Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias

Linealizaciones de acciones propias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Ciencias

PRESENTA

M. en C. Leonardo Rodríguez Medina

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergey Antonyan

México, D.F. Septiembre de 2010

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Linealizaciones de acciones propias

Leonardo Rodríguez Medina

Director de tesis

Dr. Sergey Antonyan

25 de agosto de 2010

México D.F.

Índice general

Introducción

Entre la amplia variedad de enfoques con los que se estudian los *grupos topológicos de transformaciones* el nuestro es el siguiente. Dado un grupo topológico G, consideramos aquellos espacios topológicos en donde G actúa continuamente junto con las funciones continuas que preservan la acción de G. Si el espacio tiene además una estructura métrica o lineal compatible con la topología, pediremos que la acción de G esté dada mediante isometrías o transformaciones lineales respectivamente.

Brevemente, un G-*espacio* es un espacio topológico X junto con una *acción* continua $G \times X \xrightarrow{\cdot} X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x = gx$. Esto es, que satisface

i) $ex = x$;

ii) $g(hx) = (gh)x$

para toda $x \in X$ y cualesquiera $g, h \in G$. Aquí, $e \in G$ denota al elemento neutro. Una función continua $f : X \to Y$ entre G-espacios X y Y es *equivariante* si

$$f(gx) = gf(x)$$

para toda $x \in X$ y toda $g \in G$.

Si denotamos por $\mathcal{TOP}$ a la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas, el resultado de este enfoque es la categoría G-$\mathcal{TOP}$, de los G-espacios y sus funciones equivariantes. En un sentido, esta categoría es "paralela" a la categoría usual $\mathcal{TOP}$. De hecho, el estudio de los grupos de transfomaciones generaliza aquel de los espacios topológicos, pues en el caso particular de $G = \{e\}$, la categoría G-$\mathcal{TOP}$ es canónicamente isomorfa a $\mathcal{TOP}$. De esta manera, surge el problema de entender cuales nociones y problemas clásicos de la topología tienen sentido y relevancia en su versión simétrica o equivariante. En este contexto, el problema de *linealización de acciones* busca encontrar, para un G-espacio dado X, un G*-espacio lineal* L junto con un encaje equivariante $X \hookrightarrow L$. Donde entendemos por G-espacio lineal un G-espacio con estructura de espacio topológico vectorial y donde cada g*-traslación* inducida $v \mapsto gv$, es en realidad un operador lineal de L en si mismo.

Por su parte, la *teoría equivariante de retractos* tiene por objeto extender y comprender mejor aquellos problemas y resultados propuestos en la teoría de retractos usual. Se trabaja entonces con las reformulaciones naturales de retractos y extensión de funciones equivariantes entre G-espacios. Se consideran así las versiones equivariantes de proposiciones relativas a la teoría clásica, como la existencia de retracciones entre espacios o la caracterización de *extensores absolutos* (AE), *extensores de vecindad absolutos* (ANE), *retractos absolutos* (AR) o *retractos de vecindad absolutos* (ANR). Las nociones equivariantes de estos conceptos se denotan por G-AE, G-ANE, G-AR y G-ANR respectivamente. Desde la perspectiva aquí presentada, la teoría equivariante de retractos queda inscrita en el estudio de los grupos topológicos de transformaciones y la teoría de retractos.

Uno de los objetivos de nuestra investigación es entonces obtener como espacios ambiente de los encajes equivariantes, G-extensores absolutos. Este hecho nos servirá además para obtener la versión equivariante de la bien conocida equivalencia entre un AE (o un ANE) y un AR (o un ANR respectivamente). La propuesta sin embargo, va más allá de la Teoría equivariante de retractos. Así como en el caso no equivariante, los encajes en espacios vectoriales son de importancia intrínseca, independientemente de su conexión con la teoría de retractos.

Antecedentes

La larga tradición en el estudio de los Grupos topológicos de transformaciones y de la Teoría equivariante de retractos, nos proveé de resultados íntimamente relacionados con los propuestos en este trabajo.

En 1957 R. S. Palais [36] y G. D. Mostow [32] obtuvieron de manera independiente, linealizaciones equivariantes en espacios euclidianos (con una acción ortogonal) cuando el grupo actuante G es un **grupo compacto de Lie**.

Mientras que Palais consideró solamente variedades diferenciables compactas, Mostow desarrolló la técnica para G-espacios de Tychonoff arbritrarios. El resultado se resume como sigue. *Un G-espacio admite un encaje equivariante en un G-espacio euclidiano si y sólo si es métrizable, separable, de dimensión finita y tiene un número finito de tipos orbitales.*

De acuerdo a la generelazación de A. Gleason [34, 1.4.3] del Teorema de extensión de Tietze, *todo G-espacio euclidiano es un G-AE*. En 1982, J. Jaworowski [23] extendió este resultado sobre la hipótesis de que el G-espacio tiene un *estructura orbital finita* en vez de la dimensión finita. El encaje se realiza entonces en un producto $E \times T$ donde E es un G-espacio euclidiano y T es un espacio de Banach separable provisto de la acción trivial de G.

Tanto en las demostraciones originales por Palais [36] y Mostow [32], como en la simplificación dada por el mismo Palais [34, 1.8.4] de este encaje así como en la construccuión de Jaworowski, la noción e importancia del uso de las llamadas *rebanadas* se hace patente. Sucintamente, dado un subgrupo cerrado H de G, un subconjunto S de un G-espacio X se llama H-rebanada si:

i) $G(S) = \{gs \mid g \in G,\ s \in S\}$ es abierto en X y;

ii) hay una función equivariante $f : G(S) \to G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$.

La construcción del encaje se reduce en última instancia al siguiente hecho. *Dada una H-rebanada S en el G-espacio X, si S admite un encaje equivariante en un H-espacio euclidiano, entonces $G(S)$ admite un encaje equivariante en un G-espacio euclidiano.*

Con el fin de extender la teoría desarrollada hasta entonces al caso de grupos no necesariamente compactos, en 1961 Palais [35] introdujo la noción de *acción propia* para un grupo G *localmente compacto*. Diremos que un G-espacio X es propio en el sentido de Palais, si cada $x \in X$ tiene una vecindad V_x, llamada *pequeña*, para la cual cada $y \in X$ tiene una vecindad V_y tal que el conjunto

$$\langle V_x, V_y \rangle = \{g \in G \mid gV_x \cap V_y \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en G.

Las acciones propias constituyen una efectiva generalización de las acciones de grupos compactos. Sus consecuencias son usadas ampliamente en la mayoría de los resultados aquí obtenidos. Algunas de estas consecuencias son por ejemplo:

- Para cada $x \in X$, la *órbita* $G(x) = \{gx \in X \mid g \in G\}$ es un subconjunto cerrado de X.
- Para cada $x \in X$, el *subgrupo estabilizador* $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ es un subgrupo compacto de G.

Palais [35] demostró la existencia de G_x-rebanadas en G-espacios propios siempre y cuando el grupo actuante G sea un **grupo de Lie no necesariamente compacto**. Esto a su vez le permitió usar los resultados previos para grupos compactos de Lie y en el mismo trabajo demostró que, *un G-espacio propio, métrizable y separable admite un encaje equivariante en un G-espacio de Hilbert*. Más aún, si G es un **grupo de matrices**, i.e., si admite una representación lineal, continua y fiel en un espacio euclideano, entonces *si el G-espacio tiene dimensión finita y estructura orbital finita, el encaje tiene lugar en un G-espacio euclidiano.*

Como tal, el problema de linealización equivariante fue resuelto para **grupos localmente compactos** por J. de Vries [40] en 1975 y Y. M. Smirnov [37] en 1976 de forma independiente. A saber, *cada G-espacio de Tychonoff admite un encaje equivariante en un G-espacio lineal y localmente convexo*. En un caso más amplio, S. Antonyan [6] demostró que para un **grupo topológico arbitrario** G, *si un G-espacio admite una métrica invariante, entonces admite una linealización equivariante en un G-espacio de Banach y la imagen es cerrada en su envoltura convexa* (versión equivariante del encaje de Kuratowski-Wodyslawski). Mencionamos también que de acuerdo a un ejemplo de M. G. Megrelishvili [30] en general, *no todo G-espacio es G-linealizable.*

En el marco de las acciones propias de un grupo localmente compacto G, nos interesa entonces que, dado un G-espacio propio X, el espacio ambiente L de la linealización $X \hookrightarrow L$ sea también un **G-espacio propio**. Sin embargo, esto es imposible cuando G no es compacto, pues dado que el grupo G actúa en L mediante operadores lineales, el vector cero $0 \in L$ permanece *fijo*, i.e. $G_0 = G$ y como hemos mencionado, las acciones propias tienen estabizadores compactos. De este modo, la parte más grande de L en donde G podría actuar propiamente es el complemento $L \setminus \{0\}$.

Los resultados de Palais [35, Teoremas 4.3.3 y 4.4.3] sin embargo, no toman en cuenta la condición de tener como ambiente del encaje un G-espacio propio. En 1996 E. Elfving [18, 3.11] obtuvo, bajo el supuesto que G es un **grupo de Lie lineal**, i.e., isomorfo a un subgrupo cerrado de un grupo $GL(n)$, el siguiente resultado: *Un G-espacio propio, metrizable, separable, localmente compacto, de dimensión finita y con estructura orbital finita, admite un encaje equivariante cerrado en un G-espacio euclidiano cuya imagen tiene una vecindad invariante donde G actúa propiamente.* El mismo Elfving [19] amplió el resultado para el caso en que G es un **grupo de Lie** y la acción es *localmente lineal* sobre una G-variedad. En este caso, el espacio ambiente de la linealización es un G-espacio de Banach B y la imagen está contenida en un G-subespacio propio y convexo C de B. Recientemente (2007), A. Feragen [20] demostró el mismo resultado para G-espacios propios que admiten una métrica invariante. Por la generalización equivariante del teorema de Dugundji debida a Antonyan [8], C resulta ser un G-ANE.

Resultados principales y estructura de la tesis

El trabajo que presentamos está dividido en tres capítulos principales y uno de discusión. En el Capítulo 1 se establecen los conceptos básicos de la teoría: definiciones, propiedades y algunos ejemplos de acciones lineales y acciones propias. Abordamos el problema de metrizabilidad equivariante, el encaje de Smirnov y el contraejemplo de Megrelishvili. Se introduce también la noción de retracto equivariante y se da cuenta del teorema de la rebanada aproximativa, que juega un papel fundamental en las construcciones de los encajes presentados (y en buena parte de la teoría de acciones propias).

En el Capítulo 2 por su parte, desarrollamos las herramientas que nos permitirán construir los espacios lineales de las linealizaciones. Entre ellas, la completación de ciertos G-espacios lineales, el llamado *σ_1-producto*. Se introduce la noción de función *G-uniforme* y un criterio sobre extensores equivariantes para G-espacios propios. Este criterio se tiene gracias a un resultado recientemente generalizado por Antonyan [10].

Finalmente, en el Capítulo 3 damos soluciones afirmativas para el problema de linealizaciones de acciones propias de un **grupo localmente compacto** G. En primer lugar, consideramos el caso particular de un G-espacio con una H-rebanada *global* para un subgrupo compacto $H \subset G$. Así, se establece en el Teorema 3.4 que *si un G-espacio propio y metrizable X admite una H-rebanada global, existen un G-espacio normado E junto con un encaje equivariante $X \hookrightarrow \mathbb{S}$ donde $\mathbb{S} \subset E$ es la esfera unitaria, y el complemento $E \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.* Posteriormente, extendemos el resultado en el Teorema 3.5, de modo que *cada G-espacio propio que admite una métrica invariante se puede encajar equivariantemente en un G-espacio normado E, donde el complemento $E \setminus \{0\}$ es una G-espacio propio.*

Para atender a la necesidad de la teoría equivariante de retractos modificamos el encaje obteniendo en el Teorema 3.6, espacios ambiente que son H-extensores equivariantes para cada subgrupo cerrado $H \subset G$. A saber, *dado un G-espacio propio X que admite una métrica invariante, existen un G-espacio de Banach L junto con un encaje $X \hookrightarrow L$ donde $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio y un H-*AE. Este encaje se modifica en el Teorema 3.9 para obtener una imagen cerrada. Entre las consecuencias inmediatas de estos hechos se encuentra *la equivalencia de las nociones de extensores y retractos equivariantes para acciones propias*, cuya demostración está en el Corolario 3.10.

En la Sección 3.3, se establece la forma más general de las linealizaciones de acciones propias. Más precisamente, el Teorema 3.12 afirma que *cada G-espacio propio X, admite una G-linealización $X \hookrightarrow L$ donde L es un G-espacio lineal y donde el complemento $L \setminus \{0\}$ es a su vez un G-espacio propio.* Los principales resultados obtenidos de este proyecto de investigación, Teoremas 3.5 3.6 y Corolario 3.10 forman parte del artículo publicado por S. Antonyan, N. Antonyan y L. Rodríguez Medina [4]. La solución general del Teorema 3.12 es núcleo de un manuscrito próximo a ser enviado.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de esta exposición consideraremos solamente espacios topológicos de Tychonoff X, i.e. completamente regulares y de Hausdorff, que en adelante llamaremos simplemente *espacios*. Asumimos también que todas las vecindades son abiertas y denotamos por $\overline{A}$ a la cerradura de A en X.

1.1. Grupos de transformaciones

Definición 1.1. Sea G un espacio con estructura de grupo, diremos que G es un **grupo topológico** si la *división* $\delta : G \times G \to G$,

$$\delta(h, g) = gh^{-1} \tag{1.1}$$

es una función continua.

Ejemplos conocidos de grupos topológicos son:

1. Cualquier grupo visto como un espacio discreto.

2. Cualquier *espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$ o el grupo aditivo de cualquier espacio vectorial normado.

3. Los grupos multiplicativos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. En general, los grupos de matrices no singulares $GL(n, \mathbb{R})$ y $GL(n, \mathbb{C})$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathbb{C}^{n^2}$ respectivamente.

4. Cualquier subgrupo de un grupo topológico es claramente un (sub)grupo topológico.

Definición 1.2. Sea G un grupo topológico. Un **grupo topológico de transformaciones** sobre G es un par (X, θ) donde X es un espacio y $\theta : G \times X \to X$ es una **acción continua**, esto es, θ es una función continua que satisface:

i) $\theta(e, x) = x$;

ii) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$

para toda $x \in X$ y para cualesquiera $g, h \in G$. Aquí, $e \in G$ denota al elemento neutro del grupo.

Para simplificar la notación, la imagen $\theta(g, x)$ se denota usualmente por $g \cdot x$ o simplemente gx. De este manera, las condiciones de una acción son $ex = x$ y $g(hx) = (gh)x$ respectivamente. Al fijar un elemento $g \in G$, este induce una **traslación** continua $\theta_g : X \to X, \; x \mapsto gx$. Es fácil ver entonces que θ_g es invertible y ${\theta_g}^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. Si denotamos por Homeo$(X)$ al grupo de homeomorfismos de X en si mismo, la acción θ es equivalente a un homomorfismo de grupos $\Theta : G \to \text{Homeo}(X)$ donde

$$\Theta(g)(x) = \theta_g(x) = gx \tag{1.2}$$

De hecho, Θ es incluso continua si dotamos a Homeo(X) de la *topología compacto-abierta*, i.e. aquella que tiene como subbase los conjuntos de la forma

$$M(K, U) = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid f(K) \subset U\} \tag{1.3}$$

donde $K \subset X$ es compacto y $U \subset X$ es abierto (ver [33, Prop. 4.1]).

Como ejemplos de grupos topológicos de transformaciones podemos mencionar los siguientes:

1. Un grupo topológico G actúa en sí mismo mediante multiplicación: $(h, g) \mapsto hg$ o con la división δ de (1.1): $(h, g) \mapsto gh^{-1}$.

2. Cualquier subgrupo H de un grupo topológico G convierte a cada G-espacio en un H-espacio restringiendo la acción a $H \times X$.

3. En general, cualquier homomorfismo continuo entre grupos topológicos $\alpha : H \to G$ genera, para un G-espacio (X, θ), el H-espacio (X, η) donde

$$\eta(h, x) = \theta(\alpha(h), x)$$

4. Cualquier grupo topológico G convierte a todo espacio X en un G-espacio bajo la **acción trivial** , i.e. $gx = x$ para toda $g \in G,\ x \in X$.

5. Dados un espacio X y un homeomorfismo $f : X \to X$, el grupo discreto $\mathbb{Z}$ actúa en X mediante la acción $n \cdot x = f^n(x)$.

6. Las rotaciones del plano forman un grupo de transformaciones continuas. En efecto, sean $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ como subgrupo multiplicativo y $e^{i\theta}z$ la multiplicación usual en $\mathbb{C}$ de $e^{i\theta} \in G$ y $z \in X$.

Para un G-espacio X, un subgrupo H de G y un subconjunto A de X, consideraremos los siguientes conjuntos:

a) $H(A) = \{ha \in X \mid h \in H,\ a \in A\}$ es la H**-saturación** de A. Si $A = \{x\}$, $H(x) = H(\{x\})$ es la H**-órbita** de x en X. Si $H = \{h\}$, cambiamos $H(A)$ por hA.

b) $H_A = \{h \in H \mid hA = A\}$ es el H**-estabilizador** de A. Si $A = \{x\}$, $H_x = H_{\{x\}}$ también se llama H**-grupo de isotropía**.

Decimos entonces que:

a') A es H**-invariante** si coincide con su H-saturación o equivalentemente, si $ha \in A$ siempre que $a \in A$ y $h \in H$.

b') Un punto $x \in X$ se llama H**-fijo** si $H = H_x$ o bien, si $H \subset G_x$, es decir, si $hx = x$ para cada $h \in H$. El conjunto de puntos H-fijos de X se denota X^H.

Cuando $H = G$, omitimos el prefijo G- de estos conceptos hablando sólo de saturación, órbita, etc. Es fácil verificar que:

- Cada estabilizador G_A es subgrupo de G.

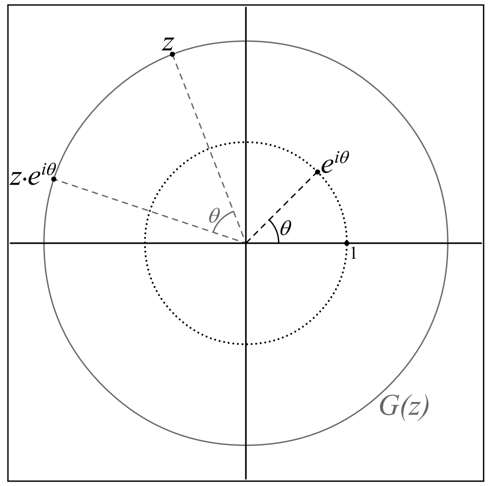

Figura 1.1: Ejemplo de un G-espacio (euclidiano).

- ∘ Tanto los estabilizadores como los conjuntos de puntos fijos son cerrados en G y X respectivamente.

La Figura 1.1 ilustra el ejemplo 6 donde $G = \mathbb{S}^1$, $X = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ la acción es la multiplicación usual en $\mathbb{C}$. En este caso, $0 \in X$ es un punto fijo y la acción de $\mathbb{S}^1$ en $X \setminus \{0\}$ es una **acción libre**, es decir $gx \neq x$ para cada $g \in G \setminus \{e\}$ y cada $x \in X \setminus \{0\}$.

G-$\mathcal{TOP}$

Consideramos ahora las funciones que preservan o conmutan con las acciones de G en dos espacios.

Definición 1.3. Sea G un grupo topológico. Una función continua $f : X \to Y$ entre G-espacios X y Y es **equivariante** si

$$f(gx) = gf(x)$$

para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Si Y tiene la acción trivial de G, llamaremos a f **invariante**.

Observemos que:

- Para un G-espacio X, si $A \subset X$ es invariante, A es un G-espacio con la misma acción que X. En este caso podemos considerar a A como un *G-subespacio* de X puesto que la inclusión $A \hookrightarrow X$ es equivariante.

- Dada una familia de G-espacios $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, se definie la **acción diagonal** , de G en el producto $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ de manera que las proyecciones $p_{\lambda'}$: $\prod X_\lambda \to X_{\lambda'}$ resulten equivariantes. Esto es, definiendo
$$g \cdot (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (gx_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

- Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo equivariante, su inversa f^{-1} : $Y \to X$ también es equivariante. En este caso decimos que X e Y son **G-equivalentes** o *G-homeomorfos.*

Denotemos por $\mathcal{TOP}$ a la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas. Entonces, para un grupo topológico G, la clase de los G-espacios y las funciones equivariantes forman una categoría G-$\mathcal{TOP}$. En un sentido, el estudio los grupos de transfomaciones generaliza aquel de los espacios topológicos, pues en el caso particular de $G = \{e\}$, obviamente G-$\mathcal{TOP}$ coincide con $\mathcal{TOP}$. El "paralelismo" entre estas dos categorías y en general entre categorías de grupos topológicos de transformaciones (variando el grupo G) se discute en el libro de De Vries [39].

Métricas invariantes

Sea G un grupo topológico. Dado un G-espacio X, diremos que X *admite* una **métrica invariante** si existe una métrica d compatible con su topología y tal que cada g-traslación inducida θ_g, es en realidad una d-isometría de X, es decir, si
$$d(gx, gy) = d(x, y)$$
para toda $g \in G$ y cualesquiera $x, y \in X$. Esto significa que el homomorfismo inducido Θ de 1.2 toma valores en $Iso_d(X)$, el grupo de d-isometrías (suprayectivas) de X.

Se sabe que cuando G es compacto, cada G-espacio metrizable admite una métrica invariante. En su monografía [34], Palais da una demostración asumiendo que G es un grupo compacto de Lie y usando la integral de Haar.

Antonyan [6] da una demostración asumiendo sólo que G es numerablemente compacto. De hecho, si d' es una métrica admisible para X,

$$d(x,y) = \sup_{g \in G} d'(gx, gy)$$

es una métrica invariante y admisible para X. Más adelante (Lema 3.1) demostraremos esta afirmación. No todos los G-espacios metrizables sin embargo, admiten métricas invariantes. En efecto, De Vries muestra el siguiente contra-ejemplo.

Ejemplo 1.1.1. Sean $k \in \mathbb{N}$, $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ el espacio discreto de k puntos y $X = S^{\mathbb{Z}}$. Entonces X es un espacio metrizable y compacto. De hecho, X es homeomorfo al conjuto de Cantor.

