



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS**

**TEORÍA ESTADÍSTICA Y PROBABILÍSTICA DE LOS
FENÓMENOS ESTABLE-ACOTADOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
DE OPERACIONES**

P R E S E N T A:

JAVIER GONZÁLEZ ROSAS

TUTOR:

DR. RAÚL RUEDA DIAZ DEL CAMPO

MEXICO, D.F.

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE DE CONTENIDO

Introducción.....	4
Capítulo 1	
El modelo estable acotado	
1.1 Los fenómenos estable-acotados.....	8
1.2 Los problemas de la estabilización.....	13
1.3 Antecedentes del problema.....	15
1.4 Una solución al problema de la estabilización.....	20
1.5 Una solución al problema de cómo alcanzar la estabilidad.....	24
1.6 Modelo matemático estable-acotado.....	32
1.7 Estimación de parámetros en el modelo estable-acotado.....	34
1.8 Propiedades de los estimadores del modelo estable-acotado.....	42
Capítulo 2	
Pronóstico de la mortalidad materna en México en el corto y	
Largo plazo	
2.1 La mortalidad materna.....	60
2.2 Los planes estratégicos de la mortalidad materna.....	61
2.3 La estabilización de la mortalidad materna.....	63
2.4 La función estabilizadora de la mortalidad materna.....	66
2.5 Análisis del error en el modelo estable-acotado de la mortalidad materna en México.....	69
2.6 Estimación puntual de la mortalidad materna en México.....	74
2.7 Validación del modelo estable acotado de la mortalidad materna.....	76

Capítulo 3

Pronósticos de la población de México en el periodo 2006-2030

3.1 Dinámica demográfica actual.....	80
3.2 La población de México en los dos últimos siglos.....	82
3.3 La velocidad de crecimiento y los escenarios poblacionales.....	85
3.4 La estabilización de la población mexicana.....	87
3.5 La función estabilizadora de la población mexicana.....	89
3.6 El error en el modelo estable acotado de la población mexicana.....	92
3.7 Estimación puntual de la población mexicana.....	94
3.8 Validación del modelo estable-acotado para la población mexicana.....	95
Conclusiones	98
Anexo	102
Bibliografía	130

INTRODUCCIÓN

En muchas disciplinas del conocimiento humano existen diversos fenómenos que al observar su evolución a través del tiempo, muestran a partir de cierto momento una clara tendencia a la alza o a la baja. Muchos de estos fenómenos por naturaleza propia o por el medio ambiente que los rodea, no pueden crecer ni decrecer indefinidamente y por lo tanto se espera que a partir de cierto momento se estabilicen o que la tendencia observada se revierta. Por sus características estos fenómenos se llamarán estable-acotados.

Asociados con este tipo de fenómenos existen dos problemas inherentes, el primero se refiere a cómo calcular el valor de la estabilización o cota en situaciones donde el fenómeno no ha alcanzado dicho estado. El otro problema se refiere a la forma como alcanzarán la estabilización estos fenómenos, es decir, qué tan rápido o qué tan lento llegarán al estado estable.

Para predecir el comportamiento de este tipo de fenómenos el uso de funciones lineales como la recta y la parábola no resulta del todo adecuado, ya que estas funciones crecen o decrecen indefinidamente, por lo que, si se usan en la predicción de los fenómenos estable-acotados se pueden obtener valores incongruentes, como por ejemplo, valores negativos para fenómenos que son estrictamente positivos. La solución a este problema es usando funciones acotadas, las cuales no pueden crecer ni decrecer indefinidamente al igual que los fenómenos estable-acotados.

En la literatura estadística existe una gran variedad de funciones acotadas (Véase Johnston, 1972, p.52-53 y Montgomery y Peck, 1982, p.79-81), que pueden utilizarse para la predicción de estos fenómenos. En demografía, se ha usado la función logística, debido por un lado, a que se ajusta adecuadamente a los datos observados de algunos fenómenos demográficos que no pueden crecer ni decrecer indefinidamente, y por el otro, a que es una función acotada que tiende a estabilizarse cuando el tiempo crece o decrece indefinidamente, describiendo así el

comportamiento esperado en el futuro de este tipo de fenómenos. La función logística también se ha usado en áreas como la biología, economía, medicina, estadística, sociología y física entre otras. Su ecuación es la siguiente:

$$y = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}}$$

La función tiene dos tipos de parámetros, los que determinan la estabilización y que corresponden a las cotas (k_1 y $k_1 + k_2$) y los que determinan la forma o la rapidez con que se alcanzará la estabilización (a y b). La función es un modelo intrínsecamente lineal, por lo que puede ser transformada a la forma lineal si las cotas son conocidas, lo que implica que una opción para estimar los parámetros de la función es estimar primero las cotas y luego los parámetros de la forma.

En estadística existe una solución para estimar los parámetros de la función logística que no usa la propiedad de linealidad de la función y que se basa en la teoría de los modelos intrínsecamente no lineales, los cuales utilizan procedimientos iterativos para estimar todos los parámetros de la función logística de manera óptima, de tal forma que resultan ser los que mejor ajustan la función a los datos observados. Hasta hace pocos años, todavía la estimación óptima dependía de valores iniciales que con base en la experiencia el investigador proporcionaba, pero actualmente existen paquetes estadísticos como STATA, que proporcionan estimaciones de todos los parámetros de la función logística sin necesidad de valores iniciales.

En demografía, si se usa la propiedad de linealidad de la función logística el problema es que los demógrafos no estiman las cotas, lo que hacen es imponerles valores con base en la experiencia y conocimiento que tienen del fenómeno en cuestión (Partida, 2006) y después mediante un cambio de variable que involucra los valores impuestos a las cotas y que transforma la función a la forma lineal, estiman por el método de mínimos cuadrados ordinarios los parámetros de la forma.

El modelo estable-acotado desarrollado en esta tesis, resuelve los dos problemas inherentes que surgen en la predicción de fenómenos que no pueden crecer ni decrecer indefinidamente a través del tiempo. Por un lado, resuelve primero el problema del valor de la estabilización o cota, mediante un método que estima con base en los datos observados, el valor en el que se estabilizará el fenómeno en estudio. Por el otro, resuelve también el problema de cómo se alcanzará el estado estable, mediante un método que usa el valor estimado de la cota en la identificación de una función intrínsecamente lineal, que tiene dos tipos de parámetros, los que determinan la estabilización y los que determinan la forma como se alcanzará el estado estable. No se conoce hasta hoy alguna solución igual a ésta, por lo que es probable que el modelo estable-acotado se pueda considerar como una nueva teoría.

En particular una de las funciones que se identifican bajo ciertos supuestos del modelo estable-acotado es la función logística, lo que implica que, desde el punto de vista demográfico el modelo proporciona una solución al problema de imponer valores a las cotas y desde el punto de vista estadístico proporciona una solución diferente a la de los modelos no lineales. En el área estadística, representa una solución al problema que hace más de siglo y medio fue planteado por Pierre Francois Verhulst, cuando en 1838 publicó por primera vez la función logística. En el área demográfica representa la solución al problema que desde hace casi un siglo, planteó Lotka cuando en 1925 redescubrió la función.

La tesis se desarrolla en tres capítulos, en el primero se presentan algunos fenómenos estable-acotados del área demográfica, se describen los dos problemas inherentes asociados con este tipo de fenómenos y algunos antecedentes de cómo se han abordado. En seguida, se desarrolla la teoría para resolver el problema del valor de la estabilización y de la forma como se alcanzará el estado estable. Después de esto se define el modelo estable-acotado y se establecen sus supuestos. Por último, se

describe el proceso de estimación de los parámetros y mediante un ejercicio de simulación se determinan sus propiedades.

En el segundo capítulo, se ajusta un modelo estable-acotado decreciente a los datos observados de la mortalidad materna en México en el periodo de 1950 a 2001. El capítulo empieza definiendo y analizando el fenómeno en cuestión. Después se describen los últimos planes estratégicos que se han elaborado para reducir la mortalidad materna en México. En seguida, se estima el valor de la estabilización de la mortalidad materna, se identifica la mejor función acotada y se obtienen estimadores de mínimos cuadrados ordinarios para los parámetros de la forma. Posteriormente mediante el análisis de las cantidades residuales del modelo se determina la necesidad de obtener estimadores de mínimos cuadrados generalizados nuevamente para los parámetros de la forma. Una vez estimado el mejor modelo estable-acotado decreciente de la mortalidad materna en México, se obtienen predicciones para el periodo 2002 a 2030 y finalmente se hace un ejercicio para validar el modelo.

El tercer capítulo, aborda el problema de ajustar un modelo estable-acotado creciente a los datos de la población de México en el periodo comprendido entre los años de 1900 a 2005. El capítulo empieza describiendo las características de la dinámica demográfica en México de acuerdo con los últimos datos disponibles. Después se presenta un análisis de la población y de su velocidad de crecimiento en los últimos dos siglos. En seguida, se estima el valor de la estabilización de la población de México, se identifica la mejor función acotada y se obtienen los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios de los parámetros de la forma. Posteriormente, se concluye con base en el análisis de las cantidades residuales, que los mejores estimadores de la forma son los obtenidos por el método de mínimos cuadrados ordinarios, quedando así determinado el modelo definitivo. Por último, se obtienen predicciones de la población mexicana para el periodo 2006-2030 y se presenta la validación del modelo.

CAPITULO 1

EL MODELO ESTABLE ACOTADO

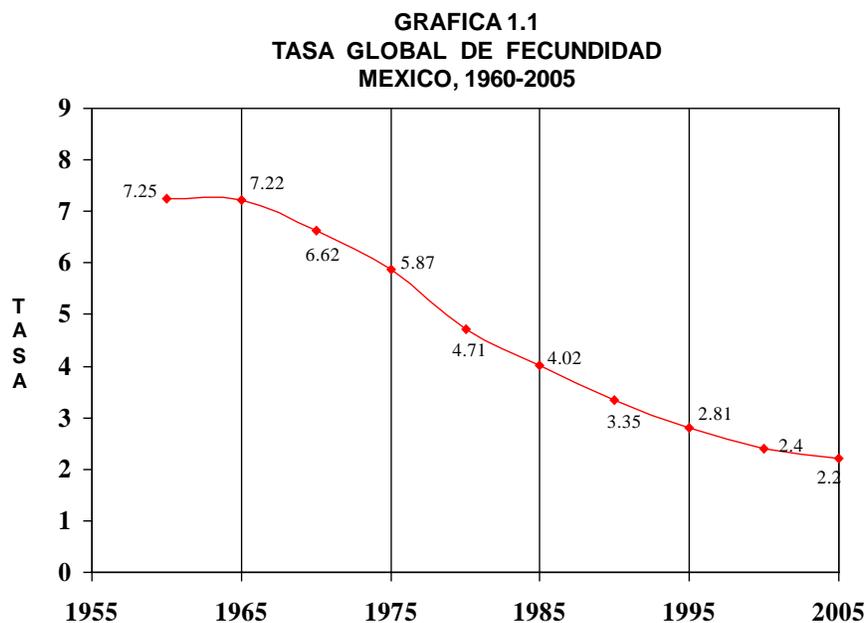
1.1 Los fenómenos estable-acotados

En las áreas social, económica y demográfica, existen diversas razones para pensar que todos fenómenos de estas áreas no pueden crecer o decrecer indefinidamente, es decir, pueden mostrar a partir de cierto momento una tendencia a la alza o a la baja, sin embargo, su naturaleza es tal que no pueden crecer ni decrecer todo el tiempo, por lo que se supone que en algún tiempo futuro se estabilizarán o bien que revertirán su tendencia observada. Por las características de estos fenómenos a alcanzar un estado en el que no hay cambios o de alcanzar un máximo y cambiar la tendencia, los llamaremos fenómenos estable-acotados.

En áreas como la economía, la tasa de desempleo y el ingreso per cápita son ejemplos de este tipo de fenómenos. En el área social, algunos ejemplos son la cobertura de los programas de asistencia social, como el programa de ayuda a adultos mayores o la tasa de analfabetismo.

En demografía, la fecundidad y la mortalidad son ejemplos de este tipo de fenómenos. En México, la tasa global de fecundidad¹ (TGF) bajó de manera sostenida durante los últimos 40 años. En 1960 según estimaciones del Consejo Nacional de Población (CONAPO) la TGF se estimó en 7.25 hijos, mientras que para el año 2005 alcanzó el valor de 2.2 hijos (Figura 1.1).

Sin embargo, el descenso de la TGF no puede continuar indefinidamente hasta alcanzar el valor de cero, porque implicaría tarde o temprano la extinción de la población, ya que una TGF igual a cero trae como consecuencia que las mujeres de la población no tengan hijos. Por lo tanto, se espera que en algún momento del tiempo la fecundidad no baje más y que se mantenga constante durante algunos años, o bien que a partir de cierto año empiece a subir nuevamente.



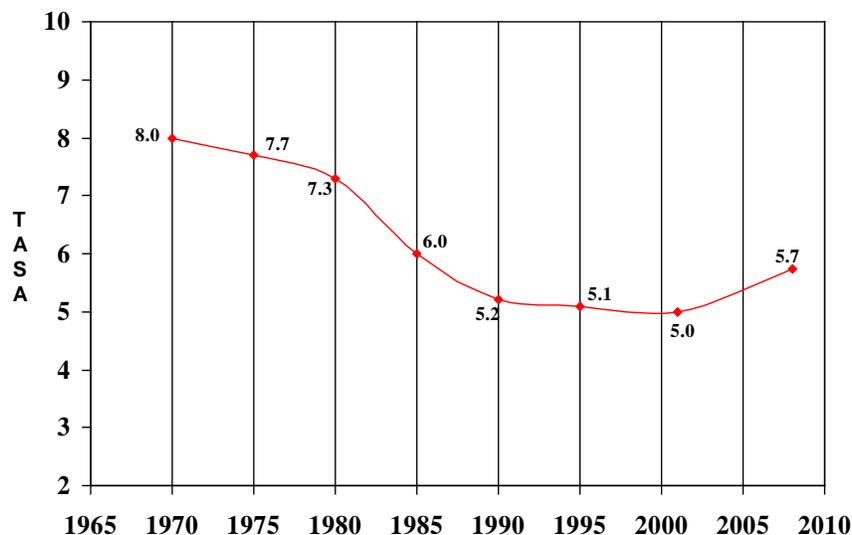
FUENTE: Consejo Nacional de Población

¹ La tasa global de fecundidad, es el número promedio de hijos que una mujer tendría al final de su vida reproductiva, si tuviera sus hijos de acuerdo con las actuales tasas específicas de fecundidad por edad durante cada año de su vida reproductiva (Haupt y Kane, 2001).

En algunos países desarrollados la experiencia muestra que la fecundidad tiende a disminuir a menos del valor de reemplazo² y que ha permanecido constante en ese valor hasta la fecha. En Francia, actualmente se tienen instituidas políticas pronatalistas con el objetivo de que en el corto plazo la fecundidad revierta la tendencia observada y empiece en algún momento a incrementarse (Haupt y Kane, 2001, pág. 4).

En Corea del Sur, la tasa bruta de mortalidad³ mostró una tendencia a la baja entre 1970 y 1990. En este período la tasa bajó de 8.0 a 5.2 defunciones por cada mil habitantes. De 1990 a 2001, se mantuvo estable en cerca de 5 defunciones. Sin embargo, el dato de 2008 parece indicar que la tendencia empieza a revertirse (Figura 1.2).

GRAFICA 1.2
TASA BRUTA DE MORTALIDAD
COREA DEL SUR, 1970-2008

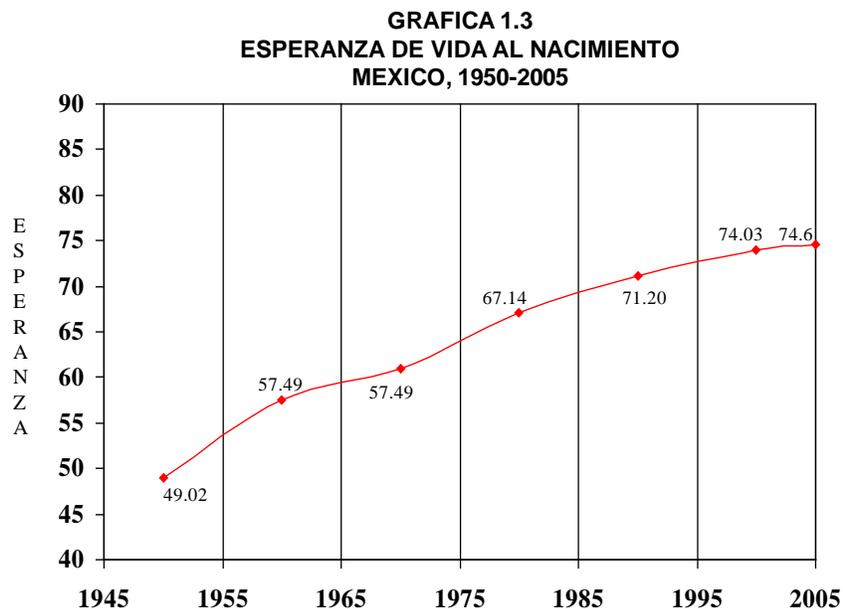


FUENTE: Las cifras de 1970-2001 se tomaron de Ramírez-Bonilla (2004).
La cifra de 2008 se tomó de Index Mundi

² Se dice que una población tiene fecundidad de reemplazo, cuando la TGF=2.1, indicando que una mujer tendría en toda su vida reproductiva una hija, con lo que se estaría asegurando su reemplazo (Haupt y Kane, 2001, pág. 17)

³ Se define como el cociente entre el total de defunciones ocurridas en un año en una población y la población total a mitad del año.

Otro fenómeno de este tipo en el área demográfica es la esperanza de vida⁴. Datos del CONAPO indican que en 1950 la esperanza de vida al nacimiento de la población mexicana fue de 49.02 años, mientras que para el año 2005 se estimó en 74.6 años (Figura 1.3). Pero también el aumento en la esperanza de vida tiene que frenarse, pues hoy en día difícilmente se vive más allá de 100 años, por lo que se prevé que la esperanza de vida en México se establezca en un valor menor a los 100 años en un futuro posible.



FUENTE: Consejo Nacional de Población

Ya desde 1939 Lotka⁵ usó el término estable, al calcular una tasa de crecimiento poblacional con base en tasas específicas de fecundidad por edad⁶ constantes. Keyfitz (1979) por su lado, define que la estabilidad de una distribución por edad, se produce

⁴ La esperanza de vida al nacimiento se interpreta como el número promedio de años que viviría un recién nacido si las tasas específicas de mortalidad por edad para un año determinado permanecieran sin cambio durante el resto de su vida, (Pressat, 2000)

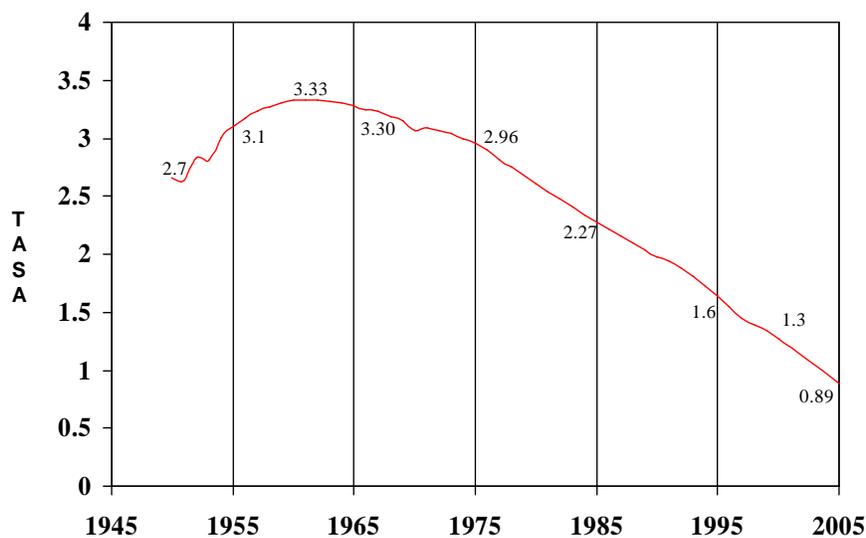
⁵ Alfred James Lotka (1880-1949). Matemático estadounidense especializado en estadística. Se le considera el padre de la demografía matemática. Estudió la evolución de las poblaciones y definió los conceptos de población estable, población estacionaria y tasa de crecimiento natural.

⁶ La tasa específica de fecundidad por edad se define como el cociente del número de hijos que tienen en un año determinado las mujeres de una edad específica y el número de mujeres de esa edad a la mitad del año.

cuando las tasas específicas de fecundidad y de mortalidad por edad permanecen constantes durante algún determinado período de tiempo. Es decir, la estabilidad implica de alguna manera situaciones en las que no hay cambios.

En México, un fenómeno que durante años mostró una tendencia creciente y que cambió su tendencia y que a la fecha no se ha estabilizado, es la tasa de crecimiento poblacional⁷. Este indicador, según datos del CONAPO se estimó en 1950 en 2.7 personas por cada cien habitantes, para 1955 se incrementó a 3.1 y para 1962 alcanzó un valor máximo de 3.33, por lo que, hasta 1962 se podría pensar que en algún momento se estabilizaría, sin embargo, los datos muestran que no fue así, ya que a partir de ese año la tasa empezó a descender y ha mantenido esa tendencia a la baja durante más de 40 años. (Figura 1.4).

GRAFICA 1.4
TASA DE CRECIMIENTO DE LA POBLACION
MEXICO, 1950-2005



FUENTE: Consejo Nacional de Población

⁷ Este indicador es el resultado de dividir la suma algebraica de los que nacen, mueren, entran o salen de una población en un año, entre el total de habitantes de la población a mitad del año.

1.2 Los problemas de la estabilización

Existen dos problemas inherentes a los fenómenos estable-acotados, el primero es cómo calcular *el valor de la estabilización o la cota*, en situaciones donde el fenómeno no ha alcanzado dicho estado. Es decir, si el fenómeno es creciente, el problema consiste en determinar hasta qué valor dejará de crecer, o bien, si es decreciente, hasta qué valor dejará de decrecer. El otro problema se refiere a *la forma como alcanzarán la estabilización* estos fenómenos, es decir, qué tan rápido o qué tan lento llegarán al estado estable⁸ y que tiene que ver con la identificación de una función que tenga como cota el valor de la estabilización estimado y que mejor se ajuste a los datos observados.

Si estos dos problemas no se resuelven, la proyección de estos fenómenos en el largo plazo puede complicarse, ya que por ejemplo, al intentar estimar la tasa global de fecundidad de México en el largo plazo con los modelos de uso común (rectas o parábolas), se pueden predecir valores negativos, para un indicador que como la TGF es estrictamente mayor o igual que cero. En el caso de la esperanza de vida al nacimiento, se pueden obtener valores incongruentes, como 200 o quizá 500 años de esperanza de vida, lo cual en un futuro cercano se considera imposible. De esta manera, el estudio de los fenómenos estable-acotados a través del tiempo, implica la necesidad de un modelo matemático que tenga las siguientes características:

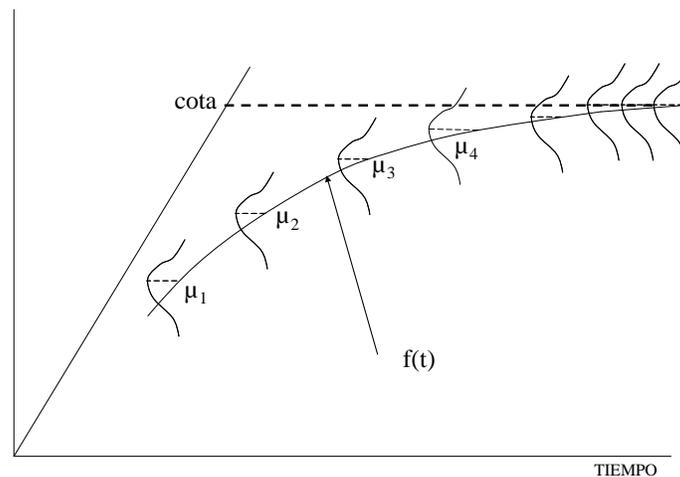
- Que explique el comportamiento observado,
- Que provea estimaciones válidas en el corto plazo,
- Que el crecimiento o decrecimiento tenga un límite, y
- Que permita estudiar en cualquier momento del tiempo, el comportamiento del fenómeno desde un enfoque probabilístico.

⁸ En el caso de un mínimo o máximo el primero y segundo problema tienen que ver con cómo calcular y alcanzar dicho valor respectivamente.

Para poder definir una estructura probabilística en el tiempo, es necesario suponer ante todo que el fenómeno estable-acotado observado es aleatorio, es decir, que la naturaleza del fenómeno es tal que no se puede predecir exactamente el valor del fenómeno para cualquier tiempo t específico.

De esta manera se define un *fenómeno estable-acotado creciente*, como una familia de variables aleatorias con varianzas constantes y cuyas medias son una función creciente del tiempo y tal que existe una cota para el crecimiento de las medias⁹.

FIGURA 1.5
FENOMENO ESTABLE ACOTADO CRECIENTE



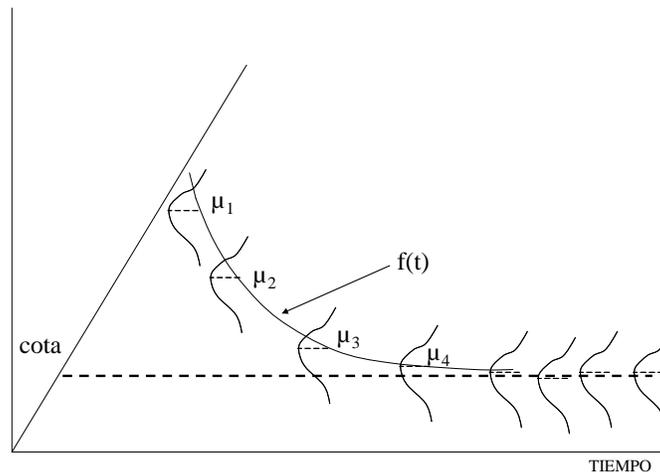
En la figura (1.5) se ejemplifica una familia de variables aleatorias, con varianzas constantes y cuyas medias están dadas por la función estabilizadora¹⁰ $f(t)$, la cual es una función creciente del tiempo y está acotada por arriba. Como se puede observar, la familia de variables aleatorias tiende a una familia de variables aleatorias cuya

⁹ Un fenómeno estable-acotado decreciente, se define como una familia de variables aleatorias con varianzas constantes cuyas medias son una función decreciente del tiempo y tal que existe una cota para el decrecimiento de las medias. Por otro lado, una cota de una curva de una función se define como una recta que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta tiende a cero (Lehman, 2000, pág. 41).

¹⁰ El término función estabilizadora se usa tanto para funciones que se estabilizan como para aquellas que alcanzan un máximo o un mínimo.

media es constante e igual a la cota. En la figura (1.6) se puede observar un ejemplo de un fenómeno estable-acotado decreciente.

FIGURA 1.6
FENOMENO ESTABLE ACOTADO DECRECIENTE



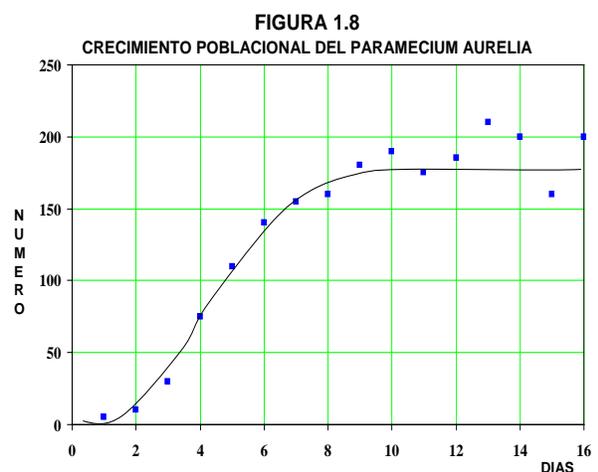
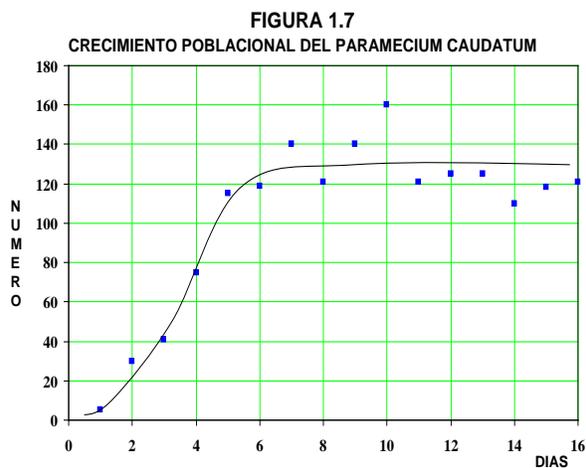
1.3 Antecedentes del problema

Según Colinvaux (1980, cap.22), los ecólogos creen que los números de animales que nos rodean varían muy poco de un año a otro, por lo que se cree que existe un equilibrio en la naturaleza. Para explicar este equilibrio los ecólogos realizaron estudios experimentales en laboratorios con organismos pequeños como levaduras, bacterias, protozoarios e insectos, con la esperanza de que estos estudios revelaran como funcionaba el equilibrio en la naturaleza.

