



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DEL GRADO ORTOGONAL A LA BIFURCACIÓN EN SISTEMAS HAMILTONIANOS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

CARLOS GARCÍA AZPEITIA

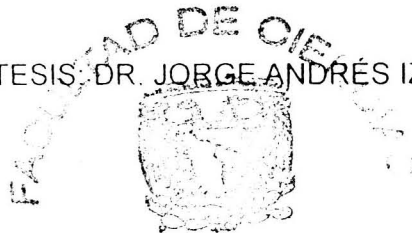
Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impresa el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: CARLOS GARCÍA AZPEITIA

FECHA: 24/08/10

FIRMA: CARLOS GARCÍA AZPEITIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE ANDRÉS IZE LAMACHE



MÉXICO, D. F.

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO AGOSTO 2010

*León
10/sep*



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Aplicación del grado ortogonal a la bifurcación
en sistemas Hamiltonianos.

Carlos García Azpeitia
IIMAS-UNAM

2010

Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	IX
1. Grado ortogonal	1
1.1. Representaciones de grupos	1
1.2. Definición del grado Γ -ortogonal	5
1.3. Cálculo del índice S^1 -ortogonal	8
1.4. Comentarios	10
2. Aplicación del grado ortogonal a la bifurcación periódica	11
2.1. Reducción global de Liapunov-Schmidt	11
2.2. Bifurcación local	16
2.3. Bifurcación global	22
2.4. Comentarios	24
3. El satélite	27
3.1. Planteamiento del problema	27
3.2. Teorema de bifurcación	29
3.3. Análisis del espectro	30
3.3.1. Potencial de Morse	33
3.3.2. El problema de la luna de Hill	34
3.3.3. El problema restringido de los tres cuerpos	35
3.3.4. El equilibrio relativo poligonal	39
3.4. Vórtices	46
3.4.1. Planteamiento del problema	46
3.4.2. Teorema de bifurcación	48
3.4.3. Potencial de Morse	49

3.4.4. El equilibrio relativo poligonal	50
3.5. Comentarios	54
4. Bifurcación de equilibrios relativos para cuerpos y vórtices	57
4.1. Planteamiento del problema	57
4.1.1. Los filamentos y vórtices	57
4.1.2. Los cuerpos	58
4.1.3. Planteamiento general	59
4.2. Representaciones irreducibles	62
4.3. Teorema de bifurcación	68
4.3.1. Bifurcación local	70
4.3.2. Bifurcación global	71
4.4. Simetrías	72
4.5. Análisis del espectro $n \geq 3$	75
4.5.1. Vórtices	81
4.5.2. Cuerpos	82
4.6. Análisis del espectro $n = 2$	83
4.7. Comentarios	85
5. Bifurcación periódica: cuerpos, vórtices, filamentos y cargas	87
5.1. Planteamiento del problema	87
5.2. Teorema de bifurcación	90
5.3. Simetrías	92
5.4. Análisis del espectro $n = 2$	95
5.4.1. Vórtices	96
5.4.2. Ondas viajeras en filamentos	97
5.4.3. Cuerpos	98
5.5. Análisis del espectro $n \geq 3$	99
5.5.1. Vórtices	99
5.5.2. Ondas viajeras en filamentos	103
5.5.3. Cuerpos	107
5.6. Las cargas	119
5.7. Comentarios	125
6. Bifurcación periódica espacial del satélite y de los cuerpos	129
6.1. El satélite	129
6.1.1. Planteamiento del problema	129
6.1.2. Teorema de bifurcación	132

6.1.3.	Simetrías	133
6.1.4.	Análisis del espectro	133
6.2.	Los cuerpos	136
6.2.1.	Planteamiento del problema	136
6.2.2.	Teorema de bifurcación	138
6.2.3.	Simetrías	140
6.2.4.	Análisis del espectro	140
6.2.5.	El equilibrio poligonal	143
6.3.	Comentarios	149
7.	Bifurcación en la latiz de Schrödinger periódica	153
7.1.	Planteamiento del problema	153
7.2.	Bifurcación estacionaria	155
7.2.1.	Teorema de bifurcación	156
7.2.2.	Simetrías	157
7.2.3.	Análisis del espectro	158
7.3.	Bifurcación periódica	161
7.3.1.	Teorema de bifurcación	162
7.3.2.	Simetrías	163
7.3.3.	Análisis del espectro	164
7.4.	Comentarios	168
A.	Apéndice	171
A.1.	Representación integral de $S(r, \varphi)$	171
A.2.	Análisis de las sumas s_k	173

Agradecimientos

A mi director de tesis el Dr. Jorge Ize, gracias a tus enseñanzas pude realizar este trabajo.

Al Dr. Antonmaria Minzoni, gracias por esas trascendentes platicas.

A la Dra. Mónica Clapp, gracias por tu apoyo.

A mis sinodales los doctores Rafael de la Llave, Ernesto Pérez, Carlos Prieto y Arturo Olvera, gracias por sus comentarios.

A CONACyT por la beca que me otorgo para realizar mis estudios de postgrado.

A los miembros del departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS.

Y a todas las personas que me han acompañado en este viaje.

Introducción

Las primeras leyes empíricas, que describieron parte del movimiento de los planetas, fueron las tres Leyes de Kepler, en el inicio del siglo XVII. Sin embargo, no se comprendió plenamente el movimiento de los planetas, alrededor del sol, hasta que Newton formula la Ley de la Gravitación Universal a finales del siglo XVII.

La ley de gravitación universal implicó un cambio radical en la manera de entender el universo, ya que, a partir de esa ley, Newton logra explicar las leyes empíricas de Kepler sobre el movimiento de los planetas alrededor del sol, entre muchos otros fenómenos, como la caída de los cuerpos en la tierra.

Para explicar el movimiento de los planetas alrededor del sol, Newton tuvo que integrar el problema de dos cuerpos con el método de integrales por cuadratura. Una vez resuelto el problema de dos cuerpos, el siguiente paso consistió en resolver el problema de tres cuerpos, para explicar el movimiento de la luna alrededor de la tierra. Sin embargo, debido a que el problema de los tres cuerpos no es integrable (lo cual señaló Poincaré a finales del siglo XIX), se propuso estudiar un problema restringido de tres cuerpos.

En dicho modelo se supuso que un cuerpo tenía masa despreciable (el satélite), y que dos cuerpos primarios se movían en una de las soluciones conocidas del problema de dos cuerpos de tal manera que el satélite se movía en el campo de fuerzas generado por los cuerpos primarios. Por su parte, Hill propuso construir la teoría del movimiento lunar, considerando que el satélite (la luna) se encontraba suficientemente cerca de uno de los cuerpos primarios (la tierra).

Entre los estudios que se realizaron para el problema restringido de los tres cuerpos, Lagrange encontró cinco equilibrios del satélite, cuando los cuerpos

primarios se movían en órbitas circulares. Para explicar dichos equilibrios necesitamos situarlos en un sistema de coordenadas rotantes, de tal manera que los dos cuerpos primarios permanezcan fijos. Pues bien, en esas coordenadas rotantes, tres de los equilibrios que llamaremos Eulerianos, son colineales con los cuerpos primarios, y dos equilibrios, a los cuales llamaremos Lagrangianos, forman un triángulo equilátero con los primarios.

A pesar de que Lagrange pensó que sus equilibrios en el problema de los tres cuerpos no tenían contraparte o sentido astronómico, para nuestra sorpresa, en el siglo XX se encontraron asteroides en cada uno de los equilibrios Lagrangianos, siendo los cuerpos primarios el Sol y Júpiter. Por otra parte, cabe mencionar que en la actualidad se han enviado satélites artificiales a orbitar algunos de esos equilibrios, siendo los cuerpos primarios el sol y la tierra, [GSLM00].

Podemos decir que los equilibrios son las soluciones explícitas más fáciles de encontrar. Desafortunadamente el problema de los n -cuerpos no tiene equilibrios, pues dos o más cuerpos sin velocidades iniciales siempre terminarían en colisión. Debido a lo anterior, en el problema de los n -cuerpos las soluciones explícitas más simples son las generadas por las configuraciones centrales, en dichas soluciones los cuerpos mantienen la misma proporción geométrica a lo largo de su movimiento.

Toda configuración central en el plano origina una solución, en la cual los cuerpos se mueven en órbitas circulares. Dichas soluciones son equilibrios en un sistema de coordenadas rotantes, y se conocen comúnmente como equilibrios relativos.

Lagrange probó que cualesquiera tres cuerpos forman un equilibrio relativo en forma de triángulo equilátero. De hecho, Lagrange probó que ese es el único equilibrio planar para tres cuerpos, además de los equilibrios colineales descubiertos anteriormente por Euler.

Motivado en explicar la existencia de los anillos de Saturno, Maxwell estudió la estabilidad de un equilibrio relativo poligonal, formado por cuerpos en los vértices y el centro de un polígono regular.

Desde que Poincaré señaló que el problema de tres cuerpos no es integrable, ha sido de mayor interés realizar análisis cualitativos del problema

de los n -cuerpos. En la presente investigación, pretendemos estudiar el modelo de un satélite que generalice al problema restringido de tres cuerpos. Deseamos encontrar los equilibrios del satélite, y estudiar cualitativamente el movimiento del satélite cerca de esos equilibrios. Por otra parte, pretendemos estudiar el movimiento de $n + 1$ -cuerpos cerca del equilibrio relativo poligonal de Maxwell.

Planteamiento del problema

Analizaremos la ecuación de un satélite que generaliza a la del problema restringido de los tres cuerpos (en adelante la ecuación del satélite), [MH91]. Encontraremos dicha ecuación suponiendo que n cuerpos primarios forman un equilibrio relativo, y que además, otro cuerpo tiene una masa despreciable, de tal manera que no perturba el movimiento de los cuerpos primarios. En la presente tesis encontraremos equilibrios del satélite, y analizaremos la bifurcación global de soluciones periódicas a partir de dichos equilibrios.

En el problema de los $n + 1$ -cuerpos, el equilibrio relativo poligonal de Maxwell está formado por un cuerpo en el centro y por cuerpos de masas iguales en los vértices de un polígono regular. Pretendemos encontrar bifurcación de soluciones periódicas a partir del equilibrio poligonal de Maxwell; asimismo, indagaremos la existencia de bifurcación de equilibrios relativos en dicho problema.

A pesar de que hasta ahora sólo hemos hablado del problema de los $n + 1$ -cuerpos, no nos limitaremos a encontrar resultados de bifurcación solamente en ese problema, sino que también abordaremos la bifurcación en otros sistemas Hamiltonianos. Sin más precedentes los nombraremos, después nos encargaremos de comentar el origen o la motivación de dichas ecuaciones.

- a) El problema de los $n + 1$ -cuerpos.
- b) Un modelo de cargas con la ley de Coulomb.
- c) Un modelo de vórtices en fluidos.
- d) Un modelo de ondas viajeras para filamentos casi paralelos en fluidos.
- e) Un modelo de una latiz circular de osciladores de Schrödinger.

En el problema (b), estudiaremos un modelo para cuerpos cargados, de tal manera que las masas son despreciables comparadas con las cargas eléctricas, [DTW83]. Así podremos despreciar a la gravedad, y tomar en cuenta sólo las fuerzas de Coulomb. En dicho modelo, el equilibrio relativo poligonal está formado por un cuerpo con carga positiva en el centro del polígono, y por cuerpos con cargas negativas en los vértices de un polígono regular.

En el modelo (c), usaremos las ecuaciones que surgen de estudiar la interacción entre vórtices en un fluido bidimensional, [New01]. Dichas ecuaciones modelan sólo la interacción entre los centros de los vórtices, pero en teoría, a partir de esas soluciones podemos integrar completamente el flujo de velocidades del fluido bidimensional. Además, una simple analogía con el problema de los $n + 1$ -cuerpos nos conducirá a encontrar que el equilibrio relativo poligonal está formado por vórtices en el centro y en los vértices de un polígono regular.

Continuando con el modelo de un fluido, pero ahora tridimensional, las ecuaciones de los vórtices sirven también para modelar la interacción entre líneas de vorticidad paralelas (conocidas como filamentos). Pues bien, las ecuaciones del problema (d) son un modelo aproximado para estudiar la interacción entre líneas de vorticidad, que ya no son paralelas, sino cercanas a serlo, [New01].

Dichas ecuaciones se encuentran considerando sólo la interacción entre puntos vecinos del propio filamento, además de la interacción con puntos de otros filamentos. De esa manera se encuentran ecuaciones parciales semejantes a las ecuaciones ordinarias de los vórtices, sólo que ahora aparece en las ecuaciones una segunda derivada que representa la interacción con los puntos cercanos del filamento.

Pues bien, dado que los vórtices son soluciones de filamentos paralelos, el equilibrio relativo poligonal del problema (d) es exactamente el mismo que el del problema (c). En este caso, buscaremos solamente bifurcación de ondas viajeras periódicas, debido a que no deseamos enfrentarnos al problema de los pequeños divisores.

Finalmente, abordaremos el modelo de una latiz no lineal de Schrödinger (e), [EJ03]. Tal modelo tiene variados orígenes y diversas aplicaciones, en las cuales no ahondaremos, recomendamos a los interesados recurrir al

artículo [EJ03]. Nosotros estudiaremos en particular las ecuaciones de una latiz circular, es decir, una latiz finita con condiciones de frontera periódicas. En este caso, existe una solución parecida a una onda rotante estacionaria, formada por n osciladores con la misma amplitud pero con distinta fase. La onda rotante es equivalente al equilibrio relativo poligonal del problema de los cuerpos.

Ahora bien, debido a que las ecuaciones diferenciales de los modelos anteriores son autónomas, las soluciones son invariantes en el tiempo. Además, en el problema de los cuerpos y en los sistemas similares mencionados, existen otras simetrías debido a la invarianza de las ecuaciones, debido a rotar las posiciones de los cuerpos o los cuerpos del polígono.

En los problemas del satélite, de cuerpos y de sistemas Hamiltonianos, deseamos encontrar bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías. Para ello usaremos como principal herramienta al grado ortogonal desarrollado en [IV03]. Las cualidades del grado ortogonal nos permitirán manejar adecuadamente las simetrías.

A continuación daremos una breve introducción de la definición y aplicación del grado ortogonal.

Metodología

Para poder explicar qué es el grado ortogonal, en primer lugar tenemos que hablar del concepto de simetrías y, en segundo lugar, tenemos que explicar qué es un mapeo ortogonal. Para poder definir un mapeo ortogonal, y por ende al grado ortogonal, primero intentaremos describir los conceptos de simetrías.

Diremos que un grupo G actúa en un espacio de Hilbert V siempre que identifiquemos a G con un subgrupo de $GL(V)$; en ese caso, llamaremos a V una representación del grupo G . Por ejemplo, multiplicar por menos genera una acción del grupo \mathbb{Z}_2 en todo espacio de Hilbert.

Ahora bien, diremos que un mapeo entre representaciones del grupo G es G -equivariante, siempre y cuando el mapeo conmute con la acción del grupo. Un ejemplo de mapeo \mathbb{Z}_2 -equivariante es una función impar. En un mapeo

equivariante, cuando la acción en el rango es trivial, diremos simplemente que el mapeo es invariante. Un ejemplo de un mapeo \mathbb{Z}_2 -invariante es una función par. También podemos mirar a un mapeo invariante como un mapeo que toma el mismo valor en cada una de las órbitas de la acción.

A continuación expondremos la propiedad de ortogonalidad de un mapeo. Para ello tengamos en mente que la acción del grupo genera una órbita. Pues bien, definimos los generadores del grupo como las derivadas en las direcciones de dichas órbitas. Pues un mapeo ortogonal es simplemente un mapeo equivariante que es además ortogonal a los campos vectoriales originados por los generadores del grupo, como es el caso de los gradientes de funcionales invariantes.

Ahora bien, por definición, el gradiente de un funcional invariante es constante en las órbitas. Por lo que la derivada del funcional en las direcciones de la órbita es cero, por ende, el gradiente de un funcional invariante es ortogonal a los generadores. Sin embargo, queremos señalar que no todos los operadores ortogonales son gradientes de funcionales invariantes.

Habiendo explicado lo que es un mapeo ortogonal, pasaremos a definir el grado ortogonal. Para ello necesitaremos primero definir a un grupo de homotopía ortogonal, formado de las clases de equivalencia de funciones modulo deformaciones ortogonales. Sin embargo, probar que el conjunto de clases de homotopía forma un grupo, no es inmediato, la única prueba que conocemos de ese hecho es de Ize y Vignoli en [IV03]. Y dicha prueba es sólo en espacios de dimensión finita y para acciones de grupos abelianos compactos.

A pesar de las limitaciones en la definición del grado ortogonal, restringirnos a deformaciones ortogonales en el grupo de homotopía nos recompensará, pues en ese caso, obtendremos un grupo con mayor estructura. Pues en el caso que permitiésemos deformaciones arbitrarias, obtendríamos como grupo de homotopía al grupo de los enteros, definiendo así al grado de Brouwer. De hecho, Ize y Vignoli probaron que el grupo de homotopía ortogonal tiene un grupo isomorfo a los enteros por cada grupo de isotropía del espacio, donde un grupo de isotropía es el conjunto de elementos que deja fijos un punto.

Una vez definido el grupo de homotopía ortogonal, el grado ortogonal se define simplemente como un elemento de tal grupo de homotopía. Por lo anterior el grado ortogonal construido por Ize y Vignoli estará definido sólo en

espacios de dimensión finita y para acciones de grupos abelianos compactos. También existen otras definiciones particulares del grado ortogonal para el grupo S^1 , como la que se encuentra en [Ryb94], para ello se usa directamente al grado equivariante y un multiplicador de Lagrange.

El grado ortogonal tiene las propiedades naturales, como son existencia, invarianza homotópica (por definición), escisión, etc. Dichas propiedades serán fundamentales para probar existencia de bifurcación. De entre ellas, particularmente la propiedad de existencia nos permitirá encontrar bifurcación con simetrías relacionadas a los grupos de isotropía, pues dicha propiedad nos garantiza que si uno de los enteros del grado es no nulo, entonces la función se anula en un punto con el grupo de isotropía del entero.

En el primer capítulo expondremos la definición, las propiedades y una forma básica de calcular el grado ortogonal. Aun cuando nosotros mostraremos sólo las ideas necesarias para usar el grado ortogonal, el grado es un tópico interesante en si mismo, por lo que referiremos a los interesados en conocer las demostraciones a [IV03].

Una vez fundamentada nuestra herramienta del grado ortogonal, en el capítulo dos procederemos a encontrar condiciones para la bifurcación global de soluciones periódicas de un equilibrio. Para lograr dicha meta, el primer paso es plantear la bifurcación de soluciones periódicas como un problema de bifurcación de ceros. Como estamos considerando ecuaciones diferenciales autónomas, el operador de bifurcación será ortogonal respecto de la acción de cambio de fase en el espacio de funciones 2π -periódicas.

Ahora bien, debido a que el grado ortogonal está definido sólo en espacios de dimensión finita, y el operador de bifurcación está definido en un espacio de dimensión infinita, el siguiente paso es hacer una reducción global de Liapunov-Schmidt sobre el operador de bifurcación. Realizaremos dicha reducción haciendo una proyección sobre un número finito de modos de Fourier, con lo cual obtendremos un ecuación de bifurcación que conserve todas las propiedades del operador de bifurcación.

Finalmente, aplicaremos el grado ortogonal a la ecuación de bifurcación, obteniendo como resultado condiciones suficientes para la bifurcación de soluciones periódicas. Sin entrar en detalle, podemos decir que existirá bifurcación periódica cada vez que haya un cambio en el índice de Morse de una

matriz, relacionada a la estabilidad lineal del equilibrio. De hecho, nosotros usaremos al grupo de isotropía del equilibrio para probar que la matriz de linealización se descompone diagonalmente en bloques. Específicamente, probaremos que cada vez que cambie el índice de Morse de uno de los bloques, existirá bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías relacionadas a ese bloque. Así al final del capítulo dos, usando grado ortogonal, encontraremos las condiciones para encontrar la bifurcación de un equilibrio.

A pesar de que los resultados de bifurcación con grado ortogonal nos bastarán para probar la bifurcación periódica en el problema del satélite y de los $n + 1$ -cuerpos, dichos resultados no nos bastarán para probar bifurcación de equilibrios relativos, debido a que estamos limitados a usar el grado para acciones de grupos abelianos.

Debido a ello, en el capítulo cuatro tendremos que desarrollar teoremas específicos de bifurcación global de equilibrios relativos, todos esos teoremas específicamente a partir del equilibrio poligonal. Dichos teoremas los probaremos usando grado de Brouwer en espacios de puntos fijos.

Nosotros usamos el grado ortogonal y los resultados de [IV03]. También recomendamos el libro [BKS06]. El grado equivariante u ortogonal se ha desarrollado en las referencias [IMV89], [DGJM91], [Ryb94], [IV99], [IV03] y [BKS06].

Resultados

A continuación presentaremos los resultados que obtuvimos en los problemas del satélite, y de los $n + 1$ -cuerpos y sistemas similares. Para ello, dividiremos la exposición de los resultados en tres partes:

- (i) El problema del satélite.
- (ii) La bifurcación de equilibrios relativos a partir del equilibrio poligonal.
- (iii) La bifurcación de soluciones periódicas a partir del equilibrio poligonal.

Debido a que no estamos presentando los resultados en el orden en que los obtuvimos, al inicio de cada resumen daremos una referencia a los capítulos en los cuales encontramos los resultados. Como referencia general el problema (i) se desarrolló principalmente en el capítulo tres, el problema (ii) en el capítulo cuatro y el problema (iii) en el capítulo cinco.

Satélite

A continuación daremos una breve referencia a los capítulos en los que se encuentran los resultados del satélite. El primer resultado para el problema del satélite se prueba en el capítulo tres, en donde analizamos en general la bifurcación de soluciones periódicas planas cerca de los equilibrios. En dicho capítulo, estudiamos el caso particular en que los cuerpos primarios forman el equilibrio relativo poligonal de Maxwell. También estudiamos la bifurcación del problema restringido de tres cuerpos y del problema de la luna de Hill. Finalmente, en el capítulo tres se analizan para las ecuaciones de los vórtices, un problema equivalente al del satélite. Y en la primera sección del capítulo cinco abordamos el problema de bifurcación de soluciones periódicas espaciales.

Para poder explicar nuestros resultados, tenemos que comentar que los equilibrios del satélite corresponden a puntos críticos del potencial de la ecuación diferencial. Pues bien, encontramos que un equilibrio tiene bifurcación periódica dependiendo de la cualidad de ese equilibrio. Precisando, probamos que los puntos silla tienen exactamente una bifurcación global de soluciones periódicas planas; que los máximos tienen siempre dos bifurcaciones periódicas y que los mínimos tienen dos (o no tienen) bifurcaciones periódicas.

Respecto de la bifurcación espacial, en el capítulo cinco probamos que todos los equilibrios tienen además de la bifurcación plana a una bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías

$$x(t) = x(t + \pi), y(t) = y(t + \pi) \text{ y } z(t) = -z(t + \pi).$$

Además, podemos garantizar que las soluciones anteriores son espaciales, cuando los periodos iniciales de bifurcación plana y espacial no son múltiplos el uno del otro. En ese caso las soluciones parecen ochos espaciales, y en lo sucesivo nos referiremos a ellas de esa manera.

Como ya comentamos, los equilibrios son puntos críticos de un potencial. Pues bien, probamos que el potencial general del satélite no tiene máximos y que tiene un mínimo global. Además, encontramos usando el teorema de Poincaré-Hopf, cuando el potencial es de Morse, que existen al menos n puntos silla, donde n es el número de cuerpos primarios. Pues bien, usando los resultados generales de bifurcación, encontramos que el problema del satélite

tiene n puntos silla con una bifurcación global de soluciones periódicas planas y una de ochos espaciales, y que el mínimo sólo tiene una bifurcación global de ochos espaciales.

Cuando los cuerpos primarios forman el equilibrio relativo poligonal de Maxwell, probamos que el potencial tiene dos polígonos de puntos silla y un polígono de mínimos. De esa manera, obtenemos que en cada punto silla existe una bifurcación global de soluciones periódicas planas y una de ochos espaciales. Además, probamos cuando el cuerpo primario central tiene masa grande, que los mínimos tienen dos bifurcaciones de soluciones periódicas planas, además de la bifurcación periódica espacial.

En el problema restringido de tres cuerpos, encontramos a partir de los equilibrios Lagrangianos las bifurcaciones conocidas como bifurcaciones de periodo corto y largo, para la razón de masa menor al radio crítico de Routh. También encontramos que los equilibrios Eulerianos que son puntos silla, tienen una bifurcación global de soluciones periódicas planas. Finalmente, probamos que cada equilibrio tiene una bifurcación global de soluciones periódicas de ochos espaciales, para lo cual tuvimos que probar en esos casos, que la bifurcación espacial no es resonante con la bifurcación plana.

En el problema de la luna de Hill encontramos dos equilibrios que son puntos silla del potencial. Por lo que los dos equilibrios tienen una bifurcación global de soluciones periódicas planas.

Relacionado al problema del satélite analizamos el problema equivalente para el modelo de vórtices. A pesar de que la ecuación en dicho modelo es integrable por el método de cuadratura, nosotros aplicamos los resultados generales de bifurcación sólo con el fin de ilustrar explícitamente los resultados abstractos.

A continuación mencionaremos algunos trabajos donde se ha estudiado el problema del satélite. Las comparaciones de los resultados se dan en los comentarios finales de cada capítulo. El problema del satélite en el equilibrio poligonal se ha abordado de diversas manera en [BE04], [AE04] y [Kal08]. El problema restringido de los tres cuerpos y el problema de la luna de Hill se han estudiado ampliamente en las referencias [SM71], [MH91], [MR01], [MR04] y [DRP⁺07]. La bifurcación espacial en el problema del satélite se ha analizado numéricamente en [DRP⁺07] y [K GK05].

Bifurcación de equilibrios relativos

A continuación daremos una breve referencia a los capítulos en los que se encuentran los resultados de bifurcación de equilibrios relativos. En el capítulo cuatro abordamos la bifurcación en un problema general que incluye a los cuerpos y a los vórtices como casos particulares. Por otra parte, en la segunda sección del capítulo seis analizaremos la bifurcación de equilibrios relativos espaciales para las cargas. Finalmente, en el capítulo siete usamos los resultados del capítulo cuatro para encontrar bifurcación de ondas estacionarias para la latiz circular de Schrödinger.

Para encontrar bifurcación de equilibrios relativos necesitamos algún parámetro adicional. En el problema de los $n + 1$ -cuerpos, usaremos como parámetro de bifurcación a la razón entre la masa del cuerpo central y la masa de los cuerpos en el polígono. De manera análoga, en el modelo de los vórtices usaremos a la razón entre las circulaciones como parámetro de bifurcación. Para los cuerpos y los vórtices, probaremos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ hay un único valor del parámetro con bifurcación global de equilibrios relativos planos. En dichas soluciones los cuerpos forman agrupaciones de polígonos regulares de h lados, donde h es el máximo común divisor de k y n . De hecho, nosotros encontramos las bifurcaciones anteriores en un potencial general que incluye al modelo de los cuerpos y de los vórtices como casos particulares.

En el problema de las cargas, de manera análoga con el de los cuerpos, usaremos como parámetro de bifurcación a la razón entre las cargas de Coulomb. En ese caso probaremos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ existe un único valor del parámetro con bifurcación de equilibrios relativos espaciales. Para cada k , esas soluciones son equilibrios relativos espaciales de tal manera que las proyecciones en el plano de las soluciones forman agrupaciones de polígonos regulares de h lados, donde h es el máximo común divisor de k y n . Cabe mencionar que mientras en el problema de los $n + 1$ -cuerpos todos los equilibrios relativos son planos, en el problema de las cargas no existe bifurcación de equilibrios relativos planos, pero sí de equilibrios relativos espaciales.

Ahora bien, debido a que la latiz circular de Schrödinger es un problema ligeramente distinto a los demás, en la latiz el equilibrio poligonal corresponde a una onda rotante formada por n osciladores. En esa onda rotante, los osciladores tienen la misma amplitud pero distintas fases. Decimos que este problema es distinto debido a que, por una parte, no hay un oscilador

equivalente al cuerpo central, y por otra parte, debido a que las ecuaciones no son homogéneas, como en el problema de los $n + 1$ -cuerpos. Por lo anterior, en este problema no tenemos un parámetro similar al problema de los $n + 1$ -cuerpos, pero sí uno debido a la amplitud de la onda rotante.

Usando como parámetro de bifurcación a la amplitud de la onda rotante, nosotros encontramos para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ una condición para la existencia de bifurcación de ondas rotantes estacionarias. Las soluciones para cada k están formadas por n/h ondas rotantes idénticas, en donde cada onda rotante se encuentra formada de h osciladores y h es el máximo común divisor de k y n . Después de haber encontrado las condiciones generales de bifurcación, finalizaremos nuestros resultados usando esas condiciones para encontrar puntos de bifurcación en el potencial cúbico de Schrödinger y en un potencial saturable.

La bifurcación local de equilibrios relativos en el problema de los $n + 1$ -cuerpos y los vórtices se ha analizado anteriormente en el artículo [MS88].

Bifurcación de soluciones periódicas

En el capítulo cinco, finalmente veremos todo el esplendor del grado ortogonal al encontrar la bifurcación global de soluciones periódicas planas del equilibrio relativo poligonal. En dicho capítulo estudiaremos primero las ecuaciones para el modelo a) de los cuerpos, b) de las cargas, c) de los vórtices y d) de los filamentos casi paralelos. Por otra parte, en la segunda sección del capítulo seis analizamos la bifurcación de soluciones periódicas espaciales en los modelos a) de los cuerpos, y b) de las cargas. En particular analizamos en esos casos la bifurcación de soluciones periódicas espaciales del equilibrio poligonal. Finalmente, en la segunda sección del capítulo siete damos la bifurcación de ondas viajeras en la latiz circular no lineal de Schrödinger.

Ahora, comenzaremos a exponer los resultados dando una descripción de las simetrías. Primero, para explicar las simetrías, necesitamos identificar las posiciones en el plano con sus coordenadas complejas, de ese manera tomaremos a las posiciones del equilibrio relativo poligonal como $u_0 = 0$ y $u_j = e^{i(j2\pi/n)}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que las posiciones satisfacen las simetrías $u_{j+1} = e^{i2\pi/n}u_j$ con $j + 1 \in \{1, \dots, n\}$ modulo n . Pues bien, en la bifurcación plana, las simetrías anteriores se acoplan con las del grupo

temporal, de tal manera que en el rompimiento, bifurcan soluciones periódicas con las simetrías

$$u_{j+1}(t) = e^{i2\pi/n} u_j(t - (2\pi k/n)) \quad (\&)$$

para $j \in \{1, \dots, n\}$.

Queremos recordar que las soluciones anteriores son periódicas en un sistema de coordenadas rotantes, por lo que serán en general cuasiperiódicas en un sistema de coordenadas fijo. Cabe señalar que incluso, en algunos casos, esas soluciones coinciden con coreografías cuasiperiódicas; es decir, soluciones en las cuales todos los cuerpos siguen la misma trayectoria.

En los modelos a) de cuerpos, b) de cargas, c) de vórtices y d) de filamentos, encontramos bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías (&). En cada uno de esos casos, la existencia de bifurcación dependerá del análisis del espectro. El análisis en cada problema nos condujo a encontrar una rica variedad de soluciones periódicas con las simetrías (&).

Por ejemplo, en el caso que el parámetro de bifurcación estacionaria es grande, encontramos que en los modelos a), b), c) y d) existe una bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías (&) para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, y de hecho, para los cuerpos existen dos ramas para cada uno de esos k . Por lo que en dichos casos existirán más o menos n ramas de bifurcación de soluciones periódicas del equilibrio relativo poligonal, y para los cuerpos $2n$ soluciones.

Para la latiz circular de osciladores no lineales de Schrödinger encontramos para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ una condición para la bifurcación de ondas viajeras rotantes con simetrías (&). En particular, analizamos esa condición para el potencial cúbico de Schrödinger y para un potencial saturable. Denominamos a las bifurcaciones ondas viajeras rotantes, debido a que las normas de los osciladores con las simetrías (&) satisfacen

$$r_{j+1}(t) = r_j(t - 2\pi k/n).$$

Por lo anterior, podemos decir que dichas soluciones están formadas de n/h ondas viajeras idénticas, en donde las fases oscilan cuasiperiódicamente en el tiempo y en donde h es el máximo común divisor de k y n .

Dado que el problema de bifurcación y de estabilidad lineal están relacionados, de alguna manera seremos capaces de corroborar algunos resultados

de estabilidad del equilibrio poligonal, como los resultados de [Rob00] para el problema de los cuerpos y los de [CS00] para el problema de los vórtices.

Finalmente, queremos presentar los resultados encontrados para la bifurcación de soluciones periódicas espaciales, a partir de un equilibrio relativo arbitrario del problema de los n -cuerpos. Pues bien, debido a que todos los equilibrios relativos son planos, usamos a la reflexión que deja fijo al equilibrio para probar bifurcación de soluciones periódicas con simetrías

$$x_j(t) = x_j(t + \pi), y_j(t) = y_j(t + \pi) \text{ y } z_j(t) = -z_j(t + \pi). \quad (\$)$$

Concretamente, probamos que un equilibrio relativo siempre tiene una bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías (\$). Pero de hecho, genéricamente cada equilibrio relativo tiene $n - 1$ ramas de bifurcación con dichas simetrías. Para garantizar que las soluciones con simetrías (\$) son espaciales, necesitamos asegurar que no hay resonancia con la bifurcación plana. Es decir, necesitamos probar que los periodos iniciales de la bifurcación plana y espacial no son múltiplos el uno del otro.

En particular, para el problema de los $n + 1$ -cuerpos y de las cargas, analizamos a detalle la bifurcación espacial del equilibrio relativo poligonal. En ese caso probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ existe una bifurcación de soluciones periódicas espaciales con las dos simetrías (&) y (\$). Debido a que las soluciones con las dos simetrías (&) y (\$) son algo más complejas, sólo ejemplificaremos el caso $k = n/2$ para n par. En ese caso particular, las soluciones son órbitas Hip-Hop cuasiperiódicas, es decir, soluciones en las que dos polígonos regulares de $n/2$ lados oscilan verticalmente, uno con $z(t)$ y otro con $-z(t + \pi)$, y de tal forma que las proyecciones en el plano siempre forman un polígono regular de n lados.

Las órbitas Hip-Hop se han estudiado ampliamente en [DTW83], [MS93], [BCPS06] y [CF08] .

Capítulo 1

Grado ortogonal

Nuestro principal objetivo es usar el grado ortogonal para probar la bifurcación de soluciones periódicas en sistemas Hamiltonianos. Dado que la teoría del grado ortogonal es muy extensa, en este capítulo sólo vamos a mostrar las ideas necesarias para poder usar el grado ortogonal. Para los detalles relacionados a la teoría del grado ortogonal nos vamos a referir a nuestra principal referencia [IV03].

En la primera sección damos las definiciones necesarias para poder manejar las simetrías. En la segunda sección definimos el grado ortogonal y enunciamos sus principales propiedades. Finalmente, en la tercera sección mostramos como se calcula el grado ortogonal en un caso sencillo.

1.1. Representaciones de grupos

Sea Γ un grupo de Lie compacto, sea X un espacio de Banach y sea $GL(X)$ el grupo de isomorfismos lineales en X . Decimos que un espacio de Banach X es una Γ -**representación**, si existe un homomorfismo de grupos $\rho : \Gamma \rightarrow GL(X)$. A ρ se le llama una **representación** de Γ . En lo sucesivo X y Y serán Γ -representaciones.

El **grupo de isotropía** de $x \in X$ es el subgrupo

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}.$$

Al conjunto $\Gamma x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$ lo llamamos la **órbita** de x . Podemos probar que un grupo de isotropía es cerrado y que la órbita Γx es homeomorfa al

grupo cociente Γ/Γ_x . Decimos que $x \in X$ es un punto fijo cuando $\Gamma_x = \Gamma$. El cero siempre es un punto fijo de Γ .

En lo sucesivo S^1 será el grupo abeliano $S^1 = [0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$. Además, en lo sucesivo \mathbb{Z}_n será el subgrupo de S^1 generado por $\zeta = 2\pi/n$. Podemos ejemplificar las definiciones anteriores con la acción del grupo S^1 en \mathbb{C} como $\rho(\varphi) = e^{i\varphi n}$. En este caso, las órbitas de S^1 son simplemente los círculos $S^1(r) = \{re^{i\varphi} : \varphi \in S^1\}$. Además, el grupo de isotropía es \mathbb{Z}_n pues $\rho(\zeta) = e^{2\pi i} = 1$.

Ahora analicemos la acción del grupo \mathbb{Z}_n en \mathbb{C} como $\rho(\zeta) = e^{ik\zeta}$. Sea h el máximo común divisor de k y n . Definamos a \bar{k} y \bar{n} como $k = \bar{k}h$ y $n = \bar{n}h$. La acción del elemento $\bar{n}\zeta \in \mathbb{Z}_n$ es trivial, pues $\rho(\bar{n}\zeta) = e^{i(2\pi\bar{k})} = 1$. Por lo tanto, el grupo de isotropía de un punto distinto al cero es \mathbb{Z}_h , el grupo generado por $\bar{n}\zeta = 2\pi/h$. Además, la órbita de un punto distinto al cero es homeomorfa al grupo generado por $2\pi/\bar{n}$. Por lo tanto la órbita de r es $re^{i(2\pi j/\bar{n})}$ para $j \in \{1, \dots, \bar{n}\}$.

Definamos al **espacio de puntos fijos** de un subgrupo H como

$$X^H = \{x \in X : hx = x, \forall h \in H\}.$$

Se puede probar que el subespacio X^H es cerrado. El espacio de puntos fijos de Γ es X^Γ . Además, si H es un subgrupo de K , entonces $X^K \subset X^H$.

Decimos que un conjunto $\Omega \subset X$ es **Γ -invariante**, si $\Gamma x \in \Omega$ para todo $x \in \Omega$. La bola $B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$ siempre es invariante para una acción de isometrías.

Definimos el **grupo normalizador** de H como el subgrupo

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} \subset H\}.$$

El grupo normalizador es el subgrupo más grande de Γ que deja invariante a X^H . El **grupo de Weyl** de H es el grupo cociente

$$W(H) = N(H)/H = \{kH : k \in N(H)\}.$$

Como la acción de H en X^H es trivial, la acción de $N(H)$ en X^H es equivalente a la de $W(H)$. El grupo de Weyl de H siempre es Γ/H cuando Γ es un grupo abeliano.

Decimos que dos grupos H y K son **conjugados** cuando existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $H = \gamma K \gamma^{-1}$. Definimos a $Iso(\Gamma)$ como el conjunto de grupos de isotropía modulo conjugación. El grupo de isotropía, el normalizador y

el grupo de Weyl son conjugados en una órbita Γx . Además, cuando Γ es abeliano, los tres grupos coinciden en la órbita Γx .

Definamos a $O(2)$ como el grupo $S^1 \cup \kappa S^1$, que consta de dos copias de S^1 ligadas por una reflexión. Definamos la acción del grupo $O(2)$ en \mathbb{C} como

$$\rho(\varphi) = e^{\varphi ni} \text{ y } \rho(\kappa)z = \bar{z}.$$

Con la acción anterior, las órbitas de $O(2)$ son círculos $O(2)(r) = \{re^{i\varphi} : \varphi \in S^1\}$. Además, el grupo de isotropía de los puntos en \mathbb{R}^+ es $D_n = \mathbb{Z}_n \cup \kappa\mathbb{Z}_n$ y el grupo de isotropía de otros puntos es el conjugado a D_n . Además, el espacio de puntos fijos de D_n es \mathbb{R} . Por lo que el grupo normalizador de D_n es D_{2n} y el grupo de Weyl es $W(D_n) = \mathbb{Z}_2 = \{0, \pi\}$. De hecho, el elemento $\pi \in W(D_n)$ actúa en \mathbb{R} como $\rho(\pi) = -1$.

Definamos a D_n como el grupo $\mathbb{Z}_n \cup \kappa\mathbb{Z}_n$, que consta de dos copias de \mathbb{Z}_n ligadas por una reflexión. Definamos la acción del grupo D_n en \mathbb{C} como

$$\rho(\zeta) = e^{k\zeta i} \text{ y } \rho(\kappa)z = \bar{z}.$$

Como \mathbb{Z}_n es un subgrupo de D_n , entonces el subgrupo \mathbb{Z}_h deja fijo a \mathbb{C} con h el máximo común divisor de k y n . Como la órbita de \mathbb{Z}_n es igual a la órbita del grupo $\mathbb{Z}_{\bar{n}}$ con $\bar{n} = n/h$, entonces podemos escoger al elemento $re^{i\varphi}$ con $\varphi \in (-\pi/\bar{n}, \pi/\bar{n}]$ de la órbita de D_n . Además, de la acción de la reflexión κ podemos escoger al elemento con $\varphi \in [0, \pi/\bar{n}]$.

La órbita de $re^{i\varphi}$ para $\varphi \in (0, \pi/\bar{n})$ tiene a los puntos $e^{\pm i\varphi} e^{i(2\pi j/\bar{n})}$ para $j \in \{1, \dots, \bar{n}\}$. Por lo anterior, el grupo de isotropía del punto $re^{i\varphi}$ es el grupo \mathbb{Z}_h para $\varphi \in (0, \pi/\bar{n})$. Los elementos $re^{i\varphi}$ para $\varphi \in \{0, \pi/\bar{n}\}$ tienen órbitas $e^{i(2\pi j/\bar{n})}$ para $j \in \{1, \dots, \bar{n}\}$. Por lo tanto, el grupo de isotropía de los puntos en \mathbb{R}^+ es $D_n = \mathbb{Z}_h \cup \kappa\mathbb{Z}_h$. Además, el espacio de puntos fijos del grupo D_n es \mathbb{R} . Como sólo existe una acción libre no trivial en \mathbb{R} dada por el grupo $\mathbb{Z}_2 = \{0, \pi\}$, entonces el grupo de Weyl es \mathbb{Z}_2 si \bar{n} es par y es el trivial si \bar{n} es impar.

Sea γ la acción en X y γ' la acción en Y , decimos que una función $f : \Omega \rightarrow Y$ es Γ -**equivariante** cuando

$$f(\gamma x) = \gamma' f(x).$$

Además, cuando la acción en Y es trivial, decimos que f es Γ -**invariante**. Una función impar es un ejemplo de una función \mathbb{Z}_2 -equivariante. Una función par es un ejemplo de una función \mathbb{Z}_2 -invariante. Una función equivariante

siempre se anula en órbitas de puntos, pues $f(\gamma x) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ cuando $f(x) = 0$.

Decimos que una representación V es **irreducible**, cuando V no tiene subespacios propios invariantes de Γ . Es decir, si los únicos subespacios invariantes son V y $\{0\}$. El espacio \mathbb{C} es un ejemplo de representación irreducible, en general, para los ejemplos anteriores. Además, se puede probar que toda representación es una suma directa de representaciones irreducibles.

A continuación vamos a probar el lema de Schur.

Lema 1.1 *Sea $A : V \rightarrow W$ un mapeo lineal, si A es Γ -equivariante entre representaciones irreducibles, entonces A es invertible o cero.*

Prueba. Como el núcleo de A es un subespacio Γ -invariante, entonces el núcleo de A es V o $\{0\}$. En el primer caso el mapeo es cero. En el segundo caso el rango de A es no trivial. Como el rango es un subespacio Γ -invariante, entonces el rango es todo W . Por lo tanto A es invertible. \square

Proposición 1.2 *Un mapeo Γ -equivariante que es diferenciable en una vecindad de x satisface*

$$df(\gamma x)\gamma = \gamma' df(x) \text{ para } \gamma \in \Gamma.$$

En particular, la derivada $f'(x)$ es una función Γ_x -equivariante. Además, el gradiente de un funcional Γ -invariante es Γ -equivariante cuando la acción de Γ es ortogonal.

Prueba. Concluimos la primera parte de la unicidad de la derivada y de que

$$\begin{aligned} df(\gamma x)\gamma y + o(y) &= f(\gamma(y+x)) - f(\gamma x) \\ &= \gamma'[f(y+x) - f(x)] = \gamma' df(x)y + o(y). \end{aligned}$$

La segunda parte de la proposición la obtenemos de que

$$\gamma^T \nabla f(\gamma x) = [Df(\gamma x)\gamma]^T = Df(x)^T = \nabla f(x).$$

\square

Un grupo abeliano Γ que es compacto, es de la forma $\Gamma = \Pi \times T^n$, donde Π es el producto de grupos \mathbb{Z}_{n_j} y donde T^n es el producto de grupos S^1 .

Sean $\varphi_j \in (-\pi, \pi]$ las componentes del elemento γ con $\gamma = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in T^n$. Definimos a los **generadores del grupo** Γ como

$$A_j x = \frac{\partial}{\partial \varphi_j} (\gamma x) |_{\gamma=0}.$$

Por ejemplo, la acción $\varphi x = e^{i\varphi} x$ de S^1 en \mathbb{C} tiene generador $Ax = ix$. En coordenadas reales el generador del grupo es $Ax = nJx$, en donde J es la matriz simplectica y $x \in \mathbb{R}^2$.

El gradiente de una función Γ -invariante $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es ortogonal a los generadores

$$\langle \nabla f(x), A_j x \rangle = df(x) A_j x = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\gamma x) |_{\varphi=0} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(x) = 0.$$

Definición 1.3 Decimos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es **Γ -ortogonal**, cuando es Γ -equivariante y es ortogonal a los generadores, $\langle f(x), A_j x \rangle = 0$ para toda $x \in \Omega$.

La integral de Haar es una integral para grupos de Lie compactos Γ . Con la integral de Haar se pueden construir representaciones ortogonales equivalentes, vecindades Γ -invariantes, proyecciones Γ -equivariantes, extensiones Γ -equivariantes, etc [IV03].

1.2. Definición del grado Γ -ortogonal

A continuación vamos a suponer que Γ es un grupo de Lie compacto y abeliano, y que Ω es un dominio invariante en una Γ -representación de dimensión finita V . Sean f_0 y f_1 dos funciones Γ -ortogonales y distintas de cero en la frontera $\partial\Omega$. Decimos que las funciones f_0 y f_1 son **Γ -ortogonal homotópicas**, cuando existe una deformación continua

$$f_t : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow E,$$

tal que la función f_t es Γ -ortogonal y no nula en la frontera $\partial\Omega$ para cada t .

La bola $B_r = \{x \in V : \|x\| \leq r\}$ siempre es un conjunto invariante cuando la representación es una isometría. Definimos al conjunto \mathcal{C} como el conjunto de funciones Γ -ortogonales

$$f : \partial([0, 1] \times B_r) \rightarrow \mathbb{R} \times V - \{0\}.$$

Como la frontera de $[0, 1] \times B_r$ es isomorfa a la esfera S^V y el conjunto $\mathbb{R} \times V - \{0\}$ es Γ -homotópico a la esfera S^V , entonces la función f mapea la esfera S^V en la esfera S^V .

La Γ -ortogonal homotopía es una relación de equivalencia en \mathcal{C} . Definamos a $[f]_{\perp}$ como la clase de equivalencia de f y definamos a $\Pi_{\perp}[S^V]$ como el conjunto de clases de equivalencia de \mathcal{C} . Contrayendo las tapas $\{0\} \times B_r$ y $\{1\} \times B_r$ a un punto, podemos probar que en toda clase $[f]_{\perp}$ existe una función tal que $f(t, x) = (1, 0)$ para $t \in \{0, 1\}$. Con esas funciones, definimos la suma $[f]_{\perp} + [g]_{\perp} = [f \oplus g]_{\perp}$ con

$$f \oplus g = \begin{cases} f(2t, x) & \text{para } t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1, x) & \text{para } t \in [1/2, 1] \end{cases} .$$

Para poder definir la suma, necesitamos restringir el conjunto \mathcal{C} a las funciones con la primera variable positiva cuando el espacio de puntos fijos de Γ es trivial.

El conjunto $\Pi_{\perp}[S^V]$ tiene estructura de grupo con la suma anterior. El neutro es el mapeo $[(1, 0)]_{\perp}$ y el inverso de $[f]_{\perp}$ es $[f(1 - t, x)]_{\perp}$. Además, se puede probar que el grupo $\Pi_{\perp}[S^V]$ es abeliano cuando el espacio V^{Γ} es distinto al trivial.

A continuación vamos a definir el grado Γ -ortogonal de una función $f : \Omega \rightarrow V$ no nula en la frontera $\partial\Omega$. Para poder definir el grado vamos a necesitar una extensión \bar{f} de la función f a una bola B tal que $\Omega \subset B$. Además, vamos a necesitar construir una función de Urysohn Γ -invariante cuyo valor sea cero en Ω y uno en $B \setminus N$, en donde N es vecindad pequeña de $\bar{\Omega}$. La existencia de la función de Urysohn φ y la extensión \bar{f} la obtenemos del teorema de extensión Γ -ortogonal de Borsuk. En [IV03] se prueba el teorema de extensión de Borsuk Γ -ortogonal para grupos abelianos.

Definición 1.4 *El grado Γ -ortogonal de una función f es la clase de homotopía*

$$\deg_{\perp}(f; \Omega) = [(2t + 2\varphi - 1, \bar{f})]_{\perp} \in \Pi_{\perp}[S^V].$$

La definición de grado Γ -ortogonal anterior se debe a Ize y Vignoli [IV03]. Existe otra definición de grado S^1 -ortogonal en el artículo [Ryb94].

Cuando Ω es una bola, el grado es simplemente la clase de homotopía de la suspensión $\deg_{\perp}(f; \Omega) = [(2t - 1, f)]_{\perp}$.

El grado tiene las siguientes propiedades.

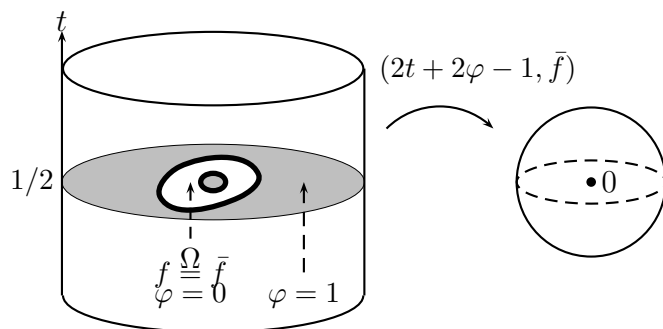


Figura 1.1: Definición del grado

- (P1): *Existencia.* Si el grado de una función es no trivial en Ω , entonces la función tiene un cero en Ω .
- (P2): *Invarianza Γ -ortogonal homotópica.* Dos funciones Γ -ortogonal homotópicas tienen el mismo grado.
- (P3): *Escisión.* Si $\Omega_0 \subset \Omega$ es un conjunto abierto e invariante tal que la función no se anula en el complemento de Ω_0 , entonces $\deg_{\perp}(f; \Omega) = \deg_{\perp}(f; \Omega_0)$

En el libro [IV03] se prueba que por cada grupo de isotropía de Γ , el grupo $\Pi_{\perp}[S^V]$ tiene un grupo isomorfo a \mathbb{Z} ,

$$\Pi_{\perp}[S^V] = \bigoplus_{H \in Iso(\Gamma)} \mathbb{Z}.$$

Además, se prueba que el grado de una función es la suma de la forma

$$\deg_{\perp}(f; \Omega) = \sum_{H \in Iso(\Gamma)} d_H[F_H]_{\perp},$$

en donde $[F_H]_{\perp}$ es un generador de un grupo isomorfo a \mathbb{Z} .

Sin la restricción a homotopías Γ -ortogonales, obtenemos sólo la definición de grado Γ -equivariante en la definición anterior. En ese caso, en el libro [IV03] se prueba que el grado Γ -equivariante tiene solamente un \mathbb{Z} para cada grupo de isotropía H tal que Γ/H es finito. En las aplicaciones que vamos a ver no es posible probar la bifurcación solamente con el grado Γ -equivariante.

1.3. Cálculo del índice S^1 -ortogonal

Al grado de una función en la vecindad de una órbita aislada le vamos a llamar el índice. El grado de una función que se anula solamente en órbitas aisladas es la suma de los índices en esas órbitas.

Con una deformación podemos probar que el índice en cero es igual al grado de la derivada en cero $\deg_{\perp}(f, B_{2\varepsilon}) = \deg_{\perp}(f'(0), B_{2\varepsilon})$. Por lo tanto, para conocer el índice en cero, sólo necesitamos conocer el índice en cero de los mapeos lineales S^1 -ortogonales.

Los grupos \mathbb{Z}_l generados por $2\pi/l$ son los subgrupos de S^1 . Por lo tanto, una S^1 -representación se descompone en suma directa de la forma

$$V = V^{\mathbb{Z}_0} \oplus \dots \oplus V^{\mathbb{Z}_l},$$

en donde los $V^{\mathbb{Z}_l}$ son los subespacios de representaciones irreducibles similares con acción $\rho(\varphi) = e^{il\varphi}$ para $\varphi \in S^1$.

Definición 1.5 Sea $B : V \rightarrow V$ un mapeo lineal S^1 -ortogonal, definimos a los bloques B_l como las restricciones B_l de B a $V^{\mathbb{Z}_l}$. Además, definimos a n_l como el índice de Morse de B_l para $l \in \{1, 2, \dots\}$ y a σ como el signo de $\det B_0$.

A continuación vamos a mostrar cómo se calcula el índice en cero de un mapeo lineal S^1 -ortogonal.

Teorema 1.6 Sea $B : V \rightarrow V$ un mapeo lineal y S^1 -ortogonal, entonces

$$\deg_{\perp}(Bx; B_{2\varepsilon}) = \sigma[F_{\mathbb{Z}_0}]_{\perp} + \sum_l n_l \sigma[F_{\mathbb{Z}_l}]_{\perp}.$$

Prueba. [Idea de la prueba] Del lema de Schur podemos encontrar un cambio de variables tal que la matriz B sea diagonal en los bloques B_l . A continuación vamos a probar que las matrices $B_l = A + iD$ son autoadjuntas para $l \in \{1, 2, \dots\}$.

Como B_l es Γ -ortogonal y el generador del grupo de S^1 en $V^{\mathbb{Z}_l}$ es $A_l x = ilx$, entonces en coordenadas reales tenemos que $\langle B_l x, A_l x \rangle = 0$ con

$$B_l = \begin{pmatrix} A & -D \\ D & A \end{pmatrix} \text{ y } A_l = l \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, como B_l es Γ -equivariante, entonces B_l conmuta con el generador A_l . Como el generador satisface $A_l^T = -A_l$, entonces $\langle B_ly, A_lx \rangle = \langle -B_l^T x, A_ly \rangle$. De las propiedades anteriores podemos concluir que

$$0 = \langle B_l(x + y), A_l(x + y) \rangle = \langle B_lx, A_ly \rangle + \langle B_ly, A_lx \rangle = \langle (B_l - B_l^T)x, A_ly \rangle.$$

Por lo tanto, para $l \in \{1, 2, \dots\}$ tenemos, como matrices reales, que $B_l = B_l^T$ y, como matrices complejas, que

$$B_l^* = (A + iD)^* = A^T - iD^T = A + iD = B_l.$$

El argumento anterior no es válido para $l = 0$ debido a que el generador en ese caso es trivial.

Definamos a $GL_{\perp}(V)$ como el conjunto de mapeos lineales S^1 -ortogonales. La S^1 -ortogonal homotopía en $GL_{\perp}(V)$ es una relación de equivalencia, por lo que definimos a $\Pi(GL_{\perp}(V))$ como el grupo de homotopías en $GL_{\perp}(V)$. El grupo $\Pi(GL_{\perp}(V))$ está caracterizado por deformaciones que conservan la estructura ortogonal, por lo que las homotopías en $GL_{\perp}(V)$ tienen que ser de la forma

$$B(t) = \text{diag}(B_0(t), B_1(t), \dots, B_p(t))$$

con la matriz $B_l(t)$ autoadjunta para $l \in \{1, 2, \dots\}$.

Para $l > 0$, usando que las matrices en $GL_{\perp}(V^{\mathbb{Z}l})$ son autoadjuntas, se puede probar que las matrices $\text{diag}(-I_m, I_{d-m})$ pertenecen a distintas componentes conexas en $GL_{\perp}(V^{\mathbb{Z}l})$. Además, podemos deformar a B_l en $\text{diag}(-I_{n_l}, I_*)$ con n_l el índice de Morse de B_l . Por lo tanto $[B_l] = [(-I_{n_l}, I_*)]$. Además, sabemos que $GL(V^{\mathbb{Z}0})$ tiene dos componentes conexas caracterizadas por el signo del determinante, entonces $[B_0] = [(\sigma, I_*)]$. De lo anterior concluimos que

$$[B] = ([B_0], \dots, [B_l]) \in \Pi(GL_{\perp}(V))$$

con $[B_0] = [(\sigma, I_*)]$ y $[B_l] = [(-I_{n_l}, I_*)]$.

Definamos al mapeo $J_{\perp} : GL_{\perp}(V) \rightarrow \{f : V \rightarrow V\}$ como $J_{\perp}(B) = Bx$. Se puede probar que el mapeo $J_{\perp}(B)$ induce un morfismo de grupos entre $\Pi(GL_{\perp}(V))$ y $\Pi_{\perp}(S^V)$ para $\sigma = 1$, entonces $[J_{\perp}(\Pi_l[B_l])]_{\perp} = \sum_l [J_{\perp}([B_l])]_{\perp}$. Como $\text{deg}_{\perp}(Bx; B_{2\varepsilon}) = [\Sigma_0 J_{\perp}(B)]_{\perp}$, entonces

$$\text{deg}_{\perp}(Bx; B_{2\varepsilon}) = \sum_l [\Sigma_0 J_{\perp}(B_l)]_{\perp}.$$

De los generadores explícitos en [IV03] se puede probar que $[\Sigma_0 J_\perp(B_l)] = n_l[F_{Z_l}]_\perp$, entonces

$$\deg_\perp(Bx; B_{2\varepsilon}) = [F_{Z_0}]_\perp + \sum_l n_l[F_{Z_l}]_\perp$$

para $\sigma = 1$. □

1.4. Comentarios

En este capítulo expusimos los resultados del libro [IV03] para mostrar como se define y calcula el grado ortogonal. Para más referencias recomendamos los libros [BKS06] y [IV03], en los que se encuentra una exposición moderna del grado equivariante. A continuación realizaremos un breve recuento de la gente que ha contribuido a desarrollar el concepto del grado.

La primera definición de grado en espacios de dimensión finita se debe a Brouwer, y para operadores en dimensión infinita a Leray-Schauder. Podemos decir que el índice de Fuller para ecuaciones autónomas definido en [Ful67] es un predecesor del grado equivariante. Usando teoría de obstrucciones en [IMV89] se define el grado equivariante para un grupo de Lie compacto y se encuentra su relación con el índice de Fuller. También en el artículo [DGJM91] se encuentra una definición del grado S^1 -equivariante y su relación con el índice de Fuller. El grado para gradientes S^1 -invariantes definido por Dancer en [Dan85] es un predecesor del grado ortogonal. Basado en el grado S^1 -equivariante en [Ryb94] se define en grado S^1 -ortogonal. Más generalmente Ize y Vignoli en [IV99] definen un grado ortogonal para grupos abelianos. Relacionado con el grado ortogonal existe un grado para gradientes Γ -invariantes definido en [Geb97].

Capítulo 2

Aplicación del grado ortogonal a la bifurcación periódica

En este capítulo analizamos la bifurcación de soluciones periódicas en una ecuación diferencial que satisface una relación de ortogonalidad. Estos resultados nos van a servir en particular para encontrar bifurcación de soluciones periódicas en sistemas Hamiltonianos.

Dado que el grado ortogonal está definido en dimensión finita, para aplicar el grado ortogonal primero necesitamos realizar una reducción global de Liapunov-Schmidt. En la segunda sección usamos el grado ortogonal para encontrar las condiciones bajo las cuales un equilibrio tiene bifurcación de soluciones periódicas y, finalmente, en la tercera sección probamos que la bifurcación es un continuo global de soluciones periódicas.

2.1. Reducción global de Liapunov-Schmidt

Deseamos analizar la bifurcación de soluciones periódicas de la ecuación diferencial ordinaria

$$\sum_{j=1}^m D_j \frac{d^j}{dt^j} u + \nabla V(u) = 0, \quad (2.1)$$

donde la función $u(t)$ está en \mathbb{R}^n y las D_j son matrices constantes con D_m invertible.