Sea $\varphi : X \to X$, la función dada por

$$\varphi\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$$

i.e. el *corrimiento* a la derecha de cada entrada. Este es en realidad un homeomorfismo y genera entonces la acción de $\mathbb{Z}$ en X: $m \cdot x = \varphi^m(x)$. Bajo esta acción X no admite ninguna métrica inavariante (ver [41, III, 2.3]).

El problema de metrizabilidad de una acción es aún hoy, un problema abierto. Incluso para el caso de $G = \mathbb{R}$. Los G-espacios metrizables que admiten métricas invariantes forman una clase destacada de G-$\mathcal{TOP}$ que denotaremos por G-$\mathcal{M}$. Bajo ciertas circunstancias más generales que la compacidad del grupo (compacidad local por ejemplo), algunos G-espacios (llamados *propios*, Sección 1.4) si admiten dichas métricas. A lo largo del trabajo, mencionaremos y usaremos resultados relacionados con este problema. En particular, en la Sección 3.1 se construyen dichas (pseudo)métricas. Una discusión más detallada sobre el tema se encuentra en el trabajo de Antonyan y S. de Neymet [11].

Espacios de órbitas

Dado un grupo topológico G y un G-espacio X, definimos en él la relación

$$x \sim y \quad \text{si} \quad y = gx \quad \text{para alguna } g \in G.$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia y que la clase $\widetilde{x}$ de un punto $x \in X$ es precisamente la órbita $G(x)$. Denotaremos por X/G al conjunto de estas clases y lo dotaremos de la *topología cociente* respecto a la proyección natural $p : X \to X/G$,

$$p(x) = \widetilde{x} = G(x)$$

i.e. $\widetilde{U} \subset X/G$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(\widetilde{U}) \subset X$ es abierto. Este espacio se llama **espacio de órbitas** y la *identificación* p **proyección orbital**.

Como ejemplos importantes de espacios de órbitas podemos mencionar los espacios de clases laterales derechas e izquierdas de un subgrupo cerrado H de G:

1. En efecto, si el subgrupo cerrado H actúa en G mediante la multiplicación $h \cdot g = hg$, la clase lateral derecha Hg es la H-órbita de $g \in G$. El total de estas clases, $G \backslash H = \{Hg \mid g \in G\}$ es entones un H-espacio de órbitas.

2. Si H actúa en G mediante la división δ de (1.1), $h \cdot g = gh^{-1}$, la H-órbita de $g \in G$ es la clase lateral izquierda gH. De este modo, $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ con la topología cociente es un H-espacio de órbitas.

La condición de tener a H como un subgrupo cerrado de G resulta necesaria para que G/H sea un espacio de Hausdorff (en principio es T_1 pero también es homogéneo y regular).

Dado $A \subset X$, entonces $p^{-1}(p(A)) = G(A)$ es la saturación de A en X. Cuando A es abierto, su saturación también lo es. Esto se sigue de la igualdad

$$G(A) = \bigcup_{g \in G} gA$$

y el hecho de que cada gA es la imagen de A bajo la traslación θ_g. De este modo, p resulta una identificación abierta. Tenemos entonces que:

- Si X es (localmente) compacto o (localmente) conexo, X/G también lo es.

- Si X es I-numerable o II-numerable, X/G también lo es.

Aunque asumimos que X es un espacio de Tychonoff, el espacio de órbitas X/G puede NO ser de Hausdorff o siquiera T_1. Observamos que de acuerdo a la topología cociente de X/G, el axioma de T_1 equivale a que cada órbita $G(x) \subset X$ sea cerrada. El axioma T_2 o de Hausdorff equivale a la existencia de vecindades ajenas e invariantes para dos órbitas distintas. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación para $G = \mathbb{R}$ y X un subespacio del plano euclidiano.

Ejemplo 1.1.2. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. Definimos la acción de $G = \mathbb{R}$ en X mediante las posibles situaciones:

a) Si $x = 1$, $t \cdot (x, y) = (1, y + t)$,

b) Si $x = -1$, $t \cdot (x, y) = (-1, y - t)$,

c) Si $|x| < 1$, consideramos $\Gamma_{(x,y)}$, la traslación vertical de la gráfica de la función $f(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$ que pasa por (x, y). Definimos $t \cdot (x, y)$ como el punto en $\Gamma_{(x,y)}$ cuya longitud sobre el arco de $\Gamma(x, y)$ entre (x, y) y $t(x, y)$ es $|t|$ y x es mayor (menor) que x si t es positivo (negativo), es decir, (x_0, y_0) desplazado con velocidad unitaria t.

Es fácil ver que la asíntotas $x = 1$ y $x = -1$ son las órbitas $\mathbb{R}((1, 0))$ y $\mathbb{R}((-1, 0))$ repectivamente y que no se pueden separar por vecindades invariantelas, esto es, X/G no es de Hausdorff. La Figura 1.1 ilustra la situación.

Lema 1.4. *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una* función perfecta, *i.e. cerrada y con* fibras $p^{-1}(\widetilde{x})$ *compactas.*

Demostración. Esto se debe a que en general, para $K \subset G$ compacto y $C \subset X$ cerrado, $K(C) \subset X$ es cerrado. En efecto, dado $x \in \overline{K(C)}$, existen redes $\{g_\alpha\}$ en K y $\{x_\alpha\}$ en C tales que $g_\alpha x_\alpha \rightsquigarrow x$. Como K es compacto, $\{g_\alpha\}$ tiene una subred $\{g_{\alpha_\beta}\}$ convergente, digamos a $g \in K$. Entonces $g_{\alpha_\beta}^{-1} \rightsquigarrow g^{-1}$ por lo que

$$x_{\alpha_\beta} = g_{\alpha_\beta}^{-1}(g_{\alpha_\beta} x_{\alpha_\beta}) \rightsquigarrow g^{-1}x$$

Como C es cerrado, $g^{-1}x \in C$ o equivalentemente, $x \in gC \subset K(C)$. $\square$

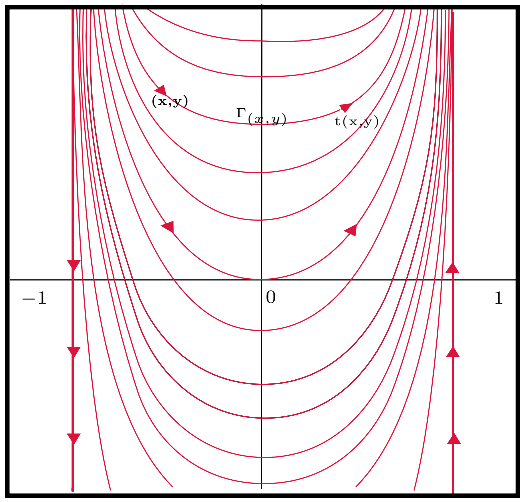

Figura 1.2: Acción no propia

El espacio de órbitas X/G en este caso será regular y de Hausdorff pues X lo es (ver [17, XI, 5.2]). Es un hecho conocido que X/G es de hecho un espacio de Tychonoff y es metrizable cuando el *espacio fase* X lo es. En el caso general (G no compacto) si X admite una métrica invariante y el espacio de órbitas satisface al menos el axioma de separabilidad T_1, una métrica "natural" puede ser introducida en X/G como se muestra a continuación.

Lema 1.5. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Si X admite una métrica invariante y X/G es un espacio T_1, entonces X/G es metrizable.*

1

Demostración. Sea d una métrica invariante para X. Mostraremos que la métrica

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \inf\{d(x',y') \mid x' \in \widetilde{x},\ y' \in \widetilde{y}\}$$

es compatible con la topología cociente de X/G.

Dados $\widetilde{x},\widetilde{y} \in X/G$ distintos, es claro que $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \geq 0$ y que $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \widetilde{d}(\widetilde{y},\widetilde{x})$. Además, al fijar $x' \in \widetilde{x}$ y $y' \in \widetilde{y}$,

$$d(gx',hy') = d(x',g^{-1}hy')$$

por lo que

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \inf_{k\in G} d(x',ky') = d(x',G(y'))$$

y como x' no está en la órbita cerrada $G(y')$, se tiene $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) > 0$. Escojamos ahora un tercer elemento $\widetilde{z} \in X/G$. Entonces para $z' \in \widetilde{z}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) &= \inf_{k\in G} d(x',ky') \leq \inf\{d(x',gz') + d(gz',hy') \mid g,k \in G\} \\ &= \leq \inf_{g\in G} d(x',gz') + \inf_{h\in G} d(z',hy') = \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{z}) + \widetilde{d}(\widetilde{z},\widetilde{y}). \end{aligned}$$

Esto demustra que $\widetilde{d}$ es en efecto una métrica para X/G.

Para verificar la compatibilidad de $\widetilde{d}$ con la topología cociente de X/G escojamos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Mostraremos que para las ε-bolas alrededor de x y $\widetilde{x} = p(x)$ se cumple

$$p(B_d(x,\varepsilon)) = B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$$

La igualdad a su vez implica que $p : (X,d) \to (X/G,\widetilde{d})$ es una función continua, suprayectiva y abierta. En particular una identificación abierta, por lo que $\widetilde{d}$ es admisible.

Sea $y \in B_d(x,\varepsilon)$. Entonces $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \leq d(x,y) < \varepsilon$, por lo que $p(y) = \widetilde{y} \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$ y $p(B_d(x,\varepsilon)) \subseteq B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$. Por otro lado, dados $\widetilde{z} \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$,

$$d(x,G(z)) = \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{z}) < \varepsilon$$

por lo que $d(x,z') < \varepsilon$ para alguna $z' \in G(z)$. Así que $\widetilde{z} = p(z') \in p(B_d(x,\varepsilon))$ y $B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon) \subseteq p(B_d(x,\varepsilon))$. Esto termina la demostración. $\square$

Para el caso de G no compacto, como $\mathbb{R}$ por ejemplo, ciertas restricciones sobre la acción han de ser añadidas a fín de preservar propiedades importantes como la separación de puntos en X/G. En la Sección 1.4 se introduce una condición más general y suficiente en la acción para garantizar estas propiedades.

Supongamos ahora que Y es un G-espacio trivial y $f : X \to Y$ una función invariante, i.e. $f(gx) = f(x)$ para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Esto significa que f es constante en las órbitas de X, por lo que f se factoriza a través de la proyección orbital como $f = \widetilde{f}p$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/G \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $\widetilde{f}$ es continua. De hecho, en una situación más general tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.6. *Sean G un grupo topológico y $f : X \to Y$ una función equivariante entre G-espacios X e Y. Entonces f induce una función continua $\widetilde{f} : X/G \to Y/G$ que completa el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/G \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & Y/G \end{tikzcd}$$

Demostración. Dado $\widetilde{x} \in X/G$, la única forma de hacer conmutar las proyecciones p y q es definiendo

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{f(x)}.$$

Esta asignación está bien definida pues

$$\widetilde{f}(\widetilde{gx}) = \widetilde{f(gx)} = \widetilde{gf(x)} = \widetilde{f(x)}$$

para cada $g \in G$. Como $\widetilde{f}p = qf$ es continua y p una identificaión, se sigue que $\widetilde{f}$ también es continua. En efecto, dado un $\widetilde{U} \subset Y/G$ abierto, sabemos que $q^{-1}(\widetilde{U}) \subset Y$ es abierto. Luego, $f^{-1}q^{-1}(\widetilde{U}) \subset X$ es abierto. Pero $f^{-1}q^{-1}(\widetilde{U}) = p^{-1}\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U})$, lo que significa que $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}) \subset X/G$ es abierto. $\square$

Productos torcidos

Sean G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Si X es un H-espacio y consideramos la acción (1.1) de H en G, i.e. $h \cdot g = gh^{-1}$, entonces la acción diagonal de H en el producto $G \times X$ es

$$h(g, x) = (gh^{-1}, hx).$$

El **producto torcido** de G con X se define entonces como el espacio de órbitas
$$G \times_H X = \frac{G \times X}{H}$$
La H-órbita del punto $(g, x) \in G \times X$ es denotada por $[g, x]$. Es fácil ver que $G \times_H X$ es un G-espacio bajo la acción

$$\theta(g', [g, x]) = [g'g, x].$$

En efecto, la acción está bien definida pues si $[g_1, x_1] = [g, x]$ si y sólo si $g_1 = gh^{-1}$ y $x_1 = hx$ para alguna $h \in H$. Luego, $g'g_1 = (g'g)h^{-1}$ por lo que $[g'g_1, x_1] = [g'g, x]$. La continuidad de θ se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G \times (G \times X) \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "Id_G \times p_H"'] & G \times X \arrow[d, "p_H"] \\
G \times (G \times_H X) \arrow[r, "\theta"] & G \times_H X
\end{tikzcd}$$

donde p_H es la H-proyección orbital y $\theta'(g', g, x) = (g'g, x)$. El argumento es similar al de la demostración del Lema 1.6.

Lema 1.7. *Sean G un grupo topológico, $H \subset G$ un subgrupo compacto y X un H-espacio. Entonces, la función $i : X \hookrightarrow G \times_H X$, $i(x) = [e, x]$ es un encaje cerrado. Más aún, restringiendo la acción θ de G a H en $G \times_H X$, el encaje i es H-equivariante. Además, X/H es homeomorfo a $(G \times_H X)/G$.*

Demostración. La función i es inyectiva pues

$$[e, x] = [e, y] \Longleftrightarrow (e, y) = (eh^{-1}, hx) \quad \text{para alguna } h \in H$$

y en este caso $h = e$, por lo que $y = x$. Observemos también que i es la composición
$$X \xrightarrow{j} G \times X \xrightarrow{p_H} G \times_H X$$
donde j es el encaje cerrado $j(x) = (e, x)$ y p_H la proyección canónica, por lo tanto, i es continua. Como H es compacto, p_H es además cerrada, de modo que i también lo es.

Si $x \in X$ y $k \in H$ entonces

$$i(kx) = [e, kx] = [k, x] = k[e, x] = ki(x)$$

por lo que i es H-invariante. Sea $q : X \to X/H$ la proyección orbital. Definamos el homeomorfismo$f : X/H \to (G \times_H X)/G$ como

$$f(\widetilde{x}) = G([e, x])$$

que está bien definido pues $H(x) = H(y)$ si y sólo si $y = hx$ para alguna $h \in H$, y en este caso

$$f(\widetilde{y}) = G([e, y]) = G([h, y]) = G([e, hy]) = G([e, x]).$$

Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & G \times_H X \arrow[d, "p"] \\ X/H \arrow[r, "f"] & (G \times_H X)/G \end{tikzcd}$$

conmuta, fq es continua, y al ser q una identificación, f es continua. Además, i y p son cerradas, por lo que f también es cerrada.

Ya que $G([g, x]) = G(g[e, x]) = G([e, x])$ para cada par (g, x), tenemos que f es suprayectiva. Finalmente observemos que

$$\begin{aligned} G([e, x]) = G([e, y]) &\Leftrightarrow [e, y] = [g, x] \quad \text{para alguna } g \in G \\ &\Leftrightarrow (e, y) = (gh^{-1}, hx) \quad \text{para algunas } h \in H,\ g \in G \\ &\Rightarrow g = h \quad \text{y} \quad y = hx \\ &\Rightarrow \widetilde{y} = \widetilde{hx} = \widetilde{x} \end{aligned}$$

así que f es inyectiva y por tanto un homeomorfismo. $\square$

Como los espacios de clases laterales, los productos torcidos constituyen una clase destacada de objetos en G-$\mathcal{TOP}$. Si G es un grupo compacto de Lie, un resultado clásico de Mostow establece que, localmente, X es G-equivalente al producto torcido de G con subespacios G_x-invariantes [32]. En la Sección 1.4 formalizamos esta afirmación al tiempo de establecer la versión más general y esencial de este resultado (Teorema 1.31).

1.2. Acciones lineales

Como en el caso de los grupos topológicos, se define de manera natural el concepto de **espacio topológico vectorial** esto es, un espacio vectorial L

sobre el campo $\mathbb{R}$, provisto de una topología para la cual la suma y la multiplicación por escalares son operaciones continuas. Los espacios topológicos vectoriales constituyen así una clase dentro de los grupos topológicos.

Definición 1.8. Sean G un grupo topológico y L un espacio vectorial topológico. Diremos que L es un G**-espacio lineal** si hay una **acción lineal** de G en L, i.e. donde cada traslación inducida es en realidad un *operador lineal*:

$$g(\lambda x + y) = \lambda gx + gy$$

para cada $g \in G$, cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $x, y \in L$.

Esto significa que el homomorfismo inducido Θ de (1.2), toma lugar en el subgrupo $GL(L)$ de todos los automorfismos lineales de L. Cuando L cuenta con una norma invariante $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$, i.e. que satisface

$$\|gx\| = \|x\|$$

para cada $g \in G$ y cada $x \in X$, decimos que L es un G**-espacio normado** o que G actúa en L mediante *operadores ortogonales*. En este caso, la métrica inducida por la norma es invariante:

$$\|gx - gy\| = \|g(x - y)\| = \|x - y\|.$$

Si $(L, \|\cdot\|)$ resulta además un espacio de Banach, llamamos a L un G-**espacio de Banach**.

Entre los ejemplos clásicos de G-espacios lineales están los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ con la acción natural de $GL(n, \mathbb{R}) : (A, x) \mapsto Ax$. La restricción de la acción al subgrupo compacto $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$ de las *transfomaciones ortogonales* nos da obviamente al mismo $\mathbb{R}^n$ y al subespacio invariante $\mathbb{S}^{n-1}$ como ejemplos de $O(n)$-espacio de Banach. Las acciones en $\mathbb{R}^n$ consideradas por Mostow, Palais y otros autores de la época, para G compacto de Lie son precisamente a través de homomorfismos continuos $G \to O(n)$.

El problema de linealización de una acción consiste básicamente en lo siguente:

> Dados un grupo topológico G y un G-espacio X, encontrar un G-espacio lineal L y un encaje equivariante $X \hookrightarrow L$.

Este problema es tan viejo como la teoría misma de Grupos topológicos de transformaciones. De Vries [39, III, 8.1], impone la condición adicional de que L tenga una **acción efectiva**, esto es, para cada $g \in G$ distinto de e debe haber un $v \in L$ tal que $gv \neq v$. Esto equivale a que el homomorfismo inducido $\Theta : G \to GL(L)$ sea en realidad un monomorfismo. Por su parte, Megrelishvilli [30] asume que L es un espacio *localmente convexo*, i.e. donde cada punto de L tiene una base local de vecindades convexas. Tanto los ejemplos que presentamos como las construcciones que desarrollaremos satisfacen estos requisitos.

Dado que un espacio topológico vectorial es en particular un grupo topológico y todos los grupos topológicos son completamente regulares, un espacio X admite una linealización si y sólo si X es de Tychonoff (esta es nuestra suposición inicial). Por ejemplo, es bien sabido que X se encaja en un cubo de Tychonoff $[0,1]^\tau$ y por ende en el espacio lineal localmente convexo $\mathbb{R}^\tau$. Cuando X es además metrizable, el encaje de Kuratowki-Wodyslaski [17, XIII, 5.2] afirma que X admite un encaje en el espacio de Banach $C^*(X)$ de las funciones continuas y acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ y su imagen es cerrada en su envoltura convexa. Más aún, un resultado clásico de Arens y Eells [13] afirma que un espacio de Tychonoff X admite un encaje cerrado en un espacio localmente convexo. En su estudio, si X es metrizable, el encaje cerrado es también isométrico y su imagen tiene lugar en un espacio normado. Revisamos las versiones equivariantes de estos resultados.

Dados un grupo topológico G, un G-espacio X y un espacio L, la acción de G en X induce otra acción en el conjunto de todas las funciones $f : X \to L$, mediante la regla

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x) \tag{1.4}$$

para cada $x \in X$. En efecto, dada $x \in X$,

$$(g \cdot (h \cdot f))(x) = (h \cdot f)(g^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x) = f((gh)^{-1}x) = ((gh) \cdot f)(x)$$

por lo que $g \cdot (h \cdot f) = (gh) \cdot f$. Claramente $e \cdot f = f$. El subconjunto $C(X, L)$ de todas las funciones continuas de $X \to L$ resulta invariante bajo esta acción. Más aún si $C_c(X, L)$ es el espacio $C(X, L)$ dotado de la topología compacto-abierta tenemos el siguiente resultado. Una demostración directa se encuentra en el artículo de Antonyan [6].

Proposición 1.9. *Si G es un grupo localmente compacto, X un G-espacio* *y L un espacio,* (1.4) *es una acción continua de G en $C_c(X, L)$. Si además L es un espacio lineal, $C_c(X, L)$ resulta incluso un G-espacio lineal.*

En particular, al considerar la acción (1.1) de G en si mismo, obtenemos el G-espacio lineal $C_c(G, L)$ donde

$$(h \cdot \varphi)(g) = \varphi(gh).$$

Cuando L es localmente convexo, $C_c(G, L)$ también lo es. Este espacio de funciones fue considerado por De Vries [39, III, 8.2] e independientemente por Smirnov [37]. El problema de la linealización equivariante quedó entonces resuelto como sigue.

Teorema 1.10 (Smirnov, De Vries)**.** *Sea G un grupo localmente compacto. Dado un G-espacio X, un encaje $\iota : X \hookrightarrow L$ induce un encaje equivariante*

$$\iota_* : X \to C_c(G, L), \quad \iota_*(x)(g) = \iota(gx) \tag{1.5}$$

Si además G es compacto y ι cerrada ι_* también es cerrada.

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $\iota_*(x) = \iota_*(y)$. Entonces para $g = e$, tenemos

$$\iota(x) = \iota_*(x)(e) = \iota_*(y)(e) = \iota(y).$$

Como ι es inyectiva, $x = y$ así que ι_* es inyectiva. Para verificar la continuidad de ι_* basta mostrar que para cada $K \subset G$ compacto y cada $U \subset L$ abierto, $\iota_*^{-1}(M(K, U)) \subset X$ es abierto, donde $M(K, U)$ es el conjunto subbásico definido en (1.3). Sea entonces $x \in \iota_*^{-1}(M(K, U))$. Esto significa que $\iota_*(x)(K) \subset U$, i.e.

$$\iota_*(x)(g) = \iota(gx) \in U$$

para cada $g \in K$. Por la continuidad de la acción y de ι, hay vecindades $O_g \subset G$ de g y $V_g \subset X$ de x tales que $\iota(O_g(V_g)) \subset U$. Apelando a la compacidad de K podemos suponer que existen $g_1, \dots g_n \in K$ para los cuales $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{g_i}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i}$, que es vecindad de x en X. Entonces para cada $x' \in V$ y cada $g \in K$, si $g \in O_{g_i}$, tenemos

$$\iota_*(x')(g) = \iota(gx') \subset \iota(O_{g_i}(V_{g_i})) \subset U$$

i.e. $\iota_*(x')(K) \subset U$ o bien $\iota(x') \in M(K, U)$. Esto a su vez significa que $V \in \iota_*^{-1}(M(K, U))$ y este último conjunto es abierto en X.