En el siglo pasado biólogos como Pearl y Parquer (1922), Chapman (1928), Gause (1934), Bodenheimer (1938), Robertson y Sang (1944), Boyce (1946) y Rich (1956), realizaron experimentos con animales sencillos en espacios limitados y con aportes de energía limitados, encontrando que los animales se reproducían desordenadamente cuando tenían espacio y alimento de sobra, pero que dejaban de

hacerlo cuando estaban amontonados. Al parecer en estas condiciones la tasa de sustitución se iguala a la tasa de muertes y entonces la población se equilibra.

La descripción gráfica del crecimiento de estas poblaciones siempre tuvo una forma sigmoide. En las figuras 1.7 y 1.8 se presentan los resultados de Gause, en dos tipos de Paramecium. Como se puede observar el crecimiento de la población del paramecium Caudatum parece estabilizarse alrededor del valor 130, mientras que el Aurelia parece hacerlo aproximadamente en el valor 180.



Estos estudios comprobaron la hipótesis de que al principio cuando los animales cuentan con espacio y alimento en abundancia, crecen y se reproducen rápidamente y que a medida que pasa el tiempo, un número cada vez mayor se reproduce produciendo un incremento exponencial en el tamaño de la población. Pero pasado un cierto tiempo la población deja paulatinamente de crecer hasta que se alcanza un límite superior.

Verhulst¹¹ encontró que la ecuación que describe en forma exacta el crecimiento de una población en las condiciones experimentales postuladas anteriormente, es la función logística. Matemáticamente la ecuación tiene la siguiente forma,

¹¹ Matemático Belga que publicó la ecuación logística por primera vez en 1838, para mayor detalle ver *Logistic Function* en http://en.wikipedia.org/Logistic_function.

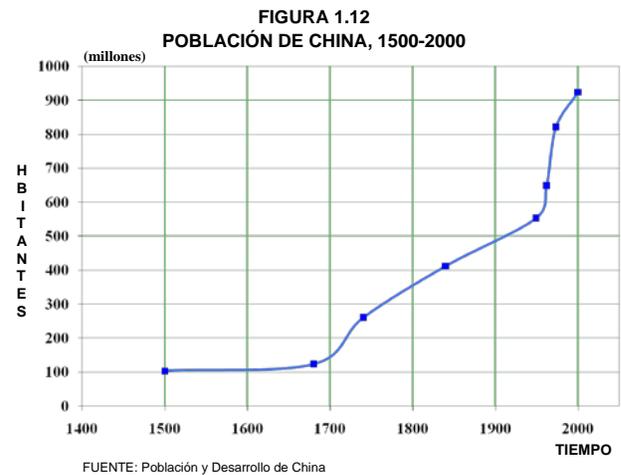
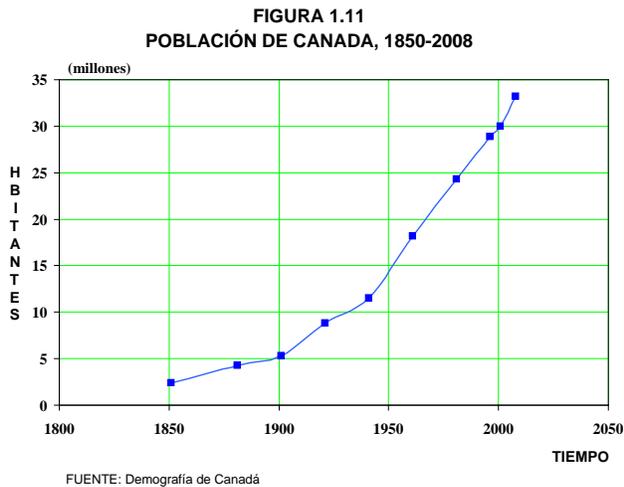
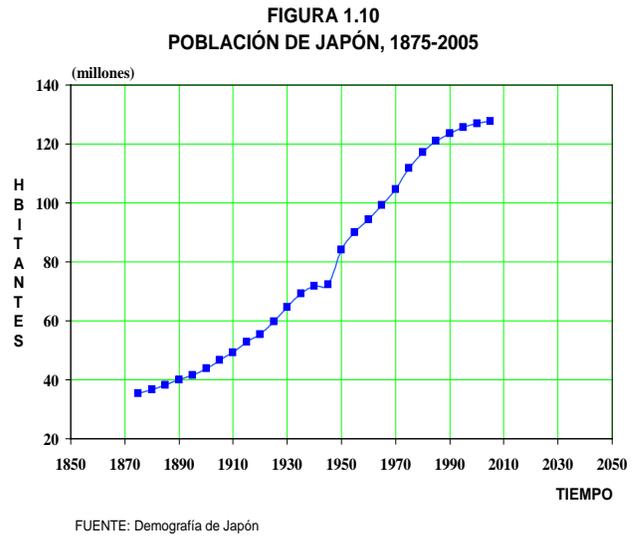
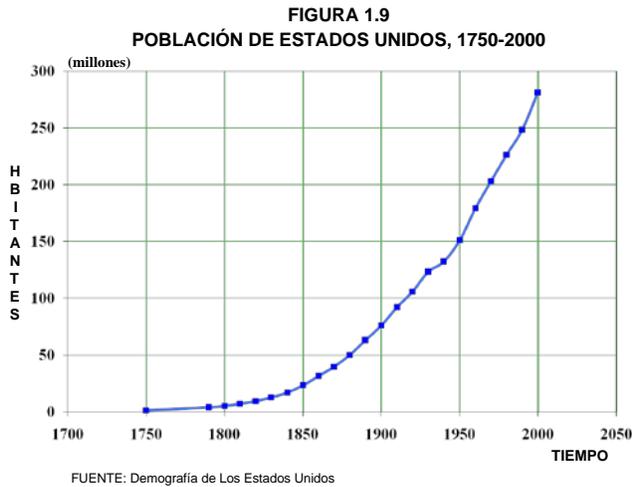
$$N_t = \frac{k}{1 + e^{\alpha + \beta t}} \text{ con } \beta < 0,$$

donde N_t denota la población en el tiempo t , k representa el límite superior, α es un parámetro de posicionamiento y β denota la tasa de crecimiento o cantidad de cambio por unidad de tiempo.

Según los ecólogos, en poblaciones experimentales, el límite superior k del crecimiento de la población es una propiedad del recipiente y del alimento que se introduce como fuente de energía, También piensan que varía según las diferentes condiciones del hábitat en que se encuentran las poblaciones y que sólo puede ser determinada en forma experimental.

Sin embargo, en poblaciones que crecen de manera natural, la determinación del límite superior de manera experimental no es posible, en primer lugar porque no se pueden alterar las condiciones del hábitat ni del alimento para que la población alcance el límite superior, y en segundo, porque alcanzar el límite superior en condiciones naturales puede llevar mucho tiempo. Tal es el caso de las poblaciones humanas cuyo crecimiento parece seguir también un patrón logístico.

En países desarrollados como Estados Unidos, Japón, Canadá y China, los datos poblacionales parecen confirmar el supuesto del crecimiento logístico. En las figuras 1.9-1.12, se observa que en estos países al principio el crecimiento fue lento y conforme avanzó el tiempo la población creció poco a poco, hasta alcanzar un crecimiento exponencial. Sin embargo, ninguno de estos países ha alcanzado todavía el límite superior y lo único que se puede hacer es esperar a que lo alcancen, o bien intentar determinarlo con la información disponible hasta el momento.



Al respecto, demógrafos como Keyfitz (1979) sugieren analizar el crecimiento de las poblaciones humanas mediante la función logística y determinar el límite superior y los otros parámetros de la función aplicando un procedimiento de estimación no lineal basado en el desarrollo de la serie de Taylor.

Un método alternativo que se usa también para proyectar las poblaciones humanas, es el método de los componentes demográficos, el cual se basa en la estimación de los nacimientos, las defunciones, los emigrantes y los inmigrantes, que son los componentes que determinan el cambio en las poblaciones humanas. El método

proyecta variables relacionadas con los nacimientos y las defunciones, estimando la fecundidad y la esperanza de vida mediante funciones logísticas (Partida, 2005).

En México, los antecedentes del uso de la función logística se remontan a la década de los setenta¹², cuando se crea por decreto presidencial el Consejo Nacional de Población (CONAPO), organismo público descentralizado responsable de la planeación demográfica del país. Una de las atribuciones de este organismo es elaborar proyecciones de la población a nivel nacional y estatal.

Para proyectar la población, el CONAPO se basa en el método de los componentes y desde su creación ha elaborado diversos ejercicios de proyección de la fecundidad, ajustando a los datos disponibles la función logística en su forma más general,

$$TGF_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}} \quad ; \quad b > 0$$

donde, TGF_t denota la tasa global de fecundidad en el tiempo t , k_1 denota la cota inferior, $k_1 + k_2$ la cota superior, a es un parámetro de posicionamiento y b es un parámetro que determina la cantidad de cambio de la fecundidad por unidad de tiempo.

Con respecto a los parámetros de la función, el CONAPO los determina en dos etapas. En la primera, se fija el valor de las cotas con base en la experiencia de expertos en materia demográfica. En la segunda, mediante un cambio de variable que depende de las cotas, los parámetros a y b de la función se estiman por el método de los mínimos cuadrados ordinarios. Con respecto a la proyección de la mortalidad, el CONAPO también se basa en la función logística y para determinar los parámetros lo hace de manera análoga que con la fecundidad.

¹² Sin duda antes de esta fecha los demógrafos del país debieron de utilizar la función logística en sus ejercicios de proyección de la fecundidad, sin embargo, la cita de esta fecha es porque a partir de entonces los estudios demográficos cobraron una mayor importancia en el país.

Como se puede constatar, el uso de la función logística es muy generalizado en fenómenos relacionados con el crecimiento de poblaciones que se estabilizan o que se cree que se estabilizarán. Ante este panorama, surgen preguntas como ¿Por qué el análisis de estos fenómenos se ha centrado en el uso de la función logística? ¿Todos los fenómenos crecientes o decrecientes que se cree que se estabilizarán deberán ser estudiados con la función logística? ¿Existirán otro tipo de fenómenos crecientes o decrecientes estable-acotados que no se ajusten al crecimiento logístico? ¿Existirán otras funciones que se puedan utilizar también para explicar la estabilización? ¿Habrá manera de determinar cuando utilizar una u otra? ¿Existirá una función que explique los fenómenos estable-acotados cuyos parámetros sean más fáciles de estimar? y finalmente ¿Existirá una alternativa para estimar los parámetros de la función logística?

1.4 Una solución al problema de la estabilización

En la práctica el valor de la estabilización en el futuro no se conoce, solo se tiene un conjunto de datos y_1, y_2, \dots, y_t que evolucionan a través del tiempo y que describen una tendencia creciente o decreciente, por lo que es necesario suponer que son observaciones de un fenómeno estable-acotado.

De esta forma si los datos muestran una tendencia a la alza, se puede suponer que provienen de un fenómeno estable-acotado creciente y cuya función estabilizadora es también creciente¹³, la cual está acotada por un cierto valor k , por lo que, bajo estos supuestos la derivada de la función estabilizadora tiene un comportamiento completamente predecible.

¹³ Cuando la tendencia es a la baja se supone que la función estabilizadora es decreciente

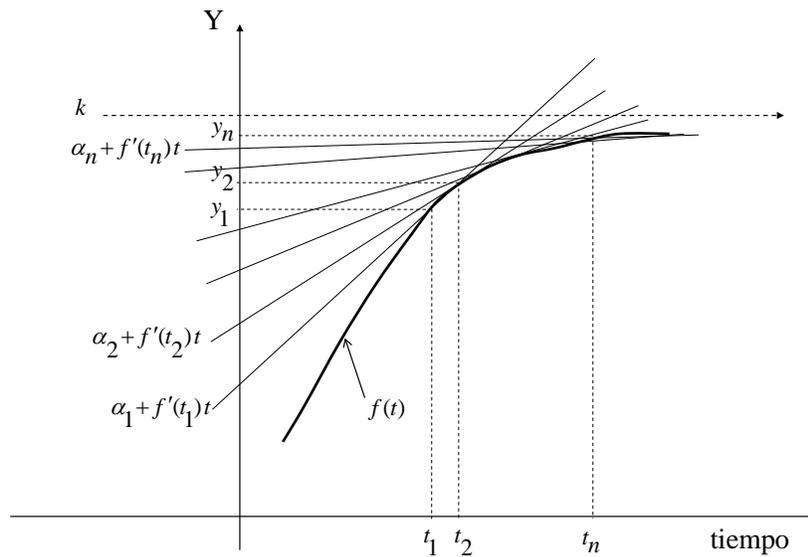
En primer lugar, la derivada será siempre positiva y en segundo lugar, tenderá a cero a medida que la función se acerque a la cota¹⁴, lo cual sucede al mismo tiempo que t tiende a infinito, es decir,

$$\frac{df}{dt} > 0 \quad \text{para toda } t,$$

y además

$$\frac{df}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{si } f \rightarrow k \text{ y si } t \rightarrow \infty.$$

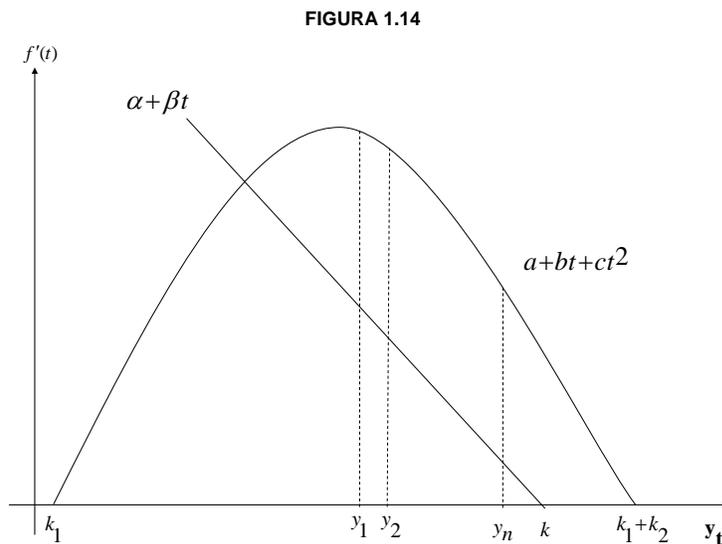
FIGURA 1.13



Ahora bien, considerando que la derivada de la función $f(t)$ evaluada en el punto $t = h$, es la pendiente de la recta tangente a la curva $f(t)$ en el tiempo h , entonces para cada t existirá una $y_t = f(t)$ y una recta tangente, por lo que es posible formar una familia de rectas tangentes (Véase la figura 1.13).

¹⁴ En el caso decreciente la derivada es siempre negativa y al igual que en el caso creciente la derivada tiende a cero a medida que la función se acerca a la cota.

Como se puede observar, al incrementarse el tiempo se incrementa el valor de la variable y_t y al incrementarse y_t la pendiente de la recta tangente en el punto (t, y_t) decrece¹⁵, lo que implica que la derivada de la función estabilizadora depende de los datos y_1, y_2, \dots, y_n y, una posible función que describe el comportamiento de la dependencia puede ser una recta o una parábola¹⁶ (Véase figura 1.14).



En la figura se observa que si el comportamiento está dado por una recta, entonces el valor de la cota k es el valor de y_t en donde la recta se hace o cero, es decir, si

$$f'(t) = \alpha + \beta y_t ,$$

entonces

$$k = -\frac{\alpha}{\beta} , \tag{1.1}$$

es el valor donde la derivada se hace cero.

¹⁵ En el caso decreciente al incrementarse el tiempo el valor de y_t decrece y la pendiente de la recta tangente decrece al igual que en el caso creciente.

¹⁶ En el caso decreciente también una recta o una parábola describen el comportamiento de la pendiente de la recta tangente solo que en este caso los valores son negativos.

Si por el contrario el comportamiento está dado por una parábola, en la figura se observa que existirán dos valores k_1 y $k_1 + k_2$ de la variable y_t en donde la parábola se hace cero, es decir, si

$$f'(t) = a y_t^2 + b y_t + c ,$$

entonces

$$k_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad (1.2)$$

$$k_1 + k_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \quad (1.3)$$

que son los valores donde la derivada se hace cero.

Si se supone que $k_1 + k_2$ es mayor que k_1 entonces en este caso se pueden tener dos situaciones. La primera que los dos valores sean cotas, una inferior y otra superior y la segunda que k_1 sea una cota inferior y $k_1 + k_2$ un máximo relativo. Pero puede suceder que $k_1 + k_2$ sea menor que k_1 , en cuyo caso k_1 será la cota superior y $k_1 + k_2$ será la cota inferior o mínimo relativo, por lo que, si los supuestos son ciertos, este método proporciona una solución para calcular valores en donde el fenómeno estable-acotado se estabilizará. Como el procedimiento depende de tangentes se llama el *método de las tangentes*.

1.5 Una solución al problema de cómo alcanzar la estabilidad

La forma cómo los fenómenos estable-acotados alcanzarán la estabilización, depende de la forma matemática de la función estabilizadora, la cual en la práctica no se conoce, por lo que, una opción para determinar la función estabilizadora es utilizando la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Así, si se supone que la derivada de la función estabilizadora está dada por el producto de dos funciones $h_1(y)$ y $h_2(t)$, se obtiene una ecuación diferencial de variables separables (Wylie, 1979, p. 13; Kreider, 1973, p. 334 y Ross, 1982, p. 37), la cual puede tener como solución una función en términos de t , es decir, si

$$\frac{dY_t}{dt} = h_1(Y_t) h_2(t), \quad (1.4)$$

entonces

$$\int \frac{1}{h_1(Y_t)} dY_t = \int h_2(t) dt.$$

De tal manera que resolviendo las integrales y despejando la variable Y_t se obtiene la solución de (1.4) en términos de t . Sin embargo, en la práctica las funciones $h_1(Y_t)$ y $h_2(t)$ también son desconocidas, por lo que es necesario establecer supuestos en cuanto a su forma.

Si en (1.4) $h_2(t)$ es tal que nunca puede ser cero, entonces los valores de Y_t para los cuales $h_1(Y_t)$ es cero, representan valores donde la derivada se hace cero y donde t puede tomar cualquier valor, por lo que serán cotas para la función estabilizadora.

Por otro lado, si $h_2(t)$ es tal que puede ser cero, entonces existirán valores específicos del tiempo para los cuales (1.4) se hace cero, pero que tendrán asociados valores y_t que no representan cotas para la función estabilizadora, sino más bien son máximos o mínimos relativos, ya que son valores donde la derivada se hace cero pero la variable tiempo no tiende a infinito o menos infinito.

Caso en el que $h_2(t)$ no es cero

Si los datos muestran una tendencia decreciente y si la solución al problema de la estabilización indica que solo hay un valor k en el cual la derivada se hace cero, entonces suponiendo que $h_1(Y_t)$ es un polinomio de grado uno cuya raíz es precisamente k y que $h_2(t)$ es igual a una constante diferente de cero, la forma de la ecuación (1.4) será,

$$\frac{dY_t}{dt} = (Y_t - k) m, \quad (1.5)$$

donde $(Y_t - k) > 0$ y $m < 0$, ya que la derivada deber ser negativa por la tendencia decreciente¹⁷. De esta forma al separar variables y resolver las integrales se tiene que,

$$\ln(Y_t - k) = m t + c.$$

Lo que implicaría que si los supuestos sobre $h_1(Y_t)$ y $h_2(t)$ son ciertos, entonces la relación entre las variables $\ln(Y_t - k)$ y el tiempo t sería una recta con pendiente negativa. Si los datos disponibles corroboran este supuesto entonces la solución de (1.5) será,

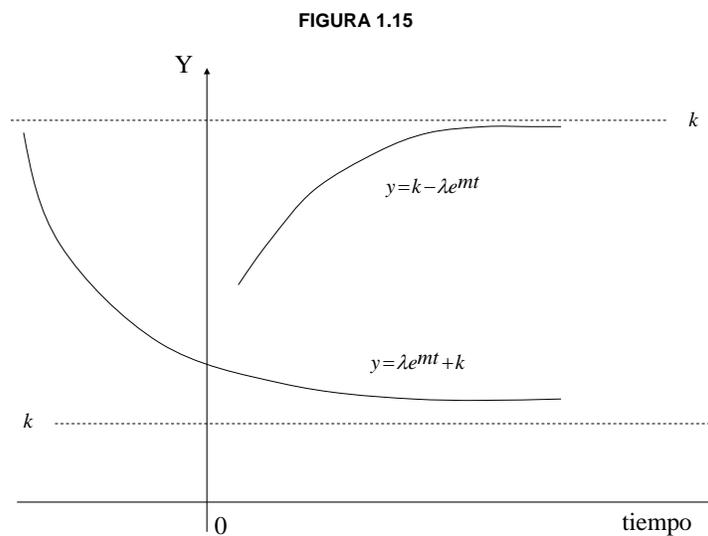
¹⁷ Si el polinomio es de grado 1 y k es su raíz, entonces el polinomio se puede expresar en la forma $y - k$, Beaumont y Pierce (1963, pág. 347).

$$Y_t = \lambda e^{m t} + k \quad (1.6)$$

donde $\lambda = e^c > 0$ y c es la constante de integración. Como $m < 0$ la solución (1.6) es una función decreciente que debe estabilizarse en el valor k , ya que el valor de $y_t = k$ es el único que hace que (1.5) sea cero. Para este mismo caso pero donde la tendencia de los datos es creciente la solución de (1.5) está dada por la función

$$Y_t = k - \lambda e^{m t} . \quad (1.7)$$

En este caso si los supuestos son ciertos la relación entre $\ln(k - Y_t)$ y t tiene que ser también una recta con pendiente negativa ya que (1.5) tendría que ser positiva debido a que la tendencia observada es creciente y $(Y_t - k) < 0$. En este caso la función (1.7) es creciente y debe estabilizarse también en el valor k . En la siguiente figura se pueden observar las funciones respectivas.



Ahora bien, si los datos muestran una tendencia decreciente, pero la solución al problema de la estabilización indica que existen dos valores k_1 y $k_1 + k_2$ donde la derivada se hace cero¹⁸, entonces suponiendo que $h_1(Y_t)$ es un polinomio de grado dos, con raíces k_1 y $k_1 + k_2$ y si $h_2(t)$ es igual a una constante diferente de cero, la ecuación diferencial (1.4) queda como,

$$\frac{dY_t}{dt} = (Y_t - k_1)(Y_t - k_1 - k_2) m, \quad (1.8)$$

donde $(Y_t - k_1) > 0$, $(Y_t - k_1 - k_2) < 0$ y $m > 0$, ya que la tendencia decreciente implica que (1.8) es negativa¹⁹. Al separar variables se tiene que,

$$\int \frac{1}{(Y_t - k_1)(Y_t - k_1 - k_2)} dY_t = \int m dt, \quad (1.9)$$

González-Rosas (1988), demuestra que resolviendo por fracciones parciales el integrando del lado izquierdo y despejando la variable Y_t se obtiene que la solución de (1.8) es

$$Y_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}}, \quad \text{con } b > 0, \quad (1.10)$$

que es una función decreciente, acotada por abajo y por arriba por las constantes k_1 y $k_1 + k_2$ respectivamente y si los supuestos son ciertos, la relación entre

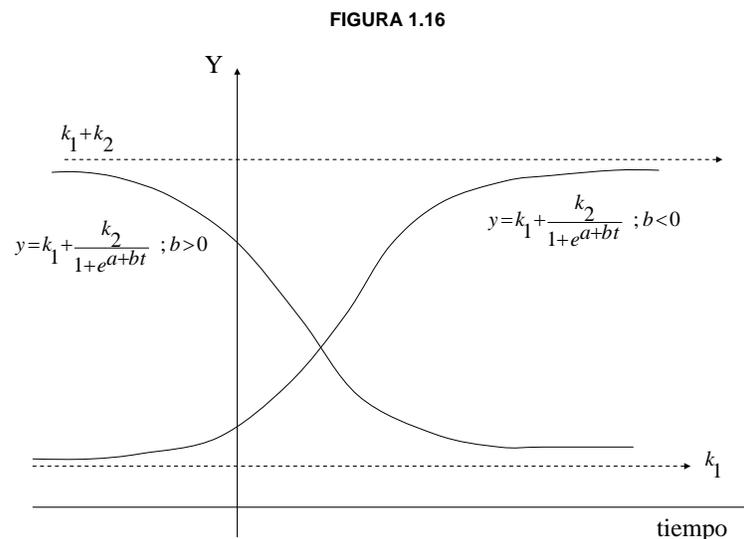
¹⁸ k_2 representa la cantidad en que la raíz mayor es más grande que k_1 .

¹⁹ Si el polinomio es de grado 2 y k_1 y $k_1 + k_2$ son sus raíces, entonces el polinomio se puede expresar en la forma $(y - k_1)(y - k_1 - k_2)$, Beaumont y Pierce (1963, pág. 347).

$\ln\left(\frac{k_2}{Y_t - k_1} - 1\right)$ y el tiempo t , debe ser una recta con pendiente positiva. En el caso que la tendencia sea creciente entonces la solución tiene la misma forma que (1.10) excepto que es creciente y que $b < 0$ y si los supuestos son ciertos la relación entre $\ln\left(\frac{k_2}{Y_t - k_1} - 1\right)$ y el tiempo t , debe ser una recta con pendiente negativa, o sea que,

$$Y_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}}, \text{ con } b < 0 \quad (1.11)$$

Como se puede observar en la figura (1.16) ambas funciones empiezan en la estabilización, ya sea inferior o superior según sea el caso y después crecen o decrecen conforme avanza el tiempo, hasta alcanzar nuevamente la estabilización ya sea superior o inferior respectivamente.



Las funciones (1.10) y (1.11) son conocidas como las funciones logística decreciente y creciente respectivamente. Esto implica que la función logística que ha sido usada en muchas áreas para predecir el comportamiento de fenómenos estables, es un caso particular de este método.

Caso en el que $h_2(t)$ puede ser cero

Si la solución al problema de la estabilización indica que hay dos valores de Y_t en donde la derivada se hace cero (k_1 y $k_1 + k_2$) y, si los datos muestran una tendencia decreciente pero $h_2(t)$ puede ser cero, entonces el valor mínimo de estos valores (supongamos que es k_1) sería la cota inferior de la función estabilizadora²⁰, mientras que el otro valor ($k_1 + k_2$) corresponderá a un máximo relativo.

En estas condiciones los supuestos sobre $h_1(Y_t)$ y $h_2(t)$ pueden ser que $h_1(Y_t)$ es un polinomio de grado uno con raíz k_1 y que $h_2(t)$ es una recta. Con estos supuestos la ecuación (1.4) quedaría como,

$$\frac{dY_t}{dt} = (Y_t - k_1)(a + bt).$$

Al resolver la ecuación diferencial anterior se tiene que,

$$Y_t = e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + k_1. \quad (1.12)$$

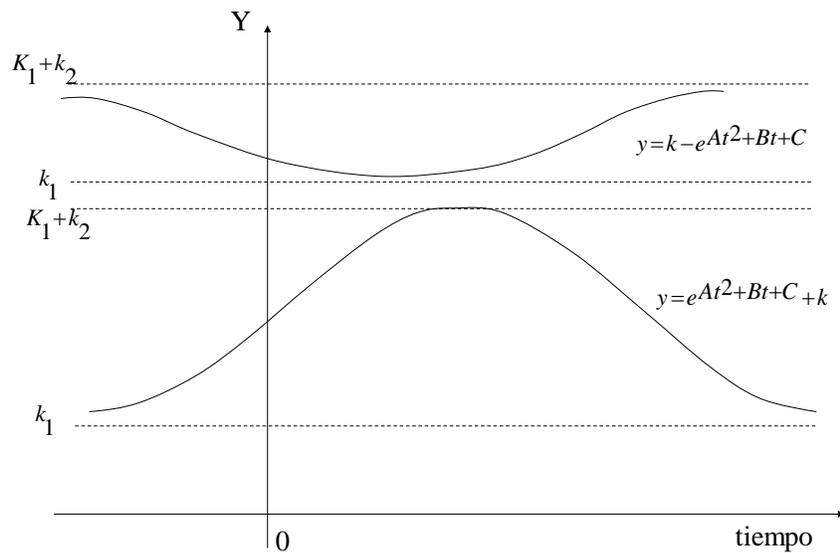
En este caso si los supuestos son ciertos la relación entre $\ln(Y_t - k_1)$ y t , tiene que ser una parábola. En la figura (1.17), se puede observar el comportamiento de ambas

²⁰ En el caso que la tendencia sea creciente entonces se puede suponer que el valor máximo es la cota superior

funciones, es decir, tanto para el caso cuando la tendencia es decreciente, como para cuando es creciente²¹.

