



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**UNA APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE
CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL CCH-SUR**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ETSAAN ALAN AKÉ MÁRQUEZ



DIRECTOR DE TESIS:

MAT. LUÍS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno Aké Márquez Etsaan Alan 56078379 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 404001180
2.Datos del tutor Mat. Luís Alberto Briseño Aguirre
3.Datos del sinodal 1 Dr. Iñahui de Olaizola Arizmendi
4.Datos del sinodal 2 M. en C. Alejandro Bravo Mojica
5.Datos del sinodal 3 Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre
6.Datos del sinodal 4 M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez
7.Datos del trabajo escrito Una aproximación a la enseñanza de Cálculo Diferencial en el CCH- Sur 88 p 2010

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y mis hermanos por dar todo para ser lo que soy.

A la UNAM por darme educación de calidad y dejar que me desarrollara como persona y profesional.

A todos los profesores del CCH-Sur que me permitieron trabajar con sus grupos y a los grupos mismos que cooperaron mucho conmigo, especial agradecimiento al Act. Álvaro Escuadra por su confianza y apoyo para que desarrollara mi trabajo.

A Alejandra por ser mi compañera, motor, correctora y crítica de este trabajo.

A los Comboamigos y sus amigos (espero no me falte ninguno, si no reclaman): Dulce, Óscar, Chucho, Román, Cenia, Gil, Itzel, Ulises, Damián, Capitam, Aura, El Pulpo, Danone, La-u, Caro y Mofin.

A la banda matemática: Bere, Cris, Marce, Juanito y Felipe.

A mis carnales Mariño y Hocho.

A la memoria de Julieta Verdugo por ser un ejemplo de persona, profesional y dejar una línea que seguir.

A Iñaki por sembrar en mí no sólo el gusto por las matemáticas, si no por su enseñanza.

Índice

I ANTECEDENTES	2
1. Observaciones durante el servicio social	2
2. La experiencia en clases aisladas	4
II MARCO TEÓRICO	6
3. Comparación entre el método usual y el propuesto	6
4. Hipótesis de trabajo	10
III SUJETOS Y PROCEDIMIENTOS	11
IV CONCEPTOS Y TRABAJO EN CLASE	12
V CONCLUSIONES	59
5. ¿QUÉ SALIÓ MAL?	59
6. USAR LA TECNOLOGÍA O NO	61
6.1. La calculadora	61
6.2. La computadora(Geogebra)	62
7. ACTIVIDADES SUGERIDAS	63
8. PROYECCIÓN DEL TRABAJO	67
VI APÉNDICES	68
9. APÉNDICE A	68
9.1. Unidos como Cadenas	68
9.2. Máximos, mínimos y Mouriño	70
10.APÉNDICE B	79
10.1. Curso de Cálculo	79

UNA APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE CÁLCULO EN EL CCH SUR

Parte I

ANTECEDENTES

1. Observaciones durante el servicio social

Motivado por la experiencia de dar asesorías de matemáticas en el CCH Sur durante el servicio social y medio año más que permanecí en el plantel trabajando del mismo modo, es que surge la idea de este proyecto, en gran medida nace por lo observado durante todas las sesiones y la mecánica de éstas. Las asesorías consistían en apoyar a todos los alumnos que llegaran con dudas, se elaboraba un registro que tanto alumno como asesor llenaban, ellos escribían cuáles eran sus dudas o complicaciones respecto al tema que preguntaban y el que asistía hacía lo propio plasmando cuáles eran los problemas que ellos presentaban. El registro cuenta con más de 1500 testimonios y dada su vastedad nos brinda un banco gigantesco de dudas temáticas que van desde cómo sacar el área de un cuadrado hasta cómo integrar por partes una función, pero lo más importante es que nos arroja una lista de problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Teniendo en mente que el margen de todos los conflictos es sumamente amplio y aunque me limitaré sólo a discutir los referentes a Cálculo I, muestro a continuación algunos ejemplos que nos contextualizan y que ilustran problemas que el alumno promedio presenta al estudiar cada asignatura de matemáticas y que por ende aparecen cuando estudian cálculo. Ocurre con frecuencia que al estudiar sistemas de ecuaciones lineales, el maestro les enseña a resolverlos de distintas formas ¹ y muchos alumnos son capaces de resolver otro sistema parecido al que les puso el profesor con el método visto, sin embargo, cuando se les plantea un problema que de pie al uso de un sistema de ecuaciones lineales la misión es casi imposible para la mayoría, preguntas como ¿Qué tengo que hacer? ¿Cómo lo resuelvo? y algunos menos perdidos que preguntan cómo escribir

¹El plan de estudios marca que deben de verse los métodos de sumas y restas, igualación y sustitución. Algunos maestros les enseñan inclusive por determinantes y matrices, métodos que son igualmente de arbitrarios para ellos pero conceptualmente más difíciles

las ecuaciones, conducen a una posible interpretación de que los alumnos aprendieron de memoria un mecanismo para resolver algo, pero su razonamiento no fue mayor a eso, se podría decir que en gran medida no pueden conectar lo hecho con la realidad; en otras palabras, cuando ven un sistema no saben de dónde vino, porqué se presenta de esa forma o porqué se resuelve así, simplemente pueden detectar el objeto y resolverlo como les enseñaron². Otra posible lectura que no es excluyente de la anterior es que el proceso de abstracción es realmente complicado, tomar elementos de la realidad, representarlos y manipularlos con letras y operaciones matemáticas no es nada fácil para ellos. Pero precisamente, esto muestra también que en niveles anteriores de educación, los alumnos no maduraron matemáticamente y no adquirieron las herramientas y los conocimientos para enfrentar problemas futuros, lo cual se puede deber nuevamente a la mecanización de los procesos para resolver algo en matemáticas.

Otro claro ejemplo de dicha mecanización se observa cuando deben encontrar los elementos de una cónica (focos, ejes, excentricidad. . .) o a través de elementos dados hallar la ecuación de la misma; los alumnos manejan y manipulan la "a", la "b", la "c", la "e" y encuentran seguido lo que se les pide, pero cuando se les pregunta porqué $a^2 = b^2 + c^2$ (en la elipse) o de qué depende por ejemplo que una elipse sea vertical u horizontal se asombran, como diciendo porqué me pregunta eso, para qué lo quiere. Me parece señal clara de que aprendieron nuevamente un algoritmo para encontrar lo que se pidió en clase, sin cuestionarse porqué es así o porqué funciona de esa manera. Esta actitud³ desgraciadamente muestra que lo importante para el alumno en la escuela es responder a lo que pide el profesor, ni más ni menos, no es necesario comprender o entender mejor lo visto en clase, sino pasar exámenes y responder bien lo que se le pide, sin cuestionarse ni reflexionar sobre lo visto. Por último me gustaría mostrar el ejemplo de la "resolución de límites", que con preguntas como ¿Cómo se resuelven los límites? ¿Cómo le hago para saber cuánto vale un límite? ¿Qué es lo que tengo que factorizar? ¿Cómo sustituyo? expone que este proceso se ha visto reducido a otra acción mecánica, a una receta que se compone básicamente de los pasos: factorizar y evaluar; hecho duro que resalta cuál es el enfoque que se le ha dado al concepto de límite y en consecuencia al de derivada e integral.

A las preguntas que hemos visto habría que agregar la famosa ¿Así está bien? Que lo primero que expone es que los alumnos tampoco muestran un juicio propio. Es recurrente que sólo les interesan dos cosas: cómo hacer lo que se pidió y si lo que hicieron está bien, estas dos etapas son la base de lo que hace pensar al alumno que está aprendiendo y que lo hace sentir bien. Estas dos etapas también sacan a relucir que no encuentran una razón de ser del estudio de la matemática que no sea la de "hay que verlo por que está en el temario" o

²Esto genera usualmente una mala relación entre alumno y matemáticas y suele crear una barrera difícil de derrumbar entre ambos, como lo explica Schoenfeld cuando habla de sistemas de creencia

³Como un comentario marginal la actitud de cuestionarse el porqué de todo y no aceptar las cosas a ciegas, tiene que ver me parece con una mentalidad del mundo actual y la educación que los grupos de poder nos han dado (y nos quieren dar), aceptar-aceptar y seguir funcionando sin preguntarse porqué ocurren las cosas

“lo voy a necesitar más adelante”.

2. La experiencia en clases aisladas

Después de terminar el servicio social y de analizar qué temas causaban mucho conflicto con los estudiantes(sobre todo de Cálculo), dos maestros me facilitaron sus grupos de Cálculo I para dar algunas clases aisladas, específicamente de los temas Regla de la Cadena y Máximos y Mínimos(que fueron los temas que originalmente trabajé).

La idea de estos talleres y el por qué de estos temas en particular se debe a las recurrentes dudas sobre ellos en las asesorías, pero sobre todo por el constante fenómeno de la mecanización de ambos procesos. ¿Cómo aplicar la regla? ¿Cuál derivó primero? ¿Derivo e igualo a 0? ¿En dónde evalúo? fueron preguntas que impulsaron un primer intento para atacar el problema. Por tratarse de talleres tal vez aislados dentro de los cursos de los profesores, no queriendo decir con esto motivados por una génesis ficticia o inventada, los resultados son bastante limitados, y aunque tuve contacto con el grupo una o máximo dos clases, se obtuvieron resultados y eso enriqueció este proyecto⁴. El taller de máximos y mínimos se aplicó en tres grupos diferentes, dos de ellos ya habían visto criterios de derivada y el otro no, la principal diferencia radicó en que precisamente los primeros hablaban de derivada y los otros no, la similitud es que ninguno de los 3 sabía los criterios, pues de los pocos que los recitaban, casi nadie los entendía. Esta fué justamente una de las razones que originó la planeación del taller, los resultados de éste los considero positivos pues durante la actividad fueron los alumnos quienes dictaminaron un criterio para encontrar máximos y mínimos, pero sobre todo por que fue a través de un problema que se introdujo y se dio pie a la teoría. El inconveniente fue que no tuve la oportunidad de dar seguimiento a lo visto, de tal modo no tuve la certeza de saber si los alumnos habían realmente construido algo o simplemente se trató de un conocimiento pasajero que se dio en una clase. Con el taller de Regla de la Cadena ocurrió algo diferente, en primer lugar debo señalar que para esta actividad se utilizó el programa de computadora Geogebra⁵ y en segundo lugar que sólo tuve la mitad del tiempo que calculaba necesario. Desgraciadamente este taller me sirvió más a mí como maestro que a ellos como estudiantes, me explico, con la misma intención de estudiar la matemática a través de problemas, planteé algunos de éstos pero con una secuencia tan arbitraria y tan sugerente que hubiera resultado lo mismo enseñar la teoría de forma directa. Otra dificultad que enfrenté fue que Geogebra comenzó a mostrar debilidades como software(encimaba gráficas de una forma indeseada y no permitía llamar de cualquier forma a los elementos involucrados). Sin embargo no todo fue negativo, dentro de lo malo observé que era útil y

⁴Ambos talleres se anexan con detalle en el Apéndice A mostrándose no como eje principal de este trabajo, pero si como una fuente muy rica de resultados que influyó en gran medida para este trabajo

⁵Se utilizó este programa porque el profesor que me prestó su grupo lo sugirió y porque los alumnos ya lo conocían

asequible utilizar dibujos para representar dominios e imágenes e introducir la notación $y=f(x)$, $z=g(y)$ y $h(x)=f(g(x))=z$ para trabajar la composición de funciones. Este uso y manejo de notación parecerá sutil, pero es realmente una ayuda, por que aún habiendo trabajado la composición de esta forma, cuando todas las funciones dependen de una variable “x” el problema conceptual no es cosa menor, las confusiones sobre qué depende de qué y qué representa cada variable son una constante.

En consecuencia con estas experiencias, resulta natural decir que la decisión entre trabajar en una clase aislada y dar seguimiento a un grupo a lo largo de todo un curso es optar por lo último. Para enfrentar ese curso fue indispensable tener una teoría que respaldara dicha enseñanza y se presenta en el siguiente capítulo.

Parte II

MARCO TEÓRICO

3. Comparación entre el método usual y el propuesto

Como ya se ha mencionado, la enseñanza de la matemática⁶ en el aula se ha convertido en una rutina que consiste en que el alumno acuda a tomar clase y aunado a memorizar hechos matemáticos, su tarea fundamental es aprender a aplicar correctamente algoritmos, si combina los hechos que recuerda y los datos del ejercicio o problema planteado con el algoritmo aprendido obtiene la respuesta correcta (que es legitimizada por el maestro o por un libro de texto) y así, en el mejor de los casos “ya sabe” matemáticas.

Como matemáticos sabemos que la estructura del edificio matemático y de nuestro conocimiento es axiomática, pero si dicha estructura hace que parezca que está adaptada a la enseñanza dice Brousseau, entonces ¿por qué “sufrimos” tanto profesores como alumnos, unos para impartirla y otros para aprenderla? más allá de aceptar que la abstracción en matemáticas la convierte en un ente difícil de tratar, el mismo Brousseau contesta

"esta presentación [la axiomática] obscurece completamente la historia de estos saberes, es decir, la sucesión de dificultades y de interrogantes que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas (...) Enmascara el 'verdadero' funcionamiento de la ciencia (...) para poner en su lugar una génesis ficticia (...) y después las transpone al contexto escolar" (Brousseau, 1986, pp. 5-6).

Es cierto que es importante el aspecto lógico-formal al estudiar matemáticas, pero es también de suma importancia la parte histórico-intuitiva, pues da una presentación más viva de los axiomas, los teoremas, las pruebas y hace que el conocimiento no parezca per se y salido de la nada como se enseña usualmente. Nos muestra que son producto de un desarrollo de la humanidad de prueba y error, de intentos fallidos y de ideas geniales (Medrano, 1985), es por eso que resulta antinatural enseñar los temas por enseñarlos, sin hacer ver o saber a los alumnos que tienen un origen y que lo natural fue tratar con un problema (ya fuera meramente matemático o de la realidad) y se desarrollara teoría para resolverlo, no al revés, ya que de este modo el proceso puede parecer no tener sentido ni rumbo y es posible que los alumnos no consigan el conocimiento deseado, peor aún podemos estar formando estudiantes con conocimientos científicos pero sin actitud científica. Empezar por la teoría no les ayuda a los estudiantes a construir un conocimiento sino los hace repetir el conocimiento que otro ya construyó, sin

⁶Hablo por supuesto de mi experiencia en el CCH, pero me atrevería a decir que no es un fenómeno aislado

desarrollarlo en la experiencia propia. Como señala L. M. Santos, aprenderse definiciones o conceptos, resolver sistemas de ecuaciones, graficar funciones, sacar derivadas, . . . no es desarrollar matemáticas. “Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, probar, inventar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas”.(Santos Trigo, 1995)

En este mismo sentido “puede ser que más importante que la selección del material sea la elección del estilo de exposición. El común estilo deductivo-axiomático consiste en que la redacción de una teoría matemática comienza con una definición no motivada. Las dificultades psicológicas que esto produce son casi insalvables para una persona normal”⁷ . Es por ello que el método tradicional que podríamos resumir en los siguientes pasos

- Se presenta la teoría,
- Se hacen ejercicios sencillos,
- Luego unos más complicados,
- Finalmente un problema,

presenta a la matemática como una actividad divina, y es que como toda actividad social y cultural, la matemática es un proceso de maduración de conceptos y conocimientos, de discusión, de prueba y error, ir puliendo lo hecho, inventando y refinando conceptos, métodos y pruebas; juntando todo ese cúmulo de experiencias es que se llega a la teoría que ahora tenemos, así es como ha evolucionado la matemática, no de forma discreta dando brincos y apareciendo sólo en los años en que se publicó tal libro o en que se demostró tal teorema, por eso, insisto, ir directo a la teoría carece de sentido para los estudiantes y dificulta el proceso de abstracción. La tarea como educadores debe consistir en que el alumno juegue el papel de sujeto de conocimiento en el proceso de aprendizaje, no de “desnudar [nosotros educadores] el objeto y entregárselo con un gesto paternalista a los educandos, a los cuales se les negaría así el esfuerzo de la búsqueda, indispensable para el acto de conocer” (Freire, 1997).

Otro fuerte daño que produce este esquema es que se centra fuertemente en la manipulación de algoritmos y de símbolos abstractos, carentes de referentes, además de que pone a la argumentación en segundo plano y vacía su significado pues para los estudiantes sólo existe una única estrategia de resolución en cada problema y argumentar consiste en relatar cómo reprodujeron las operaciones aprendidas para encontrar “la respuesta”.

Por si fuera poco el daño, siguiendo estos pasos la exploración carece totalmente de sentido en una situación problemática, ya que esto sería equivalente a no saber; el saber se demuestra aplicando el algoritmo previamente aprendido. El hacer una exploración y encontrar un camino que no conduce a la respuesta correcta, debería considerarse un conocimiento valioso, sin embargo para este esquema es concebido por los estudiantes como una pérdida de tiempo.

Por ello creo que lo importante para el aprendizaje más que enfrentar a los alumnos a una situación que puedan resolver mediante la simple aplicación de un esquema conocido (es decir un ejercicio), es retarlos con algo que posea un fuerte obstáculo para ellos (un problema), de esta manera se verán en la necesidad de

⁷Arnold

razonar. Como una consecuencia de esto y las críticas hechas anteriormente, el esquema clásico habría que voltearlo de cabeza y se convertiría en:

- Enfrentamiento de un problema,
- Discusión sobre posibles soluciones,
- Conjeturas y validación de los procesos utilizados,
- Bautizos y formalidad de lo hecho⁸.

La principal premisa de esta propuesta es que el conocimiento no se puede transmitir de un sujeto a otro, es resolviendo problemas y organizando experiencias como se construye. Lo que se busca dice Santos (1998b) es que el estudiante problematice su aprendizaje a través de la reflexión y resolución de problemas y para lograrlo es indispensable

“promover un microcosmos en el salón de clase que refleje actividades propias del quehacer matemático... una actividad natural es que los estudiantes evalúen, cuestionen y critiquen las sugerencias o ideas que se presenten tanto por el instructor como por los mismos estudiantes” (Santos, 1998, pp 433-434).

Contrario al esquema tradicional, atacar problemas (sobre todo aquellos que involucran elementos de su realidad cotidiana) hace más ameno el camino hacia la abstracción y menos violento el contacto entre noción o concepto matemático y aprendizaje del alumno, además de que vincula a la matemática con otras ramas de estudio del hombre, lo cual la enriquece, la contextualiza con su entorno y de este modo evita que sea vista como una actividad ritual y autocontenida. Los problemas se deben entender como situaciones que den pie a soluciones que no involucren solamente el uso de procesos rutinarios y que –se espera– lleven a los alumnos a proponer conjeturas y brindar argumentos que sostengan sus afirmaciones, lo cual –se espera– generará un juicio propio en ellos pues de manera recurrente el profesor y el libro de texto son los encargados de su evaluación⁹. El problema de esto último es que promueve una creencia errónea de la naturaleza de la matemática y de lo que significa aprenderla, por ello los alumnos siempre esperan la aprobación o desaprobación del maestro y se forman una idea de que matemáticas se reduce a correcto o incorrecto. Una forma de promover la seguridad y validación de sus procesos es que el alumno se dé cuenta de sus errores, por ejemplo siguiendo una idea falsa y llegando a un absurdo o preguntando al resto del grupo que piensa para que entre ellos se corrijan y no señalarlos uno, porque así el alumno difícilmente entenderá en qué se equivocó y es posible que repita el mismo error y además sentirá nuevamente que el error fue error porque el profesor se lo dijo y no porque realmente observó que algo no estaba bien¹⁰.

⁸Respecto a la formalidad, debemos ser cuidadosos y consecuentes con el nivel de madurez que presenten, ya que como lo he mencionado puede resultar desastroso introducirles demasiado rigor

⁹Cabe señalar que comentarios como “esa no es la solución del libro” o “así no porque así no lo hace mi maestro” eran escuchados casi a diario en las asesorías

¹⁰Esto reflejaría lo que menciona Freire respecto a una comunidad de aprendizaje, donde la verdadera ayuda que brinda el “maestro” es aquella donde se ayudan entre sí todos los comprometidos, creciendo de este modo juntos, el que enseña no se puede negar a seguir

Siguiendo el esquema propuesto, una vez que se han discutido conjeturas, soluciones, afirmaciones, etc. es de suma importancia concretar el proceso escribiendo todo lo hecho y es ahí donde usar un lenguaje apropiado como las tablas, las gráficas, las expresiones algebraicas cobra mayor sentido, sobre todo para ser más precisos y generales.

Durante este proceso de construcción podemos identificar los escalones que recorrerá el alumno, como menciona Vergnaud, dentro del proceso de abstracción encontramos “La dialéctica del objeto-herramienta” (Vergnaud, 1987), que se refiere al uso que se da cuando se abstrae algo, inicialmente se utiliza como herramienta para resolver algo en particular, pero posteriormente se le da un papel de objeto al abstraer sus propiedades. Pero el proceso continúa, pues al obtener el alumno un objeto a partir del estudio de algo descubre nuevas cosas que, inicialmente, utilizará como herramientas para después abstraer sus propiedades y convertirlas en objetos, y así sucesivamente. Los recursos previos a enfrentar un problema también son muy importantes, evidentemente las dudas o dificultades que no se resolvieron antes de llegar a cierto nivel, hacen que el aprendizaje de los temas siguientes se complique¹¹.

El conocimiento intuitivo, conocimiento de hechos y definiciones, habilidad para ejecutar un algoritmo o procedimiento, conocimiento sobre las reglas de los temas involucrados en el problema, todo esto describe qué tan sólidos son los recursos que tiene el que resuelve problemas, y es que la problemática de esto radica en que “cualquier idea relevante puede estar asociada con una vaga sospecha [que bien puede ser cierta pero bien] ...puede ser incorrecta” (Shöenfeld, 1985), lo cual los conduce a afirmaciones sin sustento o a consecuencias falsas.

Una componente involucrada y de presencia innegable no sólo en nuestras vidas sino en cualquier rama de estudio de la humanidad es la tecnología (en este caso la computadora y la calculadora). Esta herramienta es sumamente utilizada hoy en día para la enseñanza, la pregunta y motivo de muchas discusiones es cómo utilizarla. Para muchos el aprendizaje en la computadora brinda un conocimiento virtual, ya que los alumnos aprenden a manipular programas así como podrían aprender a manipular algoritmos sin entender lo que realmente está pasando. Sin embargo, otra tendencia sugiere utilizar tecnología pero precisamente teniendo en mente la premisa principal del planteamiento de problemas, dándole un papel de generadora de intuición y de ahorradora de cuentas.

De esta propuesta de enseñanza es que surgen las siguientes

aprendiendo con aquel al que está enseñando, es cierto, hay un individuo que sabe más que los demás en ciertos temas (los enseñados en clase claro) pero que pretende compartírselos con el resto, no asumir un rol de un ser superior y el resto del grupo como oyentes o aceptadores de lo que aquel diga. La discusión en equipos también es útil y retribuyente, porque se debate con gente que habla el mismo lenguaje y maneja las mismas herramientas. Freire Paulo, Cartas a Guinea-Bissau, Siglo XXI

¹¹ Cabe señalar que aspectos mecánicos como el manejo de fracciones y resolución de ecuaciones lineales, y aspectos conceptuales como la generalización de situaciones sencillas por medio del álgebra (y digo sencillas porque muchos son problemas que se hacen en la secundaria o inclusive en la primaria que se supondría ya deberían poder realizar) y la asociación entre la expresión analítica de una función y su gráfica son temas de constante duda en todos los niveles del CCH

4. Hipótesis de trabajo

- * El alumno aprende razonando, no memorizando
- * La presentación de la matemática a través de problemas fomenta el razonamiento y el aprendizaje de la misma
- * El alumno debe formarse su propio juicio y no depender solamente del criterio del profesor
- * El trabajo en equipo resulta más enriquecedor que el individual
- * La tecnología sirve como brindadora de intuición y ahorradora de cuentas cuando los alumnos ya saben qué hacer

Parte III

SUJETOS Y PROCEDIMIENTOS

Como ya he insistido anteriormente, aunque este proyecto se desarrolló en un grupo de quinto semestre del CCH Sur que cursó la materia de Cálculo Integral y Diferencial I, habiendo pasado en años anteriores por cursos de Álgebra y Geometría Analítica, la planeación de clases está basada en toda la experiencia previa ya citada, está centrada en problemas puntuales observados y enfrentados anteriormente.

El grupo presentó 32 alumnos inscritos de los cuales la mayoría siempre asistía a clase y de manera participativa, la primera ocasión que trabajé con ellos habían visto ejemplos de procesos infinitos, notación de límite y se encaminaban hacia la definición del mismo.

Acordé con el profesor dar en promedio una hora de clase a la semana, lo que representa un cuarto del tiempo total de horas, situación que cambió con el transcurso del semestre y se convirtió en aproximadamente dos horas a la semana. Mi misión en un principio consistió en repasar temas, resolver dudas y hacer ejercicios, es por ello que a veces las clases pueden llegar a parecer un complemento o un “accesorio” del curso, sin embargo mi trabajo cambió con el avance del curso y devino en sembrar la semilla de cada nuevo tema¹². De tal suerte que mi papel dentro del grupo fue como el de otro maestro que complementaba lo que se veía con el titular, cabe señalar que éste siempre asistía a clase pero no intervenía dentro del desarrollo de la misma.

Las actividades propuestas están planeadas para trabajar en equipos y hacer discusiones plenarias, para ello algunas veces se dieron hojas de trabajo, otras se planteó un problema en el pizarrón y otras tantas se recurrió a la sala de cómputo.

Los alumnos utilizaron a lo largo del curso una calculadora científica que entre muchas otras funciones: convierte unidades, tabula, deriva, integra y resuelve matrices y ecuaciones hasta de tercer grado. Respecto a Geogebra es un programa matemático interactivo libre, básicamente es como Cabri¹³, un procesador geométrico y un procesador algebraico.

Finalmente, antes de entrar de lleno a lo vivido y para darle un poco más de sentido a las clases impartidas, quisiera resaltar como De Guzmán menciona, que actualmente la enseñanza está teniendo un continuo apoyo en lo concreto, en elementos de la realidad [...] en este sentido la enseñanza no se limita a conceptos puramente matemáticos o pertenecientes sólo a esta disciplina, sino involucra problemas con un contexto social y que se relacionan con otras ramas del conocimiento. Brindando así al sujeto herramientas para enfrentar un problema en general¹⁴.

¹²Aspecto formidable para la propuesta de trabajo que tenía en mente, a saber, presentar la teoría a través de problemas

¹³Guardando todas las proporciones, ya que durante su uso se encontraron varias limitaciones que se mencionan más adelante

¹⁴De Guzmán, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática

Parte IV

CONCEPTOS Y TRABAJO EN CLASE

A continuación se presenta un análisis clase por clase de aspectos que resultan importantes para el aprendizaje de los alumnos, a saber: validación, abstracción, trabajo en equipo y lenguaje y uso de la tecnología.

Antes de comenzar haremos algunos acuerdos sobre los diálogos:

- * Cuando aparezca profesor(Prof.) se entenderá que se trata del autor. Durante el análisis o recuento de lo hecho, cuando se hable del profesor se referirá al titular del curso
- * Cuando hablan “algunos” se trata 5 personas máximo 10
- * Cuando hablan varios se trata de más que algunos pero no la mayoría.

Es importante recalcar que antes de que impartiera esta primera clase el habían visto:

- * Ejemplos de procesos infinitos
- * Límites de forma algebraica, sobre todo del tipo donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con raíz común a ($P(x)$ de grado mayor a $Q(x)$), utilizan herramientas como multiplicar por el conjugado y factorización de polinomios, además de la sustitución de valores
- * Un estudio cualitativo de $\frac{1}{x}$
- * Más ejemplos de límites del tipo ya mencionado y un criterio de existencia del límite usando la caracterización de los límites laterales¹⁵

PRIMERA CLASE

El objetivo es trabajar con el concepto de aproximación sin hablar de límites como lo ha hecho el maestro: Se presentará una actividad para que por equipos se calcule la raíz cuadrada de 2 a través de la aproximación de lados de rectángulos de área 2 a un cuadrado de la misma área. La estrategia será la discusión grupal y luego una discusión plenaria.