Mostraremos ahora que $\iota_* : X \to \iota_*(X)$ es abierta. Sean $V \subset X$ un abierto y $x \in V$. Como ι es un encaje, hay un $U \subset L$ abierto tal que $\iota(V) = \iota(X) \cap U$. En este caso $\iota_*(x)(e) = \iota(x) \in U$, lo que significa que $\iota_*(x) \in M(\{e\}, U) \cap \iota_*(X)$. Este último conjunto es de hecho una vecindad subbásica para $\iota_*(x)$ en $\iota_*(X)$. Además, dada $\varphi \in M(\{e\}, U) \cap \iota_*(X)$, existe $x' \in X$ tal que $\varphi = \iota_*(x')$ y $\iota(x') = \varphi(e) \in U$. Por la elección de U, tenemos $\iota(x') \in \iota(X) \cap U = \iota(V)$. Esto implica que $x' \in A$ y entonces $\varphi \in \iota_*(A)$, por lo que este conjunto es abierto en $\iota_*(X)$.

Finalmente, cuando G es compacto y ι es cerrada, demostraremos que $\iota_*(X)$ es cerrado. Sean $F \subset X$ un cerrado y $\varphi \in \overline{\iota_*(X)}$. Supongamos que $\varphi \notin \iota_*(X)$. Sea $\{x_\lambda\}$ una red en X tal que $\iota_*(x_\lambda) \rightsquigarrow \varphi$. Entonces $\varphi \neq \iota_*(x_\lambda)$ significa que para cada x_λ hay un $g_\lambda \in G$ tal que $\iota(g_\lambda x_\lambda) \neq \varphi(g_\lambda)$. Por la compacidad de G, hay una subred $\{g_\gamma\}$ de $\{g_\lambda\}$ y un $g \in G$ tales que $g_\gamma \rightsquigarrow g$. La continuidad de φ garantiza que $\varphi(g_\gamma) \rightsquigarrow \varphi(g)$, mientras que de $\iota_*(x_\gamma) \rightsquigarrow \varphi$ se sigue que

$$\iota(gx_\gamma)\iota_*(x_\gamma)(g) \rightsquigarrow \varphi(g)$$

y como ι es cerrada, $\varphi(g) \in \overline{\iota(X)} = \iota(X)$. Entonces hay un $x \in X$ para el cual $\varphi(g) = \iota(x)$. La convergencia de la ecuación anterior, $\iota(gx_\gamma) \rightsquigarrow \iota(x)$ tiene entonces lugar en $\iota(X)$, donde ι es un homeomorfismo. Se deduce que $gx_\gamma \rightsquigarrow x$ o bien $x_\gamma \rightsquigarrow g^{-1}x$. Entonces aplicando ι_* tenemos

$$\iota_*(g^{-1}x) = \lim_\gamma \iota_*(x_\gamma) = \varphi$$

Esta contradicción termina la demostración. $\square$

Dado un espacio lineal L, el Teorema 1.10 nos da entonces una forma de "equivariantizar" linealizaciones convencionales como las mencionadas: $X \hookrightarrow C_c(G, \mathbb{R}^\tau)$, el cual es G-isomorfo a $C_c(G)^\tau$. Si suponemos también la existencia una norma $\|\cdot\|$ en el espacio L, podemos considerar el espacio $C^*(X, L) = \{f \in C(X, L) \mid f \text{ es acotada } \}$. Este es un subconjunto G-invariante bajo la acción (1.4) y un espacio normado usando la *norma del supremo*,

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{1.6}$$

Cuando X es compacto, la topología inducida por esta norma coincide con la compacto-abierta en $C^*(X, L) = C(X, L)$ convirtiéndolo en un G-espacio normado. En particular, si G es compacto, X un espacio metrizable y d una métrica admisible e invariante para X, el encaje d-isométrico $\iota : X \to L$ de Arens y Eells da como resultado un G-encaje cerrado $X \hookrightarrow C(G, L)$. Este encaje es además, isométrico:

$$\begin{aligned}\|\iota_*(z_1) - \iota_*(z_2)\| &= \sup_{g\in G} |\iota_*(z_1)(g) - \iota_*(z_2)(g)| = \sup_{g\in G} |\iota(gz_1) - \iota(gz_2)| \\ &= \sup_{g\in G} d(gz_1, gz_2) = \sup_{g\in G} d(z_1, z_2) = d(z_1, z_2).\end{aligned}$$

Cuando G no es compacto, la cerradura del encaje inducido ι_* no se puede deducir inmediatamente. Más aún, si X no es compacto, la acción de G en $C^*(X, L)$ puede incluso no ser continua. En la Sección 2.4 se muestra un ejemplo de esta situación y daremos condiciones suficientes para dicha continuidad.

Hemos mencionado como el problema de linealización de una acción queda resuelto en el caso en que G es un grupo localmente compacto. Cuando G no es localmente compacto este problema puede NO tener solución positiva. En su estudio [30, 4.3] de clases de acciones con estructuras uniforme, compacta, de grupo o lineal, Megrelishvilli caracteriza aquellos espacios que admiten dicha propiedad de linealización equivariante. Para ello se introduce el concepto de acción *débilmente $\mathcal{P}$-Lipschitz* que describimos a continuación junto con un contra-ejemplo donde un *G-grupo* no admite encaje equivariante alguno a un G-espacio lineal.

Definición 1.11. Sean G un grupo topológico y $\mathcal{P} = \{\rho_i\}_{i\in M}$ es un sistema de pseudométricas para un espacio X. Diremos que una acción $\theta : G\times X \to X$ **débilmente $\mathcal{P}$-Lipschitz** si para cada $\rho_i \in \mathcal{P}$ y cada $g \in G$ existen $\rho_i \in \mathcal{P}$, $c \in \mathbf{R}$ y $V \subset G$ vecindad de g tales que

$$\rho_i(g'x, g'y) \leq c\rho_j(x, y) \tag{1.7}$$

para cada $g' \in V$ y cualesquiera $x, y \in X$ tales que $\rho_i(x, y) \neq 0$. Si podemos obviar la restricción $\rho_i(x, y) \neq 0$, diremos que la acción es **$\mathcal{P}$-Lipschitz**.

Teorema 1.12 (Megrelishvilli)**.** *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Entonces la accón θ de G en X es $\mathcal{P}$-Lipschitz si y sólo si hay una uniformidad μ compatible con la topología de X tal que θ es μ-acotada y cada g-translación es μ-uniformemente continua.*

En particular, la acción para cada G-espacio lineal es $\mathcal{P}$-Lipschitz.

Ejemplo 1.2.3. Sea X el conjunto de clases de equivalencia de subconjuntos Lebesgue-medibles del intervalo $I = [0, 1]$. Entonces, bajo la operación $\triangle$ de diferencia simétrica y norma $\|A\| = m(A)$ (abusando de la notación para la clase de equivalencia de $A \subset X$, es fácil verificar que X es un grupo topológico abeliano. De hecho, X es homeomorfomo al espacio de Hilbert l_2 (ver [14][Cap VI Sec 7]). Sea G el grupo de homeomorfismos $h : I \to I$ tales que h y h^{-1} son Lipschitz. Dado que $h(A)$ es medible para cada $A \in X$, G actúa de manera natural en X. Si dotamos a G de la topología de $\| \ \|$-convergencia uniforme, entonces X es un G-espacio (un G**-grupo** de hecho, i.e. cada traslación es un homomorfismo) que no admite linealización G-equivariante. De hecho, mostraremos que hay un G-espacio compacto Y tal que $Y \subset X$ y Y NO admite funciones equivariantes no triviales $f : Y \to L$ a cualquier G-espacio lineal L.

Sean $Y = I$ con su topología usual y $\iota : Y \to X,\ \iota(t) = [0, t]$. Entonces ι es un encaje equivariante.

Supongamos ahora que $Y \subset L$ para algún G-espacio lineal L. Entonces la acción de G en Y es débilmente G-Lipschitz, por lo que existe una familia de pseudométricas $\{\rho_i\}$ compatibles con la topología de Y. En particular, hay al menos una pseudométrica ρ_{i_0} no trivial. Afirmamos entonces que existe una sucesión $\{x_n\}$ en Y tal que $x_n \to x_0$ en la topología usual de Y y $\rho_{i_0}(x_n, x_0) \neq 0$ para cada n. En efecto, de no ser así, para cada $x \in Y$ existiría $\delta_x > 0$ tal que $\rho_{i_0}(x, y) = 0$ para cada $y \in B(x, \delta_x)$. Por la compacidad de Y, existen $x_1, \ldots, x_n \in Y$ tales que $Y = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta_{x_i})$ y $B(x_i, \delta_{x_i}) \cap B(x_i, \delta_{x_i}) \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$.

Sean $x, y \in Y$ puntos cualesquirea. Entonces $x \in B(x_k \delta_{x_k})$ y $y \in B(x_l \delta_{x_l})$ para algunos índices k, l. Asumiendo que $i \leq k$ escogemos puntos $x_i^* \in B_(x_i, \delta_{x_i})$ para $i = k, \ldots, l$. Entonces

$$\rho_{i_0}(x, y) \leq \rho_{i_0}(x, x_i^*) + \rho_{i_0}(x_i^*, x_{i+1}^*) + \ldots \rho_{i_0}(x_k^*, y) = 0 + 0 + \ldots 0 = 0$$

contradiciendo el hecho de que ρ_{i_0} es no trivial.

Sea entonces $x_0 = \text{lím}\, x_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la sucesión es monótona creciente. Luego, existen una pseudom étrica ρ_j, una constante $c \in \mathbf{R}$ y una vecindad $V \subset G$ de e tales que

$$\rho_{i_0}(h(x), h(y) \leq c\rho_j(x, y)$$

para cada $h \in V$ y cualesquiera $x, y \in X$ tales que $\rho_{i_0}(x, y) \neq 0$. Como ρ_j es continua, $rho_j(x_n, x_0) \to 0$ así que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$x_{n_k} > x_k \qquad \text{y} \qquad 2c\rho_j(x_{n_k}, x_0) \leq \rho_{i_0}(x_k, x_0)$$

para cada k. Sea $h_k : I \to I$ la función continua tal que

I) $h_k(x_k) = x_{n_k}$.

II) $h_k(t) = t$ para cada $t \in [0, x_{k-1}] \cup [x_0, 1]$.

III) h_k es lineal en $[x_{k-1}, x_k]$ y en $[x_k, x_0]$.

De este modo se asegura que cada $h_k \in G$ y más aún, la segunda condición implica que

$$m(h_k(A) \triangle A) \leq |x_{k-1} - x_0|$$

para cada $A \in X$. Pues

$$m(h_k(A) \triangle A \cap ([0, x_{k-1}] \cup [x_0, 1])) + m(h_k(A) \triangle A \cap ([x_{k-1}, x_k] \cup [x_k, x_0])) \leq |x_{k-1} - x_0|$$

Esto a su vez significa que $h_k \to e \in G$. Entonces existe m tal que $h_k \in V$ para cada $k \geq m$ y por tanto

$$\rho_{i_0}(x_m, x_0) \geq 2c\rho_j(x_{n_m}, x_0) \geq 2c\rho_{i_0}(h_m^{-1}(x_{n_m}), h_m^{-1}(x_0)) = 2\rho_{i_0}(x_m, x_0) > 0$$

contrario a la elección se la sucesión. Esto termina el argumento.

1.3. Retractos equivariantes

En esta sección introducimos el concepto “natural” de extensor y retracto para la categoría G-$\mathcal{TOP}$. Dado un grupo topológico G diremos que una pareja (X, A) es un **G-par** si X es un G-espacio y $A \subset X$ es cerrado e invariante.

Definición 1.13. Sea G un grupo topológico. Un G-espacio Y es un **extensor equivariante de vecindad absoluto** (para G-$\mathcal{M}$) o simplemente un G**-ANE** para la clase G-$\mathcal{M}$ si para todo G-par (X, A) donde X está en G-$\mathcal{M}$, cada función equivariante $f : A \to Y$ se puede extender a una función equivariante $F : U \to Y$ donde $U \subset X$ es una vecindad invariante de A. Si además siempre es posible tomar $U = X$, entonces Y se llama simplememte **extensor equivariante absoluto** (para G-$\mathcal{M}$) o bien un G**-AE**.

Definición 1.14. Sea G un grupo topológico. Un G-espacio Y de G-$\mathcal{M}$ se llama **retracto equivariante de vecindad absoluto** o un G**-ANR** si, cada vez que Y aparece como un subconjunto cerrado e invariante de un G-espacio Z de G-$\mathcal{M}$, existe una retracción equivariante $r : U \to Y$, donde $U \subset Z$ es una vecindad invariante de Y. Si además es posible tomar siempre $U = Z$, entonces Y se llama simplemente **retracto equivariante absoluto** o bien G**-AR**.

Uno de los puntos de partida en la teoría de retractos convencional es la equivalencia entre las nociones de retracto y extensor absoluto o bien, entre retracto y extensor de vecindad absoluto [28]. Claramente, si un G-espacio Y de G-$\mathcal{M}$ es un G-AE o un G-ANE, entonces Y es un G-AR o un G-ANR respectivamente. Tradicionalmente, la demostración del hecho recíproco, A(N)R implica A(N)E se basa en el siguiente argumento. Dado un retracto absoluto (de vecindad) X, se construye un encaje con imagen cerrada $X \hookrightarrow Y$ donde Y es un AE metrizable. Es fácil verificar entonces que un retracto o un retracto de vecindad de Y es un AE o un ANE respectivamente. Este será entonces uno de los propósitos de nuestra construcción en el Capítulo 3.

Como se mencionó en la introducción, un resultado clásico de Gleason [34, 1.4.3] es la *verisón equivariante del Teorema de Tietze-Urysohn* , a saber:

Teorema 1.15 (Gleason)**.** *Sea G un grupo compacto. Si G actúa en $\mathbb{R}^n$ mediante operadores lineales, entonces $\mathbb{R}^n$ es un G*-AE *para los G-pares (X, A) donde X es un G-espacio normal (T_4).*

Otra gran fuente de G-extensores absolutos cuando G es un grupo compacto son los G-espacios normados $C(G, L)$ donde L es un espacio vectorial normado. La demostración de esta afirmación se encuentra por ejemplo, en el trabajo de Antonyan [6].

1.4. Acciones propias

En adelante, consideraremos sólo grupos topológicos (localmente) compactos, a los que llamaremos simplemente *grupos (localmente) compactos*.

Con el fín de extender una parte importante de los resultados de la Teoría de los grupos topológicos de transformaciones hasta entonces obtenidos para grupos compactos de Lie, en 1961 Palais sistematizó la noción ahora clásica de *acción propia* de un grupo localmente compacto [35]. Esta nueva condición sobre la acción, mejora de manera significativa propiedades importantes en los conjuntos asociados al espacio fase como los que se enuncian en el Lema 1.18.

Supongamos entonces que G es un grupo localmente compacto. Dado un G-espacio X, decimos que $U \subset X$ es **relativamente delgado respecto a** $V \subset X$, si el conjunto de sus traslaciones

$$\langle U, V\rangle = \{g \in G |\ gU \cap V \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en G.

En efecto,

$$\langle V, U\rangle = \{g \in G |\ gV \cap U \neq \emptyset\} = \{g \in G |\ g(V \cap g^{-1}U) \neq \emptyset\} = \langle U, V\rangle^{-1}$$

entonces U es relativamente delgado respecto a V si y sólo si V es relativamente delgado respecto a U. Por lo que hablamos simplemente de conjuntos *relativamente delgados*. Decimos que U es **pequeño** si cada punto de X tiene una vecindad relativamente delgada respecto a U.

Definición 1.16. Sea G un grupo localmente compacto. Una acción continua de G en un espacio X es **propia** (en el sentido de Palais) si cada punto de X tiene una vecindad pequeña. En este caso se dice que X es un G**-espacio propio**.

Cuando G es compacto, cada par de conjuntos $U, V \subset X$ son relativamente delgados y todo $U \subset X$ es pequeño por definición, así que todo G-espacio es propio. Por otro lado, es fácil ver que la unión finita de conjuntos pequeños es pequeña. Se sigue entonces que si X es un G-espacio propio y compacto, G debe ser compacto también. Por ello, nos enfocaremos solamente en los casos de grupos localmente compactos y NO compactos y en espacios fase

NO compactos. Entre los ejemplos más importantes de G-espacios propios mencionamos a los siguientes:

1. Los *espacios homogéneos* G/H de clases laterales izquierdas, donde H es un subgrupo compacto de G. En efecto, si $p : G \to G/H$ es la proyección natural $p(g) = gH$, la acción de G en G/H está dada por $g' \cdot gH = g'gH$. Dado $gH \in G/H$, si $U \subset G$ es una vecindad de g con cerradura compacta, $p(U)$ es una vecindad pequeña para gH: si $kH \in G/H$ es otro punto y $V \subset G$ una vecindad de k con cerradura compacta, entonces

$$\langle p(U), p(V)\rangle = \{g \mid gUH \cap VH \neq \emptyset\} = (VH)(UH)^{-1}$$

   tiene cerradura compacta.

2. Los grupos de isometrías de espacios métricos, localmente compactos y conexos. A saber, si (X, d) es uno de estos espacios, $G = \mathrm{Iso}_d(X)$ es un grupo localmente compacto y la acción natural de G en X, es propia. Este es un resultado clásico de van Dantzing y van der Waerden. Cuando X no es conexo, Manoussos y Strantzalos [27] dan un ejemplo de un espacio con dos componentes donde la acción NO es propia. La demostración de la segunda parte del resultado, la que concierne a la acción propia es la siguiente.

   Dados $x, y \in X$, tomamos como vecindad pequeña de x a la bola $U = B(x, \varepsilon)$ y para y la bola con el mismo radio $V = B(y, \varepsilon)$ donde $\varepsilon > 0$ es tal que $V' = B(y, 2\varepsilon)$ tiene cerradura compacta. Dada $g \in \langle U, V\rangle$ se vefifica que si $gz \in V$ para alguna $z \in U$,

$$d(gx, y) \leq d(gx, gz) + d(gz, y) = d(x, z) + d(gz, y) < 2\varepsilon$$

   por lo que $g \in \{h \in G \,|\, hx \in V'\}$. Manoussos y Strantzalos demuestran que este es un conjunto relativamente compacto de G.

3. Más aún, Abels et. al. [22] demuestran que si (X, d) es un espacio métrico *σ-compacto*, $G = Iso_d(X)$ actúa propiamente en X si y sólo si X admite una *métrica propia*, i.e. donde cada bola cerrada es compacta. En este caso, G debe ser también σ-compacto.

Algunas de las propiedades de conjuntos relativamente delgados y de las acciones propias que permiten la extensión de resultados para el caso no compacto son las siguientes.

Lema 1.17. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G-espacio y $U, V \subset X$ relativamente delgados entonces:*

1. *Cualesquiera dos traslaciones g_1U y g_2V donde $g_1, g_2 \in G$ son relativamente delgados.*
2. *Si $H_1, H_2 \subset G$ son compactos, $H_1(U)$ y $H_2(V)$ también son relativamente delgados.*
3. *Si $U' \subset U$ y $V' \subset V$ entonces U', V' son relativamente delgados.*

Demostración. La demostración de 1 se sigue de 2 y está a su vez de observar que

$$\begin{aligned}\langle H_1(U), H_2(V)\rangle &= \{g \mid gH_1(U) \cap H_2(V) \neq \emptyset\} \\ &= \{g \mid H_2^{-1}gH_1(U) \cap V \neq \emptyset\} = H_2\langle U, V\rangle H_1^{-1}.\end{aligned}$$

La afirmación de 3 es inmediata. □

Lema 1.18. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G-espacio propio y $x \in X$. Entonces:*

1. *La órbita $G(x)$ es un subconjunto cerrado en X.*
2. *El estabilizador G_x es un subgrupo compacto de G.*
3. *El movimiento inducido, $\theta^x : G \to X$, $g \mapsto gx$ es una función perfecta.*
4. *$G(x)$ es G-equivalente a G/G_x.*

Demostración. La demostración sigue la misma secuencia que el enunciado.

1. Si $y \in \overline{G(x)}$ y $\{g_\alpha\}$ es una red en G tal que $g_\alpha x \rightsquigarrow y$, entonces para una vecindad pequeña U de x y una vecindad V de y delgada respecto a U tenemos que $\{g_\alpha\} \subset \langle U, V\rangle$ eventualmente. Como este conjunto es relativamente compacto, podemos extraer una subred $\{g_{\alpha_\beta}\}$ convergente, digamos a g. Entonces $g_{\alpha_\beta}x \rightsquigarrow gx$ pero siendo X de Hausdorff, $y = gx$.
2. Basta observar que $G_x = \langle x, x\rangle$ y este último tiene cerradura compacta en G.

3. Si $g_0 x \in \theta^x(G)$, la fibra de este punto es

$$\{g \in G \mid gx = g_0 x\} = \{g \mid g_0^{-1} gx = x\} = \{g \mid g_0^{-1} g \in G_x\} = g_0 G_x$$

   Para ver que θ^x es cerrada tomemos $C \subset G$ cerrado y $y \in \overline{C(x)}$. Existe entonces una red $\{g_\alpha\}$ en C tal que $g_\alpha x \rightsquigarrow y$. Si U y V son vecindades relativamente delgadas de x e y respectivamente, entonces eventualmente $\{g_\alpha\} \subset \langle U, V\rangle$. Existe entonces una subred $\{g_{\alpha_\beta}\}$ convergente, digamos a g. Como $C \subset G$ es cerrado, $g \in C$ y por la continuidad de θ^x, $g_{\alpha_\beta} x \rightsquigarrow gx$. Tenemos entonces $y = gx \in C(x)$.

4. Sea $f_x : G/G_x \to G(x)$ la función dada por $f_x(gG_x) = gx$, que está bien definida pues

$$gG_x = hG_x \Leftrightarrow h^{-1} g \in G_x \Leftrightarrow h^{-1} gx = x \Leftrightarrow gx = hx$$

   lo que también muestra que es inyectiva. Claramente es suprayectiva y es continua pues $f_x \pi = \theta^x$ es continua, donde θ^x es el movimiento inducido y π la proyección natural:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ G/G_x \arrow[r, "f_x"] & G(x) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

   Si $C \subset G/G_x$ es cerrado, $\theta^x(\pi^{-1}(C)) = f_x \pi(\pi^{-1}(C)) = f_x(C)$ es también cerrado.

