂** es la fuerza de 3 sobre 2. Las fuerzas iguales y opuestas en cada uno de los pasadores se designan **F₂₁** y **F₂₃**, respectivamente. Todas las fuerzas desconocidas en la figura se muestran con ángulos y longitudes arbitrarias ya que sus valores reales aun no se determinan.

Los parámetros cinemáticos del mecanismo se definieron con respecto a un sistema global **X, Y (GCS)** cuyo origen está en el pivote motriz **O₂** y cuyo eje **X** pasa por el motriz **O₄** del eslabón 4. También se requiere la masa (**m**) de cada eslabón, la ubicación de su centro **CG** y su momento de

inercia de masa (I_G) con respecto a este **CG**. El **CG** de cada eslabón inicialmente se define dentro de cada eslabón con respecto a un sistema de ejes local rotatorio y móvil (**LRCS**) insertado en el eslabón porque su **CG** es una propiedad física invariable. El origen de este sistema de ejes x',y' está en una junta del pasador y el eje x' es la línea de centros del eslabón. La posición del **CG** dentro del eslabón se define por un vector posición en este (**LRCS**). La ubicación instantánea del **CG** se determina fácilmente en cada posición dinámica del eslabón, al sumar el ángulo del vector de posición interno del **CG** al ángulo actual en el sistema global del eslabón (**GCS**).

Se debe definir cada uno de los parámetros dinámicos del eslabón así como las ubicaciones de las fuerzas con respecto a un sistema de ejes local móvil, pero no rotativo (**LNCS**) x,y localizado en su **CG** como se muestra para diagrama de cuerpo libre en la figura 3.5 b. Las ubicaciones de los vectores de posición de todos los puntos de conexión de otros eslabones y los puntos de aplicación de las fuerzas externas deben definirse con respecto al sistema de ejes (**LNCS**). Estos datos cinemáticos y de fuerzas aplicadas difieren en cada posición del mecanismo. En los siguientes planteamientos y ejemplos, sólo se considera una posición del mecanismo, el proceso es idéntico para cada posición sucesiva.

Primero se escriben las ecuaciones 3.19 y 3.20 para cada eslabón móvil. Eslabón 2:

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G_{2x}} \dots\dots 3.30$$

$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 a_{G_{2y}} \dots\dots 3.31$$

$$T_{12} + (R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + (R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) = I_{G_2} \alpha_2 \dots\dots 3.32$$

Para el eslabón 3, con la sustitución de la fuerza de reacción $-F_{32}$ en lugar de F_{23} el resultado será:

$$F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} = m_3 a_{G_{3x}} \dots\dots 3.33$$

$$F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} = m_3 a_{G_{3y}} \dots\dots 3.34$$

$$(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}) - (R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}) + (R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}) = I_{G_3} \alpha_3 \dots\dots 3.35$$

Para el eslabón 4, al sustituir la fuerza de reacción $-F_{43}$ en lugar de F_{34} el resultado será :

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{G_{4x}} \dots\dots 3.36$$

$$F_{14y} - F_{43y} = m_4 a_{G_{4y}} \dots\dots 3.37$$

$$(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}) - (R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}) + T_4 = I_{G_4} \alpha_4 \dots\dots 3.38$$

Note que el par de torsión T_{12} sólo aparecen la ecuación para el eslabón 2, ya que es la manivela motriz la que está conectada al motor. El eslabón 3, en este caso, no tiene un par de torsión aplicado externamente (aunque podría tenerlo), pero sí una fuerza F_p . El eslabón 4, en el ejemplo no tiene ninguna fuerza externa que actúe sobre el (aunque podría tenerla) pero si un par externo T_4 . El eslabón motriz 2 también podría tener una fuerza aplicada externamente sobre él, (aunque en este caso no la tiene),. Existen nueve ecuaciones y nueve incógnitas, que pueden resolverse simultáneamente, o con un arreglo matricial.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_2 a_{G2x} \\
 m_2 a_{G2y} \\
 I_{G2} \alpha_2 \\
 m_3 a_{G3x} - F_{Px} \\
 m_3 a_{G3y} - F_{Py} \\
 I_{G3} \alpha_3 - R_{Px} F_{Py} + R_{Py} F_{Px} \\
 m_4 a_{G4x} \\
 m_4 a_{G4y} \\
 I_{G4} \alpha_4 - T_4
 \end{bmatrix}
 \dots\dots\dots 3.39$$

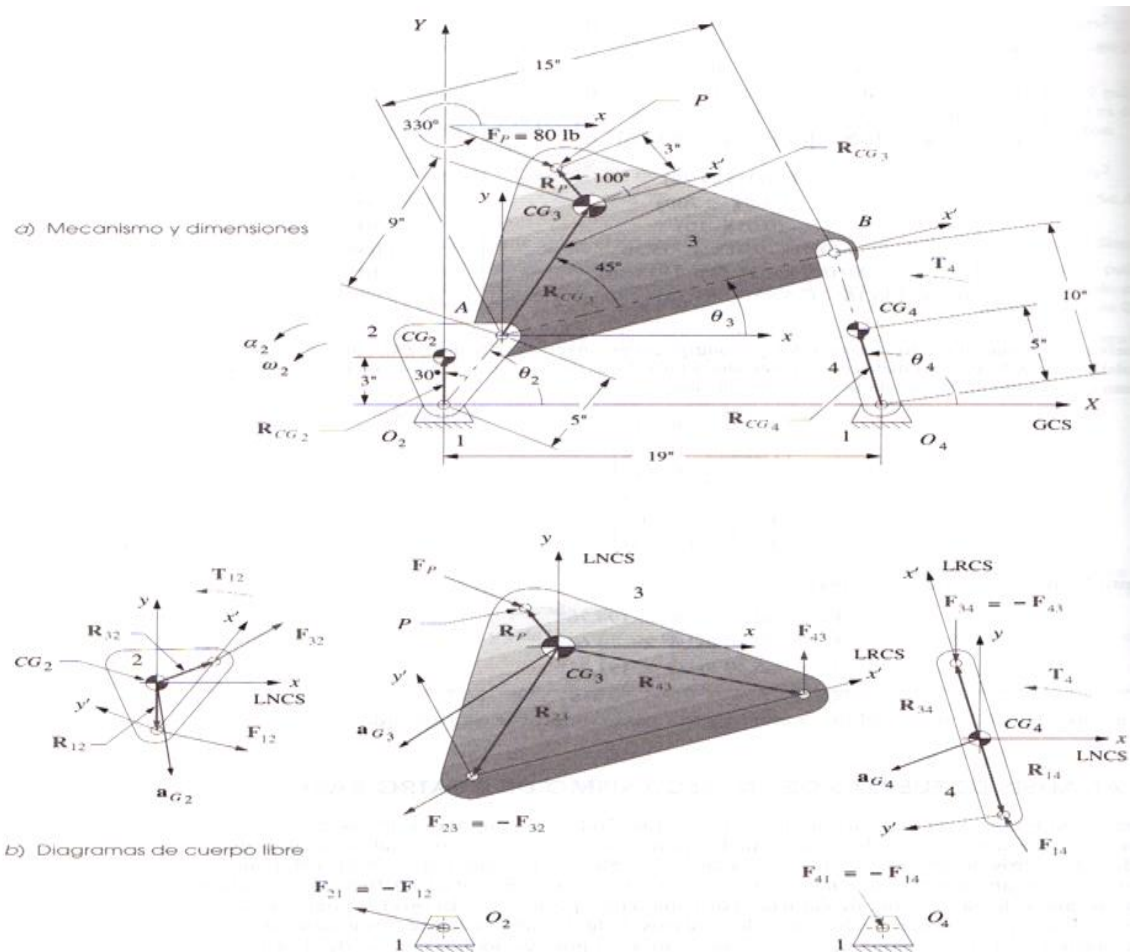


Figura 3.5 Análisis de fuerzas dinámicas de un mecanismo de cuatro barras.

III.7 ANÁLISIS DE FUERZAS DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS MANIVELA-CORREDERA.

El método empleado en la solución del mecanismo de cuatro barras con juntas de pasador es válido también para un mecanismo de cuatro barras biela manivela. La principal diferencia es que la corredera no tendrá aceleración angular. La figura 3.6 muestra un mecanismo de este tipo con una fuerza externa en la corredera, eslabón 4. Este es representativo del mecanismo extensamente utilizado en bombas de pistón y en motores de combustión interna. Se requiere determinar la fuerza en las juntas y el par de torsión motriz necesario en la manivela para generar las aceleraciones especificadas. Para encontrar la solución primero se realiza el análisis cinemático a fin de determinar los valores de posición, velocidad y aceleración en las posiciones a analizar. A continuación se dan las ecuaciones para cada eslabón.

Para el eslabón 2 se tiene:

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G_2x} \dots\dots 3.40$$

$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 a_{G_2y} \dots\dots 3.41$$

$$T_{12} + (R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + (R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) = I_{G_2} \alpha_2 \dots\dots 3.42$$

Para el eslabón 3, con sustitución de la fuerza de reacción $-F_{32}$ en lugar de F_{23} el resultado es:

$$F_{43x} - F_{32x} = m_3 a_{G_3x} \dots\dots 3.43$$

$$F_{43y} - F_{32y} = m_3 a_{G_3y} \dots\dots 3.44$$

$$(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}) - (R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}) = I_{G_3} \alpha_3 \dots\dots 3.45$$

Para el eslabón 4, al sustituir la fuerza de reacción $-F_{43}$ en lugar de F_{34} se tiene:

$$F_{14x} - F_{43x} + F_{P_x} = m_4 a_{G_4x} \dots\dots 3.46$$

$$F_{14y} - F_{43y} + F_{P_y} = m_4 a_{G_4y} \dots\dots 3.47$$

$$(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}) - (R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}) + (R_{P_x}F_{P_y} - R_{P_y}F_{P_x}) = I_{G_4} \alpha_4 \dots\dots 3.48$$

Para la inversión del mecanismo manivela-corredera, la corredera o pistón está en traslación pura con respecto al plano estacionario de la bancada, por lo tanto no puede tener ninguna aceleración o velocidad angular. Por otra parte, todos los vectores de posición en la ecuación del par de torsión ecuación 3.48 para el eslabón 4 son cero ya que la fuerza F_P actúa en el CG . Por lo tanto, esta ecuación es **cero** para esta inversión del mecanismo biela manivela. Su aceleración lineal tampoco tiene componente en y .

$$\alpha_4 = 0 \dots\dots 3.49$$

$$a_{G_4y} = 0 \dots\dots 3.50$$

La única fuerza en la dirección x que puede existir en la interface de contacto entre los eslabones 4 y 1 es la fuerza de fricción. Si se supone fricción de Coulomb, la componente x puede expresarse en función de de la componente y de la fuerza en esta interface de contacto. Se puede obtener una relación para la fuerza de fricción f en esta interface de contacto, de modo que $f = \pm \mu N$ donde μ es

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

un coeficiente de fricción conocido. Los signos más y menos en el coeficiente de fricción son para reconocer el hecho de que la fuerza de fricción siempre se opone al movimiento. El análisis cinemático proporciona la velocidad del eslabón en la junta deslizante. El signo de μ siempre será opuesto al sentido de la velocidad.

$$F_{14x} = \pm \mu F_{14y} \dots \dots \dots 3.51$$

Sustituyendo las últimas tres ecuaciones en las ecuaciones para el eslabón 4 se obtiene:

$$\pm \mu F_{14y} - F_{43x} + F_{Px} = m_4 a_{G4x} \dots \dots \dots 3.52$$

$$F_{14y} - F_{43y} + F_{Py} = 0 \dots \dots \dots 3.53$$

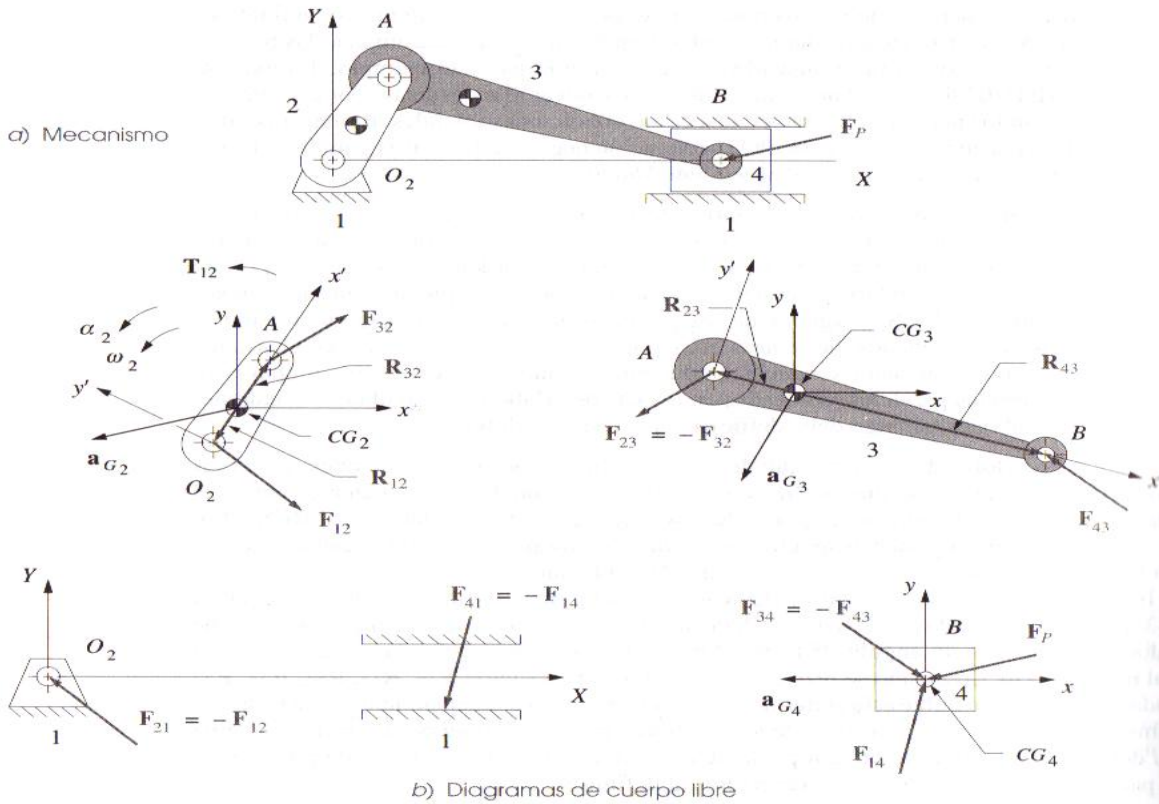


Figura 3.6 Análisis de fuerzas dinámicas de cuatro barras de un mecanismo manivela corredera.

Esta última sustitución reduce el sistema de modo que:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \pm \mu & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_2 a_{G2x} \\
 m_2 a_{G2y} \\
 I_{G2} \alpha_2 \\
 m_3 a_{G3x} \\
 m_3 a_{G3y} \\
 I_{G3} \alpha_3 \\
 m_4 a_{G4x} - F_{Px} \\
 -F_{Py}
 \end{bmatrix}
 \dots \dots \dots 3.54$$

III.8 ANÁLISIS DE FUERZAS; MECANISMOS CON MÁS DE CUATRO BARRAS.

Este método matricial para analizar fuerzas puede ampliarse con facilidad a ensambles de eslabones más complejos. Las ecuaciones para cada eslabón son de la misma forma. Se puede crear una notación más general para las ecuaciones de fuerzas y aplicarlas a cualquier ensamble de n eslabones conectados con juntas de pasador. Si j representa cualquier eslabón del ensamble, sea $i=j-1$ el eslabón previo de la cadena y $k=j+1$ el siguiente de la cadena; al aplicar la forma vectorial de las ecuaciones para fuerzas se obtiene:

$$F_{ij} + F_{jk} + \sum F_{extj} = m_j a_{Gj} \dots \dots \dots 3.55$$

$$(R_{ij} \times F_{ij}) + (R_{jk} \times F_{jk}) + \sum T_j + (R_{extj} \times \sum F_{extj}) = I_{Gj} \alpha_j \dots \dots \dots 3.56$$

Donde:

$$j = 2, 3, \dots, n \quad i = j - 1 \quad k = j + 1, \quad j \neq n; \quad \text{si} \quad j = n, k = 1$$

Y

$$F_{ji} = -F_{ij} \dots \dots \dots 3.57$$

$$F_{kj} = -F_{jk} \dots \dots \dots 3.58$$

La suma de las ecuaciones **3.57** y **3.58** de vectores de fuerza puede ser descompuesta en dos ecuaciones de componentes x y y , y luego aplicarse junto con la suma de la ecuación de pares de torsión ecuación **3.56** a cada uno de los eslabones de la cadena para crear un conjunto de ecuaciones simultáneas para su solución. Cualquier eslabón puede tener fuerzas externas y/o pares de torsión externos aplicados a él. Todos tendrán fuerzas de reacción en los pasadores. Como el n -ésimo eslabón en una cadena cerrada se conecta al primer eslabón, el valor k para el n -ésimo eslabón será igual a 1. Para reducir el número de variables a una cantidad manejable, se sustituyen las fuerzas de reacción negativas según las ecuaciones **3.58** y **3.57** cuando sea necesario. Cuando existen juntas deslizantes, se requerirá agregar restricciones en las direcciones permisibles de las fuerzas en esas juntas, como en el caso de la derivación del mecanismo manivela-corredera invertido.

III.9 FUERZAS Y PAR DE TORSIÓN DE SACUDIMIENTO.

Es importante conocer el efecto neto de las fuerzas dinámicas que se generan en el plano de la bancada, ya que este puede ocasionar vibraciones en la estructura que soporta la máquina. En los ejemplos de mecanismos simples de tres y cuatro barras, sólo existen dos puntos en los cuales pueden transmitirse las fuerzas dinámicas: al eslabón 1 y al plano de bancada. Los mecanismos más complicados tendrán más juntas en el plano de la bancada. Las fuerzas suministradas por los eslabones móviles al plano de la bancada en los pivotes fijos O_2 y O_4 se designan como F_{21} y F_{41} por medio de la convención de subíndices definidos en la sección III.V. Como se decidió resolver para F_{21} y F_{41} en la solución, sólo se hacen negativas esas fuerzas para obtener sus contrapartes iguales y opuestas.

$$F_{21} = -F_{12} \dots \dots \dots 3.59$$

$$F_{41} = -F_{14} \dots \dots \dots 3.60$$

La suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de la bancada recibe el nombre de **fuerzas de sacudimiento** (F_s), como se muestra en la figura **3.7**, que en estos ejemplos simples es igual a:

$$F_S = F_{21} + F_{41} \dots \dots \dots 3.61$$

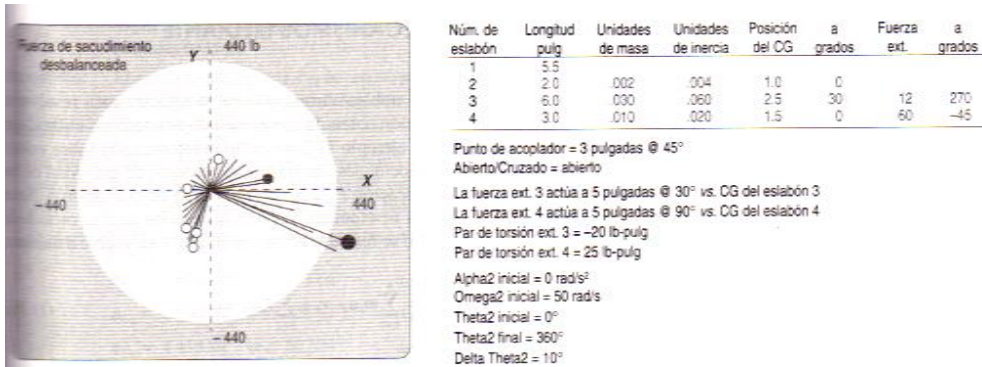


Figura 3.7 Datos del mecanismo y curva polar de fuerzas de sacudimiento de un mecanismo manivela-corredera desbalanceado.

El par de reacción generado sobre el plano de la bancada recibe el nombre de par de torsión de sacudimiento (T_S), como se ilustra en la figura 3.8. Este es el negativo del par de torsión fuente T_{12} que es suministrado por la bancada al eslabón motriz:

$$T_S = T_{21} = -T_{12} \dots \dots \dots 3.62$$

La fuerza de sacudimiento tendera a mover el plano de la bancada hacia adelante y hacia atrás, y el par de torsión de sacudimiento tendera a hacerlo oscilar con respecto al eje de la línea de transmisión. Ambos provocaran vibraciones. En general, se requiere reducir al mínimo los efectos de las fuerzas y los pares de torsión de sacudimiento en la estructura. Esto se puede lograr al balancear, con la adición de un volante al sistema, y en ocasiones montando la estructura sobre amortiguadores para aislar las vibraciones del resto del ensamble. Con mayor frecuencia se utiliza una combinación de los tres métodos.

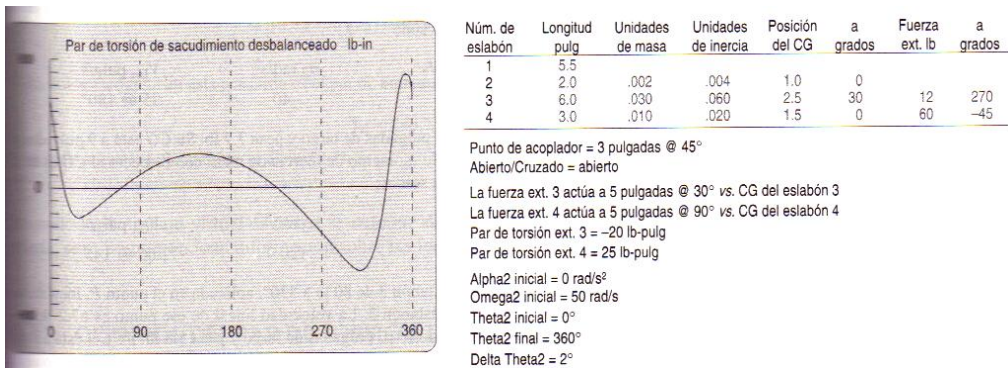


Figura 3.8 Datos del mecanismo y curva polar de torsión de sacudimiento de un mecanismo manivela-corredera desbalanceado.

III.10 CONTROL DEL PAR DE TORSIÓN DE ENTRADA: VOLANTES.

La gran variación de la aceleración en un mecanismo puede provocar oscilaciones significativas en el par de torsión requerido para impulsarlo a una velocidad constante o casi constante. Los pares de torsión pico requeridos pueden ser tan altos como para requerir un motor bastante grande para suministrarlos. Sin embargo, el par de torsión promedio a lo largo del ciclo, debido a pérdidas y al

trabajo externo realizado, a menudo puede ser mucho menor que el par pico. Se requiere proporcionar alguna forma para suavizar estas oscilaciones del par de torsión durante el ciclo. Esto permitirá dimensionar el motor para suministrar el par de torsión promedio en lugar del par de torsión pico. Un medio conveniente y relativamente barato de hacerlo es la adición de un **volante** al sistema.

III.10.1 Variación del par de torsión.

La figura 3.9 muestra la variación del par de torsión de entrada en un mecanismo de cuatro barras de manivela-balancín con una revolución completa de la manivela motriz. Funciona a una velocidad angular constante de 50 rad/s. El par de torsión varía mucho en un ciclo del mecanismo, desde un valor pico positivo de 341.7 lb-pulg hasta uno negativo de -166.4lb-pulg. El valor promedio de este par de torsión durante el ciclo es de sólo 70.2 lb-pulg, debido al trabajo externo realizado más las pérdidas. Este mecanismo tiene únicamente una fuerza de 12 lb aplicada al eslabón 3 en el **CG** y un par externo de 25lb-pulg aplicado al eslabón 4. Estas pequeñas cargas externas no responden a las variaciones del par de torsión de entrada requerido para mantener la velocidad constante de la manivela. ¿Cuál es entonces la explicación? Las grandes variaciones del par son evidencia de la energía cinética almacenada en los eslabones al moverse. Podría pensarse que los pulsos positivos del par de torsión representan la energía suministrada por el impulsor (motor) y guardada temporalmente en los eslabones móviles y los pulsos negativos del par de torsión representan la energía que intenta regresar de los eslabones al impulsor. Desafortunadamente, la mayoría de los motores se diseñan para suministrar energía, mas no para devolverla. Por lo tanto la “energía regresada” no tiene a donde ir.

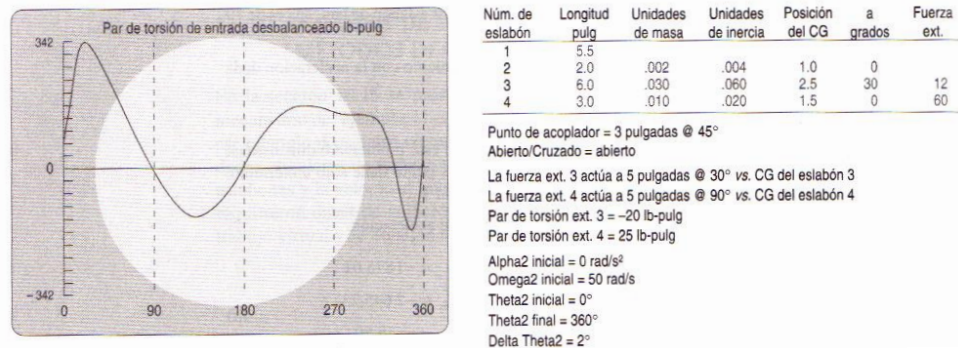


Figura 3.9 Datos del mecanismo y par de torsión de entrada de un mecanismo de cuatro barras de manivela- balancín desbalanceado.

La figura 3.10 muestra la curva característica velocidad-par de torsión de un motor eléctrico de **CD** de imán permanente. Otros tipos de motores tendrán funciones de forma diferente que relaciona la velocidad del motor con el par de torsión, pero todos los impulsores (fuentes) tendrán alguna curva característica semejante. Conforme cambian las demandas del par de torsión del motor, su velocidad también debe cambiar, de acuerdo con las características inherentes. Esto significa que la curva del par demandado en la figura 3.9 será difícil de entregar por un motor estándar sin cambios drásticos en su velocidad.

El cálculo de la curva del par de torsión de la figura 3.9 se hizo con base en la suposición de que la velocidad de la manivela (y por tanto del motor) era un valor constante. Todos los datos cinemáticos utilizados en el cálculo de la fuerza y el par de torsión se generaron sobre esa base. Con la variación del par de torsión mostrada se tendría que utilizar un motor de gran caballaje para

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

proporcionar la potencia requerida para alcanzar ese par de torsión pico a la velocidad de diseño dada por:

$$\text{Potencia} = \text{par de torsion} \times \text{velocidad angular} \dots\dots 3.63$$

$$\text{Potencia pico} = 341.7 \text{ lb-pulg} \times \frac{50 \text{ rad}}{\text{s}} = 17085 \frac{\text{lb-pulg}}{\text{s}} = 2.59 \text{ hp}$$

La potencia necesaria para suministrar el par de torsión promedio es mucho más pequeña:

$$\text{Potencia pico} = 70.2 \text{ lb-pulg} \times \frac{50 \text{ rad}}{\text{s}} = 3510 \frac{\text{lb-pulg}}{\text{s}} = 0.53 \text{ hp}$$

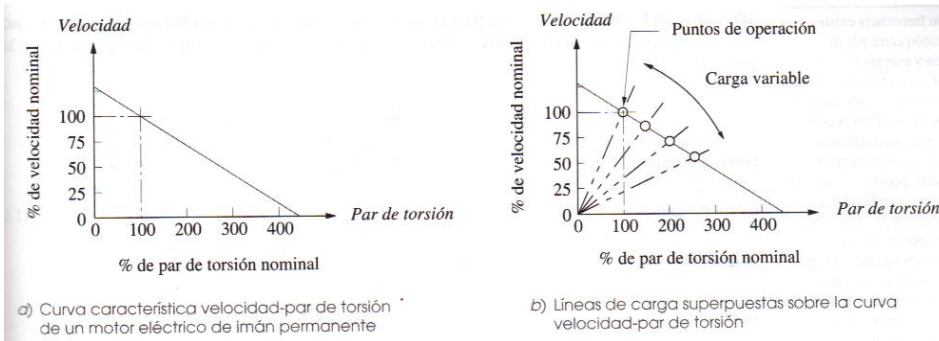


Figura 3.10 Curva característica típica velocidad-par de torsión de un motor eléctrico de CD de imán permanente.

Sería extremadamente ineficiente especificar un motor con base en la demanda pico del sistema ya que la mayor parte del tiempo estaría subutilizado. Se requiere algo en el sistema que sea capaz de almacenar energía cinética. Tal dispositivo de almacenamiento de energía cinética como ese se llama **volante**.

III.10.2 Energía del volante.

La figura 3.11 muestra un volante diseñado como un disco circular plano, conectado al eje de un motor que también podría ser el eje motriz de la manivela de un mecanismo. El motor suministra un par de torsión de magnitud T_M que sería deseable fuera lo más constante posible, es decir, igual al par promedio T_{prom} . La carga (de un mecanismo), del otro lado del volante, demanda un par de torsión T_L que varía con el tiempo como se muestra en la figura 3.9. La energía cinética de un sistema rotatorio está dada por:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \dots\dots 3.64$$

Don de I es el momento de inercia de toda la masa rotatoria en el eje. Éste incluye el momento de inercia del rotor del motor y de la manivela del mecanismo, más el momento del volante. Se requiere determinar qué valor de I se debe agregar en la forma de un volante para reducir la variación de la velocidad del eje a un nivel aceptable. Para llevar a cabo esto, iniciemos escribiendo para el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3.11

$$\sum T = I \alpha \dots\dots 3.65$$

$$T_L - T_M = I \alpha \dots\dots 3.66$$

Pero se requiere:

$$T_M = T_{prom} \dots \dots \dots \mathbf{3.67}$$

De modo que:

$$T_L - T_{prom} = I\alpha \dots \dots \mathbf{3.68}$$

Pero:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right) = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Al sustituir se tiene:

$$T_L - T_{prom} = I \omega \frac{d\omega}{d\theta} \dots \dots \dots \mathbf{3.69}$$

$$(T_L - T_{prom})d\theta = I \omega d\omega \dots \dots \dots \mathbf{3.70}$$

Al integrar se obtiene:

$$\int_{\theta @ \omega_{minima}}^{\theta @ \omega_{maxima}} (T_L - T_{prom})d\theta = \int_{\omega_{minima}}^{\omega_{maxima}} I \omega d\omega \dots \dots \dots \mathbf{3.71}$$

$$\int_{\theta @ \omega_{minima}}^{\theta @ \omega_{maxima}} (T_L - T_{prom})d\theta = \frac{1}{2} I (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) \dots \dots \dots \mathbf{3.72}$$

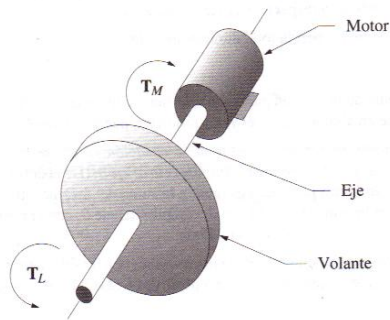


Figura 3.11 Volante en un eje motriz.

El primer miembro de la ecuación **3.72** representa el cambio de energía **E** entre la ω máxima y mínima del eje, y es igual al área bajo el diagrama par torsión-tiempo de la figura **3.12** entre los extremos de ω . El segundo miembro de la expresión **3.72** es el cambio de la energía almacenada en el volante. La única forma en que puede extraerse energía del volante es reduciendo su velocidad como se muestra en la ecuación **3.64**. Si se agrega energía, se acelerara, por tanto, es imposible obtener velocidad constante del eje ante las demandas de energía variable impuestas por la carga. Lo mejor que puede hacerse es minimizar la variación de la velocidad ($\omega_{max} - \omega_{min}$) con el uso de un volante que tenga un momento de inercia suficientemente grandes.

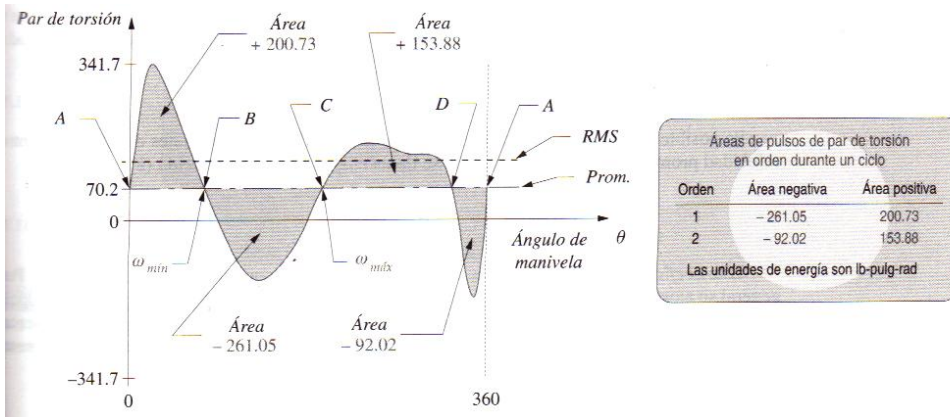


Figura 3.12 Integración de los pulsos arriba y abajo del valor promedio en la función del par de torsión de entrada.

III.10.3 Dimensionamiento del volante.

A continuación se puede determinar cuán grande debe ser un volante para absorber energía con un cambio de velocidad aceptable. El cambio de velocidad del eje durante un ciclo se llama *fluctuación (Fl)* y es igual a:

$$Fl = \omega_{max} - \omega_{min} \dots\dots 3.73$$

Es posible normalizar esta ecuación como una relación sin dimensiones dividiéndola entre la velocidad promedio del eje, y recibe el nombre de *coeficiente de fluctuación (k)*.

$$k = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})}{\omega_{prom}} \dots\dots 3.74$$

Este coeficiente de fluctuación es un parámetro de diseño que debe ser elegido por el diseñador. Por lo general, se ajusta a un valor entre 0.01 y 0.05 y corresponde a una fluctuación en la velocidad del eje de entre 1 a 5%. Mientras más pequeño sea el valor elegido, más grande será el volante. Esto representa un compromiso de diseño, ya que un volante más grande aumentara el costo y el peso del sistema, factores que deben evaluarse para conseguir una uniformidad en la operación deseada.

El diseño del volante requiere del desarrollo de una expresión para el momento de inercia de éste en términos de la energía del sistema. El cambio en la energía **E** requerido se determina al integrar la curva del par de torsión:

$$\int_{\theta @ \omega_{minima}}^{\theta @ \omega_{maxima}} (T_L - T_{prom}) d\theta = E \dots\dots 3.75$$

Que ahora puede igualarse al segundo miembro de la ecuación 3.72

$$E = \frac{1}{2} I (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) \dots\dots 3.76$$

Al factorizar esta expresión:

$$E = \frac{1}{2} I (\omega_{max} + \omega_{min}) (\omega_{max} - \omega_{min}) \dots\dots 3.77$$

Si la función del par de torsión-tiempo fuera armónica pura, entonces su valor promedio podría expresarse como:

$$\omega_{prom} = \frac{(\omega_{max} + \omega_{min})}{2} \dots\dots 3.78$$

Las funciones par de torsión rara vez serán armónicas puras, pero el error introducido por el uso de esta expresión como una aproximación del promedio es aceptablemente pequeño, por ello es posible sustituir las ecuaciones **3.74** y **3.78** en la ecuación **3.77** para obtener una expresión para el momento de inercia de masa I_S del volante requerido:

$$E = \frac{1}{2} I (2\omega_{prom}) (k\omega_{prom}) \dots\dots 3.79$$

$$I_S = \frac{E}{k\omega_{prom}^2} \dots\dots 3.80$$

Se puede utilizar la ecuación **3.80** para diseñar el volante físico y elegir el coeficiente de fluctuación deseado k mediante el valor de E obtenido de la integración numérica de la curva de par de torsión y la velocidad promedio ω del eje para calcular I_S del sistema requerido. El momento de inercia de masa del volante físico I_F se iguala entonces al sistema requerido I_S , pero si se conocen los momentos de inercia de los demás elementos rotatorios en el mismo eje motriz (como el motor), el I_F del volante físico requerido se puede reducir en esas cantidades.

El diseño del volante más eficiente para incrementar al máximo el I_F con el mínimo material utilizado, es aquel en el cual la masa está concentrada en su borde y su masa esta soportada por rayos, como la rueda de un carruaje. Esto ubica la mayor parte de la masa en el radio más grande posible y minimiza el peso con un I_F dado. Incluso si se elige un diseño de volante de disco circular solido, plano, o por simplicidad de fabricación o para obtener una superficie plana para otras funciones (como un embrague automotriz) el diseño deberá considerar la reducción del peso y por tanto su costo. Como en general $I = mr^2$, un disco delgado de gran diámetro necesitara menos libras de material para obtener un momento dado, que un disco grueso de diámetro más pequeño.

La figura **3.13** muestra el cambio del par de torsión de entrada T_{12} en el mecanismo mostrado en la figura **3.9**, después de agregar un volante dimensionado para proporcionar un coeficiente de fluctuación de 0.05. La oscilación del par de torsión con respecto al valor promedio no cambiado ahora es 5% mucho menor de lo que se tenía sin volante. Ahora se puede utilizar un motor de caballaje mucho menor por que el volante está disponible para absorber la energía devuelta al mecanismo durante el ciclo.

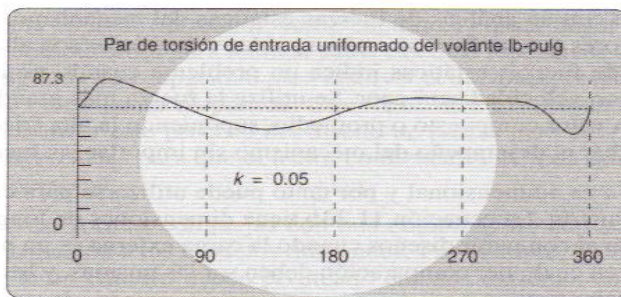


Figura 3.13 Curva de par de torsión de entrada del mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura **3.9** después de uniformarla con un volante.

CAPÍTULO IV BALANCEO.

IV.1 INTRODUCCIÓN.

Cualquier maquinaria, dispositivo, eslabón o elemento que se encuentra en rotación pura puede estar perfectamente balanceada para eliminar todas las fuerzas, y momentos de sacudimiento, las cuales son una fuente significativa de vibraciones. Un tema importante en el análisis y diseño de máquinas dinámicas es buscar minimizar la fluctuación de fuerzas que dicha maquinaria aplica a su medio ambiente por medio de su bancada. Masas rotando rápidamente como en los motores eléctricos, generadores de vapor y turbinas de gas, llantas de vehículos, y muchas otras pueden generar fuerzas fluctuantes significantes con una diminuta cantidad de desbalance. En los motores de combustión interna, bombas, compresores y muchos otros tipos de maquinaria se pueden encontrar combinaciones de masas recíprocantes y en rotación. Ellos son grandes generadores de fuerzas fluctuantes, pero esas fuerzas pueden ser balanceadas principalmente por la fijación apropiada de contrapesos. Es necesario discutir el procedimiento utilizado para el balanceo en esos un tanto diversos tipos de sistemas.

Cuando cualquier mecanismo está operando a altas velocidades, se deben considerar dos tipos de fuerzas, fuerzas externas aplicadas y fuerzas internas. Las fuerzas de inercia surgen cuando los miembros individuales están sometidos a una gran aceleración. En general, el sistema de fuerzas de inercia actuando en un miembro puede representarse como una fuerza de inercia actuando en una línea a través del centro de masa, junto con el momento de inercia. La fuerza está determinada por ma y el momento por $I\alpha$, donde m es la masa del elemento, I es el momento de inercia de masa sobre el centro de masa, a es la aceleración lineal del centro de masa y α es la aceleración angular de dicho elemento. En maquinaria girando a grandes velocidades, las fuerzas de inercia pueden ser de mayor magnitud que las fuerzas externas. Consecuentemente, cuando se diseña el mecanismo, se deben de considerar los dos tipos de fuerzas.

En general, las fuerzas externas están asociadas con la función que representa el funcionamiento del mecanismo y el manejo del mismo. Es poco frecuente alterar sus magnitudes. Por otro lado, las fuerzas de inercia son debidas enteramente a la masa y al movimiento característico de los miembros de la máquina, por lo tanto, la práctica del diseño prudente dicta que las fuerzas de inercia deben ser minimizadas. Esto puede ser logrado tanto por la reducción de masas y momentos de inercia del movimiento de los eslabones o por la reducción de sus aceleraciones lineal y angular. Las masas pueden ser reducidas por la utilización de materiales más ligeros y geometrías óptimas. Para dar una geometría cinemática, la aceleración angular no puede ser reducida. Sin embargo la aceleración lineal de los centros de masa se puede reducir, mediante el movimiento de dicho centro hacia el punto cero de aceleración. La forma en que esto a menudo se realiza es adhiriendo masa en forma de pesos de balance para mover el centro de masa total de un miembro dado a una localización de aceleración reducida.

El balanceo es la técnica de corregir o eliminar fuerzas o momentos de inercia indeseables. La variación de fuerzas en un ciclo completo puede provocar vibraciones que a veces pueden alcanzar amplitudes peligrosas. Incluso aunque no lo fueran, las vibraciones aumentan los esfuerzos en los componentes y someten a los cojinetes a cargas repetidas que provocan en éste la falla prematura por fatiga. Por tanto, en el diseño de maquinaria no basta simplemente con evitar la operación cercana a las velocidades críticas, sino también, es preciso eliminar o por lo menos reducir, las fuerzas de inercia que producen estas vibraciones.

Las tolerancias de producción que se aplican en la fabricación de maquinaria, se ajustan tan cerradas como sea posible sin elevar el costo de fabricación en forma prohibitiva. En general,

resulta más económico producir piezas que no sean tan perfectas y luego sujetarlas a un procedimiento de balanceo que producir piezas tan perfectas que no requieran corrección alguna. Debido a esto cada pieza producida es un caso individual en el sentido de que normalmente no se puede esperar que dos piezas requieran las mismas medidas correctivas. Por consiguiente el problema principal en el estudio del balanceo es la determinación del desbalanceo y la aplicación de correcciones.

IV.1.1 Importancia del balanceo.

El desequilibrio de piezas en rotación genera fuerzas centrífugas que aumentan con el cuadrado de la velocidad de rotación y se manifiestan por una vibración y tensiones en el rotor y la estructura de soporte. Las consecuencias pueden ser muy severas:

- Desgaste excesivo en cojinetes, casquillos, ejes y engranajes.
- Fatiga en soportes y estructura.
- Disminución de la eficiencia.
- Transmisión de vibraciones al operador y otras máquinas.

Por tanto el equilibrado tiene por objeto:

- ✓ Incrementar la vida de cojinetes
- ✓ Minimizar las vibraciones y ruidos
- ✓ Minimizar las tensiones mecánicas
- ✓ Minimizar las pérdidas de energía
- ✓ Minimizar la fatiga del operador.

IV.1.2 Causas de desbalanceo.

El exceso de masa en un lado del rotor (desequilibrio) puede ser por:

- ❖ Tolerancias de fabricación en piezas fundidas, forjadas e incluso mecanizadas.
- ❖ Heterogeneidades en materiales como poros, inclusiones, diferencias de densidad.
- ❖ Falta de simetría en diseño, tales como chaveteras, etc.
- ❖ Falta de simetría en uso tales como deformaciones, distorsiones y otros cambios dimensionales debido a tensiones, fuerzas aerodinámicas o temperatura.

Las piezas en rotación se deben diseñar para un equilibrado inherente. No obstante la comprobación del equilibrado es una operación complementaria en su fabricación ya que se pueden generar heterogeneidades, deformaciones en marcha, etc., que deben ser equilibradas.

En cualquier caso siempre quedará un desequilibrio residual que será o no admisible en función del tipo de máquina y su velocidad de rotación. Ese desequilibrio admisible será función, por tanto, de la velocidad de rotación. El desequilibrio se mide en gramos x milímetros, aunque también es muy usada la unidad gramos x pulgada (g-inch).

IV.2 BALANCEO ESTÁTICO O BALANCEO EN UN SOLO PLANO

A pesar del cuidado que se debe tener en el diseño y la manufactura de partes en rotación, si la parte es completamente maquinada, fundida o forjada o es ensamblada de varias partes como en el caso de la armadura de un motor eléctrico, no es común que éste corra suavemente particularmente si la velocidad de operación es elevada. Variaciones en dimensiones debido al maquinado, variaciones de homogeneidad en el material, variaciones de los métodos de ensamble, la excentricidad de la superficie de los baleros, etc., todo contribuye a la compensación del centro de masa desde el eje de rotación.

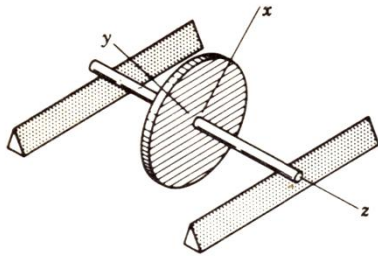


Figura 4.1 Disco rotando.

Obsérvese la figura 4.1 compuesta de un disco y un eje que se supone que es perfectamente recto y puede rodar sin fricción, se fija un sistema de referencia xyz en el disco que se mueve con él. Un experimento sencillo para determinar si el disco está estáticamente desbalanceado sería ponerlo a girar suavemente y dejarlo hasta que vuelva al reposo, marcar con una tiza el punto más bajo del disco, repetir la operación 4 o 5 veces si todas las marcas están en puntos diferentes, el disco está estáticamente balanceado, por el contrario si las marcas coinciden en el mismo punto el disco se encuentra estáticamente desbalanceado, lo que significa que el centro de masa del eje y del disco no coinciden. La ubicación de las marcas con respecto al sistema xy indica la ubicación angular del desbalanceo pero no su magnitud.

Si se descubre que existe desbalanceo estático, éste se puede corregir eliminando material mediante una perforación en las marcas señaladas, o bien agregando masa a la periferia a 180° de la marca. Debido a que se desconoce la magnitud del desequilibrio, las correcciones deberán hacerse por tanteo.

La curva de la figura 4.2 muestra el efecto de una pequeña cantidad de desbalanceo a altas velocidades, esta figura muestra la fuerza producida por una libra-onza de desbalanceo a varias velocidades angulares. (Un libra-onza se define como una onza de peso a una pulgada de los ejes de rotación). Es evidente que la fuerza centrífuga producida en un rotor de grandes dimensiones es muy grande, aunque el centro de gravedad esté desplazado sólo una pequeña cantidad del eje de rotación, y consecuentemente se producirán grandes fuerzas de agitación en la estructura de acuerdo con la ecuación (4.1). Considérese el ejemplo anterior del disco y su eje, con el disco de 180 kg de peso operando a 16000 rpm y suponiendo que el centro de masa está a 0.0254mm del eje de rotación, esto es 4.572kg-mm (6.4 inch-ounce) producirá una fuerza centrífuga de:

$$F = mR\omega^2 \dots\dots 4.1$$

Donde:

F = fuerza de desbalance en Newton (N)

R = Distancia desde el centro de masa al eje de rotación en metros(m)

ω = Velocidad angular en radianes por segundo (rad/s).

Entonces se tiene

$$F = mR\omega^2 = 180 * 2.54E - 05 * (2\pi * 16000/60)^2 = 12835.22N$$

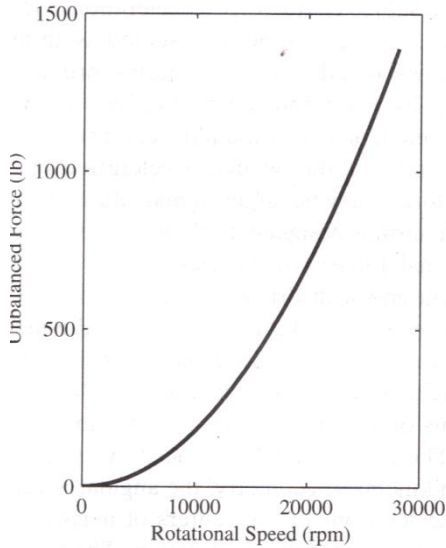


Figura 4.2 Efecto de 1 oz-in de desbalance. Esta fuerza puede causar daños considerables en la máquina.