VALIDACIÓN.

Después de establecer la actividad y ya que se han dividido en equipos, los alumnos discuten cómo hacerlo, pasados 5-10 minutos, hay variedad de propuestas y se anotan todas en el pizarrón.

¹⁵Esta es la definición que aparece en la guía de extraordinario para Cálculo I

1)El lado del cuadrado debe medir raíz de 2

2)El lado mide aproximadamente $17/12$

3)El lado es aproximadamente $24/17$

Por comodidad llamaré a los defensores del caso 1 equipo 1 y así para los otros 2 casos

Para el caso 1(le digo al equipo que lo propuso -que por cierto dio su solución casi inmediatamente después de que di las instrucciones-que piensen cuánto es raíz de 2),los integrantes del equipo uno usaron la calculadora y afirman que:

Eq1: Raíz de 2 es 1.41421356

Prof.: Eso quiere decir que si yo multiplico ese número por sí mismo, debe resultar 2 ¿Da 2?

Eq1: No, da 1.99999999

Prof.: ¿1.99999999 no es 2?

Salón: No(al unísono)

Prof.: ¿Porqué?

Alumno: Porque nunca llegas

Prof.: ¿Y si le pongo muchos nueves?

Salón: No

Prof.: ¿Y si le pongo infinitos nueves después del punto decimal?

Algunos: . . .no

Al ver su cara de desconcierto y sabiendo que apenas se están familiarizando con la noción de límite, prefiero pasar a analizar los otros casos. Para el caso 2 y 3 se arma una discusión entre los equipos que propusieron dichas soluciones

Prof.: ¿Cómo le hicieron para obtener sus resultados?

Eq.2 y 3: Con el método de los promedios

Prof.: ¿Y su cuadrado con la medida de lado que me dieron tiene área 2?

Eq.2 y 3: No

Eq.2: Da 1.854671

Eq.3: Da 2.006944

Eq.2: Pero con $24/17$ se pasa de 2

Eq.3: ...

Prof.: Entonces no es una buena aproximación...

Eq.2: No, porque se pasa

Alumno: Pero no importa porque se está aproximando de todos modos

Prof.: A ellos les sobra y a ustedes les falta, entonces ¿Hay una mejor aproximación que otra?

Eq1: La nuestra, nosotros estamos a .00000001 de 2

Prof.: Podrían todos darme una mejor aproximación¹⁶

Eq2 y 3: Si, tendríamos que repetir lo mismo varias veces

Eq1: Tendríamos que ponerle más cifras decimales a nuestra aproximación

Como podemos observar, el enfrentarse a un reto asequible, logra que la validación de sus argumentos sea más sólida, es decir, aunque trataba de hacerles

¹⁶Es importante que el maestro hable y vaya introduciendo el lenguaje que se maneja en matemáticas, para que de este modo los alumnos hablen en primera instancia de aproximaciones y posteriormente de límites

preguntas que los confundieran y que dieran paso a una discusión de límite, ellos se aferraban a su idea intuitiva de identidad y sin que yo determinara si una aproximación era buena o no ellos mismos discutieron y notaron que no importaba si la aproximación era por arriba o por abajo, lo relevante era cuál se acercaba mejor al valor deseado.

ABSTRACCIÓN.

Podemos observar que pudieron resumir con notación de límite la idea de obtener raíz de dos, sin embargo, podríamos pensar que ante los ejercicios hechos con el profesor de calcular límites de manera mecánica, a sabiendas de que el resultado del límite propuesto es 2 y sin nada que ver con la actividad lograron escribir lo hecho; lo cual se confirmó cuando se les pidió hallar el valor de raíz de tres, ya que algunos optaron por buscar un límite relacionado con el área de un círculo y propusieron $\lim_{r \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi}} \pi r^2 = 3$ mientras que otros rescribieron lo que habían

hecho con raíz de dos. En este punto vale la pena mencionar que el límite antes propuesto lo conjeturaron ajustando las cuentas para que el resultado fuera 3, es decir, buscaron qué valor al cuadrado y multiplicado por π daba 3.

De lo anterior se observa que la idea de límite (por lo menos la simbólica) aparece no como la de una aproximación sino como la de una sustitución. Los alumnos no recrearon el proceso de aproximación, simplemente jugaron con los símbolos. Por eso parece más conveniente que antes de enseñarles a escribir y resolver límites mecánicamente es preciso, como señala L. M. Santos, construir y desarrollar el concepto, en este caso con problemas de aproximación, por ejemplo con sucesiones (tratadas de manera numérica) y con gráficas.

Es importante recalcar que en el proceso de abstracción de este curso y sobre todo al principio del mismo el objeto de estudio es el límite, las herramientas que usan los estudiantes son todo el acervo que obtuvieron durante sus primeros dos años en el CCH. Basado en ello vale la pena hacer 2 observaciones, la primera es con qué herramientas cuentan para enfrentar este nuevo concepto de límite, cuántas tienen, de qué calidad, cuántos alumnos poseen un conocimiento mínimo para enfrentarlo etc... la idea es que las herramientas adquiridas al estudiar álgebra y geometría analítica, deben forjar a través de problemas el nuevo concepto de límite, para que éste posteriormente se convierta en una herramienta para resolver problemas de razones de cambio instantáneo, cumpliendo así el ciclo objeto-herramienta que menciona Vergnaud. La segunda observación, más concerniente con el profesor, es que esas herramientas obtenidas no les deben servir simplemente para operar como máquinas (como sucede de forma recurrente con la herramienta “factorización”). Menciono esto porque en estos cursos desafortunadamente, estudiar límites se reduce a saber factorizar y manipular algebraicamente expresiones.

TRABAJO EN EQUIPO Y MANEJO DE LENGUAJE

Resulta de suma importancia que trabajen en equipos para desarrollar conjeturas, pues esto involucra variedad de ideas y discusiones por establecer una, el uso de un mismo lenguaje para debatir entre ellos facilita y hace fluir mejor la disputa. Aunado a ello la discusión en la plenaria entre todos, especialmente entre los equipos que disciernen sobre la forma de aproximarse a raíz de dos obliga a los alumnos a presentar argumentos para defender puntos de vista, pero sobre todo una actitud no de convencer al profesor de que saben sino de convencer a quien sea arguyendo con elementos sólidos.

EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Resulta importante el uso y la interpretación que le dan los alumnos a los resultados obtenidos por su calculadora. Lo primero que resaltaría es la utilización de la calculadora por parte del equipo 1 para resolver el problema de forma directa(sin hacer los promedios) y el hecho de aceptar que el resultado solamente era una aproximación, esto habla de que la calculadora cumplió con su parte: dar resultados que refuercen o brinden intuición. Lo interesante resultó cuando hablamos de que la calculadora hace aproximaciones y les pregunté

Prof.: ¿Cuánto es uno entre tres?

Eq2 y3: 0.33333

Prof.: Entonces, como un tercio más un tercio más otro tercio es uno, pues .33333 sumado tres veces es uno también

Eq2 y 3: ¡¡Noo!! (Caras de asombro) Entonces uno entre tres no es .33333

Prof.: ¿Entonces porqué la calculadora dice que si?

Eq2 y 3: Pues quién sabe, pero no es .33333

Prof.: La calculadora hace lo mismo que hicieron ustedes, da una aproximación.

De todo lo anterior noto un par de cosas, primero que el uso de la calculadora a veces se convierte en fe ciega, el resultado que arroja la pantalla es la verdad y ya no es necesario pensar más; en segundo lugar que el concepto de identidad está bien arraigado¹⁷ -para bien o para mal- a tal punto que inclusive cuando hablan de límite afirman que se pueden acercar tanto como quieran pero “sin llegar” o “sin tocar” el límite. Esto se ve reforzado por los resultados que arroja la calculadora como que nunca vamos a determinar de forma exacta el valor de raíz de 2; también me parece es cuestión de madurez (ya que se están enfrentando a un nuevo concepto nada trivial). En tercer lugar, como consecuencia del segundo, se observa que la costumbre es poderosa, te lleva a tener ciertos vicios y en este caso en particular a aceptar hechos tales como que uno entre tres es .33333(inclusive .3). Contrario a lo que realmente piensan ya que como vimos afirmaron que 1.999..nunca sería 2 y observaron que un tercio no era .3333.

Después de esta clase ven el Teo. Fundamental de los Límites(operaciones con límites: suma, resta, producto, división y potenciación) y la clase siguiente

¹⁷Al estilo axiomático como B. Russell o H. Poincaré, en los Principia Mathematica(1910) o “La mathematique et la logique”(1905) respectivamente

presentan el siguiente

EXAMEN DE LÍMITES. CÁLCULO DE LÍMITES

1. Se tiene una sucesión infinita dada por la fórmula $S_n = \left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$ con $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Escribe los términos que consideres necesarios para hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Usa tu calculadora y elabora una tabla para encontrar el límite o concluir que éste no existe. Asegúrate de poner tu calculadora en modo radianes

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x-1}$

4. La función de Heaviside H se define por $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

[Ésta fórmula recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que inicia en el instante $t = 0$] Analice la función y determine $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$

Encuentra los siguientes Límites algebraicos:

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

6. $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{3t^2 - 10t - 8}{t - 2}$

7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h}$

8y9. Dada $f(x) = \sqrt{5x - 1}$ Hallar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ cuando $x > \frac{1}{5}$

10. Usa la definición rigurosa de límite para probar que $\lim_{x \rightarrow c} mx + b = mc + b$

Del examen valdría la pena hacer notar que la última pregunta solamente la resolvió una persona y que en general los alumnos recurrieron más a la herramienta algebraica y al cálculo literal de límites que a la misma noción de límite para resolver los ejercicios.

SEGUNDA CLASE

En miras del tema “continuidad” y de una futura definición de la misma, la actividad de esta clase giró alrededor del Teorema del Valor Intermedio. Para motivarlo se planteó el siguiente problema a todo el salón:

Un monje recorre diariamente un cerro atravesándolo de base a base -se dibuja el cerro en el pizarrón- ¿El monje recorre todas las alturas del cerro? ¿Por qué?

Posteriormente la discusión pasó del problema concreto a algo mas abstracto, a saber, decidir si un polinomio cúbico recorría todas las “alturas” del eje Y, dándole especial énfasis a la altura cero. Para esto se recurrió a redefinir una función continua en una discontinua precisamente en los puntos donde la función se anulaba.

VALIDACIÓN

En esta clase se observó que ante el enfrentamiento de los retos de determinar si un polinomio cúbico particular cruza el eje X y si lo sigue haciendo cuando no es continuo en esos puntos, los alumnos reaccionaron de manera muy distinta en ambos. Claramente cada reto tiene una dificultad conceptual distinta, pues no se compara algo que es convincente a simple vista(aunque no tan simple de argumentar rigurosamente) con algo que requiere un mayor manejo del concepto que apenas se está trabajando. En consecuencia con lo anterior, podríamos decir que cuando los alumnos sienten que el problema está a su alcance se sienten seguros para argumentar pero sobre todo viven un autoconvencimiento, lo cual en cuestión de actitud es sumamente positivo, pues no necesitan del juicio del profesor para decidir su postura. Sin embargo, cuando no tienen herramientas para sostener lo que han dicho al respecto, el aporte de razonamientos y argumentos es casi nulo y la validez de sus afirmaciones muchas veces se traslada del profesor a la calculadora, como lo muestra el siguiente diálogo

Llamaré Alumno 1 al que explique la gráfica del equipo 1 y así para los otros casos

Alumno1: La gráfica es así porque tabulé y así salió

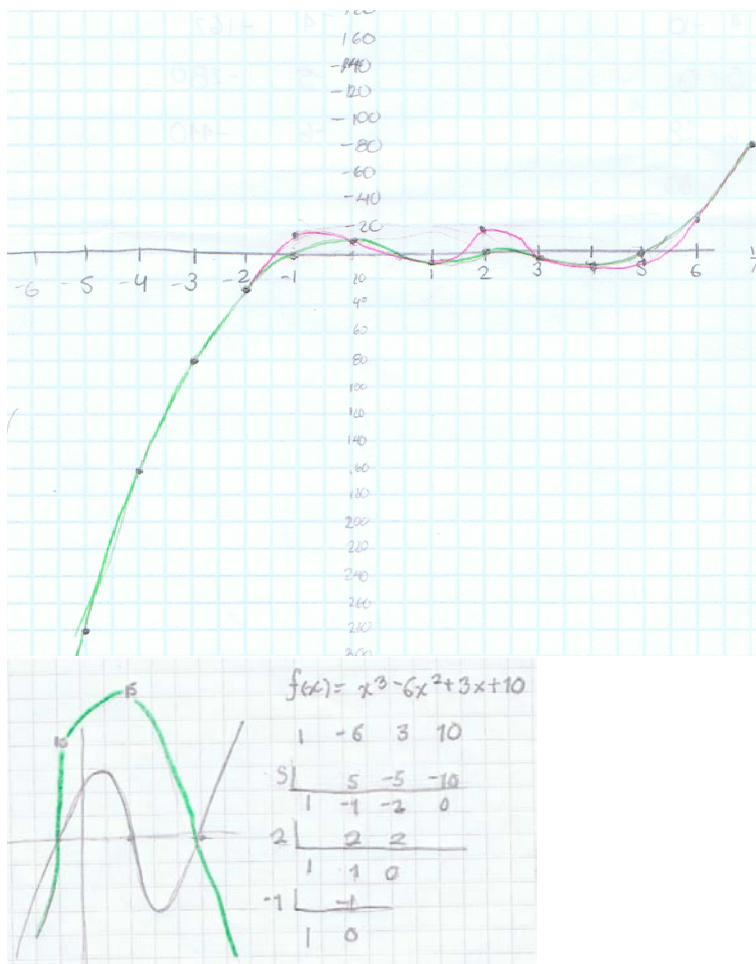
Alumno2: Yo también tabulé pero no sale así,-señalando su gráfica dice-primero sube luego baja, sube, baja y vuelve a subir

Alumno3: Yo la hice así por que sus raíces son -1,2 y 5, luego tabulé

Prof.: ¿Qué gráfica escogemos entonces?

Varios: Pues la 2 o la 3 que son iguales. La 1 está mal tabulada.

Se vuelve más impresionante esta validez, cuando observamos la gráfica de la redefinición del polinomio del equipo 1 y las razones que dan para explicar su dibujo



Prof.: ¿Por qué 5 intersecciones?

Eq. 1: Así salió en la calculadora. Sabemos que por ser un polinomio cúbico debería tener tres raíces, pero en la calculadora nos salen esos valores

Prof.: Entonces el polinomio tiene más de tres raíces...

Eq. 1: Sí

Esto refleja en gran medida el peso que tienen los resultados de la calculadora para ellos, ya que el referente de validez no fue ni su teoría ni lo que dijera en su momento el profesor, sino lo que dictara su calculadora. Esto habla de una teoría muy endeble si es que existe y de una concepción errónea de que la calculadora no se equivoca.

La idea de las 5 intersecciones fue discutida de manera grupal y en base a la teoría que proporcionaron algunos sus compañeros respecto a la cantidad de posibles raíces de un polinomio cúbico con la cual coincidía el equipo 1 pero sobre todo gracias a la confirmación de otros sobre los datos que arrojaba la calculadora al hacer bien los cálculos se concluyó el error del equipo 1.

ABSTRACCIÓN

Volviendo a los retos de esta clase, para mi gusto existió una diferencia cualitativa importante entre éstos. Preguntarles de forma intuitiva por la continuidad de una trayectoria y pedirles que bosquejaran un polinomio cúbico con raíces reales fue algo que no causó mayor problema y en general todos coincidieron en respuesta, lo cual era de esperarse pues la parte de continuidad involucraba una idea natural de “no desaparecer” o que “la línea no se corte” aunado a que el bosquejo de $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ (dado que lo redujeron a la imagen de un segmento) no era un problema meramente de cálculo; lo interesante fue cuando se involucró el concepto de límite y ante la discusión de cómo era la gráfica les pregunté

Prof.: ¿Y después? ¿Qué le pasa a la función cuando x empieza a crecer?

Alumno: Podría bajar de nuevo

Prof.: ¿Cómo sabremos si baja o sube o cómo se comporta la función?

Ellos: Seguimos graficando

Prof.: ¿Hasta dónde?

Ellos:...

Prof.: Si x es muy grande ¿Qué le pasará a la función?

Muchos usando su calculadora...

Ellos: También es grande

Prof.: Entonces ¿Cuál es el límite de la función cuando x tiende a infinito?

Alumna: No existe, es infinito

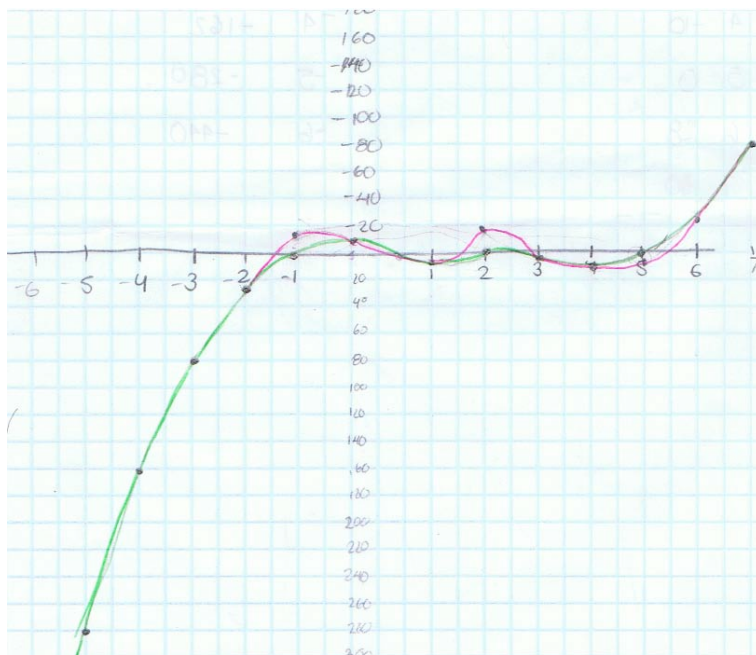
Varios: Si, es infinito

Prof.: ¿Y de este lado-señalando el intervalo $(-\infty, -1)$? ¿Qué le pasa a la función para valores muy grandes pero negativos de x ?

Varios: Se va a menos infinito

Esto muestra que no existe una gran relación (si es que existe) entre calcular un límite y las consecuencias que éste tiene, en este caso la interpretación gráfica es nula, en otras palabras, obtener un límite no va más allá de eso, de calcular un valor. Y aunque no deja de ser importante que hablen sin temor de comportamientos infinitos y de la no existencia de un límite, me parece se trata de un mero asunto de lenguaje. En resumen, el uso de límite es una herramienta que todavía no ocupan por sí solos para un análisis, pero que empiezan a ser capaces de manejar si se les sugiere la utilicen.

Otro asunto importante fue el intento por acercarse más a la definición de continuidad con límites vía la redefinición de un polinomio, ya que pasar de ejemplos e ideas intuitivas a la definición de un objeto es un gran brinco conceptual. Sin embargo esta petición fue realmente atroz para su madurez matemática, porque aunque no se detuvieron ni se intimidaron con el problema de dibujar lo pedido, la principal consecuencia fue una total confusión al discutir los resultados. Podemos observar lo que le sucedió al equipo 1, y en general lo que le sucedió al resto.



y es que en general los equipos de nuevo dibujaron una función continua con nuevas raíces (la rosa en este caso), lo cual nos indica que la idea de dar distintos valores a las raíces anteriores solo los llevó a deformar su anterior gráfica, sólo que sin usar la calculadora.

EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Como ya lo he mencionado anteriormente, el uso de la calculadora fue frecuente en esta clase, sobre todo para tabular y en algunos casos para encontrar los ceros de la función, respecto a esto último debo notar que hay una diferencia cualitativa, tal vez sutil, pero importante entre las gráficas; los primeros simplemente tabularon y de casualidad encontraron uno o más ceros (pues los puntos que casi siempre grafican son enteros cercanos al cero), los segundos por su parte encontraron los ceros y a partir de eso tabularon. En este último caso se muestra un avance, pues más allá de que la calculadora hace su trabajo, los alumnos tienen presente que las raíces dan información importante sobre la gráfica y basados en su noción intuitiva de continuidad tabulan unos puntos y obtienen una gráfica menos local que la de los otros.

Al mismo tiempo se debe rescatar que la calculadora les da información útil pero que generalmente no es aprovechada, precisamente por que no existe una teoría que respalde esos resultados, por ejemplo, la calculadora les da los ceros de un polinomio de hasta tercer grado, sin embargo algunos cuando grafican “misteriosamente” les aparecen más de tres intersecciones del polinomio con el eje de las abscisas, algo que contradice su “teoría” pero que tiene más peso por que lo dice la calculadora. A pesar de lo dicho, la calculadora también aparece

en esta clase como brindadora de intuición, pues ante la necesidad de determinar el comportamiento del polinomio cuando la variable crecía, posterior a la idea de seguir evaluando, surgió de forma natural(basados en su tabulación) hablar de comportamientos infinitos, logrando así concluir la tendencia de la función e involucrar el concepto de límite. Y me parece mejor señal de esta intuición, que cuando bosquejaron la redefinición del polinomio no necesitaron de ella, la respuesta inmediata de que solamente se alargaba y el trazo instantáneo del dibujo lo comprueban, dicho en otras palabras, no sintieron la necesidad del aparato para lograrlo o se mostraron dependientes de ella para conjeturar algo. Esto habla de que es realmente útil usar la calculadora, de que bien puede ayudar a construir un concepto a través de la intuición y también sirve para comprobarlo o desmentirlo.

* Ven ejemplos de funciones discontinuas a través de dibujos

TERCERA CLASE

El objetivo de esta clase es seguir trabajando con la idea intuitiva de continuidad¹⁸, buscando que de forma cualitativa concluyan que para que una función sea continua en un punto debe ocurrir que el límite de la función cuando la variable tiende a dicho punto debe ser la función valuada en ese punto. El camino a seguir es construir funciones discontinuas y tratar de volverlas continuas(cuando sea posible). El primer problema que se trabajará es algo del tipo la función de Heaviside, buscando retomar con esto la existencia de funciones discontinuas; para reforzarlo se busca que construyan ejemplos. Para dar mayor abstracción a la continuidad y aclarar las dudas que quedaron la clase pasada debido a la redefinición de una función, se buscará que ellos redefinan funciones con discontinuidades del tipo removibles, como $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, que en principio ya resolvieron en una tarea.

VALIDACIÓN

Discuten y presentan argumentos que no sólo son de intuición y noción común como en la clase anterior, hablan con herramientas y lenguaje que ya tenían de cursos anteriores lo cual les permite determinar a su juicio qué afirmaciones de las discutidas tienen sustento y cuáles no, este aspecto es fundamental para avanzar en el aprendizaje como señala Shöenfeld, pues por muy capaces que sean si no tienen herramientas para enfrentar el reto, éste cambia a otro nivel, posiblemente uno inferior al que se les presentó.

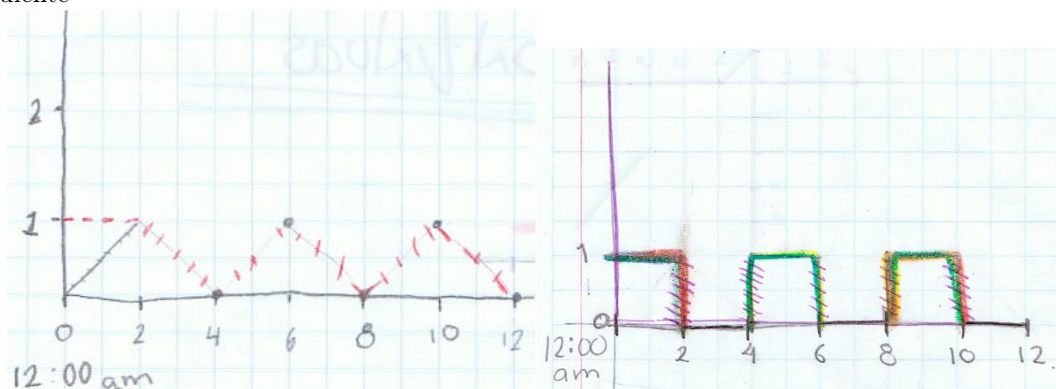
¹⁸La continuidad como concepto matemático aparece “de forma analítica” a mediados del siglo XVIII con Euler, pero es hasta el siglo XIX con Bolzano y Cauchy, que se asemeja a la definición abstracta que conocemos con ϵ y δ , posteriormente y basada en lo anterior aparece una definición con sucesiones que es equivalente y más similar a la que presentamos aquí con límites. Es decir, la noción se formalizó cientos de años después de haberse empezado a utilizar, por eso sugiere presentar ejemplos más tangibles sin pensar en ϵ y δ , pues la dificultad de éstos es muy elevada para este nivel

Resulta interesante que al no tener un algoritmo o un mecanismo fijo para determinar la continuidad de una función, los alumnos recurren a sus conocimientos y a su intuición, pues es esto aunado a las discusiones plenarias lo que valida lo que piensan.

La discusión de dividir entre cero también fue importante para la validación pues al parecer todos estaban concientes de que dividir entre cero no está definido (posiblemente establecido como axioma por el maestro), pero lo hacían sin más, no notaban que en la mayoría de los límites que hacían mecánicamente cancelaban alegremente sin considerar la división entre cero. Cuando se les presentó la demostración de que $a=b$ implica (tramposamente) que $2=1$ algunos se mostraron escépticos, pero para muchos parecía más cierto que falso por que el profesor lo había demostrado. La percepción de que estaba bien porque el profesor lo había hecho cambió cuando todos comenzaron a dudar del hecho $2=1$ y sobre todo cuando alguien arguyó que lo que estaba mal era la hipótesis, pues eso motivó que hicieran un caso particular y precisamente con ese ejemplo un alumno observó que se trataba de una división entre cero, en consecuencia el resto de sus compañeros empezó a asimilarlo y a convencerse del error. De esta forma del lado conceptual se concluyó que no siempre es posible cancelar factores en una división, pero más importante fue que ellos se convencieron de que estaba mal lo que había hecho y aun más, realizaron una labor que realiza un matemático con frecuencia: probar primero algunos ejemplos para ver si algo funciona y convencerse del hecho, para después tratar de generalizarlo.

ABSTRACCIÓN

Al ver una gráfica pueden determinar viéndola si es continua o no¹⁹, en contraste, cuando les definí una función simple²⁰ más de la mitad dibujó lo siguiente



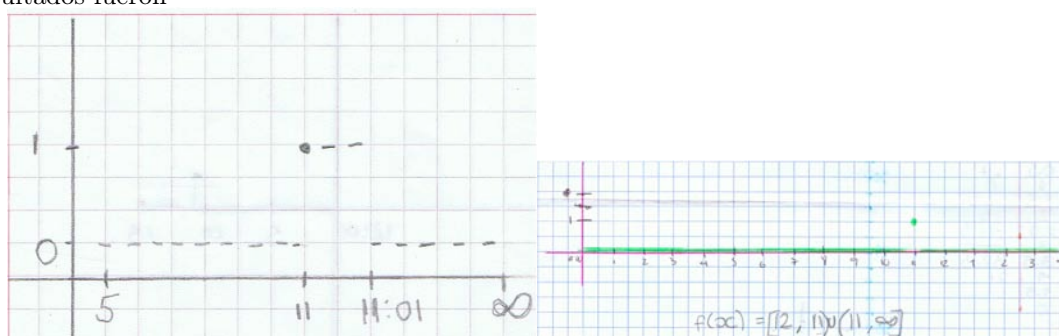
Es decir, geométricamente es clara su percepción de continuidad pero analíticamente todavía no, queriendo decir con esto que la representación gráfica de la función (que no sabían era discontinua), fue la de una función continua.