Como se puede observar, estas funciones empiezan estabilizadas en la cota k_1 o $k_1 + k_2$ y conforme aumenta el tiempo crecen o decrecen según sea el caso, hasta alcanzar un valor máximo o mínimo²² y después revierten la tendencia hasta alcanzar nuevamente la estabilización.

FIGURA 1.17



Estas son algunas funciones que se pueden utilizar para estudiar la evolución de los fenómenos estable-acotados a través del tiempo y que son una solución al problema de cómo alcanzar la estabilidad. Como el procedimiento de identificación depende de ecuaciones diferenciales se llama *el método de las diferenciales*.

²¹ En este caso si los supuestos son ciertos la gráfica de $\ln(k_1 + k_2 - y)$ y t debe ser una parábola.

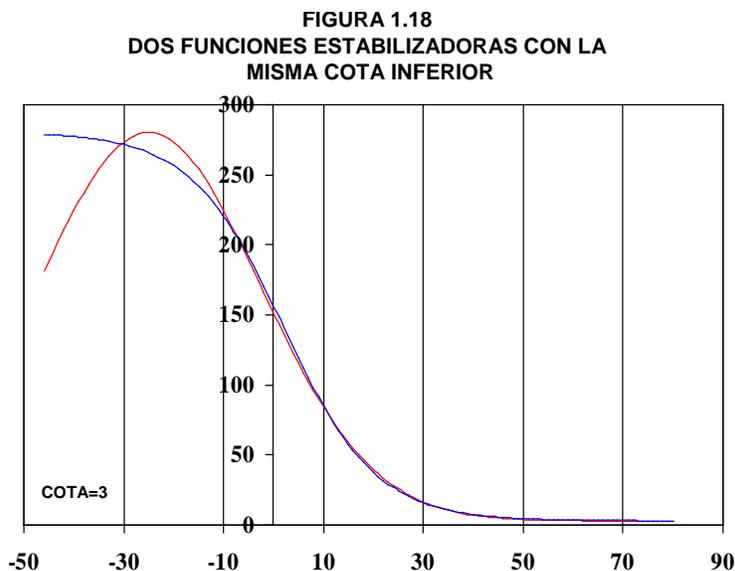
²² El máximo o mínimo corresponde al valor de t en donde $h_2(t)$ es cero

Sin embargo, es necesario advertir que pueden existir situaciones en donde más de una función estabilizadora se puede ajustar aceptablemente a un conjunto de datos observados.

Por ejemplo, considérense las funciones estabilizadoras (1.13) y (1.14) en donde $\alpha = -0.001$, $\beta = -0.05$, $\gamma = 5$ y $k = 3$ para la primera de ellas y, $k_1 = 3$, $k_2 = 277.27$, $a = -0.2116$ y $b = 0.1079$ para la segunda. En la figura (1.18) se puede observar la evolución de ambas funciones a través del tiempo.

$$Y_t = e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + k \quad (1.13)$$

$$Y_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a + b t}} \quad (1.14)$$



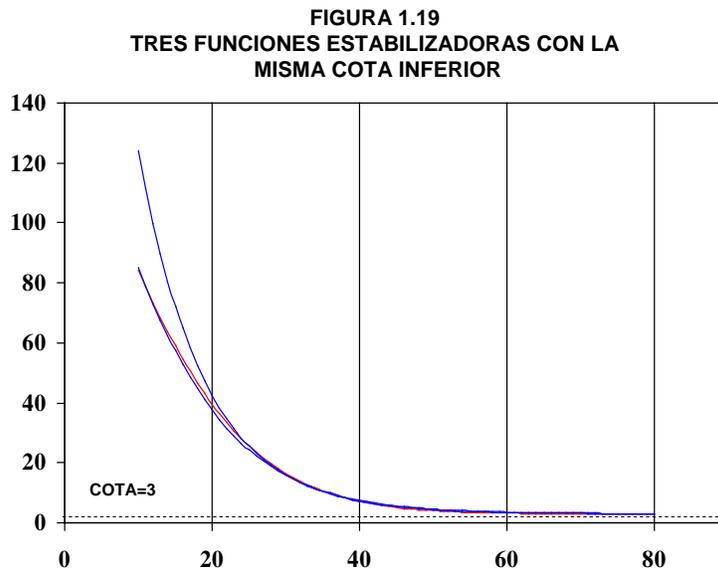
Como se puede observar ambas funciones tienen la misma cota inferior y tienen un comportamiento muy semejante a partir del punto $t = -10$. Lo que implica que, si

solo se tienen datos de una u otra función a partir de $t = -10$ en adelante, las dos funciones pueden ajustarse adecuadamente.

Ahora considérese la siguiente función y los parámetros $k=3$, $\lambda=371.96$ y $m = -0.112$,

$$Y_t = \lambda e^{m t} + k. \quad (1.15)$$

Como se puede observar en la figura (1.19), las tres funciones tienen como cota inferior el valor 3 y son muy similares a partir del valor $t = 25$, lo que implica que si se tienen datos de cualquiera de las tres funciones a partir de $t = 25$ en adelante, las tres funciones pueden ajustarse adecuadamente.



1.6 Modelo matemático estable-acotado

Si y_1, y_2, \dots, y_n representan observaciones secuenciales a través del tiempo de las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_n respectivamente, entonces se dice que las

observaciones constituyen una serie de tiempo²³. Según Medhi (1981) un modelo matemático general para una serie de tiempo es el siguiente,

$$Y_t = f(t) + X_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (1.16)$$

con

$$E(X_t) = 0,$$

donde:

Y_t es una variable aleatoria para cada t ,
 $f(t)$ denota una función que depende del tiempo, y
 X_t representa un proceso estocástico.

En (1.16) $f(t)$ representa la parte determinística, es decir, la parte completamente predecible del fenómeno aleatorio que evoluciona a través del tiempo, mientras que X_t representa la parte aleatoria. Es importante mencionar que el efecto del tiempo puede estar presente en ambos componentes o solo en uno de ellos. Cuando el efecto del tiempo está presente en la parte determinística, entonces ésta se representa por una función matemática que depende del tiempo, mientras que cuando está presente en la parte aleatoria, entonces este componente se representa por un proceso estocástico.

Sin embargo, para estudiar el comportamiento de los fenómenos estable-acotados en el largo plazo con base en el modelo (1.16), es necesario utilizar no solo funciones $f(t)$ que se ajusten a los datos observados, sino también tener en cuenta que no pueden crecer o decrecer indefinidamente y que tendrán que estabilizarse al menos en un cierto periodo de tiempo, por lo que es necesario utilizar una función acotada.

²³ La característica esencial que distingue a los datos de una serie de tiempo de otros datos estadísticos, es el orden en el cual las observaciones se toman, es decir, mientras que las observaciones de otras áreas son estadísticamente independientes, las observaciones sucesivas de una serie de tiempo pueden ser dependientes

De esta manera, si y_1, y_2, \dots, y_n representan observaciones secuenciales a través del tiempo de un fenómeno que no puede crecer ni decrecer indefinidamente, entonces *el modelo matemático estable-acotado* se define como el conjunto de las siguientes ecuaciones estructurales,

$$\frac{dY_t}{dt} = g(Y_t; \boldsymbol{\theta}) + u_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.17)$$

$$k_j = h_j(\boldsymbol{\theta}) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.18)$$

$$Y_t = f_{\infty}^e(t; \mathbf{k}; \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.19)$$

$$W_t(Y_t; \mathbf{k}) = w(t; \boldsymbol{\beta}) + z_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.20)$$

En la ecuación (1.17) se supone que la derivada de la variable Y_t es función de ella misma y que la función g es lineal en el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$. En la ecuación (1.18) se supone que los valores de la estabilización o de las cotas de Y_t se calculan en términos de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ y que forman el vector de parámetros \mathbf{k} . En la ecuación (1.19) se supone que f_{∞}^e es una función estabilizadora o acotada que depende del tiempo y que los vectores de parámetros \mathbf{k} y $\boldsymbol{\beta}$ determinan el valor y la forma de la estabilización respectivamente. En la ecuación (1.20) se supone que la variable transformada W_t depende de Y_t y del vector de parámetros \mathbf{k} y que la función w depende del tiempo y que es lineal en el vector de parámetros $\boldsymbol{\beta}$. Para todos los errores aleatorios u_t, ε_t y z_t se supone que tienen media cero y varianza constante.

1.7 Estimación de parámetros en el modelo estable-acotado

En el modelo estable-acotado los parámetros θ , k y β no se conocen, por lo que es necesario estimarlos con base en los datos observados. Por la estructura de las ecuaciones del modelo el proceso de estimación de los parámetros se hace en dos etapas. En la primera de ellas, se estiman los parámetros θ de la función g de (1.17) y con base en ellos se estiman los parámetros que determinan la estabilización o cotas (k). En la segunda, se identifica la función estabilizadora y se estiman los parámetros (β) que determinan la forma como se estabilizará dicha función.

Primera etapa de estimación

La estimación de las cotas se basa en el *método de las tangentes*. Como el método depende de las pendientes de las tangentes en los puntos t_1, t_2, \dots, t_n , las cuales en la práctica no existen, se supone que las pendientes de las rectas entre dos puntos consecutivos (t, y_t) y $(t+1, y_{t+1})$ son aproximaciones de ellas, es decir,

$$P_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{(t+1) - t}. \quad (1.21)$$

Por lo que, si los datos P_t son realmente aproximaciones de las pendientes de las rectas tangentes y si la función $g(Y_t; \theta)$ de (1.17) es una recta, entonces según el método de las tangentes el fenómeno estable-acotado tiene una sola cota y la ecuación estructural (1.17) queda como

$$P_t \cong \frac{DY_t}{dt} = a + b Y_t + u_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n$$

en forma matricial

$$\frac{DY_t}{dt} = Y_t \boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}_t$$

donde

$$\frac{DY_t}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dY}{dt}(t_1) \\ \vdots \\ \frac{dY}{dt}(t_n) \end{bmatrix}; \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Y_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

De esta manera para resolver el problema del valor de la estabilización se necesita que la función $g(Y_t; \boldsymbol{\theta})$ se ajuste lo mejor posible a los datos disponibles, por lo que los parámetros $\boldsymbol{\theta}' = (a, b)$ se estiman por mínimos cuadrados ordinarios y se calculan como

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = [\mathbf{Y}_t' \mathbf{Y}_t]^{-1} \mathbf{Y}_t' \frac{DY_t}{dt},$$

y como la ecuación estructural (1.17) es una recta entonces la cota es el valor de Y_t donde la recta se hace cero, por lo que la ecuación estructural (1.18) queda de la siguiente forma

$$k = h_1(a, b) \quad ; \quad j = 1$$

$$h_1(a, b) = -\frac{a}{b}$$

y entonces la cota se estima como

$$k = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}}$$

Pero si la función $g(Y_t; \boldsymbol{\theta})$ de (1.17) es una parábola, entonces según el método de las tangentes el fenómeno estable-acotado tiene dos valores donde la derivada se hace cero los cuales pueden ser cotas o bien una cota y un máximo²⁴ y la ecuación estructural (1.17) queda como

$$\frac{dY_t}{dt} = C + B Y_t + A Y_t^2 + u_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n$$

en forma matricial se tiene que

$$\frac{\mathbf{D}\mathbf{Y}_t}{\mathbf{d}\mathbf{t}} = \mathbf{Y}_t \boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}_t$$

donde

$$\frac{\mathbf{D}\mathbf{Y}_t}{\mathbf{d}\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \frac{dY}{dt}(t_1) \\ \vdots \\ \frac{dY}{dt}(t_n) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & Y_1^2 \\ 1 & Y_2 & Y_2^2 \\ \vdots & & \\ 1 & Y_n & Y_n^2 \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

nuevamente los estimadores de $\boldsymbol{\theta}' = (C, B, A)$ que resuelven los problemas de la estabilización son los de mínimos cuadrados ordinarios y se calculan de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{B} \\ \hat{A} \end{pmatrix} = [\mathbf{Y}_t' \mathbf{Y}_t]^{-1} \mathbf{Y}_t' \frac{\mathbf{D}\mathbf{Y}_t}{\mathbf{d}\mathbf{t}}$$

²⁴ Otro caso sería aquel en donde uno de los valores fuera un mínimo y el otro una cota

De esta forma, los valores de la estabilización serán los valores de Y_t en donde la parábola se hace cero y entonces las ecuaciones (1.18) tienen la siguiente forma

$$\hat{k}_1 = h_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-\hat{B}}{2\hat{A}} - \frac{\sqrt{\hat{B}^2 - 4\hat{A}\hat{C}}}{2\hat{A}}$$

$$\hat{k}_1 + \hat{k}_2 = h_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-\hat{B}}{2\hat{A}} + \frac{\sqrt{\hat{B}^2 - 4\hat{A}\hat{C}}}{2\hat{A}}$$

Para saber si los valores k_1 y $k_1 + k_2$ son dos cotas o si uno de ellos es una cota y el otro un valor máximo, es necesario determinar si la mejor función estabilizadora que se ajusta a los datos tiene precisamente dos cotas o una respectivamente, lo cual se resuelve en la segunda etapa.

Segunda etapa de estimación

La segunda etapa de estimación consiste en identificar una función estabilizadora con base en el *método de las diferenciales*. De acuerdo con este método si la solución al problema de la estabilización indica que existe una sola cota, entonces la ecuación estructural (1.19) tiene la siguiente forma,

$$Y_t = \alpha e^{\beta t} + \hat{k} + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n$$

La transformación respectiva de la función estabilizadora es $\ln(Y_t - k) = \ln \alpha + \beta t$ por lo que la ecuación estructural (1.20) es,

$$\ln(Y_t - \hat{k}) = \ln \alpha + \beta t + z_t$$

en forma matricial queda como

$$\mathbf{W}(Y_t; \hat{k}) = \Phi \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_t$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \ln(Y_1 - \hat{k}) \\ \ln(Y_2 - \hat{k}) \\ \vdots \\ \ln(Y_n - \hat{k}) \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \ln \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Si la solución al problema de la estabilización indica que existen dos valores donde la derivada se hace cero y si la mejor función estabilizadora que se ajusta a los datos observados es,

$$Y_t = \hat{k}_1 + \frac{\hat{k}_2}{1 + e^{a+bt}}$$

entonces los dos valores k_1 y $k_1 + k_2$ son cotas y la transformación respectiva de la

función estabilizadora es $\ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_t - \hat{k}_1} - 1\right) = a + b t$ por lo que la ecuación estructural

(1.20) queda como,

$$\ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_t - \hat{k}_1} - 1\right) = a + b t + z_t$$

en forma matricial queda como

$$\mathbf{W}(Y_t; \hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_t$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_1 - \hat{k}_1} - 1\right) \\ \ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_2 - \hat{k}_1} - 1\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_n - \hat{k}_1} - 1\right) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Pero si la solución al problema de la estabilización indica que existen dos valores donde la derivada se hace cero y si la mejor función estabilizadora que se ajusta a los datos observados es

$$Y_t = e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + \hat{k}_1$$

entonces el valor más pequeño de k_1 y $k_1 + k_2$ es una cota y el otro valor es un máximo y la transformación respectiva es $\ln(Y_t - \hat{k}_1) = \gamma + \beta t + \alpha t^2$ por lo que la ecuación estructural (1.20) es

$$\ln(Y - \hat{k}_1) = \gamma + \beta t + \alpha t^2$$

y la forma matricial queda

$$\mathbf{W}(Y_t; \hat{k}_1) = \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_t$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \ln(Y_1 - \hat{k}_1) \\ \ln(Y_2 - \hat{k}_1) \\ \vdots \\ \ln(Y_n - \hat{k}_1) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Si los errores aleatorios \mathbf{z}_t cumplen los supuestos del modelo estable-acotado, entonces los mejores estimadores de los parámetros de la forma ($\boldsymbol{\beta}$) en todos los casos anteriores son los de mínimos cuadrados ordinarios y se calculan como

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\Phi}]^{-1} \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{W}$$

Sin embargo, si \mathbf{z}_t es tal que $\mathbf{E}(\mathbf{z}_t) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{V}(\mathbf{z}_t) = \sigma^2 \mathbf{V}$ es la matriz de varianzas-covarianzas de \mathbf{z}_t , con $\mathbf{V} \neq \mathbf{I}$ singular y positiva definida, entonces los mejores estimadores de los parámetros de la forma se calculan como

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\Phi}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\Phi}]^{-1} \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{W}$$

y que se conocen como los estimadores de mínimos cuadrados generalizados (Montgomery y Peck, 1982, pp.361).

Como se puede observar, tanto el proceso de estimación de la primera etapa como el de la segunda, son procesos mínimo-cuadráticos, lo que implica que en cada etapa se tienen los mejores estimadores de los parámetros del valor y de la forma de la estabilización, sin embargo, como la estimación de todos los parámetros del modelo estable-acotado no se hace en una sola etapa, es necesario determinar si la separación de los procesos de estimación tiene algún efecto en los estimadores.

También es necesario tener en cuenta que los cálculos de la primera etapa dependen de datos que no existen y que se generan bajo ciertos supuestos, lo que implica además de lo anterior, la necesidad de determinar la veracidad de estos supuestos. Es decir, en resumen es necesario analizar bajo estas dos situaciones, cuales son las propiedades de los estimadores de los parámetros \mathbf{k} y $\boldsymbol{\beta}$ del modelo estable-acotado.

1.8 Propiedades de los estimadores del modelo estable-acotado

Debido a la forma tan compleja que tienen los estimadores de los parámetros del modelo estable-acotado, resulta muy complicado tratar de determinar sus propiedades de manera analítica, por lo que, para tener una idea de las propiedades de los estimadores del modelo, se llevó a cabo un proceso de simulación estocástica para cada uno de los siguientes modelos estable-acotados:

$$Y_t = (\alpha e^{\beta t} + k) + z_t$$

$$Y_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}} + z_t$$

$$Y_t = \left(e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + k \right) + z_t .$$

En estos modelos los parámetros β , b y α determinan en los respectivos modelos la cantidad de cambio de los fenómenos de interés, en tanto que los parámetros restantes son solo parámetros de localización del fenómeno o de la función estabilizadora. Estos modelos se conocen respectivamente como exponencial, logístico y Gaussiano. El ejercicio de simulación se hizo para el caso en el que z_t es una variable aleatoria normal con media cero y varianza constante y para el caso en el que es un proceso auto-regresivo de primer orden de la forma $z_t = \theta z_{t-1} + a_t$,

con la variable a_t normal con media cero y varianza constante. Los cálculos de la simulación se hicieron con el paquete Statistical Package for Social Sciences (SPSS), versión 17.0. En los anexos se pueden consultar algunos de los programas elaborados.

Simulación del modelo exponencial

El procedimiento de simulación de este modelo fue el siguiente:

1. Se asignaron valores a las constantes α , β y k de la función estabilizadora del modelo exponencial.

$$y_t = \alpha e^{\beta t} + k$$

2. Se asignaron valores a los parámetros del error z_t . Para el caso normal fueron $\mu=0$ y $\sigma^2=0.16$ y para el caso auto-regresivo se fijó $\theta=0.7$ y $a_t \sim N(0,0.025)$.
3. Variando el valor de t se generaron y_1, y_2, \dots, y_n valores de la función estabilizadora,

$$y_t = \alpha e^{\beta t} + k \quad \text{para } t = 1, \dots, n.$$

4. Se generaron z_1, z_2, \dots, z_n observaciones de la variable aleatoria normal o del proceso auto-regresivo según el caso y se sumaron a los valores y_1, y_2, \dots, y_n obteniéndose Y_1, Y_2, \dots, Y_n observaciones simuladas del modelo exponencial.

$$Y_t = y_t + z_t \quad \text{para } t = 1, \dots, n$$

5. Con las observaciones simuladas se generaron $(n-1)$ datos de pendientes entre puntos sucesivos.

$$P_t = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{(t+1) - t}$$

6. Como el punto P_t se puede asociar tanto a Y_t como a Y_{t+1} o al punto medio entre ambos, la simulación se hizo para los tres puntos, o sea,

$$P_t = a + b Y_t$$

$$P_t = a + b Y_{t+1}$$

$$P_t = a + b Y_{t,1/2}$$

7. Con las estimaciones de los coeficientes a y b se estimó la cota para el modelo exponencial.

$$\hat{k} = \frac{-\hat{a}}{\hat{b}}$$

8. Usando la estimación de la cota se calcularon las n transformaciones

$$\ln(Y_t - \hat{k}) \quad \text{para } t = 1, 2, 3, \dots, n.$$

9. Dado que la relación entre las variables $\ln(Y_t - \hat{k})$ y t es de la forma

$$\ln(Y_t - \hat{k}) = \ln \alpha + \beta t$$

entonces para el caso del error normal utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios se estimaron los parámetros $\ln \alpha$ y β , mientras que en el caso del error auto-regresivo se estimaron por mínimos cuadrados generalizados.

10. Aplicando la exponencial al parámetro estimado $\ln \alpha$ se obtuvo finalmente la estimación del parámetro α del modelo exponencial.

11. Con las estimaciones de k , α y β y los verdaderos valores se calculó el error cuadrático.

$$EC(k) = (k - \hat{k})^2$$

$$EC(\alpha) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$$

$$EC(\beta) = (\beta - \hat{\beta})^2$$

12. Los pasos 3-11 se repitieron 5000 y 10,000 veces y se calculó el error cuadrático medio de las estimaciones, es decir,

$$ECM(\beta) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2 \text{ y } ECM(\beta) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2$$

13. Con el fin de determinar el efecto del número de observaciones en las estimaciones obtenidas los pasos 3-12 se repitieron para $n=20, 30, 40, 50, 70$ y 90 .

En el siguiente cuadro se pueden observar los valores que se asignaron a los parámetros k , α y β para tres modelos exponenciales que se simularon.

CUADRO 1.1
PARAMETROS ASIGNADOS SEGÚN MODELO EXPONENCIAL

Parámetro	Modelo 1 decreciente	Modelo 2 decreciente	Modelo 3 creciente
α	371	325	-56
β	-0.11	-0.04	-0.03
k	3	15	532

Los resultados de la simulación indican que las estimaciones asociadas con el punto medio entre Y_t y Y_{t+1} tienen un error cuadrático medio menor que los otros puntos, por lo que, en los cuadros 1.2-1.5 se presentan los resultados de la simulación para $m=5000$ de las estimaciones asociadas con el punto medio. En el anexo se presentan los resultados para $m=10,000$.

CUADRO 1.2
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA COTA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR NORMAL, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	2.98	0.7361	3.0001	0.0134	2.9999	0.0074
2	15	14.6864	36.2101	15.0006	0.2559	14.9994	0.1073
3	532	536.68	1017.99	532.054	0.7378	532.02	0.2825

En los cuadros 1.2 y 1.3 se presentan los resultados del ejercicio de simulación para la cota del modelo exponencial. Como se puede observar, tanto para el caso de error normal como error auto-regresivo, el estimador del parámetro k parece ser insesgado y consistente e inclusive con tamaños de muestra pequeños se obtienen estimaciones de la cota poco desviadas. Con respecto a los parámetros de la forma α y β los resultados muestran que también los estimadores parecen ser insesgados y consistentes (Cuadros 1.4 y 1.5).

CUADRO 1.3
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA
COTA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR AUTOREGRESIVO,
SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	3.4219	0.5540	3.0621	0.0110	2.9202	0.0089
2	15	15.72	18.5690	15.2676	0.2034	14.7413	0.1224
3	532	539.97	170.419	532.315	0.4785	531.581	0.3110

CUADRO 1.4
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR
NORMAL, SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros α y β verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	371	371.01	0.6205	371.043	0.2698	371.0035	0.2789
	-0.11	-0.11	0.0000	-0.11	0.0000	-0.11	0.0000
2	325	325.3010	30.967	325.0235	0.5373	325.0200	0.4082
	-0.04	-0.04	0.0000	-0.04	0.0000	-0.04	0.0000
3	-56	-59.71	1005.61	-56.08	0.0884	-56.0431	0.0764
	-0.03	-0.0302	0.0001	-0.0300	0.0000	-0.0300	0.0000

CUADRO 1.5
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR
AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO
VERDADERO

Modelo	Parámetros α y β verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	371	370.08	1.1046	370.02	1.154	369.937	1.3435
	-0.11	-0.1104	0.0000	-0.1100	0.0000	-0.1098	0.0000
2	325	321.72	26.1113	323.98	1.1676	324.45	0.3676
	-0.04	-0.0404	0.0000	-0.0399	0.0000	-0.0399	0.0000
3	-56	-63.9394	174.89	-57.056	1.3424	-56.347	0.2037
	-0.03	-0.0273	0.0001	-0.0305	0.0000	-0.0311	0.0001

Con respecto al error cuadrático medio los resultados muestran para el caso de las cotas y para el parámetro β , que todos son más pequeños a medida que el número de observaciones se incrementa. Sin embargo, para el parámetro α en el modelo 1 tanto para el caso de error normal como auto-regresivo, el error cuadrático medio se incrementa ligeramente al aumentar el número de observaciones (Véanse cuadros 1.4-1.5).

Simulación del modelo logístico

1. Se asignaron valores a las constantes $k_1, k_1 + k_2, a$ y b de la función estabilizadora del modelo logístico.

$$y_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}}$$

2. Se asignaron valores a los parámetros del error. Para el caso normal fueron $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 0.16$ y para el caso auto-regresivo se fijó $\theta = 0.7$ y $a_t \sim N(0, 0.025)$.
3. Variando el valor de t se generaron y_1, y_2, \dots, y_n valores de la función estabilizadora,

$$y_t = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}} \quad \text{para } t = 1, \dots, n.$$

4. Se generaron z_1, z_2, \dots, z_n observaciones de la variable aleatoria normal o del proceso auto-regresivo según el caso y se sumaron a los valores y_1, y_2, \dots, y_n obteniéndose Y_1, Y_2, \dots, Y_n observaciones simuladas del modelo logístico.

$$Y_t = y_t + z_t \quad \text{para } t = 1, \dots, n.$$

5. Con las observaciones simuladas se generaron (n-1) datos de pendientes entre puntos sucesivos.

$$P_t = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{(t+1) - t}$$

6. Como el punto P_t se puede asociar tanto a Y_t como a Y_{t+1} o al punto medio entre ambos, la simulación se hizo para los tres puntos, es decir,

$$P_t = aY_t^2 + bY_t + c_t$$

$$P_t = aY_{t+1}^2 + bY_{t+1} + c_t$$

$$P_t = aY_{t, \frac{1}{2}}^2 + bY_{t, \frac{1}{2}} + c_t$$

7. Con las estimaciones de los coeficientes a , b y c se estimaron las cotas y el parámetro k_2 del modelo logístico, es decir,

$$\hat{k}_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\hat{k}_1 + \hat{k}_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\hat{k}_2 = \hat{k}_1 + \hat{k}_2 - \hat{k}_1$$

8. Usando la estimación de los parámetros \hat{k}_1 y \hat{k}_2 se calcularon las n transformaciones,

$$\ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_t - \hat{k}_1} - 1\right) \text{ para } t = 1, 2, 3, \dots, n.$$

9. Dado que la relación entre las variables $\ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_t - \hat{k}_1} - 1\right)$ y t es de la forma

$$\ln\left(\frac{\hat{k}_2}{Y_t - \hat{k}_1} - 1\right) = a + b t$$

entonces para el caso de error normal se estimaron los parámetros a y b utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios, mientras que para el caso de error auto-regresivo se estimaron por mínimos cuadrados generalizados.

10. Con las estimaciones de k_1 , $k_1 + k_2$, a y b y los valores verdaderos se calculó el error cuadrático,

$$EC(k_1) = (k_1 - \hat{k}_1)^2$$

$$EC(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2 - \hat{k}_1 - \hat{k}_2)^2$$

$$EC(a) = (a - \hat{a})^2$$

$$EC(b) = (b - \hat{b})^2$$

11. Los pasos 3-10 se repitieron 5000 y 10,000 veces y se calculó el error cuadrático medio de las estimaciones.

$$ECM(\beta) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2 \text{ y } ECM(\beta) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2$$

12. Con el fin de determinar el efecto del número de observaciones en las estimaciones obtenidas los pasos 3-11 se repitieron para $n=20, 30, 40, 50, 70$ y 90 y para los siguientes tres modelos.

CUADRO 1.6
PARAMETROS ASIGNADOS SEGÚN MODELO LOGÍSTICO

Parámetro	Modelo 1 decreciente	Modelo 2 decreciente	Modelo 3 creciente
k_1	3	15	15
$k_1 + k_2$	280	35	135
b	0.1079	0.0735	-0.11
a	-0.2116	-2.6849	4

Los resultados de la simulación para este modelo también indican que las estimaciones asociadas con el punto medio entre Y_t y Y_{t+1} tienen un error cuadrático medio menor que los otros puntos, por lo que, en los cuadros 1.7-1.10 siguientes se presentan los resultados de la simulación para $m=5000$ de las estimaciones asociadas con el punto medio. En el anexo se presentan los resultados para $m=10,000$.