El eslabón en **V** de la figura 4.3 forma parte de un mecanismo. Se requiere balancearlo estáticamente. Es posible modelarlo dinámicamente como dos masas puntuales m_1 y m_2 concentradas en los centros de gravedad **CG** locales de cada una de sus dos “extremos” como se muestra en la figura 4.3 b) .La masa de cada una de las masas puntuales es igual a la del extremo que reemplazan y son soportadas por las varillas sin masa en las posiciones R_1 y R_2 del **CG** de cada extremo. Se puede resolver para la magnitud y ubicación requeridas de una tercera “masa de balanceo “ m_b , que se agrega al sistema en algún lugar R_b para satisfacer la ecuación 4.2 (que incluye las fuerzas inerciales de acuerdo con el principio de d’Alembert) que debe ser cero.

$$\sum F - ma = 0 \dots\dots\dots 4.2$$

Supóngase que el sistema gira a una velocidad angular constante ω . Las aceleraciones de la masa serán estrictamente centrípetas (hacia el centro), y las fuerzas de inercia serán centrífuga (hacia afuera del centro) como se muestra en la figura 4.3 .Como el sistema gira, la figura muestra una imagen de “cuadro congelado”, de la posición en la cual” se detuvo la acción”. Si se coloca un sistema coordenado con su origen en el centro de rotación y se descomponen las fuerzas inerciales en componentes respecto a ese sistema coordenado, la posición en algún lugar R_b que satisfacer la ecuación 4.2 para este sistema es:

$$-m_1R_1\omega^2 - m_2R_2\omega^2 - m_bR_b\omega^2 = 0 \dots\dots\dots 4.3$$

Obsérvese que las únicas fuerzas que actúan sobre este sistema son las fuerzas de inercia. Para balancearlo, no importan que fuerzas externas actúen en el sistema. Las fuerzas externas no pueden balancearse al cambiar la geometría interna del sistema. Los términos ω^2 se eliminan. Para balancearlo, no importa que tan rápido gire el sistema, sólo que esté girando. (La ω determina el valor de estas fuerzas, pero de cualquier modo se debe lograr que su suma sea cero). De modo que al dividir entre ω^2 se obtiene:

$$m_bR_b = -m_1R_1 - m_2R_2 \dots\dots\dots 4.4$$

Al descomponerla en sus componentes **x** y **y** :

$$\left. \begin{aligned} m_b R_{b_x} &= -(m_1 R_{1_x} + m_2 R_{2_x}) \\ m_b R_{b_y} &= -(m_1 R_{1_y} + m_2 R_{2_y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 4.5$$

El ángulo al cual se deberá colocar la masa de balanceo (con respecto al sistema coordenado) es θ_b y se obtiene con la ecuación 4.6. Se puede observar que los signos del numerador y el denominador se deben mantener individualmente para obtener el cuadrante correcto:

$$\left. \begin{aligned} \theta_b &= \tan^{-1} \frac{m_b R_{1_{by}}}{m_b R_{1_{bx}}} \\ \theta_b &= \tan^{-1} \frac{-(m_1 R_{1_y} + m_2 R_{2_y})}{-(m_1 R_{1_x} + m_2 R_{2_x})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 4.6$$

El producto de $m_b R_b$ se determina con la ecuación 4.7. Ahora existe una infinidad de soluciones disponibles. Se puede seleccionar el valor de m_b , determinar el radio necesario R_b donde se deberá colocar o elegir un radio deseado y determinar la masa que debe colocarse. Las restricciones de empaque determinan el radio máximo en algunos casos. La masa de balanceo está confinada al “plano único” de las masa no balanceadas.

$$\left. \begin{aligned} R_b &= \sqrt{(R_{b_x}^2 + R_{b_y}^2)} \\ m_b R_b &= m_b \sqrt{(R_{b_x}^2 + R_{b_y}^2)} \\ m_b R_b &= \sqrt{m_b^2 (R_{b_x}^2 + R_{b_y}^2)} \\ m_b R_b &= \sqrt{(m_b R_{b_x})^2 + (m_b R_{b_y})^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 4.7$$

Una vez que se elige la combinación de m_b y R_b lo que falta es diseñar el contrapeso físico. El radio R_b seleccionado es la distancia del pivote al **CG** de la masa contrapeso. El modelo dinámico simple, utilizado para calcular el producto mR , supone la forma de una masa puntual y una varilla sin masa. Estos dispositivos ideales no existen. En la figura 4.3c) se muestra una forma posible para este contrapeso.

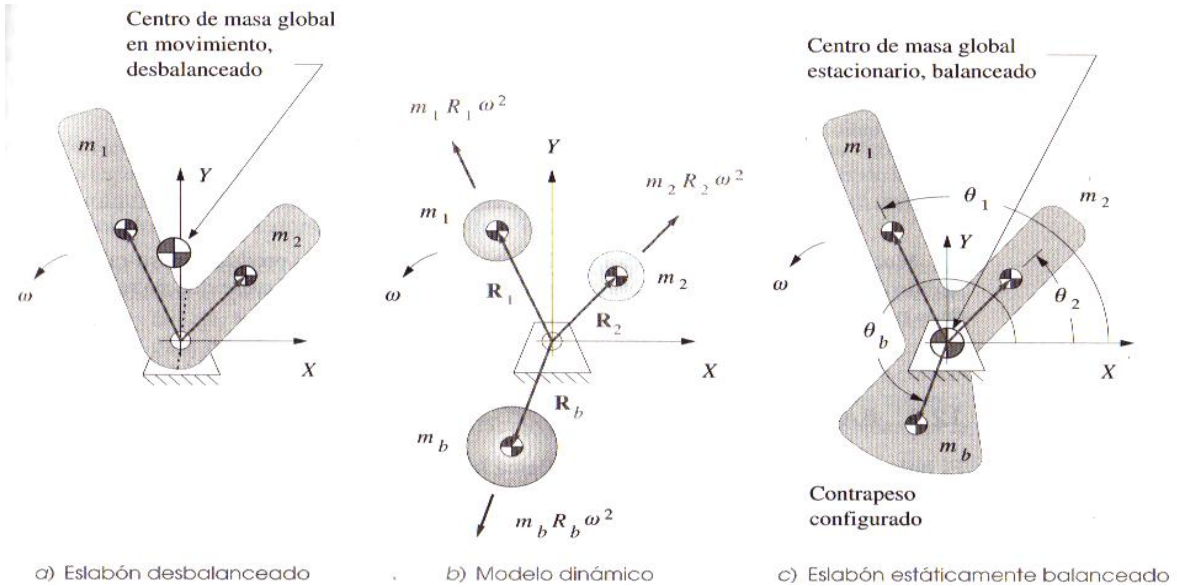


Figura 4.3. Balanceo estático de un eslabón en rotación pura

IV.3 BALANCEO DINÁMICO

El rotor de la figura 4.4 se encuentra montado en los cojinetes en **A** y **C**. Supongamos que se colocan dos masas iguales m_1 y m_2 a distancias iguales r_1 y r_2 del eje de rotación, para balancear estáticamente cada disco. Debido a que las masas son iguales y se encuentran en lados opuestos al del eje de rotación, el rotor se encuentra estáticamente balanceado en todas las posiciones angulares.

Ahora el mismo rotor gira a una velocidad angular ω rad/s, entonces actúan las fuerzas centrífugas $m_1 r_1 \omega$ y $m_2 r_2 \omega$ respectivamente, en m_1 y m_2 sobre los extremos del rotor. Estas fuerzas centrífugas producen reacciones desiguales en los cojinetes F_A y F_C y todo el sistema de fuerzas gira con el rotor a la velocidad angular ω . Por consiguiente una parte puede estar estáticamente balanceada pero dinámicamente desbalanceada. Si la distribución de masa inercial del rotor no puede ser considerada como plana, se generaran momentos normales al eje de rotación y además fuerzas radiales. Aunque el sistema puede estar estáticamente balanceado por la eliminación de la fuerza radial resultante, la variación de los momentos producidos puede continuar siendo una fuente de vibración. Las técnicas de balanceo dinámico permiten la eliminación de fuerzas de desbalance radial y momentos.

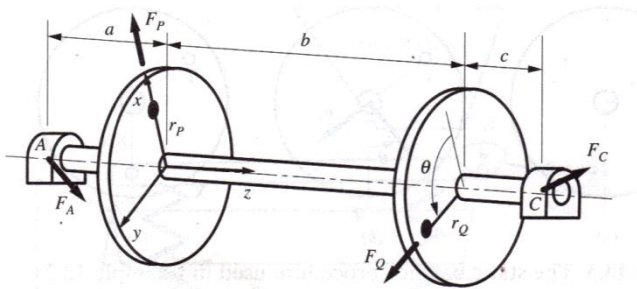


Figura 4.4 Eje rotando con dos discos, ambos contienen masas desbalanceadas. El plano del rotor derecho esta designado como Q, y el del rotor izquierdo como P.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Considere el eje y los dos rotores montados, como se muestran en la figura 4.4, el eje gira en los cojinetes A y C tal como se muestra. Primero se calcularán las fuerzas de desbalance, F_A y F_C ejercida en el eje por los cojinetes.

El desbalance del lado derecho del rotor es:

$$u_p = m_p R_p \dots \dots \dots \mathbf{4.8}$$

U_p = desbalance del lado derecho

m_p = masa del lado derecho del rotor

R_p = es la excentricidad del centro de masa

La magnitud de la fuerza de desbalance en rotación será:

$$F_p = u_p \omega^2 \dots \dots \dots \mathbf{4.9}$$

ω = velocidad angular

De forma similar del lado izquierdo:

$$u_q = m_q R_q \dots \dots \dots \mathbf{4.10}$$

u_q = desbalance del lado izquierdo

m_q = masa del lado izquierdo del rotor

R_q = es la excentricidad del centro de masa

ω = velocidad angular

La magnitud de la fuerza de desbalance en rotación será:

$$F_q = u_q \omega^2 \dots \dots \dots \mathbf{4.11}$$

Utilizando como referencia el marco del lado izquierdo, alineando el eje x con la dirección del desbalance u_p y teniendo el eje z como eje de rotación se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0: F_p + F_q \cos\theta + F_{Ax} + F_{Cx} = 0 \dots \dots \dots \mathbf{4.12}$$

$$\sum F_y = 0: F_q \sin\theta + F_{Ay} + F_{Cy} = 0 \dots \dots \dots \mathbf{4.13}$$

La sumatoria de momentos se realiza con respecto al punto A de modo que F_C sea la única incógnita, entonces se tiene:

$$\sum M_A = 0; \quad M = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \text{de modo que:}$$

$$a\mathbf{k} \times F_p \mathbf{i} + (a + b)\mathbf{k} \times F_q (\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}) + (a + b + c)\mathbf{k} \times (F_{Cx} \mathbf{i} + F_{Cy} \mathbf{j}) = 0 \dots \dots \dots \mathbf{4.14}$$

Separando las componentes:

$$-(a + b)F_Q \sin \theta - (a + b + c)F_{C_y} = 0 \dots\dots\dots \mathbf{4.15}$$

$$aF_p + (a + b)F_Q \cos \theta + (a + b + c)F_{C_x} = 0 \dots\dots\dots \mathbf{4.16}$$

Se puede resolver para las componentes de \mathbf{F}_C las ecuaciones 4.15 y 4.16 y resolver para las componentes de \mathbf{F}_A las ecuaciones 4.12 y 4.13.

De la ecuación 4.15 se obtiene:

$$F_{C_y} = -\frac{(a+b)F_Q \sin \theta}{(a+b+c)} \dots\dots\dots \mathbf{4.17}$$

La ecuación 4.16 nos da:

$$F_{C_x} = -\frac{aF_p+(a+b)F_Q \cos \theta}{(a+b+c)} \dots\dots\dots \mathbf{4.18}$$

A partir de la ecuación 4.12 se obtendrá:

$$F_{A_x} = -F_p - F_Q \cos \theta - F_{C_x} = -F_p - F_Q \cos \theta + \frac{aF_p+(a+b)F_Q \cos \theta}{(a+b+c)} \dots\dots\dots \mathbf{4.19}$$

$$F_{A_x} = -\frac{(b+c)F_p+cF_Q \cos \theta}{a+b+c} \dots\dots\dots \mathbf{4.20}$$

Finalmente la ecuación 4.13 da por resultado:

$$F_{A_y} = -F_Q \sin \theta - F_{C_y} = -F_Q \sin \theta + \frac{(a+b)F_Q \sin \theta}{(a+b+c)} \dots\dots\dots \mathbf{4.21}$$

$$F_{A_y} = -\frac{cF_Q \sin \theta}{a+b+c} \dots\dots\dots \mathbf{4.22}$$

Por lo tanto las fuerzas aplicadas a los rodamientos por el eje son:

$$\mathbf{F}_A^* = -\mathbf{F}_A = \frac{((b+c)F_p+cF_Q \cos \theta)\mathbf{i}+(cF_Q \sin \theta)\mathbf{j}}{a+b+c} \dots\dots\dots \mathbf{4.23}$$

$$\mathbf{F}_C^* = -\mathbf{F}_C = \frac{(aF_p+(a+b)F_Q \cos \theta)\mathbf{i}+(a+b)F_Q \sin \theta)\mathbf{j}}{a+b+c} \dots\dots\dots \mathbf{4.24}$$

Estas fuerzas rotan con el eje, de modo que fluctúan sinusoidalmente en cualquier dirección.

Si el sistema se encuentra estáticamente balanceado por la adición de un contrapeso en el plano \mathbf{P} , el contrapeso requerido es:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_Q = -\mathbf{u}_p \mathbf{i} - \mathbf{u}_Q (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \dots\dots\dots \mathbf{4.25}$$

La adición de un desbalanceo de esta magnitud y dirección en el plano **P** añade una fuerza al sistema:

$$\mathbf{F} = \omega^2 \mathbf{u} = -\mathbf{F}_P - \mathbf{F}_Q \dots\dots 4.26$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico están dadas por:

$$\sum F_x = 0: -F_P - F_Q \cos \theta + F_P + F_Q \cos \theta + F_{A_x} + F_{C_x} = F_{A_x} + F_{C_x} = 0 \dots\dots 4.27$$

$$\sum F_y = 0: -F_Q \sin \theta + F_Q \sin \theta + F_{A_y} + F_{C_y} = F_{A_y} + F_{C_y} = 0 \dots\dots 4.28$$

Y realizando sumatoria de momentos en el punto **A** se obtiene:

$$\sum M_A = 0: -a \mathbf{k} \times (F_P \mathbf{i} + F_Q (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})) + a \mathbf{k} \times F_P \mathbf{i} + (a + b) \mathbf{k} \times F_Q (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + (a + b + c) \mathbf{k} \times (F_{C_x} \mathbf{i} + F_{C_y} \mathbf{j}) = 0 \dots\dots 4.29$$

0

$$b F_Q (\cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{i}) + (a + b + c) (F_{C_x} \mathbf{j} - F_{C_y} \mathbf{i}) = 0 \dots\dots 4.30$$

Por lo tanto:

$$F_{C_x} = -\frac{b F_Q \cos \theta}{a + b + c} \dots\dots 4.31$$

$$F_{C_y} = -\frac{b F_Q \sin \theta}{a + b + c} \dots\dots 4.32$$

Y como se sabe:

$$F_{A_x} = -F_{C_x} = \frac{b F_Q \cos \theta}{a + b + c} \dots\dots 4.33$$

$$F_{A_y} = -F_{C_y} = \frac{b F_Q \sin \theta}{a + b + c} \dots\dots 4.34$$

Como se puede observar, a pesar de que el sistema se encuentra estáticamente balanceado, y que el resultado de la fuerza radial es cero, la fuerza ejercida en los rodamientos no es cero, así que la vibración de excitación continua presente. Ya que $F_A = -F_C$, la fuerzas de los rodamientos forman un par, con la sumatoria de momentos.

$$\mathbf{M} = (a + b + c) \mathbf{k} \times (F_{A_x} \mathbf{j} + F_{A_y} \mathbf{i}) = (a + b + c) (F_{A_x} \mathbf{j} - F_{A_y} \mathbf{i}) \dots\dots 4.35$$

$$= (a + b + c) F_Q (\cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{i}) \dots\dots 4.36$$

Este par rota con el eje.

IV.4 MÁQUINAS DE BALANCEO.

El objeto de una máquina de balanceo es determinar las dos magnitudes del desequilibrio (gramos x milímetro o onza-pulgada) y la posición angular en uno, dos o más planos de corrección seleccionados (uno para desequilibrio estático y dos o más para desequilibrio dinámico).

Básicamente existen dos tipos de máquinas para balanceo dinámico:

- De cojinetes Flexibles.
- De cojinetes Rígidos.

Las primeras tienen un sistema de fijación muy flexible permitiendo al rotor vibrar libremente al menos en una dirección (horizontal, perpendicular al eje de rotación). Los cojinetes vibran al unísono con el rotor. La resonancia del sistema rotor-cojinetes ocurre a 1/2 o menos de la más baja velocidad de equilibrio. A esas velocidades tanto la amplitud de la vibración como el ángulo de fase se han estabilizado y pueden ser medidos con una fiabilidad razonable.

Las de cojinetes rígidos son esencialmente iguales excepto en el sistema de suspensión de cojinetes que es mucho más rígido. De esta forma la frecuencia de resonancia del sistema ocurre a frecuencias varias veces superior a la medida, resultando que está comprendida en un rango dentro del cual la amplitud y ángulo de fase son suficientemente estables y su medida precisas.

Los sensores de vibración son básicamente los mismos en ambas máquinas. Suelen ser del tipo de velocidad o, en algún caso, piezoeléctrico (de aceleración).

La especificación correcta de la máquina para una aplicación concreta supone:

- Describir el tipo de rotores a equilibrar y tolerancias de equilibrado exigidas.
- Especificar condiciones y pruebas de aceptación de la máquina.

Para ello la norma ISO 2953 sugiere un formato apropiado.

IV.5 PROCESO DE BALANCEO.

Un rotor se debe equilibrar:

- A una velocidad tan baja como sea posible para disminuir los requerimientos de potencia, los esfuerzos aerodinámicos, ruidos y daños al operador.
- Debe ser lo suficientemente alta para que la máquina equilibradora tenga suficiente sensibilidad para alcanzar las tolerancias de equilibrado requeridas.

Para ello la primera cuestión a resolver es si el rotor a equilibrar es rígido o flexible.

- ✓ Se considera un **ROTOR RÍGIDO** si puede ser equilibrado en dos planos (seleccionados arbitrariamente) y, después de la corrección, su desequilibrio no excede los límites de tolerancia a cualquier velocidad por encima de la velocidad de servicio.
- ✓ Un **ROTOR FLEXIBLE** no satisface la definición de rotor rígido debido a su deformación elástica.

Por lo tanto, un rotor rígido se puede equilibrar a la velocidad estándar de la equilibradora, cualquiera que sea su velocidad de giro en servicio. En la mayoría de los casos se puede asumir que un rotor puede ser equilibrado satisfactoriamente a baja velocidad si su velocidad de servicio es menor que el 50% de su primera velocidad crítica. Existe una prueba (test) para determinar, en otros casos, si un rotor es rígido, para los propósitos de su equilibrado:

- Se equilibra el rotor primero a baja velocidad.
- Se añade una masa de prueba en la misma posición angular en dos planos próximos a los cojinetes.
- Se pone en marcha y se miden las vibraciones en ambos cojinetes.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

- Se para el rotor y se mueven las masas hacia el centro del mismo o hacia donde se espera causar la mayor distorsión del rotor. En una nueva prueba de giro se vuelven a medir vibraciones en ambos cojinetes.
- Si la primera lectura fue A y la segunda B, la relación $\frac{B-A}{A}$ no debe exceder de 0,2. En tal caso la experiencia muestra que el rotor se puede considerar rígido y, por tanto, puede ser equilibrado a baja velocidad.

En caso contrario el rotor es flexible y debe ser equilibrado a su velocidad de giro en servicio o próxima a ella.

El **proceso completo de equilibrado** consta de los siguientes pasos:

1.- Fijar la velocidad de equilibrado.

Es función del tipo de rotor:

- A baja velocidad si es rígido
- A la velocidad de giro del rotor en servicio si es flexible.

2.- Fijar el sentido de rotación de equilibrado.

La dirección de giro no es importante excepto en caso de rotores con álabes. En ese caso la dirección debe ser:

- Las turbinas en sentido contrario a su dirección de giro.
- Los compresores en el mismo sentido que su dirección de giro.
- Algunos ventiladores necesitan cerrar el impulsor para reducir los requerimientos de potencia a un nivel aceptable.

3.- Determinar el número de planos de equilibrado:

- 1 o 2 para rotores rígidos, según el tipo de desequilibrio existente.
- n+2 para rotores flexibles, siendo n la n-sima velocidad crítica por encima de la cual está la velocidad de rotación en servicio.

4.- Realizar la lectura del desequilibrio y de su fase, en cada uno de los planos elegidos.

5.- Llevar a cabo las correcciones correspondientes.

Las correcciones se llevan a cabo tanto añadiendo como quitando masas. Se debe seleccionar el método que asegure corregir el desequilibrio inicial a menos de la tolerancia admitida en un solo paso.

Normalmente se pueden conseguir reducciones de 10:1 quitando masas y de 20:1 y superiores añadiendo masas.

La adición de masas consiste en añadir masas soldadas en superficies apropiadas, procurando no producir distorsiones en el rotor.

La reducción de masas se puede conseguir:

- Por taladrado. Probablemente el método más efectivo. Hay que calcular la profundidad de taladrado necesaria.
- Por esmerilado e incluso corte, si la geometría del rotor lo permite. Es menos seguro y hay que hacer varias pruebas.

6.- Realizar una nueva medida del desequilibrio residual.

Se trata de comprobar que el desequilibrio resultante, después de la corrección, está dentro de las tolerancias de equilibrado admisibles.

En caso contrario habría que repetir los pasos 5 y 6, hasta conseguir un desequilibrio residual que se ajuste a la norma aplicada.

IV.6 TOLERANCIAS DE EQUILIBRADO.

Se trata de fijar el desequilibrio residual admisible para cada aplicación:

Para **rotores rígidos** están establecidos por la norma ISO 1940 (Calidad de Equilibrado de Rotores Rígidos).

- ✓ Se definen varios tipos de rotores
- ✓ Se elige el caso más parecido de la tabla.
- ✓ Se determina el desequilibrio residual admisible por medio de una gráfica.
- ✓ También se pueden usar nomogramas.

Para **rotores flexibles** se aplica la norma ISO 5343 (conjuntamente con ISO 1940 e ISO 5406). En éste caso, además del tipo de rotor, se definen:

- ✓ 4 Bandas de calidad (A, B, C, D) según la calidad de equilibrado requerido.
- ✓ 3 Factores de corrección (C1, C2, C3) según las circunstancias de las medidas de vibración efectuadas.

Para **rotores acoplados entre sí**, con velocidad crítica diferentes en cada caso, hay que aplicarle las normas a cada uno por separado.

CAPITULO V BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS.

V.1 INTRODUCCION

Se puede obtener un balanceo completo de cualquier mecanismo al crear un mecanismo “idéntico” conectado a él con el objeto de eliminar todas las fuerzas y momentos dinámicos. Ciertas configuraciones de motores de combustión interna de varios cilindros lo hacen. Los pistones y manivela de algunos cilindros contrarrestan los efectos inerciales de otros. Sin embargo, este método es costoso y sólo se justifica si el mecanismo agregado tiene algún propósito, como incrementar la potencia, que es el caso de cilindros adicionales en un motor. La adición de un mecanismo “ficticio”, cuyo único propósito sea contrarrestar los efectos dinámicos, rara vez se justifica económicamente.

La mayoría de los esquemas prácticos de balanceo de mecanismos buscan minimizar o eliminar uno o más efectos dinámicos (fuerzas, momentos, pares de torsión, etc.) al redistribuir la masa de los eslabones existentes. Esto implica agregar contrapesos o cambiar las formas de los eslabones para reubicar sus **CG**. Esquemas más elaborados agregan contrapesos engranados a algunos eslabones además de redistribuir su masa. Como en cualquier esfuerzo de diseño, existen cambios, por ejemplo, la eliminación de fuerzas de sacudimiento sólo incrementa el momento de sacudimiento y el par de torsión motriz.

V.2. BALANCEO DE FUERZAS EN MECANISMOS ARTICULADOS

Los eslabones rotatorios (manivela, balancines) de un mecanismo articulado pueden balancearse individualmente por medio de los métodos de balanceo rotatorio. Los efectos de los acopladores, que están en movimiento complejo, son más difíciles de compensar. Obsérvese que el proceso de balancear estáticamente un eslabón rotatorio obliga a su centro de masa **CG** a estar en su pivote fijo y, por lo tanto, a estar estacionario. En otras palabras, la condición de **balanceo estático** también puede definirse como *la de hacer estacionario el centro de masa*. Un acoplador no tiene pivote fijo y por lo tanto su centro de masa esta en general siempre en movimiento.

Cualquier mecanismo, sin importar que tan complejo sea, tendrá por cada posición instantánea un solo *centro de masa global* localizado en un punto particular. Se puede calcular su ubicación sólo mediante las masas del eslabón y las localizaciones de los **CG** de los eslabones individuales en ese instante. El centro de masa global normalmente cambiara de posición con el movimiento del eslabón. Si de alguna forma se puede lograr que el centro de masa global sea estacionario, se obtendrá un estado de balanceo estático de todo el mecanismo.

El método de Berkof-Lower de vectores linealmente independientes^[11] proporciona una forma para calcular la magnitud y localización de los contrapesos a ser colocados en los eslabones rotatorios, lo que inmovilizara el centro de masa global en todas las posiciones del mecanismo. La colocación de masas de balanceo apropiadas en los eslabones provocara que las fuerzas dinámicas en los pivotes fijos siempre sean iguales y opuestas, es decir, formen un par, de ese modo se crea el balanceo estático ($\sum F = 0$ pero $\sum M \neq 0$) en el mecanismo móvil.

Este método funciona para cualquier mecanismo plano de n eslabones con una combinación de juntas de revoluta (de pasador) y prismáticas (de corredera), siempre que exista una trayectoria a

¹¹ Berkof, R.S., y G.G. Lowen (1969). *A new Method for Completely Force Balancing Simple Linkages*, Trans Asme J. of Eng. For Industry (Febrero), pp.21-26

la bancada desde cada eslabón que sólo contenga juntas de revoluta ^[12]. Por lo tanto, si todas las trayectorias posibles de cualquier eslabón a la bancada contienen juntas deslizantes, el método será erróneo. Cualquier mecanismo de n eslabones que cumpla con el criterio anterior puede balancearse con la adición de $n/2$ pesos de balanceo, cada uno en un eslabón diferente ^[12]. Desafortunadamente al hacerlo incrementa la masa total del mecanismo original.

La figura 5.1 muestra un mecanismo de 4 barras con su centro de masa global localizado por el vector de posición R_t . Los CG individuales de los eslabones se localizan en el sistema global mediante los vectores de posición R_2 , R_3 y R_4 (magnitudes R_2, R_3 y R_4) fijos con respecto a su origen en el pivote O_2 . Las longitudes de los eslabones están definidas por los vectores de posición L_1 , L_2 , L_3 y L_4 (magnitudes l_1, l_2, l_3 e l_4) y los vectores de posición que localizan los CG en cada eslabón son B_2 , B_3 y B_4 (magnitudes b_2, b_3 y b_4). Los ángulos de los vectores B_2 , B_3 y B_4 son ϕ_2 , ϕ_3 y ϕ_4 medidos internamente en los eslabones que localizan a L_2 , L_3 y L_4 , en el sistema global son los ángulos θ_2 , θ_3 y θ_4 . La masa total del sistema es la suma de las masas individuales de modo que :

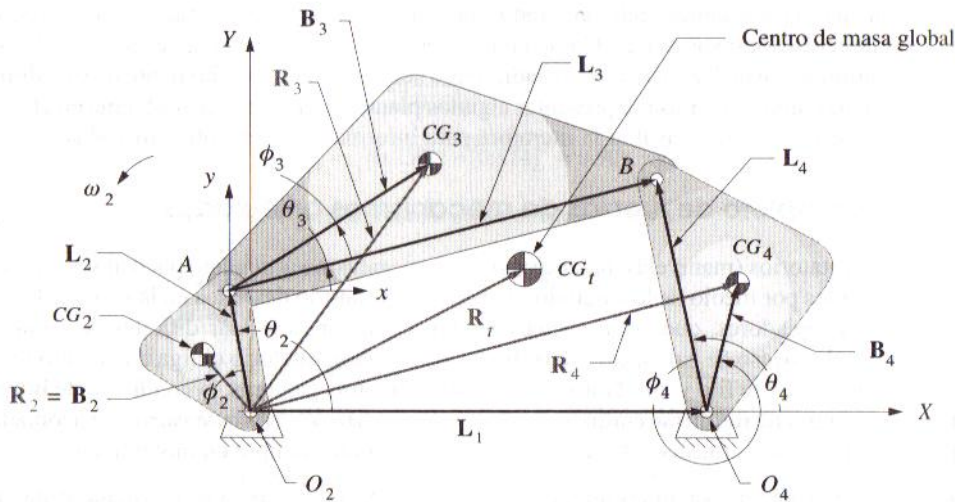


Figura 5.1 Balanceo estático (de fuerzas) de un mecanismo de cuatro barras.

$$m_t = m_2 + m_3 + m_4 \dots \dots \dots 5.1$$

El momento de masa total con respecto al origen debe ser la suma de los momentos de masa debidos a los elementos individuales.

$$\sum M = R_t m_t = R_2 m_2 + R_3 m_3 + R_4 m_4 \dots \dots \dots 5.2$$

La posición para el centro de masa es:

$$R_t = \frac{R_2 m_2 + R_3 m_3 + R_4 m_4}{m_t} \dots \dots \dots 5.3$$

¹² Tepper, F.R., y G.G. Lowen (1972). *General Theorems Concerning Full Force Balancing of planar Linkages by the Internal Mass Redistribution*, Trans Asme J. of Eng. For Industry (94 Series B(3)), PP.789-796.

Para las coordenadas de los vectores de posición se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= b_2 e^{j(\theta_2 + \phi_2)} = b_2 e^{j\theta_2} e^{j\phi_2} \\ \mathbf{R}_3 &= l_2 e^{j\theta_2} + b_3 e^{j(\theta_3 + \phi_3)} = l_2 e^{j\theta_2} + b_3 e^{j\theta_3} e^{j\phi_3} \\ \mathbf{R}_4 &= l_1 e^{j\theta_1} + b_4 e^{j(\theta_4 + \phi_4)} = l_1 e^{j\theta_1} + b_4 e^{j\theta_4} e^{j\phi_4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 5.4$$

Se puede resolver para la ubicación del centro de masa global en cualquier posición para los eslabones de los cuales se conozcan sus ángulos θ_2 , θ_3 y θ_4 . Se requiere que este vector de posición \mathbf{R}_t sea constante. El primer paso es sustituir las ecuaciones 5.4 en la 5.2.

$$\mathbf{R}_t m_t = (b_2 e^{j\theta_2} e^{j\phi_2}) m_2 + (l_2 e^{j\theta_2} + b_3 e^{j\theta_3} e^{j\phi_3}) m_3 + (l_1 e^{j\theta_1} + b_4 e^{j\theta_4} e^{j\phi_4}) m_4 \dots\dots\dots 5.5$$

Ahora al agrupar los términos constantes como coeficiente de los términos dependientes del tiempo:

$$\mathbf{R}_t m_t = (m_4 l_1 e^{j\theta_1}) + (m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2) e^{j\theta_2} + (m_3 b_3 e^{j\phi_3}) e^{j\theta_3} + (m_4 b_4 e^{j\phi_4}) e^{j\theta_4} \dots\dots\dots 5.6$$

Los únicos términos dependientes del tiempo son los que contienen θ_2 , θ_3 y θ_4 .

Ahora escribiendo la ecuación del lazo vectorial para el mecanismo:

$$l_2 e^{j\theta_2} + l_3 e^{j\theta_3} - l_4 e^{j\theta_4} - l_1 e^{j\theta_1} = 0 \dots\dots\dots 5.7$$

Y resolver para uno de los vectores unitarios que definen la dirección de un eslabón por ejemplo el eslabón 3, se obtiene:

$$e^{j\theta_3} = \frac{l_1 e^{j\theta_1} - l_2 e^{j\theta_2} + l_4 e^{j\theta_4}}{l_3} \dots\dots\dots 5.8$$

Al sustituir está en la ecuación 5.6 se puede eliminar el término θ_3 y reordenando términos queda:

$$\mathbf{R}_t m_t = (m_4 l_1 e^{j\theta_1}) + (m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2) e^{j\theta_2} + (m_3 b_3 e^{j\phi_3}) \frac{l_1 e^{j\theta_1} - l_2 e^{j\theta_2} + l_4 e^{j\theta_4}}{l_3} + (m_4 b_4 e^{j\phi_4}) e^{j\theta_4} \dots\dots\dots 5.9$$

$$\mathbf{R}_t m_t = \left(m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2 - m_3 b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_2}{l_3} \right) e^{j\theta_2} + \left(m_4 b_4 e^{j\phi_4} + m_3 b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_4}{l_3} \right) e^{j\theta_4} + \left(m_3 b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_1}{l_3} + m_4 l_1 \right) e^{j\theta_1} \dots\dots\dots 5.10$$

Esta última expresión proporciona la herramienta para forzar a que \mathbf{R}_t sea constante y el centro de masa estacionario. Para que eso suceda, los términos entre paréntesis que multiplican las dos únicas variables dependientes del tiempo, θ_2 y θ_4 se deben forzar a cero. (El ángulo θ_1 del eslabón fijo es constante). Por lo tanto, el requisito para el balanceo de fuerzas es:

$$\left(m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2 - m_3 b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_2}{l_3} \right) = 0 \dots\dots\dots 5.11$$

$$\left(m_4 b_4 e^{j\phi_4} + m_3 b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_4}{l_3} \right) = 0 \dots\dots\dots 5.12$$

Estas expresiones se pueden reordenan para aislar los términos de un eslabón (por ejemplo el 3) en un lado de cada una de estas ecuaciones:

$$m_2 b_2 e^{j\phi_2} = m_3 \left(b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_2}{l_3} - l_2 \right) \dots\dots\dots 5.13$$

$$m_4 b_4 e^{j\phi_4} = -m_3 b_3 e^{j\phi_3} \frac{l_4}{l_3} \dots\dots\dots 5.14$$

De modo que ahora se tienen dos ecuaciones que involucran tres eslabones. Se pueden suponer los parámetros de cualquier eslabón y determinar los de los otros dos. Un mecanismo en general primero se diseña para satisfacer las restricciones de movimiento y empaque requeridas antes de intentar balancearlo. Por lo tanto, la geometría del eslabón y las masas ya están definidas, al menos en forma preliminar. Una estrategia es considerar la masa y **CG** del eslabón 3 como han sido definidas y calcular las masas necesarias y ubicaciones de los **CG** de los eslabones 2 y 4, para satisfacer estas condiciones para las fuerzas balanceadas. Los eslabones 2 y 4 están en rotación pura de modo que es fácil agregar contrapesos para mover su **CG** hacia las localizaciones necesarias, de modo que con esta restricción los segundos miembros de las ecuaciones **5.13** y **5.14** se reducen a números para un mecanismo diseñado. De acuerdo a lo señalado se requiere determinar los productos masa-radio $m_2 b_2$ y $m_4 b_4$ así como las ubicaciones angulares de los centros **CG** en los eslabones. Obsérvese que los ángulos ϕ_3 y ϕ_4 de las ecuaciones **5.13** y **5.14** se miden con respecto a las líneas de centros de sus respectivos eslabones.

Para separar las ecuaciones en sus componentes reales e imaginarias, se emplea la **identidad de Euler** así como para encontrar los componentes **x** y **y** de los productos masa-radio, es decir, se tiene:

$$(m_2 b_2)_x = m_3 \left(b_3 \frac{l_2}{l_3} \cos \phi_3 - l_2 \right) \dots\dots\dots 5.15$$

$$(m_2 b_2)_y = m_3 \left(b_3 \frac{l_2}{l_3} \sin \phi_3 \right) \dots\dots\dots 5.16$$

$$(m_4 b_4)_x = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} \cos \phi_3 \dots\dots\dots 5.17$$

$$(m_4 b_4)_y = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} \sin \phi_3 \dots\dots\dots 5.18$$

Se requiere estas componentes del producto **mR** para hacer que el balanceo de fuerzas del mecanismo represente toda cantidad necesaria. Si ya se han diseñado los eslabones 2 y 4 con cierto desbalanceo individual (el **CG** no es el pivote), entonces el producto **mR** existente del eslabón desbalanceado debe restarse del obtenido con las ecuaciones **5.15** a **5.17** para determinar la ubicación y el tamaño de los contrapesos adicionales que se agregan a estos eslabones. Como se hizo con el balanceo de eslabones rotatorios, cualquier combinación de masa y radio que proporcionen el producto deseado es aceptable. Las ecuaciones **5.15** a **5.17** se utilizan para encontrar la magnitud y ángulo del vector **mR** del contrapeso. Obsérvese que el ángulo del vector **mR** de cada eslabón será referido a la línea de centros de ese eslabón. La forma de los contrapesos físicos que se pondrán en los eslabones se diseña para cumplir un balanceo estático.

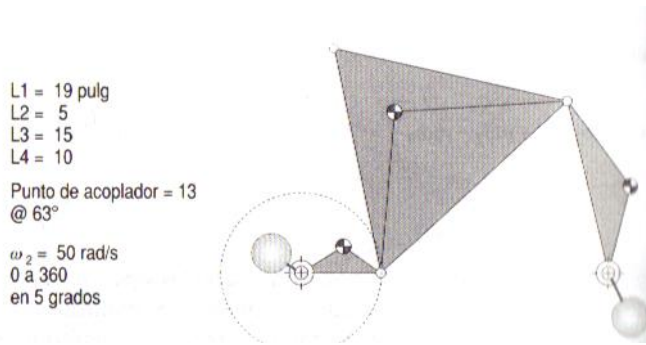


Figura 5.2 Mecanismo de 4 barras balanceado que muestra masas de balanceo aplicadas a los eslabones 2 y 4.

V.3. EFECTO DEL BALANCEO EN FUERZAS DE SACUDIMIENTO Y FUERZAS EN PASADORES.

La figura 5.2 muestra un mecanismo de cuatro barras al que se agregaron masas de balanceo de acuerdo a las ecuaciones 5.15 a 5.17. Observe los contrapesos colocados en los eslabones 2 y 4 en las ubicaciones calculadas para el balanceo completo de fuerzas. La figura 5.3 a) muestra una curva polar de las fuerzas de sacudimiento de este mecanismo sin las masas de balanceo. El máximo es de 462 lb a 15° . La figura 5.3 b) muestra las fuerzas de sacudimiento después de agregar las masa de balanceo. Las fuerzas de sacudimiento se redujeron a cero. Las fuerzas residuales que aparecen en la figura se deben a errores de redondeo.

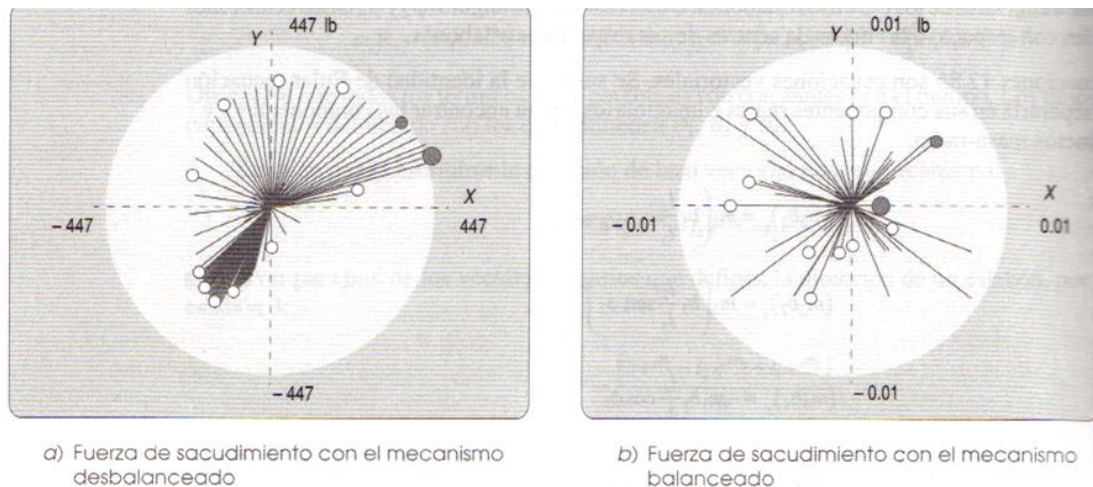


Figura 5.3 Curva polar de fuerzas de sacudimiento desbalanceadas en el plano de la bancada del mecanismo de 4 barras mostrado en la figura 5.2.

No obstante, las fuerzas en los pasadores en los pivotes de la manivela y del balancín no han desaparecido a causa de las masas de balanceo agregadas. La figuras 5.4 a) y b), muestran las fuerzas en los pivotes de la manivela y el balancín después del balanceo. Ahora estas fuerzas son iguales y opuestas. Después del balanceo, el patrón de las fuerzas en el pivote O_2 es la imagen especular del pivote O_4 . La fuerza de sacudimiento neta es la suma vectorial de estos dos conjuntos de fuerza en cada intervalo de tiempo. Los pares de fuerzas iguales y opuestas que actúan en los pivotes de la bancada, en cada intervalo de tiempo, crean en la bancada un par de sacudimiento variable con el tiempo. Estas fuerzas de pasador pueden ser mayores debido a los

pesos del balanceo, de ser así, incrementan el par de sacudimiento en comparación con su valor anterior en el mecanismo no balanceado. Los esfuerzos en los eslabones y los pasadores pueden sufrir un incremento debido al balanceo de fuerzas.

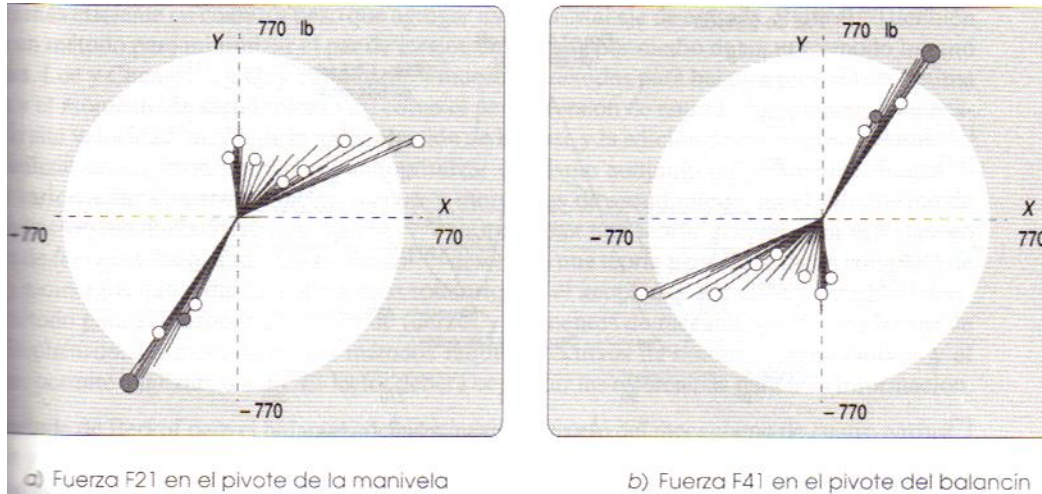


Figura 5.4 Curvas polares de las fuerzas F_{21} y F_{41} que actúan en el plano de la bancada del mecanismo de 4 barras con fuerzas balanceadas de la figura 5.2.

V.4 EFECTO DEL BALANCEO EN EL PAR DE TORSIÓN DE ENTRADA.

El balanceo individual de un eslabón sometido a rotación pura al agregar un contrapeso, tendrá el efecto de incrementar su momento de masa de inercia. El “efecto volante” en el eslabón aumenta por este incremento en su momento de inercia. Por lo tanto, el par de torsión requerido para acelerar ese eslabón será mayor. El par de torsión de entrada no será afectado por ningún cambio en el momento de inercia de la manivela de entrada, cuando opera a velocidad angular constante. No obstante, cualquier balancín presente en el mecanismo tendrá aceleraciones angulares, incluso cuando la manivela no la tenga. Por lo tanto, el balanceo individual de los balancines tendera a incrementar el par de torsión de entrada requerido, incluso con una velocidad constante de la manivela de entrada.

La adición de contrapesos a los eslabones rotatorios, necesarios para forzar el balanceo de todo el mecanismo, incrementa los momentos de inercia de los eslabones y también los *desbalancea (individualmente)* para obtener el balanceo global. En ese caso los **CG** de los eslabones rotatorios estarán en sus pivotes fijos. Cualquier aceleración angular en estos eslabones contribuirá a la carga de par de torsión en el mecanismo. El balanceo de cualquier mecanismo completo por medio de este método puede tener entonces el efecto colateral de incrementar la variación del par de torsión de entrada requerido. Es posible que se requiera un volante mayor en un mecanismo balanceado para lograr el mismo coeficiente de fluctuación que en la versión desbalanceada del mismo.

La figura 5.6 muestra la curva del par de torsión de entrada del mecanismo desbalanceado y del mismo mecanismo después de realizar el balanceo completo de fuerzas. El valor pico del par de torsión de entrada requerido se incremento a consecuencia del balanceo de fuerzas.

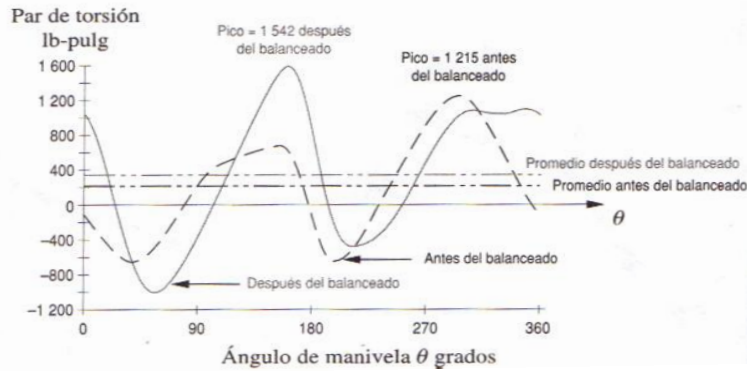


Figura 5.6 Curvas del par de torsión de entrada desbalanceado y balanceado para el mecanismo de 4 barras de la figura 5.2.

Cabe notar que el grado de incremento del par de torsión de entrada debido al balanceo de fuerzas, depende de la elección de los radios donde se colocan las masas del balanceo. El momento de inercia adicional que la masa de balanceo agrega a un eslabón es proporcional al cuadrado del radio al **CG** de la masa de balanceo. El algoritmo de balanceo de fuerzas sólo determina el producto masa-radio requerido. La colocación de la masa de balanceo en un radio pequeño minimiza el incremento del par de torsión de entrada. Weiss y Fenton ^[13] demostraron que un contrapeso circular colocado tangente al centro del pivote del eslabón como el de la figura 5.7 es un buen compromiso entre el peso agregado y el momento de inercia incrementado. Para reducir aun más las consecuencias en el par de torsión, se podría realizar un balanceo de fuerzas completo y aceptar alguna fuerza de sacudimiento con el cambio.



Figura 5.7 Mecanismo de 4 barras con contrapesos circulares óptimamente localizados.

V.5 BALANCEO DEL MOMENTO DE SACUDIMIENTO EN MECANISMOS.

El momento de sacudimiento M_s en un mecanismo con las fuerzas balanceadas es la suma del par de torsión de reacción T_{21} y el par de sacudimiento (ignorando cualquier carga aplicada externamente) ^[14], es decir:

$$M_s = T_{21} + (R_1 \times F_{41}) \dots \dots 5.19$$

Donde T_{21} es el negativo del par de torsión motriz T_{12} , R_1 es el vector de posición desde O_2 hasta O_4 (es decir, el eslabón 1) y F_{41} es la fuerza del balancín en el plano de la bancada. En un mecanismo general, la magnitud del momento de sacudimiento puede reducirse, mas no eliminarse, por medio de una redistribución de masa dentro de sus eslabones. El balanceo completo del momento de sacudimiento requiere la adición de eslabones suplementarios y o contrapesos rotatorios. ^[14]

¹³ Weiss, K., y R.G. Fenton (1972). *Minimum Inertia Weight*, Mech. Cheam, Engng. Trans. I E Aust., NC8(1), pp93-96

¹⁴ Berkof, R.S (1972). *Completely Force and Moment Balancing of inline Four-Bar Linkages*, J. Mechanism And Machine Theory, 8 (Agosto), pp.397-410

Se han desarrollado muchas técnicas que utilizan métodos de optimización para determinar una configuración mecanismo-masa que minimice el momento de sacudimiento y/o el par de torsión de entrada. Hockey ^{[15], [16]}, muestra que la fluctuación de la energía cinética y el par de torsión de entrada de un mecanismo puede reducirse mediante la distribución apropiada de la masa en sus eslabones, y que este procedimiento es más eficiente que el de agregar un volante al eje de entrada. Berkof ^[17] también describe un método para minimizar el par de torsión de entrada por medio de un reacomodo interno de la masa. Lee y Cheng ^[18], y Qi y Pennestri ^[19] muestran métodos para balancear de forma óptima la fuerza y el momento de sacudimiento, así como el par de torsión de entrada combinados en mecanismos de alta velocidad, mediante la redistribución de masa y la adición de contrapesos. Porter ^[20] sugiere utilizar un algoritmo genérico para optimizar el conjunto de parámetros. Bagci ^[21] describe varios métodos para balancear fuerzas y momentos de sacudimiento en el mecanismo de 4 barras manivela-corredera. Kochev ^[22] proporciona una teoría general para el balanceo completo de fuerzas y momentos. Esat y Bahai ^[23] describe una teoría para el balanceo completo de fuerzas y momentos que requieren contrapesos rotatorios en el acoplador. Arkelian y Smit ^[24] derivan un método para balanceo completo de fuerzas y momentos de seis barras de Watt y Stephenson. La mayoría de los métodos requieren recursos de cómputo significativos.

El método de Berkof para el balanceo completo de momentos del mecanismo de cuatro barras ^[14] es simple y útil, pero aun está limitado a mecanismos en "línea", es decir, aquellos en los que el **CG** de cada eslabón está en sus respectivas líneas de centros, como se muestra en la figura 5.7. Ésta no es una restricción extremadamente estricta, puesto que muchos mecanismos prácticos están hechos de eslabones rectos, incluso si un eslabón debe tener una forma que se desvía de su línea de **CG** aún puede colocarse en esa línea con la adición de una masa al eslabón en el lugar apropiado.

En el método de Berkof además de ser para mecanismos en línea, el acoplador debe reconfigurarse para que se convierta en un **péndulo físico**, de modo que sea equivalente a un modelo de masa concentrada como el que se muestra en la figura 5.8. El acoplador que se muestra en la figura 5.8 a) como una barra rectangular uniforme de masa **m**, longitud **a**, y ancho **h**, y en la figura 5.8 b) como un "hueso de perro", son dos de muchas posibilidades. Se requiere que las masas concentradas se encuentren en los pasadores del pivote conectados por una varilla "sin masa". De modo que las masas concentradas en el acoplador estarán en rotación pura como parte de la manivela o como parte del balancín. Esto se logra agregando masas como lo indica la dimensión **e** en los extremos del acoplador.

