UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TITULO DE LA TESIS:

ÁLGEBRA EN SECUNDARIA CON ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

ERIKA FABIOLA LEÓN SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. LUZ ARELY CARRILLO OLIVERA

2010

A G R A D E C I M I E N T O S

La presente Tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas al leer, opinar, corregir, tener paciencia, dar ánimo, igualmente al acompañarme en los momentos de crisis y felicidad. Son tantas personas a las cuales debo parte de este triunfo, de lograr alcanzar mi culminación académica, la cual es el anhelo de todos los que así lo deseamos.

Agradezco a Dios por llenar mi vida de dicha y bendiciones, por permitirme llegar hasta este momento tan importante de mi vida y lograr otra meta más en mi carrera.

Independientemente, mis Padres, a quienes agradezco de todo corazón por su amor, cariño y comprensión. En todo momento los llevo conmigo. Gracias por guiarme sobre el camino de la educación. Creo ahora entender porque me obligaban a terminar mi tarea antes de salir a jugar, y muchas cosas más que no terminaría de mencionar.

Agradezco a mis hermanos por la compañía y el apoyo que me brindaron al prestarme sus apuntes para redactar parte de mi tesis. Se que cuento con ellos siempre; por sus comentarios, sugerencias y opiniones muchas gracias.

Doy las gracias, conjuntamente a mis padres, mis hermanos, por darme la estabilidad emocional, económica, sentimental; para llegar hasta este logro, que definitivamente no hubiese podido ser realidad sin ustedes. GRACIAS por darme la posibilidad de que de mi boca salga esa palabra…FAMILIA.

Agradezco a la Prof. Luz Arely Carrillo Olivera por haber confiado en mi persona, por la paciencia y la dirección de este trabajo. A mis sinodales por el apoyo, el ánimo que me brindaron, por la atenta lectura de este trabajo y sus atinadas correcciones en ortografía y redacción.

Agradezco a los amigos por su confianza y lealtad que estuvieron conmigo y compartimos tantas aventuras, experiencias, desveladas y triunfos en la vida. Gracias a cada uno por hacer que mi vida estuviera rodeada siempre de amigos cada uno en los niveles que los conocí.

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN

Me centraré en responder tres preguntas, dando la importancia debida a cada interrogante. ¿Qué me motivó a realizar este trabajo? ¿Qué importancia tiene? ¿A quién está dirigido? y finalizaré con una breve reseña de lo que encontrarán en esta tesis.

En algún momento de la carrera cursé los Seminarios de “Enseñanza de las Matemáticas” aunque sólo tome los seminarios I, III y IV (no asistí al seminario II, debido a que, terminé los créditos requeridos por la carrera), éstos impulsaron mi curiosidad hacia la investigación de lo que haría en la tesis, gracias a que el contenido de dichos Seminarios fue interesante, pues tratamos diversos temas y problemas que surgen de la temática de la enseñanza-aprendizaje.

En el Seminario III, conversamos sobre los diferentes aspectos, de lo que debería ser la enseñanza, llegando a conocer otra estrategia de enseñanza-aprendizaje la cual lleva por nombre *“aprendizaje cooperativo”*. Con esta técnica de aprendizaje diseñamos material didáctico a Nivel Medio Superior, para posteriormente aplicarlo en la Preparatoria, donde impartía clases la profesora a cargo del Seminario.

El material que diseñamos fue para las Cónicas, pero sólo abarcamos con profundidad la Elipse y la Parábola; (este material aparece expuesto en el capítulo llamado Anexos) llevándolo a la aplicación en una sesión de dos horas y en un salón que sólo constaba de diez alumnos, de los cuales todos eran recursadores y que, en general, tenían una mala experiencia con las matemáticas.

Pero cuál sería la sorpresa, que a todos intereso el material propuesto de esta manera a cómo lo visualizaron en su curso anterior, de modo que se les facilitó el contenido; tomemos en cuenta que ellos ya trabajaron con esta estrategia, gracias a que su profesora la aplica en la mayoría de sus clases, así que sabían y tenían claro lo que era trabajar en equipo e intercambiar ideas para que así todos aprendieran más.

Por lo anterior, reflexioné que la enseñanza en México está por los suelos, ya que es muy mala, en el sentido que algunos maestros no tienen la ética para enseñar de forma agradable a los alumnos, sin que estos la vean como una imposición o carga de su vida; impartiéndola en la mayoría de sus clases en su forma tradicional, la cual no es mala pero para los aprendiz no es algo fuera de lo normal que llame su atención.

Es por tal motivo, que analizaré uno de los métodos que me pareció importante que se trabajará en los salones de clases; porqué cuando hice el servicio social en una secundaria, observé que los alumnos entran dispuestos a aprender, y a forjar un buen camino para continuar con su trayectoria académica. Entrando en esta lucha el papel que juegan tan importante los profesores de dichos planteles, ya que son los encargados de transmitir el conocimiento a los estudiantes.

Por esta razón, y tener una experiencia con la técnica de aprendizaje en la Preparatoria a la que asistí, fueron el motivo por el que abordé con profundidad el Aprendizaje Cooperativo y cómo aplicarlo en especial a nivel Secundaria.

La principal importancia que considero tiene esta tesis, es contribuir con mi granito de arena con la educación en México, y pretender con este trabajo que en un futuro les sirva a los docentes; relatando una experiencia que probé con uno de los temas que se exponen aquí, dejando otro material al servicio de los maestros, para que describan los resultados que obtuvieron después de aplicarlo en alguna escuela.

El material fue llevado a la práctica en una secundaria, la cual porta el nombre de Técnica No. 100 Dr. “Guillermo Massieu Helguera”, describiendo los resultados que surgieron de esa experiencia posteriormente.

Otro punto importante de esta investigación es que, dará la pauta para titularme como Matemática, agradeciendo el apoyo brindado por mis padres, hermanos y familiares; demostrándoles que después de tanta espera y tempestad por fin terminé con mis estudios.

Esta tesis está dirigida al público interesado en enseñanza, ya que abordó los principios y las bases para que se entienda lo que es el Aprendizaje Cooperativo. Aunque esperaría que maestros de nivel Secundaria la revisaran; gracias a que, les servirá de mucho en su trayectoria como profesores de Matemáticas, debido a que, se expone material para la asignatura.

Por otra parte, los docentes en general también podrían revisar la tesis, debido a que, este aprendizaje se adecúa a todas las áreas de educación, como lo son: Español, Historia, Civismo, etc., la cual los ayudará a ser mejores maestros y por tal motivo, a sus alumnos disfruten y se interesen más por su materia, esto es posible, ya que en la investigación se exhiben todos los fundamentos del aprendizaje cooperativo, el cómo elaborar material didáctico y cuál podría ser una de las formas de evaluación de dicha estrategia.

Si todos los docentes impartieran la mayoría de sus clases con estrategias de aprendizaje significativo, dejarían más información en sus alumnos que con el método tradicional, fomentando por otro lado, una mejor convivencia entre los mismos aprendices, rescatando con esto que el proceso de enseñanza-aprendizaje en las aulas sea armonioso.

La distribución de los capítulos está abordada de la siguiente manera:

Para comenzar con el trabajo de esta tesis analicé, en el Marco Teórico las cuestiones y factores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, desde la perspectiva pedagógica del alumno hasta los profesores. Continuando con el desarrollo de diferentes tipos de aprendizaje que hay y el cómo impartirlos; adentrándome sólo en el proceso de Aprendizaje Cooperativo y desarrollando material con dicho aprendizaje para los jóvenes de Secundaria.

En este primer apartado de la tesis, revisé tanto las bases de la educación como las corrientes pedagógicas, que se dedican a la formación del ser humano, para fortalecer así, el conocimiento de los distintos enfoques pedagógicos, los antecedentes del aprendizaje, el proceso que hay de enseñanza-aprendizaje, y finalmente concluir con una descripción del aprendizaje significativo. Abordaré con mayor profundidad el aprendizaje cooperativo; ya que es el tema central en el que gira la tesis.

En el primer capítulo, describiré una secundaría la cual elegí para aplicar ya en la práctica, el material que realicé con la técnica del aprendizaje cooperativo. Con el fin de que esté mejor sustentada la información que analizó en este apartado, opté por pedir permiso en la secundaria teniendo así acceso con el profesor de Matemáticas y sus alumnos de tercer año; detallando el comportamiento dentro de la clase y con esto, registrarlo en una tabla metodológica.

Después de elaborar material con la estrategia de aprendizaje cooperativo, acudí a experimentarlo con los alumnos de dicha secundaria, durante una semana y obtuve los resultados que se presentan en este trabajo. Estos resultados están descritos en el capítulo dos, dando la importancia pertinente a cada comentario redactado por las experiencias de los mismos alumnos.

Para que la tesis sirva a otros profesores pongo a su disposición, en el capítulo de Anexos, material que está diseñado con la técnica de aprendizaje cooperativo, con el fin de que lo usen y ellos mismos obtengan conclusiones sobre el material y la estrategia con la que fueron elaborados.

Finalmente, encontrarán las diferentes fuentes documentales a las que recurrir para elaborar esta tesis. Dichos libros fueron consultados en la Facultad de Psicología, de la UNAM; y en la Biblioteca Central de mencionado recinto; así como en otros libros descritos posteriormente.

MARCO TEÓRICO

Primeramente analizaré la definición concreta de la palabra aprendizaje, aportada por el siguiente autor: “El aprendizaje es un proceso de conocimiento de compresión de relaciones, donde las condiciones externas actúan mediadas por las condiciones internas.” (PÉREZ, 2005, pág. 37).

Observemos que este autor, lo ve como un proceso de adquisición de conocimientos, sin contemplar que el término aprendizaje va más allá de eso, es decir; también se involucra la transacción de valores y habilidades que se intercambian en este proceso. Asimismo, se da el aprendizaje a partir de las experiencias de la vida, las cuales el alumno las estudia y las aplica en otro ciclo de su supervivencia.

El aprendizaje visto desde la perspectiva pedagógica, es estudiado sobre dos enfoques: el enfoque conductista y el enfoque cognitivista: así pues, como su nombre lo indica, el enfoque conductivista se basa en el comportamiento del individuo analizando sus conductas observables; en cambio, el enfoque cognitivista se desarrolla bajo el constructivismo, el cual relaciona el aprendizaje de todas las personas de un grupo heterogéneo haciéndolas protagonistas del proceso.

Más precisamente, la construcción del conocimiento escolar es en realidad un proceso de elaboración, en el sentido de que el alumno selecciona, organiza y transforma la información que recibe de diversas fuentes, estableciendo relaciones entre dicha información y sus ideas o conocimientos previos. Por tanto, el constructivismo postula “la existencia y prevalencia de procesos activos en la construcción del conocimiento: habla de un sujeto cognitivo aportante que claramente rebasa a través de su labor constructiva lo que le ofrece su entorno”. (DÍAZ, 2002, pág. 28)

La concepción constructivista del aprendizaje escolar, se sustenta en la idea de que la finalidad de la educación que se imparte en las escuelas, sea la de promover los procesos de crecimiento personal de los alumnos en el marco sociocultural.

Existen autores asociados a cada enfoque descritos anteriormente los cuales son y dan las siguientes aportaciones a cada corriente:

PSICÓLOGOS TEÓRICOS

- **COGNITIVOS**
  - Max Wertheimer, Wolfgang Kohler y Kurt Lewin
    - Pensaban que los chicos solo aprenden realmente cuando descubren las soluciones por si mismos, cuando «comprenden».
    - Max estaba en contra del uso sistemático de la memorización, sobre todo cuando esta constituía un fin en sí mismo.
    - Ellos tenían que defender el aprendizaje, la comprensión, el descubrimiento de nuevas relaciones supone algo más que la mera existencia de una serie de respuestas condicionadas.
  - Vigotsky
    - El pensamiento es una actividad interpretativa, donde se explican las interacciones con el mundo de forma que tengan significado. En este sentido la cognición es vista como una internalización de una interacción de dimensión social, en donde el individuo está sometido e inmerso en determinadas situaciones.
- **CONDUCTISTAS**
  - John B. Watson:
    - Pensaba que el aprendizaje estaba asociado con una secuencia de acciones. El conocimiento reside en un conjunto de reacciones.
  - E. C. TOLMAN
    - Denomina H-A-T-E (herencia, edad, entrenamiento y sistema endocrino) cruciales en la comprensión y predicción de la conducta.

(SPRINTHALL, 1996, pág. 163-173)

Del cuadro anterior deduzco, que los psicólogos cognitivos han mencionado que es a través del aprendizaje significativo, como el alumno construye significados los cuales le permiten conocer de manera más amplia el mundo que le rodea.

Es por eso que, distinguiré el concepto de aprendizaje significativo, el cual defino por propia experiencia, como un proceso que llevará al estudiante a construir o a reconstruir los saberes culturales que ya poseía, relacionándolos con una aspecto existente específicamente relevante ya significativo de la estructura cognitiva, como una imagen, un símbolo, un concepto, etc. “El aprendizaje significativo es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes.” (DIAZ, 2002, pág.39)

Para que el aprendizaje, realmente sea significativo este debe reunir varias condiciones: la nueva información debe relacionarse de modo no arbitrario con lo que el alumno ya sabe, dependiendo también de la disposición (motivación y actitud) de este por aprender, así como de la naturaleza de los materiales o contenidos de aprendizaje.

Es importante que el alumno posea ideas previas como antecedente necesario para aprender, ya que sin ellas, aún cuando el material de aprendizaje este bien elaborado, poco será lo que el aprendiz logré.

Puede haber aprendizaje significativo de un material potencialmente revelador, pero también acontece la situación de que el alumno aprenda por repetición, debido a que, no este motivado o dispuesto a hacerlo de otra forma. A continuación se dan ejemplos donde se trabaja el aprendizaje memorístico o significativo.

El aprendizaje memorístico más claro en matemáticas son la famosas tablas de multiplicar, ya que siempre los docentes dejan como tarea en los primeros años de primaria repasarlas de corrido y posteriormente salteadas. Otra aplicación en la misma rama científica es para las fórmulas, las cuales muchos las aprenden de memoria por dos motivos: el no saber de dónde salen (Teorema de Pitágoras) o por no tener tiempo de desarrollarlas, específicamente en un examen donde ya las dominas y por acto de fe sólo las aplicas directamente.

Por otro lado, el aprendizaje significativo en Física, si tienes los conceptos claros de energía, trabajo, presión y temperatura esto servirá como anclaje para nuevos temas; tales como, maquinas térmicas evolucionando con esto y aterrizando en la noción de la segunda ley de la termodinámica. Mientras que en matemáticas, se ejemplifica con las propiedades de trigonometría, ya que obtenemos la medida de ciertos ángulos elementales con triángulos específicos.

Más en concreto el aprendizaje significativo tiene las siguientes ideas básicas:

1. Los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir, de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de conocimientos nuevos.
2. Es necesario desarrollar un amplio conocimiento para integrar y organizar los nuevos conocimientos.
3. Indispensable que la nueva información se incorporé a la estructura mental, y pase a formar parte de la memoria comprensiva.
4. Aprendizaje significativo y aprendizaje mecanicista, no son dos tipos opuestos de aprendizaje, sino que se complementan durante el proceso de enseñanza. Pueden ocurrir simultáneamente en la misma tarea de aprendizaje. Por ejemplo, la memorización de las tablas de multiplicar es necesaria y formaría parte del aprendizaje mecanicista, sin embargo su uso en la resolución de problemas correspondería al aprendizaje significativo.
5. Requiere una participación activa del docente, donde la atención se centra en el cómo se adquieren los aprendizajes.
6. La intención última de este aprendizaje, es conseguir que el alumno adquiera la competencia de aprender a aprender.
7. El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del discente.

En resumen, aprendizaje significativo es aquel que:

- Es permanente: El aprendizaje que adquirimos es a largo plazo.
- Produce un cambio cognitivo, se pasa de una situación de no saber a saber.
- Está basado sobre la experiencia, depende de los conocimientos previos.

Estos son algunos tips para promover el aprendizaje significativo:

- Proporcionar retroalimentación productiva, para guiar al aprendiz e infundirle una motivación intrínseca.
- Proporcionar familiaridad.
- Explicar mediante ejemplos.
- Guiar el proceso cognitivo.
- Fomentar estrategias de aprendizaje.
- Crear un aprendizaje situado cognitivo. (Colaboradores de Wikipedia, 2010)

Por otra parte, el material aprendido de forma significativa desde el panorama abarcado por Ausubel, es menos sensible a las interferencias a corto plazo y mucho más resistente al olvido.

Ausubel [1976] afirma, y con razón, que el proceso de adquisición de significados es un proceso activo, pero, a nuestro entender, requiere un tipo de actividad bastante distinto del aprendizaje por descubrimiento, como para que ambos exijan principios explicativos y condiciones para su realización diferentes. Las habilidades de investigación y solución de problemas requieren la práctica, la participación activa del individuo, la búsqueda real y no únicamente la mera organización de lo recibido significativamente. "El desarrollo potencial del niño abarca un área desde su capacidad de actividad independiente hasta su capacidad de actividad imitativa o guiada" [VIGOTSKY, 1973] (PÉREZ, 2005, pàg.50)

La nota anterior hace hincapié en que los niños pequeños son el reflejo de los padres, ya que estos últimos son responsables de inculcar valores positivos que prontamente se manifiestan en la conducta, por tal argumento es que progenitores den un buen ejemplo de comportamiento a sus hijos, para que estos sean capaces en un futuro de desarrollarse eficazmente dentro de la sociedad.

Apoyando a la idea propuesta anteriormente Bartlet [1932] afirma, que la memoria implica un esfuerzo hacia el significado y el recuerdo, una construcción. Es decir, la memoria es constructiva abstracta y basada en significados. (PÉREZ, 2005, pág. 55)

Ausubel [1976], proporciona las siguientes diferencias de comparación en los ámbitos del aprendizaje.

Situaciones del aprendizaje

A. Primera dimensión: modo en que se adquiere la información

RECEPCION	**DESCUBRIMIENTO**
• El contenido se presenta en su forma final.	• El contenido principal a ser aprendido no se da, el alumno tiene que descubrirlo.
• El alumno debe internalizarlo en su estructura cognitiva	• Propio de la formación de conceptos y solución de problemas.
• No es sinónimo de memorización	• Puede ser significativo o repetitivo.
• Propio de etapas avanzadas del desarrollo cognitivo en la forma de aprendizaje verbal hipotético sin referentes concretos (pensamiento formal)	• Propio de las etapas iníciales del desarrollo cognitivo en el aprendizaje de conceptos y proposiciones.
• Útil en campos establecidos del conocimiento.	• Útil en campos de conocimiento donde no hay respuesta univocas.
• Ejemplo: se pide al alumno que estudie el fenómeno de la difracción en su libro de texto de física.	• Ejemplo: El alumno, a partir de una serie de actividades, experimentales (reales y concretas) induce los principios que subyacen al fenómeno de la combustión.

B. Segunda dimensión: Forma en que el conocimiento se incorpora en la estructura cognitiva del aprendiz.

SIGNIFICATIVO	**REPETITIVO**
• La información nueva se relaciona con la ya existente en la estructura cognitiva de forma sustantiva, no arbitraria ni al pie de la letra.	• Consta de asociaciones arbitrarias al pie de la letra.
• El alumno debe tener una disposición o actitud favorable para extraer el significado.	• El alumno manifiesta una actitud de memorizar la información
• El alumno posee los conocimientos previos o conceptos de anclaje pertinentes.	• El alumno no tienen conocimientos previos pertinentes o no los encuentra
• Se puede construir un entramado o red conceptual.	• Se puede construir una plataforma o base de conocimientos factuales.
• Condiciones: Material: Significado lógico Alumno: Significación psicológica.	• Se establece una relación arbitraria con la estructura cognitiva
• Puede promoverse mediantes estrategias apropiadas (Por ejemplo, los organizadores anticipados y los mapas conceptuales) .	• Ejemplo: Aprendizaje mecánico de símbolos conversaciones, algoritmos.

(DÍAZ, 2002, pág. 38)

Toda teoría sobre el aprendizaje explica, tanto las peculiaridades que identifican y distinguen diversas clases, como las características comunes que subyacen a estas y justifican su denominación como procesos de aprendizaje, por ejemplo aprendizaje de señales, de conceptos o principios, debido a que, en ellos pueden tener lugar diferentes procesos, se requieren distintas condiciones y se producen resultados diversos. Tanto para comprender como para orientar en la escuela los fenómenos de enseñanza-aprendizaje.

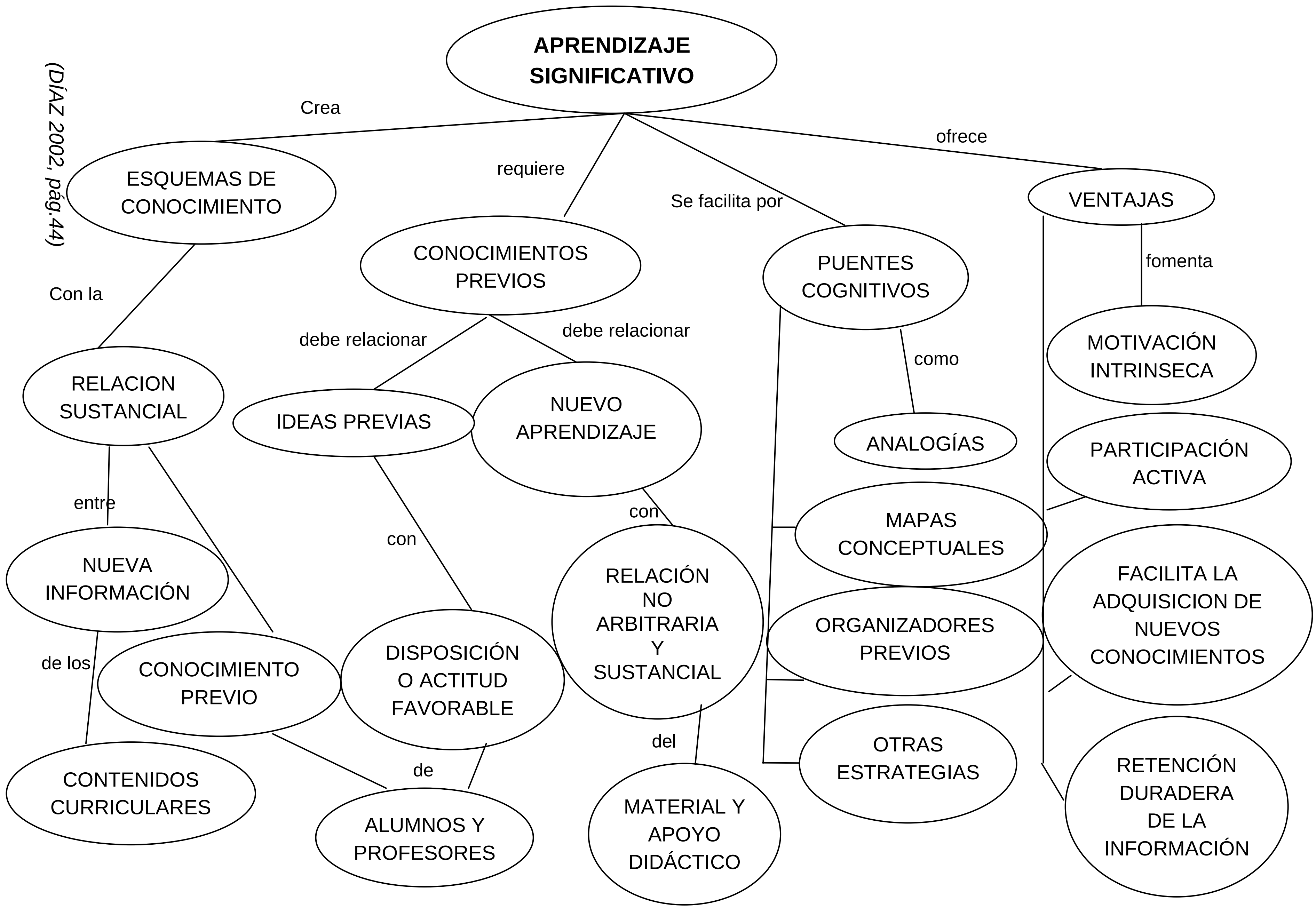
En definitiva, las teorías psicológicas del aprendizaje pretenden describir y explicar cómo se produce el aprendizaje, el desarrollo y el contexto físico, social e histórico donde vive el individuo.

Las teorías del aprendizaje existentes suministran la información básica, pero no suficiente, para organizar la teoría y las prácticas de la enseñanza, debido a que no dan una receta a seguir al pie de la letra para no fallar al impartir las clases, dejando a criterio del profesor el cómo actuar en cada estrategia, para obtener sus propios resultados y observaciones.

Deberá ponerse, por ello, especial atención a la interacción en los procesos de motivación, atención, asimilación, organización, recuperación y transferencia. Ahora bien, "tales procesos no se desarrollan en la burbuja de la entidad individual llamada alumno/a, sino en complejas redes de intercambio social, dentro y fuera del aula, dentro y fuera del recinto escolar, de modo que las variables contingencias culturales, sociales y materiales del medio son de extraordinaria importancia para comprender y orientar los procesos de aprendizaje y desarrollo". (PÉREZ, 2005, pág.61)

Proporcionando así **[**Ausubel 1976**]** en el siguiente esquema, la clasificación del aprendizaje significativo, el cual resalta lo que debe involucrarse para que se de dicho aprendizaje, así como sus ventajas que ofrece:

En el cuadro que está a continuación, aparte de las ventajas que ofrece el aprendizaje significativo; apreciamos todo lo que debe involucrarse en dicho intercambio de enseñanza-aprendizaje. Dejando un gran beneficio a los alumnos que sepan aprovechar la educación y conocimiento que se les brinda, ya que ellos mismo forjarán su propio aprendizaje al ritmo que experimentan, y relacionan lo que ya saben con lo que descubren poco a poco. Esto lo harán por medio de material, apoyo didáctico y el cómo los oriente el docente en cada tema a revisar.



(DÍAZ 2002, pág.44)

La finalidad última de la intervención pedagógica, es desarrollar en el alumno la capacidad de realizar aprendizajes significativos por sí solo, en una amplia gama de situación y circunstancias (aprender a aprender). (DÍAZ, 2002, pág. 30).

Las diferencias individuales y los estilos de aprendizaje existentes, entre los alumnos así como el bagaje cultural y familiar van a determinar que cada alumno aprenda mejor en distintas situaciones organizativas. Lo importante es disponer de una amplia variedad de formatos de organización y adecuarlos a las características y los estilos de aprendizaje de los alumnos. Una estrategia que parece bastante cómoda y eficaz, para la equilibración y asimilación de la mayor parte de los sujetos es, el aprendizaje cooperativo.

El Aprendizaje Cooperativo, se desprende de una rama del aprendizaje significativo, ya que este se da cuando se involucra el conocimiento que el estudiante sabe, y lo va combinando con información que deduce poco a poco después de experimentar con su propio aprendizaje.

Esta estrategia de aprendizaje es apoyada por los psicólogos cognitivistas, ya que estos como se mencionó anteriormente, apoyan la idea de que el alumno debe forjar su propio aprendizaje, al comparar lo aprendido en su entorno socio-cultural con lo que observa en la escuela.

Si hablamos de aprendizaje cooperativo tenemos que hablar, ante todo, de la existencia de un grupo que aprende. Un grupo puede definirse como “una conjunto de personas que interactúan entre si y que ejercen una influencia reciproca”. (DÍAZ, 2002, Pág. 102)

En este tipo de aprendizaje el rol central del docente, es el de actuar como mediador o intermediario entre los contenidos del aprendizaje y la actividad constructivista, que despliegan los alumnos para asimilar conceptos matemáticos. Los alumnos construyen significados apropósito de ciertos contenidos culturales, y lo hacen, sobre todo gracias a la interacción que establecen con el docente y con sus compañeros. En este tipo de aprendizaje se da la participación activa y la interacción alumno-profesor y viceversa.

La corriente cognitivista ve al docente como un facilitador del conocimiento, actúa como nexo entre éste y el estudiante por medio de un proceso de interacción, aquí el alumno debe compromete con su aprendizaje, ya que de ello depende los alcances de su aprendizaje para lograr que en verdad sea significativo.

Los profesores que facilitan la interdependencia entre sus estudiantes son aquellos que, conceden gran valor a la cohesión del grupo, ofrecen apoyo a los alumnos, y promueven clases productivas donde ocurren intercambios afectivos positivos, se atiende y respeta la diversidad entre los alumnos, y se conducen discusiones abiertas acerca del currículo y del grupo mismo. Por lo anterior, consolidar el aprendizaje cooperativo en el aula no es solo cuestión de aplicar una técnica puntual o conducir una dinámica o actividad grupal vinculada al contenido de la materia a enseñar.

Thorndike [1898] afirma que cuando se establece una conexión estímulo-respuesta (E-R) y esta va seguida de una consecuencia satisfactoria (recompensa), dicha conexión se fortalece. Por el contrario, una conexión seguida de una consecuencia molesta (castigo), se debilita. A través de su ley del efecto fue el primer psicólogo que recalcó la importancia de la motivación en el aprendizaje. (SPRINTHALL, 1996, pág. 167-168)

Aquellos alumnos que han sido condicionados, hasta el punto de quedar paralizados cuando se les plantea un problema, difícilmente pueden aprender matemáticas. Un componente motivacional consiste en generar, la curiosidad del tema a partir de anécdotas o vinculación con conocimientos previos, posteriores o de la vida cotidiana.

En resumen el aprendizaje cooperativo se basa en:

a. Por parte del docente, empieza con la elaboración de material didáctico para todos los alumnos, este debe estar conformado mínimo de 3 distintos, entre sí pero con un tema final igual para todos, es decir otro material para todos los aprendices.
b. Continuando con la conformación de equipos integrados de 3 a 5 estudiantes, según tan grande sea el grupo. Estos conjuntos trabajarán con los tres materiales distintos elaborados por el docente.
c. La labor del docente, es estar de mediador del aprendizaje pasando por todos los equipos a ver las dudas que vayan surgiendo. Al terminar de responder este primer material, se tendrá que revisar para pasar a la siguiente actividad.
d. Posteriormente, se conforman otros equipos distintos pero mínimo con un integrante de los conjuntos que se realizaron primero, para responder el último material; dicho trabajo todos lo tendrán y lo responderán con la participación activa de los miembros de su equipo, explicando cada quién lo aprendido en su material anterior.
e. El docente tendrá que pasar al igual que en el ejercicio anterior con cada equipo a ver su dudas, ya que aquí todavía sigue como mediador del aprendizaje.
f. Ya casi para finalizar se revisará este material a nivel grupo, y se aclararan las dudas que surjan.
g. Concluyendo con un examen individual para todos los alumnos.

Cabe destacar que el elaborar cualquier material para este tipo de estrategia no es fácil, ya que el estructurar material tiene un grado de dificultad, en el cual intervienen muchos factores, aplicar el aprendizaje cooperativo tampoco es sencillo, ya que intervienen muchos aspectos que se describen a continuación:

- El tipo de lenguaje que se utiliza, ya que para cada nivel de enseñanza es distinto por la diversidad de años que existe entre uno y otro.
- El tema a desarrollar, ya que uno será más sencillo de estructurar que otro.
- La activa participación que tiene el docente, para saber cómo reaccionar con diversas dudas, esto es porque al existir 3 materiales distinto, tiene que ser capaz de cambiar de canal receptivo muy rápido.
- Otro aspecto no menos importante, es la colaboración de todos los estudiantes al trabajar con una estrategia diferente a la usual (tradicional).
- Los estudiantes deben tener claro lo que es trabajar en equipo. Y no sólo reunirse con un conjunto de personas pero cada quien por su lado.
- La participación del docente, al pasar por cada equipo debe de ser rápida, ya que de lo contrario, los alumnos propiciarán el desorden, al no responder con facilidad sus dudas.
- Resaltar de cada material y aplicación de esta estrategia observaciones que haya visto para mejorar o cambiar en dado caso para la siguiente utilización de este tema.

ELEMENTOS DEL PROCESO MOTIVACIONAL

1. METAS. La meta es el objetivo que uno se propone. el éxito es el que motiva el fracaso reiterado no motiva, para que comprendan es importante que las metas de aprendizaje tengan un nivel de dificultad y de novedad moderado. que no sean un muy difíciles ni muy fáciles. (CARRILLO, 2009, pág.5)

2. NIVEL DE RETO O DESAFÍO CONTÍNUO. Lo que más motiva son las tareas donde el nivel de dificultad se ajusta el nivel de habilidad, que el alumno se siente capaz pero se tienen que esforzar. el nivel de reto y desafío óptimo, favorece que se consiga la motivación intrínseca. (CARRILLO, 2009, pág.5)

Motivación	Nivel de reto	Tipo de aprendizaje	Qué se valora	Recompensas
Intrínseca	Va aumentando	Significativo o por descubrimiento	El procedimiento de la actividad más que el resultado.	Si
Extrínseca	Estable	Receptivo o repetitivo	El resultado	No

La motivación intrínseca, se evidencia cuando el individuo realiza una actividad por el simple placer de realizarla, sin que nadie de manera obvia le de algún incentivo externo. Por el contrario, la motivación extrínseca*,* aparece cuando lo que atrae no es la acción que se realiza en sí, sino lo que se recibe a cambio de la actividad realizada.

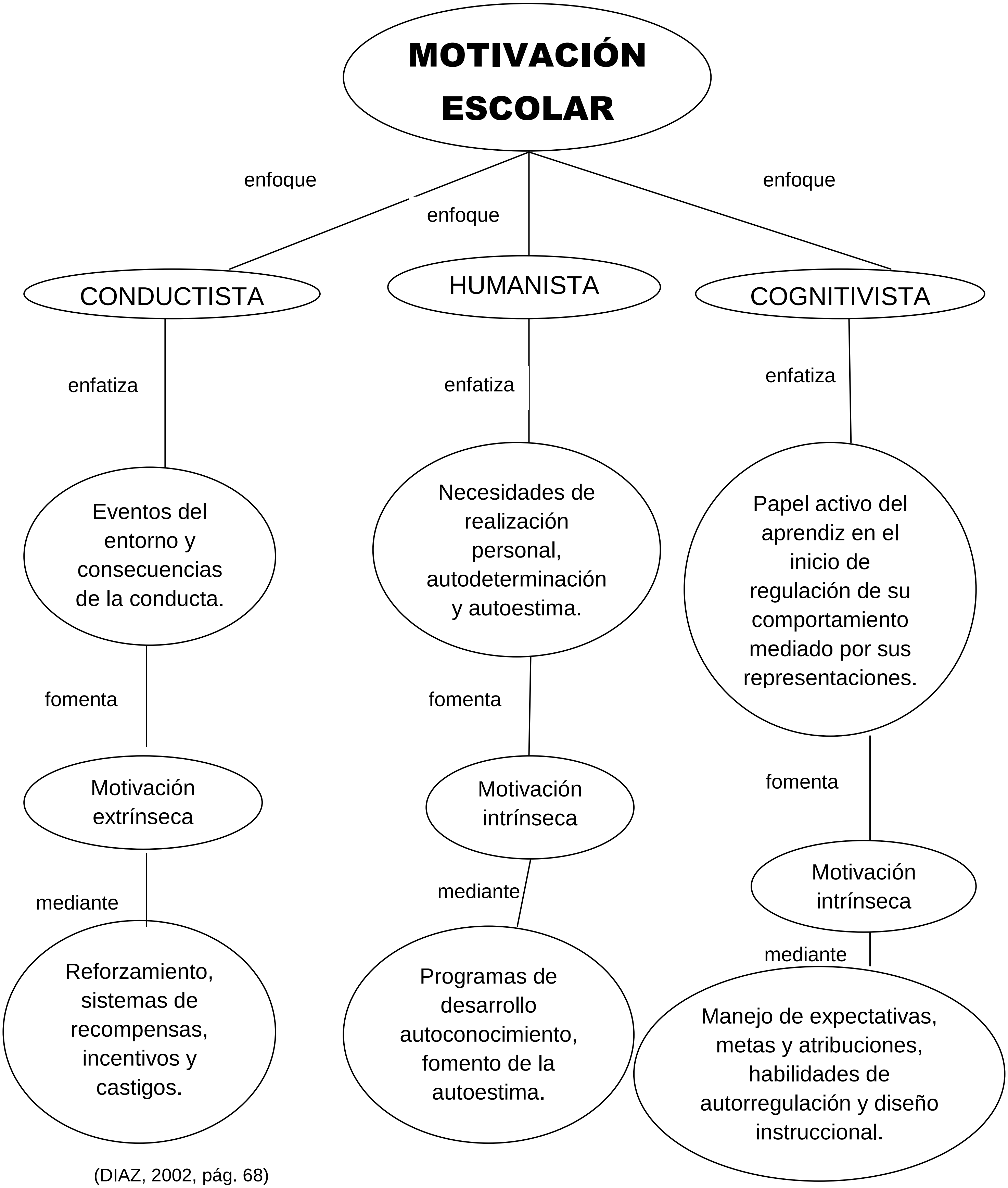
Cuando se produce la motivación intrínseca, el alumno indaga, profundiza más y lo hace mejor, es por eso que los estudiantes deberían tener una motivación intrínseca en el aprendizaje, esto se logra si desde los primeros años en la escuela se les enseña por medio de aprendizaje significativo actuando siempre para obtener conocimiento y no una simple calificación que a veces no es merecida, ya que solo estudian para el día del examen y después de presentarlo todo lo aprendido se va al olvido.

En matemáticas, los maestros de niveles anteriores han concebido a los estudiantes, que no necesariamente son capaces de adquirir habilidades en la materia. Igualmente es la experiencia previa con la que cuentan, por eso hay que generar nuevas experiencias y mostrar en cada momento los éxitos parciales que alcanzó el estudiante: "Has fracasado, pero progresas, lo hiciste mejor que antes". (CARRILLO, 2009, pág.6)

El alumno puede aprender mediante premios, una conducta deseada por el profesor, la memorización de una lección determinada al mismo tiempo que aprende el hábito de actuar por tener una recompensa. Toda intervención pedagógica debe plantearse las consecuencias educativas a medio y largo plazo, de la utilización frecuente de la motivación extrínseca.

Ejemplo de motivación intrínseca, se da en cualquier tema sólo depende de cómo lo diseñe el profesor, un tema puede ser el de productos notables, ya que se empieza a dar por medio de áreas de rectángulos para que posteriormente el alumno descubra la fórmula general, más que nada la motivación es el ánimo que proporciona el profesor a indagar sobre el tema; más sin en cambio, la extrínseca se da en los alumnos que no les interesa la materia o cuando no les ha ido bien desde un principio en el contenido del programa, y necesitan motivación de alguna forma para avanzar y es aquí donde toman cualquier ayuda que les proporciones el docente.

Es importante promover más la motivación intrínseca en el aprendizaje significativo y en general en el aula, porque así el alumno está motivado a forjar su propio aprendizaje; aunque cabe destacar, el no dejar de lado la motivación extrínseca, ya que para muchos alumnos los ánima a estudiar por obtener algo a cambio, y puede que a partir de esta motivación se les quede algo de aprendizaje.



(DIAZ, 2002, pág. 68)

Una de las principales características del aprendizaje cooperativo, es el trabajo que se da en grupo, ya que para desarrollar esta estrategia se debe aprender de todos los compañeros de clase, al intercambiar ideas previas a los conocimientos que tienen.

Este tipo de aprendizaje, también tiene sus ventajas y desventajas a la hora de formar los equipos de trabajo, ya que en estos se puede presentar el caso, que se dé el aprendizaje individualista y competitivo a la par, de donde la situación individualista es aquella donde no hay alguna relación entre los objetivos que persigue cada uno de los alumnos, pues sus metas son independientes entre sí, considera menos relevante el trabajo y el esfuerzo que realizan sus demás compañeros, puesto que no hay metas ni acciones conjuntas.

En una situación escolar competitiva, los objetivos que persigue cada alumno no son independientes de lo que consigan sus compañeros. Así, bajo un esquema de competencia, el alumno obtiene una mejor calificación cuando sus compañeros rinden muy poco, que cuando la mayoría muestra un buen rendimiento.

Otro problema que enfrentan los docentes, es el desconocimiento de la manera de trabajar con verdaderos equipos cooperativos, puesto que no toda actividad que se realiza en grupo implica cooperación. Con frecuencia, la realización de trabajo en equipo no es otra cosa que una división inequitativa del trabajo, donde en realidad no se dan intercambios constructivos entre los participantes.

Puesto que los alumnos, al nunca haber laborado en equipo, no saben en realidad el significado de esta palabra y lo interpretan tan sólo como el reunirse con un grupo de personas de su mismo salón, para posteriormente repartirse el trabajo y así tengan que laborar menos. Razón por la cual, hay que insistir en que no todo grupo de trabajo es un grupo de aprendizaje cooperativo. Simplemente colocar a los estudiantes en grupo y decirles que trabajen juntos no significa que deseen o sepan cooperar.

Más, sin en cambio, la verdadera interpretación para este tipo de aprendizaje es la dada por Jonhnson y Holubec, [1999].

> La cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes. En una situación cooperativa, los individuos procuran obtener resultados que son beneficiosos para ellos mismos y para todos los demás miembros del grupo. El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás.
>
> El equipo trabaja junto hasta que todos los miembros del grupo hayan entendido y completado la actividad con éxito, de tal forma que la responsabilidad y el compromiso con la tarea son compartidos. *(DÍAZ, 2002, pág.107)*

Por tanto, para que fluya el aprendizaje cooperativo en un salón de clases, cada miembro es responsable tanto de sus propias tareas como las de todo el grupo. Todos los miembros deben trabajar y cooperar juntos para obtener calificación como grupo. A cada grupo se le darán instrucciones específicas para llevar cabo tareas específicas.

El aprendizaje cooperativo, permite crear una situación en la que la única forma de alcanzar las metas personales es a través de las metas del equipo; lo cual hace que el aprendizaje y el esfuerzo que exige sean mucho más valorados entre los compañeros, aumentando la motivación general así como el refuerzo y la ayuda que se proporcionan mutuamente en este sentido.

Con todo lo anterior, la enseñanza debe ser individualizada en el sentido de permitir a cada alumno trabajar con independencia, y a su propio ritmo, pero al mismo tiempo es importante promover la colaboración y el trabajo grupal. Por estadísticas consultadas a partir del inicio de esta tesis se ha observado que los estudiantes aprenden más, les agrada más la escuela, establecen mejores relaciones con los demás, aumentan su autoestima y aprenden habilidades sociales efectivas cuando trabajan en grupos cooperativos que al hacerlo de manera individualista y competitiva.