CUADRO 1.7
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LAS
 COTAS PARA LOS MODELOS LOGÍSTICOS CON ERROR NORMAL, SEGÚN
 NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Cota inferior y superior verdaderas	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	2.6061	20.5762	2.9966	0.0219	2.9975	0.0101
	280	283.8872	713.3491	280.6775	72.1846	280.6026	65.3321
2	15	27.51	175.3660	14.8191	0.7701	14.9337	0.1056
	35	35.26	146.9257	35.1843	0.6172	35.13	0.4215
3	15	15.8736	1.6464	15.0009	0.0842	14.9938	0.0751
	135	133.0571	5786.7117	135.0051	0.0996	135.0023	0.0210

CUADRO 1.8
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LAS
 COTAS PARA LOS MODELOS LOGÍSTICOS CON ERROR AUTOREGRESIVO
 SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Cota inferior y superior verdaderas	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	4.4433	11.4654	3.0112	0.0118	2.8409	0.0307
	280	275.31	316.116	280.06	38.179	281.04	40.299
2	15	30.3883	646.26	15.7263	0.7264	14.6516	0.1660
	35	33.3055	4.4739	33.9319	1.2799	34.2927	0.6381
3	15	14.2320	1.0431	14.2281	0.6431	14.3814	0.4258
	135	132.53	4456.64	135.492	0.2973	134.834	0.0385

Estos resultados muestran que los estimadores de las cotas k_1 y $k_1 + k_2$ parecen ser insesgados y consistentes con ambas modalidades de error (Véanse cuadros 1.7 y 1.8), así como los estimadores de los parámetros de la forma a y b (Véanse cuadros 1.9 y 1.10). Es importante aclarar que en el modelo logístico 2 la estimación de la cota inferior tiene un sesgo muy grande con ambas modalidades de error debido a que los datos simulados están lejos de la cota inferior y cercanos a la cota superior. Con respecto al error cuadrático medio los resultados muestran para el caso de las cotas con error normal, que todos se hacen más pequeños a medida que las observaciones aumentan, sin embargo, para el caso de error auto-regresivo en el

modelo 1 se observa que el error cuadrático medio de las cotas se incrementa un poco al pasar de 70 a 90 observaciones.

Con respecto a los parámetros de la forma se observa que para el parámetro que determina la cantidad de cambio (b) el error cuadrático medio se hace más pequeño en tanto el número de observaciones se incrementa con ambas modalidades de error, pero, con respecto al parámetro de localización (a) en algunos casos (modelos 1 y 3 con error auto-regresivo) el error cuadrático medio se hace un poco más grande al pasar de 70 a 90 observaciones (Véanse cuadros 1.9 y 1.10).

CUADRO 1.9
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
PARÁMETROS DE LA FORMA PARA LOS MODELOS LOGÍSTICOS CON ERROR
NORMAL, SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros a y b verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.2116	-0.2017	0.0263	-0.2088	0.0033	-0.2089	0.0029
	0.1079	0.1077	0.0001	0.1079	0.0000	0.1079	0.0000
2	-2.6849	-2.3100	0.0120	-2.6902	0.0002	-2.6932	0.0001
	0.0735	0.1600	146.93	0.0742	0.6178	0.0743	0.4215
3	4	3.6062	0.3395	4.0082	0.0051	4.0064	0.0004
	-0.11	-0.1530	0.0032	-0.1103	0.0000	-0.1103	0.0000

CUADRO 1.10
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
PARÁMETROS DE LA FORMA PARA LOS MODELOS LOGÍSTICOS CON ERROR
AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO
VERDADERO

Modelo	Parámetros a y b verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.2116	-0.2357	0.0138	-0.1985	0.0021	-0.1894	0.0025
	0.1079	0.1104	0.0000	0.1075	0.0000	0.1069	0.0000
2	-2.6849	-2.6068	0.9437	-3.1070	0.2452	-2.9476	0.1024
	0.0735	0.2701	0.0732	0.0839	0.0002	0.0777	0.0000
3	4	3.9016	0.0289	3.9368	0.0053	3.9041	0.0214
	-0.11	-0.1166	0.0001	-0.1084	0.0000	-0.1056	0.0000

Simulación del modelo Gaussiano

1. Se asignaron valores a las constantes k , α , β y γ de la función estabilizadora del modelo Gaussiano.

$$y_t = e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + k$$

2. Se asignaron valores a los parámetros del error z_t . Para el caso normal fueron $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 0.16$ y para el caso auto-regresivo se fijó $\theta = 0.7$ y $a_t \sim N(0, 0.025)$.

3. Variando el valor de t se generaron y_1, y_2, \dots, y_n valores de la función estabilizadora

$$y_t = e^{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + k \quad \text{para } t = 1, \dots, n.$$

4. Se generaron z_1, z_2, \dots, z_n observaciones de la variable aleatoria normal o del proceso auto-regresivo según el caso y se sumaron a los valores y_1, y_2, \dots, y_n obteniéndose Y_1, Y_2, \dots, Y_n observaciones simuladas del modelo Gaussiano.

$$Y_t = y_t + z_t \quad \text{para } t = 1, \dots, n.$$

5. Con las observaciones simuladas se generaron $(n-1)$ datos de pendientes entre puntos sucesivos.

$$P_t = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{(t+1) - t}$$

6. Como el punto P_t se puede asociar tanto a Y_t como a Y_{t+1} o al punto medio entre ambos, la simulación se hizo para los tres puntos,

$$P_t = aY_t^2 + bY_t + c_t$$

$$P_t = aY_{t+1}^2 + bY_{t+1} + c_t$$

$$P_t = aY_{t, \frac{1}{2}}^2 + bY_{t, \frac{1}{2}} + c_t$$

7. Con las estimaciones de los coeficientes a , b y c se estimó la cota del modelo Gaussiano, es decir,

$$\hat{k}_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$k_1 + \hat{k}_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en donde alguno de los dos valores es la cota, mientras que el otro es un máximo o mínimo relativo.

8. Usando la estimación de la cota \hat{k}_1 se calcularon las n transformaciones

$$\ln(Y_t - k_1) \quad \text{para } t = 1, 2, 3, \dots, n.$$

9. Dado que la relación entre las variables $\ln(Y_t - k_1)$ y t es de la forma

$$\ln(Y_t - k_1) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

entonces para el caso del error normal utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios se estimaron los parámetros α , β y γ , mientras que en el caso del error auto-regresivo se estimaron por mínimos cuadrados generalizados.

10. Con las estimaciones de k , A , B y C y los verdaderos valores se calculó el error cuadrático,

$$EC(k_1) = (k_1 - \hat{k}_1)^2$$

$$EC(\alpha) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$$

$$EC(\beta) = (\beta - \hat{\beta})^2$$

$$EC(\gamma) = (\gamma - \hat{\gamma})^2$$

11. Los pasos 1-10 se repitieron 5000 y 10,000 veces y se calculó el error cuadrático medio de las estimaciones.

$$ECM(\beta) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2 \text{ y } ECM(\beta) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2$$

12. Con el fin de determinar el efecto del número de observaciones en las estimaciones obtenidas los pasos 1-11 se repitieron para $n=20, 30, 40, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190, 210$.

En el cuadro (1.11) se pueden observar los valores que se asignaron a los parámetros k_1 , α , β y γ para tres modelos Gaussianos que se simularon y en los cuadros 1.12-1.15, se presentan los resultados de las 5000 estimaciones asociadas con el punto medio, que son las tienen también un error cuadrático medio más pequeño. En los anexos se presentan los resultados para el caso de las 10,000 estimaciones.

CUADRO 1.11
PARAMETROS ASIGNADOS SEGÚN MODELO LOGÍSTICO

Parámetro	Modelo 1 Decreciente	Modelo 2 Decreciente	Modelo 3 Decreciente
k_1	3	15	6.5
α	-0.001	-0.0005	-0.00025
β	-0.05	-0.001	-0.0245
γ	5	3	4

Con respecto al modelo Gaussiano también se concluye según los resultados de la simulación, que todos los estimadores parecen ser insesgados y consistentes con ambas modalidades de error, pero en cuanto al error cuadrático medio para algunos modelos éste se incrementa ligeramente (Véanse cuadros 1.12-1.15). También es importante señalar que aún para 210 observaciones algunos promedios están todavía relativamente lejos de los verdaderos valores (véase la cota de los modelos 1 y 3 con ambas modalidades de error y el parámetro b del modelo 2 con error auto-regresivo).

CUADRO 1.12
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LA ESTIMACIÓN DE LA COTA
PARA LOS MODELOS GAUSSIANOS CON ERROR NORMAL, SEGÚN NUMERO DE
OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	5.472	20.5312	2.5688	0.2051	2.8080	.0414
2	15	28.2452	195.2459	14.8463	0.1138	14.9160	0.0160
3	6.5	29.6	364.02	6.99	0.3162	6.9155	0.2561

CUADRO 1.13
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LA ESTIMACIÓN DE LA COTA
PARA LOS MODELOS GAUSSIANOS CON ERROR AUTO-REGRESIVO, SEGÚN
NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	4.3515	14.7678	2.5101	0.2437	2.7630	0.0570
2	15	31.1511	262.24	14.71	0.1686	15.395	0.2413
3	6.5	35.3956	875.21	7.032	0.3680	6.24	0.1524

CUADRO 1.14
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
 PARÁMETROS DE LA FORMA PARA LOS MODELOS GAUSSIANO CON ERROR
 NORMAL, SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros <i>a, b y c</i> verdaderos	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.001	-0.001	0.0000	-0.001	0.0000	-0.001	0.0000
	-0.05	-0.0505	0.0000	-0.0505	0.0000	-0.0502	0.0000
	5	4.9828	0.0011	5.0048	0.0001	5.0023	0.0001
2	-0.0005	-0.0055	0.0004	-0.0005	0.0000	-0.0005	0.0000
	-0.001	0.0432	0.0044	-0.0010	0.0000	-0.0011	0.0000
	3	1.6865	1.9912	3.0067	0.0008	3.0041	0.0005
3	-0.00025	-0.0007	0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0003	0.0000
	-0.0245	-0.0488	0.0000	-0.0246	0.0000	-0.0246	0.0000
	4	5.0682	0.0137	3.9900	0.0001	3.9900	0.0002

CUADRO 1.15
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
 PARÁMETROS DE LA FORMA PARA LOS MODELOS GAUSSIANO CON ERROR
 AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NUMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO
 VERDADERO

Modelo	Parámetros <i>a, b y c</i> verdaderos	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.001	-0.0011	0.0000	-0.0009	0.0000	-0.0009	0.0000
	-0.05	-0.0526	0.0000	-0.0506	0.0000	-0.0506	0.0000
	5	4.9858	0.0011	5.0006	25.016	4.9986	24.996
2	-0.0005	-0.0980	0.0102	-0.0032	0.000007	-0.00074	0.000000
	-0.001	1.3504	1.9662	0.2021	0.0413	0.0755	0.0059
	3	-0.3579	11.5221	2.7315	0.0727	2.8728	0.0168
3	-0.00025	-0.0855	0.0096	-0.00097	0.000000	-0.00097	0.000000
	-0.0245	1.1457	1.8573	-0.0506	0.000001	-0.0506	0.000000
	4	1.8166	5.5573	4.9943	0.000044	4.9950	0.000037

En general los datos de la simulación parecen mostrar que tanto los estimadores de la forma como los estimadores de las cotas de los tres modelos que tienen error normal están más cerca de los parámetros reales que los de los modelos con error auto-regresivo. Esto parece indicar que el tipo de error afecta la rapidez de convergencia

de los estimadores, lo que implicaría que los estimadores de los modelos con error normal convergen más rápido que los modelos con error auto-regresivo.

El tipo de modelo también parece afectar la rapidez de convergencia de los estimadores de las cotas y de la forma, lo que explica porque en el modelo exponencial para un número pequeño de observaciones ($n=20$) se obtienen estimaciones que en general tienen un sesgo relativamente pequeño y es menor en comparación con los modelos logístico y Gaussiano. De hecho los datos indican que los estimadores que convergen más rápido son los del modelo exponencial, siguiendo en orden de importancia el logístico y por último el Gaussiano.

Otro aspecto importante es que las estimaciones de los parámetros que determinan la cantidad de cambio de los tres modelos, en general están muy cerca de los verdaderos valores tanto para modelos con error normal como con error auto-regresivo, así como para una cantidad pequeña de observaciones, lo que parece indicar que el tipo de modelo, el tipo de error y el número de observaciones no afectan sustancialmente la rapidez de convergencia de los estimadores de los parámetros que determinan la cantidad de cambio de los modelos.

Finalmente, se puede concluir que el proceso de estimación de las cotas en la primera etapa, no afecta en general las propiedades relevantes de los estimadores de la forma en la segunda etapa. También puede concluirse que las pendientes entre puntos sucesivos parecen ser aproximaciones de la derivada de la función estabilizadora. Por todo lo anterior, se puede concluir que el modelo estable-acotado, es una teoría aceptable para estudiar los fenómenos que no pueden crecer ni decrecer indefinidamente.

CAPITULO 2

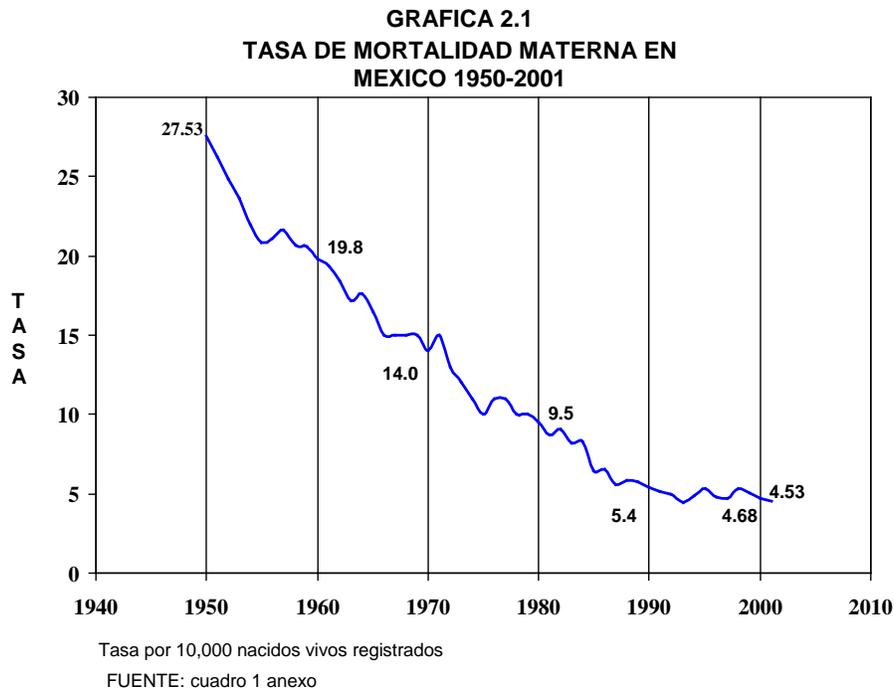
PRONÓSTICO DE LA MORTALIDAD MATERNA EN MEXICO EN EL CORTO Y LARGO PLAZOS

2.1 La mortalidad materna

Una muerte materna se define como la defunción de una mujer que ocurre mientras está embarazada o dentro de los 42 días siguientes a la terminación del embarazo, independientemente de la duración y el sitio del embarazo, y debida a cualquier causa relacionada con o agravada por el embarazo mismo o su atención, pero no por causas accidentales o incidentales (Organización Panamericana de la Salud, 1995).

En México la mortalidad materna en las últimas cinco décadas, ha mostrado una tendencia sostenida a la baja. En la gráfica 2.1 se puede observar que la tasa de mortalidad materna ha tenido un descenso muy importante desde la segunda mitad del siglo pasado. En 1950, según datos oficiales del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), se estimó que morían en promedio 27.53 mujeres por causas relacionadas con el embarazo por cada 10 mil nacidos vivos registrados (nvr), en 1980 fueron 9.5 y en el año 2001 llegó a 4.53 defunciones. Sin embargo, el nivel actual registrado oficialmente está todavía muy por arriba del nivel estimado en

países desarrollados como Canadá, Italia, Estados Unidos y Japón, en donde para 1990 se estimaron tasas de mortalidad materna entre 5 y 18 muertes maternas pero por cada 100 mil nacidos vivos (UNICEF, 1997), mientras que en México en ese año de acuerdo con cifras oficiales del INEGI se estimó en 54 por cada 100 mil nvr²⁵.



2.2 Los planes estratégicos de la mortalidad materna

Para reducir el impresionante rezago en la mortalidad materna, el Sector Salud de México ha definido planes estratégicos que han contribuido a la reducción de este problema de salud pública en nuestro país. Uno de ellos fue el Programa de Salud Reproductiva y Planificación Familiar (PSRyPF) 1995-2000, cuyas estrategias y líneas de acción contribuyeron a reducir la mortalidad materna en el sexenio 1995-2000. Sin embargo, la magnitud de la reducción quedó muy por debajo de la meta comprometida en dicho programa, el cual estableció como meta para el año 2000,

²⁵ El rezago debe ser más grande, ya que las cifras oficiales en México se calculan por mil nacidos vivos registrados, mientras que en países desarrollados se calculan por mil nacidos vivos. Las tasas calculadas con nacidos vivos registrados tienen sesgos (son más bajas de lo real) debido al sobre-registro de nacimientos.

reducir la tasa de mortalidad materna observada en 1990 en un 50% lo que implicaba llegar a una tasa de 2.7 muertes por cada diez mil nvr (Poder Ejecutivo Federal, 1995). Sin embargo, las cifras oficiales del INEGI indican que la tasa de mortalidad materna en el año 2000 fue de 4.68, por lo que el cumplimiento de la meta fue de solo 13.3 por ciento.

Para el sexenio 2001-2006, el programa de acción Arranque Parejo en la Vida (APAV), representó otra de las estrategias sustantivas del Programa Nacional de Salud del período 2001-2006, cuyo objetivo fue otorgar una cobertura universal, con atención de calidad, en condiciones igualitarias a las mujeres durante el embarazo, parto y puerperio, así como a las niñas y niños desde antes de su nacimiento hasta los dos años de edad (Secretaría de Salud, 2001).

El programa de acción APAV representó el instrumento de la planeación estratégica de más alto nivel en México en materia de salud, que contribuyó a reducir la mortalidad materna, en el sexenio pasado. El Programa definió estrategias muy puntuales con las que se pretendió reducir para el año 2006 en un 35% la tasa de mortalidad materna observada en el año 2000, lo que significó alcanzar una tasa de 3.04 muertes maternas por cada 10 mil nvr para ese año (Secretaría de Salud, 2002).

Sin embargo, la preocupación por no alcanzar las metas comprometidas, ha sido uno de los puntos de discusión de estos programas, sobre todo porque la meta del periodo 1995-2000, fue establecida siguiendo recomendaciones de organismos internacionales y desde su planteamiento se sospechaba que era muy difícil su cumplimiento. Para el periodo 2001-2006, se dejaron de lado los compromisos internacionales y se estableció una meta menos ambiciosa, en términos de los recursos disponibles, por lo que, su cumplimiento es más factible.

En este sentido, la problemática de las metas implica contar con estimaciones confiables de la mortalidad materna en el futuro, tanto en el corto como en el largo

plazo, con el fin de establecer en los planes estratégicos de salud metas altamente probables de alcanzar de acuerdo con la realidad que vive actualmente nuestro país.

2.3 La estabilización de la mortalidad materna

En México, como se puede observar en la gráfica (2.1) los datos disponibles de la mortalidad materna para el período 1950-2001, muestran una clara tendencia a la baja, por lo que, bajo el supuesto de que en algún momento se estabilizará²⁶, se puede suponer que representan observaciones de un fenómeno estable-acotado decreciente, es decir,

$$Y_t = f_{\infty}^e(t) + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1, 2, 3, \dots, 52^{27}, \quad (2.1)$$

con

$$E(\varepsilon_t) = 0,$$

lo que implica que

$$E(Y_t) = f_{\infty}^e(t),$$

donde Y_t denota la variable aleatoria de la tasa de mortalidad materna en el tiempo t , f_{∞}^e es una función estabilizadora decreciente que depende del tiempo, y ε_t es un proceso estocástico.

Para estimar el valor de la estabilización de la mortalidad materna, es necesario según el método de las tangentes y el ejercicio de simulación, calcular las pendientes de las rectas entre dos puntos sucesivos y_t y y_{t+1} y el valor medio entre estos puntos, es decir,

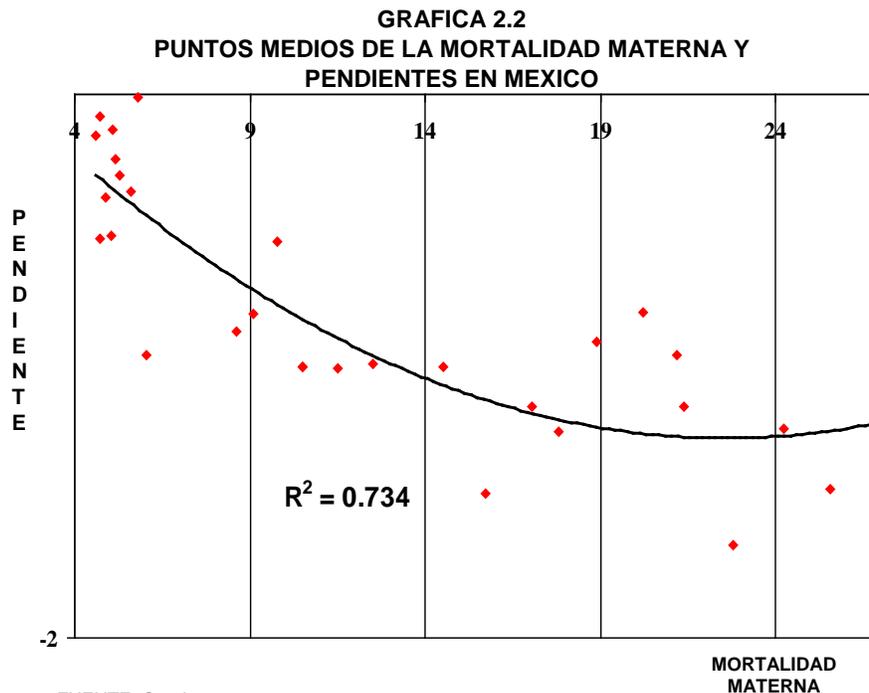
$$P_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{(t+1) - t} \quad \text{y} \quad y_t^{1/2} = y_t + \frac{y_{t+1} - y_t}{2}, \quad (2.2)$$

²⁶ La tasa de mortalidad materna no puede ser negativa, por lo que una cota natural sería el cero, sin embargo, dadas las condiciones sanitarias actuales del país esto no puede ser posible, por lo que es más factible suponer la existencia de una cota mayor que cero.

²⁷ Se consideró 1950=1, 1951=2, 1952=3, ..., 2001=52

donde

P_t , denotará la pendiente entre los puntos y_t y y_{t+1} , y $y_t^{1/2}$ es el punto medio entre y_t y y_{t+1} ²⁸.



En la gráfica (2.2), se observa que la relación entre los datos P_t (pendiente generada) y y_t (puntos medios) está dada por una parábola. Entonces bajo el supuesto de que los P_t son aproximaciones de la derivada de y_t con respecto de t y de acuerdo con el método de las tangentes existirán dos valores en donde la derivada se hace cero, los cuales se pueden calcular, ajustando una parábola a los datos disponibles, o sea que,

²⁸ Para simplificar la notación se utiliza y_t en lugar del punto medio $y_t^{1/2}$, pero es importante advertir que de acuerdo con los resultados de la simulación el punto medio produce un menor sesgo en la estimación del valor de la estabilización

$$P_t = A Y_t^2 + B Y_t + C \quad (2.3)$$

Al estimar los parámetros de (2.3) por el método de mínimos cuadrados ordinarios se obtuvo que $A = 0.003$, $B = -0.1352$, $C = 0.2622$ y un coeficiente de determinación $R^2 = 0.734$.

Así, de acuerdo con el método de las tangentes, las raíces de (2.3) representarán valores de la mortalidad materna donde la derivada se hace cero, de tal forma que la menor de ellas será una estimación del valor de la estabilización, mientras que la otra raíz puede ser una cota superior o un valor máximo relativo. De esta forma,

$$r_1 = \frac{-(-0.1352)}{2 (0.003)} - \frac{\sqrt{(-0.1352)^2 - 4 (0.003) (0.2622)}}{2 (0.003)}$$

$$r_1 = 2.031, \text{ y}$$

$$r_2 = \frac{-(-0.1352)}{2 (0.003)} + \frac{\sqrt{(-0.1352)^2 - 4 (0.003) (0.2622)}}{2 (0.003)}$$

$$r_2 = 43.036$$

De esta manera se puede concluir que el comportamiento de la mortalidad materna de México en el futuro, continuará a la baja hasta estabilizarse alrededor del valor 2.031 muertes maternas por cada mil nacidos vivos registrados.

Con el problema de la estabilización resuelto, el siguiente problema es determinar la forma como se alcanzará la estabilización y consiste en identificar la función estabilizadora decreciente f_∞^e que tenga una cota inferior de 2.031 y que explique el comportamiento observado de los datos disponibles.

2.4 La función estabilizadora de la mortalidad materna

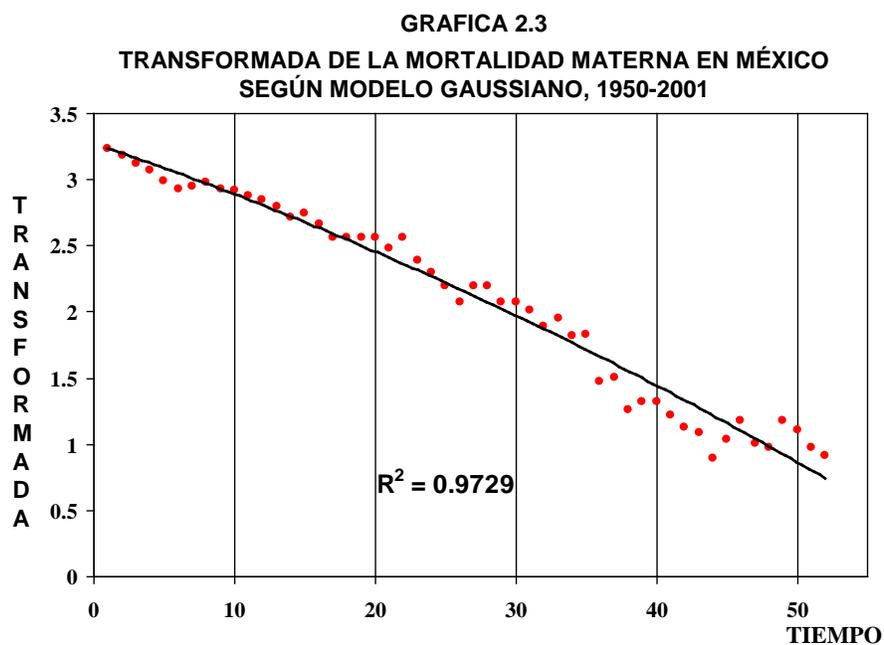
Para identificar la función estabilizadora que explique el comportamiento de los datos observados de la mortalidad materna durante el periodo 1950-2001, se calcularon las siguientes transformadas,

$$\ln(Y_t - 2.031), \quad y \quad (2.4)$$

$$\ln \left[\frac{41.005}{Y_t - 2.031} - 1 \right] \quad (2.5)$$

con $41.005 = r_2 - r_1$.

La primera transformada se relaciona con el modelo Gaussiano y la segunda con el modelo logístico. En las gráficas (2.3) y (2.4), se graficaron respectivamente la primera y segunda de las transformadas anteriores. Según estas gráficas, la relación entre la primera y segunda transformada de la mortalidad materna y el tiempo, está dada por una parábola y una recta respectivamente.