Los tres requisitos de equivalencia dinámica son: la masa del modelo debe ser igual a la del cuerpo original, el centro de gravedad debe estar en el mismo lugar que en el cuerpo original, el momento de inercia debe ser igual al del cuerpo original. El primero y el segundo de estos enunciados son fáciles de satisfacer al colocar **m₁ = m/2** en cada pasador. El tercero puede expresarse en términos del radio de giro **k** en lugar del momento de inercia por medio de la ecuación siguiente:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \dots\dots\dots 5.20$$

Si se considera cada masa concentrada por separado como si la varilla sin masa se dividiera en dos varillas en el **CG**, cada una de longitud **b**, el momento de inercia **I_l** de cada masa concentrada será:

$$I_l = \frac{I}{2} = m_l b^2 \dots\dots\dots 5.21$$

$$I = 2m_l b^2 = mb^2 \dots\dots 5.22$$

$$k = \sqrt{\frac{mb^2}{m}} = b = \frac{a}{2} \dots\dots 5.23$$

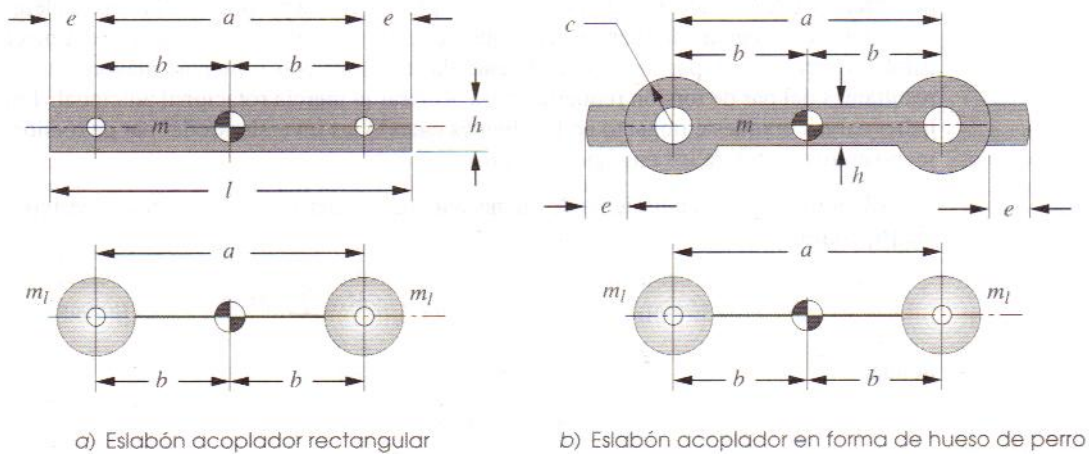


Figura 5.8 Conversión del eslabón acoplador en un péndulo físico.

Con la configuración del eslabón mostrada en la figura 5.8 a) esto se cumplirá si las dimensiones tienen la siguiente relación adimensional (si supone un espesor de eslabón constante).

$$\frac{e}{h} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1} - \frac{a}{2h} \dots\dots 5.24$$

Donde e se define como la longitud del material que debe agregarse en cada extremo para satisfacer la ecuación 5.23.

Cuando la configuración del eslabón mostrado en la figura 5.8 b), la longitud e del material agregado de ancho h necesario para convertirlo en un péndulo físico se determina a partir de:

$$A \left(\frac{e}{h}\right)^3 + B \left(\frac{e}{h}\right)^2 + C \left(\frac{e}{h}\right) + D = 0 \dots\dots 5.25$$

$$A = 8$$

$$B = 12 \left(\frac{a}{c}\right) + 24$$

$$C = 24 \left(\frac{a}{c}\right) + 26$$

$$D = -2 \left(\frac{a}{c}\right)^3 + 13 \left(\frac{a}{c}\right) + 12\pi - 10$$

El segundo paso es balancear las fuerzas del mecanismo con su acoplador modificado por el método de balanceo de fuerzas en mecanismos articulados y definir los contrapesos requeridos en los eslabones 2 y 4. Con las fuerzas de sacudimiento eliminadas el momento de sacudimiento es un vector libre, igual que el par de torsión de entrada.

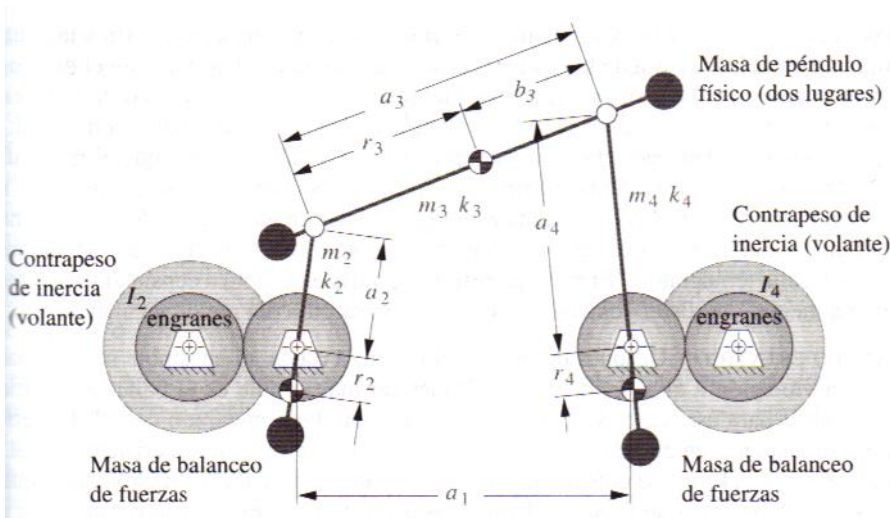


Figura 5.9 Mecanismo de 4 barras en línea con fuerzas y momentos completamente balanceados con acoplador de péndulo físico y contrapesos de inercia en los eslabones rotatorios.

Como tercer paso, el momento de sacudimiento puede contraerse al agregar contrapesos de inercia engranados a los eslabones 2 y 4, como se muestra en la figura 5.9. Estos deben girar en la dirección opuesta a los eslabones así que requieren una relación de engranes de -1. Tal contrapeso de inercia puede balancear cualquier momento plano que sea proporcional a una aceleración angular y no introduce fuerzas de inercia netas que perturben el balanceo de fuerzas del mecanismo. Los cambios incluyen un par de torsión de entrada incrementado y fuerzas mayores en los pasadores resultantes del par de torsión requerido para acelerar la inercia rotacional adicional. También puede haber cargas grandes e impacto en los dientes cuando las inversiones del par de torsión absorben el juego entre dientes de los engranes que provoca ruido.

El momento de sacudimiento de un mecanismo de 4 barras en línea se derivó en la referencia [14] como:

$$M_s = \sum_{i=2}^4 A_i \alpha_i \dots \dots \dots 5.26$$

Donde :

$$A_2 = -m_2(k_2^2 + r_2^2 + a_2 r_2) \dots \dots \dots 5.27$$

$$A_3 = -m_3(k_3^2 + r_3^2 - a_3 r_3) \dots \dots \dots 5.28$$

$$A_4 = -m_4(k_4^2 + r_4^2 + a_4 r_4) \dots \dots \dots 5.29$$

Donde α_i es la aceleración angular del eslabón i . Las demás variables se definen en la figura 5.9.

La adición de dos contrapesos de inercia proporciona:

$$M_s = \sum_{i=2}^4 A_i \alpha_i + I_2 \alpha_2 + I_4 \alpha_4 \dots \dots \dots 5.30$$

Se puede forzar el momento de sacudimiento para que sea igual a cero, si:

$$I_2 = -A_2 \dots \dots \dots 5.31$$

$$I_4 = -A_4 \dots \dots \dots 5.32$$

$$A_3 = 0 \quad o \quad k_3^2 = r_3(a_3 - r_3) \dots\dots 5.33$$

Esto conduce a un conjunto de 5 ecuaciones de diseño que se deben satisfacer para un balanceo completo de fuerzas y de momentos de un mecanismo de cuatro barras en línea.

$$m_2 r_2 = m_3 b_3 \left(\frac{a_2}{a_3} \right) \dots\dots 5.34$$

$$m_4 r_4 = m_3 b_3 \left(\frac{a_4}{a_3} \right) \dots\dots 5.35$$

$$k_3^2 = r_3 b_3 \dots\dots 5.36$$

$$I_2 = m_2 (k_2^2 + r_2^2 + a_2 r_2) \dots\dots 5.37$$

$$I_4 = m_4 (k_4^2 + r_4^2 + a_4 r_4) \dots\dots 5.38$$

Obsérvese que las ecuaciones 5.34 y 5.35 son los criterios para el balanceo de fuerzas de la ecuaciones 5.13 y 5.14 para el caso del mecanismo en línea. La ecuación 5.36 define al acoplador como un péndulo físico. Las ecuaciones 5.37 y 5.38 definen los momentos de inercia de masa requeridos para los contrapesos de inercia. Obsérvese que si el mecanismo funciona a velocidad angular constante α_2 será cero en la ecuación 5.26 y el contrapeso de inercia en el eslabón 2 puede omitirse

¹⁵ **Hockey, B.A**(1972), *An Improved Technique For Reducing the Fluctuation of Kinetic Energy In plane Mechanisms*, J. Mechanisms, 6,pp.397-410

¹⁶ **Hockey, B.A**(1972), *The minimization of the Fluctuation of Input In plane Mechanisms*, J. Mechanisms And Machine Theory,7,pp.335-346

¹⁷ **Berkof, R.S** (1979). *The input Torque In Linkage*,. Mechanism And Machine Theory , 14(Agosto),pp.61-73

¹⁸ **Lee, T. W., y C. Cheng** (1984). *Optimum Balancing Of Combined Shaking Forces, Shaking Moment, And torque Fluctuations In High Speed Linkages*, Trans Asme J. Mechanism Transmission, Automation and Design, **106**.pp242-251

¹⁹ **Qi,N.M., y E. Penenestri** (1991). *Optimum Balancing of Fourbar Linkage*. Mechanisms And Machine Theory,26(3),pp.337-348

²⁰ **Porter, B., Y cols.** (1994). *Genetic Design of Dynamically Optimal Fourbar Linkage*, Proc. of 23rd Biennial Mechanisms Conference, Minneapolis, MN, p. 413

²¹ **Bagci, C.** (1975). *Shaking Force and Shaking Moment Balancing of the Plane Slider –Crank Mechanism*. Proc. Of The 4th OSU Applied Mechanism Conference, Stillwater, Ok, pp.25-1

²² **Kochev,I, S** (2000). *General Theory Of Complete Shaking Moment Balancing of Planar Linkage: A Critical Review*. Mechanisms And Machine Theory,35,pp.1501-1514

²³ **Esat, L., Y r. BAHAL** (1999) .*A Theory OF Complete Force Balancing and moment Balancing of Planar Linkages*, Mechanisms And Machine Theory,34pp.903-922

²⁴ **Arakelian, V. H y M. R. Smith** (1999). *Complete Shaking force and Shaking Moment Balancing of Linkage: A Critical Review*. Mechanisms And Machine Theory,35,pp.1501-1514 Mechanisms And Machine Theory,34,pp.1141-1153

Capítulo VI BALANCEO DE MÁQUINAS RECIPROCANES MONOCILÍNDRICAS.

VI.1 INTRODUCCION

Una fuente principal de vibraciones en maquinaria, es la presencia de masas que realizan movimiento oscilatorio. Obviamente, el caso clásico es el pistón recíprocante en el motor de combustión interna, una bomba recíprocante o un compresor.

Aunque el movimiento de masas recíprocantes en una de esas máquinas no es estrictamente **armónico, es costumbre tratarlos como tales** con el propósito de tratar de reducir la tendencia de la máquina a vibrar. Existen muchas razones para considerar esa aproximación, una de ellas es que el movimiento armónico simple es fácil de modelar y conceptualizar, otra razón es porque la frecuencia fundamental de oscilación es realmente muy importante. Si se pudiera imaginar la aceleración angular descompuesta en componentes de Fourier, se tendría una gran amplitud fundamental con el periodo del total de la oscilación y un tren de más altas armónicas con pequeñas amplitudes. No sólo son esas armónicas menos efectivas en excitación vibratoria debido a pequeñas amplitudes, sino sus frecuencias son más altas que las fundamentales. Las altas frecuencias vibratorias son mucho más efectivas sin amortiguamiento en muchas estructuras, la frecuencia fundamental tiende a dominar la transmisión de vibraciones.

Otra aproximación que es comúnmente utilizada cuando se emplea el modelo dinámico de masas recíprocantes, es emplear el modelo de las masas en la varilla de conexión, representadas mediante dos masas equivalentes, una localizada en la manivela y la otra en el pistón. La primera se encuentra en rotación pura y la otra en traslación pura

Esta descomposición se puede realizar mediante la correcta localización del centro de masa de la varilla de conexión. Sin embargo, el momento de inercia de las dos masas sobre el centro de masa no será exactamente el mismo como el de la varilla de conexión. El error introducido en este procedimiento es mínimo en muchos análisis.

VI.2. CINEMÁTICA DEL MECANISMO BIELA MANIVELA.

En capítulos anteriores se obtuvieron las ecuaciones para encontrar las componentes de posición, velocidad, aceleración y fuerzas en el mecanismo biela manivela mediante ecuaciones vectoriales. En la figura 6.1 se muestra un mecanismo biela manivela “no descentrado”, porque el eje de deslizamiento extendido pasa por el pivote de la manivela. Además, su corredera se traslada con respecto al plano de la bancada estacionaria, por lo tanto no existirá ninguna componente de aceleración de Coriolis.

La geometría simple de esta inversión de este tipo de mecanismo permite una aproximación directa al análisis exacto de la posición, velocidad, y aceleración de su corredera con sólo ecuaciones de trigonometría plana y escalares. Para presentar un método de solución alternativo, y además por su simplicidad se analizará una vez más este dispositivo.

Si r es el radio de la manivela y l la longitud de la biela. El ángulo de la manivela θ y el ángulo que forma la biela con el eje X es ϕ , para cualquier velocidad angular constante de la manivela ω , el ángulo de ésta es $\theta = \omega t$. La posición instantánea del pistón es x . De modo que se construyen dos triángulos rectángulos rqs y lqu , de modo que por geometría:

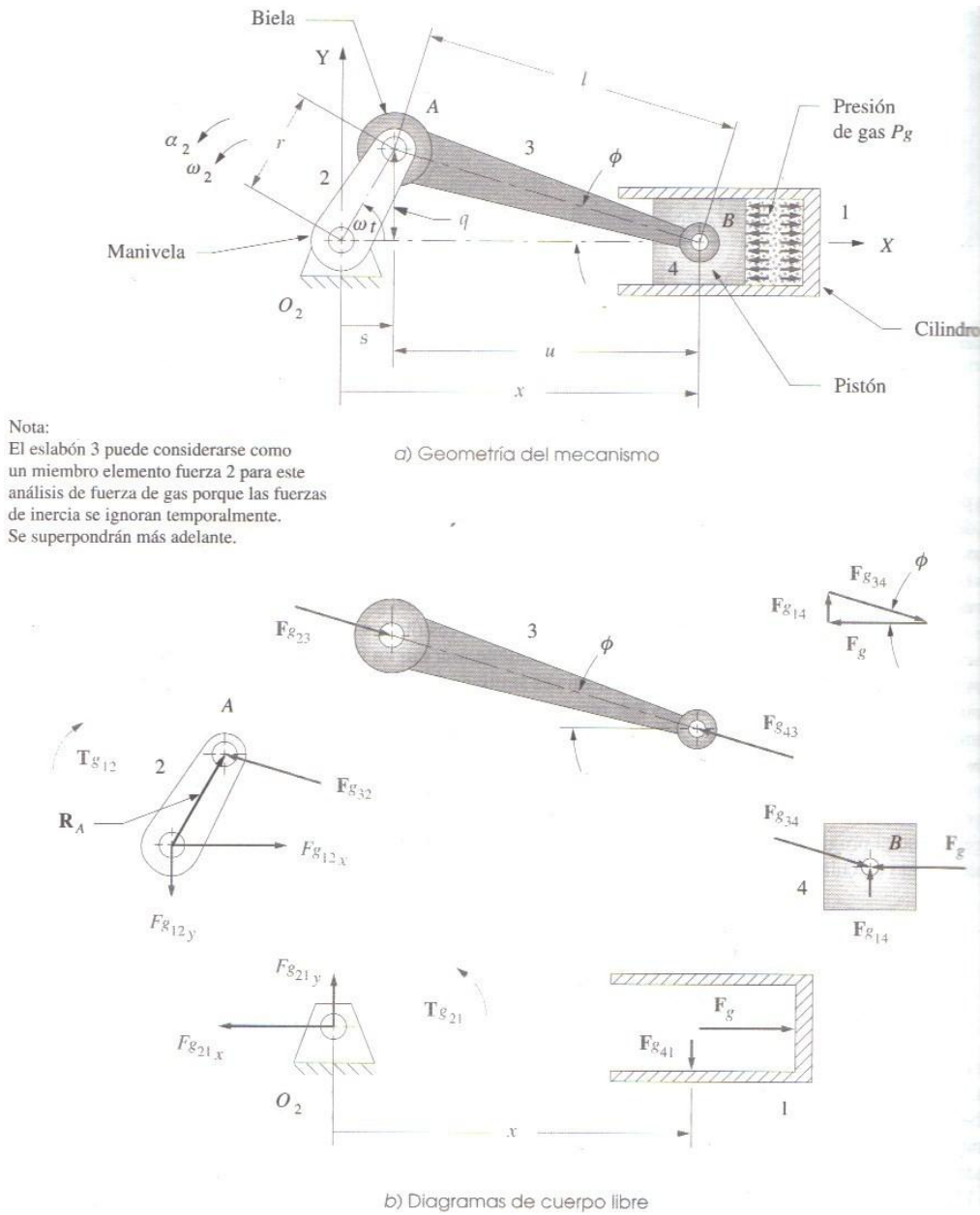


Figura 6.1 Análisis de posición y fuerza del gas en un mecanismo de manivela-corredera

$$q = r \sin \theta = l \sin \phi \dots\dots 6.1$$

$$\theta = \omega t \dots\dots 6.2$$

$$\sin \phi = \frac{r}{l} \sin \omega t \dots\dots 6.3$$

$$s = r \cos \omega t \dots\dots 6.4$$

$$u = l \cos \phi \dots\dots 6.5$$

$$x = s + u = r \cos \omega t + l \cos \phi \dots\dots 6.6$$

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2} \dots\dots\dots 6.7$$

$$x = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2} \dots\dots\dots 6.8$$

La ecuación **6.8** es una expresión exacta para la posición **x** del pistón **m**, en función de **r**, **l** y **ωt**. Al derivar esta ecuación con respecto al tiempo se pueden obtener las expresiones exactas para la velocidad y aceleración del pistón. Para un análisis de estado permanente se supondrá que **ω** es constante:

$$\dot{x} = -r\omega \left[\sin \omega t + \frac{r}{2l} \frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}} \right] \dots\dots\dots 6.9$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \left[\cos \omega t - \frac{r[l^2(1 - 2 \cos^2 \omega t) - r^2 \sin^4 \omega t]}{[l^2 - (r \sin \omega t)^2]^{3/2}} \right] \dots\dots\dots 6.10$$

Las ecuaciones **6.9** y **6.10** son fáciles de resolver con una computadora para todos los valores de **ωt** requeridos. Sin embargo, es más fácil recurrir a la ecuación **6.10** y visualizar los efectos en los cambios de los parámetros de diseño **r** y **l** en la aceleración. Sería adecuado poder derivar una expresión más simple, aun cuando fuera aproximada, que permitiera predecir más fácilmente los resultados de las decisiones de diseño que implican estas variables. Para ello, se emplea el teorema binomial para expandir el radical de la ecuación **6.8** de la posición del pistón para poner las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración en formas aproximadas más simples que aclararan el comportamiento dinámico del mecanismo.

La forma general del teorema binomial es:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k} \dots\dots\dots 6.11$$

El radical de la ecuación **6.8** es:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2} = \left[1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots 6.12$$

Donde para la expansión binomial:

$$x = 1 \qquad a = -\left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2 \qquad n = 1/2 \dots\dots\dots 6.13$$

Y la expansión queda como:

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^6 + \dots \dots\dots 6.14$$

$$1 - \left(\frac{r^2}{2l^2}\right) \sin^2 \omega t + \left(\frac{r^4}{8l^4}\right) \sin^4 \omega t + \left(\frac{r^6}{16l^6}\right) \sin^6 \omega t + \dots \dots\dots 6.15$$

Cada término no constante contiene la relación **manivela-biela r/l** para cierta potencia. Si se aplica el sentido común de ingeniería a la ilustración de manivela-corredera de la figura **6.1 a)** se observa que si **r/l** fuera mayor que 1 la manivela no podría realizar una revolución completa. De hecho si **r/l** se aproxima a 1 el pistón golpeará el pivote fijo **O₂** antes de que la manivela complete su

revolución. Si r/l es tan grande como $\frac{1}{2}$, el ángulo de transmisión ($\pi/2-\Phi$)(ángulo entre el eslabón de salida y el acoplador) será demasiado pequeño, y el mecanismo no funcionara bien. Un límite superior práctico del valor r/l es aproximadamente $1/3$. La mayoría de los mecanismos de manivela-corredera tendrán esta **relación manivela-biela** entre $1/3$ y $1/5$ para un funcionamiento uniforme.

Es posible eliminar todos los términos después del segundo en la expansión binomial con un error mínimo. Si se sustituye esta expresión aproximada para el radical de la ecuación **6.8** se obtiene una expresión aproximada para el desplazamiento del pistón con sólo una fracción de uno por ciento de error, entonces se tiene

$$x \cong r \cos \omega t + l \left[1 - \left(\frac{r^2}{2l^2} \right) \sin^2 \omega t \right] \dots\dots\dots \mathbf{6.16}$$

Al sustituir la identidad trigonométrica:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \dots\dots\dots \mathbf{6.17}$$

Al simplificar:

$$x \cong l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right) \dots\dots\dots \mathbf{6.18}$$

Al diferenciar para la velocidad del pistón (con ω constante):

$$\dot{x} \cong -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right) \dots\dots\dots \mathbf{6.19}$$

Al diferenciar de nuevo para la aceleración (con ω constante):

$$\ddot{x} \cong -r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \dots\dots\dots \mathbf{6.20}$$

El proceso de expansión binomial, en este caso en particular, conduce a las aproximaciones de la serie de Fourier de las expresiones exactas para el desplazamiento, velocidad y aceleración del pistón. Fourier demostró que cualquier función periódica puede aproximarse por una serie de términos seno y coseno de múltiplos enteros de la variable independiente. Recuérdese que ya se eliminaron los términos de cuarta, sexta y subsecuentes potencias de la expansión binomial, lo que habría provisto los términos $\cos 4\omega t$, $\cos 6\omega t$, etc., en esta expresión. Estas funciones de ángulos múltiples se conocen como armónicas del término fundamental $\cos \omega t$. El término $\cos \omega t$ se repite una vez por cada revolución de la manivela y se llama **frecuencia fundamental** de la componente primaria, la segunda armónica $\cos 2\omega t$, se repite dos veces por cada revolución de la manivela y se llama **componente secundaria**. Las armónicas de orden superior se eliminaron cuando se suspendió la serie. El término constante en la función de desplazamiento es la **componente de CD o valor promedio**. La función completa es la suma de las armónicas. La forma de series de Fourier de las expresiones del desplazamiento y sus derivadas permite ver las contribuciones relativas de las diversas componentes armónicas de las funciones. Este método demostrara ser bastante valioso cuando se intente balancear dinámicamente un diseño de motor.

A continuación se analiza el comportamiento dinámico del motor de un solo cilindro con base en el modelo cinemático desarrollado. Como se dispone de varias fuentes de excitación dinámica, se utiliza el método de superposición para analizar por separado y luego combinar sus efectos, primero se consideran fuerzas y pares de torsión, que se deben a las **fuerzas del gas explosivo**

en el cilindro, las cuales impulsan el motor. En seguida se analizan las **fuerzas de inercia y pares de torsión** producida por el movimiento a alta velocidad de los elementos. La fuerza total y el estado del par de torsión de la máquina en cualquier instante será la suma de estas componentes. Por último, se analizan las **fuerzas y pares de sacudimiento** en el plano de la bancada y las **fuerzas en los pasadores** del mecanismo que resultan de la combinación de las fuerzas aplicadas y dinámicas sobre el sistema.

La figura 6.2 a, b, c muestra las gráficas para posición, velocidad y aceleración del pistón con un ω constante de la manivela durante dos revoluciones completas. La curva de aceleración muestra los efectos del segundo término armónico con mucha más claridad ya que el coeficiente de este término es mayor que su correspondiente en cualquiera de las dos funciones. Se puede observar el alto valor de la aceleración pico del pistón, incluso a velocidad de mediano rango del motor de 3400 rpm ¡es de 747 g! a 6000 rpm se incrementa a casi 1300 g. Este es un motor de tamaño moderado, de 3 pulg (76 mm) de cavidad cilíndrica y 3.54 pulg (89 mm) de carrera con 25 pulg³ (400 cm³) de desplazamiento cilíndrico (un motor de 4 cilindros de 1.6L)

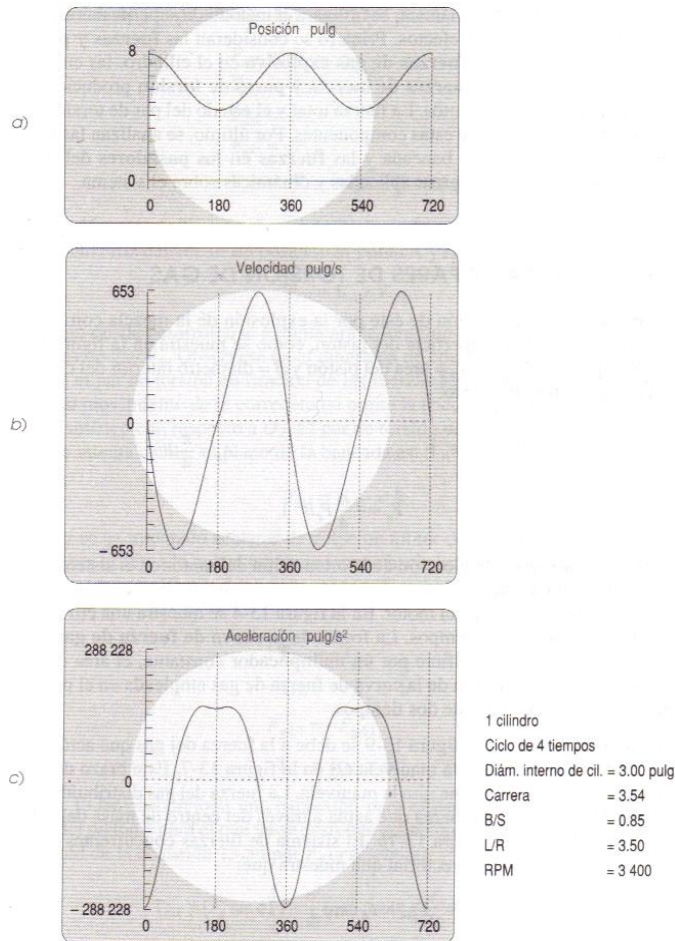


Figura 6.2 Funciones de posición, velocidad y aceleración de un motor de un solo cilindro.

VI.3. FUERZA Y PARES DE TORSIÓN DEL GAS.

La **fuerza del gas** se debe a la presión de éste por la explosión de la mezcla combustible-aire que choca en la parte superior de la superficie del pistón, como se muestra en la figura 6.3 .Sea $F_g =$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

fuerza del gas, P_g = presión del gas A_p = área del pistón y B = diámetro interior del cilindro, el cual es igual al diámetro del pistón, se tiene:

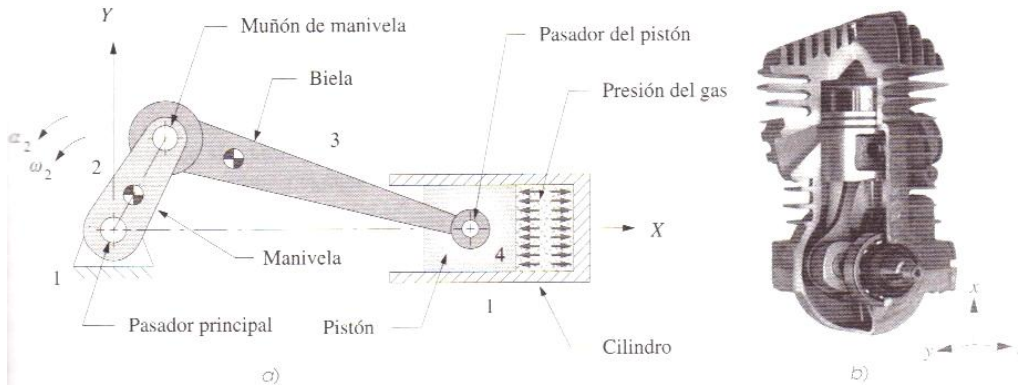


Figura 6.3 Mecanismo de manivela-corredora de cuatro barras a) para un motor de combustión interna de un cilindro b) Mahle inc... Morristown, NJ.

$$F_g = -P_g A_p \mathbf{i} \quad A_p = \frac{\pi}{4} B^2$$

$$F_g = -P_g \frac{\pi}{4} B^2 \mathbf{i} \dots \dots 6.21$$

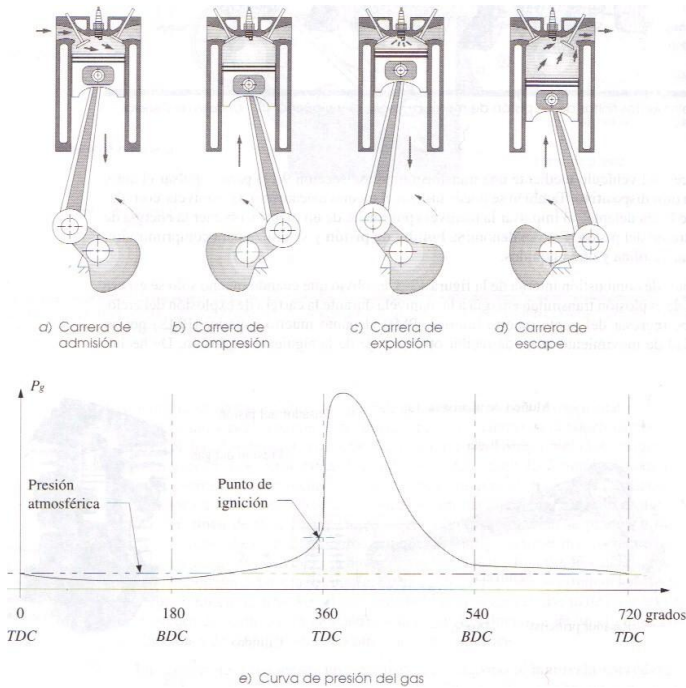


Figura 6.4 Ciclo de combustión de cuatro tiempos.

El signo negativo se debe a la elección de la orientación del motor en el sistema coordenado de la figura. La **presión del gas** P_g en esta expresión es una función del ángulo de la manivela ωt y está definida por la termodinámica del motor; en la figura 6.4 se muestra la **curva de presión de gas** típica de un motor de 4 tiempos. La forma de la **curva de fuerza del gas** es idéntica a la curva de

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

presión del gas, ya que sólo difiere por un multiplicador constante, el área del pistón A_p . La figura 6.5 muestra la aproximación de la curva de fuerza de gas para motores de 2 y 4 tiempos.

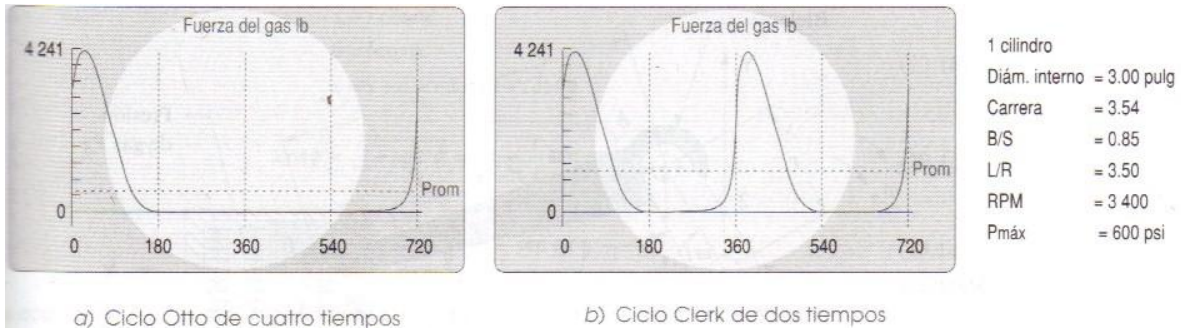


Figura 6.5 Funciones de la fuerza de gas en motores de ciclos de dos y cuatro tiempos.

El **par de torsión del gas** en la figura 6.6 se debe a la fuerza del gas que actúa en un brazo de palanca con respecto al centro O_2 de la manivela en la figura 6.1. Este brazo de palanca varía desde cero hasta un máximo conforme gira la manivela. La fuerza del gas distribuida en la superficie del pistón se convirtió en una sola fuerza que actúa a través del centro de masa del eslabón 4, en los diagramas de cuerpo libre de la figura 6.1 b. El sistema de fuerzas concurrentes en el punto **B** se determinó tomando como referencia el diagrama vectorial que muestra que :

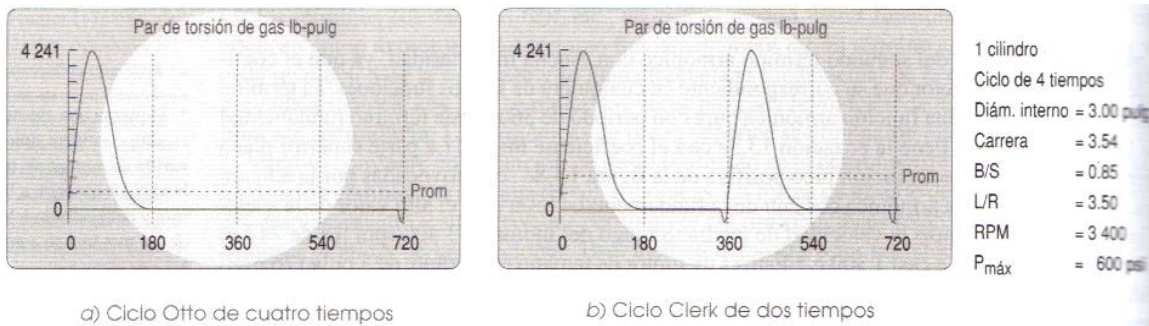


Figura 6.6 Funciones de par de torsión del gas en motores con ciclos de dos y cuatro tiempos.

$$F_{g14} = F_g \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.22}$$

$$F_{g34} = -F_g \mathbf{i} - F_g \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.23}$$

También, en los diagramas de cuerpo libre de la figura 6.1 se puede observar que:

$$F_{g41} = -F_{g14} \dots \dots \dots \mathbf{6.24}$$

$$F_{g43} = -F_{g34} \dots \dots \dots \mathbf{6.25}$$

$$F_{g23} = -F_{g43} \dots \dots \dots \mathbf{6.26}$$

$$F_{g32} = -F_{g23} \dots \dots \dots \mathbf{6.27}$$

$$F_{g32} = -F_{g34} = F_g \mathbf{i} + F_g \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.28}$$

Por lo tanto, el **par de torsión motriz** T_{g21} en el eslabón 2 generado por la fuerza del gas se puede determinar a partir del producto cruz del vector de posición al punto A y la fuerza en el punto A.

$$T_{g21} = R_A \times F_{g32} \dots\dots 6.29$$

Esta expresión puede desarrollarse e implicar la longitud de la manivela r y los ángulos θ y Φ , así como la fuerza del gas F_g . Obsérvese a partir del diagrama de cuerpo libre del eslabón 1, que también puede expresarse el par de torsión en función de las fuerzas F_{g14} y F_{g41} , las cuales actúan siempre perpendiculares al movimiento de la corredera (si omite la fricción), y la distancia x que es el brazo del momento instantáneo con respecto a O_2 . El par de torsión de reacción T_{g12} que corresponde a la fuerza del gas que intenta oscilar el plano de la bancada es:

$$T_{g12} = F_{g41} \cdot x \cdot k \dots\dots 6.30$$

Cuando se acelera de golpe un motor de un automóvil, se observa que el motor se mueve hacia los lados al oscilar en sus apoyos por el par de torsión de reacción. El par de torsión motriz T_{g21} es el negativo de este par de torsión reacción, entonces:

$$T_{g21} = -T_{g12} \dots\dots 6.31$$

$$T_{g21} = -F_{g41} \cdot x \cdot k \dots\dots 6.32$$

$$F_{g14} = -F_{g41} \dots\dots 6.33$$

$$T_{g21} = F_{g14} \cdot x \cdot k \dots\dots 6.34$$

La ecuación **6.34** proporciona una expresión para el **par de torsión del gas** en función del desplazamiento x del pistón, para el cual ya se tiene una expresión **6.18** de tal modo que se obtiene:

$$T_{g21} = F_g \tan \Phi \left[l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right) \right] k \dots\dots 6.35$$

La ecuación **6.35** contiene el ángulo de la biela Φ así como el ángulo de la manivela ωt . Para contar con una expresión que solo implique ωt se sustituye para la expresión $\tan \Phi$ generada por la geometría de la figura **6.1 a**:

$$\tan \Phi = \frac{q}{u} = \frac{r \sin \omega t}{l \cos \Phi} \dots\dots 6.36$$

Al sustituir la ecuación **6.7** se tiene:

$$\tan \Phi = \frac{r \sin \omega t}{l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}} \dots\dots 6.37$$

El radical en el denominador se expande por medio del teorema binomial, como se efectuó en la expresión **6.15** y se retienen los dos primeros términos para una buena aproximación a la expresión exacta:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}} \cong 1 + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \dots\dots 6.38$$

De modo que:

$$\tan \phi = \frac{r}{l} \sin \omega t \left(1 + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \right) \dots\dots\dots 6.39$$

De modo que se tendrá:

$$T_{g21} = F_g \left[\frac{r}{l} \sin \omega t \left(1 + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \right) \right] \left[l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right) \right] k \dots\dots\dots 6.40$$

VI.4. MASAS EQUIVALENTES.

Para realizar un análisis de fuerzas dinámicas completo en cualquier mecanismo se deben conocer las propiedades geométricas (masa, centro de gravedad y momento de inercia de masa) de los eslabones móviles. Eso se facilita si el eslabón se diseñó en forma detallada y se conocen sus dimensiones.

En el caso de mecanismos manivela-corredera, la **manivela** está en rotación pura, y el pistón en traslación pura. Si se suponen algunas geometrías y materiales razonables es posible aproximar sus parámetros dinámicos. Sus movimientos cinemáticos son fáciles de determinar. Además, si se balancea la manivela rotatoria como un eslabón en rotación pura, entonces el centro de gravedad de la manivela se mantendrá inmóvil en su centro O_2 y no contribuirá a las fuerzas dinámicas.

La biela se encuentra en movimiento complejo. Para realizar un análisis dinámico exacto, se debe determinar la aceleración lineal de su **CG** en todas las posiciones. Al principio del diseño, la ubicación del **CG** de la biela no está perfectamente definida. Para “elevar el potencial del diseño” se requiere un modelo simplificado de esta biela que más adelante se puede refinar conforme se genera mayor información dinámica sobre el diseño del motor.

Es posible diseñar la biela si se modela como dos masas puntuales concentradas, una en el pasador de la manivela (punto **A** en la figura 6.1) y otra en el pasador del pistón (punto **B** en la figura 6.1), así se podrá determinar cuáles son los movimientos de estas masas concentradas. La masa concentrada en **A** estará en rotación pura como parte de la manivela, y la masa concentrada en el punto **B** estará en traslación pura como parte del pistón. Estas masas puntuales concentradas no tienen dimensiones y se supone que están conectadas con una barra ideal, sin masa pero rígida.

Modelo dinámicamente equivalente. En la figura 6.7 a se muestra una biela típica. La figura 6.7 b muestra un modelo genérico de dos masas de la biela. Una masa m_t se localiza a una distancia l_t del **CG** de la biela original, y la segunda masa m_p a una distancia l_p del **CG**. La masa de la pieza original es m_3 , y su momento de inercia con respecto a su **CG** es I_{G_3} . Si se expresan matemáticamente los tres requisitos para la equivalencia dinámica en la tabla 6.1, en función de estas variables, se obtiene:

$$m_t + m_p = m_3 \dots\dots\dots 6.41$$

$$m_p l_p = m_t l_t \dots\dots\dots 6.42$$

$$m_p l_p^2 + m_t l_t^2 = I_{G_3} \dots\dots\dots 6.43$$

Tabla 6.1 Requerimientos para la equivalencia dinámica

1.- La masa del modelo debe ser igual a la del cuerpo original
2.-El centro de gravedad debe estar en el mismo lugar que el cuerpo original
3.-El momento de inercia de masa debe ser igual al del cuerpo original

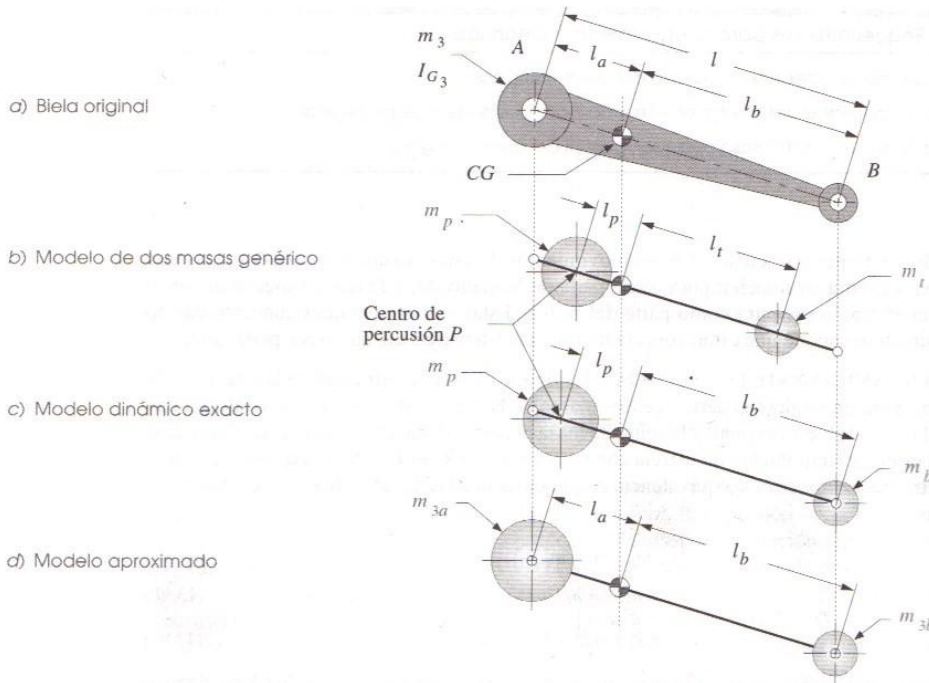


Figura 6.7 Modelos dinámicos de masa concentrada en una biela.

Como se puede observar existen cuatro incógnitas en estas tres ecuaciones, m_p , l_p , m_t , l_t . Lo que significa que debe elegirse un valor para cualquier variable para resolver este sistema. Si se elige la distancia l_t igual a la distancia del pasador del pistón, l_b como se muestra en la figura 6.7 c. Esto pondrá una masa en un lugar deseado. Al resolver las ecuaciones 6.41 y 6.42 simultáneamente se obtienen expresiones para las masas concentradas:

$$m_p = m_3 \frac{l_b}{l_p + l_b} \dots\dots 6.44$$

$$m_b = m_3 \frac{l_p}{l_p + l_b} \dots\dots 6.45$$

Al sustituir las ecuaciones 6.44 y 6.45 en la ecuación 6.43 se tiene:

$$m_3 \frac{l_b}{l_p + l_b} l_p^2 + m_3 \frac{l_p}{l_p + l_b} l_t^2 = I_{G_3} = m_3 l_p l_b \dots\dots 6.46$$

$$l_p = \frac{I_{G_3}}{m_3 l_b} \dots\dots 6.47$$

La distancia l_p es la ubicación del centro de percusión correspondiente a un centro de rotación en l_b . Por lo tanto, la segunda masa m_p debe colocarse en el **centro de percusión P** del eslabón (con el punto B como su centro de rotación) para obtener la equivalencia dinámica exacta. Las masas deben ser como se definen en las **ecuaciones 6.44 y 6.45**.

La geometría típica de la biela, como se muestra en la figura 6.7 a, es grande en el extremo del muñón de la manivela (A) y pequeña en el extremo del pasador del pistón (B). Esto ubica el **CG** cerca del extremo “del muñón de la manivela”. El centro de percusión **P** estará incluso más cerca del extremo de la manivela de lo que estaría del **CG**. Por lo tanto, se puede colocar la segunda masa concentrada, que pertenece al punto **P** en el punto **A** con un error relativamente pequeño en

la precisión del modelo dinámico. Este modelo aproximado es adecuado para los cálculos de diseño iniciales, Una vez establecida una geometría de diseño variable, podrá realizarse un análisis de fuerzas completo y exacto con el análisis dinámico de fuerzas.

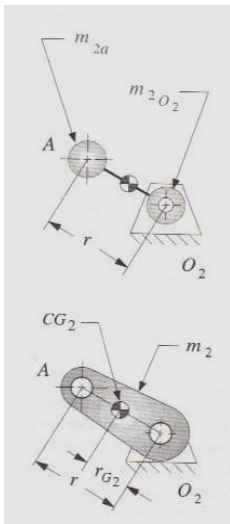
Si se sustituye la distancia l_a por l_p y se renombran las masas concentradas en esas distancias como m_{3a} y m_{3b} , para reflejar tanto su identidad con el eslabón 3 como con los puntos **A** y **B**, se vuelven a escribir las ecuación **6.44** y **6.45 de la siguiente forma:**

$$l_p = l_a \dots \dots \dots \mathbf{6.48}$$

$$m_{3a} = m_3 \frac{l_b}{l_a + l_b} \dots \dots \dots \mathbf{6.49}$$

$$m_{3b} = m_3 \frac{l_a}{l_a + l_b} \dots \dots \dots \mathbf{6.50}$$

Estas definen las cantidades de la masa total de la biela que se colocara en cada extremo para modelar aproximada y dinámicamente ese eslabón. La figura **6.7 d** muestra este modelo dinámico. Si no se cuenta con los datos sobre la forma de la biela al principio de un diseño, se puede obtener información sobre las fuerzas dinámicas con la regla empírica al colocar dos tercios de la masa de la biela en el extremo del muñón de la manivela y un tercio en el extremo del pasador del pistón.



Puede crearse un modelo similar de masa concentrada de la manivela, aun cuando se pretenda balancear antes de terminar, al inicio se plantea *desbalanceada* como se muestra en la figura **6.8**. Su **CG** se localiza a cierta distancia r_{G2} del pivote O_2 , sobre la línea que va al muñón de la manivela, A. Sería deseable modelarlo como una masa concentrada en A en una barra sin masa con su pivote en O_2 . Si el principal requisito es el del análisis de estado estable, entonces la velocidad de la manivela ω se mantiene constante. Sin aceleración angular en la manivela se puede utilizar un modelo estáticamente equivalente debido a que la ecuación $T = I\alpha$ será cero sin importar el valor de I . Un **modelo estáticamente equivalente** sólo necesita ser una masa y primeros momentos equivalentes, como se muestra en la tabla **6.2**. No es necesario que los momentos de inercia sean iguales. Se modelará como dos masas concentradas, una en el punto A y una en el pivote fijo O_2 . En la tabla **6.2** se escriben los requerimientos para la equivalencia estática

Figura 6.8 Modelo de masa concentrada estáticamente equivalente a una manivela.

Tabla 6.2 Requerimientos para la equivalencia estática

- | |
|--|
| 1.- La masa del modelo debe ser igual a la del cuerpo original |
| 2.-El centro de gravedad debe estar en el mismo lugar que el cuerpo original |

$$m_2 = m_{2a} + m_{2O_2} \dots \dots \dots \mathbf{6.51}$$

$$m_{2a}r = m_2r_{G2} \dots \dots \dots \mathbf{6.52}$$

$$m_{2a} = \frac{m_2r_{G2}}{r} \dots \dots \dots \mathbf{6.53}$$

La masa concentrada m_{2a} puede colocarse en el punto A para representar la manivela desbalanceada. La segunda masa concentrada en el pivote fijo O_2 , no es necesaria para cualquier cálculo, ya que ese punto es estacionario.

Estas simplificaciones conducen al modelo de parámetro concentrado del mecanismo manivela-corredera mostrado en la figura 6.9. El muñón de la manivela, punto A, tiene dos masas concentradas en él, la masa equivalente de la manivela m_{2a} y la parte de la biela m_{3a} . Su masa es m_A . En el pasador del pistón, punto B, también se concentraran sus masas, la masa del pistón m_4 y la parte restante de la masa de la biela m_{3b} . Su suma es m_B . Este modelo tiene masas que están en rotación pura (m_A) o en traslación pura (m_B), así que es fácil analizarlo dinámicamente:

$$m_A = m_{2a} + m_{3a} \dots\dots\dots \mathbf{6.54}$$

$$m_B = m_{3b} + m_4 \dots\dots\dots \mathbf{6.55}$$

El valor de construir modelos simples de masa concentrada de sistemas complejos se incrementa con la complejidad del sistema que se diseñara. Tiene poco sentido dedicar mucho tiempo a análisis complejos y diseños mal definidos al principio y de los que su viabilidad conceptual aún no se ha comprobado. Es mejor obtener una respuesta razonablemente aproximada y rápida que permita determinar si el concepto debe replantearse, que ocupar mucho tiempo en llegar a la misma conclusión con más cifras decimales.

VI.5. FUERZAS DE INERCIA Y SACUDIMIENTO.