Con el cambio de variables $x(t) = u(t/\nu)$, las soluciones $2\pi/\nu$ -periódicas

de la ecuación diferencial son las soluciones 2π -periódicas de

$$\sum_{j=1}^m D_j \nu^j \frac{d^j}{dt^j} x + \nabla V(x) = 0.$$

Sea $H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev de funciones 2π -periódicas con m derivadas, definimos al operador diferencial $\mathcal{D}(\nu)$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\nu) : H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow L_{2\pi}^2 \\ \mathcal{D}(\nu)x &= \sum_{j=1}^m \nu^j D_j \frac{d^j}{dt^j} x. \end{aligned}$$

En lo sucesivo supondremos que el potencial y el operador diferencial tienen las siguientes propiedades.

Condición 2.1 *Suponemos que el potencial V es Γ -invariante y que existe un conjunto cerrado y Γ -invariante Ψ tal que $V \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \Psi)$. También suponemos que la matriz de orden más alto del operador $\mathcal{D}(\nu)$ es invertible y que el operador $\mathcal{D}(\nu)$ es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal con la acción*

$$(\gamma, \varphi)x = \rho(\gamma)x(t + \varphi)$$

para $(\gamma, \varphi) \in \Gamma \times S^1$ y $x \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^2)$.

A la acción del grupo Γ la llamamos la acción espacial y a la acción del grupo S^1 la acción temporal. El generador de la acción temporal siempre es $Ax = \dot{x}$. Además, al conjunto Ψ le decimos el conjunto de **colisión**.

Definimos a $H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n \setminus \Psi)$ como el conjunto de trayectorias libres de colisión

$$H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n \setminus \Psi) = \{x \in H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) : x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \Psi\}.$$

Por lo tanto, las soluciones $2\pi/\nu$ -periódicas de la ecuación diferencial son los ceros del operador de bifurcación

$$\begin{aligned} f : H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n \setminus \Psi) \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow L_{2\pi}^2 \\ f(x, \nu) &= \mathcal{D}(\nu)x + \nabla V(x). \end{aligned}$$

Como el gradiente es ortogonal a los generadores de la acción espacial y

$$\langle \nabla V(x), \dot{x} \rangle_{L_{2\pi}^2} = V(x(2\pi)) - V(x(0)) = 0,$$

entonces el operador composición $\nabla V(x) : H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n \setminus \Psi) \rightarrow L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$ es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal. Por lo tanto el operador $f(x)$ está bien definido, es continuo y es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal.

A continuación vamos a hacer la reducción global de Liapunov-Schmidt, para lo cual necesitamos las siguientes definiciones. Sea $\sum_{l \in \mathbb{Z}} x_l e^{ilt}$ la serie de Fourier de $x \in L_{2\pi}^2$, definimos a la proyección $P : L_{2\pi}^2 \rightarrow L_{2\pi}^2$ como

$$Px = \sum_{|l| \leq p} x_l e^{ilt}.$$

Además, definimos a los componentes x_1 y x_2 de x como $x_1 = Px$ y $x_2 = (I - P)x$.

Como la inclusión de $H_{2\pi}^m$ en $C_{2\pi}$ es continua, entonces existe una constante c tal que $\{\|x\|_{H_{2\pi}^m} < \rho\}$ está contenido en $\{\|x\|_{C_{2\pi}} < c(\rho)\}$. Definimos el conjunto de puntos Ω_ρ como

$$\Omega_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 2c(\rho) \text{ y } \rho^{-1} < d(x, \Psi)\}.$$

Con el conjunto anterior definimos al conjunto de trayectorias $\tilde{\Omega}_\rho$ en $H_{2\pi}^m$ como

$$\tilde{\Omega}_\rho = \{x \in H_{2\pi}^m : \|x\|_{H_{2\pi}^m} < \rho, x(t) \in \Omega_\rho\}.$$

Además, definimos el conjunto Λ_ε como $\Lambda_\varepsilon = \{\nu > \varepsilon\}$.

Teorema 2.2 *En un conjunto $\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$ existe una proyección P tal que la función $x_2(x_1, \nu)$ es la única solución de $f_2(x_1, x_2, \nu) = 0$. Además, los ceros de $f(x, \nu)$ en $\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$ son los ceros de la función de bifurcación en $P\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$,*

$$f_1(\nu, x_1, x_2(x_1, \nu)) = \mathcal{D}(\nu)x_1 + P\nabla V(x_1 + x_2(x_1, \nu)).$$

Además, la función de bifurcación $f_1(x_1, \nu)$ también es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal.

Prueba. Los ceros de $f(x)$ son los ceros de sus componentes

$$f_1(x_1, x_2) = Pf(x) \text{ y } f_2(x_1, x_2) = (I - P)f(x).$$

Si probamos que existe una $\alpha > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, \nu) y_2 \right\|_{L_{2\pi}^2} \geq \alpha \|y_2\|_{H_{2\pi}^m}$$

para todo $(x, \nu) \in \tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$, del teorema de la función implícita global obtenemos la única solución $x_2(x_1, \nu)$ de $f_2(x_1, x_2(\nu, x_1), \nu) = 0$ para $(x_1, \nu) \in P\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$.

Una vez que probamos la existencia de la función $x_2(x_1, \nu)$, concluimos que los ceros de $f(x, \nu)$ son los ceros de la función de bifurcación $f_1(x_1, \nu) = f_1(x_1, x_2(x_1, \nu), \nu)$. Además, debido a la unicidad de la función $x_2(x_1, \nu)$, todas las propiedades de equivarianza de $f_1(x_1, \nu)$ son conservadas. Además, como $x_2(x_1, \nu)$ es solución de $\mathcal{D}(\nu)x_2 = (I - P)\nabla V(x_1 + x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle P\nabla V(x_1 + x_2), A_j x_1 \rangle &= - \langle (I - P)\nabla V(x_1 + x_2), A_j x_2 \rangle \\ &= - \langle \mathcal{D}(\nu)x_2, A_j x_2 \rangle = 0, \end{aligned}$$

pues $\mathcal{D}(\nu)$ es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal. Por lo tanto $f_1(x_1, \nu)$ preserva las propiedades de equivarianza y ortogonalidad.

Sólo nos falta probar la existencia de la cota uniforme α . Para $y_2 \in (I - P)H_{2\pi}^m$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, \nu)y_2 = \mathcal{D}(\nu)y_2 + (I - P)D^2V(x)y_2.$$

Notemos que existe una cota c_2 tal que $\|D^2V(x)\|_{C_{2\pi}} < c_2$ para todo $x \in \tilde{\Omega}_\rho$, pues $V \in C^2(\Omega_\rho)$. Como $\|y_2\|_{H_{2\pi}^m} \geq c_3 p^m \|y_2\|_{L_{2\pi}^2}$ para $y_2 \in H_{2\pi}^m$, entonces

$$\|(I - P)D^2V(x)y_2\|_{L_{2\pi}^2} < c_2 \|y_2\|_{L_{2\pi}^2} < c_4 p^{-m} \|y_2\|_{H_{2\pi}^m}. \quad (2.2)$$

El operadores $\mathcal{D}(\nu)$ en las series de Fourier es

$$\mathcal{D}(\nu)x(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} M(l\nu)x_l e^{il\nu t} \text{ con } M(\lambda) = \sum_{j=1}^m (i\lambda)^j D_j.$$

Como $M(\lambda)/\lambda^m \rightarrow i^m D_m$ cuando λ tiende a infinito y como D_m es invertible, entonces $\|M(\lambda)\| \geq c_1 \lambda^m$ para λ suficientemente grande. Por lo tanto, se satisface la desigualdad $\|M(\nu l)\| \geq c_1 \varepsilon^m l^m$ para $\nu \in \Lambda_\varepsilon$ y $l \in \{p, p+1, \dots\}$ con p suficientemente grande. Concluimos que

$$\|\mathcal{D}(\nu)y_2\|_{L_{2\pi}^2} \geq \left(\sum_{|l|>p} (c_1 \varepsilon^m l^m \|y_l\|)^2 \right)^{1/2} \geq c_1 \varepsilon^m \|y_2\|_{H_{2\pi}^m} \quad (2.3)$$

para $\nu \in \Lambda_\varepsilon$.

De las desigualdades anteriores concluimos que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, \nu) y_2 \right\|_{L^2_{2\pi}} > \|D(\nu)y_2\|_{L^2_{2\pi}} - \|(I - P)D^2V(x)y_2\|_{L^2} > \alpha \|y_2\|_{H^m_{2\pi}}$$

para $(x, \nu) \in \tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$, en donde $\alpha = c_1\varepsilon^m - c_4p^{-m}$. Concluimos el resultado de que α es positiva si escogemos a p suficientemente grande. En general p es cada vez más grande para ε cada vez más chico y ρ cada vez más grande. \square

La reducción global de Liapunov-Schmidt para mapeos ortogonales se encuentra en el libro [IV03] y sigue las ideas propuestas por Amann-Zehnder.

Como la función de bifurcación es real, sólo vamos a necesitar la mitad de sus modos de Fourier. Sean $f_l(x)$ los modos de Fourier de $f_1(x_1, \nu)$, definamos a la función de bifurcación $\hat{f} : V \times \mathbb{R}^+ \rightarrow V$ como

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, \nu) &= (f_0(x), \dots, f_p(x)) \text{ con} \\ V &= \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^n)^p, \end{aligned}$$

en donde el producto en V es

$$\langle x, y \rangle_V = 2\pi \langle x_0, y_0 \rangle + 4\pi \sum_{l=1}^p \operatorname{Re} \langle x_l, y_l \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Corolario 2.3 *Los ceros de $f(x, \nu)$ en $\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$ son los ceros de la función de bifurcación $\hat{f}(x, \nu)$ en $P\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$. La linealización de la función de bifurcación en un equilibrio $\hat{f}'(x_0)$ es diagonal con bloques $M(l\nu)$ para $l \in \{0, \dots, p\}$, donde*

$$M(\lambda) = \sum_{j=1}^m (i\lambda)^j D_j + D^2V(x_0).$$

La acción de $\Gamma \times S^1$ en el bloque $M(l\nu)$ es $(\gamma, \varphi)x_l = e^{i\varphi} \rho(\gamma)x_l$.

Prueba. Si expandimos en series de Fourier a $f_1(x_1)$ tenemos que

$$f_1(x_1) = \sum_{|l| \leq p} f_l(x_1) e^{ilt}.$$

Como $f_1(x_1)$ y x_1 son reales, entonces $f_{-l} = \bar{f}_l$ y $x_{-l} = \bar{x}_l$. Por lo tanto, los ceros de $f_1(x_1)$ están determinados por los ceros de los modos de Fourier $l \in$

$\{0, \dots, p\}$. Como $\mathcal{D}(\nu)x$ es un operador lineal y x_0 es un equilibrio, entonces

$$f'_1(x_0)x_1 = \sum_{|l| \leq p} \left(\sum_{j=1}^m (il\nu)^j D_j + D^2V(x_0) \right) x_l e^{ilt}.$$

La acción de $\Gamma \times S^1$ en $x_1 = \sum_{|l| \leq p} x_l e^{ilt}$ es

$$(\gamma, \varphi)x_1 = \sum_{|l| \leq p} (e^{il\varphi} \rho(\gamma)x_l) e^{ilt}.$$

Además, el producto de x_1 y y_1 es

$$\langle x_1, y_1 \rangle_{L^2_{2\pi}} = \sum_{l=-p}^p 2\pi \langle x_l, y_l \rangle_{\mathbb{C}} = 2\pi \sum_{l=-p}^p \operatorname{Re} \langle x_l, y_l \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Por lo que las conclusiones del corolario se siguen del teorema anterior. \square

2.2. Bifurcación local

En esta sección vamos a encontrar bifurcación local a partir de un equilibrio x_0 . Como $\mathcal{D}(\nu)$ es un operador puramente diferencial, entonces $\mathcal{D}(\nu)x_0 = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, los equilibrios $x_0 \in \mathbb{R}^n$ son los puntos críticos del potencial V . En ese caso, el operador $f(x_0, \nu) = 0$ para todo $\nu \in \mathbb{R}^+$.

Recordemos que $f(x, \nu)$ se anula en toda la órbita de un equilibrio Γx_0 . Sea U una vecindad de $(\Gamma x_0, \nu_0)$ en $H^m_{2\pi}(\mathbb{R}^n \setminus \Psi) \times \mathbb{R}^+$. Podemos realizar la reducción de Liapunov-Schmidt en U tomando a la vecindad U suficientemente chica, en ese caso encontramos la ecuación de bifurcación $\hat{f}(x, \nu)$ en una vecindad chica $\Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}$ con

$$\begin{aligned} \Omega_{2\varepsilon}(x_0) &= \{x \in V : d(x, \Gamma x_0) \leq 2\varepsilon\} \text{ y} \\ B_{2\rho}(\nu_0) &= \{\nu \in \mathbb{R}^+ : |\nu - \nu_0| \leq 2\rho\}. \end{aligned}$$

Decimos que la órbita Γx_0 es aislada, si la función $\hat{f}(x, \nu)$ se anula sólo en la órbita Γx_0 para una vecindad suficientemente chica de la órbita. Definimos a la función f como

$$\begin{aligned} f &: \Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho} \rightarrow \mathbb{R} \times V \\ f(x, \nu) &= (d(x, \Gamma x_0) - \varepsilon, \hat{f}(x, \nu)). \end{aligned}$$

Para poder definir el grado de f , vamos a necesitar que la órbita Γx_0 sea aislada para ν cercana y distinta a ν_0 .

Proposición 2.4 *Si la órbita Γx_0 es aislada para ν cercana y distinta a ν_0 , el grado de f está bien definido en $\Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}$ y*

$$\deg_{\perp}(f(x, \nu); \Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}) = \Sigma_0 \deg_{\perp}(\hat{f}(x, \nu_0 - \rho); \Omega_{2\varepsilon}) - \Sigma_0 \deg_{\perp}(\hat{f}(x, \nu_0 + \rho); \Omega_{2\varepsilon}).$$

Prueba. Primero vamos a probar que el grado de $f(x, \nu)$ está bien definido. Un punto está en la frontera de $\Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}$ si $|\nu - \nu_0| = 2\rho$ o si $d(x, \Gamma x_0) = 2\varepsilon$. Si $|\nu - \nu_0| = 2\rho$, la única solución de $\hat{f}(x, \nu) = 0$ es $x \in \Gamma x_0$, entonces $f(x_0, \nu) = (-\varepsilon, 0)$ es distinto de cero. Si $d(x, \Gamma x_0) = 2\varepsilon$, entonces $f(x, \nu) = (\varepsilon, *)$ es distinta de cero. Por lo tanto, la función $f(x, \nu)$ es no nula en la frontera de $\Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}$.

Ahora queremos probar que

$$F_{\tau}(x, \nu) = \left(\tau(d(x, \Gamma x_0) - \varepsilon) + (1 - \tau)(\rho - |\nu - \nu_0|); \hat{f}(x, \nu) \right)$$

es una deformación admisible. Si $|\nu - \nu_0| = 2\rho$, la función $\hat{f}(x, \nu)$ se anula sólo en Γx_0 , entonces la primera coordenada de F_{τ} es negativa. Si $d(x, \Gamma x_0) = 2\varepsilon$, la función $\hat{f}(x, \nu)$ se anula sólo para $|\nu - \nu_0| < \rho/2$, entonces la primera coordenada de F_{τ} es positiva. Por lo tanto $F_{\tau}(x, \nu)$ es una deformación admisible. De la propiedad de invarianza homotópica del grado (1.4) tenemos que

$$\deg_{\perp} f(x, \nu) = \deg_{\perp}(\rho - |\nu - \nu_0|, \hat{f}(x, \nu)).$$

Los ceros de la función $(\rho - |\nu - \nu_0|, \hat{f}(x, \nu))$ se encuentran en $\nu = \nu_0 \pm \rho$. Sean B_{\pm} las bola de radio $\rho/2$ alrededor de $\nu_0 \pm \rho$. De la propiedad de escisión del grado tenemos que

$$\begin{aligned} \deg_{\perp} f(x, \nu) &= \deg_{\perp}(\rho + (\nu_0 - \nu), \hat{f}(x, \nu); \Omega_{2\varepsilon} \times B_{+}) \\ &\quad + \deg_{\perp}(\rho - (\nu_0 - \nu), \hat{f}(x, \nu); \Omega_{2\varepsilon} \times B_{-}) \end{aligned}$$

Como $\hat{f}(x, \nu)$ se anula sólo en Γx_0 para $\rho/2 \leq |\nu - \nu_0| \leq 2\rho$, las deformaciones

$$(\rho \pm (\nu_0 - \nu), \hat{f}(x, \tau(\nu_0 \pm \rho) + (1 - \tau)\nu))$$

son admisibles en $\Omega_{2\varepsilon} \times B_{\pm}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \deg_{\perp} f(x, \nu) &= \deg_{\perp}(\rho + (\nu_0 - \nu), \hat{f}(x, \nu_0 + \rho)x; \Omega_{2\varepsilon} \times B_{+}) \\ &\quad + \deg_{\perp}(\rho - (\nu_0 - \nu), \hat{f}(x, \nu_0 - \rho)x; \Omega_{2\varepsilon} \times B_{-}) \end{aligned}$$

Como el grado de $\rho \pm (\nu_0 - \nu)$ es B_{\pm} es

$$\deg_{\perp}(\rho \pm (\nu_0 - \nu); B_{\pm}) = -(\pm 1),$$

de la suspensión del grado concluimos que

$$\deg_{\perp} f(x, \nu) = \Sigma_0 \deg_{\perp}(\hat{f}(x, \nu_0 - \rho); \Omega_{2\varepsilon}) - \Sigma_0 \deg_{\perp}(\hat{f}(x, \nu_0 + \rho); \Omega_{2\varepsilon}).$$

□

Decimos que $(\Gamma x_0, \nu_0)$ es hiperbólica, si los generadores infinitesimales $\{A_j x_0\}$ generan el núcleo de $\hat{f}'(x_0; \nu_0)$. Del teorema de la función implícita tenemos que no existen más ceros de $\hat{f}(x, \nu_0)$ cerca de Γx_0 si $(\Gamma x_0, \nu_0)$ es hiperbólica, entonces una órbita hiperbólica es aislada. Además, para que exista la bifurcación en ν_0 es necesario que alguna matriz $M(l\nu_0)$ sea singular.

Para calcular los índices de $\hat{f}(x, \nu_0 \pm \rho)$ alrededor de Γx_0 vamos a necesitar que la órbita Γx_0 sea hiperbólica en $\nu_0 \pm \rho$.

Condición 2.5 *La órbita Γx_0 de un equilibrio es hiperbólica en ν , si $M(l\nu)$ es invertible para $l \in \{1, 2, \dots\}$ y el núcleo de $M(0) = D^2V(x_0)$ está generado por $\{A_j x_0\}$.*

Como no existen generadores de una órbita cuando el grupo Γ es finito o cuando la órbita es el cero, entonces en esos casos la órbita Γx_0 es hiperbólica si $M(l\nu)$ es invertible para todo $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Sea Γ_{x_0} el grupo de isotropía espacial de un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se puede probar que siempre existe una descomposición de \mathbb{C}^n en una suma directa de subespacios de representaciones irreducibles equivalentes V_k de Γ_{x_0} . A continuación vamos a representar la acción de Γ_{x_0} en V_k como $\rho_k(\gamma) = \rho(\gamma)|_{V_k}$.

Como $\hat{f}'(x_0)$ es Γ_{x_0} -equivariante y $M(l\nu)$ son los bloques de $\hat{f}'(x_0)$, entonces $M(\lambda)$ es Γ_{x_0} -equivariante. Por lo tanto, del lema de Schur tenemos que la matriz $M(\lambda)$ es diagonal en los bloques

$$M_k(\lambda) = M(\lambda)|_{V_k} : V_k \rightarrow V_k$$

para $k \in \{1, \dots, q\}$. Por lo tanto, la linealización $\hat{f}'(x_0; \nu)$ es diagonal en los bloques $M_k(l\nu)$ para $k \in \{1, \dots, q\}$ y $l \in \{0, \dots, p\}$.

El grupo de isotropía de x_0 es $G_{x_0} = \Gamma_{x_0} \times S^1$, por lo que la acción de $(\gamma, \varphi) \in G_{x_0}$ en el bloque $M_k(l\nu)$ es $\rho_k(\gamma)e^{il\varphi}$. Como Γ es un grupo abeliano,

todos los puntos de V_k tienen el mismo grupo de isotropía, lo anterior es falso para acciones de grupos no abelianos. Por lo tanto, el grupo de isotropía $G_k(l)$ de la acción $\rho_k(\gamma)e^{il\varphi}$ está bien definido. Sea G_k el grupo de isotropía de la acción $\rho_k(\gamma)e^{i\varphi}$, de hecho, el grupo de isotropía $G_k(l)$ es

$$G_k(l) = G_k \bigoplus \mathbb{Z}_l,$$

en donde \mathbb{Z}_l es el grupo generado por $2\pi/l \in S^1$. Por lo tanto sólo necesitamos encontrar el grupo de isotropía G_k .

Definición 2.6 Sea $n_k(\lambda)$ el índice de Morse de $M_k(\lambda)$, definimos a $\eta_k(x_0, \lambda_0)$ como

$$\eta_k(x_0, \lambda_0) = \sigma\{n_k(\lambda_0 - \rho) - n_k(\lambda_0 + \rho)\},$$

en donde σ es el signo del determinante de $M(0)$ en el subespacio de $V^{\Gamma_{x_0}}$ ortogonal a los generadores de la órbita $\{A_j x_0\}$. Además, definimos a G_k como el grupo de isotropía de la acción $\rho_k(\gamma)e^{i\varphi}$ de $\Gamma_{x_0} \times S^1$.

El número $\eta_k(x_0, \lambda_0)$ representa el cambio de índice de Morse de la matriz $M_k(\lambda)$ y va a determinar la existencia de bifurcación de soluciones periódicas.

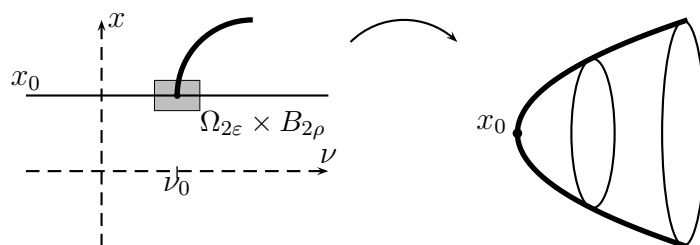


Figura 2.1: Bifurcación local

Teorema 2.7 Si $\eta_k(l\nu_0)$ es distinto de cero, existe una bifurcación de soluciones periódicas en (x_0, ν_0) con simetrías $G_k(l)$.

Prueba. En (1.6) dimos la idea de cómo se calcula el índice S^1 . En el libro [IV03] se prueba en general para un grupo abeliano G que

$$\text{deg}_\perp(\hat{f}(x, \nu); \Omega_{2\epsilon}) = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^q \sigma n_k(l\nu) [F_{G_k(l)}]_\perp + \dots,$$

en donde $[F_{G_k(l)}]_{\perp}$ es el generador de un grupo isomorfo a \mathbb{Z} tal que toda extensión de $[F_{G_k(l)}]_{\perp}$ tiene un cero en $V^{G_k(l)}$. Del teorema anterior y de las definiciones (2.6) tenemos que

$$\text{deg}_{\perp}(f(x, \nu); \Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}) = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^q \eta_k(l\nu_0)[F_{G_k(l)}]_{\perp} + \dots \quad (2.4)$$

Si $\eta_k(l\nu_0)$ es distinto de cero, para cada ε pequeño existe una órbita $(\Gamma x_{\varepsilon}, \nu_{\varepsilon})$ con $x_{\varepsilon} \in V^{G_k(l)}$ tal que $\hat{f}(x_{\varepsilon}, \nu_{\varepsilon}) = 0$ y $d(x_{\varepsilon}, x_0) = \varepsilon$. Por lo tanto $x_{\varepsilon} \rightarrow x_0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por compacidad existe una subsucesión $\varepsilon_k \rightarrow 0$ tal que $\nu_{\varepsilon_k} \rightarrow \nu_1$. Como $\hat{f}(x_0, \nu_1) = 0$ pues \hat{f} es continua, entonces $\nu_1 = \nu_0$. Por lo tanto existe una bifurcación no trivial de $f(x, \nu)$ a partir de (x_0, ν_0) .

La bifurcación de (x_0, ν_0) está en el subespacio de puntos fijos de $G_k(l)$, sin embargo, el espacio de puntos fijos de $G_k(l)$ contiene soluciones estacionarias. A continuación vamos a probar que no existen soluciones estacionarias cerca de (x_0, ν_0) . Como Γx_0 es hiperbólica para ν cercana a ν_0 , entonces el núcleo de $D^2V(x_0)$ está generado por $\{A_j x_0\}$. Usando el teorema de la función implícita en el espacio ortogonal a $\{A_j x_0\}$ probamos que x_0 es la única solución de $\nabla V(x) = 0$. Por lo tanto no existen soluciones estacionarias de $f(x, \nu)$ cerca de Γx_0 y la bifurcación es de soluciones periódicas. \square

Debido a como definimos el operador de bifurcación f , si (x_0, ν_0) es un punto de bifurcación con $\eta_k(x_0, \nu_0) \neq 0$, entonces también (x_0, ν) es un punto de bifurcación para $\nu = \nu_0/l$, pues $\eta_k(x_0, l\nu) = \eta_k(x_0, \nu_0) \neq 0$. Cada bifurcación en (x_0, ν) para $\nu = \nu_0/l$ está contenida en el espacio de puntos fijos del grupo $G_k(l)$. Como el grupo $G_k(l)$ está generado por el grupo G_k y el elemento $2\pi/l \in S^1$, entonces las soluciones con simetrías $G_k(l)$ son soluciones $2\pi/l$ -periódicas con simetrías G_k . De hecho, en la ecuación diferencial cada bifurcación de (x_0, ν) para $\nu = \nu_0/l$ tienen el periodo inicial $2\pi/(l\nu) = 2\pi/\nu_0$, por lo que no podemos diferenciar a las ramas de bifurcación local en $(x_0, \nu_0/l)$.

Decimos que (x_0, ν_0) es un punto de bifurcación no resonante si $\eta_1(x_0, \nu_0) \neq 0$ y $\eta_k(x_0, \nu_0/l) = 0$ para todo $l \in \{2, \dots, n\}$. Si (x_0, ν_0) es no resonante, podemos probar usando el teorema de la función implícita, las ramas que bifurcan de $(x_0, \nu_0/l)$ en el operador de bifurcación coinciden localmente en la ecuación diferencial. Sin embargo, lo anterior no es cierto globalmente, pues la rama global puede tener doblamientos de periodo. Además, si (x_0, ν_0) es un punto de bifurcación no resonante, del teorema de la función implícita podemos probar que el periodo de bifurcación tiene que ser exactamente $2\pi/\nu_0$,

es decir, no puede ser $2\pi/(l\nu_0)$ para $l \in \{2, 3, \dots\}$. De la discusión anterior y el teorema de bifurcación local tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.8 *Por cada punto de bifurcación (x_0, ν_0) no resonante, en el equilibrio x_0 la ecuación diferencial tiene una bifurcación de soluciones periódicas a partir del periodo exacto $2\pi/\nu_0$ con simetrías G_k .*

El caso mas sencillo de resonancia sucede cuando $\eta_1(x_0, \nu_0) \neq 0$ y existe un solo l_0 tal que $\eta_k(x_0, \nu_0/l_0) \neq 0$. En ese caso el índice en (x_0, ν_0) es

$$\eta_k(x_0, \nu_0)[F_{G_k}] + \eta_k(x_0, \nu_0/l_0)[F_{G_k(l_0)}].$$

Del teorema de bifurcación local tenemos que en (x_0, ν_0) existe una bifurcación en el espacio de puntos fijos de G_k y una en el espacio de puntos fijos de $G_k(l_0)$. Pero como G_k es un subgrupo de $G_k(l_0)$, las dos ramas pueden coincidir localmente en el espacio de puntos fijos de $G_k(l_0)$. Por lo tanto, sólo podemos garantizar la existencia de una bifurcación local en el espacio de puntos fijos de $G_k(l_0)$, es decir, una bifurcación de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/(l_0\nu_0)$ con simetrías G_k .

Observación 2.9 *Se dice que un equilibrio es **linealmente estable** o **espectralmente estable** cuando la ecuación lineal alrededor del equilibrio es estable. La linealización de la ecuación diferencial (2.1) alrededor del equilibrio x_0 es*

$$\sum_{j=1}^m D_j \frac{d^j}{dt^j} u + D^2V(x_0)u = 0. \quad (2.5)$$

Para sistemas Hamiltonianos o reversibles, el equilibrio x_0 es linealmente estable cuando las m soluciones linealmente independientes de (2.5) son de la forma $u = e^{i\nu t}v_0$ con $\nu \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, si $\nu_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de bifurcación, entonces la matriz $M(\nu)$ cambia su número de Morse en ν_0 . En ese caso existe un vector v_0 tal que $M(\nu_0)v_0 = 0$. Observemos que entonces la función $e^{i\nu_0 t}v_0$ es una solución de la ecuación lineal (2.5), pues

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m D_j \frac{d^j}{dt^j} + D^2V(x_0) \right) e^{i\nu_0 t}v_0 &= e^{i\nu_0 t} \left(\sum_{j=1}^m (i\nu_0)^j D_j + D^2V(x_0) \right) v_0 \\ &= e^{i\nu_0 t} M(\nu_0)v_0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por cada punto de bifurcación ν_0 existe una solución de la ecuación lineal (2.5), $e^{i\nu_0 t} v_0$ con $\nu_0 \in \mathbb{R}$. Podemos concluir entonces que el equilibrio x_0 es linealmente estable si el determinante $\det M(\nu)$ se anula en m puntos distintos. Es decir, podemos deducir la estabilidad lineal de un equilibrio a partir del análisis de bifurcación. Esta relación se puede entender también a partir del teorema central de Liapunov, [MH91].

Observación 2.10 *En dado caso que se pudieran ignorar las simetrías y las singularidades que estas simetrías generan, en principio, usando teoría KAM se podría probar existencia de toros invariantes que generalizan las órbitas periódicas que estamos encontrando. La importancia de nuestro análisis radica en el manejo de las simetrías y en la prueba de que las soluciones periódicas forman un continuo global.*

2.3. Bifurcación global

En el teorema anterior probamos que la bifurcación local es de soluciones periódicas. Sin embargo, la rama global puede volver a las soluciones estacionarias. Para tener control sobre los puntos donde eso sucede, definamos a T_0 como el conjunto de ceros del gradiente $\nabla V(x)$. Como los equilibrios son los puntos críticos del potencial, entonces $f(x, \nu)$ es cero para $x \in T_0$ y $\nu \in \mathbb{R}^+$.

Definimos el conjunto de soluciones triviales de $f(x, \nu)$ como

$$T = \{(\nu, x_i) : x_i \in T_0, \nu \in \mathbb{R}^+\}.$$

Sea S el conjunto de ceros de $f(\nu, x)$, definimos a $G = S \setminus T$ como el conjunto de soluciones no triviales. Por lo tanto x es una solución periódica sólo si $(x, \nu) \in G$. A $\bar{G} \setminus G \subset T$ lo vamos a llamar el conjunto de bifurcación y a $(\Gamma x_0, \nu_0) \in \bar{G} \setminus G$ un punto de bifurcación.

Sea $C \subset \bar{G}$ la componente conexa de un punto de bifurcación $(\Gamma x_0, \nu_0)$, entonces C es la componente conexa de soluciones no triviales que bifurca de $(\Gamma x_0, \nu_0)$. Los puntos de bifurcación de la rama C son las órbitas en $C \cap T$.

Decimos que C es admisible si C está contenida en algún $\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$ y decimos que C es inadmisibile si no está contenida en ningún $\tilde{\Omega}_\rho \times \Lambda_\varepsilon$. Por lo tanto, la rama C es inadmisibile cuando (a) el parámetro ν de la rama tiende a 0, (b) la norma de la rama va a infinito o (c) la rama va a un punto de colisión.

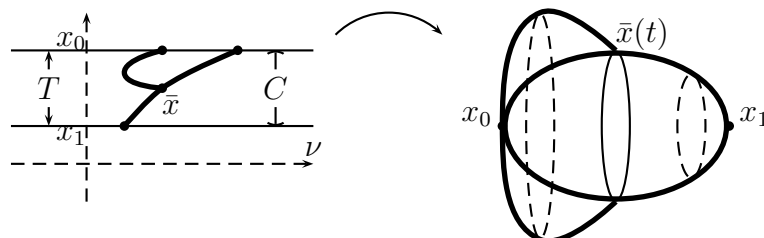


Figura 2.2: Bifurcación global

Teorema 2.11 *Si C es admisible y las órbitas de $C \cap T$ son aisladas, entonces C retorna al menos a otros puntos de bifurcación y*

$$\sum_{(\Gamma x_0, \nu_0) \in \bar{C} \cap T} \deg_{\perp}(d(x, \Gamma x_0) - \varepsilon, \hat{f}(x, \nu)) = 0. \quad (2.6)$$

Prueba. Si C es admisible, es posible construir un conjunto $\Gamma \times S^1$ -invariante $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}_{\rho} \times \Lambda_{\varepsilon}$ tal que $\partial\bar{\Omega} \cap C = \phi$ y tal que la función $f(x, \nu)$ en $\partial\bar{\Omega}$ se puede anular sólo en T . En $\bar{\Omega}$ realizamos la reducción global, por lo que los ceros de $f(x, \nu)$ en $\bar{\Omega}$ son los mismos que los de la función de bifurcación $\hat{f}(x_1, \nu)$ en $\Omega = P\bar{\Omega}$.

Ahora bien, como $\hat{f}(x, \nu)$ no se anula en $\partial\Omega$ a menos que $x \in T$, el grado $\deg_{\perp}(d(x, T) - \varepsilon, \hat{f}(x, \nu); \Omega)$ está bien definido para ε positivo. Como Ω es acotado, podemos tomar ε suficientemente grande de tal modo que el grado sea cero. Por hipótesis $C \cap T$ consta de órbitas aisladas, entonces los puntos $(x, \nu) \in \Omega$ con $d(x, T) = \varepsilon$ y $f_1(\nu, x) = 0$ se encuentran en la unión de $\Omega_{2\varepsilon}(x_0) \times B_{2\rho}(\nu_0)$ para $(\Gamma x_0, \nu_0) \in \bar{C} \cap T$. Por lo tanto, podemos tomar ε pequeño y de la propiedad de escisión concluimos que

$$0 = \deg_{\perp}(d(x, T) - \varepsilon, \hat{f}; \Omega) = \sum_{(\Gamma x_0, \nu_0) \in \bar{C} \cap T} \deg_{\perp}(d(x, \Gamma x_0) - \varepsilon, \hat{f}; \Omega_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}).$$

□

Los resultados de bifurcación global, en el sentido que la bifurcación es inadmisibles o que retornar a otros puntos de bifurcación, se conocen como la alternativa de Rabinowitz. Nosotros hemos tomado el resultado de bifurcación global para el grado ortogonal del libro [IV03].

Del teorema anterior y del cálculo que teníamos para el grado local (2.4) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.12 *Si la rama de bifurcación de (x_0, ν_0) es admisible, entonces la rama retorna a otros puntos de bifurcación $\{(x_1, \nu_1), \dots, (x_r, \nu_r)\}$ y*

$$\eta_k(x_0, \nu_0) + \dots + \eta_k(x_r, \nu_r) = 0$$

para cada $k = \{1, \dots, q\}$ y $l = \{1, \dots, p\}$.

Observación 2.13 *Sean V^{H_1} y V^{H_2} dos espacios de puntos fijos, supongamos que existe una rama de ceros en V^{H_1} . Como los espacios de puntos fijos son cerrados, la rama de ceros sólo puede pasar a V^{H_2} a través de $V^{H_1} \cap V^{H_2}$. Si a priori sabemos que no existen ceros en $V^{H_1} \cap V^{H_2}$, entonces el continuo de ceros permanece en V^{H_1} . Cuando la linealización del operador restringido a $V^{H_1} \cap V^{H_2}$ es invertible, podemos probar lo anterior usando el teorema de la función implícita. Lo anterior es útil en particular cuando $V^{H_2} \subset V^{H_1}$ y la linealización del operador en V^{H_2} es invertible. Este fue el argumento que usamos para probar que la bifurcación local es de soluciones periódicas.*

Observación 2.14 *En el conjunto T podemos incluir cualquier solución explícita de la cual queramos tener control, como se hizo para las soluciones estacionarias. En principio es posible incluir soluciones periódicas en T . En el libro [IV03] se encuentran cálculos del índice para órbitas periódicas, sin embargo, se necesita conocer los números de Floquet de las soluciones periódicas.*

2.4. Comentarios

En este capítulo expusimos las ideas del libro [IV03] con un enfoque específico a los sistemas Hamiltonianos. La reducción de Liapunov-Schmidt global para sistemas Hamiltonianos surge de las ideas de Amann-Zehnder, y al resultado de bifurcación global en un sentido clásico lo conocemos como la alternativa de Rabinowitz, [Ize95].

En principio podemos usar los resultados de este capítulo para analizar la bifurcación global de soluciones periódicas de cualquier equilibrio, siempre que la ecuación tenga la propiedad de ortogonalidad bajo la acción de un grupo abeliano. En particular, nosotros usaremos esos resultados para estudiar la bifurcación en sistemas Hamiltonianos, los cuales típicamente se han abordado usando formas normales. El grado ortogonal es adecuado para tratar el problema de bifurcación en sistemas Hamiltonianos porque nos permite

manejar adecuadamente las simetrías, probar la bifurcación global e incluso probar la existencia de bifurcación cuando existe resonancia. Sin embargo, con las formas normales se obtiene un mejor panorama local de las ramas de bifurcación [COR02].

Vimos que para cada bifurcación de soluciones periódicas en un equilibrio existe una solución estable de la ecuación lineal del equilibrio. Es por esa razón que al hacer el análisis de bifurcación se pueden recuperar resultados de estabilidad lineal. Esta relación se puede entender también a partir del teorema central de Liapunov, [MH91] .

Capítulo 3

El satélite

En este capítulo analizamos la ecuación de un satélite en la presencia de n cuerpos primarios. Supondremos que los cuerpos primarios forman un equilibrio relativo y que el satélite tiene masa tan pequeña que no perturba el movimiento de los cuerpos primarios.

En la segunda sección usamos los resultados del capítulo anterior para encontrar las condiciones en las cuales un equilibrio tiene bifurcación de soluciones periódicas. En particular, analizamos el satélite cuando los cuerpos primarios forman un equilibrio relativo poligonal. El equilibrio poligonal tiene cuerpos en el centro y en los vértices de un polígono regular y se ha usado para modelar la estabilidad de los anillos de Saturno. También analizamos el problema de la luna de Hill y el problema restringido de los tres cuerpos.

En la última sección hacemos un análisis equivalente al análisis de un satélite pero en las ecuaciones de los vórtices. Dado que la ecuación del vórtice es completamente integrable, en esa sección sólo nos interesa mostrar como funcionan nuestros resultados de bifurcación.

3.1. Planteamiento del problema

A continuación vamos a deducir la ecuación de movimiento del satélite en el plano. Representamos la posición del cuerpo con masa m_j por $q_j(t) \in \mathbb{R}^2$ y la posición del satélite por q_0 . Las ecuaciones de movimiento de Newton son

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=0 \substack{n \\ (i \neq j)}} m_i m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^{\alpha+1}}$$

para $j \in \{0, \dots, n\}$. En la ecuación anterior la fuerza de gravedad es el caso $\alpha = 2$. Nosotros estudiaremos los casos en que el potencial tiene singularidades $\alpha \in [1, \infty)$.

Deseamos cambiar las ecuaciones a un sistema de coordenadas rotantes, para lo cual definimos a u_j como $q_j(t) = e^{\omega t J} u_j(t)$, donde J es la matriz simplectica. Como $\ddot{q}_j = e^{\omega t J} (\ddot{u}_j + 2\omega J \dot{u}_j - \omega^2 u_j)$, entonces las ecuaciones en coordenadas rotantes son

$$m_j(\ddot{u}_j + 2\omega J \dot{u}_j - \omega^2 u_j) = - \sum_{i=0}^n \sum_{(i \neq j)} m_i m_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^{\alpha+1}}.$$

Para encontrar la ecuación del satélite hacemos tender m_0 a cero, de ese modo la ecuación del satélite es

$$\ddot{u}_0 + 2\omega J \dot{u}_0 - \omega^2 u_0 = - \sum_{i=1}^n m_i \frac{u_0 - u_i}{\|u_0 - u_i\|^{\alpha+1}}.$$

Además, las ecuaciones de los cuerpos primarios se desacoplan del satélite y son

$$m_j(\ddot{u}_j + 2\omega J \dot{u}_j - \omega^2 u_j) = - \sum_{i=1}^n \sum_{(i \neq j)} m_i m_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^{\alpha+1}}.$$

Vamos a suponer que los cuerpos primarios forman un equilibrio relativo, es decir, que las posiciones a_j satisfacen

$$\omega^2 a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{(i \neq j)} m_i \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^{\alpha+1}}.$$

Si las a_j forman un equilibrio relativo, entonces también las τa_j forman un equilibrio relativo con ω^2 reemplazado por $\omega^2/\tau^{\alpha+1}$. De hecho, debido a que la fuerza es homogénea cualquier rotación y homotecia de un equilibrio relativo también lo es. Por lo tanto, podemos escoger el equilibrio relativo con velocidad de rotación $\omega = 1$.

De la discusión anterior concluimos que la ecuación de movimiento del satélite es

$$\ddot{u} + 2J\dot{u} = \nabla V(u) \text{ con}$$

$$V(u) = \frac{\|u\|^2}{2} + \sum_{j=1}^n m_j \phi_\alpha(\|u - a_j\|).$$

en donde $\phi_\alpha(x)$ es una función que satisface $\phi'_\alpha(x) = -1/x^\alpha$.

Un equilibrio del satélite es un punto crítico del potencial V . Nosotros deseamos encontrar bifurcación de soluciones periódicas a partir de los equilibrios usando los resultados del capítulo dos. En este caso el operador $\mathcal{D}(\nu)$ es

$$\mathcal{D}(\nu)x = -\nu^2\ddot{x} - 2\nu J\dot{x}.$$

Además, el conjunto de colisión está formado por los puntos donde V es indefinido $\Psi = \{a_1, \dots, a_n\}$. Por lo tanto, las trayectorias libres de colisión son

$$H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Psi) = \{x \in H_{2\pi}^2 : x(t) \neq a_j\}$$

y el operador de bifurcación $f : H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Psi) \times \mathbb{R} \rightarrow L_{2\pi}^2$ es

$$f(x, \nu) = \mathcal{D}(\nu)x + \nabla V(x).$$

Como la ecuación es autónoma, el operador $\mathcal{D}(\nu)$ es S^1 -equivariante con la acción temporal de $\varphi \in S^1$ como $\varphi x(t) = x(t + \varphi)$. El operador $f(x)$ es S^1 -ortogonal, pues el generador de la acción temporal es $Ax = \dot{x}$ y

$$\langle f(x), \dot{x} \rangle_{L_{2\pi}^2} = (-\nu^2 \dot{x}^2 / 2 + V(x))|_0^{2\pi} = 0.$$

Observación 3.1 *En el caso en que los cuerpos primarios están en un polígono, el potencial V va a ser además D_n -invariante. El grupo \mathbb{Z}_n está generado por una rotación ζ , entonces la rotación $\rho(\zeta)$ conmuta con J y en ese caso $f(x)$ es $\mathbb{Z}_n \times S^1$ -ortogonal. El grupo D_n tiene una reflexión κ , entonces $\rho(\kappa)J = -J\rho(\kappa)$ y en ese caso el operador f es $O(2)$ -equivariante, en donde la acción de $O(2) = S^1 \cup \kappa S^1$ es*

$$\varphi x(t) = x(t + \varphi) \text{ y } \kappa x = \rho(\kappa)x(-t).$$

Desafortunadamente no existe definición del grado ortogonal para grupos no abelianos.

3.2. Teorema de bifurcación

La matriz de orden más alto del operador diferencial $\mathcal{D}(\nu)$ es invertible, por lo que se satisfacen las hipótesis (2.1). Por lo tanto, podemos realizar la reducción global (2.3) de la que obtenemos la función de bifurcación. La

linealización de la función de bifurcación en un equilibrio x_0 tiene bloques $M(l\nu)$ con

$$M(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda J + D^2V(x_0).$$

La acción de S^1 en el bloque $M(l\nu)$ es $\varphi x = e^{i\varphi l}x$, por lo que en el bloque $M(\nu)$ el grupo de isotropía G_0 es el trivial. De las definiciones (2.6) tenemos que σ es el signo del determinante de $M(0) = D^2V(x_0)$. Además $n(\lambda)$ es el índice de Morse de $M(\lambda)$ y

$$\eta(\lambda) = \sigma(n(\lambda - \rho) - n(\lambda + \rho)).$$

De los teoremas de bifurcación global (2.12) y local (2.8) tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Si $\eta(\nu_0)$ es distinto de cero, en x_0 existe una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_0$.*

Si la bifurcación es admisible, por bifurcación global entendemos que la rama retorna a otros puntos de bifurcación y que la suma de los grados locales en los puntos de bifurcación es cero. Además, la bifurcación es inadmisibles si la norma o el periodo de la rama van a infinito o si la rama va a colisión.

3.3. Análisis del espectro

A continuación vamos a analizar el espectro del bloque $M(\nu)$.

Proposición 3.3 *Sean T la traza y D el determinante de $D^2V(x_0)$, definamos a ν_{\pm} como*

$$\nu_{\pm} = \left(2 - T/2 \pm \sqrt{(2 - T/2)^2 - D}\right)^{1/2}.$$

Entonces el determinante $\det M(\nu)$ se puede anular sólo en los siguientes casos:

(a) *Si $D < 0$, el determinante $\det M(\nu)$ se anula sólo en $\{\pm\nu_{+}\}$ con*

$$\eta(\nu_{+}) = -1.$$

(b) Si $(2 - T/2)^2 > D > 0$ y $T < 4$, entonces el determinante $\det M(\nu)$ se anula sólo en $\{\pm\nu_{\pm}\}$ con

$$\eta(\nu_+) = 1 \text{ y } \eta(\nu_-) = -\text{sgn}(T).$$

(c) Si $(2 - T/2)^2 = D$ y $T < 4$, entonces $T \in [2, 4)$ y el determinante $\det M(\nu)$ se anula sólo en $\{\pm\nu_+\}$ con $\eta(\nu_+) = 0$.

Prueba. Como $D^2V(x_0)$ es autoadjunta, existe una matriz ortonormal $P \in SO(2)$ tal que $D^2V(x_0) = P\Lambda P^T$ con $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Como $JP = PJ$, entonces

$$PM(\nu)P^T = \text{diag}(\nu^2 + \lambda_1, \nu^2 + \lambda_2) - 2\nu(iJ).$$

Como $T = \lambda_1 + \lambda_2$ y $D = \lambda_1\lambda_2$, entonces el determinante de M es

$$\det M(\nu) = \nu^4 - 2(2 - T/2)\nu^2 + D.$$

Por lo tanto, podemos factorizar al determinante como

$$\det M(\nu) = (\nu^2 - \nu_+^2)(\nu^2 - \nu_-^2).$$

Como los valores propios de $M(\nu)$ son continuos, el cambio de índice de Morse sólo puede suceder cuando $\det M(\nu)$ se anula.

En el caso (a) tenemos que $D < 0$, entonces $\det M(\nu)$ se anula sólo en el punto positivo ν_+ . Como $n(0)$ es el índice de Morse de $D^2V(x_0)$, entonces $n(0) = 1$. Como los valores propios de $M(\nu)$ son positivos para ν grande, entonces $n(\infty) = 0$. Por lo tanto $\eta(\nu_+) = \sigma(1 - 0)$ con $\sigma = \text{sgn}(D) = -1$.

En el caso (b) los dos puntos ν_+ y ν_- son positivos. Como el determinante $\det M(\nu)$ es negativo entre ν_- y ν_+ , entonces $n(\nu) = 1$ para $\nu \in (\nu_-, \nu_+)$. Además, el índice de Morse en infinito es $n(\infty) = 0$. Como $\sigma = \text{sgn}(D) = 1$, entonces $\eta(\nu_+) = 1 - 0$. Como el índice de Morse de $D^2V(x_0)$ es $n(0) = 2$ si $T < 0$ y $n(0) = 0$ si $T > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \eta(\nu_-) &= 2 - 1 \text{ si } T < 0 \text{ y} \\ \eta(\nu_-) &= 0 - 1 \text{ si } T > 0. \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que $\eta(\nu_-) = -\text{sgn}(T)$.

Si $(2 - T/2)^2 = D$, entonces $T = 2 + (T^2 - 4D)/8$. Como $T^2 - 4D = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ es positivo, entonces $T \geq 2$. En el caso (c) los dos puntos coinciden $\nu_+ = \nu_-$. En ese caso $\sigma = 1$ y $n(\infty) = 0$. Además $T > 0$ y $D > 0$, entonces

$n(0) = 0$. Por lo tanto $\eta(\nu_+) = 0 - 0$. \square

En otro caso al de los incisos anteriores, el determinante $\det M(\nu)$ no se anula nunca, por lo que no puede existir bifurcación.

Observación 3.4 *De la observación (2.9) tenemos que el equilibrio x_0 es linealmente estable sólo cuando se satisface la condición (b). En cualquier otro caso x_0 es linealmente inestable.*

En general, podemos usar las conclusiones del teorema anterior para una ecuación con un potencial general, no necesariamente para el potencial del satélite. Por ejemplo, vamos a usar la proposición anterior para encontrar bifurcación en el problema de la luna de Hill.

Además, si x_0 es un máximo, como $D > 0$, $T < 0$ y $T^2 - 4D > 0$, entonces

$$(2 - T/2)^2 - D = (4 - 2T) + (T^2 - 4D)/4 > 0.$$

Por lo tanto, siempre se satisface la condición (b) para un máximo. Por lo tanto, un máximo siempre es linealmente estable y tiene bifurcación de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$. Sin embargo, probaremos a continuación que el potencial del satélite no tiene máximos para $\alpha \in [1, \infty)$.

Proposición 3.5 *En el potencial del satélite para $\alpha \in [1, \infty)$, la traza T siempre es positiva y tenemos los siguientes casos:*

- (a) *Si $D < 0$, en x_0 existe una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$.*
- (b) *Si $(2 - T/2)^2 > D > 0$ y $T < 4$, en x_0 existe bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo corto $2\pi/\nu_+$ y el periodo largo $2\pi/\nu_-$. Las dos ramas pueden coincidir en el caso de resonancia*

$$(4 - T)D^{-1/2} \in \{n + n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Prueba. Sean $x_0 = (x, y)$, $a_j = (x_j, y_j)$ y $d_j = \|x_0 - a_j\|$, la matriz de segundas derivadas de $\phi(d_j)$ es

$$D^2\phi(d_j) = \frac{\alpha + 1}{d_j^{\alpha+3}} \begin{pmatrix} (x - x_j)^2 & (x - x_j)(y - y_j) \\ (x - x_j)(y - y_j) & (y - y_j)^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{d_j^{\alpha+1}} I$$

Como el potencial del satélite es

$$V(x) := \frac{\|x\|^2}{2} + \sum_{j=1}^n m_j \phi_\alpha(\|x - a_j\|),$$

entonces la matriz de segundas derivadas de V es

$$D^2V(x_0) = I + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{d_j^{\alpha+3}} \begin{pmatrix} \alpha_+(x - x_j)^2 - d_j^2 & \alpha_+(x - x_j)(y - y_j) \\ \alpha_+(x - x_j)(y - y_j) & \alpha_+(y - y_j)^2 - d_j^2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

con $\alpha_+ = \alpha + 1$. Por lo tanto la traza de D^2V es

$$T = 2 + \sum_{j=1}^n m_j \frac{\alpha_+ d_j^2 - 2d_j^2}{d_j^{\alpha+3}} = 2 + (\alpha - 1) \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{d_j^{\alpha+1}}.$$

Como $\alpha \in [1, \infty)$, la traza siempre es positiva.

Existe resonancia entre ν_+ y ν_- cuando $\nu_+ = n\nu_-$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior es equivalente a

$$(n^2 - 1)(2 - T/2) = (1 + n^2)\sqrt{(2 - T/2)^2 - D}.$$

De la igualdad anterior encontramos que $4n^2(2 - T/2)^2 = (1 + n^2)^2 D$. Por lo tanto existe resonancia cuando $n + n^{-1} = (4 - T)D^{-1/2}$. \square

La bifurcación en el caso (a) no puede retornar al equilibrio, por lo que la bifurcación en el caso (a) es inadmisibles o va a un punto de bifurcación de otro equilibrio.

3.3.1. Potencial de Morse

El potencial del satélite es genéricamente una función de Morse. En ese caso, vamos a probar que para $\alpha \in [1, \infty)$ el potencial tiene al menos n puntos silla.

Proposición 3.6 *Si V es una función de Morse, entonces*

$$\#\text{puntos silla} = (n - 1) + \#\text{mínimos}.$$

Además, el potencial tiene un mínimo global y tiene al menos n puntos silla.

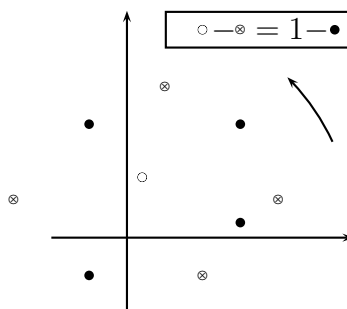


Figura 3.1: Los cuerpos están en los puntos \bullet , los puntos silla son \otimes y los mínimos son \circ .

Prueba. Sea $B_\rho(a)$ la bola en \mathbb{R}^2 de centro a y radio ρ , definimos a Ω como

$$\Omega = B_\rho(0) \setminus \cup_{i=1}^n B_{\rho^{-1}}(a_i).$$

Por lo tanto, el gradiente ∇V apunta hacia fuera en $\partial\Omega$ si ρ es suficientemente grande y podemos usar el teorema de Poincaré-Hopf en Ω [Cha91]. Entonces la característica de Euler $\chi(\Omega) = 1 - n$ es igual al grado $\deg_\Omega \nabla V$. Como la traza es positiva, el potencial no tiene máximos y

$$1 - n = \chi(\Omega) = \deg_\Omega \nabla V = \#\text{mínimos} - \#\text{puntos silla}.$$

Además, sabemos que $V(x) \geq 0$ y que $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \{\infty, a_1, \dots, a_n\}$, entonces V tiene un mínimo global en Ω . Por lo tanto, existen al menos n puntos silla. \square

Por lo tanto, en el problema del satélite cuando el potencial es de Morse, existen al menos n equilibrios que son puntos silla, cada punto silla tiene una bifurcación global de soluciones periódicas. En una rama admisible la suma de los η tiene que ser cero. Como en un punto silla existe una bifurcación con $\eta = 1$ y en un mínimo, si existe bifurcación, existe bifurcación con $\eta = 1$ y con $\eta = -1$, entonces el número de ramas inadmisibles es mayor al número de puntos silla. Por lo tanto, al menos n ramas de bifurcación son inadmisibles.

3.3.2. El problema de la luna de Hill

En el problema de la Luna de Hill el potencial es

$$V(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{d} \text{ con } d = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

En este caso el potencial es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante con la acción $\rho(\kappa_1) = \text{diag}(-1, 1)$ y $\rho(\kappa_2) = \text{diag}(1, -1)$.

Como las derivadas parciales de V son $V_x = x(3 - d^{-3})$ y $V_y = -yd^{-3}$, en los equilibrios necesitamos $y = 0$ y $d^{-3} = 3$. Por lo tanto los equilibrios son $x_0 = \pm 3^{-1/3}$ y $y_0 = 0$. Como en (3.1) encontramos que

$$D^2V(x_0, y_0) = 3\text{diag}(1, 0) + \left(\frac{3}{d^5} \text{diag}(x_0^2, 0) - \frac{I}{d^3} \right) = 3\text{diag}(3, -1)$$

Por lo tanto, en los equilibrios el determinante es negativo y se satisface la condición de bifurcación (a).

Por lo tanto, en el problema de la luna de Hill existen dos equilibrios. Cada equilibrio tiene una bifurcación global de soluciones periódicas. En este caso el conjunto de colisión es $\Psi = \{0\}$. Como el índice de la bifurcación en los dos equilibrios es $\eta = -1$, la bifurcación en esos puntos tiene que ser inadmisibles, es decir, que el periodo o la norma de la rama van a infinito o que la rama va a colisión con cero. En el artículo [MR01] se prueba la bifurcación global de las ramas anteriores con el grado S^1 -ortogonal.

3.3.3. El problema restringido de los tres cuerpos

A continuación vamos a analizar el problema restringido de los tres cuerpos. Supongamos que dos cuerpos tienen posiciones $(a_j, 0)$ con masas m_j . Para $\mu \in (0, 1/2]$ los dos cuerpos forman un equilibrio relativo si

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \mu \text{ con } m_1 = \mu \text{ y} \\ a_2 &= -\mu \text{ con } m_2 = 1 - \mu. \end{aligned}$$

El potencial del satélite es

$$V(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \sum_{j=1}^2 m_j \phi_\alpha(\|x - (a_j, 0)\|).$$

En este caso el potencial es \mathbb{Z}_2 -invariante con la acción $\rho(\kappa) = \text{diag}(1, -1)$. De (3.1) tenemos que la matriz de segundas derivadas es

$$D^2V(x_0) = I + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{d_j^{\alpha+3}} \begin{pmatrix} \alpha_+(x - a_j)^2 - d_j^2 & \alpha_+y(x - a_j) \\ \alpha_+y(x - a_j) & \alpha_+y^2 - d_j^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

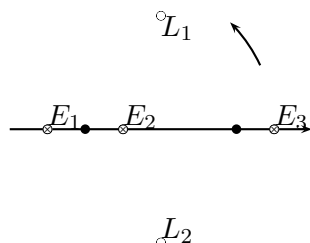


Figura 3.2: Los dos cuerpos están en los puntos \bullet .

con $\alpha_+ = \alpha + 1$.

A continuación vamos a probar como lo hizo Lagrange para $\alpha = 1$ que el satélite tiene sólo cinco equilibrios.

Proposición 3.7 *Existen sólo cinco puntos críticos del potencial .*

(a) *Los Lagrangianos L_1 y L_2 que forman un triángulo equilátero con los cuerpos primarios*

$$L_1 = (1/2 - \mu, \sqrt{3}/2) \text{ y } L_2 = (1/2 - \mu, -\sqrt{3}/2).$$

(b) *Los Eulerianos E_1 , E_2 y E_3 que son colineales con los cuerpos primarios*

$$E_1 \in (-\infty, a_2), E_2 \in (a_2, a_1) \text{ y } E_3 \in (a_1, \infty).$$

Prueba. Las distancias son $d_j^2 = (x - a_j)^2 + y^2$. El cambio de coordenadas de (x, y) a (d_1, d_2) es localmente invertible en $\{(x, y) : y \neq 0\}$, en ese caso los puntos críticos de $V(x, y)$ son los de $V(d_1, d_2)$. Como $m_1 + m_2 = 1$ y $m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$, entonces

$$\|x\|^2 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 - (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2).$$

De la igualdad anterior podemos probar que $V_{d_j} = m_j(d_j - 1/d_j^\alpha)$. Por lo tanto, en los puntos críticos necesitamos $d_j = 1$. De lo anterior concluimos que L_1 y L_2 son los únicos puntos críticos no colineales.

En el caso colineal tenemos que $V_y(x, 0) = 0$. El potencial como función de x satisface $V(x, 0) \geq 0$ y $V(x, 0) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \{\pm\infty, (-\mu), (1 - \mu)\}$. Por lo tanto V tiene al menos tres puntos críticos con posiciones E_1 , E_2 y

E_3 . En un punto colineal $(x, 0)$ la distancia es $d_j^2 = (x - a_j)^2$, entonces de (3.2) tenemos que

$$D^2V(x, 0) = \text{diag}(1 + \alpha\nu_0^2, 1 - \nu_0^2) \text{ con } \nu_0^2 = \sum_{j=1}^2 m_j/d_j^{\alpha+1}.$$

Por lo tanto, V_{xx} es positiva en los puntos colineales y sólo pueden existir tres puntos críticos colineales. \square

Ahora vamos a encontrar bifurcación de soluciones periódicas en los equilibrios Eulerianos y Lagrangianos .