$\square$

Los argumetos anteriores usan el hecho: "dados x e y, hay vecindades relativamente delgadas U yV de x e y respectivamente". Este tipo de acción se conoce como *propia en el sentido de Bourbaki.* La definición de Bourbaki [15, III,4] es ligeramente distinta. A saber, el autor considera la acción como propia si la función $G \times X \to G \times X,\ (g, x) \mapsto (gx, x)$ es perfecta. Cuando G es un grupo localmente compacto, esta definición es equivalente a la existencia de vecindades relativamente delgadas para dos puntos dados.

Para este tipo de acciones se demuestra que X/G es un espacio de Hausdorff. Cuando el espacio X es localmente compacto, ambas nociones de acció propia (de Palais y Bourbaki) coinciden. La diferencia con las acciones propias definidas por Palais consiste precisamente en que para estas últimas, el espacio de órbitas X/G es en realidad un espacio de Tychonoff. Verifiquemos este hecho mediante el siguiente lema.

Lema 1.19. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y $H \subset G$ es compacto, entonces la función*

$$\varphi(z) = \sup_{g \in H} f(gz)$$

es continua.

Demostración. Sean $z \in X$ y $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de la acción y de f, existen para cada $g \in G$, vecindades $W_g \subset G$ de g y $V_g \subset X$ de z tales que

$$|f(hy) - f(gz)| < \varepsilon$$

para cualesquiera $h \in W_g,\ y \in V_g$. Ahora, por la compacidad de H, existen $g_1, \ldots, g_n \in G$ tales que $H \subset \bigcap_{i=1}^{n} W_{g_i}$. Sea entonces $V_0 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i}$ la vecindad de z correspondiente. Entonces para cada $y \in V_0$ y cada $g \in H$, existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $g \in W_{g_i}$. Como $y \in V_{g_i}$,

$$|f(gy) - f(gz)| < \varepsilon$$

de donde se deduce que

$$|\sup_{g \in H} f(gy) - \sup_{g \in H} f(gz)| \leq \varepsilon$$

o bien, φ es continua en z. □

Lema 1.20. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio en el sentido de Palais. Entonces X/G es un espacio completamente regular.*

Demostración. Sean $\widetilde{x} \in X/G$ y $\widetilde{F} \subset X/G$ un cerrado donde $\widetilde{x} \notin \widetilde{F}$. Sea $p : X \to X/G$ la función orbital y supongamos que $\widetilde{x} = p(x)$ para un $x \in X$. Si $F = p^{-1}(\widetilde{F})$ entonces $F \subset X$ es cerrado, invariante y ajeno a la órbita $G(x)$. Mostraremos que hay una función continua e invariante $\varphi : X \to [0, 1]$ tal que $\varphi(G(x)) = 1$ y $\varphi(F) = 0$.

Sea $U \subset X$ una vecindad pequña de x. Como X es de Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus U) = 0$. Para cada $z \in X$ definimos φ como

$$\varphi(z) = \sup_{g \in G} f(gz)$$

la cual es invariante. En efecto, para cada $h \in G$, $z \in X$, tenemos

$$\varphi(hz) = \sup_{g \in G} f(g(hz)) = \sup_{g \in G} f((gh)z)) = \sup_{t \in G} f(tz) = \varphi(z)$$

pues $g \mapsto gh$ es una permutación de G. Es inmediato que $\varphi(G(x)) = 1$ y $\varphi(F) = 0$; mostraremos entonces la continuidad de φ.

Sea $z \in X$. Entonces existe una vecindad $V \subset X$ de z para la cual $K = \overline{\langle U, V \rangle}$ es compacto. Si $y \in V$, observamos que tiene lugar la igualdad

$$\varphi(y) = \sup_{g \in K^{-1}} f(gy).$$

En efecto, si $g \notin K^{-1}$ entonces $g^{-1} \notin \langle U, V \rangle$, i.e. $g^{-1}U \cap V = \emptyset$ de modo que $y \notin g^{-1}U$ o bien, $gy \notin U$. Así que $f(gy) = 0$.

El lema anterior nos garantiza ahora la continuidad de φ en V. Resta notar que una función invariante como φ se factoriza a través de la proyección orbital p y una función continua $\widetilde{\varphi}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & {[0,1]} \\ X/G \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Así que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = 1$ mientras que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{F}) = 0$. □

Corolario 1.21. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio de G-$\mathcal{M}$, entonces X/G es metrizable.*

Demostración. El inciso 2 del Lema 1.18 equivale al hecho de que X/G es un espacio T_1. El resultado se sigue del Lema 1.5. □

Los siguientes resultados nos proveen de nuevas formas de construir G-espacios propios.

Proposición 1.22. *Sean G un grupo localmente compacto y $\{(X_i, x_i)\}_{i\in I}$ una familia de G-pares para los cuales cada punto fijo $x_i \in X_i$ tiene una base de vecindades invariantes y el complemento $X_i \setminus x_i$ es un G-espacio propio. Entonces el complemento $X \setminus x$ donde $X = \prod_{i\in I} X_i$ y $x = (x_i)$, es un G-espacio propio.*

Demostración. Sea $y = (y_i) \in (X \setminus x)$. Sea $i_0 \in I$ un índice para el cual $y_{i_0} \neq x_{i_0}$. Sean $U_{i_0}, v_{i_0} \subset X_{i_0}$ vecindades disjuntas para y_{i_0} y x_{i_0} respectivamente. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que V_{i_0} es invariante. En este caso $\langle U_{i_0}, V_{i_0}\rangle = \emptyset$. Sea $W_{i_0} \subset X_{i_0}$ una vecindad pequeña para y_{i_0} tal que $W_{i_0} \subset U_{i_0}$. Afirmamos que la vecindad subbásica

$$W = W_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} X_i$$

es una vecindad pequeña para y en $X \setminus x$. En efecto, dado que $x_{i_0} \notin U_{i_0}$, $y \in W \subset (X \setminus x)$. Ahora bien, dada $z = (z_i) \in (X \setminus x)$ consideremos los dos posibles casos.

Si $z_{i_0} \neq x_{i_0}$, entonces z_{i_0} tiene una vecindad Q_{i_0} en $X_{i_0} \setminus x_{i_0}$ relativamente delgada al conjunto pequeño W_{i_0}. En este caso,

$$Q = Q_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} X_i$$

es una vecindad de z relativamente delgada a W pues $\langle W, Q\rangle \subset \langle W_{i_0}, Q_{i_0}\rangle$.

Por otra parte, si $z_{i_0} = x_{i_0}$, entonces sea $i_1 \in I$ tal que $z_{i_1} \neq x_{i_1}$. Sea $Q_{i_1} \subset X_{i_1}$ una vecindad de z_{i_1} tal que $x_{i_1} \notin Q_{i_1}$. En este caso

$$Q = V_{i_0} \times Q_{i_1} \times \prod_{i\neq i_0, i_1} X_i$$

es una vecindad de z en $X \setminus x$ relativamente delgada a W pues

$$\langle W, Q\rangle \subset \langle W_{i_0}, V_{i_0}\rangle \subset \langle U_{i_0}, V_{i_0}\rangle = \emptyset.$$

Esto termina la afirmación sobre W y la demostración de la proposición. □

Lema 1.23. *Sea G un grupo localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es una función equivariante entre los G-espacios X e Y y $B \subset Y$ es pequeño, entonces $f^{-1}(B) \subset X$ es también pequeño. En particular, si Y es propio, X también lo es.*

Demostración. Se sigue del hecho directamente verificable que

$$\langle f^{-1}(U), f^{-1}(V)\rangle \subset \langle U, V\rangle$$

□

Rebanadas

Tradicionalmente, una de las principales heramientas en el estudio de los G-espacios ha sido, y es, el uso de H-rebanadas. Estas permiten reducir propiedades de la acción de G a una de un subgrupo H donde la situación es por lo general más simple.

Definición 1.24. Sean G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Si X es un G-espacio, un subconjunto H-invariante $S \subset X$ se llama **H-rebanada** si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) La saturación $G(S) \subset X$ es abierta;

ii) Hay una función equivariante $f : G(S) \to G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$.

Si $G(S) = X$, decimos que S es una **H-rebanada global**.

En este caso, H se llama **grupo rebanador** y f la **función rebanadora**. La saturación $G(S)$ se llama **conjunto tubular**.

El ejemplo más notable de rebanada está en los productos torcidos. Dados un subgrupo compacto H de G y un H-espacio X, podemos ver a X como un subespacio H-invariante en el producto torcido $G \times_H X$. Esto es, mediante el encaje cerrado $i(x) = [e, x]$ del Lema 1.7. De hecho, si $x \in X$ y $h \in H$,

$$h[e, x] = [h, x] = [e, hx]$$

Ahora bien, por la definición de la acción, $G(i(X)) = G \times_H X$ claramente. La función rebanadora es entonces $\varphi : G \times_H X \to G/H,\ \varphi([g, x]) = gH$.

El ejemplo anterior caracteriza de hecho las H-rebanadas cuando H es compacto:

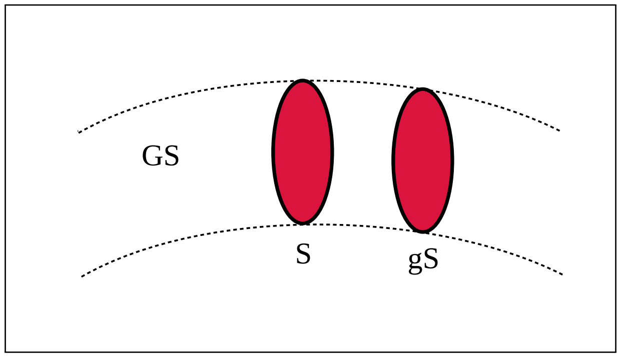

Figura 1.3: Ejemplo de una H-rebanada S.

Lema 1.25. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio. Si $H \subset G$ es un subgrupo compacto y $S \subset X$ es una H-rebanada, entonces*

$$\eta : G \times_H S \to G(S), \quad [g, s] \mapsto gs$$

define un G-homeomorfismo y completa el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times_H S \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G(S) \arrow[d, "f"] \\ & G/H \end{tikzcd}$$

donde $\varphi([g, s]) = gH$.

Existe otra caraterización útil de las rebanadas que recuerda la noción geométrica de sección transversal o sección cruzada. El esquema representa esta situación.

Proposición 1.26. *Sean G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Si X es un G-espacio y $S \subset X$ un conjunto H-invariante, entonces S es una H-rebanada si y sólo si*

i) $G(S)$ *es abierto en* X*;*

ii) S *es cerrado en* $G(S)$*;*

iii) *si* $g \in G$ *es tal que* $gS \cap S \neq \emptyset$*, entonces* $g \in H$*.*

Demostración. Supongamos primero que S es una H-rebanada con función rebanadora $G(S) \to G/H$ donde $S = f^{-1}(eH)$. Entonces como G/H es de Hausdorff, $S = f^{-1}(eH) \subset G(S)$ es cerrado. Ahora, si $gS \cap S \neq \emptyset$, existen $s, s_1 \in S$ tales que $gs = s_1$. Aplicando f se tiene $eH = f(s_1) = f(gs) = gf(s) = gH$, de donde $g \in H$.

Por otro lado, si S satisface i), ii) y iii), podemos definir $f : G(S) \to G/H$ como $f(gs) = gH$ para cada $g \in G$ y cada $s \in S$. Esta función está bien definida pues si $g_1 \in G$ y $s_1 \in S$ entonces,

$$g_1 s_1 = gs \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1} g_1 s_1 = s \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1} g_1 S \cap S \neq \emptyset$$

por lo que $g^{-1} g_1 \in H$, i.e. $g_1 \in gH$ o bien $g_1 H = gH$. Evidentemente $S = f^{-1}(eH)$. Para verificar la continuidad, observemos que f completa el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\theta"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G(S) \arrow[r, "f"] & G/H \end{tikzcd}$$

donde p_1 es la proyección en la primera coordenada y θ la acción. Como $G(S) \subset X$ es abierto, θ es una identificación abierta, al igual que la composición πp_1. La continuidad de f se sigue de esta observación. $\square$

Junto con la introducción del concepto de acción propia, Palais demostró la existencia de rebadanas *por* cada punto $x \in X$ cuando G es un grupo de Lie [35, 2.3.1]:

Teorema 1.27 (de la rebanada)**.** *Sea G un grupo de Lie. Si X es un G-espacio propio, entonces para cada $x \in X$ hay una G_x-rebanada S tal que $x \in S$.*

Corolario 1.28. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.27, la órbita $G(x)$ es un retracto equivariante de vecindad de X.*

Demostración. En efecto, dada una G_x-rebanda S tal que $x \in S$, el *conjunto tubular* $G(S)$ es una vecindad de $G(x)$ en X y definimos en él la retracción equivariante

$$r : G(S) \to G(x), \quad gs \mapsto gx$$

la cual está bien definida pues, justo como en la demostración de la Proposición 1.26, $g_1 s_1 = gs$ implica $g^{-1}g_1 \in G_x$, i.e. $g^{-1}g_1 x = x$ o bien, $g_1 x = gx$. De hecho, r es la composición del diagrama

$$\begin{tikzcd} G(S) \arrow[r, "\eta^{-1}"] \arrow[d, "r"'] & G \times_{G_x} S \arrow[d, "\varphi"] \\ G(x) & G/G_x \arrow[l, "f_x"'] \end{tikzcd}$$

donde η y φ son como en el Lema 1.25 y f_x es como en el Lema 1.18. □

Es importante mencionar que este tipo de rebanadas (G_x-rebanada que continene a x) NO necesariamente existen para acciones de grupos que no son de Lie. Inclusive Antonyan [7] muestra una acción de un grupo compacto donde no hay G_x-rebanadas por ningún punto. Para ampliar su uso en contexto como el de los grupos (localmente) compactos, Antonyan consideró los llamados *subgrupos grandes* de G.

Definición 1.29. Sea G un grupo localmente compacto. Un subgrupo cerrado H de G es un **subgrupo grande** si G/H es homeomorfo a una variedad.

Alternativamente a su definición, se establece la siguiente caracterización de un subgrupo grande. Su demostración se encuentra en el trabajo de Antonyan [9].

Proposición 1.30. *Sea G un grupo localmente compacto. Para un subgrupo cerrado H de G son equivalentes:*

a) H es un subgrupo grande de G.

b) G/H es un G-ANE metrizable.

Si además G es casi conexo, las condiciones anteriores son equivalentes a:

c) G/H es localmente contraible.

c) Existe un subgrupo cerrado y normal $N \subset G$ tal que $N \subset H$ y G/H es un grupo de Lie.

La versión final, que generaliza el teorema de existencia de la rebanada de Palais, es el llamado teorema de *la rebanada aproximativa* demostrado por Antonyan [9]. Otras versiones de este teorema fueron obtenidas para grupos compactos por el mismo Antonyan[7] y para grupos casi conexos por Abels [1].

Teorema 1.31 (de la rebanada aproximativa)**.** *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces para cada G-espacio propio X, cada $x \in X$ y cada vecindad O de x, existen un subgrupo compacto grande $K \subset G$ junto con una K-rebanada S tales que $G_x \subset K$ y $x \in S \subset O$.*

Dividiremos la demostración en tres casos, i) cuando G es totalmente disconexo, ii) si G es conexo y iii) el caso general. Usaremos entonces los siguientes resultados, los cuales pueden ser consultados en los trabajos de Palais [35, 1.1.6], Glushkov [21, Teo. 8] y Abels [2, Lema 3.2] respectivamente.

Lema 1.32. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio de Cartan y $x \in X$, entonces dada una vecindad $U \subset G$ de G_x, existe una vecindad $V \subset X$ de x tal que*

$$\langle V, V\rangle \subset U.$$

Teorema 1.33 (Glushkov)**.** *Sea G un grupo casi conexo. Entonces cada vecindad de la unidad U contiene un subgrupo compacto y normal N de G tal que G/N es un grupo de Lie.*

Proposición 1.34. *Sea G un grupo totalmente disconexo. Entonces cada subgrupo compacto H de G tiene una base de vecindades de subgrupos compactos y abiertos.*

Demostración del Teorema 1.31. El conjunto $V = \{g \in G \mid gx \in U\}$ es una vecindad abierta del subgrupo compacto G_x de G.

Caso I. Supongamos que G es totalmente disconexo. Por la Proposición 1.34, existe un subgrupo compacto y abierto K de G tal que $G_x \subset K \subset V$. En este caso G/K es discreto por lo que según la Proposición 1.30, K es un subgrupo grande de G. Como $K \subset V$, $K(x) \subset U$ y por la compacidad de K, hay una vecindad $Q \subset X$ de x tal que $K(Q) \subset U$. Por el Lema 1.32, existe una vecindad $W \subset X$ de x tal que $\langle W, W\rangle \subset K$. Definimos ahora la vecindad de x

$$S = K(Q \cap W)$$

que es K-invariante, está contenida en U y

$$\langle S, S\rangle = \langle K(Q\cap W), K(Q\cap W)\rangle = K^{-1}\langle Q\cap W, Q\cap W\rangle K = K$$

por lo que S es una K-rebanada que contiene a x.

Caso II. Supongamos que G es casi conexo. Por la compacidad de G_x, hay una vecindad $V' \subset G$ de e tal que $V'G_x \subset V$. Por el Teorema 1.33, existe un subgrupo compacto y normal $L \subset V'$ tal que G/L es un grupo de Lie. Sea $K = LG_x$ que es entonces un subgrupo grande de G (Proposición 1.30) y tal que $G_x \subset K \subset V$. De nuevo hay una vecindad $Q \subset X$ de x tal que $K(Q) \subset U$.

Consideremos la proyección orbital $p : X \to X/L$. Por el Teorema 1.27 de Palais, en el G/L-espacio propio X/L existe una $\left(\frac{G}{L}\right)_{\widetilde{x}}$-rebanada $\widetilde{S}$ para $\widetilde{x} = p(x)$. Pero en este caso el estabilizador de $\widetilde{x}$ es precisamente

$$\left(\frac{G}{L}\right)_{\widetilde{x}} = \frac{K}{L}.$$

Como la preimagen $p^{-1}(\widetilde{S})$ nos regresa una K-rebanada por x. Si $S = p^{-1}(\widetilde{S}\cap K(Q))$, entonces $S \subset U$ es la K-rebanada buscada.

Caso III. Sea G_0 la componente conexa de G que contiene al neutro e. Denotemos por $\widetilde{X}$ al G/G_0-espacio orbital X/G_0 y por $p : X \to \widetilde{X}$ la proyección orbital. Sabemos que $\widetilde{X}$ es un G/G_0-espacio propio y se vefifica directamente que el estabilizador de $\widetilde{x}$ es

$$\left(\frac{G}{G_0}\right)_{\widetilde{x}} = \frac{G_0G_x}{G_0}.$$

Podemos entonces aplicar *Caso I* al grupo totalmente disconexo $\widetilde{G} = G/G_0$. Hay entonces un subgrupo compacto y abierto $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ y una $\widetilde{H}$-rebanada $\widetilde{S}$ tal que $\widetilde{x} \in \widetilde{S} \subset \widetilde{U}$ donde $\widetilde{U} = p(U)$ y $\widetilde{G}_{\widetilde{x}} \subset \widetilde{H}$.

Llamemos $\pi : G \to \widetilde{G}$ a la proyección canónica y $H = \pi^{-1}(\widetilde{H})$. Entonces H es un subgrupo abierto y casi conexo de G. De modo que $\widetilde{S}$ es abierto en $\widetilde{X}$ y por tanto $W = p^{-1}(\widetilde{S})$ es abierto, H-invariante en X y $x \in W$. Ahora aplicamos el *Caso II* a el H-espacio propio W, al punto $x \in X$ y a su vecindad $U \cap W$. Existe entonces un subgrupo grande K de H, una K-rebanada S en W tal que $x \in S$, $S \subset U \cap W$ y $H_x \subseteq K$. Pero H/K es una variedad y $H \subset G$ es abierto, así que H/K es abierto en G/K y por tanto G/K es una variedad. Finalmente observamos que $G_x \subset H$ implica $G_x = H_x \subset K$, como $W \subset X$ es abierto y $H(S) \subset W$ también es abierto,

$$G(S) = \bigcup_{gH \in G/H} gH(S)$$

es abierto en X. Concluimos que S es la K-rebanada en X buscada. $\square$

Capítulo 2

Acciones propias en espacios lineales

En este capítulo revisaremos algunas acciones lineales e isométricas y las condiciones bajo las cuales una acción propia se preserva. Dado un grupo topológico G, diremos que un G-espacio $\widetilde{X}$ es una G**-extensión** del G-espacio X si X es G-equivalente a un subconjunto denso e invariante de $\widetilde{X}$.

2.1. Completación equivariante

Empezamos revisando la completación de acciones isométricas. Una descripción más detallada de la posibilidad de estas construcciones, incluso para G-espacios de Tychonoff, i.e. completación de la uniformidad subyacente, se encuentra en el trabajo de Megrelishvilli [29].

Proposición 2.1. *Sea G un grupo topológico. Si X es un G-espacio de G-$\mathcal{M}$, entonces su completación métrica $\widehat{X}$ también es un G-espacio de G-$\mathcal{M}$.*

Demostración. Sean d una métrica invariante y admisible para X y $\hat{d}$ la métrica para $\hat{X}$ que extiende a d. Como d es invariante, la acción $\theta : G \times X \to X$ induce para cada $g \in G$, transformaciones d-isométricas

$$\theta_g : X \to X, \quad \theta_g(x) = gx.$$

Cada traslación θ_g se extiende entonces a una $\hat{d}$-isometría $\hat{\theta}_g : \widehat{X} \to \widehat{X}$ que completa el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta_g"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \widehat{X} \arrow[r, dashed, "\hat{\theta}_g"] & \widehat{X} \end{tikzcd}$$

(ver [17, XIV,6.2]). La extensión natural $\hat{\theta} : G \times \widehat{X} \to \widehat{X}$ de la acción θ,

$$\hat{\theta}(g,x) = \hat{\theta}_g(x)$$

es entonces una acción continua para $\widehat{X}$. En efecto, dados $g, h \in G$ y $x \in \hat{X}$,

$$\hat{\theta}(g, \hat{\theta}(h,x)) = \hat{\theta}(g, \hat{\theta}_h(x)) = \hat{\theta}_g\hat{\theta}_h(x) = \hat{\theta}_{gh}(x) = \hat{\theta}(gh,x)$$

debido a la unicidad de la extensión de $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$. Además, para cada $x \in \widehat{X}$,

$$\hat{\theta}(e,x) = \hat{\theta}_e(x) = i\hat{d}_X(x) = id_{\widehat{X}}(x) = x$$

de modo que $\hat{\theta}$ es una acción.