¹⁹Por supuesto que han visto sólo discontinuidades del tipo salto y removibles

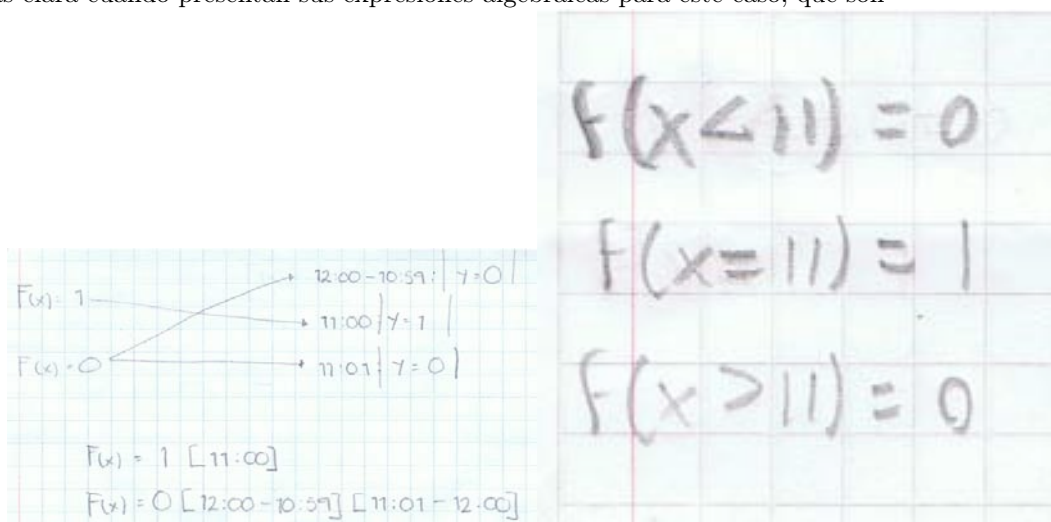
²⁰Simple en el sentido de combinación lineal de funciones características

En otras palabras, hasta este punto de estudio(y me parece normal) todas las expresiones analíticas de las funciones implican graficar funciones continuas. Por ello es importante introducir notación y problemas que involucren funciones que no lo son.

Otro punto de interés y que es un concepto básico de Cálculo, es la noción de “pequeño” (en este problema representado con la idea de instante). Cuando les pedí graficar el caso en que un foco estaba apagado todo el día excepto el momento en que alguien prendía y apagaba el switch a las 11 de la mañana, los resultados fueron



Que muestran que la noción de pequeño para algunos ahora es más pequeña que antes(es decir, cercanía ahora es .01 no 1). Y la noción de acercarse se ve más clara cuando presentan sus expresiones algebraicas para este caso, que son



Éstas para mi gusto, denotan cierta idea de acercarse pero sin llegar, lo cual se confirma cuando los que proponen las desigualdades no aceptan los intervalos porque afirman que el 11 no puede estar en el intervalo, y es precisamente ese argumento que utilizan aquellos que propusieron la idea de los intervalos para explicar que por eso el intervalo es abierto y no cerrado. Muchos asumen que no conocen la notación, pero se las presento y aceptan que ambas expresiones

son válidas para la función. Posteriormente les presento distintas notaciones para representar la función, a saber, con intervalos, con desigualdades y con “ x distinto de” (i.e la función tiene cierto valor cuando la variable es distinta de cierto número) y la aceptación y la digestión resulta mucho mejor que la clase anterior.

En el mismo sentido de la validación hay que remarcar que usando herramientas anteriores pueden construir nuevos saberes, hablar de intervalos abiertos-diciendo que no incluyen el punto del extremo-, de indefinición de funciones, usar notación de funciones combinada con símbolos de mayor y menor de forma adecuada, nos dice que bien pueden enfrentar los retos de continuidad usando conocimientos previos y también nos dice que lo que en su momento fue el objeto de estudio(en álgebra y geometría analítica) ahora es una herramienta para discutir la continuidad de funciones. Resalto el aspecto notación porque fue un problema que enfrentamos la clase pasada y ésta, a saber, redefinir una función discontinua definida en todo su dominio para que fuese continua²¹. Este problema tiene dos retos simultáneos que posiblemente causaron la confusión, por un lado está el discutir intuitivamente la continuidad en un punto(que parece asimilaron bien puesto que coincide con su noción común de continuo). Por otra parte está la introducción de nueva notación y en consecuencia los conceptos que ésta involucra. Tratar con nuevos símbolos no es tarea de minutos. Introducir la notación de una redefinición y analizar la función desde ahí fue una misión casi imposible para el alumno promedio, contrario a lo que se hizo en esta clase, pues se presentó un problema y a través de éste se motivaron las definiciones y las notaciones, cambiando de este modo la respuesta de los alumnos.

Hay que señalar que los alumnos mostraron cierta madurez para enfrentar el nascente concepto de continuidad, sobre todo como ya dije, encaminada hacia la definición formal(que es lo que el maestro quería). Al principio de la clase pasada y la primera parte de ésta, la noción de continuidad parecía un problema completamente ajeno al problema de la aproximación, sin embargo cuando se problematizó el concepto a través de una función que ya habían trabajado, la noción de que el límite de una función en un punto debía ser igual al valor de la función (por supuesto todo esto dicho con datos específicos) les pareció natural, aunque podría decirse que dirigido por mis preguntas(¿qué clase de pregunta no es dirigida?), ya que después de pedirles graficar χ_{11} y preguntarles por los límites cuando x tendía a 11 por la derecha y por la izquierda, las respuestas fueron cero y cero, lo que me llevó a preguntar

Prof.: ¿Cuál es el límite de la función cuando x tiende a 11?

Ellos: 0

Prof.: ¿Y cuánto vale la función en 11?

Ellos: 1

Prof.: ¿Es continua la función? ²²

Ellos: No

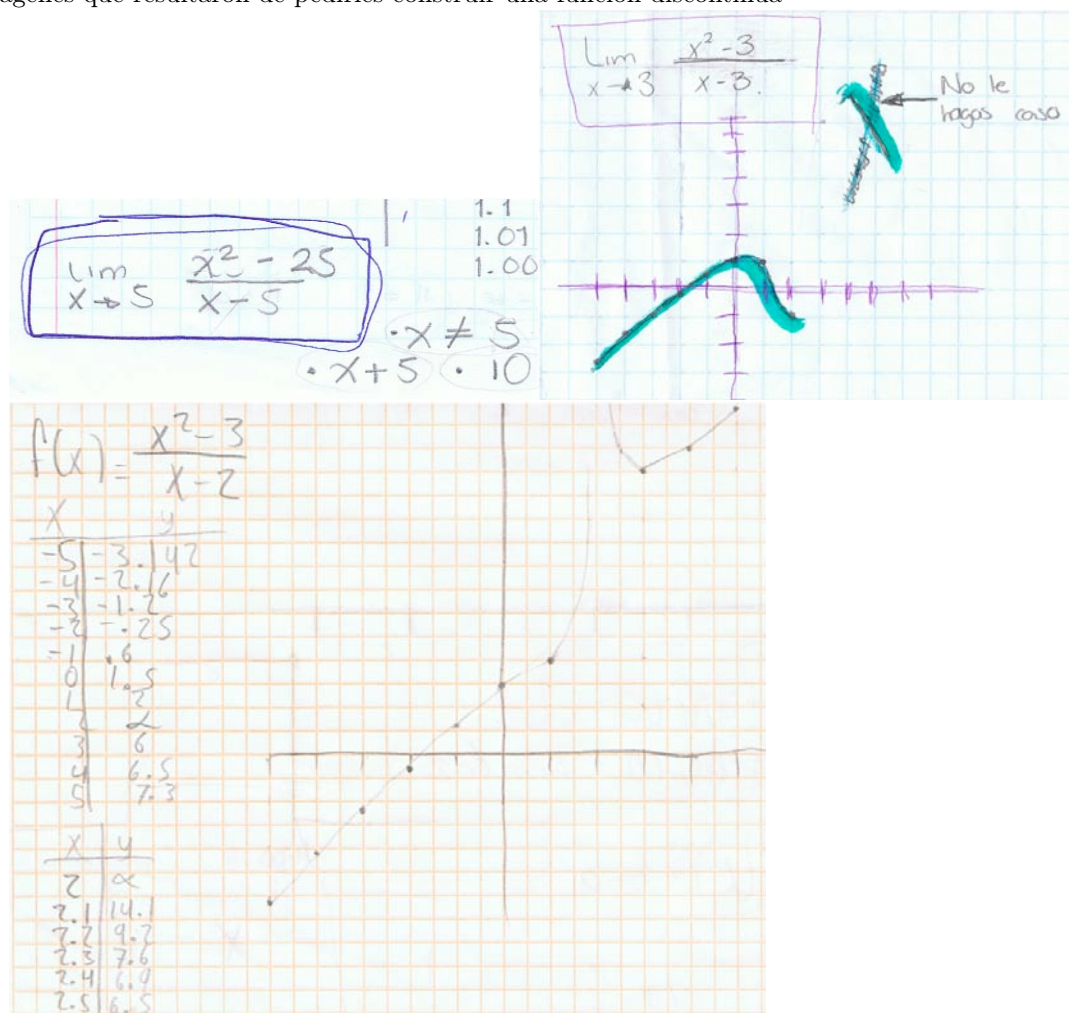
Prof.: ¿Porqué?

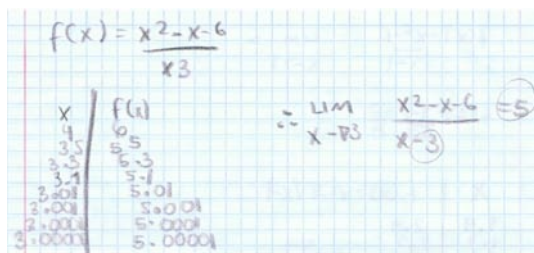
²¹Leánse polinomios y funciones simples

²²Hasta este punto no se ha definido o hablado de funciones continuas, simplemente es un adjetivo calificativo que queda a la intuición y concepción de cada quien

Ellos: Porque en 11 brinca de cero a uno
 Prof.: ¿Se podría hacer continua?
 Ellos: ...
 Prof.: ¿Qué tendría que pasar para que fuera continua?
 Ellos: No dar ese brinco
 Prof.: ¿Podemos arreglar ese brinco? ¿Podemos obligar a la función para que no de ese brinco?
 Ellos: Si
 Prof.: ¿Cuánto debería valer la función en 11 para que fuese continua?
 Ellos: 0

En esta discusión de redefinir una función discontinua los alumnos piensan que el proceso es posible para todas las funciones como lo muestran las siguientes imágenes que resultaron de pedirles construir una función discontinua





Notemos que asumen que el método se puede ejecutar aun para funciones para las cuales no es posible. Pero también observemos que recurrieron a una gráfica, esto lo podríamos interpretar como un avance en el sentido de ocupar más herramientas(en este caso las gráficas)para entender y resolver un reto que en un principio no requiere del dibujo. Para concluir hay que remarcar que una vez más un problema, esta vez de índole matemática, generó una idea de cómo deben ser las cosas, esta clase les dio intuición sobre qué debe cumplir una función continua, para ello fue necesario que erraran en algunos de sus ejemplos y por tanto generar una discusión sobre porqué algunas de las funciones que propusieron son imposibles de redefinir para ser continuas, centrándose en el aspecto de que el límite de la función en la discontinuidad no existía.

TRABAJO EN EQUIPO Y LENGUAJE

Las discusiones en equipo siguen enriqueciendo su aprendizaje, los que no saben de intervalos o desigualdades se ven ayudados por sus compañeros de equipo y así tanto el que explica como el que escucha juegan papeles de aprendizaje, uno refuerza el otro se familiariza. En este mismo sentido, habría que señalar que aunque se trabaja en equipos de máximo 4 personas, las discusiones y las dudas traspasan los equipos, por eso en las discusiones plenarias se suelen dividir también en grupos más grandes que piensan de una manera similar. En cuestión de lenguaje me parece interesante como es sutil pero sustancial el tipo de respuesta ante las preguntas ¿Cómo harían para que la función fuera continua? Y ¿cuánto debería valer la función en 11 para que fuese continua? De donde me parece clara la íntima relación que guardan entre valorar y límite.

Como ya se mencionó en la parte de abstracción el concepto de pequeño o instante es fundamental para entender cada vez mejor el concepto de límite y resulta interesante cómo denota algo más pequeño “instante” que “momento”.

USO DE LA TECNOLOGÍA

La tabulación es el principal uso que le dan, en este caso les sirve en consecuencia para graficar $\frac{x^2-1}{x-1}$ pero también les da la oportunidad de discutir una división entre cero y por supuesto el concepto de continuidad. Dado que en una tarea (de obtener límites) habían calculado $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Escribo y preguntó ¿este límite existe?

Varios: No, porque estás dividiendo entre cero

Prof.: Pues en la tarea todos lo hicieron y sí existía

Alumno: Sí existe, factorizas, cancelas y sustituyes. El límite es 2

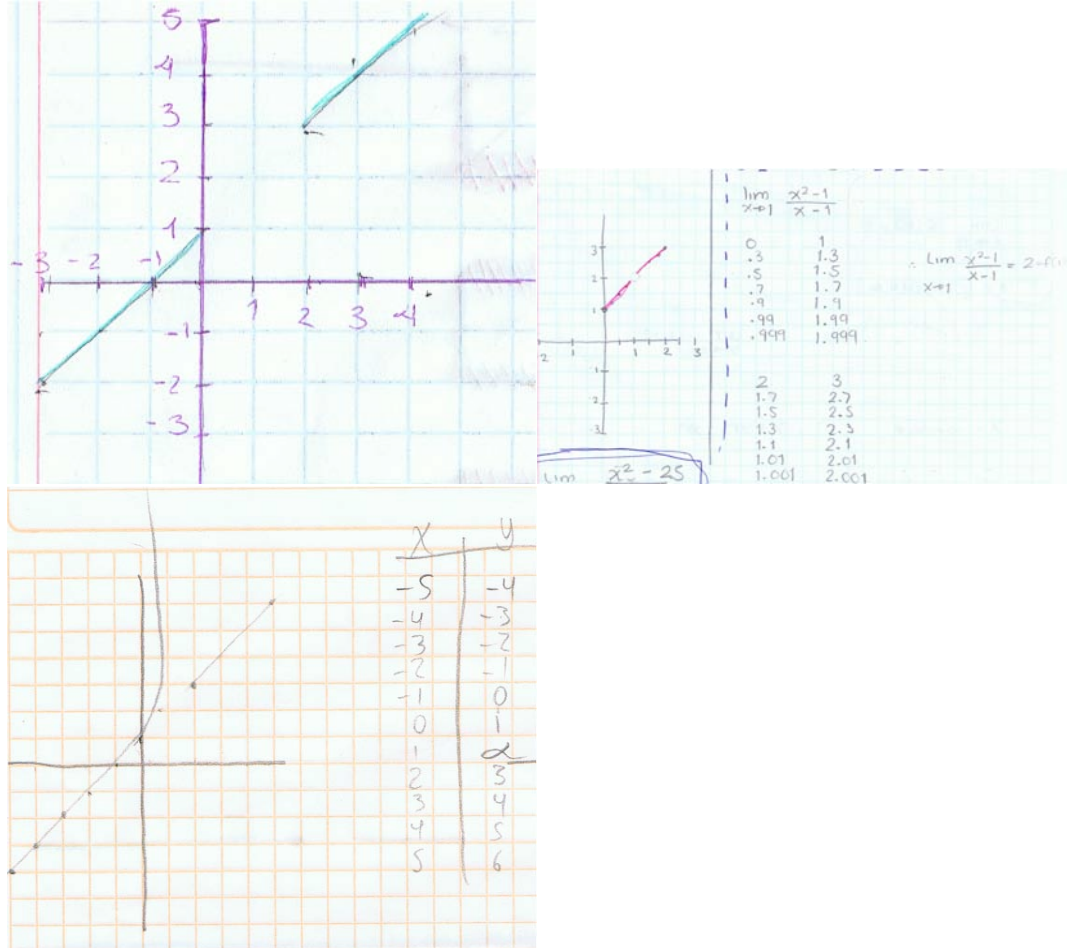
Prof.: A ver, unos dicen que sí existe y que vale 2 y otros que no existe. Me gustaría que dibujaran la gráfica de la función y que analizaran el límite (que les acabo de escribir) y me digan qué sucede en x igual a 1

Inmediatamente después muchos me dicen (mostrándome sus dibujos) que sería como una gráfica con un hueco en 1. Un equipo me dice:

Equipo: ¿No sería como el ejemplo que nos pusiste de la luz? Que por ejemplo en $x=1$ sale que es error, ya en 2 sale 3 y en 3 vale 4. O sea, como que hay un espacio y ya empieza a crecer

Prof.: Bueno, teniendo eso en mente hagan la gráfica.

Les doy unos minutos y este es el trabajo de cada equipo



Prof.: Veo que varios dibujaron un hoyo en el valor que le corresponde a 1 ¿Cuánto vale entonces la función en 1?

Ellos: Dice error [refiriéndose a la calculadora], no tiene valor en 1

Prof.: ¿Entonces? ¿Qué sucede con esta función respecto a su límite en 1 y

su valor en 1?

Alumno: Pues existe el límite pero el valor de la función no

Prof.: ¿Esta función es continua?

Ellos: ¡No!

Prof.: ¿Podríamos hacerla continua? ¿Qué tendríamos que hacer?

Ellos:...

Prof.: ¿Qué problema tenemos?

Ellos: No está definida en 1, pero vale $\frac{x^2-1}{x-1}$ para x distinta de 1

Prof.: ¿Y en 1?

Ellos: No está definida

Prof.: ¿Podríamos definirla? Es decir, darle un valor a la imagen de 1

Ellos: Sí

Prof.: ¿Cuánto tendría que valer en 1 para que tapáramos el hoyo que dibujaron? ¿Qué valor le tendríamos que dar para que fuera continua?

Alumno1: $x + 1$

Alumno2: 2

Alumno3: Es lo mismo por que x vale 1

Prof.: ¿Entonces?

Ellos: Pues si vale 2 cuando $x=1$ ya se vuelve continua

La calculadora les dice que el valor de la función $\frac{x^2-1}{x-1}$ en 1 es error, pero ellos mecánicamente habían obtenido que el límite valía 2, es decir, los alumnos creen que es lo mismo el valor de la función en un punto y el valor del límite de la función en ese mismo punto. Esto se debe en gran medida al método de resolver límites factorizando y evaluando, ya que de este modo se suele pasar por alto en primera instancia la discusión sobre la división entre cero, en segundo lugar el análisis del comportamiento infinito y en tercer lugar y no excluyente de las anteriores el punto central del curso que es ir digiriendo la noción de límite.

Es de resaltar cómo al considerar la parte gráfica y no sólo la algebraica de los límites su perspectiva cambia, ya no sólo saben que el límite es 2 cuando x tiende a 1, también pueden apreciar por lo menos que en 1 (aunado a lo que dice su calculadora) hay problemas, pero no sólo eso, pueden conjeturar mejor cuánto debe valer la función en 1 para que sea continua la gráfica. En este punto debemos observar que hasta ahora la herramienta límite no les es muy útil, les parece más bien un tema que está en el temario y hay que ver. También hay que notar que todavía a varios alumnos les basta con calcular algunos valores (inclusive de números enteros) para obtener una buena aproximación de una gráfica, por eso en muchos dibujos solo se ve trazado un segmento de la misma. En este aspecto podría venir muy bien la ayuda tecnológica no solo de la calculadora sino también de la computadora, más como una auxiliadora en la comprobación de lo hecho con teoría, que simplemente como una graficadora.

La siguiente clase que da el maestro se dedica a redefinir funciones discontinuas para ser continuas, les da un algoritmo. Les habla de funciones salvables (cuando existe el límite en la discontinuidad) e insalvables (cuando no). Basado en la siguiente

Definición. Una función $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es continua en un punto c si

* f está definida en c

* Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

* Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

HORA DEL EXAMEN...

El profesor me da la oportunidad de cooperar para el examen de continuidad, propongo ejercicios y los discuto con mi asesor.

La primera propuesta se componía de 4 ejercicios que consistían en contrastar lo continuo con lo discontinuo, trabajar un poco con límites (en vista de su desconexión con lo gráfico o lo real y su única relación con lo algebraico) y meter algo de desigualdades para la definición con Epsilon y Delta, que me comentó el profesor quería ver.

Discutí con mi asesor cómo debía abordarse la posible redefinición de una función discontinua para volverla continua-esta idea surgió de introducir un concepto más formal de continuidad por medio del límite de la función en un punto, de aproximarse a éste y detectar cuánto debería valer la función ahí para que estuviera definida y no existiera un hoyo (concepto que gráficamente era muy claro). En esta pregunta se acordó no pedir literalmente que la redefinieran porque además de que el maestro ya había hecho ejercicios de este tipo en clase el reto se reducía meramente a un proceso mecánico²³; en vez de eso se pidió que dijeran si el punto (con el cual la función estaría definida y sería continua) pertenecía a la gráfica, que determinaran el límite en ese punto y dieran una función que fuera igual a la discontinua pero que fuese continua en todo su dominio.

Otra pregunta consistía en construir una función discontinua en 3 puntos, esto con el fin de que dieran ejemplos más que nosotros se los mostráramos.

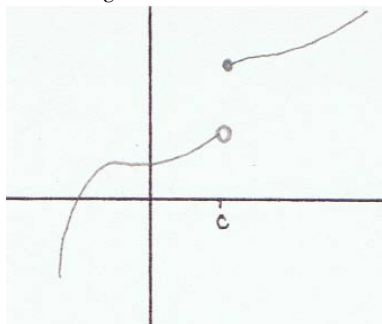
La última era para cubrir la posible teoría que hubiera visto el profesor sobre Epsilon y Delta, pero dentro de mi ejercicio se observó que eran 2 cosas simultáneas las que se pedían: contrastar continuo con no continuo y hacer el análisis a través de desigualdades, situación que se consideró realmente complicada para ellos, por lo que la pregunta devino en preguntar qué números cumplían cierta desigualdad e interpretar geométricamente el resultado. Finalmente el maestro diseña el siguiente

EXAMEN DE CONTINUIDAD.

1. Mi idea de CONTINUIDAD es...

²³Me atrevo a hacer esta afirmación porque inclusive durante la clase previa al examen el maestro intentó hacer un ejercicio de redefinición y los alumnos prácticamente inventaron la redefinición de ésta, al preguntar si $h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3x}{x-1}$ era continua en 1 y de no serlo si se podría redefinir, ellos dijeron que era como las gráficas que habían hecho, que en 1 no estaba definida y que había que redefinirla. Cuando se les preguntó que valor le darían al 1 unos dijeron distinto de 1 otros -1, y al momento de escribir la nueva función dijeron que valdría $h(x)$ si $x=1$ o $x=2$

2. Observa con atención la gráfica anexa y argumenta ¿Por qué no es continua la función? ¿Cuál de las tres condiciones de CONTINUIDAD no cumple?



3. Construye una función que no sea CONTINUA en $x = -2$ y $x = 7$

4. Sea $f(x) = \frac{x^3-3x-10}{x-5}$ Calcula a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ b) Reescribe $f(x)$ de tal manera que sea CONTINUA en 5

5. En un estacionamiento se cobran 3 dólares por la primera hora (o fracción) y dos dólares por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de 10 dólares.

a) Grafique el costo de estacionar un automóvil como función del tiempo que permanezca allí.

b) Discuta las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil.

6. Usa la definición de CONTINUIDAD y el Teorema de Límites para mostrar que la función es CONTINUA donde se indica. $h(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ en $c = 1$

7. Las funciones siguientes no son CONTINUAS en $x = 2$ ¿Cómo pueden ser redefinidas para que sean CONTINUAS en ese punto?

i) $H(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ j) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ k) $g(x) = \frac{x^2+4}{x-2}$ l) $G(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$

Ya en el examen, cuando se les pregunta qué quiere decir que una función sea continua la mayoría habla de una función que no presenta desperfectos, hoyos. Unos diferencian entre su noción y la noción de cálculo, hablan de “procesos que no sufren cambios” o “cambios abruptos”. El resto(sólo 5 del total) recita la definición que se dio en clase.

La segunda pregunta muestra que tienen clara la idea visual de continuidad, pueden ver una gráfica y determinar a ojo si hay o no continuidad, mejor aún usan la definición dada en clase para argumentar sus afirmaciones.

Cuando se les pide dar una función que no sea continua en 2 puntos, muchos ni siquiera lo intentan, los restantes pusieron funciones racionales con denominador lineal o algo que si era continuo o discontinuo solo en un punto no en los 2. Podríamos decir que en el proceso de determinar si una función es continua(al igual que en el de relacionar una expresión algebraica con una gráfica) solo se tiene claridad hacia un lado, es decir, dada una expresión pueden ver cuando

no es continua, pero si se les pide dar el ejemplo de una discontinua resulta casi imposible. Moraleja: “más importante que dotarlos de ejemplos, es lograr que ellos los den”

De ahí en fuera el resto del examen era talacha.

De esta sección de continuidad podemos decir que en un principio para ellos no existía relación entre el problema de continuidad y el problema de aproximación, sin embargo después de problematizar la continuidad y una vez que se introdujo la definición de continuidad los argumentos meramente geométricos para decir que una función no era continua cambiaron bastante por argumentos de límite pero relacionados solamente con los 2 primeros puntos, afirmo esto por que la indeterminación y la discontinuidad de una función pensaban se puede arreglar siempre con un argumento algebraico calculando límites. A pesar de que el maestro vio ejemplos(sólo con dibujos)de casos en que se cumplen las 2 primeras condiciones pero no la tercera, me parece que a los alumnos les faltó analizar más ejemplos(geométrica y algebraicamente)para que ellos construyeran la definición de continuidad, que aunque no fue algo que los desubicara o haya sorprendido no fue del todo digerible. Por eso las condiciones mencionadas no les parecieron naturales, más bien se trataba de condiciones que se tenían que cumplir por que así era la definición.

CUARTA CLASE

El objetivo de esta clase es trabajar con la noción y notación de razón de cambio, vamos hacia el estudio del “límite derivada”. Se insiste en razón de cambio porque es una de las raíces del concepto de derivada²⁴; en segundo lugar porque los alumnos en el examen de continuidad presentaron ideas de continuidad como “procesos sin cambios” o de discontinuidad como procesos “con cambios abruptos”²⁵, ideas que habría que confrontar con estas nuevas. En tercer lugar porque el profesor me pidió una introducción para que él analizara el problema de la velocidad instantánea.

La forma de trabajar será analizando situaciones reales y relacionando gráficas con los cambios observados, ya sea haciendo la gráfica o interpretando la misma. Para ello se divide al grupo en equipos y se pide hagan dibujos sobre el llenado de diferentes recipientes, cilíndricos, cónicos, en forma de copa y también un tanque de inodoro.

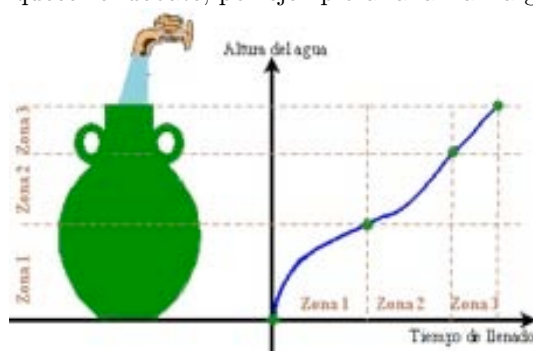
VALIDACIÓN

Esta clase nos arroja una muestra del peso que tiene en la validación una discusión con recursos. Como debatir respecto a los cambios que sufre un recipiente al ser llenado requiere básicamente intuición; las afirmaciones y conjeturas

²⁴Nació con problemas de velocidad-Newton- y problemas de calcular tangentes- Descartes- pero el ejemplo de la velocidad media e instantánea parece más natural y menos genial. Genial entendido como una idea brillante por parte de Descartes, Leibniz y compañía

²⁵Sobreentendiendo que quisieron hablar sobre posibles brinco u hoyos en la gráfica, pero de cualquier modo es importante que sepan expresar de forma mas precisa y acertada lo que tienen en la mente

hechas fueron desechadas o aceptadas por los mismos alumnos, así que mi misión consistió simplemente en hacer preguntas incómodas y meter cizaña para enriquecer el debate, por ejemplo al analizar la gráfica



Prof.: La altura empieza a crecer ¿cómo?-dibujó una recta, algo cóncavo y algo convexo-¿Cómo crece? ¿El nivel sube de forma constante?

