



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTELACIONES EN EL PLANO:

SOMBRAS QUE ENGAÑAN A LOS OBSERVADORES.

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

ROSA MARÍA VARGAS MAGAÑA

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO

MÉXICO, D.F. A 14 DE ABRIL DE 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Proyecciones y Sombras	5
1.1. Presentación geométrica de los conjuntos	5
1.2. Sistema Iterado de Funciones <i>SIF</i>	5
1.2.1. El conjunto $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff.	5
1.3. Presentación de los conjuntos como <i>SIF</i>	5
2. Análisis de las Proyecciones y sombras	7
2.1. La proyección ortogonal de \mathcal{M} en toda dirección es un intervalo.	7
2.2. Las <i>sombras</i> de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$	7
2.2.1. El hiperespacio 2^X y la función inducida.	7
2.3. Proyecciones ortogonales del conjunto \mathcal{L}	7
3. Dimensión de Hausdorff y Teoremas de Proyección	9
3.1. Dimensión de Hausdorff	9
3.1.1. La dimensión de Hausdorff de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$	9
3.2. Dimensión de Hausdorff de nuestros conjuntos	9
3.3. Teoremas de proyecciones ortogonales	9
3.4. Preguntas interesantes	9

Capítulo 1

Proyecciones y *Sombras*

- 1.1. Presentación geométrica de los conjuntos
- 1.2. Sistema Iterado de Funciones *SIF*
 - 1.2.1. El conjunto $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff.
- 1.3. Presentación de los conjuntos como *SIF*

Capítulo 2

Análisis de las Proyecciones y sombras

- 2.1. La proyección ortogonal de \mathcal{M} en toda dirección es un intervalo.
- 2.2. Las *sombras* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$
 - 2.2.1. El hiperespacio 2^X y la función inducida.
- 2.3. Proyecciones ortogonales del conjunto \mathcal{L} .

Capítulo 3

Dimensión de Hausdorff y Teoremas de Proyección

3.1. Dimensión de Hausdorff

3.1.1. La dimensión de Hausdorff de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$

3.2. Dimensión de Hausdorff de nuestros conjuntos

3.3. Teoremas de proyecciones ortogonales

3.4. Preguntas interesantes

Introducción

Una constante en matemáticas es la presencia de hechos que ponen a prueba nuestra intuición y llevan nuestra imaginación a espacios diversos y fantásticos.

En esta ocasión estudiaremos un problema que ha interesado a matemáticos como: J.M. Marstrand, H.Federer, K.J. Falconer, P. Mattila, K. Borsuk, desde mediados de los años 40's y que desde entonces continúa siendo un prolífico tema de estudio en matemáticas y esto es, las proyecciones de conjuntos en \mathbb{R}^n sobre subespacios de dimensión $n - 1$.

En el presente trabajo estudiaremos más específicamente conjuntos de cantor que viven en \mathbb{R}^2 y a los cuales les analizaremos sus proyecciones ortogonales sobre rectas en todas direcciones o bien las proyecciones sobre el eje real bajo una inclinación θ para todo $\theta \in (0, \pi)$.

Cuando hablamos de un conjunto de cantor lo primero que nos viene a la mente es su peculiaridad de ser un conjunto totalmente desconexo, en términos coloquiales podríamos imaginarlo como *un polvo flotante*. Siendo así, intuitivamente, uno esperaría que la sombra que pudiera proyectar tal *polvo cantoriano* fuese un conjunto desconexo y de medida cero. Pero la realidad no es tan simple y más bien nos muestra un abánico muy grande de conjuntos fractales en \mathbb{R}^2 cuyas proyecciones tienen un comportamiento sorprendente.

En el presente trabajo mostraremos cuatro conjuntos fractales contenidos en el plano, todos ellos conjuntos de cantor, que, de acuerdo a sus peculiaridades geométricas el comportamiento de sus proyecciones es muy interesante y rebasa nuestra imaginación.

1. Mostraremos un conjunto cuya proyección ortogonal sobre cualquier dirección es un intervalo.
2. Así mismo mostraremos otro conjunto cuyas proyecciones sobre el eje real tienen un comportamiento muy regular que va desde un conjunto de cantor para la proyección ortogonal sobre el eje real y los 2^j intervalos para cualquier $j \in \mathbb{N}$ dependiendo de la inclinación que tomemos.

3. Por otro lado mostraremos un conjunto cuyas proyecciones ortogonales en dos direcciones es un intervalo, pero en todas las otras direcciones es un conjunto de medida cero.

Puesto que la teoría de proyecciones fractales desarrollada hasta el momento apunta al estudio de las proyecciones con base a la dimensión del conjunto y otras propiedades topológicas. Estudiaremos la dimensión de Hausdorff de cada uno de nuestros ejemplos con el objetivo de encontrar respuestas en la teoría acerca del comportamiento de sus proyecciones. Así mismo intentaremos dar una visión general de problemas relacionados muy interesantes que han sido resueltos y otros que continúan abiertos.