Proposición 3.8 *Los equilibrios Lagrangianos son mínimos y los equilibrios Eulerianos son puntos silla. Además, para $\alpha \in (0, 3)$ existe un $\mu_1 \in (0, 1/2)$ tal que los equilibrios Lagrangianos satisfacen la condición de bifurcación (b) para $\mu \in (0, \mu_1)$, en donde $\mu_1 = 1/2$ para $\alpha < 15 - 8\sqrt{3}$.*

Prueba. En los puntos Lagrangianos tenemos $(x - a_j)^2 = d_j^2 - y^2$ con $d_j = 1$. De la matriz de derivadas (3.2) encontramos que

$$D^2V(x_0) = I + \sum_{j=1}^2 m_j \begin{pmatrix} -\alpha_+ y^2 + \alpha & \alpha_+ y(x - a_j) \\ \alpha_+ y(x - a_j) & \alpha_+ y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\sum_{j=1}^2 m_j = 1$ y $\sum_{j=1}^2 m_j a_j = 0$, entonces

$$D^2V(x_0) = \alpha_+ \begin{pmatrix} -y^2 + 1 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la traza es $T = \alpha_+$. Como en los puntos Lagrangianos tenemos $y^2 = 3/4$ y $x^2 = (2\mu - 1)^2/4$, entonces el determinante es

$$D = \alpha_+^2 y^2 (1 - (x^2 + y^2)) = (3\alpha_+^2/4)\mu(1 - \mu).$$

La condición de bifurcación (b) se satisface cuando $(2 - T/2)^2 > D$ y $\alpha < 3$. Lo condición anterior es equivalente a $\mu < \mu_1$ con

$$\mu_1 = 1/2 - (\alpha + 1)^{-1} \sqrt{(\alpha(30 - \alpha) - 33)/12}.$$

Por lo que el punto μ_1 es real para $\alpha \in (15 - 8\sqrt{3}, 3)$. Además, para $\alpha < 15 - 8\sqrt{3}$ no hay restricción sobre μ .

Del teorema de Poincaré-Hopf tenemos que los puntos silla son iguales a los mínimos mas uno. Como los dos puntos Lagrangianos son mínimos, entonces los tres puntos Eulerianos tienen que ser puntos silla. \square

Por lo tanto, en el problema restringido de los tres cuerpos, los tres equilibrios Eulerianos tienen una bifurcación global de soluciones periódicas. Además, los dos equilibrios Lagrangianos para $\mu \in (0, \mu_1)$ tienen una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo corto y del periodo largo para $\alpha \in (0, 3)$. Además, tres de las ramas de bifurcación siempre son inadmisibles. De la observación (3.4) tenemos que sólo los equilibrios Lagrangianos L_j son linealmente estables para $\mu \in (0, \mu_1)$. En el artículo [MR04] se prueba la bifurcación global de L_j y E_j con el grado S^1 -ortogonal para $\alpha = 2$.

A continuación vamos a encontrar los puntos resonantes para el caso $\alpha = 2$.

Proposición 3.9 *En los equilibrios Lagrangianos, para $\alpha = 2$, tenemos que $\nu_{\pm} \in (0, 1)$ y que los puntos de bifurcación son resonantes para una sucesión $\mu_n \rightarrow 0$.*

Prueba. Para $\mu < \mu_1 = (1 - \sqrt{69}/9)/2$ los puntos ν_{\pm} son

$$\nu_{\pm}^2 = \left(1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}\right) / 2.$$

Usando que $\mu \in (0, 1)$ encontramos que $\nu_+^2 \in (1/2, 1)$ y $\nu_-^2 \in (0, 1/2)$. Como $\nu_-(\mu) \rightarrow 0$ cuando $\mu \rightarrow 0$, entonces $\nu_+(\mu)/\nu_-(\mu) \rightarrow \infty$ cuando $\mu \rightarrow 0$. Por lo tanto existe una sucesión $\mu_n \rightarrow 0$ tal que $\nu_+(\mu_n) = n\nu_-(\mu_n)$. \square

Observación 3.10 *Para $\mu = 1/2$ el problema es $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ -ortogonal con la acción $\rho(\kappa)x = -x$. En el punto Euleriano $E_2 = 0$ el grupo de isotropía es \mathbb{Z}_2 . Además, la acción de $(\kappa, \varphi) \in \mathbb{Z}_2 \times S^1$ en el bloque $M(l\nu)$ es $-e^{i\ell\varphi}$. Usando grado $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ -ortogonal podemos probar que la bifurcación en E_2 tiene simetrías (κ, π) , es decir, que satisface*

$$x(t) = -x(t + \pi).$$

3.3.4. El equilibrio relativo poligonal

A continuación vamos a analizar al satélite cuando los cuerpos primarios forman un equilibrio relativo poligonal. El equilibrio poligonal tiene cuerpos en los vértices y en el centro de un polígono regular.

En lo sucesivo usaremos el isomorfismo natural entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} . Sea $\zeta = 2\pi/n$, pongamos un cuerpo con masa $m_0 = m\mu$ en $a_0 = 0$ y para $j \in \{1, \dots, n\}$ un cuerpo con masas $m_j = m$ en $a_j = ae^{ij\zeta}$.

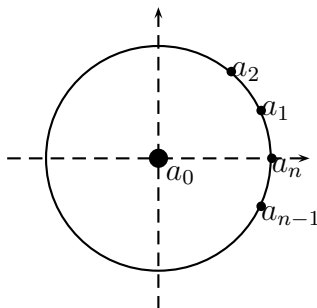


Figura 3.3: Equilibrio relativo poligonal.

Proposición 3.11 *Las a_j forman un equilibrio relativo si $a^{\alpha+1} = m(s + \mu)$ con*

$$s = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)}.$$

Prueba. Para a_0 tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_0 - a_i}{\|a_0 - a_i\|^{\alpha+1}} = -\frac{1}{a^\alpha} \sum_{i=1}^n e^{ij\zeta} = 0 = a_0.$$

Para a_j tenemos que

$$\sum_{i=1(i \neq j)}^n m \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^{\alpha+1}} + m_0 \frac{a_j}{\|a_j\|^{\alpha+1}} = a_j \frac{ms + m_0}{a^{\alpha+1}},$$

en donde s es

$$s = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - e^{ij\zeta}}{\|1 - e^{ij\zeta}\|^{\alpha+1}} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)}.$$

Por lo tanto las a_j forman un equilibrio relativo si $a^{\alpha+1} = ms + m_0$. \square

Por lo tanto, el potencial del satélite para el equilibrio poligonal es

$$V(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \sum_{j=1}^n m\phi_\alpha(\|u - ae^{ij\zeta}\|) + m\mu\phi_\alpha(\|u\|)$$

con $a^{\alpha+1} = m(s + \mu)$. Podemos adimensionalizar la ecuación del satélite con el cambio de variables $u = ax$, en ese caso el potencial es

$$V(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{s + \mu} \phi_\alpha(\|x - e^{ij\zeta}\|) + \frac{\mu}{s + \mu} \phi_\alpha(\|x\|).$$

A continuación vamos a suponer que $n \geq 3$, y dejaremos para el final el caso $n = 2$.

Caso $n \geq 3$

Para $\mu = 0$, el cero es un punto crítico pues

$$\nabla_x V(0) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^n e^{ij\zeta} = 0.$$

Como $D^2V(0)$ tiene valores propios reales y $D^2V(0)$ es D_n -equivariante, del lema de Schur tenemos que $D^2V(0) = \lambda I$. De (3.1) encontramos que $T = 2 + (\alpha - 1)n/s$ pues $d_j = 1$. Por lo tanto $T = 2\lambda$ y $D = \lambda^2$ con $\lambda > 1$. De lo anterior concluimos que $D > (2 - T/2)^2$.

Por lo tanto, en el satélite con el equilibrio relativo poligonal para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el cero es un equilibrio para $\mu = 0$ que no tiene bifurcación de soluciones periódicas. Además, de la observación (3.4) tenemos que el cero es un equilibrio inestable.

Para hacer los cálculos más sencillos, vamos a estudiar al potencial V en coordenadas polares

$$V(r, \varphi) = r^2/2 + \frac{\mu}{s + \mu} \phi_\alpha(\|r\|) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{s + \mu} \phi_\alpha(\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|).$$

Como el cambio de coordenadas $x = re^{i\varphi}$ es invertible para $r > 0$, entonces x es un punto crítico de $V(x)$ cuando (r, φ) es un punto crítico de $V(r, \varphi)$.

Observación 3.12 De hecho, el potencial V es D_n -invariante con la acción $\rho(\zeta)x = e^{i\zeta}x$ y $\rho(\kappa)x = \bar{x}$. Por lo tanto el operador $f(x)$ es en realidad G -equivariante con la acción de κ como $\kappa x = \bar{x}(-t)$, en donde G es el grupo $\mathbb{Z}_n \times S^1 \cup \kappa(\mathbb{Z}_n \times S^1)$.

Como el potencial V es D_n -invariante, el potencial $V(\varphi)$ como función de φ es par y $2\pi/n$ -periódico. Por lo tanto los puntos críticos vienen en órbitas de puntos de D_n . Por lo tanto, para encontrar los punto críticos podemos tomar a un elemento de la órbita con $\varphi \in [0, \pi/n]$.

A continuación vamos a probar que el potencial tiene tres órbitas de puntos críticos. Para probar la existencia de los puntos críticos primero probaremos el siguiente lema.

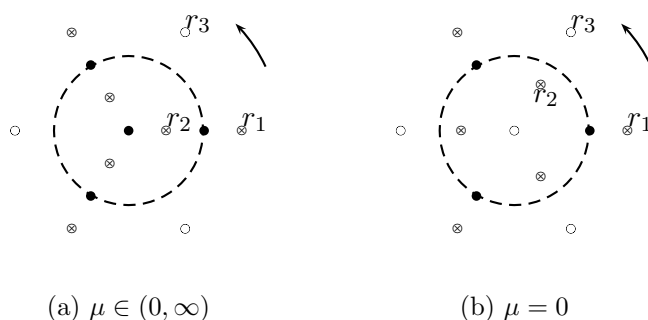


Figura 3.4: Ejemplo para $n = 3$.

Lema 3.13 Para $n \geq 3$, la derivada de $V(r, \varphi)$ con respecto a r en $e^{i\pi/n}$ es negativa

$$V_r(1, \pi/n) < 0.$$

Prueba. La derivada de $V(r, \varphi)$ con respecto a r es

$$V_r(r, \varphi) = r - \frac{\mu}{s + \mu} \frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{s + \mu} \sum_{j=1}^n \frac{r - \cos(j\zeta - \varphi)}{\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|^{\alpha+1}}.$$

Por lo tanto

$$V_r(1, \pi/n) = \frac{s}{s + \mu} - \frac{1}{s + \mu} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j - 1/2)\zeta/2} \right] = \frac{s - \sigma}{s + \mu},$$

en donde σ es la suma entre paréntesis. Para concluir el resultado del lema sólo necesitamos probar que $s < \sigma$.

Como $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ para $\theta \in [0, \pi]$, entonces para $n \geq 3$ tenemos

$$2^\alpha s = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)} \leq 2 \sum_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)}$$

con igualdad para n impar. Además tenemos que

$$2^\alpha \sigma = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j-1/2)\zeta/2} \geq 2 \sum_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j-1/2)\zeta/2}$$

con igualdad para n par. Como $\sin(j-1/2)\zeta < \sin j\zeta$ para $j \in [1, n/2]$, entonces

$$\frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j-1/2)\zeta/2} > \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)}$$

para $j \in [1, n/2]$. De lo anterior concluimos que $\sigma > s$. \square

Proposición 3.14 Para $\alpha \in (1, 3)$ y $n \in \{3, 4, \dots\}$ existen tres órbitas de puntos críticos.

- (a) Si $\mu \in (0, \infty)$, existe un punto silla en r_1 y uno en r_2 con $r_2 < 1 < r_1$. Además, existe un mínimo en $r_3 e^{i\pi/n}$ con $r_3 > 1$.
- (b) Si $\mu = 0$, existe un punto silla en r_1 y uno en $r_2 e^{i\pi/n}$ con $r_2 < 1 < r_1$. Además, existe un mínimo en $r_3 e^{i\pi/n}$ con $r_3 > 1$.

Además, para $\varphi \in [0, \pi/n)$ no existen más puntos críticos .

Prueba. Sea $\beta = \alpha - 1$, entonces $\phi_\alpha(r) = 1/(\beta r^\beta)$. En el apéndice definimos a $S(r, \varphi)$ como $S(r, \varphi) = \beta \sum_{j=1}^n \phi_\alpha(\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|)$. Por lo tanto el potencial es

$$V(r, \varphi) = r^2/2 + \frac{\mu}{s + \mu} \phi_\alpha(r) + \frac{1}{s + \mu} \frac{1}{\beta} S(r, \varphi).$$

En el apéndice probamos que $S_\varphi(r, \varphi)$ es el producto de $-\sin(n\varphi)$ con una función positiva para $\beta \in (0, 2)$. Por lo tanto, para $\alpha \in (1, 3)$ tenemos que $V_\varphi(r, \varphi) = -\sin(n\varphi)\omega(r, \varphi)$ con $\omega(r, \varphi)$ una función positiva. Como la

derivada $V_\varphi(r, \varphi)$ se anula sólo si $\varphi = k\pi/n$ y en esos puntos $V_{\varphi\varphi}(r, k\pi/n) = -n\omega(r, \varphi) \cos k\pi$, entonces los puntos críticos de V se encuentran en $\varphi \in \{0, \pi/n\}$ con

$$V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0 \text{ y } V_{\varphi\varphi}(r, \pi/n) > 0.$$

Por lo anterior los puntos críticos se encuentran en los ceros de $V_r(r, \varphi)$ para $\varphi \in \{0, \pi/n\}$. Primero vamos a probar que todos los puntos críticos en $\varphi = 0$ son puntos silla. Como el Laplaciano en coordenadas polares es

$$V_{xx} + V_{yy} = V_{rr} + \frac{1}{r}V_\varphi + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi},$$

entonces la traza de D^2V en un punto crítico es $T = V_{rr} + r^{-2}V_{\varphi\varphi}$. Hemos probado que la traza siempre es positiva y que la derivada $V_{\varphi\varphi}(r, 0)$ es negativa, entonces $V_{rr}(r, 0)$ es positiva. Por lo tanto, todos los puntos críticos en $\varphi = 0$ satisfacen

$$V_{rr}(r, 0) > 0 \text{ y } V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0.$$

Para $\mu \in [0, \infty)$, el potencial $V(r, 0)$ tiende a infinito cuando $r \rightarrow \{1, \infty\}$. Por lo tanto V tiene un punto silla en $r_1 \in (1, \infty)$. Si existe otro punto crítico r_0 en el intervalo $(1, \infty)$, entonces $V_{rr}(r_0, 0)$ tiene que ser positivo. Pero como $V(r, 0)$ es diferenciable en $(1, \infty)$, entonces tiene que existir otro punto crítico entre r_1 y r_0 con $V_{rr}(r_0, 0) \leq 0$, pero eso no puede suceder. Por lo tanto r_1 es el único punto crítico en el intervalo $(1, \infty)$.

Para $\mu \in (0, \infty)$, el potencial $V(r, 0)$ tiende a infinito cuando $r \rightarrow \{1, 0\}$. Por lo tanto V tiene un punto silla en $r_2 \in (0, 1)$. Con un argumento similar al anterior podemos probar que r_2 es el único punto crítico en el intervalo $(0, 1)$. Además, para $\mu = 0$ vimos que $V_r(0, \varphi) = 0$ con $V_{rr}(0, \varphi) = \lambda$ positivo. Con un argumento similar al anterior podemos probar que no existen puntos críticos de $V(r, 0)$ en $(0, 1)$.

Para $\mu \in [0, \infty)$, en el lema anterior probamos que $V_r(1, \pi/n)$ era negativo. Como $\lim_{r \rightarrow \infty} V_r(r, \pi/n) = +\infty$, entonces existe un punto crítico $r_3 \in (1, \infty)$ tal que $V_{rr}(r_3, \pi/n) > 0$. Por lo tanto $r_3 e^{i\pi/n}$ es un mínimo de V .

Para $\mu = 0$, hemos probado que $V_r(0, \varphi) = 0$ con $V_{rr}(0, \varphi) = \lambda$ positivo. Como $V_r(1, \pi/n)$ es negativo, entonces existe un $r_2 < 1$ tal que $V_r(r_2, \pi/n) = 0$ con $V_{rr}(r_2, \pi/n) < 0$. Por lo tanto $r_2 e^{i\pi/n}$ es un punto silla de V . \square

Por lo tanto, en el problema del satélite con el equilibrio relativo poligonal para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el satélite tiene dos \mathbb{Z}_n -órbitas de equilibrios que son

puntos sillas, cada punto silla tiene una bifurcación global de soluciones periódicas. Además, la bifurcación es inadmisibles en al menos una de las órbitas de puntos sillas. De la observación (3.4) tenemos que los puntos de las dos órbitas anteriores son inestables. En el artículo [BE04] se prueba la existencia de los equilibrios anteriores y se hace un análisis completo de la estabilidad.

Para el mínimo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.15 *El mínimo $r_3 e^{i\pi/n}$ satisface la condición de bifurcación $(2 - T/2)^2 > D$ para μ suficientemente grande.*

Prueba. Denotaremos explícitamente a la dependencia del parámetro μ en $V_r(r, \varphi)$ como

$$V_r(r e^{i\pi/n}; \mu) = r - \frac{\mu}{s + \mu} \frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{s + \mu} \sum_{j=1}^n \frac{r - \cos(j\zeta - \varphi)}{\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|^{\alpha+1}}.$$

Usando que $V_r(r_3 e^{i\pi/n}; \mu) = 0$ podemos probar que $r_3(\mu) \rightarrow 1$ cuando $\mu \rightarrow \infty$. Por lo tanto el límite de $D^2 V(r_3(\mu) e^{i\pi/n}; \mu)$ cuando $\mu \rightarrow \infty$ es la matriz

$$(\alpha + 1) \begin{pmatrix} (\cos \pi/n)^2 & \cos \pi/n \sin \pi/n \\ \cos \pi/n \sin \pi/n & (\sin \pi/n)^2 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior concluimos que $T(\mu) \rightarrow \alpha + 1$ y $D(\mu) \rightarrow 0$ cuando $\mu \rightarrow \infty$. Como $\alpha \in (1, 3)$, entonces

$$(2 - T/2)^2 - D \rightarrow \varepsilon > 0$$

De lo anterior concluimos que $(2 - T/2)^2 > D$ en el mínimo $r_3 e^{i\pi/n}$ si μ es suficientemente grande. \square

Por lo tanto, en el problema del satélite con el equilibrio relativo poligonal para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el satélite tiene una \mathbb{Z}_n -órbita de equilibrios que son mínimos. Además, cada mínimo para μ grande tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo corto y del periodo largo. De la observación (3.4) tenemos que los puntos de la órbita $r_3 e^{i\pi/n}$ son linealmente estable para μ grande. En [BE04] se prueba que $r_3 e^{i\pi/n}$ es linealmente estable para μ grande si $n \geq 7$. Nosotros hemos encontrado una prueba sencilla de los mismos resultados de estabilidad.

Hemos probado que sólo pueden existir más puntos críticos para $\varphi = \pi/n$. A continuación vamos a encontrar más puntos críticos para μ pequeño.

Proposición 3.16 *Para μ suficientemente chico, el potencial tiene un mínimo en $r_4 e^{i\pi/n}$ y un punto silla en $r_5 e^{i\pi/n}$ con $r_4 < r_5 < 1$.*

Prueba. Hemos probado que $V_r(0, \varphi; 0) = 0$ con $V_{rr}(0, \varphi; 0) = \lambda$ positivo, entonces existe un $r_* \in (0, \varepsilon)$ tal que $V_r(r_*, \pi/n; 0) > 0$. Como $V_r(r_*, \pi/n; \mu)$ es continua en μ , entonces $V_r(r_*, \pi/n; \mu)$ es positivo para μ chica. Por lo tanto, para μ chica tenemos que $V_r(0, \pi/n) = -\infty$, $V_r(r_*, \pi/n) > 0$ y $V_r(1, \pi/n) < 0$. De lo anterior concluimos que existen dos puntos donde $V_r(r, \pi/n)$ se anula con $r_4 < r_5 < 1$. Además $V_{rr}(r_4, \pi/n) > 0$ y $V_{rr}(r_5, \pi/n) < 0$, por lo que $r_4 e^{i\pi/n}$ es un mínimo y $r_5 e^{i\pi/n}$ es un punto silla. \square

En el artículo [AE04] se encuentran los dos equilibrios anteriores para $\varphi = \pi/n$ con $\mu \in (0, \varepsilon]$.

Por lo tanto, en el problema del satélite con el equilibrio relativo poligonal para $n \in \{3, 4, \dots\}$, existen otras dos \mathbb{Z}_n -órbitas de equilibrios para μ chica, una es de puntos silla y otra es de mínimos. Además, los puntos silla tienen una bifurcación global de soluciones periódicas.

Caso $n = 2$

El potencial para $n = 2$ es

$$V(re^{i\varphi}) = \frac{r^2}{2} + \frac{\mu}{\mu + s} \varphi_\alpha(r) + \frac{1}{\mu + s} \sum_{j \in \{\pm 1\}} \varphi_\alpha(\sqrt{r^2 + 2jr \cos \varphi + 1}).$$

La derivada con respecto a φ es $V_\varphi = -(\mu + s)^{-1} r \omega(\varphi, r) \sin \varphi$, en donde

$$\omega(\varphi, r) = \frac{(r^2 + 2r \cos \varphi + 1)^{(\alpha+1)/2} - (r^2 - 2r \cos \varphi + 1)^{(\alpha+1)/2}}{((r + 1)^2 - 4r^2 \cos^2 \varphi)^{(\alpha+1)/2}}$$

Como la función $\omega(\varphi, r)$ se anula en $\varphi = (k + 1/2)\pi$, entonces V_φ se anula sólo en $\varphi = k\pi/2$. Además, usando que $\omega(0) > 0$ y $\omega'(\pi/2) < 0$ podemos ver que $V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0$ y $V_{\varphi\varphi}(r, \pi/2) > 0$. Por lo anterior, para encontrar los puntos críticos del potencial sólo tenemos que analizar los puntos donde $V_r(r, k\pi/2)$ se anula.

Para $\varphi = 0$ el potencial $V(r, 0)$ tiende a infinito cuando $r \rightarrow 0, 1, \infty$, entonces existen dos puntos críticos $r_2 \in (0, 1)$ y $r_1 \in (1, \infty)$ que son puntos silla del potencial. Además, como $V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0$ y la traza $V_{rr} + r^{-2}V_{\varphi\varphi}$ es

positiva, entonces $V_{rr}(r, 0) > 0$ en los puntos críticos. De lo anterior podemos probar que esos puntos críticos son únicos para $\varphi = 0$.

Para $\varphi = \pi/2$ el potencial $V(r, \pi/2)$ tiende a infinito cuando $r \rightarrow 0, \infty$, entonces existe un punto crítico r_3 que es un mínimo del potencial. A continuación vamos a probar que r_3 es único y que se encuentra en el intervalo $(1, \infty)$. Sea $f(r) = -2(r^2 + 1)^{-(\alpha+1)/2}$, como la derivada con respecto a r es $V_r(r, \pi/2) = r - \frac{\mu}{s+\mu}r^{-\alpha} + \frac{r}{s+\mu}f(r)$, entonces

$$(s + \mu)V_r = r(f(r) + s) + \mu(r - r^{-\alpha}).$$

Representemos a la dependencia del potencial en μ como $V(r, \varphi; \mu)$. De la igualdad anterior podemos ver que $V_r(r, \pi/2; \mu) < V_r(r, \pi/2; 0)$ para $r \leq 1$. Como en el problema de los tres cuerpos encontramos que $V_r(r, \pi/2; 0) < 0$ para $r \in (0, \sqrt{2})$, entonces $V_r(r, \pi/2; \mu) < 0$ para $r \leq 1$. Además, para $r > 1$ la segunda derivada es

$$(s + \mu)V_{rr} = (rf' + f) + s + \mu(1 + \alpha r^{-(\alpha+1)})$$

con $rf' + f = 2(r^2\alpha - 1)(r^2 + 1)^{(\alpha+3)/2}$ positivo, entonces $V_{rr}(r, \pi/2)$ es positivo para $r > 1$. Por lo tanto $V_r(r, \pi/2)$ tiene un solo punto crítico en $r_3 \in (1, \infty)$.

Por lo tanto, en el problema del satélite con el equilibrio relativo poligonal para $n = 2$, el satélite tiene sólo dos \mathbb{Z}_2 -órbitas de puntos silla y una \mathbb{Z}_2 -órbita de mínimos. Cada punto silla tiene una bifurcación global de soluciones periódicas.

3.4. Vórtices

En esta sección analizamos la ecuación de un vórtice casi nulo en la presencia de n vórtices principales. Suponemos que los vórtices principales forman un equilibrio relativo y que la circulación del vórtice casi nulo es tan pequeña, que no perturba el movimiento de los vórtices primarios. Este problema es similar al del satélite y lo vamos a desarrollar sin mucho detalle.

3.4.1. Planteamiento del problema

Vamos a representar la posición del vórtice con circulación Γ_j por $q_j(t) \in \mathbb{R}^2$, aquí los Γ_j pueden ser negativos. La posición del vórtice con circulación

pequeña va a ser q_0 . Las ecuaciones de los vórtices son

$$\Gamma_j J \dot{q}_j = - \sum_{i=0}^n \Gamma_i \Gamma_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^2}$$

para $j \in \{0, \dots, n\}$. Cambiando al sistema de coordenadas rotantes $q_j(t) = e^{\omega t J} u_j(t)$ tenemos que las ecuaciones de movimiento son

$$\Gamma_j (J \dot{u}_j - \omega u_j) = - \sum_{i=0}^n \Gamma_i \Gamma_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^2}.$$

Haciendo tender Γ_0 a cero obtenemos la ecuación para el vórtice con circulación pequeña

$$J \dot{u}_0 - \omega u_0 = - \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{u_0 - u_i}{\|u_0 - u_i\|^2}.$$

Además, los vórtices principales se desacoplan del vórtice con circulación pequeña

$$\Gamma_j (J \dot{u}_j - \omega u_j) = - \sum_{i=1}^n \Gamma_i \Gamma_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^2}.$$

Vamos a suponer que los vórtices principales forman un equilibrio relativo, es decir, que sus posiciones a_i satisfacen

$$\omega a_j = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento para el vórtice nulo es

$$J \dot{u} = \nabla V(u) \text{ con} \\ V(u) := \omega \frac{\|u\|^2}{2} - \sum_{j=1}^n \Gamma_j \ln(\|u - a_j\|).$$

Observación 3.17 Para $\omega \neq 0$ el potencial $|V(x)|$ tiende a infinito cuando $x \rightarrow \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$. Por lo tanto las curvas de nivel de V son acotadas y cerradas. Las curvas de nivel regulares son inmersiones de curvas compactas en \mathbb{R}^2 . Del teorema de la curva de Jordan encontramos que las curvas de nivel

regulares están formadas de difeomorfismos de círculos. Por lo tanto todas las curvas de nivel regulares son soluciones periódicas. Además, las curvas de nivel críticas generan separatrices entre los distintos puntos críticos que determinan la topología de las curvas de nivel regulares.

Dado que la ecuación del vórtice es completamente integrable, a continuación solo nos interesa mostrar como funcionan nuestros resultados de bifurcación en este problema.

3.4.2. Teorema de bifurcación

Un equilibrio del vórtice es un punto crítico del potencial V . Nos interesa encontrar soluciones periódicas cerca de los equilibrios. De las definiciones (2.1) el operador diferencial es $\mathcal{D}(\nu)x = -\nu J\dot{x}$. Las colisiones son los puntos donde el potencial es indefinido $\Psi = \{a_1, \dots, a_n\}$. El operador $f(x)$ es

$$f(x, \nu) = \mathcal{D}(\nu)x + \nabla V(x).$$

Dado que J es invertible, se satisfacen las hipótesis para la reducción global de Liapunov-Schmidt (2.1). De la reducción global (2.3) tenemos que la linealización de la ecuación de bifurcación en x_0 tiene bloques $M(l\nu)$ con

$$M(\lambda) = -i\lambda J + D^2V(x_0).$$

De los teoremas de bifurcación global y local obtenemos el siguiente teorema.

Proposición 3.18 *Sea D el determinante de $D^2V(x_0)$, definamos a ν_0 como $\nu_0 = \sqrt{D}$.*

(a) *Si $D > 0$, existe bifurcación global de soluciones periódicas a partir de $2\pi/\nu_0$ con*

$$\eta(\nu_0) = -\text{sgn}(\omega).$$

(b) *Si $D < 0$, no existe bifurcación.*

Prueba. Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de $D^2V(x_0)$, entonces existe una matriz P tal que $PM(\nu)P^T = -i\nu J + \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. El determinante de M es $\det M(\nu) = -\nu^2 + D$ con $D = \lambda_1\lambda_2$. Si $D > 0$, entonces ν_0 es el único punto positivo donde $\det M(\nu)$ se anula. Como $n(0)$ es el índice de Morse

de $D^2V(x_0)$, entonces $n(0) = 0$ si $T > 0$ y $n(0) = 2$ si $T < 0$. Además $\det M(\nu) < 0$ para ν grande, entonces $n(\infty) = 1$. Por lo tanto $\sigma = 1$ y

$$\eta(\nu_+) = \sigma[n(0) - n(\infty)] = -\text{sgn}(T).$$

Finalmente, sean $x_0 = (x, y)$ y $a_j = (x_j, y_j)$, entonces la matriz de segundas derivadas es

$$D^2V(x_0) = \omega I + \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{d_j^4} \left[2 \begin{pmatrix} (x - x_j)^2 & (x - x_j)(y - y_j) \\ (x - x_j)(y - y_j) & (y - y_j)^2 \end{pmatrix} - d_j^2 I \right].$$

Por lo tanto la traza de D^2V es $T = 2\omega$. \square

En el teorema anterior probamos lo que ya sabíamos, que cerca de un mínimo o un máximo existen órbitas periódicas. Además, para $\omega \neq 0$ cada bifurcación es inadmisibles, pues todos los índices son iguales. Lo anterior es cierto pues en el plano nunca se pueden conectar dos ramas de bifurcación de soluciones periódicas de dos equilibrios.

3.4.3. Potencial de Morse

Proposición 3.19 *Suponiendo que el potencial sea una función de Morse, entonces para $\omega \neq 0$ tenemos*

$$1 - n = \#\text{mínimos} + \#\text{máximos} - \#\text{puntos silla}.$$

- (a) *Para $\omega > 0$, el potencial no tiene máximos y tiene al menos $n - 1$ puntos silla.*
- (b) *Para $\omega < 0$, el potencial no tiene mínimos y tiene al menos $n - 1$ puntos silla.*

Prueba. Para $\omega \neq 0$, podemos deducir la igualdad para los puntos críticos usando el teorema de Poincaré-Hopf. Como la traza de D^2V es $T = 2\omega$, entonces el potencial V no tiene máximos si $\omega > 0$ y no tiene mínimos si $\omega < 0$. \square

Por lo tanto, en el problema del vórtice para un potencial de Morse, existen al menos $n - 1$ equilibrios que son puntos silla.

3.4.4. El equilibrio relativo poligonal

A continuación vamos a analizar al vórtice en la presencia del equilibrio relativo poligonal. Sea $\zeta = 2\pi/n$, vamos a poner un vórtice con circulación $\Gamma_0 = \mu\Gamma$ en $a_0 = 0$ y para $j \in \{1, \dots, n\}$ a un vórtice con circulación $\Gamma_j = \Gamma$ en $a_j = e^{ij\zeta}$.

Proposición 3.20 *Las posiciones anteriores forman un equilibrio relativo si $\omega = \Gamma(s + \mu)$ con $s = (n - 1)/2$.*

Prueba. Para a_0 tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_0 - a_i}{\|a_0 - a_i\|^2} = - \sum_{j=0}^{n-1} e^{ij\zeta} = 0 = -\omega a_0.$$

Para a_j tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \Gamma \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^2} + \Gamma_0 a_j = a_j (s\Gamma + \Gamma_0) = \omega a_j,$$

en donde

$$s = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - e^{j\zeta}}{\|1 - e^{j\zeta}\|^2} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

Por lo tanto las a_j forman un equilibrio relativo si $\omega = s\Gamma + \Gamma_0$. \square

Podemos adimensionalizar a Γ con lo cual el potencial es

$$V(x) := (s + \mu) \frac{\|x\|^2}{2} - \sum_{j=1}^n \ln(\|x - e^{ij\zeta}\|) - \mu \ln(\|x\|).$$

El potencial anterior es similar al que analizamos en el problema del satélite. Sin embargo, para los vórtices no podemos normalizar a $\mu \in \mathbb{R}$. Como $e^{ij\zeta}$ son las raíces de uno, entonces $\sum_{j=1}^n \ln(\|x - e^{ij\zeta}\|) = \ln \|x^n - 1\|$. Por lo tanto

$$V(x) := \frac{1}{2}(s + \mu) \|x\|^2 - \frac{1}{2} \ln(\|x^n - 1\|^2) - \mu \ln(\|x\|).$$

Para $\mu = 0$, del lema de Schur tenemos que $D^2V(0) = \lambda I$ para $n \geq 3$, entonces $\lambda = T/2 = s > 0$. Por lo tanto $r = 0$ es un mínimo para

$\mu = 0$. Por lo tanto, en el problema del vórtice casi nulo con el equilibrio relativo poligonal para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el cero es un equilibrio para $\mu = 0$ con una bifurcación global de soluciones periódicas. Para $n = 2$ tenemos que $D^2V(0) = \text{diag}(s+2, s-2)$ con $s = 1/2$, entonces $r = 0$ es un punto silla sin bifurcación.

El cambio a coordenadas polares tiene Jacobiano invertible para $r > 0$, entonces los puntos críticos de $V(x)$ son los puntos críticos de $V(r, \varphi)$. En coordenadas polares tenemos que

$$V(r, \varphi) := (s + \mu) \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(r^{2n} - 2r^n \cos n\varphi + 1) - \mu \ln(r).$$

A continuación vamos a probar como en el problema del satélite, que existen tres órbitas de puntos críticos para $\mu \in [0, \infty)$. Además, para $\mu \in (-\infty, 0)$ vamos a probar que los equilibrios son como los de la figura.

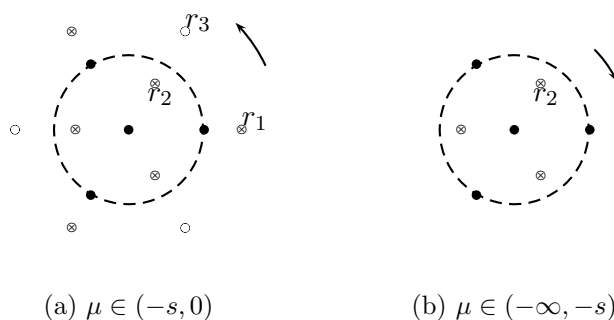


Figura 3.5: Ejemplo para $n = 3$.

Proposición 3.21 Para $n \in \{2, 3, \dots\}$, dependiendo de μ tenemos los siguientes casos:

- (a) Si $\mu \in (0, \infty)$, existe un punto silla en r_1 y uno en r_2 con $r_2 < 1 < r_1$. Además, existe un mínimo en $r_3 e^{i\pi/n}$ con $r_3 > 1$.
- (b) Si $\mu \in (-s, 0)$, existe un punto silla en r_1 y uno en $r_2 e^{i\pi/n}$ con $r_2 < 1 < r_1$. Además, existe un mínimo en $r_3 e^{i\pi/n}$ con $r_3 > 1$.
- (c) Si $\mu \in (-\infty, -s)$, existe un punto silla en $r_2 e^{i\pi/n}$ con $r_2 < 1$.

Además, para $\mu \in (-s, \infty)$ no existen más puntos críticos en $[0, \pi/n)$ y para $\mu \in (-\infty, -s)$ no existen más puntos críticos en $(0, \pi/n]$.

Prueba. La derivada parcial del potencial con respecto a φ es

$$V_\varphi = -\frac{nr^n \sin n\varphi}{r^{2n} - 2r^n \cos n\varphi + 1}.$$

Por lo tanto, la derivada V_φ se anula sólo si $\varphi = k\pi/n$ con

$$V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0 \text{ y } V_{\varphi\varphi}(r, \pi/n) > 0.$$

Por lo anterior sólo tenemos que estudiar a V_r para $\varphi \in \{0, \pi/n\}$. La derivada parcial con respecto a r es

$$V_r = (s + \mu)r - \frac{\mu}{r} - nr^{n-1} \frac{r^n - \cos n\varphi}{r^{2n} - 2r^n \cos n\varphi + 1}.$$

Por lo tanto los límites de $V_r(r, \varphi)$ para $r \rightarrow \{0, \infty\}$ son

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} V_r(r, \varphi) = \begin{cases} -\infty & \text{para } \mu > 0 \\ 0 & \text{para } \mu = 0 \\ +\infty & \text{para } \mu < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V_r(r, \varphi) = \begin{cases} +\infty & \text{para } \mu + s > 0 \\ 0 & \text{para } \mu + s = 0 \\ -\infty & \text{para } \mu + s < 0 \end{cases}.$$

Para $\varphi = 0$ tenemos que

$$V_r(r, 0) = (s + \mu)r - \frac{\mu}{r} - r^{n-1} \frac{n}{r^n - 1}.$$

Por lo que $V_r(r, 0) \rightarrow +\infty$ cuando $r \rightarrow 1^-$ y $V_r(r, 0) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow 1^+$. De los límites anteriores encontramos un punto silla en $r_2 \in (0, 1)$ para $\mu \in (0, \infty)$ y un punto silla en $r_1 \in (1, \infty)$ para $\mu \in (-s, \infty)$.

Para $\varphi = \pi/n$ tenemos que

$$V_r(r, \pi/n) = (s + \mu)r - \frac{\mu}{r} - r^{n-1} \frac{n}{r^n + 1}.$$

Por lo tanto $V_r(1, \pi/n) = -1/2$. Además, para $\mu = 0$ probamos que $V_{rr}(0, \varphi) = \lambda$ es positivo. Por lo tanto, para $\mu \in (-\infty, 0]$ existe un punto silla en $r_2 e^{i\pi/n}$ con $r_2 \in (0, 1)$ y para $\mu \in (-s, \infty)$ existe un mínimo en $r_3 e^{i\pi/n}$ con $r_3 \in (1, \infty)$.

En los puntos críticos del potencial tenemos

$$V_{rr} + r^{-2}V_{\varphi\varphi} = V_{x_1x_1} + V_{x_2x_2} = T,$$

donde T es la traza $T = 2\omega = 2(s + \mu)$.

Para $\mu > -s$, tenemos que $T > 0$. Como $V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0$, entonces $V_{rr}(r, 0) > 0$ en los puntos críticos. De lo anterior podemos probar que no existen más puntos críticos en $\varphi = 0$ para $\mu \in (-s, \infty)$. Además, como $V_r(r, \pi/n)$ es continua y $V_{\varphi\varphi}(r, \pi/n) > 0$, los puntos críticos aparecen en pares de puntos silla y mínimos en $\varphi = \pi/n$.

Para $\mu < -s$, tenemos que $T < 0$. Como $V_{\varphi\varphi}(r, \pi/n) > 0$, entonces $V_{rr}(r, \pi/n) < 0$ en los puntos críticos. De lo anterior podemos probar que no existen más puntos críticos en $\varphi = \pi/n$ para $\mu \in (-\infty, -s)$. Además, como $V_r(r, 0)$ es continua para $r \neq 1$ y $V_{\varphi\varphi}(r, 0) < 0$, los puntos críticos aparecen en pares de puntos silla y máximos en $\varphi = 0$. \square

Por lo tanto, en el problema del vórtice casi nulo con el equilibrio relativo poligonal para $n \in \{2, 4, \dots\}$, existe una \mathbb{Z}_n -órbita de mínimos para $\mu \in (-s, \infty)$, cada mínimo tiene una bifurcación global de soluciones periódicas.

Como el potencial V es D_n -invariante, todas las curvas de nivel tienen que ser D_n -invariantes. Además, como vimos las curvas de nivel regulares son homomorfas a círculos y las curvas no regulares son separatrices. A continuación vamos a analizar numéricamente el caso $n = 3$, en el cual podemos corroborar las observaciones anteriores.

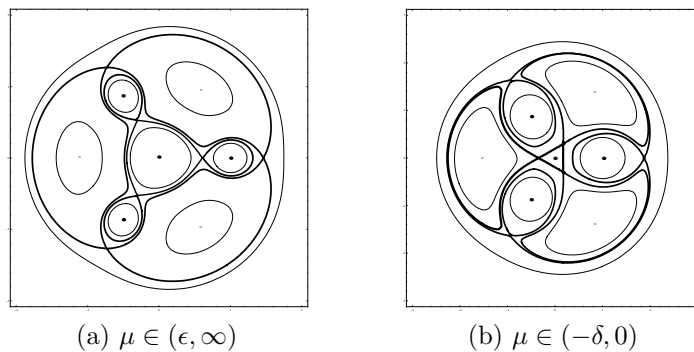
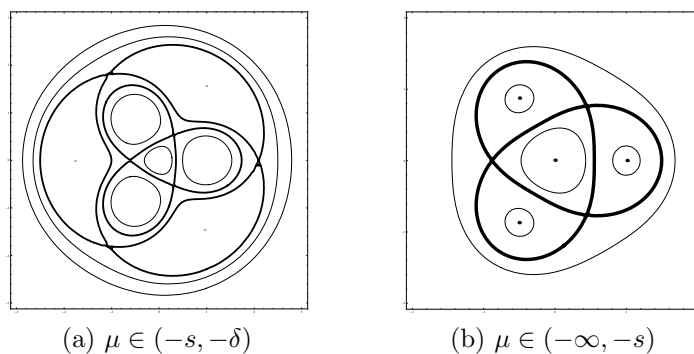
Para $\mu \in (\varepsilon, \infty)$, el valor $V(r_3e^{i\pi/3})$ es el mínimo global. Además $V(r_2) > V(r_1)$ debido a que r_2 está más cerca del vórtice a_0 con μ positiva.

Para $\mu \in (-\delta, 0]$, como μ es negativa y pequeña, el valor $V(r_3e^{i\pi/3})$ sigue siendo el mínimo global. Sin embargo, ahora $V(r_2e^{i\pi/3}) < V(r_1)$ pues $r_2e^{i\pi/3}$ está más cerca de a_0 con μ negativa.

Para $\mu \in (-s, -\delta)$, como $r_2e^{i\pi/3}$ es el punto más cercano a_0 con μ negativa, entonces el valor del mínimo local $r_3e^{i\pi/3}$ es más grande que el de $r_2e^{i\pi/3}$. Por lo que

$$V(r_2e^{i\pi/3}) < V(r_3e^{i\pi/3}) < V(r_2).$$

Para $\mu \in (-\infty, -s)$, sólo hay una separatriz correspondiente al valor $V(r_2e^{i\pi/3})$ y se pueden encontrar explícitamente todas las curvas de nivel.

Figura 3.6: Ejemplo para $n = 3$.Figura 3.7: Ejemplo para $n = 3$.

3.5. Comentarios

En este capítulo analizamos el movimiento de un satélite en la presencia de n cuerpos primarios que forman un equilibrio relativo. Usando grado ortogonal probamos que cada punto silla tiene una bifurcación global de soluciones periódicas y que cada mínimo tiene dos (o no tiene) ramas de bifurcación global. Nosotros probamos que el potencial del problema no tiene máximos, que existe al menos un mínimo global y que existen al menos n puntos silla, cada punto silla con una bifurcación global de soluciones periódicas. El resultado general de bifurcación global es la primera aportación de la tesis, pues no conocemos un resultado general en ese contexto y con esa manera de abordar el problema.

En particular analizamos la ecuación de un satélite en la presencia de un equilibrio relativo poligonal. Ese equilibrio poligonal fue usado por Maxwell

para modelar a Saturno y sus anillos. Nosotros probamos que el potencial del satélite tiene dos \mathbb{Z}_n -órbitas de puntos silla y una \mathbb{Z}_n -órbita de mínimos. Por lo que del teorema de bifurcación obtenemos una bifurcación global de soluciones periódicas de cada punto silla. También probamos que cada mínimo tiene dos ramas de bifurcación de soluciones periódicas cuando la masa del cuerpo central μ es suficientemente grande. En ese caso los mínimos son equilibrios linealmente estables.

Para encontrar los equilibrios del satélite usamos una representación integral del artículo [BE03], pero nosotros la probamos directamente en el apéndice usando integrales de Cauchy. En [BE04] también se hace un estudio detallado de los equilibrios y su estabilidad lineal, nosotros también recuperamos esos mismos resultados. En el artículo [AE04] se analiza numéricamente a los equilibrios del satélite, su estabilidad lineal y la bifurcación de estos. Otro análisis interesante de la dinámica global del problema se encuentra en [Kal08]. Sin embargo, hasta el momento no conocemos una prueba de la bifurcación global en este problema.

También estudiamos la ecuación de un vórtice casi nulo en la presencia de vórtices principales en equilibrio relativo. Sin embargo, dado que el problema en ese caso es completamente integrable, nuestro principal interés radica en ejemplificar plenamente los resultados generales que habíamos obtenido. De la misma manera la presentación del problema de la luna de Hill y el problema de los tres cuerpos tenía sólo fines ilustrativos, pues los resultados de bifurcación en esos problemas son bien conocidos desde hace mucho tiempo. Incluso el resultado de bifurcación global fue probado con grado S^1 -ortogonal en [MR01] y [MR04]. Para el problema restringido de los tres cuerpos recomendamos el artículo [DRP⁺07], en donde se siguen numéricamente a las ramas globales de bifurcación y sus doblamientos de periodo.

Capítulo 4

Bifurcación de equilibrios relativos para cuerpos y vórtices

En este capítulo encontramos bifurcación de equilibrios relativos a partir del equilibrio relativo poligonal. El equilibrio poligonal fue usado primero por Maxwell para explicar la estabilidad de los anillos de Saturno.

Nosotros analizamos la bifurcación de equilibrios relativos en un potencial que incluye al problema de los $n + 1$ -cuerpos y al problema de los vórtices como casos particulares. Para probar la bifurcación de equilibrios relativos usamos el grado de Brouwer, por lo que los resultados en este capítulo son independientes de los resultados del grado ortogonal.

4.1. Planteamiento del problema

4.1.1. Los filamentos y vórtices

A continuación vamos a plantear un modelo simplificado para el movimiento de n filamentos casi paralelos. Las ecuaciones de $n + 1$ filamentos casi paralelos son

$$J\Gamma_j \partial_t q_j + \Gamma_j^2 \partial_{ss}^2 q_j + \sum_{i=0(i \neq j)}^n \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2\pi} \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^2} = 0,$$

donde Γ_j representa a la circulación y $q_j(t, s)$ es la posición del filamento con la altura s . Recordemos que J siempre es la matriz symplectica.

Deseamos usar la ecuación anterior para modelar a n filamentos con circulación Γ y un filamento con circulación $\Gamma_0 = \mu\Gamma$. Sea $\mu_0 = \mu$ y $\mu_j = 1$ para $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces la circulación del filamento j es $\Gamma_j = \mu_j\Gamma$. Podemos adimensionalizar a Γ y a 2π en las ecuaciones, entonces las ecuaciones de los filamentos son

$$J\mu_j\partial_t q_j + \mu_j^2\partial_{ss}^2 q_j = - \sum_{i=0(i \neq j)}^n \mu_i\mu_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^2}.$$

A continuación vamos a cambiar a un sistema de coordenadas rotantes, para eso definamos a $u(t)$ como $q_j(t) = e^{\omega t J} u_j(t)$. Como $\partial_t q_j = e^{\omega t J}(\partial_t u_j + \omega J u)$, entonces las ecuaciones en coordenadas rotantes son

$$\mu_j J \partial_t u_j + \mu_j^2 \partial_{ss}^2 u_j = \omega \mu_j J u_j - \sum_{i=0(i \neq j)}^n \mu_i \mu_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^2}$$

Ahora vamos a escribir las ecuaciones en forma vectorial. Definamos al vector de posiciones como $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, a la matriz de masas como $\bar{\mu} = \text{diag}(\mu I, I, \dots, I)$ y a la matriz symplectica como $\mathcal{J} = \text{diag}(J, J, \dots, J)$. Con las definiciones anteriores las ecuaciones en forma vectorial son

$$\bar{\mu} \mathcal{J} u_t + \bar{\mu}^2 u_{ss} = \nabla V(u) \text{ con}$$

$$V(u) = \omega \frac{1}{2} \|\bar{\mu}^{1/2} u\|^2 + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \phi_1(\|u_j - u_i\|),$$

en donde ϕ_1 es una función que satisface $\phi_1'(x) = -1/x$.

En las ecuaciones de los vórtices la posición es independiente de la altura, por lo que las ecuaciones de los vórtices son simplemente $\bar{\mu} \mathcal{J} \dot{u}(t) = \nabla V(u)$.

4.1.2. Los cuerpos

A continuación vamos a usar las ecuaciones de Newton para modelar el movimiento de $n + 1$ cuerpos en el plano. Sea $q_j(t)$ la posición del cuerpo j , las ecuaciones de Newton son

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=0(i \neq j)}^n m_i m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^{\alpha+1}}.$$

Vamos a suponer que un cuerpo tiene masa μm y que n cuerpos tienen masa m . Sea $\mu_0 = \mu$ y $\mu_j = 1$ para $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces las masas de los cuerpos son $m_j = \mu_j m$. Podemos adimensionalizar a m en las ecuaciones de Newton con lo que tenemos

$$\mu_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=0(i \neq j)}^n \mu_i \mu_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^{\alpha+1}}.$$

Para cambiar a coordenadas rotantes definamos a $u(t)$ como $q_j(t) = e^{\sqrt{\omega}tJ} u_j(t)$. Como $\ddot{q}_j = e^{\sqrt{\omega}tJ} (\ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega}J\dot{u}_j - \omega u_j)$, entonces las ecuaciones en coordenadas rotantes son

$$\mu_j \ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega} \mu_j J \dot{u}_j = \omega u_j - \sum_{i=0(i \neq j)}^n \mu_i \mu_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^{\alpha+1}}$$

Sea $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ el vector de posiciones, las ecuaciones en forma vectorial son

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \ddot{u} + 2\sqrt{\omega} \bar{\mu} J \dot{u} &= \nabla V(u) \text{ con} \\ V(u) &= \omega \frac{1}{2} \|\bar{\mu}^{1/2} u\|^2 + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \phi_\alpha(\|u_j - u_i\|), \end{aligned}$$

donde ϕ_α es una función tal que $\phi'_\alpha(x) = -1/x^\alpha$.

4.1.3. Planteamiento general

En general vamos a estudiar al potencial de la forma

$$V_\alpha(x) = \omega \|\bar{\mu}^{1/2} x\|^2 + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \phi_\alpha(\|x_j - x_i\|),$$

en donde $\phi_\alpha(x)$ es una función tal que $\phi'_\alpha(x) = -1/x^\alpha$. Particularmente nos interesa el caso $\alpha = 1$ para el problema de los vórtices y el caso $\alpha = 2$ para el problema de los $n + 1$ -cuerpos. En esos problemas los equilibrio relativo corresponden a puntos críticos del potencial V .

En lo sucesivo vamos a representar indistintamente a las posiciones en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{C} . Sea $\zeta = 2\pi/n$, definamos al equilibrio relativo poligonal como

$$\bar{a} = (a_0, \dots, a_n)$$

con $a_0 = 0$ y $a_j = e^{ij\zeta}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$.

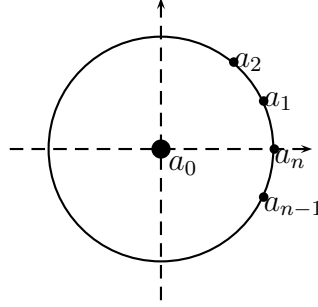


Figura 4.1: Equilibrio relativo poligonal.

Proposición 4.1 *Entonces \bar{a} es un punto crítico del potencial $V(x)$ cuando $\omega = \mu + s_1$ con*

$$s_1 = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{(\alpha-1)}(j\zeta/2)}.$$

Prueba. El gradiente del potencial V con respecto a x_j es

$$\nabla_{x_j} V(\bar{a}) = \omega \mu_j a_j - \sum_{i=0}^n \mu_i \mu_j \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^{\alpha+1}}.$$

Para $j = 0$ tenemos que

$$\nabla_{x_0} V(\bar{a}) = \mu \sum_{j=0}^{n-1} e^{ij\zeta} = 0.$$

Además, para $j \neq 0$ tenemos que

$$\nabla_{x_j} V(\bar{a}) = \omega a_j - \sum_{i=1}^n \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^{\alpha+1}} - \mu a_j = a_j (\omega - (\mu + s_1)),$$

en donde s_1 es

$$s_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - e^{ij\zeta}}{\|1 - e^{ij\zeta}\|^{\alpha+1}} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{(\alpha-1)}(j\zeta/2)}.$$

Por lo tanto \bar{a} es un equilibrio relativo para la frecuencia de rotación $\omega = \mu + s_1$. \square

Si x_0 es un equilibrio relativo, entonces τx_0 también es equilibrio con ω reemplazado por $\omega/\tau^{\alpha+1}$. De hecho cualquier rotación y homotecia de un equilibrio relativo también lo es. Nosotros hemos preferido fijar la norma del equilibrio relativo poligonal y dejar a μ como parámetro.

Nuestro propósito es encontrar bifurcaciones de equilibrios relativos con simetrías. A continuación vamos a definir al grupo de simetrías del potencial.

Definición 4.2 Sea S_n el grupo de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ y sea D_n el grupo generado por las permutaciones $\zeta(j) = j+1$ y $\kappa(j) = n-j$. Definamos la acción de S_n en $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ como

$$\rho(\gamma)(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}).$$

Además, definimos la acción de $O(2) = S^1 \cup \kappa S^1$ en $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ como

$$\rho(\theta) = e^{-\mathcal{J}\theta} \text{ y } \rho(\kappa) = \mathcal{R},$$

donde \mathcal{R} es la matriz $\text{diag}(R, \dots, R)$ con $R = \text{diag}(1, -1)$.

El potencial V es S_n -invariante debido a que las masas de n cuerpos son iguales. Además, el potencial V es $O(2)$ -invariante, pues podemos rotar o reflejar las posiciones de todos los cuerpos. Como el gradiente de un potencial invariante es equivariante, entonces ∇V es Γ -equivariante con

$$\Gamma = D_n \times O(2).$$

Sea \tilde{D}_n el grupo generado por (ζ, ζ) y (κ, κ) con $\zeta = 2\pi/n \in S^1$. La acción de (ζ, ζ) y (κ, κ) en $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ es

$$(\zeta, \zeta)x = \rho(\zeta)e^{-\mathcal{J}\zeta}x \text{ y } (\kappa, \kappa)x = \rho(\kappa)\mathcal{R}x.$$

Como los elementos (ζ, ζ) y (κ, κ) dejan fijo al equilibrio \bar{a} , entonces

$$\Gamma_{\bar{a}} = \tilde{D}_n.$$

Observación 4.3 El generador de $S^1 \subset \Gamma$ es $A_1x = -\mathcal{J}x$. De la invarianza de V tenemos que $\langle \nabla V, A_1x \rangle = 0$. Por lo tanto V es $\mathbb{Z}_n \times S^1$ ortogonal. El generador del núcleo de $D^2V(\bar{a})$ es

$$A_1\bar{a} = -\mathcal{J}\bar{a} = -(0, ie^{\zeta i}, \dots, ie^{n\zeta i}).$$

Sin embargo, para probar bifurcación de equilibrios relativos no vamos a usar el grado ortogonal, sino el grado de Brouwer restringido a un espacio de puntos fijos de (κ, κ) .

4.2. Representaciones irreducibles

Antes de pasar a probar el teorema de bifurcación estacionaria, deseamos encontrar los subespacios de representaciones irreducibles de $\Gamma_{\bar{a}}$. La descomposición por bloques de $D^2V(\bar{a})$ nos va a servir también para analizar la bifurcación periódica en los capítulos posteriores.

Definimos a A_{ij} como los bloques de $D^2V(\bar{a})$ tal que

$$D^2V(\bar{a}) = A = (A_{ij})_{ij=0}^n.$$

A continuación vamos a encontrar relaciones de simetrías entre las matrices A_{ij} usando que la matriz $D^2V(\bar{a})$ es $\Gamma_{\bar{a}}$ -equivariante.

Proposición 4.4 *Los bloques A_{ij} satisfacen*

$$A_{ij} = e^{-J\zeta} A_{\zeta(i)\zeta(j)} e^{J\zeta} \text{ y } A_{ij} = RA_{\kappa(i)\kappa(j)}R. \quad (4.1)$$

Prueba. Como la matriz $D^2V(\bar{a})$ es \tilde{D}_n -equivariante, entonces la matriz A conmuta con $\rho(\zeta)e^{-J\zeta}$ y

$$A = \rho(\zeta)e^{-J\zeta} A e^{J\zeta} \rho(\zeta)^{-1}.$$

En lo sucesivo vamos a usar a $[u]_i$ para representar a la coordenada $u_i \in \mathbb{R}^2$ de $u = (u_0, \dots, u_n)$. Usando la notación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} [\rho(\zeta)e^{-J\zeta} A e^{J\zeta} \rho(\zeta)^{-1}u]_i &= e^{-J\zeta} [A e^{J\zeta} \rho(\zeta)^{-1}u]_{\zeta(i)} \\ &= e^{-J\zeta} \sum_j A_{\zeta(i)\zeta(j)} (e^{J\zeta} u)_{\zeta^{-1}(j)} = \sum_j e^{-J\zeta} A_{\zeta(i)\zeta(j)} e^{J\zeta} u_j. \end{aligned}$$

De las igualdades anteriores encontramos que

$$\sum_j A_{ij} u_j = [Au]_i = \sum_j e^{-J\zeta} A_{\zeta(i)\zeta(j)} e^{J\zeta} u_j.$$

Por lo tanto $A_{ij} = e^{-J\zeta} A_{\zeta(i)\zeta(j)} e^{J\zeta}$. Usando que A conmuta con $\rho(\kappa)\mathcal{R}$ podemos probar de la misma manera que antes que $A_{ij} = RA_{\kappa(i)\kappa(j)}R$. \square

Ahora vamos a encontrar los espacios de representaciones irreducibles de $\Gamma_{\bar{a}}$. Primero definamos a los vectores v_1 y v_{n-1} como

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ y } v_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Definición 4.5 Para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$ definamos a $T_k : \mathbb{C}^2 \rightarrow V_k$ como

$$T_k(z) = (0, n^{-1/2} e^{(ikI+J)\zeta} z, \dots, n^{-1/2} e^{n(ikI+J)\zeta} z) \text{ con}$$

$$V_k = \{(0, e^{(ikI+J)\zeta} z, \dots, e^{n(ikI+J)\zeta} z) : z \in \mathbb{C}^2\}.$$

Para $k \in \{1, n-1\}$ definimos a $T_k : \mathbb{C}^3 \rightarrow V_k$ como

$$T_k(\alpha, w) = (v_k \alpha, n^{-1/2} e^{(ikI+J)\zeta} w, \dots, n^{-1/2} e^{n(ikI+J)\zeta} w) \text{ con}$$

$$V_k = \{(v_k \alpha, e^{(ikI+J)\zeta} w, \dots, e^{n(ikI+J)\zeta} w) : w \in \mathbb{C}^2, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

En la proposición siguiente vamos a encontrar la acción del grupo $\Gamma_{\bar{a}} = \tilde{D}_n$ en los subespacios V_k . En particular, vamos a ver que los espacios $V_k \oplus V_{n-k}$ son invariantes bajo la acción del grupo $\Gamma_{\bar{a}} = \tilde{D}_n$

Proposición 4.6 La acción de (ζ, ζ) y (κ, κ) en V_k es

$$(\zeta, \zeta)T_k(z) = T_k(e^{ik\zeta} z) \text{ y}$$

$$(\kappa, \kappa)T_k(z) = T_{n-k}(Rz),$$

donde R representa a la matriz $\text{diag}(1, 1, -1)$ para $k \in \{1, n-1\}$.