Diferencias entre el Aprendizaje Individualista y el Cooperativo:

APRENDIZAJE INDIVIDUALISTA	APRENDIZAJE COOPERATIVO
No existe relación entre los objetivos que persigue cada uno de los alumnos, las metas son independientes entre si.	Se establecen metas que son benéficas para si mismo y para los demás miembros del equipo.
El alumno percibe que el conseguir sus objetivos depende de su propia capacidad y esfuerzo, de la suerte y de la dificultad de la tarea.	El equipo debe trabajar junto hasta que todos los miembros del grupo hayan entendido y completado la actividad con éxito.
Existe una motivación extrínseca, con metas orientadas a obtener valoración social y recompensas externas.	Se busca maximizar el aprendizaje individual pero al mismo tiempo el aprendizaje de los otros.
Los alumnos pueden desarrollar una percepción pesimista de sus capacidades de inteligencia.	Los fracasos son tomados como fallas del grupo, y no como limitaciones personales en las capacidades de un estudiante.
Se evalúan a los estudiantes en pruebas basadas en los criterios, y cada uno de ellos trabaja en sus materias o textos ignorando a los demás.	Se evalúa el rendimiento académico de los participantes así como las relaciones afectivas que se establecen entre los integrantes.
La comunicación en clases con los compañeros es desestimada y muchas veces castigada.	Se basa en la comunicación y en las relaciones. Respeto hacia las opiniones de los demás.
Se convierte en un sistema competitivo y	Es un sistema que valora aspectos como la

autoritario, produciendo una estratificación social en el aula.	socialización, la adquisición de competencias sociales, el control de los impulsos agresivos, la relatividad de los puntos de vista, el incremento de las aspiraciones y el rendimiento escolar.

(Santamaria, 2009)

El trabajo en equipos cooperativos, tiene efectos en el rendimiento académico de los participantes, así como en relaciones socioafectivas que se establecen entre ellos. En el rendimiento académico, rebasan el aprendizaje competitivo e individualista en áreas y tareas muy diversas, que abarcan tanto las que implican adquisición, retención y transferencia de conocimientos, como las de naturaleza más conceptual (adquisición de reglas conceptos y principios).

Por otro lado, en relaciones socioafectivas se incrementaron el respeto mutuo, la solidaridad y los sentimientos recíprocos de obligación y ayuda.

En cuanto al tamaño del grupo, la unión de equipos pequeños de trabajo (no más de seis integrantes en cada uno) y la eficacia de las experiencias de aprendizaje cooperativo, son mayores si se forma un grupo heterogéneo.

Por el contrario Slavin **[**1991**]** afirma, que es mejor tener grupos de cuatro o cinco estudiantes y, por otro lado, O´Donnell y Dansereau **[**1992**]** dicen que sólo se deben de formar diadas (grupos de dos) (DÍAZ, 2002, pág.123,126). Para la conformación de grupos la más recomendada y la que elegí fue la de seis a cinco integrantes por equipo, pero cada docente debe elegir la que mejor se conforme al tema que vaya a desarrollar, y al número de alumnos que hay en su grupo.

> Las clases de «niñas cooperativas» poseen «bajos niveles de competencia, altos niveles de aprendizaje cooperativo, altos niveles de comunicación con el profesor [acerca] del valor intrínseco que se proporciona a las matemáticas, se establece una estrecha relación entre estas y otras tareas interesantes».(SPRINTHALL,1996, pág. 259)

Beneficios de conformación de grupos cooperativos heterogéneos
❖ Más pensamiento elaborativo y reflexión ❖ Aumento en la frecuencia para dar y recibir explicaciones y ayuda. ❖ Aumento en la adopción de perspectivas diversas y en la necesidad de fundamentar o argumentar las respuestas. ❖ Incremento en la profundidad de la composición o producción a realizar. ❖ Manifestación de comportamientos más tolerantes, cuestionamiento de prejuicios. ❖ Relaciones interpersonales más equitativas. ❖ Aulas más inclusivas y democráticas.

(DIAZ, 2002, pág. 118)

Acomodarse en círculos de trabajo por lo general es lo mejor.

Veremos las características más sobresalientes, que se enfrentan en el aprendizaje cooperativo y el tradicional:

Trabajo en grupos cooperativo y tradicional	
Grupos de aprendizaje cooperativo	*Grupos tradicionales*
• Interdependencia positiva	• No hay interdependencia
• Valoración individual	• No hay valoración individual
• Miembros heterogéneos	• Miembros homogéneos
• Liderazgo compartido	• Sólo hay un líder
• Responsabilidad por los demás	• Responsabilidad por sí solo
• Enfatiza la tarea y su mantenimiento	• Sólo enfatiza la tarea
• Se enseña directamente habilidades sociales	• Se presuponen o ignoran las habilidades sociales
• El profesor observa e interviene	• El maestro ignora a los grupos
• Ocurre el procesamiento en grupo	• No hay procesamiento en grupo

(DÍAZ, 2002 pág. 115)

Estas son algunos de los lineamientos, de apoyo para la elaboración del material que más adelante queda expuesto, tanto el que aparece en el capítulo III, y el VI.

a) Debe estar diseñado de lo fácil a lo difícil, teniendo un punto intermedio entre estos dos extremos.

b) Tiene que ser ajeno cada tema pero al final parte de un todo.

c) Redactar el material con un lenguaje propio para aprender y entender por los estudiantes; es decir, ocupar las palabras de manera específica y si no se entiende su significado ponerlo explícitamente.

d) Empezar con un recordatorio de todo lo que vayan a utilizar.

e) Desarrollar primeramente un ejemplo, con todos los pasos requeridos para que los alumnos sepan que sucede en cada punto.

f) Posteriormente, en los siguientes ejercicios, se dejarán unas cuestiones sin contestar, con el fin, de que los alumnos practiquen y observen que pasa en cada caso.

g) Consecuentemente, los últimos ejercicios se dejarán sin resolver, para que los alumnos los respondan y así el profesor evalúe el conocimiento obtenido.

h) El material con el cuál trabajarán todos los alumnos, deberá evaluar lo aprendido por cada estudiante en sus equipos anteriores.

i) Finalmente, se redacta un examen individual que se aplicará a todo el grupo, evaluando el conocimiento obtenido propiamente.

Un punto no menos importante, pero que a la vez provoca controversias entre los docentes al utilizar este tipo de aprendizaje cooperativo, es el cómo evaluar este tipo de procesos de enseñanza-aprendizaje: La evaluación del aprendizaje cooperativo no se restringe a otorgar una calificación asociada al desempeño académico, se refiere a revisar el desempeño tanto grupal, como individual de cada estudiante, dando una puntuación por cada acontecimiento.

En el siguiente cuadro, se dan criterios que puede analizar el docente para calificar a cada estudiante.

Diez fórmulas para evaluar el aprendizaje cooperativo
1. Medida de las puntuaciones individuales de los miembros del grupo 2. Totalizar las puntuaciones individuales de los miembros del grupo. 3. La puntuación grupal como único producto. 4. Seleccionar al azar el trabajo o documento de uno de los miembros del grupo y puntuarlo. 5. Seleccionar al azar el examen de uno de los miembros del grupo y puntuarlo. 6. Puntuación individual más un bono grupal. 7. Bonos basados en la puntuación más baja /alta. 8. Puntuación individual más media grupal. 9. Todos los integrantes reciben la puntuación del miembro que puntuó más bajo /alto. 10. Media de las puntuaciones académicas, más una puntuación en desempeño de habilidades de colaboración.

(DÍAZ, 2002, pág. 128)

Primeramente, para evaluar a cada estudiante revisaría el material resuelto en el primer equipo, esto lo haría preguntándole a un estudiante al azar, posteriormente de aquí tomaría la primera calificación para todo el equipo, ya que el conjunto tuvo la misma posibilidad de intercambiar ideas entre todos.

Otra calificación, sería del material elaborado por la conformación de un segundo equipo, pero este mínimo armonizado por un integrante de los equipos anteriores, esta puntuación, al igual que en el conjunto anterior será para todos así habría que especificarse desde el principio de la estrategia, la forma de evaluar para que tomen mayor énfasis al aclararse todas sus dudas.

Por último la calificación será la adquirida por un pequeño examen individual, de donde obtendremos los conocimientos adquiridos por cada aprendiz. Ya con estas tres calificaciones para cada alumno le daría un porcentaje del 30% a las dos primeras y un 40% a la última obteniendo así el 100% de calificación quien se la merezca.

I. MARCO CONTEXTUAL

I.I DESCRIPCIÓN DE LA ESCUELA Y SU ENTORNO

La secundaria donde se realizaron las prácticas para fundamentar ésta tesis es la Escuela Secundaria Técnica No. 100 “Guillermo Massieu Helguera**”**. Dicha secundaria localizada en Calle Díaz Ordaz s/n Col. Jalalpa C.P. 01290 Álvaro Obregón, Distrito Federal, Tel 52597477.

El Instituto está ubicado cerca de mi domicilio, y por los años que llevo viviendo ahí pienso que si influye mucho el tipo de gente que asiste a la escuela, ya que en el turno de la mañana no se aceptan recursadores de otra academia, aunque esto no influye en el tipo de concurrencia que asiste a ella, porque así como hay compañeros que en verdad van a estudiar, existe el caso contrario, de los alumnos que sólo pierden el tiempo en la escuela.

Según las estadísticas de la escuela y algunos comentarios de profesores, los colegiales que cursan el tercer año, son una buena generación que está por salir, ya que las generaciones anteriores a esta, tuvieron muy mala reputación, pues no tenían un buen rendimiento académico y como son vecinos de la colonia algunos cayeron en el mundo de las drogas, teniendo en cuenta que esta es una población amplia de jóvenes desubicados, que caen rápido a los vicios, advirtiendo que en la academia a la hora de salida, asisten muchos adolescentes amigos de los mismos alumnos que les facilitan las drogas.

Pero enfocándonos en la población que está dentro de este Centro Educativo que consta de aproximadamente setecientos ochenta y cuatro colegiales de los tres niveles de educación secundaria, de los cuales tomé como muestra los alumnos que están en el último año, concluyendo sus estudios en dicha Academia. Lo consideré así porque me preocupa el desempeño que los discípulos tengan en el Nivel Medio Superior, ya que al llegar a este nivel se enfrentarán a nuevos problemas y diversas adversidades, en cuanto a su vida y las experiencias que tengan con las matemáticas.

La Secundaria en el turno matutino consta de seis grupos de tercer año, teniendo cada salón una concurrencia tanto de hombres como mujeres; de esta gran población de estudiantes seleccione al azar dos conjuntos, con los cuales trabajé en la fundamentación de la tesis.

Los grupos que escogí fueron el 3º “D” y el 3º “E” estos tienen un horario de clases específico, cada uno toma sesiones de dos hrs durante dos días y un día con una hora de clase, es decir tienen cinco hrs. en total a la semana de la clase de matemáticas.

I.II DESCRIPCIÓN DE ALUMNOS POR GRUPO

El grupo de tercero “E” consta de, treinta y ocho alumnos de los cuales, diez son mujeres y veintiocho hombres, sus edades oscilan entre los catorce y quince años; no existe ningún recursador en el conjunto, todos tienen las mismas aptitudes para aprender; es decir, ninguno tiene capacidades diferentes de aprendizaje. La asistencia por sesión, es de treinta y uno a treinta y cuatro educandos, de los cuales asiste nueve de las diez féminas regularmente y de veintiuno a veinte y cinco varones.

El grupo de tercero “D” consta de, cuarenta aprendiz de los cuales treinta y cinco son mujeres y cinco hombres, sus edades al igual que en el salón anterior oscila entre los catorce y quince años, todos tienen las mismas posibilidades de aprendizaje. En este grupo la asistencia por sesión es de, treinta y siete a treinta y nueve alumnos, de los cuales asisten de treinta y dos a treinta y cuatro féminas por sesión y cinco varones.

Si observamos nos damos cuenta que existe una gran diferencia de género en los alumnos, esto es porque en el grupo “E” se imparte como taller soldadura y es más enfocado para los hombres; en cambio en el “D” tienen el taller de industria del vestido y es más apto para las mujeres.

En la siguiente matriz, se redacta el comportamiento de los grupos durante una semana previa a la aplicación de la estrategia, esto se considero así para observar las variantes tanto del salón donde se desarrollaría la estrategia, como para ver la colaboración, el compañerismo, la interacción alumno-profesor, etc., que se dan cotidianamente con el profesor a cargo de dichos conjuntos, redactando cada una de estas variantes y reportándolas en el siguiente cuadro:

III.II.I MATRÍZ METODOLÓGICA

Variable o categoría	Indicador	Índice	Subíndice	Enunciado o pregunta	Alternativa de respuesta
Actitud de los alumnos de la secundaria hacia la clase de matemáticas	Relación profesor-alumno	Percepción del comportamiento de los profesores.	Formas de relación con el alumno	El maestro de matemáticas es autoritario **a**	a. Siempre
				Hay consentidos en el salón de clases. **d**	b. Casi siempre
				Se preocupa por saber si sus alumnos entienden o no. **a**	
				El maestro les hace sugerencias de que hacer para mejorar. **b**	c. A veces
				El maestro resuelve y llama la atención de todos hacia el pizarrón y después da tiempo a que tomen apuntes. **a**	d. Casi nunca
				Pregunta para poder borrar cada espacio del pizarrón. **a**	
				El profesor recalca las formulas que utiliza, a pesar de que es aprendizaje de primaria. **a**	

	Motivación	Extrínseca con respecto al profesor	Actuación pedagógica	Conoce las metas o propósitos de la actividad. **a**	a. Siempre
				Identifica que hacer antes, durante y después de la actividad. **a**	
				El profesor se equivoca y acepta su error y pide perdón **a**	b. Casi siempre
			Manejo Interpersonal	Solicita arbitrariamente la manifestación de iniciativas. **b**	
			Organización de la clase	Conoce las estrategias que debe emplear **a**	c. A veces
				Promueve el aprendizaje por medio de problemas. **a**	
				Reconoce los logros personales. **c**	d. Casi nunca
				Promueve que los alumnos perciban la evaluación como una ocasión para aprender y corregir. **b**	
				Equidad **b**	
			Proyecto educativo y currículo	Valora procesos y no productos. **a**	
			Clima en el aula	Agrupamiento de alumnos. **b**	

				Organización de experiencias de cooperación. **b**	
			Liderazgo	Existe un líder en la clase de matemáticas. **a**	a. Si b. No
				Este los impulsa para bien en el aprendizaje de la clase. **a**	
				Ayuda a los demás a entender lo que pasa en la clase. **a**	
Modelo Educativo y su instrumentación	Contenido curricular Declarativo “Saber que …” “Saber hacer…”	Hechos – conceptos		Proporciona el titulo del tema a tratar. **a**	a. Siempre b. Casi siempre c. A veces d. Casi nunca
				Explica conceptos en sus propias palabras. **b**	
				Aplica las técnicas y algoritmos adecuados. **b**	
				Desarrolla las destrezas necesarias para un procedimiento matemático. **b**	
	Contenido Relacional “saber convivir”	Comportamiento	Aprendizaje cooperativo	Promueve el trabajo en equipo. **a**	a. Siempre; nunca le faltan cuestiones oportunas sobre el tema.
				Solidaridad. **b**	
				Ayuda mutua. **b**	

				Se trabaja hasta que todos los miembros del equipo han comprendido y completado la actividad con éxito. **c**	a. Cuando esta muy interesado.
				Tolerancia. **a**	
				Participación activa. **b**	b. A veces actúa de forma pertinente, pero otras, parece que no está en la clase o lo que hace no tiene mucho sentido.
				Disposición al dialogo. **a**	
				Conocimiento y confianza en el otro. **b**	
				Aceptación y apoyo entre compañeros. **b**	
				Resolución de conflictos constructivistas. **b**	c. Rara vez interviene
				Se da la interacción alumno- alumno para ayudarse en el aprendizaje de la clase **a**	
				Se da la interacción alumno- alumno para distraerse. **b**	
				Se da la interacción profesor-alumno. **a**	

(Basado en la propuesta desarrollada por CARRILLO, L. n.d.)

I.III DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS PARA TERCER AÑO DE SECUNDARIA

El programa consta de tres apartados distribuidos de la siguiente forma:

BLOQUE 1.

I. SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

i. Significado y uso de las operaciones

a. Operaciones combinadas

- Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x – a)^2$; $(x + a) (x - b)$; $(x + a) (x – a)$.
- Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 - a^2$.

II. FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

i. Formas geométricas

a. Figuras planas

- Criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.

b. Rectas y ángulos

- Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias.
- Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.
- Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia si ambos abarcan el mismo arco.

ii. Medida

a. Estimar, medir y calcular

- Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.

III. MANEJO DE INFORMACIÓN

i. Representación de la información

a. Gráficas

- Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionada con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.
- Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para representar la información.

BLOQUE 2.

I. SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

i. Significado y uso de literales

a. Significado y uso de literales

- Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
- Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando las factorizaciones.

II. FORMA ESPACIO Y MEDIDA

i. Formas geométricas

a. Semejanza

- Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.
- Determinar los criterios de semejanza de triángulos
- Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos,
- Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.

III. MANEJO DE INFORMACIÓN

i. Análisis de la información

a. Porcentajes

- Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.

b. Noción de probabilidad

- Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.

BLOQUE 3.

I. SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

i. Significado y uso de literales

a. Relación Funcional

- Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.

b. Ecuaciones

- Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la formula general.

II. FORMA ESPACIO Y MEDIDA

i. Formas geométricas

i. Semejanza

- Determinar el Teorema de Tales mediante construcciones con segmentos.
- Aplicar el Teorema de Tales en diversos problemas.

ii. Transformaciones

ii. Movimientos en el plano

- Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que -1.
- Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura.
- Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual producto de las razones.

III. MANEJO DE INFORMACIÓN

i. Representación de la información

a. Gráficas

- Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.
- Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.
- Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes etc.

BLOQUE 4.

I. SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

i. Significado y uso de literales

a. Patrones y formulas

- Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.

II. FORMA ESPACIO Y MEDIDA

i. Medida

a. Estimar, medir y calcular

- Aplicar el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.
- Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas.
- Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.

III. MANEJO DE INFORMACIÓN

i. Representación de la información

a. Gráficas

- Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico de diversas situaciones.
- Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.

BLOQUE 5.

I. SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

i. Significado y uso de literales

a. Ecuaciones

- Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se resuelve, y viceversa, proponer una situación que modele estas representaciones.

II. FORMA ESPACIO Y MEDIDA

i. Formas geométricas

a. Cuerpos geométricos

- Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras.
- Construir desarrollos de planos y cilindros rectos
- Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto
- Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes, paralelos en una esfera o cono recto.

ii. Medida.

a. Justificación de fórmulas Medida

- Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.

b. Estimar, medir y calcular

- Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos.
- Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.

II. MANEJO DE INFORMACIÓN

i. Representación de la información.

a. Medidas de tendencias centrales y dispersión.

- Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de cajabrazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.

(Basado en el programa de Estudio [2006] SEP Federal).

II. OBJETIVOS

II.I GENERALES DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO

El objetivo principal de este tipo de estrategia, es desarrollar las habilidades fundamentales del aprendizaje y trabajo cooperativo, tales como: buscar y elegir información, tomar decisiones, comunicarse adecuadamente, autoevaluar la actuación, saber escuchar, negociar conflictos, organizar la participación individual en el grupo.

Apoyar el desarrollo de valores y actitudes de responsabilidad, eficiencia, compromiso y calidad hacia el trabajo y aprendizaje cooperativo.

Esperaría de antemano que al aplicar esta táctica de aprendizaje obtuviera información importante que ayudé a modificar; el rol de estudio que se da, en el área de Matemáticas, a nivel Secundaria y posteriormente implementar esta u otra estrategia de aprendizaje significativo en cualquier jerarquía de enseñanza, debido a que muchos de los estudiantes se sienten desmotivados por esta materia, puesto que, la ven extremadamente difícil.

i. Los estudiantes aprendan a trabajar en equipo.

ii. Al estar en equipo, sea cada uno capaz de convivir con personas que a lo mejor nunca les han hablado, aunque sólo sea para trabajar en clase.

iii. La organización por equipos, sea favorable para todos participar dando una respuesta del material, cada alumno que conforma la agrupación.

iv. Los líderes en los equipos, no tomen un rol negativo y se distraigan a la hora de trabajar.

v. De igual forma, confió que se cumplan todos los objetivos del tema, aunque sea un porcentaje mínimo de los estudiantes, siendo que a muchos les costará un poco más de trabajo, o no asistirán por motivos de salud; ya que el nivel del material va de lo fácil a lo difícil para que así ellos empiecen a tener buenas experiencias con la materia y se pongan retos mayores.

vi. Terminar todo el material que fue elaborado, para esta estrategia, diseñada en la tesis.

vii. Motivar con este material que los alumnos se interesen más por las matemáticas.

viii. ¿Cómo detectar que el aprendizaje ha sido significativo?

ix. ¿Comparado con el método tradicional, que beneficios hay en el proceso de enseñanza?

En las conclusiones analizaré si se cumplieron o no estos objetivos, con base en los comentarios que me hicieron saber los alumnos y los míos.

II.II OBJETIVOS DEL TEMA QUE APLIQUÉ EN LA SECUNDARIA

En este tema se espera que el alumno:

i. Sepa manejar de manera rápida y eficaz:

   a. El plano cartesiano.
   b. La deducción de patrones.
   c. La importancia de las rectas y de sus características; tal como su pendiente y la forma de su ecuación.

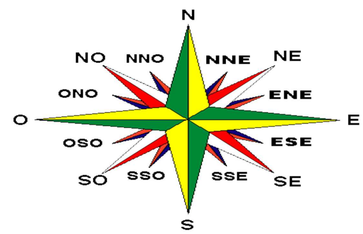
III. DESARRROLLO Y ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO

III.I MANEJO DE INFORMACIÓN

III.I.I EL PLANO CARTESIANO

❖ *Reúnete con tu equipo designado (de cuatro a seis personas) y realiza las siguientes actividades.*

Recuerda que así se encuentran localizados los puntos cardinales:



1. Un pirata escondió su tesoro en una isla desierta, y escribió en un mapa las siguientes indicaciones para localizarlo:

"Partir del cocotero más alto del centro de la isla, caminar 5 pasos al norte, se llegará a donde está una piedra redonda. Después, avanzar 4 pasos al este, hasta la cascada. Con dirección al norte, caminar 3 pasos para llegar al árbol caído. Por último, avanzar 9 pasos hacia el oeste hasta la cueva. El tesoro se encuentra enterrado ahí".

- Realiza el dibujo para que visualices este problema, tomando en cuenta que tienes el cocotero (lugar de partida) y la cueva (lugar donde está el tesoro).(Realiza el dibujo con las huellitas que vas dando por cada paso):

.

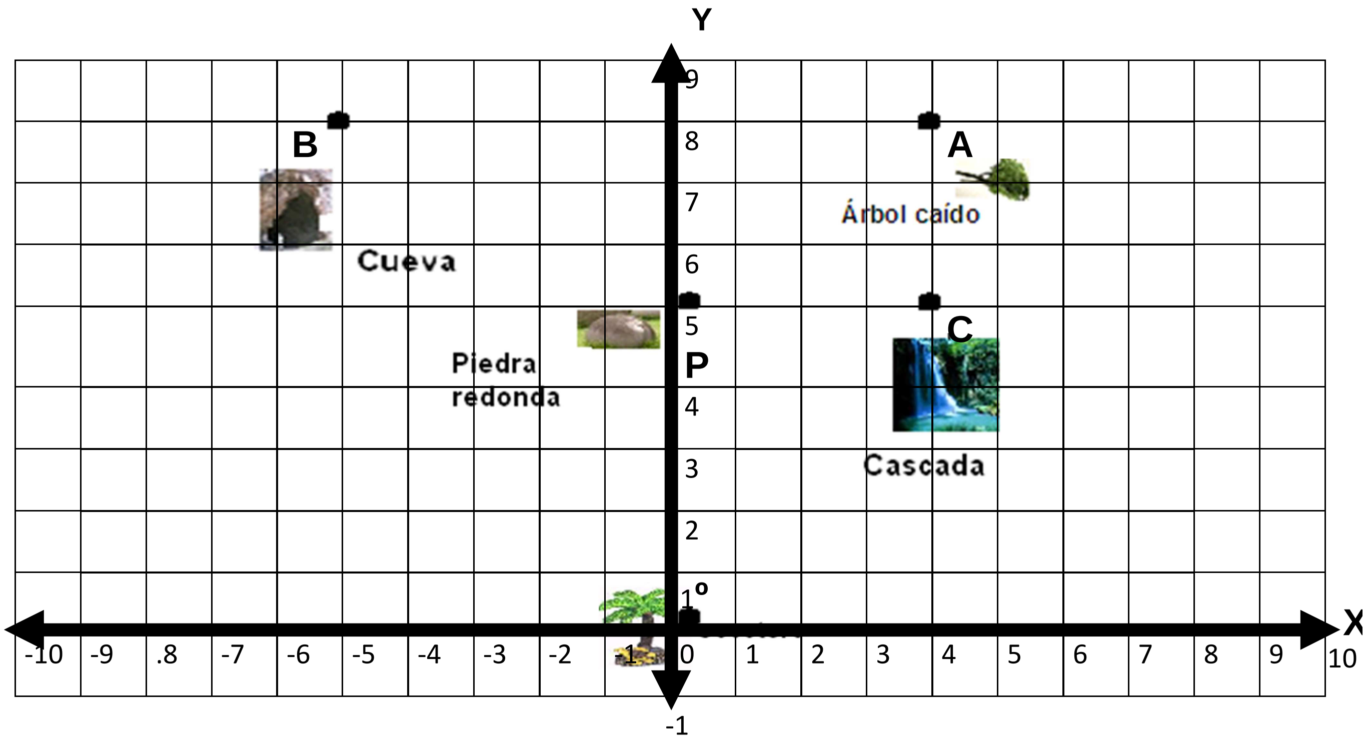
Cueva

Cocotero

- Compara con tus compañeros los dibujos que elaboraron.

Con las indicaciones como las anteriores, es difícil encontrar el tesoro. ¿Cómo podría el pirata dar instrucciones más claras?

2. Para esto apóyate en el plano cartesiano y traduce el problema partiendo del origen en el plano y observando que esta todo cuadriculado.



3. Específica las coordenadas de cada punto que tienes que pasar, para llegar a la cueva. Tomando en cuenta que primero se escribe la coordenada que está en X (horizontalmente) y después la coordenada que está en Y (verticalmente) para que el punto quede especificado:

O = (0 , 0)

P = (0 , ___)

C = (___ , 5)

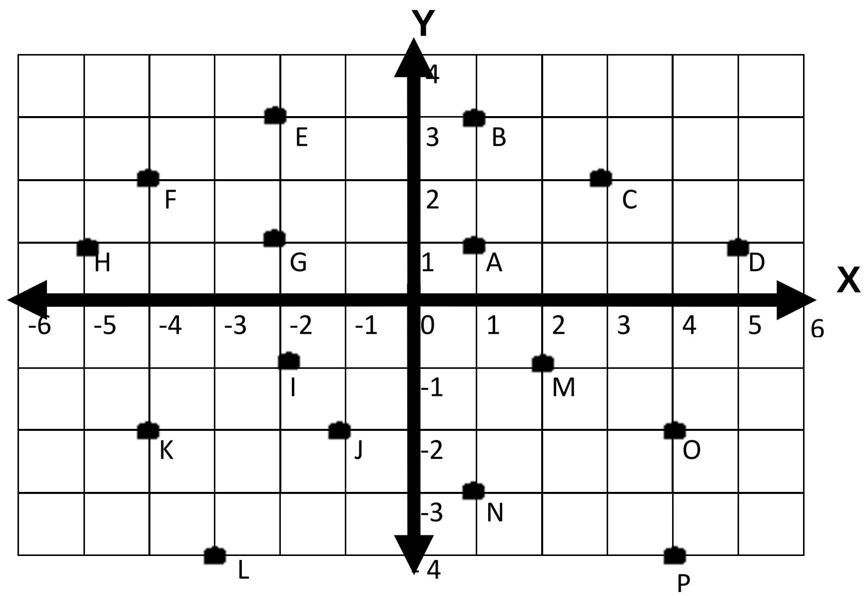
A = (4 . ___)

B = (___ , 8)

4. Ahora sí, puedes decirme en que coordenadas esta el tesoro.

Coordenadas del tesoro: (____ , ___)

5. Observa los siguientes puntos, que están marcados en el plano cartesiano



- Primero escribe las coordenadas de los puntos que se encuentran en el primer cuadrante, es decir:

A = (____ , 1) ; __ = (1 , ____) ; __= (3 , 2) ; **D** = (____, ____) ;

- ¿Qué observas de los puntos escritos anteriormente en cuanto a las coordenadas; es decir, que tienen en común estos cuatro puntos en la coordenada correspondiente a "x" y a "y"?________________________

- Ahora las del segundo cuadrante:

____ = (-2 , __), **F** = (____ , 2), ____ = (__ , __), **H** = (-5, 1)

- ¿Qué observas de los puntos escritos anteriormente en cuanto a las coordenadas "x" y "y" respectivamente?___________________________

- Continuando con el tercer cuadrante:

I = (____ , -1), ____ = (-1 , -2), **K** = (-4 , __), **L** = (____, ____)

- ¿Qué observas de los puntos escritos anteriormente en cuanto a las coordenadas; es decir, que tienen en común estos cuatro puntos?____

- Para que finalices con el cuarto cuadrante:

__ = (____ , -1),   ____ = (1 , ____),   __ = (4 , -2),   ____ = (____, -4)

- ¿Qué observas de los puntos escritos anteriormente en cuanto a las coordenadas; es decir, que tienen en común estos cuatro puntos?____

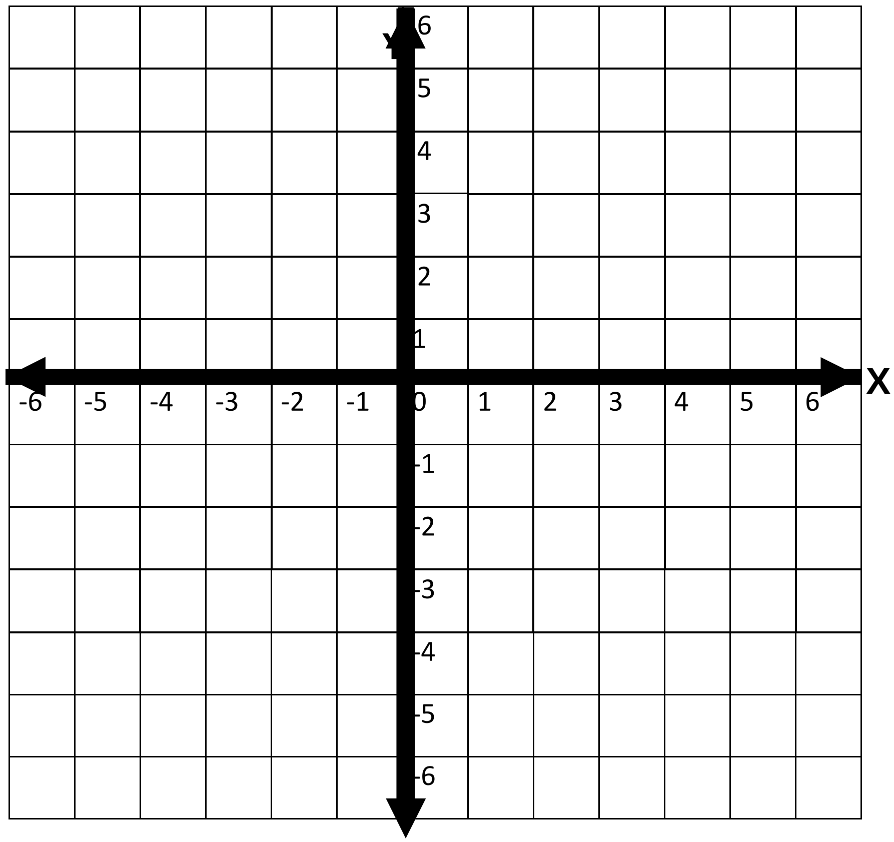
- Esto que acabas de observar en cada cuadrante sucede porque los puntos *(x , y)* están distribuidos con sus respectivos signos (Lo puedes apreciar en el esquema que se presenta a continuación).

Cuadrante	Abcisa	Ordenada
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

6. Ahora localiza los siguientes puntos; es decir dados los puntos localízalos en el plano cartesiano. (Teniendo en cuenta cómo están distribuidos los signos de cada cuadrante en el mismo.)

- Los puntos a localizar son los siguientes:

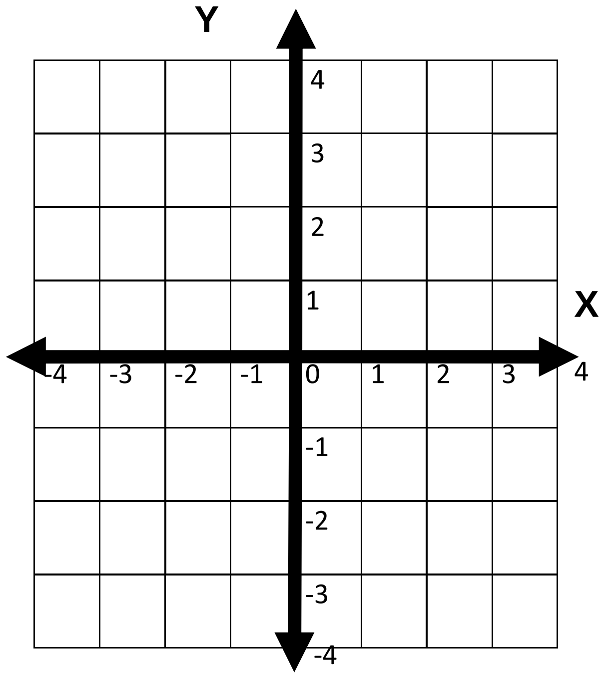
A (-3 , -2), **B** (-3 , 2), **C** (-1 , 4), **D** (3 , 4), **E** (5 , 2), **F** (5 , -2), **G** (1 , -2), **H** (1 , 2), **I** (-2 , -2), **J** (-2 , 1), **K** (-1 , 1), **L** (-1 , -2), **M** (2 , 1), **N** (4 , 1), **Ñ** (4 , -1), **O** (2 , -1).



- Une los puntos (en el plano) así como se indica **M** con **N, N** con **Ñ, Ñ** con **O** y **O** con **M,**
- Posteriormente **I** con **J, J** con **K** y **K** con **L,**
- De la misma manera **A** con **F, F** con **E, E** con **D, D** con **C, C** con **B** y **B** con **A**.
- Por último, une **C** con **H, H** con **E** y **H** con **G**.

- ¿Qué figura obtuviste al unir los puntos?__________________________.

7. Localiza en el plano cartesiano los puntos (1 , 1), (2 , 2), (3 , 3), (4 , 4), (-1 , -1), (-2 , -2), (-3 , -3), (-4 , -4), y únelos así como los fuiste localizando.



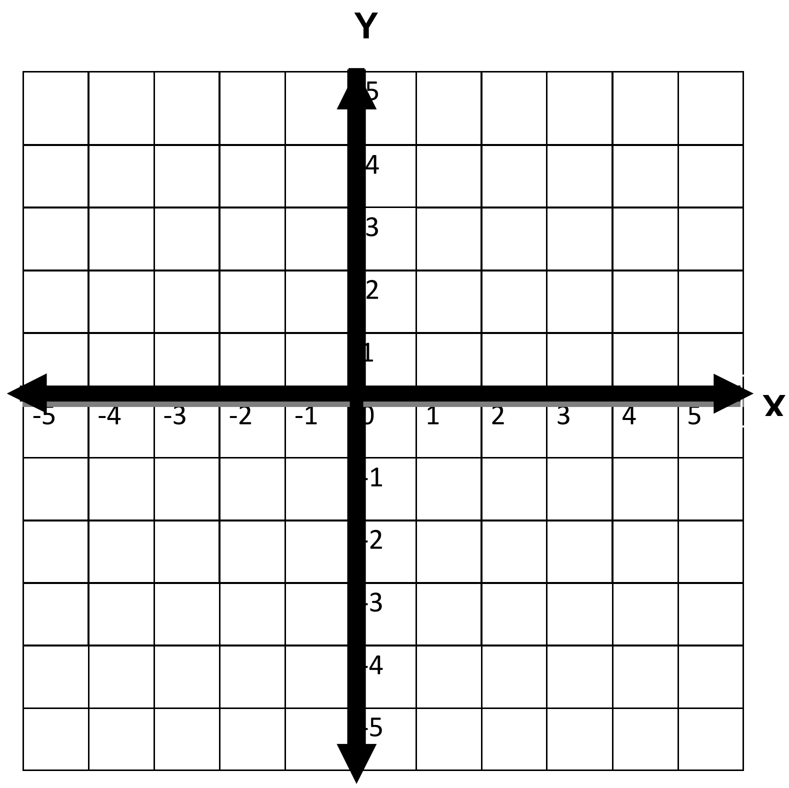
- ¿Qué figura obtuviste? ____________

8. **Ejercicios complementarios**

i. Localiza los puntos en el plano cartesiano:

A (-3 , 3), **B** (-2 , 3), **C** (-2 , 2), **D** (-1 , 3), **E** (-3 , 1), **F** (-1 , 1), **G** (1 , 4), **H** (3 , 1), **I** (1 , 1), **J** (-4 , -1), **K** (4 , -1), **L** (-3 , -3), **M** (3 , -3).

- Une los puntos **A** con **B, B** con **C,** y **C** con **A**.
- Análogamente **D** con **E, E** con **F** y **F** con **D.**
- Posteriormente **G** con **H, H** con **I** e **I** con **G**.
- Por último, une **J** con **K, K** con **M. M** con **L** y **L** con **J.**



- ¿Qué figura obtuviste?______________________.

ii. Si tienes el punto (0,4) ¿A qué cuadrante pertenece? (Si es que pertenece a alguno)______________________________

iii. En general si alguna de las coordenadas del punto (x , y) es igual a cero ¿Pertenece a algún cuadrante?_____________

III.II.I MANEJO DE INFORMACIÓN EN TABLAS

❖ *Reúnete con tu equipo designado (de cuatro a seis personas) y realiza las siguientes actividades.*

EJERCICIO 1. Observa las figuras y completa la tabla que está a continuación. Echa mano de los palillos que se te entregaron para completar la tabla y facilitar el contenido.

1° 2° 3° 4° 5° 6°

Figura Núm.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**20**	**100**	**N**
Número total de palillos	**3**				**15**			**___n**

- ¿Para la figura 20 cuántos palillos necesitas?_________________
- Si tuvieras la figura Núm. 30 ¿Cuántos palillos necesitarías?_______.
- Si tienes 450 palillos ¿Qué lugar ocuparía la figura que construirías?____________.
- Y dados 294 palillos ¿Qué lugar ocuparía en la tabla según el número de figura.________________.

EJERCICIO 2. Observa las siguientes figuras y completa la tabla que esta a continuación. También auxíliate de los palillos que se te repartieron para facilitar el contenido de la tabla.

1° 2° 3° 4° 5° 6°

Figura Núm.	1	2	3	4	5	20	100	N
Número total de palillos	**4**					**80**		**___n**

- ¿Para la figura 5 cuántos palillos necesitas?________________
- Si tuvieras una figura Núm. 30 ¿Cuántos palillos necesitarías?_______
- Si tienes 1200 palillos ¿Qué lugar ocuparía en la tabla?____________
- Y dados 296 palillos ¿Qué lugar ocuparía en la tabla?_______________

EJERCICIO 3. Supóngase que un vehículo se desplaza a 60 kilómetros por hora, durante un lapso de cuatro horas. En este caso, se puede determinar la distancia que ha recorrido el vehículo en cierto momento, ya que el tiempo y la distancia son magnitudes que se miden y que varían de manera determinada.

Tiempo	Kilómetros (Km)
30 min	
1 hr.	**60**
1 hr. 30 min	
2 hrs.	
2 hrs. 30	150
3 hrs.	
3 hrs. 30	
4 hrs.	

- Procede al llenado de la tabla. Tomando en cuenta la información que se dada.
- ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 8 horas?______________
- Si recorrió 5400 kilómetros ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer ésta distancia?______.
- ¿Cómo escribirías un patrón para deducir cualquier distancia N, si el tiempo es de M horas? _____________________________.

Recuerda que:

El área del triángulo se obtiene con la siguiente fórmula:

$$A = \frac{b \bullet h}{2}$$

EJERCICIO 4. El área de un triángulo de base constante igual a 5 depende sólo de la altura. Elabora una tabla de por lo menos 7 renglones que muestre la dependencia del área respecto a la altura.

Lados del triángulo		**Área**
Base	*Altura*	
5	2	$A = \frac{(5)(2)}{2} = \frac{\quad}{2} =$
5		
5	6	
5		
5	10	
5		
5	14	

- En el ejemplo anterior, date cuenta que existen variables que dependen de otras, ya que le das un valor cualquiera y éstas darán como resultado un número específico que sólo depende del valor que le hayas dado a la variable dependiente. Por este motivo, en el ejemplo, la base y el área del triángulo se denominan variables **dependientes** y la altura variable **independiente.**

EJERCICFIO 5. Para los siguientes casos, específica cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente, procediendo al llenado de la tabla.

	Fórmula	**Variable independiente**	**Variable dependiente**
Área del círculo	$A = \pi r^2$ *r = radio*		
Área del Triángulo	*A = bh/2* *b = base del triángulo* *h = altura del triángulo.*		
Perímetro de polígonos regulares	*P = nl* *n = al número de lados* *l = longitud del lado del polígono.*		
Velocidad de un móvil	*V = d/t* *d = distancia* *t =tiempo.*		

EJERCICIO 6. Las tarifas de los taxis que circulan por la ciudad de México, se calculaban en 2009 de la siguiente manera: se cobraba una cuota fija de $ 6.00 por abordar el vehículo, 90 centavos por cada kilometro recorrido. Elabora una tabla por lo menos con 8 datos, para que deduzcas cómo va aumentando la tarifa.

Kilómetros recorridos	0	1	2	3	4	5	6	7	x
Cuota por cobrar									

EJERCICIO 7. ¿Cuánto deberá pagar un sujeto por un recorrido de x kilómetros? (Esta pregunta se responde con el último cuadro de la tabla anterior). ____.

- Si el recorrido fuera de 8 kilómetros ¿Cuánto deberá pagar? $___ **.** 20
- Si pagó $16.80 pesos ¿Cuántos kilómetros recorrió?__________
- ¿Cuánto deberá pagar por 30 kilómetros recorridos? $__3
- Si pagó $66.30 pesos ¿Cuántos kilómetros recorrió?__________

1. Ejercicios complementarios.

Recuerda que el volumen de un cubo también se puede calcular como el producto del área de la cara de la base (a x a) por la altura(a), es decir:

$$V = a \times a \times a = (a \times a) \times a = a^2 \times a = a^3$$

donde "a" es la longitud del lado (arista).

- Con base en el ejercicio 4, observa lo que hiciste y resuelve el siguiente problema:

  "El volumen de un cubo depende de la longitud del lado. Realiza una tabla de cinco renglones, por lo menos, que ilustre la dependencia del volumen respecto a la longitud del lado".