Se puede utilizar el modelo simplificado de masa concentrada de la figura 6.9 para desarrollar expresiones para las fuerzas y pares de torsión generados por las aceleraciones de las masas presentes en el sistema. El método de d' Alembert permite visualizar los efectos de esas masas en movimiento en el sistema del plano de la bancada. Del mismo modo los diagramas de cuerpo libre de la figura 6.9 b muestran las fuerzas de inercia de d' Alembert, que actúan en las masas localizadas en los puntos A y B. De nuevo se ignora la fricción. La ecuación 6.20 proporciona la aceleración del punto B. La aceleración del punto A en rotación pura se obtienen al diferenciar dos veces el vector posición \mathbf{R}_A , si se supone una ω constante del cigüeñal, y se obtiene:

$$\mathbf{R}_A = r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j} \dots\dots\dots \mathbf{6.56}$$

$$\mathbf{a}_A = -r\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - r\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} \dots\dots\dots \mathbf{6.57}$$

La fuerza de inercia total \mathbf{F}_i es igual a la suma de la fuerza centrífuga (de inercia) en el punto A y la fuerza de inercia en el punto B:

$$\mathbf{F}_i = -m_A \mathbf{a}_A - m_B \mathbf{a}_B \dots\dots\dots \mathbf{6.58}$$

Al descomponerla en sus componentes x y y se obtiene:

$$F_{ix} = -m_A(-r\omega^2 \cos \omega t) - m_B \ddot{x} \dots\dots\dots \mathbf{6.59}$$

$$F_{iy} = -m_A(-r\omega^2 \sin \omega t) \dots\dots\dots \mathbf{6.60}$$

Se puede observar que la aceleración del pistón sólo afecta la componente x , al sustituir la expresión 6.20 en la ecuación 6.59 se tiene:

$$F_{ix} \cong -m_A(-r\omega^2 \cos \omega t) - m_B \left[-r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \dots\dots\dots \mathbf{6.61}$$

$$F_{iy} = -m_A(-r\omega^2 \sin \omega t) \dots\dots\dots \mathbf{6.62}$$

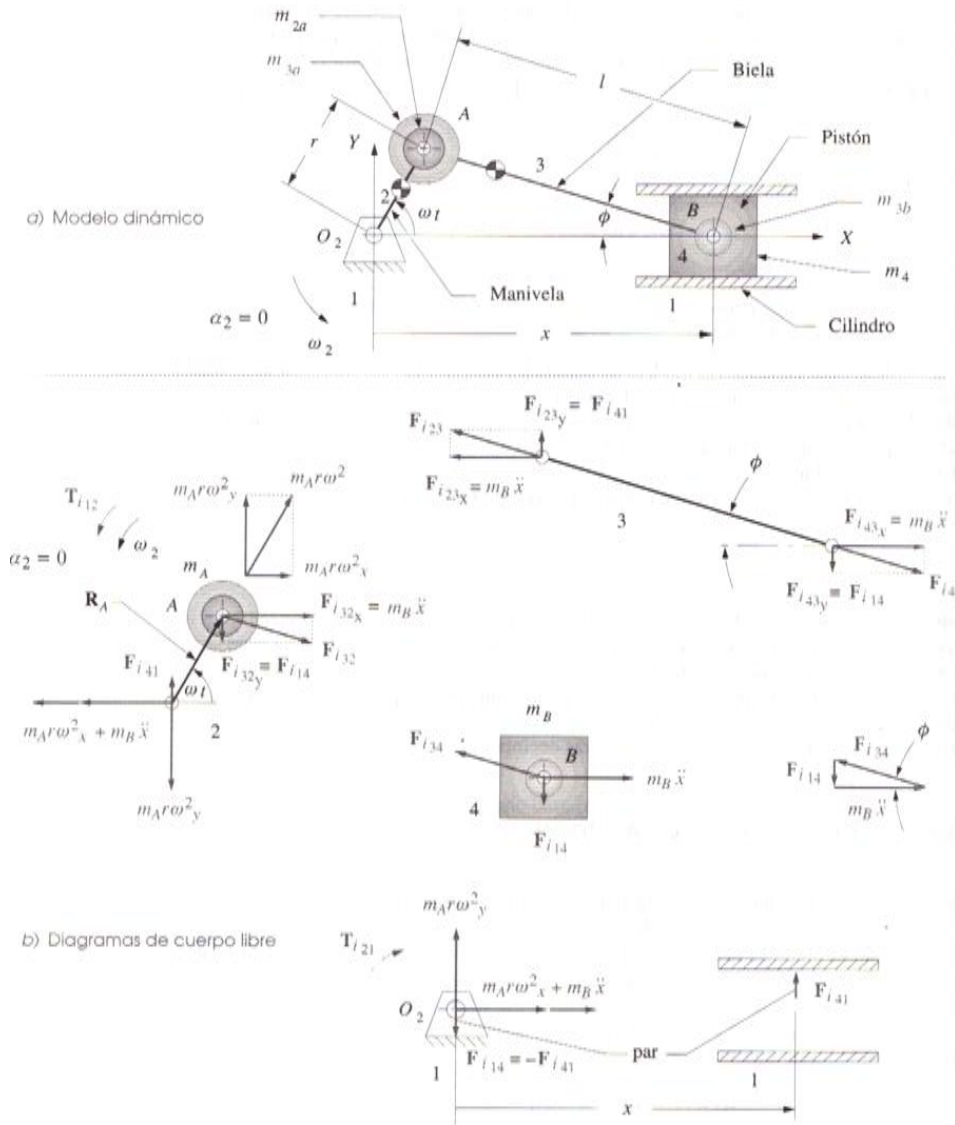


Figura 6.9 Modelos dinámico de una masa concentrada del mecanismo de manivela-corredera, las flechas muestran la dirección y sentido vectorial, los rótulos muestran la magnitud.

Nótese que las fuerzas de inercia en la dirección x tiene componentes primarias en la frecuencia de la manivela, y fuerzas secundarias (segunda armónica) en dos veces la frecuencia de la manivela, así como armónicas pares de magnitud pequeña y grande, las cuales se interrumpen en la expansión binomial de la función del desplazamiento del pistón. La fuerza generada por la masa rotatoria en el punto A tiene sólo una componente primaria.

La **fuerza de sacudimiento** se define como la suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de la bancada de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre del eslabón 1 en la figura 6.9, de aquí se tiene

$$\Sigma F_{sx} \cong -m_A(r\omega^2 \cos \omega t) - m_B \left[r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \dots\dots 6.63$$

$$\sum F_{s,y} \cong -m_A(r\omega^2 \sin \omega t) + F_{i_{41}} - F_{i_{14}} \dots\dots\dots 6.64$$

Se puede observar que la fuerza lateral del pistón $F_{i_{41}}$ en la pared del cilindro se cancela por una fuerza igual y opuesta $F_{i_{14}}$ que pasa a través de la biela y el cigüeñal hacia el muñón principal en O_2 . Estas dos fuerzas crean un par que genera el par de torsión de sacudimiento. La fuerza de sacudimiento F_s es igual al negativo de la fuerza de inercia, es decir:

$$F_s = -F_i \dots\dots\dots 6.65$$

Nótese que la fuerza del gas, según la ecuación 6.21 no contribuye a la fuerza de sacudimiento. Sólo las fuerzas de inercia y las fuerzas externas se perciben como fuerzas de sacudimiento. La fuerza del gas es una fuerza interna que se elimina dentro del mecanismo; actúa de forma igual, aunque opuesta, tanto en la parte superior del pistón como en la cabeza del cilindro, como se muestra en la figura 6.1.

La figura 6.10 muestra la curva de la fuerza de sacudimiento del mismo motor desbalanceado, como se muestra en la curva de aceleración (figura 6.2 c). La orientación del mecanismo es la misma de la figura 6.9 con el eje x horizontal. La componente x es mayor que la componente y producida por la alta aceleración del pistón. Las fuerzas se ven muy grandes a pesar de que es un motor relativamente pequeño (0.4 litros por cilindro) que funciona a una velocidad moderada (3400 rpm).

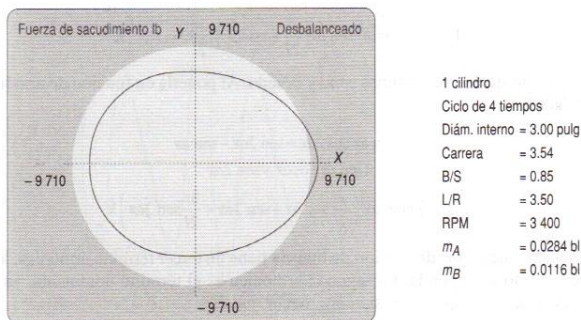


Figura 6.10 Fuerza de sacudimiento en un mecanismo de manivela-corredera desbalanceado.

VI.6. PARES DE TORSIÓN DE INERCIA Y DE SACUDIMIENTO.

El **par de torsión de inercia** resulta de la acción de las fuerzas de inercia en un brazo de palanca. La fuerza de inercia en el punto A de la figura 6.9 tiene dos componentes; radial y tangencial. La componente radial no tiene brazo de palanca. La componente tangencial tiene un brazo de palanca igual al radio r de la manivela. Si la ω de la manivela es constante, la masa en **A** no contribuirá al par de torsión de inercia. La fuerza de inercia en **B** tiene una componente distinta de cero perpendicular a la pared del cilindro, excepto cuando el pistón está en el **PMS** o **PMI**. Como se hizo para el par de torsión del gas, puede expresarse el par de torsión de inercia en función del par $-F_{i_{14}}, F_{i_{41}}$ cuyas fuerzas siempre son perpendiculares al movimiento de la corredera (al ignorar la fricción) y de la distancia x , que es su brazo de palanca instantáneo (vea la figura 6.9). El par de torsión de inercia es:

$$T_{i_{21}} = (F_{i_{41}} \cdot x)k = (-F_{i_{14}} \cdot x)k \dots\dots\dots 6.66$$

Al sustituir por $F_{i_{14}}$ (vea la figura 6.9 b) y por x de la ecuación 6.18 se tiene:

$$T_{i21} \cong -(-m_B \ddot{x} \tan \phi) \left[l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right) \right] k \dots \dots \dots 6.67$$

Al sustituir el valor de la tangente de acuerdo a la ecuación 6.32 y la ecuación 6.20 para la aceleración se obtiene:

$$T_{i21} \cong m_B \left[-r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \left[\frac{r}{l} \sin \omega t \left(1 + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \right) \right] \left[l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right) \right] k \dots \dots \dots 6.68$$

El par de torsión de sacudimiento es igual al par de torsión de inercia

$$T_s = T_{i21} \dots \dots \dots 6.69$$

La figura 6.11 muestra la curva del par de torsión de inercia para el motor de 1.6 l de las figuras anteriores. Obsérvese el dominio de la segunda armónica. La magnitud ideal del par de torsión de inercia es cero, ya que es parásita. Su valor promedio siempre es cero, así que *no contribuye en nada al par de torsión motriz neto*, sólo crea grandes oscilaciones positivas y negativas en el par de torsión total que incrementa la vibración y la aspereza. Es posible eliminar los efectos del par de inercia con la disposición apropiada de los cilindros.

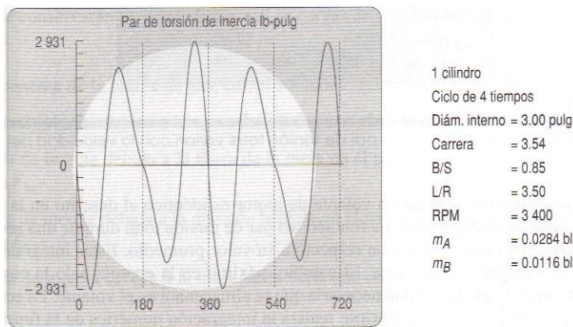


Figura 6.11 Par de torsión de inercia en el mecanismo de manivela-corredera.

VI.7. PAR DE TORSIÓN TOTAL DEL MOTOR.

El par de torsión total del motor es la suma del par de torsión del gas y el par de torsión de inercia

$$T_{total} = T_g + T_i \dots \dots 6.70$$

El par de torsión del gas es menos sensible a la velocidad del motor que el par de torsión de inercia, el cual es una función de ω^2 , así que las contribuciones relativas de ambas componentes al par de torsión total variarán con la velocidad el motor. La figura 6.12 muestra el par de torsión total del motor a una velocidad en marcha lenta de 800 rpm. Compárese con la curva del par de torsión del gas del mismo motor ilustrado en la figura 6.6 a. La componente del par de torsión de inercia es insignificante a esta velocidad lenta comparada con la componente del par de torsión del gas. La figura 6.12 c muestra el mismo motor funcionando a 6000 rpm. Compárese con la curva del par de torsión de inercia mostrado en la figura 6.11. La componente del par de torsión de inercia domina a esta alta velocidad. A la velocidad de rango medio de 3400rpm (figura 6.12 b), se observa una mezcla de ambas componentes.

VI.8. VOLANTES.

Como se ha **visto en secciones anteriores** las grandes oscilaciones de la función par de torsión-tiempo puede reducirse en gran medida por la adición de un volante al sistema. El motor de un cilindro es un excelente ejemplo para el uso del volante, la naturaleza intermitente de sus carreras de potencia lo vuelven obligatorio, ya que almacenará la energía cinética necesaria para llevar al pistón a través de los tiempos de escape, admisión y compresión del ciclo Otto, durante los cuales se debe realizar trabajo sobre el sistema. Incluso el motor de dos tiempos necesita un volante para impulsar al pistón que suba en la carrera de compresión.

El procedimiento para diseñar un volante de motor es idéntico al descrito para un mecanismo de cuatro barras. La función del par de torsión total durante una revolución de la manivela se integra, pulso a pulso, con respecto a su valor promedio. Estas integrales representan fluctuaciones de energía en el sistema. El cambio máximo en la energía bajo la curva del par de torsión durante un ciclo es la cantidad necesaria que se almacenara en el volante. La **ecuación 3.77** expresa esta relación. Al realizar la integración numérica de la función del par de torsión total como lo muestra la figura 3.12. Estos datos y la elección del diseñador de un coeficiente de fluctuación **k** (ecuación 3.74) es todo lo que se requiere para resolver las ecuaciones 3.75 y 3.78 para el momento de inercia requerido para el volante.

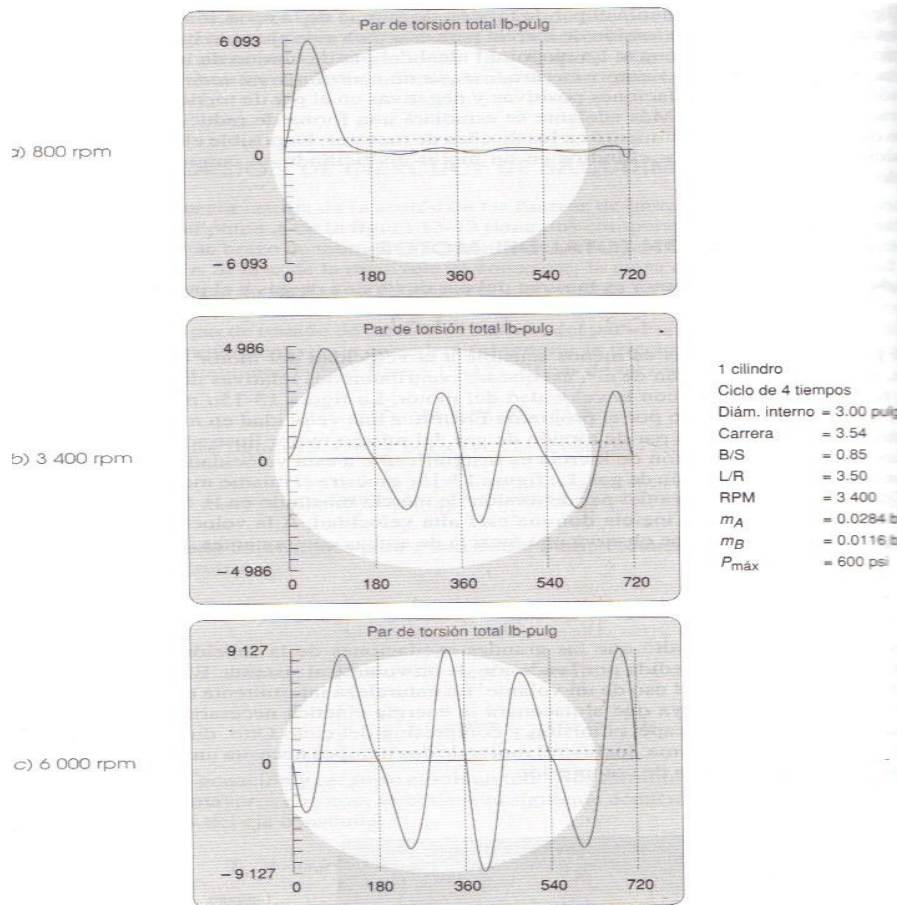


Figura 6.12 La forma y magnitud de la función del par de torsión total varían con la velocidad del cigüeñal.

El cálculo debe realizarse a una ω promedio de la manivela. Como el motor típico opera a velocidades diferentes, se debe considerar la velocidad más apropiada a utilizar en el cálculo del volante. La energía cinética almacenada del volante es proporcional a ω^2 (véase la ecuación 3.64). Por tanto a altas velocidades un volante puede tener un pequeño momento de inercia y aun así ser efectivo. La velocidad de operación menor requerirá un volante más grande y deberá de utilizarse para el cálculo del tamaño del volante requerido.

En general, un volante de motor se diseña como un disco plano, atornillado a un extremo del cigüeñal. Una cara del volante se utiliza para que el embrague funcione en contacto con ella. El embrague es un dispositivo de fricción que permite desconectar el motor del tren motriz (las ruedas del vehículo) cuando no sea de salida. El motor puede permanecer funcionando a una velocidad de marcha lenta con el vehículo a dispositivo de salida detenido. Cuando se acopla el embrague, todo el par de torsión del motor se transmite a través de él, por fricción al eje de salida.

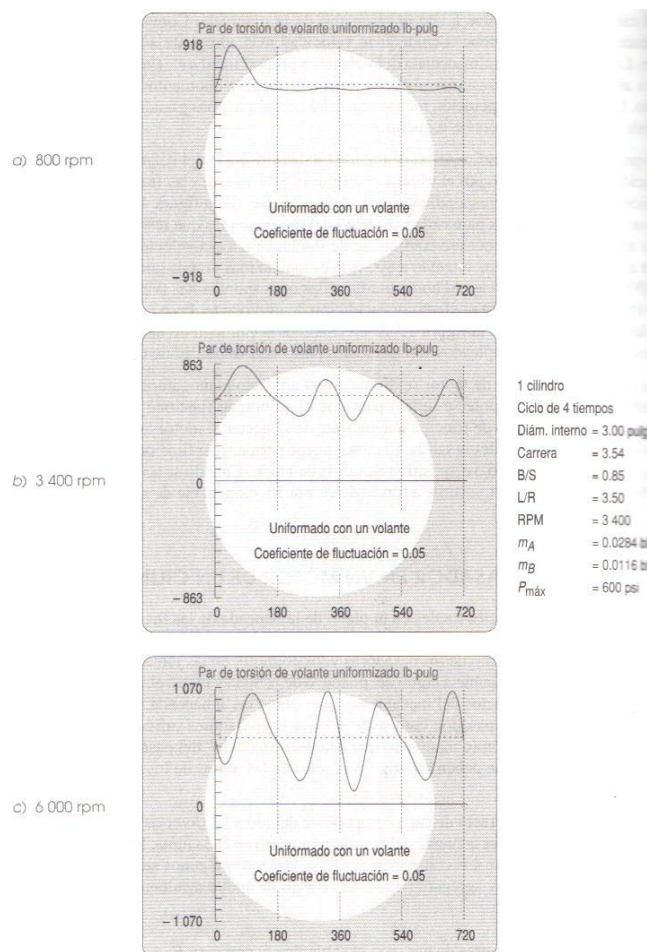


Figura 6.13 La forma y magnitud de la función del par de torsión total varían con la velocidad del cigüeñal.

VI.9. FUERZAS DE PASADOR EN UN MOTOR DE UN CILINDRO.

Además de calcular los efectos totales en el plano de la bancada de las fuerzas dinámicas presentes en el motor, también se requiere conocer las magnitudes de las fuerzas en las juntas de pasador. Estas fuerzas determinarán el diseño de los pasadores y los cojinetes en las juntas. Aun cuando es posible concentrar la masa tanto en la biela como del pistón, o de la biela y manivela, en

los puntos **A** y **B** para el análisis global de los efectos del mecanismo en el plano de la bancada, no se puede hacer lo mismo para calcular las fuerzas de pasador. Esto se debe a que los pasadores sufren el efecto del jalón de la biela en un “lado” y el pistón (o manivela) que jala del otro “lado” del pasador, como se muestra en la figura 6.14. Por lo tanto, se deben separar los efectos de las masas de los eslabones unidos por los pasadores.

Debe determinarse el efecto de cada componente debido a las diversas masas y fuerzas del gas, y luego sustituirse para obtener la fuerza del pasador completo en cada junta. Se requiere un sistema de registro para rastrear todos estos componentes. Para realizar este análisis es conveniente realizar una convención de subíndices.

1. La componente de la fuerza del gas, con el subíndice *g*, como en F_g .
2. La fuerza de inercia debida a la masa del pistón, con el subíndice *ip*, como en F_{ip} .
3. La fuerza de inercia debida a la masa de la biela en el pasador del pistón, con el subíndice *iw*, como en F_{iw} .
4. La fuerza de inercia debida a la masa de la biela en el pasador de la manivela, con el subíndice *ic*, como en F_{ic} .
5. La fuerza de inercia debida a la masa de la biela en su pasador, con el subíndice *ir*, como en F_{ir} .

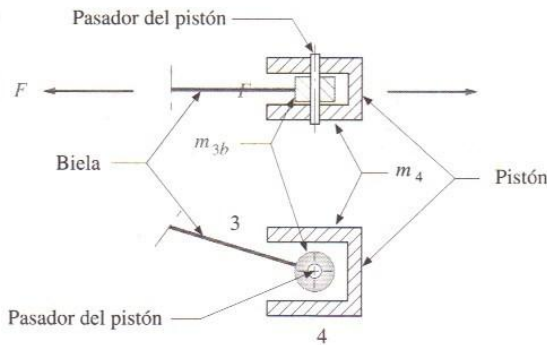


Figura 6.14 Fuerzas sobre un pasador de pivote.

Se agregan números a cada subíndice, para indicar el eslabón del cual proviene la fuerza como el primer número y el segundo número del eslabón que se analizara.

La figura 6.15 muestra los diagramas de cuerpo libre de la fuerza de inercia F_{ipB} producida por la aceleración de la masa del pistón, m_4 . Por lo tanto:

$$F_{ipB} = -m_4 a_B \mathbf{i} \dots \dots \dots \mathbf{6.71}$$

$$F_{ip14} = -F_{ipB} \tan \phi \mathbf{j} = m_4 a_B \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.72}$$

$$F_{ip34} = -F_{ipB} - F_{ip14} = m_4 a_B \mathbf{i} - m_4 a_B \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.73}$$

$$F_{ip32} = -F_{ip34} = -m_4 a_B \mathbf{i} + m_4 a_B \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.74}$$

$$F_{ip12} = -F_{ip32} = F_{ip34} \dots \dots \dots \mathbf{6.75}$$

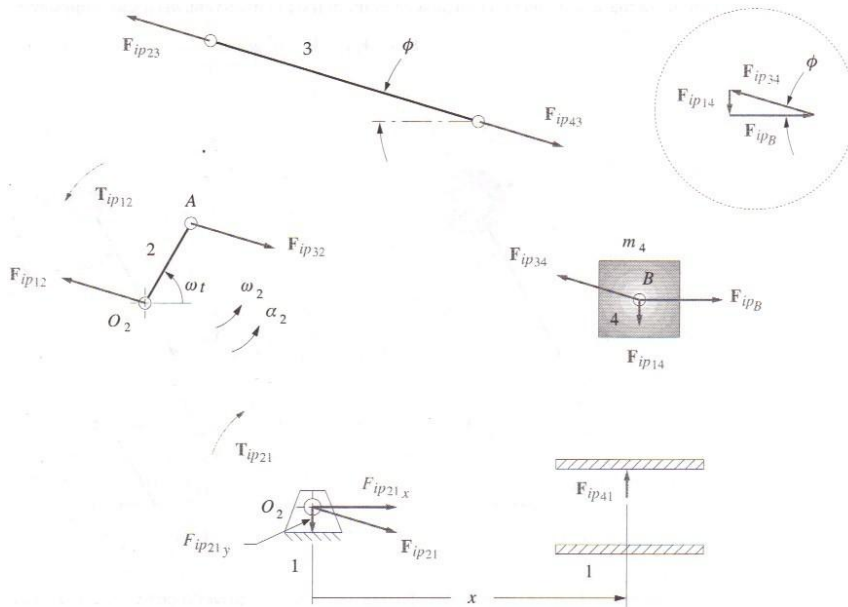


Figura 6.15 Diagramas de cuerpo libre de fuerzas producidas por la masa del pistón.

La figura 6.16 muestra los diagramas de cuerpo libre de las fuerzas producidas por la aceleración de la masa de la biela localizada en el pasador del pistón, m_{3b} . Estas componentes son:

$$F_{iwB} = -m_{3b}a_B i \dots\dots\dots 6.76$$

$$F_{iw34} = F_{iw41} = F_{iwB} \tan \phi j = -m_{3b}a_B \tan \phi j \dots\dots\dots 6.77$$

$$F_{iw43} = -F_{iw34} = m_{3b}a_B \tan \phi j \dots\dots\dots 6.78$$

$$F_{iw23} = -F_{iwB} - F_{iw43} = m_{3b}a_B i - m_{3b}a_B \tan \phi j \dots\dots\dots 6.79$$

$$F_{iw12} = -F_{iw32} = F_{iw23} \dots\dots\dots 6.80$$

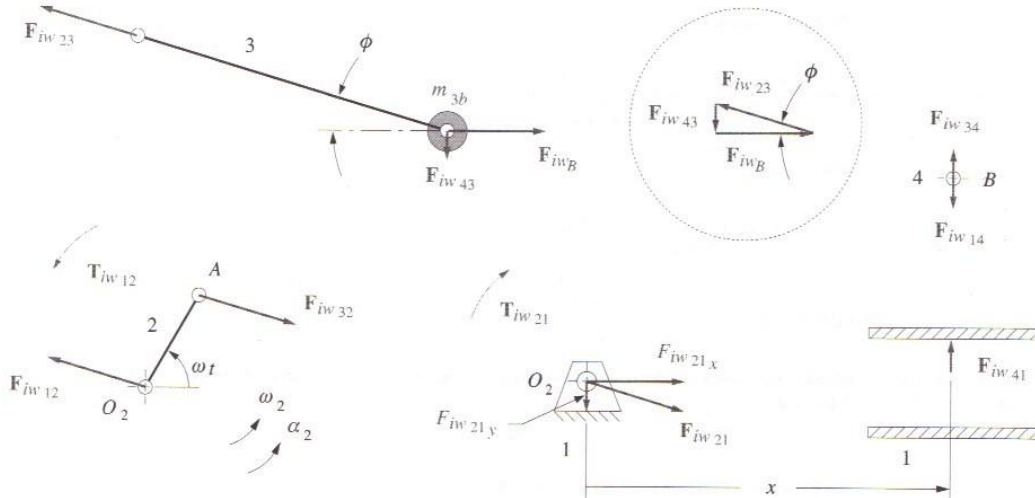


Figura 6.16 Diagramas de cuerpo libre de fuerzas producidas por la masa concentrada de la biela en el pasador del pistón.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

La figura **6.17 a** muestra los diagramas de cuerpo libre de las fuerzas producidas por la aceleración de la masa de la biela localizada en el muñón de la manivela, m_{3a} . Esa componente es:

$$F_{ic} = -F_{ic12} = F_{ic21} = -m_{3a}a_A \dots \dots \dots \mathbf{6.81}$$

Al sustituir la ecuación **6.57** tenemos:

$$F_{ic21} = -F_{ic12} = m_{3a}r\omega^2(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{6.82}$$

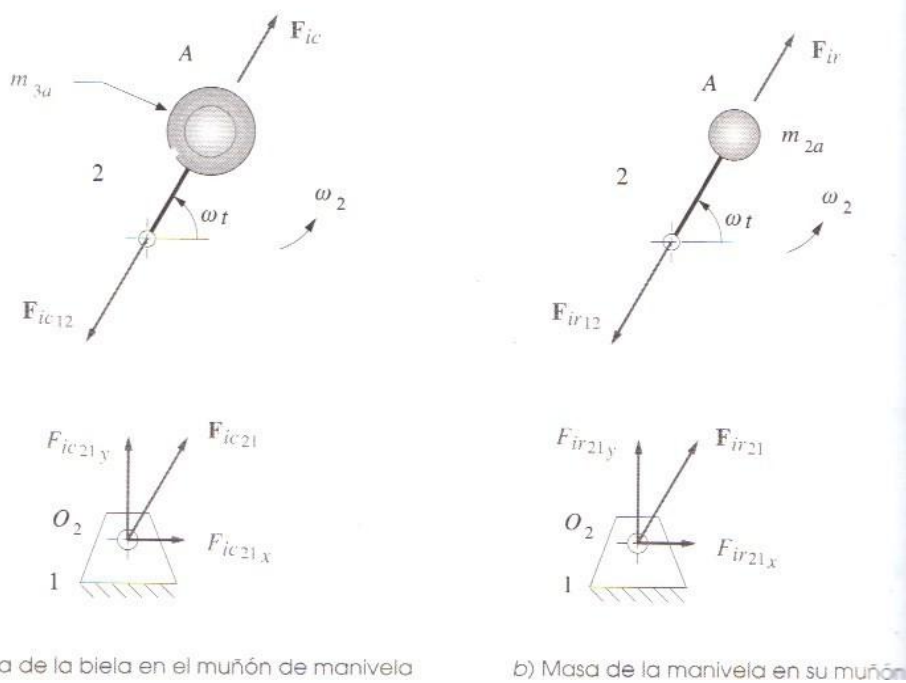


Figura 6.17 Diagramas de cuerpo libre de fuerzas producidas por las masas en el muñón de la manivela.

La figura **6.17 b** muestra los diagramas de cuerpo libre de las fuerzas producidas por la aceleración de las masas concentradas de la manivela en su muñón, m_{2a} . Estas afectan sólo al pasador principal en O_2 . Esas componentes son:

$$F_{ir} = -F_{ir12} = F_{ir21} = -m_{2a}a_A \dots \dots \dots \mathbf{6.83}$$

$$F_{ir21} = m_{2a}r\omega^2(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{6.84}$$

Las componentes de la fuerza del gas se mostraron en la figura **6.1** y se definieron en las ecuaciones **6.21 a 6.28**.

Ahora es posible sumar las componentes de las fuerzas en cada junta de pasador. Para la fuerza F_{41} que ejerce el pistón en la pared del cilindro se tiene:

$$F_{41} = F_{g41} + F_{ip41} + F_{iw41} \dots \dots \dots \mathbf{6.85}$$

$$F_{41} = -F_g \tan \phi \mathbf{j} - m_4 a_B \tan \phi \mathbf{j} - m_{3b} a_B \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.86}$$

$$F_{41} = -[(m_4 + m_{3b})a_B + F_g] \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.87}$$

La fuerza total F_{34} en el pasador del pistón es:

$$F_{34} = F_{g34} + F_{ip34} + F_{iw34} \dots \dots \dots \mathbf{6.88}$$

$$F_{34} = (-F_g \mathbf{i} - F_g \tan \phi \mathbf{j}) + (m_4 a_B \mathbf{i} - m_4 a_B \tan \phi \mathbf{j}) + (-m_{3b} a_B \tan \phi \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{6.89}$$

$$F_{34} = (-F_g + m_4 a_B) \mathbf{i} - [F_g + (m_4 + m_{3b}) a_B] \tan \phi \mathbf{j} \dots \dots \dots \mathbf{6.90}$$

La fuerza total F_{32} en el pasador de la manivela es:

$$F_{32} = F_{g32} + F_{ip32} + F_{iw32} + F_{ic32} \dots \dots \dots \mathbf{6.91}$$

$$F_{32} = (F_g \mathbf{i} + F_g \tan \phi \mathbf{j}) + (-m_4 a_B \mathbf{i} + m_4 a_B \tan \phi \mathbf{j}) + (-m_{3b} a_B \mathbf{i} + m_{3b} a_B \tan \phi \mathbf{j}) +$$

$$[m_{3a} r \omega^2 (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})] \dots \dots \dots \mathbf{6.92}$$

$$F_{32} = [m_{3a} r \omega^2 \cos \omega t - (m_{3b} + m_4) a_B + F_g] \mathbf{i} + \{m_{3a} r \omega^2 \sin \omega t + [(m_{3b} + m_4) a_B + F_g] \tan \phi\} \mathbf{j} \dots \dots \mathbf{6.93}$$

La fuerza total F_{21} en el muñón principal es:

$$F_{21} = F_{32} + F_{ir21} = F_{32} + m_{2a} r \omega^2 (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) \dots \dots \dots \mathbf{6.94}$$

Se puede observar que, a diferencia de la fuerza de inercia en las **ecuaciones de fuerza 6.58 6.65 de inercia y sacudimiento** no fueron afectadas por la fuerza del gas, estas fuerzas de pasador son una función de la fuerza de gas y también de las fuerzas de inercia. Los motores con pistones de gran diámetro experimentan fuerzas de pasador mayores a consecuencia de la presión de la explosión que actúan en un área mayor.

La figura **6.18** muestra la fuerza del pasador del pistón en el mismo ejemplo de motor desbalanceado mostrado en figuras previas, para tres velocidades del motor. El lazo en forma de “corbata de moño” es la fuerza de inercia y el lazo en forma de “lagrime” es la parte de la fuerza del gas de la curva de fuerza. Ocurre un cambio interesante entre las componentes de la fuerza del gas y las componentes de la fuerza de inercia de las fuerzas de pasador. A una velocidad baja de 800rpm (figura **6.18 a**), la fuerza del gas domina, ya que las fuerzas de inercia son insignificantes a una ω pequeña. La fuerza pico en el pasador del pistón es entonces aproximadamente de 4200lb. A velocidades altas (6000rpm), las componentes de inercia dominan y la fuerza pico es aproximadamente de 4500 lb (figura **6.18 c**). Pero a una velocidad de rango medio (3400 rpm), la fuerza de inercia cancela parte de la fuerza del gas y la fuerza pico es aproximadamente de 3200 lb (figura **6.18 b**). Estas curvas muestran que las fuerzas del pasador pueden ser bastante grandes incluso en un motor de tamaño moderado (0.4 litro/cilindro). Todos los pasadores, eslabones y cojinetes deben diseñarse para soportar cientos de millones de ciclos de estas fuerzas sin falla.

La figura **6.19** muestra más evidencia de la interacción de las fuerzas del gas y las fuerzas de inercia en el muñón de la manivela y en el pasador del pistón. Las figuras **6.19 a y c)** muestran la variación de la magnitud de la componente de la fuerza de inercia en el muñón de la manivela y el pasador del pistón, respectivamente, durante una revolución completa de la manivela, conforme la velocidad del motor se incrementa desde su marcha lenta hasta una velocidad máxima. Las figuras **6.19 b y d)** muestran la variación de la fuerza total sobre los mismos pasadores con las componentes de las fuerzas del gas e inercia incluidas. Estas dos curvas muestran sólo los primeros 90° de revolución de la manivela donde ocurre la fuerza del gas en un cilindro de cuatro tiempos. Cabe observar que las componentes de las fuerzas del gas e inercia se contrarrestan una

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

a otra y el resultado es una velocidad particular en la que la fuerza en el pasador es mínima durante la carrera de potencia. Este es el mismo fenómeno que se presenta en la figura 6.18

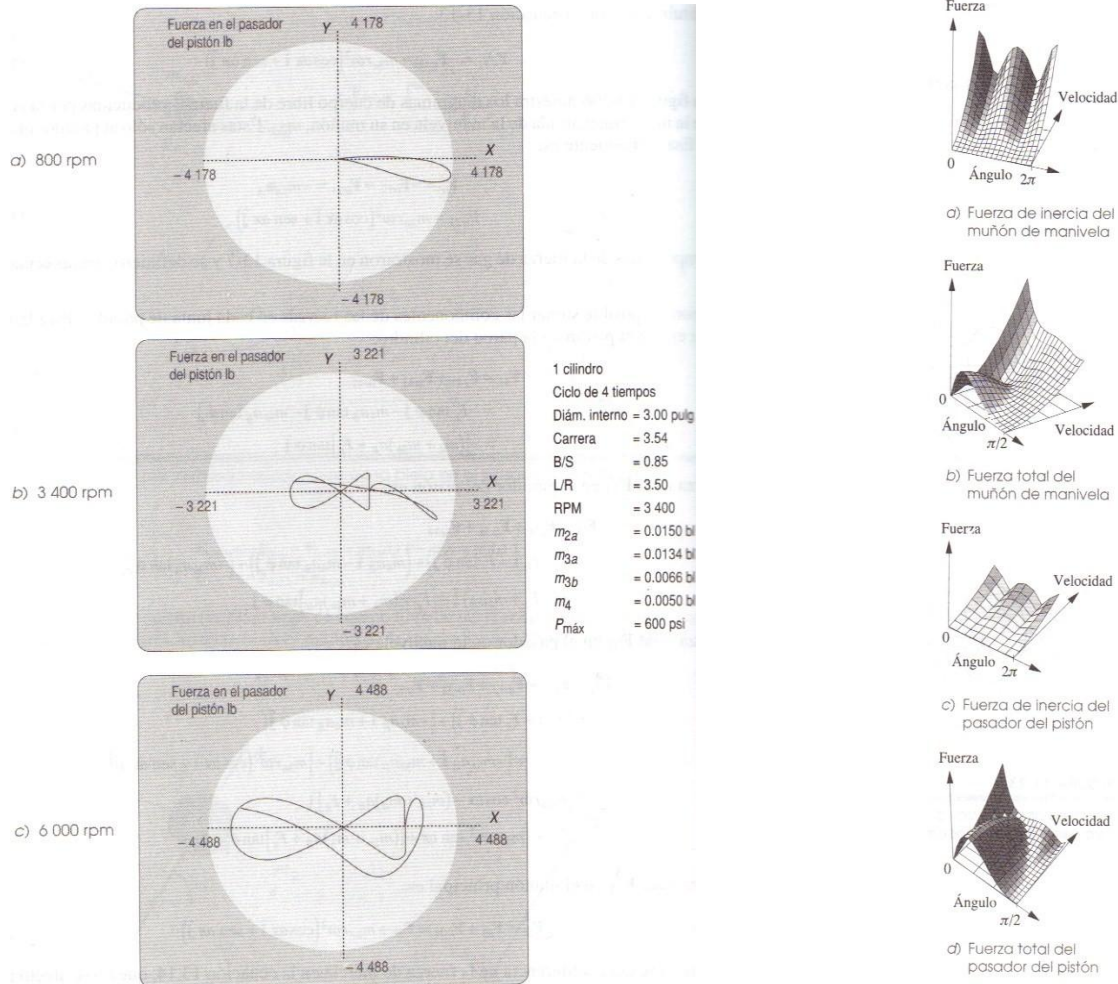


Figura 6.18 Fuerzas en el pasador del pistón del motor de un cilindro a varias velocidades.

Figura 6.19 Variación de la fuerza del pasador.

La figura 6.20 muestra las fuerzas en el muñón principal y en el pasador de la manivela a tres velocidades del mismo motor de un solo cilindro **desbalanceado** mostrado en las figuras anteriores. Estas fuerzas se graficaron como hodógrafo en un sistema coordenado rotatorio local (LRCS) x',y' insertado en el cigüeñal. La figura 6.20 a muestra que a 800rpm (velocidad en marcha lenta) las fuerzas del pasador de la manivela y del pasador principal son en esencia iguales y opuestas por que las componentes de la fuerza de inercia son pequeñas comparadas con la fuerza del gas que dominan a baja velocidad. Sólo la mitad de la circunferencia de uno u otro pasador percibe cualquier fuerza. A 3400rpm figura 6.20 b ,los efectos de la fuerza de inercia son evidentes y las partes angulares del pasador principal y del pasador de la manivela que perciben

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

cualquier fuerza ahora son de 39° y 72° , respectivamente. Los efectos de la fuerza del gas crean simetría de los hodógrafos de fuerza con respecto al eje x' . La diferencia entre las fuerzas del pasador principal y la manivela se deben a los términos de masa diferentes en sus ecuaciones (compare las ecuaciones 6.93 y 6.94).

En la figura 6.20 c el motor está girando a una velocidad de 6000rpm y las componentes de la fuerza de inercia ahora son dominantes, elevan los niveles de la fuerza pico y hacen que los hodógrafos sean casi simétricos con respecto al eje x' . Las partes angulares de los pasadores principales de la manivela que perciben alguna fuerza ahora se reducen a 30° y 54° , respectivamente. Esta distribución de fuerzas provoca que los pasadores de la manivela se desgasten sólo en una parte de su circunferencia.

Es importante hacer notar que los valores numéricos de la fuerza y el par de torsión en las figuras de este capítulo son únicos, debido a la selección arbitraria de los parámetros del motor utilizado en el ejemplo y no debe extrapolarse a cualquier otro diseño de motor.

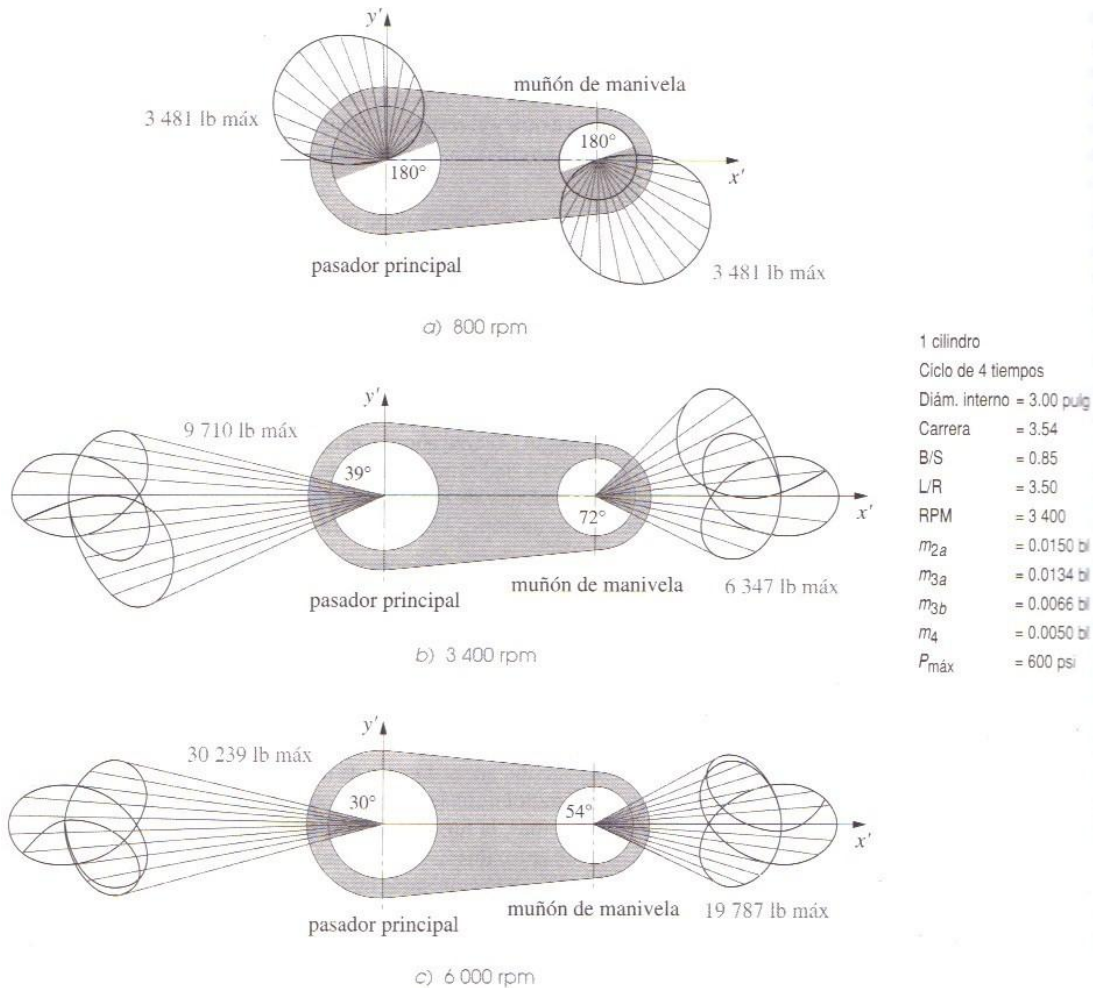
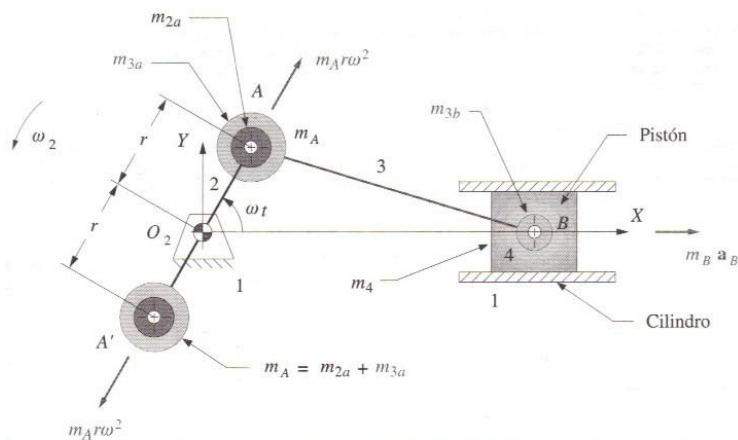


Figura 6.20 Hodógrafos de fuerzas dinámicas en el pasador principal y en el muñón de manivela de un motor de cuatro tiempos de un solo cilindro desbalanceado funcionando a varias velocidades.

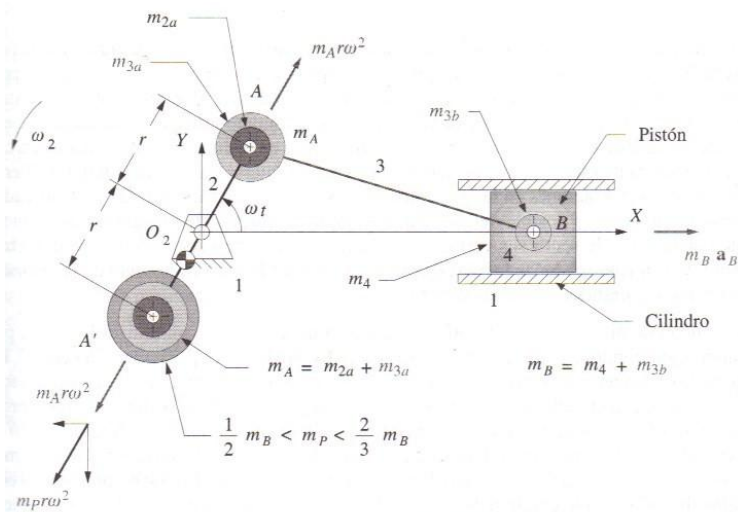
VI.10. BALANCEO DEL MOTOR DE UN CILINDRO.

Como se ha visto en secciones anteriores se desarrollan fuerzas significativas tanto en los pasadores del pivote como en el plano de la bancada a causa de las fuerzas del gas, las cuales son internas, pero pueden tener un efecto importante en las fuerzas de inercia y sacudimiento. Se puede reducir la fuerza en el pasador principal, pero las fuerzas en el pasador de la manivela y muñón no se verán afectadas por cualquier balanceo realizado en el cigüeñal. La figura 6.10 muestra la fuerza de sacudimiento desbalanceada como se percibe en el plano de la bancada del motor del ejemplo de un cilindro de 0.4 litros que es aproximadamente de 9700 lb, incluso a la velocidad moderada de 3400 rpm. A 6000 rpm se incrementa a más de 30000 lb.

La figura 6.21 a muestra un modelo dinámico del mecanismo de manivela-corredera con la masa de la biela concentrada tanto en el muñón de la manivela **A** como en el pistón **B** adecuado para balanceo estático. Es fácil balancear estáticamente la manivela. Para ello se requiere una masa de balanceo en un radio a 180° de la masa concentrada en el punto **A**, cuyo producto es mr , y que sea igual al producto de la masa en **A** por su radio r de modo que aplicando la ecuación para un eslabón en rotación pura se tiene:



a) Manivela exactamente balanceada



b) Manivela sobrebalanceada

Figura 6.21 Balanceo o sobrebalanceo del motor de un cilindro.

$$m_{bal}R_{bal} = -m_A R_A \dots \dots \dots 6.95$$

Cualquier combinación de masa y radio que tenga este producto, colocado a 180° del punto **A** balanceara la manivela. Por simplicidad en el ejemplo, se utiliza un radio de balanceo igual a r . Entonces una masa igual a m_A colocada en **A'** balanceara con exactitud las masas rotatorias. El **CG** de la manivela estará entonces en el pivote fijo **O₂** como se muestra en la figura 6.21 a. En un cigüeñal real, si se coloca el **CG** del contrapeso en este radio grande no dará resultado. La masa de balanceo debe mantenerse cerca de la línea de centros para librar el pistón en el **PMI**. La figura 6.22 c muestra la forma de los contrapesos de un cigüeñal típico.

La figura 6.23a muestra la fuerza de sacudimiento del motor de la figura 6.10 después que la manivela se ha balanceado con exactitud de esa manera. La componente **Y** de la fuerza de sacudimiento se redujo a cero y la componente **X** a 3343 lb a 3400rpm. Esto implica un factor de tres reducciones con respecto al motor desbalanceado. Obsérvese que la única fuente de fuerza de inercia dirigida en la dirección **Y** es la masa rotatoria en el punto **A** de la figura 6.21 (ver las ecuaciones 6.58 a 6.65) lo que queda después de balancear la masa rotatoria es la fuerza producida por las masas del pistón y biela en el punto **B** de la figura 6.21, que es una traslación lineal a lo largo del eje **X** como lo muestra la fuerza de inercia, $-m_B a_B$, en el punto **B** de esa figura.

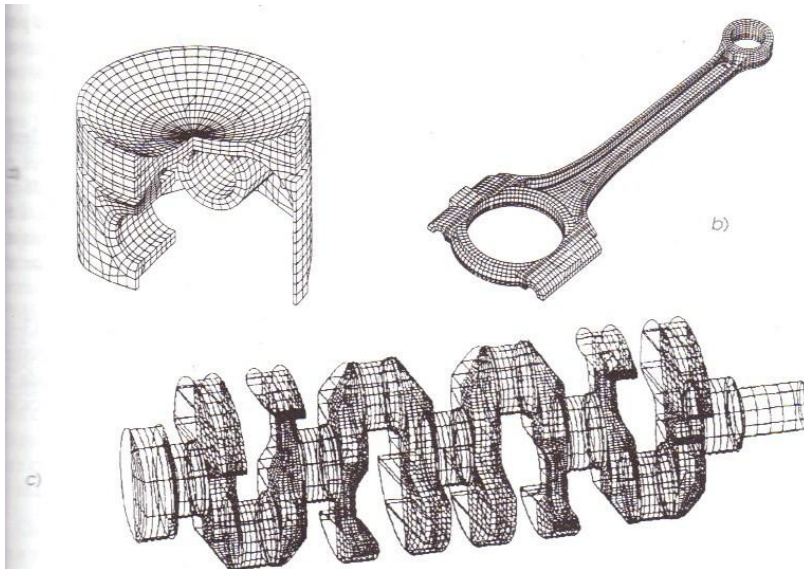


Figura 6.22 Modelos de elementos finitos de un a) pistón de motor b) biela, c) cigüeñal.