Prueba. Primero vamos a encontrar la acción para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$. Para $j \neq 0$ tenemos que

$$[\rho(\zeta)T_k(z)]_j = [T_k(z)]_{\zeta(j)}$$

$$= n^{-1/2} e^{j(ikI+J)\zeta} (e^{(ikI+J)\zeta} z) = [T_k(e^{(ikI+J)\zeta} z)]_j.$$

Por lo tanto $\rho(\zeta)T_k(z) = T_k(e^{(ikI+J)\zeta} z)$. Usando que la acción de $\zeta \in O(2)$ es $e^{-\zeta \mathcal{J}} T_k(z) = T_k(e^{-\zeta \mathcal{J}} z)$ concluimos que la acción de (ζ, ζ) es $(\zeta, \zeta)T_k(z) = T_k(e^{ik\zeta} z)$.

Ahora vamos a encontrar la acción para $k \in \{1, n-1\}$. Como en el caso anterior tenemos que

$$\rho(\zeta)T_k(\alpha, w) = T_k(\alpha, e^{(ikI+J)\zeta} w).$$

Además, usando la igualdad $e^{-J\zeta} v_k = e^{ik\zeta} v_k$ podemos probar que la acción de $\zeta \in O(2)$ es

$$e^{-\zeta \mathcal{J}} T_k(\alpha, w) = T_k(e^{ik\zeta} v_k \alpha, e^{-J\zeta} w).$$

Por lo tanto, la acción también es $(\zeta, \zeta)T_k(z) = T_k(e^{ik\zeta} z)$ para $k \in \{1, n-1\}$.

Sólo nos falta encontrar la acción de (κ, κ) . Para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$ tenemos que

$$[(\kappa, \kappa)T_k(z)]_j = [\mathcal{R}T_k(z)]_{\kappa(j)} = [T_{n-k}(Rz)]_j,$$

entonces la acción es $(\kappa, \kappa)T_k(z) = T_{n-k}(Rz)$. Para $k \in \{1, n-1\}$ usamos que $Rv_k = v_{\kappa(k)}$ para probar que la acción es igual a la anterior pero con $R = \text{diag}(1, 1, -1)$. \square

Sea $\tilde{\mathbb{Z}}_n$ el grupo generado por (ζ, ζ) , entonces los V_k son los espacios de representaciones irreducibles del grupo $\tilde{\mathbb{Z}}_n$. Como la matriz $D^2V(\bar{a})$ es $\tilde{\mathbb{Z}}_n$ -equivariante, entonces del lema de Schur tenemos que la matriz $D^2V(\bar{a})$ es diagonal por bloques B_k con

$$D^2V(\bar{a})T_k(z) = T_k(B_k z).$$

Además, la acción de (ζ, ζ) y (κ, κ) en el subespacio $V_k \oplus V_{n-k}$ es

$$\begin{aligned} (\zeta, \zeta)(z_k, z_{n-k}) &= (e^{ik\zeta} z_k, e^{-ik\zeta} z_{n-k}) \text{ y} \\ (\kappa, \kappa)(z_k, z_{n-k}) &= (Rz_{n-k}, Rz_k). \end{aligned}$$

Como $D^2V(\bar{a})$ conmuta con la acción de (κ, κ) , entonces los bloques B_k deben satisfacer además que $B_k R = R B_{n-k}$.

A continuación vamos a definir una transformación ortogonal en $\mathbb{C}^{2(n+1)}$ usando a los isomorfismos T_k como componentes.

Proposición 4.7 *Sea $z = (z_1, \dots, z_n)$, la transformación lineal $Pz = \sum_{k=1}^n T_k(z_k)$ es ortogonal, $P^* = P^{-1}$.*

Prueba. Como la matriz $e^{jJ\zeta}$ es una isometría en \mathbb{C}^2 y como $\sum_{j=0}^{n-1} e^{ij(k-l)\zeta} = n\delta_{kl}$ para $k, l \in \{2, \dots, n-2, n\}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle T_k(z_k), T_l(z_l) \rangle &= n^{-1} \sum_{j=1}^n e^{ij(k-l)\zeta} \langle e^{jJ\zeta} z_k, e^{jJ\zeta} z_l \rangle \\ &= n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{ij(k-l)\zeta} \langle z_k, z_l \rangle = \delta_{kl} \langle z_k, z_l \rangle. \end{aligned}$$

De hecho, usando que v_1 y v_{n-1} son ortonormales podemos probar que $\langle T_k(z_k), T_l(z_l) \rangle = \delta_{kl} \langle z_k, z_l \rangle$ para todo k y l . Por lo tanto P es una transformación ortogonal, pues

$$\langle Pz, Pz \rangle = \sum \delta_{kl} \langle z_k, z_l \rangle = \langle z, z \rangle.$$

□

Por lo tanto, la matriz $D^2V(\bar{a})$ es diagonal por bloques en las nuevas coordenadas

$$P^{-1}D^2V(\bar{a})P = \text{diag}(B_1, \dots, B_n).$$

A continuación vamos a encontrar los bloques B_k en términos de las matrices A_{ij} , recordemos que las matrices A_{ij} representan a los bloques de $D^2V(\bar{a})$.

Proposición 4.8 *Los bloques B_k satisfacen $B_{n-k} = \bar{B}_k$ con*

$$B_k = \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} \text{ para } k \in \{2, \dots, n-2, n\} \text{ y} \quad (4.2)$$

$$B_k = \begin{pmatrix} e_1^T A_{00} e_1 & n^{1/2} \overline{(A_{n0} v_k)}^T \\ n^{1/2} A_{n0} v_k & \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} \end{pmatrix} \text{ para } k \in \{1, n-1\}. \quad (4.3)$$

Prueba. Primero vamos a encontrar los bloques B_k para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$. Para $l \neq 0$ tenemos que $[AT_k(z)]_l = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n A_{lj} e^{j(ikI+J)\zeta} z$. De las simetrías (4.1) podemos probar que $A_{lj} = e^{lJ\zeta} A_{n(j-l)} e^{-lJ\zeta}$ con $l-j$ modulo n . Por lo tanto

$$[AT_k(z)]_l = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n e^{l(ik+J)\zeta} A_{n(j-l)} e^{(j-l)(ikI+J)\zeta} z.$$

Reescribiendo la suma anterior encontramos que

$$[AT_k(z)]_l = n^{-1/2} e^{l(ik+J)\zeta} \left[\sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} z \right] = [T_k(B_k z)]_l.$$

Como los isomorfismos T_k están definidos en subespacios invariantes V_k , entonces $[AT_k(z)]_0 = [T_k(B_k z)]_0$. Por lo tanto $AT_k(z) = T_k(B_k z)$.

A continuación vamos a calcular los bloques para $k \in \{1, n - 1\}$. Para $l \neq 0$ tenemos que

$$[AT_k(\alpha, w)]_l = (A_{l0}v_k)\alpha + n^{-1/2} \sum_{j=1}^n A_{lj}e^{j(ikI+J)\zeta}w$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}^2$. De las simetrías (4.1) podemos probar que $A_{l0} = e^{lJ\zeta}A_{n0}e^{-lJ\zeta}$, entonces $A_{l0}v_k = e^{lJ\zeta}A_{n0}e^{-lJ\zeta}v_k$. Además, como $e^{-lJ\zeta}v_k = e^{lik\zeta}v_k$, entonces $A_{l0}v_k = e^{l(ki+J)\zeta}A_{n0}v_k$. Usando los cálculos anteriores tenemos que

$$[AT_k(\alpha, w)]_l = n^{-1/2}e^{l(ikI+J)\zeta} \left[(n^{1/2}A_{n0}v_k)\alpha + \left(\sum_{j=1}^n A_{nj}e^{j(ikI+J)\zeta} \right) w \right]. \quad (4.4)$$

Para $l = 0$ tenemos que $[AT_k(z)]_0 = (A_{00}v_k)\alpha + n^{-1/2}D_k w$ con $D_k = \sum_{j=1}^n A_{0j}e^{j(ikI+J)\zeta}$. De las simetrías (4.1) podemos probar que $A_{00} = cI$. Como $v_k \bar{v}_k^T = 1$, entonces

$$[AT_k(\alpha, w)]_0 = v_k \left[(e_1^T A_{00} e_1)\alpha + n^{-1/2}(\bar{v}_k^T D_k)w \right]. \quad (4.5)$$

De los cálculos (4.4) y (4.5) concluimos que $D^2V(\bar{a})T_k(\alpha, w) = T_k(B_k(\alpha, w))$ con

$$B_k = \begin{pmatrix} e_1^T A_{00} e_1 & n^{-1/2}(\bar{v}_k^T D_k) \\ n^{1/2}A_{n0}v_k & \sum_{j=1}^n A_{nj}e^{j(ikI+J)\zeta} \end{pmatrix}.$$

Pero como la transformación P es ortonormal y A es simétrica, entonces B_k tiene que ser simétrica y $\overline{(\bar{v}_k^T D_k)}^T = nA_{n0}v_k$.

En la prueba usamos que V_k es invariante para probar que $[AT_k(z)]_0 = [T_k(B_k z)]_0$ cuando $k \in \{2, \dots, n - 2, n\}$ y también usamos que la transformación P es ortogonal para probar que $nA_{n0}v_k = \overline{(\bar{v}_k^T D_k)}^T = D_k^T v_k$ cuando $k \in \{1, n - 1\}$. De hecho, podemos probar las igualdades anteriores directamente .

Para probar que $[AT_k(z)]_0 = [T_k(B_k z)]_0$ veamos que $[T_k(B_k z)]_0 = 0$ y que

$$[AT_k(z)]_0 = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n A_{0j}e^{j(ikI+J)\zeta}z.$$

De las simetrías (4.1) podemos ver que $A_{0j} = e^{jJ\zeta}A_{0n}e^{-jJ\zeta}$, entonces $[AT_k(z)]_0 = n^{-1/2}C_k A_{0n}z$ con

$$C_k = \sum_{j=1}^n e^{j(ik+J)\zeta}.$$

Además, podemos probar que $C_k = 0$ para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$. Por lo tanto $[AT_k z]_0 = 0$.

Para probar que $nA_{n0}v_k = D_k^T v_k$ veamos que $[AT_k(z)]_0 = n^{-1/2}D_k z$ con $D_k = C_k A_{0n}$. Podemos probar que $C_1 = \bar{C}_{n-1} = \frac{n}{2}(I + iJ)$ usando que

$$e^{j(i+J)\zeta} = I \cos^2 j\zeta + \frac{1}{2}(J + i) \sin 2j\zeta + (iJ) \sin^2 j\zeta.$$

Además, como $A_{0n}^T = A_{n0}$ y la matriz C_k es simétrica, entonces $D_k^T = A_{n0}C_k$. Por lo tanto $D_k^T v_k = A_{n0}C_k v_k = nA_{n0}v_k$, pues $C_k v_k = n v_k$. \square

En los cálculos anteriores hemos usado sólo las simetrías de $D^2V(\bar{a})$, lo anterior nos va a servir para abordar problemas con simetrías similares como va a ser la latiz no lineal de Schrödinger.

Nuestro cambio de variables se realizó en coordenadas complejas. A continuación vamos a encontrar a la matriz $P^{-1}D^2V(\bar{a})P$ para las coordenadas reales.

Proposición 4.9 *Si la matriz $D^2V(\bar{a})$ está definida en el subespacio $\mathbb{R}^{2(n+1)}$, entonces la matriz $P^{-1}D^2V(\bar{a})P$ está definida en el subespacio $W = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ con*

$$P^{-1}D^2V(\bar{a})P = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_{n/2}, B_n)$$

Además, en el bloque B_k la acción es

$$(\zeta, \bar{\zeta})z = e^{ik\zeta}z \text{ y } (\kappa, \bar{\kappa})z = Rz\bar{z},$$

donde la matriz R es $\text{diag}(1, 1, -1)$ en el bloque B_1 .

Prueba. Primero vamos a identificar al subespacio $W = \{z : Pz \in \mathbb{R}^{2(n+1)}\}$. Si Pz es real, entonces

$$\sum_{k=1}^n T_k(z_k) = Pz = \overline{Pz} = \sum_{k=1}^n T_{n-k}(\bar{z}_k).$$

Por lo tanto, el subespacio W es el conjunto de (z_1, \dots, z_n) tal que $z_{n-k} = \bar{z}_k$. Recordemos que la acción de $(\kappa, \bar{\kappa})$ en z_k es $(\kappa, \bar{\kappa})z_k = Rz_{n-k}$.

Para $k \in \{n/2, n\}$ tenemos que $z_k = z_{n-k} = \bar{z}_k \in \mathbb{R}^2$, entonces la acción de $(\kappa, \bar{\kappa})$ es $(\kappa, \bar{\kappa})z_k = Rz_k$. En estos casos los bloques $B_{n/2}$ y B_n están definidos en espacios reales y la acción es real.

Para $k \notin \{n/2, n\}$ necesitamos hacer el isomorfismo $T(z_k) = (z_k, z_{n-k})$ con $z_{n-k} = \bar{z}_k$. La acción de (κ, κ) es

$$(\kappa, \kappa)T(z_k) = (R\bar{z}_k, Rz_k) = T(R\bar{z}_k).$$

Usando que la acción de (ζ, ζ) es $(\zeta, \zeta)z_k = e^{ik\zeta}z_k$ podemos probar que

$$(\zeta, \zeta)T(z_k) = T(e^{ik\zeta}z_k).$$

Finalmente, podemos usar la igualdad $B_{n-k} = \bar{B}_k$ para probar que

$$(B_k, B_{n-k})T(z_k) = T(B_k z_k).$$

□

4.3. Teorema de bifurcación

En esta sección vamos a encontrar condiciones necesarias para la bifurcación de equilibrios relativos de \bar{a} . Para lo anterior vamos a necesitar hacer el cambio de variables P directamente en el potencial.

Definimos a $V_P : W \rightarrow \mathbb{R}$ como $V_P(x) = V(Px)$. El potencial V_P es Γ -invariante y el gradiente ∇V_P es Γ -equivariante con la acción $\rho_P(\gamma) = P^{-1}\rho(\gamma)P$. Además, el equilibrio relativo $x_0 = P^{-1}\bar{a}$ es siempre un cero de ∇V_P .

Para cada h que divide a n , definimos al grupo \tilde{D}_h como el grupo generado por $(n/h)(\zeta, \zeta)$ y (κ, κ) . Los \tilde{D}_h son los subgrupos del grupo de isotropía de $\Gamma_{\bar{a}} = \tilde{D}_n$. Definamos a la función $f_h(x)$ como $\nabla V_P(x)$ restringido al espacio de puntos fijos de \tilde{D}_h ,

$$f_h(x) = \nabla V_P(x)|_{W^{\tilde{D}_h}} : W^{\tilde{D}_h} \rightarrow W^{\tilde{D}_h}.$$

El equilibrio $x_0 = P^{-1}\bar{a}$ se encuentra en $W^{\tilde{D}_h}$ para todo h que divide a n , entonces x_0 es un cero de $f_h(x)$. Los ceros de $f_h(x)$ son los equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_h . Para probar bifurcación de x_0 calcularemos primero el signo del determinante de $f'_h(x_0)$.

Proposición 4.10 *Definamos a σ_k como*

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \operatorname{sgn}(e_1^T B_k e_1) \text{ para } k \in \{n, n/2\} \text{ y} \\ \sigma_k &= \operatorname{sgn}(\det B_k) \text{ para } k \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\operatorname{sgn}(\det f'_h(x_0)) = n(\mu) = \sigma_n \prod_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}h} \sigma_j.$$

Prueba. La acción de (ζ, ζ) en la coordenada z_k es $e^{ik\zeta} z_k$, por lo que la acción de $(n/h)(\zeta, \zeta)$ en z_k es trivial cuando $z_k = e^{ik(2\pi/h)} z_k$. Lo anterior sucede sólo para z_k con $k \in h\mathbb{N}$. Además, la acción de (κ, κ) en la coordenada z_k es trivial cuando $z_k = R\bar{z}_k$. Por lo tanto $z \in W^{\tilde{D}_h}$ si

$$z = (z_h, z_{2h}, \dots, z_n) \text{ con } z_k = R\bar{z}_k.$$

La matriz $D^2 V_P(x_0)$ en el espacio $W^{\tilde{D}_h}$ es de la forma

$$\operatorname{diag}(D_h, D_{2h}, \dots, D_n).$$

Para $k \in \{n, n/2\}$ tenemos que $z_h \in \mathbb{R} \times \{0\}$, entonces $D_k = e_1^T B_k e_1$. Para $k \notin \{1, n/2, n\}$ tenemos que $z_h \in \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$, entonces $D_k = T^* B_k T$ con $T = \operatorname{diag}(1, i)$ el isomorfismo natural entre \mathbb{R}^2 y $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$. Para $k = 1$ tenemos que $z_h \in \mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}$, entonces $D_k = T^* B_k T$ con $T = \operatorname{diag}(1, 1, i)$ el isomorfismo natural entre \mathbb{R}^3 y $\mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}$. Por lo tanto $\operatorname{sgn}(\det D_k) = \sigma_k$ y

$$\operatorname{sgn}(\det f'_p(x_0)) = \operatorname{sgn} \left(\det D_n \prod_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}h} \det D_j \right) = n(\mu).$$

□

Observación 4.11 *Si no restringimos el mapeo f_h al espacio de puntos fijos de (κ, κ) , entonces $\sigma_k = \operatorname{sgn}(\det B_k)^2$. El grado ortogonal está definido sólo para grupos abelianos, por lo que tenemos que ignorar la reflexión (κ, κ) si queremos usar grado ortogonal. Sin embargo, en ese caso no podemos encontrar bifurcación debido a que los σ_k no cambian de signo.*

4.3.1. Bifurcación local

A continuación vamos a usar el grado de Brouwer en la función f_h para encontrar bifurcación de equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_h , sin embargo, la información sobre la bifurcación global con este tipo de pruebas es menos lograda que la que podríamos obtener con el grado ortogonal.

Definamos a la función f de $B_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}$ en $\mathbb{R} \times W$ como

$$f(x, \mu) = (\|x - x_0\| - \varepsilon, f_h(x, \mu)) \text{ con}$$

$$B_{2\varepsilon} \times B_{2\rho} = \{(x, \mu) \in W^{\tilde{D}_h} \times \mathbb{R} : \|x - x_0\| \leq 2\varepsilon, |\mu - \mu_0| \leq 2\rho\}.$$

Teorema 4.12 *El grado de Brouwer de $f(x, \mu)$ está bien definido con*

$$\deg(f; B_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}) = \eta_h(\mu_0) = n_h(\mu_0 - \rho) - n_h(\mu_0 + \rho).$$

Si $\eta_h(\mu_0) \neq 0$, entonces existe bifurcación local a partir de (x_0, μ_0) con simetrías \tilde{D}_h .

Prueba. La prueba es similar a la prueba de bifurcación periódica del capítulo dos. La prueba consiste en deformar a la función $\|x - x_0\| - \varepsilon$ en $\rho - \|\mu - \mu_0\|$ y a la función $f_h(x)$ en $f'_h(x_0)$. Después se usa la propiedad de escisión para probar que

$$\deg(f(\mu); B_{2\rho} \times B_{2\varepsilon}) = \deg(f'_h(\mu_0 - \rho)x; B_{2\varepsilon}) - \deg(f'_h(\mu_0 + \rho)x; B_{2\varepsilon}).$$

Como $\deg(f'_h(\mu); B_{2\varepsilon}) = n_h(\mu)$, concluimos que $\deg(f; B_{2\rho} \times B_{2\varepsilon}) = \eta_h(\mu_0)$.

Si $\eta_h(\mu_0) \neq 0$, entonces para ε pequeño existe un $(x_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ con $x_\varepsilon \subset W^{\tilde{D}_h}$ tal que $f_h(x_\varepsilon, \mu_\varepsilon) = 0$ y $d(x_\varepsilon, x_0) = \varepsilon$. Si hacemos tender ε a cero, de la compacidad obtenemos una subsucesión $\varepsilon_k \rightarrow 0$ tal que $\mu_{\varepsilon_k} \rightarrow \mu_1$. De la continuidad concluimos que $\mu_1 = \mu_0$. \square

La siguiente proposición la vamos a usar cuando sólo un σ_k cambia de signo .

Proposición 4.13 *Para cada $k \in \{1, \dots, [n/2], n\}$, sea h el máximo común divisor de k y n . Si $\sigma_k(\mu)$ cambia de signo en μ_0 y $\sigma_j(\mu_0) \neq 0$ para las demás $j \in [1, n/2] \cap (\mathbb{N}h)$, entonces existe una bifurcación con simetrías exactas \tilde{D}_h . Por simetrías exactas entendemos que la bifurcación local se encuentra en $W^{\tilde{D}_h} \setminus \cup_{\tilde{D}_h \subset H} W^H$.*

Prueba. Deseamos encontrar el mayor número de simetrías de la bifurcación. Lo anterior se logra usando el mapeo f_h con h el máximo común divisor de k y n . Por hipótesis el producto

$$\sigma_n \prod_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}h \ (j \neq k)} \sigma_j(\mu_0) \neq 0,$$

entonces $\eta_h(\mu_0) = \pm 2$. Por lo tanto existe bifurcación en el espacio de puntos fijos de \tilde{D}_h .

Sea \tilde{D}_p un grupo tal que $\tilde{D}_h \subset \tilde{D}_p$, entonces h divide a p . Pero como p no divide k , entonces

$$\text{sgn}(\det f'_p(x_0)) = \sigma_n \prod_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}p} \sigma_j \neq 0.$$

Por lo tanto $f'_p(x_0)$ es invertible. Del teorema de la función implícita podemos probar que no existen soluciones en $W^{\tilde{D}_p}$ cercanas a (x_0, μ_0) . Por lo tanto la bifurcación local no está en $W^{\tilde{D}_p}$. \square

4.3.2. Bifurcación global

A continuación vamos a probar que la bifurcación de equilibrios relativos es global.

Definimos el conjunto de soluciones triviales T como $T = \{(\Gamma x_0, \mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$ con $x_0 = P^{-1}\bar{a}$. Sea S el conjunto de ceros de $f_h(x, \mu)$, definimos a $G = S \setminus T$ como el conjunto de soluciones no triviales. A $\bar{G} \setminus G \subset T$ le decimos el conjunto de bifurcación y a $(x_0, \mu_0) \in \bar{G} \setminus G$ un punto de bifurcación.

Sea $C \subset \bar{G}$ la componente conexa de un punto de bifurcación (x_0, μ_0) . El conjunto $C \cap T$ es el conjunto de puntos de bifurcación de la rama C .

Definamos al conjunto de colisión como

$$\Psi = \{x \in \mathbb{R}^{2(n+1)} : x_i = x_j \ (i \neq j)\}.$$

Además, definamos al conjunto Λ_ρ como $\Lambda_\rho = \{\|\mu\| < \rho\}$ y al conjunto Ω_ρ como

$$\Omega_\rho = \{x \in \mathbb{R}^{2(n+1)} : \|x\| < \rho, \rho^{-1} < d(x, \Psi)\}.$$

Para ρ grande, el conjunto Ω_ρ es una bola grande menos unas vecindades pequeñas alrededor de hiperplanos de codimensión 2, por lo que el conjunto Ω_ρ es conexo.

Decimos que C es admisible si está contenida en algún $\Omega_\rho \times \Lambda_\rho$. Además, la componente C es inadmisibile cuando (a) el parámetro μ va a infinito, (b) la norma de la rama va a infinito o (c) la rama va a un punto de colisión.

Teorema 4.14 *Si la componente conexa C de un punto de bifurcación (x_0, μ_0) es admisible y el conjunto $C \cap T$ es aislado, entonces C retorna a otro puntos de bifurcación $\{(x_1, \mu_1), \dots, (x_r, \mu_r)\}$ y*

$$\eta_h(x_0, \mu_0) + \dots + \eta_h(x_r, \mu_r) = 0.$$

Prueba. Si C es admisible, entonces C está contenida en el interior de Ω_ρ para ρ suficientemente grande. Podemos construir un conjunto $\bar{\Omega} \subset \Omega_\rho \times \Lambda_\rho$ tal que $\partial\bar{\Omega} \cap C = \emptyset$ y que $f_h(x, \mu)$ se anula en $\partial\bar{\Omega}$ sólo para $x \in T$. Como $f_h(x, \mu)$ no se anula en $\partial\Omega$ a menos que $x \in T$, entonces el grado $\deg(d(x, T) - \varepsilon, f_h; \Omega)$ está bien definido para ε positivo. Como Ω es acotado, podemos tomar ε grande para que el grado sea cero.

Por hipótesis $C \cap T$ consta de puntos aislados. Si tomamos ε pequeño, los puntos que satisfacen $d(x, T) = \varepsilon$ y $f_h(x, \mu) = 0$ en Ω se encuentran en la unión finita y disjunta de $B_{2\varepsilon}(x_0) \times B_{2\rho}(\mu_0)$ para $(x_0, \mu_0) \in C \cap T$. De la propiedad de escisión concluimos que

$$0 = \deg_\perp(d(x, T) - \varepsilon, f_h; \Omega) = \sum_{(x_0, \mu_0) \in C \cap T} \deg(\|x - x_0\| - \varepsilon, f_h; B_{2\varepsilon} \times B_{2\rho}).$$

Del cálculo que teníamos para los grados locales obtenemos que $\sum_{j=0}^r \eta_h(x_j, \mu_j) = 0$. □

4.4. Simetrías

Las simetrías de \tilde{D}_h son simplemente equilibrios formados por n/h polígonos regulares de h lados con una reflexión. Para describir detalladamente las simetrías de \tilde{D}_h vamos a necesitar las siguientes definiciones.

Definición 4.15 *Definimos a un h -polígono como*

$$\{re^{i\varphi} e^{k(2\pi i/h)} : k = 1, \dots, h\}. \tag{4.6}$$

Definimos a un $2h$ -polígonos como

$$\{re^{\pm i\varphi} e^{k(2\pi i/h)} z : k = 1, \dots, h\}. \tag{4.7}$$

Con las definiciones anteriores podemos describir completamente las simetrías de \tilde{D}_h .

Proposición 4.16 *En un equilibrio relativo con simetrías \tilde{D}_h , el cuerpo central está en el eje real si $h = 1$ y en el centro si $h > 1$. Para los cuerpos con masas iguales tenemos lo siguiente:*

- (a) *Si n/h es impar. El equilibrio relativo tiene un h -polígono (4.6) con $\varphi = 0$ y los cuerpos restantes forman $2h$ -polígonos (4.7) con $\varphi \in (0, \pi/h)$.*
- (b) *Si n/h es par. El equilibrio relativo tiene dos h -polígonos (4.6) uno con $\varphi = 0$ y otro con $\varphi = \pi/h$. Además, los cuerpos restantes forman $2h$ -polígonos (4.7) con $\varphi \in (0, \pi/h)$.*

Prueba. Para el cuerpo central tenemos que $x_0 = (\kappa, \kappa)x_0 = \bar{x}_0$, entonces $x_0 \in \mathbb{R}$. Además, como $x_0 = (n/h)(\zeta, \zeta)x_0 = e^{-i2\pi/h}x_0$, entonces $x_0 = 0$ para $h > 1$.

Para los cuerpos restantes usamos la notación $x_j = x_{j+kn}$. Con la notación anterior, las simetrías son

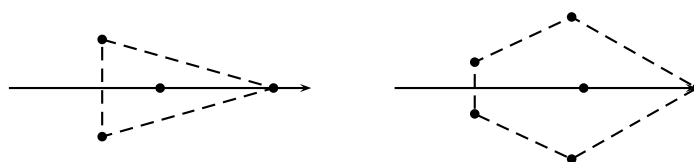
$$(a) \ x_j = (n/h)(\zeta, \zeta)x_j = e^{-i(2\pi/h)}x_{j+n/h} \text{ y } (b) \ x_j = (\kappa, \kappa)x_j = \bar{x}_{-j}.$$

Debido a (a) las posiciones de todos los cuerpos están determinadas por las de los cuerpos $j \in \mathbb{N} \cap (-n/2h, n/2h]$. Además, debido a (b) las posiciones de los cuerpos $j \in \mathbb{N} \cap (-n/2h, n/2h]$ están determinadas por las de los cuerpos $j \in \mathbb{N} \cap [0, (n/2h)]$.

De (a) encontramos un h -polígono para $j \in \{0, (n/2h)\}$, además de (b) tenemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ para $j = 0$ y que $x_{n/2h} \in e^{i\pi/h}\mathbb{R}$ para $j = n/2h$. Además, de (a) y (b) tenemos un $2h$ -polígono para cada $j \in \mathbb{N} \cap (0, (n/2h))$ y en ese caso podemos escoger a la $x_j = e^{i\varphi}r$ con $\varphi \in (0, \pi/h)$, pues un $2h$ -polígono tiene colisión para $\varphi \in \{0, \pi/h\}$. \square

Los equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_n son las homotecias del equilibrio relativo poligonal, pues probamos que \bar{a} es único con $\omega = \mu + s_1$ para $\mu \notin \{0, -s_1\}$.

El grupo \tilde{D}_1 es el grupo generado por (κ, κ) y siempre es un subgrupo de \tilde{D}_n . En las simetrías de \tilde{D}_1 el cuerpo central permanece en el eje real y los otros cuerpos satisfacen lo siguiente:



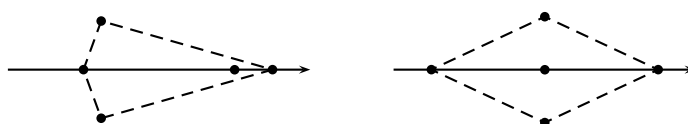
(a) Para $n = 3$.

(b) Para $n = 5$.

Figura 4.2: Simetrías del grupo \tilde{D}_1 .

Si n es impar. Un cuerpo se encuentra en el eje real, los cuerpos restantes forman pares simétricos con respecto al eje real, ejemplos $n = 3$ y $n = 5$.

Si n es par. Dos cuerpos se encuentran en el eje real y no tienen ninguna relación de simetría, los cuerpos restantes forman pares simétricos con respecto al eje real, ejemplos $n = 4$ y $n = 6$.



(a) Simetrías de \tilde{D}_1 .

(b) Simetrías de \tilde{D}_2 .

Figura 4.3: Para $n = 4$.

El grupo \tilde{D}_2 es simplemente el generado por (π, π) y (κ, κ) y es un subgrupo de \tilde{D}_n cuando n es par. En las simetrías de \tilde{D}_2 el cuerpo central permanece en el origen y los otros cuerpos satisfacen lo siguiente:

Si $n/2$ es impar. Dos cuerpos se encuentran en el eje real con posiciones simétricas respecto al eje imaginario. Además, los cuerpos restantes forma cuádruplas simétricas respecto a los dos ejes, ejemplo $n = 6$.

Si $n/2$ es par. Dos cuerpos se encuentran en el eje real con posiciones simétricas respecto al eje imaginario y otros dos cuerpos se encuentran en el eje imaginario con posiciones simétricas respecto al eje real. Además, los cuerpos restantes forman cuádruplas simétricas respecto a los dos ejes, ejemplo $n = 4$.

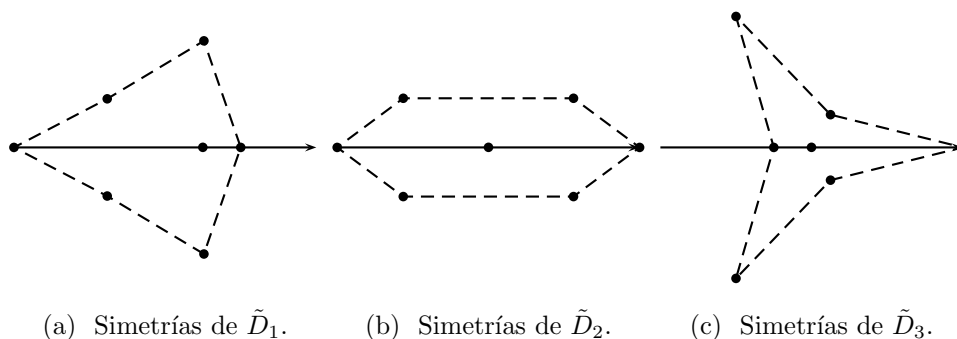


Figura 4.4: Para $n = 6$.

Nuestro último ejemplo es el subgrupo \tilde{D}_3 de \tilde{D}_6 , en ese caso tenemos que $n/h = 2$. Por lo tanto, el cuerpo central permanece en el centro y los otros cuerpos forman dos 3-polígonos que no guardan relación entre ellos, uno con $\varphi = 0$ y el otro con $\varphi = \pi/3$.

4.5. Análisis del espectro $n \geq 3$

En esta sección vamos a analizar los puntos de bifurcación, para lo que necesitamos calcular las matrices A_{ij} .

Proposición 4.17 Sean $\alpha_+ = (\alpha + 1)/2$ y $\alpha_- = (\alpha - 1)/2$, entonces para $n \geq 3$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_{00} &= \mu (s_1 + \mu + \alpha_- n) I, \\ A_{n0} &= -\mu(\alpha_- I + \alpha_+ R) \text{ y} \\ A_{nn} &= (s_1 + \mu)I - \sum_{j=0}^{n-1} A_{nj}. \end{aligned}$$

Además, para $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tenemos que

$$A_{nj} = \frac{1}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}} (-\alpha_- I + \alpha_+ e^{jJ\zeta} R).$$

Prueba. Recordemos que el potencial V es

$$V(x) = (\mu + s_1) \|\bar{\mu}^{1/2} x\|^2 + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \phi_\alpha(\|x_j - x_i\|).$$

Notemos que $\nabla_{x_i} \phi(\|x_i - x_j\|) = -\nabla_{x_j} \phi(\|x_i - x_j\|)$, entonces para $i \neq j$ tenemos

$$A_{ij} = \mu_i \mu_j D_{x_j} \nabla_{x_i} \phi(\|a_i - a_j\|) = -\mu_i \mu_j D_{x_i}^2 \phi(\|a_i - a_j\|).$$

Para A_{ii} tenemos que

$$A_{ii} = (s_1 + \mu) \mu_i I + \sum_{j \neq i} \mu_i \mu_j D_{x_i}^2 \phi(\|a_i - a_j\|) = (s_1 + \mu) \mu_i I - \sum_{j \neq i} A_{ij}.$$

Sea $a_j = (x_j, y_j)$ y $d_{ij} = \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|$, la matriz de segundas derivadas de $\phi_\alpha(d_{ij})$ es

$$D^2 \phi_\alpha(d_{ij}) = \frac{\alpha + 1}{d_{ij}^{\alpha+3}} \begin{pmatrix} (x_i - x_j)^2 & (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) & (y_i - y_j)^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{d_{ij}^{\alpha+1}} I.$$

La distancia de $a_0 = (0, 0)$ a $a_n = (1, 0)$ es $d_{n0} = 1$, entonces

$$A_{n0} = -\mu \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mu(\alpha_- I + \alpha_+ R).$$

Como $\sum_{j=1}^n e^{2jJ\zeta} = 0$ para $\zeta \neq \pi$, entonces

$$-\sum_{j=1}^n A_{0j} = \mu \sum_{j=1}^n e^{jJ\zeta} (\alpha_- I + \alpha_+ R) e^{-jJ\zeta} = \mu n \alpha_-.$$

Por lo tanto

$$A_{00} = (s_1 + \mu) \mu I - \sum_{j=1}^n A_{0j} = \mu (s_1 + \mu + \alpha_- n) I.$$

Sólo nos falta calcular A_{nj} para $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Como $a_n = (1, 0)$ y $a_j = (\cos j\zeta, \sin j\zeta)$, entonces la distancia es

$$d_{nj}^2 = (1 - \cos j\zeta)^2 + \sin^2 j\zeta = 4 \sin^2(j\zeta/2).$$

Usando lo anterior encontramos que

$$A_{nj} = -\frac{\alpha+1}{d_{nj}^{\alpha+3}} \begin{pmatrix} (1 - \cos j\zeta)^2 & -(1 - \cos j\zeta) \sin j\zeta \\ -(1 - \cos j\zeta) \sin j\zeta & (\sin j\zeta)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{d_{nj}^{\alpha+1}} I.$$

Como $\sin^2 j\zeta = (1 - \cos j\zeta)(1 + \cos j\zeta)$ y $d_{nj}^2 = 2(1 - \cos j\zeta)$, entonces

$$A_{nj} = \frac{1}{d_{nj}^{\alpha+1}} \left(I - \frac{\alpha+1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos j\zeta & -\sin j\zeta \\ -\sin j\zeta & 1 + \cos j\zeta \end{pmatrix} \right).$$

De $d_{nj} = 2 \sin(j\zeta/2)$ concluimos que

$$A_{nj} = \frac{1}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}} \left(\frac{1-\alpha}{2} I + \frac{\alpha+1}{2} e^{jJ\zeta} R \right).$$

□

A continuación vamos a encontrar a los bloques B_k explícitamente.

Proposición 4.18 *Definamos a s_k , α_k , β_k y γ_k como*

$$s_k = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(kj\zeta/2)}{\sin^{\alpha+1}(j\zeta/2)},$$

$$\alpha_k = \frac{\alpha_-}{2}(s_{k+1} + s_{k-1}), \beta_k = \alpha_+(s_k - s_1) \text{ y } \gamma_k = \frac{\alpha_-}{2}(s_{k+1} - s_{k-1}).$$

Para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$, los bloques B_k son

$$B_k = \alpha_+ \mu(I + R) + (s_1 + \alpha_k)I - \beta_k R - \gamma_k iJ.$$

Además, $B_{n-1} = \bar{B}_1$ y

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu + n\alpha_-) & -\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \mu\alpha & -\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \mu i \\ -\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \mu\alpha & s_1 + \alpha_1 + (\alpha+1)\mu & \alpha_1 i \\ \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \mu i & -\alpha_1 i & s_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Prueba. De la definición de B_k y A_{nn} tenemos que

$$B_k = (s_1 + \mu)I - A_{n0} + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj}(e^{j(ikI+J)\zeta} - I).$$

Del cálculo de A_{n0} encontramos que $B_k = \alpha_+\mu(I + R) + s_1I + D_k$ con

$$D_k = \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj}(e^{j(ikI+J)\zeta} - I).$$

Primero vamos a realizar algunos cálculos en D_k . De A_{nj} podemos ver que D_k es

$$D_k = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-\alpha_-I + \alpha_+e^{jJ\zeta}R)(e^{j(ikI+J)\zeta} - I)}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}}.$$

El coeficiente de la suma anterior es

$$(-\alpha_-I + \alpha_+e^{jJ\zeta}R)(e^{j(ikI+J)\zeta} - I) = \alpha_-(I - e^{j(ikI+J)\zeta}) - \alpha_+R(e^{-Jj\zeta} - e^{ijk\zeta}).$$

Podemos cancelar términos entre j y $n - j$ de la suma en D_k usando las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} e^{-jJ\zeta} + e^{jJ\zeta} &= 2I \cos j\zeta \text{ y} \\ e^{j(ikI+J)\zeta} + e^{-j(ikI+J)\zeta} &= 2[I \cos jk\zeta \cos j\zeta + iJ \sin jk\zeta \sin j\zeta]. \end{aligned}$$

Entonces la matriz D_k es

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_-(I[1 - \cos kj\zeta \cos j\zeta] - iJ[\sin jk\zeta \sin j\zeta]) - \alpha_+R[\cos j\zeta - \cos jk\zeta]}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}}.$$

Por lo tanto $D_k = \alpha_k I - \beta_k R - \gamma_k iJ$ con

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_- \sum \frac{1 - \cos kj\zeta \cos j\zeta}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}}, \\ \beta_k &= \alpha_+ \sum \frac{\cos j\zeta - \cos jk\zeta}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}}, \\ \gamma_k &= \alpha_- \sum \frac{\sin jk\zeta \sin j\zeta}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Concluimos el resultado para α_k , β_k y γ_k de que

$$\begin{aligned}\alpha_k + \gamma_k &= \alpha_- \sum \frac{1 - \cos((k+1)j\zeta)}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}} = \alpha_{-s_{k+1}}, \\ \alpha_k - \gamma_k &= \alpha_- \sum \frac{1 - \cos((k-1)j\zeta)}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}} = \alpha_{-s_{k-1}}, \\ \beta_k &= \alpha_+ \sum 2 \frac{\sin^2(jk\zeta/2) - \sin^2(j\zeta/2)}{(2 \sin(j\zeta/2))^{\alpha+1}} = \alpha_+(s_k - s_1).\end{aligned}$$

A continuación vamos a calcular a B_1 . Como antes tenemos que

$$\sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(iI+J)\zeta} = \alpha_+(I+R)\mu + (s_1 + \alpha_1)I - \beta_1 R - \gamma_1 iJ,$$

pero en este caso $\beta_1 = 0$ y $\alpha_1 = \gamma_1$, entonces

$$\sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(iI+J)\zeta} = \begin{pmatrix} s_1 + \alpha_1 + 2\alpha_+\mu & \alpha_1 i \\ -\alpha_1 i & s_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Además, como $Rv_1 = \bar{v}_1$, entonces

$$n^{1/2} A_{0n} v_1 = -n^{1/2} \mu (\alpha_- v_1 + \alpha_+ \bar{v}_1) = \mu \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\alpha \\ i \end{pmatrix}.$$

De los cálculos anteriores concluimos el resultado para la matriz B_1 . Además, del resultado para B_1 podemos probar que $B_{n-1} = RB_1R = \bar{B}_1$. \square

A continuación vamos a encontrar los puntos de bifurcación para el potencial general.

Proposición 4.19 Para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$ sean

$$a_k = (s_1 + \alpha_k)^2 - \gamma_k^2 - \beta_k^2 \text{ y } b_k = (\alpha + 1)(s_1 + \alpha_k + \beta_k),$$

entonces los signos σ_k son

$$\sigma_k(\mu) = \text{sgn}(\mu - \mu_k) \text{ con } \mu_k = -a_k/b_k.$$

Además $\sigma_n(\mu) = \text{sgn}(\mu + s_1)$ y $\sigma_1(\mu) = \text{sgn}(b_1\mu(\mu + s_1)(\mu - \mu_1))$ con $\mu_1 = -a_1/b_1$, en donde

$$a_1 = (s_1 + 2\alpha_1)(2s_1 + n\alpha - n) \text{ y } b_1 = (\alpha + 1)(2s_1 + 2\alpha_1 - n).$$

Prueba. Para $k \notin \{1, n/2, n\}$ el determinante de B_k es

$$\det B_k = (\alpha_+ \mu + (s_1 + \alpha_k))^2 - \gamma_k^2 - (\alpha_+ \mu - \beta_k)^2 = b_k \mu + a_k.$$

Usando las definiciones de α_k y β_k tenemos que

$$s_1 + \alpha_k + \beta_k = s_k + (\alpha_-/2)(s_{k+1} + 2s_k + s_{k-1} - 2s_1).$$

En el apéndice probamos que $s_{k+1} + 2s_k + s_{k-1} > 2s_1$, entonces b_k es positivo. Además, para $k = n/2$ tenemos que $\gamma_{n/2} = 0$ y que

$$e_1^T B_{n/2} e_1 = s_1 + \alpha_{n/2} - \beta_{n/2} + (\alpha + 1)\mu.$$

Por lo tanto para $k \in \{2, \dots, n/2\}$ tenemos $\sigma_k(\mu) = \text{sgn}(\mu - \mu_k)$.

Para $k = n$ tenemos $\beta_n = -\alpha_+ s_1$ y $\alpha_n = \alpha_- s_1$, entonces $e_1^T B_n e_1 = (\alpha + 1)(\mu + s_1)$. Por último, para $k = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2 \det B_1}{\mu(\mu + s_1)} &= \mu(\alpha + 1)(2s_1 + 2\alpha_1 - n) + (s_1 + 2\alpha_1)(2s_1 + n\alpha - n) \\ &= b_1(\mu - \mu_1). \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos el resultado. □

En $-s_1$ existe un cambio de signo de σ_1 y uno de σ_n , entonces $\eta_1(-s_1) = 0$. A pesar de que η_1 es cero, existe bifurcación en $\mu = -s_1$ con simetrías \tilde{D}_1 . Como las coordenadas no están rotando para $\omega = 0$, entonces la bifurcación es vertical y está formada por las translaciones del equilibrio $(0 + b, e^{i\zeta} + b, \dots, e^{in\zeta} + b)$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

Como sólo σ_n cambio de signo en $\mu = -s_1$, entonces $\eta_n(-s_1) = \pm 2$. Por lo tanto en $\mu = -s_1$ existe una bifurcación con grupo de isotropía \tilde{D}_n . La bifurcación es vertical y está compuesta por las homotecias $(0, e^{i\zeta} b, \dots, e^{in\zeta} b)$ para $b \in \mathbb{R}$.

Como sólo σ_1 cambia de signo en $\mu = 0$, entonces $\eta_1(0) = \pm 2$. Por lo tanto en $\mu = 0$ existe una bifurcación con grupo de isotropía \tilde{D}_1 . Como el cuerpo central no tiene masa para $\mu = 0$, la bifurcación es vertical y está compuesta de las soluciones $(b, e^{i\zeta}, \dots, e^{in\zeta})$ para $b \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, las verdaderas bifurcaciones se encuentran en μ_k para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$. Del teorema de bifurcación local y global tenemos lo siguiente.

Corolario 4.20 *Sea h el máximo común divisor de k y n , si μ_k es distinto de $-s_1$, 0 y de los μ_j para los otros $j \in [1, n/2] \cap h\mathbb{N}$, entonces en μ_k existe una bifurcación global de equilibrios relativos con simetrías exactas \tilde{D}_h .*

Por bifurcación global entendemos que si la bifurcación es admisible, entonces la rama retorna a otros puntos de bifurcación y la suma de los grados locales es cero. La bifurcación es inadmisibles si el parámetro μ o la norma van a infinito o si las soluciones van a colisión. Por simetrías exactas entendemos que la bifurcación local tiene simetrías \tilde{D}_h , pero no simetrías \tilde{D}_p para h que divide p .

Observación 4.21 *Supongamos que la bifurcación global en μ_k se extiende hasta $\mu = 0$, en ese caso existe un equilibrio relativo con simetrías \tilde{D}_h para $\mu = 0$. En ese caso, de la continuidad de V en $\mu = 0$ encontramos un equilibrio relativo de los n -cuerpos con masas iguales y con simetrías \tilde{D}_h . Es decir, un equilibrio relativo formado por n/h polígonos regulares de h lados con una reflexión.*

4.5.1. Vórtices

A continuación vamos a analizar brevemente los puntos de bifurcación para el problema de los vórtices. En el apéndice encontramos que $s_k = k(n - k)/2$ para $\alpha = 1$. Usando las definiciones para $\alpha = 1$ tenemos que $\alpha_- = 0$, $\alpha_+ = 1$,

$$\alpha_k = 0, \gamma_k = 0 \text{ y } \beta_k = s_k - s_1.$$

Como para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$ tenemos que $\mu_k = s_k/2 - s_1$, entonces

$$\mu_k = (-k^2 + nk - 2n + 2) / 4.$$

Además, para $k = 1$ tenemos que

$$\mu_1 = s_1^2 = (n - 1)^2 / 4.$$

Por lo tanto, el punto de bifurcación $\mu_2 = -1/2$ siempre es negativo. Además $\mu_3 = (n - 7)/4$ es positiva para $n \in \{8, 9, \dots\}$ y negativo para $n = 6, 7$. Como μ_k es creciente en n para $k \geq 3$, entonces μ_k siempre es positiva para $k \geq 4$. Además, los puntos de bifurcación μ_k son crecientes en k para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$.

Por lo tanto, en el problema de los vórtices para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$, tiene una bifurcación global de equilibrios relativos a partir de μ_k con simetrías exactas \tilde{D}_h , en donde h es el máximo común divisor de k y n .

En [MS88] se prueba la bifurcación local de μ_k con formas normales y análisis numérico.

4.5.2. Cuerpos

En el problema de los $n + 1$ cuerpos las ecuaciones están bien definidas para las masas $\mu \in [-s_1, \infty)$. Para el problema de los $n + 1$ -cuerpos tenemos $\alpha = 2$, usando las definiciones anteriores tenemos que $\alpha_- = 1/2$, $\alpha_+ = 3/2$,

$$\alpha_k = (s_{k+1} + s_{k-1})/4, \beta_k = 3(s_k - s_1)/2 \text{ y } \gamma_k = (s_{k+1} - s_{k-1})/4.$$

En este problema no podemos calcular explícitamente las sumas s_k . Sin embargo, en el apéndice probamos que s_k es creciente para $k \in \{0, \dots, n/2\}$ y que s_k satisface la desigualdad $s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1} < 2s_1$. Lo anterior nos va a servir para probar que las ecuaciones están bien definidas en los puntos de bifurcación μ_k .

Proposición 4.22 *Para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$ tenemos que $s_1 b_k - a_k > 0$ y $\mu_k > -s_1$.*

Prueba. De las definiciones de a_k y b_k encontramos que

$$\begin{aligned} 4s_1 b_k &= 3s_1 s_{k-1} + 3s_1 s_{k+1} - 6s_1^2 + 18s_1 s_k \text{ y} \\ 4a_k &= 2s_1 s_{k-1} + 2s_1 s_{k+1} - 5s_1^2 - 9s_k^2 + 18s_1 s_k + s_{k-1} s_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$4(s_1 b_k - a_k) = s_1 s_{k+1} + s_1 s_{k-1} + 9s_k^2 - s_1^2 - s_{k-1} s_{k+1}.$$

Usando la desigualdad $-s_{k+1} > -2s_k + s_{k-1} - 2s_1$ concluimos que

$$4(s_1 b_k - a_k) > s_{k+1} s_1 + s_{k-1}^2 + 9s_k^2 - s_1^2 - s_1 s_{k-1} - 2s_k s_{k-1} > 0.$$

□

En el apéndice probamos que $s_k/s_1 \rightarrow k^2$ y que $s_1/n \rightarrow \infty$ cuando n tiende a infinito. A continuación vamos a encontrar a los signos de los puntos μ_k con un cálculo asintótico.

Proposición 4.23 *Para cada $k \geq 2$, el punto de bifurcación μ_k es positivo si n es suficientemente grande. Además, el punto de bifurcación μ_1 es negativo si n es suficientemente grande.*

Prueba. Para $k \geq 2$ tenemos que $\beta_k/s_1 \rightarrow 3(k^2 - 1)/2$, $\alpha_k/s_1 \rightarrow (k^2 + 1)/2$ y $\gamma_k/s_1 \rightarrow k$ cuando $n \rightarrow \infty$. De las definiciones de α_k , β_k y γ_k tenemos que $b_k/s_1 \rightarrow 6k^2$ y que

$$a_k/s_1^2 = (1 + \alpha_k/s_1)^2 - (\beta_k/s_1)^2 - (\gamma_k/s_1)^2 \rightarrow -k^2(2k^2 - 5).$$

Por lo tanto $\mu_k/s_1 \rightarrow (2k^2 - 5)/6$. Como $(2k^2 - 5)$ es positivo para $k \geq 2$, entonces μ_k es positiva si n es suficientemente grande. Además, para $k = 1$ tenemos que $\alpha_1/s_1 \rightarrow 1$, entonces

$$\mu_1/s_1 = -\frac{(s_1 + 2\alpha_1)(2s_1 + n)}{3(2s_1 + 2\alpha_1 - n)} \rightarrow -1/2.$$

□

Por lo tanto, en el problema de los $n + 1$ -cuerpos para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$, tiene una bifurcación global de equilibrios relativos a partir de μ_k con simetrías exactas \tilde{D}_h , en donde h es el máximo común divisor de k y n .

En [MS88] se prueba la bifurcación local en μ_k con un análisis numérico de las μ_k .

Observación 4.24 *Se pueden encontrar una tabla de los μ_k en el artículo [MS88]. Con ese análisis numérico encontramos que $\mu_1 \geq 0$ para $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, que $\mu_2 \geq 0$ para $n \in \{10, 11, \dots\}$ y que $\mu_k \geq 0$ para todo $k \geq 3$.*

Con un análisis numérico también encontramos que las μ_k son crecientes en k para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$, creemos que se puede probar lo anterior usando que los s_k son crecientes en k . En el límite cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos $(\mu_{k+1} - \mu_k)/s_1 \rightarrow (2k + 1)/3$, por lo que al menos $\mu_{k+1} > \mu_k$ para n suficientemente grande.

4.6. Análisis del espectro $n = 2$

Las representaciones irreducibles para $n = 2$ son diferentes a las que definimos para $n \geq 3$ debido a que $\zeta = \pi$. Para $k = 2$ definimos el isomorfismo $T_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow V_2$ como para $n \geq 3$ con

$$T_2(z) = (0, -2^{-1/2}z, 2^{-1/2}z) \text{ y} \\ V_2 = \{(0, -z, z) : z \in \mathbb{C}^2\}.$$

Sin embargo, para $k = 1$ tenemos que definir al isomorfismo $T_1 : \mathbb{C}^4 \rightarrow V_1$ como

$$T_1(v, w) = (v, 2^{-1/2}w, 2^{-1/2}w) \text{ con} \\ V_1 = \{(v, w, w) : v, w \in \mathbb{C}^2\}.$$

Podemos probar como en los casos $n \geq 3$ que la acción de $\zeta \in D_2$ es $\rho(\zeta)T_2(z) = T_2(-z)$ y $\rho(\zeta)T_1(v, w) = T_1(v, w)$. Además, la acción de $\zeta \in S^1$ en V_k es $e^{-\zeta J}T_2(z) = T_2(-z)$ y $e^{-\zeta J}T_1(v, w) = T_1(-v, -w)$ pues $e^{-\zeta J} = -I$. Finalmente, como la acción de $\kappa \in D_2$ es trivial, entonces $(\kappa, \kappa)T_2(z) = T_2(Rz)$ y $(\kappa, \kappa)T_1(v, w) = T_1(Rv, Rw)$. Por lo tanto, la acción de los elementos de \tilde{D}_2 en los subespacios $z_k \in V_k$ es

$$(\zeta, \zeta)z_2 = z_2 \text{ y } (\kappa, \kappa)z_2 = Rz_2, \\ (\zeta, \zeta)z_1 = -z_1 \text{ y } (\kappa, \kappa)z_1 = \text{diag}(R, R)z_1.$$

De lo anterior vemos que los V_k son los subespacios de representaciones irreducibles del grupo \tilde{Z}_2 que es generado por (ζ, ζ) , lo anterior nos va servir para encontrar la bifurcación periódica. Sin embargo, el subespacio V_1 tiene en realidad dos representaciones de \tilde{D}_2 una donde (κ, κ) actúa como la identidad y otra donde actúa como menos la identidad.

De las simetrías (4.1) podemos probar que las matrices A_{ij} son diagonales y que satisfacen $A_{11} = A_{22}$, $A_{21} = A_{12}$ y $A_{01} = A_{10} = A_{02} = A_{20}$. Por lo tanto

$$D^2V(\bar{a}) = A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{20} & A_{20} \\ A_{20} & A_{22} & A_{21} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Además, de los cálculos que teníamos para A_{ij} encontramos que

$$A_{00} = (s_1 + \mu)\mu I - 2A_{20}, \quad A_{20} = -\mu \text{diag}(\alpha, -1), \\ A_{21} = -\frac{1}{2^{\alpha+1}} \text{diag}(\alpha, -1) \text{ y } A_{22} = (s_1 + \mu)I - (A_{20} + A_{21}).$$

El hecho de que el caso $n = 2$ sea distinto a los casos $n \geq 3$ se manifiesta en que la matriz A_{00} es diagonal para $n = 2$ mientras que $A_{00} = \lambda I$ para $n \geq 3$.

La transformación $Pz = T_1(z_1) + T_2(z_2)$ con $z_1 \in \mathbb{C}^4$ y $z_2 \in \mathbb{C}^2$ es ortogonal, entonces $P^{-1}D^2V(\bar{a})P = \text{diag}(B_1, B_2)$. Con el cálculo de A podemos probar que $AT_2(z) = T_2(B_2z)$ con $B_2 = -A_{21} + A_{22}$. Como $s_1 = 1/2^\alpha$, entonces $B_2 = (\alpha + 1)(\mu + s_1)\text{diag}(1, 0)$ y su análisis coincide con lo que

encontramos para $n \geq 3$. Por lo que para el caso $n = 2$ sólo necesitamos estudiar el bloque B_1 para la bifurcación de equilibrios relativos.

Para $k = 1$ podemos probar que $AT_1(z) = T_1(B_1z)$ con

$$B_1 = \begin{pmatrix} A_{00} & 2^{1/2}A_{20} \\ 2^{1/2}A_{20} & A_{22} + A_{21} \end{pmatrix}.$$

Además, de los cálculos de A_{ij} encontramos que B_1 es igual a

$$\begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu + 2\alpha) & 0 & -\sqrt{2}\alpha\mu & 0 \\ 0 & \mu(s_1 + \mu - 2) & 0 & \sqrt{2}\mu \\ -\sqrt{2}\alpha\mu & 0 & s_1 + (\alpha + 1)\mu & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\mu & 0 & s_1 \end{pmatrix}.$$

Los teoremas de bifurcación de equilibrios relativos sirven también para el caso $n = 2$, sólo que necesitamos estudiar el bloque B_1 reducido al subespacio de puntos fijos de (κ, κ) . Ese subespacio corresponde a la coordenada uno y tres por lo que

$$B_1|_{V_1^{(\kappa, \kappa)}} = \begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu + 2\alpha) & -\sqrt{2}\alpha\mu \\ -\sqrt{2}\alpha\mu & s_1 + (\alpha + 1)\mu \end{pmatrix}.$$

El determinante del bloque anterior es $\mu(\mu + s_1)(2\alpha + \mu + s_1 + \alpha\mu)$. Por lo tanto, en $\mu = 0, -s_1$ existe una bifurcación que conocemos explícitamente como en los casos $n \geq 3$. Además, en

$$\mu_1 = -(2\alpha + s_1)/(\alpha + 1)$$

existe una verdadera bifurcación de equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_1 .

Para los vórtices $\alpha = 1$ y $s_1 = 1/2$, entonces $\mu_1 = -5/4$. Para los cuerpos $\alpha = 2$ y $s_1 = 1/4$, por lo que las ecuaciones no están definidas en $\mu_1 = -17/12$.

4.7. Comentarios

En este capítulo analizamos la bifurcación de equilibrios relativos a partir del equilibrio poligonal. Nosotros usamos a la razón de masas entre los cuerpos μ para estudiar bifurcación de equilibrios relativos. De hecho, realizamos

un análisis de la bifurcación en un potencial general que incluía al problema de los $n + 1$ -cuerpos y de los vórtices como casos particulares.

Nosotros probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ existe una única razón μ_k donde el equilibrio poligonal tiene bifurcación de equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_h , donde h es el máximo común divisor de n y k . Los equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_h están formados por n/h polígonos regulares de h lados, los cuales además son simétricos respecto a una reflexión.

En el artículo [MS88], usando formas normales y un cambio de variables debido a Palmore, se prueba la bifurcación local que encontramos a partir de la razón μ_k para el problema de los $n + 1$ -cuerpos y de los vórtices. Nuestra aportación consiste en que probamos la bifurcación global y en que dimos un análisis asintótico de los μ_k . Además, nuestra metodología respecto a la de [MS88] es completamente distinta: para probar la bifurcación nosotros usamos grado en espacios de puntos fijos y un cambio de variables que surge de forma natural de seguir las representaciones irreducibles.

Desde Lagrange se conoce para tres cuerpos con masas generales que el único equilibrio relativo es el triángulo, en [SM71] se encuentra un estudio de su estabilidad. Por tal razón no existe bifurcación de equilibrios relativos para $n = 2$ con μ positiva. En el artículo [Alb95] se prueba para cuatro cuerpos con masas iguales que sólo existen cuatro configuraciones centrales en el plano: el cuadrado (equilibrio poligonal con $n = 4$ y $\mu = 0$), el triángulo con un cuerpo en el centro (equilibrio poligonal con $n = 3$ y $\mu = 1$), un equilibrio colineal y un equilibrio en forma de triángulo isósceles con en centro (equilibrio relativo con simetrías \tilde{D}_1 para $n = 3$ y $\mu = 1$). Por lo anterior la bifurcación con simetrías \tilde{D}_1 que encontramos a partir de μ_1 para $n = 3$ podría conectarse con el triángulo isósceles.