Ellos: No, primero se llena más rápido y luego más lento

Prof.: Entonces, en el mismo tiempo ¿Dónde sube más el nivel de agua?

Ellos: En la primera parte, debe de ser cóncavo²⁶ y en el segundo tramo convexo por que durante la segunda etapa primero crece más lento y luego más rápido

Prof.: ¿Sí? Yo digo que es al revés

Varios: No, así está bien, es justo el crecimiento pero al revés de la primera parte, que era primero rápido y luego lento.

ABSTRACCIÓN

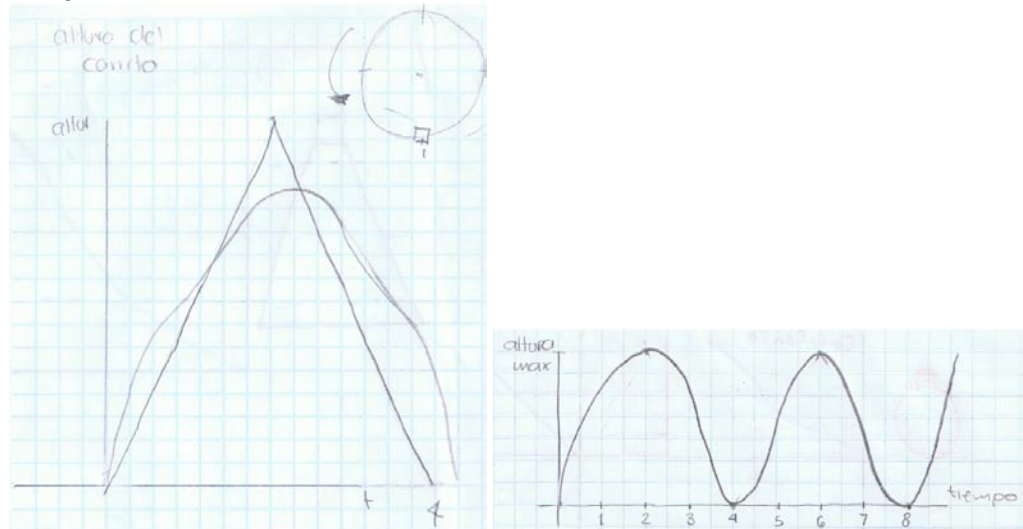
Es maravilloso cómo reaccionan los alumnos ante los cambios, tienen facilidad para distinguir velocidad y tipo de cambio. No les cuesta demasiado trabajo determinar si es cóncavo o convexo el trazo que represente el caso estudiado; al tiempo que representan gráficamente lo que sucede en un evento real, esto muestra madurez y para dar un salto más dentro de ella, habría que debatir las ecuaciones que corresponderían a sus dibujos. Pasar a la parte cuantitativa de los fenómenos estudiados es lo que enriquecerá su noción de cálculo, es cierto que entender primero la idea de cambio y sentir dichos cambios en el estómago es fundamental para dar el paso a lo abstracto y para motivar el estudio del nuevo objeto con herramientas matemáticas, cumpliendo así el ciclo del que habla Vergnaud, donde ahora el límite será el escalón para ascender al nuevo piso de la derivada.

Cabe señalar qué poder tiene la teoría sobre la práctica, me explico. Cuando les dije

Prof.: Piensen en la rueda de la fortuna de Chapultepec Oriente (hago dibujo) que da una vuelta en 4 minutos. Si reportamos la distancia que existe entre el

²⁶Ojo, en un principio no hablaban de cóncavo y convexo, simplemente lo utilizó para reportar el movimiento de sus manos

piso y el carrito que está más cerca del mismo conforme pasa el tiempo ¿Cómo sería la gráfica?



Las gráficas se dividen prácticamente en 2 tipos, los que afirman que son segmentos lineales y aquellos que dicen que son curvos, algo del tipo seno

Prof.: Vi sus gráficas y encontré 2 propuestas en general-las dibujo. Platíquenme el por qué de cada una

Equipo lineal: Son líneas por que la velocidad es constante nunca cambia, entonces no pueden ser curvas

Equipo curvo: No, pero estamos reportando altura no ángulo, al principio recorre menos y luego en el mismo lapso de tiempo avanza más, sin que cambie de velocidad

Equipo lineal: Pero si dibujas curva quiere decir que la velocidad ya no es constante²⁷

Equipo curvo:...

Prof.: De acuerdo, ¿Qué es lo que estamos reportando, altura contra tiempo o ángulo contra tiempo?

Ellos: Altura contra tiempo

Prof.: La velocidad que reporta cambio de ángulo respecto del tiempo se llama velocidad angular. ¿Cómo es la velocidad angular en este ejemplo?

Ellos: Constante

Prof.: Volviendo a nuestro caso de altura contra tiempo, en los primeros 30 segundos por ejemplo ¿De dónde a dónde se mueve? ¿Cómo es el cambio de su posición respecto del tiempo?

Ellos: Se mueve hasta un octavo de vuelta

Prof.: ¿Será la misma altura que recorre en los siguientes 30 segundos?

Ellos: No recorre más en los segundos 30 segundos

²⁷Como dato curioso, el equipo lineal al principio decía que el comportamiento era curvo y el equipo curvo decía que era lineal, mi misión fue meterles la duda

Prof.: ¿Por qué?

Ellos: Ahí se ve²⁸

Prof.: ¿Así con el dibujo me creen? ¿Qué tal que dibujo diferente la situación?-
Dibujo algo engañoso

Ellos:...

Prof.: ¿Qué ecuación le corresponde a esta figura-señalo la rueda de la fortuna?

Alumno: Pues como es circunferencia digamos $x^2 + y^2 = 1$

Prof.: Entonces-dibujo esa circunferencia-será cierto que la altura correspondiente a $\frac{1}{2}$ esté justo a la mitad-y señalo el intervalo $[0,1]$ en el eje Y

Algunos: No, está más alto que .5, de hecho la altura que le toca es “raíz cuadrada de 1 menos .5 al cuadrado”

Prof.: Entonces ¿Recorre la misma altura en los primeros 30 segundos que en los segundos? ¿Cómo es la gráfica?

Ellos: Curva, porque no recorre la misma altura en el mismo tiempo

Prof.: Entonces ¿Está bien la gráfica propuesta?

Varios: Si

Otros: No, por que primero sube menos y después más[refiriéndose a los dos intervalos de 30 segundos que analizamos] Debe ser primero convexa y luego cóncava

Prof.: ¿Qué sucedería si subo la rueda de la fortuna 5 metros? ²⁹

Varios: Sube la gráfica 5 metros

Prof.: Y si las vueltas ahora son de 2 minutos

Ellos: Pues se apachurra la gráfica, da 2 vueltas en el mismo tiempo que antes hacía una

Con este diálogo pudimos ver cómo por un lado la teoría (de geometría analítica) sirvió para argumentar y tener certeza en la afirmación de que el comportamiento era curvo. Del mismo modo la idea de que cambio constante implica comportamiento lineal, sustentó los argumentos del equipo lineal y creó un rico debate, y aunque no trascendió por que estaba mal el análisis de qué variable cambiaba respecto a cual, tuvo lugar una discusión en la que un argumento teórico estuvo por encima de un dibujo, lo cual es un punto a favor pues los alumnos muestran que ese tipo de razonamientos (solo con dibujos) no son argumentos suficientes para convencerse de una verdad. Respecto a esto último, es de suma importancia que hayan (debatido y) reconocido cuáles eran las variables involucradas, pues es fundamental para hablar de derivada y sobre todo para estudiar regla de la cadena³⁰, que hayan reaccionado favorablemente ante cambios de cambios, como lo fueron la traslación de la rueda y el duplicar la

²⁸Una chica se aferra y se fundamenta en la teoría para afirmar que dado que la velocidad es constante no puede ser una curva aunque en el dibujo lo aparente. Es interesante esto porque antepone la teoría a un dibujo y eso muestra un mayor nivel de convencimiento.

²⁹Como un comentario marginal, no resultó raro que la misma chica respondió rápidamente qué le sucedía a la gráfica si cambiaba de carrito y me subía al que estaba a 5 metros del piso, su respuesta fue “nada, la gráfica es idéntica pero empiezas a dibujar en 5”

³⁰Desde mi punto de vista la presentación de suma, resta, multiplicación y división de derivadas se podría dar como una consecuencia del estudio de la regla de la cadena. Pues de hecho son casos particulares de ésta

velocidad de giro, esto habla también de que es posible estudiar y sembrar desde este momento precisamente la regla de la cadena que tanto trabajo les cuesta.

TRABAJO EN EQUIPO Y MANEJO DEL LENGUAJE

Trabajar en equipo, en ésta como en las clases anteriores, enriquece y afina la discusión grupal, pues cuando los grupos en que se dividió al salón presentan sus ideas, son ideas que fueron previamente discutidas en el seno del grupo pequeño, cuando se debate si la gráfica de “jalarle al baño” es de un modo u otro, cada equipo muestra argumentos para sostener sus dibujos. Aunado a lo anterior como introduzco cóncavo, convexo y lineal, su vocabulario aumenta y dado que la discusión se centra en ver qué tipo de cambios ocurren, los nuevos términos se vuelven normales y son utilizados por los estudiantes. Dicho de otra forma, se introdujo nuevo lenguaje como consecuencia de un problema.

Además como sugiere Santos³¹ se promovió un ambiente en el que los alumnos evaluaron, cuestionaron y criticaron las sugerencias o ideas que se presentaron tanto por mí como por los mismos estudiantes, logrando de este modo una simulación de la actividad matemática y una construcción grupal del concepto de razón de cambio.

Algo que debo reconocer y que es muy importante, es que en esta clase me faltó introducir la notación de razón de cambio. Esto es fundamental porque de lo contrario todo lo que se trabajó queda en dibujos e ideas pero no aterriza. Aunado a ello después de introducirla habría que trabajar cómo expresar cambio instantáneo con esa nueva notación.

USO DE LA TECNOLOGÍA

En esta clase dado que se hizo un análisis cualitativo de razón de cambio, no fue necesaria la tecnología. Sin embargo para la parte cuantitativa (que se hizo en otra clase), aparecerá como auxiliar para visualizar lo hecho a mano y desarrollar la intuición.

Durante la siguiente clase con el maestro, se hace un estudio de la velocidad instantánea, trabajando con el problema de velocidad media e instantánea. Usando sobre todo la calculadora para hacer aproximaciones y construir el límite derivada sin llamarlo así.

QUINTA CLASE

En vista de que el profesor estudió la caída libre y la velocidad instantánea, el objetivo de esta clase será estudiar el “límite derivada” desde el punto de vista geométrico, trazar y calcular ecuaciones de secantes para aproximarse de este modo a la tangente. Se presentará la ecuación de la parábola $y = -x^2 + 1$ y a través de rectas secantes, empezando por la que pasa por (1,0) y (0,1) se buscará conjeturar el mismo límite que obtuvieron al calcular la velocidad instantánea.

³¹Santos, 1998 op. cit.

VALIDACIÓN

Contrario a lo que sucedió durante la cuarta clase en la que a falta de algoritmos para trabajar sus ideas intuitivas y conceptuales fluyeron y fueron suficientes para trabajar con razón de cambio, en esta clase la falta de herramientas aun acompañadas de ideas intuitivas, fueron definitivas para empobrecer su participación en la verdadera discusión (que no era la de cuál es la ecuación correcta de cierta recta) y por tanto su validación de lo obtenido. Una vez que se obtuvo una expresión para calcular la tangente de una curva específica en un punto dado ($-x^2 + 1$ en $(1,0)$) los alumnos sintieron cierta confianza y dieron peso a lo concluido al obtener como resultado el límite derivada, sin llamarlo así por supuesto, porque coincidía con el límite que habían obtenido con el profesor al estudiar la velocidad instantánea, es decir, se sentían en terreno seguro ya que no era la primera vez que veían ese límite y confiados porque inclusive sabían calcularlo. Dicho de otro modo, la similitud de resultados entre algo que se daba por cierto y a lo que se llegó en esta clase influyó para asentar más su conjetura sobre el límite que les permitía calcular la pendiente de la recta tangente.

ABSTRACCIÓN

En esta clase y como podremos ver en el resto del curso la noción de tangente a una curva fue un concepto turbio para los estudiantes. En el proceso de construirla a través de la aproximación por medio de secantes, más allá del gran problema que se enfrentó porque pocos estudiantes tenían presente la ecuación de la recta, en primera instancia los resultados fueron favorables ya que los estudiantes concluyeron su análisis obteniendo la ecuación general de la pendiente de la tangente (insisto, en un caso particular). Es de llamar la atención que como suele pasar en matemáticas, por tratar de evitar hacer más casos en un problema se lanzaron sobre la generalización, esto por un lado mostró su desgano (ya que sólo habíamos calculado dos pendientes) pero mostró madurez, que es lo que más importaba, ya que no sólo dijeron que había que hacer el caso general sino que lo hicieron, como lo muestra el siguiente diálogo

[después de hacer un repaso de la ecuación de la recta y obtener la pendiente de la segunda secante]

Ellos: Entonces la ecuación sería $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

Prof.: ¿Qué sucederá para el punto medio entre $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(1,0)$?

Alumna: La ecuación es $y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{4}$

Pido otra secante y ante su respuesta de ya no más

Prof.: Bueno ¿Cómo hacemos para que la recta roce sólo en $(1,0)$? ¿Cuál será la ecuación de dicha recta?

Alumno: Hay que seguir sacando puntos medios y secantes

Prof.: ¿Hasta cuándo?

Alumna: Pues hay que hacer un límite

Prof.: ¿Cuál? ¿De qué?

Alumna: Quién sabe, la cosa es que “x” tiende a 1, “y” a cero y la pendiente parece que se va a -2

Todos parecen estar de acuerdo
 Prof.: ¿Cómo escribimos eso?
 Ellos: ...
 Prof.: Dicen que si seguimos sacando secantes podríamos llegar a la tangente y que eso se lograría con un proceso de límite ¿Cómo fuimos obteniendo las ecuaciones de las rectas secantes?
 Ellos: Pues primero sacamos la pendiente y luego la ordenada al origen. La pendiente la calculamos con $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
 Prof.: ¿Quién era y_2 , y_1 , x_2 y x_1 ?
 Ellos: y_2 era siempre 0, x_2 siempre 1, x_1 era 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y y_1 el punto que le correspondía
 Prof.: ¿Podrían pronosticar la siguiente pendiente de la recta secante?
 Ellos: Pues... $\frac{1 - \frac{15}{64}}{1 - \frac{7}{8}}$ 32
 Alumno: Como el x_1 se está acercando a 1 podemos escribirlo como 1 menos un cachito
 La mayoría luce convencida
 Prof.: ¿Cómo escribimos lo que dijo su compañero?
 Alumna: Podría ser 1-h y hacer que h se vaya a 0
 Alumna2: Noo, h se iría a 1
 Varios: No, por que la h es como la distancia que hay entre el punto medio y el 1, entonces se va haciendo chiquita
 Mayoría: Si h se va a cero
 Prof.: Entonces ¿cómo escribo todo esto?
 Alumna: Pues con un límite, límite cuando h tiende a cero de 0-f(1-h) entre 1-(1-h)-Lo escribo en el pizarrón
 Muchos: ¡¡Aaahh!! Es ese límite, nos hubieras dicho desde el principio
 Prof.: A ver, calculen entonces el límite
 Lo hacemos en el pizarrón en vista de que a muchos se les complica, me van dictando y concluimos que es -2
 Prof.: ¿Qué es este -2 que nos dio?
 Ellos: Es la pendiente de la recta tangente
 Prof.: ¿Qué tangente? ¿Cualquier tangente? ¿Tangente de qué curva?
 Ellos: No, la tangente de $-x^2 + 1$ que pasa por el (1,0)
 Prof.: ¿Podrían calcular la recta tangente de la misma curva pero que pase ahora por el (2,-3)?
 Ante el silencio, pregunto nuevamente
 Prof.: ¿Podremos repetir el proceso de las secantes?
 Alumna: Si, pero mejor utilizamos ese límite que ya encontramos porque sería lo mismo y ponemos 2 en lugar de 1
 Varios: Si mejor así
 Prof.: Háganlo
 Varios: Da -4
 Prof.: ¿Pueden hacer entonces cualquier caso? Por ejemplo x=10

³²Dijeron literalmente “el valor que le corresponde a 7/8”. Resalto este hecho porque más adelante esto facilitó el caso general

Mayoría: Si es lo mismo

Alumna: De hecho podemos hacer el caso general, en lugar de poner 1 o 3 o 10 ponemos x

Varios: Ah, pues sí

Como podemos ver en este ejercicio, los estudiantes usaron su idea geométrica para obtener la tangente y la llevaron a cabo algebraicamente con esfuerzo, guiados sobre todo por una alumna. Llevar a cabo los dos procesos simultáneamente habla de una concepción más global del problema y ésta fue una característica del grupo de aquí en adelante, muchos alumnos sólo tenían una o ambas, pero nunca conjuntas.

Sin duda un problema que comenzó a tomar relevancia fue el de la asociación gráfica-ecuación, parecería que alumnos de último año de CCH conciben la relación biunívoca entre una ecuación y su gráfica, pero no es así, la relación sólo es clara hacia un lado. Seré más claro: los alumnos pueden operativamente calcular valores de una ecuación dada, sin embargo con frecuencia no son capaces de determinar si cierto punto está en la gráfica o muchas veces ni siquiera saben qué valor le corresponde a un valor del dominio. La diferencia es sutil, pero impactante: dada una función, pueden obtener varios valores e inclusive graficarlos³³, ¡pero no pueden asegurar si un punto vive en la gráfica! Resalto esto por que además de ser grave, fue un problema para generalizar y construir el límite que permitía calcular la pendiente de la recta tangente.

Aunado a lo ya mencionado, como afirma Brosseau, esta presentación de la tangente resultó un golpe fuerte (que no esperaba fuera de ese tamaño) al entrar de lleno a la construcción de la misma, estuvo muy descontextualizada y la razón de su estudio fue demasiado ficticia.

TRABAJO EN EQUIPO Y MANEJO DE LENGUAJE

En esta clase no se trabajó por equipos, la discusión estuvo abierta todo el tiempo para todo el grupo, lo cual posiblemente hizo que avanzará más rápido la clase y que muchos alumnos no procesaran del todo bien lo visto³⁴ ya que algunos alumnos fueron sugiriendo ideas y argumentando de tal forma que convencían al resto.

LA TECNOLOGÍA

La calculadora sirvió para calcular pendientes, lo cual a su vez les dio la idea de un patrón en el comportamiento de las mismas y en consecuencia los condujo a la conjetura y construcción del límite “derivada”. Aunque no jugó un papel esencial porque otra vez se trató de una clase más cualitativa que cuantitativa, y eso de hecho se debió al camino que tomaron los alumnos, ya que la misma calculadora les pudo hacer todas las cuentas, pero decidieron atacar el caso general. Podríamos decir que ante cierta madurez la calculadora que bien puede

³³ojo, valores que ellos escogen

³⁴Situación que percibí hasta escucharlos y ver sus tareas posteriormente

hacer todos los cálculos pasa a ser una segunda herramienta, la principal son los conocimientos previos y la idea para resolver el problema en cuestión.

SEXTA CLASE

Sesión en las computadoras con el programa Geogebra. Con el fin de reforzar su idea geométrica y analítica de tangente se les pedirá dada una función y un punto³⁵, encuentren una recta tangente que pase por dicho punto. En primera instancia sólo se trata de dibujarla, la segunda etapa consistirá en describir con lenguaje matemático lo que hicieron en la computadora, es decir, escriban paso a paso la construcción de la tangente.

VALIDACIÓN

La discusión vuelve a ser fundamental para que los alumnos validen su conocimiento, en este caso durante la descripción de su trabajo para encontrar la tangente, ya que seguir la falsa idea de que h en la expresión $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la distancia entre los puntos $f(x)$ y $f(x+h)$ los llevó a una aberración, pues después de repasar la construcción y calcular la distancia entre $f(x)$ y $f(x+h)$ para x fija notaron que aunque la distancia efectivamente tendía a cero, no se trataba de la misma cantidad y con ello concluyeron que h hacía referencia a otra distancia, aquella que hay entre los puntos de dominio $(x, 0)$ y $(x \pm h, 0)$, logrando de este modo detectar su error y corregirlo. También la discusión plenaria sirvió para darle más luz al “límite derivada”, pues a través de la participación expresada en público se concluyó al final de la clase qué quería decir y qué significaba cada “elemento” en la expresión que ya se sabían de memoria, es decir, que el cociente de diferencias es una razón de cambio entre dos puntos próximos del dominio y sus respectivas imágenes y que para lograr que los primeros puntos se acerquen hacemos que la distancia entre ellos, h , tienda a cero con un límite.

ABSTRACCIÓN

La idea geométrica está clara y su idea de límite es buena, pues por un lado saben gráficamente que a través de secantes se pueden aproximar a la tangente y por otro que un objeto se aproxima a otro si la distancia entre ellos se hace cero. Esto muestra que se está digiriendo bien el concepto intuitivo de límite y que éste empieza a fungir como herramienta para construir nuevos conceptos, cumpliendo el ciclo que menciona Vergnaud.

Nuevamente parte de la construcción y desarrollo de la clase no se dio de manera adecuada por que varios alumnos no tenían clara la ecuación de la recta. También se vieron afectados una vez más porque el problema de dada una gráfica y dar puntos sobre la ella se les dificulta(no pudieron inclusive dar un punto sobre la función que estuviera cercano a $(-1, -1/2)$, más aún, al pedirles que dijeran la imagen de un punto específico, muchos todavía adivinaban). Esta

³⁵La función por estudiar la eligieron ellos y fue $f(x)=1/(x-1)$

falta de herramientas son fundamentales para trabajar este tema y en particular con la computadora. Por ello, como nos recuerda Schoenfeld, para construir los nuevos conceptos, por mucha creatividad e ideas que tengan, con esta ausencia de conocimientos es difícil que construyan uno nuevo.

Posiblemente debido a que se recorrió el camino de un problema³⁶ hacia la teoría se pudo concluir que al obtener el límite “tangente” el resultado era la pendiente de una recta, no la recta misma; resalto esto por que al obtener solamente un número de manera mecánica se puede dar dicha confusión y también se olvida de paso que el objetivo inicial era encontrar la ecuación de una recta tangente a una curva. Confusión que puede aumentar si pasamos rápidamente de estudiar un caso particular(función dada, punto dado) al caso general, ya que en el primero se obtiene un número y en el segundo usualmente una incógnita.

TRABAJO EN EQUIPO Y MANEJO DE LENGUAJE

Al trabajar varias personas por computadora se permite la discusión usual sobre qué se tiene que hacer y cómo se va a hacer. La diferencia entre este tipo de sesión y las cotidianas en el salón es que aunque se puede llegar a enriquecer la visión personal ya que algunos dominan mejor la computadora y la fuente de ideas es mayor para ejecutar un plan de trabajo, se deben discutir muy bien las ideas antes de llevarlas a cabo ya que cuando no usan computadora, cada uno puede ejecutar en su cuaderno o en su calculadora lo que le venga a la mente y posteriormente discutirlo con su equipo, mientras que en este caso como sólo hay una computadora tienen que conciliar para picarle al dispositivo.

Se debe resaltar también que el uso de la computadora los obliga a ser precisos en su lenguaje, ya que para preguntar o para discutir con sus compañeros es necesario mencionar los objetos definidos en el programa y los procesos a seguir.

LA TECNOLOGÍA

La computadora sirvió para reforzar y dar intuición pues permitió ver más clara o ver si es que no se había visto, la idea de aproximación de rectas secantes.

Es importante recalcar que aunque el programa les permite dibujar la idea que tienen de aproximación de rectas secantes a la recta tangente o inclusive la misma recta tangente, esto no quiere decir que han entendido la construcción(que de hecho no habían entendido). Por eso la computadora se vuelve un arma peligrosa para generar conocimiento virtual si no se ha trabajado antes medianamente la teoría o si no se escribe con matemática lo hecho en la pantalla. Como una consecuencia natural de ello convendría pedirles que hicieran una construcción en un macro de Geogebra, elaborando un comando que sirva para obtener la pendiente de las rectas secantes (y por tanto la de la tangente) ya que esto al igual que en las hojas de cálculo, los obliga a definir objetos de entrada, operaciones entre ellos y objetos de salida, que es como pensamos cuando construimos o demostramos algo en matemáticas.

La siguiente clase tienen:

³⁶Aunque haya sido meramente matemático

EXAMEN DEL LÍMITE DERIVADA.

1. ¿Cuál es el significado de “h” en la definición de velocidad instantánea?
 $Vel_{inst}(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$
 2. Considere $y = -x^2 + 2$
 - a) Dibuje la gráfica con todo el cuidado posible
 - b) Dibuje la recta tangente en P(2,-2)
 - c) Calcule la pendiente de la recta secante que une P(2,-2) con Q(2.01, -2.0401)
 - d) Mediante el proceso de límite, encuentre exactamente la pendiente de la recta tangente a P(2, -2)
 3. Calcule el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en $(3, \frac{1}{3})$
 4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en $x_0 = 2$
 5. El peso en gramos de un tumor maligno en el momento t está dado por la función $W(t) = \frac{1}{5}t^2 - .09$ donde t se mide en semanas. Encuentre el índice de crecimiento del tumor cuando t=10
 6. Suponga que se deja caer un pelota desde la plataforma superior de observación de la torre CN, 450 m sobre el nivel del suelo. Use la ecuación de movimiento $s = f(t) = -4.9t^2$ para responder
 - a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
 - b) ¿Con qué velocidad choca con el suelo?Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba del suelo con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Su altura S al término de t segundos tiene un valor aproximado de $S = 128t - 16t^2$ pies
 7. ¿Cuándo alcanza su altura máxima?
 8. ¿Cuál es su altura máxima?
- * Resolución del examen. Presentación formal de la derivada

SÉPTIMA CLASE

Aunque varios alumnos siguen presentando dificultades con el problema de la tangente y para tratar de seguir avanzando, se intentará a través de problemas de máximos y mínimos retomar y refinar su concepción de tangente. Se les pide que encuentren dado un lazo de 21 unidades de longitud el rectángulo de mayor área, posteriormente se les pedirá hallar el triángulo y cuadrado de área mínima y máxima con el mismo lazo³⁷.

VALIDACIÓN

Es claro(y un poco triste para la propuesta) que se siguen apoyando en lo que dice la calculadora o lo que afirma el maestro, expresiones como “lo hice porque

³⁷Se intentará ahora probar con un problema meramente matemático, ya que ante otro grupo como se puede leer en el Apéndice A se presentó la actividad de máximos y mínimos con un problema de rapidez de un avión, donde el objetivo central fue obtener criterios para máximos y mínimos en términos de crecimiento y decrecimiento

tú dijiste” o “es así porque así dice la calculadora” lo confirman. Un antídoto ante esto en el primer caso, fue “echarle” la culpa a alguien del grupo, afirmando que yo había hecho lo que me dijeron que hiciera, de este modo tuvo lugar otra discusión para definir porqué se había hecho así y cómo debería hacerse. Aunado a ello resultó útil apoyar la idea de un alumno de calcular un límite (sin mucho sentido) y ya que hubieron terminado preguntarles el por qué de la cuenta, porque esto mostró que no hay que hacer cuentas por hacerlas. En el segundo caso de validación por tecnología preguntar por la certeza del resultado, recordando que los aparatos que utilizamos nos dan aproximaciones (como se analizó el caso de $1/3 = .3333$), ayudó a hacerlos dudar del mismo y buscar mayor certeza a través de la teoría.