Para eliminar por completo esa fuerza de sacudimiento desbalanceada oscilante, se requeriría introducir otra masa alternativa, que oscilara 180° desfasada del pistón. Si se agrega un segundo pistón y un cilindro, dispuestos apropiadamente, puede lograrse esto. Una de las ventajas principales de los motores multicilindros es su capacidad para reducir o eliminar las fuerzas de sacudimiento.

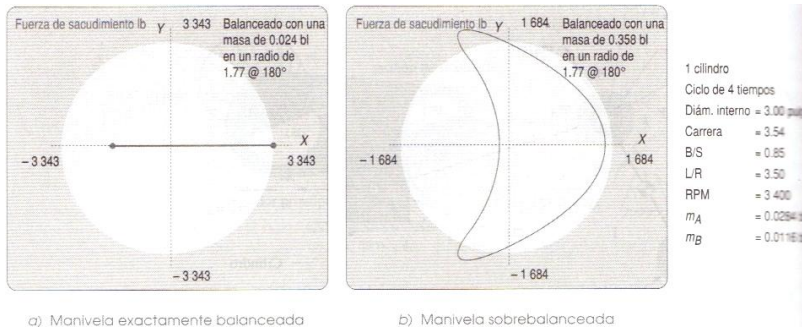


Figura 6.23 Efectos de balanceo y sobrebalanceo sobre fuerzas de sacudimiento en el mecanismo manivela-corredera.

En el motor de un cilindro, no existe manera de eliminar por completo el desbalanceo alternativo con sólo un contrapeso rotatorio, pero si se puede reducir la fuerza de sacudimiento aun más. La figura 6.21 b muestra una cantidad adicional de masa m_p agregada en el contrapeso en el punto A' , (obsérvese que el CG de la manivela ahora se alejó del pivote fijo). Esta masa de balanceo extra crea una fuerza de inercia adicional ($-m_p r \omega^2$) como se muestra, descompuesta en las componentes X y Y de la figura. Ninguna otra fuerza de inercia presente se opone a la componente Y , pero la componente X siempre se opone a la fuerza de inercia recíproca en el punto B . Por tanto, esta masa extra, m_p , que *sobrebalancea la manivela*, reducirá la fuerza de sacudimiento dirigida a lo largo del eje X a expensas de agregar de nuevo alguna fuerza de sacudimiento en la dirección Y . Este es un cambio útil, ya que la fuerza de sacudimiento en general es de menor interés que su magnitud. Las fuerzas de sacudimiento crean vibraciones en la estructura de soporte que son transmitidas y modificadas por ella. Como ejemplo, no es posible definir la dirección de las fuerzas de sacudimiento del motor de una motocicleta con sólo sentir vibraciones resultantes en el manubrio. Pero sí se detectará un incremento de la magnitud de las fuerzas de sacudimiento, por una amplitud mayor de las vibraciones que provocan en el bastidor de la motocicleta.

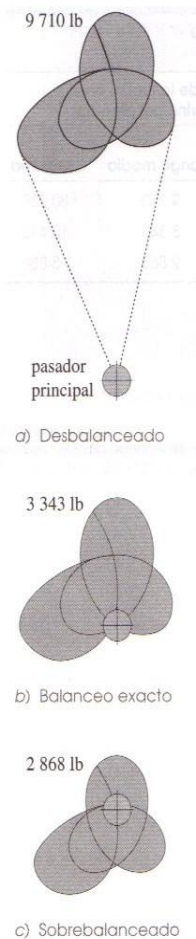


Figura 6.24 Fuerzas sobre el pasador principal a 3400 rpm con diferentes estados de balanceo en la manivela, mostrados a la misma escala

La cantidad de masa de “sobrebalanceo” adicional necesaria para minimizar la fuerza pico de sacudimiento, sin importar su dirección, variara con el diseño del motor particular. En general, lo hará entre un medio y dos tercios de la masa recíproca en el punto B (pistón más biela en el pasador del pistón), si se coloca en el radio de la manivela r . Desde luego, una vez que se determina este producto de masa-radio, se puede lograr con cualquier combinación de masa y radio. La figura 6.23 b muestra la fuerza de sacudimiento mínima lograda para este motor con la adición de 65.5% de la masa en B que actúa en el radio r . La fuerza de sacudimiento se redujo a 1684 lb a 3400rpm, la cual es 17% de su valor desbalanceado original de 9710 lb. Los beneficios de balancear y sobrebalancear en el caso de motor de un solo cilindro, ahora deben ser obvios.

VI.11. EFECTO DEL BALANCEO DEL CIGÜEÑAL EN LAS FUERZAS DE LOS PASADORES.

De las fuerzas en los pasadores, sólo la fuerza del pasador principal es afectada por la adición de masas de balanceo al cigüeñal. Esto se debe a que su ecuación (6.94) es la única de las ecuaciones para fuerzas en los pasadores

(6.86 a 6.94) que involucran masa de la manivela. La tabla 6.3 muestra magnitudes de las fuerzas de sacudimiento y las fuerzas en el pasador principal del ejemplo del motor de un solo cilindro de la figura 6.20 a tres velocidades del motor y en tres condiciones de balanceo: desbalanceado; exactamente balanceado, con una masa de contrapeso igual a la masa total m_A en el pasador de la manivela (figura 6.23 a) y sobrebalanceado, con la masa necesaria para reducir al mínimo la fuerza de sacudimiento (figura 6.23 b). Obsérvese que tanto en el balanceo como en el sobrebalanceo se reduce la fuerza en el pasador principal, aunque en menor grado del provocado por la fuerza de sacudimiento en algunos casos. A velocidad en marcha lenta, la fuerza de gas excede por mucho la fuerza de inercia y, como el balanceo sólo puede afectar a la última, la reducción de la fuerza del pasador principal es menor a la velocidad en marcha lenta que a mayores velocidades del motor. Las fuerzas en el pasador principal en el caso sobrebalanceado se asemejan más a las fuerzas de sacudimiento a la velocidad máxima, donde la fuerza de inercia dominan a las fuerzas del gas. Obsérvese Observe que el sobrebalanceo de la manivela reduce la fuerza en el pasador principal por debajo de la del caso de balanceo exacto a todas las velocidades.

La figura 6.24 muestra el efecto del balanceo y sobrebalanceo sobre las magnitudes y distribución de la fuerza que actúa en el pasador principal. No sólo la fuerza pico desbalanceada en el pasador principal (figura 6.24 a) es tres veces la magnitud del caso exactamente balanceado (figura 6.24 b), sino que las fuerzas en el caso desbalanceado se concentran en una pequeña parte de la circunferencia del pasador. El cigüeñal exactamente balanceado tiene la fuerza que actúa en su pasador principal distribuida en más de la mitad de su circunferencia y el cigüeñal sobrebalanceado concentra la fuerza por completo alrededor de la circunferencia del pasador, como se muestra en la figura 6.24 c.

Tabla 6.3 Efecto de la masa de balanceo de la manivela sobre la fuerza de sacudimiento y en la fuerza del pasador principal.

Modo de balanceo	Magnitud de la fuerza de sacudimiento pico (lb)			Magnitud de la fuerza en el pasador principal pico (lb)		
	Velocidad en marcha lenta	Rango medio	Máxima	Velocidad en marcha lenta	Rango medio	Máxima
Desbalanceado	538	9710	30239	3481	9710	30239
Balanceado exacto	185	3343	10412	4095	3343	10412
Sobrebalanceado	33	1684	5246	3675	2868	5886

Capítulo VII. BALANCEO DE MAQUINAS RECIPROCANES MULTICILINDRICAS.

VII.1. MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA.

Los motores multicilíndricos están diseñados en una amplia variedad de configuraciones, desde la disposición en línea simple hasta disposiciones en V, opuestas y radiales, algunas de las cuales se ilustran en la figura 7.1. Estas disposiciones pueden utilizar cualquiera de los siguientes ciclos. Clerk (dos tiempos), Otto (gasolina cuatro tiempos) o Diesel (cuatro tiempos).

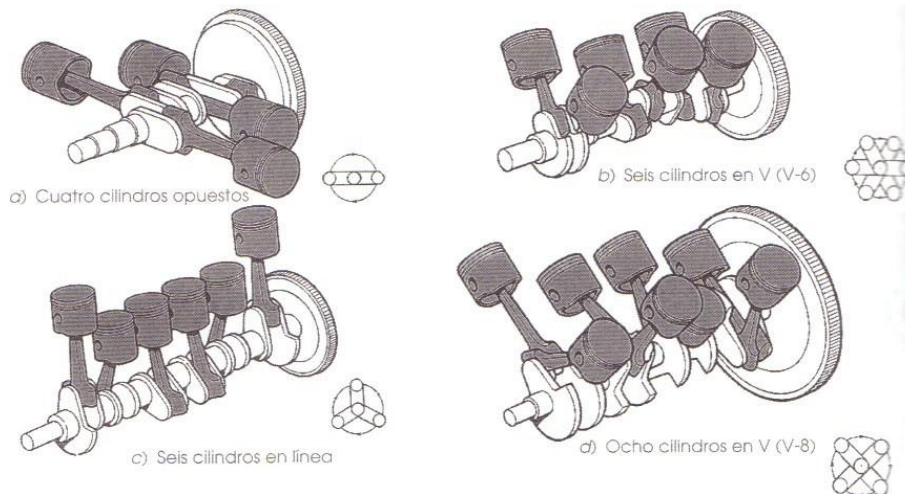


Figura 7.1 Diversas configuraciones de motores multicilíndricos.

VII.2. MOTORES EN LÍNEA.

El arreglo más común y más simple es un motor en línea con todos sus cilindros en un plano común, como se muestra en la figura 7.2. Los motores en línea de dos, tres, cuatro, cinco, seis y ocho cilindros son los más comunes. Cada cilindro tendrá su mecanismo de manivela-corredera individual compuesto de una manivela, biela y un pistón. Las manivelas están formadas juntas en un cigüeñal común, como se muestra en la figura 7.3. Cada manivela de cada cilindro en el cigüeñal se conoce como **codo de cigüeñal**. Estos codos de cigüeñal están dispuestos con cierta relación de ángulo de fase entre ellos con el fin de escalonar los movimientos de los pistones en el tiempo. Del análisis de las fuerzas de sacudimiento y balanceo del capítulo anterior, se desprende que convendrá tener los pistones moviéndose en direcciones opuestas uno con respecto al otro al mismo tiempo, con la finalidad de eliminar fuerzas inerciales recíprocas. Las relaciones de ángulo de fase óptimas entre los codos de cigüeñal diferirán según el número de cilindros y el ciclo de los tiempos del motor. Por lo general habrá una (o un pequeño número de) disposición de los codos de cigüeñal viable para una configuración de motor dada, para lograr este objetivo. La figura 7.2 muestra un motor en línea de cuatro cilindros y ciclo de cuatro tiempos con sus codos de cigüeñal a ángulos de fase 0° , 180° , 180° , 0° que como se verá son los óptimos para este motor. La figura 7.3 muestra el cigüeñal, las bielas y pistones para el mismo diseño de motor de la figura 7.2.

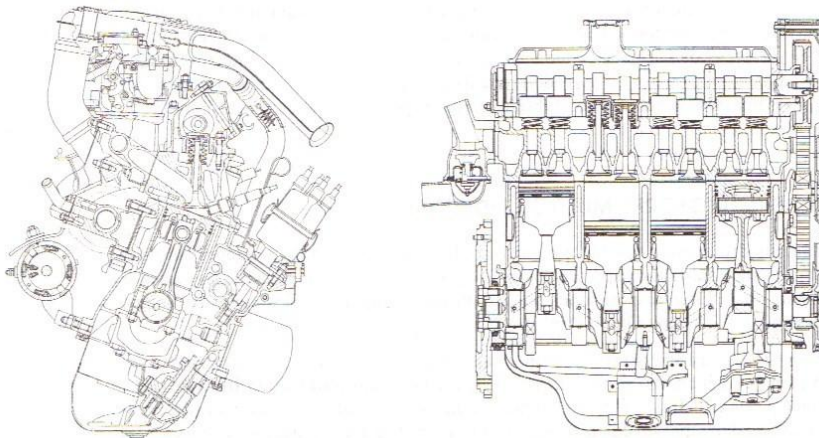


Figura 7.2 Vistas en corte de un motor de cuatro cilindros en línea de cuatro tiempos.

Se debe establecer una convención para la medición de los ángulos de fase, por ejemplo:

1. El primer cilindro (frontal) será el número 1 y su ángulo de fase siempre será cero. Es el cilindro de referencia para todos los demás.
2. Los ángulos de fase de todos los demás cilindros se medirán con respecto al codo del cigüeñal del cilindro 1.
3. Los ángulos de fase se midieron internos al cigüeñal, es decir, con respecto a un sistema coordenado rotatorio insertado en el primer codo del cigüeñal.
4. Los cilindros se numeraran consecutivamente de adelante hacia atrás del motor.

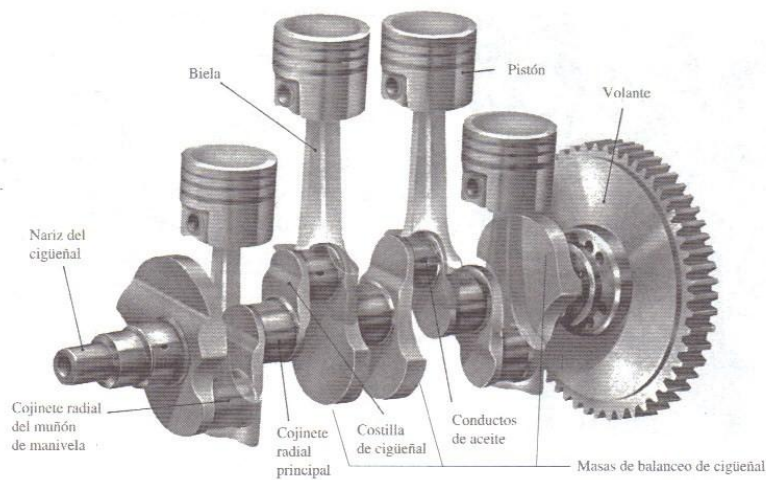


Figura 7.3 Cigüeñal de un motor de cuatro cilindros en línea con pistones, bielas y volante.

VII.2.1. Fuerza de sacudimiento en motores en línea.

Se requiere determinar la fuerza de sacudimiento total que resulta de la disposición de ángulos de fase del cigüeñal elegida. Cada uno de los cilindros contribuirá a la fuerza de sacudimiento total. Es posible superponer sus efectos, si se consideran los cambios de fase, las ecuaciones 6.63 y 6.64 definen la fuerza de sacudimiento de un cilindro cuyo cigüeñal gira a ω constante.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$$F_s \cong \left[m_A(r\omega^2 \cos \omega t) + m_B \left[r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \right] \mathbf{i} + [m_A(r\omega^2 \sin \omega t)] \mathbf{j} \dots\dots\dots 7.1$$

Esta expresión es para una manivela desbalanceada. En motores multicilindros cada codo del cigüeñal está por lo menos contrapesado para eliminar los efectos de la fuerza de sacudimiento de la masa combinada m_A de la manivela y biela que se suponen están concentradas en el muñón de la manivela. La necesidad de sobrebalancear es menor si los ángulos de fase del cigüeñal se disponen de modo que cancelen los efectos de las masas recíprocas en los pasadores del pistón. Este balanceo inherente es posible en motores de tres o más cilindros en línea, pero no en algunos de dos cilindros en línea. En ocasiones, los codos de la manivela en un motor multicilindros inherente balanceado también se deben sobrebalancear para reducir las fuerzas de apoyo en el muñón principal.

Si se añaden masas de balanceo con un producto mr igual a $m_A r_A$ en cada codo del cigüeñal como se muestra en la figura 7.3 Los términos de la ecuación 7.1 que incluyen m_A serán eliminados y la fuerza se reduce a:

$$F_s \cong m_B \left[r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \mathbf{i} \dots\dots\dots 7.2$$

Si todos los cilindros del motor son de igual desplazamiento y todos los pistones y bielas son intercambiables, esto es adecuado tanto para balanceo dinámico como para la reducción de costos de producción. Si se logra que el ángulo ωt de la manivela represente la posición instantánea del codo del cigüeñal de referencia del cilindro 1, las posiciones de referencia de los demás codos pueden definirse por sus ángulos de fase como se muestra en la figura 7.4,

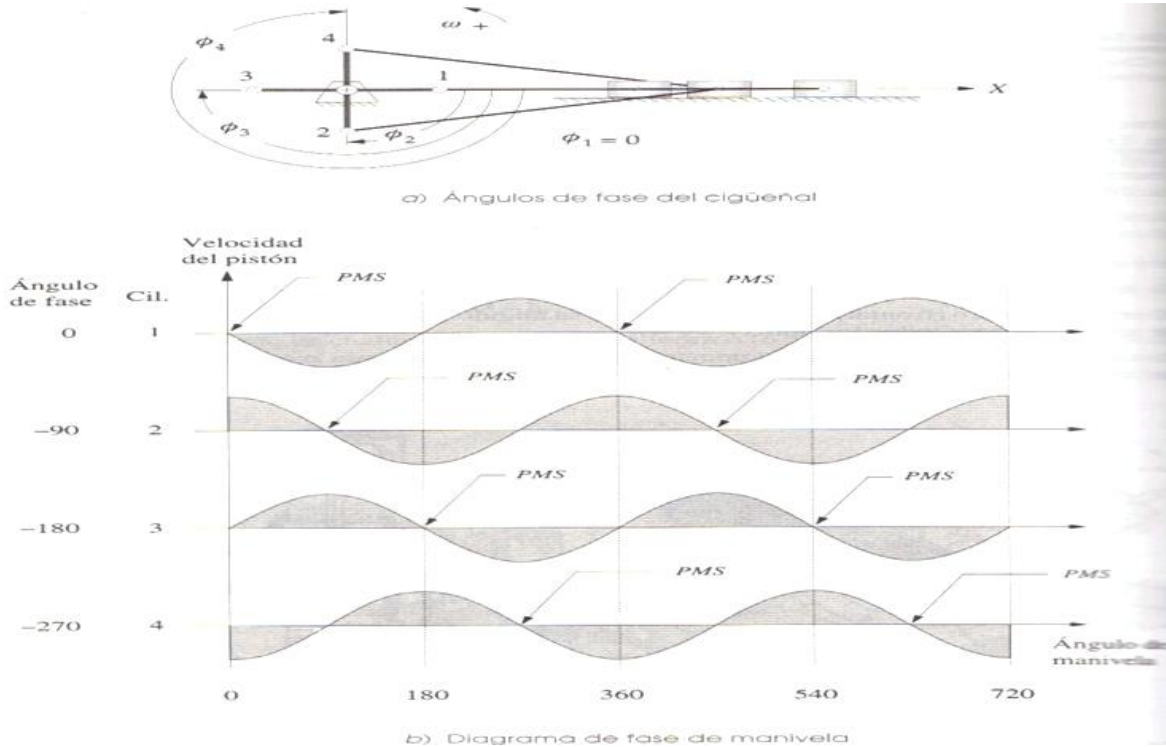


Figura 7.4 Anglos de fase de manivela y diagrama de fase.

La Fuerza de sacudimiento total en motores multicilndros en línea es:

$$F_s \cong m_B r \omega^2 \sum_{i=1}^n \left[\cos(\omega t - \phi_i) + \frac{r}{l} \cos 2(\omega t - \phi_i) \right] i \dots\dots\dots 7.3$$

Donde n = número de cilindros y $\phi_1 = 0$. Al sustituir la identidad:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Y factorizar se obtiene:

$$F_s \cong m_B r \omega^2 \left[\cos \omega t \sum_{i=1}^n \cos \phi_i + \sin \omega t \sum_{i=1}^n \sin \phi_i + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i + \sin 2\omega t \sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i) \right] i \dots\dots\dots 7.4$$

El valor ideal para la fuerza de sacudimiento es cero. Esta expresión sólo puede ser cero para todos los valores de ωt si:

$$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0 \dots\dots\dots 7.5$$

$$\sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i = 0 \dots\dots\dots 7.6$$

El cálculo en un ejemplo de un motor de cuatro cilindros con ángulos de fase de $\phi_1 = 0^\circ, \phi_2 = 90^\circ, \phi_3 = 180^\circ$ y $\phi_4 = 270^\circ$ muestra que las fuerzas de sacudimiento son cero para la primera segunda y sexta armónica, y diferentes de cero para la cuarta armónica, por lo tanto la elección de éste demostró ser adecuada en lo referente a fuerzas de sacudimiento, Como se demostró en el capítulo anterior, los coeficientes de los términos de la cuarta y sexta armónicas son mínimos, así que sus contribuciones, si las hay pueden ignorarse observese la tabla 7.1.. La componente principal es de mayor interés, debido a su magnitud potencial. El término secundario (segunda armónica) es menos crítico que el primario, ya que se multiplica por r/l , que en general es menor que 1/3. Una armónica secundaria desbalanceada de la fuerza de sacudimiento no es apropiada, pero puede aceptarse si el motor es de pequeño desplazamiento (menor a 1/2 litro por cilindro).

Tabla 7.1 Estado de balanceo de fuerzas de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0,90,180,270°

Fuerzas primarias	$\sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0$
Fuerzas secundarias	$\sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i = 0$
Fuerzas de la cuarta armónica	$\sum_{i=1}^n \sin 4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos 4\phi_i = 4$
Fuerzas de la sexta armónica	$\sum_{i=1}^n \sin 6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos 6\phi_i = 0$

VII.2.2 Par de torsión de inercia en motores en línea.

El par de torsión en motores en línea de un solo cilindro se ha definido en la ecuación 6.68. Es necesario reducir este par de torsión de inercia, de preferencia a cero, ya que se combina con el par de torsión del gas para formar el par de torsión total. El par de torsión de inercia no agrega nada al par de torsión motriz neto, ya que su valor promedio siempre es cero, pero si produce grandes oscilaciones en el par de torsión total que perturban su uniformidad. Las oscilaciones

producidas por el par de torsión de inercia pueden encubrirse hasta cierto punto con la adición de un volante suficiente al sistema, o en su efecto externo neto puede cancelarse con la elección apropiada de los ángulos de fase. Sin embargo, las oscilaciones creadas por el par de torsión, aun si están ocultas para un observador externo, o se hace que sumen cero siguen presentes en el cigüeñal y pueden conducir a fallas por fatiga torsional si la pieza no está apropiadamente diseñada. La ecuación para el par de torsión de inercia de un cilindro con tres armónicas es:

$$T_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l} \sin \omega t - \sin 2\omega t - \frac{3r}{2l} \sin 3\omega t \right) k \dots\dots\dots 7.7$$

Al sumar para todos los cilindros e incluir sus ángulos de fase:

$$T_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{r}{2l} \sin(\omega t - \phi_i) - \sin 2(\omega t - \phi_i) - \frac{3r}{2l} \sin 3(\omega t - \phi_i) \right] k \dots\dots\dots 7.8$$

Al sustituir la identidad: $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Al factorizar se tiene:

$$T_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\frac{r}{2l} (\sin \omega t \sum_{i=1}^n \cos \phi_i - \cos \omega t \sum_{i=1}^n \sin \phi_i) - (\sin 2\omega t \sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i - \cos 2\omega t \sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i) - \frac{3r}{2l} (\sin 3\omega t \sum_{i=1}^n \cos 3\phi_i - \cos 3\omega t \sum_{i=1}^n \sin 3\phi_i) \right] k \dots\dots\dots 7.9$$

que sólo puede ser cero para todos los valores de ωt si:

$$\sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0 \dots\dots\dots 7.10$$

$$\sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i = 0 \dots\dots\dots 7.11$$

$$\sum_{i=1}^n \sin 3\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \cos 3\phi_i = 0 \dots\dots\dots 7.12$$

Estas ecuaciones 7.10 a 7.12 predicen el comportamiento del par de torsión de inercia de cualquier diseño del motor en línea propuesto. El cálculo para el ejemplo de un motor de cuatro cilindros con ángulos de fase $\Phi_1 = 0^\circ$, $\Phi_2 = 90^\circ$, $\Phi_3 = 180^\circ$ y $\Phi_4 = 270^\circ$ muestra que las componentes del par de torsión de inercia son cero para la primera, segunda y tercera armónicas. Así que el ejemplo también es bueno con respecto a los pares de torsión de inercia.

VII.2.3.Momento de sacudimiento en motores en línea.

Se puede considerar que el motor de un solo cilindro es un dispositivo en un solo plano, o bidimensional, y por tanto puede balancearse estáticamente. El motor multicilindros es tridimensional. Sus múltiples cilindros se distribuyen a lo largo del cigüeñal. Aunque es posible cancelar las fuerzas de sacudimiento, aun puede haber momentos desbalanceados en el plano del bloque del motor. Se deben aplicar criterios de balanceo dinámico. La figura 7.5 muestra el esquema de un motor de cuatro cilindros en línea con ángulos de fase de $\Phi_1 = 0^\circ$, $\Phi_2 = 90^\circ$, $\Phi_3 = 180^\circ$ y $\Phi_4 = 270^\circ$. El espacio entre los cilindros normalmente es uniforme. Puede sumarse los momentos en el plano de los cilindros con respecto a cualquier punto conveniente, tal como L en la línea de centros del primer cilindro.

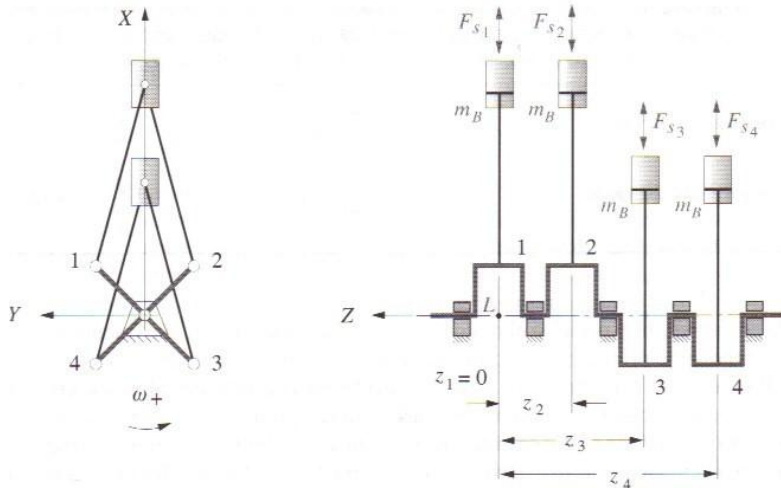


Figura 7.5 Brazos del momento de sacudimiento.

$$\sum M_L = \sum_{i=1}^n z_i F_{si} j \dots \dots \dots 7.13$$

Donde F_{si} es la fuerza de sacudimiento y z_i es el brazo del momento del i -ésimo cilindro. Al sustituir la fuerza de sacudimiento de la ecuación 7.4 en lugar de F_{si} se tiene:

$$\sum M_L \cong m_B r \omega^2 \left[\cos \omega t \sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i + \sin \omega t \sum_{i=1}^n z_i \sin \phi_i + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sum_{i=1}^n z_i \cos 2\phi_i + \sin 2\omega t \sum_{i=1}^n z_i \sin 2\phi_i) \right] j \dots \dots \dots 7.14$$

Esta expresión sólo puede ser cero para todos los valores de ωt si:

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n z_i \sin \phi_i = 0 \dots \dots \dots 7.15$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos 2\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n z_i \sin 2\phi_i = 0 \dots \dots \dots 7.16$$

Esto garantiza que no hay momentos de sacudimiento hasta el segundo armónico, pudiéndose ampliar para armónicas superiores

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos 4\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n z_i \sin 4\phi_i = 0 \dots \dots \dots 7.17$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos 6\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n z_i \sin 6\phi_i = 0 \dots \dots \dots 7.18$$

Se puede observar que tanto la suma del seno como la del coseno de cualquier múltiplo de ángulos de fase deben ser cero para que esta armónica del momento de sacudimiento sea cero. El cálculo en el caso de un motor de 4 cilindros con ángulos de fase de $\Phi_1 = 0^\circ$, $\Phi_2 = 90^\circ$, $\Phi_3 = 180^\circ$ y $\Phi_4 = 270^\circ$ y un espaciado entre los cilindros supuesta una unidad de longitud ($z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$) en la tabla 7.2 muestra que los momentos de sacudimiento no son cero con cualquiera de estas armónicas. Por lo tanto, la elección de los ángulos de fase, que es buena para fuerzas y pares de torsión de sacudimiento no pasa la prueba para momento de sacudimiento cero. Los coeficientes de la cuarta y sexta armónicas en las ecuaciones de momento son mínimos, de modo que pueden ignorarse. El termino secundario (segunda armónica) es menos crítico que el primario ya que se multiplica por r/l . Una armónica secundaria de momento de sacudimiento desbalanceado no es apropiada, sin embargo puede aceptarse, en especial si el motor es de desplazamiento pequeño (menor de 1/2 litro por cilindro). El componente primario es de interés primordial debido a su magnitud. No es apropiado un gran momento de sacudimiento, pues ocasionara que el motor

cabeceee hacia adelante o hacia atrás debido a que el momento oscila de positivo a negativo en el plano de los cilindros. *No se debe confundirse este momento de sacudimiento con el par de torsión de sacudimiento que actúa para **hacer rodar** el motor hacia adelante y hacia atrás con respecto al eje **Z** del cigüeñal.*

Tabla 7.2 Estado de balanceo de momentos de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0,90,180,270° y $z_1=0, z_2=1, z_3=2, z_4=3$

Momentos primarios	$\sum_{i=1}^n z_i \sin \phi_i = -2$	$\sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i = -2$
Momentos secundarios	$\sum_{i=1}^n z_i \sin 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cos 2\phi_i = -2$

VII.2.4 Encendido uniforme.

Las fuerzas, pares y momentos inerciales son sólo un conjunto de criterios que se deben considerar en el diseño de motores multicilindros. Las consideraciones sobre el par de torsión y fuerza del gas son igualmente importantes. En general debe crearse un patrón de encendido entre los cilindros uniformemente espaciados en el tiempo. Si los cilindros encienden de forma desigual se crearán vibraciones molestas. Es preferible la uniformidad de los pulsos de potencia. Los pulsos de potencia dependen del ciclo de tiempo. Si el motor es de dos tiempos, habrá un pulso de potencia por revolución en cada uno de sus n cilindros. El ángulo de fase delta óptimo entre los codos del cigüeñal de los cilindros para que el pulso de potencia sea uniformemente espaciado será entonces:

$$\Delta\phi_{dos\ tiempos} = \frac{360^\circ}{n} \dots\dots 7.19$$

En un motor de cuatro tiempos habrá un pulso de potencia en cada cilindro cada dos revoluciones. El ángulo de fase óptimo para los codos del cigüeñal para que los pulsos de potencia ocurran uniformemente espaciados será entonces:

$$\Delta\phi_{cuatro\ tiempos} = \frac{720^\circ}{n} \dots\dots 7.20$$

Un motor de de dos tiempos puede tener tanto un encendido uniforme como un balanceo de inercia, pero uno de cuatro tiempos enfrenta un problema entre ambos criterios, por lo tanto es necesario realizar algunos ajustes de diseño para obtener el mejor compromiso entre estos factores en el caso del motor de cuatro tiempos.

VII.2.5.Motor de dos tiempos.

La figura 7.6 muestra los pulsos de potencia de un **motor de cuatro cilindros con un motor de dos tiempos** con la configuración de ángulo de fase $\Phi_i = 0, 90, 180, 270^\circ$. Observe que cada bloque negativo del cilindro en la figura está desplazado a la derecha en su ángulo de fase con respecto al cilindro 1. Como se puede observar sólo los bloques negativos que aparecen en el diagrama están disponibles para pulsos de potencia, ya que representan la carrera descendente del pistón. Por convención, el cilindro 1 enciende primero, por lo que su bloque negativo en 0° se llama **potencia**. Los demás cilindros pueden encenderse en cualquier orden, pero sus pulsos de potencia deben estar tan uniformemente espaciados como sea posible durante el intervalo.

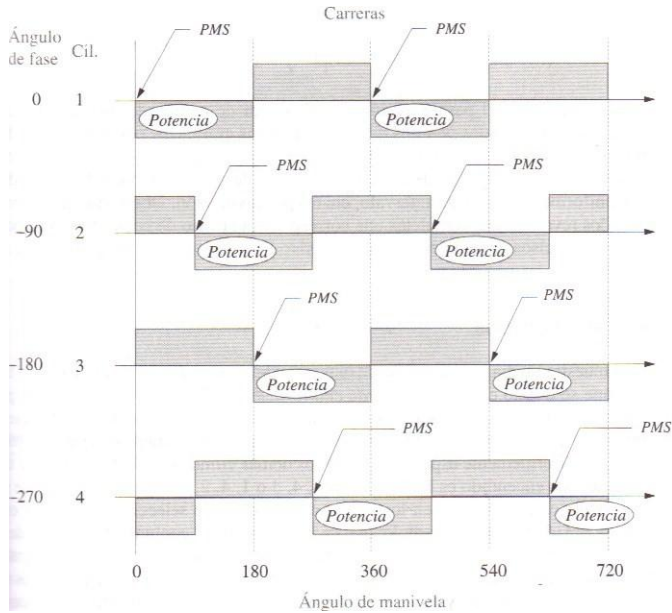


Figura 7.6 Diagrama de fase de manivela de un motor de cuatro cilindros en línea con $\Phi_i = 0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

Los ángulos de fase del cigüeñal dictan los espaciamientos de los pulsos de potencia disponibles. Puede existir más de un orden de encendido que produzca un encendido uniforme, sobre todo con un número mayor de cilindros. En este ejemplo simple el orden de encendido es 1, 2, 3, 4 funcionara ya que proporciona pulsos de potencia sucesivos cada 90° a través del intervalo. Los **ángulos de carrera de potencia Ψ_i** son los ángulos en el ciclo a los cuales encienden los cilindros y están definidos por los ángulos de fase del cigüeñal y la elección del orden de encendido en conjunto, para este ejemplo son $\Psi_i = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. En general, los Ψ_i no son iguales a Φ_i , en este caso, su correspondencia con los ángulos de fase se deriva de la elección del orden de encendido consecutivo 1, 2, 3, 4.

Para un **motor de dos tiempos** los ángulos de carrera de potencia Ψ_i deben estar entre 0 y 360° . Siempre deben estar uniformemente espaciados en este intervalo con un ángulo de carrera de potencia delta definido por la ecuación 7.21. Para el motor de dos tiempos de cuatro cilindros, los ángulos de carrera de potencia ideales son entonces $\Psi_i = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ que corresponden a los del ejemplo.

El **ángulo de carrera de potencia delta** se define de manera diferente para cada ciclo. Para el motor de dos tiempos está dado por:

$$\Delta\Psi_{\text{dos tiempos}} = \frac{360^\circ}{n} \dots\dots 7.21$$

Para el motor de cuatro tiempos:

$$\Delta\Psi_{\text{cuatro tiempos}} = \frac{720^\circ}{n} \dots\dots 7.22$$

El par de torsión del gas para un motor de un cilindro se definió en la ecuación 6.40. El par de torsión del gas combinado de todos los cilindros debe ser la suma de las contribuciones de los n cilindros con cada fase desplazada en su ángulo de carrera de potencia Ψ_i :

$$T_{g21} = F_g r \sum_{i=1}^n \left\{ \sin(\omega t - \Psi_i) \left[1 + \frac{r}{l} \cos(\omega t - \Psi_i) \right] \right\} k \dots \dots \dots 7.23$$

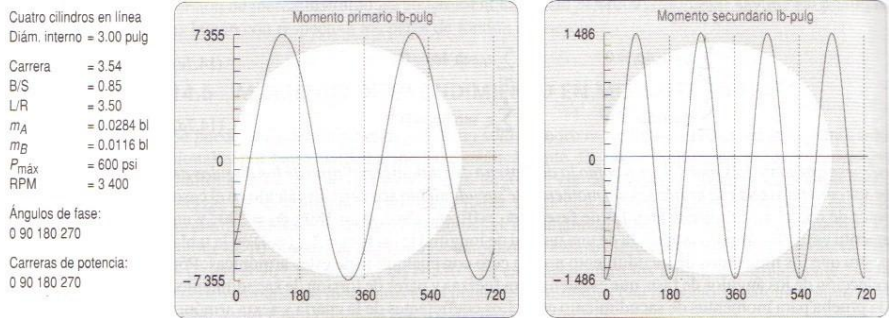


Figura 7.7 Momentos primarios y secundarios en el motor de cuatro cilindros con cigüeñal 0°, 90°, 180° y 270°.

La figura 7.8 muestra el par de torsión del gas, el par de torsión de inercia y la fuerza de sacudimiento de este motor de dos tiempos de cuatro cilindros. Las componentes del momento de sacudimiento se muestran en la figura 7.7. La fuerza y el par de torsión de inercia son cero, lo cual es ideal. El par de torsión del gas se compone de pulsos de forma y separaciones uniformes a través del intervalo cuatro por revolución.

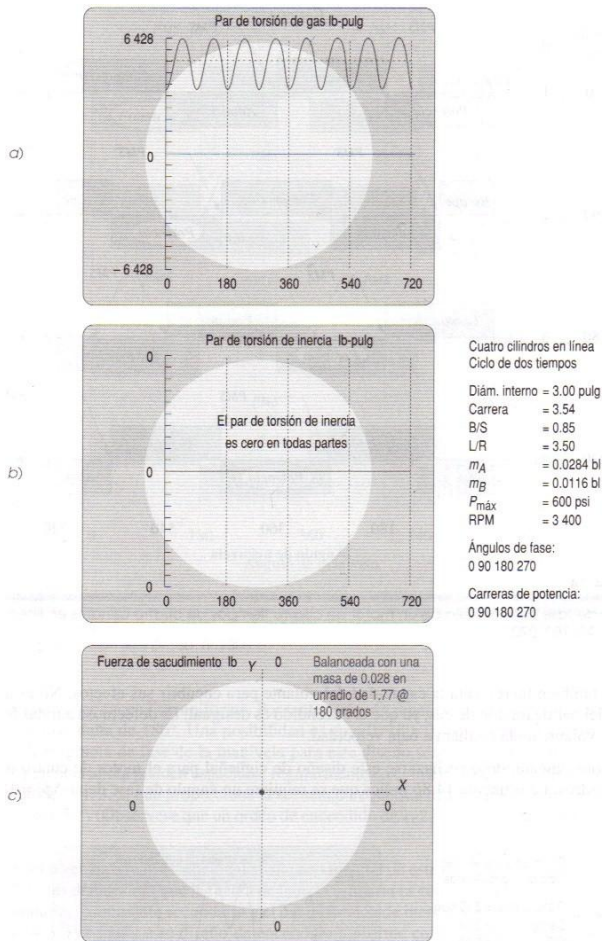


Figura 7.8 Par de torsión y fuerza de sacudimiento en el motor de dos tiempos de cuatro cilindros en línea.

VII.2.5 Motor de cuatro tiempos.

La figura 7.9 muestra un diagrama de fases de la manivela del *mismo diseño de cigüeñal* de la figura 7.6, excepto que se diseñó como un *motor de cuatro tiempos*. Sólo hay una carrera de potencia cada 720° para cada cilindro. El segundo bloque negativo para cada cilindro debe utilizarse para la carrera de admisión. De nuevo el cilindro 1 enciende primero. Se requiere también un patrón de pulsos de potencia uniformemente espaciados entre los demás cilindros, que no es posible con este cigüeñal. Si el orden de encendido es 1, 3, 4, 2 o 1, 2, 4, 3 o 1, 4, 2, 3 o cualquier otro que se elija, habrá tantos espacios como traslapes en los pulsos de potencia. Se selecciona el primer orden de encendido ilustrado 1, 3, 4, 2 para este ejemplo, que da por resultado el conjunto de ángulos de carrera de potencia $\Psi_i = 0^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 450^\circ$. Estos **ángulos de carrera de potencia** definen los puntos en el **ciclo de 720°** donde se enciende cada cilindro. Por tanto, en un motor de cuatro tiempos, los ángulos de carrera de potencia Ψ_i deben estar entre 0 y 720° . Deben estar uniformemente espaciados en ese intervalo con un ángulo delta definido por la ecuación 7.21. Para el motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros, los ángulos de carrera de potencia ideales serían $\Psi_i = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ$. Esto no se ha logrado para este ejemplo. La figura 7.10 muestra el par de torsión resultante del gas.

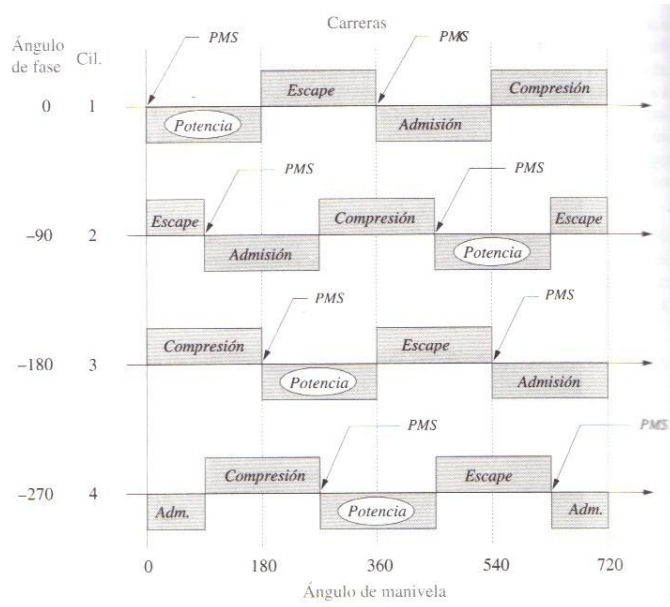


Figura 7.9 Diagrama de fase de manivela de un motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros en línea con $\Phi_i = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

El encendido desigual en la figura 7.10 es obvio. Este par de torsión de gas desigual será percibido por el operador de cualquier vehículo con este tipo de motor como un funcionamiento esperado y con vibración, en especial a velocidad en marcha. A velocidades más altas del motor, el volante tenderá a encubrir esta vibración, pero los volantes son ineficaces a bajas velocidades. Lo anterior provoca que la mayoría de los diseñadores de motores favorezcan el encendido uniforme sobre la eliminación de los efectos de inercia, en su selección de ángulo de fase del cigüeñal. Las fuerzas, pares de torsión y momentos de inercia son funciones de la velocidad del motor al cuadrado. Sin embargo, conforme la velocidad del motor incrementa la magnitud de estos factores, la velocidad también incrementa la capacidad del volante para encubrir sus efectos. No es así con la aspereza del par de torsión del gas, ya que el encendido es desigual. Es defectuosa a todas las velocidades y el volante no la ocultará a baja velocidad.

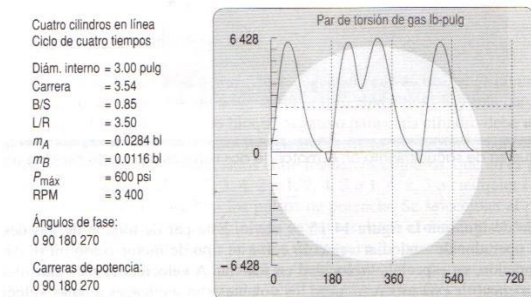


Figura 7.10 Motor de cuatro cilindros en línea de cuatro tiempos con encendido desigual y cigüeñal de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

Por consiguiente, debe rechazarse este diseño de cigüeñal para el motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros. La ecuación 7.19 indica que se requiere un ángulo de fase delta $\Delta\Phi_i = 180^\circ$ en el cigüeñal para obtener un encendido uniforme. Por lo tanto, deberán repetirse algunos ángulos si se emplea un ángulo de fase delta de 180° . Una posibilidad es $\Phi_i = 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ$ para los cuatro

codos del cigüeñal. El diagrama de fase de la manivela para este diseño se muestra en la figura 7.11. Las carreras de potencia ahora pueden espaciarse regularmente en el intervalo de 720°. Si se elige un orden de encendido 1, 4, 3, 2, que proporciona la secuencia requerida de ángulos de carrera de potencia $\Psi_i = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ$ (observe que un orden de encendido de 1, 2, 3, 4 sería otra resultante con este motor).

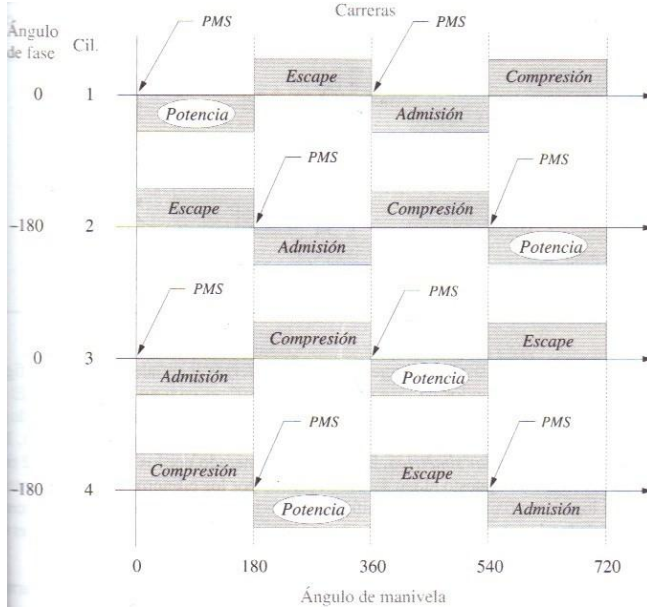


Figura 7.11 Diagrama de fase de manivela de un motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros en línea con $\Phi_i = 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ$.

Ahora debe verificarse la condición de balanceo inercial de este diseño con las ecuaciones 7.5, 7.6, 7.10, 7.11, 7.12, 7.15, y 7.16. Estas demuestran que la fuerza de inercia primaria es cero, pero el momento primario, la fuerza secundaria, el momento secundario y el par de torsión de inercia no son cero, como se muestra en la tabla 7.3. Por lo tanto, este diseño de encendido uniforme compromete el estado de balanceo inercial del diseño previo para lograr un encendido uniforme. Las variaciones del par de torsión de inercia pueden ocultarse mediante un volante. Las fuerzas y momentos secundarios son relativamente pequeños en un motor pequeño y pueden aceptarse. El momento primario que no es cero es un detalle que debe atenderse. Para ver los resultados de esta configuración de motor.

Tabla 7.3 Estado de balanceo de fuerzas y momentos de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de $0, 180, 0, 180^\circ$ y $z_1=0, z_2=1, z_3=2, z_4=3$

Fuerzas primarias	$\sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0$
Fuerzas secundarias	$\sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i = 4$
Momentos primarios	$\sum_{i=1}^n z_i \sin \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i = -2$
Momentos secundarios	$\sum_{i=1}^n z_i \sin 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i = 6$

Existe una forma de contrarrestar un momento de desbalanceo con la adición de ejes balanceados, pero existe un método más directo disponible en este ejemplo. La figura 7.12 muestra que el

momento de sacudimiento, se debe a la acción de fuerzas de inercia de los cilindros individuales que actúan con brazos de palanca con respecto a algún centro. Si se considera que ese centro es el punto C en medio del motor, deberá ser aparente que cualquier diseño de cigüeñal con fuerzas primarias balanceadas, que sea un espejo simétrico con respecto a un plano transversal que pasa por el punto C, también presentara momentos primarios balanceados, en tanto todos los espaciamientos entre cilindros sean uniformes y todas las fuerzas inerciales iguales. La figura 7.12 a muestra el cigüeñal con ángulos de fase $0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ$, el cual no es simétrico. El par $F_{s1}\Delta z$ creado por los cilindros 1 y 2 tiene la misma magnitud, y sentido que el par $F_{s3}\Delta z$ creado por los cilindros 3 y 4, por lo que se suman. La figura 7.12 b muestra el cigüeñal con ángulos de fase $0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$, que es una *imagen especular simétrica*. El par $F_{s1}\Delta x$ generado por los cilindros 1 y 2 tiene la misma magnitud pero sentido opuesto al par $F_{s3}\Delta x$ generado por los cilindros 3 y 4, por tanto, se cancelan. Es posible lograr tanto un encendido uniforme como momentos primarios de balanceo al cambiar la secuencia de los ángulos de fase del codo del cigüeñal a $\Phi_i = 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$, el cual es una *imagen especular simétrica*.

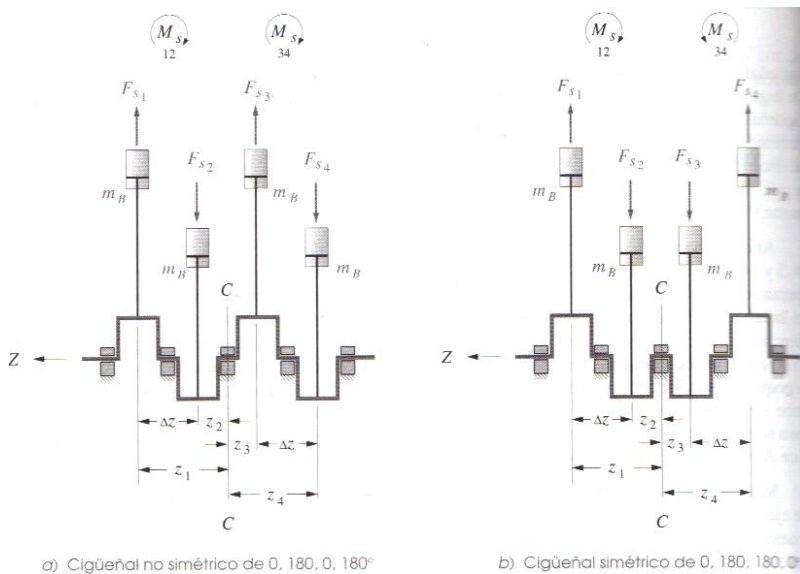


Figura 7.12 Los cigüeñales simétricos especulares cancelan los momentos primarios.

El diagrama de fase de la manivela para este diseño se muestra en la figura 7.13. Las carreras de potencia aun pueden estar uniformemente espaciadas en el intervalo de 720° . Si se eligió un orden de encendido de 1, 3, 4, 2, que proporcionan la misma secuencia deseada de ángulos de carrera de potencia, $\Psi_i = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ$. (obsérvese que el orden de encendido de 1, 2, 4, 3 también funcionaría en este motor). Las ecuaciones 7.5, 7.6, 7.10, 7.11, 7.12, 7.15, y 7.16, así como la tabla 7.4 muestran que la fuerza de inercia primaria y el momento primario ahora son cero, pero la fuerza secundaria, el momento secundario y el par de torsión de inercia aun son distintos de cero.