También vimos que si la bifurcación global de μ_k se extiende hasta $\mu = 0$, entonces existe un equilibrio relativo de n cuerpos iguales formado por $\bar{n} = n/h$ polígonos regulares de h lados con una reflexión. Ese tipo de equilibrios se conocen como polígonos anidados [CL10].

Capítulo 5

Bifurcación periódica: cuerpos, vórtices, filamentos y cargas

El objetivo del capítulo anterior fue probar la bifurcación de equilibrios relativos a partir del equilibrio relativo poligonal. En este capítulo vamos a analizar la bifurcación de soluciones periódicas a partir del equilibrio relativo poligonal para el problema de los $n + 1$ -cuerpos. También vamos a analizar el problema de ondas viajeras en filamentos casi paralelos, el problema de los vórtices y el problema de las cargas.

5.1. Planteamiento del problema

En el capítulo anterior estudiamos el potencial

$$V_\alpha(u) = \frac{1}{2}\omega \|\bar{\mu}^{1/2}u\|^2 + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \phi_\alpha(\|u_j - u_i\|),$$

en donde ϕ_α es una función tal que $\phi'_\alpha(x) = -1/x^\alpha$. Vimos que los puntos críticos de V son equilibrios relativos del problema de los vórtices para $\alpha = 1$ y del problema de los $n + 1$ -cuerpos para $\alpha = 2$. También probamos que $\bar{a} = (0, e^{i\zeta}, \dots, e^{in\zeta})$ es un equilibrio relativo para $\omega = s_1 + \mu$.

En este capítulo vamos a analizar la bifurcación de soluciones periódicas para las siguientes ecuaciones:

- (a) En el capítulo anterior encontramos que las ecuaciones de $n + 1$ **vórtices** son

$$\bar{\mu}\mathcal{J}\dot{u} = \nabla V_1(u).$$

- (b) En el capítulo anterior encontramos que las ecuaciones de $n+1$ **filamentos** casi paralelos son $\bar{\mu}\mathcal{J}\partial_t\bar{u} + \bar{\mu}^2\partial_s^2\bar{u} = \nabla V_1(u)$. Nosotros buscaremos ondas viajeras de la forma $u(t, s) = u(2\gamma t + x)$, por lo que las ecuaciones para ondas viajeras en filamentos casi paralelos son

$$\bar{\mu}^2\ddot{u} + 2\gamma\bar{\mu}\mathcal{J}\dot{u} = \nabla V_1(u).$$

- (c) En el capítulo anterior encontramos que las ecuaciones para $n+1$ **cuerpos** son

$$\bar{\mu}\ddot{u} + 2\sqrt{\omega}\bar{\mu}\mathcal{J}\dot{u} = \nabla V_2(u).$$

La ecuación

$$\bar{\mu}^{2\beta}\ddot{u} + 2\gamma\bar{\mu}\mathcal{J}\dot{u} = \nabla V_\alpha(u) \tag{5.1}$$

generaliza a las dos últimas ecuaciones, pues para $\beta = 1/2$, $\gamma = \sqrt{\omega}$ y $\alpha = 2$ obtenemos la ecuación (c) de los cuerpos y para $\beta = 1$ y $\alpha = 1$ obtenemos la ecuación (b) de los filamentos.

Nuestro propósito en este capítulo es encontrar soluciones periódicas a partir del equilibrio \bar{a} . En lo sucesivo sólo vamos a indicar las diferencias para probar la bifurcación en la ecuación (a) con respecto a la ecuación (5.1).

Observación 5.1 *De hecho, podemos usar el grado ortogonal para buscar filamentos periódicos en el tiempo y en la altura. Sin embargo, cuando hacemos la reducción global nos aparece el problema de pequeños divisores y la reducción global de Liapunov-Schmidt ya no nos sirve.*

El operador $\mathcal{D}(\nu)$ para la ecuación (5.1) es

$$\mathcal{D}(\nu)x = -\bar{\mu}^{2\beta}\nu^2\ddot{x} - 2\gamma\nu\bar{\mu}\mathcal{J}\dot{x}.$$

El conjunto de colisión es $\Psi = \{x \in \mathbb{R}^{2(n+1)} : x_i = x_j\}$ y las trayectorias libres de colisión son

$$H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{2(n+1)} \setminus \Psi) = \{x \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{2(n+1)}) : x_i(t) \neq x_j(t)\}.$$

El operador $f : H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{2(n+1)} \setminus \Psi) \rightarrow L_{2\pi}^2$ es

$$f(x, \nu) = \mathcal{D}(\nu)x + \nabla V_\alpha(x).$$

En el capítulo anterior probamos que el potencial $\nabla V_\alpha(x)$ es $S_n \times O(2)$ -equivariante. De la definición (4.2) tenemos que la acción de S_n corresponde a permutar los cuerpos con masas iguales. Además, la acción de $O(2) = S^1 \cup \kappa S^1$ corresponde a rotar y reflejar las posiciones de todos los cuerpos. Como \mathcal{J} conmuta con $\rho(\theta) = e^{-\mathcal{J}\theta}$, el operador $\mathcal{D}(\nu)$ es Γ -equivariante con

$$\Gamma = \mathbb{Z}_n \times S^1.$$

Por lo tanto f es G -equivariante con $G = \Gamma \times S^1$. Como los generadores infinitesimales de G son

$$Ax = \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} x(t + \varphi) = \partial_t x \text{ y } A_1 x = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} e^{-\mathcal{J}\theta} x = -\mathcal{J}x,$$

y el gradiente ∇V_α es ortogonal a $A_1 x$, entonces

$$\begin{aligned} \langle f(x), \dot{x} \rangle_{L^2_{2\pi}} &= -\frac{\nu^2}{2} \|\bar{\mu}^\beta \dot{x}\|_0^2 \Big|_0^{2\pi} - 2\gamma\nu \langle \mathcal{J} \bar{\mu}^{1/2} \dot{x}, \bar{\mu}^{1/2} \dot{x} \rangle_{L^2_{2\pi}} + V_\alpha(x) \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ \langle f(x), \mathcal{J}x \rangle_{L^2_{2\pi}} &= \nu^2 \langle \bar{\mu}^\beta \dot{x}, \mathcal{J} \bar{\mu}^\beta \dot{x} \rangle_{L^2_{2\pi}} - 2\gamma\nu \|\bar{\mu}x\|_0^2 \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \langle \nabla V_\alpha, \mathcal{J}x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto el operador f es G -ortogonal.

Sea $\tilde{\mathbb{Z}}_n$ el subgrupo generado por (ζ, ζ) . Como \bar{a} no depende del tiempo, el grupo de isotropía de \bar{a} es

$$G_{\bar{a}} = \tilde{\mathbb{Z}}_n \times S^1.$$

Además, la órbita de \bar{a} es isomorfa a $G/G_{\bar{a}} \simeq S^1$, por lo que el núcleo de $D^2 f(\bar{a})$ tiene que ser generado por $A_1 \bar{a} = -\mathcal{J} \bar{a}$.

Para los vórtices, el operador $\mathcal{D}(\nu) = -\nu \bar{\mu} \mathcal{J} \dot{x}$ está definido en las trayectorias libres de colisión $H^1_{2\pi}(\mathbb{R}^{2(n+1)} \setminus \Psi)$ y todas las otras definiciones son equivalentes.

Observación 5.2 Como las matrices \mathcal{J} y \mathcal{R} satisfacen $\mathcal{R}\mathcal{J} = -\mathcal{J}\mathcal{R}$, el operador $f(x)$ es en realidad H -equivariante con $H = S_n \times (T^2 \cup \kappa T^2)$, en donde la acción es $\kappa x(t) = \mathcal{R}x(-t)$ y $(\theta, \varphi)x = \rho(\theta)x(t + \varphi)$ para $(\theta, \varphi) \in T^2$. Para $\gamma = 0$, el operador f es G -equivariante con $G = S_n \times O(2) \times O(2)$, por lo que sólo estamos usando la parte abeliana del grupo G .

5.2. Teorema de bifurcación

A continuación vamos a usar los resultados que probamos en los capítulos dos y cuatro. Para hacer la reducción global de Liapunov-Schmidt necesitamos verificar la hipótesis (2.1). La matriz $-\bar{\mu}^{2\beta}I$ es invertible para $\mu \neq 0$. Para $\mu = 0$ el cuerpo central tiene masa cero, quitando la coordenada correspondiente al cuerpo central tenemos que el operador es $\mathcal{D}(\nu)x = -\nu^2\ddot{x} - 2\gamma\nu\mathcal{J}\dot{x}$. Por lo tanto, en los dos casos podemos realizar la reducción global de Liapunov-Schmidt.

Del corolario (2.3) encontramos que la linealización de la función de bifurcación en \bar{a} tiene bloques $M(l\nu)$ con

$$M(\lambda) = \bar{\mu}^{2\beta}\lambda^2I - 2\gamma\bar{\mu}\lambda(i\mathcal{J}) + D^2V_\alpha(\bar{a}).$$

Además, las primeras dos coordenadas de $M(\lambda)$ no aparecen cuando $\mu = 0$. Para el problema de los vórtices el bloque es $M(\lambda) = -\bar{\mu}\lambda(i\mathcal{J}) + D^2V_\alpha(\bar{a})$.

En el capítulo anterior encontramos que los espacios de representaciones irreducibles de $\Gamma_{\bar{a}} = \tilde{\mathbb{Z}}_n$ son los espacios V_k definidos en (4.5). Con el cambio de variables P del capítulo anterior tenemos que la matriz es diagonal por bloques

$$P^{-1}M(\lambda)P = \text{diag}(M_1(\lambda), \dots, M_n(\lambda)),$$

en donde las matrices M_k satisfacen

$$M(\lambda)T_k(z) = T_k(M_k z).$$

En la proposición (4.8) encontramos los bloques B_k que satisfacen $D^2V(\bar{a})T_k(z) = T_k(B_k z)$ y en la proposición (4.18) calculamos que $B_{n-k} = \bar{B}_k$ con

$$B_k = \alpha_+\mu(I + R) + (s_1 + \alpha_k)I - \beta_k R - \gamma_k iJ \text{ para } k \in \{2, \dots, n-2, n\} \text{ y}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu + n\alpha_-) & -(n/2)^{1/2}\mu\alpha & -(n/2)^{1/2}\mu i \\ -(n/2)^{1/2}\mu\alpha & s_1 + \alpha_1 + 2\alpha_+\mu & \alpha_1 i \\ (n/2)^{1/2}\mu i & -\alpha_1 i & s_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

A continuación vamos a encontrar las matrices $M_k(\lambda)$ en términos de los bloques B_k .

Proposición 5.3 *Las matrices M_k satisfacen $M_k(\lambda) = \bar{M}_{n-k}(-\lambda)$ con*

$$M_k(\lambda) = \lambda^2 I - 2\gamma\lambda(iJ) + B_k \text{ para } k \in \{2, \dots, n-2, n\} \text{ y}$$

$$M_1(\lambda) = \lambda^2 \text{diag}(\mu^{2\beta}, I) - 2\gamma\lambda \text{diag}(\mu, iJ) + B_1,$$

donde el primer renglón y columna de M_1 no existen para $\mu = 0$.

Prueba. Para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$, la matriz $\bar{\mu}$ en V_k es $\bar{\mu}T_k z = T_k z$. Además, la matriz $i\mathcal{J}$ satisface $(i\mathcal{J})T_k z = T_k(iJ)z$. Por lo tanto $M(\lambda)T_k(z) = T_k(M_k z)$ con $M_k = \lambda^2 I - 2\gamma\lambda(iJ) + B_k$.

Sólo nos falta calcular las matrices M_k para $k \in \{1, n-1\}$. La matriz $\bar{\mu}$ en el subespacio V_1 es $\bar{\mu}T_1(z) = T_1(\text{diag}(\mu, 1, 1)z)$. Además, como $(iJ)v_1 = v_1$, entonces la matriz $i\mathcal{J}$ satisface $(i\mathcal{J})T_1(z) = T_1(\text{diag}(1, iJ)z)$. Por lo tanto $M(\lambda)T_1(z) = T_1(M_1 z)$ con M_1 como en la proposición. Del mismo modo podemos usar la igualdad $(iJ)v_2 = -v_2$, para probar que $(i\mathcal{J})T_{n-1}(z) = T_{n-1}(\text{diag}(-1, iJ)z)$ y

$$M_{n-1}(\lambda) = \lambda^2 \text{diag}(\mu^{2\beta}, I) - 2\gamma\lambda \text{diag}(-\mu, iJ) + B_{n-1}.$$

Finalmente, usamos la igualdad $B_{n-k} = \bar{B}_k$ para probar que $M_{n-k}(\lambda) = \bar{M}_k(-\lambda)$. \square

Para el problema de los vórtices podemos probar lo siguiente.

Proposición 5.4 *En el problema de los vórtices tenemos que $M_k(\lambda) = \bar{M}_{n-k}(-\lambda)$ con*

$$\begin{aligned} M_k(\lambda) &= -\lambda(iJ) + B_k \text{ para } k \in \{2, \dots, n-2, n\} \text{ y} \\ M_1(\lambda) &= -\lambda \text{diag}(\mu, iJ) + B_1, \end{aligned}$$

en donde el primer renglón y columna de M_1 no existe para $\mu = 0$.

En el capítulo anterior probamos que el núcleo de $M_k(0) = B_k$ está generado por $A_1 \bar{a}$ para $\mu \notin \{-s_1, \mu_k : k = 1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto tenemos que excluir a los puntos $-s_1$ y μ_k del análisis de bifurcación periódica (2.5).

La acción de $(\zeta, \zeta, \varphi) \in \tilde{\mathbb{Z}}_n \times S^1$ en V_k es $\rho(\zeta, \zeta, \varphi) = e^{ik\zeta} e^{i\ell\varphi}$. Por lo que el grupo de isotropía en el bloque $M_k(\nu)$ es el grupo G_k generado por

$$(\zeta, \zeta, -k\zeta) \in \tilde{\mathbb{Z}}_n \times S^1.$$

De la definición (2.6) tenemos que

$$\eta_k(\lambda_0) = \sigma \{n_k(\lambda_0 - \rho) - n_k(\lambda_0 + \rho)\}$$

con $n_k(\lambda)$ el índice de Morse de $M_k(\lambda)$. Como el espacio de puntos fijos de $G_{\bar{a}}$ es V_n y el generador del núcleo es $A_1 \bar{a} = T_n(-n^{1/2}e_2)$, entonces

$$\sigma = \text{sgn}(e_1^T B_n e_1).$$

De los teoremas (2.8) y (2.12) podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 5.5 *Si $\eta_k(\nu_0)$ es distinto de cero, entonces en ν_0 existe una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k .*

5.3. Simetrías

Como $(\zeta, \zeta, -k\zeta) \in G_k$, una solución con simetría G_k debe satisfacer

$$x(t) = e^{-i\zeta} \rho(\zeta) x(t - k\zeta).$$

Para describir las simetrías vamos a usar el isomorfismo natural entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 .

Observación 5.6 Si x es una solución con simetrías G_k , entonces $x(-t)$ es una solución con simetrías G_{n-k} . De hecho, los espectros que originan bifurcación con simetrías G_k y G_{n-k} están relacionados por $M_{n-k}(\lambda) = \bar{M}_k(-\lambda)$. Por lo tanto, sólo necesitamos describir las simetrías de G_k para $k \in \{1, \dots, n/2, n\}$.

A continuación vamos a describir las simetrías de G_k para $k \in \{1, \dots, n/2, n\}$. Para cada k fijo, sea h el máximo común divisor de n y k , definimos a \bar{n} como $\bar{n} = n/h$ y a \bar{k} como $\bar{k} = k/h$.

Para el cuerpo central x_0 de $x = (x_0, \dots, x_n)$ tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.7 Para $h > 1$ el cuerpo central permanece en el centro $x_0(t) = 0$ y para $h = 1$ tenemos que $x_0(t + \zeta) = e^{-ik^{-1}\zeta} x_0(t)$, donde k^{-1} es tal que $k^{-1}k = 1$ modulo n .

Prueba. Como $\rho(\zeta)x_0 = x_0$, el cuerpo central satisface

$$x_0(t) = e^{-i(l\zeta)} x_0(t - k(l\zeta)).$$

Como $k(\bar{n}\zeta) = 2\pi\bar{k}$ y $\bar{n}\zeta = 2\pi/h$, entonces para $h > 1$ el cuerpo central satisface

$$x_0(t) = e^{-i(\bar{n}\zeta)} x_0(t - k(\bar{n}\zeta)) = e^{-i(2\pi/h)} x_0(t) = 0.$$

Además, para $h = 1$ el cuerpo central satisface

$$x_0(t) = e^{-i(k^{-1}\zeta)} x_0(t - k(k^{-1}\zeta)) = e^{-i(k^{-1}\zeta)} x_0(t - \zeta)$$

con k^{-1} tal que $k^{-1}k = 1$ modulo n . □

Por lo tanto para $h = 1$, la posición del cuerpo central está determinada por la posición en el intervalo de tiempo $[0, \zeta)$. Además, en ese intervalo $[0, \zeta)$, el cuerpo central se mueve del punto $x_0(0)$ al punto $x_0(\zeta) = e^{-ik^{-1}\zeta} x_0(0)$.

Para describir los cuerpos restantes usamos la notación $x_j = x_{j+kn}$. Con esa notación tenemos que $\rho(\zeta)x_j = x_{j+1}$, entonces los cuerpos x_j para $j \in \{1, \dots, n\}$ satisfacen

$$x_{j+1}(t) = e^{ij\zeta} x_j(t + jk\zeta).$$

Podemos decir que todos los cuerpos con masas iguales siguen la misma trayectoria pero con un desfase temporal y con un rotación espacial.

Como las simetrías de G_n son $x_0(t) = 0$ y $x_{j+1}(t) = e^{ij\zeta} x_j(t)$, entonces el cuerpo central permanece en el centro y los otros cuerpos forman un polígono regular todo el tiempo, ejemplo $n = 3$.

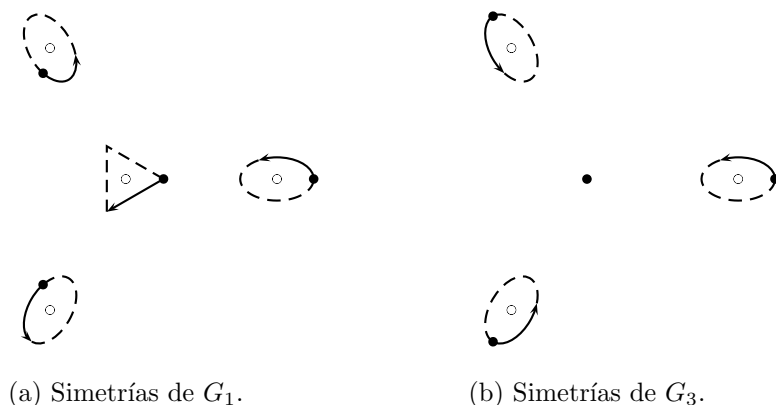


Figura 5.1: Para $n = 3$.

Las simetrías de G_1 son $x_0(t + \zeta) = e^{-i\zeta} x_0(t)$ y $x_{j+1}(t) = e^{ij\zeta} x_j(t + j\zeta)$. Por lo que el cuerpo central se mueve ordenadamente entre el intervalo de tiempo $[0, \zeta)$ y la rotación espacial $e^{-i\zeta}$. Los otros cuerpos siguen la misma órbita con el mismo orden entre la fase y la rotación espacial, ejemplo $n = 3$.

Las simetrías de G_k para $h = 1$ son $x_0(t + \zeta) = e^{-ik^{-1}\zeta} x_0(t)$ y $x_{j+1}(t) = e^{ij\zeta} x_j(t + j(k\zeta))$, por lo que las simetrías en ese caso son similares a las de G_1 , pero con una permutación entre la fase y la rotación espacial. Con el fin de ejemplificar el comentario anterior, podemos contrastar los casos $k = 1$ y $k = 2$ para $n = 5$. Como para $k = 2$ tenemos que $k^{-1} = 3$ en \mathbb{Z}_5 , entonces el cuerpo central recorre en orden los siguientes puntos $x_0(\zeta) = e^{-3i\zeta} x_0$, $x_0(2\zeta) = e^{-i\zeta} x_0$, $x_0(3\zeta) = e^{-4i\zeta} x_0$ y $x_0(4\zeta) = e^{-2i\zeta} x_0$. Además, las soluciones de los cuerpos con masas iguales son $x_1(t)$, $e^{i\zeta} x_1(t + 2\zeta)$, $e^{i2\zeta} x_1(t + 4\zeta)$, $e^{i3\zeta} x_1(t + \zeta)$ y $e^{i4\zeta} x_1(t + 3\zeta)$.

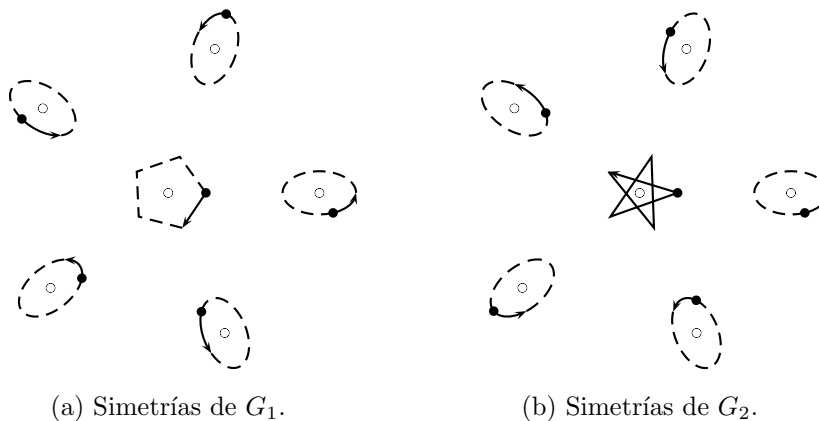


Figura 5.2: Para $n = 5$.

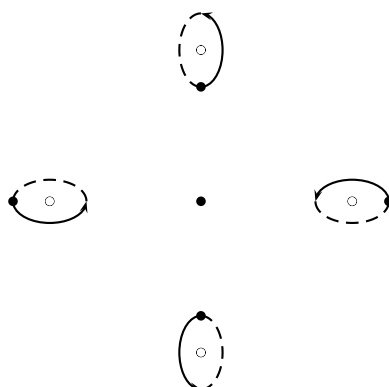


Figura 5.3: Simetrías de G_2 para $n = 4$.

Las simetrías de G_k para $h > 1$ son $x_0(t) = 0$ y $x_{j+1}(t) = e^{ij\zeta}x_1(t + j\bar{k}(2\pi/\bar{n}))$. En este caso el cuerpo central permanece en el centro. Además, los otros cuerpos describen un acoplamiento entre la rotación espacial y la fase temporal, determinada por la permutación que genera multiplicar por \bar{k} en $\mathbb{Z}_{\bar{n}}$. Ver el ejemplo $n = 4$ y $k = 2$.

Observación 5.8 Las soluciones en coordenadas fijas son $q(t) = e^{\mathcal{J}\omega^\gamma t}x(\nu t)$ con $\gamma = 1/2$ para los cuerpos y con $\gamma = 1$ para los vórtices. Parametrizando el tiempo tenemos que $q(t) = e^{\mathcal{J}t\omega^\gamma/\nu}x(t)$, donde x una función 2π -periódica.

Sea $\Omega = 1 - k\omega^\gamma/\nu$, entonces para $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} q_{j+1}(t) &= e^{\mathcal{J}t\omega^\gamma/\nu} x_{j+1}(t) \\ &= e^{ij\zeta} e^{it\omega^\gamma/\nu} x_1(t + jk\zeta) = e^{ij\zeta\Omega} q_1(t + jk\zeta). \end{aligned}$$

Para $\mu = 0$ y en el caso que $\Omega \in n\mathbb{Z}$, las soluciones con simetrías G_k satisfacen $q_{j+1}(t) = q_1(t + jk\zeta)$. Por lo que los cuerpos con masas iguales siguen la misma trayectoria, en general cuasiperiódica. Las soluciones anteriores se conocen como coreografías [Che08].

5.4. Análisis del espectro $n = 2$

Primero vamos a analizar el caso $n = 2$ debido a que es cualitativamente distinto a los casos $n \geq 3$. Como vimos en el capítulo anterior, en este caso sólo tenemos que estudiar el bloque $M_1(\nu)$. Para $n = 2$ las soluciones con simetrías \tilde{D}_1 que bifurcan debido al bloque $M_1(\nu)$ satisfacen simplemente

$$x_0(t + \pi) = -x_0(t) \text{ y } x_2(t) = -x_1(t + \pi).$$

Recordemos que definimos a

$$\begin{aligned} T_1(v, w) &= (v, 2^{-1/2}w, 2^{-1/2}w) \text{ con} \\ V_1 &= \{(v, w, w) : v, w \in \mathbb{C}^2\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz $\bar{\mu}$ en el subespacio V_1 es $\bar{\mu}T_1(z) = T_1(\text{diag}(\mu I, I)z)$ y la matriz \mathcal{J} es $\mathcal{J}T_1(z) = T_1(\text{diag}(\mu iJ, iJ)z)$. Recordemos que $AT_1(z) = T_1(B_1z)$ con B_1 igual a

$$\begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu + 2\alpha) & 0 & -\sqrt{2}\alpha\mu & 0 \\ 0 & \mu(s_1 + \mu - 2) & 0 & \sqrt{2}\mu \\ -\sqrt{2}\alpha\mu & 0 & s_1 + (\alpha + 1)\mu & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\mu & 0 & s_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $M(\lambda)T_1(z) = T_1(M_1z)$ con

$$M_1(\nu) = \nu^2 \text{diag}(\mu^{2\beta} I, I) - 2\gamma\nu \text{diag}(\mu iJ, iJ) + B_1.$$

De igual manera encontramos para los vórtices que $M_1(\nu) = -\nu \text{diag}(\mu iJ, iJ) + B_1$.

5.4.1. Vórtices

Como $\alpha = 1$ y $s_1 = 1/2$, entonces el bloque $M_1(\nu)$ es

$$\begin{pmatrix} \mu(\mu + 5/2) & -i\nu\mu & -\sqrt{2}\mu & 0 \\ i\nu\mu & \mu(\mu - 3/2) & 0 & \sqrt{2}\mu \\ -\sqrt{2}\mu & 0 & 2\mu + 1/2 & -i\nu \\ 0 & \sqrt{2}\mu & i\nu & 1/2 \end{pmatrix}.$$

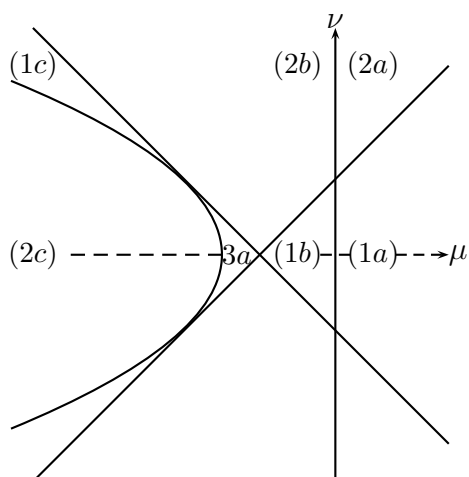


Figura 5.4: Gráfica de $d_1(\mu, \nu) = 0$.

Proposición 5.9 Sean

$$\nu_0(\mu) = |\mu + 1/2| \text{ y } \nu_1(\mu) = \sqrt{3}(-\mu - 5/4)^{1/2},$$

entonces el determinante de M_1 se anula sólo en las curvas: $\mu = 0$ para $\nu \in \mathbb{R}$, $\pm\nu_0$ para $\mu \in \mathbb{R}$ y $\pm\nu_1$ para $\mu \in (-\infty, -5/4)$. Además, dividiendo al semiplano $\nu > 0$ en las siete regiones que separan las curvas anteriores, el número de Morse de $M_1(\nu)$ en las regiones (1x) es $n_1 = 1$, en las regiones (2x) es $n_1 = 2$ y en las regiones (3x) es $n_1 = 3$.

Prueba. Como el determinante $\det M_1$ es

$$\det M_1 = \mu^2 (\nu^2 - (\mu + 1/2)^2) (\nu^2 + 3(\mu + 5/4)),$$

entonces el determinante se anula sólo en las curvas de la proposición. Además, las curvas ν_0 y ν_1 se intersectan sólo en $\mu = -2$.

Para ν grande el número de Morse de la matriz $M_1(\nu)$ y el de la matriz $-\nu \text{diag}(\mu i J, i J)$ son iguales. Por lo tanto $n_1 = 2$ en la región (2a) y (2b). Ahora bien, la matriz $M(\mu, 0)$ tiene valores propios

$$\frac{1}{4}(2\mu^2 - 3\mu + 1) \pm \frac{1}{4}\sqrt{4\mu^4 - 12\mu^3 + 37\mu^2 + 6\mu + 1} \text{ y}$$

$$\frac{1}{4}(2\mu^2 + 9\mu + 1) \pm \frac{1}{4}\sqrt{4\mu^4 + 4\mu^3 + 29\mu^2 - 2\mu + 1}.$$

Usando lo anterior encontramos que $n_1 = 2$ en (2c), $n_1 = 3$ en (3a) y $n = 1$ en (1a) y (1b).

Sólo nos resta encontrar n_1 en la región (1c). La matriz $M_1(\mu, \mu + 1/2)$ tiene valores propios 0, 3μ y

$$\mu^2 + 1/2 \pm \sqrt{(\mu^2 + 1/2)^2 + \mu(\mu + 2)(2\mu + 1)}.$$

Como $M_1(\mu, \mu + 1/2)$ tiene dos valores propios positivos para $\mu < -2$, entonces $n_1 \leq 2$ en (1c). Finalmente como $\det M_1$ es negativo en (1c), entonces $n_1 = 1$ en (1c). \square

Por lo tanto, en el problema de los vórtices para $n = 2$, el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_0$ y $2\pi/\nu_1$ (para $\mu < -\mu_1$) con simetrías G_1 . De la discusión de estabilidad lineal, el equilibrio poligonal para $n = 2$ es estable cuando $\mu < \mu_1 = -5/4$.

5.4.2. Ondas viajeras en filamentos

Como $\alpha = 1$ y $s_1 = 1/2$ para $n = 2$, entonces el bloque $M_1(\nu)$ es

$$\begin{pmatrix} \mu(\mu\nu^2 + \mu + 5/2) & -2i\nu\gamma\mu & -\sqrt{2}\mu & 0 \\ 2i\nu\gamma\mu & \mu(\mu\nu^2 + \mu - 3/2) & 0 & \sqrt{2}\mu \\ -\sqrt{2}\mu & 0 & \nu^2 + 2\mu + 1/2 & -2i\nu\gamma \\ 0 & \sqrt{2}\mu & 2i\nu\gamma & \nu^2 + 1/2 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante $\det M_1(\nu)$ es un polinomio de grado ocho en ν sin una factorización explícita, sólo vamos a estudiaremos un caso sencillo. El determinante para $\nu = 0$ es

$$\det M(0) = -3\mu^2(\mu + 1/2)^2(\mu + 5/4),$$

entonces $\det M(\mu, 0)$ es negativo para $\mu > \mu_1 = -5/4$. Como $\det M(\mu, \nu)$ es positivo para ν grande, entonces para $\mu > \mu_1$ existe un punto ν_1 donde $\det M(\mu, \nu)$ cambia de signo. Por lo tanto $\eta_1(\nu_1) \neq 0$ para $\mu > \mu_1$.

Por lo tanto, en el problema de los filamentos casi paralelos para $n = 2$, el equilibrio relativo poligonal para cada $\mu > \mu_1$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_1$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_1 .

5.4.3. Cuerpos

Para $n = 2$ tenemos que $s_1 = 1/4$ y $\omega = \mu + 1/4$ con $\alpha = 2$, entonces el bloque $M_1(\nu)$ es

$$\begin{pmatrix} \mu\omega\nu^2 + \mu(\mu + 17/4) & -2i\nu\mu\omega & -2\sqrt{2}\mu & 0 \\ 2i\nu\mu\omega & \mu\omega\nu^2 + \mu(\mu - 7/4) & 0 & \sqrt{2}\mu \\ -2\sqrt{2}\mu & 0 & \omega\nu^2 + 3\mu + 1/4 & -2i\nu\omega \\ 0 & \sqrt{2}\mu & 2i\nu\omega & \omega\nu^2 + 1/4 \end{pmatrix}.$$

El determinante de $M_1(\nu)$ es $\det M_1(\nu) = 2^{-8}\mu^2(4\mu + 1)^2(\nu^2 - 1)^2 d_1(\mu, \nu)$ con

$$d_1(\mu, \nu) = (16\mu^2 + 8\mu + 1)\nu^4 + (-16\mu^2 + 20\mu + 6)\nu^2 - (84\mu + 119).$$

Para $\mu > 0$ el polinomio $d_1(\mu, \nu)$ se anula sólo en $\{\pm\nu_1\}$, donde ν_1 es la solución positiva de

$$\nu_1^2 = [2\mu - 3 + 2(\mu^2 + 18\mu + 32)^{1/2}]/(4\mu + 1).$$

Como $\nu_1 > 1$ para $\mu > 0$, entonces sólo tenemos que conocer los valores propios de $M_1(1, \nu)$. Los valores propios de $M_1(1, \nu)$ son $5(\nu \pm 1)^2/4$ y

$$(5\nu^2 \pm 2(25\nu^2 + 81)^{1/2} + 11)/4.$$

De lo anterior podemos ver que $n_1 = 1$ para $|\nu| < \nu_1$ y que $n_1 = 0$ para $|\nu| > \nu_1$. Por lo tanto $\eta_1(1) = 0$ y $\eta_1(\nu_1) = 1 - 0$ para $\mu > 0$.

Por lo tanto, en el problema de los $n + 1$ -cuerpos para $n = 2$, el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_1$ con simetrías G_1 . De la discusión de estabilidad lineal, el equilibrio poligonal para $n = 2$ nunca es estable.

5.5. Análisis del espectro $n \geq 3$

En esta sección vamos a analizar los puntos de bifurcación para $n \geq 3$. Como los bloques $M_k(\lambda)$ son autoadjuntos, entonces sus valores propios son reales. Como las matrices satisfacen $M_{n-k}(\lambda) = \bar{M}_k(-\lambda)$, entonces las matrices $M_{n-k}(\lambda)$ y $M_k(-\lambda)$ tienen el mismo espectro. Por lo tanto los números de Morse $n_k(\lambda)$ satisfacen

$$n_{n-k}(\lambda) = n_k(-\lambda).$$

5.5.1. Vórtices

Primero vamos a analizar el espectro en el caso de los vórtices. Usando las definiciones del capítulo anterior para $\alpha = 1$ tenemos que $\alpha_- = 0$, $\alpha_+ = 1$,

$$\alpha_k = 0, \gamma_k = 0 \text{ y } \beta_k = s_k - s_1.$$

Por lo tanto, de (4.18) tenemos que los bloques B_k para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$ son

$$B_k = \text{diag}(2(\mu + s_1) - s_k, s_k) \text{ y}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu) & -(n/2)^{1/2} \mu & -(n/2)^{1/2} \mu i \\ -(n/2)^{1/2} \mu & s_1 + 2\mu & 0 \\ (n/2)^{1/2} \mu i & 0 & s_1 \end{pmatrix}.$$

Además, en el apéndice probamos que $s_k = k(n-k)/2$ para $\alpha = 1$.

Para simplificar el análisis de bifurcación vamos a cambiar del parámetro μ al parámetro $\omega = \mu + s_1$. En el capítulo anterior probamos que el determinante $\det B_1$ se anula sólo en μ_k , por lo que tenemos que excluir del análisis de bifurcación periódica a $\omega_k = \mu_k + s_1$ para $k = 1, \dots, n$. De los cálculos de μ_k en el capítulo anterior tenemos que $\omega_1 = s_1(s_1 + 1)$ y que $\omega_k = s_k/2$ para $k \in \{2, \dots, n/2, n\}$.

Bloques $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$

Como la frecuencia es $\omega = \mu + s_1$, el bloque B_k es $B_k = 2\text{diag}(\omega - \omega_k, \omega_k)$. Como $\omega_n = 0$, entonces

$$\sigma = e_1^T B_n e_1 = \text{sgn}(\omega).$$

A continuación realizaremos el análisis del espectro para los vórtices.

Proposición 5.10 Definamos a ν_k como

$$\nu_k = [4\omega_k(\omega - \omega_k)]^{1/2}.$$

(a) Para $\omega > \omega_k$, el determinante $\det M_k$ se anula sólo en $\{\pm\nu_k\}$ con

$$\eta_k(\nu_k) = -1.$$

(b) Para $\omega < \omega_k$, el determinante $\det M_k$ nunca se anula.

Prueba. De las definiciones anteriores tenemos que la traza y el determinante de M_k son $T_k(\nu) = 2\omega$ y $d_k(\nu) = -\nu^2 + 4\omega_k(\omega - \omega_k)$. Para $\omega > \omega_k$, el determinante $d_k(\nu)$ cambia de signo sólo en el punto ν_k . Como ω_k es positivo, entonces $n_k(0) = 0$, pues $d_k(0) > 0$ y $T_k(0) > 0$. Como $d_k(\infty) < 0$, entonces $n_k(\infty) = 1$. Además $\sigma = 1$ pues $\omega_k > 0$. Por lo tanto $\eta(\nu_k) = 0 - 1$. \square

Para $k = n$ tenemos que $\omega_n = 0$, entonces $\nu_n = 0$ no es un punto de bifurcación del bloque M_n .

Por lo tanto, en el problema de los vórtices para $n \in \{4, 5, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{2, \dots, n - 2\}$ tal que $\omega > \omega_k$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_k . Como todos los puntos de bifurcación tienen $\eta_k = -1$, entonces la bifurcación anterior no puede retornar a \bar{a} . Por lo tanto la bifurcación o es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto a \bar{a} .

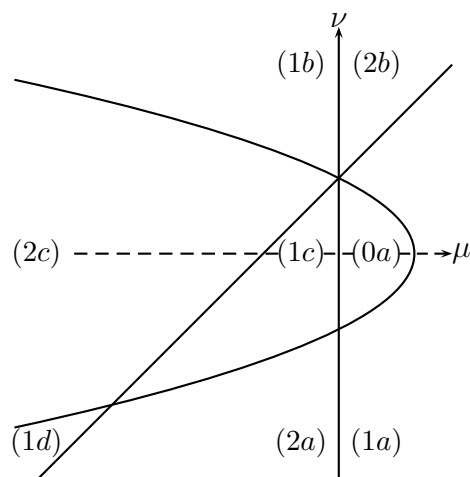
Bloques $k \in \{1, n - 1\}$

Ahora vamos a analizar el espectro de los bloques $M_k(\nu)$ para $k \in \{1, n - 1\}$ y $\nu \in \mathbb{R}^+$. Lo anterior es equivalente a analizar sólo el espectro de $M_1(\nu)$ para $\nu \in \mathbb{R}$, pues $n_{n-1}(\lambda) = n_1(-\lambda)$.

Proposición 5.11 El determinante $\det M_1$ se anula sólo en las curvas

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \text{ para } \nu \in \mathbb{R}, \nu_0(\mu) = \mu + s_1 \text{ para } \mu \in \mathbb{R} \text{ y} \\ \nu_{\pm}(\mu) &= \pm\sqrt{s_1^2 - \mu} \text{ para } \mu \in (-\infty, s_1^2). \end{aligned}$$

Además, dividiendo el plano (μ, ν) en las ocho regiones que separan las curvas anteriores, el número de Morse de $M_1(\nu)$ en las regiones $(0x)$ es $n_1 = 0$, en las regiones $(1x)$ es $n_1 = 1$ y en las regiones $(2x)$ es $n_1 = 2$.

Figura 5.5: Gráfica de $d_1(\mu, \nu) = 0$.

Prueba. Con los cálculos que teníamos, el bloque M_1 es

$$M_1(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \mu(-\nu + s_1 + \mu) & -(n/2)^{1/2} \mu & -(n/2)^{1/2} \mu i \\ -(n/2)^{1/2} \mu & s_1 + 2\mu & i\nu \\ (n/2)^{1/2} \mu i & -i\nu & s_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la traza de M_1 es

$$T_1(\mu, \nu) = 2\mu + 2s_1 + \mu(\mu + s_1 - \nu).$$

Además, como $n = 2s_1 + 1$, el determinante es

$$d_1(\mu, \nu) = \mu(\nu - (\mu + s_1))(\nu^2 - (s_1^2 - \mu)).$$

Por lo tanto, el determinante $\det M_1$ cambia de signo sólo en $\mu = 0$, $\nu_0(\mu)$ y $\nu_{\pm}(\mu)$. Además, las curvas $\nu_0(\mu)$ y $\nu_{-}(\mu)$ se interceptan en el punto

$$(\mu_0, \nu_0) = (-2s_1 - 1, -s_1 - 1).$$

Para ν grande el número de Morse de la matriz $M_1(\nu)$ y el de la matriz $-\nu \text{diag}(\mu, iJ)$ son iguales. Por lo tanto $n_1(\infty) = 2$ y $n_1(-\infty) = 1$ para $\mu > 0$. Además $n_1(\infty) = 1$ y $n_1(-\infty) = 2$ para $\mu < 0$. Por lo tanto $n_1 = 2$ en la región (2a) y (2b) y $n_1 = 1$ en la región (1a) y (1b).

La región (1d) se encuentra entre las curvas $\nu_0(\mu)$ y $\nu_{-}(\mu)$ para $\mu \in (-\infty, -2s_1 - 1)$. Por lo tanto el determinante d_1 es negativo en la región

(1d) y $n_1 \in \{1, 3\}$. Sea $\bar{\nu} = (\nu_0 + \nu_-)/2$, entonces $\bar{\nu} = \mu/2 + o(\mu)$ y $T_1(\bar{\nu}) = \mu^2/2 + o(\mu^2)$. Como $T_1(\bar{\nu}) > 0$ para $\mu \rightarrow -\infty$, entonces $n_1 \neq 3$. Por lo tanto $n_1 = 1$ en la región (1d).

Para $\nu = 0$, el determinante es

$$d_1(\mu) = -\mu(\mu + s_1)(\mu - s_1^2).$$

Por lo tanto $d_1 > 0$ en la región (2c), $d_1 < 0$ en la región (1c) y $d_1 > 0$ en la región (0a). Por lo tanto $n_1 \in \{1, 3\}$ en la región (1c) y $n_1 \in \{0, 2\}$ en la región (0a). Como $M_1(0, 0) = \text{diag}(0, s_1, s_1)$ y los valores propios de M_1 son continuos, entonces $n_1 \leq 1$ para (μ, ν) cercano a $(0, 0)$. Por lo tanto $n_1 = 1$ en la región (1c) y $n_1 = 0$ en la región (0a).

Como $d_1 > 0$ en la región (2c), entonces $n_1 \in \{0, 2\}$. En (μ_0, ν_0) la traza $T_1 = -2(s_1 + 1)$ es negativa. Como T_1 es continua respecto a (ν, μ) , entonces $T_1 < 0$ para (ν, μ) cercano a (μ_0, ν_0) . Por lo tanto $n_1 \neq 0$ y $n_1 = 2$ en la región (2c). \square

En la proposición anterior encontramos que $n_1(\mu, \nu)$ cambia en las curvas $\nu_*(\mu)$ para $* \in \{0, +, -\}$, usando que $n_{n-1}(\nu) = n_1(-\nu)$ concluimos lo siguiente.

Por lo tanto, en el problema de los vórtices para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, n-1\}$ tal que $\mu \in (-\infty, s_1^2)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con simetría G_k .

Para $n \in \{3, 4, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para $k = 1$ tal que $\mu \in (-s_1, \infty)$ y para $k = n-1$ tal que $\mu \in (-\infty, -s_1)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/|\nu_0|$ con simetría G_k .

De hecho, usando que $\sigma = \text{sgn}(\omega)$ podemos encontrar a $\eta_k(\nu)$ para $k \in \{1, n-1\}$.

Corolario 5.12 *Para μ fija tenemos que $\eta_1 = -\sigma$ en la intersección de las regiones (0a) y (1a), (1a) y (2b), (1c) y (2c). Además, $\eta_1 = \sigma$ en la intersección de las regiones (2c) y (1b).*

Para μ fija tenemos $\eta_{n-1} = -\sigma$ en la intersección de las regiones (0a) y (1a), (1c) y (2a), (1d) y (2a). Además, $\eta_{n-1} = \sigma$ en la intersección de las regiones (2c) y (1d), (2c) y (1c).

Las bifurcaciones con simetrías G_1 tienen el mismo índice para $\mu \in (-\infty, -s_1) \cup (s_1^2, \infty)$ y existe sólo una bifurcación con simetrías G_{n-1} para

$\mu \in (-s_1, s_1^2)$, por lo que las bifurcaciones en esos casos no pueden retornar a \bar{a} . Por lo tanto, la bifurcación en esos casos o es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto a \bar{a} .

Para $\mu = 0$ el bloque $M_1(\nu)$ es

$$M_1(\nu) = M_{n-1}(\nu) = \begin{pmatrix} s_1 & i\nu \\ -i\nu & s_1 \end{pmatrix},$$

entonces el determinante $\det M_1 = s_1^2 - \nu^2$ se anula sólo en $\{\pm s_1\}$ con $\eta_1(s_1) = \eta_{n-1}(s_1) = 0 - 1$.

Por lo tanto, en el problema de los vórtices para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, n-1\}$ tal que $\mu = 0$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/s_1$ con simetrías G_k .

La bifurcación anterior no retorna a \bar{a} pues sólo hay un punto de bifurcación. Por lo tanto la bifurcación o es inadmisibles o va a otros puntos de bifurcación distintos a \bar{a} .

Estabilidad lineal

Para recuperar los resultados de estabilidad lineal de [CS00] recordemos la observación (2.9). Nosotros probamos que el determinante $\det M_k(\nu)$ se anula en dos puntos distintos para $k \in \{2, \dots, n-2\}$ cuando $\mu > \mu_k$. También probamos para $k \in \{1, n-1\}$ que los bloques $M_k(\nu)$ se anula en tres puntos distintos cuando $\mu < \mu_1$. Además, el determinante $\det M_n(\nu)$ tiene un cero doble en $\nu = 0$, sin embargo, esto no desestabiliza el equilibrio debido a las simetrías.

Por lo tanto, como las μ_k son creciente para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$, entonces el problema de los vórtices es linealmente estable para

$$\mu \in (\mu_{[n/2]}, \mu_1).$$

En el capítulo anterior encontramos que $\mu_1 = (n-1)^2/4$ y que

$$\mu_k = (-k^2 + nk - 2n + 2)/4.$$

En el artículo [CS00] se prueba el resultado anterior.

5.5.2. Ondas viajeras en filamentos

A continuación vamos a analizar el espectro para la bifurcación de ondas viajeras en filamentos. En este caso los bloques B_k son los mismos que los de los vórtices.

Bloques $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$

Proposición 5.13 Definamos a ν_+ y a ν_- como

$$\nu_{\pm} = \left[(2\gamma^2 - \omega) \pm \sqrt{(2\gamma^2 - \omega)^2 - 4\omega_k(\omega - \omega_k)} \right]^{1/2}.$$

(a) Para $\omega < \omega_k$ y $\gamma \in \mathbb{R}$, el determinante $\det M_k$ se anula sólo en $\{\pm\nu_+\}$ con

$$\eta_k(\nu_+) = \operatorname{sgn}(\omega).$$

(b) Para $\omega > \omega_k$ y $\gamma^2 > \omega/2 + (\omega_k(\omega - \omega_k))^{1/2}$, el determinante $\det M_k$ se anula sólo en $\{\pm\nu_{\pm}\}$ con

$$\eta_k(\nu_{\pm}) = \pm 1.$$

Prueba. En este caso el bloque $M_k(\nu)$ es

$$M_k(\nu) = \nu^2 - 2\gamma\nu iJ + 2\operatorname{diag}(\omega - \omega_k, \omega_k).$$

La traza es $T_k(\mu) = 2(\nu^2 + \omega)$ y el determinante es

$$\begin{aligned} d_k(\nu) &= \nu^4 - 2(2\gamma^2 - \omega)\nu^2 + 4\omega_k(\omega - \omega_k) \\ &= (\nu^2 - \nu_+^2)(\nu^2 - \nu_-^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determinante se anula sólo en ν_{\pm} .

Para $\omega < \omega_k$ y $\gamma \in \mathbb{R}$, solamente ν_+ es positivo. Como $d_k(0) = 4\omega_k(\omega - \omega_k) < 0$, entonces $n_k(0) = 1$. Como todos los valores propios de $M_k(\nu)$ son positivos para ν grande, entonces $n(\infty) = 0$. Por lo tanto $\eta(\nu_+) = \sigma(1 - 0)$ con $\sigma = \operatorname{sgn}(\omega)$.

Para $\omega > \omega_k$ y $\gamma^2 > \omega/2 + (\omega_k(\omega - \omega_k))^{1/2}$, los dos puntos ν_+ y ν_- son positivos. Como los ω_k son positivos, entonces $\sigma = \operatorname{sgn}(\omega) = 1$. Como $d_k(0) > 0$ y $T_k(0) > 0$, entonces $n_k(0) = 0$. El índice de Morse de $M_k(\nu)$ para ν grande es $n_k(\infty) = 0$. Además $\det M(\nu)$ es negativo entre ν_- y ν_+ , entonces $n_k(\nu) = 1$ para $\nu \in (\nu_-, \nu_+)$. Por lo tanto $\eta(\nu_-) = 0 - 1$ y $\eta(\nu_+) = 1 - 0$. \square

Por lo tanto, en el problema de los filamentos casi paralelos para $n \in \{4, 5, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tal que $\omega < \omega_k$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_k . La

bifurcación anterior no puede retornar a \bar{a} , por lo que la bifurcación o es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto de \bar{a} .

Para $n \in \{4, 5, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tal que $\omega > \omega_k$ con $\gamma^2 > \omega/2 + (\omega_k(\omega - \omega_k))^{1/2}$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_k .

Para $k = n$ tenemos que $\omega_n = 0$, por lo que $\nu_- = 0$. Para $n \in \{3, 4, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para $\omega < 0$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ y para $\omega > 0$ con $\gamma^2 > \omega/2$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_n . La bifurcación anterior o es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto de \bar{a} .

Bloques $k \in \{1, n-1\}$

En este caso el bloque $M_1(\nu)$ es

$$M_1(\nu) = \begin{pmatrix} \mu(\mu\nu^2 - 2\gamma\nu + s_1 + \mu) & -(n/2)^{1/2}\mu & -(n/2)^{1/2}\mu i \\ -(n/2)^{1/2}\mu & \nu^2 + s_1 + 2\mu & 2\gamma\nu i \\ (n/2)^{1/2}\mu i & -2\gamma\nu i & \nu^2 + s_1 \end{pmatrix}.$$

Desafortunadamente su determinante es un polinomio de sexto grado sin una factorización explícita. Por lo anterior sólo vamos a analizar la bifurcación para algunos casos particulares.

Para $\mu \in (-s_1, 0) \cup (s_1^2, \infty)$, el determinante de $M_1(\nu)$ es

$$d_1(0) = -\mu(\mu + s_1)(\mu - s_1^2) < 0.$$

Como $d_1(\nu) > 0$ para $|\nu|$ suficientemente grande, entonces $\det M_1(\nu_k)$ cambia de signo al menos en ν_1 y $-\nu_{n-1}$ con $\nu_1, \nu_{n-1} > 0$. Por lo tanto $\eta_1(\nu_1) \neq 0$ y $\eta_{n-1}(\nu_{n-1}) \neq 0$.

Por lo tanto, en el problema de los filamentos casi paralelos para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, n-1\}$ tal que $\mu \in (-s_1, 0) \cup (s_1^2, \infty)$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_k .

A continuación vamos a analizar el caso en que todos los filamentos tienen la misma circulación. En ese caso $\mu = 1$ y la frecuencia es

$$\omega = s_1 + 1.$$

Proposición 5.14 Definamos a $\bar{\nu}_\pm$ como $\bar{\nu}_\pm = \gamma \pm (\gamma^2 - \omega)^{1/2}$ y a ν_\pm como

$$\nu_\pm = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - c}\right)^{1/2} \text{ con } b = \omega - 2\gamma^2 \text{ y } c = \omega^2 - 2\omega > 0.$$

(a) Para $(\omega + \sqrt{c})/2 < \gamma^2 < \omega$, el determinante $\det M_1$ se anula sólo en $\{\pm\nu_\pm\}$ con

$$\eta_1(\nu_\pm) = \eta_{n-1}(\nu_\pm) = \pm 1.$$

(b) Para $\omega < \gamma^2$, el determinante $\det M_1$ se anula sólo en $\{\bar{\nu}_\pm, \pm\nu_\pm\}$ con

$$\eta_1(\bar{\nu}_\pm) = \pm 1 \text{ y } \eta_1(\nu_\pm) = \eta_{n-1}(\nu_\pm) = \pm 1.$$

Prueba. Los valores propios se pueden calcular explícitamente para $\mu = 1$ y son

$$\lambda_0 = \nu^2 - 2\gamma\nu + \omega \text{ y } \lambda_\pm = \nu^2 + \omega \pm \sqrt{4\gamma^2\nu^2 + 2\omega}.$$

El valor propio λ_0 se anula sólo en $\bar{\nu}_\pm$ para $\gamma^2 > \omega$. Además, el valor propio λ_+ siempre permanece positivo.

El valor propio λ_- se anula en las soluciones de $\nu^4 + 2b\nu^2 + c = 0$. Por lo tanto λ_- se anula en las soluciones de $\nu^2 = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$. Como c es positivo para $n \geq 3$, entonces λ_- nunca se anula si $b > 0$ y se anula en $\{\pm\nu_\pm\}$ sólo para $b < 0$ y $b^2 - c > 0$. Como $b^2 - c = (2\gamma^2 - \omega)^2 - c$ es positivo para $\gamma^2 > (\omega + \sqrt{c})/2$ y en ese caso $b < 0$, entonces el valor propio λ_- se anula en $\{\pm\nu_\pm\}$ sólo para $\gamma^2 > (\omega + \sqrt{c})/2$.

Como $\omega = s_1 + 1$, entonces $\sigma = \text{sgn}(\omega) = 1$. Para el caso (a) los valores propios λ_0 y λ_+ son siempre positivos y λ_- es negativo sólo para $|\nu| \in (\nu_-, \nu_+)$. Por lo tanto $\eta_1(\nu_-) = 0 - 1$ y $\eta_1(\nu_+) = 1 - 0$.

Para el caso (b) tenemos que λ_+ es positivo, λ_0 es negativo sólo para $\nu \in (\bar{\nu}_-, \bar{\nu}_+)$ y λ_- es negativo para $|\nu| \in (\nu_-, \nu_+)$. Como $\lambda_-(\bar{\nu}_\pm) = 2\gamma\bar{\nu}_\pm - \sqrt{4\gamma\bar{\nu}_\pm^2 + 2\omega}$, entonces $\lambda_-(\bar{\nu}_\pm)$ es negativo y $(\bar{\nu}_-, \bar{\nu}_+) \subset (\nu_-, \nu_+)$. Por lo tanto $\eta_1(\nu_-) = 0 - 1$, $\eta_1(\bar{\nu}_-) = 1 - 2$, $\eta_1(\bar{\nu}_+) = 2 - 1$ y $\eta_1(\nu_+) = 1 - 0$. Además, como $n_{n-1}(\nu) = n_1(-\nu)$, entonces $\eta_{n-1}(\nu_-) = 0 - 1$ y $\eta_{n-1}(\nu_+) = 1 - 0$. \square

Para $n \in \{3, 4, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para $k \in \{1, n-1\}$ tal que $\mu = 1$ con $\gamma^2 > (\omega + \sqrt{c})/2$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_k .

Para $n \in \{3, 4, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para $\mu = 1$ con $\gamma^2 > \omega$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\bar{\nu}_+$ y $2\pi/\bar{\nu}_-$ con velocidad γ y con simetrías G_1 .

Para $\mu = 0$ el bloque M_1 es

$$M_1(\nu) = \begin{pmatrix} \nu^2 + s_1 & 2\gamma\nu i \\ -2\gamma\nu i & \nu^2 + s_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que $M_1(\nu) = \nu^2 - 2\gamma\nu iJ + 2\text{diag}(\omega - \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1)$ con $\omega = s_1$ y $\bar{\omega}_1 = s_1/2$. Podemos analizar al bloque M_1 como lo hicimos para los bloques M_k , entonces el determinante $\det M_1$ se anula sólo en los cuatro valores $\{\pm\nu_{\pm}\}$ para $\gamma^2 > s_1$, en donde $\eta_k(\nu_{\pm}) = \pm 1$ y

$$\nu_{\pm}^2 = (2\gamma^2 - s_1) \pm \sqrt{4\gamma^2(\gamma^2 - s_1)}.$$

Para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, n-1\}$ tal que $\mu = 0$ con $\gamma^2 > s_1$, tiene una bifurcación global de ondas viajeras periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con velocidad de onda γ y con simetrías G_k . La bifurcación es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto a \bar{a} .

5.5.3. Cuerpos

En el problema de los $n+1$ -cuerpos la frecuencia es $\omega = \mu + s_1$. Las ecuaciones están bien definidas para frecuencias positivas y tienen sentido físico sólo para masas positivas.

Usando las definiciones del capítulo anterior para $\alpha = 2$ tenemos que $\alpha_- = 1/2$, $\alpha_+ = 3/2$,

$$\alpha_k = (s_{k+1} + s_{k-1})/4, \beta_k = 3(s_k - s_1)/2 \text{ y } \gamma_k = (s_{k+1} - s_{k-1})/4.$$

Por lo tanto, de (4.18) tenemos que los bloques B_k para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$ son

$$B_k = (3/2)(I + R)\mu + (s_1 + \alpha_k)I - \beta_k R - \gamma_k iJ \text{ y}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mu(s_1 + \mu + n/2) & -2(n/2)^{1/2}\mu & -(n/2)^{1/2}\mu i \\ -2(n/2)^{1/2}\mu & s_1 + \alpha_1 + 3\mu & \alpha_1 i \\ (n/2)^{1/2}\mu i & -\alpha_1 i & s_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

108 Bifurcación periódica: cuerpos, vórtices, filamentos y cargas

En el problema de los $n + 1$ -cuerpos tenemos $M_k(\lambda) = \lambda^2 I - 2\omega^{1/2}\lambda(iJ) + B_k$ y

$$M_1(\lambda) = \lambda^2 \text{diag}(\mu, I) - 2\omega^{1/2}\lambda \text{diag}(\mu, iJ) + B_1.$$

Para analizar el espectro vamos a normalizar al periodo como $\lambda = \omega^{1/2}\nu$. Los bloques en el nuevo periodo son

$$\begin{aligned} M_k(\nu) &= \omega[\nu^2 I - 2\nu(iJ)] + B_k \text{ para } k \in \{2, \dots, n-2, n\} \text{ y} \\ M_1(\nu) &= \omega[\nu^2 \text{diag}(\mu, I) - 2\nu \text{diag}(\mu, iJ)] + B_1. \end{aligned}$$

Para el problema de los $n + 1$ -cuerpos no podemos calcular explícitamente los s_k . Sin embargo, en el apéndice probamos que $s_k = s_{n-k} = s_{n+k}$ y que los s_k son crecientes en k para $k \in \{0, \dots, n/2\}$. Los resultados anteriores los vamos a utilizar a lo largo del análisis del espectro. Además, para reducir el análisis de los espectros vamos a usar la igualdad $n_{n-k}(\nu) = n_k(-\nu)$.

Bloque $k = n$

El bloque B_n es $B_n = (3/2)(\mu + s_1)(I + R)$ con $R = \text{diag}(1, -1)$. Por lo tanto

$$\sigma = \text{sgn}(e_1^T B_n e_1) = 1 \text{ para } \mu > -s_1.$$

Proposición 5.15 *El determinante $\det M_n$ se anula sólo en $\{\pm 1\}$ con*

$$\eta_n(1) = 1.$$

Prueba. El bloque $M_n(\nu)$ es

$$M_n(\nu) = \omega[\nu^2 - 2\nu(iJ) + \text{diag}(3, 0)].$$

Como el determinante es $d_n(\nu) = \omega^2 \nu^2 (\nu - 1) (\nu + 1)$, entonces el determinante se anula sólo en $\{\pm 1\}$. Como $d_n(\varepsilon) < 0$, entonces $n_n(0) = 1$. Además $n_n(\infty) = 0$, entonces $\eta_n(1) = 1 - 0$. \square

Por lo tanto, en el problema de los $n + 1$ -cuerpos para $n \in \{3, 4, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo 2π con simetrías G_n . La bifurcación no puede retornar a \bar{a} , por lo que la bifurcación es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto a \bar{a} .