ABSTRACCIÓN

Lo primero que quiero señalar es que la noción de límite y “aproximarse a” continúa siendo buena, pues durante esta clase sugirieron varios límites y conjeturaron aproximaciones en el proceso de resolución, entre ellos resalta el proponer un límite para que los lados se parezcan (haciendo un lado igual a b y el otro a $b+h$) y conjeturar que los rectángulos se están aproximando a un cuadrado. Creo que hay buenas ideas como la de hallar una gráfica para visualizar el punto máximo y a su vez la de encontrar una función para obtener la gráfica, sin embargo parece, como se cansa de repetir Schoenfeld que les faltan herramientas, esta vez escasean en saber resolver sistemas de ecuaciones o plantear un problema a través de ecuaciones, y es que curiosamente los que tenían ideas sufrían problemas técnicos y viceversa, los que sabían resolver ecuaciones y se sentían más hábiles con el nuevo concepto de tangente no se mostraron tan lúcidos como los otros. Esto tal vez se deba a lo que a veces sucede en matemáticas, el que enfrenta un reto a veces tiene tantas herramientas que piensa en lo más complicado, cuando hay soluciones simples que no requieren de tanta teoría (no queriendo decir con esto que no convenga tener la mayor cantidad de herramientas posibles). Volviendo a lo que hicieron los alumnos, después de dar posibles soluciones al problema usando solamente la calculadora trataron de conjeturar cómo debería ser el rectángulo

Ellos: Pues parece que entre más se parezcan los lados más grande va a ser el área, el problema es que un cuadrado no es rectángulo

Prof.: ¿Ah no?

Ellos: No porque tiene los lados iguales y los rectángulos tienen los lados diferentes

Prof.: ¿Ah sí? ¿Cuál es la definición de rectángulo?

Alumno: Debe tener cuatro lados y los lados deben ser paralelos -dibujo un rombo-

Ellos: No, los lados deben de ser perpendiculares

Prof.: Entonces un rectángulo es un cuadrilátero de lados paralelos y perpendiculares 2 a 2 ¿Tiene el cuadrado derecho a ser rectángulo?

Ellos: ... sí

Prof.: ¿Entonces podrían reformular su conjetura?

Ellos: Si, el rectángulo de área máxima es un cuadrado
 Prof.: ¿Cómo probarían que es cierto lo que afirman?
 Alumna: Hay que hacer un límite que tienda a 5.25
 Prof.: El límite de qué cuando qué tienda a qué
 Ellos:...

Alumno: (como cambiando la idea del cuadrado) Podemos dibujar una gráfica y ahí vemos cuál es el punto más alto
 Prof.: La gráfica de qué
 Alumno: La gráfica del área, porque de esa queremos el punto más alto
 El grupo parece convencido
 Prof.: ¿Cómo encontramos la gráfica?
 Alumna: Necesitamos la ecuación del área. . . pues sabemos que el perímetro es 21 y que el área es base por altura
 Prof.: Sí ¿Cómo escribo eso?
 Varios: Pues le podemos poner valores, como 5 y 5.5 y así
 Prof.: ¿Cómo vamos a saber cuál es el área máxima?
 Alumna: Perímetro es $2b + 2h$, despejamos b y sustituimos en la ecuación de área, tenemos que el área es $2\left(\frac{21-2h}{2}\right)h$
 Prof.: [Lo anoto en el pizarrón] ¿Y ahora?
 Alumno: Hay que encontrar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ el límite cuando h tiende a 0 de $f(x+h)$. . . [límite derivada]
 Alumno A: Oye pero h no se está yendo a 0
 Alumno B: Pero esa h no es la misma h de la altura
 Prof.: ¿Y de qué es?
 Ellos: Pues así es el límite
 Prof.: A ver háganlo
 Ya que lo hacen paso equipo por equipo para preguntar para qué buscamos ese límite o qué información nos brinda y las respuestas se dividen entre quién sabe y porque tu dijiste.
 Prof.: ¿Para qué estamos encontrando este límite?
 Ellos:...

Prof.: Vamos a recapitular, qué buscamos y para qué
 Varios: Buscamos la gráfica del área para ver su punto más alto
 Prof.: ¿Qué pinta la ecuación que tenemos?
 Muchos corren por su calculadora y
 Ellos: Es una parábola, abre hacia abajo y tiene el punto más alto en 27.56
 Prof.: Es decir, que el área más grande es de 27.56. –le pregunto al compañero que observó y calculó áreas cada vez más grandes-¿Oye 27.56 es el área más grande?
 Alumno: No, tengo una de 27.5609
 Prof.: Entonces ¿Cuál es el punto más alto? ¿Cuál es la ubicación exacta del punto más alto?³⁸

³⁸Un alumno grafica la función en su celular y afirma que es en 5.25 donde se alcanza el área máxima, le pregunto cómo sabe que es exactamente ahí y dice que porque así dice su programa

Después de un rato de pensar

Alumno: El punto más alto es cuando la tangente está acostada, o sea, cuando la pendiente es 0

Prof.: ¿Por qué?

Alumno: Porque primero las pendientes son positivas antes del punto más alto y luego negativas, entonces tuvo que pasar por cero

Muchos parecen convencidos

Prof.: Bueno, díganme ¿Cuándo tenemos área máxima?

Varios: Hay que igualar el límite [señalan el límite derivada] a cero³⁹

Cada equipo a su ritmo pero todos obtienen el límite y cuándo se tiene el área máxima⁴⁰

Prof.: ¿Qué podemos concluir de todo esto?

Unos: Que sí era un cuadrado que mide 5.25 de lado

Prof.: ¿Qué sucedería si en lugar de medir 21, el lazo mide "1"?

Alumna: El lado sería de 1/4

Prof.: ¿Por qué? ¿Tiene que ser un cuadrado?

Ellos: ... no necesariamente

Alumna: Si, todo es igualito sólo que en lugar de poner 21 ponemos "1"

La mayoría se convence y al hacer las cuentas lo confirman, debe ser 1/4.

Notemos cómo de no haber dilucidado que un cuadrado es un rectángulo, tal vez la conjetura no se hubiera asentado y no se hubiera llegado a la discusión posterior.⁴¹ También vale la pena resaltar cómo la idea de la continuidad en este caso de la derivada⁴², ayudó a concluir que para pasar de un valor positivo de una pendiente a uno negativo forzosamente tuvo que pasar por cero. Debemos subrayar también su madurez para elaborar y probar su conjetura, lo cual resulta un procedimiento natural al atacar un problema. En primera instancia uno da posibles soluciones, prueba las mismas y hace conjeturas, en la búsqueda por tener certeza se van encontrando caminos y/o delimitando aquellos que den una solución, se van corrigiendo ideas y/o resultados y finalmente uno se da cuenta de que ese camino no llevaba a una solución(¡pero no fue tiempo perdido!) o que la conjetura era cierta y esa es una forma de probarla. Este proceso que se da normalmente en matemáticas y en cualquier problema que se enfrenta, lo realizaron los alumnos y se logró como dice Brosseau, creando un microcosmos dentro del salón que reflejara las actividades del quehacer matemático.

Hay que hacer notar que existe un contraste interesante entre el uso del "límite derivada" para obtener pendientes de tangentes y visto como razón de cambio, la mayoría de los equipos sugirió hacer las cuentas del límite derivada(y

³⁹Es de llamar la atención que ahora ya han trabajado tanto con el límite derivada que lo llaman muchos "el límite"(y cero que con justa razón)

⁴⁰Interesante que sólo un equipo hable de razón de cambio puesto que en un principio el problema parece mas relacionado con una razón de cambio y no con el de encontrar tangentes a una curva. Por eso llama la atención que sólo este equipo hable de un problema de cambio de área respecto del lado y en consecuencia hagan "otro límite", uno donde la diferencia de los lados tiende a 0. Al final se dan cuenta que es el mismo que los otros calcularon y concluyen lo mismo.

⁴¹Impresiona que no sepan qué es un cuadrado y lo que puede generar ésto

⁴²Ojo, que no siempre sucede

no la derivada literalmente a pesar de que ya vieron inclusive reglas de derivación en clase) argumentando que así se obtiene la pendiente de la tangente, solamente un equipo hizo el límite pensando en la razón de cambio del área respecto del cambio del lado. Esto para mí habla de que asocian la herramienta derivada con la obtención de tangentes y esto se refleja claramente cuando pregunté qué significaba la h del límite derivada y todos asumieron que así se encontraban las pendientes de las tangentes y no le dieron la interpretación de razón de cambio. Esto se hace más evidente cuando en la tarea(dada por el profesor) al responder una pregunta que involucraba encontrar un máximo, vi que el método que usan es el de las tangentes con pendiente cero a la gráfica de la función.

Es también de llamar la atención que a pesar de que identificaron cuál era la función a estudiar cuando hicieron el límite derivada, desarrollaron todo y usaron en sus desarrollos como variable una “ c ” o una “ x ”, a pesar de que la función estaba en términos de “ b ” y “ h ”. Esto me dice como ya mencioné antes, que hay una asociación inmediata entre límite derivada, pendiente de la tangente y la costumbre de usar cierta variable, lo cual nos remonta nuevamente a resaltar más en los problemas qué depende de qué, ya que es de suma importancia cuando derivamos(observamos un cambio)saber respecto de qué variable lo estamos haciendo. Esto a su vez se podría solucionar si estudiamos en los fenómenos los posibles cambios respecto a todas las variables involucradas. Otra forma(que no se contrapone con la anterior) es que desde un principio se estudie el todo como una composición de funciones, de este modo las operaciones entre funciones se ven como composición y los cambios siempre deben de observarse respecto de quién se hacen.

MANEJO DE LENGUAJE Y TRABAJO EN EQUIPO

Es interesante observar en el diálogo cómo fueron construyendo la solución entre todos, pues una vez más el trabajo en equipos rápidamente se trasladó al trabajo de todo el grupo. Esta característica también refleja la forma de resolver problemas entre todos, pues cada uno aporta ideas y herramientas y es más posible que todos juntos den solución al problema que si cada uno lo atacara por su parte y no lo compartiera con los demás.

LA TECNOLOGÍA

La calculadora nuevamente sirvió para el desarrollo de la intuición y para corregir afirmaciones hechas durante el proceso de solución; resulta claro que sin una idea de qué se quería hacer o qué datos eran importantes en el problema, la calculadora hubiera estado de más, porque sólo arrojaría datos, posiblemente sin interpretación. Y aunque como ya dije les dió intuición, esta vez no les dió certeza(hasta donde certeza puede ser) y es precisamente en ese momento en que necesitan precisar o comprobar sus resultados que se desarrolla la teoría(ya sea nueva o alguna de su banco) y la calculadora al cumplir su misión de calcular, se hace a un lado para que se trabaje la parte conceptual y teórica del problema. También se observó cómo la conjetura de que el rectángulo de área

máxima es el cuadrado fue promovida por la calculadora y el hecho de que el área máxima fuera 5.25 también, y aunque esta última afirmación se argumentó “por que así dice mi celular”, tampoco se llegó a ella por azar, hubo un trabajo previo y ante la falta de argumentos para concluir el resultado (que se había conjeturado) pues escuchamos este tipo de respuestas.

Sin embargo no podemos obviar que sigue presente el fenómeno de argumentar y dejarse llevar por los resultados de la calculadora, pues algunos tabulan y al observar que el valor más grande era 5.24 (ya que hicieron una tabulación de .1 en .1) el problema les parece resuelto. Otros aunque tienen la idea de cómo hacerlo, siguen haciendo tablas y resolviéndolo con el dibujo a ojo, por ello afirman que 5 es el valor para el cual se tiene área máxima aun cuando ya se había visto que existían rectángulos de área más grande que aquel de lados 5 y 5.5. Esto también muestra que el tema parábola en su momento pasó de noche y ya se olvidó, porque nadie sugirió hallar el vértice e inclusive muchos ni siquiera recordaban cómo se llamaba ese punto. Esta carencia, de no ser por la idea del compañero sobre la tangente de pendiente cero, hubiera obstaculizado esta solución.

La siguiente clase el maestro obtiene las reglas de derivación para la suma, resta, multiplicación, división de funciones através de la definición del límite derivada. También se obtiene la derivada de x^n desarrollando el binomio de Newton.

OCTAVA CLASE

El profesor decide ver las derivadas de las funciones trigonométricas. En función de comparar los avances que han tenido respecto a la noción de límite y en vista de lo que el profesor quiere ver, decido trabajar con el límite estrella $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$. La actividad consistirá en discutir grupalmente y aproximar el perímetro de una circunferencia de radio uno a través del perímetro de polígonos regulares inscritos.

VALIDACIÓN

Discutir entre todos es lo más rico para su aprendizaje, debatir si un límite en una variable es equivalente a otro en otra variable, si se debe resolver el problema de un modo o de otro o si cierta afirmación es cierta o no es algo que ayuda a la construcción de su conocimiento y le da una verdadera validez a lo aprendido, pues saben que lo que obtuvieron no cayó del cielo o es cierto por que el maestro lo escribió, es cierto porque lo construyeron con argumentos válidos. En medio de la discusión en la plenaria los alumnos no tienen oportunidad de preguntar si algo está bien u obtienen una calificación por su trabajo, simplemente se decide entre todos con argumentos claro está, lo que procede y lo que no. Esta actividad es realmente sana para que formen su propio juicio y deja espacio para estar abierto a opciones e ideas, sin cerrarse a las propuestas de otros compañeros.

ABSTRACCIÓN

A pesar de que yo hubiera querido ver este límite antes, observar los resultados que arrojó esta clase fue realmente interesante, sobre todo en el aspecto de su concepción y manejo del límite (que es lo que más nos interesa en este curso). Digo esto porque hubo una abstracción y una intuición, así como conjeturas que me sorprendieron. Estos detalles que menciono se podrán ver con más claridad en el siguiente diálogo

Una vez que deciden empezar su aproximación al perímetro de la circunferencia con un pentágono

Prof.: ¿Cuál sería el perímetro del pentágono? -lo dibujo en el pizarrón

Unos: Algo de apotema sobre 2

Otros: Es 5 veces el lado [*del pentágono*]

Prof.: ¿Cuánto mide el lado?

Ellos: L

Prof.: ¿Mide L para todos los polígonos?

Ellos: No

Prof.: ¿Cuánto mide por ejemplo para el pentágono?

Ellos:...

Prof.: ¿Qué datos tenemos y qué queremos saber?

Ellos: Tenemos que está inscrito en una circunferencia de radio 1 y buscamos su perímetro

Unos: Podríamos usar Pitágoras para saber la mitad del lado

Otros: No se puede porque sólo tenemos un lado del triángulo

Prof.: ¿Es la única información que tenemos o que podemos conocer?

Unos: No, también podríamos saber ese ángulo (el que se forma entre el radio y el apotema). Mide $360/5$, todo entre 2

Les aclaro que como este fue un trabajo en principio de Euclides, en lugar de hablar de 360° , hablaremos de 2π radianes

Prof.: ¿Con un ángulo y un lado podemos averiguar cuánto mide lo que nos interesa (la mitad del lado, que ahora llamaron ℓ -L minúscula)?

Alguien: Sí, con las funciones trigonométricas

Prof.: Díctenme

Todos gritan sus versiones y finalmente se ponen de acuerdo en usar el seno y después de que despejan obtenemos $\frac{\ell}{2} = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

Ellos: Entonces el perímetro es $10\text{sen}\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

Prof.: ¿Cuál sería el perímetro de un octágono?

Ellos: Sería... $16\text{sen}\left(\frac{2\pi}{16}\right)$

Prof.: ¿Podrían calcular el de cualquier polígono regular?

Varios: Si, sería $2n\text{sen}\left(\frac{2\pi}{2n}\right)$

Prof.: ¿Qué tendríamos que hacer para que el perímetro del polígono se parezca cada vez más a la circunferencia?

Varios: Hacer muy grande a n

Prof.: ¿Qué tan grande?

Unos: Podemos utilizar un límite

Prof.: ¿Cuál?

Unos: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{2n})$

Prof.: ¿Si calculáramos este límite qué información nos arrojaría?

Unos: El número de lados

Otros: No, n es el número de lados. Eso nos diría cuánto mide la circunferencia

Prof.: Al llevar a cabo este proceso de aproximación ¿El número de lados es lo único que cambia?

Alguien: También cambia el ángulo (que se forma entre el radio y el apotema)

Prof.: ¿Podrían encontrar una expresión que retrate lo que estamos haciendo pero en términos del ángulo que mencionaron?

Después de un largo silencio

Prof.: ¿Están relacionados el número de lados, del cual ya tenemos una expresión y el ángulo?

Ellos: Sí, entre más lados, más chico es el ángulo

Prof.: Por ejemplo para un decágono ¿Cuánto mediría el ángulo?

Ellos: 360 entre 20, bueno 2π entre 20

Prof.: ¿Cuánto mide el ángulo de un n-ágono?

Ellos: 2π entre $2n$, o sea $\theta = \frac{\pi}{n}$

Alguien: Podemos sustituir $n = \frac{\pi}{\theta}$ y calcular el límite

Prof.: ¿Qué límite?

Ellos: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\pi}{\theta} \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{2(\frac{\pi}{\theta})})$

Prof.: Bueno, en esta expresión ya no aparece n ¿Qué quiere decir que n se vaya a infinito?

Varios: Que estamos aumentando infinitamente el número de lados

Prof.: Eso vimos hace rato, ahora ¿cuál es la variable que estamos analizando?

Ellos: El ángulo... ah, entonces debe ser límite cuando θ tiende a cero de lo que teníamos que es lo que sucede cuando el número de lados tiende a infinito

Me dictan para simplificar la expresión en el pizarrón y obtenemos finalmente

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} 2\pi \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$$

Prof.: ¿Qué información nos da esta expresión?

Ellos: Nos sirve para calcular el perímetro del círculo

Prof.: O sea que es el mismo límite que calculamos hace rato

Ellos: Si, bueno en uno hay enes y en otro tetas, pero sirven para lo mismo

Prof.: Es decir ¿Tenemos dos expresiones diferentes para calcular la misma cosa? ¿Cuál calculamos?

Unos: Pues $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{2n})$ sería como infinito por cero... y el otro quién sabe

Prof.: ¿Cuánto debería valer el límite en vista de que tenemos una circunferencia de radio 1?

Ellos: 2π

Prof.: Entonces tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{2n}) = 2\pi = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2\pi \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$ ¿Se les ocurre cómo resolverlo?

Ellos: Podríamos cancelar de los 2 últimos el 2π y tendríamos que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} =$

1

Prof.: Bien, ¿Qué hemos hecho hasta ahora? ¿Cuál sería la conjetura y/o conclusión de todo esto?

Varios: Aproximamos la circunferencia con polígonos y obtuvimos un límite para calcularla, calculamos ese límite con otra variable y resultó ser 1.

Aunque es algo que se esperaba hicieran sin problema alumnos del último año de bachillerato (dado nuestro nivel de educación), hay que reconocer que pudieron analizar una situación particular usando álgebra para determinar lo desconocido y posteriormente para generalizar y resolver el problema.

Por supuesto, hay que hacer otra vez referencia a la falta de herramientas para enfrentar el problema, en esta ocasión lo fueron el desconocimiento de las relaciones trigonométricas⁴³ así como la de saber el perímetro de un polígono regular. De hecho en este último caso, hay que resaltar que al no recordar alguna fórmula para calcularlo tuvieron la necesidad y consiguieron ocupar herramienta que ya tenían para deducirlo, esto nos muestra como no es *necesario ni útil* que los alumnos aprendan temas de memoria, pues por un lado lo olvidan y como se vió, es más rico y más natural que deduzcan las fórmulas.

Pero a lo que más hay que prestar atención es a su relación con el límite, decir que dos límites son iguales porque se puede cambiar la variable de uno para construir el otro y determinar que si n tendía a infinito era equivalente a decir que t tendía a cero muestra que la relación alumno-concepto de límite ha mejorado y que si las cosas se llevan poco a poco y si se trabaja sin centrarse en calcular límites mecánicamente(¡como el Borrás!) puede lograrse el objetivo principal que es madurar su concepción de límite.

MANEJO DE LENGUAJE Y TRABAJO EN EQUIPO

Como ya se dijo en la parte de validación, en esta clase el trabajo se realizó nuevamente usando como grupo a todo el salón, esto logra que cuando alguien participa debe ser claro en su discurso si no, no es entendido por el resto, debe tener más claras las ideas aquel que habla para poder explicar algo, podría pensarse que entonces muchos alumnos se quedarían callados si no entienden la discusión o no tienen argumentos, pero como ya lo mencioné alguna vez, las actividades se diseñan para que los retos estén al alcance de la mayoría, promoviendo así una mayor participación y por tanto un mayor involucramiento de los integrantes de esta comunidad. Además como sugiere Brousseau, se creó nuevamente el microcosmos del quehacer matemático.

⁴³Precisamente el alumno que propuso las funciones trigonométricas no sabía cuáles eran las relaciones(sólo que se daban entre lados y ángulos), es decir, tuvo la idea pero no la pudo ejecutar porque no tenía las fórmulas a la mano. El resto escuchó trigonométricas e inmediatamente como letanía recitó las que se sabía, eso sí, distinguieron bien cuál era la que les servía

LA TECNOLOGÍA

Dado que la clase fue más cualitativa en cuanto a teoría se refiere y cuantitativa en el sentido algebraico, la calculadora no fue muy recurrida para obtener la conjetura, sin embargo se les pidió como un trabajo extra de clase que obtuvieran muchos valores en ella para ver si su conjetura y el límite obtenido tenían congruencia numérica, de este modo se le dio un peso de comprobación, entendiéndose esto como la labor de un instrumento para darle fuerza a lo ya trabajado. Que es finalmente la misión de hacer cálculos de una forma más económica y de este modo lograr que todo concuerde.

Las tres clases siguiente fueron con el maestro, durante la primera se encontraron las derivadas para otras funciones trigonométricas usando identidades, la definición del límite derivada y por supuesto el límite que obtuvimos en la octava clase. La segunda sesión fue para realizar el

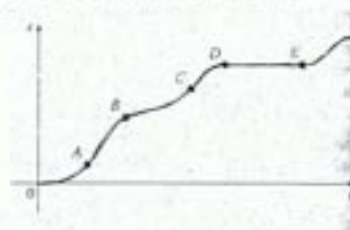
EXAMEN DE DERIVACIÓN

4º EXAMEN PARCIAL CALCULO DIFERENCIAL

POR ACT. ALVARO ESCUADRA G.

1. La gráfica muestra la función de posición de un automóvil. Usa la forma de la gráfica para dar respuestas a las siguientes preguntas:
- ¿Cuál fue la velocidad inicial del automóvil?
 - ¿El automóvil viajaba más rápido en B o en C?
 - Diga si el automóvil desaceleraba o aceleraba en A, B y C.
 - ¿Qué sucedió en D y E?

2 ptos.



2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la Parábola $y = 1 + x + x^2$ en el punto $x_0 = -1/2$

1 pto.

3. Se tiene la curva $y = x^3 + x^2 - 2x + 6$. ¿En qué puntos la pendiente de la recta tangente es -1 ?

1 pto.

4. Encuentra $D_x (t^3 - 2t + 1)$

1 pto.

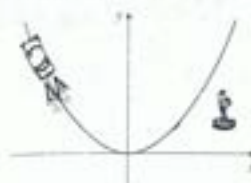
5. Si en la Luna se dispara una flecha hacia arriba con una velocidad de 58 m/s, su altura en metros después de t segundos se expresa con $H = 58t - 0.83t^2$.

- Encuentra la velocidad de la flecha después de 1 segundo.
- Hallar la velocidad de la flecha cuando $t = a$
- ¿Cuándo chocará la flecha con la Luna?
- ¿Con qué velocidad chocará?

2 ptos.

6. Un automóvil se desplaza por una carretera en forma de Parábola cuya ecuación es $y = x^2$. Hay un monumento situado en el punto $(8,39)$. ¿En qué punto de la carretera estará situado el automóvil cuando ilumine el monumento con los faros?

3 ptos.



Mientras que la tercera se ocupó para practicar la de derivación de funciones. Dejando pendiente la regla de la cadena pues de eso se trata la

NOVENA CLASE

Con el fin de estudiar la regla de la cadena y sabiendo que el programa sólo habla de regla de la cadena para funciones polinomiales, el objetivo de esta clase consiste en dar un panorama de qué sucede en términos de cambios cuando una variable depende de otra y esta de otra (y así sucesivamente). La estrategia es que trabajen por equipos y conjeturen relaciones de cambios entre las variables de problemas con elementos de la vida cotidiana. Por ello les entrego una hoja de trabajo con los siguientes problemas y les pido la resuelvan.

QUEMANDO CALORÍAS

Según la revista Men's Health un mexicano promedio quema 2 calorías por cada minuto que besa a su pareja, sabiendo que una fresa tiene 4.5 calorías ¿Cuánto tiempo necesita una persona promedio para quemar las calorías de una fresa? ¿Cuántas fresas se quemarán en medio minuto? ¿En un instante de tiempo? ¿Se quema la misma cantidad de calorías en cada segundo que pasa?

Grafica y da la expresión algebraica de las relaciones que existen entre las variables en juego.

Si comienzas a besar a alguien después de bailar y para entonces ya habías quemado 50 calorías. ¿Cómo serían las gráficas? ¿Las expresiones dadas anteriormente para las relaciones serían las mismas?

VALIDACIÓN

Es interesante ver cómo poco a poco han ido cambiando sus expresiones de ¿estoy bien? cuando me acercó a ver su trabajo, por otras como “intenté esto” o “yo digo que es así porque...”, lo cual es una grata muestra de por lo menos un ligero cambio de actitud en cuanto a la validación de su conocimiento, que es lo que nos importaba en este rubro, más adelante veremos que desgraciadamente no podemos jactarnos del mismo modo de una buena argumentación cuando usaron conocimientos. Ya ha sido mencionado muchas veces en este trabajo, pero cada clase se confirma que las actividades en las que tienen que atacar un problema sin conocer “el” camino, enriquecen su argumentación pues deben usar todas las herramientas que tienen hasta el momento para resolverlo y como consecuencia al discutirlos o exponerlos en el salón se determina si es correcta su aserción.

ABSTRACCIÓN

El tipo de problema con elementos de la realidad pero con un enfoque por supuesto matemático y que necesita de ciertos elementos estudiados para resolverse, como el concepto de dominio e imagen de una función y cierto manejo de álgebra para abstraer datos y plasmarlos en ecuaciones, promueve un acercamiento de la matemática con lo concreto como sugiere De Guzmán y un cambio

en la creencia que se tiene respecto a la matemática como sugiere Schoenfeld; esto se logra por que se muestra la matemática como un lenguaje de interpretación y de aproximación al mundo real.

No es una sorpresa que las herramientas necesarias para afrontar un reto no son suficientes en el grupo, parece increíble pero es cierto que los alumnos apenas pudieron (y con mucho esfuerzo) determinar las ecuaciones que representaban las relaciones de proporción directa. Por otro lado, cualitativamente fueron capaces de conjeturar la regla de la cadena en términos de razón de cambio y de funciones⁴⁴, también pudimos bosquejar un diagrama de conjuntos que plasmaba dominio, imagen y las funciones entre cada una de las variables; más aún, logramos dibujar las gráficas de cada una de las relaciones, que aunque no es sorprendente que sepan graficar rectas lo importante es que colocaron las variables en los ejes que le correspondía a cada una, digamos tiempo contra calorías quemadas, calorías quemadas contra fresas quemadas y tiempo contra fresas quemadas. Lo cual es fundamental para determinar qué variable cambia con respecto a cuál y por tanto para entender regla de la cadena.

Cuando escribimos los cambios en términos de deltas, motivados por las preguntas del problema, vino a la discusión cuál era el siguiente paso a seguir para determinar un cambio en un instante de tiempo, la respuesta fue: “igual que con la velocidad, primero cambios promedio, luego con el límite logramos el cambio instantáneo y llegamos a la derivada”. Esta expresión muestra que su abstracción creció y que tienen la idea global, sin embargo, de eso a escribirlo en términos matemáticos hay un largo trecho por andar. Pero que puede ser caminado poco a poco hasta lograrlo, el problema es querer que muy pronto deriven usando ya regla de la cadena y que conciban que la regla funciona para todo tipo de funciones (ya que solo lo han visto para lineales) este brinco conceptual es casi imposible para una persona normal como dice Arnold, y lo que es peor que perderlos, es que los hagamos aprender otro algoritmo y nos enfoquemos en que lo dominen.