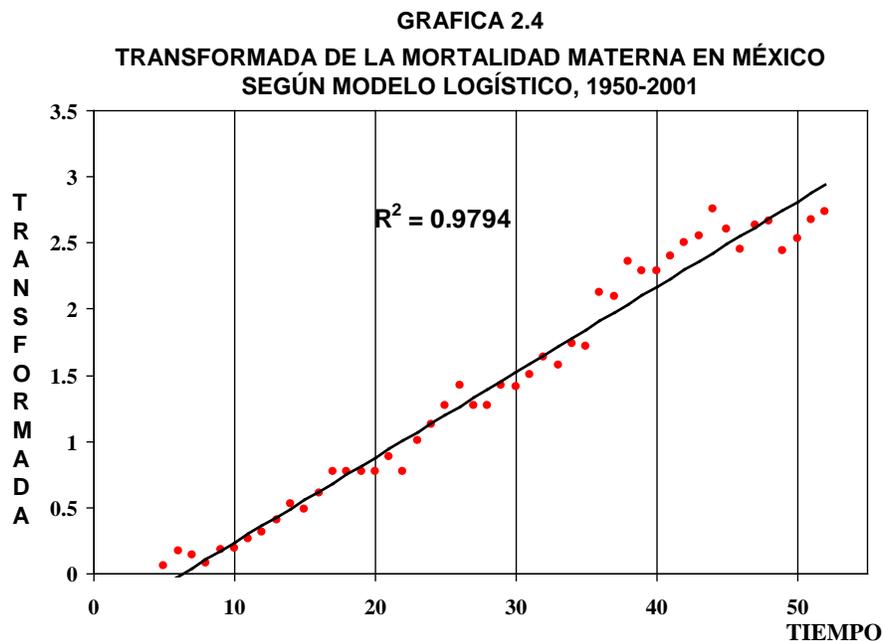


FUENTE: Cuadro 3 anexo

Este hecho implica que las respectivas transformadas se pueden explicar con base en una parábola y en una recta respectivamente, o sea que,

$$\ln(Y_t - 2.031) = a t^2 + b t + c \quad (2.6)$$

$$\ln \left[\frac{41.005}{Y_t - 2.031} - 1 \right] = \alpha + \beta t \quad (2.7)$$



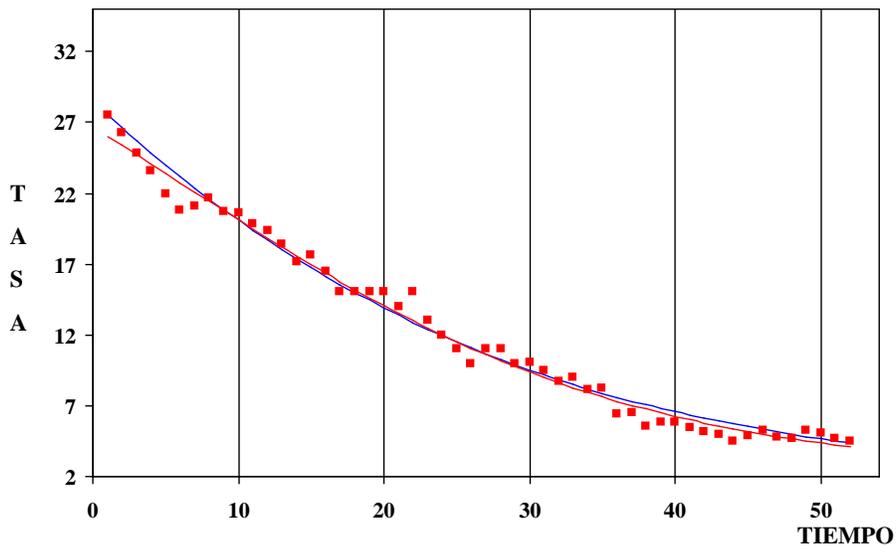
Al estimar los parámetros por mínimos cuadrados ordinarios se obtuvo que $a = -0.0002$, $b = -0.0361$ y $c = 3.2754$ para el caso de la parábola y $\alpha = -0.408$ y $\beta = 0.0644$ para el caso de la recta. Los coeficientes de determinación fueron $R^2 = 0.9729$ y $R^2 = 0.9794$ respectivamente. Como se puede constatar, la diferencia entre los coeficientes de determinación para los modelos de las variables transformadas y el tiempo, es del orden de 43 diezmilésimas, lo que implica que los

datos observados pueden explicarse tanto por un modelo Gaussiano como por un modelo logístico.

Esto se debe a que solo se tiene información de la mortalidad materna cuando está descendiendo, es decir, no existe información sobre la posible estabilidad en el pasado o bien de la existencia de un máximo relativo de la mortalidad materna, que es lo que hace diferentes a las dos funciones. De esta manera, el comportamiento a la baja que describen los datos disponibles de la mortalidad materna en México, puede ser explicado por los dos tipos de funciones estabilizadoras. De hecho, en la gráfica (2.5), se puede observar que el ajuste de las funciones en el periodo observado es casi el mismo.

Sin embargo, los coeficientes de determinación de los modelos Gaussiano y logístico si muestran diferencias importantes, $R^2 = 0.7613$ y $R^2 = 0.8153$ respectivamente, lo que quiere decir que el modelo logístico explica mejor los datos observados, ya que su coeficiente de determinación es mayor que el Gaussiano.

GRAFICA 2.5
TASA DE MORTALIDAD MATERNA EN MÉXICO OBSERVADA Y ESTIMADA
SEGÚN MODELO LOGÍSTICO Y GAUSSIANO, 1950-2001



FUENTE: Cuadro 5 anexo

Por otro lado, se sabe además con base en el ejercicio de simulación, que las estimaciones del modelo logístico convergen más rápido que las del modelo Gaussiano, lo que implica que con $n = 52$ observaciones, las estimaciones de los parámetros del modelo logístico son más precisas que las del Gaussiano.

Finalmente, con base en estos dos argumentos, se concluyó que la función estabilizadora que tiene una cota inferior de 2.031 y que explica mejor el comportamiento observado de la mortalidad materna en México a través del tiempo, es la función logística con parámetros de la forma $\alpha = -.408$ y $\beta = 0.0644$. Esto permitió concluir que la función que explica la mortalidad materna en México a través del tiempo es,

$$Y_t = 2.031 + \frac{41.005}{1 + e^{-0.408 + 0.0644 t}} + \varepsilon_t. \quad (2.8)$$

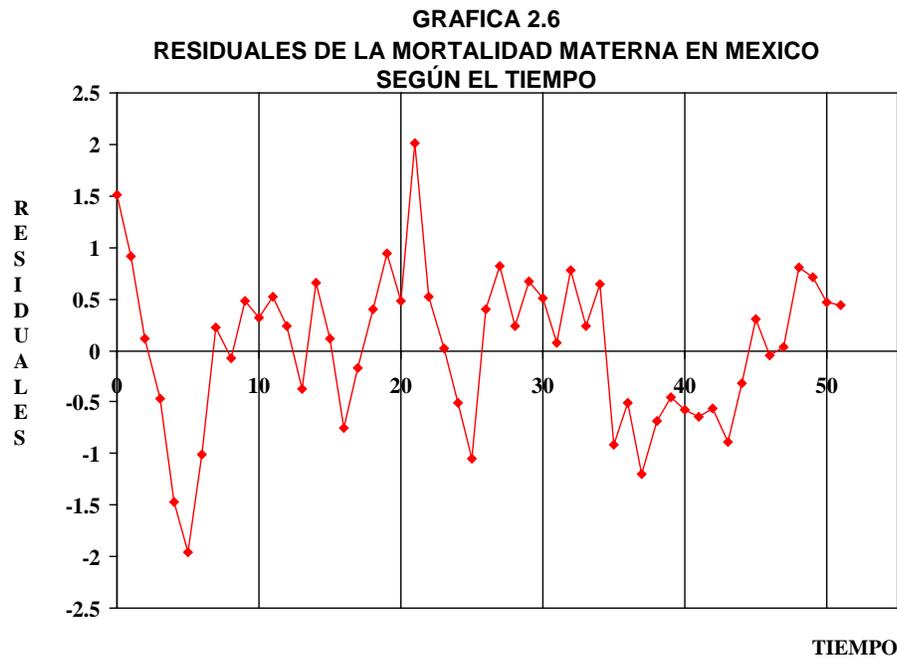
que es una función decreciente con la propiedad de que se estabiliza en el valor 2.031 y que proporciona estimaciones puntuales de la mortalidad materna para cualquier tiempo futuro.

2.5 Análisis del error en el modelo estable-acotado de la mortalidad materna en México

La estimación de los parámetros de la forma en el modelo estable-acotado de la mortalidad materna de (2.8), se hizo bajo el supuesto de que el error es un proceso estocástico de ruido blanco, por lo que resulta necesario comprobar el cumplimiento de este supuesto. El análisis de este supuesto se basó en las cantidades residuales de la mortalidad materna, los cuales si el modelo (2.8) es correcto, proveen observaciones del proceso estocástico ε_t (Draper y Smith, 1981) y representan datos de una serie de tiempo, es decir,

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t,$$

donde t denota el tiempo, Y_t la mortalidad materna observada, \hat{Y}_t la mortalidad materna estimada según el modelo (2.8) y ε_t denota la cantidad residual. En la gráfica (2.6), se observa que el comportamiento de las cantidades residuales ε_t no muestra cambios sistemáticos ni en la media ni en la varianza, lo que parece indicar que se trata de una serie de tiempo estacionaria (Chatfield, 1975)²⁹.



La propiedad de estacionariedad fuerte implica que la distribución de probabilidad de ε_t es la misma en cualquier momento, por lo tanto la media es constante a través del tiempo y se puede estimar según Box y Jenkins (1970) de la manera siguiente,

$$\hat{\mu}(\varepsilon_t) = \frac{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t}{N} .$$

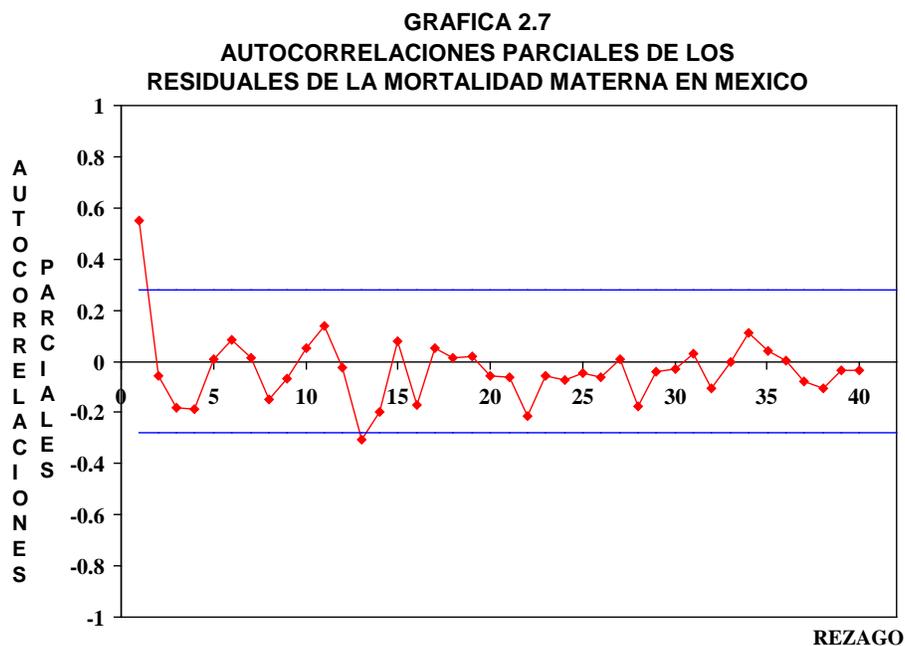
²⁹ Además la prueba de las corridas (Farnum y Stanton, 1989 y Brownlee, 1965) y la prueba de Kendall (Farnum y Gilchrist, 1976) muestran con un nivel de significancia de 10% y 5% respectivamente, que la serie es estacionaria.

Al sustituir los datos en la expresión anterior, se obtuvo que la estimación para la media de las cantidades residuales ε_t es 0.0379.

Para identificar el posible modelo probabilístico del cual pueden provenir los datos de ε_t , se restó a cada residual la media estimada y se calcularon los coeficientes de autocorrelación y de autocorrelación parcial del proceso X_t definido como,

$$X_t = \varepsilon_t - 0.0379 \quad ; \quad t = 1, 2, 3, \dots, 52$$

El análisis de las autocorrelaciones parciales indica que solo la primera de ellas es significativamente diferente de cero (gráfica 2.7), lo que implica por un lado, que el error no es ruido blanco y por otro, según Chatfield (1975) que el proceso puede ser autoregresivo de orden uno, ya que la función de autocorrelación parcial teórica de un proceso autoregresivo de orden uno, es cero para rezagos mayores que uno.



FUENTE: cuadro 7 anexo

Por otro lado, según Box y Jenkins (1970) el orden del proceso autoregresivo también puede ser uno, ya que la función de autocorrelación parcial estimada se corta después del valor uno. Lo anterior implica que el modelo probabilístico del cual pueden provenir los datos de X_t , es un proceso estocástico auto-regresivo de orden uno, cuyo modelo matemático es,

$$X_t = \delta X_{t-1} + u_t, \quad (2.9)$$

donde:

$$X_t = \varepsilon_t - 0.0379 \quad \text{y} \quad X_{t-1} = \varepsilon_{t-1} - 0.0379$$

u_t es un proceso estocástico puramente aleatorio con media cero y varianza σ_u^2 desconocida, y

δ es una constante también desconocida.

La relación (2.9) implica que no es cierto el supuesto de que X_t es ruido blanco y dado que los estimadores de α y β de mínimos cuadrados ordinarios de (2.8) se calcularon bajo este supuesto, es necesario estimarlos nuevamente por el método de los mínimos cuadrados generalizados, para lo cual es necesario calcular la matriz de varianzas-covarianzas del proceso auto-regresivo de primer orden (2.9). Es decir,

$$V[\mathbf{X}_t] = \frac{\sigma_u^2}{1 - \delta^2} \begin{bmatrix} 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 & \dots & \delta^{n-1} \\ \delta & 1 & \delta^2 & \delta^3 & \dots & \delta^{n-2} \\ \delta^2 & \delta^3 & 1 & \dots & \delta^{n-1} & \\ \vdots & & & & & \\ \delta^{n-1} & \delta^{n-2} & \dots & & \delta & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Como se puede observar la matriz depende de los parámetros desconocidos σ_u^2 y δ . Según Fuller (1976), Chatfield (1975) y Box y Jenkins (1970) el estimador de

mínimos cuadrados de δ está dado por la primera autocorrelación de los datos X_t , es decir que,

$$\hat{\delta} = \frac{\sum X_t X_{t-1}}{\sum X_t^2} . \quad (2.11)$$

y el estimador de la varianza de u_t según Box y Jenkins (1970) es

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum (X_t - \hat{X}_t)^2}{N-1} . \quad (2.12)$$

De esta manera las estimaciones de los parámetros α y β se obtuvieron por medio del siguiente proceso iterativo.

1. Utilizando las cotas estimadas k_1 y $k_1 + k_2$ se obtuvieron por mínimos cuadrados ordinarios las primeras estimaciones de α y β .
2. Se calcularon las cantidades residuales $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}$
3. Se calculó el promedio de los ε_i y se calculó X_i
4. Se estimaron los parámetros δ y σ_u^2 de acuerdo con (2.11) y (2.12) respectivamente
5. Se estimó la matriz de varianzas-covarianzas del vector de errores \mathbf{X}_t de acuerdo con (2.10)
6. Se estimaron los parámetros α y β por mínimos cuadrados generalizados
7. Se comparó la solución actual con la anterior y cuando la distancia entre ellas fue menor que 0.000000001 terminó el proceso, en caso contrario se repitió el proceso desde el punto 2.

Al terminar el proceso se obtuvo que la solución converge a los valores $\alpha = 0.4099$ y $\beta = 0.06422$, por lo que el modelo final para explicar la mortalidad materna en México a través del tiempo quedó como:

$$\hat{Y} = \left[2.031 + \frac{41.005}{1 + e^{-0.4099 + 0.06422 t}} \right] + X_t \quad (2.13)$$

con

$$X_t = \varepsilon_t - 0.008$$

$$X_t = 0.5471 X_{t-1} + u_t, \quad y \quad (2.14)$$

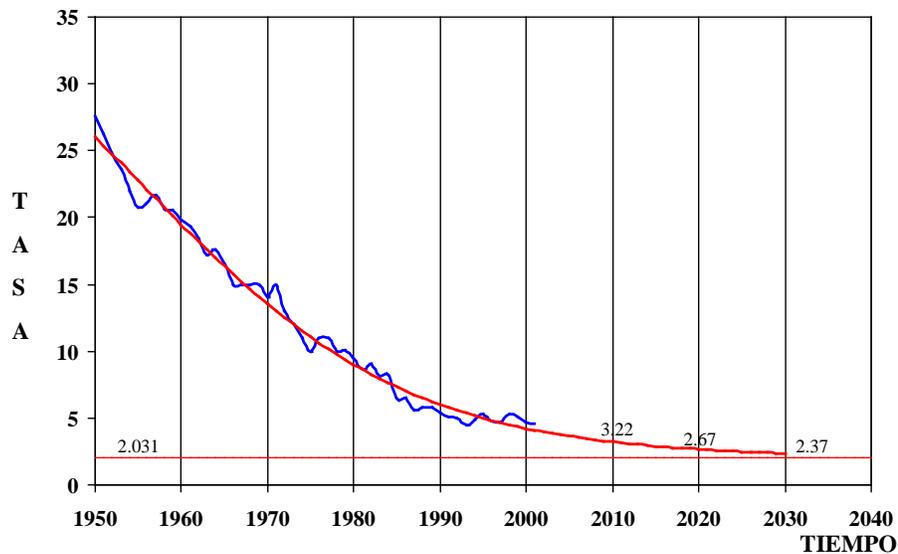
$$\hat{\sigma}_u^2 = 0.5274.$$

El modelo es una representación matemática que provee estimaciones puntuales de la mortalidad materna en México en el corto y largo plazos y que permite analizar y determinar cuestiones de tipo probabilístico asociados con la mortalidad materna en cualquier momento del tiempo.

2.6 Estimación puntual de la mortalidad materna en México

De esta manera si el modelo (2.13) describe la mortalidad materna adecuadamente, se espera que para el año 2010 la mortalidad materna en México llegue a 3.22 defunciones, para el año 2020 a 2.67 y para el año 2030 a 2.37 muertes maternas por cada mil nacidos vivos registrados en todo el país (Véase gráfica 2.8), es decir, a solo 0.339 milésimas de alcanzar la estabilización.

GRAFICA 2.8
LA MORTALIDAD MATERNA EN MÉXICO 1950-2030



FUENTE: Cuadro 8 anexo

El modelo (2.13) se puede utilizar para analizar el cumplimiento de las metas de los planes estratégicos de la mortalidad materna en México, tanto los del pasado como los actuales. Por ejemplo, se puede concluir con base en las estimaciones del modelo, que la meta comprometida en el PSRyPF de 1995-2000, era casi imposible de alcanzarse, ya que el valor de 2.7 se alcanzará hasta el año 2020 y no en el año 2000 como se estableció en dicho programa.

Con respecto a la meta del año 2006 comprometida en el Programa APAV de 2001-2006, aunque no se tiene información para comprobar si se cumplió o no³⁰, se puede concluir que es muy probable que no se haya alcanzado, ya que, según el pronóstico del modelo el valor de 3.04 se alcanzará aproximadamente hasta el año 2012, es decir, seis años después de lo comprometido en el programa.

³⁰ En 2002 el INEGI y la Secretaría de Salud decidieron cambiar el indicador de la mortalidad materna sustituyendo el número de nacidos vivos registrados por el número de nacidos vivos estimados, desde entonces la mortalidad materna se calcula así y es el indicador que oficialmente está disponible para los usuarios.

Con respecto al plan estratégico actual de la mortalidad materna para el periodo 2007-2012, se puede valorar la factibilidad del cumplimiento de la meta, calculando el nivel de subestimación que tenía el indicador anterior y aplicarlo al valor de 3.04 que según el modelo se estima para el año 2012 y compararlo con la meta de la mortalidad materna comprometida en el actual plan estratégico. En los planes estratégicos de la mortalidad materna para el futuro, habrá que considerar como metas para este indicador las estimaciones ajustadas del modelo estable-acotado de la mortalidad materna en México.

2.7 Validación del modelo estable acotado de la mortalidad materna

Potencia predictiva del modelo

Con el fin de juzgar la potencia predictiva del modelo, se hizo un ejercicio quitando los datos 4.68 y 4.53 de la mortalidad materna, observados en los años de 2000 y 2001 respectivamente. En este caso el modelo de la mortalidad materna quedó como,

$$\hat{Y}_t = \left[1.873 + \frac{41.736}{1 + e^{-0.3914 + 0.0635t}} \right] + X_t, \quad (2.15)$$

Sustituyendo los valores de t en (2.15) se obtuvieron las estimaciones para los años 2000 y 2001. Los resultados se presentan en el siguiente cuadro.

CUADRO 2.1
LA MORTALIDAD MATERNA EN MÉXICO, 2000 y 2001

Año	Tiempo	Mortalidad materna observada	Mortalidad materna estimada
2000	51	4.68	4.16
2001	52	4.53	4.03

Como se puede constatar, el dato estimado en ambos años se encuentra muy cercano al observado. El error es de 0.52 y 0.50 centésimas respectivamente, lo que podría indicar que el modelo proporciona al menos en el corto plazo, estimaciones poco sesgadas.

Pruebas de normalidad en el modelo auto-regresivo

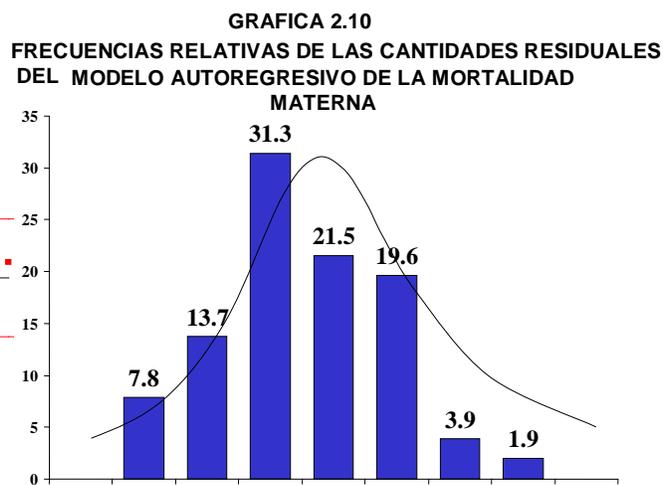
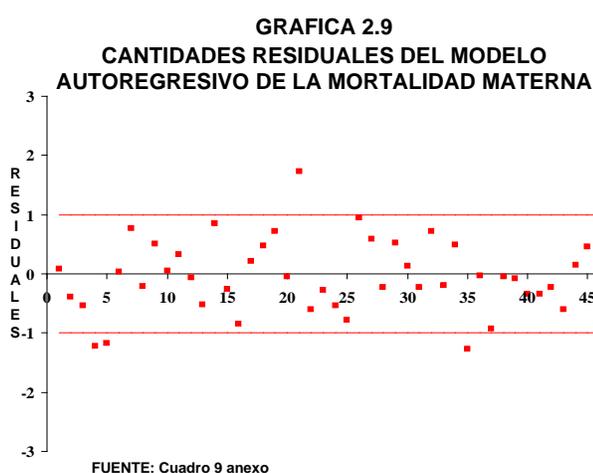
El modelo auto-regresivo de orden uno estimado para analizar la parte aleatoria de la mortalidad materna de acuerdo con (2.13) es,

$$\hat{X}_t = 0.5471 \hat{X}_{t-1} + u_t$$

por lo que si el modelo es correcto entonces

$$\hat{u}_t = X_t - \hat{X}_t \tag{2.16}$$

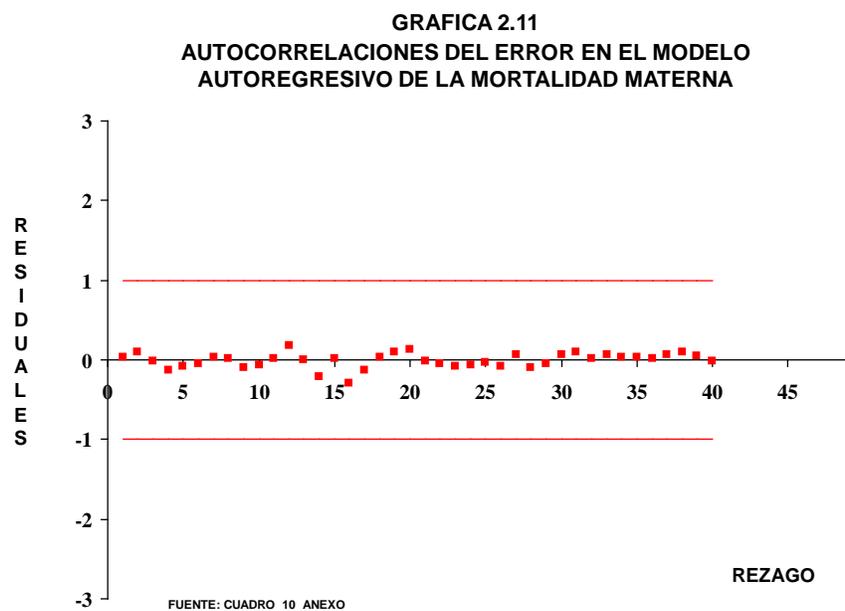
En las gráficas (2.9) y (2.10) se presentan respectivamente, los valores graficados de las cantidades residuales \hat{u}_t estandarizados con respecto del tiempo y en un histograma de frecuencias relativas.



La gráfica (2.9) muestra las cantidades residuales distribuidos en una banda horizontal, lo que indica que la varianza de u_t es constante y que en el largo plazo, el tiempo no influye en los datos (Draper y Smith, 1981). También se puede observar que la mayoría de las observaciones se encuentran entre los valores -1 y 1 , lo que parece indicar que la variable aleatoria u_t se distribuye como una variable aleatoria normal estándar teórica (Neter y Wasserman, 1974, p.107).

En la gráfica (2.10) se tiene el histograma de las frecuencias relativas de las cantidades residuales u_t . Como se puede ver, el histograma muestra frecuencias bajas en las colas y frecuencias altas en la parte media, lo que parece indicar nuevamente que las observaciones pueden provenir de una variable aleatoria normal.

Finalmente, en la gráfica (2.11) se puede observar que el comportamiento de las autocorrelaciones del error u_t , confirman también el supuesto de que se trata de una variable aleatoria normal con media cero y varianza constante.



Es decir, lo anterior permite concluir que no existe evidencia empírica para rechazar la hipótesis de que el error u_t del proceso auto-regresivo (2.14) es una variable aleatoria normal con media cero y varianza constante y que por lo tanto el modelo estable-acotado decreciente (2.13), es un modelo aceptable para analizar en el corto y largo plazos la mortalidad materna en México.

CAPITULO 3

PRONÓSTICOS DE LA POBLACION DE MÉXICO EN EL PERIODO 2006-2030

3.1 Dinámica demográfica actual

En México como resultado de la actual política de población³¹, en las últimas tres décadas se han observado cambios muy importantes en la dinámica demográfica del país. Los cambios han impactado de manera significativa la fecundidad, la mortalidad y la migración, así como la estructura y crecimiento de la población.

El descenso notable de la fecundidad y la mortalidad en los últimos 30 años se dimensiona al observar que actualmente México se encuentra en la última etapa de la transición demográfica³², lo cual se advierte claramente al contrastar los niveles de fecundidad y mortalidad actuales con los niveles registrados a mediados de los sesenta.

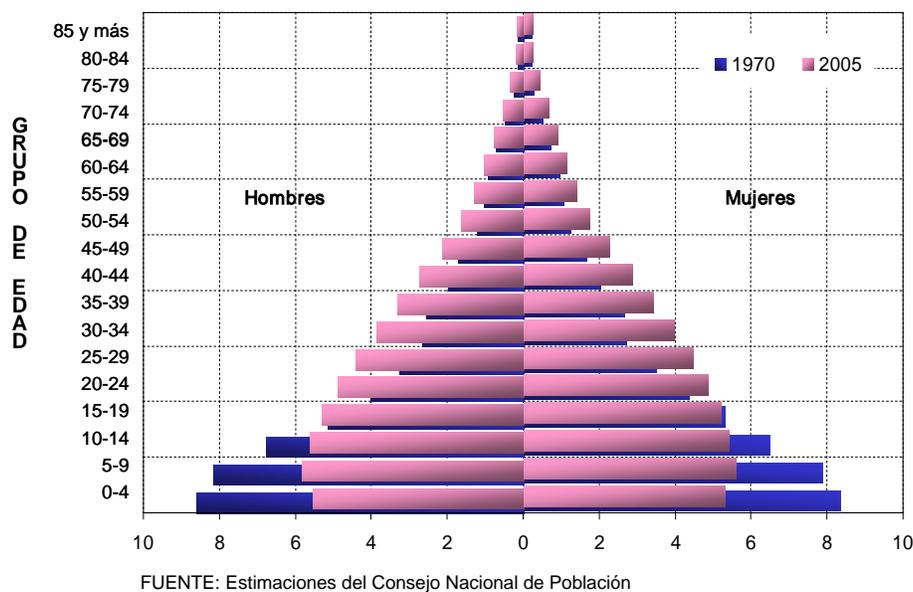
³¹ La política poblacional vigente en México, inició oficialmente en febrero de 1974 y estableció como su principal objetivo, regular los fenómenos que afectan a la población en cuanto a su volumen, estructura, dinámica y distribución en el territorio nacional, en beneficio de una mejor calidad de vida (CONAPO, 2006).

³² La última etapa de la transición demográfica se caracteriza por una natalidad y mortalidad bajas y un crecimiento poblacional muy lento (Haupt y Kane, 2001).