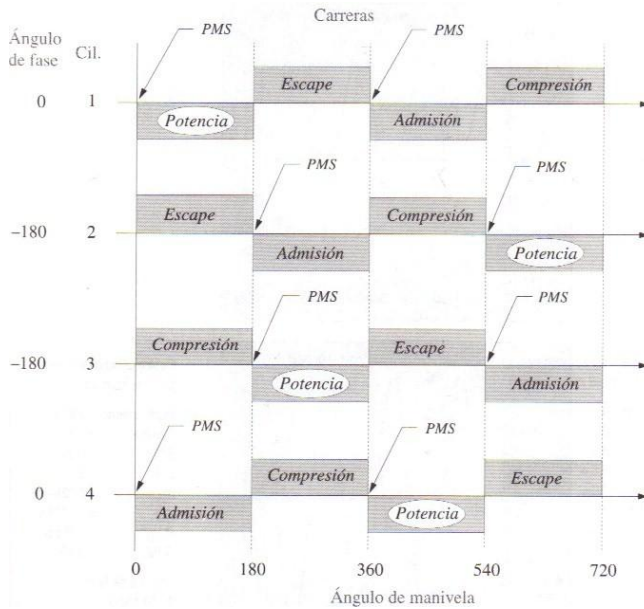


Figura 7.13 Diagrama de fases del cigüeñal de un motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros con encendido uniforme y cigüeñal simétrico especular de 0°, 180°, 180°, 0°.

Este cigüeñal $\Phi_i = 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ se considera como el mejor diseño y se utiliza universalmente en la producción de motores de cuatro tiempos y cuatro cilindros en línea. Las figuras 7.2 y 7.3 muestran tal diseño de un motor de cuatro cilindros. El balanceo de inercia se sacrifica para ganar un encendido uniforme por las razones antes citadas. La figura 7.14 muestra el par de torsión del gas, el par de torsión de inercia y el par de torsión total para este diseño. La figura 7.15 muestra el momento de sacudimiento secundario, la componente de fuerzas de sacudimiento secundaria y una curva polar de fuerzas de sacudimiento total para el diseño. Obsérvese que las figuras 7.15 b y c son simplemente vistas diferentes del mismo parámetro. La curva polar de la fuerza de sacudimiento en la figura 7.15 c es una vista de la fuerza de sacudimiento vista hacia el extremo del eje del cigüeñal con el movimiento del pistón horizontal. La curva cartesiana en la figura 7.15 b muestra la misma fuerza en el eje del tiempo, como la componente primaria es cero, esta fuerza total se debe sólo a la componente secundaria.

Tabla 7.4 Estado de balanceo de fuerzas y momentos de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0,180, 180,0° y $z_1=0, z_2=1, z_3=2, z_4=3$

Fuerzas primarias	$\sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0$
Fuerzas secundarias	$\sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i = 4$
Momentos primarios	$\sum_{i=1}^n z_i \sin \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i = 0$
Momentos secundarios	$\sum_{i=1}^n z_i \sin 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cos \phi_i = 6$

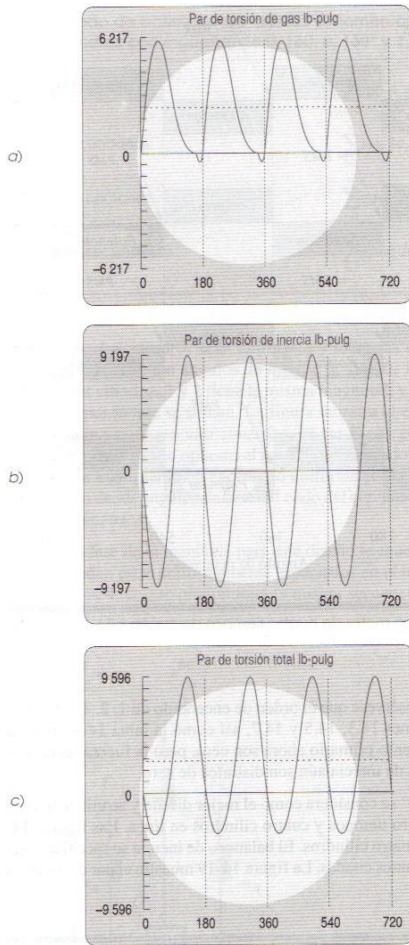


Figura 7.14 Par de torsión en el motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros en línea con cigüeñal $0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$.

Cuatro cilindros en línea
Ciclo de cuatro ciclos
Diám. interno = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50
 $m_A = 0.0284$ lb
 $m_B = 0.0116$ lb
 $P_{m\acute{a}x} = 600$ psi
RPM = 3 400
Ángulos de fase:
0 180 180 0
Carreras de potencia:
0 180 360 540

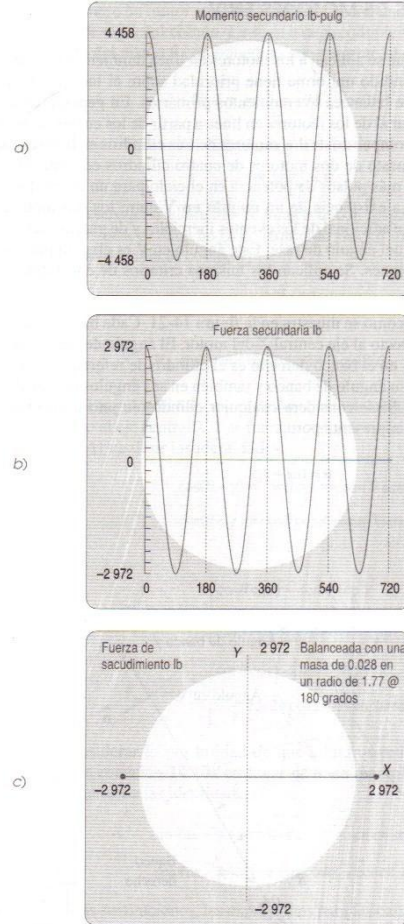


Figura 7.15 Fuerzas y momentos de sacudimiento en el motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros con cigüeñal de $0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$.

Cuatro cilindros en línea
Ciclo de cuatro tiempos
Diám. interno = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50
 $m_A = 0.0284$ lb
 $m_B = 0.0116$ lb
 $P_{m\acute{a}x} = 600$ psi
RPM = 3 400
Ángulos de fase:
0 180 180 0
Carreras de potencia:
0 180 360 540

VII.3 CONFIGURACIÓN DE MOTORES EN V.

Los mismos principios de diseño que se aplican a los motores en línea también se aplican a las configuraciones en **V** y opuestas. El encendido uniforme tiene prioridad sobre el balanceo de inercia y la simetría de espejo del cigüeñal que balancea los momentos primarios. En general, un motor en **V** tendrá un balanceo de inercia similar al de los motores en línea, a partir de los cuales se constituye. Un motor **V-6** es en esencia un motor compuesto de dos motores de tres cilindros en línea en un cigüeñal común un **V-8** es un motor compuesto de dos motores de cuatro cilindros en línea, etc. El mayor número de cilindros permite tener más pulsos de potencia en el ciclo para un par de torsión de del gas más suave (y promedio mayor) . La existencia **del ángulo en V** entre los dos motores en línea introduce un desplazamiento de fase adicional de los eventos iniciales y de gas, la cual es análoga, pero independiente de los efectos del ángulo de fase. Este ángulo en **V** es elegido por el diseñador pero existen buenas y malas elecciones. Se aplican los mismos criterios de encendido uniforme y balanceo de inercia a su elección.

El **ángulo en v** = 2γ se define como se muestra en la figura 7.16. Cada banco esta descentrado por su ángulo de banco γ con respecto al eje central **X** del motor. El ángulo de manivela ωt se mide con respecto al eje **X**. El cilindro 1 en el banco derecho es el cilindro de referencia. Los eventos en

cada banco ocurren desfasados en su ángulo de banco y también en sus ángulos de fase del cigüeñal. Ambos desfasos se superpondrán. Si se considera cualquier cilindro en uno u otro banco, su ángulo de manivela instantáneo se representa por:

$$\theta = (\omega t - \phi_i) \dots \dots \dots 7.24$$

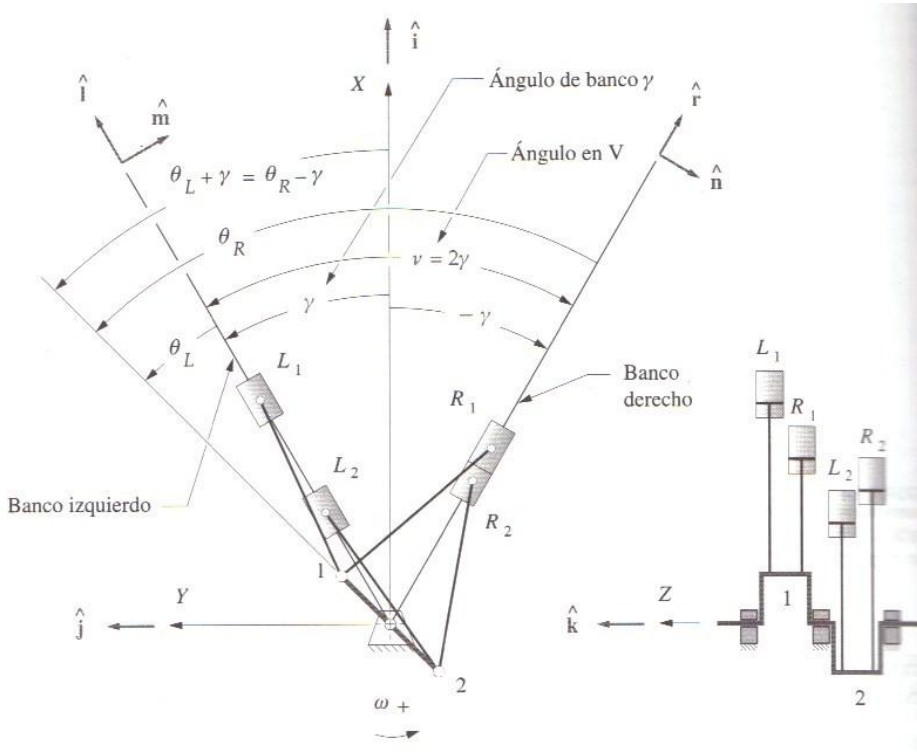


Figura 7.16 Geometría de un motor en V.

VII.3.1 Fuerza de sacudimiento en motores en V.

Considérese primero un motor en V de dos cilindros con un cilindro en cada banco donde ambos comparten un codo de cigüeñal común

La fuerza de sacudimiento para un solo cilindro en la dirección de movimiento del pistón \$\hat{u}\$ con \$\theta\$ medido con respecto al eje del pistón es:

$$F_s \cong m_B r \omega^2 (\cos \theta + \frac{r}{l} \cos 2\theta) \hat{u} \dots \dots \dots 7.25$$

La fuerza de sacudimiento total es la suma vectorial de las contribuciones de cada banco:

$$F_s = F_{sL} + F_{sR} \dots \dots \dots 7.26$$

Ahora se desea considerar el ángulo de manivela con respecto al eje central X. Las fuerzas de sacudimiento para los bancos derecho (R) e izquierdo (L) en los planos de los bancos de cilindros respectivos, se expresan entonces como:

$$F_{SR} \cong m_B r \omega^2 \left[\cos(\theta + \gamma) + \frac{r}{l} \cos 2(\theta + \gamma) \right] \hat{r} \dots\dots 7.27$$

$$F_{SL} \cong m_B r \omega^2 \left[\cos(\theta - \gamma) + \frac{r}{l} \cos 2(\theta - \gamma) \right] \hat{l} \dots\dots 7.28$$

Obsérvese que el ángulo γ del banco se suma o resta del ángulo de manivela para cada banco de cilindros con respecto al eje central \mathbf{X} . Las fuerzas continúan dirigidas a lo largo de los planos de los bancos de cilindro. Al sustituir las identidades:

$$\cos(\theta + \gamma) = \cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma$$

$$\cos(\theta - \gamma) = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma$$

Se obtiene

$$F_{SR} \cong m_B r \omega^2 \left[\cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma + \frac{r}{l} (\cos 2\theta \cos 2\gamma - \sin 2\theta \sin 2\gamma) \right] \hat{r} \dots\dots 7.29$$

$$F_{SL} \cong m_B r \omega^2 \left[\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma + \frac{r}{l} (\cos 2\theta \cos 2\gamma + \sin 2\theta \sin 2\gamma) \right] \hat{l} \dots\dots 7.30$$

Ahora para considerar la posibilidad de que cilindros múltiples se desfasen dentro de cada banco, se sustituye la ecuación 7.24 en lugar de θ , se reemplazan las sumas de los términos de ángulo con los productos de las identidades:

$$\cos(\omega t - \phi_i) = (\cos \omega t \cos \phi_i + \sin \omega t \sin \phi_i)$$

$$\sin(\omega t - \phi_i) = (\sin \omega t \cos \phi_i - \cos \omega t \sin \phi_i)$$

Después de varias sustituciones, las expresiones para las contribuciones de los bancos derecho e izquierdo se reducen a:

Para el banco derecho:

$$F_{SR} \cong m_B r \omega^2 \left[\begin{aligned} & (\cos \omega t \cos \gamma - \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \cos \phi_i + (\cos \omega t \sin \gamma + \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \sin \phi_i \\ & + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma - \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \cos 2\phi_i + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma + \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{r} \dots\dots 7.31$$

Para el lado izquierdo:

$$F_{SL} \cong m_B r \omega^2 \left[\begin{aligned} & (\cos \omega t \cos \gamma + \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos \phi_i - (\cos \omega t \sin \gamma - \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin \phi_i \\ & + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma + \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 2\phi_i - \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma - \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{l} \dots\dots 7.32$$

La suma de las dos **ecuaciones anteriores** proporcionan un conjunto de criterios suficientes para una **fuerza de sacudimiento cero** por medio de la segunda armónica para cada banco, similares a las del motor en línea de la **ecuación 7.5** y **7.6**. Es posible resolver las fuerzas de sacudimiento para cada banco en componentes a lo largo y normal al eje central \mathbf{X} del motor en \mathbf{V} , de donde se obtiene

$$F_{Sx} = (F_{SL} + F_{SR}) \cos \gamma \mathbf{i} \dots\dots\dots 7.33$$

$$F_{Sy} = (F_{SL} - F_{SR}) \sin \gamma \mathbf{j} \dots\dots\dots 7.34$$

$$\mathbf{F}_s = F_{Sx} \mathbf{i} + F_{Sy} \mathbf{j} \dots\dots\dots 7.35$$

La ecuación **7.35** proporciona oportunidades adicionales para la cancelación de las fuerzas de sacudimiento más allá de la elección de los ángulos de fase; por ejemplo, incluso con valores no cero de \mathbf{F}_{SL} y \mathbf{F}_{SR} , si γ es 90° , entonces la componente \mathbf{x} de la fuerza de sacudimiento será cero. También, si $\mathbf{F}_{SL} = \mathbf{F}_{SR}$, la fuerza de sacudimiento será cero para cualquier valor γ . Esta situación prevalece en el caso de un motor horizontalmente opuesto. Con algunos motores en \mathbf{V} u opuestos es posible cancelar las componentes de la fuerza de sacudimiento aun cuando las sumas en la ecuación **7.35** no sean cero.

VII.3.2. Momento de sacudimiento en motores en V.

Las ecuaciones del **momento de sacudimiento** son fáciles de formar a partir de las ecuaciones de fuerza de sacudimiento al multiplicar cada termino de las sumas por el brazo de palanca, como se hizo con la ecuación **7.14**. Los momentos existen en cada banco y sus vectores serán **ortogonales con respecto** a los planos de los cilindros respectivos. Para el banco derecho se define un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ perpendicular a $\hat{\mathbf{i}}$ en el plano \mathbf{Z} de la figura **7.16**. Para el banco izquierdo se define un vector unitario de momento $\hat{\mathbf{m}}$ perpendicular a $\hat{\mathbf{i}}$ en el plano de la figura **7.16**.

Para el banco derecho:

$$M_{sR} \cong m_B r \omega^2 \left[\begin{aligned} &(\cos \omega t \cos \gamma - \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} z_i \cos \phi_i + (\cos \omega t \sin \gamma + \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} z_i \sin \phi_i \\ &+ \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma - \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=1}^{n/2} z_i \cos 2\phi_i + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma + \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=1}^{n/2} z_i \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{\mathbf{n}} \dots\dots\dots 7.36$$

Para el lado izquierdo:

$$M_{sL} \cong m_B r \omega^2 \left[\begin{aligned} &(\cos \omega t \cos \gamma + \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \cos \phi_i - (\cos \omega t \sin \gamma - \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \sin \phi_i \\ &+ \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma + \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \cos 2\phi_i - \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma - \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{\mathbf{m}} \dots\dots\dots 7.37$$

Las sumas en las ecuaciones anteriores **7.36** y **7.37** proporcionan un conjunto de criterios suficientes para el **momento de sacudimiento cero** por medio de la segunda armónica para cada banco, semejantes a las encontradas para el motor en línea de las ecuaciones **7.13** y **7.14**. Al resolver los momentos de sacudimiento para cada banco en componentes a lo largo y normales al eje central \mathbf{X} del motor en \mathbf{V} se obtiene:

$$M_{Sx} = (M_{sL} - M_{sR}) \sin \gamma \mathbf{i} \dots\dots\dots 7.38$$

$$M_{Sx} = (-M_{sL} - M_{sR}) \cos \gamma \mathbf{j} \dots\dots\dots 7.39$$

$$\mathbf{M}_s = M_{Sx} \mathbf{i} + M_{Sy} \mathbf{j} \dots\dots\dots 7.40$$

La ecuación **7.40** permite la posible cancelación de las componentes del momento de sacudimiento en algunas configuraciones en \mathbf{V} y opuestas aun cuando las sumas en las ecuaciones **7.36** y **7.37**

no sean cero: por ejemplo si γ es de 90° , entonces la componente y del momento de sacudimiento es cero.

VII.3.3. Par de torsión de inercia en motores en V.

Los pares de torsión de inercia de los bancos derecho e izquierdo de un motor en V son:

Para el banco derecho:

$$T_{i21R} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{r}{2l} \left(\sin(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos \phi_i - \cos(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin \phi_i \right) \\ - \left(\sin 2(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos 2\phi_i - \cos 2(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin 2\phi_i \right) \\ - \frac{3r}{2l} \left(\sin 3(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos 3\phi_i - \cos 3(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin 3\phi_i \right) \end{bmatrix} \hat{k} \dots\dots 7.41$$

Para el lado izquierdo:

$$T_{i21L} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{r}{2l} \left(\sin(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos \phi_i - \cos(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin \phi_i \right) \\ - \left(\sin 2(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 2\phi_i - \cos 2(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 2\phi_i \right) \\ - \frac{3r}{2l} \left(\sin 3(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 3\phi_i - \cos 3(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 3\phi_i \right) \end{bmatrix} \hat{k} \dots\dots 7.42$$

Se suman las contribuciones de cada banco para el total. Para que el par de torsión de inercia sea cero a través de la tercera armónica en un motor en V es suficiente (pero no necesario) que:

$$\sum_{i=1}^{n/2} \sin \phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{n/2} \cos \phi_i = 0 \quad \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin \phi_i = 0 \quad \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos \phi_i = 0 \quad \dots\dots 7.43$$

$$\sum_{i=1}^{n/2} \sin 2\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{n/2} \cos 2\phi_i = 0 \quad \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 2\phi_i = 0 \quad \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 2\phi_i = 0 \dots\dots 7.44$$

$$\sum_{i=1}^{n/2} \sin 3\phi_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{n/2} \cos 3\phi_i = 0 \quad \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 3\phi_i = 0 \quad \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 3\phi_i = 0 \dots\dots 7.45$$

Obsérvese que cuando se suman las ecuaciones 7.41 y 7.42 algunas combinaciones particulares de Φ_1 y γ pueden cancelar el par de torsión de inercia incluso cuando algunos términos de la ecuaciones 7.43 a 7.45 no son cero.

VII.3.4. Par de torsión del gas.

El par de torsión del gas es:

$$T_{g21} \cong F_g r \sum_{i=1}^n \sin[\omega t - (\Psi_i + \gamma_k)] \left\{ 1 + \frac{r}{l} \cos[\omega t - (\Psi_i + \gamma_k)] \right\} \hat{k} \dots\dots 7.46$$

Donde el banco izquierdo tiene un ángulo de banco, $\gamma_k = +\gamma$ y el derecho, $\gamma_k = -\gamma$.

Es posible diseñar un motor en V que tenga tantos codos de cigüeñal como cilindros, aunque por varias razones esto no siempre es posible. La principal ventaja de un motor en V sobre uno en línea del mismo número de cilindros es su tamaño más compacto y una mayor rigidez. Puede ser aproximadamente la mitad de la longitud de un motor en línea a expensas de un mayor ancho, siempre que el cigüeñal se diseñe para acomodar dos bielas por codo de cigüeñal, como se muestra en la figura 7.17. Entonces los cilindros en bancos opuestos comparten un codo de

cigüeñal. Un banco de cilindros se desplaza a lo largo del cigüeñal en una distancia igual al espesor de una biela. El bloque de cilindros más corto y más ancho y el cigüeñal más corto son mucho más rígidos tanto en torsión como a flexión que los de un motor en línea similar. La figura 7.18 muestra simulaciones de computadora de varios modos de flexión y un modo torsional de vibración para un cigüeñal de cuatro codos. Las deflexiones están muy acentuadas. La forma necesariamente contorsionada de un cigüeñal dificulta el control de estas deflexiones con el diseño. Si son de magnitud excesiva, pueden conducir a fallas estructurales.

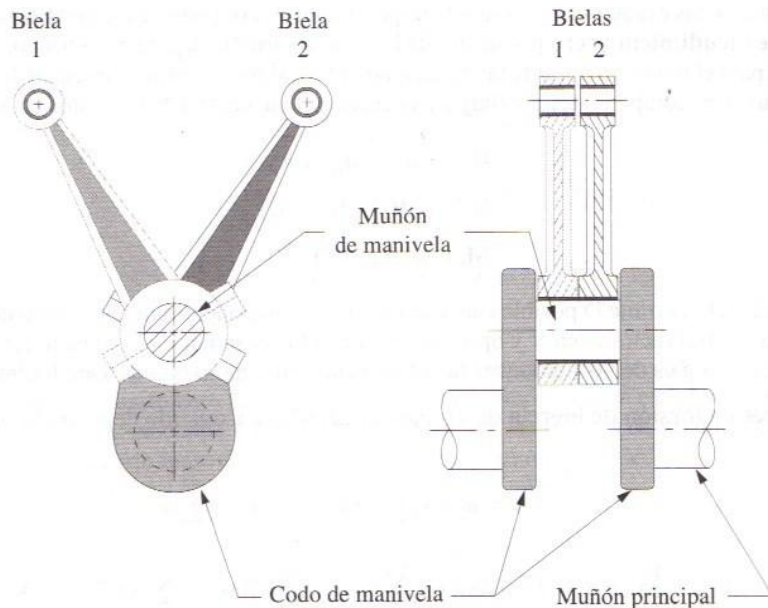


Figura 7.17 Dos bielas en un codo de manivela común.

VII.4. BALANCEO DE MOTORES MULTICILINDROS.

Un motor puede ser balanceado con un número m suficiente de cilindros, apropiadamente dispuestos en un banco de n cilindros en un motor de varios bancos. En un motor de dos tiempos con sus codos de cigüeñal dispuesto para encendido uniforme, todas las armónicas de la fuerza de sacudimiento pueden balancearse, excepto aquellas cuyo número armónico sea múltiplo de $n/2$. Las componentes del momento de sacudimiento primario pueden balancearse si el cigüeñal es simétrico especular con respecto al plano central transversal. Una configuración en línea de cuatro tiempos requiere entonces por lo menos seis cilindros para que esté inherentemente balanceado hasta la segunda armónica. Ya se analizó que un cuatro en línea con cigüeñal $0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ tiene fuerzas y momentos secundarios no cero y también par de torsión de inercia no cero. El seis en línea con una manivela simétrica especular con $\Phi_i = 0^\circ, 240^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 0^\circ$ tendrá fuerzas y momentos de sacudimiento cero hasta la segunda armónica, aunque el par de torsión de inercia hasta la tercera armónica aun estará presente.

VII.4.1. Pares de torsión de inercia desbalanceados.

Pueden reducirse con un volante, como se demostró para el motor de un solo cilindro. Incluso un motor que tiene un par de torsión inercial cero puede requerir un volante para reducir las variaciones de su par de torsión de gas. Se deberá utilizar la función del par de torsión total para determinar las variaciones de energía a absorber por el volante, ya que contiene tanto par de torsión del gas como par de torsión de inercia (si los hay). El método de la **sección 3.10** también

se aplica en el tamaño de volante requerido en un motor, con base en la variación de su función del par de torsión total.

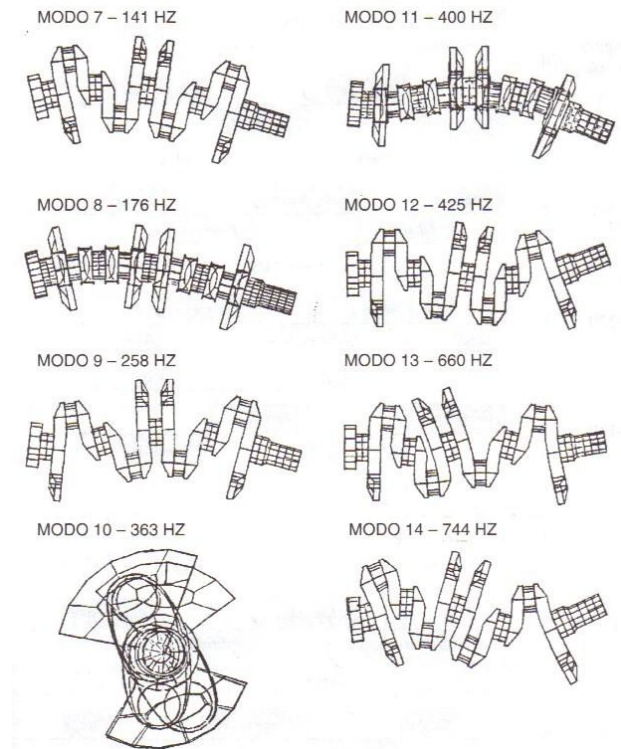


Figura 7.18 Métodos de vibración por flexión y torsional en un cigüeñal de cuatro codos.

VII.4.2. Fuerzas y momento de sacudimiento desbalanceados.

Pueden cancelarse con la adición de uno o más ejes rotatorios balanceados dentro del motor. Para cancelar las componentes primarias se requieren dos ejes de balanceo que giren a la velocidad del cigüeñal, uno de los cuales puede ser el mismo cigüeñal. Para cancelar las componentes secundarias se requiere por lo menos dos ejes de balanceo que giren a dos veces la velocidad del cigüeñal, impulsados por engranes o cadenas desde el cigüeñal. La figura 7.19 a muestra un par de ejes contrarrotatorios con masas excéntricas dispuestas desfasadas a 180° entre sí, como se muestra, las fuerzas centrífugas desbalanceadas se suman para producir componentes de fuerzas de sacudimiento en la dirección vertical de dos veces la fuerza desbalanceada producida por cada masa, mientras sus componentes horizontales se cancelan exactamente. Se puede utilizar pares de excéntricos contrarrotatorios para producir una fuerza armónicamente variable en cualquier plano. La frecuencia armónica será determinada por la velocidad de rotación de los ejes.

Si se disponen dos pares de masas excéntricas, con un par desplazado a una cierta distancia a lo largo del eje del otro, y también girado 180° alrededor del eje con respecto al primero, como se muestra en la figura 7.19, se obtiene un par armónicamente variable en un plano. Las fuerzas se cancelan en una dirección y se suman en una dirección ortogonal.

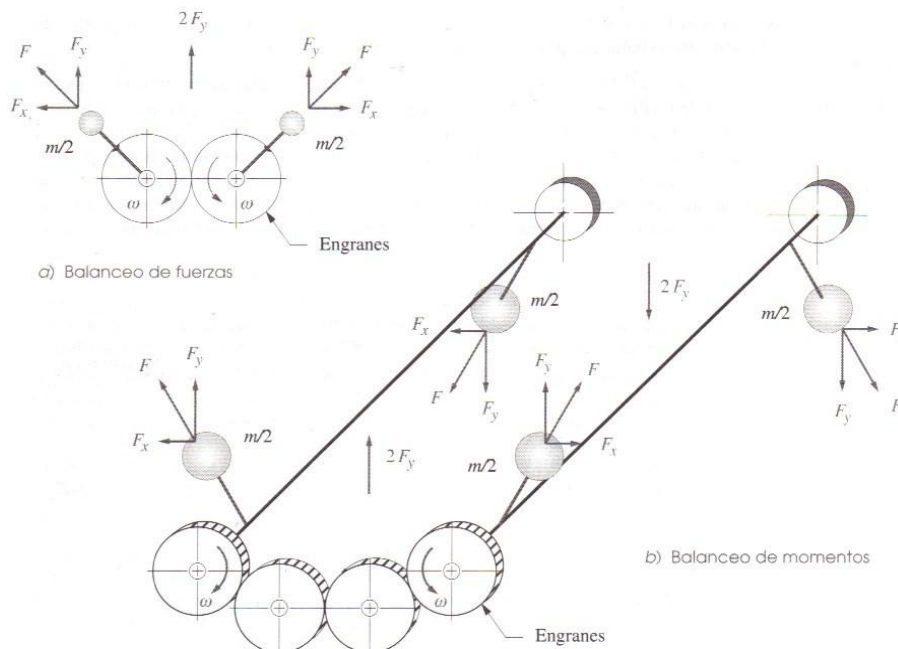


Figura 7.19 Las masas excéntricas contrarrotatorias pueden balancear fuerzas y momentos.

Por tanto, para cancelar el momento de sacudimiento en cualquier plano, puede acomodarse un par de ejes, cada uno con dos masas excéntricas desplazadas a lo largo de ellos, desfasadas 180° , y engranarlas para que giren en direcciones opuestas a cualquier múltiplo de la velocidad del cigüeñal. Para cancelar las fuerzas de sacudimiento, lo único que se requiere es proporcionar una masa suficiente de desbalanceo adicional en uno de los pares de masas excéntricas para generar una fuerza de sacudimiento opuesta a la del motor, por encima de la que se requiere para generar las fuerzas del par.

En un motor en línea, todas las fuerzas y momentos desbalanceados están confinados al plano único de los cilindros, ya que se debe a la reciprocidad de las masas que se concentran en el pasador del pistón. (Se supone que todos los codos de manivela están exacta y rotacionalmente balanceados para cancelar los efectos de la masa del muñón de la manivela). Sin embargo, en un motor en **V** las fuerzas y momentos de sacudimiento tienen componentes en **x** y **y** como se muestra en las ecuaciones 7.31 y 7.32 y en la figura 7.16. Los efectos de sacudimiento del pistón de cada banco actúan en su plano, y el ángulo de banco β se utilizan para descomponerlos en sus componentes **x** y **y**.

VII.4.3. V doce.

Es el motor en **V** más pequeño, con un estado inherente de balanceo casi perfecto, ya que está compuesto por dos motores de seis cilindros en línea en un cigüeñal común. Ya se explicó que los motores en **V** adquieren las características de balanceo de los bancos en línea a partir de los cuales están contruidos. Los pares de fuerzas y momentos de sacudimiento de las configuraciones en **V** no introducen nuevos criterios para el balanceo en el motor en **V** sobre los ya definidos para balanceo de fuerzas y momentos de sacudimiento en el motor en línea.

VII.4.4. V en ocho.

El motor **V-8** a 90° con cigüeñal de $0^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 180^\circ$, que tiene sólo un momento primario desbalanceado, presenta un caso especial. El ángulo de 90° entre los bancos produce componentes horizontales y verticales iguales del momento de sacudimiento primario que lo reduce a un par de magnitud constante que gira alrededor del eje a velocidad del cigüeñal y en la dirección de éste, como se muestra en la figura 7.20. En el motor **V-8**, la componente primaria puede balancearse simplemente con agregar solamente contrapesos excéntricos del tamaño apropiado y dirección opuesta al cigüeñal. No se requiere un segundo eje independiente de balanceo en el motor **V-8** de 90° con este cigüeñal. Los contrapesos desfasados 180° se colocan cerca de los extremos del cigüeñal para obtener el brazo de momento más grande posible y reducir su tamaño.

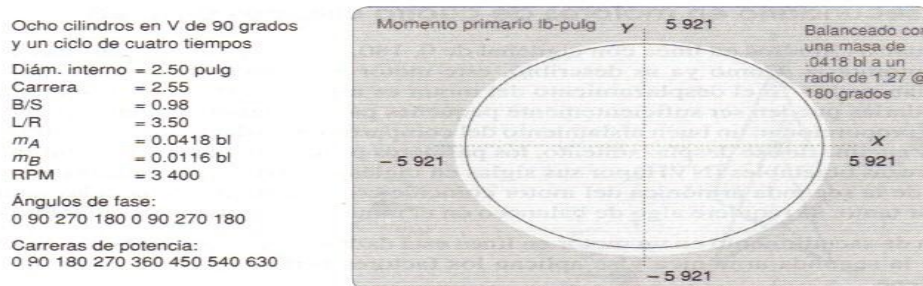


Figura 7.20 Momento primario en el motor **V-8** de 90° (visto hacia el extremo del eje del cigüeñal).

VII.4.5. V seis.

Motores con cigüeñal de $0^\circ, 240^\circ, 120^\circ$, de tres codos y dos bielas por codo que tiene momentos primarios y secundarios desbalanceados, como el motor de tres cilindros en línea. Este **V-6** necesita un ángulo en **V** de 120° para balanceo inherente. Para reducir el ancho del motor, los motores **V-6** con frecuencia se fabrican con ángulos en **V** de 60° que produce un encendido uniforme con un cigüeñal de $0^\circ, 240^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 300^\circ, 180^\circ$ y seis codos. Este motor tiene momentos primarios y secundarios desbalanceados, y cada uno es un vector de rotación de magnitud constante, como el del **V-8** mostrado en la figura 7.20. La componente primaria puede balancearse por completo con la adición de contrapesos al cigüeñal, como se hizo en el **V-8** a 90° . Algunos **V-6** utilizan ángulos en **V** de 90° , lo que permite ensamblarlos en la misma línea de producción de los **V-8**, pero los **V-6** de 90° y tres codos funcionan ásperamente debido al encendido desigual, a menos que se vuelva a diseñar el cigüeñal para desplazar 30° las bielas en cada pasador. Esto resulta en un cigüeñal de $0^\circ, 240^\circ, 120^\circ, 300^\circ, 270^\circ, 150^\circ$ con cuatro cojinetes principales y seis codos que producen encendido uniforme, pero con momentos de sacudimiento primarios y secundarios no constantes. Algunos fabricantes añaden un eje de balanceo en la superficie del **V-6**, impulsado por engranes a la velocidad del cigüeñal para cancelar la componente **Y**, y con contrapesos en el cigüeñal para cancelar la componente **X** del momento de sacudimiento primario no circular.

El cálculo de la magnitud y ubicación de las masas de balanceo excéntricas necesarias para cancelar cualesquiera fuerzas y momentos de sacudimiento es un ejercicio simple de balanceo estático (de fuerzas) y balanceo dinámico en dos planos (de momento). Las fuerzas y momentos desbalanceados para la configuración del motor se obtienen con las ecuaciones correspondientes de este capítulo. Se debe seleccionar dos planos de corrección a lo largo de los ejes de balanceo/cigüeñal que se va a diseñar. La magnitud y las ubicaciones angulares de las masas de balanceo se determinan con los métodos descritos en el capítulo VI.

Capítulo VIII CASOS PRÁCTICOS

VIII.1 CASO PRACTICO BALANCEO ESTATICO

Conidere las siguientes figuras para balanceo estático el eje de giro es el eje z que es perpendicular a la hoja de papel los datos de masa y sus coordenadas del centro de masa se especifican al pie de la figura 8.1.

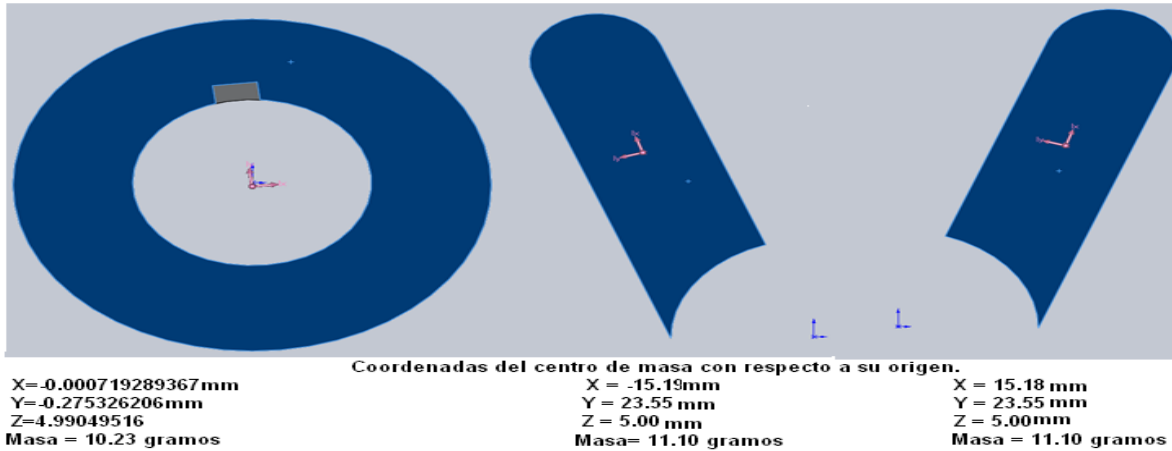


Figura 8.1. Masas que componen el sistema a balancear.

Una vez ensamblado el sistema queda como se observa en la figura 8.2. Se debe encontrar el producto mR que balancee este sistema así como los valores de las fuerzas antes y después del balanceo que cada una de las masas ejerce sobre su eje de giro.



Figura 8.2 Sistema a balancear.

Solución:

Descomponiendo los vectores de posición en componentes xy en el sistema coordenado arbitrario asociado con la posición congelada del mecanismo elegido para el análisis.

$$R_1 = 0.28@ < 270 \text{ mm} \quad R_{1x} = 0 \quad R_{1y} = -0.28$$

$$R_2 = 28.02@ < 122.82 \text{ mm} \quad R_{2x} = -15.19 \quad R_{2y} = 23.55$$

$$R_3 = 0.28@ < 57.177 \text{ mm} \quad R_{3x} = 15.19 \quad R_{3y} = 23.55$$

Ahora se resuelve la ecuación 4.5 para encontrar el producto $m\mathbf{R}$ que balancee el sistema:

$$-m_1\mathbf{R}_1 - m_2\mathbf{R}_2 - m_3\mathbf{R}_3 - m_a\mathbf{R}_a = 0$$

$$m_a\mathbf{R}_a = -m_1\mathbf{R}_1 - m_2\mathbf{R}_2 - m_3\mathbf{R}_3$$

$$m_a\mathbf{R}_{a_x} = -m_1\mathbf{R}_{1_x} - m_2\mathbf{R}_{2_x} - m_3\mathbf{R}_{3_x}$$

$$m_a\mathbf{R}_{a_x} = -(10.23)(0) - (11.1)(-15.19) - (11.1)(15.19)$$

$$m_a\mathbf{R}_{a_x} = 0 \text{ gr mm}$$

$$m_a\mathbf{R}_{a_y} = -m_1\mathbf{R}_{1_y} - m_2\mathbf{R}_{2_y} - m_3\mathbf{R}_{3_y}$$

$$m_a\mathbf{R}_{a_y} = -(10.23)(-0.28) - (11.1)(23.53) - (11.1)(23.53)$$

$$m_a\mathbf{R}_{a_y} = -519.9456 \text{ gr mm}$$

Este producto de $m_a\mathbf{R}_a$ es el que debe agregarse en la dirección negativa del eje y y /o bien eliminar en la dirección positiva del mismo.

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{m_a\mathbf{R}_{a_y}}{m_a\mathbf{R}_{a_x}}$$

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{-519.9456}{0}$$

$$R_a = \sqrt{(R_{a_x}^2 + R_{a_y}^2)}$$

$$m_a R_a = m_a \sqrt{(R_{a_x}^2 + R_{a_y}^2)}$$

$$m_a R_a = \sqrt{m_a^2 (R_{a_x}^2 + R_{a_y}^2)}$$

$$m_a R_a = \sqrt{(m_a R_{ax})^2 + (m_a R_{ay})^2}$$

$$m_a R_a = \sqrt{(0)^2 + (-519.9456)^2}$$

$$m_a R_a = 519.9456 \text{ gr mm}$$

Ahora con la ecuación 4.1 determinaremos los valores de las componentes de las fuerzas que cada una de las masas sin balancear ejercen sobre su eje de giro (bancada), suponiendo que nuestro sistema gira a una velocidad angular constante $\omega=100\text{rad/s}$.

$$F = mR\omega^2 \dots\dots 4.1$$

$$F_1 = \left(\frac{10.23}{1000}\right) (100)^2 \left(\frac{0.28}{1000}\right) @ < 270 \text{) } \text{kgm/s}^2 \quad F_{1x} = 0 \quad F_{1y} = -0.028644$$

$$F_2 = \left(\frac{11.1}{1000}\right) (100)^2 \left(\frac{28.02}{1000}\right) @ < 122.82 \text{) } \text{kgm/s}^2 \quad F_{2x} = -1.68579 \quad F_{2y} = 2.6137$$

$$F_3 = \left(\frac{11.1}{1000}\right) (100)^2 \left(\frac{28.02}{1000}\right) @ < 57.177 \text{) } \text{kgm/s}^2 \quad F_{3x} = 1.68579 \quad F_{3y} = 2.6137$$

$$F_T = 5.1986 @ < 90 \text{ N} \quad F_{Tx} = 0 \quad F_{Ty} = 5.1986$$

En la gráfica 8.3 se observan las componentes de las fuerzas en la bancada antes de ser balanceado el sistema al dar una revolución completa, recordemos que este rota a una velocidad angular de $\omega=100\text{rad/s}$:

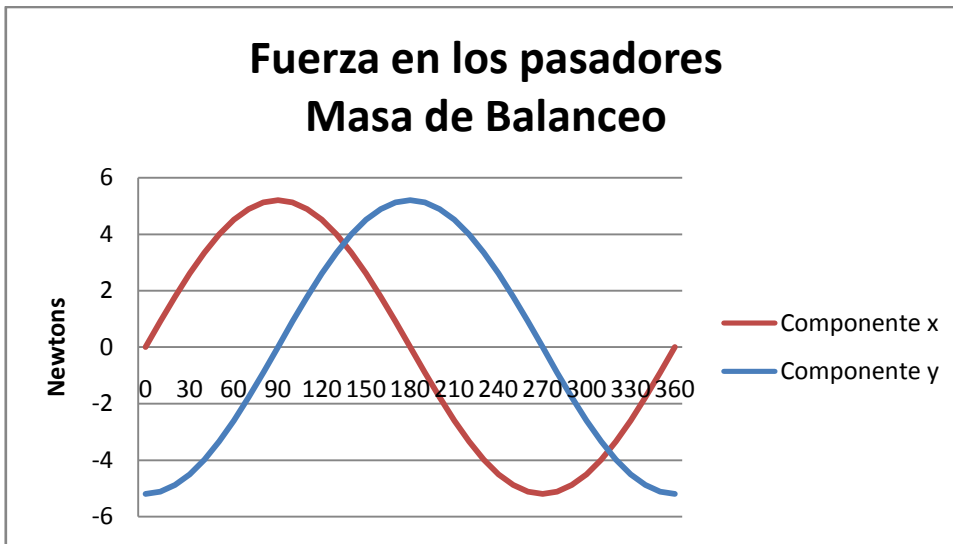


Gráfica 8.3 Fuerzas en el pasador del sistema sin balancear.

Ahora con la ecuación 4.1 determinaremos los valores de las componentes de la fuerza de balanceo que ejerce sobre su eje de giro (bancada), $F = mR\omega^2 \dots\dots 4.1$

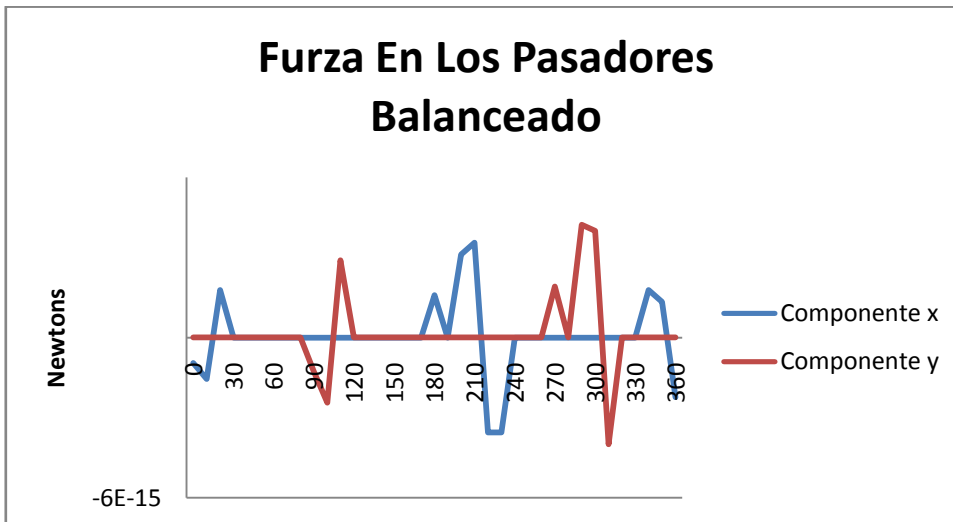
$$F_A = \left(\frac{519.9456}{1000000}\right) (100)^2 (@ < 270 \text{) } \text{kgm/s}^2 \quad F_{Bx} = 0 \quad F_{By} = -5.1986$$

En la gráfica 8.4 se observan las componentes de las fuerzas de balanceo en la bancada.



Gráfica 8.4 Fuerzas en el pasador de la masa de balanceo.

Como podemos observar esta componente contrarresta a la sumatoria del sistema sin balancear. En la gráfica 8.5 se observan las componentes de las fuerzas del sistema balanceado.



Gráfica 8.5 Fuerzas del sistema balanceado.

Como se puede observar nuestras resultantes son prácticamente cero, las variantes se deben a el redondeo del programa donde se genero.

Con base a los resultados obtenidos, ahora existen una infinidad de soluciones disponibles. Se puede seleccionar el valor de m_a , determinar el radio necesario R_a donde se deberá colocar o elegir un radio deseado y determinar la masa que debe colocarse. En este caso la pieza con la que estamos tratando es de aluminio y propondremos un radio de 30.8mm cabe recordar que la selección apropiada de el contrapeso depende en gran medida de la forma de ensamble apropiada y/o interferencias que pudieran generarse con cualquier otra parte del mecanismo o maquina.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$R_1=1.135m @ <113.4^\circ$	$R_{1x}=-0.451$	$R_{1y}=1.042$
$R_2=0.822m @ <48.8^\circ$	$R_{2x}=0.541$	$R_{2y}=0.618$
$R_3=1.04m @ <251.4^\circ$	$R_{3x}=-0.332$	$R_{3y}=-0.986$

Se procede a encontrar las fuerzas que generan las masas sobre los rodamientos.

Estableciendo las ecuaciones de equilibrio para el sistema tenemos:

$$R_p + R_Q + F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$R_p + R_Q = -F_1 - F_2 - F_3$$

Recordando que: $F = mR\omega^2 \dots \dots 4.1$

$$F_1=5376.96048 @ <113.4^\circ$$

$$F_{1x}=(1.2)(-0.451)(62.831)^2 = -2135.44851 \quad F_{1y}=(1.2)(1.042) (62.831)^2 =4934.730351$$

$$F_2=5841.22667 @ <48.8^\circ$$

$$F_{2x}=(1.8)(0.541) (62.831)^2 =3847.55444 \quad F_{2y}=(1.8)(0.618) (62.831)^2 =4395.02603$$

$$F_3=9853.81303 @ <251.4^\circ$$

$$F_{3x}=(2.4)(-0.332) (62.831)^2 =-3142.9654 \quad F_{3y}=(2.4)(-0.986) (62.831)^2 =-9339.13271$$

Descomponiéndolas en sus componentes cartesianas tenemos:

$$R_{Px} + R_{Qx} = -F_{1x} - F_{2x} - F_{3x}$$

$$R_{Px} + R_{Qx} = -(-2135.44851) - (3847.55444) - (-3142.9654)$$

$$R_{Px} + R_{Qx} = 1430.89636$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y}$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = -(4934.730351) - (4395.02603) - (-9339.13271)$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = 9.376329$$

Ahora realizando sumatoria de momentos con respecto al punto **P** para encontrar la fuerza que de reacción en el rodamiento en el puto **Q** tenemos:

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$I_1 \times F_1$

Masa1						
Componentes			Resultantes (Nm)			
i	j	k	l	J	K	
	0	0	1.354			
-2135.44851	4934.73035	0	-6681.62489	-2891.39728	0	

$I_2 \times F_2$

Masa3						
Componentes			Resultantes (Nm)			
i	j	k	l	J	K	
	0	0	2.201			
3847.5544	4395.02603	0	-9673.4523	8468.46732	0	

$I_3 \times F_3$

Masa3						
Componentes			Resultantes (Nm)			
i	j	k	l	J	K	
	0	0	2.896			
-3142.9654	-9339.13271	0	27046.1283	-9102.0278	0	

$I_5 \times R_Q$

Reacción en el punto Q						
Componentes			Resultantes (kgm)			
i	j	k	l	J	K	
	0	0	4.097			
R_{Qx}		R_{Qy}	0	$-4.097 R_{Qy}$	$+4.097 R_{Qx}$	0

Se proceden a igualar la suma de los momentos a cero a fin de encontrar el valor de la reacción en el punto **Q**.

$$\sum M_x = 0 = -6681.62489 - 9673.4523 + 27046.1283 - 4.097 R_{Qy} = 0$$

$$= 10691.05111 - 4.097 R_{Qy} = 0$$

$$R_{Qy} = \frac{-10691.05111}{-4.097} = 2609.482819$$

$$\sum M_y = 0 = -2891.39728 + 8468.46732 - 9102.0278 + 4.097 R_{Qx} = 0$$

$$=-3524.95776+4.097 R_{Qx} =0$$

$$R_{Qx} = \frac{3524.95776}{4.097} = 860.3753381$$

Para encontrar la magnitud tenemos:

$$R_Q = \sqrt{(R_{Qx})^2 + (R_{Qy})^2}$$

$$R_Q = \sqrt{(2609.482819)^2 + (860.3753381)^2} = 2747.661971 N m$$

Para encontrar el ángulo tenemos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_{Qy}}{R_{Qx}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2609.482819}{860.3753381} = 71.752^\circ$$

Para encontrar la reacción en el punto **P** se procede a resolver las ecuaciones de equilibrio:

$$R_{Px} + R_{Qx} = 1430.89636 \quad R_{Px} = 1430.89636 - R_{Qx}$$

$$R_{Px} = 1430.89636 - 860.3753381 = 570.5210219$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = 9.376329 \quad R_{Py} = 9.376329 - R_{Qy}$$

$$R_{Py} = 9.376329 - 2609.482819 = -2600.10649$$

$$R_P = \sqrt{(R_{Px})^2 + (R_{Py})^2}$$

$$R_P = \sqrt{(570.5210219)^2 + (-2600.10649)^2} = 2661.963185 N m$$

Para encontrar el ángulo tenemos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_{Py}}{R_{Px}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2600.10649}{570.5210219} = -77.624^\circ$$

En la gráfica **8.7** y **8.8** se observa el comportamiento de las componentes de las reacciones en los puntos **P** y **Q** al realizar una revolución completa. Los intervalos de esta grafica son de 5°.