Llama la atención de esta clase que la noción de “instante” también ha evolucionado de manera sorprendente, ya que ante la pregunta malintencionada de *¿cuántas fresas se quemarán en un instante de tiempo?* Dicen

Ellas: En un instante... ¿Eso qué? ¿En qué instante? ¿Un segundo? Sería una pequeña fresa, una pequeña parte de la caloría de la fresa, no una fresa

Prof.: Me refería a un intervalo de tiempo pequeño

Ellas: ¿Puede ser 15 segundos o ya sería mucho?

Prof.: Lo que ustedes consideren un intervalo de tiempo pequeño

Ellas: A pues sería tan pequeño como quisiera... pues con un límite

Hablar de tan pequeño como se quiera y de usar un límite habla por si solo, pero una vez más insisto, la idea hablada es hueca si no se puede escribir, por ello aunque tienen ideas de cómo resolver las cosas, no sirve de mucho si no las pueden plasmar. Y este cuadro, desgraciadamente, lo vimos varias veces a lo largo del curso. En este sentido es necesario dar mayor tiempo y trabajar más

⁴⁴Por supuesto que fue una conjetura hecha a través de funciones lineales. Sería interesante ver cómo reaccionan ante polinomios de mayor grado, ya que la razón de cambio deja de ser constante

sobre los temas para que se digieran y sea posible que los alumnos escriban con matemática lo que piensan, claro está, sin pedirles demasiado rigor.

TRABAJO EN EQUIPO Y MANEJO DE LENGUAJE

Sonando a posible repetición(y lo es) las discusiones grupales son la base de la construcción de su conocimiento, la estructura de clase basada en trabajo de equipo ya les es normal y los alumnos se acostumbran a tratar de ser claros en su diálogo para darse a entender, se señalan sus errores y se corrigen entre sí, se explican unos a otros y discutimos finalmente todos entre sí, para formar así lo que Freire llama una comunidad de aprendizaje.

TECNOLOGÍA

No sorprende, pero hay que subrayar, que a pesar de que saben usar la calculadora no les sirve de nada si no entienden qué están haciendo, las operaciones para encontrar un patrón y deducir las relaciones eran la multiplicación y la división, sin embargo, aunque tratan de hallar un patrón la mayoría parece muy confundida para obtenerlo. Contrario a esta situación, cuando buscaron la relación entre las razones de cambio y tabulando con su calculadora obtuvieron resultados que pudieron interpretar y los llevaron a concluir que el cambio era constante por que se trataba de una recta. Esto nos enseña cuán útil es la tecnología si se le da cierto uso y cómo no sirve si no se sabe para qué se usa o si no se tiene un contexto de trabajo.

La última clase con el maestro consistió en la enunciación de la Regla de la Cadena(El profesor titular lo hace presentando un problema del tipo si A es 2 veces más rápido que B y B es tres veces más rápido que C, cuántas veces es más rápido A que C. Usa notación leibziana para representarlo y finalmente enuncia en términos de funciones derivables la Regla de la Cadena). Para complementar la presentación del Teorema de la Regla de la Cadena práctica la misma con todas las funciones que se han visto, polinomiales y trigonométricas. Con todo lo visto les aplica un

EXAMEN DE REGLA DE LA CADENA.

1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \cos(x)$ en $(0, 1)$
2. Si $g(t) = t^3 \cos t$ calcula $\frac{dg}{dt}$
3. Muestra que $\frac{d(\csc \theta)}{d\theta} = -\csc \theta \cot \theta$. Ayuda: considera la identidad trigonométrica $\csc \theta = \frac{1}{\sen \theta}$
4. Se tiene la función $f(x) = 5 + 2\sen(x)$. Da al menos 3 valores de x para los cuales la tangente es horizontal
5. Dada $y = 4\sen \theta$ usa la regla de la cadena para encontrar $\frac{dy}{dx}$
6. "...estamos tratando con tres variables y, u y x que están conectadas paso a paso en una cadena de tal manera que cada una depende de la siguiente. Podemos sugerir esta relación escribiendo
y depende de u depende de x

la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ nos dice cómo derivar la primera variable respecto a la última teniendo en cuenta cada conexión individual en la cadena.”

Louis Joseph Cauchy

Esta regla puede extenderse a mas variables. Escribe la regla de la cadena si:

a) x depende a su vez de z

b) z depende a su vez de w

7. Derive $y = (2x + 1)^4(x^2 + 1)^3$

8. El desplazamiento de una partícula en una cuerda que vibra, la representa la ecuación $S(t) = 10 + \frac{1}{4}\text{sen}(10\pi t)$ donde s se mide en cm y t en segundos. Encuentra la velocidad de la partícula después de t segundos

9. Si $S = A\cos(\omega t + \delta)$ expresa la ecuación del movimiento de una partícula, se dice que esa partícula describe un movimiento armónico simple

a) Encuentra la velocidad de la partícula en el instante t

b) ¿Cuál es la aceleración en t=2 segundos?

Después de este examen termina el curso y sólo resta el examen final que fue el siguiente

EXAMEN FINAL

1. Observa la sucesión con cuidado y escribe la fórmula para el término enésimo y determina el límite (si existe) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+5}{x^2+2x+4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2+x-1}{x-1}$

5. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

6. Usa la definición precisa de Límite para probar que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$

7. Establezca si la función indicada es continua o no en 2, si no lo es, explique por qué $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$.

8. La función dada no está definida para cierto punto. ¿Cómo se podría redefinir para que sea continua en ese punto? $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

Usa la definición de $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para encontrar la Derivada de

9. $g(t) = \sqrt{t}$

10. $f(x) = ax^2 + bx + c$

11. Un negocio está prosperando de modo tal que su beneficio total (acumulado) después de t años es $1000t^2$ dólares.

a) ¿Cuánto producirá ese negocio durante el tercer año (esto es, entre t=2 y t=3)?

b) ¿Cuál es su tasa promedio de utilidad (utilidad promedio marginal) durante el primer semestre del tercer año (entre t=2 y t=2.5)?

c) ¿Cuál es la tasa instantánea de utilidad (utilidad marginal) para t=2?

12. Escriba la ecuaciones de las dos rectas que pasan por $(-5, 21)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2$

13. Un tanque cilíndrico tiene un eje vertical y se llena inicialmente con 600 litros de agua. El agua tarda 60 minutos en vaciarse después de abrir el desagüe en su parte inferior. Suponga que el desagüe se abre en el instante $t=0$ y que el volumen V del agua restante en el tanque después de t minutos es $V(t) = \frac{1}{6}(60 - t)^2$ litros. Determine la razón instantánea con la que el agua fluye fuera del tanque en el instante $t = 15$ (minutos) y en el instante $t = 45$ (minutos).

14. Hallar los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ en los que la tangente es paralela al eje de las X .

15. Una pesada roca, lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 160 pies/segundo, alcanza una altura de $S(t) = 160t - 16t^2$ pies al cabo de t segundos.

(a) ¿Qué altura alcanza la roca?

(b) ¿Qué velocidad lleva cuando alcanza una altura de 256 pies sobre el suelo yendo hacia arriba?

16. Un cuerpo se mueve sobre una recta según la ley de movimiento $S(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$. Hallar su aceleración cada vez que su velocidad sea cero.

17. Encuentra $\frac{dy}{dt}$ si $y = \sin^2(\cos(kt))$

18. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es Delta Cefeida, para la cual el intervalo de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es 4.0 y su brillantez cambia en . En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t , donde éste se mide en días, se ha modelado por la función $B(t) = 4 + 0.35\sin(\frac{2\pi t}{5.4})$

(a) Hallar la razón de cambio después de t días

(b) Encuentra, correcto hasta dos decimales, la razón de cambio del aumento después de un día.

Para redondear las observaciones y el análisis del trabajo hecho durante el semestre habría que hacer algunas notas sobre los resultados de este examen, ya que nos pueden ilustrar un poco el avance o los problemas que siguen aquejando a los alumnos. Comencemos por decir que sólo 14 personas presentaron el examen y ninguno de ellos para subir calificación, es decir, son alumnos que les ha costado trabajo este curso. Lo primero que debo señalar es que la primera mitad del examen se trataba básicamente de saber resolver límites y la segunda de aplicar el concepto de derivada a problemas de razón de cambio, lo cual deja totalmente de lado la parte matemática y la discusión de los conceptos vistos. Y los resultados no nos dejan mentir al respecto, pues de las primeras 5 preguntas casi nadie entendió bien qué quería decir obtener un límite, la mayoría sustituyó y cuando el denominador era cero (sin importar el resultado del numerador) decían que el límite era cero o que el límite no existía o no respondían la pregunta. Considero que claramente se daban cuenta que había una división entre cero de por medio, el asunto es que no sabían qué hacer o decir al respecto, lo cual es grave y nos obliga a insistir en discutir y dedicarle más tiempo en clase al tema de la división entre cero (que es un punto central y hasta una motivación para

estudiar límites). La pregunta 6 era casi imposible que la resolvieran, de hecho sólo una persona lo hizo como pedía el maestro con ε y δ . De las preguntas 7 y 8, relativas a la continuidad, por las respuestas dadas se concluye que la primera reacción al enfrentar el ejercicio fué evaluar la función, ante el resultado en su calculadora de error en el valor deseado o simplemente de la observación de obtener una división entre cero al sustituir, concluyen que “no está definida”. No lo dicen pero podemos intuir que hablan de la división entre cero y no del límite en general, lo cual confirma lo dicho anteriormente sobre los primeros 5 ejercicios: la discusión de dividir entre cero es muy rico y hay que explotarlo más. La redefinición de la función es meramente hallar un límite y seguir la receta vista en clase, por eso no llama la atención que sólo una persona dibujó las funciones para tener una idea de lo que estaba pasando geoméricamente. En otras palabras, el análisis fue por completo algebraico y no geométrico, ésto me parece, se debe a que se acostumbraron a seguir un algoritmo, sustituir los valores directamente en el límite y después, si daba un valor bien, si aparecía una división entre 0 mal, de cualquier modo lo principal era factorizar los polinomios para ver si se podía cancelar algo. 9 y 10 son más talacha y nos dan muy poca información sobre su concepto de derivada, a lo más muestran que solo algunos entienden cómo sustituir $f(x+h)$ y que de ese grupo la mayoría puede hacer el álgebra necesaria (por cierto esta pregunta tenía error pues le faltaba el límite a la definición de derivada, señalo esto porque algunos alumnos resolvieron el ejercicio sin usar límite, les bastó el álgebra de las operaciones para obtener un resultado).

En la pregunta 11 sólo la mitad distingue entre cambio medio y cambio instantáneo, el resto deriva la función que les presentan y sustituyen, no le dan una interpretación, aunque hay que decir que la pregunta contiene términos técnicos que fácilmente los pudieron confundir, aun así deberían distinguir entre tasa media y tasa instantánea. Nadie hizo bien la 12, los 4 que lo intentaron utilizaron que $(-5, 21)$ estaba en la gráfica y siguieron la receta de sustituir los valores del punto en la pendiente, a saber, sustituyendo -5 en $2x$, la derivada de x^2 . Es decir, saben que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función pero no saben ocupar esa información. La 13 sólo 4 personas la tuvieron bien, de esas 4 solo 1 hizo bien la 11 y por el método ocupado para resolverlas (derivando y sustituyendo) concluyo que todos se aprendieron que cuando vieran cambio instantáneo derivaban y sustituían. En la 14 nadie pudo dar los puntos donde la tangente valía cero, todos derivaron e igualaron a 0 la derivada, pero nadie, dio los puntos, simplemente anotaron el valor de la x para el cual la pendiente de la tangente era 0. Remarco esto porque preguntaron varias veces durante el curso si el valor que obtenían de x lo evaluaban en la función o en la derivada y en vista de que no quedó claro muchos cometieron el error de dar coordenadas del tipo $(2, 0)$ o $(-1, 0)$.

Como era de esperarse sólo una persona pudo hacer el ejercicio 15 (la misma que hizo la 14), el resto se va quedando en el camino, unos derivan e igualan a cero y de ahí pocos encuentran las raíces, de los que lo logran ninguno sabe qué hacer con la información. Existen otros que tratan de hallar las raíces de la función altura y luego derivan y sustituyen 256, en fin, casi nadie sabe qué

hacer. 2 personas lograron resolver la 16 y es de llamar la atención que aún cuando su calculadora resuelve ecuaciones de 2do grado deciden hacerlo a mano y por cierto, muchos lo hacen mal, suman términos que no son comunes y hacen muchas barbaridades. 1 persona pudo hacer la talacha de la 17 y no es de sorprenderse que nadie haya podido hacer la 18. A mi me llama la atención que la pregunta habla de una razón de cambio pero no dice si es media o instantánea ni dice de qué variable respecto de cuál. La mayoría intentó derivar pero nadie lo hizo bien y de los resultados que obtuvieron nadie sustituyó el tiempo 1 en dicha función. A modo de conclusión, nuestros alumnos promedio presentan serios problemas conceptuales, la mayoría sabe derivar y obtener ciertos límites, pero no va más allá de eso su aprendizaje, esto es realmente grave pero solucionable siempre y cuando se le dedique más tiempo a discutir los conceptos que a aprender algoritmos.

Parte V

CONCLUSIONES

5. ¿QUÉ SALIÓ MAL?

Dejando de lado aquellas complicaciones debidas a la falta de tiempo, de acceso a cierto material, de influencia sobre las tareas y exámenes y la duración de los temas, se exponen a continuación dificultades que se vivieron en el aula de clases y que involucran directamente matemáticas (que es lo que más nos interesa) como un recuento de lo que salió mal. También se hace un contraste de lo que salió bien y volvería a hacer.

Para empezar, pienso que el curso debió comenzar con otro tipo de motivación, sobre todo histórica, hablando de exhaución de áreas al estilo Eudoxo, buscando límites geométricos como Euclides o con eventos físicos como lo hacía Newton, para pasar posteriormente a la abstracción de esto, así su conexión entre matemáticas y realidad se podría ver beneficiada. Desgraciadamente sus desconexiones no sólo viven fuera de la matemática, también dentro aparecen seguido porque pareciera que todo lo que han visto es un cúmulo de temas ajenos, que están ahí pero no es claro que formen parte integral de un todo. El análisis de gráficas me parece brinda una solución para este punto de vista integrador y también en el siguiente escalón de abstracción después de haber trabajado con ejemplos varios de aproximación; una vez que se tiene una motivación y una razón tangible para estudiar límites ⁴⁵, las gráficas (muchas veces funciones de “eventos reales”) obligan al estudiante a tener bien presente la relación ecuación-gráfica ⁴⁶, por otro presentan al objeto límite como una herramienta útil para dar una buena aproximación de una gráfica (y de la realidad, lo cual favorece su conexión con la matemática) y sobre todo les da una visión más global y completa de lo que están haciendo. Con todo este proceso podríamos evitar en parte el daño que les hacemos haciéndolos solamente resolver límites de forma algebraica.

En la primera clase habría que señalar que la confrontación por decidir si 1 seguido de infinitos nueves es igual a 2, se trata más de un problema de lenguaje (hablado y escrito) que de conceptualización. El enfrentamiento debió inclinarse más por observar cuán cerca está de 2 el 1.9, 1.99 y así sucesivamente, para desarrollar más la idea de aproximación y discutir qué tan cerca podemos estar del 2 siguiendo este proceso.

En los primeros acercamientos con la noción de límite, fue importante (pero no suficiente) analizar la división entre cero, porque desgraciadamente muchos

⁴⁵Cuando se estudian las cosas sin razón y sin una referencia real tangible (por lo menos hasta este nivel) hay cierto rechazo al tema y una mayor dificultad para “digerir” lo enseñado

⁴⁶Un gran problema que he mencionado anteriormente y que observé con frecuencia en los alumnos es la relación biunívoca entre una ecuación y una gráfica; sobre todo en dos sentidos, el primero que dado un punto puedan determinar si está en la gráfica o decir quién es su imagen, en segundo lugar que observen que en funciones como $\sin(2x)$, $2x$ es una función que funge como el argumento de la función $\sin(x)$, no otra función que está multiplicando a $\sin(x)$

alumnos aún al finalizar el curso(basándome en el examen final) puedo afirmar que todavía no distinguen entre el valor del límite y el de la función en un punto. Es por ello que cuando calculan un límite cancelan sin problema factores de polinomios en un cociente y desaparecen “límite” de una igualdad a otra.

Durante el primer acercamiento con la continuidad como concepto, habría que apuntalar más sobre la aproximación de valores de la función hacia el valor en el punto deseado(en nuestro caso los de las raíces) en lugar de presentar una función discontinua y discutir las discontinuidades, pues como ya se dijo y vio, es un doble reto que creó serias confusiones; sin embargo como una actividad posterior encaja bien y ayuda al objetivo principal que es la construcción de la definición de continuidad. Sin duda tampoco se debió caer en la mecanización de la redefinición de funciones discontinuas y mucho menos tratar de que entendieran y probaran la continuidad de una función con epsilon y delta.

El estudio de la función del switch es buena dentro del grupo de actividades posteriores que ya se mencionaron, pero también aparece de la nada, podría darse como consecuencia de otra actividad o motivada por otros hechos, tal vez como consecuencia del estudio de las funciones. Podría después de analizarse varias gráficas con límites proponer las de este tipo.

Para dar mayor fuerza al estudio de las gráficas debió trabajarse con funciones “engañosas”, funciones en que la tecnología[su calculadora o la computadora]los confunda o no sea suficiente para lograr un buen bosquejo y esto los obligue a desarrollar y/o utilizar teoría. Por ejemplo $\frac{1}{x^2-1}$ o $\frac{\sin x}{x}$.

Sobra decirlo pero los conceptos matemáticos se formalizan únicamente cuando son necesarios o bien útiles para demostraciones. Por ello en lugar de analizar la tangente hasta un punto avanzado del curso convendría sugerir el caso de hallar una tangente como un ejemplo de proceso infinito desde el principio del curso, simplemente como idea geométrica y una vez que tuvieran más herramientas en un punto avanzado del curso se puede retomar el tema y discutir su construcción de una forma más natural. De hecho sería posible hacerlos leer a Euclides y discutir la idea y el concepto que presenta en su tercer libro.

La actividad sobre razones de cambio fue todo un éxito, pues les permitió involucrar la matemática con algo tangible y desarrollar su noción de razón de cambio, la clave de todo esto fue centrarse en el análisis de gráficas para después concretarlo con notación matemática.

Al conjeturar un límite para calcular la pendiente de la recta tangente debió compararse con el límite obtenido por velocidades instantáneas de una forma más cuidadosa, ya que aunque la diferencia es sutil, el límite obtenido geométricamente fue distinto al de la velocidad, pues se trataba de $f(x-h)$ y no de $f(x+h)$ que aunque en el límite cuando h tiende a cero da lo mismo cuando se estudian funciones continuas(y diferenciables en este caso para poder hablar de derivada), no es lo mismo para cualquier función en general.

Sin duda estudiar el límite estrella $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ después de empezar a ver derivada fue muy artificial, ya que no fue una aplicación de lo visto o motivado por lo visto en clase. Hubiera sido preferible estudiar este límite cuando se estudiaban procesos infinitos y se trabajaba con aproximaciones, pues la prueba

de que converge a 1 no se les da, simplemente se presenta una vía matemática para conjeturar dicho valor.

Es de suma importancia en cualquier tema, pero ocurrió al momento de estudiar razón de cambio, que se presente la notación y que se trabaje también con la parte algebraica de lo hecho, de lo contrario muchas ideas se quedan en el aire. No podemos quejarnos de que solamente se trabaja la parte algebraica y hacer pura teoría intuitiva, por que claramente caemos en el otro extremo.

En la última clase, la de regla de la cadena, faltó y creo que ayudaría mucho⁴⁷, trabajar con notación $f(x)=y$, $g(y)=z$, $h(z)=w$ etc. . . Por otro lado aunque se utilizó solamente calculadora convendría reforzar la clase con algo más visual en cuanto a gráficas. Pero sobre todo y no me canso de repetirlo, me parece que la idea de composición de funciones es muy importante y muy útil para desarrollar y comprender aspectos sutiles pero de relevancia dentro de este curso, por ejemplo ayuda a entender que cuando se habla de cambio es importante saber respecto de qué (muestra de ello es que aunque en repetidas ocasiones el maestro se los dijo, en los exámenes los alumnos realizaban operaciones del tipo si $y = 4q \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4$). También resulta trascendente porque la composición aparece en cualquier expresión de funciones y por tanto cuando nos interesa el cambio de una queremos saber qué cambios genera en las otras involucradas. Además de que daría más peso al estudio de funciones que es fundamental en el estudio de la matemática y de la realidad misma pensando en la gente que quiere hacer ciencia pero no precisamente matemáticas.

6. USAR LA TECNOLOGÍA O NO

6.1. La calculadora

Como hemos visto a lo largo de las clases, los alumnos en la práctica ocuparon la calculadora básicamente para ahorrar tiempo en cuentas largas (y no tan largas), tabular⁴⁸ y para hallar las raíces de polinomios de segundo y tercer grado. Implícitamente les dio intuición y los ayudó a elaborar conjeturas bajo determinadas actividades, por eso lo importante de su uso consiste en observar, bajo qué circunstancias la utilizan y qué interpretación le dan a los resultados que arroja la pantalla, pues de esto dependerá si brinda la intuición deseada. Sobre el primer punto es relevante saber si la ocupan porque el maestro se los pide o porque sienten la necesidad de acudir a ella. En el primer caso de este punto podríamos decir que es similar a aprender un algoritmo (si es que ya saben ocuparla), la diferencia radica en que este algoritmo es cómodo y ahorra tiempo, pero finalmente se trata de un proceso mecánico aunque operen ahora a través

⁴⁷Digo mucho porque a pesar de que todos los grupos son diferentes y no en todos funciona lo mismo, en el otro grupo ayudó esta notación para la concepción de composición de funciones

⁴⁸Enlisto tabular además de hacer cuentas largas, porque el tabular con estas calculadoras arroja una tabla de valores que depende de la función dada, del intervalo que nos interesa y de los incrementos que queremos que sufra la variable en dicho intervalo. Lo cual además de darles mayor visibilidad con ciertos patrones, los obliga a determinar datos específicos para resolver su problema

de un aparato. Este daño se puede apreciar por ejemplo cuando preguntan al momento de tabular “de qué tamaño deben ser los intervalos” o en otro tipo de circunstancias si deben trabajar en grados o radianes. Esta es una consecuencia del caso en que el profesor les dice qué hacer, pues los alumnos se acostumbran a recibir información sobre lo que deben oprimir en la calculadora, sin detenerse a meditar un momento qué es lo que están haciendo; esto da pie y sentido al segundo caso, que es aquel donde los alumnos la ocupan por voluntad como una herramienta auxiliar, de tal suerte que dependiendo de su problema ocuparán las distintas funciones que ésta les ofrezca para satisfacer sus dudas y podrán también ahorrar tiempo y esfuerzo en cuentas largas. Esta forma además de que fomenta que los alumnos agranden su curiosidad por descubrir más funciones en ella (pues nadie les dijo las instrucciones exactas a seguir) los obliga a saber qué es lo que están haciendo y qué buscan, que es distinto a saber qué esperan, pues claramente no es una implicación. Esto lo vimos a lo largo del curso y el más claro ejemplo es aquel donde un equipo queriendo saber los puntos donde cruzaba el eje de las abscisas un polinomio cúbico con raíces reales a través de la tabulación obtuvo 5 puntos de intersección. El equipo sabía lo que quería, el profesor no les pidió que ocuparan la calculadora y sin embargo ocurrió lo que ya sabemos. Esto a su vez nos lleva al segundo punto que se mencionó al principio del párrafo, debemos ser cuidadosos con la lectura que dan los alumnos a los resultados, un problema que suele ocurrir es que los alumnos no tienen cierta teoría para saber qué datos esperan que expulse la calculadora y cómo interpretarlos, por tanto ante esta ausencia de conocimiento no pueden discriminar lo obtenido, y si por ejemplo se equivocaron al teclear o la calculadora les marcó error no saben por qué pasó eso. Por eso es necesario que los alumnos enfrenten un problema, arrastren el lápiz y eso los lleve a utilizar la calculadora. Todo lo anterior no se contrapone con la hipótesis hecha en este trabajo relativa a utilizar la tecnología como brindadora de intuición, pues la intuición es una idea sobre algo incierto, es la fuente de un nuevo conocimiento pero basado en otro, es por eso que antes de usar la calculadora debieron pelearse con un problema, sacar su estuche de herramientas y entre ellas encontrar la calculadora. Finalmente y no menos importante en este punto es la validación de lo hecho basado en los resultados de la pantalla, que como ya se mencionó más arriba, ante la falta de un sustento teórico y en consecuencia de un desconocimiento de lo que se hace, se le atribuye a la calculadora un papel de emisora de verdades que tiene como secuela a su vez, que se le perciba como un instrumento preciso y exacto con los cálculos. Común creencia que debemos combatir. Por todo lo dicho con anterioridad, por supuesto que se opta por el uso de la calculadora pero teniendo en mente (por lo menos) las observaciones hechas.

6.2. La computadora (Geogebra)

A pesar de que este grupo tuvo solamente una práctica en las computadoras⁴⁹, lo primero que hay que reconocer es que no existe temor o repulsión para

⁴⁹Aunado a las experiencias vividas en las clases aisladas

el uso de la computadora (y en particular del programa) algunos ya saben usarlo otros ni siquiera lo conocen, pero este no es motivo para no trabajar con él o con algún otro programa. La finalidad de usar Geogebra es (al igual que con la calculadora) ahorrar tiempo y esfuerzo en trabajos manuales, la idea es centrarse más en los conceptos, en las construcciones del objeto a estudiar y usar el software como comprobante y como provocador de conjeturas. Por eso es que las características bajo las cuales se recomienda utilizar la calculadora se aplican también a la computadora. Pero habría que agregar ciertos detalles a dicho análisis, ya que además de hacer cálculos, el software proporciona imágenes y herramientas gráficas además de las algebraicas para manipular lo que se ve en la pantalla. Esto además de que puede generar conocimiento virtual puede utilizarse como medio de validación del conocimiento. Por eso el espíritu para trabajar con ella en este nivel debe seguir la misma línea que con cualquier tecnología, primero hay que arrastrar el lápiz para saber un mínimo sobre los objetos que vamos a manipular para después trabajar con el programa, y de este modo tener una previsualización de los resultados. Lo importante es lograr que los alumnos acudan a cualquier tecnología como una herramienta para resolver un problema no como una obligación, por supuesto que debemos enseñarlos a usarla (con más problemas claro está).

El problema de enfrentarlos desde el principio al programa (aun cuando ya conozcan el programa) es que manipulen los objetos y simplemente observen figuras simpáticas u objetos que se mueven sin saber qué ocurre. Cuando uno se enfrenta a un nuevo objeto en matemáticas necesita ciertas herramientas para entenderlo y desarrollarlo además de las ideas intuitivas, las plantillas⁵⁰ de Geogebra por supuesto deben procurar que los alumnos a través mayormente de construcciones aprendan a utilizar la tecnología y más importante a desarrollar sus ideas y mejorar el entendimiento de lo estudiado.

También habría que resaltar algunas de las limitantes que presentó Geogebra, ya que durante la planeación de clases, la experiencia en clase y el análisis posterior se encontraron detalles que deberían ser tomados en cuenta a la hora de trabajar con este software, en primer lugar se encuentra el problema de definir objetos, dos cosas no se pueden llamar igual inclusive cuando dentro del programa representan lo mismo, en segundo lugar tenemos que ningún elemento que creemos (sea un punto, un deslizador, etc...) puede recibir el nombre de x , y o cualquier función de x (por ejemplo $f(x)$, $g(x)$, etc...). Estos problemas se volvieron molestos sobre todo cuando se trabajó composición de funciones. Poniendo esto de lado el programa es recomendable pues es fácil de usar, tiene muchísimas herramientas y sobre todo: es gratis en Internet.