El cambio en los componentes demográficos ha transformado la composición por edad y sexo de la población del país. Hoy se tiene una estructura muy diferente a la observada hace más de 35 años. En 1970 la alta fecundidad de la época se reflejaba en la forma de la pirámide de población³³, la cual tenía una base muy ancha producto de una abundante población infantil, que representaba en ese entonces casi la mitad de la población total del país (46.3 por ciento), en tanto que la población adulta era de solo 3.7 por ciento (Véase figura 3.1).

En el año 2005 la forma de la pirámide poblacional ha cambiado. Se observa claramente una reducción en la base y un ensanchamiento en la parte superior. La población infantil que es la que conforma la base de la pirámide bajó a 31.3 por ciento, mientras que la punta formada por la población adulta se incrementó a 5.2 por ciento (Véase figura 3.1). Los cambios se deben a la marcada reducción de la fecundidad y la mortalidad en el país en los últimos años.

FIGURA 3.1
ESTRUCTURA POR EDAD Y SEXO EN MEXICO
1970, 2005



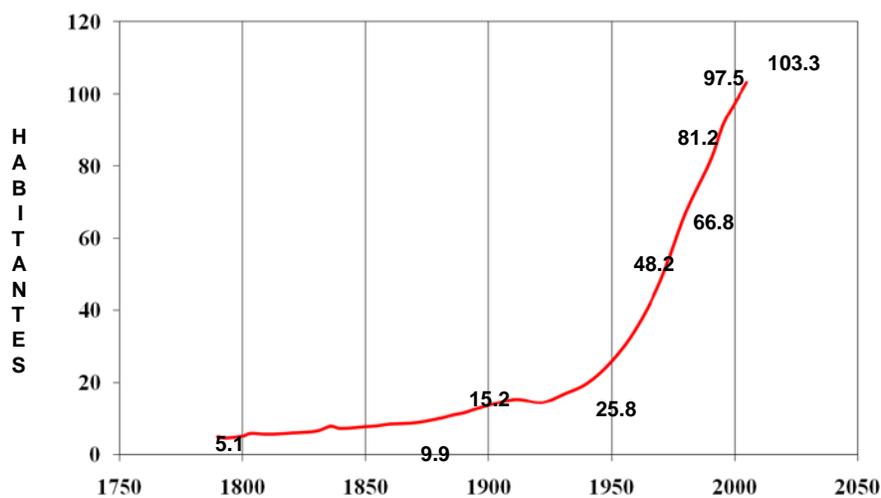
³³ Una pirámide de población es una gráfica en la que se representan horizontalmente los porcentajes de la población para hombres y mujeres y para cada grupo de edad.

3.2 La población de México en los últimos dos siglos

La población del país ha crecido bajo el efecto de condiciones sociales, económicas y políticas muy distintas en los últimos 200 años. En este periodo se pueden identificar tres escenarios poblacionales, que indudablemente han contribuido en el perfil de la actual dinámica demográfica mexicana y por supuesto en el volumen poblacional del país.

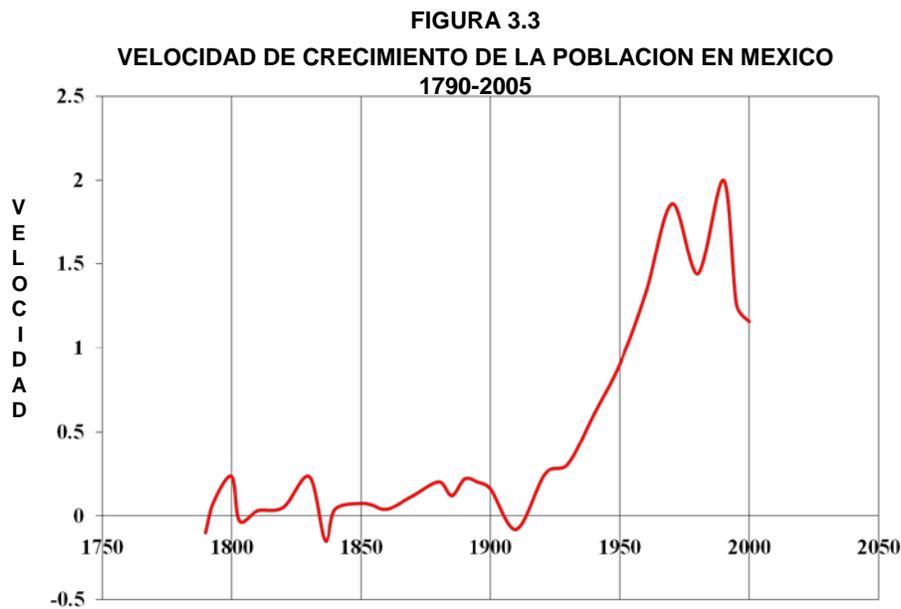
Durante el siglo XIX la población mexicana creció solo bajo el efecto de las condiciones sociales y económicas imperantes de la época. En la figura (3.2), se puede observar que desde principios de ese siglo la población de México empezó a crecer, sin embargo, el crecimiento se dio a una velocidad muy baja, ya que durante este periodo la población del país se duplicó solamente una vez. De acuerdo con los datos disponibles de esa época, se estima que para el año 1800 la población del país era de casi 5 millones y que fueron necesarios 80 años para que llegara aproximadamente a los 10 millones de habitantes (Véase figura 3.2).

FIGURA 3.2
LA POBLACION DE MEXICO 1790-2005



Cifras en millones
FUENTE: Cuadro 11 anexo

Pero el acelerado crecimiento de la población del país, tuvo lugar en el siglo pasado, cuando además de las condiciones sociales y económicas que imperaban en esa época, se incorporó el factor político, al decretarse en 1930 la primera ley de población, la cual instituyó acciones que favorecieron el crecimiento poblacional del país.



FUENTE: Cuadro 12 anexo

Los primeros efectos de esta ley se dimensionan al observar que en 1900 la población de México se estimaba en 15.2 millones y para 1950 ya casi se había duplicado al llegar a 25.8 millones, es decir, un proceso que un siglo atrás había tardado 80 años, en el siglo pasado tardó un poco más de 50 años, lo que indicaba que la población mexicana estaba creciendo mucho más rápido que en el siglo XIX.

Durante los 44 años que la población del país creció al amparo de la política pronatalista, tuvo lugar un crecimiento de la población sin precedente producto de los cambios drásticos que sufrió la velocidad de crecimiento en este período. Como se observa en la figura (3.3), la velocidad de crecimiento fue exageradamente a la alza,

rompiendo con la tendencia moderada que se venía observando años atrás. El efecto de este ritmo de crecimiento tan acelerado de mediados del siglo pasado, fue de tal magnitud, que tan solo 20 años después la población del país casi se duplicó por segunda vez, al llegar en 1970 a los 48.2 millones de habitantes (Véase figura 3.2).

Para 1974 expertos en la materia alertaron a las autoridades gubernamentales al advertir que de seguir creciendo al ritmo observado hasta ese momento, en muy poco tiempo el volumen poblacional empezaría a tener efectos desfavorables en el desarrollo social y económico del país, por lo que en ese año la política de población de México cambió nuevamente de manera radical y desde ese año hasta la fecha, la población mexicana crece bajo las pautas que dicta esta actual política poblacional, cuyo objetivo ha sido “regular los fenómenos demográficos que inciden en el volumen, estructura y distribución de la población en el territorio nacional, a fin de contribuir al mejoramiento de las condiciones de vida de sus habitantes y al logro de la participación justa y equitativa de hombres y mujeres en los beneficios del desarrollo económico y social” (Ley General de Población, 1974).

Sin embargo, a pesar de esta nueva ley la población del país se duplicó por tercera vez en el siglo pasado, al alcanzar en el año 2000 los 100.3 millones de habitantes. Afortunadamente, el tiempo que tardó en duplicarse la población en esta ocasión fue de poco menos de 30 años, es decir, casi diez años más que lo que tardó en duplicarse por segunda vez, lo que indica que el crecimiento de la población ha empezado a frenarse. De hecho, los datos evidencian que desde 1980, la velocidad de crecimiento de la población muestra claramente una tendencia a la baja (Figura 3.3).

Esta actual pauta de crecimiento del país, está caracterizada por un sostenido descenso de la mortalidad y la fecundidad y de una migración neta que se ha mantenido constante durante los últimos 20 años, lo que ha logrado reducir hasta ahora, la velocidad de crecimiento de la población, pero el impacto no ha sido todavía suficiente como para detener el crecimiento de la población que se ha venido

observando desde hace aproximadamente 200 años. Ante este panorama surge una pregunta crucial para la política de población ¿cuál será el máximo volumen poblacional que alcanzará la población mexicana?

3.3 La velocidad de crecimiento y los escenarios poblacionales

Para valorar el impacto de las políticas poblacionales en el ritmo de crecimiento de la población de México, se calcularon para el periodo comprendido entre 1790 y 2005, las pendientes de las rectas entre los datos del volumen poblacional³⁴ y los puntos medios entre estos datos, es decir,

$$P_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{(t+1) - t}, \text{ y } y_t^{1/2} = y_t + \frac{y_{t+1} - y_t}{2}, \quad (3.1)$$

donde:

P_t denota la pendiente entre los datos poblacionales y_t y y_{t+1} , y

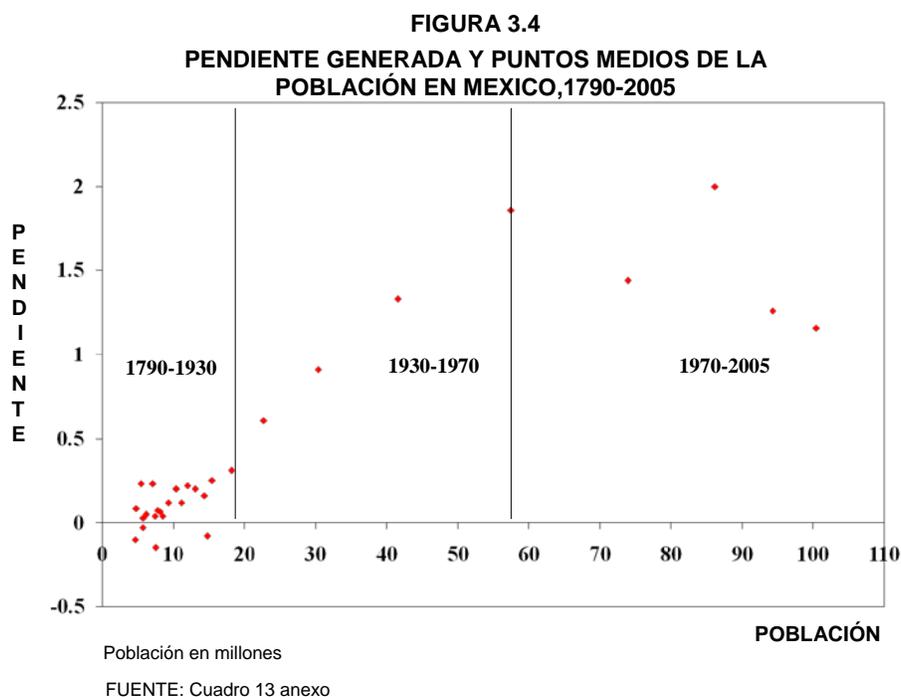
$y_t^{1/2}$ es el punto medio entre los datos y_t y y_{t+1} ³⁵.

En la figura (3.4) se puede observar el comportamiento de la velocidad de crecimiento de la población según el volumen y escenario poblacional. Es claro que existen tres comportamientos diferentes del ritmo de crecimiento poblacional. El primero de ellos está caracterizado por las más bajas velocidades de crecimiento en el país en los últimos 200 años y que corresponde al periodo de 1790-1930. El segundo se refiere al periodo de 1930-1970 y se caracteriza por ser el periodo en el que el ritmo de crecimiento se incrementó de manera notable. Por último, se observa la etapa en la que la velocidad de crecimiento es a la baja y que corresponde al periodo de 1970 a la fecha.

³⁴ Recuérdese que se supone que estas pendientes son aproximaciones de las rectas tangentes a la curva y por lo tanto aproximaciones de la velocidad de crecimiento

³⁵ Para simplificar la notación se utiliza de aquí en adelante y_t en lugar del punto medio $y_t^{1/2}$

Esta clara diferencia en las dinámicas demográficas, conlleva la necesidad de separar el análisis del crecimiento de la población del país en dos periodos. El primero proporcionaría datos de cual habría sido la población del país si no se hubieran instrumentado políticas de población, mientras que el segundo muestra como afectó y afecta actualmente el volumen poblacional, la política pro-natalista y la actual política de población respectivamente.



Los datos de estos periodos no pueden juntarse dado que son producto de dinámicas demográficas diferentes, por lo que, el análisis de la evolución de la población de México en el futuro, se basará solo en los datos poblacionales del periodo referido entre 1900 y 2005, ya que es en este periodo cuando la población mexicana creció bajo el efecto de políticas poblacionales diametralmente opuestas.

3.4 La estabilización de la población mexicana

En México, como se puede observar en la figura (3.2), los datos del volumen poblacional para el período 1900-2005, muestran una clara tendencia a la alza, por lo que, bajo el supuesto de que en algún momento la población del país se estabilizará³⁶, se puede suponer que representan observaciones del siguiente fenómeno estable-acotado creciente,

$$Y_t = f_\infty^e + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \{1,2,3,\dots,13\}^{37}, \quad (3.2)$$

con ε_t un proceso estocástico en el que

$$E(\varepsilon_t) = 0,$$

y donde

Y_t denota la variable aleatoria del volumen poblacional en el tiempo t , y

f_∞^e es una función estabilizadora creciente en el periodo observado.

Para estimar el valor de la estabilización de la población mexicana se utilizó el método de las tangentes, por lo que fue necesario utilizar los puntos P_t y los puntos medios respectivos sólo para el periodo comprendido entre 1900 y 2005.

En la figura (3.5) se observa claramente que la relación entre los datos P_t y y_t es de tipo parabólico, por lo que, bajo el supuesto de que los P_t son aproximaciones de la derivada de Y_t con respecto de t , entonces de acuerdo con el método de las

³⁶ El supuesto se basa en que los principales componentes del cambio poblacional como la fecundidad y la mortalidad son fenómenos estable-acotados, los cuales tarde o temprano se estabilizarán o cambiarán la tendencia observada.

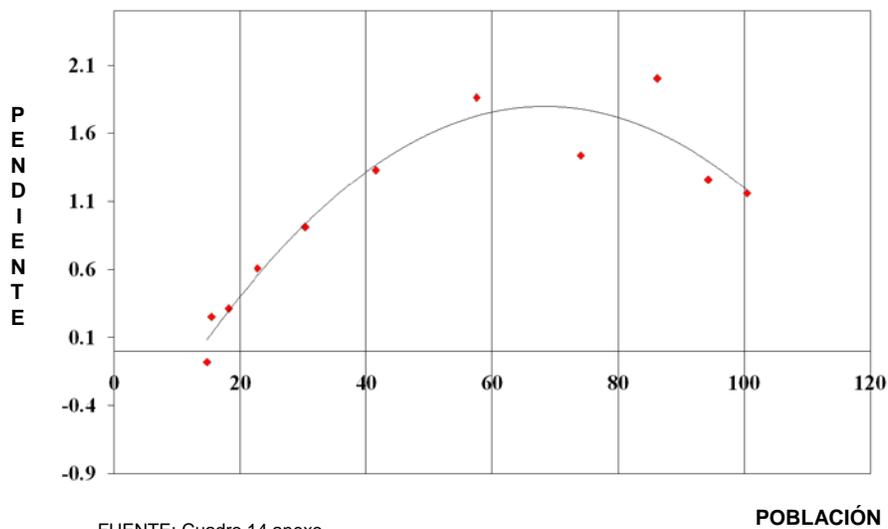
³⁷ Para el análisis se consideró 1900=1, 1921=2, 1930=3, ..., 2005=13

tangentes existirán dos valores en donde la derivada se hace cero, los cuales se pueden estimar ajustando la siguiente función a los datos de P_t y Y_t ,

$$P_t = A Y_t^2 + B Y_t + C_t \quad (3.3)$$

Al estimar los parámetros de (3.3) por el método de mínimos cuadrados ordinarios se obtuvo que $A = -0.0006$, $B = 0.08178$, $C = -0.9953$ y un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9217$.

FIGURA 3.5
PENDIENTES GENERADAS Y PUNTOS MEDIOS DE LA
POBLACIÓN DE MEXICO, 1910-2005



FUENTE: Cuadro 14 anexo

De esta manera, de acuerdo con el método de las tangentes, las raíces de (3.3) representarán valores de la población mexicana en donde la derivada se hace cero, de tal forma que la mayor de ellas será una estimación del valor de la estabilización o bien de un máximo relativo, mientras que la menor puede ser una cota inferior. De esta forma se obtuvo que,

$$r_1 = \frac{-(0.08178)}{2(-0.0006)} + \frac{\sqrt{(0.08178)^2 - 4(-0.0006)(-0.9953)}}{2(-0.0006)}$$

$$r_1 = 122.83, \text{ y}$$

$$r_2 = \frac{-(0.08178)}{2(-0.0006)} - \frac{\sqrt{(0.08178)^2 - 4(-0.0006)(-0.9953)}}{2(-0.0006)}$$

$$r_2 = 13.51$$

Por lo que, si el supuesto de estabilidad es cierto, se espera que la población de México siga creciendo todavía hasta llegar a los 122.83 millones de habitantes. Esta respuesta a la pregunta crucial de la política de población, pero lo que no se sabe es que pasará cuando se alcance ese valor, se estabilizará o empezará a bajar en ese momento. Esta respuesta solo es posible determinando la forma cómo se alcanzará la estabilización.

3.5 La función estabilizadora de la población mexicana

Para identificar la función estabilizadora que explique el comportamiento de los datos observados del volumen poblacional durante el periodo de 1900 a 2005 y que se estabilice en el valor 122.83 millones, se calcularon las siguientes transformadas,

$$\ln(y_t - 13.51), \quad y \quad (3.4)$$

$$\ln\left[\frac{109.32}{y_t - 13.51} - 1\right], \quad (3.5)$$

donde $109.32 = 122.83 - 13.51$.

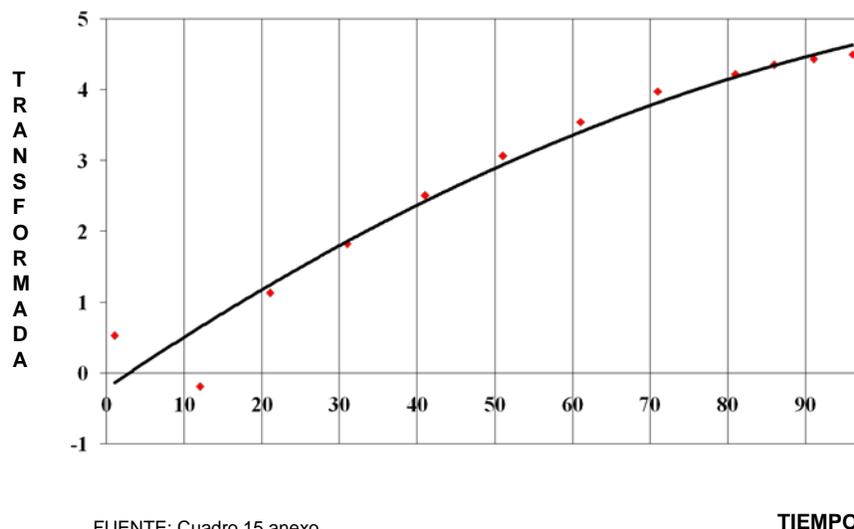
La primera transformada se relaciona con el modelo Gaussiano y la segunda con el modelo logístico. La primera explicaría el comportamiento creciente de la población observado actualmente, pero implicaría que en el futuro la población alcance el máximo alrededor de 122.83 millones y después empiece a decrecer. La segunda también explicaría el comportamiento creciente actual, pero implicaría que en el futuro la población se estabilice alrededor del valor 122.83 millones.

En las figuras (3.6) y (3.7) se puede observar que la relación entre estas transformadas y el tiempo, está dada por una parábola y una recta respectivamente, lo que implica que las respectivas transformadas se pueden explicar por este tipo de funciones, es decir,

$$\ln(y_t - 13.51) = a t^2 + b t + c \quad (3.6)$$

$$\ln\left[\frac{109.32}{y_t - 13.51} - 1\right] = \alpha + \beta t. \quad (3.7)$$

FIGURA 3.6
TRANSFORMADA DE LA POBLACIÓN DE MÉXICO
SEGÚN MODELO DE GAUSS Y EL TIEMPO



FUENTE: Cuadro 15 anexo

FIGURA 3.7
TRANSFORMADA DE LA POBLACIÓN DE MÉXICO
SEGÚN MODELO LOGÍSTICO Y EL TIEMPO



FUENTE: Cuadro 16 anexo

Al estimar los parámetros por mínimos cuadrados ordinarios se obtuvo que $a = -0.000253$, $b = -0.074757$ y $c = -0.21144$ para el caso de la parábola y $\alpha = 4.88$ y $\beta = -0.067$ para el caso de la recta. Al calcular los coeficientes de determinación de los modelos (3.3) y (3.4) se obtuvo respectivamente 0.9581 y 0.979, es decir una diferencia de 21 milésimas que favorece al modelo logístico.

Por otro lado, el coeficiente de determinación del modelo Gaussiano para explicar el comportamiento de la población mexicana es de $R^2 = 0.9782$, mientras que para el modelo logístico fue $R^2 = 0.9992$, es decir, una diferencia a favor del modelo logístico de 21 milésimas en ambos casos, lo que implica que ajusta ligeramente mejor que el modelo Gaussiano.

La decisión final se basó en los resultados del ejercicio de simulación, el cual muestra que los estimadores de los parámetros del modelo logístico convergen más rápido a los valores reales que las del modelo Gaussiano, lo que quiere decir que con $n = 13$ observaciones, las estimaciones de los parámetros del modelo logístico están

más cerca de los verdaderos valores, que las del modelo Gaussiano. Con base en este argumento se concluyó que la función estabilizadora que explica el comportamiento de los datos observados de la población mexicana es,

$$Y_t = 13.51 + \frac{109.32}{1 + e^{4.88 - 0.067 t}} + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

La función es creciente en el periodo observado de 1900 a 2005, se estabiliza en el valor 122.83 millones de habitantes y proporciona datos individuales de la población en cualquier momento del tiempo.

3.6 El error en el modelo estable acotado de la población mexicana

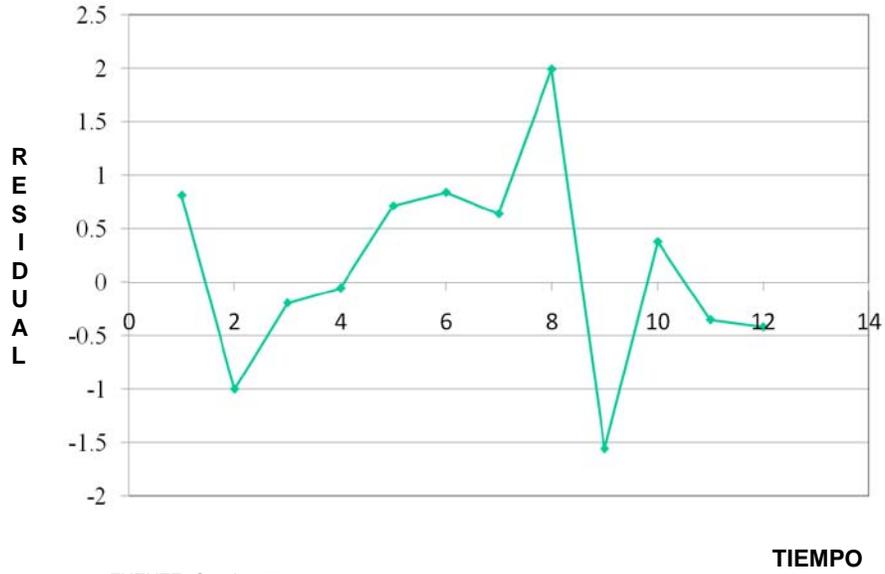
Los parámetros de la forma para alcanzar la estabilización de (3.5), se estimaron bajo el supuesto de que el error es una variable aleatoria normal con media cero y varianza constante, por lo que fue necesario comprobar la veracidad de este supuesto. El análisis se basó en las cantidades residuales de la población, las cuales bajo el supuesto de que el modelo describe adecuadamente la realidad, proveen observaciones del proceso estocástico ε_t (Draper y Smith, 1966) y representan datos de una serie de tiempo, es decir,

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t,$$

donde t denota el tiempo, Y_t la población observada, \hat{Y}_t la población estimada según el modelo (3.5) y ε_t denota la cantidad residual. En la figura (3.8) se observa que el error ε_t es aleatorio y que se trata de una serie de tiempo estacionaria³⁸.

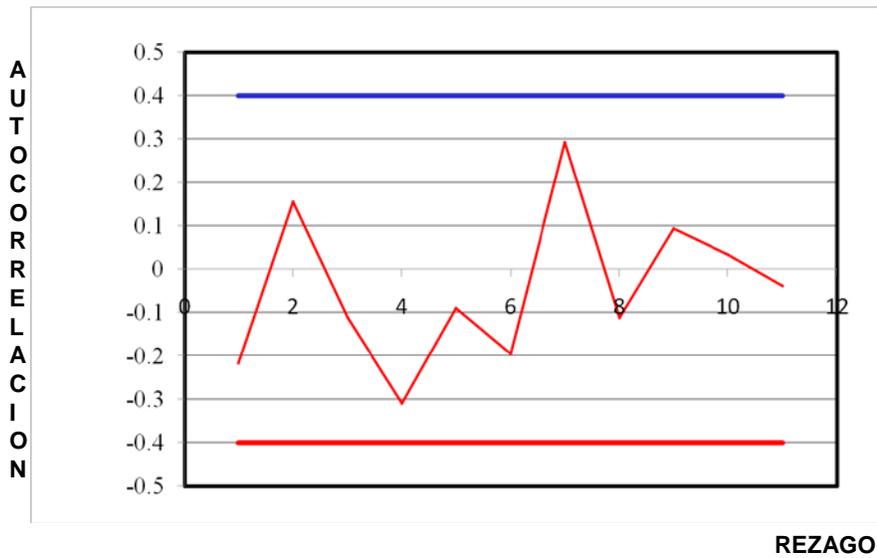
³⁸ Pruebas paramétricas y no paramétricas confirmaron también que la serie es estacionaria

FIGURA 3.8
CANTIDADES RESIDUALES DE LA POBLACION MEXICANA CON RESPECTO DEL TIEMPO



FUENTE: Cuadro 17 anexo

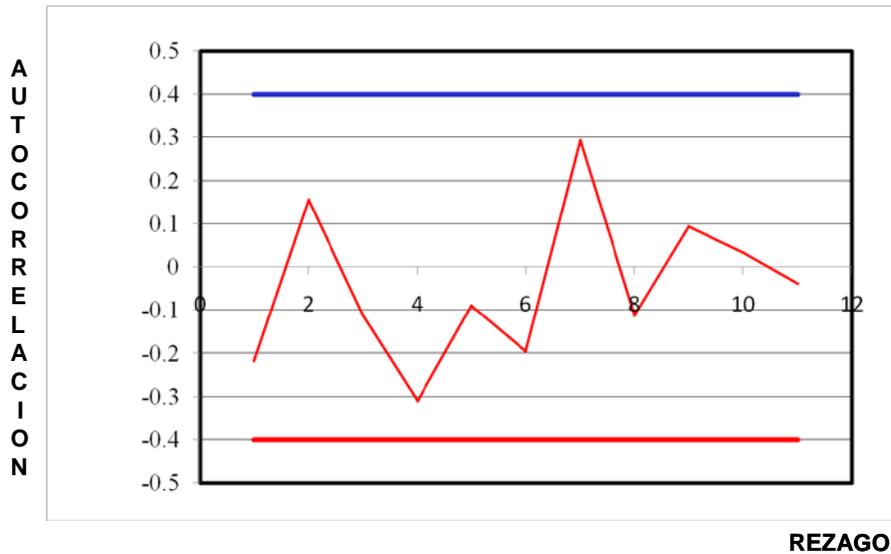
FIGURA 3.9
AUTOCORRELACIONES DE LAS CANTIDADES RESIDUALES DE LA POBLACION MEXICANA SEGÚN REZAGO



FUENTE: Cuadro 18 anexo

Por otro lado, al graficar las estimaciones de las auto-correlaciones y las auto-correlaciones parciales se observa que ninguna de ellas es significativamente diferente de cero (Véanse figuras 3.9 y 3.10), lo que implica que el supuesto de normalidad con media cero y varianza constante del modelo (3.5) no se rechaza y que por lo tanto las estimaciones de los parámetros de la forma $\alpha = 4.88$ y $\beta = -0.067$ obtenidas por el método de mínimos cuadrados ordinarios son las mejores y entonces el mejor modelo para explicar el comportamiento de la población en México está dado por (3.5).