Gráfica 8.7 Fuerzas de reacción x en los rodamientos del sistema desbalanceado.



Gráfica 8.8 Fuerzas de reacción y en los rodamientos del sistema desbalanceado.

Como podemos observar en las graficas anteriores las magnitudes de las reacciones en el sistema oscilan alrededor de los +-3000N, estas fuerzas ocasionan una falla prematura por fatiga en los rodamientos. En las maquinas este tipo de fallas ocasionan daños mayores a otros componentes además de el gasto que representa el paro de la maquina, el costo de las refacciones y honorarios del especialista en reparación de la maquina. Con el procedimiento de adición de contrapesos podemos reducir la magnitud de estas fuerzas, aumentar la vida de los rodamientos en el sistema y por ende reducir los tiempos de paro de las maquinas y cada uno de los gastos que representa el mantenimiento de la misma.

Ahora pretendemos balancear este sistema en los planos **A** y **B**. Recordando que la fuerza de desbalanceo es $F = mR\omega^2$4.1 pero como la velocidad afecta todo el sistema el desbalanceo

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

es $u_p = m_p R_p \dots \dots \dots 4.8$ de modo que esta ecuación se debe aplicar a cada una de las masas que se encuentran rotando, por tanto tenemos:

m	$u_x = mR_x$	$u_y = mR_y$
$m_1=1.2\text{kg}$	$u_{1x}= -0.5409154$	$u_{1y}= 1.2499818$
$m_2=1.8\text{kg}$	$u_{2x}= 0.9745969$	$u_{2y}= 1.1132731$
$m_3=2.4\text{kg}$	$u_{3x}= -0.7961224$	$u_{3y}= -2.3656300$

Estableciendo ecuaciones de equilibrio para el sistema tenemos:

$$u_a + u_b + u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

Descomponiéndola en sus componentes cartesianas tenemos:

$$u_{ax} + u_{bx} + u_{1x} + u_{2x} + u_{3x} = 0$$

$$u_{ax} + u_{bx} - 0.5409154 + 0.9745969 - 0.7961224 = 0$$

$$u_{ax} + u_{bx} = 0.3624409$$

$$u_{ay} + u_{by} + u_{1y} + u_{2y} + u_{3y} = 0$$

$$u_{ay} + u_{by} + 1.2499818 + 1.1132731 - 2.3656300 = 0$$

$$u_{ay} + u_{by} = 0.002375052$$

Realizando el producto cruz de cada una de las masas con respecto al punto **A**, a fin de encontrar el producto mR que se agregara al plano **B** se tiene:

$I_1 \times u_1$

Masa1						
Componentes			Resultantes (kgm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	0.854			
	-0.54091543	1.2499818	0	-1.06748446	-0.46194177	0

$I_2 \times u_2$

Masa2						
Componentes			Resultantes (kgm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	1.701			
	0.974596925	1.113273099	0	-1.893677542	1.65778937	0

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$I_3 \times u_3$

Masa3						
Componentes			Resultantes (kgm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	2.396			
	-0.79612244	-2.36562995	0	5.668049364	-1.907509357	0

Ahora se realizara el producto cruz de $I_4 \times m_b R_b$ con respecto al punto A.

$I_4 \times u_B$

Masa en el plano B						
Componentes			Resultantes (kgm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	3.097			
	$m_b R_{bx}$	$m_b R_{by}$	0	$-3.097 m_b R_{by}$	$+3.097 m_b R_{bx}$	0

Se proceden a igualar la suma de los momentos a cero a fin de encontrar el producto $m_b R_b$ que tendrá que agregarse en este plano.

$$\sum M_x = 0 = -1.06748446 - 1.893677542 + 5.668049364 - 3.097 m_b R_{by} = 0$$

$$= -2.7068 - 3.097 m_b R_{by} = 0$$

$$m_b R_{by} = \frac{-2.7068}{-3.097} = 0.874$$

$$\sum M_y = 0 = -0.46194177 + 1.65778937 - 1.907509357 + 3.097 m_b R_{bx} = 0$$

$$= -0.7116 + 3.097 m_b R_{bx} = 0$$

$$m_b R_{bx} = \frac{0.7116}{3.097} = 0.229$$

Para encontrar la magnitud tenemos:

$$m_b R_b = \sqrt{(m_b R_{bx})^2 + (m_b R_{by})^2}$$

$$m_b R_b = \sqrt{(0.2297907)^2 + (0.87403)^2} = 0.90373751 \text{ kg m}$$

Para encontrar el ángulo al que deben colocarse tenemos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{m_b R_{by}}{m_b R_{bx}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{0.87403}{0.2297907} = 75.2698^\circ$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Para encontrar la masa de balanceo que se tiene que agregar a el plano **A** tenemos:

$$u_{ax} + u_{bx} + u_{1x} + u_{2x} + u_{3x} = 0$$

$$u_{ax} = -u_{bx} - u_{1x} - u_{2x} - u_{3x}$$

$$u_{ax} = -(0.2297907) - (-0.5409154) - (0.9745969) - (-0.796122) = 0.1326502$$

$$u_{ay} + u_{by} + u_{1y} + u_{2y} + u_{3y} = 0$$

$$u_{ay} = -u_{by} - u_{1y} - u_{2y} - u_{3y}$$

$$u_{ay} = -(0.874) - (1.2499818) - (1.1132731) - (-2.365630) = -0.8716603 \text{ kg m}$$

Para encontrar la magnitud tenemos:

$$m_a R_a = \sqrt{(m_a R_{ax})^2 + (m_a R_{ay})^2}$$

$$m_a R_a = \sqrt{(0.1326502)^2 + (-0.8716603)^2} = 0.88169595 \text{ kg m}$$

Para encontrar el ángulo al que deben colocarse tenemos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{m_b R_{by}}{m_b R_{bx}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-0.870}{0.1334} = -81.3470537^\circ$$

Una vez calculados y adheridos los contrapesos procedemos a validar la reducción de la fuerza en los rodamientos calculando una vez más con las ecuaciones de equilibrio como a continuación se detalla:

Recordando que: $F = mR\omega^2 \dots \dots 4.1$

$$F_A = (0.88169595)(62.831)^2 @ < -81.2825^\circ = 34780.79598 @ < -81.3470537^\circ$$

$$F_{Ax} = (0.1326502)(62.831)^2 = 523.6821948 \quad F_{Ay} = (-0.8716603)(62.831)^2 = -3441.17678$$

$$F_1 = 5376.96048 @ < 113.4^\circ$$

$$F_{1x} = (1.2)(-0.451)(62.831)^2 = -2135.44851 \quad F_{1y} = (1.2)(1.042)(62.831)^2 = 4934.730351$$

$$F_2 = 5841.22667 @ 48.8^\circ$$

$$F_{2x} = (1.8)(0.541)(62.831)^2 = 3847.55444 \quad F_{2y} = (1.8)(0.618)(62.831)^2 = 4395.02603$$

$$F_3 = 9853.81303 @ 251.4^\circ$$

$$F_{3x} = (2.4)(-0.332)(62.831)^2 = -3142.9654 \quad F_{3y} = (2.4)(-0.986)(62.831)^2 = -9339.13271$$

$$F_B = 3567.81269 @ < 75.2698401^\circ$$

$$F_{Bx} = (0.2297907)(62.831)^2 = 907.17725 \quad F_{By} = (0.8740353)(62.831)^2 = 3450.553057$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$$R_p + R_Q + F_A + F_1 + F_2 + F_3 + F_B = 0$$

$$R_p + R_Q = -F_A - F_1 - F_2 - F_3 - F_B$$

Descomponiéndolas en sus componentes cartesianas tenemos:

$$R_{Px} + R_{Qx} = -F_{Ax} - F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} - F_{Bx}$$

$$R_{Px} + R_{Qx} = -F_{1x} - F_{2x} - F_{3x}$$

$$R_{Px} + R_{Qx} = -(523.6821948) - (-2135.44851) - (3847.55444) - (-3142.9654) - (907.17725)$$

$$R_{Px} + R_{Qx} = 0.00278219$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = -F_{Ay} - F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} - F_{By}$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = -(-3441.17678) - (4934.730351) - (4395.02603) - (-9339.13271) - (3450.553057)$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = 0.0004234$$

Ahora realizando sumatoria de momentos con respecto al punto **P** para encontrar la fuerza que de reacción en el rodamiento en el punto **Q** tenemos:

$$l'_0 \times F_A$$

Masa balanceo A						
Componentes				Resultantes (Nm)		
i	j	k		I	J	K
	0	0	0.5			
	523.679413	-3441.1772	0	1720.5886	261.839706	0

$$l'_1 \times F_1$$

Masa1						
Componentes				Resultantes (Nm)		
i	j	k		I	J	K
	0	0	1.354			
	-2135.44851	4934.73035	0	-6681.62489	-2891.39728	0

$$l'_2 \times F_2$$

Masa2						
Componentes				Resultantes (Nm)		
i	j	k		I	J	K
	0	0	2.201			
	3847.5544	4395.02603	0	-9673.4523	8468.46732	0

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

$I_3 \times F_3$

Masa3						
Componentes			Resultantes (Nm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	2.896			
-3142.9654	-9339.13271	0	27046.1283	-9102.0278	0	

$I_0 \times F_B$

Masa balanceo B						
Componentes			Resultantes (Nm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	3.597			
907.177275	3450.55311	0	-12411.6395	3263.1166	0	

$I_5 \times R_Q$

Reacción en el punto Q						
Componentes			Resultantes (kgm)			
i	j	k	I	J	K	
	0	0	4.097			
R_{Qx}		R_{Qy}	0	-4.097 R_{Qy}	+4.097 R_{Qx}	0

Se proceden a igualar la suma de los momentos a cero a fin de encontrar los valores de las reacciones en el punto **Q**.

$$\sum M_x = 0 = 1720.5886 - 6681.62489 - 9673.4523 + 27046.1283 - 12411.6395 - 4.097 R_{Qy} = 0$$

$$= +0.0002117 - 4.097 R_{Qy} = 0$$

$$R_{Qy} = \frac{-0.0002117}{-4.097} = 0.000051671$$

$$\sum M_y = 0 = 261.839706 - 2891.39728 + 8468.46732 - 9102.0278 + 3263.1166$$

$$4.097 R_{Qx} = 0$$

$$= -0.0013919 + 4.097 R_{Qx} = 0$$

$$R_{Qx} = \frac{0.0013919}{4.097} = 0.00033954$$

Para encontrar la magnitud tenemos:

$$R_Q = \sqrt{(R_{Qx})^2 + (R_{Qy})^2}$$

$$R_Q = \sqrt{(0.00033954)^2 + (0.000051671)^2} = 0.0003397N \text{ m}$$

Para encontrar el ángulo de esta reacción tenemos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_{Qy}}{R_{Qx}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{0.0000516716}{0.00033954} = 8.6529^\circ$$

Para encontrar la reacción en el punto **P** se procede a resolver las ecuaciones de equilibrio:

$$R_{Px} + R_{Qx} = 0.0278219 \quad R_{Px} = 0.0278219 - R_{Qx}$$

$$R_{Px} = 0.00278219 - 0.00033954 = 0.00244$$

$$R_{Py} + R_{Qy} = 0.004234 \quad R_{Py} = 0.004234 - R_{Qy}$$

$$R_{Py} = 0.0004234 - 0.000051671 = 0.000371129$$

Para encontrar la magnitud tenemos:

$$R_P = \sqrt{(R_{Px})^2 + (R_{Py})^2}$$

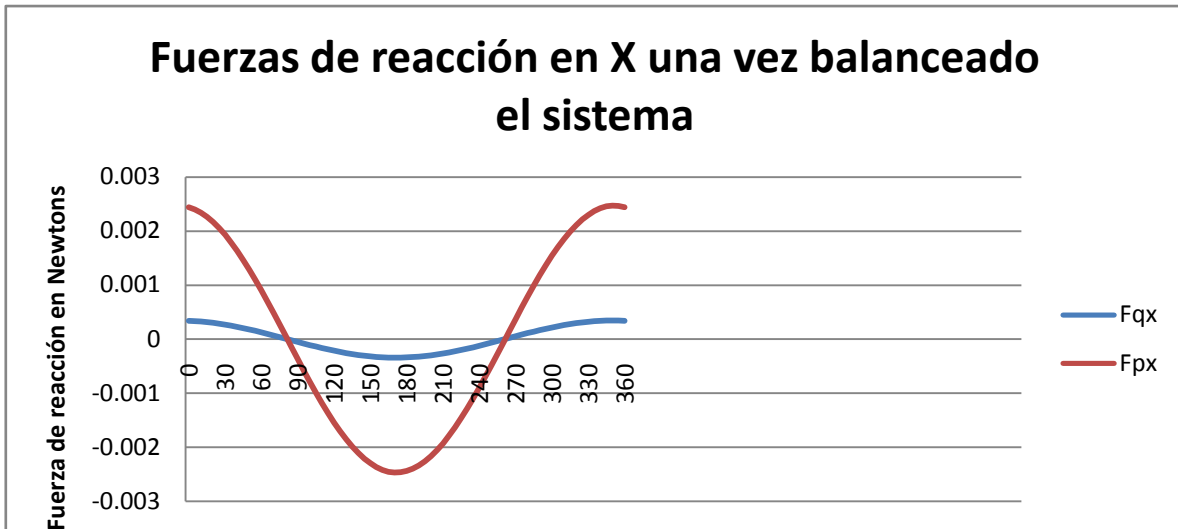
$$R_P = \sqrt{(0.00244)^2 + (0.000371129)^2} = 0.002468N \text{ m}$$

Para encontrar el ángulo al que deben colocarse tenemos:

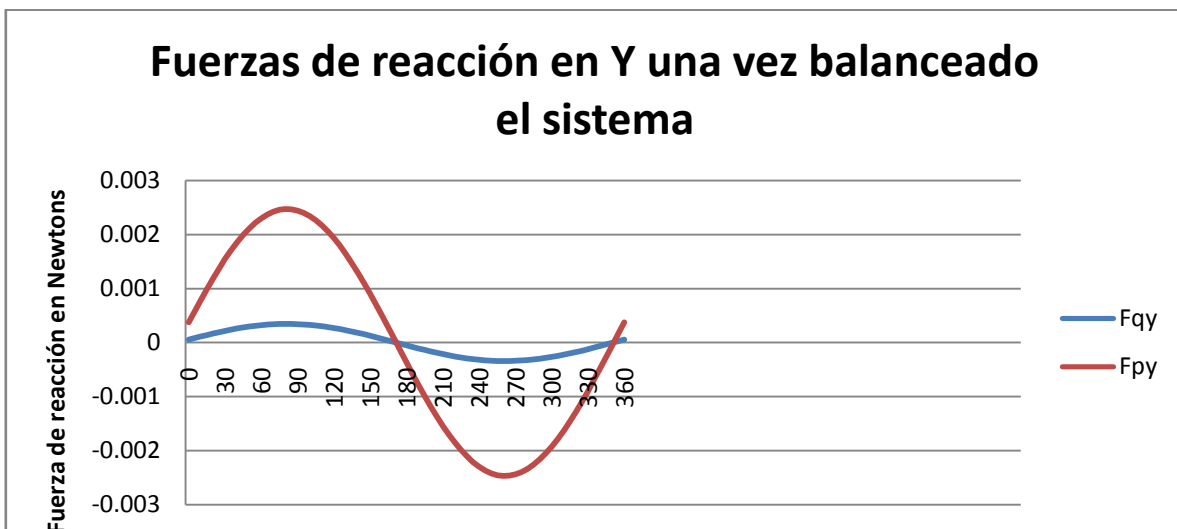
$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_{Py}}{R_{Px}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{0.000371129}{0.00244} = 8.6429^\circ$$

En la gráfica **8.9** y **8.10** se observa el comportamiento de las componentes de las reacciones en los puntos **P** y **Q** una vez balanceado el sistema al realizar una revolución completa. Los intervalos de esta grafica son de 5°. Como se puede observar las fuerzas son reducidas a cero las pequeñas fuerzas residuales que aparecen en la figura se deben a errores de redondeo.



Gráfica 8.9 Fuerzas de reacción x en los rodamientos del sistema balanceado.



Gráfica 8.10 Fuerzas de reacción y en los rodamientos del sistema balanceado.

VIII.3 CASO PRÁCTICO BALANCEO DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS

El mecanismo que se muestra en la figura 8.11 se cumple con la condición de GRASHOF $S + L \leq P + Q$1.5 y es de la clase I es decir un manivela balancín, donde el eslabón más corto girara por completo y el otro eslabón oscilara pivoteado a la bancada, se le puede dar entonces un código de letra tal como GCRR de acuerdo a la clasificación de Barker.

La longitud de los eslabones es:

$$r_1=139.8\text{mm} \quad r_2=50.800\text{mm} \quad r_3=152.4\text{mm} \quad r_4=76.2\text{mm}$$

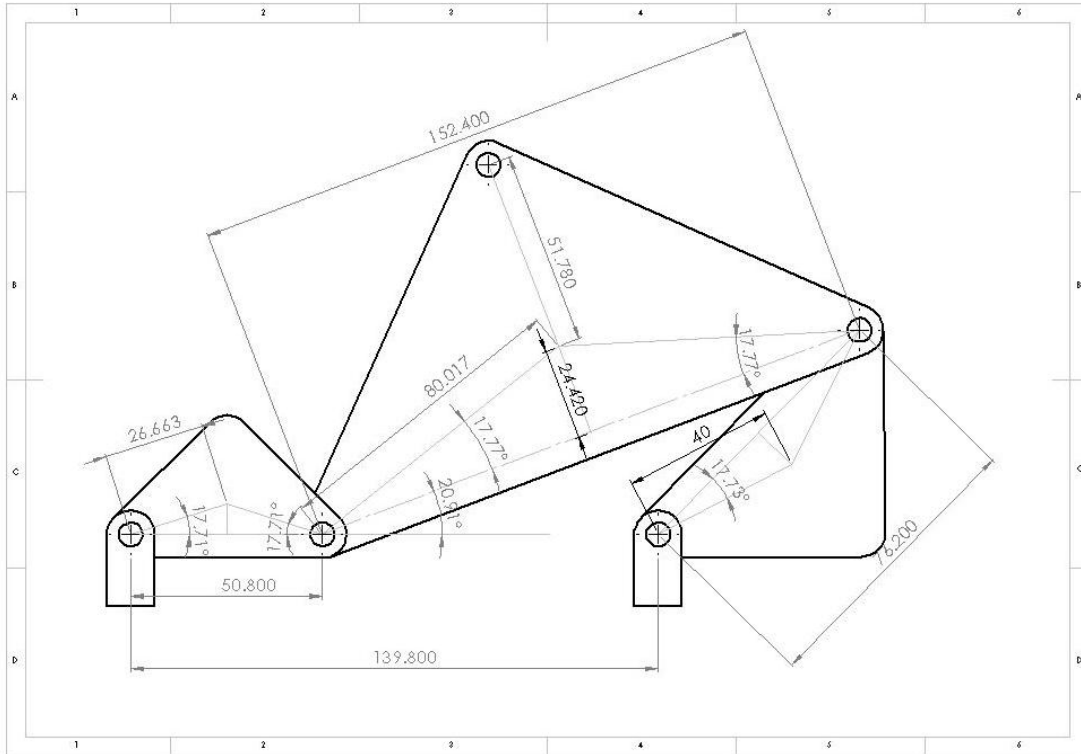


Figura 8.11.Mecanismo a balancear.

Con las ecuaciones 2.32, 2.35 y 2.36 donde $\sigma=-1$ procedemos a calcular el valor de θ_4 (tenemos una configuración de ensamble abierto esta configuración se muestra en la figura 8.11).

$$A = 2 r_1 r_4 \cos \theta_1 - 2 r_2 r_4 \cos \theta_2$$

$$B = 2 r_1 r_4 \sin \theta_1 - 2 r_2 r_4 \sin \theta_2$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2 r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad \dots\dots\dots 2.32$$

$$t = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4(C-A)(A+C)}}{2(C-A)} = t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{(C-A)} \quad \dots\dots\dots 2.35$$

Y
$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} t \quad \dots\dots\dots 2.36$$

$$A = 2(139.8)(76.2) \cos(0) - 2(50.8)(76.2) \cos(0) = 13563.6$$

$$B = 2(139.8)(76.2) \sin(0) - 2(50.8)(76.2) \sin(0) = 0$$

$$C = (139.8)^2 + (50.8)^2 + (76.2)^2 - (152.4)^2 - 2(139.8)(50.8) (\cos 0 \cos 0 + \sin 0 \sin 0) = -9498.32$$

$$t = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4(C - A)(A + C)}}{2(C - A)} = t = \frac{-0 - \sqrt{0^2 - 9498.32^2 + 13563.6^2}}{(-9498.32 - 13563.6)} = 0.4198532$$

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1}.4195532 = 45.5505^\circ$$

$$\theta_4 = 45.5505$$

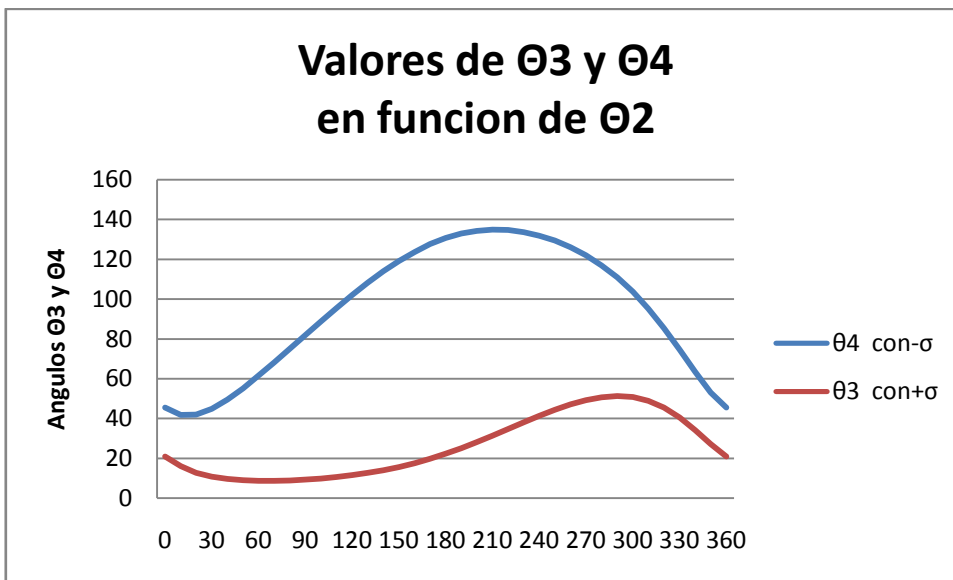
Con la ecuación 2.37 encontramos el valor de θ_3 :

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right] \dots\dots\dots 2.37$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{139.8 \sin 0 + 76.2 \sin 45.5505 - 50.8 \sin 0}{139.8 \cos 0 + 76.2 \cos 45.5505 - 50.8 \cos 0} \right] = 20.912$$

$$\theta_3 = 20.9120$$

En esta tesis realizo un programa en Excel a fin de encontrar los valores de θ_4 y θ_3 en la posición mostrada del mecanismo y en una revolución completa es decir en un rango de manivela de 0° a 360° para el ángulo θ_2 . En la gráfica 8.12 se muestra el cambio de los ángulos θ_3 y θ_4 conforme gira el mecanismo:



Gráfica 8.12. Cambio de los ángulos θ_3 θ_4 para una revolución completa del mecanismo.

Como conocemos el valor de la velocidad angular $\theta_2 = \omega = 10 \text{ rad/s}$ se procede a encontrar los valores de $\dot{\theta}_3$ y $\dot{\theta}_4$ es decir las velocidades angulares resolviendo el sistema de ecuaciones 2.47 para la posición mostrada. De modo que se tiene:

$$\begin{bmatrix} -r_j \sin \theta_j & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_j \cos \theta_j & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.47$$

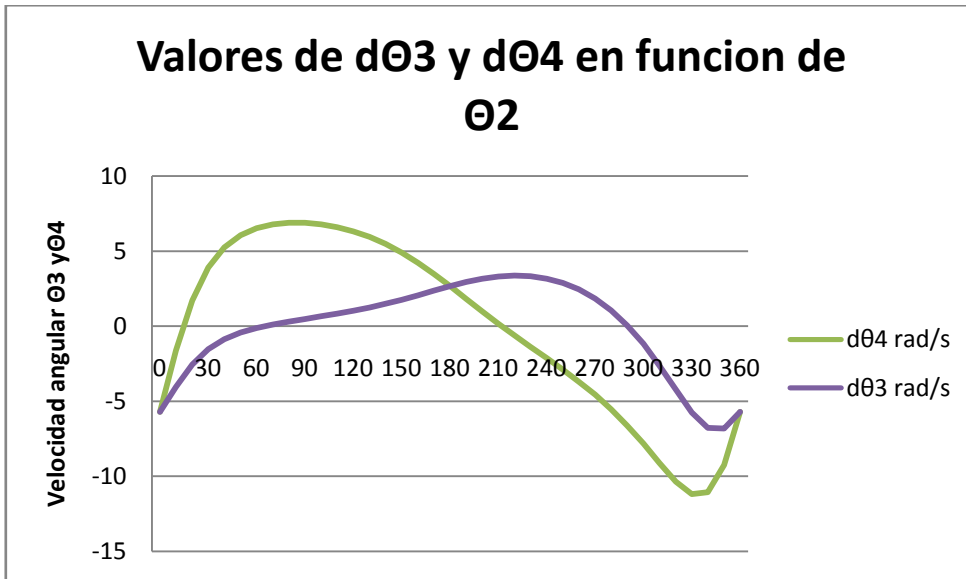
Para este caso $M=2$ y $J=3$ lo que significa que M es el eslabón 2 y J es el eslabón 3 por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} -152.4 \sin 20.912 & 76.2 \sin 45.5505 \\ -152.4 \cos 20.912 & 76.2 \cos 45.5505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (50.8) (10) \sin 0 \\ (50.8) (10) \cos 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_3 = -5.7078 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\theta}_4 = -5.7078 \text{ rad/s}$$

En base al mismo programa de Excel que se hizo referencia en párrafos anteriores tenemos los valores para $\dot{\theta}_3$ y $\dot{\theta}_4$ para una revolución completa del mecanismo y se muestran en la gráfica 8.13:



Gráfica 8.13. Cambio de las velocidades angulares dθ3 dθ4 para una revolución completa del mecanismo.

Como conocemos el valor de la velocidad angular constante $\theta_2 = \omega = 10 \text{ rad/s}$ se procede a encontrar los valores de $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_4$ es decir las aceleraciones angulares resolviendo el sistema de ecuaciones 2.53 para la posición mostrada. De modo que se tiene:

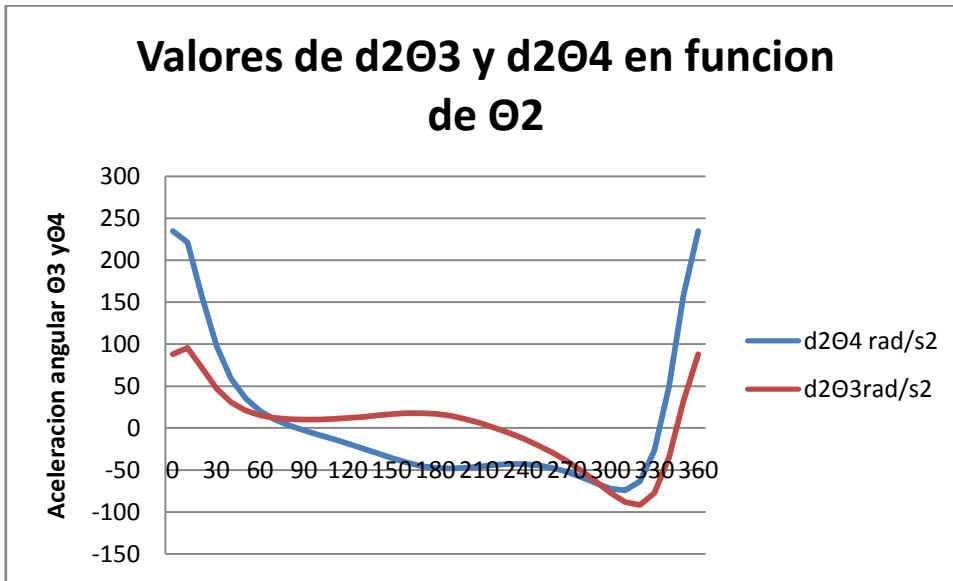
$$\begin{bmatrix} -r_j \sin \theta_j & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_j \cos \theta_j & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M + r_j \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_j \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_j + r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2.53$$

$$\begin{bmatrix} -152.4 \sin 20.912 & 76.2 \sin 45.5505 \\ -152.4 \cos 20.912 & 76.2 \cos 45.5505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (50.8)(0) \sin 0 + (50.8)(10)^2 \sin 0 + (152.4)(5.7078)^2 \sin 20.912 & -(76.2)(5.7078)^2 \sin 45.5505 \\ (50.8)(0) \cos 0 - (50.8)(10)^2 \cos 0 - (152.4)(5.7078)^2 \cos 20.912 & + (76.2)(5.7078)^2 \cos 45.5505 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta}_3 = 87.95179 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{\theta}_4 = 234.64429 \text{ rad/s}^2$$

En el programa de Excel encontramos los valores para $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_4$ para una revolución completa del mecanismo y se muestran en la gráfica 8.14:



Gráfica 8.14. Cambio de las aceleraciones angulares d2θ3 d2θ4 para una revolución completa del mecanismo.

El **CG** de cada eslabón inicialmente se define dentro de cada eslabón con respecto a un sistema de ejes local rotatorio y móvil (**LRCS**) insertado en el eslabón porque su **CG** es una propiedad física invariable. El origen de este sistema de ejes x',y' está en una junta del pasador y el eje x' es la línea de centros del eslabón como en la figura 3.5. En la siguiente figura 8.15 se muestra la ubicación de los centros de gravedad de cada eslabón este sistema.

$$L_2=26.663@17.71$$

$$L_3=80.017@17.71$$

$$L_4=40@-17.73$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

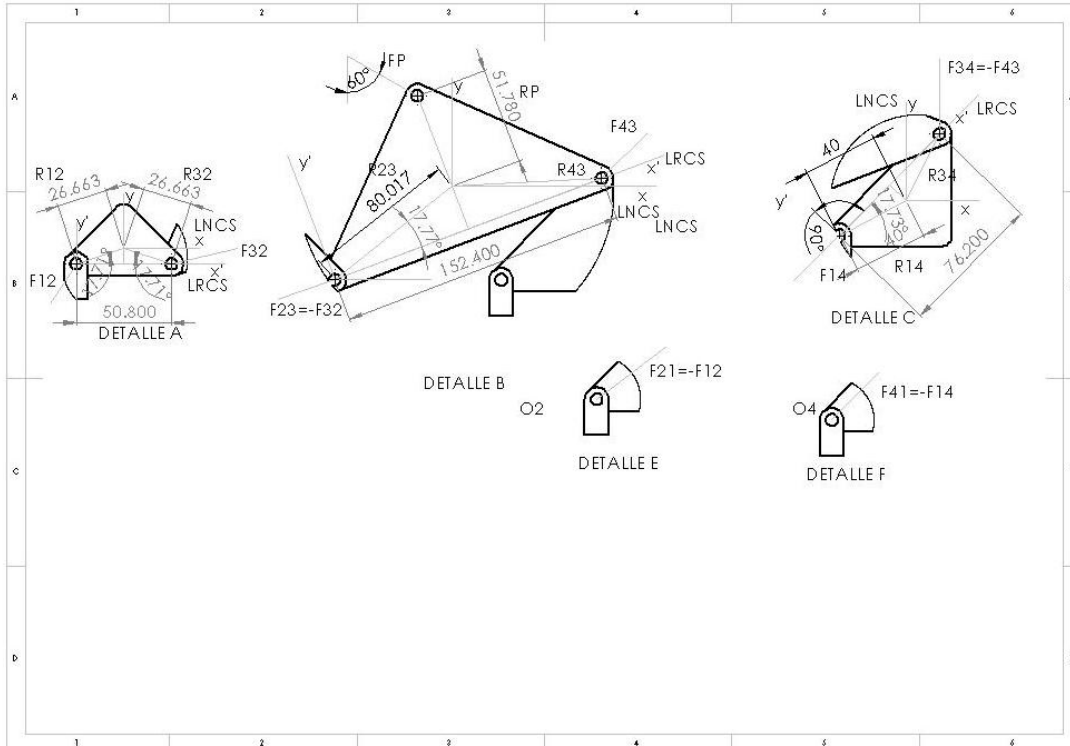
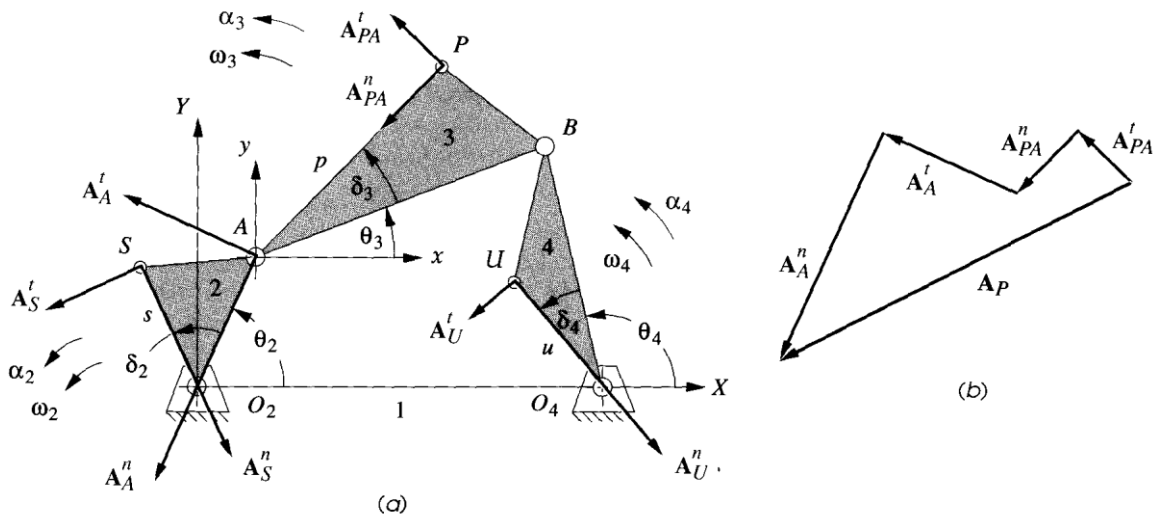


Figura 8.15. Ubicación de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema (LRCS).

Ahora se tienen que encontrar las velocidades y aceleraciones de los centros de gravedad de cada eslabón, por lo que necesitamos definir un vector con respecto a un sistema global X, Y (GCS) cuyo origen está en el pivote motriz O_2 y cuyo eje X pasa por centro O_4 del eslabón 4 realizando una analogía de la siguiente figura con nuestro ejemplo para encontrar los valores de posición velocidad y aceleración de nuestro ejemplo tenemos.



Ecuaciones para el centro de gravedad del eslabón 2:

$$\mathbf{R}_{SO_2} = \mathbf{R}_S = s e^{j(\theta_2 + \delta_2)} = s [\cos(\theta_2 + \delta_2) + j \sin(\theta_2 + \delta_2)]$$

$$L_{cg2x} = 26.663 [\cos(0 + 17.71)] = 25.399 \text{ mm}$$

$$L_{cg2y} = 26.663 [\sin(0 + 17.71)] = 8.1108 \text{ mm}$$

$$\mathbf{V}_S = j s e^{j(\theta_2 + \delta_2)} \omega_2 = s \omega_2 [-\sin(\theta_2 + \delta_2) + j \cos(\theta_2 + \delta_2)]$$

$$V_{cg2x} = (26.663)(10) [-\sin(0 + 17.71)] = -81.108 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$V_{cg2y} = (26.663)(10) [\cos(0 + 17.71)] = 253.993 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S &= s \alpha_2 j e^{j(\theta_2 + \delta_2)} - s \omega_2^2 e^{j(\theta_2 + \delta_2)} \\ &= s \alpha_2 [-\sin(\theta_2 + \delta_2) + j \cos(\theta_2 + \delta_2)] \\ &\quad - s \omega_2^2 [\cos(\theta_2 + \delta_2) + j \sin(\theta_2 + \delta_2)] \end{aligned}$$

$$A_{cg2x} = (26.663)(0) [-\sin(0 + 17.71)] - (26.663)(100) [\cos(0 + 17.71)] = -2539.993 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$A_{cg2y} = (26.663)(0) [\cos(0 + 17.71)] - (26.663)(100) [\sin(0 + 17.71)] = -811.086 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

Ecuaciones para el centro de gravedad del eslabón 4:

$$\mathbf{R}_{UO_4} = u e^{j(\theta_4 + \delta_4)} = u [\cos(\theta_4 + \delta_4) + j \sin(\theta_4 + \delta_4)]$$

$$L_{cg4x} = [40 [\cos(45.55 - 17.73)]] = 35.476 \text{ mm}$$

$$L_{cg4y} = [40 [\sin(45.55 - 17.73)]] = 18.6681 \text{ mm}$$

$$\mathbf{V}_U = j u e^{j(\theta_4 + \delta_4)} \omega_4 = u \omega_4 [-\sin(\theta_4 + \delta_4) + j \cos(\theta_4 + \delta_4)]$$

$$V_{cg4x} = [(40)(-5.7078) [-\sin(45.55 - 17.73)]] = 106.552 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$V_{cg4y} = [(40)(-5.7078) [\cos(45.55 - 17.73)]] = -201.923 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_U &= u \alpha_4 j e^{j(\theta_4 + \delta_4)} - u \omega_4^2 e^{j(\theta_4 + \delta_4)} \\ &= u \alpha_4 [-\sin(\theta_4 + \delta_4) + j \cos(\theta_4 + \delta_4)] \\ &\quad - u \omega_4^2 [\cos(\theta_4 + \delta_4) + j \sin(\theta_4 + \delta_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{cg4x} &= [(40)(234.64429) [-\sin(45.55 - 17.73)]] - [(40)(-5.7078)^2 [\cos(45.55 - 17.73)]] \\ &= -5532.92946 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

$$A_{cg4y} = [(40)(234.64429)[\cos(45.55 - 17.73)]] - [(40)(-5.7078)^2[\sin(45.55 - 17.73)]] \\ = 7692.7048 \frac{mm}{s^2}$$

Ecuaciones para el centro de gravedad del eslabón 3:

$$\mathbf{R}_{PA} = p e^{j(\theta_3 + \delta_3)} = p [\cos(\theta_3 + \delta_3) + j \sin(\theta_3 + \delta_3)]$$

$$L_{PAcg3x} = (80.017)(\cos(20.9120 + 17.77)) = 62.4634 \quad 113.263 \text{ mm}$$

$$L_{PAcg3y} = (80.017)(\sin(20.9120 + 17.77)) = 50.010 \quad 62.4634 \quad 113.263 \text{ mm}$$

$$L_{AX} = (50.8)(\cos(0)) = 50.8 \quad 113.263 \text{ mm}$$

$$L_{AY} = (50.8)(\sin(0)) = 0 \text{ mm}$$

$$L_{cg3x} = L_{PAcg3x} + L_{AX} = 62.4634 + 50.8 = 113.263 \text{ mm}$$

$$L_{cg3y} = L_{PAcg3y} + L_{AY} = 50.014 + 0 = 50.014 \text{ mm}$$

$$\mathbf{V}_{PA} = j p e^{j(\theta_3 + \delta_3)} \omega_3 = p \omega_3 [-\sin(\theta_3 + \delta_3) + j \cos(\theta_3 + \delta_3)]$$

$$V_{PAcg3x} = (80.017)(-5.7078)(-\sin(20.9120 + 17.77)) = 285.449 \frac{mm}{s}$$

$$V_{PAcg3y} = (80.017)(-5.7078)(\cos(20.9120 + 17.77)) = -356.5286 \frac{mm}{s}$$

$$V_{Ax} = (50.8)(10)(\sin(0)) = 0 \frac{mm}{s}$$

$$V_{cg3x} = V_{PAcg3x} + V_{Ax} = 285.449 + 0 = 285.449 \text{ mm}$$

$$V_{Ay} = (50.8)(10)(\cos(0)) = 508 \frac{mm}{s}$$

$$V_{cg3y} = V_{PAcg3y} + V_{Ay} = -356.5286 + 508 = 151.4714 \text{ mm}$$

$$\mathbf{A}_{PA} = p \alpha_3 j e^{j(\theta_3 + \delta_3)} - p \omega_3^2 e^{j(\theta_3 + \delta_3)} \\ = p \alpha_3 [-\sin(\theta_3 + \delta_3) + j \cos(\theta_3 + \delta_3)] \\ - p \omega_3^2 [\cos(\theta_3 + \delta_3) + j \sin(\theta_3 + \delta_3)]$$

$$A_{PAcg3x} = [(80.017)(87.95179)(-\sin(20.9120 + 17.77))] \\ - [(80.017)(-5.7078)^2(\cos(20.9120 + 17.77))] = -6437.39 \frac{mm}{s^2}$$

$$A_{Ax} = [(50.8)(0)(-\sin(0))] - [(50.8)(10)^2(\cos(0))] = -5080 \frac{mm}{s^2}$$

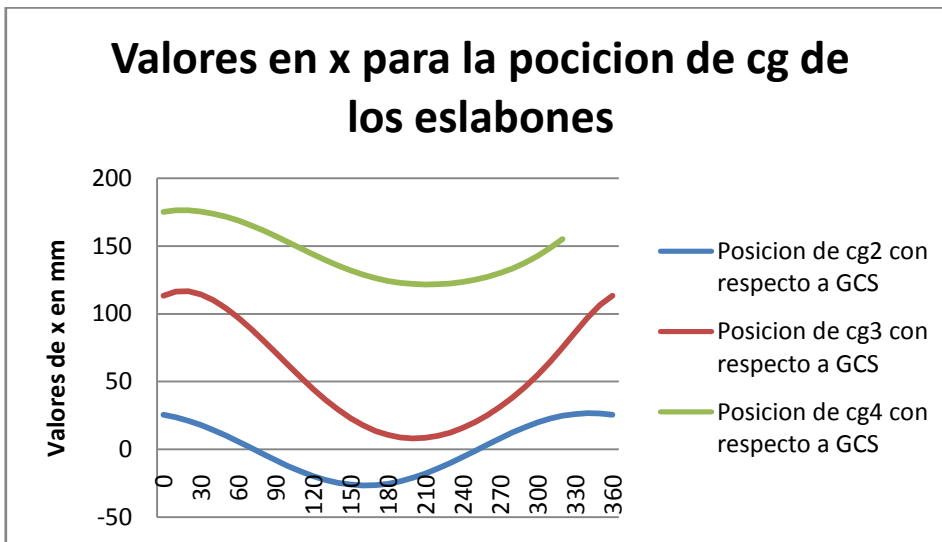
$$A_{cg3x} = A_{PAcg3x} + A_{Ax} = -6437.39 - 5080 = -11513.548 \text{ mm}/s^2$$

$$A_{P_{Acg3y}} = [(80.017)(87.95179)(\cos(20.9120 + 17.77))] - [(80.017)(-5.7078)^2(\sin(20.9120 + 17.77))] = 3864.48 \frac{mm}{s^2}$$

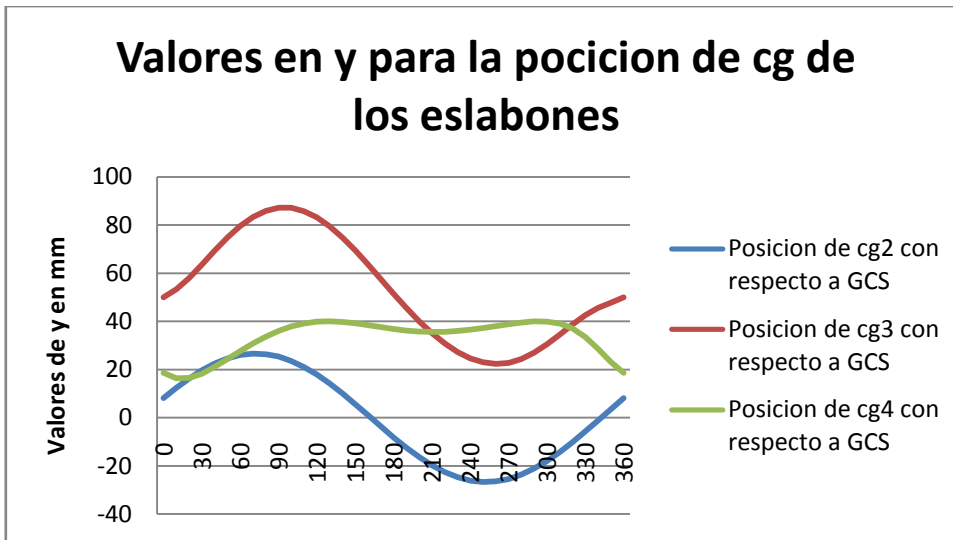
$$A_{Ay} = [(50.8)(0)(\cos(0))] - [(50.8)(10)^2(\sin(0))] = 0 \frac{mm}{s}$$

$$A_{cg3x} = A_{P_{Acg3x}} + A_{Ax} = 3864.48 + 0 = 3864.48 \frac{mm}{s^2}$$

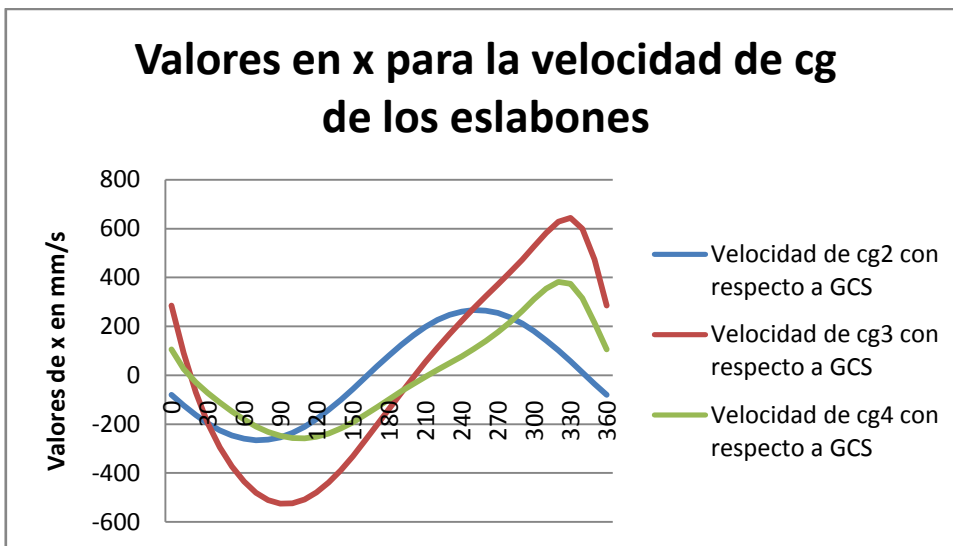
Ahora se muestran gráficas, **8.16**, **8.17**, **8.18**, **8.19**, **8.20** y **8.21** las componentes de posición velocidad y aceleración década eslabón en una revolución del mecanismo calculado en el programa de Excel con respecto al sistema global (**GCS**) cuyo origen está en el pivote motriz **O₂** y cuyo eje **X** pasa por el motriz **O₄**.



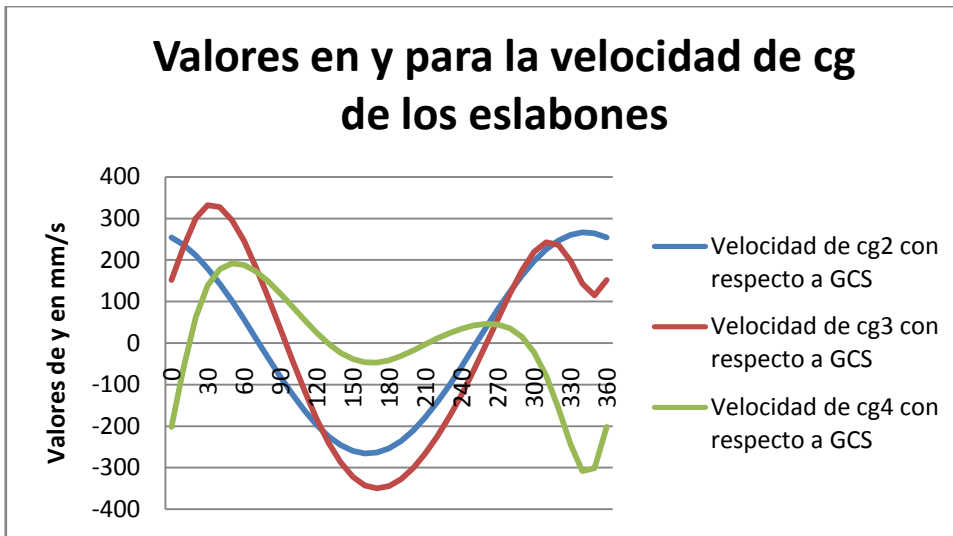
Gráfica 8.16. Ubicación de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema para una revolución del mecanismo (LRCS) componente x.