Capítulo 1

Proyecciones y Sombras

Estudiaremos dos tipos de proyecciones de conjuntos en \mathbb{R}^2 , una es la proyección ortogonal sobre cualquier recta \mathcal{L} y el otro tipo es la proyección sobre el eje real, bajo una inclinación arbitraria $0 < \theta < \pi$.

Estudiar la proyección de un conjunto A nos remite a estudiar la proyección de cada elemento del conjunto.

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{x} = (x, y) \in A$ y \mathcal{L} una recta con dirección θ . Denotamos la *proyección ortogonal* de \bar{x} sobre \mathcal{L} como $\pi_\theta(\bar{x})$.

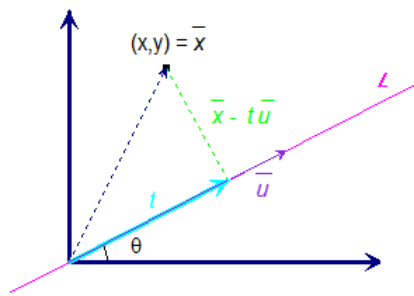


Figura 1.0.1.

Sea $\bar{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ un vector unitario en la dirección de \mathcal{L} luego,

$$(\bar{x} - t\bar{u}) \cdot \bar{u} = 0,$$

entonces

$$\bar{x} \cdot \bar{u} - t\|\bar{u}\|^2 = 0.$$

De donde

$$\pi_\theta(\bar{x}) = t = \bar{x} \cdot \bar{u} = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (1.1)$$

A continuación presentaremos la otra proyección que llamaremos *sombra*.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{x} = (x, y) \in A$ y consideramos una dirección $0 < \theta < \pi$. Denotamos la *sombra* de x como, $z_\theta(\bar{x})$.

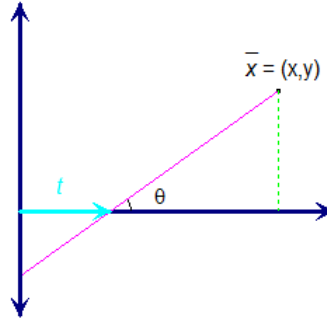


Figura 1.0.2.

Dado \bar{x} y la dirección θ , observemos lo siguiente,

$$\frac{y}{x-t} = \tan \theta, \quad \frac{y}{x-t} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

luego

$$y \cos \theta = \sin \theta (x-t) = x \sin \theta - t \sin \theta.$$

Así

$$t \sin \theta = x \sin \theta - y \cos \theta,$$

$$z_{\theta}(\bar{x}) = t = x - y \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (1.2)$$

Las proyecciones π_{θ} y z_{θ} poseen propiedades muy importantes y que intuitivamente resultan claras, como por ejemplo, la linealidad, la monotonía y una muy especial que tiene relación con aplicar una contracción y una translación al conjunto.

Proposición 1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal o la sombra.

i) Entonces T es lineal

ii) Si $A \subset B$, entonces $T(A) \subset T(B)$.

iii) Supongamos que existen $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq A$ tales que $T(A) = \bigcup_{i=1}^k T(A_i)$

y sea $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(\bar{x}) = c\bar{x} + \bar{w}_0$, $c \in \mathbb{R}$ constante, $\bar{w}_0 \in \mathbb{R}^2$ fijo.

Entonces

$$T(L(A)) = \bigcup_{i=1}^k T(L(A_i)).$$

Demostración. *i)* y *ii)* se derivan de ?? y de ??.

iii) $[\supseteq]$ Por hipótesis $\bigcup_{i=1}^k A_i \subseteq A$ luego,

$L(\bigcup_{i=1}^k A_i) \subseteq L(A)$ y con ello, $\bigcup_{i=1}^k L(A_i) \subseteq L(A)$ luego,

por el inciso *ii)*, $T(\bigcup_{i=1}^k L(A_i)) \subseteq T(L(A))$,

y por último, $\bigcup_{i=1}^k T(L(A_i)) \subseteq T(L(A_i))$.

$[\subseteq]$ Sea $\bar{y} \in T(L(A))$. Entonces existe $\bar{b} \in L(A)$ tal que $T(\bar{b}) = \bar{y}$ y existe $\bar{a} \in A$ tal que $\bar{b} = c\bar{a} + \bar{w}_0 = L(\bar{a})$ entonces,

$$\bar{y} = T(L(\bar{a})) = T(c\bar{a} + \bar{w}_0) = cT(\bar{a}) + T(\bar{w}_0).$$

Como $T(A) = \bigcup_{i=1}^k T(A_i)$, existe $\bar{a}_i \in A_i$ tal que $T(\bar{a}) = T(\bar{a}_i)$. Entonces,

$$\bar{y} = cT(\bar{a}_i) + T(\bar{w}_0) \text{ es decir, } \bar{y} = T(c\bar{a}_i + \bar{w}_0) = T(L(\bar{a}_i)).$$

Por lo que $\bar{y} \in T(L(A_i))$ así, $T(L(A)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k T(L(A_i))$.