- En la famosa carrera de la liebre y la tortuga, la primera le dio una ventaja de 90 metros a la segunda. Si la velocidad de la liebre es 10 metros por segundo y la de la tortuga, 1 metro por segundo, ¿Quién llegará primero a los 100 metros? (Para esto apóyate del ejemplo 6).

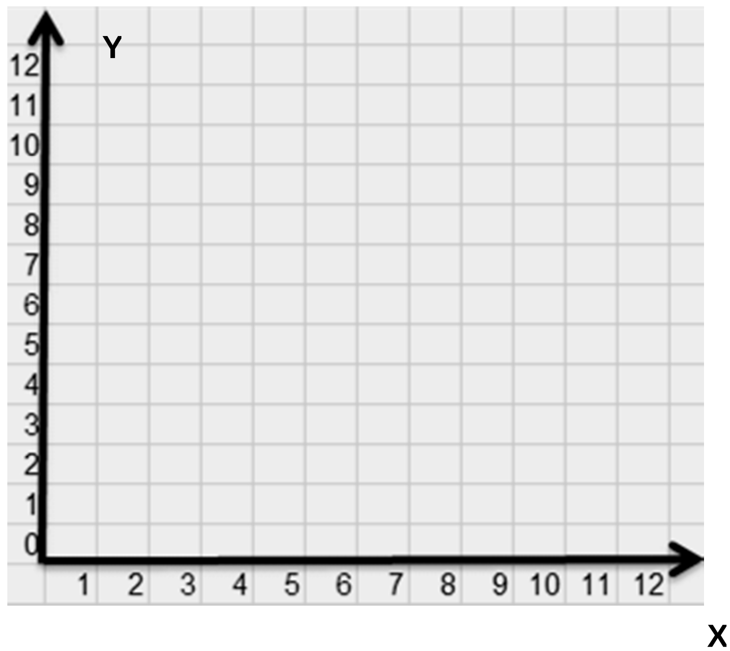
  - Elabora una tabla para las distancias recorridas por cada corredor. (Considera que en el tiempo t = 0, la tortuga ya está a 90 metros de la salida.)
  - Expresa la distancia recorrida por cada uno como una función del tiempo. (Observa que las funciones no son del mismo tipo con relación a la distancia recorrida por los participantes).

III.I.III PROPIEDADES DE UNA RECTA

- *Reúnete con tu equipo designado (de cuatro a seis personas) y realiza las siguientes actividades.*

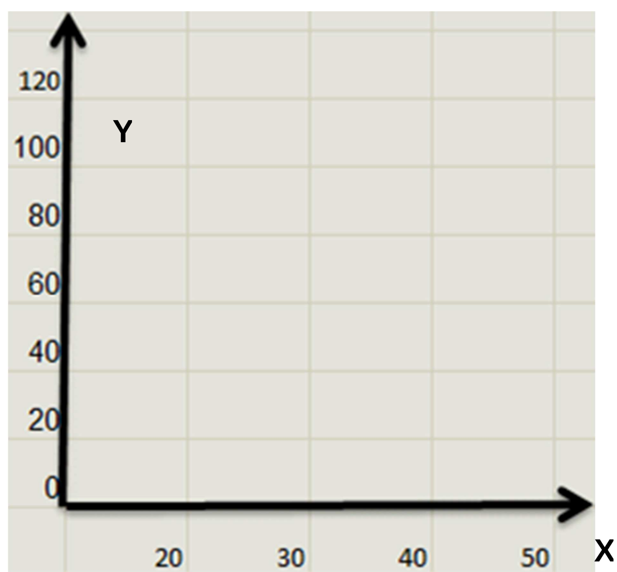
EJERCICIO 1. Elabora las gráficas de las siguientes tablas. (Teniendo en cuenta que la información de la tabla son puntos (x,y) de los cuales, primero se localiza la coordenada que están en “X” y después la de “Y”).

X	Y
0	0
2	2
3	3
4	4
6	6
8	8
12	12



- ¿Qué resultó como gráfica ?_________________.

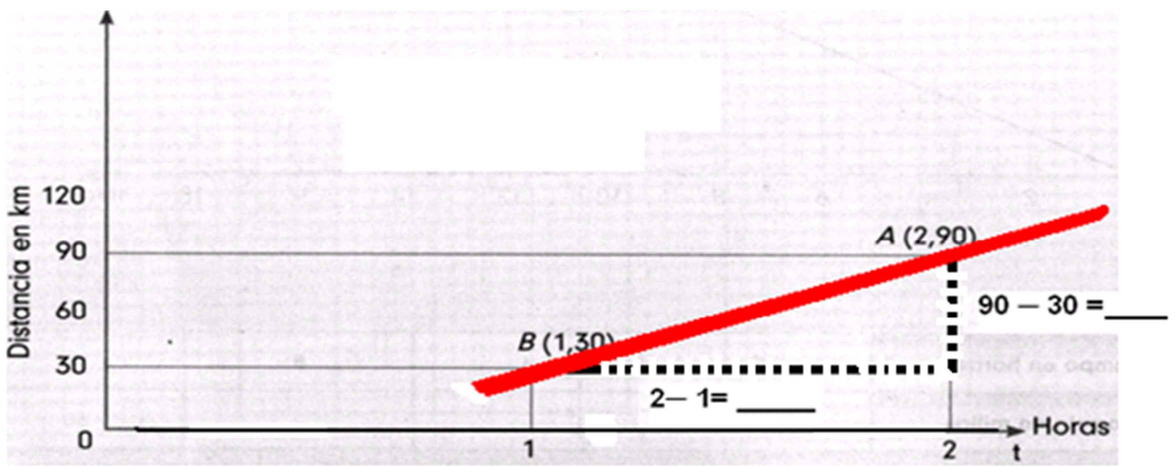
X	Y
20	120
30	80
40	40
50	0



- ¿La gráfica resultante fue? _____________

EJERCICIO 2. Observa la siguiente tabla y su correspondiente gráfica. Representa parte del viaje de un automóvil que lleva una velocidad de 60 km/h, durante una hora de su recorrido. Completa los planteamientos que se hacen a continuación.

Tiempo en horas	1	2
Distancia en Km.	30	90



- ¿Qué nombre recibe la gráfica de esta relación(es la marcada de color rojo?__________________________

- ¿Cuál es la diferencia entre la segunda y la primera hora en las distancias recorridas (En la gráfica es la diferencia que está marcada verticalmente)?_____________________.

- ¿Cuál es la diferencia entre los tiempos empleados (Observa la gráfica en la diferencia que está marcada horizontalmente)?______________________

- ¿Cuál es el cociente (o división) entre estas dos cantidades encontradas anteriormente *y/x*? _____________________________

Seguramente realizaste lo siguiente de forma separada

Al número obtenido se le conoce como "*razón de cambio*" o "*pendiente de la recta*".

$$\frac{d_a - d_B}{t_A - t} = \frac{90-30}{2-1} = \frac{60}{1} = 60$$

RAZÓN DE CAMBIO O PENDIENTE DE LA RECTA: Es el grado (medida) de inclinación de una recta. En el plano cartesiano es la razón de cambio de "Y" con respecto al cambio de "X". Es to es:

$$Razón \quad de\ cambio\ = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

donde $Y_2 - Y_1$: Es el cambio vertical (elevación) y

$X_2 - X_1$: Cambio horizontal (desplazamiento); con $x_1 \neq x_2$

Dicho de otra forma, en las rectas y = mx, definimos a "m" como la diferencia del cambio en el eje Y dividido por el respectivo cambio en el eje X, entre 2 puntos de la recta; es decir, $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

¿Qué sucederá si en la expresión anterior x_1 fuera igual a x_2? Discute con tus compañeros.____

EJERCICIO 3.Observemos un caso específico de la recta**,** que representa la relación **"y" es el triple del valor de "x";** de donde, para saber cómo es geométrica y algebraicamente tienes que recurrir al método de hacer una tabla, con el propósito de deducir la igualdad y después graficarla.

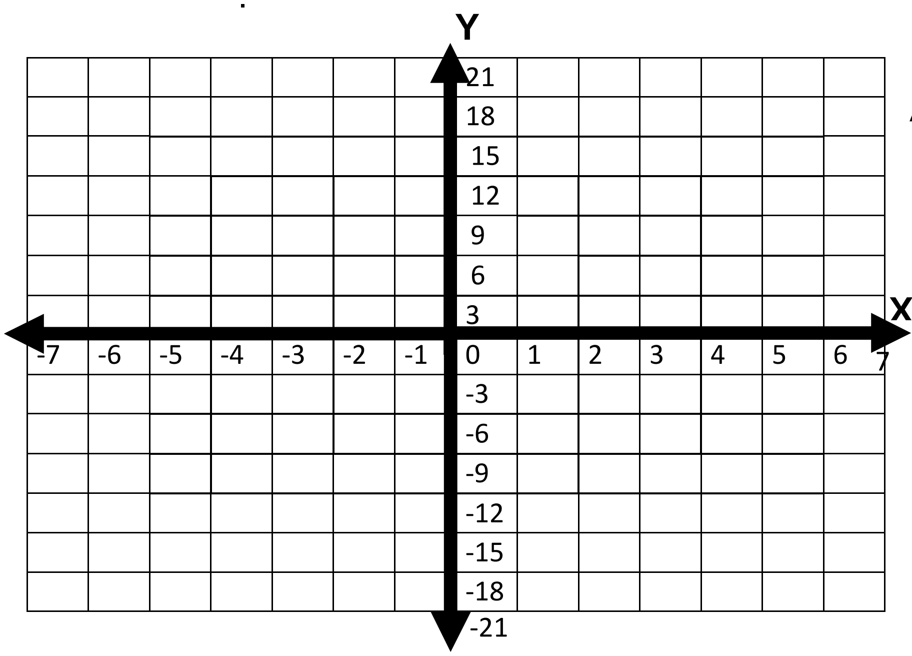
- Primero completa la tabla de dicha función:

X	Si la "y" es el triple del valor de "x"
–5	3 (– 5) = –15
–4	___(– 4) = – 12
–3	___(___) = – ___
–2	___(___) = – ___
–1	3 (– 1) = –3
0	___ (___) = 0
1	___ (1) = 3
2	3(___) = ___
3	___ (___) = 9
4	___(___) = ___
X	___(__) = ____

- ¿Cuál es la expresión en lenguaje algebraico del enunciado anterior? ____________________

Con la información de la tabla localiza los puntos en el plano cartesiano así como lo hiciste en la primera actividad y únelos ¿Qué gráfica obtuviste?____________________

.



- Localiza el punto A = (2,8) en el plano

- Comprueba si el punto “A” satisface o no la igualdad “y=3x”, es decir, la ecuación con la que empezaste esta actividad. (Compruébalo llenado los espacios de abajo y viendo si la última igualdad se da). Donde “x=2” y “y =8”

y = 3x

___ = 3 (___)

___ = ____

- ¿Este punto A = (2,8) satisface la igualdad?_________, ya que geométricamente no está sobre la recta.

- Localiza el punto B = (3, __), (en el plano anterior) el cual satisface la igualdad y geométricamente esta sobre la recta dibujada anteriormente. (Localiza la coordenada de “y” del punto anterior resolviendo la igualdad de abajo).

y = 3x

___ = 3 (___)

___ = ____

- Localiza el punto C = (__, −12) el cual satisface la ecuación y esta geométricamente sobre la recta. (Realiza los cálculos pertinentes para encontrar la coordenada que falta de “x”, observa como lo hiciste en el caso anterior con la coordenada de “y”)

- Toma dos puntos D = (___ , ___) y E = (___ , ___) los cuales deben de estar sobre la recta que dibujaste.
- Estos dos puntos D y E tienen dos coordenadas la de “x” y la de “y” cada uno. Realiza la diferencia (la resta) de las coordenadas que pertenecen a las “y” (es decir, $y_2 - y_1$), siendo el resultado: ________________
- Ahora realiza la diferencia de las coordenadas que pertenecen a la “x” (es decir, $x_2 - x_1$), siendo el resultado: ________________
- De las dos repuestas anteriores realiza el cociente (división), de las “y” entre las “x”; obteniendo así: _________________.
- El número que encontraste en la respuesta anterior se llama pendiente de la recta.
- Cuál es la pendiente de ésta recta:_______________.

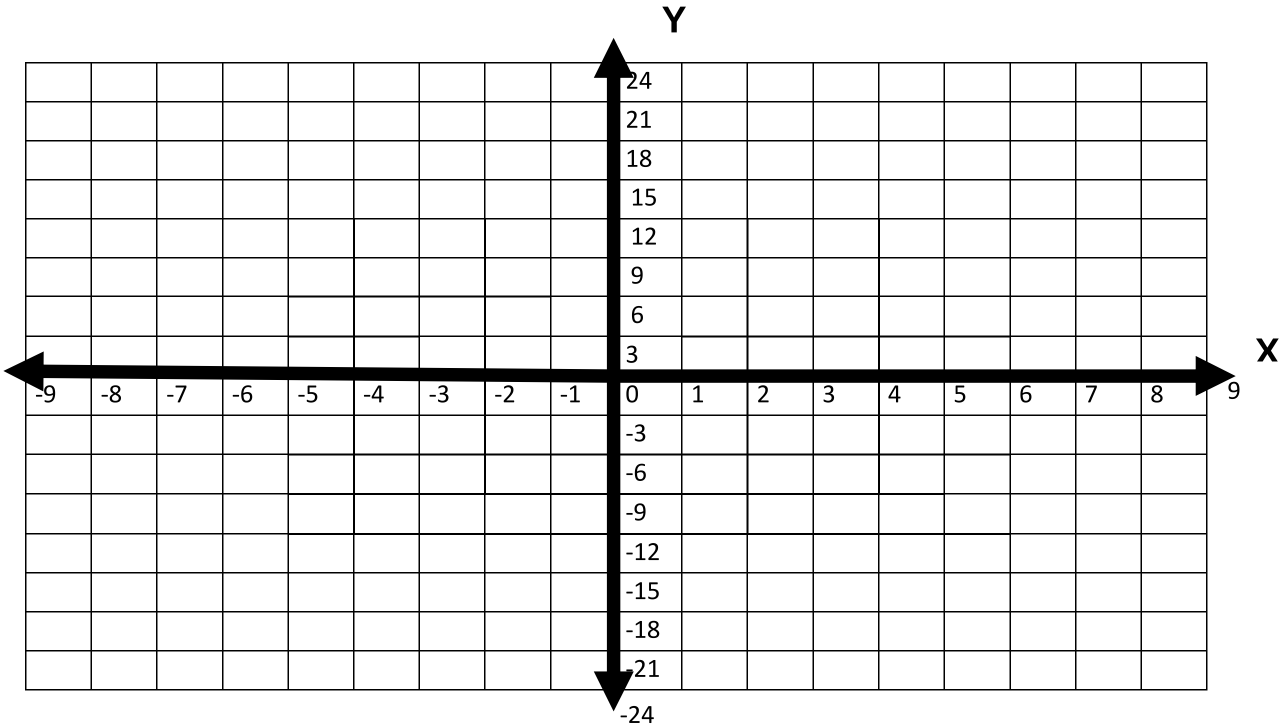
EJERCICIO 4.Con base en el ejemplo anterior, gráfica la relación que tiene como ecuación “**y” es igual a menos tres veces el valor de “x”.** Para saber cómo es algebraica y geométricamente recurre al llenado de la tabla.

- Completa la tabla de dicha función:

x	Si la “y” es igual a menos tres veces el valor de “x”
−3	−___ (___) = ___
−2	−___ (___) = ___
−1	− 3 (− 1) = 3
0	− ___ (___) = 0
1	−___ (1) = − 3
2	−___ (___) = ___
3	___ (___) = − 9
X	−___(__) = ____

- ¿Cuál es la traducción algebraica del enunciado anterior?___________

o Localiza los puntos en el plano cartesiano.



- Localiza el punto F = (–2 ,9) en el plano cartesiano.
- Comprueba si el punto "F" satisface o no la igualdad (y = – 3x), es decir, la ecuación con la que empezaste este ejercicio. (Compruébalo llenado los espacios de abajo y viendo si la última igualdad se da).

y = – 3x

___ = – 3 (___)

___ = ____

- ¿Éste punto F = (–2,9) satisface la igualdad (y = – 3x)? _________, ya que geométricamente no está sobre la recta.

- Localiza el punto G = (-8, __), (en el plano anterior) el cual satisface la igualdad y geométricamente esta sobre la recta dibujada anteriormente. (Localiza la coordenada de "y" del punto anterior resolviendo la igualdad de abajo).

y = –3x

___ = –3 (___)

___ = ____

- Localiza el punto H = (____, -15) el cual satisface la ecuación y está geométricamente sobre la recta. (Realiza los cálculos pertinentes para encontrar la coordenada que falta de “x”, observa como se hizo en el caso anterior con la coordenada de “y”).

- Toma dos puntos I = (___ , ___) y J = (___ , ___) los cuales deben de estar sobre la recta que dibujaste.
- Realiza la diferencia (la resta) de las coordenadas que pertenecen a la “y” (es decir, $y_2 - y_1$, así como lo hiciste en el ejercicio 3), siendo el resultado: _________________
- Ahora realiza la diferencia de las coordenadas que pertenecen a la “x” (es decir, $x_2 - x_1$), siendo el resultado: _________________
- De las dos repuestas anteriores realiza el cociente de las “y” entre las “x”, obteniendo así: __________________.
- El número que encontraste en la respuesta anterior se llama la pendiente de la recta.
- ¿Cuál es la pendiente de esta recta?________________.

1. ¿Qué diferencia encuentras entre las ecuaciones de dichas rectas, en cuanto a cómo están escritas ($y = 3x$, $y = -3x$)?________________________________.

- Si llegase a existir alguna diferencia en las dos últimas gráficas ($y = 3x$, $y = -3x$) explícala:____
____

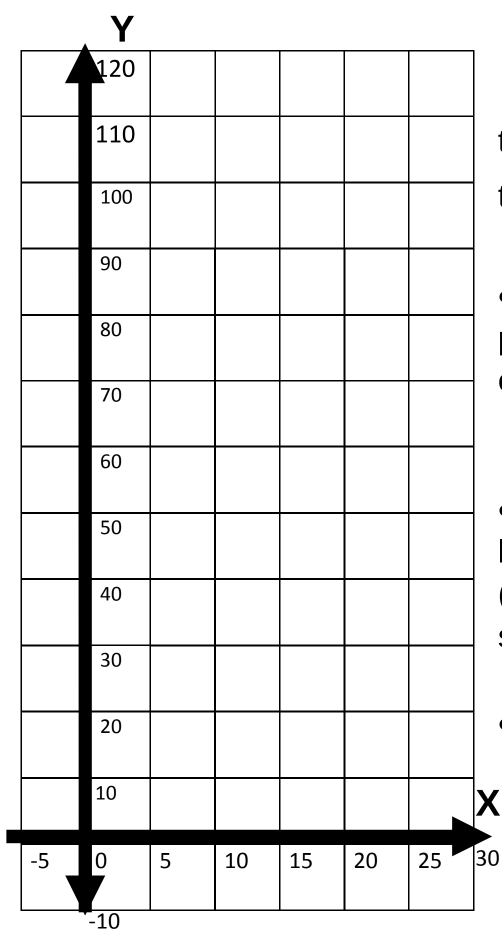
EJERCICIO 6. Discute el siguiente problema con tus compañeros de equipo.

- Un tinaco se llena de agua a razón de 4 litros por minuto. Se quiere saber cuántos litros tiene el tinaco en cierto tiempo. Observa la tabla y completa lo que se te pide.

Minutos T	**Litros l**
1	**4**
5	
10	
15	
20	
25	
30	
T	

a) ¿Qué patrón ocuparías para llenar más rápido la tabla?: ___________________________________

b) Observa que $l = 4t$, (el cual esta deducido en el último renglón de la tabla), lo puedes traducir en términos de "x" y "y" (de donde la variable "x" pertenece al tiempo y "y" a los litros del agua en el tinaco) de la siguiente manera: ___= 4__



c) Traza los puntos de la tabla que tienes a tu izquierda, únelos y escribe qué figura te resultó.________________________________

- En está gráfica, menciona cuál es la pendiente del la recta (Observa como la encontraste en los casos anteriores).__________
- Otra forma geométrica de encontrar la pendiente dibujar el triángulo rectángulo (triángulo que tiene un ángulo interior de 90º) que se forma entre los dos puntos.
- Cuenta los cuadritos que se formaron en la recta paralela al eje "Y" (Recta vertical) que están delimitando el triángulo, siendo este número_________

- Ahora cuántos cuadritos hay en la recta paralela al eje “x” del triángulo, obteniendo así el siguiente valor: _________

- Solo falta dividir las dos cantidades anteriores y obtendrás que este valor es la pendiente de la recta (Se divide las “y” entre las “x”). ___________

Actividades complementarias:

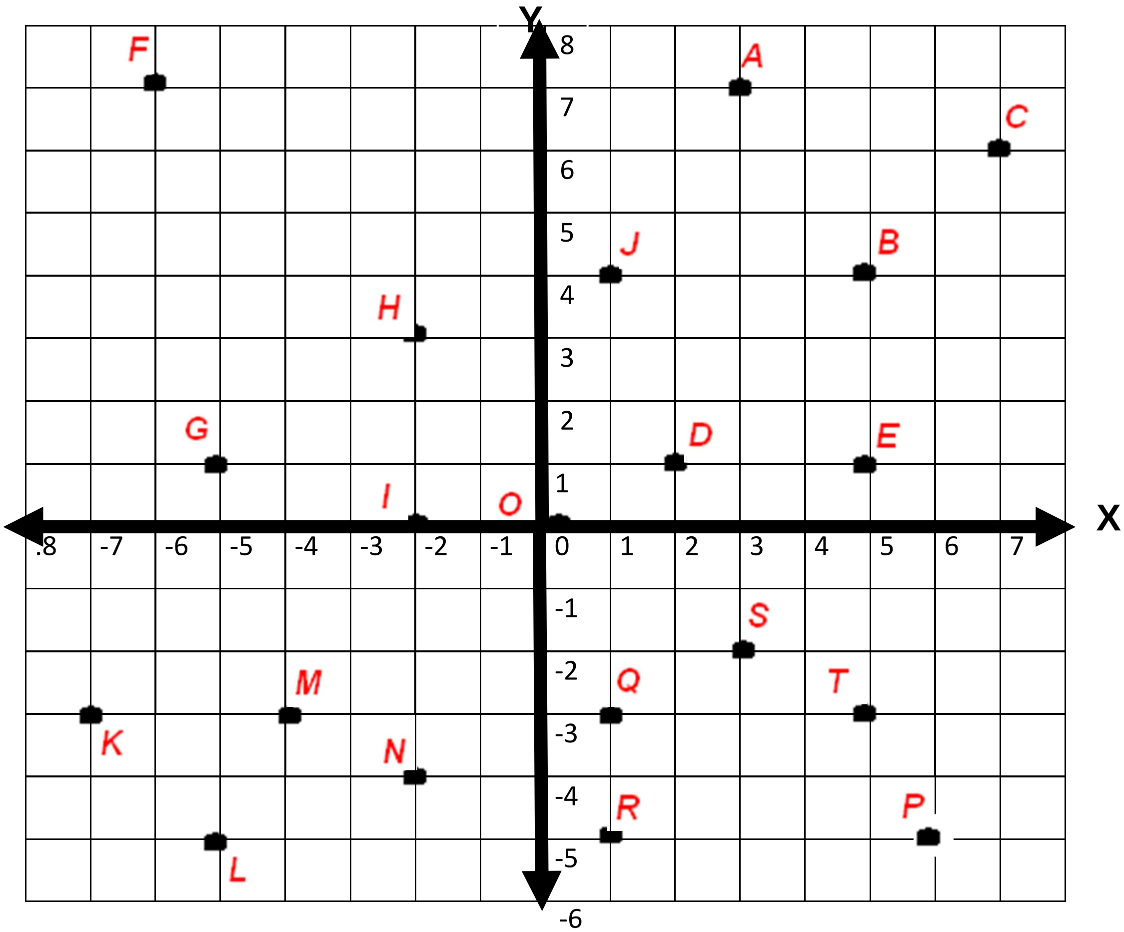
- o Analiza de igual manera el caso para y = 7x, y = 9x, y = 3x + 2, $y = \frac{1}{2}x + 2$ y discutan en equipo, que pasa en los últimos dos ejercicios con las rectas.

- o Al momento de graficarlas mínimo ¿cuántos puntos necesitas?

III.I.IV EVALUACIÓN DE MANEJO DE INFORMACIÓN

- ❖ *Reúnete con tu nuevo equipo designado (de cuatro a seis personas) y realiza las siguientes actividades, así como lo hiciste en la sesión anterior.*

1. En el siguiente plano cartesiano se encuentran colocados algunos puntos. Determina las coordenadas de cada uno y exprésalas como par ordenado.



A (___ , ___); B (___ . ___); C (___ , ___); D (___ , ___);

E (___. ___); F (___ . ___); G (___ , ___); H (___ , ___);

I (___ , ___); J (___ . ___); K (___ , ___); L (___ , ___);

M (___. ___); N (___ . ___); O (___ , ___); P (___ , ___);

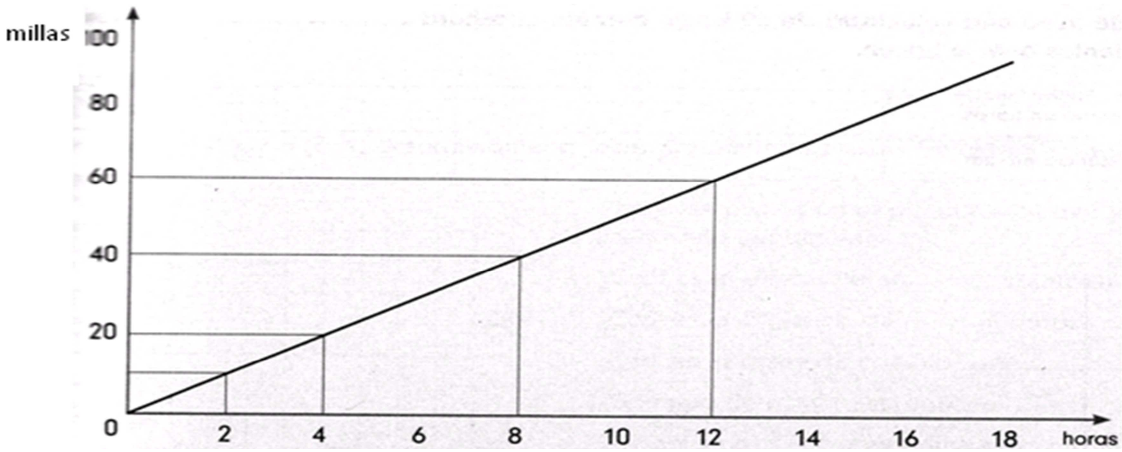
Q (___ , ___); R (___ . ___); S (___ , ___); T (___ . ___).

- A continuación se dan parejas ordenadas, ubica cada punto en el plano cartesiano anterior.

a (5 , 6); b (–4 , 5); c (–3 , –2); d (7 , –4); e (0 , 2);

f (7 , 0); g (–1 , –6); h (3 , –6); i (2 , 0); j (4, 4);

2. Una embarcación de vela, navega a velocidad constante, recorre 60 millas en 12 horas. Observa la gráfica.



- Completa la tabla con base en la gráfica de arriba.

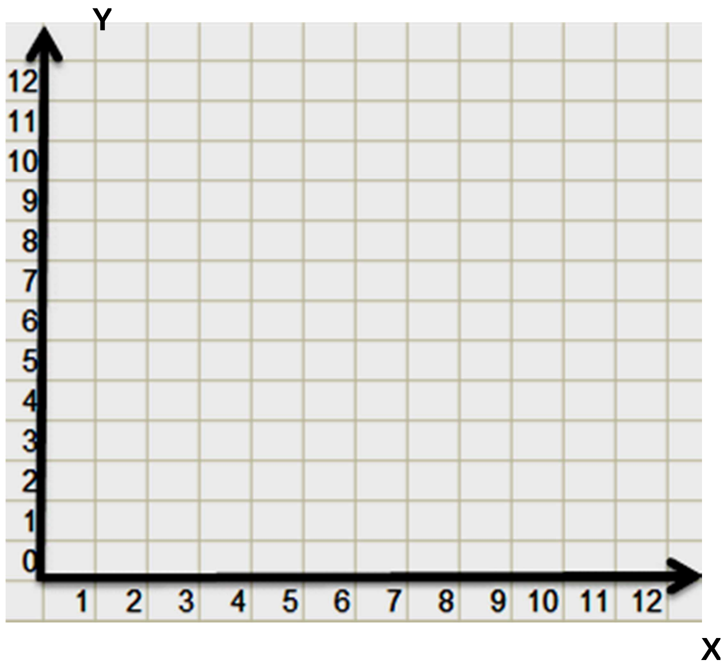
Tiempo en horas	2	4	8	12
Recorrido en millas				60

- Responde lo que se pide:

  - ¿Qué distancia recorrió en 7 horas? _________
  - ¿En cuánto tiempo recorrió 30 millas?________
  - ¿A qué velocidad se mueve el velero por hora ?_______________________________________
  - Explica como obtuviste la velocidad ___________________________

    ____
  - ¿Qué distancia recorrió en **t** horas?____________

3. Localiza los puntos **A** (4 , 6) y **B** (7 , 9) únelos para determinar una recta. Determina su razón de cambio (pendiente):



- ¿Cuál es la diferencia entre las **ordenadas**, $y_2 - y_1$ (es decir; las coordenadas de Y en el punto A y B)?____________________________.
- ¿Cuál es la diferencia entre las **abscisas,** $x_2 - x_1$ (es decir, las coordenadas de X en el punto A y B)?____________________________.
- ¿Cuál es la razón de cambio (Recuerda la fórmula que utilizaste en una de las actividades de propiedades de la recta)?____.

4. Traza en el plano cartesiano las líneas rectas que corresponden a las siguientes ecuaciones.

a) Cuando “y” es el doble de “x”

- Completa primero la tabla de dicha ecuación.

x	y
–5	__(–5) = – __
0	2 (0) = 0
3	__ (__) = ___
4	__ (__) = ___
X	__ (__) = ___

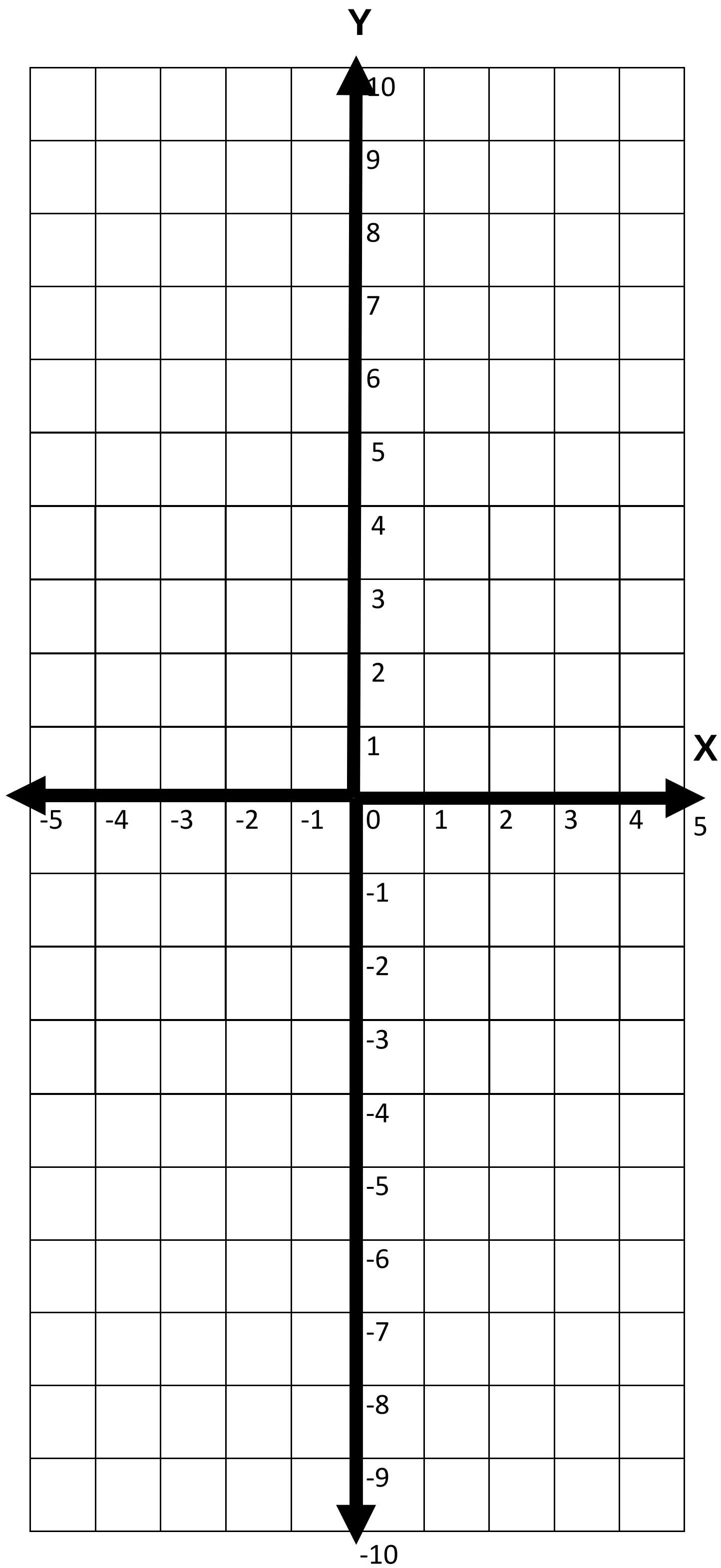
- ¿Cuál es la expresión matemática del enunciado?___________________________

- Localiza las coordenadas (x, y) de la tabla en el plano cartesiano.

- Une los puntos en el plano cartesiano ¿Qué figura obtuviste?____________

- Cuánto vale su pendiente (Ocupa cualquiera de los métodos enseñados en el tema propiedades de la recta):__________________

- Esta recta es un muy particular ya que pasa por el punto: (0, __)


Y
X
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

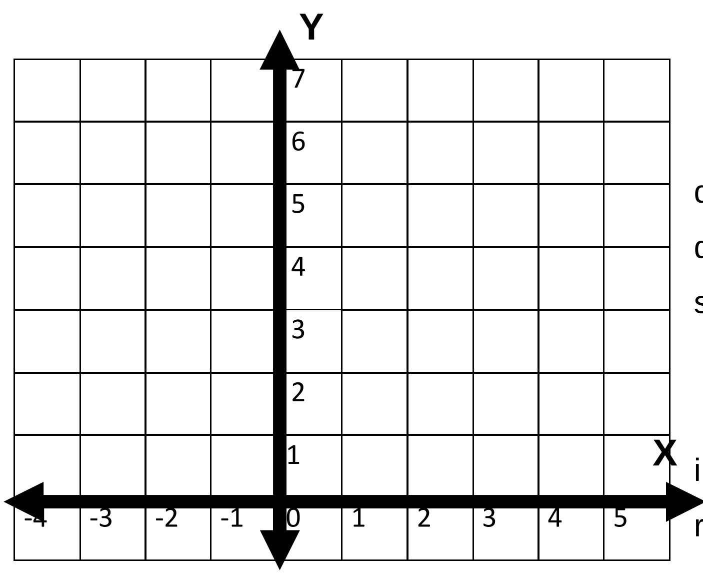
5. Luego de hacer las operaciones pertinentes, para completar las tablas de valores, represéntalas gráficamente en el plano cartesiano y contesta lo que se solicita (las dos rectas en el mismo plano de abajo).

La “y” es el valor de “x” más cuatro.

x	y
3	(4) + ___= 7
0	(__) + 4 =___
x	___ + __ = y

La “y” es menos el valor de “x” más cuatro.

x	y
2	– ___+ ___= 2
–3	– (___)+ ___=
x	– (___) + ___ = y



- Estas dos rectas que dibujaste forman un ángulo de 90º de donde se concluye que son rectas ________________,

- ¿En qué punto se interseca ambas rectas? (_____ , 4)

- ¿El punto (0, 4) satisface o no la igualdad y = x + 4? (Realiza aquí tus operaciones)_____________

y = x + 4

__ = ___ + 4

__ = ___

- ¿El punto (0, 4) satisface o no la igualdad $y = -x + 4$. **(**Realiza aquí tus operaciones como en el caso anterior)?____________

- Por lo tanto se concluye que este punto (0,4) es solución de ambas igualdades $y = x + 4$, $y = -x + 4$.

- ¿Cuál es la diferencia entre los puntos A = (–2 , **2**) y B = (3 , **7**), en las coordenadas de "y"? (Tomando en cuenta que estos puntos están sobre la recta **$y = x + 4$** y tienes que tomar $y_2 - y_1$)?______________.

- ¿Cuál es la diferencia entre las abscisas (es decir, las coordenadas de "X") con los mismos puntos anteriores $x_2 - x_1$?__________________.

- ¿Cuál es la razón de cambio (pendiente) de la recta $y = x + 4$. **(**Sólo bastará con dividir los dos resultados anteriores; o revisar cómo se definió anteriormente?___________

- ¿Cuál es la diferencia entre los puntos A = (1 , **3**) y B = (–1 , **5**), en las coordenadas de las "y"**.** (Tomando en cuenta que estos puntos están sobre la recta $y = -x + 4$ y tienes que tomar $y_2 - y_1$)?____________.

- ¿Cuál es la diferencia entre las abscisas (es decir, las coordenadas de "X") con los mismos puntos anteriores "B" y "A", es decir $x_2 - x_1$?_____________________.

- ¿Cuál es la razón de cambio de la recta $y = -x + 4$?___________

- Fíjate en el resultado de ambas pendientes, y explica en qué influyó que tuvieran signos_________________ las pendientes de las rectas.

- Observa los coeficientes de la variable "x" en ambas ecuaciones ($y = x + 4$, $y = -x + 4$).
    - ¿Cuáles son? ________ y _________.

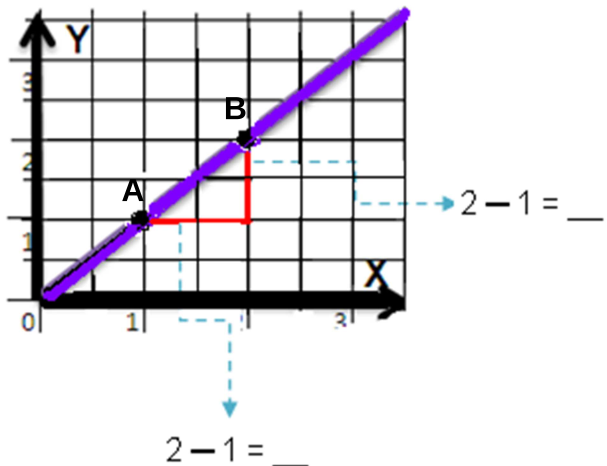
- o ¿En qué influyen estos coeficientes al trazar las rectas (Observa la gráficas y verás cómo quedaron dibujadas geométricamente, también mira cómo resultaron las pendientes de las gráficas)?____

____

- o ¿Cuál es la ordenada al origen en ambos casos? _____ y ______.

6. Determina el valor de “m” de la función correspondiente a y = mx, con base en las siguientes gráficas.

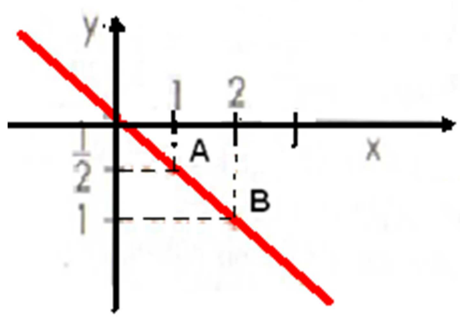
a)



- Primero escribe cuales son las coordenadas de los punto A y B, es decir A = (____ , ____) y B = (____ , ____)
- ¿Cuál es la diferencia entre los puntos A y B en las coordenadas de las “y”**.** (Tomando en cuenta que tienes que tomar las coordenadas de “B” menos las coordenadas de “A”)?_______________________.
- ¿Cuál es la diferencia entre las abscisas (es decir, las coordenadas de “x”) con los mismos puntos anteriores “B” y “A”?_____________________.
- ¿Cuál es el cociente entre los resultados anteriores, es decir; las coordenadas de “y” entre las coordenadas de “x”?____________. Este mismo resultado será la pendiente ya que la calculaste con base a la fórmula, entonces “m” = _____.

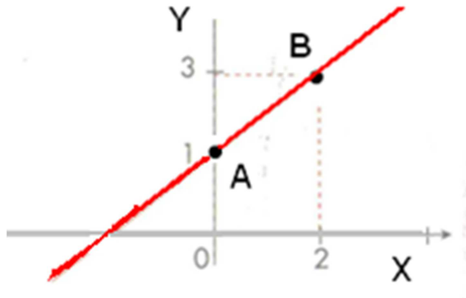
- Con este resultado, ya tienes la ecuación de la recta, ya que sólo faltaba la pendiente. Siendo la recta **y = __x**

b)



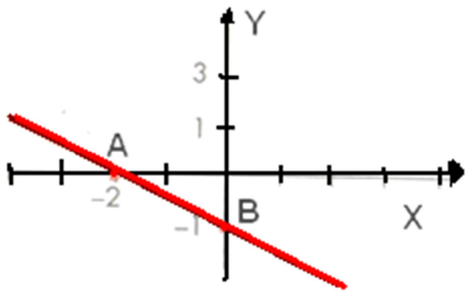
- Primero escribe las coordenadas de los punto A y B, es decir A = (____ , ____) y B = (____ , ____)
- ¿Cuál es la diferencia entre los puntos A y B en las coordenadas de las "y"**.** (Tomando en cuenta la coordenada de "B" menos "A")?________________________.
- ¿Cuál es la diferencia entre las abscisas (es decir, las coordenadas de "x") con los mismos puntos anteriores "B" y "A"?_____________________.
- ¿Cuál es el cociente entre los resultados anteriores, es decir; las coordenadas de "y" entre las coordenadas de "x"?____________. Este mismo resultado será la pendiente, ya que la calculaste con base a la fórmula, entonces "m" = _____.
- Con este resultado, ya tienes la ecuación de la recta, ya que sólo faltaba la pendiente. Siendo la recta y = –___x.