7. ACTIVIDADES SUGERIDAS

Teniendo en mente lo que salió mal, la discusión sobre el uso de la tecnología, sabiendo de que de poco sirve criticar si no se propone algo y que material para

⁵⁰Una plantilla consiste en una construcción previamente diseñada que puede ser manipulada y modificada por los alumnos

enseñar cálculo hay por montones, a continuación simplemente se presentan sugerencias puntuales a las actividades hechas en el curso y algunos ejercicios que podrían ayudar a desarrollar la propuesta

- * Buscando que descubran y propongan diferentes formas de aproximarse a un punto vimos que la actividad de raíz de 2 fue de suma utilidad, por ello en ese mismo sentido se sugiere dividir al grupo en equipos, pedirles que escojan un número del pizarrón (entre los que se proponen esté 0 por su uso frecuente y $1/3$ por la concepción general de que $1/3=.3$ o $.33$) y que cada integrante del equipo dé una aproximación al punto escogido del pizarrón, por supuesto una cada vez mejor que la dada anteriormente por su compañero. Posteriormente que den una expresión en general para acercarse al punto. Discutir en la plenaria si el método o la expresión encontrada por cada equipo funciona para cada punto del pizarrón. Cuestionar cuál da una mejor aproximación, cuál se acerca más rápido y cuál más lento a cada punto y si se podría dar una mejor aproximación de todas las dichas. Dar una interpretación gráfica de lo hecho, esto para que tengan presente siempre la relación íntima entre función y gráfica. También serviría para empezar a trabajar el frecuente problema de determinar si un punto dado vive en una gráfica.
- * Otra actividad posible es discutir los criterios de determinación de asíntotas, usualmente dados como reglas en Matemáticas IV.
- * En base a lo hecho en la clase del switch, presentar un compendio de gráficas continuas y discontinuas incluyendo su expresión analítica, para discutir cualitativamente cuáles son continuas y cuáles no, preguntar en qué coinciden las que no lo son y qué les faltaría para serlo. Ejemplos como mayor entero, valor absoluto, $\frac{1}{x}$, -1 para x negativa y 1 para el resto, $\frac{x^2-1}{x-1}$ (ejemplos de este tipo tienen además el objetivo de discutir la situación en que la función no está definida en un punto pero el límite si existe), raíz cuadrada (preguntar por la continuidad en el infinito, esto con el fin de obligarlos a dar una regla (definición) para determinar la continuidad que no sea solamente con dibujos y dejándose llevar por la vista) Discutir qué pasa cuando me acerco a la discontinuidad. Concluir y presentar una definición de continuidad, ya sea la que presentó el profesor o abreviarla como f es continua en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- * Para trabajar la continuidad, la actividad del monje(SEGUNDA CLASE) funcionó bien como introducción pero hacia el final en lugar de redefinir funciones habría que centrarse más en discutir la aproximación a las raíces del polinomio dado usando la calculadora y analizar si cruza el eje de las abscisas cuando tenemos polinomios pares e impares con raíces reales e imaginarias, por ejemplo debatir cuál sería el comportamiento de $x^4 - 3x^2 - 4$ o $x^3 + x^2 + 4x + 4$. Posteriormente en otra clase se podría debatir la redefinición de una función discontinua para volverse continua como se hizo a través de la función del switch, agregando el determinar una

función que sea idéntica a una discontinua pero que sea continua en todos sus puntos, como se sugirió en el examen de continuidad.

- * Para la clase de razón de cambio la modificación que haría (y que mucha falta hizo) sería presentar la notación de razón de cambio y no dejarlos sólo con la idea intuitiva de lo hecho.
- * Antes de ver la construcción de la tangente en clase pedir de tarea que averigüen qué es una recta tangente en el Libro III de Euclides y cómo construirla, el objeto de esto es que por un lado investiguen y en consecuencia lleguen con dudas sobre el tema a la clase. Por otro lado considero importante que observen que la primera noción de tangente se dio respecto a una circunferencia y por tanto se planteen o se discuta en la clase una extensión del concepto a una curva en general.

Realizar la construcción en Geogebra y cuestionar si es posible extender el concepto a más tipos de curvas. Realizar el proceso para varias funciones a través de la herramienta “secante” del programa, discutir cuál debe ser la definición de recta tangente. De este modo se ha trabajado la parte intuitiva del concepto tangente, la siguiente clase se puede trabajar la parte “formal” como se hizo en la quinta clase, aunque convendría que durante la construcción se analice más de una forma de acercarse al punto deseado en el dominio. Haría falta también hacer la misma construcción para una ecuación cúbica y finalmente para una recta. La intención de dejar las rectas hasta el final es que no se confundan con que todas las secantes son iguales a las tangentes y que todas las tangentes sean iguales entre sí siempre.

- * Después de ver la construcción de la tangente de una curva en un punto en particular, pedir de tarea para mejorar su entendimiento y por supuesto como medida para saber qué tanto ha quedado claro lo trabajado escribir el proceso para encontrar una tangente de una función fija en cualquier punto de su dominio. En la siguiente clase en las computadoras llevar a cabo su tarea pero ahora con ayuda de la computadora, después discutir si el proceso que hicieron se vale para cualquier función (sugerir ejemplos en que no se pueda, valor absoluto o una discontinua).
- * En la clase de máximos (SÉPTIMA CLASE), faltó revisar todo el proceso hecho y debatir si se podría seguir el mismo proceso para encontrar un máximo de una función arbitraria.
- * En la clase de Regla de la Cadena la actividad completa se compone de lo siguiente

QUEMANDO CALORÍAS

Según la revista Men's Health un mexicano promedio quema 2 calorías por cada minuto que besa a su pareja, sabiendo que una fresa tiene 4.5 calorías

¿Cuánto tiempo necesita una persona promedio para quemar una fresa? ¿Cuántas fresas se quemarán en medio minuto? ¿En un instante de tiempo? ¿Se quema la misma cantidad de calorías en cada segundo que pasa?

Grafica y da la expresión algebraica de cada una de las relaciones en juego (pedirles que anoten la variable que corresponde a cada eje coordenado)

Si comienzas a besar a alguien después de bailar y para entonces ya habías quemado 50 calorías. ¿Cómo serían las gráficas? ¿Las expresiones dadas anteriormente para las relaciones serían las mismas? Si cambia poquito el tiempo ¿Cuánto cambian las calorías quemadas? ¿Cuánto cambian las fresas quemadas?

Al terminar esta parte intuitiva de la composición y del cambio en la misma, se introduce la notación de composición de funciones y se practica el álgebra de ésta. Ya que es de suma importancia no sólo quedarse con la parte intuitiva y de dibujos, sino también tener presente la parte algebraica y “formal” de lo hecho. Se presenta también la idea conjuntista de dominios e imágenes de funciones. Se sugieren preguntas como ¿Podemos hablar de las calorías quemadas en - 3 segundos? ¿Cuál es el dominio y la imagen de cada función? Es importante observar el dominio de definición de cada función. ¿Cuál es la variable principal, es decir, aquella que la que dependen todos los cambios?

ESTO SE PONE CALIENTE

Dado el actual calentamiento global del planeta (debido en su mayoría a la emisión de gases invernadero) la temperatura del planeta está subiendo aproximadamente $.3^{\circ}\text{C}$ por decenio y también sucede que por cada 3°C que sube ésta, el nivel del mar aumenta aproximadamente 15 cm. ¿Cómo cambia la temperatura y altura del mar por año? ¿Por día? ¿En el segundo que acaba de pasar? Da una expresión geométrica y algebraica que represente las relaciones involucradas en el problema.

Después de esta instrucción sería interesante ver qué hacen, si dibujan conjuntos o si hacen las gráficas, de cualquier modo les tengo que pedir que hagan ambas.

Describe en una tabla los cambios **promedio** sufridos en cada gráfica

Escribe en términos de razón de cambio las variaciones involucradas en el problema

Pedir expresar con ambas notaciones ($\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$) para que la notación se vaya haciendo familiar y por si se encuentran con alguna de las dos en un libro.

Dado que nos interesa estudiar la razón de cambio cuando el cambio del tiempo es pequeño, se sugiere hacer énfasis en distinguir si se está hablando de una razón de cambio promedio o una razón de cambio instantánea, si existe alguna relación entre ellas y explicar porqué.

Se espera hagan la primera conjetura en términos de razón de cambio, por ello nos interesaría saber si pueden reescribir las razones de cambio de tal forma que todas las funciones varíen respecto de la misma variable. También detectar cuál es el cambio en un instante de tiempo, por ejemplo, ¿cuánto está subiendo el nivel del mar en este instante? ¿Qué le ocurre a la temperatura si el cambio en el tiempo es pequeño? ¿Cómo es el cambio en la altura si el cambio en la temperatura es pequeño? Y para redondear la actividad se podría analizar el

caso anterior con esta herramienta para buscar que concluyeran algo del tipo “Límite cuando el cambio de temperatura tiende a cero es equivalente a obtener el límite cuando el tiempo tiende a cero”

LA LECHE

Un bebé durante los primeros meses de haber nacido toma aproximadamente 900 ml de leche por día. Se calcula que por cada 200 ml de leche ingerida su cuerpo recibe 120 mg de calcio y 40 % de dicha cantidad es fijada en los huesos. Grafica y da una expresión algebraica para cada relación

Si desde los 500ml hasta los 750ml la absorción del calcio responde a la ecuación

$$-\frac{1}{1250}x^2 + \frac{7}{5}x - 200$$

y después de los 750 ml la absorción es constante ¿Cómo quedan las gráficas anteriores? ¿Qué cantidad de calcio se fija a lo largo de un día promedio? Describe en una tabla los distintos momentos de la gráfica. Considerando que una gota de leche tiene aproximadamente .25 ml ¿Cuánto calcio se fija con cada gota que cae en su boca? ¿Se fija la misma cantidad en cualquier momento? ¿Cuánto cambia el calcio fijado cada vez que el bebé succiona una gota? Expresa lo hecho anteriormente con razones de cambio ¿existirá la misma relación que encontraron entre las razones de cambio? Ahora vamos a escribir con mayor precisión todo lo que hemos hecho, para empezar ¿Cómo cambia el calcio fijado respecto de la leche tomada? ¿Cómo cambia el calcio absorbido respecto al calcio fijado? ¿Cómo cambia el calcio fijado respecto a la leche tomada?

Estas son las propuestas y correcciones sobre lo hecho y vivido, se aceptan sugerencias.

8. PROYECCIÓN DEL TRABAJO

- * La primera idea y creo bastante natural es aplicar las propuestas y correcciones de nuevo en un grupo y repetir el proceso cada nuevo curso.
- * Otro camino que puede y me parece debe seguir esta línea de trabajo no sólo con cálculo ni tampoco restringido al nivel medio superior es acercarse más a la creciente tecnología, conocer los nuevos software y hardware. Para que de este modo se pueda ampliar este análisis a todas las materias de matemáticas del CCH.
- * Finalmente, considero que el plan más ambicioso en base a todo lo vivido y que por supuesto también se puede extender a las demás materias de matemáticas, es escribir un libro para este nivel conforme al plan marcado del CCH.

Parte VI

APÉNDICES

9. APÉNDICE A

Hay que mencionar que ambos talleres no se pudieron completar y simplemente se trabajó la parte de composición de funciones en Unidos como cadenas y en Máximos, mínimos y Mouriño aunque se aplicó en dos grupos⁵¹ no se pudo realizar la parte de Geogebra.

9.1. Unidos como Cadenas

Actualmente la Tierra está hecha un desastre, el medio ambiente cada vez empeora y eso depende de qué tanto lo cuidemos, por ejemplo, el efecto invernadero depende en parte de qué tanta contaminación produzcan los autos, y esta contaminación depende de qué tantos autos circulen diariamente y esto a su vez depende de cuántos autos son vendidos al día. En resumen es una cadena de dependencias, este simple ejemplo muestra que (visto desde un enfoque matemático) la composición de funciones está en la vida cotidiana y si nuestro deseo como científicos es interpretar la realidad con las herramientas que hemos desarrollado pues éste es un perfecto pretexto para hablar de composición de funciones, más aún, pensando de una forma más abstracta, la composición de funciones es una forma más global de ver las operaciones entre éstas, la suma, la resta, la división y la multiplicación (que se ven usualmente antes de la composición) son funciones que se aplican a otras funciones, es decir, son casos particulares de la composición. Por ejemplo sumar $f(x)$ más $g(x)$ no es mas que un funcional $H(x)$ que opera 2 funciones y arroja la suma de ellas, de este modo estamos componiendo f con g de un modo muy particular.

Dada la importancia de este concepto y herramienta, dentro y fuera de la matemática, este taller se propone que los alumnos de nivel medio superior:

- Logren familiarizarse con los términos y concepto de composición de funciones.
- Distingan dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que quiere decir $f(g(x))$ y $g(f(x))$.
- Recuerden y comprendan mejor las nociones de dominio e imagen de una función, particularmente dentro de una composición. De ser posible que observen cuándo es posible definir una composición.
- Puedan componer cualquier par de funciones (siempre y cuando esté bien definida la composición).

El desarrollo del taller girará en torno a las siguientes actividades:

- Enfrentarlos a problemas de la vida real, a casos tangibles para ellos donde esté involucrada la composición de funciones.
- Usando Geogebra, lograr que den una representación geométrica de lo planteado y de la composición de funciones en general.

⁵¹De características diferentes como se establecerá mas adelante

- A través de tabulaciones o de cualquier herramienta que sugieran, conseguir que den una expresión del planteamiento del problema y de su solución en términos de funciones.

NOTA: El texto escrito en letras cursivas denota preguntas o comentarios sugeridos para aquel que aplique este taller

Antes de atacar nuestra problema que es la variación en una composición de funciones conviene tener cimientos, recursos para que ellos trabajen mejor y usar casos reales para reforzar su conexión con la matemática como sugiere Schoenfeld.

El taller comienza pidiéndoles que den ejemplos de fenómenos que conozcan en los que algo depende de otra cosa, esto con el fin de recordar la noción de dependencia y obviamente de homogeneizar la idea de función para todos. Posteriormente se les pide que nuevamente den ejemplos pero ahora de algo que dependa de otra cosa (como antes) y ésta a su vez de otra. Ya que den ejemplos de este caso se sugiere presentar un problema que facilite la cuantificación de las variables (y que unifique a todos los grupos) como el siguiente, “supongamos que con una cubeta puedo pintar 8 paredes y que un cuarto tiene 4 paredes” *¿Qué depende de qué? ¿De qué depende directamente esa variable? ¿En qué medida depende una cantidad de la otra? ¿Cuánto varía una respecto de la otra? ¿Cuánto exactamente? ¿Cuántas veces? ¿Qué porcentaje? ¿Dónde toma valores cada elemento de su problema?* Estas preguntas tienen la meta de que los alumnos obtengan una expresión analítica de su planteamiento y al momento de tabular observen cuál es el dominio y la imagen de cada función. Otra forma de plantear esta necesidad⁵² o de reforzarla es pidiéndoles que observen cómo cambian las variables usando una planilla dinámica elaborada con Geogebra (Composición1). La planilla tiene un ejemplo muy simple (y modificable) el cual servirá como base para que los alumnos observen qué depende de qué y noten cómo cambia el valor de dichas variables, para completar el uso de esta planilla se les pide que planteen un problema con los datos del banco de problemas (recalco los datos porque en esta parte del taller todavía no hablamos de variación ni razones de cambio, simplemente de la composición de funciones). Una vez que han experimentado con ella se les muestra cuál es la notación para la composición de funciones, por eso es importante que después de que han observado los cambios en las gráficas ahora sepan y practiquen algebraicamente la composición, ya que tanto la parte geométrica como la analítica son importantes. Para reforzarla y hacer un contraste entre $f(g(x))$ y $g(f(x))$ se propone una segunda planilla de Geogebra (Composición2). Finalmente se les pide hagan la composición analíticamente con otro par de funciones.

Ya que los alumnos sepan de qué depende cada variable y de qué conjuntos toma valores cada función, se les recuerda que al conjunto de elementos que puede tomar la función le llamamos DOMINIO y a los elementos resultantes de aplicar la función a cada elemento del DOMINIO le llamamos IMAGEN.

⁵²Hablo de necesidad porque para tener una idea global y más precisa del resultado de una composición de funciones, aún sabiendo que es puntual y aunque tabularan algunos puntos (y eso les ayudara a tener una ligera noción de lo que está pasando) es conveniente tener una expresión analítica

Posteriormente se les presenta la tercera planilla dinámica de Geogebra que tiene el objetivo de trabajar más con estos conceptos y reforzar la idea de composición de funciones pero ahora visto en dos dimensiones y no en una, como se vió anteriormente.

Los resultados de este fragmento de taller no fueron del todo malos, porque se vió y reforzó el aspecto de la composición de funciones, el problema radicó como ya se dijo, en que no pude ocuparme de la parte realmente importante que era trabajar con las distintas razones de cambio, de ahí en fuera el trabajo mixto entre ver cómo escribían lo que hacían en las planillas y la interacción con Geogebra fue de provecho ya que los alumnos tuvieron la oportunidad de visualizar lo que sucedía gráficamente y pudieron expresarlo analíticamente; esto se logró planteando en un principio problemas de composición de funciones lineales para después introducir esa información en el programa, posteriormente con cualquier función que conocieran una vez que habían entendido el funcionamiento de las planillas y la parte algebraica de la composición. Una ventaja que tenía este grupo es que ya conocía el programa y esto facilitó el trabajo.

9.2. Máximos, mínimos y Mourinho

Dado que la naturaleza está en constante cambio y que escoge siempre los procesos óptimos para su funcionamiento, la idea de máximos y mínimos está presente en ella y frente a nuestros ojos todo el tiempo; al interpretar dichos procesos detectamos momentos especiales que hemos conceptualizado en matemáticas como puntos críticos, a saber, máximos, mínimos y puntos de inflexión. ¿Qué significan los primeros? ¿Cómo saber y determinar cuándo ocurre cada caso? Criterios y definiciones de estos objetos se concluirán con este taller.

Sin perder nunca de vista que los alumnos se encuentran a nivel bachillerato, el objetivo del taller no es la formalización o la rigurosidad con que manejen los conceptos mencionados, el fin deseado es que deduzcan sus criterios y se convenzan de que sus conjeturas al respecto tienen sentido, que sepan explicar por ejemplo que para obtener máximos y mínimos un camino a seguir es “derivar la función, igualarla a cero, encontrar las raíces y listo, esos serán los puntos buscados”. La idea del taller también es que encuentren criterios para funciones que no son derivables.⁵³

Material y prerequisites

Una hoja de trabajo y plantillas de Geogebra. Los alumnos se supone ya han trabajado previamente con el programa Geogebra, (de lo contrario el programa no es difícil de manipular) respecto a la teoría ya vieron la noción de derivada como razón de cambio y como un límite y saben derivar funciones polinomiales. La actividad está planeada para una clase de dos horas con la hoja de trabajo y otra de una hora con las plantillas de Geogebra.

⁵³Las funciones no derivables vistas a este nivel en el CCH-Sur son las de tipo pico, es decir, cuando pegamos dos segmentos de recta

Algo más concreto

Resumen

El objetivo de la primera parte del taller es que los alumnos conjeturen un criterio para determinar puntos máximos y mínimos, primero de una gráfica dada y posteriormente de una función dada. Se espera que los criterios se den en términos de crecimiento y de decrecimiento. La idea del taller es que de manera cualitativa en un problema tangible los estudiantes deduzcan que podemos encontrar un mínimo cuando la función pasa de decreciente (no creciente) a no decreciente (creciente) y viceversa para los máximos, ya que esto sirve aún para las funciones que no son derivables; en el caso de tener funciones derivables la idea es la misma, pero ahí sí podemos obtener la derivada en el punto crítico y en este sentido podemos hacer notar que una hipótesis necesaria para usar el criterio de la derivada igualada a cero es que nuestra función sea derivable en una vecindad del punto crítico.

El espíritu con que se enseñe este taller debe ser por un lado el de presentar a la matemática como un lenguaje para interpretar la realidad y por tanto con conceptos motivados por la misma y no como una serie de invenciones que funcionan “mágicamente”. Por otro lado la de mejorar la comprensión de los alumnos al responder ante una pregunta no con una respuesta sino ayudando a que ellos mismos se respondan, por eso la intención de trabajo en grupo y discusión grupal.

Desarrollo del taller

Se divide al grupo en equipos de cuatro personas máximo, se les entrega una hoja como la siguiente y se les pide que inicialmente dibujen la gráfica solicitada.

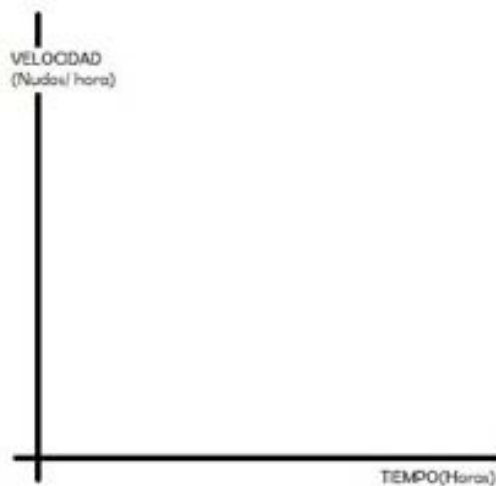
ACTIVIDAD

Etsaan Aké

10 de Noviembre de 2008

Una avioneta despegue un martes 4 de Noviembre de San Luís Potosí con destino a la Ciudad de México. Partiendo del reposo aumenta rápidamente su velocidad para levantar el vuelo; a los 15 minutos del despegue, el piloto reporta una ligera tormenta que lo ha obligado segundos antes a disminuir la velocidad, varios minutos después de esto, por causas “desconocidas”, la avioneta empieza un descenso estrepitoso (con una velocidad menor a la que experimentará durante su caída) hasta que se impacta en medio de la avenida Reforma.

Sabiendo que la velocidad es el cambio de la posición respecto del tiempo y despreciando la fricción, bosqueje una gráfica de la velocidad de la avioneta, colocando ejes coordenados tiempo contra velocidad. (como se muestra en la figura)



1. ¿Quién viajaba en la avioneta y por qué cayó ésta?
2. Describa los cambios de velocidad de la avioneta, por ejemplo, ¿En qué intervalos aumentó y en cuáles disminuyó? ¿Siempre aumenta o disminuye en la misma proporción?
3. ¿Hay algún momento en que la avioneta alcance un máximo o un mínimo de velocidad? Si es así ¿En qué momento alcanzó su máxima velocidad? ¿En cuál la mínima?

Una vez que todos los equipos terminaron su gráfica, se les pidió que las dibujaran en el pizarrón para que se pudieran comparar todas, la idea de esto era en primer lugar observar qué tipo de trazos hacían, particularmente si dibujaban funciones derivables (ya que en este caso el criterio de igualar la primera derivada a cero es válido). En segundo lugar, observar si causaba algún impacto en la gráfica los distintos tipos de cambio descritos en el problema y en tercer lugar detectar cómo describían “un instante”, notar cuál era su noción de pequeño.

Las gráficas se discutieron y se escogieron entre todas la gráfica más acorde con el problema planteado, posteriormente se les pidió que resolvieran la segunda pregunta del punto dos, el fin de esta era que determinaran intervalos de crecimiento y de decrecimiento, para que después deducieran un criterio de puntos máximos y mínimos en estos términos.

La primera pregunta del punto 3 puede verse ayudada o reforzada pidiendo que intenten describir los máximos y mínimos en términos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, también podemos pedir que den un criterio para determinar dichos puntos. Una vez que todos han dado sus criterios, primero se cuestiona ¿qué es un máximo? ¿qué es un mínimo? ¿en la gráfica hay máximos

y mínimos? Cuando el grupo se ha puesto de acuerdo con estos conceptos, se discute la validez de los criterios para puntos críticos y se escogen los más sensatos o se conforma uno de no haber uno más claro o preciso que los demás. En caso de que el grupo hable en términos de derivada el siguiente paso sería pedir que den el mismo criterio pero ahora en términos de ésta.

Algo más abstracto

Resumen

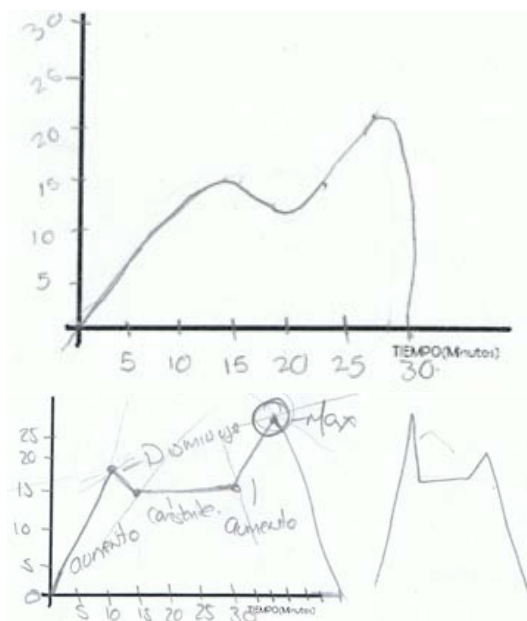
Los objetivos de la segunda parte del taller son: reforzar los conceptos que se platicaron y se establecieron durante la primera parte del Taller y establecer criterios a través de la pendiente de la recta tangente('la derivada') para determinar puntos máximos y mínimos de una función.⁵⁴

La estrategia consiste en enfrentarlos a diversas gráficas de funciones y a través de un análisis visual basado en una continua experimentación en las plantillas de geogebra, noten qué sucede con la pendiente de la recta tangente cuando roza un máximo o un mínimo. Una vez abierta la planilla se sugieren las siguientes preguntas para sembrar la idea del cambio en la pendiente de la tangente en cada punto de la función *¿Las 3 funciones crecen igual? ¿Cómo determinarían qué tanto crece cada una? ¿Cómo caracterizar el periodo de crecimiento y el de decrecimiento en términos de razón de cambio? Si tomo 2 puntos cercanos sobre la función ¿Cómo es la razón de cambio? Escribanla ¿Varía la razón de cambio si la tomo para cualesquiera 2 puntos?(se sugiere comparar 2 puntos en un intervalo de crecimiento y 2 en uno de decrecimiento) Geométricamente ¿Qué representa la razón de cambio? Siguiendo un proceso de límite para esa recta ¿Qué objeto obtenemos? ¿A qué llegamos? Dibújenlo. ¿Es la misma recta para cualquier punto que tome sobre la función? ¿Qué cambia?*

Resultados

El taller se impartió entre alumnos de 5to semestre de Cálculo del CCH-Sur, que ya habían tenido un primer contacto con la teoría de máximos y mínimos, una vez aplicado se observaron diversos fenómenos como resultado de la actividad. En primer lugar se presentaron dos gráficas mayormente, las cuales se presentan a continuación

⁵⁴Pensaremos en funciones derivables en todo su dominio o en los intervalos que analicemos.



El segundo tipo de gráfica apareció en 6 de los 8 grupos. Después de que cada uno presentó su dibujo en el pizarrón, se discutió cuál era el más sensato, se escogió éste último tipo (yo lo apoyé intencionalmente con el principal objetivo de hablar del criterio de la *derivada*) y a partir de él se respondieron las preguntas hechas en la actividad. La pregunta 2 fue respuesta básicamente por aproximaciones, a saber, la velocidad aumentó desde cero hasta cierto punto, unos escribieron literalmente eso, otros dijeron desde 0 hasta Δx_1 (colocando éste último antes del 15), otros desde 0 hasta 13 y otros tantos hasta 14.5. Lo mismo para los otros intervalos, ya sea donde crecía o donde se mantenía constante. Así, se acordó en el grupo usar puntos “cercaños” a enteros para determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Por ello, cuando se pasó a la tercera pregunta, la mayoría respondió que sí existían máximos y mínimos y éstos eran los valores que correspondían a esos puntos “cercaños”, también afirmaron que habían mínimos en el tiempo inicial y final. Algo que vale la pena remarcar, es que al cuestionar si los puntos donde la función es constante eran mínimos también todos dijeron que no, que los únicos puntos mínimos en ese intervalo (digamos entre 10 y 30) son los extremos del intervalo constante, de aquí el siguiente diálogo:

Prof.: ¿Qué es un mínimo?