□

1.1. Presentación geométrica de los conjuntos

Los conjuntos con los que trabajaremos poseen una geometría muy atractiva y a pesar de que no los podemos visualizar como tales, es posible definirlos por medio de un proceso recursivo, y así darnos una idea de su forma con los primeros pasos de su construcción.

1. El Conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ donde \mathcal{C} es el conjunto ternario de Cantor.

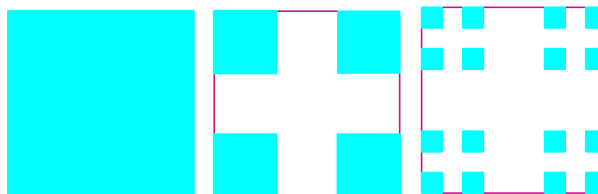


Figura 1.1.1.

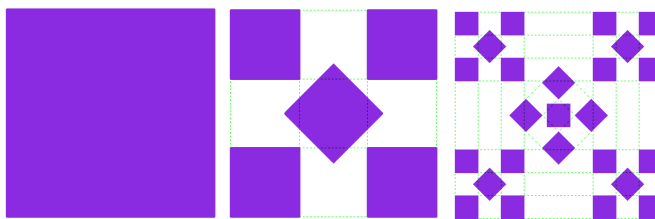
2. El Conjunto *Mosaico*, \mathcal{M} .

Figura 1.1.2.

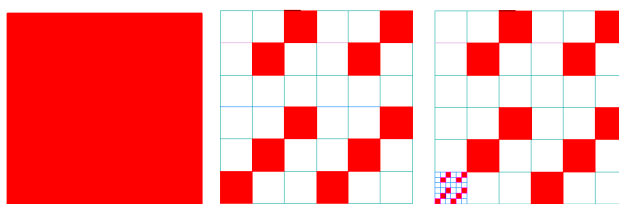
3. El Conjunto *Ajedrez*, \mathcal{A} , propuesto por F. Mendivil y T.D. Taylor en [??].

Figura 1.1.3.

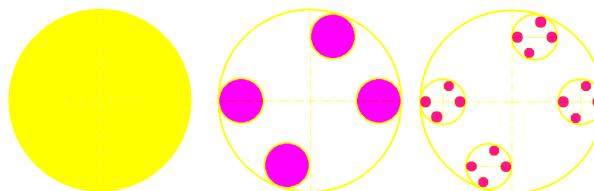
4. El Conjunto *Lunar*, \mathcal{L} , propuesto por F. Mendivil y T.D. Taylor en [??].

Figura 1.1.4.

Todos estos conjuntos viven en un espacio muy peculiar conocido como el *Espacio de los Fractales*. Un fractal en el espacio métrico (X, d) es un subconjunto de X que se puede expresar como el atractor de un *Sistema Iterado de Funciones*.

Para entender claramente estas ideas necesitamos adentrarnos a la teoría matemática encaminada en esa dirección que es lo que haremos en la siguiente sección.

1.2. Sistema Iterado de Funciones *SIF*

Recordemos la presentación recursiva que dimos de los conjuntos \mathcal{M} , \mathcal{A} , \mathcal{L} y $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ podemos notar que cada paso obedeció a una contracción comenzando con el cuadrado unitario o bien con la bola cerrada unitaria.

Definición 1.2.1. Decimos que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una *contracción*, si existe un c , $0 < c < 1$, tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq c |x - y|$ para cualquier par de puntos x y y en \mathbb{R}^2 .

Una familia finita de contracciones $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ con $k \geq 2$, es llamado un *Sistema Iterado de Funciones* o (*SIF*).

Llamamos a un conjunto Ω de \mathbb{R}^2 un atractor del *SIF* si $\Omega = \bigcup_{i=1}^k \phi_i(\Omega)$.

La propiedad fundamental de un *SIF* es que éste determina un único atractor, que usualmente es un fractal. Y resulta que cada uno de nuestros conjuntos $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, \mathcal{M} , \mathcal{A} y \mathcal{L} , son los atractores de un *SIF*.

A continuación haremos una síntesis de los resultados más importantes que nos ayudarán a entender y justificar este hecho tan relevante en nuestro análisis de proyecciones y que una presentación más detallada puede encontrarse en [??] y [??].

1.2.1. El conjunto $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff.

Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 1.2.2. Sea $\mathcal{H}(X)$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X es decir:

$$\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X : K \text{ es compacto}, K \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.2.3. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define $\tilde{d}(A, B)$ por:

$$\tilde{d}(A, B) := \max\{\tilde{d}(a, B) : a \in A\} = \max\{\min\{d(a, b) : b \in B\} : a \in A\}.$$

Definición 1.2.4. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$ se define $h(A, B)$ por:

$$h(A, B) := \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}.$$

Proposición 2. La función h es una métrica sobre $\mathcal{H}(X)$.

Definición 1.2.5. Llamaremos al espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$ el espacio donde viven los fractales. La métrica h se llama métrica de Hausdorff.

Teorema 1.2.1. El espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo si y sólo si (X, d) es completo.

Lema 1.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $\phi : X \rightarrow X$ una contracción. Definimos la función $\hat{\phi} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por $\hat{\phi}(K) = \phi(K)$ para todo $K \in \mathcal{H}(X)$.