7. Encuentra las funciones de la forma “y = mx + b” que corresponden a las siguientes gráficas.

a) 

- Primero escribe cuales son las coordenadas de los punto A y B, es decir A = (____ , ____)   y   B = (____ , ____)
- ¿Cuál es la diferencia entre los puntos A y B en las coordenadas de las “y”**.** (Tomando en cuenta la coordenada de “B” menos “A”)?___________________.
- ¿Cuál es la diferencia entre las abscisas (es decir, las coordenadas de “x”) con los mismos puntos anteriores “B” y “A”?________________.
- ¿Cuál es el cociente entre los resultados anteriores, es decir; las coordenadas de “y” entre las coordenadas de “x”?_____________. Este mismo resultado será la pendiente, ya que la calculaste con base a la fórmula, entonces “m” = _____.
- Con este resultado ya tienes una parte de la ecuación de la recta “y = ___x + b”.
- Ahora falta saber cuánto vale “b” y este es el valor en donde la recta que esta dibujada corta al eje de los ordenadas (eje “y”). Siendo este punto A = (0 , __) y b es el número que es distinto de cero.
- Finalmente dedujiste que la ecuación de la recta es: “**y = ___x + ___”.**

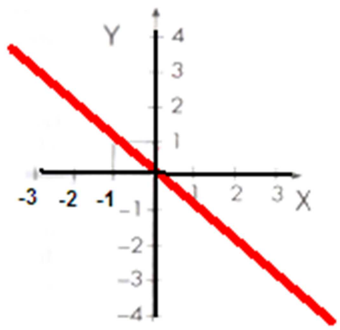
b)

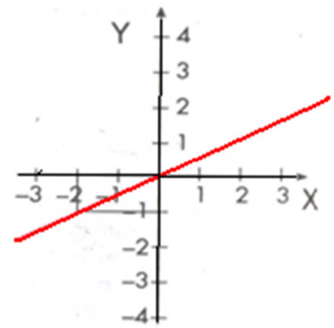


- Primero escribe las coordenadas de los punto A y B; es decir, A = (____ , ____)   y   B = (____ , ____)
- ¿Cuál es la diferencia entre los puntos A y B en las coordenadas de las "y"**.** (Tomando en cuenta la coordenada de "B" menos "A")?__________________.
- ¿Cuál es la diferencia entre las abscisas (es decir, las coordenadas de "x") con los mismos puntos anteriores "B" y "A"?_______________.
- ¿Cuál es el cociente entre los resultados anteriores, es decir; las coordenadas de "y" entre las coordenadas de "x"?____________. Este mismo resultado, será la pendiente ya que la calculaste con base a la fórmula, entonces "m" = – ____.
- Con este resultado ya tienes una parte de la ecuación de la recta "y = –___x + b".
- Ahora falta saber cuánto vale "b" y este es el valor en donde la recta que esta dibujada corta al eje de los ordenadas (eje "y"). Siendo este punto B = (0 , –__) y b es el número que es distinto de cero.
- Finalmente dedujiste que la ecuación de la recta es: "**y = –___x – ___".**

8. Actividades complementarias

- De las siguientes dos gráficas realiza lo que se pide





a) Determina la constante **m** de las funciones correspondientes a cada gráfica.

b) Escribe las funciones de cada gráfica en su forma “y=mx”.

- Observa la siguiente gráfica y realiza lo que se requiere.

Funciones	-2x	-5x	(1/3)x	10x
Punto	(0, 9)	(-1 , 5)	(-1 , -1/3)	(2 , -20)

a) Determina si el punto correspondiente está en la gráfica de la función.

b) Ubica cada punto en el plano cartesiano y traza la gráfica de las funciones (Realiza las gráficas en hojas milimétricas).

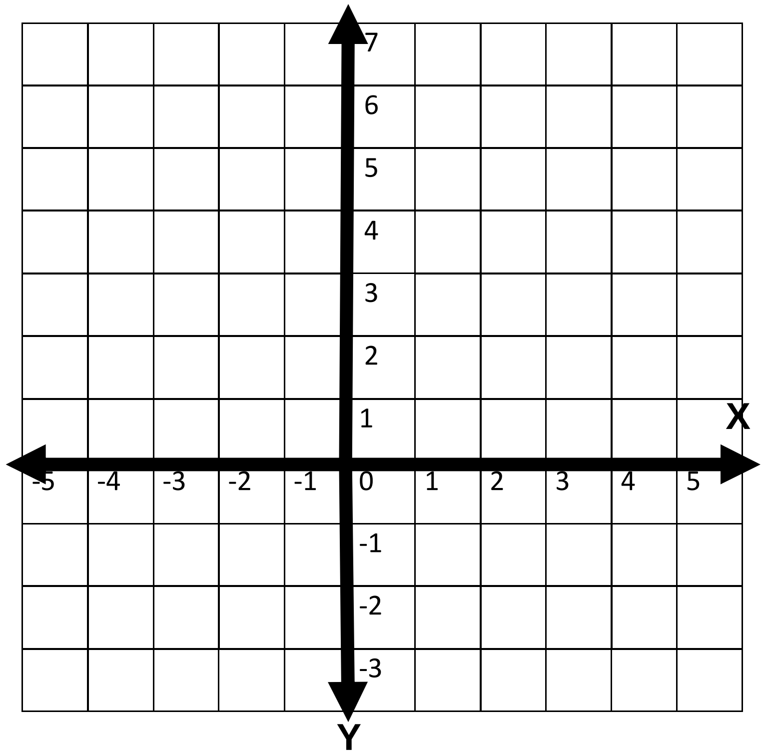
- Completa las tablas de valores, represéntalas gráficamente en el plano cartesiano y contesta lo que se solicita.

x	**Y**
3	
–3	

y = 3x - 3

x	**y**
2	
1	
0	

y = - 3x- 3



- Cuál es la razón de cambio de la recta $y = 3x - 3$?
- Cuál es la razón de cambio de la recta $y = -3x - 3$?
- Si no hubieras hecho las gráficas, ¿Cómo obtendrías este valor?

  Explica:____

  ____

  ____.
- ¿Cuál es la ordenada al origen de cada recta?_________ y _________.
- ¿Cuál es la abscisa de cada recta?____________ y _____________

A continuación dadas las premisas del aprendizaje cooperativo, se analizará si se alcanzó el objetivo, que es desarrollar las habilidades fundamentales de la didáctica y trabajo cooperativo, tales como: buscar y elegir información, tomar decisiones, comunicarse adecuadamente, autoevaluar la actuación, saber escuchar, negociar conflictos, organizar la participación individual en el grupo.

Apoyar el desarrollo de valores y actitudes de responsabilidad, eficiencia, compromiso y calidad hacia el trabajo y aprendizaje cooperativo.

OBJETIVO DEL TEMA

En este tema se espera que el alumno sepa manejar de manera rápida y eficaz; el plano cartesiano, la deducción de patrones, la importancia de las rectas que elaboraste en este material y sus características; tal como su pendiente y la forma de su ecuación.

EVALUACIÓN

¿Qué te pareció esta estrategia de aprendizaje?

¿Honestamente, crees que hayas cumplido con el objetivo del tema, en cuanto a los conocimientos que obtuviste en estas sesiones?

¿Te gustaría que se implementara está estrategia en el diseño de tus clases?¿Por qué?

¿Qué calificación le darías al aplicador de esta estrategia? ¿Por qué?

¿Qué opinión positiva me darías para mejorar como docente?

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES DE LA ESTRATEGIA

IV.I APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA

Después de haber elaborado material, utilizando la estrategia de aprendizaje cooperativo, se aplicó en la escuela descrita en el capítulo I, en la semana del 27 al 30 de Octubre del 2009; en dos grupos de estudiantes que estaban cursando el tercer año de Secundaria (estos grupos ya fueron descritos anteriormente), la aplicación fue en el horario de clase de cada conjunto.

- El primer día que asistí a la Secundaria, a aplicar la estrategia de enseñanza fue el Lunes 26 de Octubre; (en esta fecha ambos grupos no tuvieron clase de matemáticas), solo fui a ponerme de acuerdo con el profesor *Mario Ramírez García* (educador de matemáticas a cargo de los conjuntos con los que trabajé durante una semana en la aplicación del material), para ver cuál iba a ser el rol de trabajo durante esa semana, conversamos durante 30 min. ya que él tenía que atender a los demás grupos a los que les da clase.

- El martes 27 de Octubre, siendo este el primer día que acudí al grupo de Tercero "E", (Los alumnos que conforman este conjunto, ya fueron descritos detalladamente en el capítulo I) quedé de acuerdo con el maestro Mario Ramírez en vernos a la entrada de la escuela (7:00 am.) para que él me presentará ante la agrupación y diera las instrucciones pertinentes con el fin de que los alumnos se comportaran ordenadamente.

Pero cuál sería la sorpresa que cuando llegué a la escuela, las prefectas que están en la puerta, dando entrada a los estudiantes que asisten a dicho recinto me dieron dos noticias; según ellas una buena y una mala: la mala es que el maestro no asistiría ese día a la escuela por problemas familiares; pero la buena es que alguien estaría siempre conmigo en el salón, para que los alumnos trabajen correctamente.

Así que me presente ante el coordinador del plantel el cual estuvo apoyándome con el grupo, que iba a trabajar por primera vez. El profesor avanzó a la agrupación del patio donde hacen la formación hacia el salón; en el transcurso aprovecho para preguntarme mi nombre y con esto presentarme ante el grupo, pidiéndoles que trabajaran conmigo como si estuviera su profesor de Matemáticas.

Estando a cargo del grupo, volví a presentarme para que hubiese confianza y pudiéramos trabajar, lo primero que les platiqué fue cómo se llamaba la estrategia con la que laboraríamos y les pregunté ¿A qué les sonaba o cómo creen que trabajaríamos con el método de "aprendizaje cooperativo"? Las respuestas que dieron fue la de trabajar en equipo, y cooperar todos con ideas.

De aquí surgió la pregunta, ¿Saben lo que es trabajar en equipo? Y todos respondieron que sí, pero al interrogarles ¿En qué consiste el trabajar en equipos? Todos contestaron rápidamente que sólo era estar sentados juntos y trabajando, es aquí donde yo les aclaré lo que era trabajar en equipo y ayudarse en conjunto, complementando la opinión que ellos dieron, una vez aclaradas las cosas empecé a organizar los equipos numerándolos del uno al seis y pidiéndoles que se reunieran todos los unos juntos, los dos en otro lugar, los que tuvieran el número tres en otro y así sucesivamente hasta reunirse todos con su equipo de trabajo.

Algo que ayudaría al hacer los equipos es designarles un lugar específico dentro del salón, evitando que los alumnos comiencen a gritarse de un lugar a otro para identificar con quién trabajarán durante la sesión.

Ya reunidos les entregué a cada estudiante en su equipo, el material con el que trabajarían durante una primera sesión de dos horas, habían tres diferentes temas los cuales eran "*El plano cartesiano", "Manejo de información en tablas" y "Propiedades de una recta*"; estos enfocados en un futuro para manejar con facilidad en otra actividad cada uno de estos temas, porque al rehacer las agrupaciones con otros compañeros que estudiaron diferentes temas; tendrán que explicar cómo resolver cada ejercicio y así explicarse entre ellos lo que entendieron.

Teniendo cada uno su primer material de trabajo les empecé a leer las instrucciones para comenzar a trabajar en equipo, arrancando a las 7:30 am. con la solución del material.

Pase por cada equipos para ver si existían dudas sobre el que hacer o si entendían correctamente todas las preguntas, la primera fue en la actividad del "Plano cartesiano", (esta le correspondía a la agrupación 1 y 4), ya que como trabajarían con el plano cartesiano querían dibujar un plano para marcar el recorrido del pirata y así llegar al tesoro, siendo que en la actividad siguiente estaba hecho el dibujo, ya con el plano para que ellos dieran las coordenadas de cada objeto que describe el mapa, viendo que con el plano cartesiano se facilita encontrar el tesoro. Y en esta actividad la intensión sólo era dibujar intuitivamente (con huellas o rayitas) el recorrido.

Otra duda de este tema fue en la actividad 5, pedía que unieran los puntos que localizaron anteriormente, así como los iba marcando y como enseguida de esta pregunta estaba otro plano cartesiano, pero este ya pertenecía a otra actividad posterior dijeron que me equivoque y que faltaba marcar el punto "Ñ" en el mapa, así que les remarcarles que ese inciso era de la actividad antecedente, por tanto debían unir los puntos del plano cartesiano anterior y en este que ellos decían harían otra cosa.

Lo que observé del material del “Plano cartesiano” es que como ya lo habían visto en años anteriores, no se les dificultó y terminaron rápido; porque a pesar que les expliqué el significado de trabajar en equipo, había compañeros que no trabajaron así, pues ellos terminaban antes y me preguntaban si estaban bien, yo les contestaba ¿qué opinaba su equipo? Porque ellos eran los que tenían que revisarse e ir todos en la misma actividad, así que para acabar rápido sólo se copiaban y cuando todo el equipo terminaba, les preguntaba ¿Entendieron todos los ejercicios?, para que le explicaran a sus compañeros que no sabían cómo manejar el plano cartesiano, fue como se preocuparon y preguntaron a su agrupación cómo le hicieron para responder, y veían si estaba bien o mal, ya que surgían dudas de cómo se localizan los puntos.

En los equipos 2 y 5 los cuales trabajaron con el tema de “Manejo de información en tablas” aquí acepto que existió un error en la actividad 2, en el último inciso, me equivoque al poner la cantidad de palillos y al hacer la división les salió un número decimal causándoles confusión, así que corregí de manera natural para que vean que no tenía nerviosismo porque yo cometí el desacierto. Por tal motivo hay que revisar el material exhaustivamente antes de la aplicación.

Estos equipos pedían permiso para usar la calculadora, ya que al principio no se las deje utilizar y observé que tenían problemas, puesto que no sabían las tablas de multiplicar y esto los atrasó mucho con las divisiones, por tal motivo accedí a que la utilizaran.

En este mismo material la actividad que se dificulto, fue en el ejercicio 5, ya que no habían trabajado de manera explícita con variables dependientes e independientes, es aquí donde tuve que ayudarles, explicándoles este ejercicio.

En la actividad 6, que era el problema del recorrido de un taxista, se les complicaba la deducción del patrón (Fórmula) que les facilitará el cálculo de la tarifa, porque ya teniendo esto deducían rápido la respuesta de las otras preguntas, y con ayuda de su calculadora, ya que hacían divisiones con puntos decimales, lo cual para ellos era dificilísimo casi imposible sin calculadora.

Por último, en los equipos 3 y 6, los cuales trabajaron con “Propiedades de una recta”, tuvieron problemas al llenar las tablas para posteriormente graficar las rectas, ya que escribí el enunciando y ellos tenían que traducirlo a su forma algebraica y si lo planteaban de manera equivocada todo estaba mal, también observé que las leyes de los signos se les dificultaban, porque sabemos que si no hacen bien la multiplicación de los signos a la hora de graficar los puntos, obtenían dos rectas por gráfica y era así como apreciaba que estaban mal, diciéndoles que volvieran a revisar su tabla.

Otra cosa que se les complicó es que no leían bien, o todo lo leían sólo por leerlo, es decir rápido y no veían que en la tercera hoja estaba definido el cómo encontrar la pendiente de una recta, ya que no venía con este nombre, pero anteriormente especifique que “razón de cambio” y “pendiente” eran lo mismo, preguntándome como la encontraban.

Así les expliqué gráficamente lo que era la pendiente, y les enseñé que se formaba un triángulo rectángulo al trazar paralelas a los ejes por dos puntos que estén sobre la recta, después sólo tenían que contar los cuadritos que estaban primero sobre la vertical del triángulo y después sobre la horizontal del mismo.

Posteriormente, tenían que dividir estas dos cantidades, y observaron que les salía lo mismo que con la fórmula, y para ellos era claro y fácil el hacerlo geométricamente, fue así como trabajaron con los dos métodos para encontrar la pendiente, aunque observé que más a menudo con el de contar los cuadritos; porque así fue como lo llamaron ellos.

De estos tres materiales con los que trabajaron, el que se les dificulto fue el de “Propiedades de una recta” porque era algo que no estaba tanto como recordatorio, sino como conocimiento nuevo, así que fueron los equipos que tardaron en terminar, es decir ocuparon las dos horas de esta primera sesión terminando a las 8: 40 am, con un poco de ayuda extra de mi parte.

El día martes sólo trabajé con este grupo ya que el otro no tenía clase.

Alumnos del 3º"E" trabajando en equipos, el profesor Mario Ramírez también pasaba a ver si entre los estudiantes existía alguna duda donde él pudiera ayudarlos. (Foto tomado por Erika León).

- El miércoles 28 de Octubre trabajé por primera vez con el Tercero "D", este día sí asistió el profesor Mario Ramírez, y fue él quien me presentó ante los alumnos, este grupo a diferencia del anterior, desde mi punto de vista era ordenado y desarrollaron más lo que era el trabajo en equipo.

Igual que en el grupo anterior comencé por explicarles como se llamaba el aprendizaje con el que trabajarían durante el tiempo que fuese necesario, así que surgió la pregunta ¿A que les sonaba "El aprendizaje cooperativo"?

De manera semejante que el grupo anterior dijeron que era trabajar en equipo, y cada quien dar ideas para aprender más de cada uno. Ya teniendo esta respuesta opté por explicarles con precisión lo que significa el trabajar en equipo, el cual no era reunirse con sus compañeros y laborar cada quien por su lado pero juntos, por lo que observé si lo aplicaron mejor que el grupo anterior, pues todos participaban dando una respuesta, y los demás decían si estaba bien o mal, si la contestación era incorrecta le decían donde estaba su error para rectificarlo y aprender de sus errores, es decir todos iban a un mismo paso en el aprendizaje.

Comencé a numerarlos del uno al seis, pero aquí hice que todos los unos se pusieran de pie y les pedí que voltearan a verse, para que supieran quienes estarían en su equipo, esta misma dinámica la realicé con los demás estudiantes de los otros conjuntos, después les designé un lugar específico a cada agrupación, para que no tuvieran que gritarse en donde se reunirían en el salón, esto ayudó porque ya se observaba más organización a partir de la experiencia con el otro grupo.

Después de repartirles el material con el que trabajaría cada equipo, llamé su atención para comenzar juntos a leer las instrucciones que debían de seguir, tomando en cuenta que comenzaron a trabajar a las 9:45 am. está sesión solo fue de 50 min. así que no terminaron de resolver la primera actividad en esta clase, es por tal motivo que guardaron su material y lo trajeron para la siguiente clase.

Duda que les suscito a las alumnas de un equipo del 3º"D" y les estaba explicando que debían hacer.

Las observaciones que realice con el tercero "E" fueron casi las mismas dudas que tuvieron en este grupo, así que ya tenía práctica y resolví sus dudas con facilidad.,

Este mismo día miércoles volví a trabajar con el tercero "E" y como ya todos habían acabado de trabajar con el material revisamos en grupo cada uno de los temas, es decir, los equipos que tenían el mismo material daban sus respuestas en voz alta y el otro equipo le decía si estaba bien o mal, después otro miembro del otro equipo con la misma actividad respondía otra pregunta y ahora le contestaba si era correcto o incorrecto el equipo contrario, mientras que los demás estudiantes permanecían en silencio y hubo mejor control de grupo por la presencia del profesor titular.

Revisar el material que ya terminaron en la sesión anterior, fue ideado para ver donde estaban fallando los alumnos, al contestar las preguntas. Por otro lado este día faltaron 10 alumnos los cuales, si avanzábamos entregando el último material para todos, los dejaríamos sin obtener conocimiento y al siguiente día que asistan atrasarían lo poco que avanzó su equipo y resultaría igual si nos esperábamos a comenzar la mayoría de los estudiantes al mismo tiempo. Esta sesión solo fue de 50 min.

- El jueves 29 de octubre trabajé por última vez con el tercero "E" durante una sesión de dos horas, en esta clase sólo dio tiempo de hacer equipos en los cuales debe de estar por lo menos un integrante de los equipos anteriores, para que sea este el que explique cómo trabajaron cada actividad en su equipo anterior, como lo mencioné antes, en esta dinámica se necesitaba la colaboración de todos.

Esta actividad se llamó "Manejo de información" y tenía como finalidad retomar lo aprendido anteriormente, para llegar al manejo de tablas y a la graficación de dichas rectas con las cuales aprenderían sobre su pendiente, como deducir una recta a partir de dos puntos, para tener también su ordenada al origen.

En la actividad 4 de este material les aclaré que en la tabla; uno de los signos estaba mal e hice la corrección para que el grupo lo corrigiera, esta misma observación de un signo me faltó en el cuadro de la actividad 5.

Ya con el tiempo encima no terminaron este último material, llegando sólo al ejercicio 7, tuve que dejar tiempo para revisar que lo avanzado estuviera bien.

La revisión del material la realicé en grupo llevando un plano cartesiano grande en la primera actividad, con el fin de que cada alumno pasará al pizarrón a encontrar los puntos que les pedía el ejercicio, para mi gusto en este grupo fue con el que experimentaba y con los otros alumnos trataba de mejorar y cambiar la organización que no me gustaba, porque en este grupo realice la revisión así como estaban sentados, para no perder tiempo pero esto no estuvo del todo bien puesto que, había lugares que estaban muy aglomerados y les era complicado pasar al pizarrón, haciendo que esto fuera un caos.

Participación de los alumnos del 3º"E" para la revisión del material llamado "Evaluación de manejo de información" (Foto tomada por el profesor Mario Ramírez)

En los 5 minutos restantes de la clase, pedí que revisaran la última hoja y que contestaran las preguntas; aclarándoles que lo expuesto en las hojas siempre y cuando fuera una opinión constructiva no les afectaría en su calificación de la materia. Las opiniones me las hicieron saber entregándome sus comentarios por escrito, para posteriormente describir aciertos y debilidades que hicieron respecto a mi trabajo.

Este mismo día jueves tuve clase con el tercero "D" para este grupo era la segunda vez de vernos, pero la primera vez que trabajábamos durante dos horas corridas; es decir, de 8:40 a 10:20 hrs. En esta sesión el Profesor Ramírez tuvo junta de consejo en la Secundaria con todos los colegas del Área de Matemáticas.

Con este grupo esperé 45 min. para que los equipos faltantes terminarán el primer material que les entregué, y así tuvieran tiempo de resolver todos los ejercicios, mientras que los alumnos que acabaron como fue el caso de los equipos que trabajaron con el "Plano cartesiano" los reuní con el otro equipo (1 y 4) que tenía el mismo material, con el propósito de que entre ellos revisaran ese tema y los demás no pusieran cara de que están hablando ya que ellos si entendían, gracias a que trabajaron con el mismo material.

Esta misma estrategia de organización y revisión del material la apliqué con los demás equipos, según como fueron terminando y al igual que en el otro grupo el último en terminar fueron los que tenían el material de “Propiedades de una recta”.

Después de concluir la primera revisión volví a organizarlos, poniéndolos en un segundo equipo, para que trabajaran con el último material el cual era “Manejo de información”, abordaron durante una hora este material, pidiéndoles al final de la clase que lo trajeran para el siguiente día.

- El viernes 30 de Octubre comencé la sesión con el tercero “D” la cual tuvo una duración de 2 horas de 10:40 a 12:20 hrs, pidiéndoles que se reunieran con su último equipo y que comenzaran a trabajar, diciendo que revisaríamos a las 11:30 hasta donde llegaran, ya entrada esta hora inicie la revisión, pero ahora primero les pedí que se acomodaran en sus lugares de filas para que estuvieran más libres de pasar al frente, esto ayudo en el control del grupo y fue ordenada la participación de todos.

Se daba la revisión de la última actividad en el 3º”D” y tenían que pasar al pizarrón porque ahí estaba un plano cartesiano grande. (Foto tomada por el profesor titular)

Posteriormente elegí a una estudiante y tenía que marcar el punto que le pedía y sus demás compañeros revisaban si era correcto.

Al igual que en el otro tercero no terminamos la actividad llegando al mismo ejercicio, es decir a la actividad 7. Para finalizar mi participación les pedí que leyeran la última hoja del material entregado y que respondieran todas las preguntas, escribiendo comentarios que me ayudarán en un futuro para mejorar cuando empiece a ejercer como docente.

Vemos que por falta de tiempo no terminaron de responder todo el material, esto se debió a que sólo me concedieron en la Secundaria una semana para aplicar la estrategia, porque si no estos dos grupos se atrasarían, ya que a los demás terceros que el maestro Ramírez les daba clase estaban viendo otras cosas distintas a las que yo aplique y esto tendría sus ventajas y desventajas, ya que todos los alumnos que cursan el tercer año de Secundaria deben de salir con el mismo nivel de aprendizaje, para tener las mismas oportunidades a Nivel Medio Superior.

Para observar nosotros como docentes el avance o retroceso de estos dos grupos era pertinente aplicarles una evaluación, pero por falta de tiempo como se especificó anteriormente no se llegó a este punto. Es por tal motivo, que sólo los evalué con 5 preguntas que redacté, de las cuales analizaré exclusivamente las que evalúan la estrategia como tal y no al docente que en este caso era yo, es decir las últimas dos preguntas las reservaré para mi propia formación como profesora.

IV.II ANÁLISIS DE RESULTADOS

IV.II.I 3º “E”

Ahora bien las preguntas que respondieron como parte de la evaluación se presentan a continuación en forma estadística; de las respuestas que pusieron cada uno de los alumnos, para así tener un panorama conciso, apreciando si se cumplió la hipótesis y los objetivos descritos en el capítulo II.

Analizaré primero los resultados del 3º “E” para después compararlos con el otro tercero. Siendo estas las preguntas que tuvieron los estudiantes que contestar:

- *¿Qué te pareció esta estrategia de aprendizaje?*
- *¿Honestamente, crees que hayas cumplido con el objetivo del tema, en cuánto a los conocimientos que obtuviste en estas sesiones?*
- *¿Te gustaría que se implementara más en el diseño de tus clases?¿Por qué?*

Para la primera pregunta las respuestas fueron las siguientes, con una repetición que se muestra en la gráfica de abajo:

❖ Muy buena

❖ Estuvo bien lo que nos enseño

❖ Enseña bien

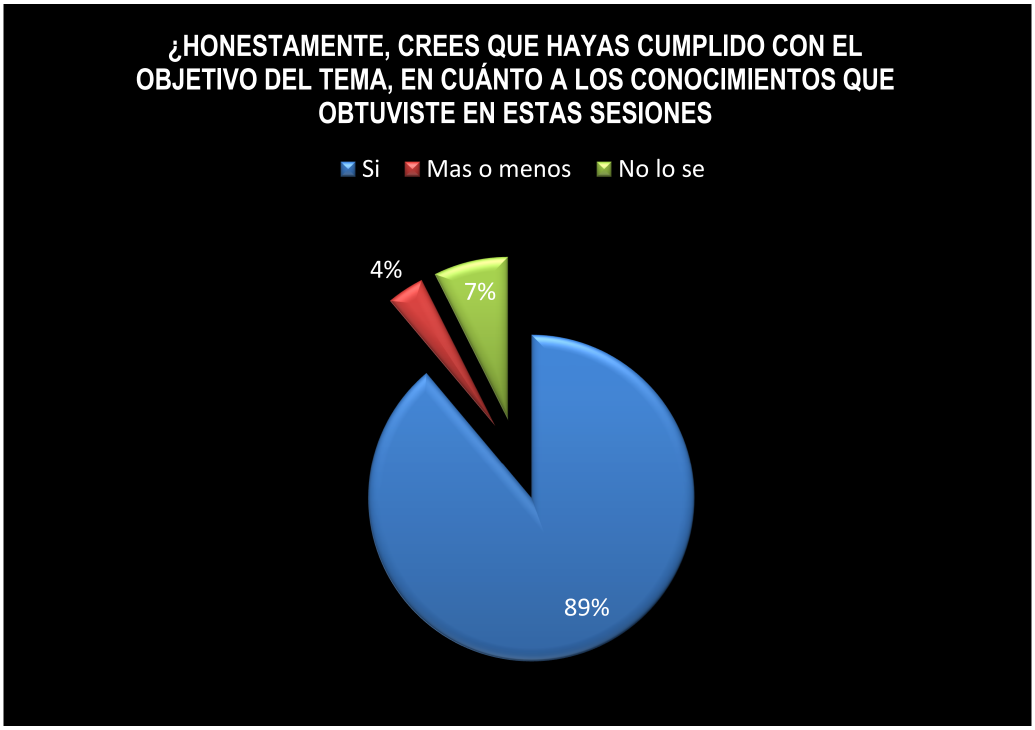
❖ **Pues estuvo bien porque todo el grupo trabajó bien**

Con esta última respuesta observé que en este tercero se dificultaba trabajar, ya que como historial de conducta, se identifica a este grupo por desordenado, lo cual obstaculiza la enseñanza, por tal motivo los profesores, cambiaron a algunos jóvenes del salón, facilitando el trabajo con los estudiantes.

Es por eso que este alumno que dio su respuesta, notó que durante la semana el grupo se comportó y trabajó mejor que otros días, porque siempre estaban con trabajo y entretenidos.

Pasando a la respuesta que los estudiantes dieron a la segunda interrogante, todas estuvieron englobadas en las siguientes respuestas, viendo su demanda en la gráfica de abajo:

- Si
- Más o menos
- No lo sé

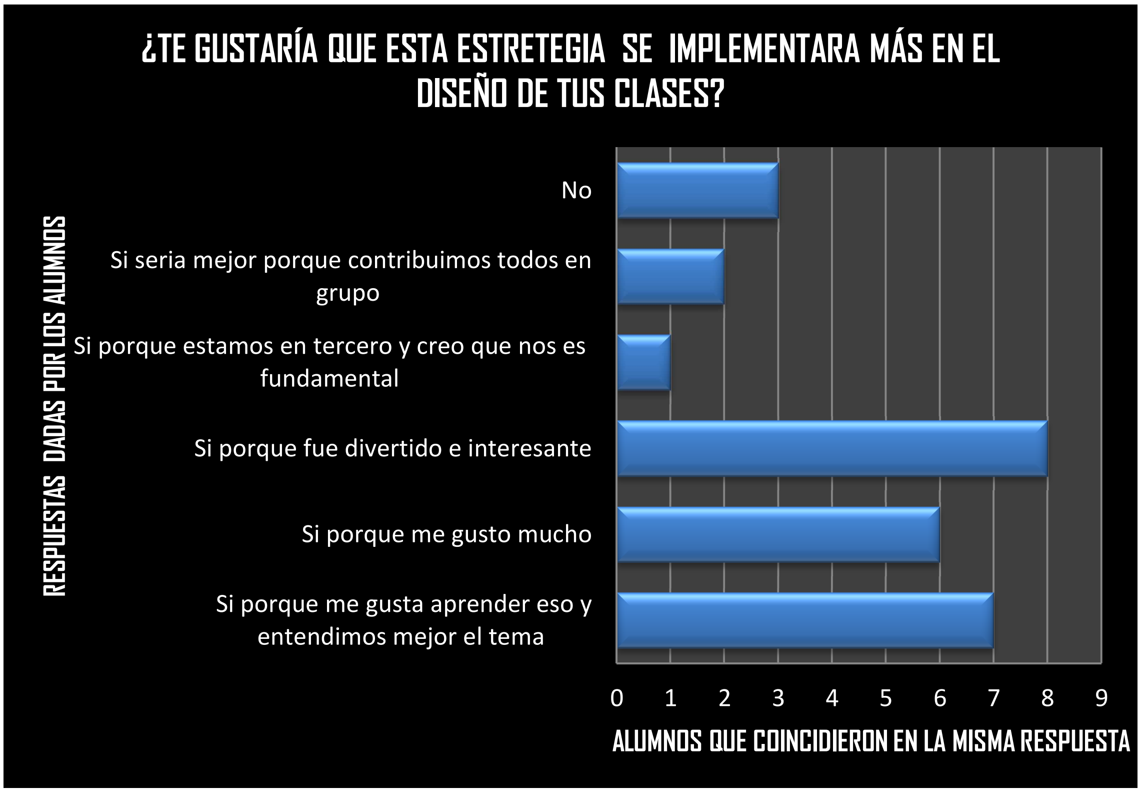


Como nos damos cuenta, ninguno de los estudiantes dijo como respuesta que no literalmente, pero se observa que la respuesta donde dicen “no lo sé” se toma como un no, o no me interesa, esto se debe por falta de interés hacia la materia o en su peor caso hacia el ser estudiante.

Puedo decir que hay desinterés al ser estudiante, por qué en este grupo existen muchos jóvenes que no les interesa estudiar o aprender para su propio bien en un futuro, ya que no tienen metas para su vida.

Analicemos ahora bien, la tercera pregunta así como lo hicimos con las interrogantes anteriores:

- ❖ Si porque me gusta aprender eso y entendí mejor el tema
- ❖ Si porque me gusto mucho
- ❖ Si porque fue divertido e interesante
- ❖ Si porque estamos en tercero y creo que nos es fundamental
- ❖ **Si sería mejor porque contribuimos todos en grupo**
- ❖ No



En estas respuestas apreciamos, que a los alumnos les pareció mejor la estrategia, ya que al ritmo que iban aprendiendo cosas nuevas, dadas por todos sus compañeros también se divertían. Aunque cabe destacar que hubo un porcentaje de estudiantes a los cuales no le gustaría que sus clases fueran implementadas con este tipo de aprendizaje, esta proporción no describió las causas por las que no les gustaría que se implementara esta táctica; por lo tanto desconocemos su descontento hacia la estrategia de aprendizaje.

Por otro lado, un porcentaje de la población, sí observó uno de los objetivos ya que pusieron como respuesta que “Si sería mejor porque contribuimos todos en grupo”, es decir estos estudiantes si aplicaron el término de trabajar en equipo, ya que dejaron que todos los integrantes dieran su participación sin menospreciar la opinión de cada quien.

Hay que tomar en cuenta que la asistencia de este grupo fue de veintiocho a treinta y cinto alumnos, ya que en la primera clase que fue el Martes sólo asistieron treinta y cinco estudiantes, y en los días posteriores faltaban otros que asistieron un día anterior y asistían los que no habían venido a la escuela por cuestiones de salud según ellos, finalizando con un total de veintiocho alumnos; es decir, tuve un 92% de asistencia en un principio para cerrar con un aproximado de 74% de los alumnos, en promedio tuve una asistencia de 83% de los estudiantes que asisten a este grupo.

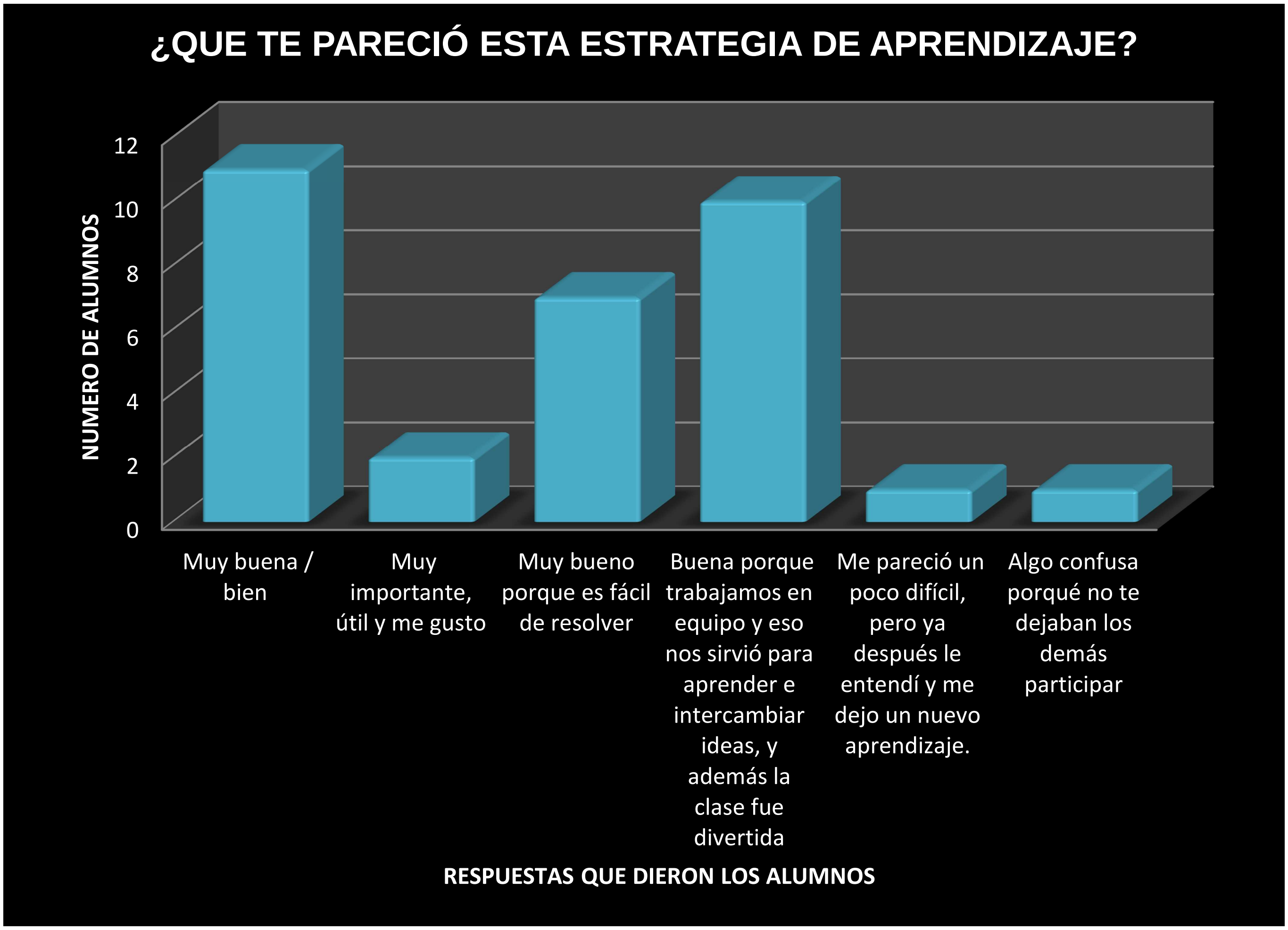
La inasistencia de los estudiantes, afecto un poco a lo que yo tenía previsto, ya que para no dejarlos sin obtener conocimientos realice la revisión de los primeros materiales y esto no estaba previsto, siendo otra de las causas que contribuyeron a no finalizar el material diseñado.

Vemos que las estadísticas anteriores fueron tomadas de una muestra de 28 alumnos. Pero cabe destacar que en las preguntas dos y tres, se anularon las siguientes muestras de cada respuesta: 1 y 1, respectivamente esto fue porque no las contestaban o porque no se entendía lo que querían describir.

IV.II.II 3º “D”

Ahora analizaré las estadísticas del mismo modo en cada pregunta pero para el otro tercero comenzando con la primera interrogante y sus respuestas:

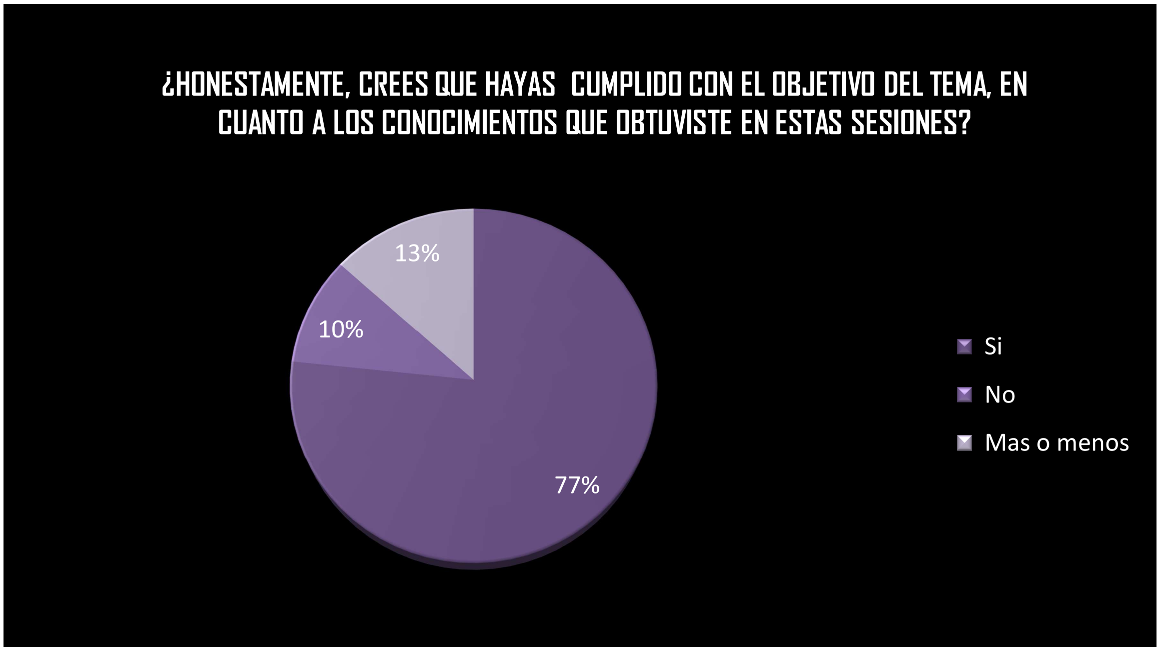
- Muy buena / bien
- Muy importante, útil y me gusto
- Muy bueno porque es fácil de resolver
- Buena porque trabajamos en equipo y eso nos sirvió para aprender e intercambiar ideas, y además la clase fue divertida
- Me pareció un poco difícil, pero ya después le entendí y me dejo un nuevo aprendizaje.
- Algo confusa porqué no te dejaban los demás participar



Como nos damos cuenta, la mayoría de las respuestas favorecen a la estrategia, ya que por una u otra cuestión los alumnos están de acuerdo en que esta táctica de aprendizaje, les ayudaría en su trayectoria escolar, reforzando sus conocimientos, les sirve como repaso de cosas que deben de saber para seguir avanzando con la siguiente actividad.

Pasando a la siguiente cuestión; es decir para la pregunta 2, las respuestas fueron las siguientes:

- Si
- Más o menos
- No



La mayoría de los alumnos escribieron que si cumplieron con los objetivos del tema, y en general de la estrategia; aunque esta respuesta no sirve porque no hubo una evaluación, donde ellos plasmarán si en verdad aprendieron y cumplieron con los objetivos requeridos.

Los alumnos que dijeron que no, cumplieron con los objetivos del tema, fue porque en vez de aprender más con sus compañeros de equipo en el intercambio de ideas, a lo mejor sólo se confundieron más, ya que no tenían claras las ideas básicas, o no se acoplaron con su equipo.

El 13% de la población dijo que más o menos, eso fue porque en algunas cuestiones les quedaron lagunas del conocimiento, ya que no lo desarrollaron como debería de ser por falta de tiempo.

Con respecto a la respuesta de la tercera pregunta los resultados de las estadísticas fueron las siguientes:

- Si
- No

Los alumnos que dijeron “si” argumentaron lo siguiente: “hay convivencia con los compañeros que casi no conocen, aprenden más rápido, es más bueno, divertido, fácil e interesante, nos apoyamos a entender los temas entre todos ya que dan su opinión y se entiende sin dificultad, no me aburro y estamos más atentos, son buenas ideas y estrategias”. Estas fueron las diversas opiniones de los estudiantes que apoyaron el implemento de la estrategia en sus clases.