Para simplificar la notación, identificaremos a X con su imagen isométrica en $\widehat{X}$. Como de costumbre, escribiremos gx en lugar de $\hat{\theta}(g,x)$ para $(g,x) \in G \times \widehat{X}$. Verifiquemos ahora la continuidad de $\hat{\theta}$. Sean $(g_0, x_0) \in G \times \hat{X}$ y $\varepsilon > 0$. Como $X \subset \hat{X}$ es denso, hay un $x_1 \in X$ que es $\frac{\varepsilon}{6}$-cercano a x_0. Sea $U \subset G$ una vecindad de g_0 tal que

$$d(g_0x_1, gx_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda $g \in U$, la cual existe por la continuidad de θ. Entonces, si $g \in U$ y $x \in \hat{X}$ es $\frac{\varepsilon}{6}$-cercano a x_0, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{d}(g_0x_0, gx) &\leq \hat{d}(g_0x_0, g_0x_1) + \hat{d}(g_0x_1, gx_1) + \hat{d}(gx_1, gx) \\ &= \hat{d}(x_0, x_1) + d(g_0x_1, gx_1) + \hat{d}(x_1, x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

y $\hat{\theta}$ es continua. □

2.2. Acciones uniformemente propias

En los ejemplos de acciones propias presentados en la Sección 1.4, las vecindades pequeñas U tanto para los espacios homogéneos como los espacios métricos, tienen la característica en común de que al escoger vecindades V relativamente delgadas para un punto dado y, la elección parece "depender no tanto" de la y misma, sino de U. Esta particularidad también la encontramos en ciertos espacios normados. Más precisamente, dado un grupo G localmente compacto, construiremos G-espacios normados E, que satisfacen la siguiente condición para cierta $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{para cualesquiera } x, y \in E \setminus \{0\}, \text{ las bolas} \\ B(x, \|x\|/n) \text{ y } B(y, \|x\|/n) \text{ son relativamente delgadas.} \end{array} \right. \qquad (A_n)$$

Observemos que el radio de la segunda bola NO depende de y sino de la misma x. Esto significa no sólo que $B(x, \|x\|/n)$ es pequeña, sino que podemos mantener fijo el radio de las bolas relativamente delgadas a ella, lo que podriamos denominar como una bola *uniformemente pequeña* alrededor de $x \in E \setminus \{0\}$.

Proposición 2.2. *Sean G un grupo localmente compacto y E un G-espacio normado que satisface la condición (A_n). Si $\widetilde{E}$ es una G-extensión normada de E, entonces $\widetilde{E} \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.*

Demostración. Dado un punto $x \in \widetilde{E}$, escribiremos $\widetilde{B}(x, r)$ para designar a la r-bola en $\widetilde{E}$; si $x \in E$ denotaremos por $B(x, r)$ a la bola respectiva en E. De este modo, $B(x, r) = \widetilde{B}(x, r) \cap E$. Bajo este acuerdo procederemos la demostración. Sea $x \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$. Escojamos un punto $x_1 \in E$ que sea $\frac{\|x\|}{n+1}$-cercano a x. En este caso

$$\|x\| - \|x_1\| \leq \|x - x_1\| < \frac{\|x\|}{n+1}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|x\| - \frac{\|x\|}{n+1} &< \|x_1\| \\ \frac{n\|x\|}{n+1} &< \|x_1\| \\ \frac{\|x\|}{n+1} &< \frac{\|x_1\|}{n} \end{aligned}$$

o bien, $x \in \widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n)$. Mostraremos que la bola extendida $\widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n)$ es pequeña en $\widetilde{E} \setminus \{0\}$.

Sea $y \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$, escojamos un punto $y_1 \in X$ que sea $\big(\|x_1\|/(n+1)\big)$-cercano a y. Entonces $y \in \widetilde{B}(y_1, \|x_1\|/n)$, pero $\widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n)$ y $\widetilde{B}(y_1, \|x_1\|/n)$ son relativamente delgados. En efecto, dada $g \in \langle \widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n), \widetilde{B}(y_1, \|x\|/n) \rangle$ tenemos

$$g\widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n) \cap \widetilde{B}(y_1, \|x\|/n) \neq \emptyset$$

y dado que $E \setminus \{0\}$ es denso en $\widetilde{E} \setminus \{0\}$,

$$g\widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n) \cap \widetilde{B}(y_1, \|x_1\|/n) \cap (E \setminus \{0\}) \neq \emptyset.$$

Como

$$g\widetilde{B}(x_1, \|x_1\|/n) \cap (E \setminus \{0\}) = B(x_1, \|x_1\|/n)$$

y

$$\widetilde{B}(y_1, \|x_1\|/n) \cap (E \setminus \{0\}) = B(y_1, \|x_1\|/n)$$

debemos tener $g \in \langle B(x_1, \|x_1\|/n), B(y_1, \|x_1\|/n) \rangle$ y este conjunto de transladadores es relativamente compacto por la condición (A_n). $\square$

σ-productos

Dada una familia de espacios vectoriales normados $\{(E_i, \|\cdot\|_i)\}$, recordemos que el **σ-producto** E de ellos se define como el subespacio del producto $\prod E_i$

$$E = \{(x_i) \in \prod E_i \mid x_i = 0 \text{ para casi toda } i\}$$

Esto es, E es el subespacio vectorial de $\prod E_i$ formado por puntos x para los cuales todos, salvo un número finito de sus coordenadas x_i, son cero. En este espacio vectorial se definen al menos un par de normas. La primera definida por

$$\|(x_i)\|_\infty = \max_i \|x_i\|_i \tag{2.1}$$

mientras que la segunda norma está definida por

$$\|(x_i)\|_1 = \sum_i \|x_i\|_i \tag{2.2}$$

Denotamos por E_∞ al espacio normado $(E, \|\cdot\|_\infty)$ al que llamaremos σ_∞-*producto* y por E_1 al espacio normado $(E, \|\cdot\|_1)$ que llamaremos entonces σ_1-*producto*. Cuando hablamos solo del σ-producto E, consideramos en él la topología inducida de $\prod E_i$.

Es inmediato de las definiciones (2.1) y (2.2) que $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$ por lo que la topología de E_1 es más fuerte que la de E_∞ y esta a su vez es más fuerte que aquella de E.

Proposición 2.3. *Sea G un grupo localmente compacto. Sea $\{(E_i, \|\cdot\|_i)\}$ una familia de G-espacios normados tales que cada E_i satisface la condición (A_n). Entonces E_∞ es un G-espacio normado y satisface la propiedad (A_n).*

Demostración. Claramente la acción diagonal de G en el σ-producto se da mediante operadores lineales. Para E_∞ (y para E_1) de hecho, mediante operadores isométricos.

Para la continuidad de la acción diagonal E_∞ tomemos $x = (x_i) \in E$, $\varepsilon > 0$ y $h \in G$ arbritrarios. Supongamos entonces que $i_1, \ldots, i_m$ son todos los índices para los cuales $x_{i_k} \neq 0$. Por la continuidad de la acción de G en cada E_{i_k}, hay vecindades O_{i_k} de $h \in G$ tales que

$$\|gx_{i_k} - hx_{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $g \in O_{i_k}$. Sea $O = \bigcap_{k=1}^{m} O_{i_k}$. Entonces

$$\|gx - hx\|_\infty = \max_i \|gx_i - hx_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora bien, por la isometría de la acción tenemos, para cada $g \in O$ y cada $y \in B(x, \varepsilon/2)$,

$$\begin{aligned} \|gy - hx\|_\infty &\leq \|gy - gx\|_\infty + \|gx - hx\|_\infty \\ &= \|y - x\|_\infty + \|gx - hx\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Lo que demuestra la continuidad de la acción. Demostremos ahora la segunda afirmación. Sean $x = (x_i),\ y = (y_i) \in E_\infty$ dos puntos cualesquiera. Debemos mostrar que $B(x, \|x\|_\infty/n)$ y $B(y, \|x\|_\infty/n)$ son relativamente delgados. Sea

j el índice para el cual $\|x\|_\infty = \|x_j\|_j$. Será suficiente entonces mostrar que

$$\left\langle B\left(x, \frac{\|x\|_\infty}{n}\right), B\left(y, \frac{\|x\|_\infty}{n}\right)\right\rangle \subset \left\langle B\left(x_j, \frac{\|x_j\|_j}{n}\right), B\left(y_j, \frac{\|x_j\|_j}{n}\right)\right\rangle \tag{2.3}$$

pues este último conjunto tiene cerradura compacta en G por hipótesis.

En efecto, dado $g \in \langle B(x, \|x\|_\infty/n), B(y, \|x\|_\infty/n)\rangle$ existe $z = (z_i) \in E_\infty$ tal que $gz \in gB(x, \|x\|_\infty/n) \cap B(y, \|x\|_\infty/n)$, i.e.

$$\|z - x\|_\infty < \frac{\|x\|_\infty}{n} \quad \text{y} \quad \|gz - y\|_\infty < \frac{\|x\|_\infty}{n}.$$

Como $\|x\|_\infty = \|x_j\|_j$, tenemos que

$$\|z_j - x_j\|_j \leq \|z - x\|_\infty < \frac{\|x\|_\infty}{n} = \frac{\|x_j\|_j}{n}$$

y

$$\|gz_j - y_j\|_j \leq \|gz - y\|_\infty < \frac{\|x\|_\infty}{n} = \frac{\|x_j\|_j}{n}$$

lo que significa que $gz_j \in gB(x_j, \frac{\|x_j\|_j}{n}) \cap B(y_j, \frac{\|x_j\|_j}{n})$ o bien,
$g \in \langle B(x_j, \|x_j\|_j/n), B(y_j, \|x_j\|_j/n)\rangle$.

La contención (2.3) y la proposición quedan demostrados. □

Proposición 2.4. *Sean G y $\{(E_i, \|\cdot\|_i)\}$ como en la Proposición 2.3. Si cada E_i satisface la condición (A_n) para $n = 4$, entonces tanto el σ_1-producto E_1 es un G-espacio normado que satisface la propiedad (A_n) para $n = 8$.*

Demostración. Verifiquemos primero la continuidad de la acción diagonal para E_1. Sean $x = (x_i) \in E$, $\varepsilon > 0$ y $h \in G$. Supongamos entonces que $i_1, \ldots, i_m$ son todos los índices para los cuales $x_{i_k} \neq 0$. Por la continuidad de la acción de G en cada E_{i_k}, hay vecindades O_{i_k} de $h \in G$ tales que

$$\|gx_{i_k} - hx_{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{2m}$$

para cada $g \in O_{i_k}$. Sea $O = \bigcap\limits_{k=1}^{m} O_{i_k}$. Entonces

$$\|gx - hx\|_1 = \sum_i \|gx_i - hx_i\| = \sum_{k=1}^{m} \|gx_{i_k} - hx_{i_k}\| < \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otro lado, usando la isometría de la acción, tenemos para cada $g \in O$ y cada $y \in B(x, \varepsilon/2)$,

$$\|gy - hx\|_1 \leq \|gy - gx\|_1 + \|gx - hx\|_1 = \|y - x\|_1 + \|gx - hx\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mostraremos ahora que la condición (A_n) se satisface para $n = 8$ siempre que cada E_i cumple (A_n) para $n = 4$. Sea $x = (x_i) \in E_1$ y supongamos que $i_1, \ldots, i_m$ son todos los índices para los cuales $x_{i_k} \neq 0$. Mostraremos que para cada $y \in E_1$,

$$\left\langle B(x, \frac{\|x\|}{8}), B(y, \frac{\|x\|}{8}) \right\rangle \subset \bigcup_{k=1}^{m} \left\langle B(x_{i_k}, \frac{\|x_{i_k}\|}{4}), B(y_{i_k}, \frac{\|x_{i_k}\|}{4}) \right\rangle \tag{2.4}$$

Sea $g \in \left\langle B(x, \|x\|/8), B(y, \|x\|/8) \right\rangle$, existe entonces un $z \in E_1$ tal que $\|z - x\| < \|x\|/8$ y $\|gz - y\| < \|x\|/8$. Se deduce de aquí que

$$\sum_{k=1}^{m} \|z_{i_k} - x_{i_k}\| < \sum_{k=1}^{m} \frac{\|x_{i_k}\|}{8}$$

y también que

$$\sum_{k=1}^{m} \|gz_{i_k} - y_{i_k}\| < \sum_{k=1}^{m} \frac{\|x_{i_k}\|}{8}$$

Al sumar ambas desigualdades obtenemos

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\|z_{i_k} - x_{i_k}\| + \|gz_{i_k} - y_{i_k}\| \right) < \sum_{k=1}^{m} \frac{\|x_{i_k}\|}{4}.$$

Debe haber entonces un índice $1 \leq j \leq m$ (que depende de g) para el cual

$$\|z_{i_j} - x_{i_j}\| + \|gz_{i_j} - y_{i_j}\| < \frac{\|x_{i_j}\|}{4}.$$

En particular, se tienen las desigualdades

$$\|z_{i_j} - x_{i_j}\| < \|x_{i_j}\|/4 \quad \text{y} \quad \|gz_{i_j} - y_{i_j}\| < \|x_{i_j}\|/4$$

lo que significa que $gz_{i_j} \in gB(x_{i_j}, \|x_{i_j}\|/4) \cap B(y_{i_j}, \|x_{i_j}\|/4)$. Concluimos que $g \in \left\langle B(x_{i_j}, \|x_{i_j}\|4), B(y_{i_j}, \|x_{i_j}\|/4) \right\rangle$.

Dado que cada E_i satisface la condición (A_n) para $n = 4$, cada conjunto de transportadores $\langle B(x_{i_k}, \|x_{i_k}\|/4), B(y_{i_k}, \|x_{i_k}\|/4)\rangle$ tiene cerradura compacta en G. La contención (2.4) muestra que el transportador $\langle B(x, \|x\|/8), B(y, \|x\|/8)\rangle$ también tiene cerradura compacta en G. Esto es precisamente la condición (A_n) para $n = 8$. $\square$

Corolario 2.5. *Sea G un grupo localmente compacto. Sea $\{(E_i, \|\cdot\|_i)\}$ una familia de G-espacios normados tales que cada E_i satisface la condición (A_n). Si $\widehat{E}_\infty$ es la completación del σ_∞-producto de estos espacios, entonces $\widehat{E}_\infty \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.*

Si cada E_i satisface (A_n) para $n = 4$, para la completación respectiva $\widehat{E}_1$ del σ_1-producto, el complemento $\widehat{E}_1 \setminus \{0\}$ es también un G-espacio propio.

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.1 que las dos completaciones $\widehat{E}_\infty$ y $\widehat{E}_1$ son G-espacios en donde G actúa por isometrías. De hecho, G actúa mediante operadores ortogonales en estos espacios. De acuerdo a las proposiciones 2.3 y 2.4, E_∞ satisface (A_n) y en el segundo caso, E_1 satisface (A_n) para $n = 8$. la Proposición 2.2, $\widehat{E}_\infty \setminus \{0\}$ y $\widehat{E}_1 \setminus \{0\}$ son G-espacios propios. $\square$

2.3. Criterio para extensores equivariantes

Presentamos ahora un criterio sobre los puntos fijos de un G-espacio que nos permite determinar cuando este es un extensor equivariante. Su demostración se basa en una combinación de tres importantes resultados dentro de la teoría equivariante de retractos. Las demostraciones se pueden consultar en los trabajos de Abels [2] y Antonyan [10] y [5] respectivamente. Este ejemplo ilustra de nuevo la evolución de la teoría a partir de grupos de Lie compactos a grupos localmente compactos.

Teorema 2.6 (Abels)**.** *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces un G-espacio propio T es un G-AE si es un K-AE para cada subgrupo compacto $K \subset G$*

Teorema 2.7 (Antonyan)**.** *Sea K un grupo compacto. Un K-espacio T que es K-ANE es un K-AE si y solo si T^H es contraible para cada subgrupo cerrado $H \subset K$.*

Teorema 2.8 (Antonyan)**.** *Sea K un grupo compacto. Un subconjunto convexo e invariante V de un K-espacio localmente convexo L es un K-AE si V es completo o bien L es de dimensión finita o G es finito.*

Proposición 2.9. *Sea G un grupo localmente compacto. Si L es un G-espacio de Banach tal que para cada subgrupo compacto $H \subset G$, el espacio de H-puntos fijos L^H es de dimensión infinita, entonces $L \setminus \{0\}$ es un G-AE.*

Demostración. En virtud del Teorema 2.6, bastará entonces fijar un subgrupo compacto $K \subset G$ y verificar que $L \setminus \{0\}$ es un K-AE. Para tal efecto, observemos primero que de la completud de L se deduce a través del Teorema 2.8 que L es un K-AE y por tanto $L \setminus \{0\}$ es un K-ANE.

Estamos entonces en condiciones de aplicar el Teorema 2.7. Tomemos un subgrupo cerrado H de K. Siendo $K \subset G$ compacto, $H \subset G$ es un subgrupo compacto y L^H es de dimensión infinita por hipótesis. En este caso, un resultado de V. Klee Jr. [26] afirma que L^H y $L^H \setminus \{0\}$ son homeomorfos , en particular $L^H \setminus \{0\}$ es contraible. Como $(L \setminus \{0\})^H = L^H \setminus \{0\}$, es contraible y por tanto $L \setminus \{0\}$ es un K-AE. □

2.4. Acciones propias en espacios de funciones

En la Sección 1.2, mencionamos la compatibilidad de la acción (1.4):

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$$

en el espacio de funciones $C_c(X, L)$, donde G es un grupo localmente compacto, X un G-espacio y L un espacio arbritrario. Cuando L tiene estructura lineal, $C_c(X, L)$ es de hecho un G-espacio lineal (Proposición 1.9). En particular, $C_c(G, L)$ resulta un espacio ambiente adecuado para invariantizar encajes de G-espacios (Teorema 1.10). En el contexto o clase de las acciones propias que ahora consideramos, este tipo de espacios NO es adecuado. En efecto, dado que cualquier función constante (o constante en cada órbita) $f : X \to L$ es G-fija, si $C_c(X, L)$ es propio, $G_f = G$ debe ser compacto. Más aún para $G = \mathbb{R}$, cualquier función periódica $f \in C_c(G, \mathbb{R}^n)$ (con periodo $p > 0$) tiene estabilizador no compacto ($G_f = p\mathbb{Z}$).

No obstante, cuando L es un espacio normado podemos considerar en el subespacio lineal $C^*(X, L)$ de funciones continuas y acotadas de X en Y la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Para el caso de $L = \mathbb{R}$, escribimos $C^*(X)$ en vez de $C^*(X, L)$. En adelante consideraremos sólo la topología inducida por esta norma en $C^*(X, L)$. Esta acción es claramente isométrica pues para $f \in C^*(X, L)$ y $g \in G$,

$$\|gf\| = \sup_{x \in X} |f(g^{-1}x)| = \sup_{y \in X} |f(y)| = \|f\|.$$

Cuando X es compacto, esta la topología coincide con la compacto-abierta en $C^*(X, L) = C(X, L)$, conviertiéndo a $C(X, L)$ en un G-espacio normado. Resulta interesante el hecho de que, en el caso de X no compacto, la acción en $C^*(X, L)$ puede bien NO ser continua, incluso para un grupo compacto de Lie como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1. Sean $X = \mathbb{C}$ y $G = \mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}^*$. La acción de G en X es la multiplicación de números complejos: $g \cdot x = gx$. La acción de G en $C^*(X)$ no es continua por ejemplo, en $(1, f_0)$ donde $f_0(x) = \arctan \Re(x)$.

En efecto, de ser este el caso, el movimiento inducido $G \to C^*(X)$, $g \mapsto gf_0$ sería continuo en $1 \in G$. Esto significa que hay una vecindad $U \subset G$ para la cual

$$|f_0(g^{-1}x) - f_0(x)| < 1$$

para toda $x \in X$ y toda $g \in U$. En particular, para $x \in X$ tal que $\Re(x) = 0$ tenemos $|f_0(g^{-1}x)| < 1$ para toda $g \in U$. Sin embargo, si $g \neq 1, -1$ y $\Im(x) \to \infty$, entonces

$$\Re(g^{-1}x) \to \infty$$

de modo que

$$|f_0(g^{-1}x)| = |\arctan(\Re(g^{-1}x))| \to \frac{\pi}{2}$$

lo que es una contradiccón.

Si queremos entonces que la acción (1.4) sea continua bajo la métrica inducida por la norma del supremo $\|\cdot\|$, una restricción salta a la vista. A saber, cada traslación $g \mapsto gf$ debe ser una función continua de G en $C^*(X)$. Las funciones f para las cuales esta afirmación es cierta reciben el nombre de funciones G-*uniformes*. Resulta además que esta condición sea suficiente para garantizar la continuidad conjunta de la acción.

Definición 2.10. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ se llama G**-uniforme** si para cada $\varepsilon > 0$ hay una vecindad $U \subset G$ de e tal que

$$|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$$

para cada $g \in U$ y cada $x \in X$.

Las funciones G-uniformes fueron consideradas en un principio por De Vries [38] y Antonyan y Smirnov [12] en el estudio de compactaciones y linealizaciones equivariantes bajo el nombre de funciones θ-*uniformes*. En su revisón sobre el problema de compactaciones equivariantes, Megrelishvilli [31] llama a estas funciones *unformemente continuas por la derecha* y explica la íntima relación entre estas funciones y las compactaciones sobre en G-espacio.

Como ejemplos de funciones G-uniformes podemos considerar:

- Las funciones constantes $c : X \to \mathbb{R}$;
- En general, las funciones continuas y constantes en cada órbita de X;
- Cuando $X = G$, las funciones G-uniformes coinciden con aquellas *uniformemente continuas por la derecha*, esto es, funciones uniformente continuas $f : G \to \mathbb{R}$ considerando la uniformidad derecha del grupo topológico G.