Entonces $\hat{\phi}$ es una contracción en $\mathcal{H}(X)$.

Sean (X, d) espacio métrico y $\phi_i : X \rightarrow X$ una contracción en X , con $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ($N \in \mathbb{N}$, N fijo). Si se define $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por

$$F(K) := \phi_1(K) \cup \phi_2(K) \cup \phi_3(K) \cup \dots \cup \phi_N(K) := \bigcup_{i=1}^N \phi_i(K).$$

En este caso la notación sería $F = (\phi_1, \dots, \phi_N, X)$.

Lema 1.2.2. *Entonces F es una contracción.*

Corolario 1.2.1. *Sean (X, d) espacio métrico y $\phi_i : X \rightarrow X$ una contracción en X , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, una colección de contracciones en X . Sea $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ dada por*

$$F(K) := \phi_1(K) \cup \phi_2(K) \cup \phi_3(K) \cup \dots \cup \phi_N(K) := \bigcup_{i=1}^N \phi_i(K).$$

Entonces existe un único elemento de $\mathcal{H}(X)$, digamos Ω , tal que $F(\Omega) = \Omega$. Además para todo $B \in \mathcal{H}(X)$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} h(F^n(B), \Omega) = 0$.

Lema 1.2.3. *Sea $\{A_n\}$ una familia de conjuntos compactos no vacíos, tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, A) = 0.$$

1.3. Presentación de los conjuntos como *SIF*

1. El Conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Sea $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Definimos

$$\Phi_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}(A) = \phi_1(A) \cup \phi_2(A) \cup \phi_3(A) \cup \phi_4(A), \quad (1.3)$$

donde

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + (0, \frac{2}{3})$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + (\frac{2}{3}, 0)$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

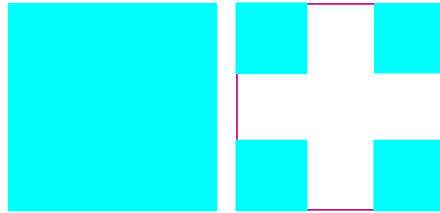


Figura 1.3.1.

La notación que utilizaremos para el resto del texto será S_0 para el cuadrado unitario y $\Phi_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}^n(S_0) = S_n$, en la imagen vemos S_0 y S_1 .

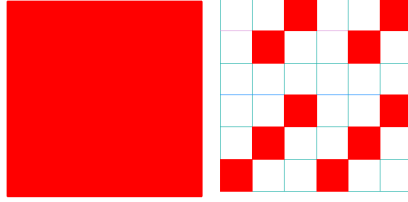
2. El conjunto \mathcal{A} . Sea $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Definimos

$$\Phi_{\mathcal{A}}(A) = \bigcup_{i=1}^9 \phi_i(A), \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= \frac{1}{6}(x, y), \phi_2(x, y) = \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \\ \phi_3(x, y) &= \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right), \phi_4(x, y) = \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) \\ \phi_5(x, y) &= \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right), \phi_6(x, y) = \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{3}{6}, 0\right) \\ \phi_7(x, y) &= \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}\right), \phi_8(x, y) = \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}\right) \\ \phi_9(x, y) &= \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{6}\right), \phi_{10}(x, y) = \frac{1}{6}(x, y) + \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

Figura 1.3.2.



En la imagen tenemos S_0 y $\Phi_{\mathcal{A}}(S_0) = S_1$.

3. El Conjunto \mathcal{M}

$$\Phi_{\mathcal{M}} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \mathbb{R}^2) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) \\ \phi_2(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) + \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ \phi_3(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right) \\ \phi_4(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \phi_5(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observación 1.3.1. $\phi_5 = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, donde f_1 es la traslación $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ del cuadrado unitario, f_2 es la contracción $\frac{1}{3}$, f_3 es la rotación de 45° y por último f_4 es la traslación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Así

$$\begin{aligned} \|\phi_5(\bar{x}) - \phi_5(\bar{y})\| &= \|f_4(f_3(f_2(\bar{x}))) - f_4(f_3(f_2(\bar{y})))\| = \\ & \|f_3(f_2(\bar{x})) - f_3(f_2(\bar{y}))\| = \|f_2(\bar{x}) - f_2(\bar{y})\| = \frac{1}{3}\|\bar{x} - \bar{y}\|. \end{aligned}$$

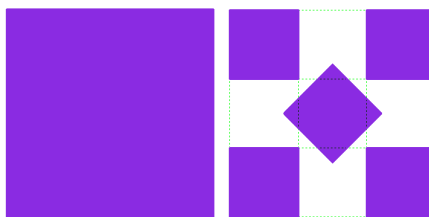


Figura 1.3.3.

En la imagen tenemos S_0 y $\Phi_{\mathcal{M}}(S_0) = S_1$.