Por otro lado, el resto de los alumnos dijeron que no porque “Así están bien, y porque casi no se entiende nada”, este porcentaje de alumnos eran los que no preguntaban nada, ya que a cada rato pasaba a preguntarles si iban bien o necesitaban ayuda para que les diera pistas y avanzaran en las actividades, pero en fin cada quien da su opinión desde su punto de vista, y el cómo se sintió al trabajar con otro tipo de estrategia que no se maneja comúnmente, ya que les cuesta trabajar en equipo.

De nuevo observemos, que la asistencia de este grupo fue de treinta y dos a treinta y ocho alumnos, en la primera clase que fue el Miércoles solo asistieron treinta y siete estudiantes, y en los días posteriores faltaban otros que habían asistido un día anterior y asistían los que no habían venido a la escuela por cuestiones de salud, finalizando con un total de treinta y dos alumnos; es decir, tuve un 93% de asistencia en un principio para después cerrar con un aproximado de 80% de los alumnos, en promedio una asistencia de 87% de los alumnos que asisten a este grupo.

Cabe destacar que hubo varias bajas en este grupo de niñas, por cuestiones familiares (embarazos).

Vemos que las estadísticas anteriores fueron tomadas de una muestra de treinta y dos alumnos. Pero cabe destacar que en la pregunta dos, se anularon dos respuestas esto fue porque no la contestaban o porque no se entendía lo que querían decir.

Estos dos análisis que realicé por separado para cada grupo muestran, la opinión de los alumnos hacia este tipo de estrategia, ya que en las diversas preguntas que analicé, todos daban su crítica libremente sin sentirse presionados por tener alguna represión después de plasmar cualquier sensación que tuvieron, ya que les pedí que las entregaran con nombre o sin nombre gracias a que sólo era para evaluar mi propio trabajo, pero con la ayuda de ellos; quienes eran la población con la que desarrollé la estrategia.

El profesor Mario Ramírez realizó sus propias observaciones, y me las hizo saber siendo estas tales indicaciones:

> "Este tipo de estrategia ya la conocía aunque no muy a fondo, ya que sólo algunas veces la he puesto en práctica, y por lo que observé en estos días que trabajaron los alumnos con esta estrategia, percibí que los estudiantes tienen un mejor desempeño, ya que salen de lo rutinario y lo tradicional.
>
> Veo a los alumnos más motivados con este tipo de aprendizaje y abiertos, a descubrir por ellos mismos su propio aprendizaje.
>
> Yo como profesor de una de las materias más complicadas para los estudiantes me propongo desde este momento poner en práctica esta estrategia, para que en un futuro sea la más usual por todos mis colegas".

Con estas estadísticas hice un conteo cuantitativo, ya que escribí todas las posibles respuestas que los estudiantes plasmaron en sus comentarios que entregaron, pero fui más allá, ya que también realice un análisis cualitativo, explicando el porqué tomaron y plasmaron cada decisión de sus pensamientos.

Por otra parte, cabe mencionar que existe más material didáctico expuesto en esta tesis, para que sea utilizado por los profesores de Secundaria en general, aunque también sirve para la educación Medio Superior, como repaso, o en algunos casos, será algo nuevo para los estudiantes de este nivel. Este material esta exhibido en el capítulo llamado anexos.

IV.III CONCLUSIONES DE LA ESTRATEGIA

Analizaré la siguiente pregunta ¿Se cumplieron o no los objetivos?¿Por qué? El objetivo de motivar a los estudiantes de nivel Secundaria a interesarse por las matemáticas, la concluí por las estadísticas que reporte en los resultados, que se cumplió en un 98%, gracias a que la mayoría de los estudiantes aceptó de mejor manera este tipo de enseñanza, ya que principalmente se les hacia divertido e interesante, lo cual les ayuda a motivarse por saber más.

Las matemáticas son importantes desde cualquier nivel, ya que a menudo utilizas unos temas más que otros, por decir, para pagar en el mercado tienes que recurrir a las sumas y restas, hasta las multiplicaciones, así como este ejemplo existen más donde ocupas las matemáticas en toda la vida.

En la Secundaria, se empieza a fundamentar y complicar para algunos estudiantes el contenido de la materia; por tal motivo, las matemáticas se dificultan más en este nivel para algunos alumnos que en los anteriores. De esta escuela tienen que salir bien preparados, porqué para el Nivel Medio Superior los primeros enfrentamientos son difíciles, debido al cambio que se presenta, pero si ellos llevan un buen nivel de aprendizaje, esta nueva escuela les será fácil.

Vemos que aunque fueron pocos los estudiantes que en alguna de sus respuestas, redactaron características que tiene el aprendizaje cooperativo, con la cuál ellos mismos se dieron cuenta que con esta estrategia sus compañeros y en general el grupo trabajo mejor, poniendo empeño en su aprendizaje.

Estas observaciones las tomaré en cuenta en un futuro (Posteriormente, al terminar mi licenciatura, quiero ejercer como docente de alguna Institución), para implementar este tipo de estudio y no sólo en este nivel sino en todos los niveles de educación, así los estudiantes se sentirán en confianza y motivados, para forjar su propia enseñanza, más aún porque, en esta estrategia depende de los propios alumnos la construcción del aprendizaje, gracias a que el profesor, sólo los lleva de la mano, pero dejando que ellos mismos experimenten y deduzcan qué pasa, al mismo tiempo, observen qué resultados obtienen al experimentar con su propio aprendizaje.

Esto no quiere decir, que el docente no tiene nada que hacer durante las clases, ya que al elaborar el material y la planeación con la que se trabajará para este tipo de estrategia, tiene su grado de dificultad, debido a que el material tiene que estar estructurado con ciertas ideas: de lo fácil a lo difícil, teniendo un punto intermedio entre estos dos extremos, de donde se relacione con un tema visto anteriormente y lo desarrollen hasta el punto de descubrir el nuevo aprendizaje por ellos mismo; aclarando que no daremos saltos o pasos sin ser explicados; es decir, tenemos que llevarlos siempre de la mano.

Otra característica del material que se elabora para la estrategia es el que sea ajeno pero al final tiene que ser parte de un *todo.* (Estas y otras características de la elaboración de material didáctico están descritas en el Marco Teórico).

Tomando en cuenta que los alumnos están trabajando siempre en equipos, y ellos mismos se apoyan en todo momento, hasta a veces se explican y se entienden mejor que cuando el profesor les explica, ya que este utiliza un lenguaje más adecuando que a veces los estudiantes desconocen, mientras que sus mismos compañeros se lo explican tal y como ellos lo entienden, para que así se les facilite su aprendizaje, también hay que destacar que entre ellos mismos se tienen confianza, y no les da pena el decir "no le entiendo, me lo vuelves a explicar".

En cambio, cuando el profesor les explica, el educando cree que con la primera vez que se le explicó ya debió entender, pues de lo contrario, el maestro se enoja y los discrimina, esto es una idea errónea porque hay docentes que explican tantas veces como sea necesario y de diferentes maneras, para que el estudiante se sientas seguro de aprender algo de excelente manera.

Por lo que observé en los días que asistí a la escuela, aprecié que después de estas sesiones, los alumnos con los que trabajé supieron laborar en equipo e ir dando oportunidad a todos sus integrantes para que dieran su opinión y respuesta de las preguntas, esto lo percibí en los alumnos del tercero "D", debido a que, había un equipo en especial que estaba bien organizado, en el cual todos daban una réplica del material que les entregue.

Esta estrategia de aprendizaje les costó trabajo al principio, pero ya al entender lo que harían, no mostraron ninguna resistencia a trabajar como se les pedía.

En el aspecto, en el cual marqué la pauta de mencionar los líderes, que tomaban un rol distinto al requerido por la clase, es decir que guiaban el desorden en los equipos, sí se dio en el salón que constaba de una mayor población de hombres, ya que la mayoría no tiene el hábito de trabajar en ninguna clase, puesto que fueron desordenados, así que había uno que otro equipo de este salón que, no trabajaba y tenía que estar al lado de ellos, e invitándolos a que trabajen.

Sin embargo, en ninguno de los dos grupos donde trabajé durante estas sesiones, se logró terminar de revisar el material que elaboré, esto fue por falta de tiempo, pero ya no podía tomar más sesiones para terminarlo, puesto que el profesor continuaría con sus clases.

En general, esta estrategia podría ser estudiada con más lujo de detalle por los docentes de todas las materias, para que ellos la lleven a cabo en la enseñanza de sus clases.

Por otro lado como conclusiones en general de la habilidad, confirmé que esta estrategia de aprendizaje ayuda en el conocimiento de los alumnos, gracias a que, se empieza a estudiar desde un nivel básico para así dar una sensación de motivación por aprender a los estudiantes; posteriormente irles marcando retos que ellos tendrán que superar, encaminándolos a forjar su propio aprendizaje llevándolos siempre por el mismo camino, debido a que las preguntas planteadas son concretas y en las cuales los estudiantes sólo puedan dar una sola respuesta.

Por último, el enfrentarme a la aplicación del material que ya había elaborado "correctamente" y descubrir en la práctica las fallas que tenía este, (esto lo hice de forma muy natural ya que no me puse nerviosa al corregirlo enfrente de todos los alumnos; y desde mi punto de vista esto sirvió porque los educandos no hicieron ningún comentario negativo hacia mi trabajo) tuvo un efecto positivo en mí; ya que supe cómo manejar las cosas frente a los estudiantes, sobre todo con el segundo grupo porque ya lo había experimentado con el primero.

En otro orden de cosas, la única forma de observar que el aprendizaje fue significativo, se tiene que hacer por medio de una prueba para todos los estudiantes, valorando de esta más que nada el procedimiento y no sólo el resultado dando una calificación mayor al procedimiento, ya que es lo más importante de los problemas. Y haciendo una evaluación a un sólo estudiante del equipo (que se escogerá al azar) para dar una calificación grupal, la cual debe ser positiva y no negativa, es decir, esta dará puntos extra a los integrantes de todo el conjunto mientras esté bien respondida.

Comparando el método tradicional con el significativo, el beneficio más notorio es que se sale de lo rutinario para los estudiantes, y esto los motiva a aprender cosas nuevas ya que no lo ven como una carga de trabajo; más sin en cambio, interactúan con sus compañeros pero al mismo tiempo están aprendiendo de los mismos, en un intercambio de ideas favorable para todos los participantes de este proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por último, el aprendizaje significativo le agrada a los estudiantes, porque los hace participes de su propio rol de enseñanza-aprendizaje, dejando en sus manos la mayoría de la carga de trabajo, pero la cual los ayuda a ser personas con criterio para desarrollar temas de diálogo.

V. CONCLUSIONES

A través de los distintos capítulos que conforman este trabajo de investigación, se han realizado diversas observaciones y comentarios, los cuales están relacionados de manera directa con los objetivos de esta tesis; destacando en un principio, el proceso de elaboración de la misma; debido a que aprendí bastante, ya que el reto de empezarla y lo importante concluirla, principia con el hecho de saber cuál será el tema a desarrollar y bajo la supervisión de quién elegir como asesor.

Como lo mencioné en la introducción la motivación principal de esta tesis, es ayudar a la Educación en México, contribuyendo con material que está desarrollado con la estrategia de aprendizaje cooperativo, este conocimiento lo adquirí en el Seminario de Enseñanza III, impartido en la Faculta de Ciencias de la UNAM.

Para comenzar con la redacción de las conclusiones, abordaré en un principio, lo aprendido en el transcurso del desarrollo esta tesis, finalizando con la participación que tuve frente a un grupo.

Lo que llamo mi atención por primera vez fue, cuando escuché que existían corrientes pedagógicas, que estudiaban a profundidad la educación y conductas del ser humano, por tal motivo tenía que hacer una investigación minuciosa, lo cual fue algo nuevo, que yo sí sabía hacer, pero cuando me pregunté ¿dónde buscar ésta información? Desde ahí empezaron los retos, pues tuve que recurrir a la biblioteca que se ubica en la Facultad de Psicología, a buscar información; los libros que encontré aquí fueron de mucha, ayuda.

Otra de las cosas que repasé o recordé, fue el cómo redactar una bibliografía, ya que al no practicar otros temas que se enseñan en grados anteriores todo se olvida.

También el investigar este tipo de información por internet, fue algo nuevo, gracias a que la profesora Carrillo, me sugirió que consultará una página de internet donde existe información de revistas de la educación tales como iresie (Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa) ahora mejor conocida en sus siglas iisue (Instituto de Investigación sobre la Universidad y la Educación) de la cual adquirí textos, que leí y analicé con el objetivo de aclarar mis ideas, para después escribir y redactar toda la información que obtuve de diferentes fuentes documentales, ya que en la primera revisión de avances, tuve varias correcciones de información, debido a que lo escrito no llevaban una secuencia lógica.

En cuanto a la elaboración de material concierne, el haberme enfrentado durante el Seminario de Enseñanza a redactar y producir material que se utilizó en una clase para alumnos de Preparatoria, con la técnica de aprendizaje cooperativo, fue todo un reto en ese momento.

Por otro lado, cuando redacté el primer material de mi tesis llamado “Manejo de Información”, el cual llevé a la práctica con alumnos de Secundaria, observé que tenía graves problemas al elaborarlo, mucho mayor que la primera vez, porque había cosas que las daba por entendidas, las cuales no eran tan obvias para los alumnos a ese nivel.

Después de confrontarme con este tipo de problemas durante toda la realización del material, opté por modificarlo, ya que las observaciones hechas durante la revisión que efectuó la profesora Carrillo, fueron importantes; debido a que no abarcaba todos los niveles intermedios para la elaboración del mismo.

Finalmente, los siguientes temas que elaboré con base en este tipo de aprendizaje, fluyeron con más facilidad, aunque cabe destacar que hacer material con esta estrategia de enseñanza-aprendizaje y llevarlo a la práctica, es muy difícil, debido a que uno como docente tiene que sentarse a redactar el material con todas las características que este debe tener (fueron explicadas en el Marco Teórico); haciendo hincapié en el lenguaje que se empleé para este nivel de Educación, ya que si se escriben palabras las cuales los alumnos las interpreten en un doble sentido; el material tomará un rumbo diferente al que fue diseñado; sin embargo NO ES IMPOSIBLE; ya que si se le da el suficiente tiempo y acaparas todos los puntos que tomé en cuenta se facilitará su elaboración.

Esperó que este trabajo sea de utilidad para los profesores, deseando que les sirva el material expuesto en esta tesis (los temas que ya fueron aplicados y del cual se tienen resultados o el que aparece en anexos), con el propósito de implementarlo en sus clases, pues desarrollé diferentes temas para crear distintos materiales que aún no están probados, con el fin de aplicarlos y obtener conclusiones sobre los resultados que se logren, considerando las actitudes que hayan tomado los alumnos con el aprendizaje cooperativo.

Al concluir mi licenciatura, yo misma llevaré a la práctica el material que ya elaboré para, posteriormente obtener más información sobre la aplicación de esta estrategia de enseñanza-aprendizaje.

De antemano, se que el aplicar dentro de un Centro Educativo, el material que quedo en el área de anexos de la tesis es un reto algo difícil, porque se debe tener en cuenta que esta estrategia de enseñanza, no es muy conocida por los alumnos, a tal punto que no saben lo que es trabajar en un verdadero equipo; por consiguiente el docente tiene que cambiar el rol de trabajo propio y el de sus alumnos, enseñándoles poco a poco lo que es laborar en conjunto y el cómo se desarrolla esta estrategia.

Pero que en un futuro, ayudará en el aprendizaje de muchos jóvenes que no se encuentran interesados por las bellísimas MATEMÁTICAS, ya que sienten que son muy difíciles de entender.

Para concluir mi tesis, esperaría que profesores que tengan, el tiempo y las ganas de desarrollar más material con diferentes temas de matemáticas y para distintos grados de enseñanza, se unan a la causa, esperando elaborar todo un curso con este tipo de enseñanza. Aunque por experiencias de un profesor se sabe que el aplicar todo un año académico con esta estrategia es muy desgastante para los propios estudiantes, ya que tienen mucha debilitación por la presión de trabajo que cae sobre ellos.

Además el curso tiene el tiempo marcado para terminar todos los temas del programa señalados por la SEP y si redactamos una materia con esta estrategia no abarcaríamos todos los bloques distinguidos por el temario.

Son por tales motivos, que se recomienda mezclar todo un curso con la enseñanza tradicional y con esta estrategia de aprendizaje cooperativo.

Sé que el reto de aplicar el material faltante por obtener resultados es aún más difícil (debido a que cuando se aplica el material intervienen factores relacionados con la conducta de los alumnos la cual es muy cambiante) que la elaboración del que presento en ésta tesis, pero si ponemos de nuestra parte podríamos lograrlo y ayudar a los estudiantes de otras generaciones.

En otro orden de cosas, abordaré mi experiencia frente al grupo; esta fue la primera vez que preparé clase y me enfrente a la pericia de dar una lección, en lo personal fue agradable la participación en la Secundaria, ya que estaba preparada para impartir dicha estrategia.

Una desventaja que aprecié fue que el tiempo dado por la Secundaria era muy poco, ya que no se pudo aplicar un examen para ver si el aprendizaje fue o no significativo y hasta que cierto punto.

En cambio una ventaja de esta estrategia y de mi experiencia fue el notar que los alumnos se sienten involucrados en su aprendizaje y se motivan a expresar sus dudas, ya que al estar en equipo se cuestionan unos a otros y si nadie sabe la respuesta, se animan a preguntarle al docente y este, es un aspecto que muchos estudiantes no desarrollan por pena a preguntar y hacer notorio su desconocimiento.

El aprendizaje que se quedo en cada alumno, si fue significativo porque en el último material llamado “Manejo de Información” para evaluar el aprendizaje adquirido en todas las sesiones anteriores, opté por hacer activa la participación de todos los alumnos, dándole oportunidad a cada uno de responder la pregunta que les hacía, en base al material que ya habían contestado en conjunto previamente.

En resumen, mi experiencia frente a un grupo fue agradable, por tal motivo en un futuro quiero unirme a la gran población de profesores que se comprometen a forjar alumnos con gran criterio de aprendizaje.

VI. ANEXOS

VI.I PRODUCTOS NOTABLES

VI.I.I SUMA DE BINOMIOS AL CUADRADO

1. Con el material que te fue proporcionado; es decir, el que aparece (Fig. A, Fig. B, Fig. C y Fig. D de donde Fig. C=Fig. D) abajo (Ver material didáctico en el punto VII.I.VII.I). Calcula el área y el perímetro de cada una de las figuras y completa la tabla siguiente.

Figura A **Figura B** **Figura C** **Figura D**

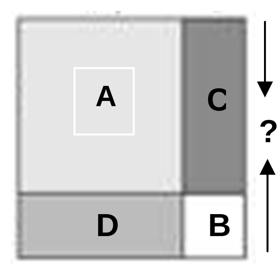
Recordando que:

El área del cuadrado es L x L = L^2
El área del rectángulo es b x h

Figura	Área	Perímetro
A	x · x = __ ^{2}	4(x) = ______
B	1 · 1 = 1	___ (_____) = 4
C	x · _____ = x	2 (___) + 2 (___) = ___ + ___
D	_____ · 1 = _____	___ (x) + __ (1) = ___+ _____

- Con las 4 figuras de arriba se forma un cuadrado. Siendo este dicho cuadrado (Cuadrado 1).

Cuadrado 1



2. Calcula el área de este cuadrado sumando cada parte que lo conforma: esto es :

Fig. A + Fig. B + Fig. C + Fig. D = ___ ^{2} + 1 + x + ___

= ___ ^{2} + _____ x + ___.

3. Por otro lado, calcula cuánto mide cada lado del cuadrado 1. (Tomando en cuenta que bastará con buscar sólo la medida de un lado ya que todos miden lo mismo)

Entonces **?** = ___ + ___

- Sabiendo cuánto mide el lado del cuadrado, vuelve a calcular el área utilizando su fórmula:

$$\text{Área}_{\text{CUADRADO 1}} = (\_\_ + \_\_)^2$$
$$= (\_\_ + \_\_) \cdot (\_\_ + \_\_)$$
$$= x^2 + x + \_\_\_ + \_\_\_$$
$$= x^2 + \_\_\_\, x + \_\_\_$$

- Después de obtener el área del cuadrado de dos formas diferentes; puedes asegurar que:

Fig. A + *Fig.* ___ + *Fig.* ____ + *Fig. D* = Área $_{\text{CUADRADO 1}}$

En otras palabras:

$$\mathbf{(\_\_ + \_\_)^2 = x^2 + 2x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)}$$

4. Con base en el *cuadrado 1*, añade otros dos rectángulos (Fig. H, Fig. I), y tres cuadrados pequeños (Fig. E, Fig. F y Fig. G) obteniendo así, otro cuadrado más grande llamándolo *Cuadrado 2.*

- Dibuja el *cuadrado 2* que obtuviste.

- Calcula el área del *cuadrado 2,* sumando cada parte que lo conforma; es decir:

Fig. A + Fig. B + Fig. C + Fig. D + Fig. E + Fig. F + Fig. G + Fig. H + Fig. I =

$$\_\_\_^2 + 1 + x + \_\_\_ + 1 + 1 + \_\_\_ + x + x = \_\_\_^2 + \_\_\_x + \_\_\_$$

5. Enseguida calcula, cuánto mide cada lado del *cuadrado 2*.

   Entonces

$$\mathbf{L}_{\text{CUADRADO 2}} = \_\_\_ + \_\_\_$$

- Sabiendo cuánto mide el lado del *cuadrado 2,* procede a calcular el área:

$$\text{Área}_{\text{CUADRADO 2}} = (\_\_ + \_\_)^2$$

$$= (\_\_ + \_\_) \cdot (\_\_ + \_\_)$$

$$= x^2 + \_\_\_x + 2\_\_\_\_ + \_\_\_$$

$$= x^2 + \_\_\_\,x + 4$$

6. Después de haber obtenido el área del *cuadrado 2,* de dos diferentes formas aseguras que:

Fig. A + Fig. B + Fig. C + Fig. D + Fig. E + Fig. F + Fig. G + Fig. H + Fig. I = Área $_{\text{CUADRADO 2}}$

Es decir:

$$\mathbf{(\_\_ + \_\_)^2 = x^2 + 4x + 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$

- Con base en lo anterior, observa que calcular el área de cada parte que conforma el cuadrado es muy largo, debido a que cada vez, integras más figuras a dicho cuadrado.

- En la ecuación (1) y (2) aprecia que, es más fácil deducir el área del cuadrado; con sólo saber cuánto mide un lado, gracias a que demostraste:

La suma del área de cada figura = Área total del cuadrado

7. Con base en lo anterior procede a resolver la siguiente tabla, observa el patrón que se sigue al calcular el área de los *Cuadrados n*.

Núm. de cuadrado	**Medida de un lado**	**Perímetro**	**Área**
1	x + 1	4(x + 1)= 4x + 4	$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2+x+x+1=x^2+2x+1$
2	x + 2	4(x + 2)= 4x + 8	$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $= x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

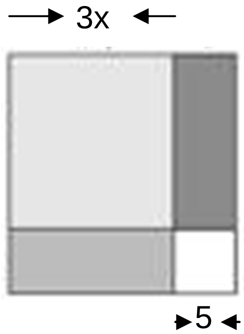
3	x + ___	4(x + _)=4x + 12	$(x + \_\_)^2 = (x + \_\_)\ (x + \_\_)$ $= x^2 + 3x + 3x + \_\_ = x^2 + \_\_x + 9$
4	____ + 4	4(__ + 4)= 4x + 16	$(x + 4)^2 = (x + \_\_)\ (x + \_\_)$ $= x^2 + \_\_x + 4x + \_\_\_ = x^2 + 8x + 16$
5	___ + ___	4(__+ __)=4x + 20	$(x + \_\_)^2 = (x + 5)\ (x + \_\_\_)$ $= x^2 + 5x + \_\_\_x + 25 = x^2 + \_\_\_\ x + 25$
6	x + 6	4(x + 6)= 4x + 24	$(\_\_\_ + \_\_)^2 = (x + 6)\ (x + 6)$ $= x^2 + \_\_\_\ x + 6x + 36 = x^2 + \_\_x + \_\_$
13	x + ___	4(x + _)= 4x + 52	$(x + 13)^2 = (x + \_\_)\ (\_\_ + 13)$ $= x^2 + 13x + 13x + 169 = x^2 + 26x + \_\_\_$
15	___ + 15	4(_ + 15)= 4x + 60	$(x + \_\_)^2 = (x + 15)\ (x + 15)$ $= x^2 + 15x + \_\_x + 1 = x^2 + 30x + \_\_\_\_$
a	**x + __**	**4 (_+ a) =4x + 4a**	$\mathbf{(x + a)^2 = (x + \_\_\_)(\_\_\_ + a)}$ $\mathbf{= x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2}$

8. Observa el último renglón de la tabla, y apreciarás que dedujiste el caso para un cuadrado de lado **x + a** siendo el área:

$$x^2 + \_\_\_\ ax + \_\_\_^2.$$

- Para calcular el área de cada cuadrado, en todos los casos se elevó al cuadrado una suma de dos números y en todos los casos el resultado final, después de simplificar términos semejantes, son tres términos. ¿Cómo se obtienen esos tres términos sin hacer la multiplicación? Explícalo con tus propias palabras______________________________
  ____
  ____

9. Calcula el área y perímetro de las siguientes figuras.



P= $4(\_\_x + \_\_) = 12x + \_\_\_$

A= $(\_\_\_ + \_\_\_)^2 = 9x^2 + 30x + \_\_\_$

P= $4(\_\_ + 2x) = \_\_\_\_ + 8x$

A= $(7 + 2x)^2 = \_\_\_\_ + \_\_\_x + \_\_\_\_x^2$

VI.I.II DIFERENCIA DE BINOMIOS AL CUADRADO

Recordemos que:

El área del cuadrado es $L \cdot L = L^2$

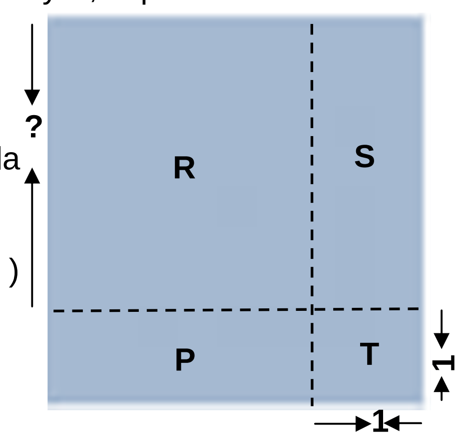
El área del rectángulo es $b \cdot h$

1. Con el material que se proporcionó; es decir, el que aparece abajo (Fig. A) (Ver material didáctico en el punto VII.I.VII.II). Calcula el área de ese cuadrado:

Figura A $A_{total} = \_\_\_ \cdot \_\_\_ = x^2$

2. Posteriormente al cuadrado anterior, recórtale 1cm. Con el propósito, de obtener uno más pequeño. La *Figura A* ha quedado dividida en cuatro regiones, donde dos de ellas son iguales a saber P y S, expresemos el área de la siguiente forma:

$$A_{total} = R + \_\_\_ + \_\_\_ + T.$$



- ¿Cómo le harías para calcular el área de la *región R*?

$$A_R = A_{total} - \_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ \quad ..(1)$$

3. Por otro lado, calcula el área de P, S y T.

$$A_P = (x - 1)(\_\_\_) = \_\_\_\_ - \_\_\_\_$$

$$A_S = (x - 1)(\_\_\_) = x - 1$$

$$A_T = 1 \cdot 1 = \_\_\_\_$$

- Ahora sustituye los valores de A_P, A_S, A_T y A_{total} en la ecuación (1);

$$A_R = x^2 - (\_\_\_ - \_\_\_) - (\_\_\_ - \_\_\_) - \_\_\_\_\_$$

$$A_R = x^2 \,\_\_\_\, x \,\_\_\_\, 1 - \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_$$

$$\mathbf{A_R = x^2 - \_\_\_x + 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$

- Enseguida, calcula cuánto mide cada lado del *cuadrado R*.

  Entonces

$$\mathbf{?} = \ \_\_\_ - \ \_\_\_$$

- Sabiendo cuánto mide el lado del *cuadrado R;* calcula el área utilizando su fórmula:

$$\text{Área}_{\text{ CUADRADO R}} = (\_\_ - \_\_)^2$$

$$= (\_\_ - \_\_) \cdot (\_\_ - \_\_)$$

$$= x^2 - \_\_\_x - 1 \,\_\_\_\_ + \_\_\_$$

$$\mathbf{= x^2 - \_\_\_\ x + 1 \ \ldots\ldots\ldots (3)}$$

- Concluyendo con lo anterior, que después de obtener el área del *cuadrado R* de dos formas diferentes puedes asegurar con la ecuación (2) y (3) que:

$$\text{Área}_{\text{ CUADRADO R}} = A_R$$

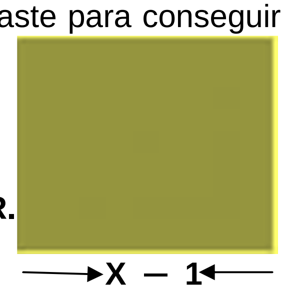
  Es decir:

$$\mathbf{(\_\_ - \_\_)^2 = x^2 - 2x + 1 \ \ldots\ldots\ldots (4)}$$

4. Con base en el *cuadrado R*, realiza otro corte de 1cm. obteniendo así uno más pequeño llamándolo *Cuadrado 2*.

- Dibuja sobre el *cuadrado R,* los cortes que efectuaste para conseguir *el cuadrado 2*. Llamando a cada figura que resulte M, N y O, de las cuales las regiones M y N son iguales (Revisa como hiciste los cortes en el caso anterior).

Cuadrado R.



X − 1

- Calcula el área del *cuadrado 2*. Restándole al *cuadrado R,* las figuras que extrajiste para obtener el *cuadrado 2*.

$$\mathbf{A_{CUADRADO\ 2} = A_R - M - N - O \ \ldots\ldots\ldots\ (5)}$$

- Acto seguido, calcula el área de M, N y O.

$$A_M = (x - 2)(\_\_\_) = \_\_\_\_ - \_\_\_\_$$

$$A_N = (x - 2)(\_\_\_) = x - 2$$

$$A_O = 1 \cdot 1 = \_\_\_\_$$

- Ahora sustituye los valores de las áreas $A_{,M}$, A_N, A_O y $A_{R.}$ (Recordando que $A_R = x^2 - 2x + 1$) en la ecuación (5)

$$A_{CUADRADO\ 2} = x^2 - 2x + 1 - (\_\_\_ - \_\_\_) - (\_\_\_ - \_\_\_) - \_\_\_\_\_.$$

$$A_{CUADRADO\ 2} = x^2 - 2x + 1 \ \_\_\_ \ x \ \_\_\_ \ 2 - \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_$$

$$\mathbf{A_{CUADRADO\ 2} = x^2 - \_\_\_x + 4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)}$$

5. Posteriormente, calcula cuánto mide cada lado del *cuadrado 2*.

   Entonces

$$\mathbf{L}_{\ CUADRADO\ 2} = \ \_\_\_ - \_\_\_$$

- Ya conociendo, cuánto mide el lado del *cuadrado 2*; calcula el área utilizando su fórmula:

$$\text{Área}_{\ CUADRADO\ 2} = (\_\_ - \_\_)^2$$

$$= (\_\_ - \_\_) \cdot (\_\_ - \_\_)$$

$$= x^2 - \_\_\_x - 2 \ \_\_\_\_ + \_\_\_$$

$$\mathbf{= x^2 - \_\_\_ \ x + 4 \ \ldots\ldots\ldots\ (7)}$$

6. Después de deducir el área del *cuadrado 2;* de dos formas diferentes, es decir, a partir de restar las partes recortadas al *cuadrado R* (ecuación 6) y por medio de la medida de uno de los lado del *cuadrado 2* (ecuación 7) decimos que:

$$\mathbf{A_{CUADRADO\ 2} = Área_{\ CUADRADO\ 2}}$$

Es decir:

$$\mathbf{(\ \_\_ - \ \_\_\ )^2 = X^2 - 4X + 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)}$$

- En resumen a lo anterior, calcula el área de cada parte que conforma el cuadrado, y después, resta los fragmentos que quitaste, para saber la superficie del cuadrado que nos interesa, es muy largo el procedimiento, el cual se hace cuantas veces quieras, llegando así a algo muy tedioso. Entonces lo que deducirás es un patrón que ayude a realizar este cálculo más rápido.

- En la ecuación (4) y (8), observa que es más fácil deducir el área del cuadrado con sólo saber cuánto mide un lado, gracias a que demostraste:

El área del cuadrado grande menos las partes que recortemos = Área total del cuadrado que nos interesa

7. Con base en esto, procede a llenar la siguiente tabla, para que observes el patrón a seguir para calcular el área de los *Cuadrados n*.

Núm. de cuadrado	**Medida de un lado**	**Perímetro**	**Área**
R	$x - 1$	$4(x - 1) = 4x - 4$	$(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$ $= x^2 - x - x + 1 = x^2 - 2x + 1$
2	$x - 2$	$4(x - 2) = 4x - 8$	$(x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$ $= x^2 - 2x - 2x + 4$ $= x^2 - 4x + 4$
3	$x - \_\_\_$	$4(x - \_) = 4x - 12$	$(x - \_\_)^2 = (x - \_\_)(x - \_\_)$ $= x^2 - 3x - 3x + \_\_$ $= x^2 - \_\_x + 9$

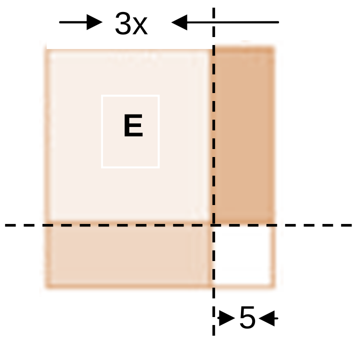
4	___ – 4	4(__– 4)= 4x – 16	(x – 4)^2 = (x – __) (x – __) = x^2 – __ x –4 x +___ = x ^{2} – 8x + 16
5	___ – ___	4(__– __)= 4x – 20	(x –__)^2 = (x – 5) (x – ___) = x^2 – 5x–___x + 25 = x^2 –___ x + 25
6	x – 6	4(x – 6)= 4x – 24	(___– __)^2 = (x – 6) (x – 6) = x^2–___ x – 6x + 36 = x^2–__x+__
13	x – ___	4(x – _)= 4x – 52	(x – 13)^2 = (x – __) (__– 13) = x^2 – 13x –13 x+169 = x^2 – 26x + ___
15	___ – 15	4(___– 15)= 4x– 60	(x – __)^2 = (x – 15) (x – 15) = x^2 – 15x –__x+ ____ = x^2 – 30x + ____
a	**x – __**	**4 (__– a) = 4x – 4a**	**(x – a)^2 = (x – ___)(___– a)** **= x^2 – ax – ax + a^2** **= x^2 – 2ax + a^2**

8. Observa el último renglón de la tabla, y aprecia que dedujiste el caso de un cuadrado cuyo lado mide **x – a** siendo el área:

x^2 – ___ ax + ___^{2}.

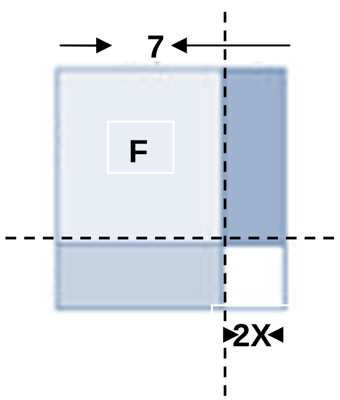
- Para calcular el área de cada cuadrado, en todos los casos se elevó al cuadrado una resta de dos números y en todos los casos el resultado final, después de simplificar términos semejantes, son tres términos. ¿Cómo se obtienen esos tres términos sin hacer la multiplicación? Explícalo con tus propias palabras_______________________________
____
____.

9. Calcula el área y perímetro de la figuras siguientes figuras.



P_E= 4 (__x − __) = 12 x − ___

A_E= (___− ___)^2 = $9x^2$ − 30x + ___



P_F= 4 (__− _2x) = ____ − 8x

A_F= (7 − 2x)^2 = ____ − ___x + ____x^2

VI.I.III BINOMIOS CONJUGADOS

Recuerda que:

El área del cuadrado es $L \cdot L = L^2$

El área del rectángulo es $b \cdot h$

1. Del cuadrado más grande que se proporcionó, es decir el de lado x (o el que tiene 5cm. de cada lado) (Ver material didáctico en el punto VII.I.VII.III). Calcula el área.

$A_{total} = \_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_ = x^2$

2. Del cuadrado anterior, recorta un cuadrado de 1cm. Como se muestra en la figura de abajo y calcula su área.

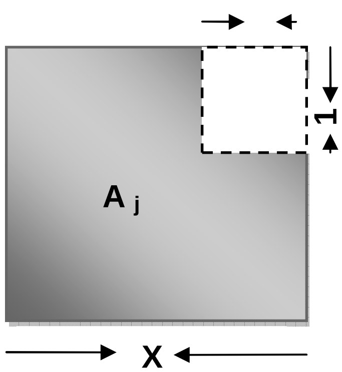


Figura 1

$A_{cuadrado\ pequeño} = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ = 1$

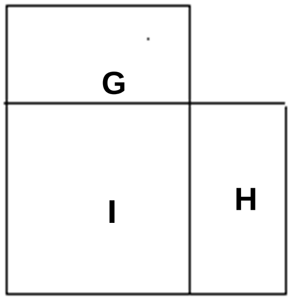
3. Posteriormente, calcula el área de A_J (donde A_J, es la parte restante del cuadrado inicial), con sólo saber cuánto es el área del cuadrado completo y restándole el cuadrado que recortaste de 1cm; es decir,

$$A_J = A_{total} - A_{cuadrado\ pequeño}$$

sustituyendo valores en la ecuación anterior,

$$A_J = x^2 - 1 \text{ .... } (1)$$

4. Acto seguido, calcula el área de la figura de abajo a la cual llamaremos J. Tomando en cuenta que está dividida en tres regiones, de las cuales dos son iguales, a saber G y H; además, de un cuadrado I; por esta razón obtén el área de cada parte y después súmalas.



$$A_G = (\underline{\quad\quad} - \underline{\quad\quad})(1) = x - 1$$

$$A_H = (x - 1)(\underline{\quad}) = \underline{\quad} - 1$$

$$A_I = (x - 1)(x - 1) = \underline{\quad\quad}^2 - \underline{\quad\quad} - x + 1$$

$$= \underline{\quad\quad}^2 - \underline{\quad\quad}x + 1$$

- Ahora, falta sumar las áreas de G, H e I, para saber la superficie de A_J: es decir:

$$\mathbf{A_J = A_G + A_H + A_I}$$

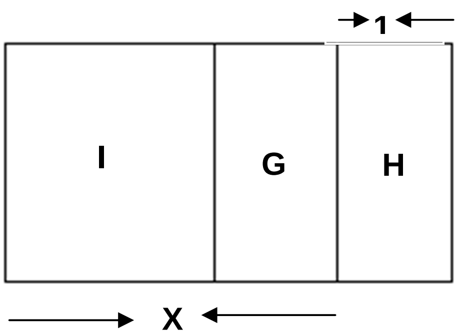
sustituye los resultados en la ecuación anterior:

$$A_J = x - 1 + (\underline{\quad} - 1) + (\underline{\quad\quad}^2 - \underline{\quad\quad}x + 1)$$

$$A_J = x - 1 + \underline{\quad} - 1 + \underline{\quad\quad}^2 - \underline{\quad\quad}x + 1$$

$$A_J = \underline{\quad\quad}^2 - 1 \text{ ....} (2)$$

5. Otra forma de calcular el área de A_J, es reacomodándola en un rectángulo, ya que la región G y H son iguales. (Como se muestra en la figura de abajo)



$$A_J = (\underline{\quad\quad} + 1)(x - 1)$$

$$= \underline{\quad\quad}^2 - \underline{\quad\quad} + x - 1$$

$$= \underline{\quad\quad}^2 - 1 \text{ ....} (3)$$

6. En resumen, después de obtener el área de la figura J; de tres formas diferentes; es decir, a partir de restar el cuadrado pequeño que recortaste del cuadrado inicial *(ecuación 1);* por medio de sumar todas las partes que quedaron *(ecuación 2),* y reacomodando las regiones resultantes para formar un rectángulo, *(ecuación 3)* por lo tanto, se concluye que:

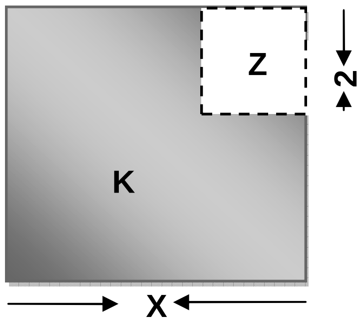
$$A_j = x^2 - 1 \text{ ....} (4)$$

Pero también tenemos que A_J = (____ + 1) (x − 1)

Entonces

(____ + 1) (x − 1) = x^2 − 1……………………(5)

7. Hay que repetir este mismo procedimiento desde el principio pero recortando un cuadrado ahora de 2 cm (siendo este *cuadrado Z*). Calcula el área de dicha figura Sabiendo que la medida de cada lado es de ______.



A_z= ___ · ___ = 4

8. Dibuja la figura que resulto, después de haber recortado el *cuadrado Z*. Siendo esta la figura k.

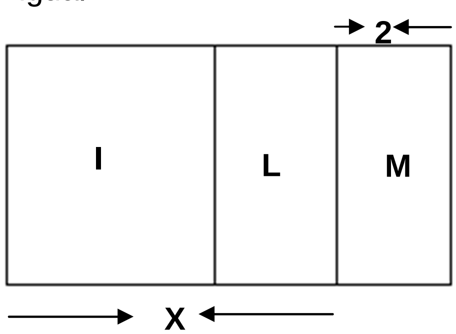
9. Calcula el área de $A_{k,}$ esta la consigues con sólo saber, cuánto es el área del cuadrado completo, y restándole el área de Z; es decir,

$$A_K = A_{total} - A_Z$$

sustituyendo valores en la ecuación anterior,

A_K = ___ ^{2} − _____ …………………………(6)

10. Por otro lado, calcula el área de A_k reacomodándola; es decir, (como se muestra en la figura de abajo) en un rectángulo ya que las regiones L y M son igual.



A_K = (____ + 2) (x − 2)

= ___ 2 − ____ + x − 2

= ____2 − 4…………………..(7)

11. En síntesis, después de obtener el área de la figura K; de dos diferentes formas es decir, a partir de restar el cuadrado pequeño que recortaste al cuadrado inicial (ecuación 6), y reacomodando las partes sobrantes para formar un rectángulo (ecuación 7); dices que:

$$A_k = x^2 - 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(8)$$

Pero también tenemos que $A_K = (\_\_\_\_ + 2)(x - 2)$

Entonces

$$\mathbf{(\_\_\_\_ + 2)(X - 2) = X^2 - 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)}$$

- Con base en lo anterior, apreciaras que calcular el área de la figura que resulta cada vez que recortas un cuadrado de lado n (donde n = 1, 2, 3, etc.), a partir de conocer el área de las figuras involucradas es algo largo (más no difícil). Entonces lo que harás es deducir un patrón que ayudé a realizar este cálculo con mayor eficacia.