FIGURA 3.10
AUTOCORRELACIONES PARCIALES DE LAS CANTIDADES RESIDUALES DE LA POBLACION MEXICANA SEGÚN REZAGO



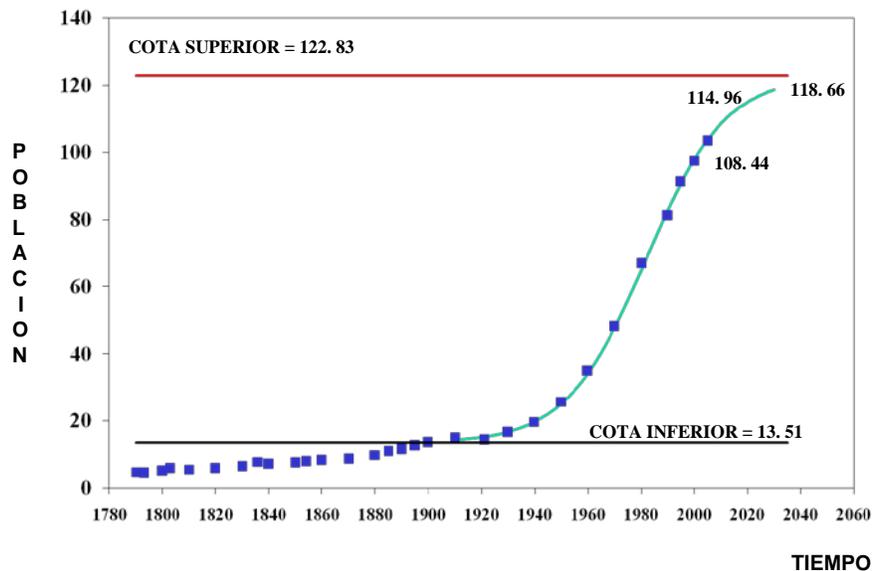
FUENTE: Cuadro 19 anexo

3.7 Estimación puntual de la población mexicana

Si el modelo (3.5) describe adecuadamente la realidad, se espera que para el año 2010 la población de México llegue a 108.44 millones, que para el año 2020 llegue a 114.96 millones de habitantes y que para el año 2030 alcance los 118.66 millones de mexicanos y mexicanas (Véase figura 3.11), es decir, aproximadamente a solo cuatro millones de alcanzar la estabilización.

En la figura (3.11) se puede observar también el grado de ajuste del modelo con los datos observados en el periodo de 1900 a 2005. Como se puede constatar las diferencias entre los valores observados y los estimados son muy pequeñas. Los datos ajustados de 1790 hasta antes del año 1900 no se grafican ya que muestran grandes diferencias con lo observado, debido a que el modelo no es válido para este periodo de tiempo. De hecho la cota inferior estimada para la población de México es más grande que los valores observados a partir de 1900 para atrás.

FIGURA 3.11
LA POBLACIÓN DE MÉXICO, 1790-2030



FUENTE: Cuadro 20 anexo

3.8 Validación del modelo estable acotado para la población mexicana

Potencia predictiva del modelo

Con el fin de juzgar la potencia predictiva del modelo, se hizo un ejercicio quitando el dato 103.3 observado en el año 2005. En este caso la función estabilizadora estimada quedó como,

$$Y_t = 13.45 + \frac{110.05}{1 + e^{4.878 - 0.066 t}} + e_t, \quad (3.9)$$

Sustituyendo el valor de t en (3.6) se obtuvo la estimación por medio del modelo para el año 2005. Los resultados se presentan en el siguiente cuadro.

CUADRO 3.1
LA POBLACIÓN EN MÉXICO, 2005

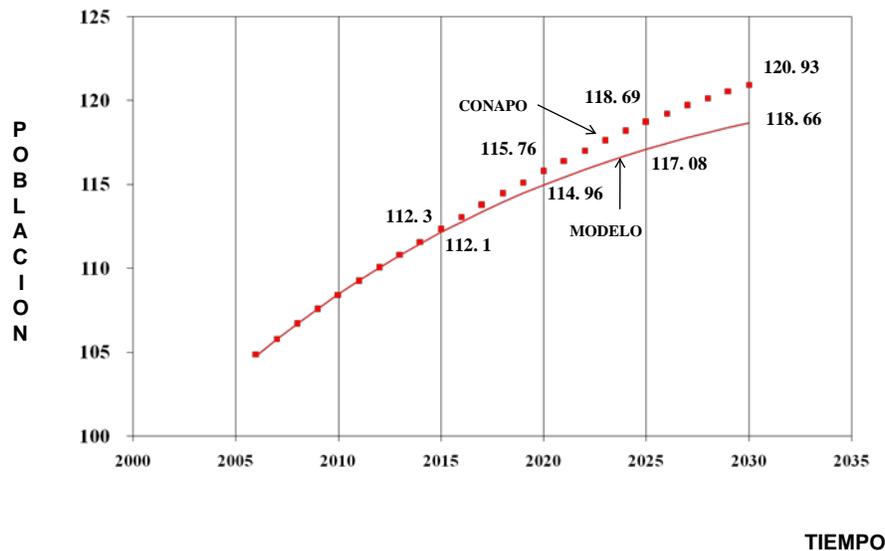
Año	Tiempo	Población observada	Población estimada
2005	96	103.3	103.21

Como se puede constatar, el dato estimado se encuentra muy cercano al valor real observado. El error del modelo es de 9 centésimas, lo que podría indicar que el modelo proporciona al menos en el corto plazo, estimaciones poco sesgadas.

Comparación con las cifras del CONAPO

Otra manera de validar los resultados es comparando las estimaciones del modelo estable acotado (3.5) con las proyecciones oficiales del Consejo Nacional de Población. En la figura (3.12) se pueden comparar ambas estimaciones. Como se puede observar, durante los primeros 10 años del periodo de proyección no hay prácticamente diferencias entre ambas fuentes. Sin embargo, cinco años después los diferentes supuestos asumidos para calcular los pronósticos de la población mexicana empiezan a marcar diferencias importantes en las estimaciones. En 2020 la diferencia es del orden de alrededor de 800 mil personas, para 2025 la diferencia es de 1.6 millones y para 2030 la diferencia en las estimaciones de la población mexicana es ya del orden de 2.3 millones de personas.

FIGURA 3.12
LA POBLACIÓN DE MÉXICO SEGÚN ESTIMACIONES DEL
MODELO ESTABLE ACOTADO Y EL CONAPO, 2006-2030



FUENTE: Cuadro 21 anexo

¿Cuáles estimaciones son más acertadas? La posible respuesta no es fácil, porque las diferencias en los pronósticos que arrojan ambas fuentes a partir de 2020 se deben con toda seguridad a las diferentes metodologías utilizadas³⁹ y a los diferentes supuestos, por lo que, la respuesta depende de qué supuestos son los más acertados, lo cual no es posible saber, de tal manera que solo el tiempo dará respuesta a esta pregunta, es decir, solo cuando llegemos a los años 2020 y 2030, entonces tendremos la respuesta a la pregunta de cuáles estimaciones son más acertadas, las del Consejo Nacional de Población o las del modelo estable acotado-creciente de la población de México.

³⁹ El CONAPO no proyecta directamente los datos poblacionales, en su lugar proyecta las tasas de los cuatro componentes del crecimiento poblacional: los que nacen, los que mueren, los que llegan y los que salen del país. Con base en las tasas, estima para cualquier año de la proyección los que nacerán, los que morirán, los que saldrán y los que entrarán al país. Estos datos los suma (nacimientos y entradas) y resta (defunciones y salidas) a la población existente al principio del año. Las tasas de los nacimientos así como las defunciones las proyecta con un modelo logístico pero la cota inferior en ambos casos no la estima sino que la fija con base en la experiencia de expertos en la materia.

CONCLUSIONES

El análisis de los fenómenos que no pueden crecer o decrecer indefinidamente, se ha basado hasta ahora en la función logística, en primer lugar, porque a pesar de que existen otras funciones con propiedades similares, parece ser que no existen estudios que hagan uso de ellas y en segundo lugar, porque existe una vasta bibliografía de estudios que usan la función logística.

Las funciones estabilizadoras de los modelos exponencial y Gaussiano, son dos funciones diferentes de la logística que pueden utilizarse también para explicar el comportamiento de algunos fenómenos que no pueden crecer o decrecer indefinidamente, que proporcionan estimaciones válidas y congruentes en el corto y largo plazos y que tienen un límite cuando el tiempo crece indefinidamente.

Ante cualquier fenómeno que no puede crecer o decrecer indefinidamente, es posible con base en el método de las tangentes, estimar la cota en la cual se estabilizará y también mediante el método de las diferenciales, identificar la función estabilizadora que mejor se ajuste a los datos observados y que se estabilizará en la cota previamente estimada.

Una conclusión particularmente importante es con respecto a la función logística. La cual es un modelo intrínsecamente lineal, es decir se puede transformar a una forma lineal una vez que las cotas son conocidas, lo que implica, desde este enfoque que el modelo estable-acotado parece resolver por primera vez un problema que tenía más de siglo y medio sin solución.

Si bien no se tienen resultados teóricos de las propiedades de los estimadores del modelo estable-acotado, el ejercicio de simulación indica que el efecto de la primera etapa de estimación no deteriora las propiedades deseables de los estimadores de la segunda etapa y que éstos parecen ser insesgados y consistentes. También indica que

el supuesto de que las pendientes entre dos puntos consecutivos son aproximaciones de la derivada de la función estabilizadora parece ser cierto.

Con respecto a la convergencia de los estimadores los datos de la simulación muestran que el tipo de modelo tiene un efecto en ellos. Al parecer los estimadores que convergen más rápido son los del modelo exponencial, en segundo lugar está el logístico y por último el Gaussiano, lo que quiere decir que ante una situación de pocas observaciones y en la que los tres modelos pueden ser factibles de ajustarse a los datos observados será preferible usar el modelo exponencial.

Los estimadores también se ven afectados por la cercanía de los datos disponibles con respecto al valor de la estabilización o cota. Entre más lejos se encuentren los datos de las cotas las estimaciones tendrán un sesgo mayor. Es decir, aunque se tengan muchas observaciones del fenómeno si éstas se encuentran lejos de la cota, las estimaciones tendrán un mayor sesgo que cuando estén más cerca.

El modelo estable-acotado describe adecuadamente los datos de la mortalidad materna y del volumen poblacional en México. De acuerdo con el modelo, se estima que la mortalidad materna en el país continuará a la baja y que se estabilizará alrededor del valor 2.031 muertes por cada mil nacidos vivos, mientras que la población continuará todavía creciendo hasta estabilizarse en los 122.83 millones de habitantes. Sin embargo, es necesario aplicar el modelo en otras áreas de la demografía y extender la aplicación a otras ciencias como la biología, la física, la economía y las ciencias de la salud, etc.

El uso del modelo estable-acotado puede ser muy amplio, ya que tanto en las ciencias sociales como en la demografía y en la economía, se puede afirmar que todos los fenómenos no pueden crecer o decrecer indefinidamente y por lo tanto para proyectarlos en el largo plazo sin correr el riesgo de obtener valores no válidos o incongruentes, es necesario el uso de este modelo.

Finalmente, es importante señalar que el problema de los fenómenos estable-acotados no está totalmente resuelto, aún quedan aspectos que no tienen solución, por ejemplo, es necesario resolver el problema cuando el error del modelo es auto-regresivo de orden mayor que uno, o cuando el error sea auto-regresivo y de promedios móviles. También es necesario resolver el problema del cálculo de los intervalos de confianza y el problema de deducir las propiedades teóricas de los estimadores.

A N E X O

CUADRO 1
TASA DE MORTALIDAD MATERNA EN MEXICO, 1950-2001

AÑO	TIEMPO	MORTALIDAD MATERNA	AÑO	TIEMPO	MORTALIDAD MATERNA
1950	1	27.53	1986	37	6.52
1951	2	26.29	1987	38	5.56
1952	3	24.84	1988	39	5.8
1953	4	23.61	1989	40	5.79
1954	5	21.95	1990	41	5.43
1955	6	20.8	1991	42	5.13
1956	7	21.08	1992	43	5
1957	8	21.66	1993	44	4.47
1958	9	20.7	1994	45	4.85
1959	10	20.6	1995	46	5.29
1960	11	19.8	1996	47	4.77
1961	12	19.35	1997	48	4.69
1962	13	18.44	1998	49	5.3
1963	14	17.2	1999	50	5.06
1964	15	17.62	2000	51	4.68
1965	16	16.47	2001	52	4.53
1966	17	15			
1967	18	15			
1968	19	15			
1969	20	15			
1970	21	14			
1971	22	15			
1972	23	13			
1973	24	12.01			
1974	25	11			
1975	26	10			
1976	27	11			
1977	28	11			
1978	29	10			
1979	30	10.04			
1980	31	9.5			
1981	32	8.69			
1982	33	9.05			
1983	34	8.18			
1984	35	8.26			
1985	36	6.41			

FUENTE: Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI)

CUADRO 2
PUNTOS MEDIOS DE LA MORTALIDAD MATERNA Y PENDIENTES EN MÉXICO

PUNTOS MEDIOS	PENDIENTES
26.91	-1.24
25.565	-1.45
24.225	-1.23
22.78	-1.66
21.375	-1.15
21.18	-0.96
20.2	-0.8
18.895	-0.91
17.82	-1.24
17.045	-1.15
15.735	-1.47
14.5	-1
12.505	-0.99
11.505	-1.01
10.5	-1
10.5	-1
9.77	-0.54
9.095	-0.81
8.615	-0.87
6.04	-0.96
5.795	-0.01
5.61	-0.36
5.28	-0.3
5.065	-0.13
4.735	-0.53
5.03	-0.52
4.73	-0.08
5.18	-0.24
4.87	-0.38
4.605	-0.15

NOTAS: Calculados con base en (2.2)

Solo se consideraron en el análisis las pendientes negativas de acuerdo con la teoría del fenómeno. También se eliminaron los puntos aberrantes.

CUADRO 3
 TRANSFORMADA DE LA MORTALIDAD MATERNA EN MEXICO
 SEGÚN MODELO GAUSSIANO, 1950-2001

AÑO	TIEMPO	TRANSFORMADA DE LA MORTALIDAD MATERNA ¹	AÑO	TIEMPO	TRANSFORMADA DE LA MORTALIDAD MATERNA ¹
1950	1	3.238644438	1986	37	1.501659508
1951	2	3.18879315	1987	38	1.261052131
1952	3	3.12716101	1988	39	1.326844907
1953	4	3.071726766	1989	40	1.324188251
1954	5	2.991680709	1990	41	1.223520294
1955	6	2.93221364	1991	42	1.13112228
1956	7	2.94702157	1992	43	1.088269871
1957	8	2.977014822	1993	44	0.891642502
1958	9	2.926871499	1994	45	1.036429264
1959	10	2.921500667	1995	46	1.1814611
1960	11	2.877462831	1996	47	1.007641317
1961	12	2.851811824	1997	48	0.977999996
1962	13	2.797838048	1998	49	1.184524703
1963	14	2.719262616	1999	50	1.108276322
1964	15	2.746574046	2000	51	0.974232282
1965	16	2.669942065	2001	52	0.915943729
1966	17	2.562572122			
1967	18	2.562572122			
1968	19	2.562572122			
1969	20	2.562572122			
1970	21	2.482331056			
1971	22	2.562572122			
1972	23	2.395085205			
1973	24	2.300496177			
1974	25	2.193788976			
1975	26	2.075575659			
1976	27	2.193788976			
1977	28	2.193788976			
1978	29	2.075575659			
1979	30	2.080582471			
1980	31	2.01077888			
1981	32	1.895989242			
1982	33	1.948639655			
1983	34	1.816311038			
1984	35	1.8292371			
1985	36	1.476850678			

NOTA: 1) Calculados con base en (2.4)

CUADRO 4
 TRANSFORMADA DE LA MORTALIDAD MATERNA EN MEXICO
 SEGÚN MODELO LOGÍSTICO, 1950-2001

AÑO	TIEMPO	TRANSFORMADA DE LA MORTALIDAD MATERNA ¹	AÑO	TIEMPO	TRANSFORMADA DE LA MORTALIDAD MATERNA ¹
1950	1	-0.497430335	1986	37	2.096085517
1951	2	-0.370645711	1987	38	2.362643242
1952	3	-0.22597025	1988	39	2.290425739
1953	4	-0.105124722	1989	40	2.293350918
1954	5	0.056919086	1990	41	2.403637981
1955	6	0.169489932	1991	42	2.503981837
1956	7	0.14200974	1992	43	2.550257933
1957	8	0.085244587	1993	44	2.760723354
1958	9	0.179319242	1994	45	2.606034436
1959	10	0.1891572	1995	46	2.449413093
1960	11	0.268231332	1996	47	2.636915212
1961	12	0.31306386	1997	48	2.668644991
1962	13	0.40473762	1998	49	2.446084525
1963	14	0.532498484	1999	50	2.528672774
1964	15	0.488796955	2000	51	2.672673455
1965	16	0.609682583	2001	52	2.734865132
1966	17	0.770910118			
1967	18	0.770910118			
1968	19	0.770910118			
1969	20	0.770910118			
1970	21	0.886198472			
1971	22	0.770910118			
1972	23	1.007304776			
1973	24	1.134322917			
1974	25	1.27306503			
1975	26	1.422016142			
1976	27	1.27306503			
1977	28	1.27306503			
1978	29	1.422016142			
1979	30	1.415797789			
1980	31	1.501834624			
1981	32	1.640490478			
1982	33	1.577303115			
1983	34	1.734908493			
1984	35	1.719684622			
1985	36	2.123902213			

NOTA: 1) Calculados con base en (2.5)

CUADRO 5
TASA DE MORTALIDAD MATERNA EN MEXICO OBSERVADA Y ESTIMADA
SEGÚN MODELO LOGÍSTICO Y GAUSSIANO, 1950-2001

TIEM PO	MORTALIDAD MATERNA OBSERVADA	MORTALIDAD MATERNDA LOGÍSTICA ¹	MORTALIDAD MATERNA GAUSSIANA ²	TIE MPO	MORTALIDAD MATERNA OBSERVADA	MORTALIDAD MATERNA LOGÍSTICA ¹	MORTALIDAD MATERNA GAUSSIANA ²
1	27.53	27.5418	26.0214	37	6.52	7.3214	7.0283
2	26.29	26.6225	25.3770	38	5.56	7.0579	6.7525
3	24.84	25.7269	24.7269	39	5.8	6.8056	6.4900
4	23.61	24.8547	24.0722	40	5.79	6.5641	6.2405
5	21.95	24.0059	23.4144	41	5.43	6.3331	6.0034
6	20.8	23.1802	22.7548	42	5.13	6.1122	5.7782
7	21.08	22.3773	22.0946	43	5.0	5.9012	5.5647
8	21.66	21.5971	21.4355	44	4.47	5.6996	5.3622
9	20.7	20.8393	20.7785	45	4.85	5.5071	5.1703
10	20.6	20.1037	20.1252	46	5.29	5.3233	4.9886
11	19.8	19.3898	19.4768	47	4.77	5.1481	4.8167
12	19.35	18.6975	18.8346	48	4.69	4.9810	4.6540
13	18.44	18.0264	18.1998	49	5.3	4.8217	4.5003
14	17.2	17.3762	17.5736	50	5.06	4.6700	4.3550
15	17.62	16.7465	16.9571	51	4.68	4.5255	4.2178
16	16.47	16.1370	16.3513	52	4.53	4.3880	4.0882
17	15.0	15.5473	15.7571				
18	15.0	14.9772	15.1754				
19	15.0	14.4261	14.6070				
20	15.0	13.8937	14.0526				
21	14.0	13.3797	13.5128				
22	15.0	12.8835	12.9880				
23	13.0	12.4050	12.4787				
24	12.01	11.9435	11.9853				
25	11	11.4988	11.5079				
26	10	11.0705	11.0468				
27	11	10.6580	10.6020				
28	11	10.2611	10.1736				
29	10	9.8793	9.7615				
30	10.04	9.5123	9.3656				
31	9.5	9.1595	8.9857				
32	8.69	8.8207	8.6216				
33	9.05	8.4953	8.2731				
34	8.18	8.1831	7.9399				
35	8.26	7.8837	7.6216				
36	6.41	7.5966	7.3179				

NOTAS: 1) Calculados con base en (2.8)

2) Calculados con base en la relación $y = e^{at^2+bt+c} + k$ sustituyendo las estimaciones respectivas

CUADRO 6
RESIDUALES DE LA MORTALIDAD MATERNA SEGÚN EL TIEMPO

TIEMPO	RESIDUAL	TIEMPO	RESIDUAL
1	1.50859	37	-0.50831
2	0.91297	38	-1.19251
3	0.11313	39	-0.69005
4	-0.46222	40	-0.45048
5	-1.46440	41	-0.57336
6	-1.95475	42	-0.64824
7	-1.01465	43	-0.56466
8	0.22455	44	-0.89216
9	-0.07853	45	-0.32030
10	0.47479	46	0.30139
11	0.32319	47	-0.04667
12	0.51539	48	0.03597
13	0.24018	49	0.79972
14	-0.37362	50	0.70501
15	0.66291	51	0.46223
16	0.11874	52	0.44179
17	-0.75708		
18	-0.17540		
19	0.39298		
20	0.94740		
21	0.48724		
22	2.01201		
23	0.52128		
24	0.02472		
25	-0.50791		
26	-1.04679		
27	0.39799		
28	0.82642		
29	0.23853		
30	0.67445		
31	0.51432		
32	0.06837		
33	0.77686		
34	0.24009		
35	0.63839		
36	-0.90788		

NOTA: Calculados con base en la mortalidad materna observada del cuadro 5 anexo y las estimaciones según el modelo logístico del cuadro 5 anexo.

CUADRO 7
 AUTOCORRELACIONES PARCIALES DE LOS RESIDUALES DE LA MORTALIDAD
 MATERNA EN MÉXICO

REZAGO	AUTOCORRELACIÓN PARCIAL	REZAGO	AUTOCORRELACIÓN PARCIAL
1	0.549	31	0.030
2	-0.059	32	-0.105
3	-0.184	33	-0.004
4	-0.187	34	0.113
5	0.007	35	0.042
6	0.082	36	0.003
7	0.011	37	-0.077
8	-0.149	38	-0.106
9	-0.067	39	-0.033
10	0.053	40	-0.036
11	0.138		
12	-0.023		
13	-0.305		
14	-0.200		
15	0.078		
16	-0.173		
17	0.049		
18	0.016		
19	0.020		
20	-0.058		
21	-0.064		
22	-0.214		
23	-0.056		
24	-0.071		
25	-0.047		
26	-0.062		
27	0.008		
28	-0.175		
29	-0.038		
30	-0.028		

NOTA: Calculados con el paquete Interactive Time Series Modelling (ITSM)

CUADRO 8
MORTALIDAD MATERNA EN MEXICO 1950-2030

AÑO	MORTALIDAD MATERNA OBSERVADA	MORTALIDAD MATERNA ESTIMADA ¹	AÑO	MORTALIDAD MATERNA OBSERVADA	MORTALIDAD MATERNA ESTIMADA ¹
1950	27.53	26.021	1991	5.13	5.778
1951	26.29	25.377	1992	5	5.565
1952	24.84	24.727	1993	4.47	5.362
1953	23.61	24.072	1994	4.85	5.170
1954	21.95	23.414	1995	5.29	4.989
1955	20.8	22.755	1996	4.77	4.817
1956	21.08	22.095	1997	4.69	4.654
1957	21.66	21.435	1998	5.3	4.500
1958	20.7	20.779	1999	5.06	4.355
1959	20.6	20.125	2000	4.68	4.218
1960	19.8	19.477	2001	4.53	4.088
1961	19.35	18.835	2002		3.966
1962	18.44	18.200	2003		3.851
1963	17.2	17.574	2004		3.742
1964	17.62	16.957	2005		3.639
1965	16.47	16.351	2006		3.543
1966	15	15.757	2007		3.452
1967	15	15.175	2008		3.366
1968	15	14.607	2009		3.285
1969	15	14.053	2010		3.209
1970	14	13.513	2011		3.138
1971	15	12.988	2012		3.070
1972	13	12.479	2013		3.007
1973	12.01	11.985	2014		2.948
1974	11	11.508	2015		2.892
1975	10	11.047	2016		2.839
1976	11	10.602	2017		2.790
1977	11	10.174	2018		2.743
1978	10	9.761	2019		2.699
1979	10.04	9.366	2020		2.658
1980	9.5	8.986	2021		2.620
1981	8.69	8.622	2022		2.583
1982	9.05	8.273	2023		2.549
1983	8.18	7.940	2024		2.517
1984	8.26	7.622	2025		2.487
1985	6.41	7.318	2026		2.459
1986	6.52	7.028	2027		2.433
1987	5.56	6.753	2028		2.408
1988	5.8	6.490	2029		2.385
1989	5.79	6.240	2030		2.370
1990	5.43	6.003			

NOTA: 1) Calculada con base en (2.13)

CUADRO 9
RESIDUALES DEL MODELO AUTOREGRESIVO DE LA MORTALIDAD MATERNA

TIEMPO	RESIDUAL	TIEMPO	RESIDUAL
1	0.075714816	36	-0.028619696
2	-0.399163642	37	-0.930933481
3	-0.537801909	38	-0.053652499
4	-1.226066403	39	-0.088490303
5	-1.16896172	40	-0.341946265
6	0.038617506	41	-0.349103885
7	0.76272277	42	-0.22406797
8	-0.219030214	43	-0.596814672
9	0.499429422	44	0.154705602
10	0.044487388	45	0.463991397
11	0.319068596	46	-0.22372647
12	-0.061805859	47	0.04978552
13	-0.525478181	48	0.768774108
14	0.846469171	49	0.256645871
15	-0.26511601	50	0.066110908
16	-0.843485704	51	0.178898613
17	0.217139761		
18	0.467146596		
19	0.710507923		
20	-0.052999351		
21	1.723541894		
22	-0.601312001		
23	-0.282166819		
24	-0.542963135		
25	-0.790223233		
26	0.949636763		
27	0.587914603		
28	-0.234035487		
29	0.52386574		
30	0.125636071		
31	-0.232300641		
32	0.720594103		
33	-0.203348902		
34	0.489078173		
35	-1.274623955		

NOTA: Calculados con base en (2.16)

CUADRO 10
AUTOCORRELACIONES DEL ERROR EN EL MODELO AUTOREGRESIVO DE LOS
RESIDUALES DE LA MORTALIDAD MATERNA

REZAGO	AUTOCORRELACIÓN
1	0.03062
2	0.09805
3	-0.00907
4	-0.13587
5	-0.08724
6	-0.04694
7	0.03132
8	0.01151
9	-0.09277
10	-0.07336
11	0.02431
12	0.17261
13	0.00793
14	-0.21768
15	0.01568
16	-0.3008
17	-0.13245
18	0.03327
19	0.10287
20	0.13612
21	-0.01395
22	-0.04195
23	-0.07542
24	-0.0722
25	-0.03127
26	-0.08652
27	0.07221
28	-0.09046
29	-0.05198
30	0.0673
31	0.10116
32	0.01533
33	0.06865
34	0.03727
35	0.02498
36	0.01887
37	0.06239
38	0.09545
39	0.05596
40	-0.01824

NOTA: Calculados con el paquete Interactive Time Series Modelling (ITSM)

CUADRO 11
LA POBLACIÓN DE MÉXICO, 1790-2005

AÑO	TIEMPO	POBLACIÓN
1790	0	4.8
1793	3	4.5
1800	10	5.1
1803	13	5.8
1810	20	5.6
1820	30	5.9
1830	40	6.4
1836	46	7.8
1840	50	7.2
1850	60	7.6
1854	64	7.9
1860	70	8.3
1870	80	8.7
1880	90	9.9
1885	95	10.9
1890	100	11.5
1895	105	12.6
1900	110	13.6
1910	120	15.2
1921	131	14.33
1930	140	16.6
1940	150	19.7
1950	160	25.8
1960	170	34.9
1970	180	48.2
1980	190	66.8
1990	200	81.2
1995	205	91.2
2000	210	97.5
2005	215	103.3

FUENTE: De 1790 a 1895, La Población de México: tendencias y perspectivas sociodemográficas hacia el siglo XXI. Pág. 57.