4. El Conjunto \mathcal{L}

$$\Phi_{\mathcal{L}} = (\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \mathbb{R}^2\}) \quad (1.6)$$

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

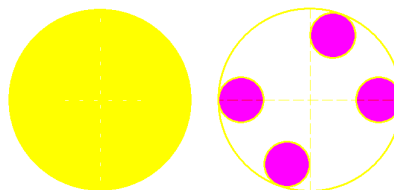


Figura 1.3.4.

En la imagen tenemos $D_0 = B_1(\bar{0})$ y $\Phi_{\mathcal{L}}(B_1(\bar{0})) = D_1$.

Todos ellos poseen propiedades en común y que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.3.1. *Sean los conjuntos $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, \mathcal{M} , \mathcal{A} y \mathcal{L} . Entonces se cumple:*

- *Son conjuntos de Cantor.*
- *Son de medida de Lebesgue igual a cero.*

Las pruebas son análogas para los cuatro conjuntos así que nos concentraremos en demostrar dichas propiedades para el conjunto \mathcal{M} .

Puesto que $\mathcal{M} = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_n$, donde recordemos que $S_n = \Phi_{\mathcal{M}}^n(S_0)$, S_0 el cuadrado unitario y para todo n , $S_{n+1} \subset S_n$. Es claro que \mathcal{M} es *Compacto*.

Demostraremos ahora que \mathcal{M} es *Totalmente Disconexo*

Demostración. Sea $\bar{x} \in \mathcal{M}$ y sea B la componente de \mathcal{M} que contiene a \bar{x} . Sea $\bar{y} \in B$.

Dada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que S_n está formada de 5^n cuadrillos ajenos tal que cada uno de ellos tiene diámetro menor estricto que ε .

Como $\mathcal{M} \subset S_n$, y B es conexo, B está en uno solo de estos cuadrillos. Entonces

$$d(\bar{x}, \bar{y}) < \varepsilon.$$

Esto implica que $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, es decir $\bar{x} = \bar{y}$. Así $B = \{\bar{x}\}$.

Para verificar que es *perfecto*, primero hagamos la siguiente observación:

Observación 1.3.2. *Los vértices de cada uno de los 5^n cuadrados que conforman a S_n para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son elementos de \mathcal{M} .*

Sea $\bar{x} \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que S_n está formado de 5^n ajenos tal que su diámetro es estrictamente menor que ε .

Sea $A_{\bar{x}}^n$ el cuadrillo que contiene a \bar{x} , como los cuatro vértices de $A_{\bar{x}}^n$ están en \mathcal{M} , se tiene que existe $\bar{y} \neq \bar{x}$, $\bar{y} \in A_{\bar{x}}^n$, $\bar{y} \in \mathcal{M}$ y $d(\bar{x}, \bar{y}) < \varepsilon$. Por lo tanto \bar{x} es punto de acumulación de \mathcal{M} .

Ahora demostraremos que la *Medida de Lebesgue* de \mathcal{M} es cero.

Puesto que $S_n = \Phi_{\mathcal{M}}^n(S_0)$ consta de 5^n cuadrillos de área $(\frac{1}{3^n})^2$ y además $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_n$. Obtenemos que:

$$\mu(\mathcal{M}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0.$$

Pues la medida de *Lebesgue* coincide en este caso con el área que conocemos en \mathbb{R}^2 .

□

Capítulo 1

Análisis de las Proyecciones y sombras

En el presente capítulo mostraremos resultados muy importantes y sorprendentes acerca de las proyecciones y sombras de los conjuntos de Cantor que estudiamos en el capítulo uno. Y con ello se establecerán resultados que apunten hacia una teoría más general acerca de las proyecciones de conjuntos fractales.

1.1. La proyección ortogonal de \mathcal{M} en toda dirección es un intervalo.

Usaremos inducción para mostrar que el atractor del SIF que define a \mathcal{M} se proyecta sobre un segmento de línea en cualquier dirección.

Para ello, mostraremos que cualquier línea que atraviesa el cuadrado unitario intersecta a \mathcal{M} .

Recordemos que $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$,

$$S_1 = \Phi_{\mathcal{M}}(S_0) = \phi_1(S_0) \cup \dots \cup \phi_5(S_0) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5, \text{ y}$$

$$S_n = \Phi_{\mathcal{M}}^n(S_0).$$

Teorema 1. *Sea \mathcal{L} una recta que atraviesa S_0 , entonces $\mathcal{L} \cap S_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Base de inducción : Sea \mathcal{L} una recta que atraviesa el cuadrado unitario, demostraremos que \mathcal{L} intersecta S_1 . Para ello consideremos $S_1^* = S_1 \setminus A_5$. De ello se derivan las siguientes observaciones:

Observación 1.1.1. *Las rectas que podrían no intersectar a S_1^* son aquellas cuyos extremos están en l_i con $1 \leq i \leq 4$ como se muestra en la figura.*

Observación 1.1.2. Si los extremos de \mathcal{L} están en lados adyacentes, entonces esa recta intersecta al cuadrado que es adyacente a dichos lados como se muestra en la figura.

Observación 1.1.3. Si $\mathcal{L} \cap S_1^* = \emptyset$ entonces, los extremos de \mathcal{L} están en lados opuestos.