- En la ecuación (5) y (9) observa, que es más fácil deducir el área de la figura que resulto después de quitarle el cuadrado de lado n, reacomodándolo las partes sobrantes en un rectángulo, y conociendo cuánto mide cada lado que lo conforman; gracias a que demostraste:

El área de la figura reacomodada en un rectángulo =
Área total de la figura menos la superficie del cuadrado de lado n.

12. Con base en esto, procede a llenar la siguiente tabla, con el propósito de que deduzcas el patrón a seguir, para calcular el área de la figura que resulte al quitarle el cuadrado de lado n.

Núm. de rectángulo	Medida de la base	Medida de la altura	Área
J	$x + 1$	$x - 1$	$(x + 1)(x - 1) = x^2 - x + x - 1$ $= x^2 - 1$
K	$x + 2$	$x - 2$	$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2x + 2x - 4$ $= x^2 - 4$

3	x + ___	x − ___	$(x + \_\_)(x - \_\_) = x^2 - 3x + 3x - \_\_$ $= x^2 - 9$
4	___ + 4	__ − 4	$(x + \_\_)(x - \_\_) = x^2 - \_\_\,x + 4x - \_\_\_$ $= x^2 - 16$
5	___ +___	___ − ___	$(x + 5)(x - \_\_\_) = x^2 - 5x + \_\_\_x - 25$ $= x^2 - 25$
6	x + 6	x − 6	$(x + 6)(x - 6) = x^2 - \_\_\_\,x + 6x - 36$ $= x^2 - \_\_\_$
13	x + ___	x − ___	$(x + \_\_)(\_\_ - 13) = x^2 - 13x + 13x - 169$ $= x^2 - \_\_\_$
15	___ + 15	___ − 15	$(x + 15)(x - 15) = x^2 - 15x + \_\_\_x - \_\_\_$ $= x^2 - \_\_\_\_$
n	**x** + __	____ − **n**	$\mathbf{(x +}\ \_\_\_\ \mathbf{)(}\ \_\_\_\ \mathbf{- n) = x^2 - nx + nx - n^2}$ $\mathbf{= x^2 - n^2}$

13. Observa el último renglón de la tabla, y apreciarás que dedujiste el caso en el que has quitado el cuadrado de lado n

$$\_\_\_\_^2 - \_\_\_^2.$$

14. Escribe con tus propias palabras una razón por la que se asegura la diferencia de dos cuadrados por ejemplo $x^2 - n^2$ es igual al producto de la suma por la diferencia de las raíces, en este caso $(x + n)(x - n)$. ______________________

____

____

15. Factoriza el polinomio $1-36y^2$. Discutan si puede ser factorizado como binomios conjugados y por qué. Realicen la factorización siguiendo los pasos:

$1 =$ __ ▪ __ $36 =$ __ ▪ __ $y =$ __ ▪ __

$1 - 36\ y^2 =$ (__ + __) (__ − __)

Para obtener finalmente

$1-36y^2 =$ (___+___) (___ - ___)

- Factorizar $4x^2-64$. Observen primero que sólo hay dos términos y que cada uno es el cuadrado de alguna expresión:

$4 =$ ____ ▪ ____ y $64 =$ ____ ▪ _____

$x =$ ___ ▪ ____

Por lo tanto, el polinomio puede ser factorizado como binomios conjugados.

Para factorizar, escribimos:

$4x^2 - 64 = (2x)^2 - 8^2 =$ (___x ___ 8) (2x − ___)

es decir,

$4x^2 - 64 =$ (___x ___ 8) (2x − ___)

Actividades complementarias:

1. Determinen cuáles de los siguientes polinomios podrían ser factorizados como binomios conjugados, argumentando si cumplen las condiciones:

a) $x^2 - 16$

b) $9a^2 - 81$

c) x^2 __ 16

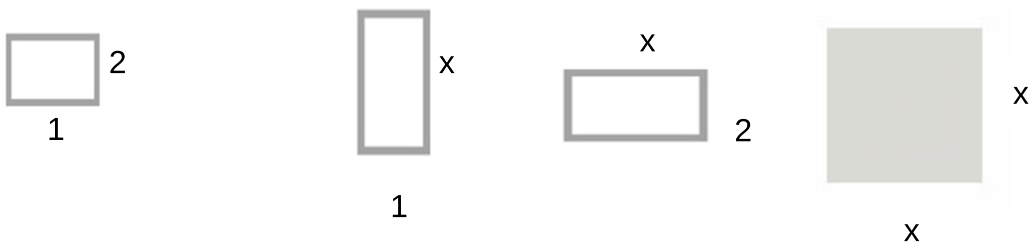
d) $16a^2 - 1$

2. Factoricen los polinomios del ejercicio anterior, sí son candidatos a ser escritos como binomios conjugados.

VI.I.IV PRODUCTOS DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

1. Con el material que se proporcionó; es decir, el que aparece abajo (Fig. A, Fig. B, Fig. C y Fig. D) (Ver material didáctico en el punto VII.I.VII.IV). Calcula el área y el perímetro de cada una de las figuras y completa la tabla siguiente.

Fig. A **Fig. B** **Fig. C** **Fig. D**



Recordando que:

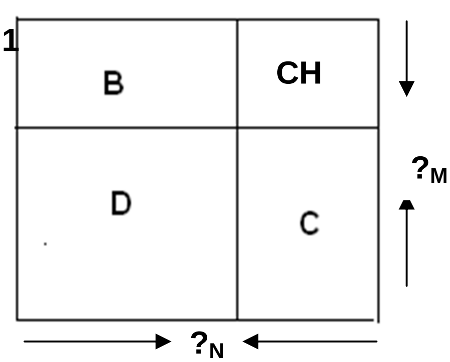
El área del cuadrado es $L \cdot L = L^2$

El área del rectángulo es $b \cdot h$

Figura	Área	Perímetro
A	2 · ___ = 2	2 (2) + 2 (__) = ___ + ___
B	___ · 1 = ___x	2 (___) + 2 (1) = ___ x + ___
C	x · 2 = ___ x	2 (___) + 2 (___) = ___ x + ___
D	____ · x = ____^{2}	4(x) = ____ x

2. Con las 4 figuras de arriba, se forma un rectángulo. Siendo este dicho rectángulo (*rectángulo 1*).

Rectángulo 1



- Calcula el área de este rectángulo sumando cada parte que lo conforma: es decir:

$A_{CH} + A_B + A_C + A_D$ = ___ + ___ *x* + 2___ + ___^{2}

= ___^{2} + ____*x* + ___...............*(1)*

3. Por otra parte, calcula cuánto mide cada lado del *rectángulo 1*.

Entonces $\mathbf{?_M} =$ ___ + ___

$\mathbf{?_N} =$ ___ + ___

- Registra el área del rectángulo, aplicando la fórmula que conoces, ya que sabes cuánto mide cada lado que lo conforma.

$$A_{\text{RECTÁNGULO 1}} = b \cdot h = (\_\_\_\_ + 1)(x + \_\_\_\_)$$

- Primero se multiplica cada término de (x + 1) por el otro binomio

$$= x(\_\_\_\_ + 2) + 1(x + \_\_\_\_)$$

- Luego se efectúan los productos indicados:

$$= \_\_\_^2 + \_\_\_\, x + 1\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

- Se reducen términos semejante:

$$\mathbf{= \_\_\_^2 + \_\_\_\_x + \_\_\_ \quad .... (2)}$$

- Después de obtener el área del rectángulo, de dos formas diferentes (1) y (2), podemos decir que:

$$A_A + \_\_\_\_\_\_ + A_C + \_\_\_\_\_\_\_ = \text{Área}_{\text{RECTÁNGULO 1}}$$

Es decir:

$$\mathbf{(\_\_ + 1)(x + \_\_) = \_\_\_\_^2 + \_\_\_\, x + \_\_\_\_\_ .... (3)}$$

4. **¿Cómo seguir el procedimiento de calcular el área de rectángulos para obtener binomios con un término común?**

Para saber si el rectángulo 2, que consta de 4 figuras, que fueron acomodadas como en el caso anterior, cada una con sus respectivas medidas (descritas en la tabla siguiente), averigua con los procedimientos anteriores los binomios con término común que resulten.

- Dibuja las figuras dadas, cada una con sus respectivas medidas; apóyate de la tabla siguiente y el ejemplo anterior:

Figura E **Figura F** **Figura G** **Figura H**

Figura	Área	Perímetro
E	$3 \cdot 4 = 12$	2 (4) + 2 (__) = ___ + ___
F	___ · 3 = ___x	2 (___) + 2 (3) = ___ x + ___
G	x · 4 = ___ x	2 (___) + 2 (___) = ___ x + ___
H	____ · x = ____^{2}	4(x) = ____ x

5. Con las 4 figuras que dibujaste se formo el rectángulo 2.

- Calcula el área de este rectángulo, sumando cada parte que lo conforma: es decir:

$A_E + A_F + A_G + A_H =$ ___ + ___ x + 4___ + ___^{2}

= ___^{2} + ____*x* + ___ .... *(4)*

6. Por otra parte, calcula cuánto mide cada lado del rectángulo 2 y dibuja como lo acomodaste.

Entonces **?$_O$** = ___ + ___

?$_P$ = ___ + ___

7. Busca el área del rectángulo aplicando la fórmula, ya que conoces cuánto mide cada lado que lo conforma.

A $_{\text{RECTÁNGULO 2}}$ = b ▪ h = (____ + 3) (x + ____)

= x (____ + 4)+ 3 (x + ____)

= ___^{2} + ___*x* + *3* ___+ ___

= ___^{2} + ____*x* + ___ .... *(5)*

8. Después de obtener el área del rectángulo, de dos formas diferentes, a partir de (4) y (5) aseguras que:

$$A_E + \_\_\_\_\_\_ + A_G + \_\_\_\_\_\_\_ = \text{Área}_{\text{RECTANGULO 2}}$$

Es decir:

$$\mathbf{(\_\_ + 3)(x + \_\_) = \_\_\_\_^2 + \_\_\_\, x + \_\_\_\_\_ \ \ldots\ldots\ldots (6)}$$

- En resumidas cuentas, calcular el área de los rectángulos que poseen un término común, es sólo aplicar la fórmula para el área del rectángulo, analizado por la ecuación (3) y (6). Entonces lo que harás es deducir un patrón que ayudé a realizar este cálculo rápido.

9. Con base en esto procede a llenar la siguiente tabla, para que deduzcas un patrón que calculé el área de rectángulos con ciertas medidas arbitrarias.

Núm. de rectángulo	**Medida de la base**	**Medida de la altura**	**Área**
1	x + 2	x + 1	$(x+2)(x+1) = x(x+1) + 2(x+1)$ $= x^2 + x + 2x + 2$ $= x^2 + 3x + 2$
2	x + 3	x + 4	$(x+3)(x+4) = x(x+4) + 3(x+4)$ $= x^2 + 4x + 3x + 12$ $= x^2 + 7x + 12$
3	x + ___	x + ___	$(x+5)(x+\_\_) = \_\_\_(x+6) + \_\_(x+\_\_)$ $= \_\_\_^{2} + \_\_\_x + \_\_\_x + \_\_\_$ $= x^2 + \_\_\_x + \_\_\_\_$
4	___ + 7	__ + 8	$(x+\_\_)(x+\_\_) = x(x+8) + \_\_(x+\_\_)$ $= \_\_\_^{2} + \_\_\_x + \_\_\_x + \_\_\_$ $= x^2 + \_\_\_x + \_\_\_\_$
5	___ + ___	___ + ___	$(x+9)(x+10) = \_\_(x+10) + \_\_(x+\_\_)$

			= ___^{2} + ___x + ___x + ___ = x^2 + ___x + ____
6	x + 11	x + 12	(x + __) (x + __) = x (x + 12) + __ (x + __) = ___^{2} + ___x + ___x + ___ = x^2 + ___x + ____
13	x + ___	x + ___	(x + 13) (x + 14) = __ (x + 16)+ __ (x + __) = ___^{2} + ___x + ___x + ___ = x^2 + ___x + ____
15	___ + 15	___+ 16	(x + __) (x + __) = x (x + 14)+ __ (x + __) = ___^{2} + ___x + ___x + ___ = x^2 + ___x + ____
N	**x** + **y**	___ + **z**	**(x + __) (__+ z) = x (x + z) + __ (x + __)** **= x^2 + ___z + y___ + ___z** **= x^2 + (y + z)x + y ▪ z**

10. Observa el último renglón de la tabla, y aprecia que dedujiste el caso en el que tienes un rectángulo con medidas arbitrarias; el cual empleas para cualquier número que sustituyas en dicha fórmula que has deducido, es decir:

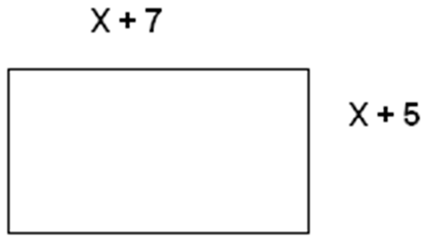
____^{2} + (y + z)___ + ____ ▪ z.

- Para calcular el área de cada rectángulo, en todos los casos se multiplicaron los dos binomios que obtuvimos, teniendo como resultado tres términos. ¿Cómo se obtienen esos tres términos sin hacer la multiplicación? Explícalo con tus propias palabras__________________
____
____
____

.

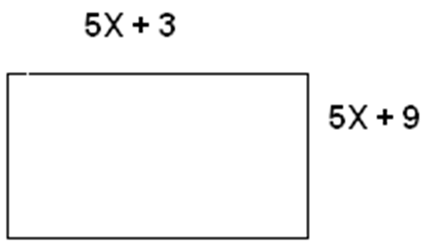
Resuelve los siguientes ejercicios.

a) Expresa el área de cada rectángulo.



A = (___ + ___) (___ + ____)

= ____^{2}+ (___+ ___)___ + ____



Para este caso has el cálculo de en medio mentalmente y sólo escribe el resultado.

A = (____x + ____) (5___ + ___)

= _____ + _____x + _______

b) Efectúa los siguientes productos de binomios con un término común.

i. (n + 11)(n - 4) =

ii. (13 + m) (m – 3) =

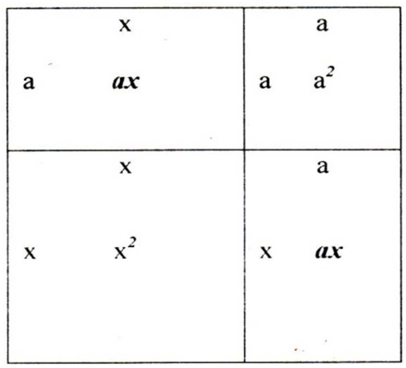
iii. (a + 8) (a + 4) =

iv. (6n — 7) (6n — 30) =

VI.I.V COMPLETAR CUADRADOS

El Objetivo de esta dinámica es que el alumno desarrolle sus habilidades mentales en el momento de resolver algunas cuestiones matemáticas. Con el fin de encontrar una expresión alterna a esta ecuación: $x^2 + ax$.

Recordemos que para encontrar el área de un cuadrado basta tomar un lado y elevarlo al cuadrado. El área de un rectángulo es igual a la *Base X Altura.*



El área del cuadrado = (lado)^2, pero cada uno de los lados mide **a + x** por la figura anterior.

Entonces tenemos que:

El área del cuadrado = $(x + a)^2$………………..(1)

Por otro lado sabemos que el área del cuadrado es sumar el área de cada una de sus regiones. Entonces:

El área del cuadrado = $x^2 + 2xa + a^2$…………(2)

Con todo lo anterior tenemos que las ecuaciones (1) y (2) son iguales por lo tanto tenemos que:

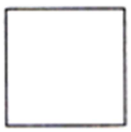
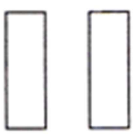
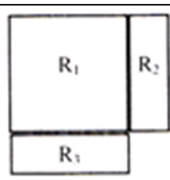
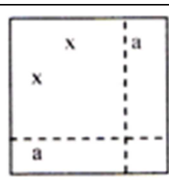
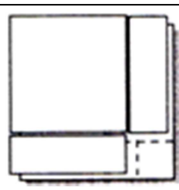
$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$ …………………………(3)

Lee detenidamente las siguientes instrucciones

Con los dos cuadrados que se te proporcionaron (Ver material didáctico en el punto VII.I.VII.V) de diferentes tamaños y dos rectángulos del mismo tamaño. Cada uno de sus lados tendrá un valor determinado. Y con estos valores llena la tabla que se muestra a continuación.

1. Encuentra el área del cuadrado pequeño y coloca el valor en el renglón
2. Encuentra el área de cada uno de los rectángulos y coloca los valores en el renglón 2. (No olvides que son dos).

3. Encuentra el área total de los cuadriláteros del renglón 1, 2 y colócalos en el renglón 3.
4. Encuentra el área del cuadrado grande y coloca el valor en el renglón 4.
5. En el cuadrado más “grande” coloca el cuadrado “pequeño” y los dos rectángulos de tal modo que estos no se salgan del cuadrado “grande”. (No se vale recortar nada).
6. Ya te diste cuenta que lo que falta es un cuadradito Entonces ahora encuentra el área de este y coloca el valor en el renglón 6.
7. Después de haber llenado la tabla, contesta la pregunta que se encuentra al final.

Reglón	**Dibujos**	**Área**	**Expresión alterna**
1		____ x ____	$(\_\_\_)^2$
2		(___ x ___) + (___x ___)	2 (___ x ___)
3		$R_1 + R_2 + R_3$ ___ + __ +___	___ + 2 (___)
4		(___ x ___) + (___x ___)	(___ + ___)
5			
6		_____ X ____	$(\_\_\_)^2$

¿Qué tengo que hacer para que el cuadrado grande (Figura 1) tenga la misma área que el cuadrado pequeño y los dos rectángulos (Figura 2)?.______

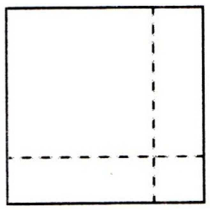


Figura 1.

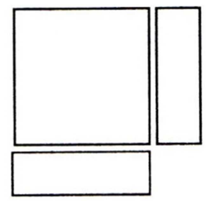
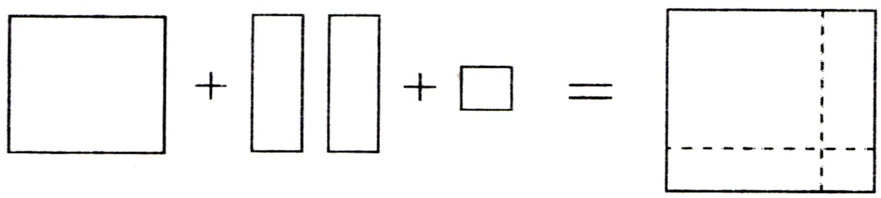
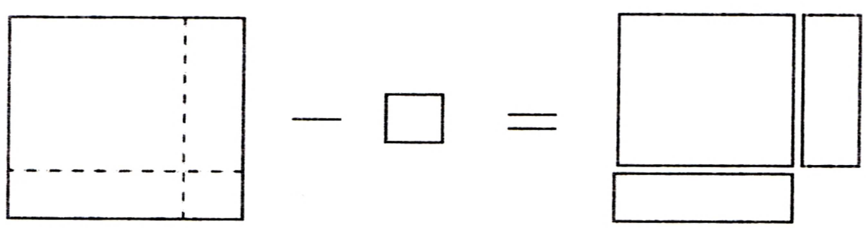


Figura 2.

Casi terminamos solo nos basta ver que hay que hacer para que estas áreas sean iguales, observa las siguientes figuras y completa.



$$(\_\_\_)^2 + 2(\_\_\_\_) + (\_\_\_)^2 = (\_\_\_ + \_\_\_)^2$$



$$(\_\_\_ + \_\_\_)^2 - (\_\_\_)^2 = (\_\_\_)^2 + 2(\_\_\_\_)$$

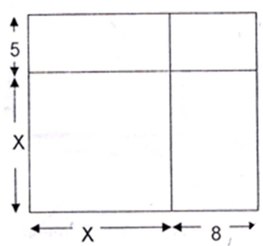
VI.I.VI EVALUACIÓN DE PRODUCTOS NOTABLES

Nombre del alumno: ___________________ Grupo:_______ Calificación_____

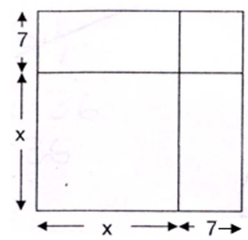
Nombre del profesor: _________________ Fecha: ____________ Puntos:____

INSTRUCCIONES: Lee y analiza cuidadosamente lo que se te pide para que contestes correctamente.

a. Calcula el área de las siguientes figuras



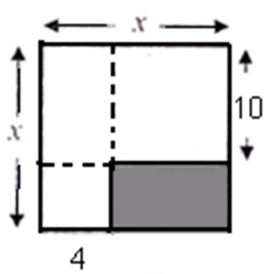
Área = ___________



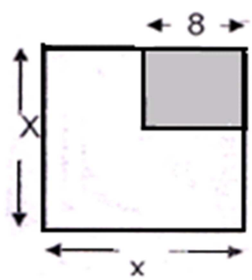
Área = ___________

10 PUNTOS

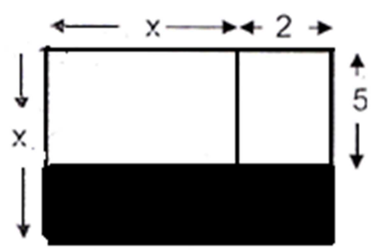
b. Calcula el área de la parte sombreada de las siguientes figuras:



Área = __________



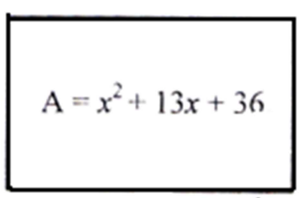
Área = _________



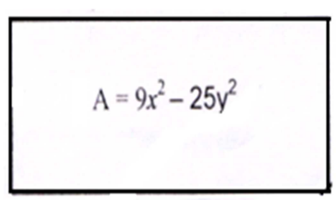
Área = ___________

15 PUNTOS

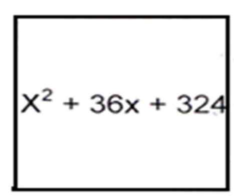
c. Encuentra la base (b) y la altura (a) de cada uno de las siguientes figuras:



b = _____ a = _____



b = _____ a = _____



b = _____ a = _____

20 PUNTOS

d. En cada uno de los casos se presenta el área de un paralelogramo, determina si se trata de un cuadrado o de un rectángulo, escribe sus dimensiones y dibuja la figura correspondiente.

a) $x^2 + 12x + 36$

Se trata de un ____________

b) $x^2 + 13x + 36$

Se trata de un ____________

15 PUNTOS

e. Relaciona ambas columnas.

( ) $x^2 - 8x - 20$	
( ) $x^2 + 8x - 20$	a) $(x + 9)^2 =$
( ) $x^2 + 18x + 81$	b) $(x - 9)^2 =$
( ) $x^2 - 81$	c) $(x + 8) (x - 20) =$
( ) $x^2 - 18x - 81$	d) $(x + 10) (x - 2) =$
( ) $x^2 - 8x + 81$	e) $(x - 2) (x - 10) =$
( ) $x^2 - 12x + 20$	f) $(x - 10) (x + 2) =$
( ) $x^2 - 8x + 20$	g) $(x - 9) (x + 9) =$
( ) $x^2 + 12x - 160$	h) $(x + 20) (x - 8) =$
( ) $x^2 - 12x - 160$	

20 PUNTOS

f. Resuelve las siguientes operaciones. Emplea los productos notables.

a) $73^2 =$

d) (23) (17) =

b) $105^2 =$

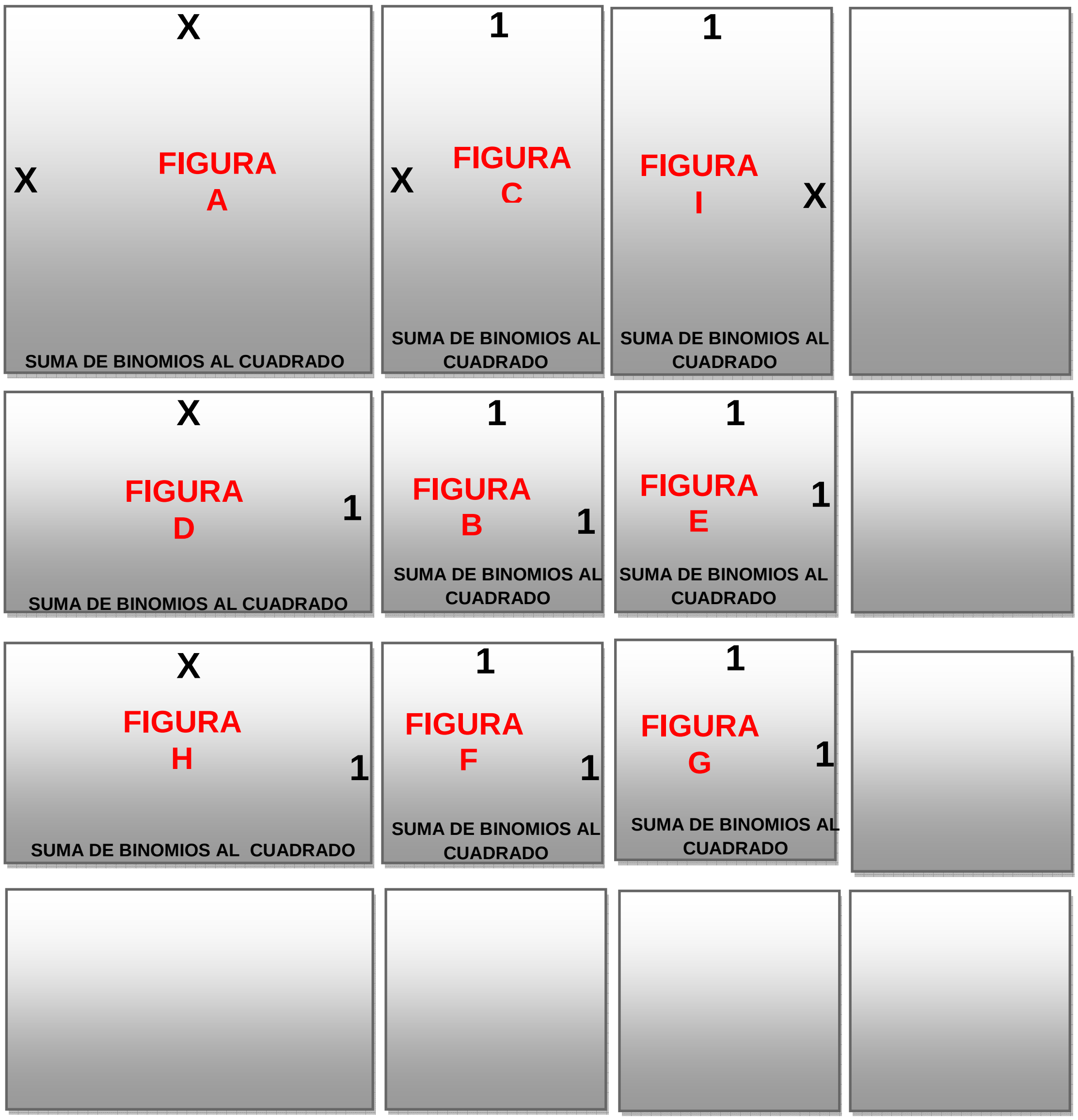
e) (45) (42) =

c) $196^2 =$

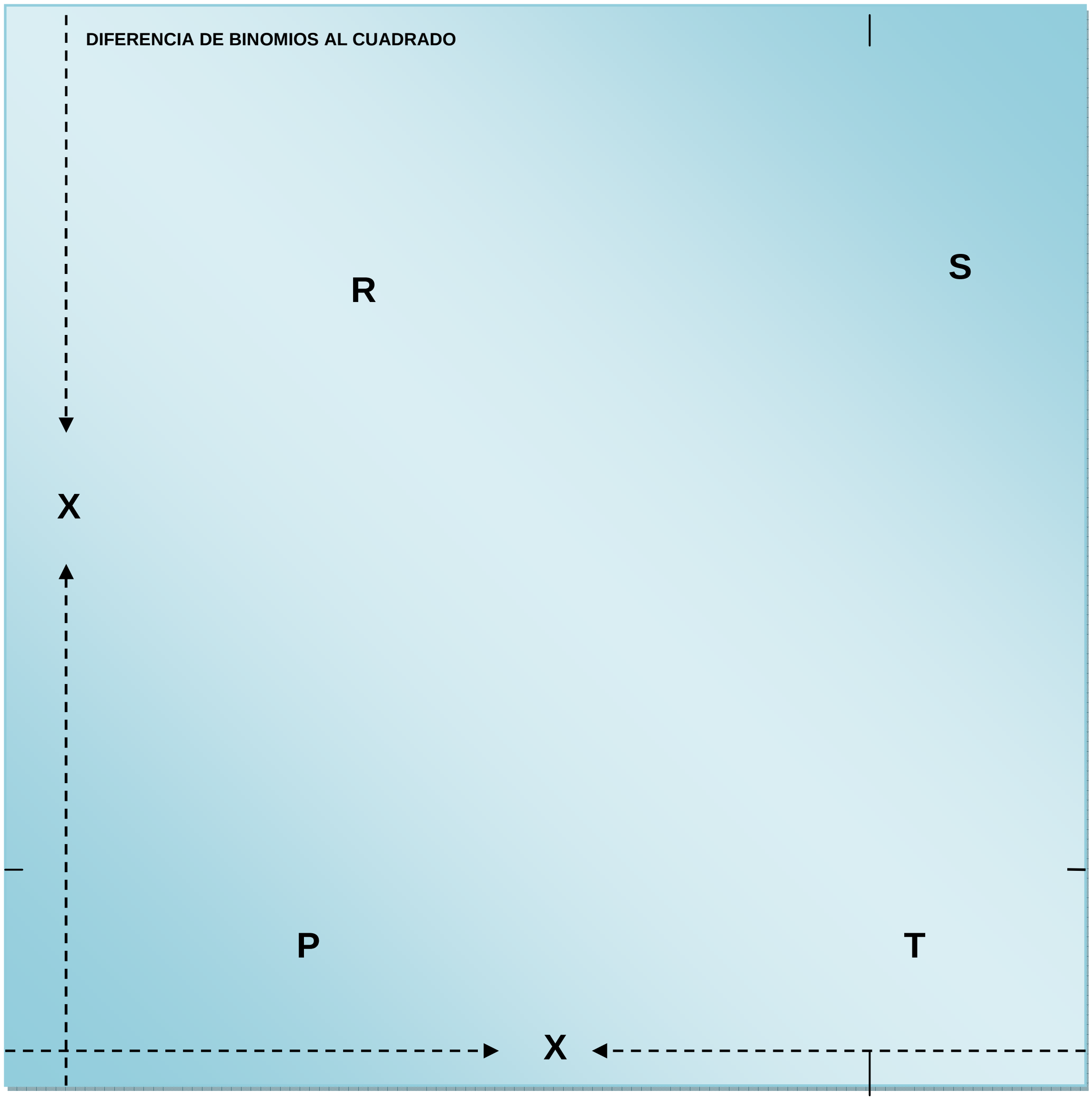
20 PUNTOS

VI.I.VII MATERIAL DIDÁCTICO PARA CADA TEMA

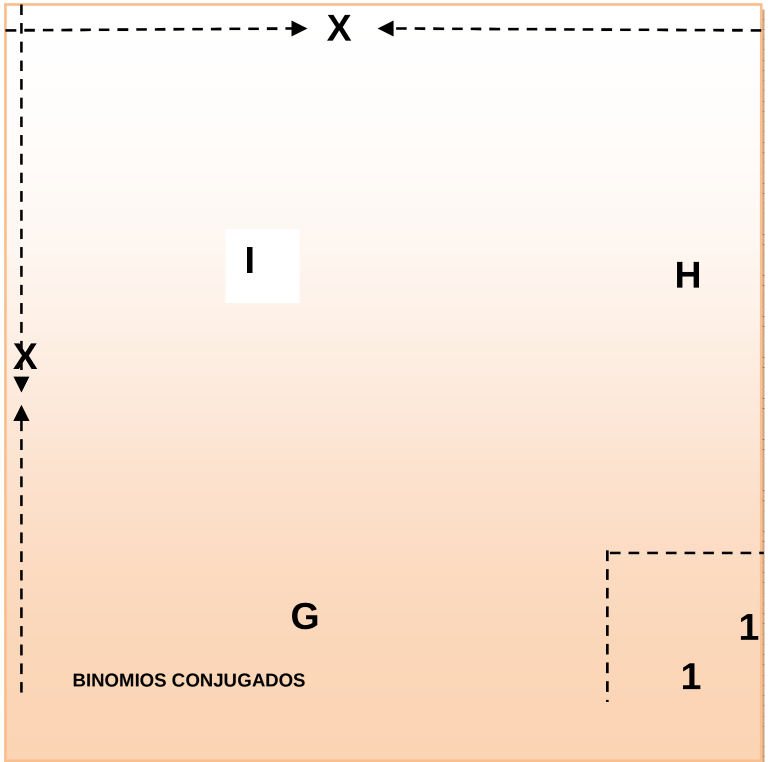
VI.I.VII.I. SUMA DE BINOMIOS AL CUADRADO

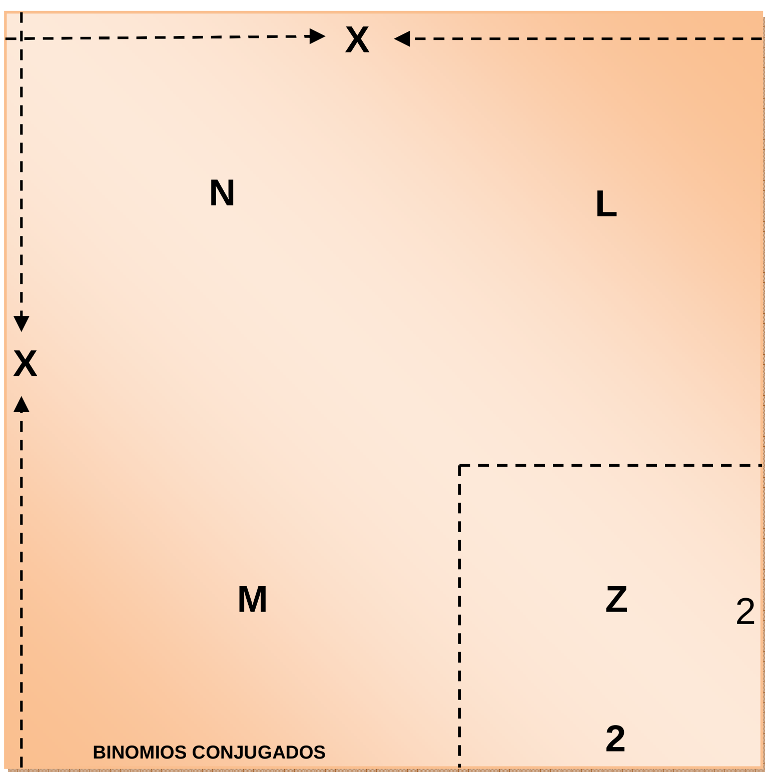


VI.I.VII.II. DIFERENCIA DE BINOMIOS AL CUADRADO

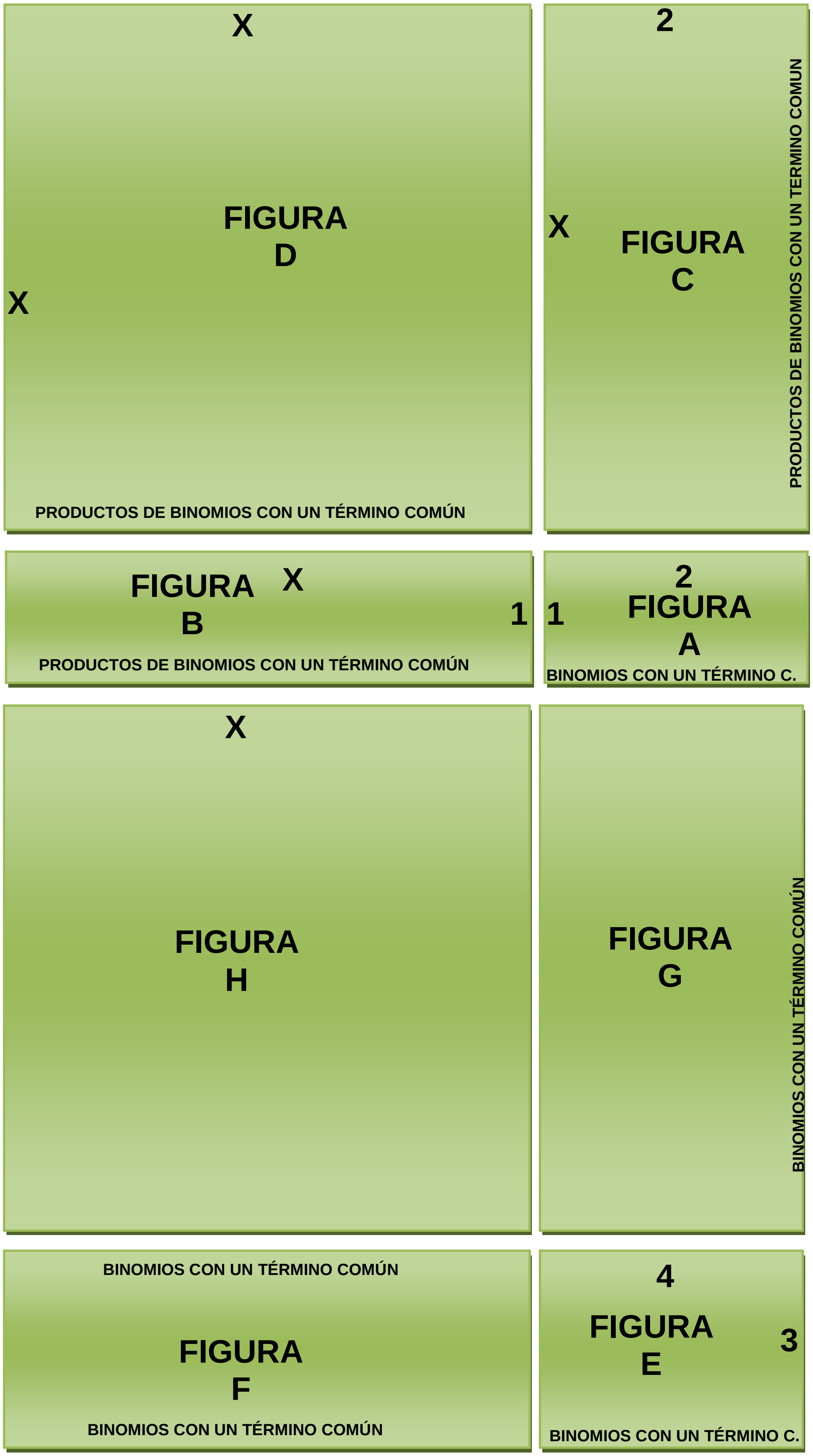


VI.I.VII.III. BINOMIOS CONJUGADOS

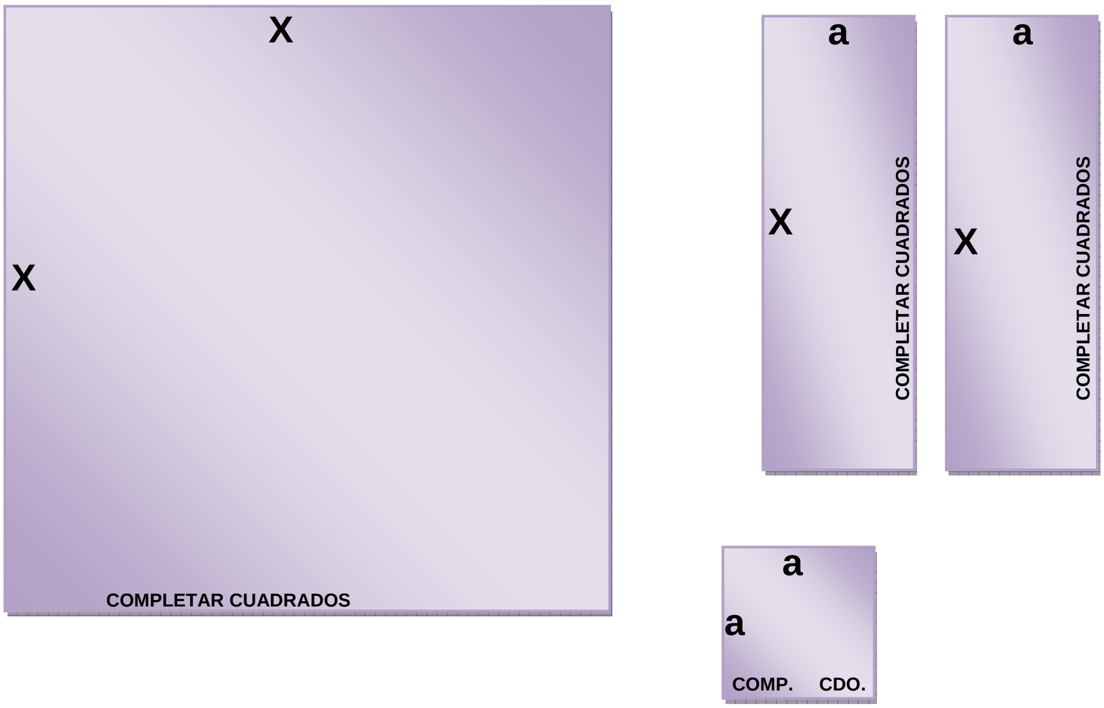


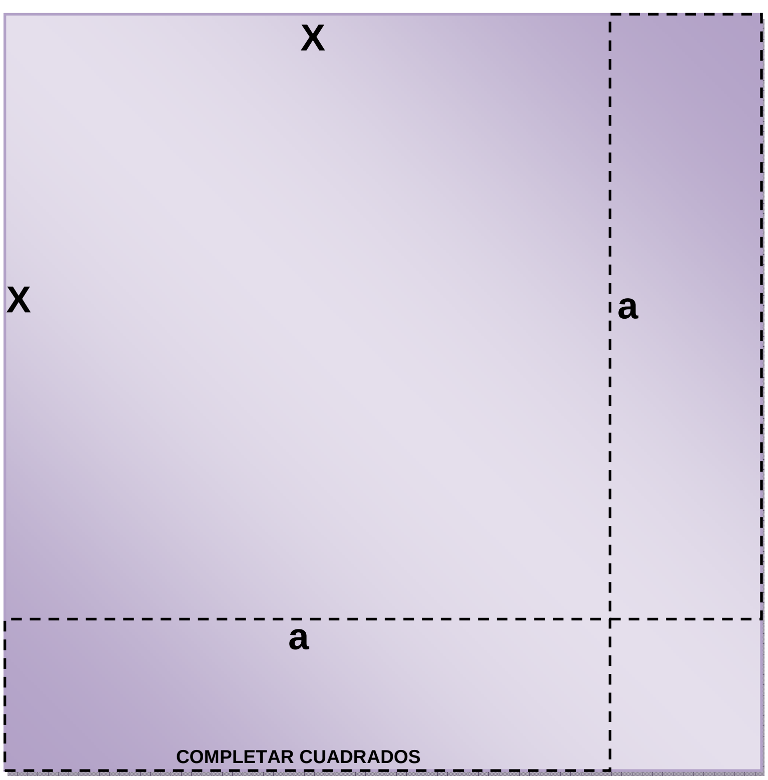


VI.I.VII.IV. PRODUCTOS DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN



VI.I.VII.V. COMPLETAR CUADRADOS

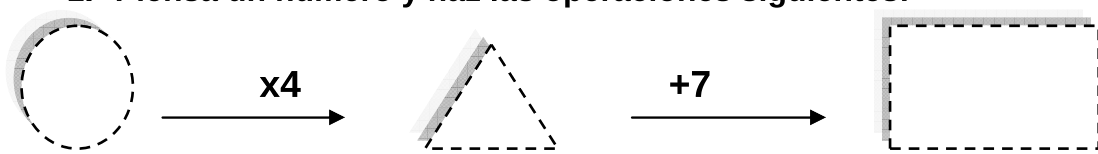




VI.II ECUACIONES

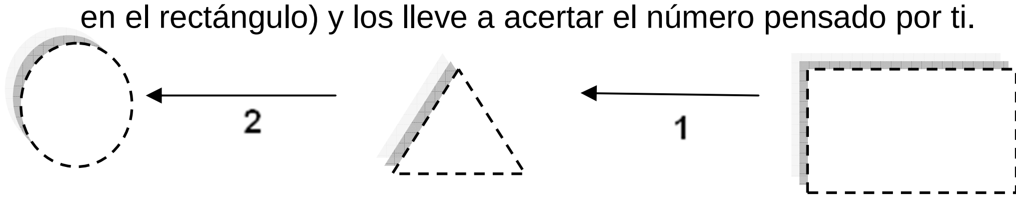
VI.II.I CADENAS O ECUACIONES DE LA FORMA a + x = b

1. **Piensa un número y haz las operaciones siguientes:**



Escribe: El número pensado en el círculo.
El resultado parcial en el triángulo.
El resultado final en el rectángulo.