Bloques $k \in \{2, \dots, n-2\}$

Definamos a $d_k(\mu, \nu)$ como el determinante de $M_k(\mu, \nu)$. En el capítulo anterior probamos que $d_k(\mu, 0) = \det B_k = b_k\mu + a_k$ con

$$a_k = (s_1 + \alpha_k)^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2 \text{ y } b_k = 3(s_1 + \alpha_k + \beta_k).$$

También probamos que b_k es positivo y que $\mu_k = -a_k/b_k > -s_1$.

En lo sucesivo vamos a usar que d_k y $D_k = d_k/\omega^2$ tienen el mismo signo.

Proposición 5.16 *El determinante de M_k es*

$$\begin{aligned} d_k(\mu, \nu) &= \omega^2\nu^4 + (2\alpha_k - \omega - s_1)\omega\nu^2 - 4\omega\gamma_k\nu + a_k + \mu b_k, \\ D_k(\mu, \nu) &= \nu^2(\nu^2 - 1) + c_k(\nu)/\omega - (s_1b_k - a_k)/\omega^2, \end{aligned}$$

en donde $c_k(\nu) = \nu^2(2\alpha_k - s_1) - 4\gamma_k\nu + b_k$.

Prueba. El bloque M_k es

$$M_k(\nu) = (\omega\nu^2 + s_1 + \alpha_k)I + (3\mu/2)(I + R) - \beta_k R - (2\nu\omega + \gamma_k)(iJ).$$

Por lo tanto el determinante es

$$d_k(\mu, \nu) = (\omega\nu^2 + s_1 + \alpha_k - \beta_k + 3\mu)(\omega\nu^2 + s_1 + \alpha_k + \beta_k) - (2\omega\nu + \gamma_k)^2.$$

Como $\omega = \mu + s_1$ y $d_k(\mu, 0) = b_k\mu + a_k$, entonces

$$d_k(\mu, \nu) = \omega^2\nu^4 + (2\alpha_k - \omega - s_1)\omega\nu^2 - 4\omega\gamma_k\nu + a_k + \mu b_k.$$

Además, de la igualdad para d_k concluimos el resultado para $D_k(\mu) = d_k/\omega^2$.
□

Ahora vamos a encontrar algunos puntos donde el determinante $d_k(\nu)$ se anula.

- (a) Para cada $\mu \in (-s_1, \mu_k)$ tenemos que $d_k(\mu, 0)$ es negativo y que $d_k(\mu, \pm\infty)$ es positivo, entonces $d_k(\nu)$ cambia de signo al menos en los puntos ν_{\pm} con $\nu_- < 0 < \nu_+$. Como $\lim_{\mu \rightarrow -s_1} d_k(\nu, \mu) = a_k - s_1b_k < 0$, entonces $\lim_{\mu \rightarrow -s_1} \nu_{\pm}(\mu) = \pm\infty$.

(b) Podemos ver que $\lim_{\mu \rightarrow \infty} D_k(\mu, \nu) = \nu^2(\nu^2 - 1)$. Sabemos que $d_k(\mu, 0)$ es positivo para $\mu > \mu_k$. Por lo tanto para μ suficientemente grande $d_k(\nu)$ cambia de signo al menos en los cuatro puntos $\{\nu_{\pm}, \bar{\nu}_{\pm}\}$ con

$$\nu_{-k}(\mu) < \bar{\nu}_{-k}(\mu) < 0 < \bar{\nu}_k(\mu) < \nu_k(\mu).$$

Además, los puntos anteriores satisfacen $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \nu_{\pm k}(\mu) = \pm 1$ y

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \bar{\nu}_{\pm k}(\mu) = 0.$$

De hecho, vamos a probar que el determinante d_k se anula sólo en los casos anteriores. La prueba consiste en observar que para cada ν fijo la derivada $D'_k(\mu)$ se anula exactamente una vez en el intervalo $(-s_1, \infty)$. Para probar lo anterior necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.17 *Para $\nu \in \mathbb{R}$ la función $c_k(\nu)$ es positiva y satisface*

$$\frac{c_k^2(\nu)}{s_1 b_k - a_k} > 9.$$

Prueba. Como $c'_k(\nu) = 2\nu(2\alpha_k - s_1) - 4\gamma_k$, entonces $c'_k(\nu) = 0$ en $\nu_0 = 2\gamma_k/(2\alpha_k - s_1)$. Como $2\alpha_k - s_1 > 0$, entonces ν_0 es un mínimo. Además, tenemos que $\nu_0 \in (0, 1)$ pues $(2\alpha_k - s_1) - 2\gamma_k = s_{k-1} - s_1 \geq 0$. Por lo tanto

$$c_k(\nu_0) = \nu_0(2\gamma_k - 4\gamma_k) + b_k > b_k - 2\gamma_k.$$

De las definiciones de a_k y b_k encontramos que

$$\begin{aligned} 4b_k &= 18s_k - 6s_1 + 3s_{k-1} + 3s_{k+1} \text{ y} \\ -4a_k &= 9(s_1^2 - 2s_1s_k + s_k^2) - (s_{k+1} + 2s_1)(s_{k-1} + 2s_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$4(s_1 b_k - a_k) = 9s_k^2 - (s_{k-1} - s_1)(s_{k+1} - s_1) < 9s_k^2.$$

Además

$$4c_k(\nu_0) > 4b_k - 8\gamma_k = 18s_k - 6s_1 + 5s_{k-1} + s_{k+1} > 18s_k.$$

De las desigualdades anteriores concluimos que $c_k^2 > (9/2)^2 s_k^2 > 9(s_1 b_k - a_k)$.
□

A continuación vamos a probar que d_k se anula sólo en las curvas de la gráfica .

Como $d_k(-s_1, \nu)$ es negativo y $d_k(\bar{\mu}_k(\nu), \nu)$ es positivo, entonces $d_k(\mu, \nu)$ se anula sólo en el punto $\mu_0(\nu) \in (-s_1, \bar{\mu}_k(\nu))$ para cada $\nu \in \mathbb{R}$. Como $d_k(\bar{\mu}_k(\nu), \nu)$ es positivo y $D_k(\infty, \nu) = \nu^2(\nu^2 - 1)$, entonces $d_k(\mu, \nu)$ se anula sólo en el punto $\mu_+(\nu)$ para $\nu \in (0, 1)$ y en el punto $\mu_-(\nu)$ para $\nu \in (-1, 0)$. Por lo tanto d_k se anula sólo en $\mu_*(\nu)$ para $* \in \{0, +, -\}$. Las funciones $\mu_*(\nu)$ están bien definidas y satisfacen $-s_1 < \mu_0(\nu) < \bar{\mu}_k(\nu) < \mu_\pm(\nu)$. Como $d_k(\mu, \nu)$ es diferenciable y $\partial_\mu D_k(\mu_*(\nu), \nu) \neq 0$, del teorema de la función implícita tenemos que las funciones $\mu_*(\nu)$ son diferenciables.

De hecho podemos encontrar explícitamente a $\mu_*(\nu)$ de la ecuación cuadrática $d_k(\mu, \nu) = 0$. Para μ fijo tenemos que $d_k(\mu, \nu)$ es positivo si ν es suficientemente grande, entonces $\mu_0(\nu) \rightarrow -s_1$ cuando $|\nu| \rightarrow \infty$. Si $\mu_\pm(\nu)$ fuera acotada para $|\nu| \rightarrow \{0, 1\}$, del teorema de la función implícita podríamos extender las funciones $\mu_\pm(\nu)$ hasta los puntos ± 1 y 0 , pero no existen ceros en esos puntos. Por lo tanto $\mu_\pm(\nu) \rightarrow +\infty$ cuando $\nu \rightarrow 0, \pm 1$. \square

Definamos a m_0 como el máximo de $\mu_0(\nu)$ y a m_\pm como el mínimo de $\mu_\pm(\nu)$.

Teorema 5.19 *El determinante $\det M_k(\nu)$ se anula en los siguientes casos.*

(a) Para $k \in \{2, \dots, n-2\}$ y $\mu \in (-s_1, \mu_k)$ el determinante $\det M_k(\nu)$ se anula en ν_k con

$$\eta_k(\nu_k) = 1.$$

(b) Para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$ y $\mu \in (\mu_k, m_0)$ el determinante $\det M_k(\nu)$ se anula en $\{\bar{\nu}_k, \nu_k\}$ con $0 < \bar{\nu}_k < \nu_k$ y

$$\eta_k(\bar{\nu}_k) = -1 \text{ y } \eta_k(\nu_k) = 1.$$

(c) Para $k \in \{2, \dots, n-2\}$ y $\mu \in (m_+, \infty)$ el determinante $\det M_k(\nu)$ se anula en $\{\bar{\nu}_k, \nu_k\}$ con $0 < \bar{\nu}_k < \nu_k < 1$ y

$$\eta_k(\bar{\nu}_k) = -1 \text{ y } \eta_k(\nu_k) = 1.$$

Prueba. Como μ_k es un cero de $d_k(\mu, 0)$, entonces $\mu_k \leq m_0$. Como $d_k(\mu, \nu) + 4\omega\gamma_k\nu$ es par en ν , entonces

$$d_k(\mu, \nu) = d_k(\mu, -\nu) - 8\omega\gamma_k\nu.$$

Para $k \in [2, \dots, n/2) \cap \mathbb{N}$ tenemos que $\gamma_k > 0$, entonces $d_k(\mu, \nu) < d_k(\mu, -\nu)$ para $\nu \in \mathbb{R}^+$. De lo anterior concluimos que el máximo m_0 de la curva $\mu_0(\nu)$ se alcanza en $\nu > 0$ y que $m_+ < m_-$ para $k \in [2, \dots, n/2) \cap \mathbb{N}$.

Como M_k es de dimensión dos, entonces $n_k(\mu, \nu) = 1$ cuando el determinante $d_k(\mu, \nu)$ es negativo. Por lo tanto $n_1 = 1$ en Ω con

$$\Omega = \{(\mu, \nu) : \mu < \mu_0(\nu), \mu > \mu_{\pm}(\nu)\}.$$

Como $n_k(\mu, \nu) = 0$ para ν grande y el determinante d_k se anula sólo en $\partial\Omega$, entonces $n_1 = 0$ en Ω^c . Además, tenemos que $\sigma = 1$ para $\mu > -s_1$. Por lo tanto, para (a) encontramos que $\eta_k(\nu_k) = 1 - 0$. Además, para (b) y (c) tenemos que $\bar{\nu}_k < \nu_k$, entonces $\eta_k(\bar{\nu}_k) = 0 - 1$ y $\eta_k(\nu_k) = 1 - 0$. \square

Como $d_k''(\nu) = 2(6\omega^2\nu^2 + (2\alpha_k - \mu - 2s_1)\omega)$, entonces $d_k''(\nu)$ es positivo para $\mu < 2(\alpha_k - s_1)$. Por lo tanto, el determinante $\det M_k(\nu)$ sólo puede tener dos ceros para $\mu \in (-s_1, 2(\alpha_k - s_1))$. Por lo tanto las soluciones del inciso (a) son únicas para $\mu \in (-s_1, 2(\alpha_k - s_1))$.

Como $d_k(\nu)$ es un polinomio de cuarto orden, sólo pueden existir cuatro raíces. De la gráfica tenemos que $\det M_k(\nu)$ se anula en cuatro puntos para $\mu \in (m_*, \infty)$, en donde m_* es el más grande de m_+ y m_- . Por lo tanto las soluciones del inciso (c) son únicas para $\mu \in (m_*, \infty)$.

Por lo tanto, en el problema de los cuerpos para $n \in \{4, 5, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tal que $\mu \in (-s_1, \mu_k)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_k . Además, para $\mu \in (-s_1, 2(\alpha_k - s_1))$ la bifurcación anterior no puede retornar al equilibrio \bar{a} , entonces es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto a \bar{a} .

Para $n \in \{4, 5, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$ tal que $\mu \in (\mu_k, m_0)$ y para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tal que $\mu \in (m_+, \infty)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ y $2\pi/\bar{\nu}_k$ con simetrías G_k .

Observación 5.20 Para $k = 2$, con un cálculo numérico encontramos que μ_2 es negativo para $n \in \{4, \dots, 9\}$ y que el máximo m_0 es negativo para $n \in \{4, 5, 6\}$ y es positivo para $n \in \{7, 8, 9\}$. También encontramos que el valor μ_k siempre es positivo para $k \geq 3$.

Observación 5.21 Si logramos probar que sólo hay tres soluciones de $d_k(\mu, \nu) = 0$ y $\frac{\partial}{\partial \nu} d_k(\mu, \nu) = 0$, esas tres soluciones corresponden a m_0 y m_{\pm} . En tal caso

tenemos que las soluciones del teorema son las únicas donde cambia el índice de Morse.

De hecho, podemos probar lo anterior para $k = n/2$, pues usando que $\gamma_{n/2} = 0$ podemos encontrar explícitamente $m_0 = \mu_{n/2}$ y $m_+ = m_-$. Para eso veamos que en esos puntos $\nu^2 = -\omega^{-1}(2\alpha_{n/2} - 2s_1 - \mu)/2$, pues

$$2\nu\omega^2(2\nu^2 + \omega^{-1}(2\alpha_{n/2} - 2s_1 - \mu)) = \partial_\nu d_k = 0.$$

Sustituyendo el valor de ν en $d_k(\mu, \nu) = 0$ encontramos que

$$(2\alpha_{n/2} - 2s_1 - \mu)^2 - 4(a_{n/2} + \mu b_{n/2}) = 0.$$

Por lo tanto $m_+ = b + \sqrt{b^2 + c}$ con $b = 2(b_{n/2} + \alpha_{n/2} - s_1)$ y

$$c = 4(a_{n/2} - (\alpha_{n/2} - s_1)^2).$$

Bloques $k \in \{1, n-1\}$

El bloque $M_1(\nu)$ es

$$\begin{pmatrix} \mu(\omega\nu^2 - 2\nu\omega + s_1 + \mu + n/2) & -2(n/2)^{1/2}\mu & -(n/2)^{1/2}\mu i \\ -2(n/2)^{1/2}\mu & \omega\nu^2 + s_1 + \alpha_1 + 3\mu & \alpha_1 i + 2\nu\omega i \\ (n/2)^{1/2}\mu i & -\alpha_1 i - 2\nu\omega i & \omega\nu^2 + s_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

En el capítulo anterior probamos que $\det B_k = \omega\mu(b_k\mu + a_k)$ con

$$a_1 = (2s_1 + n)(2s_1 + s_2)/4 \text{ y } b_1 = 3(4s_1 + s_2 - 2n)/4.$$

Usando lo anterior se puede probar que el determinante de M_1 es $\det M_1(\nu) = \omega\mu(\nu - 1)^2 d_1(\mu, \nu)$, en donde d_1 es el polinomio

$$d_1(\mu, \nu) = \omega^2\nu^2(\nu^2 - 1) + ((s_2 - 2s_1 + n)\nu^2/2 - (s_2 - n)\nu)\omega + (a_1 + \mu b_1).$$

Para conocer los ceros de $\det M_1(\nu)$ necesitamos analizar los ceros del polinomio d_1 , para conseguir lo anterior primero vamos a probar el siguiente lema.

Lema 5.22 *Las funciones b_1 , $2\alpha_1 - s_1$, $s_1 - n$, $s_2 - n$ y $8(s_1 - n) + 9s_2$ son positivas para $n > 1071$. Para los casos restantes $n \geq 3$ encontramos de forma numérica que $s_1 - n$ es negativo para $n \leq 472$ y positivo para $n \geq 473$, que $s_2 - n$ es negativo para $n \leq 11$ y positivo para $n \geq 12$, y que*

$$\text{sgn}(b_1) = \text{sgn}(2\alpha_1 - s_1) = \text{sgn}(8(s_1 - n) + 9s_2) = \begin{cases} -1 & \text{para } n \leq 6 \\ +1 & \text{para } n \geq 7 \end{cases}.$$

Prueba. Como $\sin x < x$, entonces

$$s_1 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin j\zeta/2} \geq \frac{1}{2} \sum_{j \in [1, n/2) \cap \mathbb{N}} \frac{1}{j\zeta/2} \geq \frac{1}{\zeta} \ln n/2 = n \frac{\ln n/2}{2\pi}.$$

Como $n > 2e^{2\pi}$ para $n > 1071$, entonces $s_1 > n$ al menos para $n > 1071$. En el apéndice probamos que $s_2 = 4s_1 - \bar{s}_1$ con $\bar{s}_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \sin(j\zeta/2) < n$. Como $\alpha_1 = s_2/4$, entonces $2\alpha_1 - s_1 = s_1 - \bar{s}_1 > (s_1 - n)$. Además, usando que $s_2 > s_1$ y que $4b_1/3 = 2(s_1 - n) + s_2 + 2s_1$ concluimos que $b_1, 2\alpha_1 - s_1, s_2 - n$ y $8(s_1 - n) + 9s_2$ son positivos al menos para $n > 1071$. \square

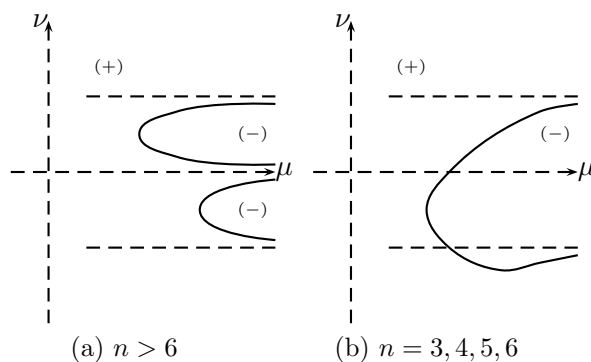


Figura 5.7: Gráfica de $d_1(\mu, \nu) = 0$.

A continuación vamos a estudiar la gráfica de $d_1(\mu, \nu) = 0$ para los casos con sentido físico $\mu > 0$, sin embargo, las ecuaciones de los cuerpos están bien definidas para masas negativas siempre que $\mu > -s_1$.

Proposición 5.23 Para $n \geq 7$ el polinomio $d_1(\mu, \nu)$ se anula sólo en las funciones

$$\mu_+(\nu) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ y } \mu_-(\nu) : (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

con $\mu_{\pm} \rightarrow \infty$ cuando $|\nu| \rightarrow 0, 1$. Además, para $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ el polinomio $d_1(\mu, \nu)$ se anula sola en la curva $(\mu_0, \nu_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times (-\infty, 1)$ con $(\mu_0, \nu_0)(t) \rightarrow (\infty, \pm 1)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Prueba. Usando que la frecuencia es $\omega = \mu + s_1$ podemos agrupar los términos del polinomio $d_1(\mu, \nu)$ en μ , entonces

$$d_1(\mu, \nu) = \nu^2 (\nu^2 - 1) \mu^2 + [s_1 b_1 - a_1 + c_1 + s_1^2 (\nu^4 - \nu^2)] \mu / s_1 + c_1 \text{ con}$$

$$s_1 b_1 - a_1 = (8s_1 + s_2) (s_1 - n) / 4 \text{ y}$$

$$c_1(\nu) = [2s_1(\nu - 1)^2 + n][2s_1(\nu + 1)^2 + s_2] / 4 > 0$$

Para cada ν la derivada $d'_1(\mu)$ se anula sólo en el punto crítico μ_c que satisface

$$\frac{1}{s_1} (s_1 b_1 - a_1 + c_1 + s_1^2 (\nu^4 - \nu^2)) \mu_c = -2\nu^2 (\nu^2 - 1) \mu_c^2.$$

Como $d_1(\mu_c, \nu) = -\nu^2 (\nu^2 - 1) \mu_c^2 + c_1$ es positivo al menos para $|\nu| < 1$, entonces para cada $|\nu| < 1$ a lo más existe un cero del polinomio $d_1(\mu)$ para $\mu > \mu_c$. Como $d_1/\omega^2 \rightarrow \nu^2(\nu^2 - 1)$ cuando $\mu \rightarrow \infty$ y $d_1(0, \nu) = c_1$ es positivo para toda ν , entonces para cada $|\nu| \in (0, 1)$ el polinomio d_1 se anula sólo en las funciones diferenciables $\mu_{\pm}(\nu)$.

Para conocer lo que sucede con los límites de las funciones $\mu_{\pm}(\nu)$ en $|\nu| = 0, 1$, necesitamos estudiar los ceros del polinomio $d_1(\mu, \nu)$ en $|\nu| = 0, 1$. Como a_1 siempre es positiva y b_1 es negativo para $n \leq 6$, entonces el polinomio $d_1(\mu, 0)$ se anula en el punto positivo $\mu_0 = -a_1/b_1$ sólo si $n \leq 6$. Además, el polinomio $d_1(\mu, \pm 1)$ se anula sólo en el punto

$$\mu_{\pm 1} = -s_1 c_1(\pm 1) / (s_1 b_1 - a_1 + c_1(\pm 1)).$$

Por lo tanto, el punto $\mu_{+1} = -n$ siempre es negativo y el punto $\mu_{-1} = -s_2(8s_1 + n) / (8s_1 - 8n + 9s_2)$ es positivo sólo si $n \leq 6$.

De lo anterior concluimos para $n \geq 7$ que el polinomio $d_1(\mu, \nu)$ en $|\nu| = 0, 1$ siempre es positivo para $\mu \geq 0$. Por lo tanto, para $n \geq 7$ las funciones $\mu_{\pm}(\nu)$ tienden a infinito cuando $|\nu| \rightarrow 0, 1$. Además, como $c_1(\nu)$ es creciente para $\nu > 1$, entonces $d_1(\mu, \nu) \geq d_1(\mu, 1) > 0$ para $\nu > 1$. Del mismo modo podemos probar lo anterior para $\nu < -1$. Por lo tanto $d_1(\mu, \nu)$ no tiene más ceros para $\mu \geq 0$ y $|\nu| > 1$.

Para $n \leq 6$ podemos concluir como antes que la función $\mu_+(\nu)$ tiende a infinito cuando $\nu \rightarrow 1$ y que $d_1(\mu, \nu)$ no tiene más ceros para $\nu > 1$. Además, las funciones μ_{\pm} se pueden extender de manera continua como $\mu_+(0) = \mu_-(0) = \mu_0$ y $\mu_-(-1) = \mu_{-1}$. Finalmente, el continuo de ceros de $d_1(\mu, \nu)$ en $(\mu_-, -1)$ cruza la recta $(\mu, -1)$ sólo una vez y tiene que ir al límite $(\mu, \nu) = (\infty, -1)$. Lo anterior es consecuencia de que $d_1(0, \nu)$ es positivo para toda ν , que $d_1(\mu, \nu)$ es positivo para $\mu > 0$ cuando $|\nu|$ es grande y que $d_1(\mu, \nu)$ es positivo para $\nu < -1$ cuando μ es grande. \square

Observación 5.24 Como $s_1 b_1 - a_1$ es positivo para $n \geq 473$, entonces $d_1(\mu, 0)$ se anula en el punto $\mu_1 = -a_1/b_1$ que se encuentra en el intervalo $(-s_1, 0)$. De hecho, para $n \geq 473$ y $\mu \in (-s_1, \infty)$, se puede probar que la gráfica de $d_1(\mu, \nu) = 0$ es como la de la figura (5.6).

Para $n \geq 12$ usando que $s_2 > n$ podemos probar la desigualdad $c_1(\nu) < c_1(-\nu)$ para $\nu > 0$, entonces $d_1(\mu, \nu) < d_1(\mu, -\nu)$ para $\nu > 0$. Sean m_{\pm} los mínimos de las funciones $\mu_{\pm}(\nu)$, de lo anterior encontramos que $m_+ < m_-$ para $n \geq 12$. De la misma manera para $n \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$ podemos probar que $m_- > m_+$ usando que $s_2 < n$.

Proposición 5.25 Para masas positivas, $\mu > 0$, tenemos los siguientes casos.

- (a) Para $n \leq 6$, el determinante $\det M_1(\nu)$ no se anula si $\mu < m_0$, se anula en $\{\nu_-, \bar{\nu}_-, \pm 1\}$ con $\nu_- < \bar{\nu}_- < 0$ si $\mu \in (m_0, \mu_1)$ y se anula en $\{\nu_{\pm}, \pm 1\}$ con $\nu_- < 0 < \nu_+ < 1$ si $\mu \in (\mu_1, \infty)$.
- (b) Para $n \geq 12$, el determinante $\det M_1(\nu)$ no se anula si $\mu < m_+$, se anula en $\{\bar{\nu}_+, \nu_+, \pm 1\}$ si $\mu \in (m_+, m_-)$ y se anula en $\{\bar{\nu}_{\pm}, \nu_{\pm}, \pm 1\}$ si $\mu \in (m_-, \infty)$, en donde los puntos satisfacen las desigualdades

$$-1 < \nu_- < \bar{\nu}_- < 0 < \bar{\nu}_+ < \nu_+ < 1.$$

De manera similar para $7 \leq n \leq 11$ encontramos que $\det M_1(\nu)$ no se anula si $\mu < m_-$, se anula en $\{\bar{\nu}_-, \nu_-, \pm 1\}$ si $\mu \in (m_-, m_+)$ y se anula en $\{\bar{\nu}_{\pm}, \nu_{\pm}, \pm 1\}$ si $\mu \in (m_+, \infty)$.

Además, el cambio de índice de Morse en los puntos anteriores es

$$\eta_1(\pm 1) = 0, \eta_1(\bar{\nu}_{\pm}) = -1 \text{ y } \eta_1(\nu_{\pm}) = 1.$$

Prueba. La traza de $M_1(\nu)$ es

$$T_1 = \mu\omega(\nu - 1)^2 + 2\omega(\nu^2 + 1) + \mu(n/2 + 1) + 2\alpha_1.$$

Como la traza de $M_1(\nu)$ es positiva para $\mu > 0$, el índice de Morse es $n_1 = 1$ cuando $\det M_1$ es negativo y $n_1 \in \{0, 2\}$ cuando $\det M_1$ es positivo. Definamos a Ω como la componente conexa donde $d_1(\mu, \nu)$ es negativo (ver la gráfica), para $n \geq 7$ el conjunto Ω es $\{(\mu, \nu) : \mu > \mu_{\pm}(\nu)\}$. Por lo tanto

$n_1 = 1$ en $\Omega - \{(\mu, \pm 1) : \mu > 0\}$. Además, como $M_1(0, \nu)$ tiene valores propios 0 , $s_1(\nu - 1)^2$ y $s_1(\nu + 1)^2 + 2\alpha_1$, entonces $n_1(\varepsilon, \nu) \leq 1$ para ε cercano a cero. Como $n_1 \in \{0, 2\}$ y $n_1 \leq 1$ en $\Omega^c - \{(\mu, \pm 1) : \mu > 0\}$, entonces $n_1 = 0$ en Ω^c . Por lo tanto $\eta_1(\pm 1) = 0 - 0$, $\eta_1(\bar{\nu}_\pm) = 0 - 1$ y $\eta_1(\nu_\pm) = 1 - 0$. \square

Por lo tanto, en el problema de los $n+1$ -cuerpos para $n \in \{3, \dots, 6\}$, el equilibrio relativo poligonal para $k \in \{1, n - 1\}$ con $\mu > \mu_1$ tiene una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k . Además, para $\mu \in (m_0, \mu_1)$ tiene dos ramas de bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_{n-1} .

Para $n \in \{7, \dots, 11\}$ el equilibrio relativo poligonal para $k = 1$ con $\mu > m_-$ y para $k = n - 1$ con $\mu > m_+$, tiene dos ramas de bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k .

Para $n \in \{12, 13, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para $k = 1$ con $\mu > m_+$ y para $k = n - 1$ con $\mu > m_-$, tiene dos ramas de bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k .

Para $\mu = 0$ tenemos que

$$M_1(\nu) = \begin{pmatrix} s_1\nu^2 + s_1 + \alpha_1 & \alpha_1 i + 2\nu s_1 i \\ -\alpha_1 i - 2\nu s_1 i & s_1\nu^2 + s_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

La matriz en este caso tiene valores propios $s_1(\nu - 1)^2$ y $s_1(\nu + 1)^2 + 2\alpha_1$. Por lo tanto $n_1(\nu) = 0$ para todo ν y no existe bifurcación.

Estabilidad lineal

Para conocer la estabilidad lineal del equilibrio relativo poligonal recordemos la observación (2.9). Nosotros probamos que el determinante $\det M_k(\nu)$ para $k \in \{2, \dots, n - 2\}$ se anula en cuatro puntos distintos si $\mu > m_*$. Además, a pesar de que el determinante $\det M_n(\nu)$ tiene dos ceros distintos y en cero doble en $\nu = 0$, esto no contribuye a desestabilizar el equilibrio poligonal debido a las simetrías.

Ahora bien, para $k \in \{1, n - 1\}$ probamos que el determinante $\det M_k(\nu)$ nunca se anule en seis puntos para $n \in \{3, \dots, 6\}$, por lo que el equilibrio poligonal nunca es estable para $n \in \{3, \dots, 6\}$ [Rob00]. Además, para $k \in \{1, n - 1\}$ probamos que el determinante $\det M_k(\nu)$ se anule en seis puntos distintos para $n \in \{7, 8, \dots\}$ sólo cuando $\mu > m_*$. Por lo tanto el problema de los $n + 1$ -cuerpos es linealmente estable sólo cuando $\mu > m_*$.

Según el artículo [Rob00], el bloque $M_{n/2}$ es el que determina el mas grande m_* . De la observación 5.21 tenemos que el equilibrio poligonal es linealmente estable para $\mu > m_+ = b + \sqrt{b^2 + c}$ con

$$b = 2(b_{n/2} + \alpha_{n/2} - s_1) \text{ y } c = 4(a_{n/2} - (\alpha_{n/2} - s_1)^2).$$

A continuación vamos a encontrar a m_+ con un análisis asintótico para recuperar el resultado de Maxwell sobre la estabilidad de los anillos de Saturno, [Rob00].

En el apéndice probamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_1/n^3 = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n/2}/n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n/2-1}/n^3 = \sigma.$$

Tenemos que $\gamma_{n/2} = 0$ y de los límites anteriores obtenemos que $\alpha_{n/2}/n^3 \rightarrow \sigma/2$ y que $\beta_{n/2}/n^3 \rightarrow (3/2)\sigma$. De las definiciones de $a_{n/2}$ y $b_{n/2}$ tenemos que $a_{n/2}/n^6 \rightarrow -2\sigma^2$ y $b_{n/2}/n^3 \rightarrow 6\sigma$. Por lo tanto $b/n^3 \rightarrow 13\sigma$ y $c/n^6 \rightarrow -9\sigma^2$. Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_+/n^3 = (13 + 4\sqrt{10})\sigma \text{ con } \sigma = \frac{1}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}.$$

El límite anterior para m_+/n^3 es el que se encuentra en [Rob00] para la estabilidad de los anillos de Saturno.

Observación 5.26 *En las proposiciones anteriores hemos probado que todos los bloques $M_k(\mu, \nu)$ son invertibles para $|\nu| > 1$ si μ es suficientemente grande. Como hemos hecho la normalización $\lambda = (\mu + s_1)^{1/2}\nu$, concluimos que el bloque $M(\mu, \lambda)$ es invertible para $|\lambda| > (\mu + s_1)^{1/2}$ si μ es suficientemente grande.*

5.6. Las cargas

A continuación vamos a encontrar las ecuaciones de movimiento de n partículas con cargas negativas. Supondremos que las partículas negativas interactúan con un núcleo que está fijo con carga positiva. Podemos pensar que esas ecuaciones describen un modelo simplificado del átomo, las cargas negativas representan a los electrones y la carga positiva al núcleo. En ese caso las cargas de los electrones y protones son iguales y de signos contrarios.

120 Bifurcación periódica: cuerpos, vórtices, filamentos y cargas

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ sea q_j la posición de una de las partículas con carga negativa $-p$ y masa m . Además, sea q_0 la posición de la partícula con carga positiva μp y masa ρm . Vamos a suponer que las masas son tan pequeñas comparadas a las cargas que la fuerza de gravedad es despreciable comparada con la fuerza electrostática de Coulomb, entonces las ecuaciones para las cargas son

$$\begin{aligned} \rho m \ddot{q}_0 &= -\mu \kappa p^2 \sum_{i=1}^n \frac{q_0 - q_i}{\|q_0 - q_i\|^3} \text{ y para } j \in \{1, \dots, n\} \\ m \ddot{q}_j &= -\mu \kappa p^2 \frac{q_j - q_0}{\|q_j - q_0\|^3} + \sum_{i=1, (i \neq j)}^n \kappa p^2 \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3}. \end{aligned}$$

Podemos adimensionalizar las ecuaciones anteriores de tal manera que $\kappa p^2/m = 1$. También vamos a suponer que la razón de masas ρ es tan grande que en la primera ecuación $\ddot{q}_0 = 0$, es decir, podemos suponer que el núcleo está fijo $q_0 = 0$. Por lo tanto para $j \in \{1, \dots, n\}$ las ecuaciones son

$$\ddot{q}_j = -\mu \frac{q_j}{\|q_j\|^3} + \sum_{i=1, (i \neq j)}^n \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3}.$$

Para cambiar a coordenadas rotantes definimos a $u_j(t)$ como $q_j(t) = e^{\sqrt{\omega}tJ} u_j(t)$. Como $\ddot{q}_j = e^{\sqrt{\omega}tJ} (\ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega}J\dot{u}_j - \omega u_j)$, entonces las ecuaciones en coordenadas rotantes son

$$\ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega}J\dot{u}_j = \nabla \mathcal{V}(u) \text{ con}$$

$$\mathcal{V}(u) = \sum_{j=1}^n (\omega \|u_j\|^2 / 2 + \mu \phi_2(\|u_j\|)) - \sum_{i < j} \phi_2(\|u_j - u_i\|),$$

en donde $\phi_2'(x) = -1/x^2$. Sea $u = (u_1, \dots, u_n)$ el vector de posiciones, entonces la ecuación en forma vectorial es

$$\ddot{u} + 2\sqrt{\omega}J\dot{u} = \nabla \mathcal{V}(u).$$

Recordemos que en el problema de los n -cuerpos en la ausencia del cuerpo central la ecuación es $\ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega}J\dot{u}_j = \nabla V(u)$. En ese caso probamos que $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ con $a_j = e^{ij\zeta}$ es un equilibrio relativo cuando la frecuencia de rotación es $\omega = s_1$, es decir, que \bar{a} es un punto crítico del potencial

$$V(u) = s_1 \|u\|^2 / 2 + \sum_{i < j} \phi_2(\|u_j - u_i\|).$$

Por lo tanto, el potencial de las cargas en términos del potencial de los cuerpos es

$$\mathcal{V}(u) = \sum_{j=1}^n ((\omega + s_1) \|u_j\|^2 / 2 + \mu\phi_2(\|u_j\|)) - V(u).$$

De la igualdad anterior podemos concluir que \bar{a} es un equilibrio de $\mathcal{V}(u)$ cuando el gradiente de la suma anterior es cero, lo cual sucede para $\omega = \mu - s_1$. Por lo tanto, para que las ecuaciones estén bien definidas necesitamos que la frecuencia ω sea positiva, es decir que $\mu > s_1$.

Observación 5.27 *La igualdad entre los potenciales es consecuencia de que la fuerza de gravedad y la de Coulomb son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancia.*

Para buscar bifurcación de equilibrios relativos en el problema de los $n+1$ -cuerpos teníamos que encontrar los bloques de representaciones irreducibles $B_k = \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta}$, donde A_{ij} son las matrices de 2×2 de $D^2V(\bar{a})$. Del mismo modo, en el problema de las cargas necesitamos encontrar los bloques de las representaciones irreducibles

$$\mathcal{B}_k(\mu) = \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta},$$

donde \mathcal{A}_{ij} son las matrices de 2×2 de $D^2\mathcal{V}(\bar{a})$.

Proposición 5.28 *Para $k \in \{1, \dots, n\}$ el bloque $\mathcal{B}_k(\mu)$ en el problema de las cargas es*

$$\mathcal{B}_k(\mu) = \frac{3}{2}\mu(I + R) - (s_1 + \alpha_k)I + \beta_k R + \gamma_k iJ.$$

Prueba. Como la matriz de segundas derivadas de $\phi_2(\|a_n\|)$ es

$$D^2\phi_2(\|a_n\|) = 3\text{diag}(1, 0) - I,$$

de la igualdad entre los potenciales tenemos que $\mathcal{A}_{nj} = -A_{nj}$ para $j \in \{1, \dots, n-1\}$ y que $\mathcal{A}_{nn} = 3\text{diag}(1, 0) - A_{nn}$. Por lo tanto $\mathcal{B}_k = 3\mu\text{diag}(1, 0) - B_k$. Concluimos el resultado de la proposición (4.18) donde encontramos que $B_k = (s_1 + \alpha_k)I - \beta_k R - \gamma_k iJ$. \square

Proposición 5.29 Para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ el determinante $\det \mathcal{B}_k(\mu)$ es negativo para $\mu \in (s_1, \infty)$.

Prueba. Como en el capítulo cuatro tenemos que el determinante de \mathcal{B}_k es $\det \mathcal{B}_k = -b_k \mu + a_k$ con

$$a_k = (s_1 + \alpha_k)^2 - \gamma_k^2 - \beta_k^2 \text{ y } b_k = 3(s_1 + \alpha_k + \beta_k)$$

para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$. Para $k \in \{2, \dots, [n/2]\}$ probamos en el capítulo cuatro que $s_1 b_k - a_k$ es positivo. Para $k = 1$ como $\alpha_1 = \gamma_1$ y $\beta_1 = 0$, entonces $b_1 = 3(s_1 + \alpha_1)$ y $a_1 = s_1(s_1 + 2\alpha_1)$. Por lo tanto $s_1 b_1 - a_1 = s_1(\alpha_1 + 2s_1)$ es también positivo. Como $b_k > 0$, para $\mu > s_1$ tenemos que $\det \mathcal{B}_k(\mu) < -b_k s_1 + a_k < 0$. Concluimos el resultado de que $\det \mathcal{B}_k = \det \mathcal{B}_{n-k}$. \square

Recordemos del capítulo cuatro que existe bifurcación de equilibrios relativos cuando $\sigma_k(\mu)$ cambia de signo, en donde σ_k es el signo de $\det \mathcal{B}_k$ para $k \in \mathbb{N} \cap [1, n/2)$ y σ_k es el signo de $e_1^T \mathcal{B}_k e_1$ para $k \in \{n/2, n\}$. Para $k = n$ el signo de $e_1^T \mathcal{B}_n e_1 = 3(\mu - s_1)$ nunca cambia para $\mu > s_1$. Por lo tanto, en el problema de las cargas para $\mu \in (s_1, \infty)$, el equilibrio relativo poligonal no tiene bifurcación de equilibrios relativos planares.

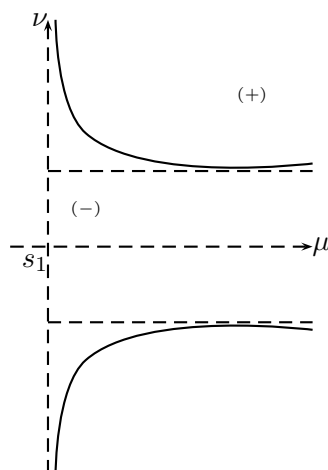
Para encontrar bifurcación de soluciones periódicas en el problema de los $n + 1$ -cuerpos teníamos que estudiar los bloques $M_k(\nu, \mu) = \omega[\nu^2 I - 2\nu(iJ)] + B_k(\mu)$ con $\omega = \mu + s_1$. De la misma manera para las cargas tenemos que estudiar los bloques

$$\mathcal{M}_k(\nu, \mu) = \omega[\nu^2 I - 2\nu(iJ)] + \mathcal{B}_k(\mu) \text{ con } \omega = \mu - s_1.$$

Observación 5.30 En la proposición (4.18) encontramos para el problema de los $n + 1$ -cuerpos que $B_k(\mu) = \frac{3}{2}\mu(I + R) + (s_1 + \alpha_k)I - \beta_k R - \gamma_k iJ$ para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$, en donde μ es la razón entre las masas. Por lo tanto para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$ tenemos que $\mathcal{B}_k(\mu) = -B_k(-\mu)$ y que

$$\mathcal{M}_k(\nu, \mu) = (\mu - s_1)[\nu^2 I - 2\nu(iJ)] - B_k(-\mu) = -M_k(\nu, -\mu).$$

De la igualdad anterior tenemos que el análisis de los bloques en las cargas es el análisis de los bloques en problema de los $n + 1$ -cuerpos cuando $\mu < -s_1$, ese análisis no lo hicimos anteriormente pues las ecuaciones de los cuerpos no estaban bien definidas para $\mu < -s_1$.

Figura 5.8: Gráfica de $d_k(\mu, \nu) = 0$.

Proposición 5.31 Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ el determinante $\det \mathcal{M}_k(\mu)$ se anula en un punto positivo $\nu_k(\mu)$ para $\mu \in (s_1, \infty)$ con

$$\eta_k(\nu_k) = 1.$$

Además, el punto ν_k es único para $k \in \{1, n-1\}$ si $n \geq 7$ y para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$. Para $k \neq n$ la función $\nu_k(\mu)$ es decreciente de $\nu_k(s_1) = \infty$ a $\nu_k(\infty) = 1$.

Prueba. Para $k = n$ tenemos que $\det \mathcal{M}_n(\nu, \mu) = \omega^2 \nu^2 (\nu^2 - 1)$, por lo que el determinante $\det \mathcal{M}_n(\mu)$ se anula sólo en $\nu_n = 1$. Para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ el determinante de $\mathcal{M}_k(\nu)$ es

$$d_k(\mu, \nu) = \omega^2 \nu^4 - (2\alpha_k + \omega - s_1)\omega \nu^2 + 4\omega \gamma_k \nu + a_k - \mu b_k$$

con $\omega = \mu - s_1$. Como $d_k(\mu, 0) = a_k - \mu b_k$ es negativo y $d_k(\mu, \nu)$ es positivo para ν grande, entonces existe un punto positivo ν_k donde el determinante $\det \mathcal{M}_k(\mu)$ se anula. Para $\mu > s_1$ tenemos que $\sigma = 1$ pues $e_1^T \mathcal{B}_n e_1 = 3(\mu - s_1)$. Además, como $d_k(\mu, 0) = a_k - \mu b_k$ es negativo, entonces $n_k(0) = 1$. Para ν grande $\mathcal{M}_n(\nu, \mu)$ tiene valores propios positivos, entonces $n(\infty) = 0$. Por lo tanto $\eta_k(\nu_k) = 1 - 0$.

Podemos escribir al determinante como $d_k(\omega, \nu) = \nu^2(\nu^2 - 1)\omega^2 - b\omega + c$ con

$$b = \nu^2(2\alpha_k - s_1) - 4\nu\gamma_k + b_k \text{ y } c = a_k - s_1 b_k.$$

124 Bifurcación periódica: cuerpos, vórtices, filamentos y cargas

Como c es negativo, la ecuación cuadrática $d_k(\omega, \nu) = 0$ tiene sólo una raíz positiva $\omega_+(\nu)$ para $\nu^2 > 1$. Además, para $\nu^2 < 1$ usando que $\gamma_k < \alpha_k$ tenemos

$$b \geq 2\alpha_k(\nu - 1)^2 + b_k - 2\alpha_k - s_1 \geq \alpha_k + 2s_1 + \beta_k > 0,$$

entonces la ecuación cuadrática $d_k(\omega, \nu) = 0$ no tiene raíces positivas para $\nu^2 < 1$. Por lo tanto, la función inversa $\nu(\mu) \geq 1$ es monótona decreciente con $\nu_k(\mu) \rightarrow \infty$ cuando $\mu \rightarrow s_1$ y $\nu_k(\mu) \rightarrow 1$ cuando $\mu \rightarrow \infty$.

Finalmente, si probamos que el determinante en los puntos críticos $d'_k(\nu_c) = 0$ es negativo para $\omega > 0$, entonces el punto ν_k es único. De la ecuación $d'_k(\nu_c) = 0$ encontramos que los puntos críticos satisfacen

$$4\omega(\omega\nu_c^4 - (2\alpha_k + \omega - s_1)\nu_c^2/2 + \gamma_k\nu_c) = 0.$$

Por lo tanto el determinante en los puntos críticos es

$$d_k(\omega, \nu_c) = -(2\alpha_k + \omega - s_1)\omega\nu_c^2/2 + 3\omega\gamma_k\nu_c + a_k - (\omega + s_1)b_k.$$

Ahora bien para $\omega \rightarrow 0$ tenemos que $d_k(\mu, \nu_c) \rightarrow a_k - s_1b_k < 0$, entonces el determinante $d_k(\mu, \nu_c)$ es negativo en los puntos críticos para ω cercano a cero. Si existiera algún punto crítico donde el determinante fuera positivo, de la continuidad tendría que existir algún $\omega > 0$ tal que $d_k(\omega, \nu_c) = 0$. Pero no existen soluciones de la ecuación cuadrática $d_k(\omega, \nu_c) = 0$ si probamos que el discriminante es negativo.

El discriminante es

$$-2b_k\omega^3 + (9\gamma_k^2 + 2a_k - 4\alpha_k b_k)\omega^2 + 2(a_k - s_1b_k)(2\alpha_k - s_1)\omega.$$

De las definiciones de a_k y b_k tenemos que

$$\begin{aligned} 9\gamma_k^2 + 2a_k - 4\alpha_k b_k &= -10\alpha_k^2 - 12\alpha_k\beta_k - 8\alpha_k s_1 - 2\beta_k^2 + 7\gamma_k^2 + 2s_1^2 \\ &\leq -3\alpha_k^2 - 12\alpha_k\beta_k - 2\beta_k^2 < 0, \end{aligned}$$

pues $\alpha_k \geq \gamma_k$ y $4\alpha_k > s_1$. Además b_k es positivo y $a_k - s_1b_k$ es negativo, entonces el discriminante es negativo para $\omega > 0$ si $2\alpha_k > s_1$. Por lo tanto, el determinante en los puntos críticos $d_k(\mu, \nu_c)$ es negativo para $\omega > 0$ si $2\alpha_k > s_1$. Concluimos el resultado del hecho que siempre se satisface $2\alpha_k > s_1$ para $k \in \{2, \dots, n-2\}$ y del lema (5.22) en el que probamos que $2\alpha_1 > s_1$

para $n \geq 7$. □

Por lo tanto, en el problema de las cargas para $n \in \{2, 3, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ con $\mu \in (s_1, \infty)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_k . La bifurcación anterior no puede retornar a \bar{a} para $k \in \{2, \dots, n-2, n\}$ ni para $k \in \{1, n-1\}$ si $n \geq 7$. Por lo tanto la bifurcación o es inadmisibles o va a otros puntos de bifurcación distintos a \bar{a} . De la observación (2.9) tenemos que el equilibrio relativo poligonal nunca es estable para $\mu \in (s_1, \infty)$.

Observación 5.32 *En el átomo cuando el número de electrones es igual al número de protones tenemos que $\mu = n$. Con un análisis numérico encontramos que $\mu = n > s_1$ sólo para $n \in \{2, 3, \dots, 472\}$.*

5.7. Comentarios

En este capítulo analizamos la bifurcación de soluciones periódicas del equilibrio relativo poligonal. Recordemos que el equilibrio poligonal está formado de cuerpos en el centro y en los vértices de un polígono regular. Nosotros encontramos bifurcación de soluciones periódicas (en coordenadas rotantes) con simetrías G_k , es decir, soluciones 2π -periódicas en las que los cuerpos con masas iguales satisfacen la relación

$$u_{j+1}(t) = e^{J\zeta} u_j(t - k\zeta)$$

con $\zeta = 2\pi/n$ y $u_j = u_{j+kn}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Vimos que en coordenadas fijas esas soluciones son en general cuasiperiódicas. Además, en algunos casos particulares para $\mu = 0$ esas soluciones pueden ser coreografías, en el sentido que todos los cuerpos siguen la misma curva sin colisionar.

Como no podemos recapitular completamente todos los casos en los que encontramos bifurcación, sólo vamos a resumir de manera inexacta qué es lo que hemos encontrado.

- En el problema de los vórtices, el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ es la razón de circulación entre el vórtice central y un vórtice del polígono. En este caso probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ con $\mu > \mu_k$ existe una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k .

- En el problema de ondas viajeras en filamentos casi paralelos, el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ es la razón de circulación entre el filamento central y un filamento del polígono. Probamos que para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ con $\mu < \mu_k$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ existe una bifurcación global de ondas viajeras periódicas con velocidad de onda γ y con simetrías G_k . Además, probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ con $\mu > \mu_k$ existen dos ramas de bifurcación global de ondas viajeras periódicas con velocidad de onda γ y con simetrías G_k , para las velocidades de onda γ que son mayores que una función del orden de $\sqrt{\mu + s_1}$.
- En el problema de los $n+1$ -cuerpos, el parámetro $\mu > 0$ es la razón de masas entre el cuerpo central y un cuerpo del polígono. Probamos que para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ con $\mu < \mu_k$ existe una bifurcación global con simetrías G_k . Además, probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ con $\mu > m_+$ existen dos ramas de bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k .
- En el problema de las cargas, el parámetro $\mu > s_1$ es la razón de las cargas entre la carga positiva del centro y una carga negativa del polígono. Probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ con $\mu > s_1$ el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global con simetrías G_k .

Maxwell utilizó el equilibrio relativo poligonal para explicar la estabilidad de los anillos de Saturno. Desde entonces se han publicado muchos resultados de la estabilidad del equilibrio relativo poligonal. Debido a que el problema de bifurcación y estabilidad lineal están relacionados, nuestro análisis del espectro está relacionado a muchos de esos resultados, en particular comentaremos los siguientes.

- En el problema de los vórtices recuperamos el resultado de [CS00] de que el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable para $\mu \in (s_1^2, \mu_{[n/2]})$.
- En el problema de los $n+1$ -cuerpos recuperamos el resultado del artículo [Rob00], en donde se prueba que el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable sólo para $n \geq 7$ cuando μ es suficientemente grande. En particular, recuperamos el resultado en [Rob00] que obtuvo Maxwell de que el equilibrio relativo poligonal es estable para μ del orden de $(13 + 4\sqrt{10})\sigma n^3$ cuando n es grande.

En general no se había probado la bifurcación global con las simetrías que encontramos. Aunque la existencia local de soluciones periódicas (sin simetrías) pudiera deducirse del teorema de Liapunov en los casos que se tenía un análisis de estabilidad, por ejemplo para los cuerpos [Rob00] y para los vórtices [CS00]. Sin embargo, no se habían demostrado ni la bifurcación global ni se habían encontrado esas simetrías. Creemos que lo anterior se debe a la relación que existe entre los generadores y las integrales primeras que generan los grupos de simetrías (relaciones de ortogonalidad).

Nosotros realizamos un análisis cualitativo de los espectros usando las propiedades de las sumas s_k que dimos en el apéndice. Para el caso de los vórtices esas sumas se encuentran explícitamente en el artículo [CS00], en donde también se hace un análisis completo del espectro para los vórtices. Sin embargo, en los demás casos no existe en la literatura un análisis del espectro similar al que pudimos realizar. Para los cuerpos y cargas el análisis del espectro se basa en el hecho que los s_k son crecientes, lo cual probamos en el apéndice independientemente de la prueba en [CF08].

Otra de nuestras aportaciones es el cambio de variables que realizamos en el capítulo cuatro, el cual nos permitió abordar con el mismo método distintos problemas que tienen esas simetrías. Por ejemplo, con ese cambio de variables también estudiaremos en el capítulo siete el problema de una latiz circular no lineal de Schrödinger.

Capítulo 6

Bifurcación periódica espacial del satélite y de los cuerpos

En este capítulo analizamos la bifurcación de soluciones periódicas espaciales. En la primera sección estudiamos el problema del satélite y en la segunda sección analizamos el problema de los n -cuerpos. Dado que ya hemos analizado la bifurcación planar en los capítulos anteriores, en este capítulo sólo estudiamos el espectro que origina la bifurcación espacial.

6.1. El satélite

6.1.1. Planteamiento del problema

A continuación vamos a plantear la ecuación de movimiento de un satélite en el espacio. Sea $q_j(t) \in \mathbb{R}^3$ la posición del cuerpo con masas m_j , entonces las ecuaciones de movimiento de Newton son

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=0}^n \sum_{(i \neq j)} m_i m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^{\alpha+1}}.$$

A continuación vamos a cambiar las ecuaciones a un sistema de coordenadas rotantes. Sea J la matriz symplectica, definamos a las matrices \bar{I} y \bar{J} como

$$\bar{I} = \text{diag}(1, 1, 0) \text{ y } \bar{J} = \text{diag}(J, 0).$$

Para cambiar a coordenadas rotantes definamos a u_i como $q_j(t) = e^{\omega t \bar{J}} u_j(t)$. Las ecuaciones en coordenadas rotantes son

$$m_j(\ddot{u}_j + 2\omega \bar{J} \dot{u}_j - \bar{I} \omega^2 u_j) = - \sum_{i=0}^n \sum_{(i \neq j)} m_i m_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^{\alpha+1}}.$$

Haciendo tender m_0 a cero tenemos que las ecuaciones de los cuerpos primarios se desacoplan del satélite

$$m_j(\ddot{u}_j + 2\omega \bar{J} \dot{u}_j - \bar{I} \omega^2 u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{(i \neq j)} m_i m_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^{\alpha+1}}.$$

Vamos a suponer que los cuerpos primarios forman un equilibrio relativo. Podemos suponer que la frecuencia de rotación es uno. Por lo tanto las posiciones \bar{a}_i forman un equilibrio si

$$\bar{I} \bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{(i \neq j)} m_i \frac{\bar{a}_j - \bar{a}_i}{\|\bar{a}_j - \bar{a}_i\|^{\alpha+1}}.$$

De hecho, a continuación vamos a probar que todos los equilibrios relativos son planares.

Proposición 6.1 *Si las $\bar{a}_j = (a_j, \alpha_j)$ con $a_j \in \mathbb{R}^2$ forman un equilibrio relativo, entonces $\alpha_j = 0$ y las a_j forman un equilibrio relativo planar*

$$a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{(i \neq j)} m_i \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^{\alpha+1}}.$$

Prueba. Supongamos que $\alpha_j > \alpha_i$ para algún j , entonces

$$\sum_{i=1}^n \sum_{(i \neq j)} m_i \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^{\alpha+1}} > 0.$$

Pero en un equilibrio relativo la suma anterior tiene que ser cero, entonces $\alpha_j = \alpha_i$ para todo i y podemos suponer que $\bar{a}_j = (a_j, 0)$ con una translación en z . Usando que $\|\bar{a}_i - \bar{a}_j\| = \|a_i - a_j\|$ concluimos que las a_j forman un equilibrio relativo planar. \square

Observación 6.2 *Las configuraciones centrales corresponde a soluciones de*

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n \underset{(j \neq i)}{m_j} \frac{\bar{a}_i - \bar{a}_j}{\|\bar{a}_i - \bar{a}_j\|^{\alpha+1}}.$$

Nótese que los equilibrios relativos pueden ser generados por casos particulares de configuraciones centrales, sin embargo, no todas las configuraciones centrales generan equilibrios relativos, pues las configuraciones centrales pueden ser espaciales.

La ecuación de movimiento del satélite es

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\bar{J}\dot{x} &= \nabla \bar{V}(x) \text{ con} \\ \bar{V}(x) &:= \frac{\|\bar{I}x\|^2}{2} + \sum_{j=1}^n m_j \phi_\alpha(\|x - (a_j, 0)\|). \end{aligned}$$

Todos los equilibrios del satélite son planares, pues un equilibrio satisface

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(x_0) = -z \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\|x_0 - (a_j, 0)\|^{\alpha+1}} \right).$$

El operador diferencial para encontrar bifurcación de soluciones periódicas es $\mathcal{D}(\nu)x = -\nu^2 \ddot{x} - 2\nu \bar{J}\dot{x}$. El conjunto de colisión es $\Psi = \{a_1, \dots, a_n\}$ y las trayectorias libres de colisión son

$$H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Psi) = \{x \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^3) : x(t) \neq a_j\}.$$

El operador para bifurcación $f : H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Psi) \rightarrow L_{2\pi}^2$ es

$$f(\nu, x) = -\nu^2 \ddot{x} - 2\nu \bar{J}\dot{x} + \nabla \bar{V}(x).$$

En este caso tenemos la acción espacial de \mathbb{Z}_2 como

$$\rho(\kappa) = R = \text{diag}(1, 1, -1).$$

Con esa acción tenemos que $\bar{V}(x)$ es \mathbb{Z}_2 -invariante. Por lo tanto $f(x)$ es $G = \mathbb{Z}_2 \times S^1$ -ortogonal. La relación de ortogonalidad de $f(x)$ se obtiene exactamente igual que en el caso planar.

Como todos los equilibrios relativos son planares, el grupo de isotropía de un equilibrio x_0 es $\Gamma_{x_0} = \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto

$$G_{x_0} = \mathbb{Z}_2 \times S^1.$$

6.1.2. Teorema de bifurcación

El operador $\mathcal{D}(\nu)x$ satisface la hipótesis (2.1). Por lo tanto podemos realizar la reducción global de Liapunov-Schmidt. De la reducción global (2.3) encontramos que la linealización de la función de bifurcación en un equilibrio x_0 tiene bloques $M(l\nu)$ con

$$M(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda\bar{J} + D^2\bar{V}(x_0).$$

Existen dos subespacios de representaciones irreducibles de $\Gamma_{x_0} = \mathbb{Z}_2$ dados por

$$V_0 = \mathbb{C}^2 \times \{0\} \text{ y } V_1 = \{0\} \times \mathbb{C}.$$

En V_0 la acción de \mathbb{Z}_2 es trivial y en V_1 la acción de \mathbb{Z}_2 es $\rho(\kappa) = -1$. En este caso, no necesitamos hacer cambio de variables para probar del lema de Schur que

$$M(\lambda) = \text{diag}(M_0(\lambda), M_1(\lambda)).$$

También podemos deducir lo anterior del hecho que $M(\lambda)$ conmuta con R , pues $M(\lambda)$ es \mathbb{Z}_2 -equivariante.

La acción de $G_{x_0} = \mathbb{Z}_2 \times S^1$ en el bloque $M_0(l\nu)$ es $(\kappa, \varphi)x = e^{i\varphi}x$. El grupo de isotropía en el bloque $M_0(\nu)$ es el grupo generado por κ , $G_0 = \mathbb{Z}_2$. Las bifurcaciones de $M_0(\nu)$ tienen simetrías G_0 , por lo que son planares y coinciden con las soluciones que obtuvimos en el capítulo tres.

En el bloque $M_1(l\nu)$ la acción de $G_{x_0} = \mathbb{Z}_2 \times S^1$ es $(\kappa, \varphi)x = -e^{i\varphi}x$. El grupo de isotropía en el bloque $M_1(\nu)$ es el grupo generado por (κ, π) , $G_1 = \tilde{\mathbb{Z}}_2$.

De la definición (2.6) obtenemos que

$$\eta_1(\lambda) = \sigma(n_1(\lambda - \rho) - n_1(\lambda + \rho)),$$

donde $n_1(\lambda)$ es el número de valores propios de $M_1(\lambda)$ y σ es el signo del determinante de $M(0)$ restringido al espacio de puntos fijos de \mathbb{Z}_2 ,

$$\sigma = \text{sgn}(\det M_0(0)).$$

De los teoremas de bifurcación global (2.12) y local (2.8) tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.3 *Si $\eta_1(\nu_0)$ es distinto de cero, en ν_0 existe una bifurcación global de soluciones periódicas con grupo de isotropía G_1 .*

Como sólo existe una bifurcación espacial, la bifurcación no puede retornar al mismo equilibrio. Por lo tanto, la bifurcación es inadmisibles o va a un punto de bifurcación espacial de otro equilibrio.

6.1.3. Simetrías

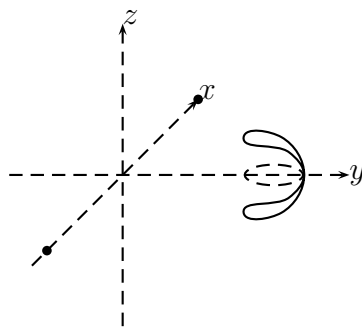


Figura 6.1: Ejemplo de una solución periódica espacial con simetrías G_1 .