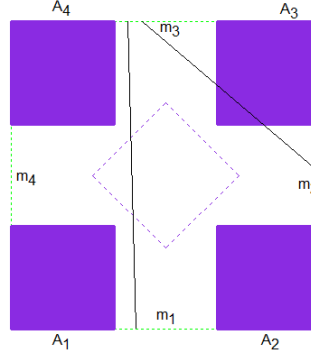


Figura 1.1.1.

Luego, si consideramos $S_1 = S_1^* \cup A_5$ ocurre que cualquier recta que tiene sus extremos en los lados opuestos intersecta a A_5 , puesto que toda recta de este tipo intersecta a alguna de las diagonales principales de A_5 .

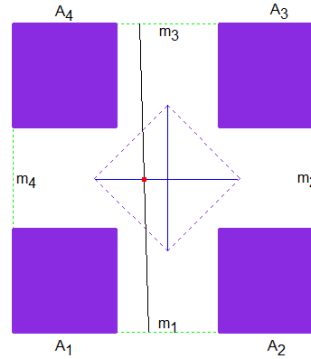


Figura 1.1.2.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que toda recta que atraviesa S_0 intersecta a S_n .

Sea \mathcal{L} una recta que atraviesa S_0 . Demostraremos que $\mathcal{L} \cap S_{n+1} \neq \emptyset$ donde $S_{n+1} = \Phi_{\mathcal{M}}(S_n)$. Se tiene la siguiente observación.

Observación 1.1.4. 1. $\phi_i(S_n) \subset A_i$, $1 \leq i \leq 5$.

2. $\phi_i(S_n) = S_{n+1} \cap A_i$.

Por hipótesis de Inducción existe A_i para algún $1 \leq i \leq 5$ tal que $\mathcal{L} \cap A_i \neq \emptyset$. Luego, dicha intersección es un segmento de recta en A_i . Así $\phi_i^{-1}(\mathcal{L} \cap A_i)$

1.1. LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE \mathcal{M} EN TODA DIRECCIÓN ES UN INTERVALO.3

es una recta \mathcal{L}^* que atraviesa S_0 . Y, por Hipótesis de Inducción $\mathcal{L}^* \cap S_n \neq \emptyset$.
Luego,

$$\phi_i(\mathcal{L}^* \cap S_n) \neq \emptyset,$$

$$((A_i \cap \mathcal{L}) \cap \phi_i(S_n)) \neq \emptyset,$$

$$\mathcal{L} \cap (S_{n+1} \cap A_i) \neq \emptyset.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L} \cap S_{n+1} \neq \emptyset.$$

□

Lema 1.1.1. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos, compactos tal que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada $i = 1, 2, \dots$, y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Si U es un conjunto abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$.

En particular: Si cada $X_i \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$. Nótese que X es compacto.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que para cada $i = 1, 2, \dots$, existe un $x_i \in X_i - U$. Puesto que $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \dots$ entonces $X_1 \setminus U \supset X_2 \setminus U$ y así sucesivamente. Entonces $x_i \in X_1 \setminus U$ para todo i . Ahora, puesto que X_1 es un compacto y U es un abierto se implica que $X_1 \setminus U$ es un subconjunto cerrado de un compacto, métrico y por tanto $X_1 \setminus U$ es un conjunto compacto, X . De tal forma que podemos asumir que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X_1 - U$. Sabemos que para cada k , $x_i \in X_k$ para todo $i \geq k$. de tal forma que $p \in X_k$ para cada k . Por lo tanto, $p \in X$, lo cual, dado que p no pertenece a U , contradice la hipótesis de que $X \subset U$. De ahí que existe una N tal que, $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$. Así queda demostrada la primera parte de la proposición.

El hecho de que $X \neq \emptyset$ si cada $X_i \neq \emptyset$ se sigue de lo anterior. Si asumimos $X = \emptyset$ y tomamos $U = \emptyset$ ya que de esta forma tenemos que U es un conjunto abierto de X_1 tal que $X \subset U$ (el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto), entonces por lo recién demostrado podemos afirmar que existe $N \in \mathbb{N}$ que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$, por lo que es claro que $X_N = \emptyset$. Esto es una contradicción. Ello completa la prueba. □

Teorema 1.1.1. Sea \mathcal{L} una recta tal que $\mathcal{L} \cap S_0 \neq \emptyset$

$$\text{entonces } , \mathcal{L} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \right) \neq \emptyset.$$

Demostración. Por lo demostrado anteriormente tenemos que $\mathcal{L} \cap S_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 0$ y puesto que $S_{n+1} \subset S_n$, entonces $\mathcal{L} \cap S_{n+1} \subset \mathcal{L} \cap S_n$.

Así $\{\mathcal{L} \cap S_n\}$ es una sucesión encajada de conjuntos compactos distintos del vacío.

$$\text{Entonces } \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{L} \cap S_n) \neq \emptyset.$$

$$\text{Por tanto } \mathcal{L} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \right) \neq \emptyset. \quad \square$$

1.2. Las *sombras* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$

Debido a la simetría del conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ el estudio de las *sombras* del conjunto sobre el eje real con inclinación $\theta \in (0, \pi)$ se completa al estudiar únicamente las proyecciones de ángulo θ donde $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Mediremos el ángulo θ de la recta horizontal hacia la recta vertical como se observa en la figura.