- Enséñaselo a tus compañeros de equipo, tapando el número pensado por ti, es decir, el que está en el círculo, para que ellos hagan otra cadena, partiendo del número final, (a saber, el que está en el rectángulo) y los lleve a acertar el número pensado por ti.



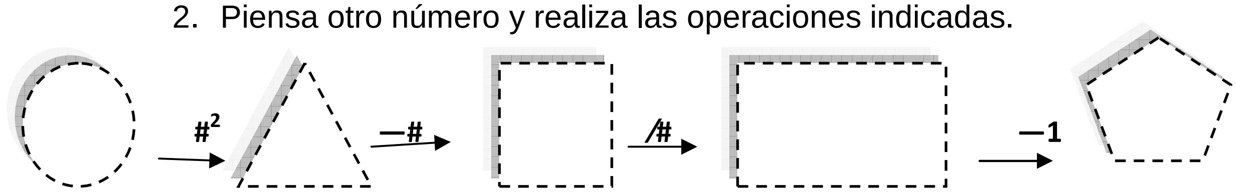
- Teniendo el resultado final de tu compañero, trata de investigar cuál es el número con el que partió en la cadena que se muestra arriba, escribe dicha cantidad dada por tu compañero en el rectángulo.

- Ahora bien, ¿Qué operación pondrías en el paso 1 y con qué número harías esa operación para llegar al triángulo? (Toma en cuenta la primer cadena que él hizo y el resultado que te dio).__________________________

- Por último, para llegar al número pensado por tu compañero; ¿Qué operación colocarías en el paso 2 y con qué cantidad harías esa operación para llegar al círculo?________________________

- ¿Cuál fue el número pensado por tu compañero?_____________

2. Piensa otro número y realiza las operaciones indicadas.

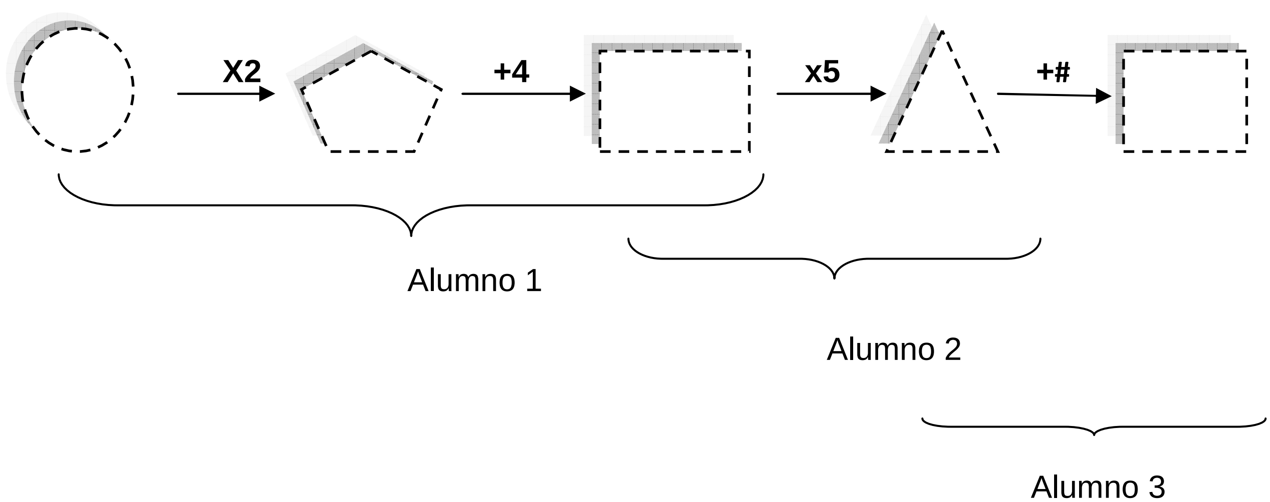


Realiza el procedimiento anterior, y averigua que pasa con el resultado final si es que llegas a averiguar el número de tu compañero**. OJO**: solo hay que hacer una operación sencilla con el número que aparece en el pentágono, y llegaras al número inicial de tu compañero.

Ejercicios complementarios:

En la siguiente cadena trata de averiguar qué es lo que está pasando en cada caso, te puedes apoyar en ponerlo como cadenas o explicarlo como una función.

i. Agrúpense en equipos de tres. En cada equipo, un alumno piensa un número, lo duplica (es decir, lo multiplica por dos) y le añade 4 unidades, pasando el resultado a otro alumno de su equipo. Este multiplica por 5 el número entregado y pasa el resultado al tercer alumno. Finalmente, este le añade al resultado un nuevo número pensado por el (es decir, le suma a la cantidad entregada su número pensado) y comunica el resultado a otro equipo o al profesor para que ellos descubran el número inicial de la cadena. (ARRIAGA, 2008, Pág. 63)



Los ejercicios vistos anteriormente los puedes transformar a las famosísimas ***ecuaciones****, porque en realidad para averiguar el número de tu compañero es lo que estás haciendo. Observa el siguiente problema para resolverlo:*

3. Luz María y sus compañeros de la escuela, realizaron una excursión a un centro arqueológico que se encuentra a 125 km. Cuando había recorrido 73 km, el autobús se detuvo por una descompostura. ¿Cuántos kilómetros les faltaba recorrer? Si se llama "*x*" a la cantidad de kilómetros que faltaba recorrer, se tiene la siguiente relación:

$$73 + x = 125 \text{ ....} (1)$$

- Para resolver esta ecuación, a lo que quieres llegar es a saber el valor de "x".

- Entonces el primer pasó que harás es despejar a "x", es decir, fíjate en el número que esta del mismo lado de la incógnita.

$$73 + \overset{\text{incógnita}}{\overset{\uparrow}{x}} = 125$$

- Dicho número, lo que quieres es quitarlo de ese lado, para así saber cuál es el valor de "x" que satisface la ecuación:

- Lo que harás es ver que signo tiene ese número: ***73,*** el cual es positivo, entonces para eliminarlo, tienes que restar de ambos lados de la ecuación el mismo número.

$$\mathbf{73 + x - 73 = 125 - 73}$$

- Proseguimos a reducir términos semejantes, llegando a que:

$$\cancel{73} + x - \cancel{73} = 125 - 73$$

$$\mathbf{X = 52}$$

- Este último número que encontraste es el valor de la incógnita, el cual hace verdadera la ecuación, en pocas palabras; el resultado.

- Para comprobar que el resultado sea correcto, sustitúyelo en la ecuación (1):

$$\boldsymbol{73 + x = 125}$$

$$\boldsymbol{73 + 52 = 125}$$

$$\boldsymbol{125 = 125} \qquad \checkmark$$

4. Realiza las siguientes ecuaciones de la forma a+x=b así como lo realizaste anteriormente:

i. $\mathbf{6 - x = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2\ )}$

$$6 - x - \_\_\_\_ = 18 - \_\_\_\_$$

$$\cancel{6} - x - \cancel{\_\_\_\_} = 18 - \_\_\_\_$$

$$- x = \_\_\_\_$$

- Pero lo que quieres, es el valor de la incógnita con signo positivo, entonces en esta última ecuación multiplica por (–1) de ambos lados de la igualdad.

$$(-1)(-x) = \_\_\_\_(-1)$$

$$\_\_\_\ x = -\_\_\_\_$$

- Concluye el ejercicio con **la comprobación**, con el propósito de saber si el resultado obtenido es correcto

$$6 - x = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2\ )$$

$$\_\_\_\_ - (\_\_) = 18$$

$$\_\_\_ + \_\_\_ = 18$$

$$\_\_\_ = \_\_\_ \qquad \checkmark$$

ii. $\mathbf{k + 178 = 234 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3\ )}$

$$k + \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 234 - \_\_\_\_$$

$$k + \cancel{\_\_\_\_} - \cancel{\_\_\_\_} = 234 - \_\_\_\_$$

$$k = \_\_\_\_$$

- Efectúa la comprobación, con el fin de saber si el resultado obtenido es el correcto

$$k + 178 = 234 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3\ )$$

$$\_\_\_\_ + \_\_\_\_ = 234$$

$$\_\_\_ = \_\_\_\_ \qquad \checkmark$$

iii. $$\frac{4}{17}+p=-\frac{1}{17}$$ **.................(4)**

$$\frac{4}{17}+p-\_\_\_\_=-\frac{1}{17}-\_\_\_\_$$

$$\cancel{\frac{4}{17}}+p-\cancel{\_\_\_\_}=-\frac{1}{17}-\_\_\_\_$$

$$p=-\_\_\_\_\_$$

➢ Realiza lo necesario para hacer la comprobación, con el propósito de saber si el resultado obtenido es correcto

$$\frac{4}{17}+p=-\frac{1}{17}$$ ....(4)

$$\_\_\_\_+\_\_\_=-\frac{1}{17}$$

$$\frac{4}{17}-\frac{5}{17}=-\frac{1}{17}$$

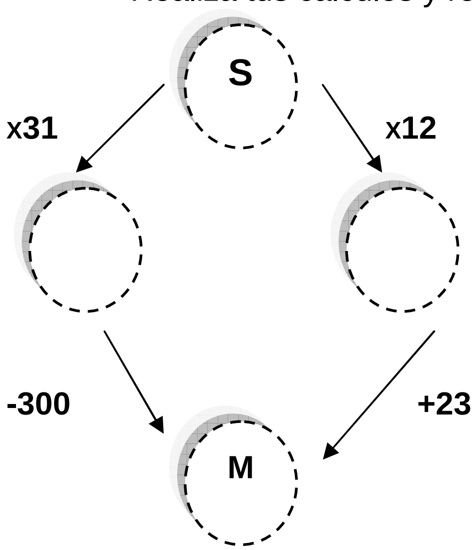
$$-\_\_\_=-\_\_\_\_$$ ✓

5. Actividades complementarias.

1. Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno, comprueba las soluciones.
   - 23 + f = 65
   - 1810 + h = 1997
   - – 15 + l = 23
   - $\frac{2}{3}-j=\frac{7}{4}$
   - $5\frac{1}{4}-b=3$
2. Despeja la incógnita que se indica en cada ecuación.
   - x + y = z, **despeja y**
   - – v + w = 7, **despeja v**
   - m – n = 2, **despeja m**
   - p – q = r, **despeja p**
   - t + 12 = s, **despeja t**
   - a + b = w, **despeja a**
3. Plantea las ecuaciones que corresponden a los siguientes enunciados y resuélvelas.
   - ✓ Gonzalo se quejaba de que si no hubiera gastado $ 5.00, tendría $15.00. ¿Cuánto tiene?
   - ✓ Si al triple de un número se le resta 10, el resultado es 14 ¿De qué número se trata?

VI.II.II CAMINOS O REDUCCIÓN DE ECUACIONES

1. Coloca un número en la salida "S" y sigue las flechas, haciendo las operaciones que se indican, para así llegar a la meta "M". El resultado será distinto según el camino que elijas. Pero hay un número que puesto en S, dará por cualquier camino el mismo resultado en M.
   - Realiza tus cálculos y regístralos en la siguiente tabla.



S	M	
	$1^{er.}$ Camino	**$2^{do.}$ Camino**
0		
5		
8		
10		

Ojo: Para ayudarte en el descubrimiento de este número te servirá aplicar lo que has visto en sesiones anteriores a esta, es decir; interpreta en su forma_______________ siendo esta dicha traducción:_______________

¿Cuál es ese número si pudiste saber cuál es?___________.

- Otra forma de traducir este problema es llevarlo a las famosísimas ecuaciones. Así como se muestra a continuación:

  - ❖ La traducción algebraica del $1^{er.}$ Camino es:

    S (12) + 23 = M

  - ❖ Por otra parte, la traducción del $2^{do.}$ Camino es :

    S (___) – ____ = M

  - ❖ Como ambas traducciones están igualadas a **M** puedes igualarlas.

    12S + 23 = ___S – ____ ....(1)

  - ❖ A continuación procede a resolver la igualdad anterior:

    - ▪ De ambos lados de la igualdad resta **31S:**

      12S + 23 – ___S = ~~___S~~ – 300 – ~~___S~~

- Reduce términos semejantes:

$$-\_\_\_S + 23 = -300$$

- De ambos lados de la igualdad resta **23:**

$$-\_\_\_S + \cancel{23} - \cancel{23} = -300 - \_\_\_\_$$

- Reduce términos semejantes:

$$-19S = -\_\_\_\_$$

- Divide entre 19 ambos lados de la igualdad:

$$\frac{-19S}{-19} = \frac{-323}{-19}$$

- Realiza las operaciones pertinentes, para obtener por fin el número buscado

$$S = \_\_\_\_\_$$

❖ Es necesario que realices la **comprobación**, esta la realizaras con los pasos que se muestran a continuación:

- Sustituye el valor encontrado de la incógnita **S** en la ecuación (1) y Resuelve las operaciones.

$$12S + 23 = 31S - 300 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$12(\_\_\_) + 23 = 31(\_\_\_) - 300$$

$$204 + 23 = \_\_\_\_ - 300$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ = 227 \quad \checkmark$$

- **Por lo tanto el número buscado para el primer ejercicio es ____.**

❖ Como lo habrás notado este planteamiento de los caminos lo ocupas para resolver la reducción de ecuaciones, de donde proseguiremos a solucionar diversas ecuaciones.

2. Resolver la ecuación

$$2x(x + 5) = -x(10 - 2x) + 100 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

➢ Primero efectúa los productos para eliminar los paréntesis:

$$2x(x + 5) = -x(10 - 2x) + 100$$

$$(2x)(x) + (2x)(5) = (-x)(10) + (-x)(-2x) + 100$$

$$2x^2 + 10x = -10x + 2x^2 + 100$$

- En algunos términos de la última ecuación, la incógnita aparece con exponente 2. Sin embargo, éstas se eliminan si se resta $2x^2$ en ambos lados de la igualdad, es decir:

$$\underset{\uparrow}{\text{incógnita}}$$

$$2x^2 + 10x = -\ 10x + 2x^2 + 100$$

$$2x^2 + 10x - 2x^2 = -10x + 2x^2 + 100 - 2x^2$$

$$\cancel{2x^2} + 10x - \cancel{2x^2} = -10x + \cancel{2x^2} + 100 - \cancel{2x^2}$$

$$10x = -10x + 100$$

- Escribe de un lado de la igualdad los términos donde se encuentra la incógnita x.

$$10x + 10x = -10x + 100 + 10x$$

$$20x = -\cancel{10x} + 100 + \cancel{10x}$$

$$20x = 100$$

- Para despejar a la incógnita "x" realiza el producto por el inverso multiplicativo del número 20, ya que este acompaña a la incógnita y es el valor que nos estorba.

$$\left(\frac{1}{20}\right)20x = 100\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$x = \frac{100}{20}$$

X = 5

- Finalmente comprueba que x=5 es la solución de la ecuación sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación (1)

$$2x\,(x + 5) = -x\,(10 - 2x) + 100$$

$$2\,(\mathbf{5})(\mathbf{5} + 5) = -\ \mathbf{5}\,(10 - 2\,(\mathbf{5})) + 100$$

$$10\,(10) = -5\,(10 - 10) + 100$$

$$100 = -5\,(0) + 100$$

$$100 = 100 \quad \checkmark$$

- Como la igualdad se cumple, x = 5 es la solución.

3. **Encuentra la solución de la ecuación** $\frac{7}{x}-\frac{16}{3x}=5$ **……………..…… (2)**

- En este caso, la incógnita aparece en el denominador de dos fracciones. La ecuación se resuelve si ambos miembros se multiplican por 3x. (Es decir el M.C.M de **x** y **3x**).

$$\frac{7}{x}-\frac{16}{3x}=5$$

$$\left(\frac{7}{x}-\frac{16}{3x}\right)(\_\_\_)=5(\_\_\_)$$

$$\frac{21\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{48\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\_\_\_\,x$$

$$\_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 15x$$

- En esta última ecuación obtenida, visualiza que no hay denominadores. Entonces procede a reducirla lo más que se pueda:

$$5 = 15x$$

$$\left(\frac{1}{15}\right)5=\left(\frac{1}{15}\right)15x$$

$$\frac{5}{\_\_}=\frac{15x}{\_\_}$$

$$\frac{1}{3}=\_\_\,x$$

$$\frac{1}{3}=x$$

- Comprueba que $x=\frac{1}{3}$ es la solución de la ecuación, sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación (2).

$$\frac{7}{x}-\frac{16}{3x}=5$$

$$\frac{7}{\frac{1}{3}}-\frac{16}{3\left(\frac{1}{3}\right)}=5$$

$$\frac{7}{\frac{1}{3}}-\frac{16}{\frac{3}{3}}=5$$

- Aplicamos la regla del sándwich:

$$\frac{7\ (\_\_\_)}{1\ (\_\_\_)} - \frac{16}{\_\_} = 5$$

$$\frac{21}{1} - \frac{16}{1} = 5$$

$$21 - \_\_\_\_ = 5$$

$$\_\_\_\_ = 5 \ \checkmark$$

- Como la igualdad se cumple, x = $\frac{(\ )}{(\ )}$ es la solución.

4. Resuelve la ecuación $\frac{4}{x} = \frac{5}{4x-22}$ **................................ (3)**

- Esta ecuación se resuelve si se multiplican ambos miembros por el producto de los denominadores, a saber, (x) (4x − 22):

$$\cancel{(x)}(4x-22)\frac{4}{\cancel{x}} = \frac{5}{\cancel{4x-22}}(x)\cancel{(4x-22)}$$

$$(4x - 22)\ \_\_\_\_ = 5\ (\_\_\_\_)$$

$$4x\ (\ \_\_\ ) - 22(\ 4) = 5x$$

$$\_\_\_x\ - 88 = 5\_\_\_$$

$$16x - 88 - \_\_\_\_x = \cancel{5x} - \cancel{\_\_\_\_x}$$

$$11x - 88 = 0$$

$$11x - \cancel{88} + \cancel{\_\_\_\_\_} = 0 + \_\_\_\_\_\_$$

$$11x = \_\_\_\_\_$$

$$\frac{1}{11}(11x) = 88\ \ (\_\_\_\_)$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{88}{11}$$

X = _____

- Para concluir comprueba que **x=8** es la solución de la ecuación si se sustituye, el valor de la incógnita en la ecuación (3)

$$\frac{4}{x}=\frac{5}{4x-22}$$

$$\frac{4}{\_\_}=\frac{5}{4\left(\_\_\right)-22}$$

$$\frac{4}{\_\_\_\_\_}=\frac{5}{\_\_\_-22}$$

$$\frac{4}{\_\_\_}=\frac{5}{\_\_\_}$$

- Lo cual es equivalente a

$$\_\_/\_\_ = \_\_/\_\_\_. \checkmark$$

- Como la igualdad se cumple, por lo tanto **x=8** es la solución.

5. Actividades complementarias.

i. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $x^2 - 2x + 15 = x + x^2 - 3$
b) $-2x^2 - 3x = x(-2x - 6) - 930$
c) $3x(6x - 5) = 18x^2 + x - 32$
d) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 2x + 3$
e) $(3x - 1)(2x - 2) = 6x^2 - 18$

ii. Determina qué valor de x es la solución de cada ecuación.

a) $2x^2 - 2(8x - 6) = x(2x - 10) - 4x + 2$

x =4 *x = –2* *x = 5* *x = 8*

b) $4x^2 + 2x - 1 = 4x^2$

$x=\frac{1}{4}$ $x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{3}$ $x=\frac{1}{5}$

c) $\frac{-4}{x-4}+5=\frac{6}{x-4}+3$

x = 4 *x =2* *x – 9* *x =9*

iii. Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{16}{x}=8$

b) $\frac{5}{3x}=\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{2x}+\frac{3}{5x}=\frac{1}{10}$

d) $\frac{x+5}{x+4}=\frac{x+1}{x-4}$

VI.II.III IDENTIDADES ARITMÉTICAS

Si en una identidad se tapa un número con el dedo, es posible definir una ecuación como una identidad aritmética que tiene un número oculto,

Ejemplo:

$2 \cdot 7 + 20 = 34$ $\qquad$ $2 \cdot$ ✋ $+ 20 = 34$ $\qquad$ $2 \cdot a + 20 = 34$

Aunque se pudiese plantear la posibilidad de usar varias veces la misma letra, partiendo de una idea en la que el mismo número está escrito varias veces:

Ejemplo:

$$4 \cdot 6 - 8 = 5 \cdot 8 - 24$$

Observemos que, el que se repite es el 8, entonces al sustituir una letra en ambos lados de la igualdad resulta la siguiente ecuación;

$$4 \cdot 6 - a = 5 \cdot a - 24$$

Estas identidades aritméticas son mejor conocidas con el nombre de ecuaciones a continuación verás ejemplos y ejercicios de una serie de ecuaciones lineales, en otras palabras, de exponente 1.

1. **Los siguientes problemas se resuelven con una ecuación lineal:**

   i. Juan nació cuando su mamá tenía 28 años. Actualmente, la edad de la mamá de Juan es el triple que la de éste. ¿Cuántos años tiene Juan?

   - Si la "**x**" es la edad de Juan, la de su mamá es:

     $$\mathbf{28 + x.}$$

   - Por otro lado, la edad de la mamá de Juan tiene el triple de años que su hijo; es decir,

     $$\mathbf{3x}.$$

   - Si se igualan estas expresiones algebraicas, se obtiene la siguiente ecuación.

     $$\mathbf{3x = 28 + x}$$

- Esta ecuación se resuelve despejando **x** de la siguiente manera:

  Se resta x en ambos miembros de la ecuación → $3x - x = 28 + \cancel{x} - \cancel{x}$

  Se reducen términos semejantes. → $2x = 28 + 0$

  $2x = 28$

  Se divide entre 2 ambos miembros de la ecuación. → $\frac{2x}{2} = \frac{28}{2}$

  Se realizan las operaciones**.** → **x = 14**

- Se **comprueba** que **x =** ___ es la solución, para las edades de Juan y su mamá, sustituyendo el valor encontrado en la ecuación que dedujiste la cual llamaremos (1):

3x = 28 + x…………(1)

3 (__) = 28 + ___

42 = 28 + ___

42 = _____ ✓

Por lo tanto, como la igualdad se cumple la edad de Juan es 14 años.

ii. Un tren salió de una ciudad a una velocidad de 50 km por hora. Tres horas más tarde, salió otro del mismo punto y en la misma dirección. Si el segundo tren iba a 75 km por hora. ¿Cuánto tiempo tardó en alcanzar al primero?

- Si **x** representa las horas que ha viajado el segundo tren, el primer tren ha viajado:

  (x + 3) horas, por el tiempo que lleva de ventaja.

- La distancia recorrida en el tiempo **x** por el segundo tren es:

  75x

- Y la distancia del primero es

  50 (x + 3)

- Cuando el segundo tren alcance al primero, las distancias recorridas serán iguales ; la ecuación que describe esto es:

____x = 50 (___ + ____)

- Primero para resolverla, tienes que eliminar los paréntesis efectuando el producto descrito.

$$\mathbf{75x = \_\_\_\_x + (\_\_\_)(\_\_\_\_)}$$

$$\mathbf{75x = 50x + \_\_\_\_\_}$$

- De esta última ecuación se despeja x:

Se resta 50x en ambos miembros → $75x - \_\_\_x = \cancel{50x} + 150 - \cancel{\_\_\_x}$

Se reducen términos semejantes. → $25\,x = \_\_\_\_\_\_$

Se dividen ambos miembros entre 25. → $\dfrac{25x}{\_\_\_} = \dfrac{150}{\_\_\_}$

$$\mathbf{x = \_\_\_}$$

- Se puede comprobar que **x =** ___ es la solución, para los trenes si se sustituye el valor de la incógnita en la ecuación inicial

$$\mathbf{75x = 50\,(x + 3)}$$

$$\mathbf{75\,(\;\_\_\;) = 50\,(\_\_ + 3)}$$

$$\mathbf{\_\_\_\_ = 50\,(\_\_)}$$

$$\mathbf{450 = \_\_\_\_} \quad \checkmark$$

En conclusión el segundo tren alcanzará al primero en 6 horas.

2. Resolver la ecuación 27x – (3x – 9) = 3 (x + 10)……………………… (1)

- Se eliminan los paréntesis

$$27x - \_\_\_x\ \_\_\_9 = \_\_\_x + 30$$

- Se reducen términos semejantes.

$$\_\_\_x + 9 = \_\_\_x + 30$$

- Se resta 3x en ambos miembros.

$$\_\_\_x + 9 - \_\_\_\mathbf{x} = \cancel{\_\_\_x} + 30 - \cancel{\_\_\_\mathbf{x}}$$

- Se reducen términos semejantes.

$$\_\_\_x + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

- Se resta 9 en ambos miembros.

$$\_\_\_x + \cancel{9} - \cancel{\_\_\_} = 30 - \_\_\_\_$$

- Se reducen términos semejantes.

___x = 21

- Se dividen ambos miembros entre 21

$$\frac{21x}{21} = \frac{21}{21}$$

x = _____.

➢ Finalmente comprueba que **x =** ___ es la solución de la ecuación si se sustituye el valor de la incógnita en la ecuación (1)

27x – (3x – 9) = 3 (x + 10)…………………. (1)

27(__) – (3(__) – 9) = 3 (___ + 10)

___ – (__ – 9) = __ (11)

_____ – (___) = _____

___ + 6 = _____

33 = ______ ✓

➢ Como la igualdad se cumple, **x = 1** es la solución.

3. Resolver la ecuación 5 (4x – 1) – 2 (5x – 5) = 20 (x + 1)……………. (2)

- Se eliminan los paréntesis

__x - ___ - ___x ___10 = ___x + 20

- Se reducen términos semejantes

___x + ___ = ___x + 20

- Se resta 20x en ambos miembros.

___x + 5 **–** ___**x** = $\cancel{\_\_\_x}$ + 20 **–**$\cancel{\_\_\_\mathbf{x}}$

- Se reducen términos semejantes.

-___x + _____ = ______

- Se resta 5 en ambos miembros.

-___x + $\cancel{5}$ **–**$\cancel{\_\_\_}$ = 20 **–** _____

- Se reducen términos semejantes.

–___x = ___

- Se dividen ambos miembros entre -10

$$\frac{-10x}{-10} = \frac{15}{-10}$$

$$x = -\frac{\_\_}{\_\_}$$

- Por último, comprueba que $x = -\frac{\_\_}{\_\_}$ es la solución de la ecuación

si se sustituye el valor de la incógnita en la ecuación (1)

5 (4x – 1) – 2 (5x – 5) = 20 (x + 1)…………….…..(2)

5 (4(___) – 1) – 2 (5(___) – 5) = 20 (____ + 1)

5 (____ – 1) – 2 (____ – 5) = 20 (____) +20 (1)

5 (___) – 2 (____) – ___ (–5) = ____ + _____

____ + ___ + 10 = – 30 + 20

–35 +____ = ______

– ____ = – ____ ✓

➢ Como la igualdad se cumple, $x = -\frac{3}{2}$ es la solución.

4. Actividades complementarias.

i. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones lineales.

a) 2x –7 = – 8 + x

b) – x + 15 = 5x – 45

c) 13 – 4x = – 6x + 17

d) 120 + 36x = – 12x

e) 39 – 15x = – 31 – 5x

ii. Resuelve en tu cuaderno las ecuaciones; elimina primero los paréntesis.

a) $3 (x + 12) = 2 (x – 1)$

b) $2\left(4x-\frac{1}{2}\right)=3\left(x-\frac{6}{3}\right)$

c) $51 (x + 3) + 9x – 23 = 20 (4x + 8)$

d) $63\left(5x+\frac{4}{9}\right)=6\left(50x-\frac{1}{3}\right)$

e) $3 (16x + 4) = 3 (34 + x)$

iii. Resuelve los siguientes problemas.

a) Raúl tiene 21 años y su padre 52 ¿En cuántos años la edad de Raúl será la mitad que la de su padre? [Sugerencia: si se llama **x** al número de años en que la edad de Raúl será la mitad de la de su padre, entonces 21 + x = 1 (52 + x)]. (ARRIAGA, 2008, pág. 67)

b) Un ciclista sale de una ciudad a 40 km por hora y dos horas más tarde sale tras él un automóvil a una velocidad de 90 km por hora. ¿Cuánto tardará el automóvil en alcanzar al ciclista? (ARRIAGA, 2008, pág. 67)

VI.II.IV EVALUACIÓN DE ECUACIONES

Nombre del alumno: __________________ Grupo:_______ Calificación_____

Nombre del profesor: _________________ Fecha: ____________ Puntos:____

INSTRUCCIONES: Lee y analiza cuidadosamente lo que se te pide para que contestes correctamente.

1. Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno; comprueba las soluciones:
   a) $x + 13 = 0$
   b) $y + 178 = 234$
   c) $8 + z = -15$
   d) $\frac{4}{17} + w = -\frac{1}{17}$
   e) $-\frac{5}{9} + u = -\frac{3}{8}$

   10 PUNTOS

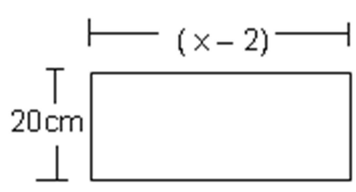
2. Agrupa los términos semejantes y resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $3x – 2x + 7 = 11$
   b) $4x + 5 – 3x – 8 = 7$
   c) $5x – x + 6 = 2$
   d) $5x – 2x = 4 –1$
   e) $3x – 2x – 4 = 8$

   20 PUNTOS

3. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones lineales; elimina primero los paréntesis.
   a. $5x = 4 (x + 17)$
   b. $3 (16x + 4) = 3 (34 + x)$
   c. $– (17x + 18) + 2 (9 + 8x) = 5 (x + 1) + 7$
   d. $– 2 (5 – x) = 5 (x + 7)$
   e. $3x + 3 = 2 (7x – 15)$

   30 PUNTOS

4. Resuelve los siguientes problemas.
   a) José y su hermano ahorraron $152. Si José contribuyó con $22 más que su hermano, ¿cuánto dinero aportó? (Sugerencia: si llamas **x** al dinero de José, el dinero de su hermano es **x – 22.)** (BRISEÑO, 1997, pág. 72)
   b) El área del siguiente rectángulo es 60 cm2. ¿Cuánto vale **x**?



   c) El perímetro de un rectángulo es 96 m; si el ancho mide las 3/5 partes de largo, ¿cuáles son las dimensiones?

   30 PUNTOS

VI.III SISTEMAS DE ECUACIONES

VI.III.I MÉTODO GRÁFICO Y NÚMERO DE SOLUCIONES

Para resolver este sistema de ecuaciones es preciso, recordar que en una ecuación lineal con dos incógnitas (**x** y **y**) se puede escribir de la forma **y = mx + b** si se despeja **y**.

Por ejemplo, el resultado de despejar **y** en **4x+y=8**, es la ecuación **y = -4x+8.**

Ejemplo 1.

¿Cómo resolver un sistema de ecuaciones por medio del método gráfico?

Sea **3x + y = 6……………………………(1)**

3x – 4y = -9 …………………………(2)

- Las ecuaciones del sistema, pueden expresarse de la forma **y = mx + b** si se despeja **y:**

y = 6 – 3x ……………………………(3)

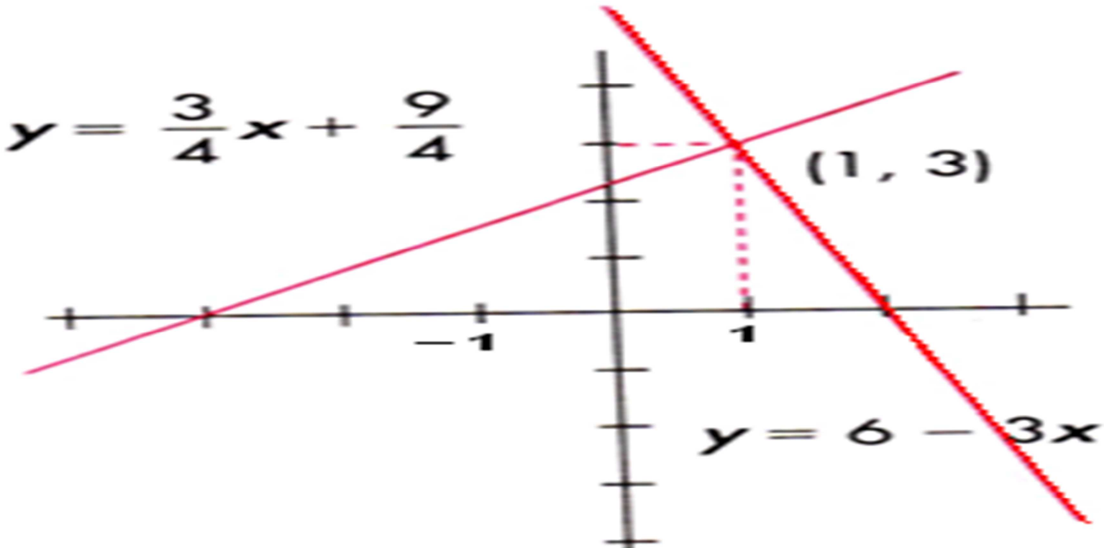
$$y=\frac{3x}{4}+\frac{9}{4} \quad \text{…………………………………(4)}$$

- Para graficar estas ecuaciones, elabora las tablas de las ecuaciones (3) y (4).

y = 6 – 3x	
X	**Y**
-1	**y** = 6 – 3 ***(-1)*** = 6 + 3 **= 9**
0	**y** = 6 – 3 ***(0)*** = 6 – 0 **= 6**
1	**y** = 6 – 3 ***(1)*** = 6 – 3 **= 3**
2	**y** = 6 – 3 ***(2)*** = 6 – 6 **= 0**

$y=\frac{3x}{4}+\frac{9}{4}$	
x	**y**
-1	$y=\frac{3}{4}(-1)+\frac{9}{4}=-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=\frac{6}{4}$
0	$y=\frac{3}{4}(0)+\frac{9}{4}=\frac{0}{4}+\frac{9}{4}=0+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$
1	$y=\frac{3}{4}(1)+\frac{9}{4}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=\frac{12}{4}=3$
2	$y=\frac{3}{4}(2)+\frac{9}{4}=\frac{6}{4}+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$

Con estas coordenadas que obtuviste se grafica el sistema de ecuaciones dado:



x y

- Como el punto de coordenadas **(1, 3)** es común en ambas rectas, entonces las coordenadas de este punto satisface las dos ecuaciones, confirma si la afirmación es correcta sustituyendo el punto en las ecuaciones (3) y (4).

Comprobación

y = 6 – 3x ………(3)	**3 =** 6 – 3 **(1) = 6 – 3 = 3**
$y = \frac{3x}{4} + \frac{9}{4}$ **……….(4)**	**3** $= \frac{3}{4}(1) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} =$ **3**

Por lo tanto el punto **(1, 3)** es solución también de la ecuación (1) y (2).

Comprobación

3x + y = 6……………(1)	3 (**1**) + **3** = 3 + 3 = **6**
3x – 4y = -9 …………(2)	3 (**1**) – 4 (**3**) = 3 – 12 = **– 9**

Ejemplo 2.

Resuelve con el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones:

5x – 2y = – 2 …………….. (1)   2x – y = 0 ………………..(2)

- Las ecuaciones del sistema se expresan en la forma **y=mx+b** despejando a **y:**

-2y = – 2 –_____   **–** y = 0 – _____

$y = -\frac{2}{\_\_} - \frac{5x}{\_\_}$ **y = 2x …………. (4)**

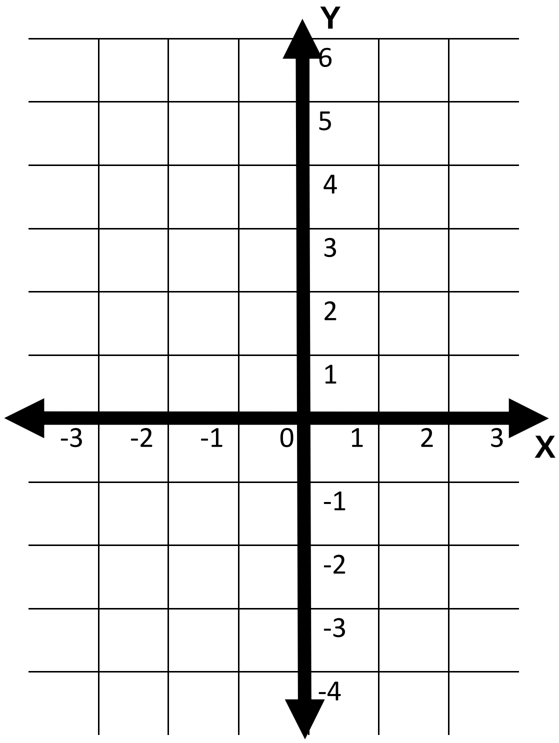
$y = 1\_\_\frac{5x}{2}$ **…………….. (3)**

- Para graficar estas ecuaciones, procede a elaborar las tablas de las ecuaciones (3) y (4).

$y = 1 + \frac{5x}{2}$	
X	**Y**
-1	$y = 1 + \frac{5}{2}(\_\_\_) = \frac{2}{2} - \frac{5}{2} = \frac{}{2}$
0	$y = 1 + \frac{5}{2}(0) = \frac{2}{2} + \frac{0}{2} = \frac{2}{2} + 0 = 1$
2	$y = 1 + \frac{5}{2}(2) = \frac{2}{2} + \frac{10}{2} = \frac{}{2} = 6$

y = 2x	
x	**y**
-1	**y** = 2 (__) = ____
1	**y** = 2 (__) = __
2	**y** = ____ (*2*) = 4

Con estas coordenadas que obtuviste, grafica el sistema de ecuaciones dado (Alarga las rectas para encontrar el punto donde se intersectan e identifica cada una con su nombre):



- Como el punto de coordenadas **(____,____)** es común en ambas rectas, entonces las coordenadas de este punto satisface las dos ecuaciones, analiza si la afirmación es correcta sustituyendo el punto en las ecuaciones (3) y (4).

Comprobación

$y = 1\_\_\_\frac{5x}{2}$ **………(3)** $\qquad -4 = 1 + \frac{5}{2}(\_\_) = 1 + \frac{\;}{2} = 1 - \frac{10}{2} = 1 - \_\_\_ = -4$

y = 2x …………….. (4) $\qquad$ ___ **=** ___ **(– 2) = –** __

Por lo tanto el punto **(– 2 , – 4)** es solución también de la ecuación (1) y (2).

Comprobación

5x – 2y = – 2 …………….. (1) $\qquad$ 5 **(– 2)** – 2 (__) = – 10 ___ 8 = __

2x – y = 0 …………………(2) $\qquad$ 2 **(** ___ **)** – **(– 4)** = ___ + 4 = ___

Ejemplo 3.

Resuelve con el método grafico el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$3x + 3y = 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

- Las ecuaciones del sistema pueden expresarse de la forma **y=mx+b** si se despeja **y:**

y = 1 – ______ ………….. (3)

3y = 3 – ___

$$y = \frac{3}{3} - \frac{3x}{3}$$

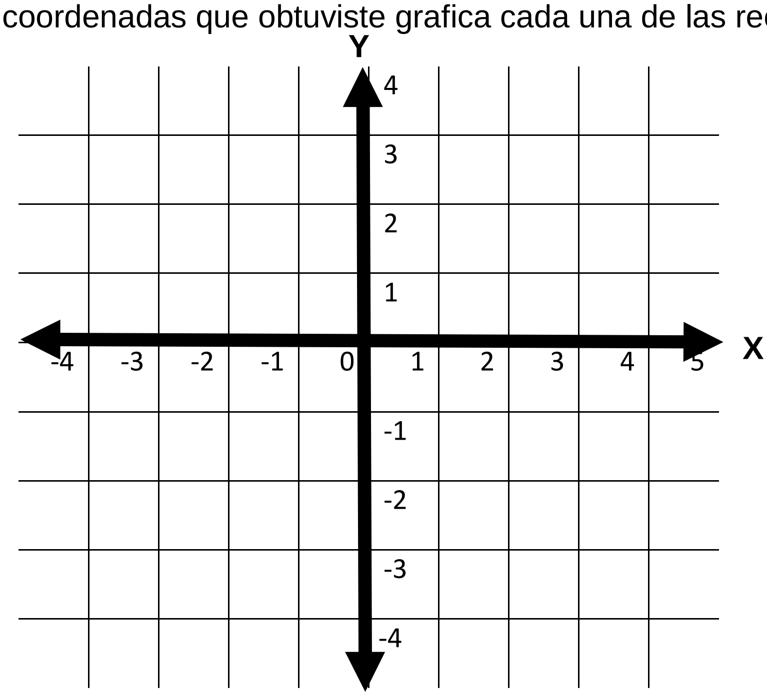
y = 1 – x ………. (4)

- Para graficar estas ecuaciones, procede a elaborar las tablas de las ecuaciones (3) y (4).

y = 1 – x	
x	**Y**
-1	**y** = 1 **–** (__) = ___ + ___ **= 2**
0	**y** = ___**–** (*0*) **=** __

y = 1 – x	
x	**y**
0	**y** = ___**–** (*0*) **=** __
1	**y** = 1 **–** (__) **= 0**
2	**y=** ____ **– (2) =**

Con estas coordenadas que obtuviste grafica cada una de las rectas:



- Nótese que las dos ecuaciones del sistema determinan la misma recta. Como **no existe un único punto de intersección**, el sistema de ecuaciones tiene muchas soluciones, determinadas por los valores de **las coordenadas de cualquier punto de la reta.**

- Comprueba lo dicho anteriormente, tomando una pareja de puntos que estén sobre la recta, en las ecuaciones (3) y (4):

Sea el punto (___, – 1)	**Comprobación**
y = 1 – x………….. (3)	**– 1 = 1 – ___ = _____**
y = 1 – x ……….... (4)	**– 1 = 1 – ___ = _____**

Por lo tanto el punto **(___,– 1)** es solución también de la ecuación (1) y (2).