Lema 2.11. *Sea G un grupo topológico. Si X es un G-espacio, el subespacio $C'(X) \subset C^*(X)$ de todas las funciones continuas, acotadas y G-uniformes es una G-álgebra de Banach.*

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in C'(X)$. El hecho de que $\lambda f_1 + \mu f_2$ es G-uniforme para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es inmediato de la definición. El argumento de que $C'(X) \subset C^*(X)$ es invariante se encuentra en el trabajo de Antonyan [6].

Para ver que $f_1 f_2$ es G-uniforme sea $\varepsilon > 0$. Observemos primero que para $g \in G$ y $x \in X$,

$$\begin{aligned}|f_1(gx)f_2(gx) - f_1(x)f_2(x)| &\leq |f_1(gx)f_2(gx) - f_1(gx)f_2(x)| \\ &\quad + |f_1(gx)f_2(x) - f_1(x)f_2(x)| \\ &= |f_1(gx)||f_2(gx) - f_2(x)| \\ &\quad + |f_2(x)||f_1(gx) - f_1(x)| \\ &\leq M(|f_2(gx) - f_2(x)| + |f_1(gx) - f_1(x)|)\end{aligned}$$

donde hemos tomado $M = \max(\|f_1\|, \|f_2\|)$. Entonces para una vecindad $U \subset G$ de e tal que

$$|f_i(gx) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad i = 1, 2$$

para cada $g \in U$ y cada $x \in X$. Debemos tener $|f_1(gx)f_2(gx) - f_1(x)f_2(x)| < \varepsilon$ para cada $g \in U$ y cada $x \in X$.

Para mostrar que $f_1 f_2$ es G-uniforme, basatará entonces considerar para un $\varepsilon > 0$ dado, una vecindad $U \subset G$ de e tal que

$$|f_1(gx) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{y} \quad |f_2(gx) - f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

para cada $g \in U$ y cada $x \in X$.

Para comprobar la continuidad de la acción tomemos $f \in C'(X)$, $g \in G$ y $\varepsilon > 0$ arbritrariamente. Sea $U \subset G$ una vecindad de e tal que

$$|f(x) - f(tx)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $t \in U$ y cada $x \in X$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que U es *simétrica*, i.e. $U = U^{-1}$ donde $U^{-1} = \{t^{-1} \mid t \in U\}$. Entonces para cada $x \in X$ y cada $h \in gU$, tenemos $h = gt$ para alguna $t \in U$ y

$$|f(x) - f((h^{-1}g)x)| = |f(x) - f(t^{-1}x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i.e. $\|f - g^{-1}hf\| \leq \varepsilon/2$ para cada $h \in gU$. Aplicando la ortogonalidad de la acción, tenemos $\|gf - hf\| \leq \varepsilon/2$. Esto demuestra la continuidad del movimiento inducido $f \mapsto gf$.

Sean entonces $h \in gU$ y $\varphi \in B(f, \varepsilon/2)$. Tenemos que

$$\|gf - h\varphi\| \leq \|gf - hf\| + \|hf - h\varphi\| = \|gf - hf\| + \|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lo que demuestra la continuidad de la acción.

Verificamos ahora que $C'(X)$ es cerrado en el espacio de Banach $C^*(X)$. Dada un sucesión $\{f_n\}$ en $C'(X)$ convergente a $f \in C^*(X)$ veremos que f es G-uniforme. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$, existe un entero $N > 0$ tal que $\|f - f_n\| \leq \varepsilon/3$ para cada $n \geq N$. Sea entonces $U \subset G$ una vecindad de $e \in G$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(gx)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para cada $g \in U$ y cada $x \in X$. Entonces, dados $g \in U$ y $x \in X$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(gx)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(gx)| + |f_N(gx) - f(gx)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

de donde concluimos que f es G-uniforme. □

Aunque el espacio $C'(X)$ de funciones G-uniformes, continuas y acotadas sobre un G-espacio X también es un G-espacio, no hay garantía aparente para que $C'(X) \setminus \{0\}$ resulte un G-espacio propio. Esto a pesar de que el espacio X sí sea propio. Para resolver este problema consideraremos el subespacio de aquellas funciones con soporte pequeño:

$$P(X) = \{f \in C'(X) \mid \text{sop}\, f \subset X \text{ es pequeño}\}$$

donde $\text{sop}\, f = \{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Es fácil comprobar que $P(X)$ es un subespacio vectorial de $C'(X)$. Su importancia radica en el hecho de que $P_0(X) = P(X) \setminus \{0\}$ es en efecto un G-espacio propio y los espacios de la forma $P(X)$ constituirán los componentes o espacios básicos para los encajes del capítulo 3. Revisemos entonces algunas de sus propiedades.

Proposición 2.12. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio, entonces $P_0(X)$ es un G-espacio propio. De hecho, $P(X)$ satisface la propiedad (A_n) de tener bolas uniformemente pequeñas para $n =$ 4.*

Demostración. Sean $f, h \in P_0(X)$ dos elementos cualesquiera. Veremos incluso que $B(f, \|f\|/2)$ y $B(h, \|f\|/4)$ son relativamente delgadas. Sean $U = \operatorname{sop} h$ y $x_0 \in X$ un punto tal que $|f(x_0)| > 3\|f\|/4$. Como $U \subset X$ es pequeña, $\langle \{x_0\}, U\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Bastará entonces mostrar que

$$\left\langle B\left(f, \frac{\|f\|}{2}\right), B\left(h, \frac{\|f\|}{4}\right)\right\rangle \subset \big\langle \{x_0\}, U\big\rangle. \tag{2.5}$$

Para ello, tomemos $g \in \langle B(f, \|f\|/2), B(h, \|f\|/4)\rangle$. Entonces hay una

$$h' \in gB(f, \frac{\|f\|}{2}) \cap B(h, \frac{\|f\|}{4})$$

Como $h' \in B(h, \|f\|/4)$, tenemos que

$$|h'(gx_0)| - |h(gx_0)| \le |h'(gx_0) - h(gx_0)| < \frac{\|f\|}{4} \tag{2.6}$$

Además, $g^{-1}h' \in B(f, \|f\|/2)$ por lo que

$$|f(x_0)| - |h'(gx_0)| \le |f(x_0) - h'(gx_0)| = |g^{-1}h'(x_0) - f(x_0)| < \frac{\|f\|}{2} \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) deducimos que

$$|h(gx_0)| > |h'(gx_0)| - \frac{\|f\|}{4} \quad \text{y} \quad |h'(gx_0) > |f(x_0)| - \frac{\|f\|}{2}$$

de donde se obtiene

$$|h(gx_0)| > |h'(gx_0)| - \frac{\|f\|}{4} > |f(x_0)| - \frac{\|f\|}{2} - \frac{\|f\|}{4} > \frac{3\|f\|}{4} - \frac{\|f\|}{2} - \frac{\|f\|}{4} = 0$$

por lo que $gx_0 \in U$ y (2.5) queda demostrada. $\square$

Proposición 2.13. *Sean G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo compacto. Si X es un G-espacio de G-$\mathcal{M}$ y X/H es infinito, entonces el subespacio lineal de H-puntos fijos $P(X)^H \subset P(X)$ es de dimensión infinita.*

Demostración. Sea d una métrica G-invariante y admisible para X. Sabemos por el Lema 1.5, que la métrica

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \operatorname{ínf}\{d(x', y') \mid x' \in \widetilde{x},\ y' \in \widetilde{y}\}$$

es compatible con la topología cociente de X/G. De hecho, se establece que

$$p(B_d(x,\varepsilon)) = B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$$

para toda $x \in X$ y toda $\varepsilon > 0$, donde $p : X \to X/H$ es la función cociente y $p(x) = \widetilde{x}$.

Como X/H es infinito y metrizable, podemos elegir una sucesión infinita de bolas mutuamente ajenas $\left\{B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}_i, r)\right\}_{i=1}^{\infty}$ en X/H. De la igualdad anterior se sigue que

$$p^{-1}B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}_i, r_i) = HB_d(x_i, r_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots$$

es una famila de subconjuntos abiertos y H-invariantes en X. Podemos suponer incluso que cada bola $B_d(x_i, r_i) \subset X$ es pequeña. Definamos la famila (infinita) de funciones $f_i : X \to \mathbb{R}$

$$f_i(y) = \text{máx}\{r_i - d(y, H(x_i)), 0\} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots$$

las cuales son claramente continuas y acotadas. Además, el soporte de cada f_i es $HB_d(x_i, r_i)$, el cual es pequeño en X pues H es compacto y $B_d(x_i, r_i)$ es pequeña (Lema 1.17).

Mostraremos que estas funciones son también G-uniformes. Dada $\varepsilon > 0$, hay una vecindad W_i de $e \in G$ tal que

$$d(gx_i, x_i) < \varepsilon \tag{2.8}$$

para toda $g \in W$. La existencia de W_i está garantizada por la continuidad del movimiento $\theta^{x_i} : G \to X$. Veamos que (2.8) implica

$$|f_i(gy) - f_i(y)| < \varepsilon$$

para toda $y \in X$ y toda $g \in W_i$.

De acuerdo a la definición de f_i, hay cuatro posibles casos:

Si $d(gy, H(x_i)) \leq r_i$ y $d(y, H(x_i)) \leq r_i$, entonces

$$\begin{aligned} |f_i(gy) - f_i(y)| &= |r_i - d(gy, H(x_i)) - 1 + d(y, H(x_i))| \\ &= |d(y, H(x_i)) - d(y, g^{-1}H(x_i))| \leq d(H(x_i), g^{-1}H(x_i)) \\ &= d(gH(x_i), H(x_i)) \leq d(gx_i, x_i) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $d(gy, H(x_i)) \leq 1$ y $d(y, H(x_i)) \geq r_i$, entonces

$$\begin{aligned} |f_i(gy) - f_i(y)| &= r_i - d(gy, H(x_i)) \leq d(y, H(x_i)) - d(gy, H(x_i)) \\ &= d(y, H(x_i)) - d(y, g^{-1}H(x_i)) \leq d(H(x_i), g^{-1}H(x_i)) \\ &= d(gH(x_i), H(x_i)) \leq d(gx_i, x_i) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $d(gy, H(x_i)) \geq 1$ y $d(y, H(x_i)) \leq r_i$ este caso se reduce al anterior.

Si $d(gy, H(x_i)) \geq 1$ y $d(y, H(x_i)) \geq r_i$ entonces $|f_i(gy) - f_i(y)| = 0 < \varepsilon$.

Esto demuestra que $f_i(x)$ es en realidad G-uniforme. De la definicón de cada función f_i se sigue también que dada $y \in X$,

$$\begin{aligned} f_i(hy) &= \text{máx}\{r_i - d(hy, H(x_i)), 0\} = \text{máx}\{r_i - d(y, h^{-i}H(x_i)), 0\} \\ &= \text{máx}\{r_i - d(y, H(x_i)), 0\} = f_i(y) \end{aligned}$$

para cada $h \in H$, i.e. f_i es constante en las H-órbitas de X. Esto significa que bajo la acción (1.4) de G en $P(X)$, $h^{-1}f_i = f_i$ para cada $h \in H$, o sea que $f_i \in P(X)^H$. La demostración del enunciado se sigue de observar que una familia de funciones con soportes mutuamente disjuntos es linealmente independiente. Este es el caso para la familia infinita $\{f_1, f_2, \ldots\}$. □

Para caracterizar la completación métrica del G-espacio normado $P(X)$ usaremos la noción de G-normalidad estudiada por Megrelishvili. El resultado (Proposición 2.15) afirma que *si G es localmente compacto, todo G-espacio normal es G-normal*. Su demostración se encuentra, en el trabajo de N. Antonyan [3].

Definición 2.14. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Dos sunconjuntos $A, B \subset X$ son G**-disjuntos** si existe una vecindad $V \subset G$ de e tal que

$$V(A) \cap V(B) = \emptyset$$

Proposición 2.15. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio normal. Dados dos subconjuntos cerrados y G-disjuntos $A, B \subset X$, existe una función G-uniforme $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Proposición 2.16. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio. Entonces la completación métrica del espacio $P(X)$ es isomorfa al espacio L de funciones $f \in C'(X)$ tales que para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto pequeño $U \subset X$ tal que*

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{para cada } x \in X \setminus U. \tag{2.9}$$

Demostración. En vista de que $C'(X)$ es un G-espacio de Banach, mostraremos que la cerradura $\overline{P(X)} \subset C'(X)$ es precisamente el conjunto L en cuestión. En efecto, dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciónes G-uniformes acotadas $f_n : X \to \mathbb{R}$ que convergen uniformente a una $f \in C^*(X)$ que satisfacen la propiedad (2.9), verificamos que f también satisface (2.9). Sea $\varepsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\| < \varepsilon/2 \quad \text{para toda } n \geq N.$$

Entonces para f_N existe un conjunto pequeño $U \subset X$ tal que $|f_N(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in X \setminus U$. Notemos ahora que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)| \\ &\leq \|f_N - f\| + |f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

cuando $x \in X \setminus U$. Esto demuestra que $L \subset C'(X)$ es cerrado y claramente $P(X) \subset L$ por lo que $\overline{P(X)} \subset L$.

Por otro lado, dada $f \in L$, construiremos una sucesión $\{f_n\} \subset P(X)$ que converge a f uniformemente. Dada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n \subset X$ abierto y pequeño tal que

$$|f(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{para cada } x \in X \setminus U_n$$

Esto significa que $A_n = f^{-1}(-\infty, -2/n] \cup f^{-1}[2/n, \infty)$ es un cerrado contenido en U_n. Observemos que A_n y $X \setminus U_n$ son en realidad subconjuntos cerrados G-disjuntos. En efecto, para $1/2n$ sea $V_n \subset G$ una vecindad de e tal que

$$|f(gx) - f(x)| < \frac{1}{2n}$$

para cada $g \in V_n$ y cada $x \in X$. Entonces $V_n(A_n) \cap (X \setminus U_n) = \emptyset$. De lo contrario, si $gx \in X \setminus U_n$ para alguna $g \in V_n$ y $x \in A_n$, tendríamos

$$|f(gx) - f(x)| > \frac{1}{n}$$

contradiciendo la ecuación anterior. Basta ahora considerar una vecindad simétrica $W_n \subset G$ de e tal que $W_n^2 \subset V_n$ para ver que $W_n(A_n) \cap W_n(X \setminus U_n) = \emptyset$.

Aplicando la Proposición 2.15, tomemos $\varphi_n : X \to [0, 1]$ una función G-uniforme tal que $\varphi_n(A_n) = 1$ y $\varphi_n(X \setminus U_n) = 0$. Definimos entonces $f_n(x) =$

$\varphi_n(x)f(x)$. De acuerdo al Lema 2.11, $f_n \in C'(X)$. Claramente sop $f_n \subset U_n$. Verificamos que $f_n \to f$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que $2/N < \varepsilon$; afirmamos que $\|f_n - f\| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Dada $x \in X$:

Si $x \in A_n$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.

Si $x \in X \setminus U_n$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = |f(x)| < 1/n < \varepsilon$.

Si $x \in U_n \setminus A_n$, entonces $|f_n(x)| = \varphi_n(x)|f(x)| < |f(x)| < 1/n$ por lo que $|f_n(x) - f(x)| \leq 2/n < \varepsilon$.

De modo que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in X$, i.e. $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$. Esto termina la demostración. $\square$

Capítulo 3

Linealizaciones equivariantes

En este capítulo presentamos las construcciones de encajes equivariantes para G-espacios propios en espacios lineales donde el complemento del vector cero es un G-espacio propio también. La primera parte considera el caso particular de aquellos espacios que admiten una rebanada global cuando el grupo rebanador es compacto. Estos espacios son G-equivalentes a un producto torcido (Lema 1.25). Consideramos después el caso de los G-espacios propios y metrizables que admiten una métrica invariante usando el hecho de que admiten tambien cubiertas tubulares (Teorema 1.34). Finalmente damos una generalización de estos encajes para cualquier G-espacio propio usando el hecho de que estos espacios admiten una familia de pseudométricas invariantes.

3.1. Linealización de un producto torcido

Lema 3.1. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio. Si X tiene una H-rebanada global para algún subgrupo compacto $H \subset G$, entonces X admite una famila de pseudométricas invariantes $\{\rho_i\}$ tales que cada ρ_i-bola unitaria es pequeña en X. Más aún, si X es metrizable, la familia $\{\rho_i\}$ se reduce a una sola métrica compatible ρ con la misma propiedad.*

Demostración. Sean $f : X \to G/H$ una función equivariante y $S = f^{-1}(eH)$ su H-rebanada global. Dado que G es localmente compacto y H es compacto,

G/H es un G-espacio localmente compacto y propio, por lo que hay una vecindad pequeña W de $eH \in G/H$. Como f es equivariante, $U = f^{-1}(W)$ es una vecindad pequeña de S. De aquí se sigue que

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{para cada subconjunto compacto } A \subset X, \text{ el conjunto} \\ \langle A, U\rangle = \{g \in G|\ gA \cap U \neq \emptyset\} \quad \text{tiene cerradura compacta en } G. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Consideremos ahora la proyección $\pi : G \to G/H$. Sea $Q \subset G$ una vecindad *simétrica* de e i.e. $Q = Q^{-1}$, tal que su cerradura $K = \overline{Q}$ es compacta en G y está contenida en $\pi^{-1}(W)$. La vecindad K de e también es simétrica y $K(S) \subset U$ por definición. Dado que G/H es localmente compacto y $f(K(S)) = KH \subset W$ es compacto, podemos elegir una función continua $\tilde{\varphi} : G/H \to [0,1]$ tal que $\tilde{\varphi}(KH) = 0$ y $\tilde{\varphi}((G/H) \setminus W) = 1$ ([25, Teorema 5.18]). Si $\varphi = \tilde{\varphi} f : X \to [0,1]$, entonces $\varphi(K(S)) = 0$ mientras que $\varphi(X \setminus U) = 1$.

Como el espacio es de Tychonoff, X posee una familia $\{d'_i\}_{i\in I}$ de pseudométricas para X *compatibles con su topología* i.e., cada $d'_i : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua y la totalidad de las d'_i-bolas forman una subbase para la topología de X. Si X es metrizable basta considerar una métrica compatible d'. La nueva familia de pseudométricas $\{d_i\}_{i\in I}$ dada por

$$d_i(x, y) = d'_i(x, y) + |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

también es compatible con la topología de X. Definamos enseguida para cada par de puntos $x, y \in X$ y cada índice $i \in I$, las funciones $r_i : X \to \mathbb{R}$ y $\mu_i : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$r_i(x) = d_i(x, X \setminus U), \quad \text{y} \quad \mu_i(x, y) = \text{mín}\{d_i(x, y), r_i(x) + r_i(y)\}.$$

Es claro que cada μ_i es una pseudométrica para X. Definamos ahora las pseudométricas invariantes $\rho_i : X \times X \to \mathbb{R}$ para cada $i \in I$

$$\rho_i(x, y) = \sup_{g\in G} \mu_i(gx, gy)$$

para cada $i \in I$. Cuando X es metrizable, basta considerar una sola métrica compatible d' y las respectivas métricas d y ρ. Para ver que la pseudométrica ρ es en verdad una métrica, supongamos que $x, y \in X$ son dos puntos distintos. Como $S \subset X$ es una rebanada global, $g_0 x \in S \subset U$ para alguna $g_0 \in G$, por lo que $r(g_0x) > 0$. Como $g_0x \neq g_0y$, $d(g_0x, g_0y) > 0$ y $\mu(g_0x, g_0y) > 0$ de donde $\rho(x, y) > 0$.

De acuerdo al trabajo de Antonyan y Neymet [11], la familia $\{\rho_i\}_{i\in I}$ es compatible con la topología de X. Para mayor claridad sin embargo, mostraremos la compatibilidad de la métrica invariante ρ para el caso metrizable. Para ello, basta verificar que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X, converge bajo la métrica d si y sólo si convere bajo la métrica ρ.

Supongamos primero que $\{x_n\}$ es una sucesión en X convergente bajo la métrica ρ, a un punto x_0. Sean $\varepsilon > 0$ y $B_d(x_0, \varepsilon)$ la d-bola alrededor de x_0 correspondiente a la métrica original d para X. Como $G(S) = X$, entonces $g_0x_0 \in S \subset U$ para algún $g_0 \in G$. Dado que la traslación $\theta_{g_0^{-1}} : X \to X$ es continua, hay un $\delta > 0$ para el cual

$$B_d(g_0x_0, \delta) \subset U \quad \text{y} \quad g_0^{-1}B_d(g_0x_0, \delta) \subset B_d(x_0, \varepsilon).$$

La primera inclusión implica que $r(g_0x_0) \geq \delta > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ un índice para el cual

$$\rho(x_n, x_0) < \delta/2$$

para cada $n \geq n_0$. Como

$$\mu(g_0x_n, g_0x_0) \leq \rho(x_n, 0) < \delta/2$$

para cada $n \geq n_0$ y

$$r(g_0x_n) + r(g_0x_0) \geq r(g_0x_0) \geq \delta$$

concluimos que $d(g_0x_n, g_0x_0) < \delta/2$ para cada $n \geq n_0$. Esto significa que $g_0x_n \in B_d(g_0x_0, \delta)$ por lo que $x_n \in B_d(x_0, \varepsilon)$ para $n \geq n_0$, i.e. $\{x_n\}$ también converge a x_0 bajo la métrica compatible d.

Por el otro lado, supongamos que alguna sucesión $\{x_n\}$ en X converge a un x_0 bajo d pero NO bajo ρ. Entonces para un $\varepsilon_0 > 0$ podemos suponer la existencia de una subsucesión $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ para la cual

$$\rho(y_k, x_0) \geq \varepsilon_0$$

para cada k. En este caso, podemos encontrar también un sucesión $\{g_k\}$ en G tal que

$$\mu(g_ky_k, g_kx_0) \geq \varepsilon_0/2.$$

De este modo,

$$r(g_k y_k) + r(g_k x_0) \geq \varepsilon_0$$

por lo que $\{g_k\} \subset \langle A, U \rangle$, donde $A = \{y_k\} \cup \{x_0\}$. Como A es compacto, se sigue de (3.1) que $\langle A, U \rangle$ tiene cerradura compacta en G por lo que $\{g_k\}$ tiene al menos un punto de acumulación $g \in G$. Por la continuidad de la acción de G en X, gx_0 es un punto de acumulación tanto para $\{g_k x_0\}$ como para $\{g_k y_k\}$ en X. Pero en un espacio métrico como (X, d), tanto $\{g_k x_0\}$ como $\{g_k y_k\}$ deben contener subsucesiones convergentes al punto de acumulación gx_0. Renombrando los índices de ser necesario, supondremos que las mismas sucesiones $\{g_k x_0\}$ y $\{g_k y_k\}$ convergen a gx_0. Esto implica que hay un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(g_k y_k, g_k x_0) < \varepsilon_0/2$$

para cada $k \geq k_0$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que $d(g_k y_k, g_k x_0) \geq \mu(g_k y_k, g_k x_0) \geq \varepsilon_0/2$. Tenemos entonces la equivalencia entre las métricas d y ρ.