Un solución $x_0 = (x, y, z)$ con simetrías G_1 satisface

$$x_0(t) = (\kappa, \pi)x_0(t) = Rx_0(t + \pi).$$

Por lo tanto

$$x(t) = x(t + \pi), y(t) = y(t + \pi) \text{ y } z(t) = -z(t + \pi).$$

Como $z(t) = -z(t + \pi)$, existe al menos un t_0 tal que $z(t_0) = z(t_0 + \pi) = 0$. Además, la proyección de la curva en el plano (x, y) es π -periódica. Por lo tanto la curva recorre dos veces la proyección en el plano una vez con $z(t)$ y una segunda vez con $-z(t)$. Cuando sólo existe un t_0 , las soluciones son ocho espaciales alrededor del equilibrio. Recordemos que las soluciones anteriores están definidas en coordenadas rotantes, por lo que las soluciones son cuasiperiódicas en coordenadas fijas.

6.1.4. Análisis del espectro

A continuación vamos a calcular explícitamente al bloque $M_1(\lambda)$.

Proposición 6.4 Sea $d_j = \|x_0 - (a_j, 0)\|$, entonces el bloques $M_1(\lambda)$ es

$$M_1(\lambda) = \lambda^2 - \sum_{j=1}^n m_j / d_j^{\alpha+1}.$$

Además, el bloque $M_0(\lambda)$ es igual al bloque $M(\lambda)$ del problema planar.

Prueba. Sea d_j la distancia del equilibrio $x_0 = (x, y, 0)$ al primario $a_j = (x_j, y_j, 0)$, entonces

$$D^2\phi(d_j) = \frac{\alpha + 1}{d_j^{\alpha+3}} \text{diag} \left(\begin{pmatrix} (x - x_j)^2 & (x - x_j)(y - y_j) \\ (x - x_j)(y - y_j) & (y - y_j)^2 \end{pmatrix}, 0 \right) - \frac{I}{d_j^{\alpha+1}}.$$

Usando la linealización del potencial planar V del capítulo tres tenemos que

$$D^2\bar{V}(x_0) = \text{diag} \left(D^2V(x_0), -\sum_{j=1}^n m_j/d_j^{\alpha+1} \right).$$

Como $M(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda\bar{J} + D^2\bar{V}(x_0)$, entonces

$$M(\lambda) = \text{diag} \left(\lambda^2 - 2i\lambda J + D^2V(x_0), \lambda^2 - \sum_{j=1}^n m_j/d_j^{\alpha+1} \right).$$

De lo anterior concluimos el resultado. □

En este caso necesitamos que la matriz $M(0)$ sea invertible (2.5). De la proposición anterior tenemos que $\sigma = \text{sgn}(\det M_0(0))$ con $M_0(0) = D^2V(x_0)$. Ahora vamos a encontrar los puntos donde existe bifurcación.

Proposición 6.5 *Sea ν_0 la raíz positiva de $\nu_0^2 = \sum_{j=1}^n m_j/d_j^{\alpha+1}$, entonces el determinante $\det M_1(\nu)$ se anula sólo en ν_0 con $\eta_1(\nu_0) = \sigma$.*

Prueba. El único punto donde $\det M_1(\nu)$ se anula es ν_0 . Como $M_1(\infty)$ es positiva y $M_1(0)$ es negativa, entonces $n_1(\infty) = 0$ y $n_1(0) = 1$. Por lo tanto $\eta_1(\nu_0) = \sigma(1 - 0)$. □

Por lo tanto, en el problema del satélite, cada equilibrio tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_0$ con simetrías G_1 . La bifurcación o es inadmisibles o va a un punto de bifurcación de otro equilibrio.

Probamos que $M_0(\lambda)$ es igual al bloque $M(\lambda)$ del problema planar. Recordemos que en la proposición (3.5) probamos que $\det M(\lambda)$ se anula sólo en ν_{\pm} .

Proposición 6.6 *Si se satisface la condición de no resonancia $\nu_0 \neq \nu_{\pm}/2l$, la bifurcación local en ν_0 es espacial, es decir $z(t) \neq 0$.*

Prueba. Tenemos que probar que cerca de (x_0, ν_0) no existan soluciones de la forma

$$x(t) = x(t + \pi), y(t) = y(t + \pi) \text{ y } z(t) = 0.$$

Las soluciones anteriores se encuentran en el espacio de puntos fijos del grupo generado por $\kappa \in \mathbb{Z}_2$ y $\pi \in S^1$. Pero la derivada de $f(x, \nu)$ restringida al espacio de puntos fijos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tiene bloques $M_0(2l\nu_0)$. Como la matriz $M_0(\nu)$ se anula sólo en ν_{\pm} , entonces la derivada $f'(x_0)|_{V^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}$ es invertible si $\nu_0 \neq \nu_{\pm}/2l$. Del teorema de la función implícita concluimos que si $\nu_0 \neq \nu_{\pm}/2l$, entonces no existen soluciones con simetrías $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ cerca de (x_0, ν_0) . \square

La condición $\nu_0 \neq \nu_{\pm}/2l$ aunque es suficiente, no es necesaria para garantizar que la bifurcación sea verdaderamente espacial.

Por lo tanto, en el problema del satélite, cada equilibrio inestable en el plano, sin ν_{\pm} , tiene una bifurcación global de soluciones periódicas espaciales con simetrías G_1 .

En el problema restringido de los tres cuerpos, en los puntos Lagrangianos probamos en la proposición (3.9) que $\nu_{\pm} \in (0, 1)$. Como $\nu_0 = 1$ en los puntos Lagrangianos, entonces siempre se satisface la relación $\nu_0 \neq \nu_{\pm}/2l$.

Vimos que en los puntos Eulerianos la matriz de derivadas es $D^2V(E_j) = \text{diag}(1 + 2\nu_0^2, 1 - \nu_0^2)$. Por lo tanto, el punto de bifurcación ν_+ es

$$\nu_+^2 = 1 - \nu_0^2/2 + (9\nu_0^4/4 - 2\nu_0^2)^{1/2}.$$

De la igualdad anterior tenemos que se satisface $4l^2\nu_0^2 \neq \nu_+^2$ cuando $9\nu_0^4/4 - 2\nu_0^2 \neq ((4l^2 + 1/2)\nu_0^2 - 1)^2$. Lo anterior es equivalente a $a\nu_0^4 - 2b\nu_0^2 + 1 \neq 0$ con $a = (4l^2 + 1/2)^2 - 9/4$ y con $b = 4l^2 - 1/2$. Como $b^2 - a = 9/4 - 8l^2 < 0$ para $l \in \{1, 2, \dots\}$, entonces siempre se cumple la condición $4l^2\nu_0^2 \neq \nu_+^2$.

Por lo tanto, en el problema restringido de los tres cuerpos, los equilibrios Lagrangianos y Eulerianos tienen una bifurcación global de soluciones periódicas espaciales con simetrías G_1 .

Vimos que los puntos Lagrangianos son mínimos del potencial planar, entonces $\eta_1(\nu_0) = \sigma = 1$. Además, vimos que los puntos Eulerianos son puntos críticos, entonces $\eta_1(\nu_0) = \sigma = -1$. Por lo tanto, las bifurcaciones espaciales son inadmisibles o se conectan entre puntos Eulerianos y Lagrangianos.

Las soluciones periódicas espaciales se conocen como órbitas verticales de Liapunov [KGK05]. Existen otras órbitas periódicas espaciales conocidas como órbitas Hip-Hop, esas órbitas aparecen a partir de las órbitas horizontales de Liapunov que vimos en el capítulo tres [KGK05]. Estas órbitas se usan para posicionar satélites en el sistema del sol y la tierra [GSLM00].

6.2. Los cuerpos

En esta sección encontramos bifurcación de soluciones periódicas espaciales para el problema de los n -cuerpos. Primero analizamos la bifurcación para cuerpos con masas arbitrarias y después para cuerpos con masas iguales. Por último analizamos al equilibrio relativo poligonal que estudiamos en el capítulo anterior.

6.2.1. Planteamiento del problema

Sea $q_j(t) \in \mathbb{R}^3$ la posición del cuerpo con masa m_j . Las ecuaciones de Newton son

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=1}^n \substack{(i \neq j)} m_i m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^{\alpha+1}}.$$

Para cambiar a coordenadas rotantes definamos a u_j como $q_j(t) = e^{\sqrt{\omega}t\bar{J}}u_j(t)$. Como $\ddot{q}_j = e^{\sqrt{\omega}t\bar{J}}(\ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega}\bar{J}\dot{u}_j - \omega\bar{I}u_j)$ con $\bar{I} = \text{diag}(1, 1, 0)$ y $\bar{J} = \text{diag}(J, 0)$, entonces las ecuaciones en coordenadas rotantes son

$$m_j \ddot{u}_j + 2\sqrt{\omega}\bar{J}\dot{u}_j = \omega\bar{I}u_j - \sum_{i=1}^n \substack{(i \neq j)} m_i m_j \frac{u_j - u_i}{\|u_j - u_i\|^{\alpha+1}}.$$

Definamos a las matrices $\mathcal{M} = \text{diag}(m_1 I, \dots, m_n I)$, $\bar{J} = \text{diag}(\bar{J}, \dots, \bar{J})$ y $\bar{I} = \text{diag}(\bar{I}, \dots, \bar{I})$. Sea $u = (u_1, \dots, u_n)$ el vector de posiciones, las ecuaciones en forma vectorial son

$$\mathcal{M}\ddot{u} + 2\sqrt{\omega}\mathcal{M}\bar{J}\dot{u} = \nabla V(u) \text{ con}$$

$$V = \frac{\omega}{2} \|\mathcal{M}^{1/2}\bar{I}u\|^2 + \sum_{i < j} m_i m_j \phi_\alpha(\|q_j - q_i\|).$$

Un equilibrio relativo corresponde a un punto crítico del potencial V . En la sección anterior probamos que todos los equilibrios relativos son planares. Además, podemos escoger a la frecuencia como $\omega = 1$.

El operador diferencial $\mathcal{D}(\nu)$ es

$$\mathcal{D}(\nu) = -\mathcal{M}\nu^2\ddot{x} - 2\mathcal{M}\bar{J}\nu\dot{x}.$$

Los puntos de colisión son $\Psi = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : x_i = x_j\}$ y las trayectorias libres de colisiones son

$$H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{3n} \setminus \Psi) = \{x \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{3n}) : x_i(t) \neq x_j(t)\}.$$

El operador $f : H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{3n} \setminus \Psi) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow L_{2\pi}^2$ es

$$f(x, \nu) = -\mathcal{M}\nu^2\ddot{x} - 2\mathcal{M}\bar{\mathcal{J}}\nu\dot{x} + \nabla\bar{V}(x).$$

Definición 6.7 Definamos la acción de $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ en \mathbb{R}^{3n} como

$$\rho(\kappa) = \text{diag}(R, \dots, R) \text{ y } \rho(\theta) = e^{-\bar{\mathcal{J}}\theta},$$

donde $R = \text{diag}(1, 1, -1)$.

Como V es $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ invariante, entonces V es Γ -ortogonal con

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times S^1.$$

Como la ecuación es autónoma, entonces la función f es $\Gamma \times S^1$ -equivariante. El generador de la acción temporal es $Ax = \dot{x}$. El generador de la acción espacial es $A_1x = -\bar{\mathcal{J}}x$. Como $\nabla V(x)$ es ortogonal a $\bar{\mathcal{J}}x$, entonces f es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal

$$\begin{aligned} \langle f(x), \dot{x} \rangle_{L_{2\pi}^2} &= -\frac{\nu^2}{2} \|\mathcal{M}^{1/2}\dot{x}\|_0^{2\pi} - 2\nu \left\langle \bar{\mathcal{J}}\mathcal{M}^{1/2}\dot{x}, \mathcal{M}^{1/2}\dot{x} \right\rangle_{L_{2\pi}^2} + V(x)|_0^{2\pi} = 0, \\ \langle f(x), \bar{\mathcal{J}}x \rangle_{L_{2\pi}^2} &= \nu^2 \left\langle \mathcal{M}^{1/2}\dot{x}, \bar{\mathcal{J}}\mathcal{M}^{1/2}\dot{x} \right\rangle_{L_{2\pi}^2} - 2\nu \|\mathcal{M}^{1/2}\dot{x}\|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \langle \nabla V, \bar{\mathcal{J}}x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como x_0 es un equilibrio relativo planar, el grupo de isotropía de x_0 es

$$G_{x_0} = \mathbb{Z}_2 \times S^1.$$

La órbita de x_0 es isomorfa a $G/G_{x_0} \simeq S^1$. Por lo que $A_1x_0 = -\bar{\mathcal{J}}x_0$ debe ser el único generador del núcleo de $D^2f(x_0)$.

Observación 6.8 De hecho, las ecuaciones de Newton son invariantes por las isometrías del espacio $O(3) \times \mathbb{R}^3$. Lo anterior origina las leyes de conservación de momento angular y lineal de las ecuaciones de Newton. Al cambiar a coordenadas rotantes estamos rompiendo con las simetrías de ese grupo, pues el potencial V ya sólo es invariante bajo la acción del subgrupo $O(2) \times (\mathbb{R} \cup \kappa\mathbb{R})$, en donde la acción de $\psi \in \mathbb{R}$ es $\psi x = x + \psi e$ con

$$e_3 = (0, 0, 1) \text{ y } e = (e_3, \dots, e_3).$$

De hecho la acción de \mathbb{R} da origen a una ley de conservación de momento lineal en el eje coordenado z .

El generador de la acción de \mathbb{R} es $Ax = e$. Como V es \mathbb{R} -invariante, entonces $\nabla V(x)$ es ortogonal al generador $\nabla V(x) \cdot e = 0$. La acción de \mathbb{R} causa que cualquier translación de un equilibrio relativo también lo sea, por lo que va a existir un valor propio cero en la linealización. Por lo tanto un equilibrio relativo no es aislado ni hiperbólico cuando no lo consideramos como una órbita de \mathbb{R} , y como no queremos lidiar con el grupo no compacto \mathbb{R} , vamos a tener que restringir el mapeo a un espacio ortogonal al vector e .

6.2.2. Teorema de bifurcación

Como todas las masas m_j son positivas, la matriz $-\mathcal{M}$ es invertible y se satisface la hipótesis (2.1). De la reducción global (2.3) obtenemos la función de bifurcación.

En el comentario anterior vimos que $\nabla V(u)$ era ortogonal al vector e , de hecho se puede probar directamente que $\nabla V(u)$ es ortogonal a e . La función de bifurcación $\hat{f}(x)$ tiene como componentes a los modos de Fourier $f_l(x_1)$. El modo de Fourier $f_0(x_1)$ es

$$f_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla V(x_1 + x_2(x_1, \nu)) dt.$$

Como $\nabla V(u)$ es ortogonal a e , entonces el modo de Fourier $f_0(x_1)$ es ortogonal a e . Para probar la bifurcación, vamos a definir al mapeo $f(x) : W \rightarrow W$ como la restricción de la función de bifurcación $\hat{f}(x)$ al espacio

$$W = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : x \cdot e = 0\} \times (\mathbb{C}^{3n})^p.$$

Como $f_0(x_1)$ es ortogonal a e , entonces $f(x)$ está bien definida.

De (2.3) la matriz $M(\lambda)$ es

$$M(\lambda) = \mathcal{M}(\lambda^2 - 2i\lambda\bar{\mathcal{J}}) + D^2V(x_0).$$

Por lo tanto, la linealización de $f(x, \nu)$ en x_0 es

$$f'(x_0) = \text{diag}(M(0)^{\perp e}, \dots, M(p\nu)),$$

en donde $M(0)^{\perp e}$ es la matriz $M(0)$ restringida al espacio ortogonal a e .

Vamos a necesitar encontrar los subespacios de representaciones irreducibles del grupo $\Gamma_{x_0} = \mathbb{Z}_2$. Como la acción de \mathbb{Z}_2 es $\rho(\kappa) = \text{diag}(R, \dots, R)$ con $R = \text{diag}(1, 1, -1)$, los subespacios de representaciones irreducibles son

$$V_0 = \{(x_1, y_1, 0, \dots, x_n, y_n, 0) : x_j, y_j \in \mathbb{C}\} \text{ y}$$

$$V_1 = \{(0, 0, z_1, \dots, 0, 0, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}.$$

La acción de $\kappa \in \mathbb{Z}_2$ en V_0 es trivial y en V_1 es $\rho(\kappa) = -I$.

Sean $T_0 : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow V_0$ y $T_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow V_1$ los isomorfismos

$$T_0(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (x_1, y_1, 0, \dots, x_n, y_n, 0) \text{ y}$$

$$T_1(z_1, \dots, z_n) = (0, 0, z_1, \dots, 0, 0, z_n).$$

Definamos a P como la transformación ortogonal

$$P(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = T_0(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + T_1(z_1, \dots, z_n).$$

Del lema de Schur tenemos que la matriz $M(\lambda)$ tiene una representación por bloques como

$$P^{-1}M(\lambda)P = \text{diag}(M_0(\lambda), M_1(\lambda)).$$

La acción de $G_{x_0} = \mathbb{Z}_2 \times S^1$ en el bloque $M_0(l\nu)$ es $(\kappa, \varphi)x = e^{i\ell\varphi}x$. El grupo de isotropía $G_0 = \mathbb{Z}_2$ en el bloque $M_0(\nu)$ es el grupo generado por κ . De hecho $M_0(\lambda)$ coincide con la definición del bloque $M(\lambda)$ en el caso planar y las bifurcaciones con simetrías G_0 son simplemente las planares.

En el bloque $M_1(l\nu)$ la acción de $G_{x_0} = \mathbb{Z}_2 \times S^1$ es $(\kappa, \varphi)x = -e^{i\ell\varphi}x$. El grupo de isotropía $G_1 = \mathbb{Z}_2$ en el bloque $M_1(\nu)$ es el grupo generado por (κ, π) .

Para poder encontrar bifurcación necesitamos suponer que el núcleo de $M(0)^{\perp e}$ esté generado sólo por $A_1x_0 = -\mathcal{J}x_0$ (2.5). En ese caso, de la definición (2.6) tenemos que $n_1(\lambda)$ es el número de Morse de $M_1(\nu)$ y

$$\eta_1(\nu) = \sigma(n_1(\nu - \rho) - n_1(\nu + \rho)),$$

donde σ es el signo del determinante de $M_0(0)$ restringido al subespacio ortogonal a A_1x_0 .

De los teoremas de bifurcación global (2.12) y local (2.8) tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.9 *Si $\eta_1(\nu_1)$ es distinto de cero, en ν_1 existe una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_1 .*

Por bifurcación global entendemos que si la bifurcación es admisible, entonces retorna a otros puntos de bifurcación y la suma de los grados locales es cero. La bifurcación es inadmisibles si la norma o el periodo van a infinito o si la rama va a colisión.

6.2.3. Simetrías

Las soluciones con grupo G_1 satisfacen

$$x(t) = (R, \pi)x(t) = Rx(t + \pi).$$

Las simetrías anteriores corresponden a soluciones de la forma

$$x_j(t) = x_j(t + \pi), y_j(t) = y_j(t + \pi) \text{ y } z_j(t) = -z_j(t + \pi).$$

Como $z_j(t) = -z_j(t + \pi)$, entonces $z_j(t_j) = 0 = z_j(t + \pi)$ para alguno t_j . Por lo que las órbitas de los cuerpos siempre oscilan alrededor del plano (x, y) . Como la proyección de la curva en el plano (x_j, y_j) es π -periódica, la curva recorre la proyección (x_j, y_j) una vez con $z_j(t)$ y una segunda vez con $-z_j(t)$. Por lo que las soluciones son ocho espaciales alrededor de los equilibrios relativos cuando existe un solo t_j . Además, las soluciones anteriores son cuasiperiódicas en coordenadas fijas.

6.2.4. Análisis del espectro

A continuación vamos a calcular el bloque $M_1(\lambda)$. Definamos a d_{ij} como la distancia entre los cuerpos i y j . Definamos a la matriz \mathcal{M}_1 como $\mathcal{M}_1 = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$.

Proposición 6.10 *Definamos a la matriz $A = (a_{ij})_{ij=1}^n$ con*

$$a_{ij} = \frac{m_i m_j}{d_{ij}^{\alpha+1}} \text{ y } a_{ii} = - \sum_{j=1}^n (j \neq i) a_{ij}.$$

Entonces el bloque $M_1(\lambda)$ es

$$M_1(\lambda) = \lambda^2 \mathcal{M}_1 + A.$$

Prueba. Definamos a \mathcal{A}_{ij} como los bloques de 3×3 de la matriz $D^2\bar{V}(x_0)$,

$$D^2\bar{V}(x_0) = (\mathcal{A}_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Como $D^2\bar{V}(x_0)$ es Γ_{x_0} -equivariante, entonces $D^2\bar{V}(x_0)$ conmuta con $\rho(\kappa) = \text{diag}(R, \dots, R)$. Por lo tanto \mathcal{A}_{ij} conmuta con $R = \text{diag}(1, 1, -1)$. De lo anterior concluimos que $\mathcal{A}_{ij} = \text{diag}(A_{ij}, a_{ij})$, donde A_{ij} son matrices de 2×2 .

Sea $d_{ij} = \|(x_i, y_i, z_i) - (x_j, y_j, z_j)\|$, entonces

$$\partial_{z_i} \partial_{z_j} \phi(d_{ij}) = -(\alpha + 1) \frac{(z_i - z_j)^2}{d_{ij}^{\alpha+3}} + \frac{1}{d_{ij}^{\alpha+1}}.$$

Como todos los equilibrios relativos son planares, $z_j = 0$ para todo j , entonces

$$a_{ij} = m_i m_j \partial_{z_i} \partial_{z_j} \phi(d_{ij}) = m_i m_j / d_{ij}^{\alpha+1}.$$

Como $\partial_{z_j}^2 \phi(d_{ij}) = -\partial_{z_i} \partial_{z_j} \phi(d_{ij})$, entonces

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^n \sum_{(j \neq i)} m_i m_j \partial_{z_j}^2 \phi(d_{ij}) = - \sum_{j=1}^n \sum_{(j \neq i)} a_{ij}.$$

Por lo tanto $D^2\bar{V}(x_0)T_1(z) = T_1(Az)$ con $z = (z_1, \dots, z_n)$. Concluimos el resultado de que

$$\mathcal{M}(\lambda^2 - 2i\lambda\bar{\mathcal{J}})T_1(z) = T_1(\mathcal{M}_1\lambda^2 z).$$

□

Como $T_1(1, \dots, 1) = e$, entonces debemos restringir $M_1(0)$ al espacio ortogonal al vector $(1, \dots, 1)$. De hecho, podemos verificar directamente que $(1, \dots, 1)$ está en el núcleo de $M_1(0) = A$. A continuación vamos a analizar el espectro de la matriz A .

Proposición 6.11 *Sea $B(z_0, r)$ la bola de centro z_0 y radio r . El espectro $\sigma(A)$ de la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ está contenido en la unión $\bigcup_{i=1}^n B(a_{ii}, r_i)$ con $r_i = \sum_{j=1}^n \sum_{(j \neq i)} |a_{ij}|$.*

Prueba. Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $(\lambda I - A)x = 0$ para algún $x = (x_1, \dots, x_n)$. Sea x_i tal que $|x_i| \geq |x_j|$ para todo j , del renglón i de $(\lambda I - A)x = 0$ obtenemos que $(\lambda - a_{ii})x_i - \sum_{j=1}^n \sum_{(j \neq i)} a_{ij}x_j = 0$. Como $|x_i| \geq |x_j|$, entonces

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{(j \neq i)} |a_{ij}|.$$

Por lo tanto λ está contenido en la bola de centro a_{ii} y radio r_i . □

Como A es autoadjunta sus valores propios son reales. De la proposición anterior tenemos que los valores propios de A están contenidos en $\bigcup_{i=1}^m B(a_{ii}, |a_{ii}|) \subset \mathbb{R}^-$. Además, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ está en el núcleo de A , entonces $x_j = x_i$ pues

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^n (x_j - x_i)a_{ij}.$$

Por lo tanto el núcleo de A está generado por $(1, \dots, 1)$ y A tiene $n - 1$ valores propios negativos.

Como los valores propios de $M_1(\nu)$ son continuos, entonces el número de Morse de M_1 es $n_1 \geq n - 1$ para ν pequeño. Como $n_1(\infty) = 0$, entonces existen al menos $n - 1$ cruces de valores propios de la matriz $M_1(\nu)$. *Por lo tanto, en el problema de los $n + 1$ -cuerpos con masas positivas, cada equilibrio relativo tiene al menos una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_1 .* En general, cada equilibrio relativo tiene $n - 1$ ramas de bifurcación de soluciones periódicas con simetrías G_1 .

Cuando todas las masas son iguales podemos caracterizar de forma completa el espectro de $M_1(\lambda)$.

Teorema 6.12 *Supongamos que $-\nu_1^2 < \dots < -\nu_{n-1}^2 < \nu_n = 0$ son los valores propios de A . Si la masas de los cuerpos son iguales, entonces el determinante $\det M_1(\nu)$ se anula sólo en el conjunto $\{\nu_k : k = 1, \dots, n - 1\}$ con*

$$\eta_1(\nu_k) = \sigma.$$

Prueba. Existe una matriz P tal que $A = P^{-1}\Lambda P$ con $\Lambda = \text{diag}(-\nu_1^2, \dots, -\nu_n^2)$, entonces

$$M_1(\nu) = mP^{-1}(\nu^2 I + \Lambda)P.$$

Por lo tanto los valores propios de $M_1(\nu)$ son $\nu^2 - \nu_k^2$. Como los ν_k son distintos, entonces $n_1(\nu_k - \rho) = k$ y $n_1(\nu_k + \rho) = k - 1$. Por lo tanto $\eta_1(\nu_k) = \sigma(k - (k - 1))$. □

Por lo tanto, en el problema de los $n + 1$ -cuerpos con masas iguales, cualquier equilibrio relativo para cada $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_1 .

Además, la bifurcación anterior es inadmisibile o va a un punto de bifurcación espacial de otro equilibrio relativo.

Observación 6.13 *De la observación (3.4) tenemos que un equilibrio relativo con masas iguales es linealmente estable en el espacio, si lo es en el plano (2.9).*

6.2.5. El equilibrio poligonal

A continuación vamos a analizar la bifurcación espacial de $n + 1$ cuerpos con masas μ_j . Las masas de los cuerpos son $\mu_0 = \mu$ y $\mu_j = 1$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Definamos a $\bar{\mu}$ como la matriz de masas $\bar{\mu} = \text{diag}(\mu I, I, \dots, I)$. La ecuación de los cuerpos es

$$\bar{\mu}\ddot{x} + 2\bar{\mu}\omega^{1/2}\bar{J}\dot{x} = \nabla\bar{V}(x) \text{ con}$$

$$\bar{V}(x) = \omega \frac{\|\bar{\mu}^{1/2}\bar{I}x\|^2}{2} + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \phi_\alpha(\|x_j - x_i\|).$$

Sea $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n)$ con $a_0 = 0$ y $a_j = e^{i\zeta}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$, probamos en el capítulo cuatro que \bar{a} es un equilibrio relativo para $\omega = \mu + s_1$. En esta sección nos proponemos encontrar bifurcación de soluciones periódicas espaciales a partir del equilibrio relativo poligonal \bar{a} .

Sea \mathbb{Z}_n el grupo generado por la permutación $\zeta(j) = j + 1$ modulo n . Definamos la acción del grupo \mathbb{Z}_n como

$$\rho(\zeta)(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, x_{\zeta(1)}, \dots, x_{\zeta(n)}).$$

El potencial V es \mathbb{Z}_n -invariante debido a que n cuerpos tienen masas iguales. En particular ∇V es Γ -equivariante con

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \times S^1.$$

Por lo tanto el operador $f(x)$ es $\Gamma \times S^1$ -ortogonal.

Sea $\tilde{\mathbb{Z}}_n$ el grupo generado por $(\zeta, \zeta) \in \mathbb{Z}_n \times S^1$, las acciones de los elementos $\kappa \in \mathbb{Z}_2$ y $(\zeta, \zeta) \in \tilde{\mathbb{Z}}_n$ son

$$\kappa = \text{diag}(R, \dots, R) \text{ y } (\zeta, \zeta)x = \rho(\zeta)e^{-\bar{J}\zeta}x.$$

Como $\kappa \in \mathbb{Z}_2$ y $(\zeta, \zeta) \in \tilde{\mathbb{Z}}_n$ dejan fijo al equilibrio \bar{a} , entonces $\Gamma_{\bar{a}} = \mathbb{Z}_2 \times \tilde{\mathbb{Z}}_n$. Por lo tanto

$$G_{\bar{a}} = \mathbb{Z}_2 \times \tilde{\mathbb{Z}}_n \times S^1.$$

Teorema de bifurcación

El bloque $M(\lambda)$ es

$$M(\lambda) = \bar{\mu}\lambda^2 - 2\omega^{1/2}\bar{\mu}\bar{J}(i\lambda) + D^2V(x_0).$$

Probamos que la matriz $M(\lambda)$ es diagonal por bloque en los subespacios

$$V_0 = \{(x_1, y_1, 0, \dots, x_n, y_n, 0) : x_n, y_n \in \mathbb{C}\} \text{ y}$$

$$V_1 = \{(0, 0, z_1, \dots, 0, 0, z_n) : z_n \in \mathbb{C}\}.$$

En V_1 la acción de $\Gamma_{\bar{a}}$ es $\rho(\kappa)T(z) = T(-z)$ y

$$(\zeta, \bar{\zeta})T_1(z_0, \dots, z_n) = T_1(z_0, z_{\zeta(1)}, \dots, z_{\zeta(n)}).$$

Por lo que necesitamos además descomponer al espacio V_1 en los subespacios de representaciones irreducibles del grupo $\tilde{\mathbb{Z}}_n$.

Definición 6.14 Para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ definamos a $T_k : \mathbb{C} \rightarrow W_k$ como

$$T_k(z) = (0, n^{-1/2}e^{ik\zeta}z, \dots, n^{-1/2}e^{nik\zeta}z) \text{ con}$$

$$W_k = \{(0, e^{ik\zeta}z, \dots, e^{nik\zeta}z) : z \in \mathbb{C}\}.$$

Además, definamos a $T_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow W_n$ como

$$T_n(\alpha, w) = (\alpha, n^{-1/2}w, \dots, n^{-1/2}w) \text{ con}$$

$$W_n = \{(\alpha, w, \dots, w) : \alpha, w \in \mathbb{C}\}.$$

La transformación lineal $Pz = \sum_{k=1}^n T_k(z_k)$ de \mathbb{C}^{n+1} en \mathbb{C}^{n+1} es ortogonal. La acción de $(\zeta, \bar{\zeta})$ en el subespacio W_k es $(\zeta, \bar{\zeta})T_k(z) = T_k(e^{ik\zeta}z)$. Como el bloque $M_1(\lambda)$ es además equivariante con respecto a la acción de $\tilde{\mathbb{Z}}_n$, del lema de Schur tenemos que $M_1(\nu)$ es diagonal por bloques con

$$P^{-1}M_1(\lambda)P = \text{diag}(m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)).$$

Los bloques $m_k(\lambda)$ deben satisfacer

$$M_1(\nu)T_k(z) = T_k(m_k z).$$

La acción en W_k de $\kappa \in \mathbb{Z}_2$, $(\zeta, \bar{\zeta}) \in \tilde{\mathbb{Z}}_n$ y $\varphi \in S^1$ es

$$\rho(\kappa) = -1, (\zeta, \bar{\zeta}) = e^{ik\zeta} \text{ y } \varphi = e^{i\ell\varphi}.$$

Como la acción de $(\zeta, \zeta, -k\zeta) \in \tilde{\mathbb{Z}}_n \times S^1$ y $(\kappa, \pi) \in \mathbb{Z}_2 \times S^1$ es trivial en W_k , entonces el grupo de isotropía G_k del bloque $m_k(\nu)$ es el generado por

$$(\zeta, \zeta, -k\zeta) \text{ y } (\kappa, \pi).$$

De la definición (2.6) tenemos que

$$\eta_k(\nu) = \sigma(n_k(\nu - \rho) - n_k(\nu + \rho)),$$

donde $n_k(\lambda)$ es el número de Morse de $m_k(\nu)$. Además σ es el signo del determinante de $M(0)^{\perp e}$ restringido al espacio de puntos fijos de $\Gamma_{\bar{a}}$, ortogonal al generador $A_1\bar{a}$. De los teoremas de bifurcación global (2.12) y local (2.8) tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.15 *Si $\eta_k(\nu_k)$ es distinto de cero, en ν_k existe una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k .*

Por bifurcación global entendemos que si la bifurcación es admisible, entonces retorna a otros puntos de bifurcación y la suma de los grados locales es cero. La bifurcación es inadmisiblesi la norma o el periodo van a infinito o si la rama va a colisión.

Simetrías

Supongamos que un equilibrio x tiene simetrías G_k y que las componentes del equilibrio son (x_j, y_j, z_j) para $j \in \{0, \dots, n\}$. Del elemento $(\kappa, \pi) \in G_k$ tenemos que

$$x_j(t) = x_j(t + \pi), y_j(t) = y_j(t + \pi) \text{ y } z_j(t) = -z_j(t + \pi).$$

Por lo tanto las componentes (x_j, y_j) son en realidad π periódicas. En el periodo la curva recorre la proyección en el plano (x_j, y_j) dos veces, una con $z_j(t)$ y la otra con $-z_j(t)$.

Además, del elemento $(\zeta, \zeta, -k\zeta) \in G_k$ tenemos que

$$x(t) = \rho(\zeta)e^{-\bar{\mathcal{J}}\zeta}x(t - k\zeta).$$

Como $e^{-\bar{\mathcal{J}}\zeta}$ es $e^{-\mathcal{J}\zeta}$ en (x_j, y_j) , entonces las proyecciones en el plano (x_j, y_j) satisfacen las simetrías planares que describimos en la sección (5.3).

Como $e^{-\bar{\mathcal{J}}\zeta}$ es trivial en z_j , entonces la coordenada del cuerpo central satisface $z_0(t) = z_0(t + k\zeta)$. Para describir a los otros cuerpos vamos a usar la

igualdad $z_j = z_{j+kn}$. En ese caso las posiciones espaciales de los otros cuerpos satisfacen

$$z_{j+1}(t) = z_1(t + jk\zeta).$$

Por lo tanto, las curvas de los cuerpos con masas iguales están determinadas por la de uno solo de ellos.

Por ejemplo cuando $n = 2m$ y $k = m$ tenemos que $z_0(t) = 0$. Además los cuerpos con masas iguales $j \in \{1, \dots, n\}$ satisfacen $(x_{j+1}, y_{j+1})(t) = e^{j\zeta J}(x_1, y_1)(t)$ y

$$z_{j+1}(t) = z_1(t + j\pi) = (-1)^j z_1(t).$$

A las soluciones con las simetrías anteriores se les conoce como órbitas Hip-Hop [TV07], porque son soluciones que están formadas de dos polígonos regulares de m lados que oscilan verticalmente uno con $z_1(t)$ y el otro con $-z_1(t)$, de tal manera que la proyección en el plano siempre forma un polígono regular de $2m$ lados.

Análisis del espectro

En la sección anterior calculamos que la matriz $M_1(\lambda)$ es $M_1(\lambda) = \bar{\mu}\lambda^2 + A$, en donde $\bar{\mu} = \text{diag}(\mu, 1, \dots, 1)$ y $A = (a_{ij})_{ij=0}^n$ con

$$a_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{d_{ij}^{\alpha+1}} \text{ y } a_{ii} = - \sum_{j=0(j \neq i)}^n a_{ij}.$$

Recordemos que las masas son $\mu_0 = \mu$ y $\mu_j = 1$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. A continuación vamos a calcular los bloques $m_k(\nu)$ que satisfacen $M_1 T_k(z) = T_k(m_k z)$.

Proposición 6.16 *Para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tenemos que $m_k(\lambda) = \lambda^2 - (\mu + s_k)$ y*

$$m_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu(\lambda^2 - n) & \sqrt{n}\mu \\ \sqrt{n}\mu & \lambda^2 - \mu \end{pmatrix}.$$

Prueba. Primero vamos a calcular a m_k para $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Para $l \neq 0$ tenemos que

$$[AT_k(z)]_l = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n a_{lj} e^{ijk\zeta} z.$$

Para $l, j \in \{1, \dots, n\}$ las distancias satisfacen $d_{lj}^2 = 4 \sin^2((l-j)\zeta/2)$, entonces $a_{lj} = a_{n(j-l)}$ con $(j-l) \in \{1, \dots, n\}$ modulo n . Por lo tanto $a_{lj}e^{ijk\zeta} = e^{ilk\zeta} (a_{n(j-l)}e^{i(j-l)k\zeta})$ y podemos reescribir a la suma anterior como

$$[AT_k(z)]_l = n^{-1/2} e^{ilk\zeta} \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} e^{ijk\zeta} \right) z = [T_k(b_k z)]_l,$$

donde b_k es el término entre paréntesis. Como $a_{nn} = -\sum_{j=0}^{n-1} a_{nj}$ y $a_{n0} = \mu$, entonces $b_k = -\mu + \sum_{j=1}^{n-1} (e^{ijk\zeta} - 1) a_{nj}$. Como $a_{nj} = 1/d_{nj}^{\alpha+1}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n-1} (e^{ijk\zeta} - 1) a_{nj} = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{2 \sin^2(kj\zeta/2)}{2^{\alpha+1} \sin^{\alpha+1}(j\zeta/2)} = -s_k.$$

Por lo tanto $b_k = -(\mu + s_k)$ y $AT_k(z) = T_k(b_k z)$. Concluimos el resultado para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ de que

$$(\bar{\mu}\lambda^2 + A)T_k(z) = T_k((\lambda^2 + b_k)z).$$

Sólo nos falta encontrar a m_n . Sea $z = (\alpha, w)$, para $l \neq 0$ tenemos que $[AT_n(z)]_l = a_{l0}\alpha + n^{-1/2} \sum_{j=1}^n a_{lj}w$. Como $a_{l0} = \mu$ y $\sum_{j=1}^n a_{lj} = -a_{l0}$, entonces

$$[AT_n(z)]_l = n^{-1/2} (\sqrt{n}\mu\alpha - \mu w).$$

Para $l = 0$ tenemos que $[AT_n(k)z]_0 = a_{00}\alpha + n^{-1/2} \sum_{j=1}^n a_{0j}w$. Como $a_{00} = -\sum_{j=1}^n a_{0j} = -n\mu$, entonces

$$[AT_n(k)z]_0 = -n\mu\alpha + \sqrt{n}\mu w.$$

Por lo tanto

$$AT_n(z) = T_n \begin{pmatrix} -n\mu & \sqrt{n}\mu \\ \sqrt{n}\mu & -\mu \end{pmatrix} z.$$

Concluimos el resultado de que $\bar{\mu}\lambda^2 T_n(z) = T_n(\text{diag}(\mu\lambda^2, \lambda^2)z)$. \square

A continuación vamos a encontrar los puntos en donde la órbita $\Gamma\bar{a}$ no es hiperbólica.

Proposición 6.17 *El núcleo de $M(0)^{\perp e}$ está generado sólo por $A_1\bar{a}$ para $\mu \notin \{-s_1, \mu_1, \dots, \mu_{n/2}\}$.*

Prueba. Como $T_n(1, n^{1/2}) = (1, \dots, 1)$, entonces $m_n(0)$ está restringido al espacio ortogonal a $(1, \sqrt{n})$. Los valores propios de $m_n(0)$ son 0 y $-(n+1)\mu$ con los vectores propios $(1, \sqrt{n})$ y $(\sqrt{n}, -1)$. Por lo que $m_n^{\perp(1, \sqrt{n})}(0) = -(n+1)\mu$ es invertible para $\mu \neq 0$ y para $\mu = 0$ ese valor no se encuentra.

Además $m_k(0) = -(\mu + s_k)$ es siempre negativa para $\mu > -s_1$. Por lo tanto $M_1(0)^{\perp e}$ es invertible. Concluimos el resultado del hecho que el núcleo de $M_0(0)$ está generado por $A_1\bar{a}$ para $\mu \in \{\mu_1, \dots, \mu_{n/2}\}$, donde μ_k son los puntos de bifurcación de equilibrios relativos en el capítulo cuatro. \square

Por lo tanto tenemos que excluir a los puntos $\{-s_1, \mu_k\}$ del análisis de bifurcación periódica (2.5).

Ahora vamos a encontrar los puntos de bifurcación de soluciones periódicas espaciales.

Proposición 6.18 *Sea $\nu_n = \sqrt{\mu + n}$ y sea $\nu_k = \sqrt{\mu + s_k}$ para $k \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces el determinante $\det m_k(\nu)$ se anula sólo en ν_k con*

$$\eta_k(\nu_k) = 1.$$

Prueba. En el capítulo anterior encontramos que $\sigma = 1$ para $\mu > -s_1$. Para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ el número $m_k(\nu) = \nu^2 - (\mu + s_k)$ cambia de signo sólo en ν_k . Por lo tanto $\eta_k(\nu_k) = 1 - 0$. El determinante $\det m_n(\nu) = \nu^2 \mu (\nu^2 - (\mu + n))$ cambia de signo sólo en ν_n . Como $\det m_n$ es negativo para $\nu < \nu_n$, entonces $n_n(\nu_n - \rho) = 1$. Como $n_n(\infty) = 0$, entonces $\eta_n = 1 - 0$. \square

Por lo tanto, en el problema de los $n + 1$ -cuerpos, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_k . Como $\eta_k(\nu_k) = 1$ la bifurcación no puede retornar a \bar{a} , entonces cada bifurcación es inadmisibles o va a otro punto de bifurcación distinto de \bar{a} .

Para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ encontramos bifurcación con simetrías G_k a partir de $\nu_k = \sqrt{\mu + s_k}$. Para probar que la bifurcación en ν_k es espacial, tenemos que probar como en el problema del satélite que cerca de (\bar{a}, ν_k) no existen soluciones de la forma

$$x_j(t) = x_j(t + \pi), y_j(t) = y_j(t + \pi) \text{ y } z_j(t) = 0.$$

Las soluciones anteriores se encuentran en el espacio de puntos fijos del grupo generado por $\kappa \in \mathbb{Z}_2$ y $\pi \in S^1$. Sea $f'(\bar{a})|_{V^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}$ la derivada de $f(x, \nu)$ en

(\bar{a}, ν_k) restringida al espacio de puntos fijos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, entonces $f'(\bar{a})|_{V^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}$ es diagonal con bloques $M_0(2l\nu_k)$ para $l \in \{1, 2, \dots\}$. En la observación (5.26) probamos que el bloque $M_0(\nu)$ es invertible para μ suficientemente grande si $\nu > \sqrt{\mu + s_1}$, entonces la derivada $f'(\bar{a})|_{V^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}$ es invertible si $\nu > \sqrt{\mu + s_1}/2$. Del teorema de la función implícita concluimos que no existen soluciones con simetrías $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ cerca de (\bar{a}, ν_k) para μ suficientemente grande si $\nu_k > \sqrt{\mu + s_1}/2$. Como $s_k \geq s_1$ para $k \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $\nu_k > \sqrt{\mu + s_1}/2$ y la bifurcación en ν_k tiene que ser espaciales para μ suficientemente grande. De hecho, analizando con detalle el bloques $m_k(\lambda)$ y el bloque $M_k(\lambda)$ del capítulo anterior se puede probar que existe resonancia sólo en un punto $\bar{\mu}_k \in (-s_1, m_0)$ para $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Por lo tanto, en el problema de los $n+1$ -cuerpos, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\mu \neq \bar{\mu}_k$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas espaciales a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_k .

En [Che08] se da evidencia de que para $n=3$ con $\mu=0$, la órbita de Liapunov se conecta a la coreografía del ocho.

Para el problema de las cargas en el espacio los bloques de bifurcación espacial son

$$m_k(\lambda) = \lambda^2 - (\mu - s_k)$$

para $k \in \{1, \dots, n\}$. *Por lo tanto, en el problema de las cargas, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\mu > s_k$ y para $k=n$ tal que $\mu > s_1$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_k$ con simetrías G_k .*

Observación 6.19 *Además, como $m_k(0) = -(\mu - s_k)$ en el problema de las cargas, entonces existe bifurcación de equilibrios relativos espaciales en $\mu = s_k$ para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ con simetrías \tilde{D}_h , donde h es el máximo común divisor de n y k . Las bifurcaciones espaciales con simetrías \tilde{D}_h son como las que describimos en el capítulo cuatro, pero en las que no todas las coordenadas son coplanares.*

6.3. Comentarios

En la primera parte de este capítulo analizamos la ecuación del satélite en el espacio y la bifurcación espacial a partir de sus equilibrios. Probamos

que cada equilibrio del satélite tiene una bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías espaciales

$$x(t) = x(t + \pi), y(t) = y(t + \pi) \text{ y } z(t) = -z(t + \pi).$$

Además, las soluciones son verdaderamente espaciales ($z \neq 0$) cuando no existe resonancia con la bifurcación de soluciones planares: en ese caso las soluciones parecen ochos transversales al equilibrio. El resultado anterior es otra de nuestras aportaciones, pues probamos que existe bifurcación global de soluciones espaciales de cualquier equilibrio.

En particular probamos que en el problema restringido de los tres cuerpos los equilibrios Lagrangianos y Eulerianos no son resonantes, por lo que cada equilibrio tiene una bifurcación de soluciones periódicas de ochos espaciales. A las soluciones anteriores se les conocen como órbitas verticales de Liapunov. En los artículos [DRP⁺07] y [KGK05] se hace un bonito análisis numérico de la ramas globales de bifurcación espacial y sus doblamientos de periodo, entre otras soluciones mas complejas que surgen a partir de éstas.

En la segunda sección analizamos el problema de bifurcación espacial a partir de un equilibrio relativo de n cuerpos . Probamos que un equilibrio relativo con masas arbitrarias siempre tiene al menos una bifurcación global de soluciones periódicas con las simetrías

$$x_j(t) = x_j(t + \pi), y_j(t) = y_j(t + \pi) \text{ y } z_j(t) = -z_j(t + \pi).$$

De hecho, probamos que genéricamente existen $n - 1$ de esas ramas de bifurcación. Además, probamos que las soluciones son espaciales ($z_j \neq 0$) cuando no existe resonancia con la bifurcación planar. En ese caso las soluciones parecen ochos espaciales que oscilan alrededor del plano en el que se encuentra el equilibrio relativo.

En particular, para el equilibrio relativo poligonal probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ existe una bifurcación de soluciones periódicas con las simetrías anteriores y con las simetrías G_k que describimos en el capítulo cinco. Por ejemplo, vimos para $n = 2m$ que las soluciones espaciales con simetrías G_m son órbitas Hip-Hop (en general cuasiperiódicas). Las órbitas Hip-Hop son soluciones en las que dos polígonos de m lados oscilan verticalmente uno con $z(t)$ y el otro con $-z(t)$, de tal manera que su proyección en el plano siempre forma un polígono de $2m$ lados.

En general, las bifurcaciones globales que encontramos no se habían probado con un adecuado tratamiento de las simetrías, aunque existen varios ejemplos particulares que comentaremos a continuación.

- Las soluciones Hip-Hop aparecieron por primera vez en el artículo [DTW83], en donde se prueba que existen algunas órbitas Hip-Hop periódicas para el problema de los $n + 1$ -cuerpos y de las cargas.
- En el artículo [MS93] se encontraron las soluciones Hip-Hop para los cuerpos con un método de continuación para μ grande. En ese artículo se explican las oscilaciones verticales que se habían observado en las fotografías de los anillos de Saturno.
- En el artículo [BCPS06] se encontraron las soluciones Hip-Hop que encontramos para el problema de los $2m$ cuerpos con $\mu = 0$.
- En el artículo [CF08] se analizó para $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ con $\mu = 0$ la bifurcación de las órbitas de Liapunov verticales que encontramos. Además, en ese artículo se continúa a las soluciones de Liapunov como mínimos del potencial, dando origen a soluciones periódicas con simetrías particulares como la coreografía del ocho para los tres cuerpos.

Las coreografías son soluciones en las que los cuerpos siguen la misma trayectoria con intervalos de tiempo regulares. Para los tres cuerpos la primera prueba de la existencia de la coreografía del ocho se encuentra en [CM00]. Basado en la simetría italiana $x(t) = -x(t + \pi)$, Chenciner nombró a las simetrías espaciales que encontramos como la restricción antisimétrica. Los métodos variacionales se han usado ampliamente para encontrar soluciones periódicas con la antisimetría dando origen a órbitas Hip-Hop, coreografías u otras soluciones más complejas. Sin embargo, no siempre resulta fácil probar la coercividad del potencial debido a la existencia de trayectorias con colisión. Para más detalles recomendamos ver los artículos [TV07] y [CF08] y las referencias que se encuentran en ellos.

Capítulo 7

Bifurcación en la latiz de Schrödinger periódica

En este capítulo estudiamos una latiz de osciladores acoplados con condiciones de periodicidad. En particular, analizamos a la latiz con el potencial cúbico de Schrödinger y con el potencial saturable. La latiz de osciladores se deduce discretizando la ecuación no lineal de Schrödinger y se ha usado para modelar muchos fenómenos físicos de ondas [EJ03].

Existe un equilibrio relativo equivalente al equilibrio relativo poligonal del problema de los $n+1$ -cuerpos. En la primera sección encontramos bifurcación de equilibrios relativos a partir de ese equilibrio poligonal y en la tercera sección encontramos bifurcación de soluciones periódicas.

7.1. Planteamiento del problema

Sea $q_j \in \mathbb{C}$ el oscilador $j \in \{1, \dots, n\}$, la ecuación de la latiz de osciladores es

$$i\dot{q}_j = h(\|q_j\|^2)q_j + (q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}).$$

Nosotros vamos a estudiar a una latiz con las condiciones de periodicidad $u_j = u_{j+n}$.

Los equilibrios relativos son las soluciones de la forma $q_j = \mu e^{\omega t} a_j$ con a_j constante. La existencia de equilibrios relativos está condicionada por una relación no lineal entre la amplitud μ y la frecuencia ω . Es por esta razón que vamos a tomar a la amplitud μ como parámetro de bifurcación. Lo anterior

no sucede en el problema de los $n + 1$ -cuerpos, en el que la relación entre la amplitud y la frecuencia es homogénea.

Cambiando a coordenadas rotantes $q_j = \mu e^{\omega t} u_j$ la ecuación de la latiz es

$$i\dot{u}_j - \omega u_j = h(|\mu u_j|^2)u_j + (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}).$$

Para realizar nuestro análisis vamos a cambiar las coordenadas en \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 . Por lo que la ecuación de la latiz para $u_j \in \mathbb{R}^2$ es

$$J\dot{u}_j = \omega u_j + h(|\mu u_j|^2)u_j + (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}),$$

en donde J es la matriz simplectica.

Sea $u = (u_1, \dots, u_n)$ el vector de posiciones y sea $\mathcal{J} = (J, \dots, J)$, la ecuación de la latiz en forma vectorial es

$$\mathcal{J}\dot{x} = \nabla V(x) \text{ con}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{H(x_j) - |x_{j+1} - x_j|^2\},$$

donde $H(x)$ es la función que satisface $\nabla H(x) = \omega x + h(|\mu x|^2)x$.

Un equilibrio relativo es un punto crítico del potencial V . El cero siempre es un equilibrio relativo. A continuación vamos a probar que existe un equilibrio relativo tipo onda rotante.

Proposición 7.1 *Sea $a_j = e^{ij\zeta}$ con $\zeta = 2\pi/n$, entonces $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es un equilibrio si*

$$\omega = 4 \sin^2(\zeta/2) - h(\mu^2).$$

Prueba. Como $a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1} = -4 \sin^2(\zeta/2)a_j$, entonces

$$V_{x_j}(\bar{a}) = (\omega + h(\mu^2) - 4 \sin^2(\zeta/2))a_j.$$

Por lo tanto, las a_j forman un equilibrio relativo si se satisface la relación de la proposición. \square

Nosotros vamos a analizar sólo los casos $n \geq 3$, ya que los casos $n = 1$ y $n = 2$ son integrables [EJ03]. De hecho, según [EJ03] es posible encontrar el diagrama de bifurcación completo de los equilibrios relativos para $n \leq 4$.

Los equilibrios relativos localizados se conocen como breathers y las soluciones periódicas localizadas se conocen como breathers cuasiperiódicos [EJ03]. Por lo tanto, nuestras ramas de bifurcación en el caso de ser localizadas corresponden a breathers y breathers cuasiperiódicos.

Observación 7.2 *Usando el mismo método que vamos a usar, podemos analizar ecuaciones de la latiz más complejas, siempre y cuando se preserven las simetrías del problema. Por ejemplo, podemos hacer depender de un parámetro al potencial, podemos incluir celdas no adyacentes en el acoplamiento o podemos hacer un acoplamiento no lineal entre las celdas.*

7.2. Bifurcación estacionaria

Las simetrías del potencial V son similares a las que usamos en el problema de los $n + 1$ -cuerpos (4.2). Por lo que sólo vamos a indicar las diferencias con respecto a las definiciones para la ecuación de la latiz.

Definición 7.3 *Definimos a D_n como el subgrupo de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ generado por $\zeta(j) = j + 1$ y $\kappa(j) = n - j$ modulo n . La acción de D_n en \mathbb{R}^{2n} es*

$$\rho(\gamma)(x_1, \dots, x_n) = (x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}).$$

Además, definimos la acción del grupo $O(2) = S^1 \cup \kappa S^1$ en \mathbb{R}^{2n} como

$$\rho(\theta) = e^{-\mathcal{J}\theta} \text{ y } \rho(\kappa) = \mathcal{R},$$

donde \mathcal{R} es la matriz $\text{diag}(R, \dots, R)$ con $R = \text{diag}(1, -1)$.

El potencial V no cambia si rotamos las posiciones de los osciladores y tampoco cambia si rotamos o reflejamos las fases de todos los osciladores. Por lo tanto, el potencial V es Γ -invariante y el gradiente ∇V es Γ -equivariante, en donde Γ es el grupo

$$\Gamma = D_n \times O(2).$$

Definamos a \tilde{D}_n como el grupo generado por (ζ, ζ) y (κ, κ) con $\zeta = 2\pi/n \in S^1$. La acción de los elementos anteriores es

$$(\zeta, \zeta)x = \rho(\zeta)e^{-\mathcal{J}\zeta}x \text{ y } (\kappa, \kappa)x = \rho(\kappa)\mathcal{R}x.$$

Como los elementos (ζ, ζ) y (κ, κ) dejan fijo al equilibrio \bar{a} , entonces el grupo de isotropía de \bar{a} es

$$\Gamma_{\bar{a}} = \tilde{D}_n.$$

7.2.1. Teorema de bifurcación

A continuación vamos a hacer un análisis similar al que hicimos en el capítulo cuatro. Por esta razón, sólo vamos a indicar los cambios necesarios para adaptar los teoremas de bifurcación a este problema.

Necesitamos encontrar los espacios de representaciones irreducibles de la acción de $\Gamma_{\bar{a}}$. Del lema de Schur tenemos que la matriz $D^2V(\bar{a})$ tiene una representación por bloques en los espacios de representaciones irreducibles.

Definamos a los isomorfismos T_k de \mathbb{C}^2 en V_k como

$$T_k z = n^{-1/2}(e^{(ikI+J)\zeta} z, \dots, e^{n(ikI+J)\zeta} z) \text{ con}$$

$$V_k = \{(e^{(ikI+J)\zeta} z, \dots, e^{n(ikI+J)\zeta} z) \in \mathbb{C}^{2n} : z \in \mathbb{C}^2\}.$$

Podemos probar como en la proposición (4.6) que

$$(\zeta, \zeta)T_k z = T_k e^{ik\zeta} z \text{ y } (\kappa, \kappa)T_k z = T_{n-k} R z.$$

Por lo tanto, los espacios $V_k \oplus V_{n-k}$ son los espacios de representaciones irreducibles de $\Gamma_{\bar{a}}$.

Definamos a A_{ij} como los bloques de 2×2 tal que $D^2V(\bar{a}) = (A_{ij})_{i,j=1}^n$. En la proposición (4.8) probamos que los bloques que satisfacen $D^2V(a)T_k(z) = T_k(B_k z)$ son

$$B_k = \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta}.$$

La transformación lineal $Pz = \sum_{k=1}^n T_k z_k$ con $z = (z_1, \dots, z_k)$ es ortogonal. Por lo tanto la matriz $D^2V(a)$ en las nuevas coordenadas es diagonal por bloques

$$P^* D^2V(a) P = \text{diag}(B_1, \dots, B_n).$$

Definamos a \tilde{D}_h como el grupo generado por $(n/h)(\zeta, \zeta)$ y (κ, κ) para cada h que divide a n . Definamos al potencial V_P como $V_P(x) = V(Px)$ y al mapeo $f_h(x)$ como el gradiente $\nabla V_P(x)$ restringido al subespacio de puntos fijos de \tilde{D}_h . En la proposición (4.10) probamos que

$$f'_h(x_0) = n_h(\mu) = \sigma_n \prod_{j \in [1, n/2] \cap h\mathbb{N}} \sigma_j,$$

en donde

$$\sigma_k = \text{sgn}(e_1^T B_k e_1) \text{ para } k \in \{n/2, n\} \text{ y}$$

$$\sigma_k = \text{sgn}(\det B_k(\mu)) \text{ para } k \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}.$$

Del teorema (4.13) tenemos que $\eta_h(\mu_0)$ es

$$\eta_h(\mu_0) = n_h(\mu_0 - \rho) - n_h(\mu_0 + \rho).$$

Del teorema de bifurcación global (4.14) y local (4.13) tenemos el siguiente teorema .

Teorema 7.4 *Para $k \in \{1, \dots, n/2, n\}$, sea h el máximo común divisor de k y n , si $\sigma_k(\mu)$ cambia de signo en μ_0 y $\sigma_j(\mu_0) \neq 0$ para los demás $j \in [1, n/2] \cap (\mathbb{N}h)$, entonces $\eta_h(\mu_0) = \pm 2$. Por lo tanto, en μ_0 existe una bifurcación global de equilibrios relativos con simetrías exactas \tilde{D}_h .*

Por bifurcación global entendemos que si la bifurcación es admisible, entonces retorna a otros puntos de bifurcación y la suma de los grados locales es cero. La bifurcación es inadmisibles si el parámetro μ va a infinito o cero, o si la norma va a infinito. Por simetrías exactas \tilde{D}_h entendemos que la bifurcación local tiene simetrías \tilde{D}_h , pero no simetrías \tilde{D}_p para h que divide a p .

7.2.2. Simetrías

En la sección (4.4) describimos de forma detallada las simetrías del grupo \tilde{D}_h , sin embargo, en esa sección dimos un enfoque para el problema de los $n + 1$ -cuerpos. En esta sección vamos a describir las simetrías del grupo \tilde{D}_h con un enfoque para la latiz de Schrödinger.

Con la notación $x_j = x_{j+kn}$, las soluciones con simetrías \tilde{D}_h satisfacen

$$(a) \ x_j = e^{-i(2\pi/h)} x_{j+n/h} \text{ y } (b) \ x_j = \bar{x}_{-j}.$$

De las simetrías anteriores tenemos que $x_j = e^{i(2\pi/h)} \bar{x}_{n/h-j}$, por lo que podemos encontrar las posición de los osciladores $j \in \{n/2h, \dots, n/h\}$ a partir de las de los osciladores $j \in \{1, \dots, n/2h\}$. Por lo tanto las posiciones de los osciladores $j \in \{1, \dots, n/h\}$ son

$$\boldsymbol{\varkappa} = (x_1, x_2, \dots, e^{i(2\pi/h)} \bar{x}_2, e^{i(2\pi/h)} \bar{x}_1).$$

Además, de la simetría (a) podemos encontrar las posiciones de todos los osciladores

$$x = (\boldsymbol{\varkappa}, e^{i(2\pi/h)} \boldsymbol{\varkappa}, \dots, e^{i(h-1)(2\pi/h)} \boldsymbol{\varkappa}).$$

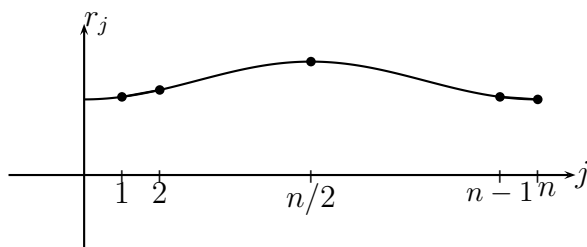


Figura 7.1: Equilibrio relativo con simetrías \tilde{D}_1 .