De 1900 a 2005, Estadísticas Históricas de México

CUADRO 12
VELOCIDAD DE CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN DE MÉXICO, 1790-2005

AÑO	VELOCIDAD ¹
1790	-0.10000
1793	0.08571
1800	0.23333
1803	-0.02857
1810	0.03000
1820	0.05000
1830	0.23333
1836	-0.15000
1840	0.04000
1850	0.07500
1854	0.06667
1860	0.04000
1870	0.12000
1880	0.20000
1885	0.12000
1890	0.22000
1895	0.20000
1900	0.16000
1910	-0.07909
1921	0.25222
1930	0.31000
1940	0.61000
1950	0.91000
1960	1.33000
1970	1.86000
1980	1.44000
1990	2.00000
1995	1.26000
2000	1.16000

NOTA: 1) Calculada con base en la pendiente entre los puntos

CUADRO 13
POBLACIÓN, PUNTOS MEDIOS Y PENDIENTES EN MÉXICO, 1790-2005

<p style="text-align: center;">AÑO</p>	<p style="text-align: center;">POBLACIÓN</p>	<p style="text-align: center;">PUNTOS MEDIOS DE LA POBLACIÓN</p>	<p style="text-align: center;">PENDIENTES GENERADAS</p>
1790	4.8	4.65	-0.10000
1793	4.5	4.8	0.08571
1800	5.1	5.45	0.23333
1803	5.8	5.7	-0.02857
1810	5.6	5.75	0.03000
1820	5.9	6.15	0.05000
1830	6.4	7.1	0.23333
1836	7.8	7.5	-0.15000
1840	7.2	7.4	0.04000
1850	7.6	7.75	0.07500
1854	7.9	8.1	0.06667
1860	8.3	8.5	0.04000
1870	8.7	9.3	0.12000
1880	9.9	10.4	0.20000
1885	10.9	11.2	0.12000
1890	11.5	12.05	0.22000
1895	12.6	13.1	0.20000
1900	13.6	14.4	0.16000
1910	15.2	14.765	-0.07909
1921	14.33	15.465	0.25222
1930	16.6	18.15	0.31000
1940	19.7	22.75	0.61000
1950	25.8	30.35	0.91000
1960	34.9	41.55	1.33000
1970	48.2	57.5	1.86000
1980	66.8	74	1.44000
1990	81.2	86.2	2.00000
1995	91.2	94.35	1.26000
2000	97.5	100.4	1.16000
2005	103.3		

NOTA: Calculadas con base en (3.1)

CUADRO 14
PENDIENTES GENERADAS Y PUNTOS MEDIOS DE LA
POBLACIÓN DE MÉXICO, 1910-2005

PUNTOS MEDIOS DE LA POBLACIÓN	PENDIENTES GENERADAS
14.765	-0.0791
15.465	0.2522
18.15	0.3100
22.75	0.6100
30.35	0.9100
41.55	1.3300
57.5	1.8600
74	1.4400
86.2	2.0000
94.35	1.2600
100.4	1.1600

NOTA: Calculadas con base en (3.1)

CUADRO 15
TRANSFORMADA DE LA POBLACIÓN DE MÉXICO SEGÚN MODELO
DE GAUSS Y EL TIEMPO, 1910-2005

AÑO	TIEMPO	TRANSFORMADA DE LA POBLACIÓN SEGÚN MODELO DE GAUSS
1910	1	0.52748
1921	12	-0.19278
1930	21	1.12968
1940	31	1.82369
1950	41	2.50917
1960	51	3.06314
1970	61	3.54659
1980	71	3.97584
1990	81	4.21501
1995	86	4.35279
2000	91	4.43075
2005	96	4.49753

NOTA: Calculada con base en (3.4)

CUADRO 16
TRANSFORMADA DE LA POBLACIÓN DE MÉXICO SEGÚN MODELO
LOGÍSTICO Y EL TIEMPO, 1910-2005

AÑO	TIEMPO	TRANSFORMADA DE LA POBLACIÓN SEGÚN MODELO LOGÍSTICO
1910	1	4.15120
1921	12	4.87951
1930	21	3.53591
1940	31	2.81228
1950	41	2.06583
1960	51	1.41338
1970	61	0.76593
1980	71	0.05002
1990	81	-0.48623
1995	86	-0.89874
2000	91	-1.19884
2005	96	-1.52568

NOTA: Calculada con base en (3.5)

CUADRO 17
RESIDUALES DE LA POBLACIÓN MEXICANA
CON RESPECTO DEL TIEMPO

TIEMPO	RESIDUAL
1	0.81374
12	-1.00014
21	-0.19489
31	-0.05447
41	0.71406
51	0.84103
61	0.63794
71	1.99077
81	-1.55460
86	0.37769
91	-0.35161
96	-0.41866

NOTA: Calculados con base las observaciones y las estimaciones
 Obtenidas con base en el modelo

CUADRO 18
 AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUALES DE LA
 POBLACIÓN MEXICANA SEGÚN REZAGO

REZAGO	AUTOCORRELACIÓN
1	-0.21675
2	0.15493
3	-0.11188
4	-0.30986
5	-0.08955
6	-0.19515
7	0.29211
8	-0.11173
9	0.09356
10	0.03252
11	-0.03821

NOTA: Calculados con el paquete Interactive Time Series Modelling (ITSM)

CUADRO 19
 AUTOCORRELACIONES PARCIALES DE LOS RESIDUALES DE LA
 POBLACIÓN MEXICANA SEGÚN REZAGO

REZAGO	AUTOCORRELACION PARCIAL
1	-0.21675
2	0.11327
3	-0.06117
4	-0.38363
5	-0.25168
6	-0.24990
7	0.19006
8	-0.14399
9	-0.27569
10	-0.16558
11	0.04451

NOTA: Calculados con el paquete Interactive Time Series Modelling (ITSM)

CUADRO 20
POBLACIÓN DE MÉXICO OBSERVADA Y ESTIMADA, 1910-2030

AÑO	POBLACIÓN OBSERVADA	POBLACIÓN ESTIMADA
1910	15.2	14.3863
1921	14.33	15.3301
1930	16.6	16.7949
1940	19.7	19.7545
1950	25.8	25.0859
1960	34.9	34.0590
1970	48.2	47.5621
1980	66.8	64.8092
1990	81.2	82.7546
1995	91.2	90.8223
2000	97.5	97.8516
2005	103.3	103.7187
2006		104.7523
2007		105.7406
2008		106.6844
2009		107.5847
2010		108.4426
2011		109.2591
2012		110.0355
2013		110.7731
2014		111.4732
2015		112.1371
2016		112.7661
2017		113.3617
2018		113.9252
2019		114.4580
2020		114.9614
2021		115.4367
2022		115.8853
2023		116.3084
2024		116.7072
2025		117.0830
2026		117.4370
2027		117.7702
2028		118.0837
2029		118.3787
2030		118.6560

NOTA: Estimada con base en (3.8)

CUADRO 21
POBLACIÓN DE MÉXICO SEGÚN CONAPO Y ESTIMADA POR EL MODELO
ESTABLE-ACOTADO, 1910-2030

AÑO	CONAPO ¹	MODELO ²
2006	104.8743	104.7523
2007	105.7907	105.7406
2008	106.6825	106.6844
2009	107.5507	107.5847
2010	108.3962	108.4426
2011	109.2199	109.2591
2012	110.0226	110.0355
2013	110.8046	110.7731
2014	111.5668	111.4732
2015	112.3103	112.1371
2016	113.0368	112.7661
2017	113.7464	113.3617
2018	114.4376	113.9252
2019	115.1095	114.4580
2020	115.7623	114.9614
2021	116.3956	115.4367
2022	117.0074	115.8853
2023	117.5955	116.3084
2024	118.1577	116.7072
2025	118.6930	117.0830
2026	119.2003	117.4370
2027	119.6787	117.7702
2028	120.1269	118.0837
2029	120.5438	118.3787
2030	120.9281	118.6560

FUENTE: 1) Sitio Web del CONAPO; 2) Calculada con base en (3.8)

Sintaxis modelo exponencial con error auto-regresivo

Nota. Para ejecutar este programa se necesita insertar en el archivo "Untitled-SPSS Data Editor" en el primer registro en la primera variable un número.

```
SET MXLOOP=5000.
```

```
Vector
```

```
Ur (90 f4.3)
```

```
/Er (91 f4.3).
```

```
compute n=90.
```

```
compute er(1)=normal(1).
```

```
Loop i=1 to n.
```

```
    compute ur(i)=normal(0.25).
```

```
    compute er(i+1)=0.7*er(i)+ur(i).
```

```
end loop.
```

*generando datos de exponencial más ruido autoregresivo.

```
Matrix.
```

```
Loop #m=1 to 5000.
```

```
get n
```

```
/variables n.
```

```
get er
```

```
/ variables er1 to er91.
```

```
get ur
```

```
/variables ur1 to ur90.
```

```
compute aleato=UNIFORM(1,n).
```

```
compute aleato2=UNIFORM(1,n+1).
```

```
compute ur=ur+aleato.
```

```
compute er=er+aleato2.
```

```
Compute Datos=Make(1,n,0).
```

```
Compute Time=Make(1,n,0).
```

```
Loop i=1 to n.
```

```
    compute Datos(i)=(371*Exp(-0.11*i)+2.5)+er(i+1).
```

```
    compute time(i)=i.
```

```
End loop.
```

```
compute Deriva=make(n-1,1,0).
```

```
Compute Datpm=make(n-1,1,0).
```

```

Loop i=1 to n-1.
    compute Deriva(i)=(Datos(i+1)-Datos(i)).
    compute DatPM(i)=Datos(i)+((Datos(i+1)-Datos(i))/2).
*    compute DatPM(i)=Datos (i).
End loop.
*Save {datos} /outfile=*
*/variables v1 to v90.

```

```

compute XX=make(n-1,2,1).
Loop i=1 to n-1.
    compute XX(i,2)=DatPM(i).
    End loop.
compute TXX=T(XX).
compute TTXX=TXX*XX.
compute IITXX=Inv(TTXX).
compute betas=IITXX*TXX*Deriva.
compute k=-betas(1)/betas(2).

```

*****CALCULO TETA1 Y TETA2 por minimos cuadrados*****.

```

*Calculando transformada de y.
compute lny=make(20,1,0).
Loop i=1 to 20.
    compute lny(i)=ln(datos(i)-k).
End loop.
compute tt=make(20,2,1).
Loop i=1 to 20.
    compute tt(i,2)=i.
    End loop.
compute Ttt=T(tt).
compute TTtt=Ttt*tt.
compute IITtt=Inv(TTtt).
compute betas=IITtt*Ttt*lny.
compute tetas=T(betas).
compute teta2=exp(tetas(1)).
compute teta1=tetas(2).

```

*****TERMINA CALCULO DE parametros teta1 y teta2 por mínimos cuadrados*****.

*****CALCULO DE RESIDUALES*****.

```

compute norma=.06.

Loop if (norma>.000000001).
***Calcula residuales***.
compute esti=Make(1,n,0).
compute res=Make(n,1,0).
Loop i=1 to n.
    compute esti(i)=teta2*Exp(teta1*i)+k.
    compute res(i)=Datos(i)-esti(i).
End loop.
*****TERMINA CALCULO DE
RESIDUALES*****.
*****ESTIMANDO PARAMETROS DEL PROCESO AR(1)*****.
compute resm1=Make(n,1,0).
Loop i=1 to n-1.
    compute resm1(i)=res(i+1).
End loop.

compute Tres=T(res).
compute fitfi=tres*res.
compute inversa=Inv(fitfi).
compute beta1=inversa*tres*resm1.
compute ertest=make(n,1,0).
compute ertest(1)=res(1).

Loop i=1 to n-1.
    compute ertest(i+1)=beta1*ertest(i).
End Loop.
compute var=ertest-res.
compute tvar=T(var).
compute var=tvar*var.
compute var=var/(n-1).

*TERMINA ESTIMACIÓN DE PARAMETROS DEL AR(1)*****.
*****CALCULA ESTIMADORES DE TETA1 Y TETA2 M.C.
GENERALIZADOS*****.
***Calcula matriz de varianzas-covarianzas y su inversa.
Compute Varcov=Make(20,20,0).
Loop i=1 to 20.
    Loop j=i to 20.
        compute Varcov(j,i)=(1/(1-beta1))*var*beta1**(j-i).
        compute Varcov(i,j)=(1/(1-beta1))*var*beta1**(j-i).
    End loop.
End loop.
Compute V=Inv(Varcov).

```

```

*****
*.
****Calcula la matriz de datos y su transpuesta.
Compute X=Make(20,2,1).
Loop i=1 to 20.
    compute X(i,2)=i.
End loop.
Compute TX=T(X).

*****
*.
****Calcula los estimadores m.c. generalizados de teta1 y teta2.
Compute XV=TX * V * X.
Compute INVXV=Inv(XV).
Compute Tetas=INVXV * TX * V * lny.
Compute Tetas(1)=exp(Tetas(1)).
Compute Tetas={tetas;k}.
compute norma=SQRT((tetas(2)-teta1)**2+(tetas(1)-teta2)**2).
Compute teta1=tetas(2).
Compute teta2=tetas(1).
compute tetas=T(tetas).
End loop.

write {tetas} /Outfile='d:\prueba.sav'
/ Field=1 to 32
/ Format 'F10.6'.

End loop.

End matrix.

```

Sintaxis modelo exponencial con error normal

Nota. Para ejecutar este programa se necesita insertar en el archivo "Untitled-SPSS Data Editor" números consecutivos del 1 al 5000.

Vector

```
Datos (110 f6.2)
/DatPM (110 f6.2)
/Deriva (110 f4.2)
/Lny (110 f3.2)
/Time (110 f3.2).
```

*Generando datos mas ruido.

```
Compute n=110.
compute i=1.
Loop i=1 to n.
    compute Datos(i)=371*Exp(-0.11*i)+3+Normal(0.4).
    compute Time(i)=i.
End loop.
```

*Calculando derivadas.

```
Compute i=1.
compute w=n-1.
Loop i=1 to w.
    compute Deriva(i)=(Datos(i+1)-Datos(i)).
    compute DatPM(i)=Datos(i)+((Datos(i+1)-Datos(i))/2).
End loop.
```

*Calcula sumas y medias de datos y derivadas.

```
Compute i=1.
Compute sumdat=0.
compute sumder=0.
Loop i=1 to w.
    Compute sumdat=sumdat+DatPM(i).
    Compute sumder=sumder+Deriva(i).
End loop.
```

```
compute mediadat=sumdat/w.
compute mediader=sumder/w.
```

*calculando alfa y beta.

```

compute i=1.
compute sumxy=0.
compute sumX2=0.
Loop i=1 to w.
    compute sumxy=sumxy+(DatPM(i)-mediadat)*(Deriva(i)-mediader).
    compute sumX2=sumX2+(DatPM(i)-mediadat)*(DatPM(i)-mediadat).
end loop.

```

```

compute beta=sumxy/sumX2.
compute alfa=mediader-beta*mediadat.

```

*Calculando la raiz.

```

    compute k=-alfa/beta.

```

*Calculando transformada de y.

```

compute entre=0.
compute m=0.
compute i=1.
Loop i=1 to n.
    Do if (datos(i)>k).
        compute m=m+1.
        compute lny(i)=ln(datos(i)-k).
    End if.
    Do if (datos(i)<k).
        compute entre=1.
    End if.
End loop if (entre=1).

```

```

compute i=1.
compute sumat=0.
compute sumay=0.
Loop i=1 to m.
    compute sumat=sumat+time(i).
    Compute sumay=sumay+lny(i).
end loop.

```

```

compute mediat=sumat/m.
compute mediay=sumay/m.

```

*calculando alfa y beta.

```

compute i=1.

```

```

compute sumty=0.
compute sumt2=0.
Loop i=1 to m.
    compute sumty=sumty+(time(i)-mediat)*(lny(i)-mediay).
    compute sumt2=sumt2+(time(i)-mediat)*(time(i)-mediat).
end loop.

compute beta=sumty/sumt2.
compute alfa=mediay-beta*mediat.
compute alfa=exp(alfa).

****TERMINA CALCULO DE ALFA Y BETA*****.

compute ECMk1=(3-k)*(3-k).
compute ECMbet=(-0.11-beta)*(-0.11-beta).
compute ECMalf=(371-alfa)*(371-alfa).

```

Resultados de la simulación para el caso de diez mil repeticiones

CUADRO 1
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA COTA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR NORMAL, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	3.0093	0.7177	3.0006	0.0134	2.9985	0.0074
2	15	14.74	35.38	15.003	0.2572	14.99	0.1041
3	532	535.48	670.98	532.05	0.7439	532.02	0.2815

CUADRO 2
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA COTA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	3.43	0.5529	3.13	0.0247	2.929	0.0089
2	15	15.77	18.26	15.26	0.2024	14.74	0.1213
3	532	539.35	170.37	532.3	0.4755	531.16	0.3081

CUADRO 3
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR NORMAL, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros α y β verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	371	371.02	0.2566	371.03	1.4873	371.01	1.4165
	-0.11	-0.11	0.0000	-0.11	0.0000	-0.111	0.0000
2	325	325.26	30.23	325.03	0.5217	325.01	0.4137
	-0.04	-0.04	0.0000	-0.04	0.0000	-0.04	0.0000
3	-56	-59.5	659.25	-56.08	0.0908	-56.05	0.0778
	-0.03	-0.0302	0.0001	-0.03	0.0000	-0.03	0.0000

CUADRO 4
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS EXPONENCIALES CON ERROR AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros α y β verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	371	371.08	0.9825	370.03	1.1157	369.94	1.3336
	-0.11	-0.1104	0.0000	-0.1101	0.0000	-0.1099	0.0000
2	325	321.68	26.108	323.97	1.1706	324.44	0.3690
	-0.04	-0.0405	0.0000	-0.0399	0.0000	-0.0399	0.0000
3	-56	-64.02	174.98	-57.05	0.3373	-56.35	0.2047
	-0.03	-0.0272	0.0000	-0.0305	0.0000	-0.0311	0.0000

CUADRO 5
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA
COTA DE LOS MODELOS LOGISTICOS CON ERROR NORMAL, SEGÚN
NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Cota inferior y superior verdaderas	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	2.5927	21.36	2.9965	0.0218	2.9953	0.0101
	280	284.28	765.21	280.67	72.80	280.69	66.27
2	15	29.14	213.11	14.82	0.7749	14.94	0.1051
	35	37.43	4999.15	35.15	0.6466	35.11	0.4276
3	15	15.81	1.6386	14.99	0.0848	14.99	0.0276
	135	145.34	5687.17	135.008	0.0987	135.002	0.0213

CUADRO 6
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA
COTA DE LOS MODELOS LOGISTICOS CON ERROR AUTO-REGRESIVO, SEGÚN
NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Cota inferior y superior verdaderas	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	4.44	11.46	3.11	0.0237	2.86	0.0263
	280	275.4	312.9	279.3	37.856	281.79	40.0089
2	15	30.38	681.71	15.72	0.7217	14.65	0.1663
	35	33.49	28.51	33.93	1.2857	34.3	0.6384
3	15	14.530	2.3104	14.23	0.6469	14.3812	0.4241
	135	132.23	5644.46	135.49	0.2956	134.83	0.0385

CUADRO 7
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS LOGÍSTICOS CON ERROR
NORMAL, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros a y b verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.2116	-0.2116	0.0271	-0.2088	0.0033	-0.2084	0.0029
	0.1079	0.1079	0.0000	0.1079	0.0000	0.1079	0.0000
2	-2.6849	-2.556	2.1086	-2.6985	0.1977	-2.6959	0.1495
	0.0735	0.15	0.5233	0.0681	0.0121	0.0707	0.0063
3	4	3.71	0.9599	4.0096	0.0065	4.0084	0.0055
	-0.11	-0.1507	0.0931	-0.1105	0.0000	-0.1105	0.0000

CUADRO 8
PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS LOGÍSTICOS CON ERROR
AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros a y b verdaderos	Número de observaciones					
		20		70		90	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.2116	-0.2351	0.0137	-0.2036	0.0020	-0.1864	0.0024
	0.1079	0.1103	0.0000	0.1077	0.0000	0.1069	0.0000
2	-2.6849	-2.5709	1.0573	-3.1073	0.2454	-2.9475	0.1030
	0.0735	0.2700	0.0726	0.0839	0.0002	0.0777	0.0000
3	4	3.961	0.0892	3.9367	0.0053	3.9043	0.0215
	-0.11	-0.1198	0.0003	-0.1084	0.0477	-0.1056	0.0467

CUADRO 9
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA
 COTA DE LOS MODELOS GAUSSIANOS CON ERROR NORMAL, SEGÚN
 NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	1.91	12.89	2.5647	0.2069	2.9683	0.0055
2	15	33.0269	206.68	15.91	0.9041	14.9151	0.0163
3	6.5	24.9648	431.61	6.9913	0.3131	6.9107	0.2541

CUADRO 10
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LA
 COTA DE LOS MODELOS GAUSSIANOS CON ERROR AUTO-REGRESIVO, SEGÚN
 NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetro k verdadero	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	3	4.355	14.73	2.5095	0.2442	2.7631	0.0570
2	15	31.1579	262.38	15.3946	0.1537	15.2499	0.1450
3	6.5	35.9679	907.18	7.0326	0.3664	7.25	0.6450

CUADRO 11
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
 PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS GAUSSIANOS CON ERROR
 NORMAL, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros a , b y c verdaderos	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.001	-0.00096	0.0000	-0.001	0.0000	-0.001	0.0000
	-0.05	-0.0499	0.0000	-0.0505	0.0000	-0.05	0.0000
	5	5.0076	0.0007	5.0049	0.0001	5.0004	0.0001
2	-0.0005	-0.0002	0.0001	-0.0005	0.0000	-0.0005	0.0000
	-0.001	-0.0281	0.0101	-0.0008	0.0000	0.0011	0.0000
	3	0.5903	2.3115	2.9516	0.0030	3.0041	0.0005
3	-0.00025	-0.0021	0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0003	0.0000
	-0.0245	-0.0232	0.0002	-0.0246	0.0000	-0.0246	0.0000
	4	3.5223	0.3003	3.9921	0.0002	3.9907	0.0002

CUADRO 12
 PROMEDIO Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS
 PARÁMETROS DE LA FORMA DE LOS MODELOS GAUSSIANOS CON ERROR
 AUTO-REGRESIVO, SEGÚN NÚMERO DE OBSERVACIONES Y PARÁMETRO VERDADERO

Modelo	Parámetros a , b y c verdaderos	Número de observaciones					
		20		110		210	
		Promedio	ECM	Promedio	ECM	Promedio	ECM
1	-0.001	-0.00106	0.0000	-0.00094	0.0000	-0.00095	0.0000
	-0.05	-0.0503	0.0000	-0.0506	0.0000	-0.05058	0.0000
	5	4.9858	0.0011	5.0006	0.0000	4.9986	0.0000
2	-0.0005	-0.0981	0.0102	-0.0032	0.0000	-0.00074	0.0000
	-0.001	-0.3587	0.3680	-0.2020	0.0635	-0.00754	0.0056
	3	1.3513	2.8557	2.7351	5.1466	2.8728	0.0168
3	-0.00025	-0.0856	0.0096	-0.00316	0.0000	-0.00019	0.0000
	-0.0245	-1.1473	1.8597	-0.1878	0.0451	-0.02512	0.0000
	4	1.8127	5.5655	3.7532	0.0610	3.9839	0.0003

BIBLIOGRAFÍA

- Beaumont R. A. y Pierce R.S. (1963). *The Algebraic Foundations of Mathematics*, Adison-Wesley Publishing Company, Inc. London.
- Bodenheimer F. S. (1938). *Problems of Animal Ecology*. Londres: Oxford University Press.
- Boyce J. B. (1946). *The Influence of Fecundity and Egg Mortality on the Population Growth of Tribolium confusum Duval*. Ecology, 27: 290-302.
- Brownlee R.G. (1965). *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*. Ed, Wiley. New York.
- Box E.P.G y Jenkins M.G. (1970). *Time series Analysis: forecasting and control*. Library of Congress. San Francisco, California
- Chatfield C. (1975). *The analysis of Time Series: theory and practice*. John Wiley and Sons. New York.
- Chapman R. N. (1928). *The Quantitative Analysis of Enviroment Efects*. Ecology, 9:111-122.
- Colinvaux A. P. (1980). *Introducción a la Ecología*. Editorial Limusa. México.
- CONAPO (2006). Oportunidades y retos de la política nacional de población en el siglo XXI. México.

Demografía de Canadá. En

http://campusvirtual.unex.es/cala/epistemowikia/index.php?Title=Demografia_de_Canada. Consultado el día 23 de mayo de 2010.

Demografía de Japón. En [http://es.wikipedia.org/wiki/demograf%C3%Ada del Jap%C3%B3n#Evoluci.C3.B3n_hist.C3:B3rica](http://es.wikipedia.org/wiki/demograf%C3%Ada_del_Jap%C3%B3n#Evoluci.C3.B3n_hist.C3:B3rica). Consultado el día 10 de mayo de 2010.

Demografía de Los Estados Unidos. En

[http://es.wikipedia.org/wiki/demograf%C3%Ada de los Estados Unidos#Poblaci.C3.b3n](http://es.wikipedia.org/wiki/demograf%C3%Ada_de_los_Estados_Unidos#Poblaci.C3.b3n). Consultado el día 13 de abril de 2010.

Draper N. R. y Smith H. (1981). *Applied Regression Analysis*. John Wiley & Sons. New York.

Farnum N.R. y Stanton L.W. (1989). *Quantitative Forecasting Methods*. PWS-Kent Publishing Company. Boston

Fuller W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons. New York.

Gause G. F. (1934). *The Struggle for Existence*. Baltimore: Williams and Wolkins p.163.

Gilchrist W. (1976). *Statistical Forecasting*. Wiley. New York.

- González-Rosas J, (1988). *Modelo Matemático para Estimar la Fecundidad en México*. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. Tesis de Licenciatura. México.
- Haupt A. y Kane T. (2001). *Manual sobre la Población*. Population Reference Bureau, 4ª edición internacional, Washington DC. EE. UU.
- INEGI (1999). *Estadísticas Históricas de México, Tomo I*. México.
- Johnston J. (1972). *Econometric Methods*. McGraw Hill. Tokyo.
- Keyfitz N. (1979). *Introducción a las Matemáticas Aplicadas de Población*, Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile.
- Kreider D. L., Kuller R. G, y Osterberg D. R. (1973). *Ecuaciones Diferenciales*. Fondo Educativo Interamericano S. A. Bogotá.
- La población de México: tendencias y perspectivas sociodemográficas hacia el siglo XXI*. (2001). Coordinadores Gómez de León Cruces J. y Rabell Romero C. Consejo Nacional de Población. Fondo de Cultura Económica. México, pp. 1043.
- Lehman H. CH. (2000). *Geometría Analítica*. Limusa Noriega Editores. México.
- Ley General de Población (1974). Poder Ejecutivo. Publicación en el Diario Oficial de la Federación el 7 de enero de 1974.
- Logistic Function. En http://en.wikipedia.org/Logistic_function. Consultado en mayo de 2010.

- Lotka A. (1939). *Théorie analytique des associations biologiques*. Part II. *Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 780. Paris: Herman et Cie.
- Medhi J. (1981). *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons. New York.
- Montgomery C.D. y Peck E.A. (1982). *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons. New York.
- Organización Panamericana de la Salud (1995). *Clasificación Estadística Internacional de Enfermedades y Problemas Relacionados con la Salud: CIE-10*, décima revisión, volumen 1. Publicación Científica no. 554, primera reimpresión 1996. Venezuela.
- Partida B. V. (2006). *Proyecciones de la Población de México 2005-2050*. CONAPO. México.
- Pearl R. y S. L. Parker (1922). *Experimental Studies on the Duration of Life, IV. Data on the Influence of Density of Population on Duration of Life in Drosophila*, *American Naturalist*, 56:312-322. Mencionado en Colinvaux (1980).
- Población y desarrollo de China. Por Tiam Xueyuan y Zhou Liping. En <http://www.edu.mec.gub.uy/China/population.pdf>. Consultado el 24 de mayo de 2010.

- Poder Ejecutivo Federal. (1995). *Programa de Salud Reproductiva y Planificación Familiar 1995-2000*, Secretaría de Salud. Programa de Reforma del Sector Salud. Dirección General de Salud Reproductiva. México.
- Pressat R. (2000). *El Análisis Demográfico: métodos, resultados, aplicaciones*. Fondo de Cultura Económica. México.
- Programa Nacional de Población 1989-1994*. Consejo Nacional de Población. Publicado en el Diario Oficial de la Federación. Abril de 1991. ISBN-968-805-478-X.
- Ramírez-Bonilla J.J. (2004), *México y Corea: Dinámicas Poblacionales y Envejecimiento de la Población*. Conferencia dictada en la Secretaría General del CONAPO. Febrero de 2004.
- Rich E. R. (1956). *Egg Cannibalism and Fecundity in Tribolium*. Ecology 37:109-120.
- Robertson F. W. y Sang J. H. (1944). The Ecological Determinants of Population Growth in a Drosophila Culture. II: Circumstances Affecting Egg Viability. Proceedings of the Royal Society of London (B). 132:258-277.
- Ross S. L (1982). *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*. McGraw Hill. México.
- Secretaría de Salud (2001). *Programa Nacional de Salud 2001-2006: La democratización de la salud en México: Hacia un sistema universal de salud*. México.

Secretaría de Salud (2002). *Programa de Acción: Arranque Parejo en la Vida*.
Subsecretaría de Prevención y Protección de la Salud. Dirección
General de Salud Reproductiva. México.

UNICEF (1997). *The state of the world's children 1997*. Oxford University Press.
Toronto.

Wylie C. R. (1979). *Differential Equations*. McGraw Hill Inc. Tokyo.