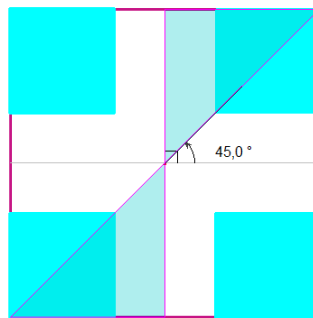


Figura 1.2.1.

Hay dos pasos importantes a realizar para el completo análisis de las *sombras* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ sobre el eje real.

El **Paso1** consiste en mostrar que $z_{\theta}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es un intervalo no degenerado, digamos I , para $45^{\circ} \leq \theta \leq \arctan 3$. Y el **Paso2** consiste en mostrar bajo qué condiciones del ángulo de inclinación θ obtendremos que la *sombra* está formada por $2, 4, \dots, 2^i$ intervalos sobre el eje real para $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.1. *Si la recta posee ángulo de inclinación θ tal que*

$$45^{\circ} \leq \theta \leq \arctan 3$$

entonces, $z_{\theta}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = I$, donde I es un intervalo.

La prueba de este hecho es un poco larga y la presentaremos como resultado de varios teoremas.

Teorema 1.2.2. *Sea θ un ángulo de inclinación de la sombra, tal que $45^\circ \leq \theta \leq \arctan 3$. Entonces $z_\theta(S_0) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_i)$, donde los A_i son los cuadritos que se obtienen al aplicar $\Phi_{C \times C}$ a S_0 .*

Demostración. Sea $\bar{x}_1 = (1, \frac{2}{3})$. Como $45^\circ \leq \theta$ la recta que pasa por x_1 intersecta a A_2 en algún punto así $z_\theta(A_3) \cap z_\theta(A_2) \neq \emptyset$. Análogamente, la recta que pasa por $x_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intersecta a A_1 en algún punto, así $z_\theta(A_4) \cap z_\theta(A_1) \neq \emptyset$.

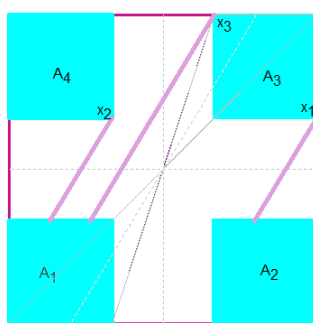


Figura 1.2.2.

Antes de continuar haremos la siguiente observación.

Observación 1.2.1. *Sea un triángulo ABC como se muestra en la figura, entonces ángulo $\alpha \leq \beta$.*

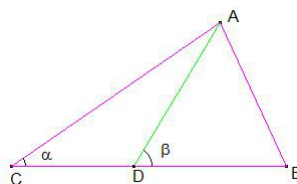


Figura 1.2.3.

Así mismo como $\theta \leq \arctan 3$ y la observación 1.2.1, la recta que pasa por $x_3 = (\frac{2}{3}, 1)$ intersecta a A_1 . De donde $z_\theta(A_3) \cap z_\theta(A_1) \neq \emptyset$.

Y como $z_\theta(A_i)$ para todo $1 \leq i \leq 4$ es un intervalo cerrado pues z_θ es una función continua y A_i es un compacto y conexo, se tiene que

$$z_\theta(S_0) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_i) = I$$

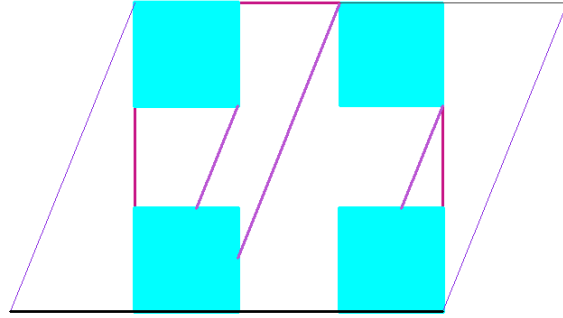


Figura 1.2.4.

□

Lo que demostramos anteriormente cobrará mayor significado una vez que hallamos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. *Si $45^\circ \leq \theta \leq \arctan 3$ entonces las sombras del conjunto S_0 coinciden con la sombra del conjunto S_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = z_\theta(S_0)$ para dichos valores de θ .*

Demostración. La prueba la haremos por inducción.

Base de Inducción. En el Teorema 1.2.2 damos una prueba para $n = 1$. Sin embargo, para mayor claridad en el paso inductivo haremos la prueba para $n = 2$.

Sea $45^\circ \leq \theta \leq \arctan 3$, luego, por Teorema 1.2.2 $z_\theta(S_0) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_i)$.