Si sólo describimos las normas de los osciladores $r_j = |x_j|$, las soluciones con simetrías D_h están formadas por h ondas idénticas, cada onda formada por $\bar{n} = n/h$ osciladores. Como ejemplo de las normas de un equilibrio relativo con simetrías D_h tenemos

$$r_j = 1 + \varepsilon \sin^2 j(\pi/\bar{n}).$$

7.2.3. Análisis del espectro

En esta sección vamos a encontrar los puntos de bifurcación, para eso necesitamos calcular primero los bloques A_{nj} de $D^2V(\bar{a})$.

Proposición 7.5 *Los bloques A_{nj} de la matriz $D^2V(\bar{a})$ son $A_{nj} = I$ para $j \in \{1, n-1\}$, $A_{nj} = 0$ para $j \notin \{1, n-1, n\}$ y*

$$A_{nn} = (-2 \cos \zeta) I + 2\mu^2 h'(\mu^2) \text{diag}(1, 0).$$

Prueba. Como el acoplamiento es sólo entre celdas adyacentes, entonces $A_{nj} = I$ para $j \in \{1, n-1\}$, $A_{nj} = 0$ para $j \notin \{1, n-1, n\}$ y $A_{nn} = D^2H(a_n) - 2I$.

Sea $x_0 = (x, y)$, como $\nabla H(x_0) = \omega x_0 + h(|\mu x_0|^2)x_0$, entonces

$$D^2H(x_0) = (\omega + h(|\mu x_0|^2))I + 2\mu^2 h'(|\mu x_0|^2) \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}.$$

Como \bar{a} es equilibrio que satisface la igualdad $\omega + h(\mu^2) = 4 \sin^2(\zeta/2)$, entonces para $a_n = (1, 0)$ tenemos que

$$D^2H(a_n) = 4 \sin^2(\zeta/2)I + 2\mu^2 h'(|\mu|^2) \text{diag}(1, 0).$$

Concluimos el resultado para A_{nn} de que $4 \sin^2(\zeta/2) - 2 = -2 \cos \zeta$. \square

A continuación vamos a usar los cálculos de A_{ij} para encontrar los bloques B_k .

Proposición 7.6 *Definamos a α_k y γ_k como*

$$\begin{aligned}\alpha_k &= 4 \cos \zeta \sin^2 k\zeta/2 \text{ y} \\ \gamma_k &= 2 \sin k\zeta \sin \zeta.\end{aligned}$$

Los bloques B_k son

$$B_k = -\alpha_k I + \gamma_k(iJ) + 2\mu^2 h'(|\mu|^2) \text{diag}(1, 0).$$

Prueba. Los bloques B_k están definidos como

$$B_k = \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta}.$$

Usando los cálculos de las matrices A_{nj} tenemos que

$$B_k = (e^{(ikI+J)\zeta} + e^{-(ikI+J)\zeta}) + (-2 \cos \zeta) I + 2\mu^2 h'(\mu^2) \text{diag}(1, 0).$$

Usando la igualdad $e^{J\theta} = I \cos \theta + J \sin \theta$ encontramos que

$$e^{(ikI+J)\zeta} + e^{-(ikI+J)\zeta} = (2 \cos k\zeta \cos \zeta) I + (2 \sin k\zeta \sin \zeta) iJ.$$

Por lo tanto, de la igualdad $2 \cos \zeta (\cos k\zeta - 1) = -\alpha_k$ concluimos la forma de B_k . \square

A continuación vamos a encontrar los puntos donde existe bifurcación estacionaria.

Como $\alpha_n = 0$, entonces tenemos que $e_1^T B_n e_1 = 2\mu^2 h'(\mu^2)$ y que

$$\sigma_n = \text{sgn}(h'(\mu^2)).$$

Además, para $n = 3$ tenemos que $\alpha_1 = -\gamma_1 < 0$, entonces $\sigma_1 = \sigma_n$. Para $n = 4$ tenemos que $\alpha_k = 0$ y $\gamma_1 \neq 0$, entonces $\sigma_1 = -1$ y $\sigma_2 = \sigma_n$. En los ejemplos que vamos a estudiar $h'(\mu^2)$ no cambia de signo, por lo que no hay puntos de bifurcación estacionaria para $n = 3, 4$.

Potencial general

Para $n \geq 5$ y $k \in \{1, \dots, n/2\}$ tenemos que

$$\alpha_k = 4 \cos \zeta \sin^2 k\zeta/2 \geq 0.$$

En ese caso podemos probar el siguiente teorema usando que α_k es positiva.

Teorema 7.7 *Para $n \geq 5$ y $k \in \{1, \dots, n/2\}$, el signo σ_k es cero en las soluciones de $\mu^2 h'(\mu^2) = \delta_k$ con*

$$\delta_k = (\alpha_k^2 - \gamma_k^2)/(2\alpha_k).$$

Además $\delta_1 < 0$, $\delta_2 = 0$ y $\delta_k > 0$ para $k \in [3, n/2] \cap \mathbb{N}$.

Prueba. Para $k \in [1, n/2] \cap \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det B_k &= \alpha_k^2 - \gamma_k^2 - 2\alpha_k \mu^2 h'(\mu^2) \\ &= 2\alpha_k (\delta_k - \mu^2 h'(\mu^2)). \end{aligned}$$

Como $\alpha_k > 0$, entonces $\sigma_k = \text{sgn}(\delta_k - \mu^2 h'(\mu^2))$. Para $k = n/2$ tenemos $\gamma_{n/2} = 0$, entonces $e_1^T B_{n/2} e_1 = -\alpha_{n/2} + 2\mu^2 h'(\mu^2)$. Por lo tanto $\sigma_{n/2} = \text{sgn}(\mu^2 h'(\mu^2) - \alpha_{n/2})$ también se anula en las soluciones de $\mu^2 h'(\mu^2) = \alpha_k/2 = \delta_k$.

Además, el signo de δ_k es igual al de

$$\alpha_k^2 - \gamma_k^2 = 16(\sin^2 k\zeta/2 - \sin^2 \zeta) \sin^2 k\zeta/2,$$

por lo que δ_k tiene signo de $\sin^2 k\zeta/2 - \sin^2 \zeta$. Por lo tanto $\delta_k < 0$ para $k = 1$, $\delta_k = 0$ para $k = 2$ y $\delta_k > 0$ para $k \in [3, n/2] \cap \mathbb{N}$. \square

Por lo tanto, en la latiz con un potencial general, el equilibrio relativo \bar{a} para cada $k \in \{1, \dots, n/2\}$ tal que $\mu_k^2 h'(\mu_k^2) = \delta_k$, tiene una bifurcación global de equilibrios relativos a partir de la amplitud μ_k con simetrías \tilde{D}_h , donde h es el máximo común divisor de k y n .

Potencial de Schrödinger

En el potencial cúbico de Schrödinger tenemos $h(x) = x$ con

$$h'(\mu^2) = 1 \text{ y } \sigma_n = 1.$$

Para $n \geq 5$ tenemos que $\sigma_k(\mu)$ cambia de signo en $\mu = \sqrt{\delta_k}$ cuando δ_k es positivo y probamos que δ_k es positivo para $n \geq 6$ cuando $k \in \{3, \dots, [n/2]\}$. Además, como las δ_k son crecientes en k , entonces los μ_k son crecientes en k para $k \in \{3, \dots, [n/2]\}$.

Por lo tanto, en la latiz con el potencial de Schrödinger para $n \in \{6, 7, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{3, \dots, [n/2]\}$, tiene una bifurcación global de equilibrios relativos a partir de la amplitud $\sqrt{\delta_k}$ con simetrías \tilde{D}_h , donde h es el máximo común divisor de k y n .

Potencial saturable

En el potencial saturable tenemos $h = (1 + x)^{-1}$ con

$$h'(\mu^2) = -(1 + \mu^2)^{-2} \text{ y } \sigma_n = -1.$$

La función

$$\mu^2 h'(\mu^2) = -\mu^2 (1 + \mu^2)^{-2}$$

es de doble hoja y tiene rango $(-1/4, 0)$. Por lo tanto, para $n \geq 5$ existen dos ceros $\mu_- \in (0, 1)$ y $\mu_+ \in (1, \infty)$ de $\mu^2 h'(\mu^2) = \delta_k$ si $\delta_k \in (-1/4, 0)$.

Como probamos que $\delta_k \geq 0$ para $k \geq 2$, entonces no existen puntos de bifurcación para $k \geq 2$. Para $k = 1$ tenemos que $\delta_1 < 0$ y que

$$\delta_1 = 2(\sin^2 \zeta/2 - \sin^2 \zeta) / \cos \zeta \rightarrow 0^-$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, tenemos que $\delta_1 \in (-1/4, 0)$ si n es grande y con un cálculo numérico encontramos que $\delta_1 \in (-1/4, 0)$ para $n \geq 16$.

Por lo tanto, en la latiz con el potencial saturable para $n \in \{16, 17, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de equilibrios relativos a partir de las amplitudes $\mu_- \in (0, 1)$ y $\mu_+ \in (1, \infty)$ con simetrías \tilde{D}_1 .

7.3. Bifurcación periódica

A continuación vamos a plantear el problema de bifurcación de soluciones periódicas. Los resultados que vamos a encontrar son similares a los del capítulo cinco.

Definamos al operador $\mathcal{D}(\nu)$ como $\mathcal{D}(\nu) = -\nu \mathcal{J}\dot{x}$ y al operador f como

$$f(x) = -\nu \mathcal{J}\dot{x} + \nabla V(x).$$

En este caso no existen colisiones y el operador f está definido en $H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^{2n})$. El operador $\mathcal{D}(\nu)$ es Γ -equivariante con la acción espacial del grupo $\Gamma = \mathbb{Z}_n \times S^1$ y con la acción temporal del grupo S^1 . El generador de la acción espacial es $A_1x = -\mathcal{J}x$ y el de la acción temporal es $Ax = \dot{x}$. Por lo tanto $f(x)$ es G -ortogonal con $G = \Gamma \times S^1$, la relación de ortogonalidad se obtiene de las igualdades

$$\begin{aligned}\langle f(x), \dot{x} \rangle &= -\nu \langle \mathcal{J}\dot{x}, \dot{x} \rangle - V(x)|_0^{2\pi} = 0 \\ \langle f(x), -\mathcal{J}x \rangle &= \nu \frac{1}{2} \langle x, x \rangle |_0^{2\pi} - \nu \langle \mathcal{J}x, \nabla V(x) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Como $(\zeta, \zeta) \in \Gamma$ deja fijo al equilibrio \bar{a} , el grupo de isotropía espacial $\Gamma_{\bar{a}}$ es el subgrupo $\tilde{\mathbb{Z}}_n$ generado por (ζ, ζ) . Por lo tanto

$$G_{\bar{a}} = \tilde{\mathbb{Z}}_n \times S^1.$$

La órbita de \bar{a} es isomorfa a $G/G_{\bar{a}} \simeq S^1$, por lo que el núcleo de $D^2f(\bar{a})$ tiene que estar generado por $A_1\bar{a} = -\mathcal{J}\bar{a}$.

7.3.1. Teorema de bifurcación

Como $-\mathcal{J}$ es la matriz de orden más alto del operador $\mathcal{D}(\nu)$, entonces se satisfacen las hipótesis (2.1) para la reducción de Liapunov-Schmidt. Del resultado (2.3) tenemos que la linealización de la función de bifurcación alrededor de \bar{a} tiene bloques $M(l\nu)$ con

$$M(\lambda) = -(i\mathcal{J})\lambda + D^2V(x_0).$$

La acción de $(\zeta, \theta, \varphi) \in G$ en el bloque $M(l\nu)$ es

$$(\zeta, \theta, \varphi)x_l = e^{i\varphi} e^{-\mathcal{J}\theta} \rho(\zeta)x_l.$$

Los espacios de representaciones irreducibles de la acción de $\Gamma_{\bar{a}}$ son los espacios V_k que definimos en la sección anterior. Usando el cambio de variables P tenemos que $M(\lambda)$ se descompone como

$$P^{-1}M(\lambda)P = \text{diag}(M_1, \dots, M_n),$$

en donde los bloques M_k satisfacen $M(\lambda)T_k(z) = T_k(M_k z)$.

Por lo tanto los bloques M_k son

$$\begin{aligned} M_k(\lambda) &= -\lambda iJ + B_k \\ &= -\alpha_k I + (\gamma_k - \lambda) iJ + 2\mu^2 h'(\mu^2) \text{diag}(1, 0). \end{aligned}$$

La acción de $(\zeta, \zeta, \varphi) \in \Gamma_{\bar{a}} \times S^1$ en el bloque $M_k(l\nu)$ es $\rho(\zeta, \zeta, \varphi) = e^{ik\zeta} e^{i\ell\varphi}$. Por lo que el grupo de isotropía G_k en el bloque $M_k(\nu)$ es el grupo generado por

$$(\zeta, \zeta, -k\zeta).$$

De la definición (2.6) tenemos que $\sigma = \text{sgn}(e_1^T B_n e_1)$ y que

$$\eta_k(\lambda_0) = \sigma \{n_k(\lambda_0 - \rho) - n_k(\lambda_0 + \rho)\},$$

en donde $n_k(\nu)$ es el número de Morse de M_k . Del teorema de bifurcación local (2.8) y global (2.12) tenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.8 *Si $\eta_k(\nu_0)$ es distinto de cero, en ν_0 existe una bifurcación de soluciones periódicas con simetrías G_k .*

Por bifurcación global entendemos que si la bifurcación es admisible, entonces retorna a otros puntos de bifurcación y la suma de los grados locales es cero. La bifurcación es inadmisibles si la norma o el periodo van a infinito.

7.3.2. Simetrías

En la sección (5.3) describimos de forma detallada las simetrías del grupo G_k . Sin embargo, en esa sección dimos un enfoque para el problema de los $n + 1$ -cuerpos. Por lo que en esta sección vamos a describir las simetrías del grupo G_k con un enfoque para la latiz de Schrödinger.

Los osciladores de las soluciones con simetrías G_k satisfacen

$$x_{j+1}(t) = e^{ij\zeta} x_1(t + jk\zeta).$$

Por lo anterior, todos los osciladores oscilan con la misma trayectoria, pero con distinta fase temporal y con distinta fase espacial.

Las normas de los osciladores $r_j = |x_j|$ con simetrías G_k satisfacen $r_{j+1}(t) = r_1(t + jk\zeta)$. En ese caso, las simetrías de G_n son $r_{j+1}(t) = r_1(t)$, por lo que todos los osciladores oscilan de forma idéntica.

Sea $\bar{n} = n/k$ para k que divide a n , entonces las simetrías de G_k son $r_{j+1}(t) = r_1(t + j(2\pi/\bar{n}))$. En ese caso las soluciones con simetrías G_k están formadas de k ondas viajeras iguales, cada onda viajera formada por n/k osciladores. Un ejemplo de una solución con simetrías G_k es

$$r_j(t) = 1 + \varepsilon \sin^2(t + j(\pi/\bar{n})).$$

Las simetrías de G_k cuando k no divide a n son similares a las anteriores, sin embargo, en este caso existe una permutación entre la fase temporal y el orden del oscilador en la latiz. Por ejemplo si k y n son primos relativos, sea k^{-1} tal que $kk^{-1} = 1$ modulo n , entonces las simetrías de G_k son $r_{jk^{-1}+1}(t) = r_1(t + j\zeta)$, que son una permutación de las simetrías de G_1 .

7.3.3. Análisis del espectro

A continuación vamos a encontrar los puntos donde existe bifurcación de soluciones periódicas con simetrías G_k .

Para poder encontrar la bifurcación necesitamos que $M_k(\mu, 0)$ sea invertible (2.5). Lo anterior no sucede en los puntos μ_k donde encontramos bifurcación estacionaria, por lo que tenemos que excluir los μ_k de nuestro análisis de bifurcación periódica. Además, para $n = 4$ tenemos que $\det M_2(\mu, 0) = 0$, por lo que tenemos que excluir también todo el caso $n = 4$.

Para $k = n$ tenemos $\alpha_n = \gamma_n = 0$ por lo que $\det M_n(\nu) = -\nu^2$ y $\eta_n(\lambda)$ siempre es cero. Por lo tanto, nunca existe bifurcación con simetrías G_n .

Potencial general

Recordemos que δ_k es $\delta_k = (\alpha_k^2 - \gamma_k^2)/(2\alpha_k)$ con

$$\alpha_k = 4 \cos \zeta \sin^2 k\zeta/2 \text{ y}$$

$$\gamma_k = 2 \sin k\zeta \sin \zeta.$$

Primero vamos a analizar los casos para $n \geq 5$. Notemos que en estos casos $\delta_k < \alpha_k/2$ pues α_k es positiva.

Proposición 7.9 *Definamos a ν_{\pm} como*

$$\nu_{\pm} = \gamma_k \pm \sqrt{\alpha_k(\alpha_k - 2\mu^2 h'(\mu^2))}.$$

Para $n \geq 5$, el determinante $\det M_k$ se anula sólo en $\{\nu_{\pm}\}$ para $\mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_k/2$. En ese caso $\eta_k(\nu_{\pm}) = \pm\sigma$ con $\sigma = \text{sgn}(h'(\mu^2))$.

Además, los valores ν_{\pm} son positivos sólo en los siguientes casos.

- (a) El valor ν_+ es positivo para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\mu^2 h'(\mu^2) < \delta_k$.
- (b) Los valores ν_+ y ν_- son positivos para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ y $\delta_k < \mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_k/2$.

Prueba. Como el determinante de M_k es

$$d_k(\nu) = \det M_k = -2\alpha_k \mu^2 h'(\mu^2) + \alpha_k^2 - (\gamma_k - \nu)^2,$$

entonces el determinante $d_k(\nu)$ se anula sólo en los puntos ν_{\pm} para $\mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_k/2$. Además, en esos casos la traza de $M_k(\nu)$ es

$$T_k = 2\mu^2 h'(|\mu|^2) - 2\alpha_k < -\alpha_k < 0.$$

Como $d(\lambda)$ es positivo en (ν_-, ν_+) y negativo en el complemento, entonces $n_k(\nu) = 2$ en (ν_-, ν_+) y $n_k(\nu) = 1$ en el complemento. Por lo tanto $\eta_k(\nu_-) = \sigma(1-2)$ y $\eta_k(\nu_+) = \sigma(2-1)$.

Como $d_k(\nu)$ es un polinomio de grado dos, entonces ν_+ es positivo y ν_- es negativo, si $d_k(0)$ es positivo. Concluimos el resultado para (a) de que el determinante $d_k(0)$ es positivo para $\mu^2 h'(\mu^2) < \delta_k$. Además, el determinante $d_k(0)$ es negativo para $\delta_k < \mu^2 h'(\mu^2)$, entonces ν_+ y ν_- o son positivos o son negativos. Como $\nu_{\pm} = \gamma_k \pm \sqrt{*}$, entonces ν_{\pm} tiene el mismo signo de γ_k . Concluimos el resultado para (b) de que γ_k es positivo para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ y que $\gamma_{n-k} = -\gamma_k$. \square

Por lo tanto, en la latiz para un potencial general para $n \in \{5, 6, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\mu^2 h'(\mu^2) < \delta_k$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con simetrías G_k . Además, la bifurcación anterior es inadmisibles o va a un punto de bifurcación de otro equilibrio.

Para $n \in \{5, 6, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ tal que $\delta_k < \mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_k/2$ tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con simetrías G_k .

Probamos que el determinante del bloque $M_k(\nu)$ se anula en dos puntos para $k \in \{1, \dots, n-1\}$ si $\mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_k/2$. De la observación (2.9) tenemos que el bloque M_k es estable para $\mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_k/2$. Además, el determinante $\det M_n(\nu)$ tiene un cero doble en $\nu = 0$. Sin embargo, el bloque M_n es estable debido a las simetrías espaciales del problema. Usando que las α_k son

crecientes para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ concluimos que la solución \bar{a} es linealmente estable para

$$\mu^2 h'(\mu^2) < \alpha_1/2.$$

Como excluimos al caso $n = 4$, el caso $n = 3$ es el único que nos falta. La prueba es similar al caso anterior, sólo tenemos que invertir todas las desigualdades.

Proposición 7.10 *Para $n = 3$, el determinante $\det M_k$ se anula sólo en $\{\nu_{\pm}\}$ para $\alpha_k/2 < \mu^2 h'(\mu^2)$. En ese caso tenemos que $\eta_k(\nu_{\pm}) = \mp \sigma$ con $\sigma = \text{sgn}(h'(\mu^2))$. Además, los valores ν_{\pm} son positivos sólo en los siguientes casos.*

(a) *El valor ν_+ es positivo para $k \in \{1, 2\}$ y $0 < \mu^2 h'(\mu^2)$.*

(b) *Los valores ν_+ y ν_- son positivos para $\alpha_1/2 < \mu^2 h'(\mu^2) < 0$.*

Prueba. Como $\alpha_k < 0$, entonces $\det M_k$ se anula en ν_{\pm} si $\alpha_k/2 < \mu^2 h'(\mu^2)$. En este caso la traza de M_k es

$$T_k(\lambda) = 2\mu^2 h'(|\mu|^2) - 2\alpha_k > -\alpha_k > 0.$$

Por lo que $n_k(\nu) = 0$ en (ν_-, ν_+) y $n_1(\nu) = 1$ en el complemento. Por lo tanto $\eta_k(\nu_-) = \sigma(1 - 0)$ y $\eta_k(\nu_+) = \sigma(0 - 1)$.

Además, el valor ν_+ es positivo cuando $d_k(0)$ es positivo. Como $\alpha_1 = -\gamma_1$, entonces $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Concluimos el resultado para (a) de que $d_k(0)$ es positivo para $0 = \delta_k < \mu^2 h'(\mu^2)$. Además, el determinante $d_k(0)$ es negativo para $\mu^2 h'(\mu^2) < \delta_k = 0$, entonces ν_+ y ν_- o son positivos o son negativos. Como $\nu_{\pm} = \gamma_k \pm \sqrt{*}$, entonces ν_{\pm} tienen el mismo signo que γ_k . Concluimos el resultado para (b) de que $\gamma_1 = 2 \sin^2 \zeta > 0$ y que $\gamma_2 = -\gamma_1$. \square

Por lo tanto, en la latiz con un potencial general para $n = 3$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, 2\}$ tal que $0 < \mu^2 h'(\mu^2)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con simetrías G_k . Además, la bifurcación anterior es inadmisibles o va a un punto de bifurcación de otro equilibrio.

Para $n = 3$ el equilibrio relativo poligonal para $\alpha_1/2 < \mu^2 h'(\mu^2) < 0$ tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con simetrías G_1 .

Para $n = 3$, el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable para $\alpha_1/2 < \mu^2 h'(\mu^2)$.

Potencial de Schrödinger

En la latiz para el potencial cúbico de Schrödinger tenemos $h(\mu) = \mu$ con

$$h'(\mu^2) = 1 \text{ y } \sigma = 1.$$

Para $n \geq 5$ tenemos los siguientes casos:

Para $k \in \{1, 2, n-2, n-1\}$ tenemos $\delta_k \leq 0$, entonces nunca se satisface la condición (a) y para $\mu \in (0, \sqrt{\alpha_k/2})$ se satisface la condición (b).

Para $k \in \{3, \dots, n-3\}$ tenemos $\delta_k > 0$, entonces para $\mu \in (0, \sqrt{\delta_k})$ se satisface la condición (a) y para $\mu \in (\sqrt{\delta_k}, \sqrt{\alpha_k/2})$ se satisface la condición (b).

Por lo tanto, en la latiz con el potencial de Schrödinger para $n \in \{6, 7, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{3, \dots, n-3\}$ tal que $\mu \in (0, \sqrt{\delta_k})$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con simetrías G_k . Además, la bifurcación anterior es inadmisibles o va a un punto de bifurcación de otro equilibrio.

Para $n \in \{5, 6, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, 2\}$ tal que $\mu \in (0, \sqrt{\alpha_k/2})$ y para cada $k \in \{3, \dots, [n/2]\}$ tal que $\mu \in (\sqrt{\delta_k}, \sqrt{\alpha_k/2})$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con simetrías G_k .

De la observación (3.4), para $n \geq 5$ el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable para las amplitudes $\mu \in (0, \sqrt{\alpha_1/2})$.

Para $n = 3$ y $k \in \{1, 2\}$ tenemos que siempre se satisface la condición (a). *Para $n = 3$ el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{1, 2\}$ tal que $\mu \in (0, \infty)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con simetrías G_k . Además, para $n = 3$ el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable para las amplitudes $\mu \in (0, \infty)$.*

Potencial saturable

En la latiz para el potencial saturable tenemos $h(x) = (1+x)^{-1}$ con

$$h'(\mu^2) = -(1+\mu^2)^{-2} \text{ y } \sigma = -1.$$

Para $n \geq 5$ tenemos los siguientes casos:

Para $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tenemos que $\delta_k \geq 0$, entonces para toda $\mu \in (0, \infty)$ se satisface $\mu^2 h'(\mu^2) < \delta_k$ que es la condición (a).

Para $n \in \{16, 17, \dots\}$, sean $\mu_- \in (0, 1)$ y $\mu_+ \in (1, \infty)$ las soluciones de $\mu^2 h'(\mu^2) = \delta_1$. Entonces para $\mu \in (0, \mu_-) \cup (\mu_+, \infty)$ se satisface $\delta_1 < \mu^2 h'(\mu^2)$

que es la condición (b) y para $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ se satisface $\mu^2 h'(\mu^2) < \delta_1$ que es la condición (a). Además, para $n = \{5, \dots, 15\}$ tenemos lo mismo que antes si definimos a μ_- y a μ_+ como cero.

Por lo tanto, en la latiz con el potencial saturable para $n \in \{5, 6, \dots\}$, el equilibrio relativo poligonal para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tal que $\mu \in (0, \infty)$ y para cada $k \in \{1, n-1\}$ tal que $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ con simetrías G_k . La bifurcación anterior es inadmisibles o va a un punto de bifurcación de otro equilibrio.

Para $n \in \{5, 6, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal para $\mu \in (0, \mu_-) \cup (\mu_+, \infty)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con simetrías G_1 .

De la observación (3.4), para $n \geq 5$ el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable para todas las amplitudes $\mu \in (0, \infty)$.

Para $n = 3$ tenemos que $\alpha_1/2 = -3/4$, entonces $\alpha_1/2 < -1/4 < \mu^2 h'(\mu^2)$ para toda $\mu \in (0, \infty)$. Por lo tanto siempre se satisface la condición (b). *Para $n = 3$ el equilibrio relativo poligonal para $\mu \in (0, \infty)$, tiene una bifurcación global de soluciones periódicas a partir del periodo $2\pi/\nu_+$ y $2\pi/\nu_-$ con simetrías G_1 . Además, para $n = 3$ el equilibrio relativo poligonal es linealmente estable para las amplitudes $\mu \in (0, \infty)$.*

7.4. Comentarios

En este capítulo analizamos para un potencial general una latiz circular de osciladores de Schrödinger acoplados. En particular estudiamos con detalle el potencial cúbico de Schrödinger y el potencial saturable. Nosotros encontramos bifurcación de soluciones periódicas y estacionarias partiendo de un equilibrio relativo poligonal equivalente al del problema de los n -cuerpos. Como las ecuaciones de la latiz no son homogéneas, a diferencia del problema de los n -cuerpos, la amplitud del equilibrio μ nos sirvió como parámetro para encontrar bifurcación de equilibrios relativos.

En general probamos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ existe una relación en μ que determina la existencia de bifurcación global de soluciones estacionarias con simetrías \tilde{D}_h , donde h es el máximo común divisor de k y n . Las soluciones con simetrías \tilde{D}_h están formadas por h ondas idénticas, en donde cada onda tiene $\bar{n} = n/h$ osciladores. Un ejemplo de las normas de un equilibrio relativo

con simetrías \tilde{D}_h es

$$r_j = 1 + \varepsilon \sin^2 j(\pi/\bar{n}).$$

Las soluciones anteriores en el caso de ser localizadas son conocidas como breathers periódicos en la latiz circular. Pero en la latiz infinita las soluciones anteriores son ondas estacionarias periódicas que oscilan periódicamente en el tiempo.

En particular, para el potencial saturable y de Schrödinger probamos lo siguiente:

- En el potencial de Schrödinger probamos que para $n \in \{6, 7, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_h para cada $k \in \{3, \dots, [n/2]\}$.
- En la latiz con potencial saturable probamos que para $n \in \{16, 17, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal tiene dos ramas de bifurcación global de equilibrios relativos con simetrías \tilde{D}_1 .

En el artículo [PD09] se analiza numéricamente la bifurcación de equilibrios relativos en una latiz circular con un defecto en uno de los osciladores para $n = 7$.

En la segunda parte encontramos las condiciones necesarias para la existencia de bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k . Una solución con simetrías G_k está formada de k ondas viajeras iguales cuando k divide a n , cada onda viajera con $\bar{n} = n/k$ osciladores. Un ejemplo de una solución con simetría G_k es

$$r_j(t) = 1 + \varepsilon \sin^2(t + j(\pi/\bar{n})).$$

Las soluciones anteriores vistas en la latiz circular son conocidas como breathers cuasiperiódicos cuando son localizadas. Pero en la latiz infinita son ondas viajeras periódicas en espacio y cuasiperiódicas en tiempo. En particular, probamos lo siguiente:

- Para el potencial de Schrödinger probamos que para $n \in \{6, 7, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k para cada $k \in \{3, \dots, n-3\}$ tal que $\mu \in (0, \sqrt{\delta_k})$.

- Para el potencial saturable probamos que para $n \in \{5, 6, \dots\}$ el equilibrio relativo poligonal tiene una bifurcación global de soluciones periódicas con simetrías G_k para cada $k \in \{2, \dots, n-2\}$ tal que $\mu \in (0, \infty)$.

Vimos que el equilibrio poligonal es linealmente estable para el potencial de Schrödinger si $\mu < \sqrt{\alpha_1/2}$ y que es siempre estable para el potencial saturable. Sin embargo, lo anterior no quiere decir que el equilibrio poligonal sea linealmente estable en la latiz infinita, pues en ese caso existen perturbaciones no periódicas que originan inestabilidad [EJ03].

En el artículo [Joh04] se prueba bifurcación Hamiltoniana como la nuestra en una latiz circular para $n = 3$, pero para un equilibrio formado por un oscilador con amplitud cero y dos osciladores con amplitudes iguales pero fases contrarias. En [MA94] se prueba por primera vez existencia de breathers periódicos y cuasiperiódicos en una latiz infinita a partir del límite anticontinuo.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Representación integral de $S(r, \varphi)$

Sea $\zeta = 2\pi/n$, definamos a la función $S(r, \varphi)$ como

$$S(r, \varphi) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|^\beta}.$$

Proposición A.1 Para $\beta \in (0, 2)$ y $r \in (0, 1)$ la función S tiene la representación integral

$$S(r, \varphi) = \frac{n}{\pi} \sin(\pi\beta/2) \int_0^1 \frac{1}{(\tau^{-1} - 1)^{\beta/2}} f(\tau) d\tau \text{ con}$$
$$f(\tau) = \frac{1}{\tau(1 - r^2\tau)^{\beta/2}} \frac{1 - (r\tau)^{2n}}{\|1 - (\tau r e^{-i\varphi})^n\|^2}.$$

De la representación integral anterior tenemos que

$$S_\varphi(r, \varphi) = -\sin(n\varphi) \left(\frac{n^2}{\pi} \sin \frac{\pi\beta}{2} \int_0^1 \frac{1}{(\tau^{-1} - 1)^{\beta/2}} \frac{2(r\tau)^n}{\tau(1 - r^2\tau)^{\beta/2}} \frac{1 - (r\tau)^{2n}}{\|1 - (\tau r e^{-i\varphi})^n\|^4} d\tau \right)$$

para $r \in [0, 1)$. Como la función entre paréntesis es estrictamente positiva, entonces la función $S_\varphi(r, \varphi)$ es producto de $-\sin(n\varphi)$ con una función positiva. Además, podemos probar que la función $S(r)$ satisface $S(1/r) = r^\beta S(r)$ usando que $\|1 - r e^{i\theta}\| = \|r - e^{i\theta}\|$. Por lo tanto, la función $S_\varphi(r, \varphi)$ es producto de $-\sin(n\varphi)$ con una función positiva $\omega(r, \varphi)$ para $r \neq 1$.

Prueba. La función

$$w(z) = \frac{1}{[z^{-1} - 1]^{\beta/2}}$$

tiene una extensión analítica para $z \in \mathbb{C} - [0, 1]$. Usando la rama principal del logaritmo tenemos que la extensión de la función anterior es

$$w(z) = e^{-(\beta/2)[\log|z^{-1}-1| + i \arg(z^{-1}-1)]}.$$

Sean $w^\pm(r)$ los límites $w^\pm(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(r \pm i|\varepsilon|)$ para $r \in (0, 1)$, entonces

$$w^+(r) = e^{-i\beta\pi} \frac{1}{(r^{-1} - 1)^{\beta/2}} \text{ y } w^-(r) = \frac{1}{(r^{-1} - 1)^{\beta/2}}$$

Sea Ω_ε el conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon^{-1} \text{ y } |z - r| > \varepsilon \text{ para } r \in [0, 1]\}.$$

Como la función $w(z)f(z)$ es del orden $O(1/z^{1+\beta/2})$ para $z \sim \infty$, entonces para $\beta > 0$ la integral sobre el círculo exterior de $\partial\Omega_\varepsilon$ tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Además, el producto $w(z)f(z)$ es de orden $O(z^{\beta/2-1})$ para $z \sim 0$ y de orden $O((1-z)^{-\beta/2})$ para $z \sim 1$. Por lo tanto las integrales sobre los medios círculos de $\partial\Omega_\varepsilon$ tienden a cero para $\beta < 2$. De los límites anteriores concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} w(z)f(z)dz &= \int_0^1 [w^+(\tau) - w^-(\tau)]f(\tau)d\tau \\ &= (e^{-i\beta\pi} - 1) \int_0^1 w^-(\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

La función $w(z)f(z)$ tiene n polos en $\mathbb{C} - [0, 1]$ y un polo en $z = r^{-2}$. El residuo en el polo $z = r^{-2}$ es cero pues $\beta/2 \in (0, 1)$. Los demás polos son las raíces de

$$g(z) = \|1 - (zre^{-i\varphi})^n\|^2 = 1 + (rz)^{2n} - 2(rz)^n \cos n\varphi.$$

Por lo que los polos se encuentran en $z_j^{-1} = (re^{-i\varphi})e^{ij\zeta}$ para $j = 0, \dots, n-1$. La derivada de la función g es $g'(z) = 2nz^{-1}(rz)^n((rz)^n - \cos n\varphi)$. Como $(rz_j)^n = e^{in\varphi}$, entonces la derivada en el polo z_j es

$$g'(z_j) = 2nz_j^{-1}e^{in\varphi}(e^{in\varphi} - \cos n\varphi) = 2inz_j^{-1}e^{in\varphi} \sin n\varphi.$$

Por lo tanto el residuo en el polo z_j es

$$\operatorname{res}_{z_j} w(z)f(z) = \frac{1}{[(z_j^{-1} - 1)(1 - r^2 z_j)]^{\beta/2}} \frac{1 - e^{2ni\varphi}}{z_j g'(z_j)}.$$

Como $r^2 z_j = \bar{z}_j^{-1}$ y $(1 - e^{2ni\varphi})/(z_j g'(z_j)) = -1/n$, entonces

$$\operatorname{res}_{z_j} w(z)f(z) = -\frac{1}{n} \frac{1}{(-1)^{\beta/2}} \frac{1}{\|z_j^{-1} - 1\|^\beta} = -\frac{1}{n} e^{-i\pi\beta/2} \frac{1}{\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|^\beta}.$$

Del teorema del residuo tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} w(z)f(z)dz = 2\pi i \sum_{\mathbb{C} - [0,1]} \operatorname{res} w(z)f(z).$$

Del cálculo de la integral y del cálculo en los residuos concluimos que

$$(e^{-i\beta\pi} - 1) \int_0^1 \frac{1}{(\tau^{-1} - 1)^{\beta/2}} f(\tau) d\tau = -2\pi i e^{-i\pi\beta/2} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|^\beta}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\|r - e^{i(j\zeta - \varphi)}\|^\beta} = \frac{n}{\pi} \sin(\pi\beta/2) \int_0^1 \frac{1}{(\tau^{-1} - 1)^{\beta/2}} f(\tau) d\tau.$$

□

De la igualdad $S(1/r) = r^\beta S(r)$ podemos encontrar una representación integral para $r \in (1, \infty)$. Por lo anterior, la función $S(r, \varphi)$ tiene una extensión continua en el plano complejo a excepción de los puntos singulares $e^{ij\zeta}$. La prueba de la representación integral anterior para $\beta = 1$ se debe a Lindow y en el artículo [BE03] se generaliza a $\beta \in (0, 2)$. Usando los resultados de [BE03], nosotros hemos encontrado una prueba usando integrales de Cauchy.

A.2. Análisis de las sumas s_k

Sea $\zeta = 2\pi/n$, definamos a las sumas s_k y \bar{s}_k como

$$s_k = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(kj\zeta/2)}{\sin^{\alpha+1}(j\zeta/2)} \text{ y } \bar{s}_k = \frac{1}{2^{\alpha-2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(kj\zeta/2)}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)}.$$

De la definición anterior podemos ver que s_k es siempre positiva y que s_k satisface la condición de periodicidad

$$s_k = s_{n+k} = s_{n-k}.$$

Proposición A.2 *Las sumas s_k satisfacen las formulas*

$$s_k = k^2 s_1 - \sum_{l=1}^{k-1} l \bar{s}_{k-l},$$

$$s_{k+1} - s_k = (2k + 1) s_1 - \sum_{l=1}^k \bar{s}_l,$$

$$s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1} = 2s_1 - \bar{s}_k.$$

Prueba. Podemos desarrollar a s_k como

$$2^\alpha s_k = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)} \frac{1 - \cos(kj\zeta)}{1 - \cos(j\zeta)}.$$

Usando series geométricas encontramos que

$$\frac{1 - \cos(kj\zeta)}{1 - \cos(j\zeta)} = \frac{1 - e^{ijk\zeta}}{1 - e^{ij\zeta}} \frac{1 - e^{-ijk\zeta}}{1 - e^{-ij\zeta}} = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} e^{ij(l-m)\zeta}.$$

Del cálculo anterior obtenemos que

$$2^\alpha (s_{k+1} - s_k) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)} \sum_{h=-k}^k e^{ijh\zeta}. \quad (\text{A.1})$$

La suma de las exponenciales en la igualdad anterior es

$$\sum_{h=-k}^k e^{ijh\zeta} = \sum_{h=-k}^k \cos jh\zeta = \sum_{h=-k}^k (1 - 2 \sin^2(jh\zeta/2)) = (2k+1) - 4 \sum_{h=1}^k \sin^2(jh\zeta/2).$$

Por lo tanto

$$s_{k+1} - s_k = (2k + 1) s_1 - \sum_{h=1}^k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(hj\zeta/2)}{2^{\alpha-2} \sin^{\alpha-1}(j\zeta/2)} = (2k + 1) s_1 - \sum_{h=1}^k \bar{s}_h$$

Iterando la igualdad obtenemos que

$$(s_{k+1} - s_k) - (s_k - s_{k-1}) = 2s_1 - \bar{s}_k \text{ y}$$

$$s_k = \sum_{l=0}^{k-1} (s_{l+1} - s_l) = \sum_{l=0}^{k-1} \left((2l+1)s_1 - \sum_{h=1}^l \bar{s}_h \right) = k^2 s_1 - \sum_{l=1}^{k-1} l \bar{s}_{k-l}.$$

□

La idea de usar series geométricas se nos ocurrió del artículo [CS00], en el cual se usan series geométricas para calcular las sumas s_k para $\alpha = 1$. Con los resultados de la proposición anterior podemos probar las siguientes desigualdades .

Corolario A.3 Como \bar{s}_k y $4s_k - \bar{s}_k$ son positivos, entonces

$$s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1} < 2s_1 \text{ y}$$

$$s_{k+1} + 2s_k + s_{k-1} > 2s_1.$$

Para el problema de los vórtices tenemos que $\alpha = 1$, en ese caso podemos calcular a las sumas s_k explícitamente.

Corolario A.4 Para $\alpha = 1$ tenemos que

$$s_k = \frac{1}{2}k(n-k).$$

Prueba. Como $\alpha = 1$, entonces $s_1 = (n-1)/2$. Además, podemos calcular explícitamente a los \bar{s}_k ,

$$\bar{s}_k = 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sin^2(kj\zeta/2) = \sum_{j=1}^{n-1} (1 - \cos(kj\zeta)) = n.$$

Concluimos de la formula que encontramos en la proposición anterior para s_k que

$$s_k = k^2 \left(\frac{n-1}{2} \right) - n \sum_{l=1}^{k-1} l = \frac{k(n-k)}{2}.$$

□

En el problema de los cuerpos $\alpha = 2$ no podemos encontrar a las sumas s_k explícitamente. Sin embargo, los siguientes límites nos sirven para realizar un análisis asintótico del espectro.

Proposición A.5 Definamos a σ como

$$\sigma = \frac{1}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}.$$

Para $\alpha = 2$, las sumas s_k tienen los límites

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1}{n \ln n} = \frac{1}{2\pi}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_k}{s_1} = k^2,$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n/2}}{n^3} = \sigma \quad \text{y} \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n/2-1}}{n^3} = \sigma.$$

Prueba. (a) Definamos a σ_n como

$$\sigma_n = \sum_{j \in [1, n/2] \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{\sin(\pi j/n)}.$$

Para n impar tenemos que $s_1 = \sigma_n/2$. Para n par tenemos que $s_1 = \sigma_n/2 + 1/4$. Por lo tanto, cualquiera que sea la paridad de n tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1}{n \ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n \ln n}.$$

Usando aproximación por integrales encontramos que

$$\sigma_n = \int_1^{n/2} \frac{dx}{\sin(\pi x/n)} + O(c) = \frac{n}{\pi} \ln \left(\cot \frac{\pi}{2n} \right) + O(c),$$

pues la integral de $1/\sin x$ es $-\ln(\cot x/2)$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cot x) = 1$, entonces

$$\sigma_n - \frac{n}{\pi} \ln n = \frac{n}{\pi} \ln \left(\frac{1}{n} \cot \frac{\pi}{2n} \right) + O(c) = O(n).$$

Por lo tanto, concluimos el resultado de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n \ln n} = 1/\pi$.

(b) Usando aproximaciones por integrales podemos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{s}_k/n)$ es finito, entonces de la formula para s_k tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_k}{s_1} = k^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_1/n} \sum_{l=1}^{k-1} l(\bar{s}_{k-l}/n) = k^2.$$

(c) Definamos a σ_n como

$$\sigma_n = \sum_{j \in [1, n/2) \cap \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(j\pi/2)}{\sin^3(\pi j/n)}.$$

Con un argumento similar al de (a) podemos ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n/2}}{n^3} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n^3}.$$

De la expansión en series de Taylor de $\sin^3 x$ encontramos la desigualdad $x^3 - x^5/2 < \sin^3 x$. El polinomio $x^3 - x^5/2$ es positivo en el intervalo $[\pi/n, \sqrt{2})$, entonces

$$\frac{1}{\sin^3 x} < \frac{1}{x^3 - x^5/2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x(2 - x^2)}.$$

Como $1/(2x - x^3)$ es decreciente en $[\pi/n, \sqrt{2})$, entonces

$$\frac{1}{\sin^3 x} < \frac{1}{x^3} + O(n).$$

Además, la función $1/\sin^3 x$ es decreciente en el intervalo $[\sqrt{2}, \pi/2)$, entonces en ese intervalo tenemos que

$$\frac{1}{\sin^3 x} < \frac{1}{\sin^3 \sqrt{2}} < \frac{1}{x^3} + O(c).$$

Usando las cotas anteriores encontramos que

$$\sigma_n < \sum_{j \in [1, n/2) \cap \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(j\pi/2)}{(j\pi/n)^3} + nO(n).$$

Ahora, como $\sin x < x$, entonces

$$\sigma_n > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(j\pi/2)}{(j\pi/n)^3}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\sigma_n}{n^3} = \frac{1}{\pi^3} \sum_{j \in [1, n/2) \cap \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(j\pi/2)}{j^3} + \frac{1}{n^2} O(n).$$

De lo anterior concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n/2}}{n^3} = \frac{1}{2\pi^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin^2(j\pi/2)}{j^3} = \sigma.$$

(d) Para probar este caso vamos a usar que $\bar{s}_l = O(s_1)$ pues $\bar{s}_l/n \rightarrow c$ y $s_1/n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $s_{n/2} - s_{n/2-1} = (n-1)s_1 - \sum_{l=1}^{n/2-1} \bar{s}_l$, entonces

$$s_{n/2} - s_{n/2-1} = O(ns_1) = O(n^2 \ln n) = o(n^3).$$

Por lo tanto, del límite para $s_{n/2}$ concluimos el resultado. \square

Las pruebas de los inciso (a) y (b) en la proposición anterior las tomamos del artículo [Rob00]. A continuación vamos a probar que los s_k son crecientes para $k \in \{0, \dots, [n/2]\}$, para lo que necesitamos el siguiente lema.

Lema A.6 *Sea s la suma $s = -\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k - \frac{1}{2})j\zeta$, entonces $s = -\cot(k - 1/2)\zeta/2$.*

Prueba. Sea $\xi = (k - 1/2)\zeta$, entonces la suma es $s = -\sum_{j=0}^{n-1} \sin j\xi$. Escribiendo al seno como exponenciales tenemos que $s = -\frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i\xi j} - e^{-i\xi j})$. A continuación vamos a usar series geométricas para probar que

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{(1 - e^{i\xi n})}{(1 - e^{i\xi})} - \frac{(1 - e^{-i\xi n})}{(1 - e^{-i\xi})} \right) \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi} - (e^{in\xi} - e^{-in\xi}) + e^{i(n-1)\xi} - e^{-i(n-1)\xi}}{2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, escribiendo a las exponenciales como senos y cosenos concluimos que

$$s = -\frac{\sin \xi - \sin n\xi + \sin(n-1)\xi}{2(1 - \cos \xi)}.$$

Como $n\xi = 2\pi(k - 1/2) \equiv \pi$ modulo 2π , entonces $\sin n\xi = 0$ y $\sin(n-1)\xi = \sin \xi$. Por lo anterior tenemos que

$$s = -\frac{\sin \xi}{1 - \cos \xi} = -\cot(\xi/2).$$

□

De las formulas de recurrencia tenemos para $\alpha = 2$ que $s_2 = 4s_1 - \bar{s}_1$ con $\bar{s}_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \sin(j\zeta/2)$ y del lema anterior encontramos que $\bar{s}_1 = -\cot(\pi/2n)$.

Proposición A.7 Para $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ los s_k satisfacen

$$s_k > s_{k-1}.$$

Prueba. Definamos a las diferencias d_k , d'_k y d''_k como

$$d_k = s_{k+1} - s_k, d'_k = d_k - d_{k-1} \text{ y } d''_k = d'_k - d'_{k-1}.$$

La prueba consiste en probar que los d''_k son negativos. A partir de ese hecho vamos a concluir que los d_k son positivos.

De la igualdad (A.1) para $\alpha = 2$ tenemos que

$$d_k = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(j\zeta/2)} \sum_{h=-k}^k e^{ijh\zeta}.$$

De la definición de d'_k tenemos que

$$d'_k = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2 \cos jk\zeta}{\sin(j\zeta/2)}.$$

De la igualdad anterior concluimos que

$$d''_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos jk\zeta - \cos j(k-1)\zeta}{\sin(j\zeta/2)}.$$

A continuación vamos a desarrollar el coeficiente de la suma en d''_k . Para eso vamos a necesitar la siguiente igualdad trigonométrica

$$\begin{aligned} \cos jk\zeta - \cos j(k-1)\zeta &= (1 - \cos j\zeta) \cos jk\zeta - \sin jk\zeta \sin k\zeta \\ &= 2 \sin \frac{j\zeta}{2} \left(\sin \frac{j\zeta}{2} \cos jk\zeta - \sin jk\zeta \cos \frac{k\zeta}{2} \right) \\ &= -2 \sin \frac{j\zeta}{2} \sin(k - \frac{1}{2})j\zeta. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior encontramos que $d''_k = -\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k-1/2)j\zeta$ y del lema anterior tenemos que $d''_k = -\cot(\xi/2)$ es negativo para $\xi \in (0, \pi)$ con $\xi = \pi(2k-1)/n$. Por lo tanto $d''_k < 0$ para $k \in \mathbb{N} \cap (1/2, (n+1)/2)$ y d'_k es decreciente para $k \in \mathbb{N} \cap [0, n/2]$.

Para $k = 0$ tenemos que $d'_0 = 2s_1 > 0$ y que $d_0 = s_1 > 0$. Como d'_0 es positiva y d'_k decrece en $k \in \mathbb{N} \cap [0, n/2]$, entonces a lo más existe un $k_0 \in \mathbb{N} \cap [1, n/2]$ tal que

$$d'_{k_0-1} > 0 \geq d'_{k_0}.$$

Si no existe tal k_0 , entonces d'_k es positiva para todo $k \in \mathbb{N} \cap [0, n/2]$. En ese caso d_k es creciente para todo $k \in \mathbb{N} \cap [0, n/2]$. Como $d_0 > 0$, entonces $d_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cap [0, n/2]$.

Ahora vamos a suponer que tal k_0 sí existe. Como $s_{n-k} = s_k$, entonces d_k satisface la igualdad

$$d_{k-1} = (s_k - s_{k-1}) = -(s_{(n-k)+1} - s_{(n-k)}) = -d_{n-k}.$$

Si n es impar, de la igualdad anterior para $k = (n+1)/2$, encontramos que $d_{(n-1)/2} = -d_{(n-1)/2} = 0$. Si n es par, de la igualdad anterior para $k = n/2$, encontramos que $d_{n/2-1} = -d_{n/2}$. Como supusimos que ese k_0 sí existe, entonces

$$2d_{n/2-1} = d_{n/2-1} - d_{n/2} = -d'_{n/2} > 0.$$

Por lo tanto, cualquiera que sea la paridad de n tenemos que $d_{[(n-1)/2]} \geq 0$ con $[x]$ igual a la parte entera de $x \in \mathbb{R}$. Como d_k es creciente en $\mathbb{N} \cap (0, k_0)$ y decreciente en $\mathbb{N} \cap (k_0, [(n-1)/2]]$ con $d_0 > 0$, entonces d_k es positiva para todo $k \in \{0, \dots, [(n-1)/2]\}$. Por lo tanto s_k es creciente para $k \in \{0, \dots, [n/2]\}$. \square

Bibliografía

- [AE04] M. Arribas and A. Elipe. Bifurcations and equilibria in the extended n -body ring problem. *Mech. Res. Comm.*, 31(1):1–8, 2004.
- [Alb95] A. Albouy. Symétrie des configurations centrales de quatre corps. *Acad. Sci.*, 320:217–220, 1995.
- [APC08] F. Alfaro and E. Perez-Chavela. Linear stability of relative equilibria in the charged three-body problem. *J. Differential Equations*, 245(7):1923–1944, 2008.
- [Bar93] T. Bartsch. *Topological methods for variational problems with symmetries*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.
- [BCPS06] E. Barrabas, J. M. Cors, C. Pinyol, and J. Soler. Hip-hop solutions of the $2n$ -body problem. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 95(1-4):55–66, 2006.
- [BE03] D. Bang and B. Elmabsout. Representations of complex functions, means on the regular n -gon and applications to gravitational potential. *J. Phys.*, 36(45):11435–11450, 2003.
- [BE04] D. Bang and B. Elmabsout. Restricted $n + 1$ -body problem: existence and stability of relative equilibria. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 89(4):305–318, 2004.
- [Ber77] M.S. Berger. *Nonlinearity and functional analysis*. Pure and Applied Mathematics, 74. Academic Press, 1977.

- [BKS06] Z. Balanov, W. Krawcewicz, and H. Steinlein. *Applied equivariant degree*. AIMS Series on Differential Equations & Dynamical Systems, 1. American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), 2006.
- [Bt85] T. Bröcker and T. tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, 1985.
- [CF08] A. Chenciner and J. Fejoz. Unchained polygons and the n-body problem. 2008.
- [CH82] S. Chow and J. K. Hale. *Methods of bifurcation theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 251. Springer-Verlag, 1982.
- [Cha91] K. C. Chang. *Infinite dimensional Morse theory and multiple solutions problems*. Birkhäuser, 1991.
- [Che08] A. Chenciner. Four lectures on the n -body problem. In W. Craig, editor, *Hamiltonian dynamical systems and applications*, NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics, pages 21–52. Springer, 2008.
- [CL10] M. Corbera and J. Llibre. On the existence of central configurations of p nested regular polyhedra. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 106(2):197–207, 2010.
- [CM00] A. Chenciner and R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math.*, 152(3):881–901, 2000.
- [COR02] P. Chossat, J.P. Ortega, and T. S. Ratiu. Hamiltonian Hopf bifurcation with symmetry. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 163(1):1–33, 2002.
- [CS00] H. E. Cabral and D. S. Schmidt. Stability of relative equilibria in the problem of $n + 1$ vortices. *SIAM J. Math. Anal.*, 31(2):231–250, 2000.

- [CW93] W. Craig and C. Wayne. Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 46(11):1409–1498, 1993.
- [Dan85] E. Dancer. A new degree for S^1 -invariant gradient mappings and applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire*, 2:329–370, 1985.
- [DGJM91] G. Dylawerski, K. Geba, J. Jodel, and W. Marzantowicz. An S^1 -equivariant degree and the Fuller index. *Ann. Pol. Math.*, 52:243–280., 1991.
- [DRP⁺07] E. J. Doedel, V. A. Romanov, R. C. Paffenroth, H. B. Keller, D. J. Dichmann, J. Galán-Vioque, and A. Vanderbauwhede. Elemental periodic orbits associated with the libration points in the circular restricted 3-body problem. *Bifurcation and Chaos.*, 17(8):2625–2677, 2007.
- [DTW83] I. Davies, A. Truman, and D. Williams. Classical periodic solutions of the equal-mass 2n-body problem, 2n-ion problem and the n-electron atom problem. *Physics Letters A.*, 99(1):15–18, 1983.
- [EJ03] J.C. Eilbeck and M. Johansson. The discrete nonlinear Schrödinger equation – 20 years on. In Luis Vázquez, editor, *Proceedings of the 3rd conference on localization and energy transfer in nonlinear systems*, pages 44–67. NJ: World Scientific, 2003.
- [Fie88] B. Fiedler. *Global bifurcation of periodic solutions with symmetry*. Lecture Notes in Mathematics, 1309. Springer-Verlag, 1988.
- [Ful67] F. B. Fuller. An index of fixed point type for periodic orbits. *Amer. J. Math.*, 89:133–148, 1967.
- [Geb97] K. Geba. Degree for gradient equivariant maps and equivariant conley index. In M. Matzeu and A. Vignoli, editors, *Topological Nonlinear Analysis II*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 27, pages 247–272. Birkhäuser, 1997.
- [Gre67] M.J. Greenberg. *Lectures on algebraic topology*. W. A. Benjamin, Inc., 1967.

- [GS86] M. Golubitsky and D.G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory II*. Appl. Math. Sci. 51. Springer-Verlag, 1986.
- [GSLM00] G. Gómez, C. Simó, J. Llibre, and R. Martínez. *Dynamics and mission design near libration points. Vol. 1-4*. World Scientific Monograph Series in Mathematics. World Scientific, 2000.
- [IMV89] J. Ize, I. Massabó, and A. Vignoli. Degree theory for equivariant maps I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:433–510, 1989.
- [IV99] J. Ize and A. Vignoli. Equivariant degree for abelian actions. Part III: Orthogonal maps. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 13:105–146, 1999.
- [IV03] J. Ize and A. Vignoli. *Equivariant degree theory*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 8. Walter de Gruyter, 2003.
- [Ize95] J. Ize. Topological bifurcation. In *Topological nonlinear analysis*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 15, pages 341–463. Birkhäuser Boston, 1995.
- [Joh04] M. Johansson. Hamiltonian Hopf bifurcations in the discrete nonlinear Schrödinger trimer: oscillatory instabilities, quasiperiodic solutions and a 'new' type of self-trapping transition. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:2201–2222, 2004.
- [Kal08] T. J. Kalvouridis. Particle motions in Maxwell's ring dynamical systems. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 102(1-3):191–206, 2008.
- [KKG05] N.J. Kasdin, P. Gurfil, and E. Kolemen. Canonical modelling of relative spacecraft motion via epicyclic orbital elements. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 92(4):337–370, 2005.
- [KPV03] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. On the interaction of nearly parallel vortex filaments. *Comm. Math. Phys.*, 243(3):471–483, 2003.
- [MA94] R. S. MacKay and S. Aubry. Proof of existence of breathers for time-reversible or hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. *Nonlinearity*, 7(6):1623–1643, 1994.

- [Mey99] K.R. Meyer. *Periodic solutions of the N -body problem*. Springer, 1999.
- [MH91] K.R Meyer and G. R. Hall. *An Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [MPR08] W. Marzantowicz, C. Prieto, and S. Rybicki. Periodic solutions of symmetric autonomous newtonian systems. *J. Differential Equations*, 244(4):916–944, 2008.
- [MR01] A. Maciejewski and S. Rybicki. Global bifurcations of periodic solutions of the Hill lunar problem. *Celestial Mechanical and Dynamical Astronomy*, 81:279–295, 2001.
- [MR04] A. Maciejewski and S. Rybicki. Global bifurcations of periodic solutions of the restricted three body problem. *Celestial Mechanical and Dynamical Astronomy*, 88:293–324, 2004.
- [MS88] K. R. Meyer and D. S. Schmidt. Bifurcations of relative equilibria in the n -body and Kirchhoff problems. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(6):1295–1313, 1988.
- [MS93] K. Meyer and D. S. Schmidt. Librations of central configurations and braided saturn rings. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 55(3):289–303, 1993.
- [New01] P. K. Newton. *The N -vortex problem*. Analytical techniques. Applied Mathematical Sciences, 145. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Nir01] L. Nirenberg. *Topics in nonlinear functional analysis*. Courant Lecture Notes in Mathematics, 6. American Mathematical Society, 2001.
- [Pan10] P. Panayotaros. Continuation of normal modes in finite NLS lattices. 2010.
- [PCS07] E. Perez-Chavela and M. Santoprete. Convex four-body central configurations with some equal masses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*, 185(3):481–494, 2007.

- [PD09] C.L. Pando and E.J. Doedel. Bifurcation structures and dominant models near relative equilibria in the one-dimensional discrete nonlinear Schrödinger equation. *Physica D.*, 238:687–698, 2009.
- [Rob00] G. E. Roberts. Linear stability in the $1 + n$ -gon relative equilibrium. In J. Delgado, editor, *Hamiltonian systems and celestial mechanics. HAMSYS-98. Proceedings of the 3rd international symposium*, World Sci. Monogr. Ser. Math. 6, pages 303–330. World Scientific, 2000.
- [Ryb94] S. Rybicki. S^1 -degree for orthogonal maps and its applications to bifurcation theory. *Nonlinear Anal.*, 23:83–102, 1994.
- [Ryb05] S. Rybicki. Degree for equivariant gradient maps. *Milan J. Math.*, 73:103–144, 2005.
- [Sch96] D.S. Schmidt. Spectral stability of relative equilibria in the $n + 1$ body problem. In *New trends for Hamiltonian systems and celestial mechanics*, Adv. Ser. Nonlinear Dynam., 8, pages 321–341. World Sci. Publ., 1996.
- [Sch03] D.S. Schmidt. Central configurations and relative equilibria for the n -body problem. In *Classical and celestial mechanics*, pages 1–33. Princeton Univ. Press, 2003.
- [SM71] C.L. Siegel and J.K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, 1971.
- [TV07] S. Terracini and A. Venturelli. Symmetric trajectories for the $2n$ -body problem with equal masses. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 184(3):465–493, 2007.
- [VK07] R.J. Vanderbei and E. Kolemen. Linear stability of ring systems. *The astronomical journal.*, 133:656–664, 2007.
- [vV86] S.A. van Gils and T. Valkering. Hopf bifurcation and symmetry: Standing and travelling waves in a circular-chain. *Japan J. Appl. Math.*, 3:207–222, 1986.