Ellos: Es el valor más pequeño

Prof.: Pero en la gráfica hay valores más pequeños, entonces los puntos que me dicen no son mínimos

Ellos: Lo que sucede, es que hay mínimos por intervalos, hay mínimos relativos y mínimos absolutos

Prof.: Entonces, aquí (señalo el intervalo de función constante) ¿hay mínimos?

Ellos: Sólo en los extremos porque ahí la función es constante

Prof.:Pero los valores de enmedio también son igual de pequeños que los demás, a ver, definan otra vez que es un mínimo

Ellos:Es el valor más pequeño en un intervalo

Prof.:Entonces(vuelvo a señalar el mismo intervalo)¿Estos son mínimos o no?

Ellos: Sí, sí son

Prof.:¿Cómo definirían máximo?

Ellos:Pues igual,sólo que al revés.

Una vez que nos pusimos de acuerdo, se les pidió que dijeran *con precisión* en qué momento la avioneta había alcanzado máximos y mínimos de velocidad, la mayoría contestó en que era en los puntos “cercaños”, pero se insistió en que dieran con precisión dichos puntos, *traten de describir los momentos en que se logra un máximo o un mínimo, ¿podrían describir los puntos buscados en términos del análisis que hicieron previamente de la gráfica?* De donde respondieron algunos equipos que el máximo era cuando la gráfica dejaba de crecer y comenzaba a decrecer y que para los mínimos era lo mismo pero al revés.

Prof.:¿Funcionará este criterio para todas las funciones?

Ellos:Sí

Prof.:¿Aquí funciona?(vuelvo a señalar lo mismo)

Ellos:....

Prof.:¿Aquí pasa de decreciente a creciente?

Ellos:No

Prof.:Pero acordamos que había un mínimo ¿no?

Ellos:Sí

Prof.:¿Entonces?¿Qué es lo que pasa aquí? ¿Pasa de decreciente a creciente?

Ellos:No, lo que pasa es que deja de decrecer

Prof.:Entonces ¿Cuál será el criterio?

Ellos: Pues cuando va decreciendo y deja de decrecer

Prof.: ¿Será lo mismo para los máximos?

Ellos: Si, pero al revés.

Prof.: Bien, me gustaría que ahora intentaran dar este criterio para encontrar máximos y mínimos en términos de la derivada

El grueso del salón al leer en voz alta sus criterios, coincidieron en que la forma para encontrarlos era derivando, igualando a cero y resolviendo con la fórmula general(para resolver ecuaciones de segundo grado), luego se evaluaban puntos a la derecha e izquierda de éstos y se detectaba visualmente de qué tipo de punto se trataba.

Prof.:A ver ¿Por qué se iguala la derivada a cero?

Ellos:....

Prof.:¿Por qué no a 2 o a 10 o a -5?

Ellos:Así nos dijeron que se sacaba

Prof.:¿Por qué se tiene que sacar la derivada? ¿Qué tiene que ver la derivada?

Ellos:....

Prof.:¿Qué es la derivada?

Ellos: Es la pendiente de la recta tangente

Prof.:Y, ¿Le pasa algo a la pendiente de la recta tangente en nuestro criterio?

Ellos: Sí, cambia de positiva a negativa ahí (señalan un máximo)

Prof.: Ok, si cambia de positiva a negativa ¿Por cuál valor tuvo que pasar?

Ellos: Por cero, ¡ah!, por eso se iguala a cero

Prof.: Ahora, si al derivar mi función obtengo una función lineal ¿Aplico la fórmula general?

Ellos: No, pues ahí nada más igualamos a cero

Prof.: ¿Y cómo van a saber si se trata de un mínimo o de un máximo?

Ellos: Evaluando cerca del punto

Prof.: Bueno, vamos a ver si el criterio de la derivada funciona para empezar con nuestra función

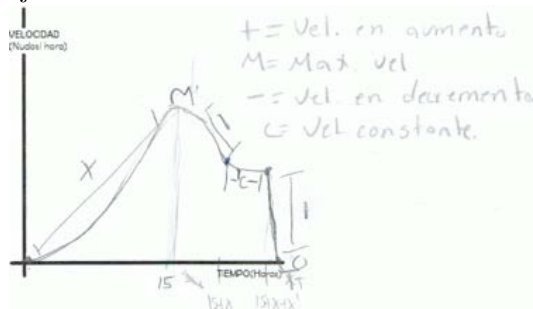
Ellos: No porque hay un pico ahí

Prof.: Entonces, si queremos aplicar nuestro criterio de la derivada ¿Qué debemos pedirle a la función o qué queremos que no pase?

Ellos: Pues que no haya picos

Mas resultados de otro grupo

El mismo taller se aplicó a otro grupo de Cálculo dentro del mismo CCH, grosso modo podemos decir que apareció 1 nuevo tipo de gráfica (en comparación con los mostrados por la otra clase y que se muestra a continuación), que los alumnos introdujeron el concepto de la derivada y desde mi punto de vista lo más llamativo fue que en este grupo todos los equipos con excepción de 1 dibujaron curvas suaves.



Se aceptaron 2 gráficas en el grupo, unas del tipo obtenido (y aceptado) con el otro grupo que se trabajó esta misma actividad y ésta donde se consideró que la velocidad con la que cayó era menor que la velocidad que llevaba antes de empezar a descender. Lo interesante de esta gráfica y motivo de discusión en la plenaria fué el último intervalo de la gráfica (en la imagen aparece indicado por un “-” que parece I), ya que en un principio el dibujo tenía un brinco desde el momento en que dejó de ser constante hasta que la velocidad fué igual a cero y fué modificado por el equipo que la hizo. Esta imagen provocó cierta inquietud y desacuerdo en un alumno, lo cual motivó el siguiente comentario:

-Estaba bien antes de que la cambiaran porque en ese intervalo empieza la caída sin velocidad y ya no debieron dibujar la línea continua porque ahí ya se acabó la velocidad.

El resto del grupo se mostró en desacuerdo con el comentario ya que consideraban que esa línea era necesaria⁵⁵, pero además dicho segmento debería ser una línea vertical. Lo cual fue obligado al equipo a modificar su dibujo como lo pedía el grupo.

Prof.: Entonces la última sección de su gráfica es una línea vertical

Ellos: Sí

Prof.: Si la gráfica representa la velocidad ¿Cómo cambia ésta en ese segmento de línea?

Ellos: Va de una número a cero

Prof.: ¿En que tiempo lo logra?

Ellos:...¿en 0?

Prof.: Entonces cambió de velocidad abruptamente sin que se moviera el tiempo, si la aceleración es cambio de velocidad respecto del tiempo, ¿cuál fue su aceleración en este lapso?

Ellos: Infinita...aah, entonces debe de estar un poquito inclinada

Una vez más, insisto en que lo primordial no es la interpretación física, lo que resalta aquí es que el concepto de pendiente parece estar claro, lo cual facilita mucho la concepción del concepto de derivada y también de propiedades de esta.

Las respuestas de la segunda pregunta no variaron en demasía comparándolas con las de la otra clase, la principal diferencia radicó en que los alumnos hablaron de intervalos abiertos y cerrados, algunos utilizaron desigualdades para caracterizar los periodos de aumento de velocidad y disminución de la misma. Sin embargo cuando alguien dijo que estaba en el abierto (14,15) la mayoría respondió estar de acuerdo.

Cuando se insistió en determinar dónde estaban los máximos y mínimos en términos de cambios de velocidad, su respuesta no fue “cuando deja de crecer y empieza a decrecer” sino la observación fue:

Prof.: ¿Qué ocurre en este intervalo(antes de que llegue al máximo)?

Ellos:La pendiente es positiva

Prof.:¿Qué pendiente?

Ellos:Las de las rectas tangentes

Prof.: Y de este lado(después del máximo)¿Cómo son las pendientes?

Ellos: Negativas

Prof.: Entonces, ¿dónde está ubicado el máximo?¿cómo lo podemos caracterizar?

Ellos(otros):Es cuando la derivada es igual a cero

Prof.: ¿Y porqué cuando es igual a cero?

Ellos:...

Prof.: ¿Qué es la derivada?

Ellos: Es la pendiente de la recta tangente

Prof.: ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes aquí(sección previa a al máximo)?

Ellos: Positivas

⁵⁵Sin fijarme demasiado en todos los factores físicos del problema, me llama la atención que aunque sea a través de dibujos tengan en mente la noción de continuidad

Prof.: ¿Del otro lado(después del máximo)?
 Ellos: Negativas
 Prof.: ¿Qué tuvo que pasar para que las pendientes pasaran de positivas a negativas?
 Ellos: Tuvo que pasar por 0
 El mismo análisis se hizo para los mínimos y posteriormente se discutió cómo determinar cuando teníamos máximo o mínimo si el criterio para ambos era igualar la derivada a cero.
 Prof.: ¿Qué diferencia encuentran en términos de las pendientes que diferencian un máximo de un mínimo?
 Ellos: En los máximos va de positiva a negativa y en los mínimos de negativa a positiva.
 Prof.: Dibujen ese comportamiento de las pendientes en una gráfica. (Ya que lo hicieron) ¿Dónde están el máximo? ¿El mínimo? ¿Qué diferencia encuentran entre la parte donde está el máximo y dónde está el mínimo?
 Ellos: De este lado baja(del lado del máximo) y del otro sube
 Prof.: ¿Podrían expresar eso en otros términos?
 Ellos: La pendiente es negativa de este lado
 Prof.: ¿Podrían dar un criterio para distinguir máximos de mínimos?
 Ellos: ...
 Prof.: ¿Qué acaban de observar en su gráfica de la derivada?
 Ellos: Que la pendiente del lado de la gráfica donde está el máximo era negativa
 Prof.: ¿Cómo podemos interpretar la pendiente de la derivada?
 Ellos: ¿La derivada de la derivada?
 Prof.: Eso sería la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la derivada
 Ellos: Aaa, pero aquí son rectas[los segmentos de gráfica de la derivada son líneas pues dibujaron algo del tipo $|x| - 1$]y coincide
 Finalmente concluyeron que debían obtener la segunda derivada para determinar qué clase de punto crítico se trataba.

Conclusiones

Más allá de una buena representación física del problema por parte de los alumnos, podemos notar que la idea gráfica de la derivada no parece estar del todo clara, ya que dibujan gráficas que se componen de segmentos de línea, es decir, no observan que la velocidad va cambiando y no se mantiene una aceleración constante, pero por otra parte demuestran ser sensibles a los distintos tipos de cambios pues podemos observar cómo dibujan segmentos de línea más inclinados que otros.

La noción de estar cerca de un punto todavía es bastante vaga para muchos, queriendo decir con esto que para muchos por ejemplo: el uno está muy cerca del 2, de hecho si se les pide que den un número que esté muy cerca de otro, en muchos casos dan el entero más próximo. Por tanto podemos ver que no existe o no es muy nítida todavía la noción de infinitesimal, su estructura de espacio parece ser todavía la de un espacio discreto.

La idea visual de mínimos y máximos como era de esperarse es muy digerible para ellos, sin embargo, por esa misma noción puntual, les cuesta mucho trabajo notar que cuando una función pasa de decreciente(creciente) a constante todo éste último intervalo es de puntos mínimos(máximos), lo cual interpreto (y también como era de esperarse) como que los conceptos en el dibujo son claros, una definición o una noción mas abstracta ya no lo es.

Podemos ver que desafortunadamente, están aprendiendo el criterio de la derivada a ciegas, en primer lugar no saben por qué se iguala a cero la primera derivada y en segundo por qué dicen que después de eso usando la fórmula general se hallan los puntos.

Algo que debemos preguntarnos es a qué se debe que un grupo dibuje curvas suaves y otro no, uno hable de intervalos abiertos(para denotar que no alcanza los extremos del mismo, no sólo para delimitar tiempos)y el otro no. Me parece, como lo afirma Schoenfeld, que las concepciones y herramientas que tienen los alumnos antes de enfrentarse a un problema influyen definitivamente en la resolución. Para unos el máximo se encontró en 15-y(y variable) o en el intervalo (x,15), explicando que el punto está tan cercano a 15 como querramos pero sin alcanzarlo, para la otra clase(que no presentó estos argumentos y me parece gracias a ello)fue mas directa su observación de que el máximo se encontraba cuando dejaba de crecer y comenzaba a decrecer. De la misma situación estos últimos no hablaron de caracterizar los comportamientos de la gráfica en diferentes intervalos a través de la pendiente y menos de la derivada, mientras que los de la segunda clase, cuando se les pidió caracterizar los cambios de velocidad mencionaron casi inmediatamente pendientes positivas y negativas y algunos inclusive sugirieron usar la derivada.

10. APÉNDICE B

10.1. Curso de Cálculo

Se presentan grosso modo los temas y las actividades hechas durante el curso en el orden en que se impartieron.

- * Ejemplos de procesos infinitos
- * Ven límites de forma algebraica, sobre todo del tipo donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con raíz común a ($P(x)$ de grado mayor a $Q(x)$), utilizan herramientas como multiplicar por el conjugado y factorización de polinomios, además de la sustitución de valores
- * CLASE 0. ESTUDIO CUALITATIVO DE $\frac{1}{x}$
- * Más ejemplos del tipo ya mencionado. Les dan criterio de existencia del límite usando la caracterización de los límites laterales(OJO: ESTA ES LA DEFINICIÓN QUE APARECE EN LA GUÍA DE EXTRAORDINARIO PARA CÁLCULO I)

* CLASE 1(RAÍZ DE 2)

* Ven el Teo. Fundamental de los Límites(operaciones con límites)

* **EXAMEN DE LÍMITES. CÁLCULO DE LÍMITES**

1. Se tiene una sucesión infinita dada por la fórmula $S_n = \{2 - \frac{1}{n}\}$ con $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Escribe los términos que consideres necesarios para hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Usa tu calculadora y elabora una tabla para encontrar el límite o concluir que éste no existe. Asegúrate de poner tu calculadora en modo radianes

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x-1}$

4. La función de Heaviside H se define por $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

[Ésta fórmula recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que inicia en el instante $t = 0$] Analice la función y determine $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$

Encuentra los siguientes Límites algebraicos:

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$ 6. $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{3t^2-10t-8}{t-2}$ 7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)-x}{h}$

8y9. Dada $f(x) = \sqrt{5x-1}$ Hallar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $x > \frac{1}{5}$

10. Usa la definición rigurosa de límite para probar que $\lim_{x \rightarrow c} mx+b = mc+b$

* CLASE 2(TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO CON EL MONJE PARA ESTUDIAR CONTINUIDAD)

* Ven ejemplos de funciones discontinuas a través de dibujos

* CLASE 3(LA FUNCIÓN DEL FOCO Y EL CONTRASTE ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS)

* Redefinición de funciones discontinuas para ser continuas(algoritmo).

Dan definición de continuidad:

Una función f es continua en a si

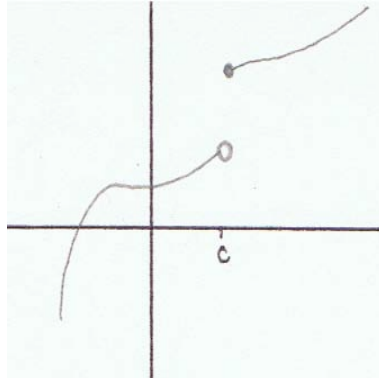
1. La función está definida en a

2. Si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

* **EXAMEN DE CONTINUIDAD.** CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN DISCONTÍNUA. DETERMINAR SI UNA FUNCIÓN ES CONTINUA, REDEFINICIÓN DE LA MISMA

1. Mi idea de CONTINUIDAD es...
2. Observa con atención la gráfica anexa y argumenta ¿Por qué no es continua la función? ¿Cuál de las tres condiciones de CONTINUIDAD no cumple?



3. Construye una función que no sea CONTINUA en $x = -2$ y $x = 7$
 4. Sea $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 10}{x - 5}$ Calcula a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ b) Reescribe $f(x)$ de tal manera que sea CONTINUA en 5
 5. En un estacionamiento se cobran 3 dólares por la primera hora (o fracción) y dos dólares por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de 10 dólares.
 - a) Grafique el costo de estacionar un automóvil como función del tiempo que permanezca allí.
 - b) Discuta las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil.
 6. Usa la definición de CONTINUIDAD y el Teorema de Límites para mostrar que la función es CONTINUA donde se indica. $h(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ en $c = 1$
 7. Las funciones siguientes no son CONTINUAS en $x = 2$ ¿Cómo pueden ser redefinidas para que sean CONTINUAS en ese punto?
 - i) $H(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
 - j) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$
 - k) $g(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$
 - l) $G(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$
- * CLASE 4(RAZONES DE CAMBIO, LOS RECIPIENTES Y EL MONJE OTRA VEZ)
- * Estudio de la velocidad instantánea, problema de velocidades medias e instantáneas. Uso sobre todo de la calculadora para hacer aproximaciones y construyen el límite derivada sin llamarlo así

- * CLASE 5(CONSTRUCCIÓN DE LA TANGENTE VÍA SECANTES DE UNA FUNCIÓN DADA EN UN PUNTO DADO)
- * Se retoma el problema de las tangentes a una curva(caso general) y se construye el límite derivada pero ahora por esta vía geométrica
- * CLASE 6(GEOGEBRA. USAR LA TECNOLOGÍA PARA CONSTRUIR TANGENTES)
- * **EXAMEN DEL LÍMITE DERIVADA. VISTO COMO RAZÓN DE CAMBIO Y COMO PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE**
 1. ¿Cuál es el significado de “h” en la definición de velocidad instantánea?

$$Vel_{inst}(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
 2. Considere $y = -x^2 + 2$
 - a) Dibuje la gráfica con todo el cuidado posible
 - b) Dibuje la recta tangente en P(2,-2)
 - c) Calcule la pendiente de la recta secante que une P(2,-2) con Q(2.01, -2.0401)
 - d) Mediante el proceso de límite, encuentre exactamente la pendiente de la recta tangente a P(2, -2)
 3. Calcule el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en $(3, \frac{1}{3})$
 4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en $x_0 = 2$
 5. El peso en gramos de un tumor maligno en el momento t está dado por la función $W(t) = \frac{1}{5}t^2 - .09$ donde t se mide en semanas. Encuentre el índice de crecimiento del tumor cuando t=10
 6. Suponga que se deja caer un pelota desde la plataforma superior de observación de la torre CN, 450 m sobre el nivel del suelo. Use la ecuación de movimiento $s = f(t) = -4.9t^2$ para responder
 - a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
 - b) ¿Con qué velocidad choca con el suelo?

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba del suelo con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Su altura S al término de t segundos tiene un valor aproximado de $S = 128t - 16t^2$ pies
 7. ¿Cuándo alcanza su altura máxima?
 8. ¿Cuál es su altura máxima?
- * Resolución del examen. Presentación formal de la derivada
- * CLASE 7(INTRODUCCIÓN A MÁXIMOS Y MÍNIMOS. PROBLEMA DEL RECTÁNGULO DE ÁREA MÁXIMA)

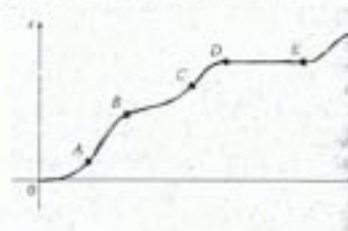
- * Se obtienen las reglas de derivación para la suma, resta, multiplicación, división de funciones a través de la definición del límite derivada. También se obtiene la derivada de x^n desarrollando el binomio de Newton
- * CLASE 8(INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$)
- * Se encuentran las derivadas para otras funciones trigonométricas usando identidades y la definición del límite derivada
- * **EXAMEN DE DERIVACIÓN.** PROBLEMAS DE HALLAR TANGENTES HORIZONTALES Y DE APLICACIÓN A PROBLEMAS FÍSICOS

4^o EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO DIFERENCIAL

POR ACT. ALVARO ESCUADRA G.

1. La gráfica muestra la función de posición de un automóvil. Usa la forma de la gráfica para dar respuestas a las siguientes preguntas:
- (a) ¿Cuál fue la velocidad inicial del automóvil?
 - (b) ¿El automóvil viajaba más rápido en B o en C?
 - (c) Diga si el automóvil desaceleraba o aceleraba en A, B y C.
 - (d) ¿Qué sucedió en D y E?

2 pts.



2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la Parábola $y = 1 + x + x^2$ en el punto $x_0 = 1/2$

1 pto.

3. Se tiene la curva $y = x^3 + x^2 - 2x + 6$. ¿En qué puntos la pendiente de la recta tangente es -1 ?

1 pto.

4. Encuentra $D_x (t^3 - 2t + 1)$

1 pto.

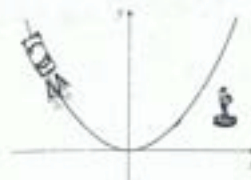
5. Si en la Luna se dispara una flecha hacia arriba con una velocidad de 58 m/s, su altura en metros después de t segundos se expresa con $H = 58t - 0.83t^2$.

- (a) Encuentra la velocidad de la flecha después de 1 segundo.
- (b) Hallar la velocidad de la flecha cuando $t = a$
- (c) ¿Cuándo chocará la flecha con la Luna?
- (d) ¿Con qué velocidad chocará?

2 pts.

6. Un automóvil se desplaza por una carretera en forma de Parábola cuya ecuación es $y = x^2$. Hay un monumento situado en el punto $(8, 39)$. ¿En qué punto de la carretera estará situado el automóvil cuando ilumine el monumento con los faros?

3 pts.



- * Práctica de derivación de funciones.
- * CLASE 9(INTRODUCCIÓN A LA REGLA DE LA CADENA. PROBLEMA DE LAS FRESAS)
- * Enunciación de la Regla de la Cadena(El profesor titular lo hace presentando un problema del tipo si A es 2 veces más rápido que B y B es tres veces más rápido que C, cuántas veces es más rápido A que C. Usa notación leibziana para representarlo y finalmente enuncia en términos de funciones derivables la Regla de la Cadena). Práctica de la misma
- * **EXAMEN DE REGLA DE LA CADENA. CÁLCULO DE DERIVADAS USANDO REGLA DE LA CADENA. PROBLEMAS DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN**
 1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \cos(x)$ en $(0, 1)$
 2. Si $g(t) = t^3 \cos t$ calcula $\frac{dg}{dt}$
 3. Muestra que $\frac{d(\csc \theta)}{d\theta} = -\csc \theta \cot \theta$. Ayuda: considera la identidad trigonométrica $\csc \theta = \frac{1}{\sen \theta}$
 4. Se tiene la función $f(x) = 5 + 2\sen(x)$. Da al menos 3 valores de x para los cuales la tangente es horizontal
 5. Dada $y = 4\sen \theta$ usa la regla de la cadena para encontrar $\frac{dy}{dx}$
 6. "...estamos tratando con tres variables y, u y x que están conectadas paso a paso en una cadena de tal manera que cada una depende de la siguiente. Podemos sugerir esta relación escribiendo
y depende de u depende de x
la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ nos dice cómo derivar la primera variable respecto a la última teniendo en cuenta cada conexión individual en la cadena."

Louis Joseph Cauchy

Esta regla puede extenderse a mas variables. Escribe la regla de la cadena si:

- a) x depende a su vez de z
 - b) z depende a su vez de w
7. Derive $y = (2x + 1)^4(x^2 + 1)^3$
 8. El desplazamiento de una partícula en una cuerda que vibra, la representa la ecuación $S(t) = 10 + \frac{1}{4}\sen(10\pi t)$ donde s se mide en cm y t en segundos. Encuentra la velocidad de la partícula después de t segundos
 9. Si $S = A\cos(\omega t + \delta)$ expresa la ecuación del movimiento de una partícula, se dice que esa partícula describe un movimiento armónico simple
 - a) Encuentra la velocidad de la partícula en el instante t
 - b) ¿Cuál es la aceleración en $t=2$ segundos?

* FIN DEL CURSO

* EXAMEN FINAL

1. Observa la sucesión con cuidado y escribe la fórmula para el término enésimo y determina el límite (si existe) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+5}{x^2+2x+4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2+x-1}{x-1}$

5. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

6. Usa la definición precisa de Límite para probar que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$

7. Establezca si la función indicada es continua o no en 2, si no lo es, explique por qué $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$.

8. La función dada no está definida para cierto punto. ¿Cómo se podría redefinir para que sea continua en ese punto? $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

Usa la definición de $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para encontrar la Derivada de

9. $g(t) = \sqrt{t}$

10. $f(x) = ax^2 + bx + c$

11. Un negocio está prosperando de modo tal que su beneficio total (acumulado) después de t años es $1000t^2$ dólares.

a) ¿Cuánto producirá ese negocio durante el tercer año (esto es, entre $t=2$ y $t=3$)?

b) ¿Cuál es su tasa promedio de utilidad (utilidad promedio marginal) durante el primer semestre del tercer año (entre $t=2$ y $t=2.5$)?

c) ¿Cuál es la tasa instantánea de utilidad (utilidad marginal) para $t=2$?

12. Escriba la ecuaciones de las dos rectas que pasan por $(-5, 21)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2$

13. Un tanque cilíndrico tiene un eje vertical y se llena inicialmente con 600 litros de agua. El agua tarda 60 minutos en vaciarse después de abrir el desagüe en su parte inferior. Suponga que el desagüe se abre en el instante $t=0$ y que el volumen V del agua restante en el tanque después de t minutos es $V(t) = \frac{1}{6}(60-t)^2$ litros. Determine la razón instantánea con la que el agua fluye fuera del tanque en el instante $t = 15$ (minutos) y en el instante $t = 45$ (minutos).

14. Hallar los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ en los que la tangente es paralela al eje de las X .

15. Una pesada roca, lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 160 pies/segundo, alcanza una altura de $S(t) = 160t - 16t^2$ pies al cabo de t segundos.

(a) ¿Qué altura alcanza la roca?

(b) ¿Qué velocidad lleva cuando alcanza una altura de 256 pies sobre el suelo yendo hacia arriba?

16. Un cuerpo se mueve sobre una recta según la ley de movimiento $S(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$. Hallar su aceleración cada vez que su velocidad sea cero.

17. Encuentra $\frac{dy}{dt}$ si $y = \sin^2(\cos(kt))$

18. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es Delta Cefeida, para la cual el intervalo de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es 4.0 y su brillantez cambia en . En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t , donde éste se mide en días, se ha modelado por la función $B(t) = 4 + 0.35\sin(\frac{2\pi t}{5.4})$

(a) Hallar la razón de cambio después de t días

(b) Encuentra, correcto hasta dos decimales, la razón de cambio del aumento después de un día.

Referencias

- [1] Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N., “La matemática, su contenido, métodos y significado”, Alianza Editorial Madrid, 1976
- [2] Arnold V. I., Matemática con rostro Humano, Priroda 1988, No.3, 117-119
- [3] Brousseau, Guy (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, capítulo I, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.
- [4] Courant, R.(2003) Introducción al Análisis Matemático, Ed. Limusa
- [5] Freire, Paulo(1997) Cartas a Guinea-Bissau, Siglo XXI
- [6] Guzman, Miguel de, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Organización de Estados Iberoamericanos. Para la educación, la ciencia y la cultura. www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm
- [7] Olaizola A., Iñiqui de, La enseñanza de la geometría en el tronco divisional de la Division de Ciencias y Artes para el diseño de la UAM-Xochimilco, tesis de maestría en educación de matemáticas, UNAM, 1995
- [8] Polya G., “Cómo plantear y resolver problemas”, Trillas, 1965
- [9] Santos Trigo, L. M. (1995) ¿Qué significa el Aprender Matemáticas?. Una Experiencia con estudiantes de Cálculo. En Educación Matemática. Vol. 7 (1). Grupo Editorial Iberoamérica
- [10] Santos Trigo, L. M. (1998) “Problematizar el estudio de las matemáticas: Un aspecto esencial en la organización del curriculum y en el aprendizaje de los estudiantes.” En F. Hitt Espinosa (ed) Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- [11] Schoenfeld, Alan (1985), Mathematical Problem Solving, Academic Press
- [12] Spivak, M.(1992) Calculus, Ed. Reverté
- [13] Stewart, Cálculo, Conceptos Trascendentales
- [14] Vergnaud, G. (1987) About constructivism. Proceedings of the twelfth Conférence for the Psychology of Mathematics Education, Montréal, pp. 42-54. (invited plenary address).