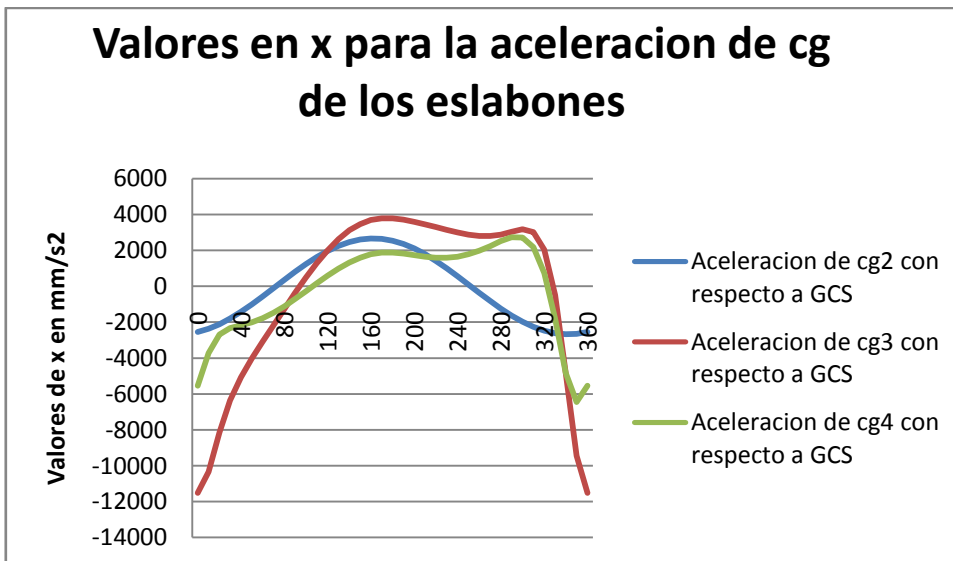
Gráfica 8.17. Ubicación de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema para una revolución del mecanismo (LRCS) componente y.



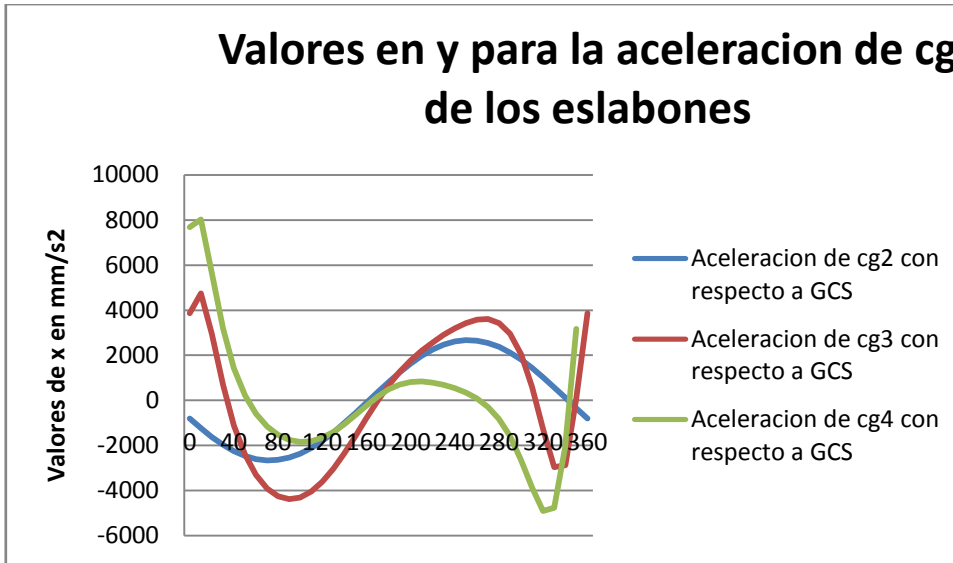
Gráfica 8.18. Velocidad de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema para una revolución del mecanismo (LRCS) componente x.



Gráfica 8.19. Velocidad de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema para una revolución del mecanismo (LRCS) componente y.



Gráfica 8.20. Aceleración de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema para una revolución del mecanismo (LRCS) componente x.



Gráfica 8.21. Aceleración de los centros de gravedad de cada eslabón referidos a su sistema para una revolución del mecanismo (LRCS) componente y.

Una vez definidos los valores de aceleración del centro de gravedad para el mecanismo se procede a encontrar la fuerzas en los pasadores, para ello es necesario definir vectores de posición que partan del centro de gravedad de cada eslabón hacia el pasador y recordando nuestra convención de signos R_{12} significa el vector del eslabón 2 hacia el eslabón 1, los vectores así como las ubicaciones de las fuerzas con respecto a un sistema de ejes local móvil, pero no rotativo (LNCS) x,y localizado en su CG como se muestra para diagrama de cuerpo libre en la figura 3.5b, los valores de estos vectores para nuestro ejemplo se muestran en la figura 8.22.

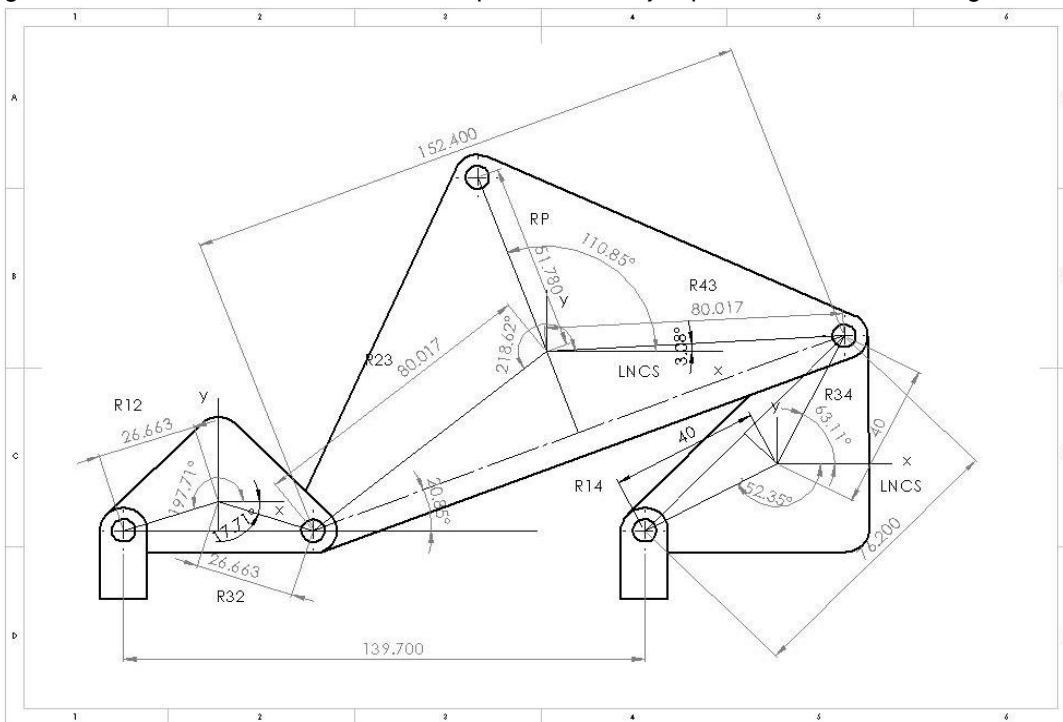


Figura 8.22. Vectores que parten del centro de gravedad (sistema LNCS) de cada eslabón hacia los pasadores.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Para la posición que se tienen en nuestro ejemplo tenemos:

$R_{12}=26.63\text{mm}@<197.71^\circ$	$R_{12x}=-25.38$	$R_{12y}=-8.1551$
$R_{32}=26.663\text{mm}@<-17.71^\circ$	$R_{32x}=25.4$	$R_{32y}=-8.11$
$R_{23}=80.017\text{mm}@<218.62^\circ$	$R_{23x}=-62.46$	$R_{23y}=-50.010$
$R_{43}=80.017@<3.08^\circ$	$R_{43x}=79.89$	$R_{43y}=4.385$
$R_{34}=40\text{mm}@<63.11^\circ$	$R_{34x}=17.984$	$R_{34y}=35.728$
$R_{14}=40\text{mm}@<-152.35^\circ$	$R_{14x}=-35.376$	$R_{14y}=-18.668$
$R_p=51.780\text{mm}@<110.85^\circ$	$R_{px}=-18.482$	$R_{py}=48.369$

Ahora se procede a introducir los valores de las componentes de estos vectores así como los valores de masa, momentos de inercia zz ya que es eje donde se realiza el movimiento (referidos a el centro de gravedad de cada eslabón), aceleraciones angulares, vectores de fuerzas externas y pares externos aplicados al sistema en la matriz **3.39** y encontrar los valores para las reacciones cabe recordar que estos valores son solo para la posición congelada que tenemos de la figura ya que estos vectores cambian de orientación conforme se mueve el mecanismo, en el programa de Excel se encuentran todos los valores de estos vectores y las resultantes de los pasadores para cada posición del mecanismo. La fuerza externa que se aplica a este mecanismo es de $10\text{N}@<330^\circ$ en el punto R_p y en nuestro caso este valor así como su posición es constante.

$$M_2=0.02607\text{kg} \quad I_{gz2}=7.589\text{kg}\cdot\text{mm}^2$$

$$M_3=0.14327\text{kg} \quad I_{gz3}=250.313\text{kg}\cdot\text{mm}^2$$

$$M_4=.04702\text{kg} \quad I_{gz4}=25.572\text{kg}\cdot\text{mm}^2$$

$$F_p=10\text{N}@<330^\circ=10000\text{kg}\cdot\text{mm}/\text{s}^2 \quad F_{px}=8660.25 \quad F_{py}=-5000$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_2 a_{G_2x} \\ m_2 a_{G_2y} \\ I_{G_2} \alpha_2 \\ m_3 a_{G_3x} - F_{px} \\ m_3 a_{G_3y} - F_{py} \\ I_{G_3} \alpha_3 - R_{px} F_{py} + R_{py} F_{px} \\ m_4 a_{G_4x} \\ m_4 a_{G_4y} \\ I_{G_4} \alpha_4 - T_4 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \mathbf{3.39}$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

Para nuestro ejemplo la matriz que tenemos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 8.1551 & -25.38 & 8.11 & 25.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -50.010 & 62.46 & -4.385 & 79.89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 35.728 & -17.984 & 18.668 & -35.376 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 -66.2162 \\
 -21.145 \\
 0 \\
 -10309.8 \\
 5553.6584 \\
 348495.124 \\
 -260.1583 \\
 361.7109 \\
 6000.3685
 \end{bmatrix}
 \dots\dots\dots \mathbf{3.39}$$

$$\begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -24145.173 \\
 -8258.08 \\
 24103.979 \\
 8246.83 \\
 13897.24 \\
 13764.705 \\
 13670.668 \\
 14082.25 \\
 -417710.84
 \end{bmatrix}$$

Al convertir las fuerzas a coordenadas polares tenemos:

$$F_{12} = 25518.33@ < -161.118 \frac{kgmm}{s^2} \qquad F_{12} = 25.51833@ < -161.118 N$$

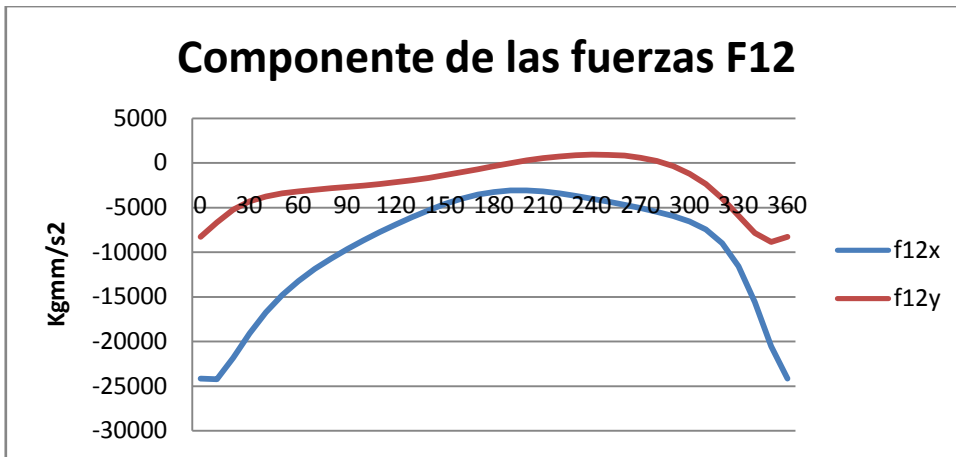
$$F_{32} = 24475.711@ < 18.88 \frac{kgmm}{s^2} \qquad F_{32} = 24.475711@ < 18.88 N$$

$$F_{43} = 19560.17@ < 44.725 \frac{kgmm}{s^2} \qquad F_{43} = 19.56017@ < 44.725 N$$

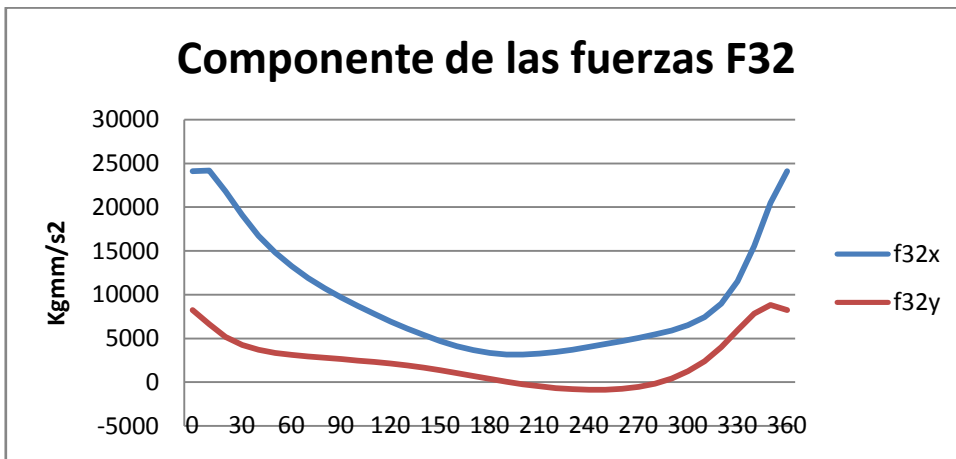
$$F_{14} = 19626.43@ < 45.849 \frac{kgmm}{s^2} \qquad F_{14} = 19.62643@ < 45.849 N$$

$$T_{12} = -417710.84kgmm^2/s^2 \qquad T_{12} = -0.417710.84Nm$$

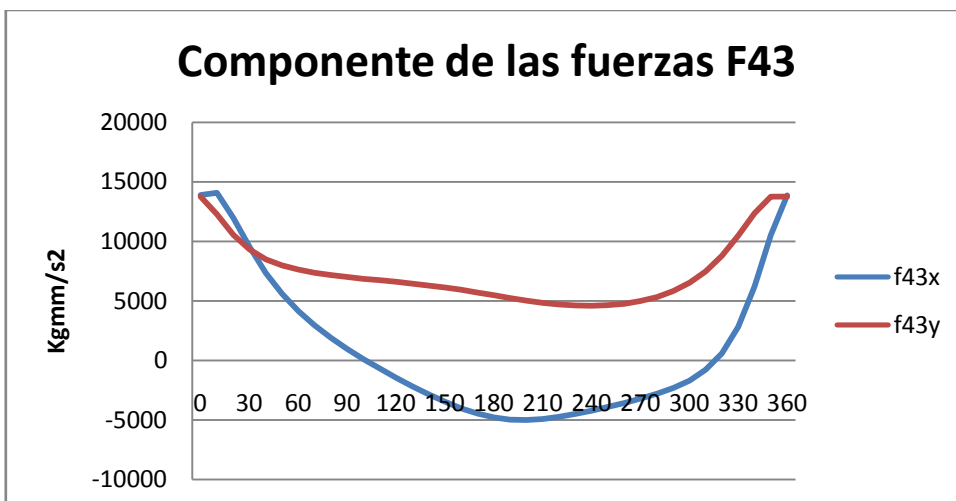
A continuación se presentan las gráficas, **8.23**, **8.24**, **8.25** y **8.26** de las componentes de cada una de estas fuerzas para una revolución completa del mecanismo, cabe recordad que las unidades son kg mm/s² de modo que para expresar estos valores en N basta con dividirlos entre 1000. Así también se presenta la grafica **8.27** de el par de entrada necesario para que ese mecanismo funcione a 10rad/s, las unidades de este par son kgmm²/s de modo que para obtener el valor en N*m basta con dividir estos valores entre 1000000.



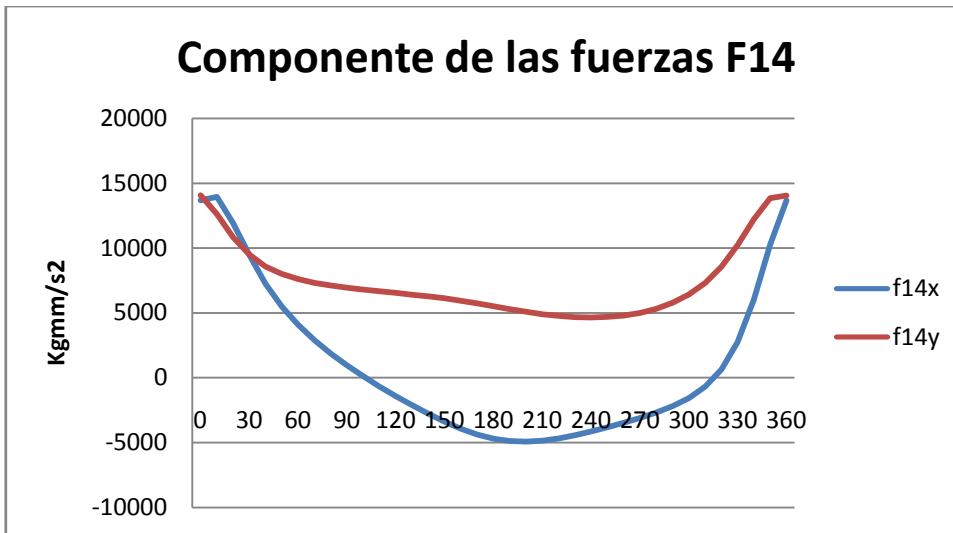
Gráfica 8.23. Componentes de las fuerzas que ejerce el eslabón 1 al eslabón 2 las unidades son en Kg mm/s² de modo que para obtener el valor en N basta con dividir estos valores entre 1000.



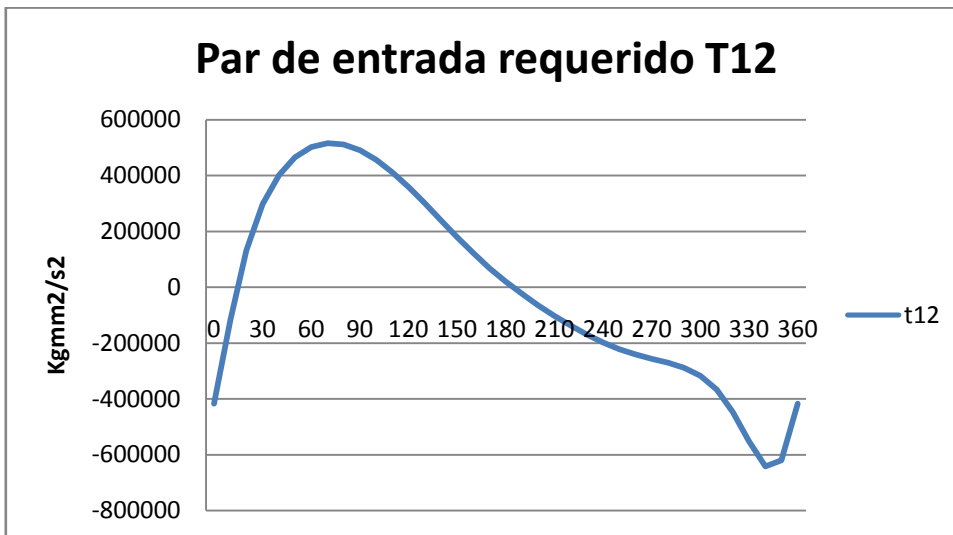
Gráfica 8.24. Componentes de las fuerzas que ejerce el eslabón 3 al eslabón 2 las unidades son en Kg mm/s² de modo que para obtener el valor en N basta con dividir estos valores entre 1000.



Gráfica 8.25. Componentes de las fuerzas que ejerce el eslabón 4 al eslabón 3 las unidades son en Kg mm/s² de modo que para obtener el valor en N basta con dividir estos valores entre 1000.



Gráfica 8.26. Componentes de las fuerzas que ejerce el eslabón 1 al eslabón 4 las unidades son en Kg mm/s² de modo que para obtener el valor en N basta con dividir estos valores entre 1000.



Gráfica 8.27. Par de torsión de entrada requerido por nuestro Kg mm² /s² de modo que para obtener el valor en Nm basta con dividir estos valores entre 1000000.

Ahora se procede a encontrar el valor de las masas de balanceo necesarias para reducir la fuerza de sacudimiento de este mecanismo.

En base a las ecuaciones para encontrar las masas de balanceo que a continuación se presentan tenemos:

$$m_3 = 0.14327kg$$

$$b_3 = 80.17mm$$

$$l_2 = 50.8mm$$

$$l_3 = 152.4mm$$

$$l_4 = 76.2mm$$

$$\phi_3 = 17.77^\circ$$

$$(m_2b_2)_x = m_3 \left(b_3 \frac{l_2}{l_3} \cos \phi_3 - l_2 \right) \dots\dots\dots \mathbf{5.15}$$

$$(m_2b_2)_x = 0.14327kg \left[(80.17mm) \left(\frac{50.8}{152.4} \right) (\cos 17.77) - 50.8 \right] = -3.6390 \text{ kgmm}$$

$$(m_2b_2)_y = m_3 \left(b_3 \frac{l_2}{l_3} \sin \phi_3 \right) \dots\dots\dots \mathbf{5.16}$$

$$(m_2b_2)_y = 0.14327kg \left[(80.17mm) \left(\frac{50.8}{152.4} \right) (\sin 17.77) \right] = 1.1662 \text{ kgmm}$$

$$(m_4b_4)_x = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} \cos \phi_3 \dots\dots\dots \mathbf{5.17}$$

$$(m_4b_4)_x = 0.14327kg \left[(80.17mm) \left(\frac{76.2}{152.4} \right) (\cos 17.77) \right] = -5.4585 \text{ kgmm}$$

$$(m_4b_4)_y = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} \sin \phi_3 \dots\dots\dots \mathbf{5.18}$$

$$(m_4b_4)_y = 0.14327kg \left[(80.17mm) \left(\frac{76.2}{152.4} \right) (\sin 17.77) \right] = -1.7493 \text{ kgmm}$$

Se requiere estas componentes del producto **mR** para hacer que el balanceo de fuerzas del mecanismo represente toda cantidad necesaria. Si ya se han diseñado los eslabones 2 y 4 con cierto desbalanceo individual (el **CG** no es el pivote), entonces el producto **mR** existente del eslabón desbalanceado debe restarse del obtenido con las ecuaciones **5.15 a 5.17** para determinar la ubicación y el tamaño de los contrapesos adicionales que se agregan a estos eslabones.

De modo que tenemos:

$$M_2=0.02607kg \quad L_2=26.663@17.71 \quad M_{2x} = 0.662kgmm \quad M_{2y} = 0.21145kgmm$$

Mesas de balanceo

$$m_{2x}b_{2x} = -3.6390 - 0.662 = -4.30125kgmm$$

$$m_{2y}b_{2y} = 1.1662 - 0.21145 = 0.95481kgmm$$

$$m_2b_2 = 4.4059@ < 167.48kgmm$$

$$M_4=0.04702kg \quad L_4=40@-17.73 \quad M_{4x} = 1.7914kgmm \quad M_{4y} = -0.5727kgmm$$

$$m_{4x}b_{4x} = -5.4585 - 1.79147 = -7.250kgmm$$

$$m_{4y}b_{4y} = -1.7493 - (-0.5727) = -1.1766kgmm$$

$$m_4b_4 = 7.3448@ < -170.788kgmm$$

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

La suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de la bancada recibe el nombre de **fuerzas de sacudimiento** (F_S), de acuerdo con las ecuaciones **3.59**, **3.60** y **3.61** para nuestro ejemplo tenemos como se muestra en la figura **3.7**, que en estos ejemplos simples es igual a:

$$F_S = F_{21} + F_{41} \dots \dots \mathbf{3.61}$$

$$F_{21} = -F_{12} \dots \dots \mathbf{3.59} \quad F_{21} = 25518.33 @ < 18.88 \text{ kgmm/s}^2$$

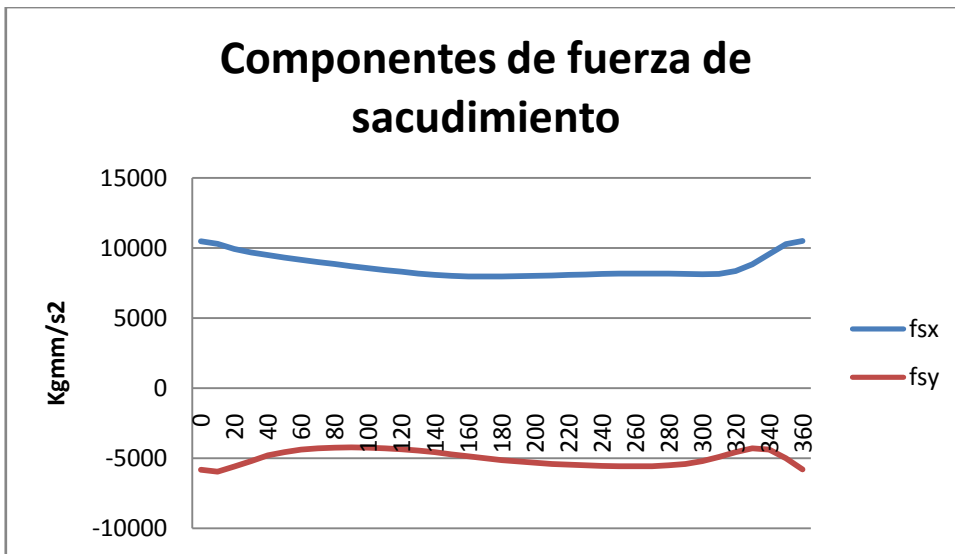
$$F_{21x} = 24145.173 \quad F_{21y} = 8258.08$$

$$F_{41} = -F_{14} \dots \dots \mathbf{3.60} \quad F_{41} = 19626.43 @ < -134.15 \frac{\text{kgmm}}{\text{s}^2}$$

$$F_{41x} = -13670.668 \quad F_{41y} = -14082.25$$

$$F_S = (24145.173 - 13670.668)i + (8258.08 - 14082.25)j = 10474.05i - 5824.17j$$

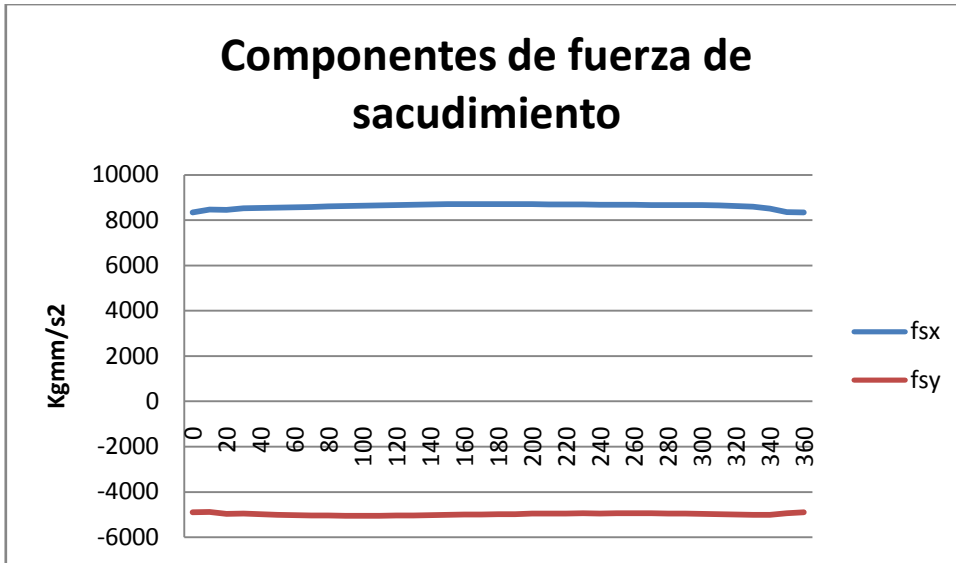
La gráfica **8.28** presenta los valores de las componentes de la fuerza de sacudimiento para una revolución de nuestro mecanismo:



Gráfica 8.28. Componentes de la fuerza de sacudimiento en $\text{Kg mm} / \text{s}^2$ de modo que para obtener el valor en N basta con dividir estos valores entre 1000.

Una vez calculados los contrapesos se procede a adherirlos al mecanismo y realizar una vez más todos los cálculos de posición, velocidad, y aceleración de los centros de masa de cada eslabón, así como los nuevos vectores que parten del centro de gravedad (sistema LNCS) de cada eslabón hacia los pasadores, se introducen estos nuevos valores en la matriz **3.39**, se resuelve para todas las posiciones del mecanismo, así como también se procede a encontrar la nueva fuerza de sacudimiento.

En la grafica **8.29** se muestra la fuerza de sacudimiento después de adherir los contrapesos a los eslabones 2 y 4.



Gráfica 8.29. Componentes de la fuerza de sacudimiento del sistema balanceado los en Kg mm /s^2 de modo que para obtener el valor en N basta con dividir estos valores entre 1000.

Al realizar una comparación de las fuerza de sacudimiento de las gráficas 8.28 y 8.29 de nuestro mecanismo sin balancear y balanceado respectivamente, observamos que nuestra fuerza de sacudimiento del mecanismo balanceado es más uniforme con respecto a la fuerza de sacudimiento del mecanismo sin balancear balancear. La fuerza de sacudimiento neta es la suma vectorial de estos dos conjuntos de fuerza en cada intervalo de tiempo. Los pares de fuerzas iguales y opuestas que actúan en los pivotes de la bancada, en cada intervalo de tiempo, crean en la bancada un par de sacudimiento variable con el tiempo. Estas fuerzas de pasador pueden ser mayores debido a los pesos del balanceo, de ser así, incrementan el par de sacudimiento en comparación con su valor anterior en el mecanismo no balanceado. Los esfuerzos en los eslabones y los pasadores pueden sufrir un incremento debido al balanceo de fuerzas. Sin embargo al balancear un mecanismo tenemos un comportamiento uniforme de la fuerza de sacudimiento, lo que significa que se transmitirán menores vibraciones al plano de la bancada.

VII.4. BALANCEO DE UN MOTOR DE UN CILINDRO

En la figura 8.30 se presenta un motor de un cilindro el cual se pretende balancear, el cual gira a una velocidad angular constante de 3400rpm (356.04rad/s).

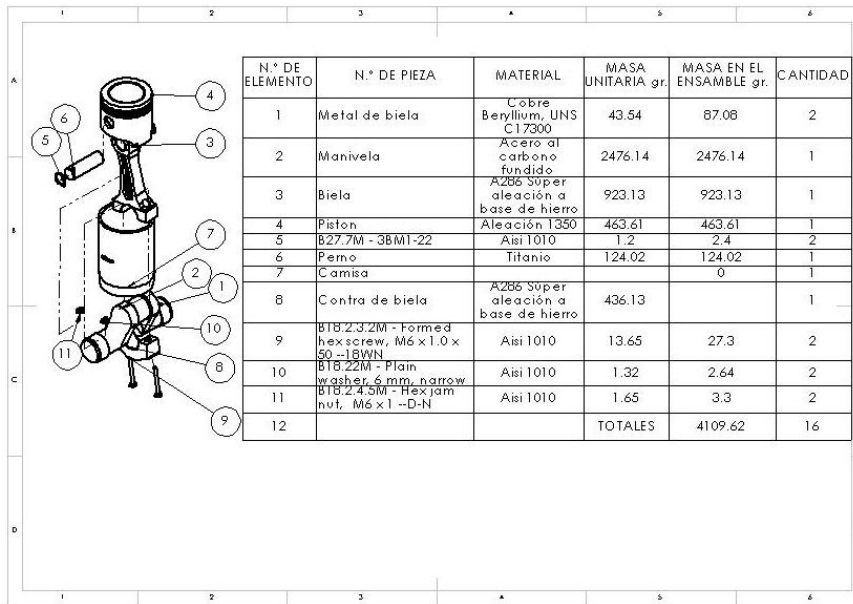


Figura 8.30. Motor de un cilindro a balancear.

Para el balanceo de este mecanismo tenemos que obtener un modelo equivalente de las masas concentradas en el muñón de la manivela se muestran en la figura 8.31. Para obtener el valor de la de la biela concentrada en el muñón de la manivela, de acuerdo a las ecuaciones 6.49 y 6.50 tenemos:

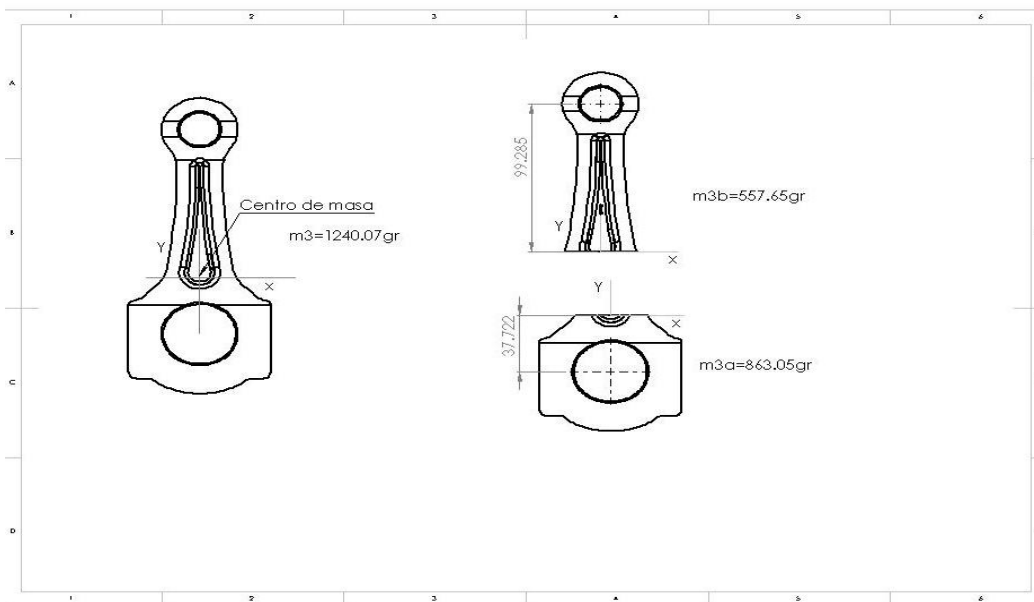


Figura 8.31. Modelo equivalente de biela para el balanceo de masas.

$$m_{3a} = m_3 \frac{l_b}{l_a+l_b} \dots\dots\dots \mathbf{6.49}$$

$$m_{3a} = (1420.07) \frac{99.285}{37.722 + 99.285} = 1029.08gr$$

Podemos observar de la figura que:

$$m_{3a} = 863.05gr$$

$$m_{3b} = m_3 \frac{l_a}{l_a+l_b} \dots\dots\dots \mathbf{6.50}$$

$$m_{3b} = 1420.07 \frac{37.722}{37.722 + 99.285} = 390.98gr$$

Podemos observar de la figura también que:

$$m_{3a} = 557.65gr$$

Para la masa de la manivela concentrada en el muñón de la biela que se muestra en la figura **8.32** tenemos:

$$m_{2a} = \frac{m_2 r_{G2}}{r} \dots\dots\dots \mathbf{6.53}$$

$$m_{2a} = \frac{(1395.86)(34.440)}{54.991} = 874.2gr$$

Para encontrar la masa que se encuentra concentrada en el muñón de la manivela tenemos:

$$m_A = m_{2a} + m_{3a} \dots\dots\dots \mathbf{6.54}$$

$$m_A = 874.2 + 557.65 = 1431.85gr = 1.43185kg$$

$$m_B = m_{3b} + m_4 \dots\dots\dots \mathbf{6.55}$$

$$m_B = 557.65 + 463.61 = 1021.26 gr = 1.02126kg$$

El producto de mR resulta de multiplicar m_A por la distancia del eje de giro al muñón de la manivela para nuestro caso tenemos:

$$m_A R = (1431.85gr)(54.991mm)$$

Para el balanceo de este mecanismo basta con agregar a 180 grados este mismo producto siempre y cuando el contrapeso no se trabe con el pistón en su pinto muerto inferior como se observa en la figura **6.21 a**.

Ahora procedemos a evaluar los valores de la fuerza de sacudimiento, antes y des pues de ser balanceado. Cabe destacar que las componentes para nuestro ejemplo se encuentran inveridas es decir la componente **x** de la ecuación **6.63** en nuestro ejemplo en realidad es la componente **y**, así como la componente **y** de la ecuación **6.64** en nuestro ejemplo es la componente **x**.

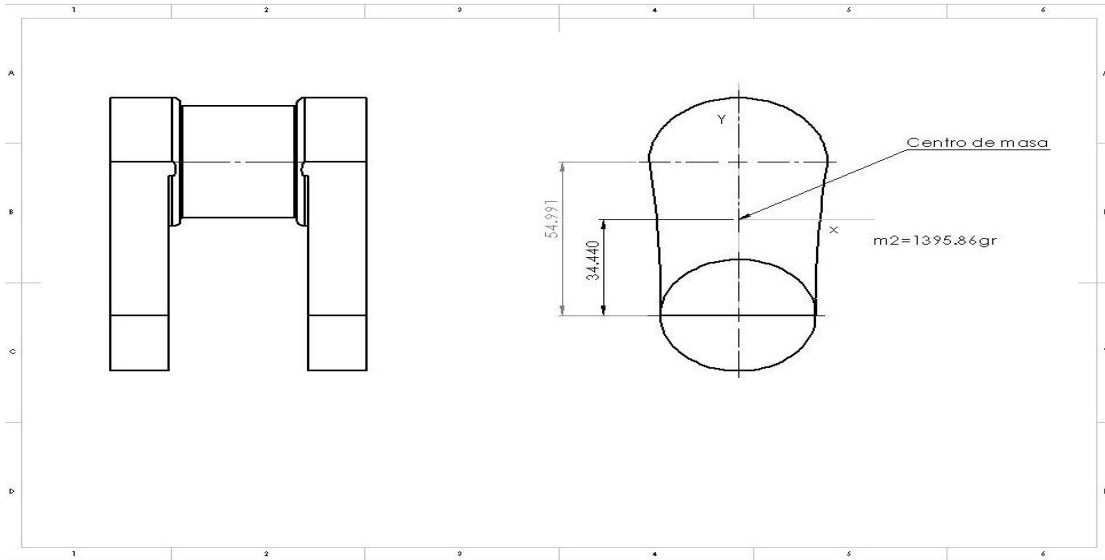


Figura 8.32. Modelo equivalente de la manivela para el balanceo de masas.

La **fuerza de sacudimiento** se define como la suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de la bancada de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre del eslabón 1 en la figura 6.9, de aquí se tiene

$$\sum F_{s,x} \cong -m_A(r\omega^2 \cos \omega t) - m_B \left[r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \dots\dots 6.63$$

$$\sum F_{s,y} \cong -m_A(r\omega^2 \sin \omega t) + F_{i_{41}} - F_{i_{14}} \dots\dots 6.64$$

Se puede observar que la fuerza lateral del pistón $F_{i_{41}}$ en la pared del cilindro se cancela por una fuerza igual y opuesta $F_{i_{14}}$ que pasa a través de la biela y el cigüeñal hacia el muñón principal en O_2 .

Por lo tanto para nuestro ejemplo tenemos:

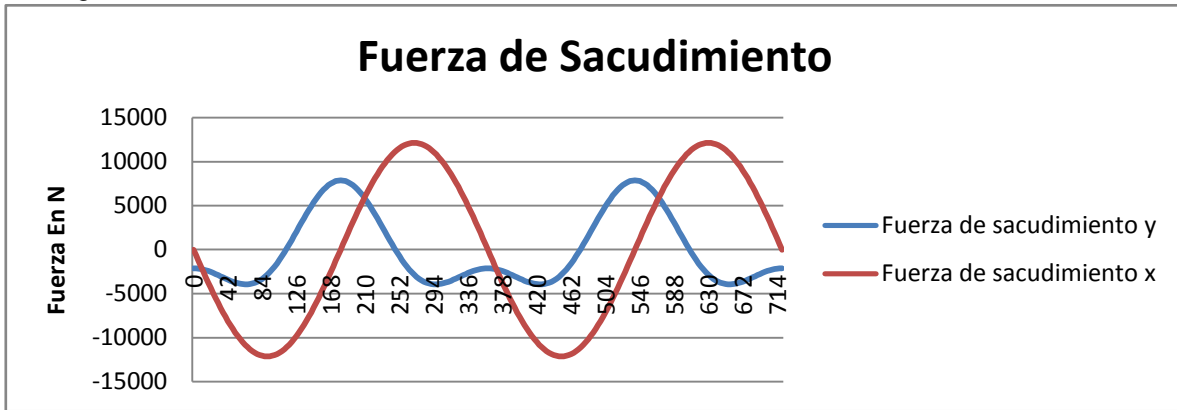
$$\sum F_{s,y} \cong -m_A(r\omega^2 \cos \omega t) - m_B \left[r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right]$$

$$\sum F_{s,y} \cong -1.43185(0.054991 * 356.04^2 * \cos 0) - 1.02126 \left[0.054991 * 356.04^2 \left(\cos 0 + \frac{54.991}{137.07} \cos(2 * 0) \right) \right] = -2135.29746 \text{ N}$$

$$\sum F_{s,x} \cong -m_A(r\omega^2 \sin \omega t)$$

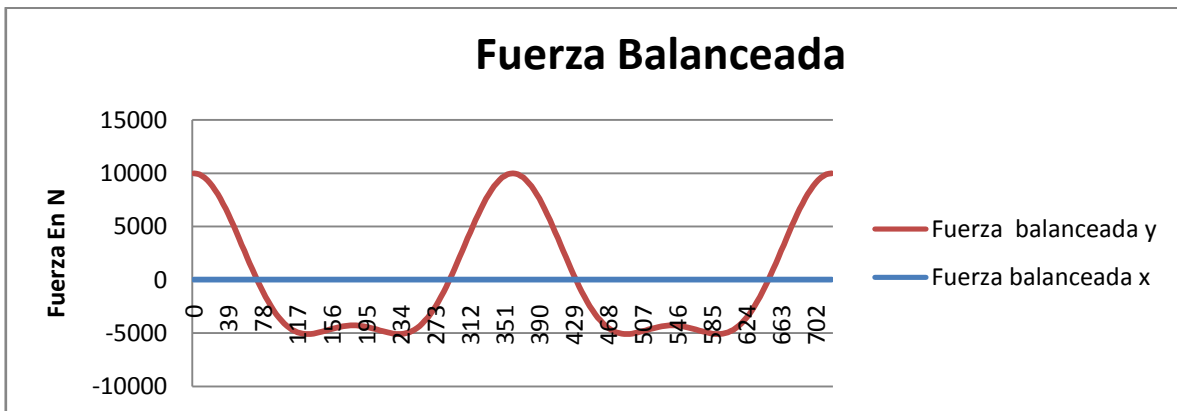
$$\sum F_{s,x} \cong -1.43185(0.054991 * 356.04^2 * \sin 0) = 0 \text{ N}$$

En la gráfica 8.33 se muestran los valores de la fuerza de sacudimiento de nuestro mecanismo.



Gráfica 8.33. Componentes de la fuerza de sacudimiento del mecanismo manivela-corredera de nuestro ejemplo en N.

Una vez balanceado el mecanismo se procede a encontrar los valores de la fuerza de sacudimiento, como hemos visto este es un caso de balanceo estático, los valores de la fuerza de sacudimiento se muestran en la gráfica 8.34. Como podemos observar el valor de sacudimiento de la componente x se reduce a 0 y la componente y se debe al efecto de la masa del pistón.



Gráfica 8.34. Componentes de la fuerza de sacudimiento una vez balanceado el mecanismo manivela-corredera de nuestro ejemplo en N.

ADICIÓN DE CONTRAPESOS PARA EL BALANCEO DE MECANISMOS PLANOS

TABLA DE RESUMEN DE CASOS PRACTICOS

	Fuerza de Sacudimiento sin Balancear En N�wtones				Fuerza de Sacudimiento Balanceado En N�wtones			
	Componente x		Componente y		Componente x		Componente y	
	Valor Máximo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Valor Mínimo
Balanceo Est�tico	Valor Máximo	5.199456	Valor Máximo	5.199456	Valor Máximo	3.52E-15	Valor Máximo	3.52E-15
	Valor Mínimo	-5.199456	Valor Mínimo	-5.199456	Valor Mínimo	-3.52E-15	Valor Mínimo	-3.52E-15
Balanceo Dinámico	Valor Máximo Q	2746.37	Valor Máximo Q	2746.37	Valor Máximo Q	3.40E-04	Valor Máximo Q	2.40E-03
	Valor Mínimo Q	-2746.27	Valor Mínimo Q	-2746.27	Valor Mínimo Q	-3.40E-04	Valor Mínimo Q	-2.40E-03
	Valor Máximo P	2659.66	Valor Máximo P	2659.66	Valor Máximo P	2.40E-03	Valor Máximo P	2.40E-03
	Valor Mínimo P	-2659.66	Valor Mínimo P	-2659.66	Valor Mínimo P	-2.40E-03	Valor Mínimo P	-2.40E-03
Balanceo Mecanismo 4 Barras	Valor Máximo	10.5641	Valor Máximo	-4.229	Valor Máximo	8.717	Valor Máximo	-4.886
	Valor Mínimo	7.954	Valor Mínimo	-5.959	Valor Mínimo	8.344	Valor Mínimo	-5.058
Balanceo Mecanismo Manivela Corredera	Valor Máximo	12110.47	Valor Máximo	7847.12	Valor Máximo	0	Valor Máximo	9975.17
	Valor Mínimo	-12110.47	Valor Mínimo	-3994.62	Valor Mínimo	0	Valor Mínimo	-5074.075

CONCLUSIONES

En la actualidad nuestra vida se encuentra muy ligada a las máquinas, dependemos mucho de ellas, para transportarnos, para fabricar productos de consumo humano y algunas otras necesidades no tan básicas.

Las máquinas son construidas a base de mecanismos los cuales, después de estar sometidos un gran número de ciclos de cargas, estas cargas se deben tanto a las fuerzas externas que recibe el mecanismo como a las fuerzas de inercia debidas a la masa del mismo.

A fin de dar un mayor tiempo de vida a los mecanismos sin que estos fallen, es necesario someterlos a un proceso de balanceo, bien en el proceso de diseño del mismo o en campo ya que como se observo en esta tesis las fuerzas del mecanismo desbalanceado pueden llegar a ser de gran magnitud, y ocasionar el fallo prematuro en estos.

Con los procesos de balanceo que se abordaron en esta tesis se puede lograr que los mecanismos y algunos elementos de máquina sometidos a rotación tengan un mayor tiempo de vida, por ende eliminar costos que ocasionaría el manteamiento de las máquinas tales como: máquina parada, refacciones, honorarios de servicio técnico etc.

Con el balanceo de mecanismos y elementos de máquina sometidos a rotación, podemos lograr mayor vida en los elementos de las maquinas, reducción costos de mantenimiento, reducción de contaminación por ruido, fuerzas de vibración. Por lo tanto con el balanceo podemos obtener un mayor confort para el ser humano quien finalmente es el usuario de las maquinas.

Y ese confort es el que a nosotros como ingenieros debemos lograr, a fin de hacer más placentera la estancia del ser humano.

BIBLIOGRAFIA.

1. **Robert L. Norton.** (2005). *Diseño de maquinaria.* McGraw-Hill
2. **Kenneth J. Waldron & Gary L. Kinzel.**(1999). *Kinematics, Dynamics, And Design Of Machinery.* John Wiley & Sons, Inc New York.
3. **Joseph Edward Shigley & John Joseph Uicker, Jr.** (1988). *Teoría de maquinas y mecanismos.* McGraw-Hill .
4. **Harry R. Nara** (1964). *Mecánica Vectorial Para Ingenieros Parte 1: Estática.* Limusa Wiley S.A Mexico. D.F.
5. **R.C. Hibbeler. Séptima Edición** (1996). *Ingeniería Mecánica Dinámica.* Pearson Educación México Edo. Mex.
6. **Heywood, J.B.** (1988). *Internal Combustion Engine Fundamentals,* McGraw-Hill: Nueva York
7. **Taylor, C.F** (1966) .*The internal Combustion Engine In theory And Practice,* MIT Press: Cambridge, MA.
8. **Heisler, H** (1999). *Vehicle and Engine Technology,* A Ed., SAE: Warrendale, P.A.
9. **Crouse, W. H.** (1970). *Automotive Engine Design.* McGraw- Hill,. Nueva York
10. **Jantz, J Y Jantz, R.** (1994-2002). *Why They Shake And Why They Don't, Roadracing World,* Partes1-9, Septiembre de 1994, Febrero de 1995, Marzo de 1996, Marzo de 1997, Marzo de 1999, Abril de 1999, febrero de 2001, Marzo de 2001, Marzo de 2002
11. **Jennings, G.** (1979). *A short History of Wonder Engines,* Cycle Magazine, mayo de 1979, p.68ff
12. **Setright, L.J.K** (1975). *Some Unusual Engines,* Mechanical Engineering Publications Ltd.,The Inst. Of Mech. Engr., Londres.
13. **Thomson, W.** (1978). *Fundamentals of Automotive Balance,* Mechanical Engineering Publications,Ltd., Londres,