	Comprobación
x + y = 1 …………….. (1)	**2 - 1 = ___**
3x + 3y = 3 ………. (2)	**3 (__) + 3 (____) = ___ – 3 = ____**

Ejemplo 4.

Resuelve con el método grafico el siguiente sistema de ecuaciones:

5x + 4y = 9 …………….. (1) **5x + 4y = 12 …………………(2)**

- Las ecuaciones del sistema se expresan en la forma **y=mx+b** despejando a **y:**

4y = 9 –_____ 4y = 12 –_____

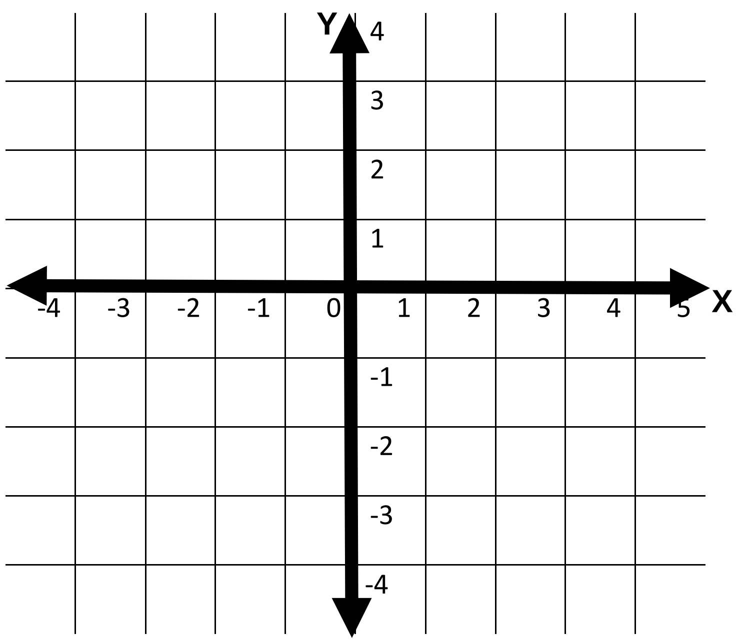
$y = \frac{9}{4} - \frac{5x}{4}$ **……… (3)** $y = \frac{12}{4} - \frac{5x}{4}$ **……… (4)**

- Para graficar estas ecuaciones, procede a elaborar las tablas de las ecuaciones (3) y (4).

$y = \frac{9}{4} - \frac{5x}{4}$	
x	**y**
0	
2	

$y = \frac{12}{4} - \frac{5x}{4}$	
x	**Y**
-1	
1	

Con estas coordenadas que obtuviste, grafica el sistema de ecuaciones descrito. (Distingue con su nombre a cada recta dibujada en el plano)



- Observa que las rectas que acabas de dibujar son _______________, entonces, no poseen un punto en común, pues son *paralelas* entre sí. Como no hay puntos comunes, **el sistema no tiene solución**.

Ejercicios.

1. **Resuelve con el método gráfico los siguientes sistemas de ecuaciones.**

   a) $x + y = 2$
      $3x - 2y = 1$

   b) $4x + 5y = 10$
      $6x - 7y = -14$

   c) $3x - y = 5$
      $8x - 4y = 4$

2. **Determina si cada sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, muchas soluciones o carece de solución. ¿Y cuántas raíces tiene?**

   a) $3x + 2y = 1$
      $x + y = 2$

   b) $x + y = 1$
      $-x - y = -1$

   c) $x + 2y = 1$
      $-2x - y = -1$

   d) $x + y = 1$
      $x - y = 1$

3. ¿Mínimo cuantos puntos necesitas para dibujar una recta en el plano?

VI.III.II MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Observa los pasos que debes seguir para resolver los sistemas de ecuaciones por este método.

Ejemplo 1.

¿Cómo resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución?

Sea $3x - 2y = 1$ ……………….. (1)

$x + y = 2$ ……………….. (2)

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

1. Se despeja **y** en una ecuación; por ejemplo, en la (2):

   $$y = 2 - x$$

   De esta forma, se obtiene **y** expresada en función de **x**.
2. En la ecuación (1), se sustituye **y**, y se realizan las operaciones pertinentes :

   $$3x - 2y = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

   $$3x - 2(2 - x) = 1$$

   $$3x - 4 + 2x = 1$$

   $$5x - 4 = 1$$
3. Se despeja **x** :

   $$5x = 1 + 4$$

   $$5x = 5$$

   $$x = \frac{5}{5}$$

   $$x = 1$$
4. Se sustituye el valor de **x,** determinando mediante el paso anterior, en la ecuación obtenida el despejar **y** en el paso 1:

   $$y = 2 - x$$

   $$y = 2 - 1$$

   $$y = 1$$

   De modo que **x = 1** y **y = 1** es la solución del sistema de ecuaciones.

5. Para confirmar que **x=1** y **y=1** son soluciones, realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

   $3x - 2y = 1$ ……. (1) $\qquad 3(1) - 2(1) = 3 - 2 = 1$

   $x + y = 2$ ……. (2) $\qquad 1 + 1 = 2$

Ejemplo 2.

Sea $2x + y = 6$ ………………… (1)

$x + 4y = 17$ ………………… (2)

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

1. Se despeja **y** en una ecuación; por ejemplo, en la (1):

   y = 6 – _____

   De esta forma, se obtiene **y** expresada en función de **x**.

2. En la ecuación (2), se sustituye **y**, y se realizan las operaciones pertinentes :

   x + 4y = 17 ………… (2)

   x + 4 (____ – ___) = 17

   x + ____ – ___ = 17

   –__x + 24 = 17

3. Se despeja **x** :

   –7x = 17 – ____

   –7x = –___

   $$x = \frac{-7}{-7}$$

   ***x* = ___**

4. Se sustituye el valor de **x,** determinando mediante el paso anterior, en la ecuación obtenida el despejar **y** en el paso 1:

   y = 6 – 2x

   y = 6 – 2 (___)

   y = 6 – ___

   y = ____

   De modo que **x = 1** y **y = 4** es la solución del sistema de ecuaciones.

5. Para confirmar que **x=1** y **y=4** son soluciones, realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

   2x + y = 6 ……. (1)   **___ (1) + ___ = ___ + ___ = 6**

   x + 4y = 17 ….. (2)   **___ + 4 (___) = ___ + 16 = 17**

   Nota: *El procedimiento también es válido si en el primer paso se despeja **x** en lugar de **y**.*

Ejemplo 3.

Sea **4x – 2y = 20 ………………. (1)**

x + y = – 1 ………………. (2)

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

1. Se despeja **x** en una ecuación; por ejemplo, en la (2):

   x = – __ – ___

   De esta forma, se obtiene **x** expresada en función de **y**.

2. En la ecuación (1), se sustituye **x**, y se realizan las operaciones pertinentes :

   4x – 2y = 20 ………. (1)

   4 (– 1 – y) – 2y = 20

   – __ – 4y – ___ = 20

   – 4 – ___ = 20

3. Se despeja **y** :

   – 6y = 20 + ___

   – 6y = _____

   $$y = -\frac{24}{6}$$

   ***y* = – _____**

4. Se sustituye el valor de **y,** determinando mediante el paso anterior, en la ecuación obtenida el despejar **x** en el paso 1:

   x = – 1 – y

   x = – _____ – (___)

   x = – 1 ___ 4

   x = ___

   De modo que **x=3** y **y=–4** es la solución del sistema de ecuaciones.

5. Para confirmar que **x=** ___ y **y=** _____ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

4x – 2y = 20 ……. (1) **4 (___) – 2 (___) = 12 __ 8 = ___**

x + y = – 1 ….. (2) **___ + (___) = 3 – ___ = ___**

Ejemplo 4.

Dos números cumplen estas condiciones: el doble del primero más el triple del segundo, es igual que 8 y el triple del primero menos el doble del segundo es igual que –14, ¿Cuáles son los números?

Si **x** es el primer número y **y** el segundo, por la primera condición del problema

2x + 3y = 8 ……………….. (1)

y por la segunda,

3x – 2y = –14 ……………….. (2)

Siendo estas las ecuaciones que modelan el problema anterior procederemos a resolverlas para hallar los números deseados.

1. Se despeja **x** en una ecuación; por ejemplo, en la (1):

2x = 8 – ___

$$x = \frac{8-3y}{\_\_\_}$$

De esta forma, se obtiene **x** expresada en función de **y**.

2. En la ecuación (2), se sustituye **x**, y se realizan las operaciones pertinentes :

3x – 2y = –14 ………… (2)

$$3\left(\frac{8-3y}{2}\right) - \_\_\_\_ = -14$$

$$\frac{24-9y}{2} - 2y = -\_\_\_\_\_$$

Para quitar el 2 del denominador multiplica toda la igualdad por 2.

$$\_\_ \left(\frac{24-9y}{2} - 2y\right) = (-14)\ \_\_\_$$

24 – 9y – 4y = – ____

–____ y + 24 = –28

3. Se despeja **y** :

–13y = –28 – ____

–13y = –____

$$y = \frac{-52}{-13}$$

***y* = ______**

4. Se sustituye el valor de **y,** determinando mediante el paso anterior, en la ecuación obtenida al despejar **x** en el paso 1:

$$x = \frac{8-3y}{2}$$

$$x = \frac{8-3\,(\_\_)}{2}$$

$$x = \frac{8-12}{2}$$

$$x = -\frac{\_}{2}$$

x = –_____

De modo que **x=–2** y **y=4** es la solución del sistema de ecuaciones.

5. Para confirmar que **x=** _____ y **y=** ______ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

2x + 3y = 8 ……. (1) **2 (____) + 3 (____) = – 4 + ____ = __**

3x – 2y = – 14 ….. (2) **__ (– 2) – 2 (__) = – __ – ____ = __**

Ejercicios.

1. Resuelve en tu cuaderno, con el método de sustitución estos sistemas de ecuaciones lineales.

   a. 2x + y = 1
   5x – y = –15

   b. 5x + 4y = 8
   17x + y = 2

   c. 20x = 3y + 7
   8y = 12x + 2

   d. 6x – 7y = –5
   2x – 5y = –15

2. Soluciona los siguientes problemas en tu cuaderno; plantea un sistema de ecuaciones para cada uno.

   a. La suma de dos números es 45 y la diferencia es 25.¿Cuáles son los números? (MARTÍNEZ, 1997, pág.101)

   b. Tres veces la edad de Juan más dos veces la edad de José es 55, y la suma de las dos edades de ambos es 21. Calcula las edades de Juan y José. (MARTÍNEZ, 1997, pág. 101)

   c. Cuatro cajas de galletas y tres de dulces cuestan $99; tres cajas de galletas y una de dulces vales $58¿Cuál es el precio de cada artículo?

VI.III.III MÉTODO DE IGUALACIÓN

Observa los pasos que debes de seguir para resolver los sistemas de ecuaciones por este método.

Ejemplo 1.

¿Cómo resolver un sistema de ecuaciones por el método de igualación?

Sea **5x + y = –11** ……………….. **(1)**

–2**x** – **6y = 38** ……………….. **(2)**

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

- Se despeja **y** en ambas ecuaciones:

y = – 11 – 5x

–6y = 38 + 2x $\rightarrow$ $y = \frac{38+24x}{-6}$ $\rightarrow$ $y = \frac{19+2x}{-3}$

- Se igualan los valores de **y** encontrados en el inciso anterior para obtener una ecuación lineal con una incógnita.

$$-11-5x = \frac{19+x}{-3}$$

- Se realizan las operaciones pertinentes para despejar a **x**.

–3 (– 11 – 5x) = 19 + x

33 + 15x = 19 + x

15x – x = 19 – 33

14x = –14

$$x = -\frac{14}{14}$$

x = –1

- Se sustituye el valor de **x** en alguna de las ecuaciones encontradas en el primer paso; por ejemplo, en la ecuación:

y = – 11 – 5x

y = – 11 – 5 (– 1)

y = –11 + 5

y = – 6

- Por lo tanto, la solución del sistema es **x=–1** y **y=– 6**.

- Para confirmar que **x=–1** y **y =–6** son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

5x + y = –**11** **…….. (1)** **5 (–1) + (– 6) = – 5 – 6 = – 11**

–2**x** – **6y = 38** **…….. (2)** **– 2 (– 1) – 6 (– 6) = 2 + 36 = 38**

Ejemplo 2.

Sea **2x + y =** 6 **……………….. (1)**

x + **4y = 17** **……………….. (2)**

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

- Se despeja **y** en ambas ecuaciones:

y = ___ – __x

4y = 17 __ x → $y = \frac{17 - x}{4}$

- Se igualan los valores de **y** encontrados en el inciso anterior obteniendo así una ecuación lineal con una incógnita.

$$\_\_\_ - 2x = \frac{17 - x}{4}$$

- Se realizan las operaciones pertinentes para despejar a **x**.

4 (___ – 2x) = ___ – x

24 – 8x = 17 – x

– 8x __ x = 17 – 24

–___x = –___

$$x = \frac{-7}{-7}$$

x = 1

- Se sustituye el valor de **x** en alguna de las ecuaciones encontradas en el primer paso; por ejemplo, en la ecuación:

$$\mathbf{y = 6 - 2x}$$

$$\mathbf{y = 6 - 2\ (\ \_\_\_\_\ )}$$

$$\mathbf{y = 6\ -\ \_\_\_}$$

$$\mathbf{y = \_\_\_\_\_}$$

- Por lo tanto, la solución del sistema es **x=1** y **y=4**.

- Para confirmar que **x=** ___ y **y=** ___ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

2x + y = 6	**…….. (1)**	**2 (___) + (____) = 2 + __ = 6**
x + **4y = 17**	**…….. (2)**	**___ + 4 (___) = __ + ____ = 17**

Nota: *El procedimiento también es válido si en el primer paso se despeja* ***x*** *en lugar de* ***y****.*

Ejemplo 3.

Sea

$$\mathbf{x + y = -9} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1)}$$

$$\mathbf{x - y = 7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(2)}$$

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

- Se despeja **x** en ambas ecuaciones:

$$\mathbf{x = -\ \_\_\_ - y}$$

$$\mathbf{x = 7 +\ \_\_\_}$$

- Se igualan los valores de **x** encontrados en el inciso anterior, para obtener una ecuación lineal con una incógnita.

$$\mathbf{-9 - y = 7 + y}$$

- Se realizan las operaciones pertinentes para despejar a **y**.

,

$$\mathbf{-y -\ \_\_\_ = 7 + 9}$$

$$\mathbf{-\_\_\_y =\ \_\_\_}$$

$$y = \frac{16}{-2}$$

$$\mathbf{y = -\ \_\_\_}$$

- Se sustituye el valor de **y** en alguna de las ecuaciones encontradas en el primer paso; por ejemplo, en la ecuación:

x= – 9 – y

x= – __ – (– ____)

x = – 9 + 8

x = –_____

- Por lo tanto, la solución del sistema es **x= –1** y **y= –8**.
- Para confirmar que **x= –1** y **y= –8** son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

x + y = –9	**…….. (1)**	**–1 + (– ___) = – 1 – ___ = – ___**
x – y = 7	**…….. (2)**	**____ – (– ____) = –1 + 8= ______**

Ejemplo 4.

El perímetro del marco de una pintura mide 16 centímetros. Si el largo es el triple del ancho, ¿cuáles son las dimensiones del marco?

Se llamará **x** al largo del marco y **y** al ancho. De donde se deduce que:

El perímetro es 16 cm; **2x + 2y = 16** ………………. **(1)**

El largo es el triple del ancho **x = 3y**. ………………. **(2)**

Los pasos para encontrar la solución a este sistema son los siguientes:

- Se despeja **x** en ambas ecuaciones:

2x = 16 – 2y $\longrightarrow x=\frac{16-2y}{2} \longrightarrow x=\frac{16}{2}-\frac{2y}{2}=8-y$

x = 3y

- Se igualan los valores de **x** encontrados en el inciso anterior, para obtener una ecuación lineal con una incógnita.

3y = 8 – y

- Se realizan las operaciones pertinentes para despejar a **y**.

3y + __ = 8

__ y = 8

$$y=\frac{8}{4}$$

y = _____

- Se sustituye el valor de **y** en alguna de las ecuaciones encontradas en el primer paso; por ejemplo, en la ecuación

$$\mathbf{x = 3y}$$

$$\mathbf{x = 3\,(\ \_\_\_\ )}$$

$$\mathbf{x = \_\_\_}$$

- Por lo tanto, la solución del sistema es **x=6** y **y=2**.
- Para confirmar que **x=** ____ y **y=** ___ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

2x + 2y = 16	**…….. (1)**	**2 (___) + 2 (___) = ___ + 4 = ___**
x = 3y	**…….. (2)**	**6 = 3 (___) = ____**

Ejercicios.

1. Resuelve los sistemas con el método de igualación.

   a. $6x - y = 10$
      $9x - 4y = -5$
   b. $6x + 9y = 39$
      $-2x + 2y = -18$
   c. $x + y = 1$
      $5x - 3y = 4$
   d. $8x - 3y = -5$
      $4x - y = 1$

2. Plantea un sistema de ecuaciones para cada problema y resuélvelo con el método de igualación.

   a. El precio de 4 metros de lino y 5 de pana es $ 1275, y el de 5 metros de lino y 4 de pana es $1290 ¿Cuánto cuesta el metro de lino y de pana?

   b. Cuáles son las dimensiones de un rectángulo que tiene 72 cm de perímetro si la base es 3cm mayor que la mitad de la altura?

VI.III.IV MÉTODO DE SUMA Y RESTA

El **método de suma y resta,** consiste en realizar operaciones con las ecuaciones de un sistema para eliminar una de las variables, a fin de encontrar una ecuación lineal con una incógnita.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema

$$\mathbf{2x + 3y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)}$$

$$\mathbf{-2x + 2y = -18 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$

- El coeficiente de **x,** es decir, el número que lo multiplica, en las dos ecuaciones es igual pero de signo contrario. Como las ecuaciones son igualdades, se suman miembro a miembro como sigue:

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x + 3y = 13 \\
+ & \underline{-2x + 2y = -18} \\
 & 0 + 5y = \mathbf{-5}
\end{array}
$$

- El resultado es una ecuación lineal con una sola incógnita, que se resuelve así:

$$\mathbf{5y = -5}$$

$$y = -\frac{5}{5}$$

$$\mathbf{y = -1}$$

- Si se sustituye el valor de **y** en cualquiera de las ecuaciones originales, se encuentra el valor de **x**. Por ejemplo, en la ecuación (1):

$$\mathbf{2x + 3y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)}$$

$$\mathbf{2x + 3(-1) = 13}$$

$$\mathbf{2x - 3 = 13}$$

$$\mathbf{2x = 13 + 3}$$

$$\mathbf{2x = 16}$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$\mathbf{x = 8}$$

- La solución de sistema de ecuaciones es la pareja **x=8** y **y = –1**.

- Para confirmar que **x=8** y **y= –1** son soluciones, realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

2x + 3y = 13 …… (1)	**2 (8) + 3 (–1) = 16 – 3 = 13**
–2x + 2y = – 18 …. (2)	**– 2 (8) + 2 (– 1) = – 16 – 2 = – 18**

Ejemplo 2.

Si una incógnita, tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones de un sistema, éstas se restan para eliminar la incógnita. Por ejemplo:

Resolver el sistema

4**x + 9y = – 8 ………………… (1)**

3x + 9y = – 15………………….. (2)

- Como la incógnita **y** tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, éstas se restan miembro a miembro:

$$\begin{array}{rl} - & 4x + 9y = -8 \\ & \underline{3x + 9y = -15} \\ & x + 0 = \mathbf{7} \end{array}$$

- El resultado es una ecuación lineal con una sola incógnita, la cual nos da el valor de **x:**

x = ______

- Se sustituye el valor de **x** en cualquiera de las ecuaciones originales, y encuentra el valor de **y**. Por ejemplo, en la ecuación (2):

3x + 9y = – 15………………. (2)

3(____) + 9y = – 15

____ + 9y = – 15

9y = – 15 – ____

9y = – ______

$$y = -\frac{36}{9}$$

y = – ______

- La solución de sistema de ecuaciones es la pareja **x=** ___ y **y= –** ___.

- Para confirmar, que **x=7** y **y= –4** son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

4x + 9y = – 8 …… (1) **4 (____) + 9 (–__) = 28 – ___ = ____**

3x + 9y = – 15 …. (2) **3 (___) + 9 (– 4) = ___ – __ = – 15**

Ejemplo 3.

Si en un sistema de ecuaciones, ninguna de las dos incógnitas tiene el mismo coeficiente, las ecuaciones se transforman por medio de multiplicaciones, eligiendo la incógnita que tenga el menor problema posible al momento de reducirla. Por ejemplo;

Resolver el sistema

x – y = –1 ………………… (1)

4x – 5y = 0………..……… (2)

- Si la primera ecuación se multiplica por **4,** el sistema se transforma como sigue:

4 (x – y) = 4 (– 1) ➡ **4x – 4y = – 4 ………………..(1´)**

4x – 5y = 0………..……… (2)

- Como la incógnita **x** tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, éstas se restan miembro a miembro:

– 4x – 4y = – 4

4x – 5y = 0

0 + ___= – __

- El resultado es una ecuación lineal, con una sola incógnita, que se resuelve así:

1y = –4

$$y = -\frac{4}{1}$$

y = – __

- Si se sustituye el valor de **y** en cualquiera de las ecuaciones originales, se encuentra el número de **x**. Por ejemplo, en la ecuación (1):

x – y = –1 ………………… (1)

x – (–___) = –1

x __ 4 = –1

x = – 1 – ____

x = – ____

- La solución del sistema de ecuaciones es la pareja **x= –__** y **y= – __**.

- Para confirmar que **x= –** ____ y **y= –** ___ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

x – y = –1 …….. (1) → **(–__) – (–__) = – ___ + 4 =** ____

4**x – 5y = 0…. (2)** → **4 (– ___) – 5 (– __) = – 20 + 20 =** _____

Ejemplo 4.

Si en un sistema de ecuaciones ninguna de las dos incógnitas tiene el mismo coeficiente, las ecuaciones se transforman por medio de multiplicaciones. Por ejemplo;

Resolver el sistema

5x – 4y = 1 ………………… (1)

–3x + 3y = 3…………………… (2)

- Si la primera ecuación se multiplica por **3** y la segunda por **4,** el sistema se transforma como sigue (Para esto nos fijamos que los números de la ecuación no sean primos; en este caso 5 y 3 lo son, entonces tomamos 4 y 3 y observamos que su M.C.M es 12, por lo tanto vamos a multiplicar inversamente las ecuaciones):

5x – 4y = 1 → **3 (5x – 4y) = (1) 3** → **___x – 12y =** ___ **....(1´)**

–3x + 3y = 3 → **4 (–3x + 3y) = (3) 4** → **–__x + 12y = 12 …… (2´)**

- Como la incógnita **y** tiene el mismo coeficiente y diferente signo en las dos ecuaciones, éstas se suman miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} 15x - 12y = 3 \\ + \quad \underline{-12x + 12y = 12} \\ 3x + 0 = \_\_ \end{array}$$

- El resultado es una ecuación lineal con una sola incógnita, que se resuelve así:

3x = 15

$$x = \frac{15}{3}$$

x = __

- Si se sustituye el valor de **x** en cualquiera de las ecuaciones originales, se encuentra el valor de **y**. Por ejemplo, en la ecuación (2):

–3x + 3y = 3………………… (2)

– 3 (___) + 3y = 3

– ____ + 3y = 3

3y = 3 + ____

3y = _____

$$y = \frac{18}{3}$$

y = _____

- La solución de sistema de ecuaciones es la pareja **x=** ___ y **y=** ___.

- Para confirmar que **x=** ___ y **y=** ___ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

5x – 4y = 1 …… (1) → 5 (__) – 4 (__) = ___ – 24 = ____

–3x + 3y = 3 ……. (2) → – 3 (___) + 3 (__) = –15 + 18 = _____

Ejemplo 5.

Resolver el siguiente sistema:

4x + y = – 1………………… (1)

5x + 3y = 4…………………… (2)

- Si la primera ecuación se multiplica por **5** y la segunda por _____**,** el sistema se transforma como sigue:

4x + y = –1 → 5 (4x + y) = (–1) 5 → ____x + ___y = – ___….(1´)

5x + 3y = 4 → 4 (5x + 3y) = (4) 4 → – ___x + 12y = ____ … (2´)

- Como las incógnita **x** tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, éstas se restan miembro a miembro:

– 20x + ___y = ___

20x + ___y = ___

0 – 7y = – 21

- El resultado es una ecuación lineal con una sola incógnita, que se resuelve así:

– 7y = – 21

$$y = \frac{-21}{-7}$$

y = ____

- Si se sustituye el valor de **x** en cualquiera de las ecuaciones originales, se encuentra el valor de **y**. Por ejemplo, en la ecuación (2´):

$$\mathbf{20x + 12y = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\,2´\,)}$$

$$\mathbf{20x + 12(\,\underline{\quad\quad}\,) = 16}$$

$$\mathbf{20x + \underline{\quad\quad} = 16}$$

$$\mathbf{20x = 16 - 36}$$

$$\mathbf{20x = \underline{\quad\quad\quad}}$$

$$x = -\frac{20}{20}$$

$$\mathbf{x = - \underline{\quad\quad\quad}}$$

- La solución de sistema de ecuaciones es la pareja **x= –** ___ y **y =** ___
- Para confirmar que **x= –**___ y **y=** ___ son soluciones realiza la comprobación en las ecuaciones (1) y (2).

$4x + y = -1$ …… (1) → $4\,(\,\underline{\quad}\,) + \underline{\quad} = -\ \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad} = -1$

$5x + 3y = 4$ ……. (2) → $-5\,(\,\underline{\quad\quad}\,) + 3\,(\,\underline{\quad}\,) = -5 + 9 = \underline{\quad\quad\quad}$

Ejercicios.

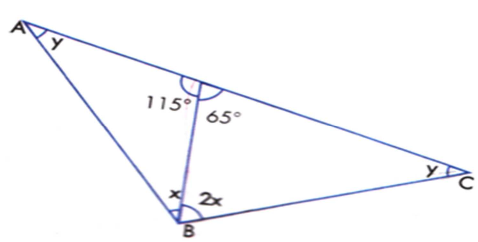
1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales con el método de suma y resta.
   a) $3x + 2y = 0$
      $18x + 9y = 9$
   b) $6x + 8y = -4$
      $12x - 16y = 16$
   c) $x - 5y = 3$
      $-x + 6y = 1$
   d) $6x - 2y = 0$
      $7x - 3y = -4$

2. Soluciona los siguientes problemas; plantea un sistema de ecuaciones para cada uno y resuélvelo con el método de suma y resta.

   a) El largo de un rectángulo es el triple del ancho. Si el largo fuera 3 centímetros menor y el ancho 9 centímetros mayor, la figura sería un cuadrado ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

   b) En una granja hay pollos y conejos. Si el número de patas es 244 y el de animales 107, ¿cuántos pollos y conejos se encuentran en la granja. (BRISEÑO, 1997, pág.79)

   c) ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo isósceles ABC? (sugerencia recuerda que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180º). (BRISEÑO, 1997, pág. 79)



VI.III.V EVALUACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Nombre del alumno: __________________ Grupo:_______ Calificación_____

Nombre del profesor: _________________ Fecha: ____________ Puntos:____

INSTRUCCIONES: Lee y analiza cuidadosamente lo que se te pide para que contestes correctamente.

1. **Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales por el método que elijas, solo debe haber un ejercicio resuelto por cada método.**

   a. $5x - y = 6$
   $x + 5y = -4$

   b. $6x - 2y = 28$
   $x - 4y = 12$

   c. $3x + 25y = -10$
   $x + 18y = -13$

   d. $x + 7y = -10$
   $7x + 17y = -6$

   e. $x + 4y = 35$
   $2x + 5y = 37$

25 PUNTOS

2. **Soluciona los siguientes problemas.**

   a. La suma de dos número es 220 y la diferencia es 20 ¿Cuáles son los números?

   b. El perímetro de un rectángulo es 20 cm. Si el triple del ancho es el doble del largo, ¿cuáles son las dimensiones de la figura?

   c. Juan y Pedro poseen una colección de 40 discos. Si Pedro le diera 4 a Juan, ambos quedarían con el mismo número de discos; ¿cuántos tiene cada uno?

   d. El doble de un número menos el triple de otro es 5 y la diferencia de ambos es -1. ¿Cuáles son los números?

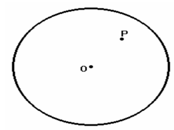
   e. El número de hermanos de María es el mismo que el de hermanas, pero cualquier hermano de María tiene el doble de hermanas que de hermanos. Calcula el número de hermanos y hermanas que tiene María. (Observación: si llamas **x** al número de hermanos y **y** al de hermanas de María, un hermano de María tiene **y + 1** hermanas, pues son **y** hermanas de María más María, y **x – 1** hermanos porque son **x** hermanos de María menos él mismo.)(BRISEÑO, 1997, pág. 79)

75 PUNTOS

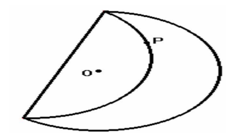
VI.IV CÓNICAS

VI.IV.I CONSTRUCCIÓN DE UNA CÓNICA POR DOBLECES

1. Toma el círculo que se te entregó y marca un punto llamado P el cual debe estar más cerca de la orilla de la circunferencia que del centro O.



2. Dobla el círculo de forma que la circunferencia pase por P y desdobla marcando cada dobles con tus dedos.



3. Repite el paso 2, pero variando los puntos sobre el contorno de la circunferencia, de tal forma que vayan girando dichos puntos.

4. Marca la cónica que resulta. ¿Cómo se llama está cónica?______________

5. Traza una línea que una a O y P, tal que esta línea intersecte a la cónica.

- Toma un punto cualesquiera sobre el contorno de la elipse siendo este punto Q.
- Une a Q con los puntos O y P y procede al llenado de la siguiente tabla.
- Ahora toma otro punto R, S, T, y U en diferente lugar de la elipse y procede al llenado de la tabla igual que lo hiciste con el punto anterior.
- La tabla se llena, midiendo la distancia que hay de cada punto que se especifico a la izquierda de la misma, y sustituyéndolo en los espacios en blanco de las fórmulas, que están arriba de la misma tabla. Observa que los puntos O y P están fijos y los que varían son Q, R, S, T y U esto será según en qué fila te encuentres; la distancia tendrás que medirla con la regla en cm.

	d(O,_)	d(_,P)	d(O,_) + d(_,P)
Q			
R			
S			
T			
U			

6. ¿Qué observas en la última columna de la tabla?______________________

____

- Concluyendo con esto, ¿Cuál es la condición más importante que cumple esta cónica? en cualquier punto sobre el perímetro de la misma; es que la distancia de ese punto al punto _________ más la distancia del punto tomado sobre la cónica al punto ______ es siempre _____________.

7. Los puntos O y P que son los que hacen que se cumpla la condición que descubriste, les llamaremos ***focos.***

8. La recta en la que están los puntos O y P la llamarás, ***eje mayor.***

9. Calcula el punto medio de O y P siendo este punto C, (este punto lo puedes localizar tan solo encimando los puntos O y P, para posteriormente marcar el punto de intersección con la recta en la cual están O y P).

10. Traza una perpendicular a OP que pase por C. siendo esta el ***eje menor***.

11. Los puntos de intersección del eje mayor, eje menor, con la cónica serán los ***vértices.***

12. Por último, sólo nos queda definir la cónica que construiste ; La ___________, consiste en el lugar geométrico de todos los puntos que cumplen que :____

    ____
    ____.

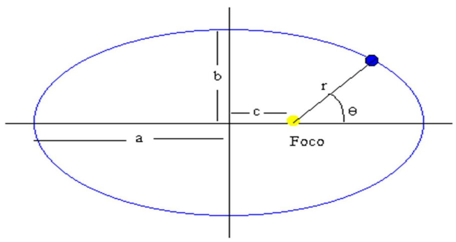
NOTA: Si te intereso lo que has descubierto en esta cónica puedes ver que en la Astronomía encuentras dicha cónica en las Leyes de Kepler. Observa en la siguiente hoja.

- **LEYES DE KEPLER**

Las leyes de Kepler describen la cinemática del movimiento de los planetas en torno al Sol.

Primera ley

Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos

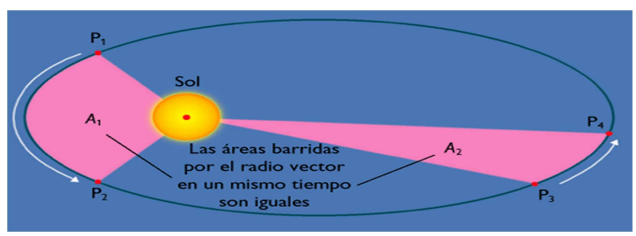


r_1 es la distancia más cercana al foco (cuando θ=0) y r_2 es la distancia más alejada del foco (cuando θ=π).

Segunda ley

El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

La ley de las <u>áreas es equivalente a la constancia del momento angular</u>, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol (perihelio). En el afelio y en el perihelio, el momento angular *L* es el producto de la masa del planeta, por su velocidad y por su distancia al centro del Sol.



Tercera ley

Los cuadrados de los periodos *P* de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores *a* de la elipse.

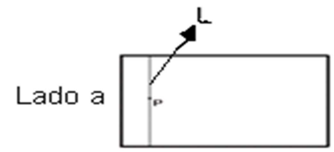
Como podemos apreciar, el periodo de los planetas depende solamente del eje mayor de la elipse.

LA ELIPSE

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante. La línea que une los dos focos se llama eje principal de la elipse y la mediatriz de los mismos eje secundario. Se llaman vértices de la elipse a los puntos donde ésta corta a sus ejes. El punto medio de los dos focos se llama centro de la elipse y la distancia entre ellos se llama distancia focal.

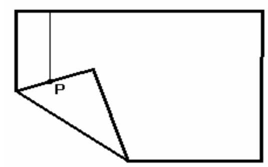
VI.IV.II CONSTRUCCIÓN DE UNA CÓNICA POR DOBLECES

1. Toma una hoja vegetal o albanene y colócala horizontalmente frente a ti. Mide tres centímetros de la hoja, trazando una recta paralela al “lado a” esta recta se llamará “L”.



2. Encuentra el punto medio de la recta L, e identifícalo con el nombre P (Para hallar este punto, dobla la hoja a la mitad, a lo largo y ve donde intersecta con la recta L).

3. Dobla la hoja como en la figura, de tal manera que el “lado a” de la hoja siempre pase por el punto P. Marca tu doblez en el papel albanene.



4. Repite este trazo uniendo puntos del “lado a” con el punto “p”.

5. Marca la cónica que resulta ¿Cómo se llama esta cónica?-----------------------

6. Toma uno de los dos puntos de intersección de la recta L con la cónica (llámale Q), mide la distancia de del punto Q al “lado a”, (Registra tus resultados en la tabla de abajo). Ahora mide la distancia del punto Q al punto P.
7. Para los puntos R, S, T y U; los cuales también están sobre la cónica, calcula la distancia que hay con el “lado a” y del mismo punto hacia el punto P. (Así como lo hiciste en el paso anterior y ve registrando del mismo modo tus cálculos).

d(Q ,lado a)=	**d(Q, P)=**
d(R, lado a) =	**d(R ,P)=**
d(S, lado a)=	**d(S ,P)=**
d(T ,lado a)=	**d(T, P)=**
d(T ,lado a)=	**d(U, P)=**

8. ¿Qué relación observas en los números registrados en las dos columnas de tu tabla?____

    - Concluyendo con esto, ¿Cuál es la condición más importante que cumple esta cónica? en cualquier punto sobre la misma; es que la distancia del punto al _________________ es _________ a la distancia de los puntos tomados al punto P.

10. Al punto P, que hace que se cumpla la condición que descubriste le llamaremos ***foco.***

11. A la “recta a”, que hace que también se cumpla la condición que descubriste la llamaremos ***directriz.***

12. Traza una perpendicular a la recta L que pasa por P a esa recta le llamarás ***mediatriz***. (Para eso, dobla de nuevo la hoja a la mitad, por lo largo).

13. Por último, al punto de intersección de la mediatriz con la parábola lo denominarás ***vértice*** de la parábola.

14. Por último, sólo queda definir la cónica que construiste; La ___________, consiste en el lugar geométrico de todos los puntos que cumplen que:____
    ____

NOTA: Si te interesa lo que descubriste en esta cónica puedes ver que tiene una aplicación en la recepción de señales vía satélite.

APLICACIONES

- ANTENA PARABÓLICA

<u>Características principales de una antena con reflector parabólico</u>

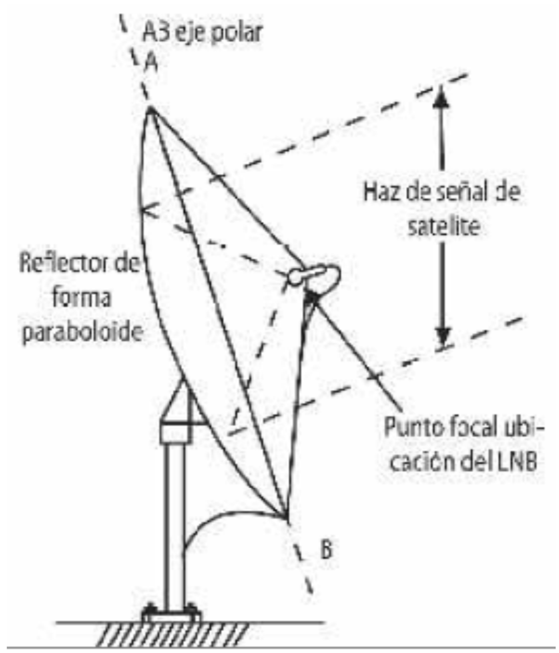
- **Foco**

Los reflectores parabólicos tienden a dirigir y concentrar la energía capturada hacia un punto llamado foco cuya ubicación dependerá de la forma de la parábola. Este punto focal es muy importante por cuanto es el mejor lugar para colocar el iluminador. Cualquier desviación, con respecto al foco, en que ubiquemos nuestro iluminador producirá pérdidas, afectando la eficiencia de la antena

Funcionamiento de la antena parabólica

Una antena es el elemento que se utiliza en la transmisión o recepción de las ondas Electromagnéticas.

La antena parabólica es una antena unidireccional, está compuesta de un elemento radiador o receptor y de un reflector en forma paraboloide que concentra la energía en un haz. Habitualmente se emplea en forma de reflector, por lo cual recibe el nombre de antena parabólica. Debido a su característica de reflexión se emplea generalmente para la recepción de señales vía satélite. Su principal función es concentrar en el punto focal la mayor cantidad de ondas electromagnéticas que se reciben desde los equipos electrónicos ubicados en el satélite, para que este campo después sea amplificado a los niveles adecuados y permita su manejo en el sistema de recuperación de la señal (decodificador).



México, D.F. a 3 de Marzo del 2010.

Prof. Mario Ramírez García.
P R E S E N T E

Por medio de este conducto solicito a usted su autorización, para plasmar en mi tesis su nombre, el cual estará utilizado de la mejor manera, expuesto en cada caso como el profesor que me dio la oportunidad de trabajar con dos de sus grupos para realizar las practicas que necesite en dicha tesis.

Esta tesis lleva por nombre “Álgebra en Secundaria con estrategias de aprendizaje cooperativo“ la cual fue aceptada en un principio con este nombre por la Facultad de Ciencias en la UNAM.

Sin más por el momento, me despido de usted. Esperando de antemano acepte esta petición. Aclarando que esta carta si fuese aceptada estará anexada a la tesis.

A T E N T A M E N T E

Erika Fabiola León Sánchez
TESISTA

Prof. Mario Ramírez García.
PROFESOR DE LA SECUNDARIA No. 100 DR. “GUILLERMO MASSIEU HELGUERA”

VII. FUENTES DOCUMENTALES

- ARRIAGA, A., BENÍTEZ, M., (2008) "Matemáticas 3, Introducción a las competencias"; Pearson Educación. México, Primera Edición; Pág. 328.

- BRISEÑO, L., VERDUGO, J.; (1997) "Matemáticas 3", Santillana Secundaria serie 2000, Pág. 224.

- CARRILLO, L.; (2009) Septiembre, "El sentido del aprendizaje y la motivación por aprender" en BOLETIEMS del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal, Editor, Vol. II.

- Colaboradores de Wikipedia. *Aprendizaje significativo* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2010 [fecha de consulta: 21 de julio del 2010]. Disponible en <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Aprendizaje_significativo&oldid=38946299>.

- DÍAZ, F., HERNÁNDEZ, A.; (2002); Estrategias docentes para un aprendizaje significativo "Una interpretación constructivista", McGraw-Hill, Segunda edición, pág. 459.

- Educación Básica Secundaria, Programa de Estudio (2006), Dirección General de Desarrollo Curricular que pertenece a la Subdirección de Educación Básica de la Secretaria Educación Pública SEP, Coordinador Editorial Esteban Manteca Aguirre, Primera edición, Pág. 138.

- GIMENO, J., PÉREZ, A.; (2005) "Comprender y transformar la enseñanza", Morata S.L., Colección Pedagogía Manuales Undécima edición. Pág. 442.

- MARTÍNEZ, M., STRUCK, F.; (1997) "Matemáticas 2", Santillana Secundaria serie 2000, pág. 224.

- SANTAMARIA, S., n.d. "Aprendizaje Cooperativo", consultada el 7 de Septiembre del 2009 www.monografias.com/.../principios-didacticos.shtml.

- SPRINTHALL, A.; (1996), Psicología de la educación "Una aproximación desde el desarrollo", McGraw-Hill, sexta edición, pág. 439.