Regresando al caso general de la familia de pseudométricas $\{\rho_i\}$, mostraremos ahora que cada bola unitaria para esta familia de pseudométricas es en realidad un subconjunto pequeño de X. Para esto, sean $x \in X$ e $i \in I$. En vista de que S es una H-rebanada global para X y de que ρ_i es G-invariante, podemos asumir que $x \in S$ (en todo caso, $gx \in S$ para alguna $g \in G$ y $B_{\rho_i}(gx, r) = gB_{\rho_i}(x, r)$). Basta entonces mostrar que $B_{\rho_i}(x, 1)$ está contenida en algún subconjunto pequeño de X. En efecto, si $y \in X \setminus K(U)$ y $g \in K$, entonces $gy \in X \setminus U$ (pues $K = K^{-1}$) y $gx \in K(S)$. Así,

$$d_i(gx, gy) = d'_i(gx, gy) + |\varphi(gx) - \varphi(gy)| = d'_i(gx, gy) + 1$$

y $r_i(gx) \geq 1$ por la misma razón. Tenemos entonces que

$$\mu_i(gx, gy) \geq 1$$

siempre que $y \in X \setminus K(U)$ y $g \in K$. Esto a su vez implica que

$$\rho_i(x, y) \geq \sup_{g \in K} \mu_i(gx, gy) \geq 1$$

siempre que $y \in X \setminus K(U)$, i.e. $B_{\rho_i}(x, 1) \subset K(U)$. Pero $K(U)$ es pequeño pues U lo es y K es compacto (Lema 1.17). Se sigue que $B_{\rho_i}(x, 1)$ es también pequeño. $\square$

Lema 3.2. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio. Si X tiene una H-rebanada global para algún subgrupo compacto $H \subset G$, entonces hay una familia de funciones equivariantes $\{f_i : X \to P_0(X)\}_{i \in I}$ que separa puntos de conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $\{\rho_i\}_{i \in I}$ la familia de pseudométricas invariantes construidas en el Lema 3.1. Para cada $i \in I$ se definen las funciones $f_i : X \to P_0(X)$ por

$$f_i(x)(y) = \begin{cases} 1 - \rho_i(x, y), & \text{si} \quad \rho(x, y) \leq 1, \\ 0, & \text{si} \quad \rho(x, y) \geq 1. \end{cases}$$

Para verificar que f_i está bien definida, sea $x \in X$. Claramente $f_i(x) : X \to [0, 1]$ es una función continua y acotada. Dada $\varepsilon > 0$, hay una vecindad W de $e \in G$ tal que

$$\rho_i(hx, x) < \varepsilon \tag{3.2}$$

para cada $h \in W$. La existencia de W está garantizada por la continuidad de la acción en el punto (x, e). Veamos que (3.2) implica que

$$|f_i(x)(hy) - f_i(x)(y)| < \varepsilon$$

para cada $h \in W$ y cada $y \in X$. Esto es, que $f_i(x)$ es G-uniforme. De acuerdo a la definición de $f_i(x)$, los posibles casos son:

Si $\rho_i(x, hy) \leq 1$ y $\rho_i(x, y) \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} |f_i(x)(hy) - f_i(x)(y)| &= |1 - \rho_i(x, hy) - 1 + \rho_i(x, y)| = \\ |\rho_i(x, y) - \rho_i(h^{-1}x, y)| &\leq \rho_i(x, h^{-1}x) = \rho_i(hx, x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $\rho_i(x, hy) \leq 1$ y $\rho_i(x, y) \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} |f_i(x)(hy) - f_i(x)(y)| &= 1 - \rho_i(x, hy) \leq \rho_i(x, y) - \rho_i(x, hy) = \\ \rho_(x, y) - \rho_i(h^{-1}x, y) &\leq \rho_i(x, h^{-1}x) = \rho_i(hx, x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $\rho_i(x, hy) \geq 1$ y $\rho_i(x, y) \leq 1$, este caso se reduce al anterior.

Si $\rho_i(x, hy) \geq 1$ y $\rho_i(x, y) \geq 1$, entonces $|f_i(x)(hy) - f_i(x)(y)| = 0 < \varepsilon$.

Esto demuestra que $f_i(x)$ es efectivamente G-uniforme. Observemos también que la elección de las pseudométricas ρ_i, da como resultado que cada $f_i(x)$ tenga precisamente un soporte pequeño (la ρ_i-bola unitaria alrededor de x), así que $f_i(x) \in P_0(X)$.

Observamos ahora que para cada $i \in I$, la siguiente desigualdad tiene lugar:

$$\|f_i(x_1) - f_i(x_2)\| \leq \rho_i(x_1, x_2) \tag{3.3}$$

para toda $x_1, x_2 \in X$. Esto demuestra a su vez que f_i is uniformemente continua. Para verificar la ecuación (3.3) sea $y \in X$ y consideremos los posibles casos:

Si $\rho_i(x_1, y) \leq 1$ y $\rho_i(x_2, y) \leq 1$, entonces

$$|f_i(x_1)(y) - f_i(x_2)(y)| = |\rho_i(x_1, y) - \rho_i(x_2, y)| \leq \rho_i(x_1, x_2).$$

Si $\rho_i(x_1, y) \leq 1$ y $\rho_i(x_2, y) \geq 1$, entonces

$$|f_i(x_1)(y) - f_i(x_2)(y)| = |1 - \rho_i(x_1, y)| \leq \rho_i(x_2, y) - \rho_i(x_1, y) \leq \rho_i(x_2, x_1).$$

Si $\rho_i(x_1, y) \geq 1$ y $\rho_i(x_2, y) \leq 1$, este caso se reduce al anterior.

Si $\rho_i(x_1, y) \geq 1$ y $\rho_i(x_2, y) \geq 1$, entonces

$$|f_i(x_1)(y) - f_i(x_2)(y)| = 0 \leq \rho_i(x_1, x_2).$$

Con lo que (3.3) queda demostrada. Por otro lado, dado que ρ_i es invariante, f_i es equivariante. En efecto, dados $x, y \in X$ cualesquiera,

$$\begin{aligned} f_i(gx)(y) &= \begin{cases} 1 - \rho_i(gx, y), & \text{si} \quad \rho(gx, y) \leq 1, \\ 0, & \text{si} \quad \rho(gx, y) \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \rho_i(x, g^{-1}y), & \text{si} \quad \rho(x, g^{-1}y) \leq 1, \\ 0, & \text{si} \quad \rho(x, g^{-1}y) \geq 1 \end{cases} \\ &= f_i(x)(g^{-1}y) = \left(g f_i(x)\right)(y) \end{aligned}$$

de donde $f_i(gx) = g f_i(x)$.

Tenemos entonces la familia de funciones equivariantes $\{f_i : X \to P_0(X)\}_{i \in I}$. Mostramos finalmente que esta familia separa puntos de conjuntos cerrados en X. Observemos antes lo siguiente. Si $x, y \in X$ son tales que $\rho_i(x, y) \leq 1$, entonces

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| \geq |f_i(x)(x) - f_i(y)(x)| = \rho_i(x, y)$$

que junto con la desigualdad (3.3) nos da

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| = \rho_i(x, y). \tag{3.4}$$

Ahora sean $A \subset X$ un cerrado y $x \in X \setminus A$. En este caso hay un índice $j \in I$ y una $0 < \varepsilon < 1$ para los cuales, $B_{\rho_j}(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Veamos que la ε-bola alrededor de $f_j(x)$ en $P_0(X)$ también queda contenida en $P_0(X) \setminus f_j(A)$. Supongamos que esto no es cierto, entonces existe un punto $y \in A$ para el cual $\|f_j(x) - f_j(y)\| < \varepsilon$. Dos son los posibles casos para la ρ_j-distancia entre x y y:

Si $\rho_j(x, y) < 1$, entonces

$$\rho_j(x, y) = \|f_j(x) - f_j(y)\| < \varepsilon$$

de donde $y \in B_{\rho_j}(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$.

Si $\rho_j(x, y) \geq 1$, entonces

$$\varepsilon > \|f_j(x) - f_j(y)\| \geq |f_j(x)(y) - f_j(y)(y)| = 1.$$

Estas contradicciones demuestran la afirmación. □

Corolario 3.3. *Bajo las hipótesis del Lema 3.2, el G-espacio propio X admite un encaje equivariante en el producto de algunas copias de $P(X)$. Este es un G-espacio lineal L para el cual $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.*

Demostración. La función diagonal $\Delta : X \to L$ donde $L = \prod_{i \in I} P(X)$ y Δ está definida por

$$\Delta(x) = (f_i(x))$$

inducida por la familia de funciones equivariantes $\{f_i : X \to P_0(X)\}_{i \in I}$ arriba construida es un encaje topológico (ver [25, IV]). Es inmediato observar que el producto de G-espacios lineales es de nuevo un G-espacio lineal. Del hecho de que cada f_i es equivariante se deduce que la misma diagonal Δ lo es. Finalmente, del hecho de que $P(X)$ es un G-espacio normado y la acción en $P_0(X)$ es propia, se sigue a través de la Proposición 1.22 que $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio. □

El siguiente teorema puede considerarse como una versión equivariante del encaje de Kuratowsk-Wodyslawski para el caso particular de un producto torcido.

Teorema 3.4. *Sean G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo compacto. Si un G-espacio propio y metrizable X admite una H-rebanada* *global, entonces hay un encaje equivariante $f : X \hookrightarrow \mathbb{S}$ donde $\mathbb{S} \subset P_0(X)$ es la esfera unitaria. Además, la imagen $f(X)$ es relativamente cerrado en su envoltura convexa.*

Demostración. En el caso metrizable, la familia $\{f_i\}$ del Lema 3.2 se reduce a una función equivariante $f : X \to P_0(X)$, construida a su vez a partir de la métrica invariante ρ de X. Mostraremos que f es en realidad el encaje enunciado.

Sean $x, y \in X$. De acuerdo a (3.4), si $\rho(x,y) \leq 1$,

$$\|f(x) - f(y)\| = \rho(x,y).$$

Por otro lado, si $\rho(x,y) > 1$,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq |f(x)(x) - f(y)(x)| = 1.$$

Se sigue entonces que f es en efecto inyectiva y su inversa continua. Más aún, dado que

$$1 \geq \|f(x)\| = \sup_{z \in X} |f(x)(z)| \geq f(x)(x) = 1$$

debemos tener $f(x) \in \mathbb{S}$. Queda sólo mostrar que $f(X)$ es cerrado en su envolturar convexa:

$$\operatorname{conv}(f(X)) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i h_i \in P(X) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ h_i \in f(X) \right\}.$$

Para ello, sea $\{f(x_n)\}$ una sucesión en $f(X)$ convergente a una $h \in \operatorname{conv}(f(X))$. En este caso h es de la forma $h = \sum_{i=1}^{m} t_i f(z_i),\ z_i \in X$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $t_1 > 0$. Observemos ahora que

$$\begin{aligned}
\|f(x_n) - h\| &\geq |f(x_n)(x_n) - h(x_n)| = |1 - h(x_n)| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{m} t_i - \sum_{i=1}^{m} t_i f(z_i)(x_n) \right| = \sum_{i=1}^{m} t_i (1 - f(z_i)(x_n)) \\
&\geq t_1(1 - f(z_1)(x_n)).
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$t_1(1 - f(z_1)(x_n)) = \begin{cases} t_1 \rho(z_1, x_n) & \text{ó} \\ & t_1. \end{cases}$$

Como $\|f(x_n) - h\| \to 0$, la desigualdad anterior implica que

$$t_1(1 - f(z_1)(x_n)) = t_1\rho(z_1, x_n)$$

para casi toda n y que $t_1\rho(z_1, x_n) \to 0$. De este modo, $\rho(z_1, x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, i.e. $x_n \to z_1$. De la continuidad de f tenemos que

$$h = \lim f(x_n) = f(z_1) \in f(X).$$

Esto demuestra que $f(X) \subset \operatorname{conv}(f(X))$, es cerrado. $\square$

3.2. Linealizaciones de espacios G-metrizables

Se presenta ahora la solución al problema de linealización de un G-espacio propio para la clase G-$\mathcal{M}$ de los G-espacios metrizables que admiten un métrica invariante.

Teorema 3.5. *Sea G un grupo localmente compacto y no compacto. Si X es un G-espacio propio de G-$\mathcal{M}$, entonces existen un G-espacio normado E y un encaje equivariante $X \hookrightarrow E \setminus \{0\}$ en donde $E \setminus \{0\}$ es también un G-espacio propio.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 1.31, el G-espacio propio X posee una cubierta tubular $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ donde cada U_α tiene asociado un subgrupo rebanador $H_\alpha \subset G$ grande y compacto. Como la proyección orbital $p : X \to X/G$ es abierta y el espacio de órbitas X/G es paracompacto (Lema 1.5), para la cubierta abierta $\{p(U_\alpha)\}$ de X/G hay una partición de unidad $\{\widetilde{\varphi}_\alpha : X/G \to [0,1]\}$ localmente finita y tal que $\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}((0,1]) \subset p(U_\alpha)$. En este caso, la composición $\varphi_\alpha = \widetilde{\varphi}_\alpha p : X \to [0,1]$ es una función invariante con $W_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_\alpha$. Como W_α es abierto, invariante y está contenido en U_α, también es un segmento tubular.

Por el Teorema 3.4, a cada W_α le corresponde un encaje equivariante $f_\alpha : W_\alpha \hookrightarrow \mathbb{S}_\alpha$ donde $\mathbb{S}_\alpha \subset P(W_\alpha)$ es la esfera unitaria. A cada f_α le asociamos la función $F_\alpha : X \to P(W_\alpha)$ dada por

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x) f_\alpha(x) & \text{si} \quad x \in W_\alpha \\ 0 & \text{si} \quad x \in X \setminus W_\alpha. \end{cases}$$

la cual es claramente equivariante y con $(F_\alpha)^{-1}(0) = X \setminus W_\alpha$. Además, la restricción $F_\alpha|_{W_\alpha}$ es aún un encaje. En efecto, si $x, y \in W_\alpha$ son tales que $\varphi_\alpha(x) f_\alpha(x) = \varphi_\alpha(y) f_\alpha(y)$, tomando la norma en ambos lados se tiene

$$\varphi_\alpha(x) = \|\varphi_\alpha(x) f_\alpha(x)\| = \|\varphi_\alpha(y) f_\alpha(y)\| = \varphi_\alpha(y)$$

pues $f_\alpha(x), f_\alpha(y) \in \mathbb{S}_\alpha$. Como $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(y) \neq 0$, $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$, de donde $x = y$ y F_α es inyectiva en W_α. Para mostrar la continuidad de su función inversa escojamos un punto $x \in W_\alpha$ y una sucesión $\{x_n\}$ en W_α tal que $F_\alpha(x_n) \to F_\alpha(x)$. Entonces $\varphi_\alpha(x_n) f_\alpha(x_n) \to \varphi_\alpha(x) f_\alpha(x)$ y al aplicar la norma se tiene

$$\varphi_\alpha(x_n) = \|\varphi_\alpha(x_n) f_\alpha(x_n)\| \to \|\varphi_\alpha(x) f_\alpha(x)\| = \varphi_\alpha(x).$$

Como cada uno de los elementos de la sucesión $\{\varphi_\alpha(x_n)\}$ junto con su límite $\varphi_\alpha(x)$ son distintos de cero (definición de W_α), $\varphi_\alpha(x_n)^{-1} \to \varphi_\alpha(x)^{-1}$. Multiplicando en cada término de la sucesión $\{F_\alpha(x_n)\}$ obtenemos

$$f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x).$$

Pero f_α es un encaje, de modo que $x_n \to x$. Esto demuestra la afirmación.

Consideremos ahora el producto E de los espacios $P(U_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Como la cubierta abierta $\{W_\alpha\}$ es localmente finita, la función diagonal

$$F : X \to E, \quad F(x) = (F_\alpha(x))$$

inducida por la familia $\{F_\alpha\}$ tiene lugar en el σ_1-producto de los espacios $P(U_\alpha)$ (Sección 2.2). Esta función es obviamente equivariante y es en realidad el encaje buscado. En efecto, dados $x, y \in X$ distintos, hay un *tubo* W_β que contiene a x. Si $y \in W_\beta$, entonces $F_\beta(x) \neq F_\beta(y)$ pues $F_\beta|_{W_\beta}$ es inyectiva como vimos. Si $y \notin W_\beta$, entonces $F_\beta(y) = 0 \neq F_\beta(x)$ por definición. En ambos casos se verifica que F es inyectiva.

Para ver que $F : X \to F(X)$ es abierta, sean $Q \subset X$ un abierto y $x \in Q$. Sea $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $x \in W_\beta$. Como $F_\beta|_{W_\beta}$ es un encaje, $F_\beta(Q \cap W_\beta)$ es abierto en $F_\beta(W_\beta)$. Sea $0 < \varepsilon < \|F_\beta(x)\|$ tal que

$$F_\beta(W_\beta) \cap B_\beta(F_\beta(x), \varepsilon) \subset F_\beta(Q \cap W_\beta)$$

donde $B_\beta(x, \varepsilon)$ es la bola correspondiente en $P(W_\beta)$.

Afirmamos entonces que $F(X) \cap B(f(x), \varepsilon) \subset F(Q)$. Sea $y \in X$ tal que $\|F(y) - F(x)\| < \varepsilon$. Entonces

$$\|F_\beta(y) - F_\beta(x)\| \leq \sum_\alpha \|F_\alpha(y) - F_\alpha(x)\| = \|F(y) - F(x)\| < \varepsilon$$

por lo que $F_\beta(y) \neq 0$, i.e. $y \in W_\beta$. Concluimos que $F_\beta(y) \in F_\beta(W_\beta) \cap B_\beta(F_\beta(x), \varepsilon)$ de donde $F_\beta(y) \in F_\beta(Q \cap W_\beta)$. Como F_β es inyectiva en W_β, se tiene que $y \in Q \cap W_\beta$ y $F(y) \in F(Q)$. Esto demuestra la afirmación. $\square$

Teorema 3.6. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio de G-$\mathcal{M}$, entonces existen un G-espacio de Banach L y un encaje equivariante $X \hookrightarrow L \setminus \{0\}$ en donde $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio y un* H-AE para cada subgrupo cerrado $H \subset G$.

Demostración. Consideremos primero el caso en que G no es compacto. Hemos visto en el Teorema 3.5 que es posible definir un encaje equivariante $X \hookrightarrow E_1 \setminus \{0\}$, donde E_1 es el σ_1-producto de G-espacios normados $P(U_i)$, mismos que a su vez satisfacen la condición (A_n) de tener bolas uniformemente pequeñas. Sabemos también que $E_1 \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio. Sea $L = \widehat{E}_1$ la completación de E_1. Entonces por el Corolario 2.5, $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio de Banach y propio. Verifiquemos la segunda parte del enunciado.

Sea H un subgrupo cerrado de G. Como H es un grupo localmente compacto y L es en particular un H-espacio de Banach, verificaremos el criterio dado en Proposición 2.9. Sea entonces $K \subset H$ un subgrupo compacto. Afirmamos que, para cada factor $P(U_i)$ de E_1, el subespacio lineal de puntos K-fijos $P(U_i)^K$, tiene de dimensión infinita.

De acuerdo a la Proposición 2.13, basta observar que U_i/K es infinito. De lo contrario, U_i sería la unión finita de K-órbitas compactas y por tanto U_i mismo sería compacto. Pero si un G-espacio propio como U_i es compacto, G también es compacto, contrario a la suposición inicial. Se sigue entonces que $P(U_i)^K$ tiene de dimensión infinita. Como $(E_1)^K = \prod P(U_i)^K \cap E_1$, este espacio lineal también es de dimensión infinita al igual que L^K. Al satisfacerse el criterio concluimos que $L \setminus \{0\}$ es un H-AE.

Supongamos ahora que G es compacto. Todos los G-espacios son entonces propios. Según el estudio de Antonyan [6] sobre extensores equivariantes, es posible encajar a X equivariantemente en $E \setminus \{0\}$, donde E es un G-espacio de Banach. Este espacio ambiente puede ser de dimensión finita o infinita. En cualquier caso, tomemos el producto de E con otro espacio de Banach de dimensión infinita, digamos $E \times l_2$, donde l_2 es el espacio de Hilbert. Si consideramos la acción diagonal en este espacio (l_2 con acción trivial), podemos considerar a E, y por tanto a X, como un G-subespacio de $(E \times l_2) \setminus \{0\}$. Este nuevo espacio es de dimensión infinta, por lo que dado un subgrupo cerrado (y compacto) $H \subset G$, el conjunto de H-puntos fijos $(E \times l_2)^H = E^H \times l_2$ es de nuevo de dimensión infinita. Por la Proposición 2.9, $(E \times l_2) \setminus \{0\}$ es un H-AE. $\square$

Lema 3.7. *Sea G un grupo localmente compacto. Si $f : X \to M$ es una función equivariante entre G-espacios X y M, y la acción en M es propia, entonces la imagen de la función diagonal $\varphi : X \to M \times X/G$, $x \mapsto (f(x), \widetilde{x})$, es un subconjunto cerrado e invariante en $M \times X/G$.*

Demostración. Recordemos aquí que consideramos a $M \times X/G$ como un G-espacio bajo la acción diagonal (X/G tiene la ación trivial). Sean $p : X \to X/G$ y $q : M \to M/G$ las proyecciones orbitales respectivas y $\widetilde{f} : X/G \to M/G$ la función inducida por f, de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[d, "q"] \\ X/G \arrow[r, "\widetilde{f}"] & M/G \end{tikzcd}$$

conmuta (Lema 1.6). En este caso, $\varphi = (f, p)$ es la función inducida por f y p, de modo que es continua y equivariante. Para verificar que su imagen es cerrada, consideremos primero las proyecciones del producto $\pi_1 : M \times X/G \to M$ y $\pi_2 : M \times X/G \to X/G$. Tenemos entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "p"'] & & M \arrow[dd, "q"] \\ & M \times X/G \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] & \\ X/G \arrow[rr, "\widetilde{f}"] & & M/G \end{tikzcd}$$

Como M es un G-espacio propio, su espacio de órbitas M/G es de Hausdorff (Lema 1.18). Entonces, el conjunto

$$F = \{(y, \widetilde{x}) \in M \times X/G \mid q\pi_1(y, \widetilde{x}) = \widetilde{f}\pi_2(y, \widetilde{x})\}$$

es cerrado en $M \times X/G$. Observemos que

$$q\pi_1\varphi = qf = \widetilde{f}p = \widetilde{f}\pi_2\varphi$$

de modo que $\varphi(X) \subset F$. Por otro lado, dado $(y, \widetilde{x}) \in F$,

$$\begin{aligned} q\pi_1(y,\widetilde{x}) = \widetilde{f}\pi_2(y,\widetilde{x}) &\Leftrightarrow q(y) = \widetilde{f}(\widetilde{x}) = qf(x) \\ &\Leftrightarrow y = gf(x) = f(gx) \quad \text{para alguna } g \in G \end{aligned}$$

pero $\widetilde{x} = p(x) = p(gx)$, por lo que $(y, \widetilde{x}) = (f(gx), p(gx)) = \varphi(gx)$, i.e. $F \subset \varphi(X)$. $\square$

Lema 3.8. *Sea G un grupo topológico. Si N es un* AE (respectivamente un ANE), entonces N provisto de la acción trivial de G es un G-AE (un G-ANE) para los G-espacios propios en G-$\mathcal{M}$.

Demostración. Mostraremos solo el caso cuando N es un extensor absoluto, el caso local se sigue de esta demostración. Sean X un G-espacio propio, $A \subset X$ un subconjunto cerrado e invariante y $f : A \to N$ una función equivariante. Como f es en realidad invariante, admite una factorización

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\ A/G \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $p : X \to X/G$ es la proyección orbital. Como X admite una métrica invariante, X/G es metrizable. Además, $A \subset X$ es invariante lo que implica que $p^{-1}(A/G) = A$, y que $A/G \subset X/G$ sea cerrado. De este modo, $\widetilde{f}$ se extiende a una función continua $\widetilde{F} : X/G \to N$, por lo que $F = \widetilde{F}p$ es la extensión equivariante de f buscada. $\square$

Teorema 3.9. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio de G-$\mathcal{M}$ es propio, entonces existen un G-espacio de Banach L, un espacio normado N y un encaje equivariante y cerrado $X \hookrightarrow L \setminus \{0\} \times N$ donde $L \setminus \{0\} \times N$ es un G-espacio propio y un H-*AE para cada subgrupo cerrado $H \subset G$.

Demostración. Consideremos el encaje equivariante $f : X \hookrightarrow L \setminus \{0\}$ obtenido en el Teorema 3.6 y la proyección orbital $p : X \to X/G$. Entonces la función diagonal $\varphi = (f, p) : X \hookrightarrow (L \setminus \{0\}) \times X/G$ es un encaje topológico (ver [25, IV]). Por el Lema 3.7, φ es también cerrado y equivariante. Podemos considerar entonces a X como un subconjunto cerrado e invariante en $(L \setminus \{0\}) \times X/G$. Como X admite una métrica invariante, el espacio de órbitas X/G es metrizable (Lema 1.5). En este caso, un resultado conocido de Arens y Eells [13] afirma que X/G se puede encajar en un espacio normado N como un subconjunto cerrado. Este encaje genera de forma natural otro encaje cerrado $(L \setminus \{0\}) \times X/G \hookrightarrow (L \setminus \{0\}) \times N$. Como consecuencia, obtenemos el encaje equivariante y cerrado (N con acción trivial)

$$X \hookrightarrow (L \setminus \{0\}) \times N.$$

Dado que el producto de un G-espacio propio con cualquier otro G-espacio es propio, $(L \setminus \{0\}) \times N$ es en efecto un G-espacio propio. Además, el Teorema 3.6 afirma que $L \setminus \{0\}$ es un H-AE para cualquier subgrupo cerrado $H \subset G$. Por el famoso Teorema de extensión de Dugundji [16], N es un AE, así que de acuerdo al Lema 3.8, N es también un H-AE. Es inmediato sin embargo, que el producto de dos H-AEs es de nuevo un H-AE. De este modo concluimos que $(L \setminus \{0\}) \times N$ es en verdad un H-AE para cada subgrupo cerrado H de G. □

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos la versión equivariante más general de un resultado clásico dentro de la teoría de retractos y punto de partida en la teoría de formas (ver [28, I]). Casos particulares han sido previamete obtenidos cuando G es compacto o bien casi conexo por Antonyan [6] y [8] respectivamente y cuando G es de Lie por Feragen [20].

Corolario 3.10. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio que admite una métrica invariante, entonces los siguentes enunciados son equivalentes*

1. *X es un* G-AE (respectivamente un G-ANE),
2. X es un G-AR (un G-ANR).

Demostración. Consideraremos solo el caso absoluto G-AR, pues el caso local G-ANR se sigue inmediato de la demostración. Hemos observado que un G-AE con métrica invariante es claramente un G-AR. Por otro lado, si X es un G-AR, el Teorema 3.9 nos permite considerar a X como un subconjunto cerrado e invariante de un G-AE. En este caso X será un retracto equivariante de dicho espacio y por tanto un G-AE. □

Corolario 3.11. *Sea G un grupo compacto. Si X es un G-*AR propio (respectivamente un G-ANR propio), entonces X es un H-AR (un H-ANR) propio para cada subgrupo cerrado $H \subset G$.

Demostración. Nuevamente consideraremos solo el caso absoluto G-AR. Por el Teorema 3.9, podemos considerar a X como un subconjunto cerrado e invariante de un G-espacio propio y con métrica invariante. Este a su vez es un H-AE para cada subgrupo cerrado $H \subset G$. Como X es un G-AR, X será un G-retracto, en particular un H-retracto de este H-AE. Luego, X es un H-AE y por tanto un H-AR. □

3.3. Linealización de cualquier G-espacio propio

En la sección se consideraron encajes de G-espacios propios que admiten métricas en G-espacios normados procurando maximizar la parte propia. Estos encajes se construyen a partir del caso particular de los productos torcidos usando en Teorema 3.4. En el Lema 3.2, clave del teorema mencionado, ya se contempla el caso más general de un sistema de pseudométricas invariantes, presentes en cualquier espacio (de Tychonoff). A continuación revisamos el problema de linealización para cualquier G-espacio.

Teorema 3.12. *Sea G un grupo localmente compacto. Cada G-espacio propio X admite un encaje equivariante en un G-espacio lineal L donde $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 1.31, el G-espacio propio X posee una cubierta tubular $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ donde cada U_α tiene asociado un subgrupo rebanador $H_\alpha \subset G$ grande y compacto. Como la proyección orbital $p : X \to X/G$ es abierta y el espacio de órbitas X/G es completamente regular, a cada órbita $G(x) \subset U_\alpha$, corresponde una función continua $\widetilde{\varphi}_x : X/G \to [0,1]$ tal que

$$\widetilde{\varphi}_x(\widetilde{x}) = 1 \quad \text{y} \quad \widetilde{\varphi}_x((X/G) \setminus p(U_\alpha)) = 0.$$

En este caso, la composición $\varphi_x = \widetilde{\varphi}_x p : X \to [0,1]$ es una función invariante. De aquí, el soporte $W_x = {\varphi_x}^{-1}(0,1]$ es también una vecindad H_α-tubular de $G(x)$. Añadiendo índices de ser necesario, supondremos que $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta tubular de X.

Por el Lema 3.2, a cada W_α le corresponde una familia de funciones equivariantes

$$\{f_i^\alpha : W_\alpha \to P(W_\alpha) \mid i \in I_\alpha\}$$

que separa puntos de conjuntos cerrados en W_α. Más aún, $\|f_i^\alpha(x)\| = 1$ para todo $x \in W_\alpha$. Ahora, a cada f_i^α le asociamos la función equivariante $F_i^\alpha : X \to P(W_\alpha)$ dada por

$$F_i^\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x) f_i^\alpha(x) & \text{si} \quad x \in U_\alpha, \\ 0 & \text{si} \quad x \in X \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

la cual es claramente continua y con $(F_i^\alpha)^{-1}(0) = X \setminus W_\alpha$.

La totalidad de estas familias, $\{F_i^\alpha \mid i \in I_\alpha,\ \alpha \in A\}$ separa puntos de conjuntos cerrados. Para ver esto, sean $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $x \in X \setminus F$. Sea $\beta \in A$ un índice para el cual $x \in W_\beta$. Consideremos los conjuntos $F' = F \cap W_\beta$ y $F'' = F \setminus W_\beta$. Entonces $F' \subset W_\beta$ es cerrado en W_β y $x \in W_\beta \setminus F'$, de modo que hay un índice $j \in I_\beta$ para el cual

$$f_j^\beta(x) \notin \overline{f_j^\beta(F')} \subset P(W_\beta).$$

Veamos entonces que

$$F_j^\beta(x) \notin \overline{F_j^\beta(F')} \subset P(W_\beta).$$

Supongamos al contrario, esto es, que $F_j^\beta(x) \in \overline{F_j^\beta(F')}$. Como $P(W_\beta)$ es normado, hay una sucesión $\{x_n\}$ en F' tal que $\{F_j^\beta(x_n)\}$ converge a $F_j^\beta(x)$, i.e.

$$\varphi_\beta(x_n) f_j^\beta(x_n) \to \varphi_\beta(x) f_j^\beta(x) \tag{3.5}$$

cuando $n \to \infty$. Aplicando la continuidad de la norma en $P(W_\beta)$ obtenemos que

$$\|\varphi_\beta(x_n) f_j^\beta(x_n)\| \to \|\varphi_\beta(x) f_j^\beta(x)\|$$

cuando $n \to \infty$. Pero

$$\|\varphi_\beta(x_n) f_j^\beta(x_n)\| = |\varphi_\beta(x_n)| \|f_j^\beta(x_n)\| = |\varphi_\beta(x_n)|$$

para cada x_n y

$$\|\varphi_\beta(x) f_j^\beta(x)\| = |\varphi_\beta(x)|$$

por la misma razón, así que

$$\varphi_\beta(x_n) \to \varphi_\beta(x)$$

cuando $n \to \infty$. Como cada uno de los elementos de la sucesión junto con su límite son distintos de cero, $\varphi_\beta(x_n)^{-1} \to \varphi_\beta(x)^{-1}$. Multiplicando en cada término de la sucesión, de (3.5) obtenemos

$$f_j^\beta(x_n) \to f_j^\beta(x)$$

lo que contradice nuestra hipótesis.

Finalmente, la función diagonal $\Delta : X \to \prod\{P(W_\alpha) \mid i \in I_\alpha,\ \alpha \in A\}$ inducida por la familia $\{F_i^\alpha | i \in I_\alpha,\ \alpha \in A\}$ es el encaje equivariante buscado.

$\square$

Discusión

A lo largo de las construcciones realizadas, hemos empleado una combinación de los métodos y las ideas alrededor de los trabajos R. Palais [35], S. Antonyan [6], E. Elfving [19] y S. Antonyan y S. de Neymet [11] a fin de resolver el problema de linealización para acciones propias de un grupo localmente compacto G. Para obtener los resultados principales de esta tesis, a saber, los teoremas 3.5, 3.6 y 3.12 hemos recurrido al siguiente programa:

- Dado un G-espacio propio X, el G-espacio lineal $P(X)$ de funciones G-uniformes $X \to \mathbb{R}$ con soporte pequeño resulta el espacio ambiente adecuado pues $P(X) \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.

- Modificamos la familia de pseudométricas (la métrica) asociadas a X cuando X fase admite una H-rebanada global y $H \subset G$ es compacto.

- Esto nos permite establecer una versión equivariante del encaje de Kuratowski-Wodyslawski para acciones propias.

- El Teorema 1.31 nos permite cubrir el G-espacio propio X con tubos. Reducimos el problema al caso anterior (con rebanada global) extendiendo los encajes y pegándolos de manera adecuada.

- Para obtener el Teorema 3.6 completamos el espacio ambiente del Teorema 3.5 y aplicamos el criterio de la Proposición 2.9.

No obstante el método de "invariantización" de Smirnov [37] de cualquier encaje $X \hookrightarrow L$ resulta en un encaje equivariante $X \hookrightarrow C(G, L)$, hemos visto que $C(G, L) \setminus \{0\}$ no siempre es un G-subespacio propio. Al respecto, el uso de las funciones G-uniformes con soporte pequeño es esencial en nuestra construcción.

Como se mencionó en la introducción, el uso de rebanadas constituye una herramienta fundamental en la Teoría equivariante de retractos. En nuestro caso, la modificación de las (pseudo)métricas hecha en el Lema 3.1 nos permite establecer en la forma tradicional una versión equivariante del encaje de Kuratowski-Wodyslawski [17] para el caso particular de un producto torcido en el Teorema 3.4. Los encajes construidos por Palais [36] y [35], Mostow [32], Elfving [18], Kankaanrita [24], Ferageb [20] así como los presentados en este trabajo reducen el problema a este punto. A diferencia de los anteriores, donde el grupo G es de Lie, nuestro caso hace uso del Teorema de la rebanada aproximativa 1.31, que funciona para cualquier acción propia cuando G es localmente compacto. El teorema nos permite entonces cubrir el espacio fase con productos torcidos o tubos adecuados.

Usando la paracompacidad del espacio orbital (hecho equivalente a admitir una métrica invariante) para el caso de acciones metrizables se obtiene finalmente un encaje en el σ_1-producto de espacios $P(U)$, que es el espacio normado buscado. Para el caso general de una acción propia, el producto convencional de los espacio $P(U)$ es el G-espacio lineal (y localmente convexo) buscado.

Por otro lado, el encaje construido por Elfving es en parte similar al nuestro [19]. Elfving considera el espacio $B(X)$ de funciones que se *anulan al infinito*, i.e.

$$\begin{aligned} B(X) = \ & \{f \in C(X) \mid \text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } K \subset X \text{ compacto} \\ & \text{y tal que } |f(x)| < \varepsilon \text{ para cada } x \in X \setminus K\} \end{aligned}$$

Como en el caso de $P(X)$, tenemos que $B(X)$ es un G-espacio lineal donde $B(X) \setminus \{0\}$ es un G-supespacio propio. La diferencia radica en que $B(X)$ es completo, i.e. un G-espacio de Banach. Cuando X admite una *métrica propia*, i.e. donde la cerradura de cada bola es compacta, el encaje $i : X \hookrightarrow B(X)$ presentado en el Teorema 3.4 funciona igual. En este caso, X es necesariamente localmente compacto y σ-compacto, al igual que el grupo G (puesto que el trasladador $\langle x, K\rangle$ es compacto para cada subconjunto compacto $K \subset X$). Nuestra técnica funciona aún cuando X no tiene tal métrica.

Notamos además que $B(X)$ es en realidad la completación de $C_0(X)$, el espacio de todas las funciones $f \in C(X)$ con $\overline{\text{sop}\, f} \subset X$ compacto. En nuestra construcción de $P(X)$, su completación resulta

$$\begin{aligned}\widehat{P}(X) = \ & \{f \in C'(X) \mid \text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } U \subset X \text{ pequeño} \\ & \text{y tal que } |f(x)| < \varepsilon \text{ para cada } x \in X \setminus U\}\end{aligned}$$

Para nuestros fines sin embargo, la completación requerida es aquella del σ_1-producto E_1 de los $P(X)$. No requerimos ya esta descripción en cada factor.

Aunque el encaje obtenido en el Teorema 3.6 no necesariamente es cerrado, la modificación hecha a través del producto con un espacio normado N produce una linealización cerrada $X \hookrightarrow F = L \times N$. La parte no propia de este espacio es el G-subespacio lineal $\{0\} \times N$. Este último sin embargo es un Z-conjunto en F, i.e. para cada $\varepsilon > 0$ hay una función continua $f : F \to F \setminus (\{0\} \times N)$ tal que para cada $y \in F$, $\|f(y) - y\| < \varepsilon$. Esto se debe a que L es de dimensión infinita, por lo que $\{0\} \subset L$ es un Z-conjunto.

Conclusiones

Sea G un grupo localmente compacto. Para el caso metrizable, si G-$\mathcal{M}$ denota la clase de los G-espacios que admiten una métrica invarinate, el Teoreoma 3.5 afirma que *todo G-espacio propio X de G-$\mathcal{M}$, admite una linealización equivariante $X \hookrightarrow E$ donde E es un G-espacio lineal normado y $E \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.* A través de la completación del espacio E obtenemos en el Teorema 3.6, un G-espacio de Banach L que juega el mismo papel que E y donde además $L \setminus \{0\}$ *es un H-AE para cada subgrupo cerrado H de G*. Este encaje se modifica mediante un producto con un espacio de diemnsión infinita en el Teorema 3.9 para asegurar que *todo G-espacio propio X de G-$\mathcal{M}$ admite un encaje cerrado $X \hookrightarrow L \times N$ donde N es un espacio normado. La parte "no" propia de $L \times N$ es el G-subespacio lineal $\{0\} \times N$. El codominio del encaje resulta también un H-AE para todos los subgrupos cerrados H de G*. Como consecuencia obtenemos en el Corolario 3.10 la *equivalencia, en la clase G-$\mathcal{M}$, entre las nociones G-AE (G-ANE) y G-AR (G-ANR respectivamente)*. En su forma más general, la linealización de acciones propias se resuelve afirmativamente en el Teorema 3.12 de modo que *todo G-espacio propio (de Tychonoff) X admite una linealización equivariante $X \hookrightarrow L$ donde L es un G-espacio lineal y localmente convexo y donde el complemento $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio.*

Bibliografía

[1] H. Abels. Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups. *Math. Ann.*, 212:1–19, 1974.

[2] H. Abels. A universal proper G-space. *Math. Z.*, 159:143–158, 1978.

[3] N. Antonyan. An intrinsic characterization of G-pseudocompact spaces. *Houston J. Math.*, 33(2):519–530, 2007.

[4] Natella Antonyan, Sergey A. Antonyan, and Leonardo Rodrguez-Medina. Linearization of proper group actions. *Topology and its Applications*, 156(11):1946 – 1956, 2009.

[5] S. Antonyan. Retracts in categories of G-spaces. *Izv. Akad. Nauk Arm. SSSR Ser. Mat.*, 15:365–378, 1980. Trad. al inglés en Soviet J. Contemp. Math. Anal. 15 (1980), 30-43.

[6] S. Antonyan. Equivariant embeddings into G-ARs. *Glasnik Matematički*, 22(42):503–533, 1987.

[7] S. Antonyan. Existence of a slice for arbitrary compact transformation groups. *Mat. Zametki*, 56(5):3–9, 1994. Trad. al inglés en Math. Notes 56 (1994), 1101-1104.

[8] S. Antonyan. Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions. *Topology Appl.*, 98:35–46, 1999.

[9] S. Antonyan. Orbit spaces and unions of equivariant absolute neighborhood extensors. *Topology Appl.*, 146–147:289–315, 2005.

[10] S. Antonyan. G-ANR's with homotopy trivial fixed point sets. *Fund. Math.*, 197(1):1–16, 2007.

[11] S. Antonyan and S. De Neymet. Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces. *Acta Math. Hung.*, 98(1–2):41–51, 2003.

[12] S. Antonyan and Y.M. Smirnov. Universal objects and compact extensions for topological transformation groups. *Dolk. Akad. Nauk SSSR*, 257(3):521–526, 1981.

[13] R. Arens and J. Eells. On embedding uniform and topological spaces. *Pacific J. Math*, 6:397–403, 1956.

[14] C. Bessaga and A. Pelczynski. *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology.* P. W. N., Varsovia, 1975.

[15] N. Bourbaki. *Topologie Générale.* Hermman, Paris, 1972.

[16] J. Dugundji. An extension of Tietze's theorem. *Pacific J. Math*, 1:353–367, 1951.

[17] J. Dugundji. *Topology.* Alyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[18] E. Elfving. The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. Dissertationes*, 108, 1996.

[19] E. Elfving. The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds. II. *Manuscripta Math.*, 105:235–251, 2001.

[20] A. Feragen. Equivariant embedding of metrizable G-spaces in linear G-spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(8), 2007.

[21] V. Glushkov. The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 15(2):59–93, 1960.

[22] A. Manoussos H. Abels and G. Noskov. Proper actions and proper invariant metrics. 2008. manuscrito (arXiv:math/0702322v2).

[23] J. Jaworowski. G-spaces with a finite structure and their embedding in G-vector spaces. *Russian Math. Surveys*, 31(5):198–209, 1976.

[24] M. Kankaanrita. Proper smooth G-manifolds have G-invariant Riemannian metrics. *Topology Appl.*, 153:610–619, 2005.

[25] J. Kelley. *General Topology.* Springer, New York, 1955.

[26] V. L. Klee, Jr. A note on topological properties of normed linear spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7:673–674, 1956.

[27] A. Manoussos and P. Strantzalos. On the group of isometries on a locally compact metric space. *J. Lie Theory*, 13:7–12, 2003.

[28] S. Mardesić and J. Segal. *Shape theory. The inverse system aproach.* North Holland, Amsterdam, 1982.

[29] M. Megrelishvili. Equivariant completions. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 35(3):539–547, 1994.

[30] M. Megrelishvili. Free topological G-groups. *New Zeland J. Math.*, 25:59–72, 1996.

[31] M. Megrelishvili. *Open Problems in Topology II*, chapter Topological transformation groups. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[32] G. Mostow. Equivariant embeddings in euclidean space. *Ann of Math*, 65(3):432–446, 1957.

[33] S. de Neymet. *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones.* Soc. Mat. Mex., México, 2005.

[34] R. Palais. *The classification of G-spaces*, volume 36. Mem. Amer. Math. Soc., 1960.

[35] R. Palais. On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. *Ann. of Math*, 73:295–323, 1961.

[36] R. Palais. Imbedding of compact, differentiable transformation groups in ortogonal representations. *Journ. of Math. and Mech.*, 6(5):673–678, 2005.

[37] Y.M. Smirnov. On equivariant embeddings of G-spaces. *Russian Math. Surveys*, 31(5):198–209, 1976.

[38] J. de Vries. Equivariant embedding to G-spaces. In *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, 4th Prague Top. Symp., pages 485–493.

[39] J. de Vries. *Topological Transformation Grous 1. A categorical approach*, volume 65. Math. Centre Tracks, Amsterdam, 1975.

[40] J. de Vries. Universal topological transformation groups. *General Topology Appl.*, 5:107–122, 1975.

[41] J. de Vries. *Elements of Topological Dynamics*, volume 257. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

Índice alfabético