De acuerdo a ??, podemos considerar $A_i = \phi_i(S_0)$, análogamente podemos describir a los cuatro subcuadrados de A_i que nos arroja la segunda iteración de $\Phi_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}(S_0)$ como:

$$A_{1i} = \phi_1 \circ \phi_i(S_0).$$

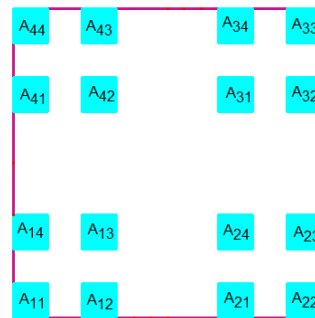


Figura 1.2.5.

Por lo que

$$z_\theta(A_j) = z_\theta(\phi_j(S_0)).$$

y como $z_\theta(S_0) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_i)$, entonces por *iii*) de la Proposición ??

$$z_\theta(\phi_j(S_0)) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(\phi_j(A_i)) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(\phi_j \circ \phi_i(S_0)).$$

Por tanto $z_\theta(A_j) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_{ji})$, donde $A_{ji} = \phi_j \circ \phi_i(S_0)$.

Por tanto $z_\theta(S_0) = \bigcup_{j=1}^4 z_\theta(A_j) = \bigcup_{j=1}^4 \left(\bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_{ji}) \right)$.

Con lo que demostramos que la sombra de $z_\theta(S_2) = z_\theta(S_1) = z_\theta(S_0)$.

Hipótesis de Inducción

Necesitaremos introducir un poco de notación. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo.

$$\Lambda_n := \{ \hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) : t_i \in \{1, 2, 3, 4\} \}.$$

Obsérvese que para cada valor de θ ocurre que

$$z_\theta(S_0) = \bigcup_{\hat{t} \in \Lambda_n} z_\theta(\phi_{\hat{t}}(S_0)), \text{ donde } \phi_{\hat{t}} = \phi_{t_n} \circ \phi_{t_{n-1}} \circ \dots \circ \phi_{t_1}.$$

$$\text{Sea } \Lambda_{n+1} := \{ \hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) : t_i \in \{1, 2, 3, 4\} \}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $z_\theta(S_0) = \bigcup_{\hat{t} \in \Lambda_n} z_\theta(\phi_{\hat{t}}(S_0))$.

Por demostrar $z_\theta(S_0) = \bigcup_{\hat{t} \in \Lambda_{n+1}} z_\theta(\phi_{\hat{t}}(S_0))$.

Por la Proposición ??, *iii*), y puesto que $z_\theta(S_0) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_i)$ obtenemos:

$$z_\theta(\phi_{\hat{t}}(S_0)) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(\phi_{\hat{t}}(A_i))$$

Sean:

$$\hat{\mu}_1 = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, 1)$$

$$\hat{\mu}_2 = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, 2)$$

$$\hat{\mu}_3 = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, 3)$$

$$\hat{\mu}_4 = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, 4)$$

$$\text{Entonces } z_\theta(\phi_{\hat{t}}(S_0)) = \bigcup_{j=1}^4 z_\theta(\phi_{\hat{\mu}_j}(S_0)).$$

$$\text{Como } z_\theta(S_0) = \bigcup_{\hat{t} \in \Lambda_n} z_\theta(\phi_{\hat{t}}(S_0)).$$

$$\text{Entonces } z_\theta(S_0) = \bigcup_{\hat{t} \in \Lambda_n} \left(\bigcup_{j=1}^4 z_\theta(\phi_{\hat{\mu}_j}(S_0)) \right).$$

$$\text{Entonces } z_\theta(S_0) = \bigcup_{\hat{\mu} \in \Lambda_{n+1}} z_\theta(\phi_{\hat{\mu}}(S_0)).$$

□

Para finalizar con la prueba del Teorema 1.2.1, introduciremos un poco de teoría de hiperespacios.

1.2.1. El hiperespacio 2^X y la función inducida.

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. La colección de todos los subconjuntos compactos de X no vacíos y se denota como 2^X .

Sean X y Y dos espacios métricos compactos con métricas d y d' respectivamente. Sea f una función continua de X en Y . La función f induce una función entre los respectivos hiperespacios que denotamos así:

$$2^f : 2^X \rightarrow 2^Y,$$

dada por $2^f(A) = f(A)$, $A \in 2^X$.

Como $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces 2^f está bien definida, es decir, $2^f(A)$ sí es un elemento de 2^Y .

La función 2^f es conocida como la *función inducida* por f en el hiperespacio 2^X .

Teorema 1.2.4. *La función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ es continua.*

Una demostración puede encontrarse en [??].

Dada θ , $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan 3$, la función z_θ es continua $z_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego por Teorema 1.2.4 induce una función \widehat{z}_θ en los hiperespacios:

$$\widehat{z}_\theta : 2^{\mathbb{R}^2} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$$

Como $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es el atractor del *SIF* dado por $\Phi_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$ y para cada n , S_n es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 , entonces por el Lema ?? se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(S_n, \mathcal{C} \times \mathcal{C}) = 0.$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{z}_\theta(S_n) = \widehat{z}_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.

Pero por Teorema 1.2.3 para toda $n \in \mathbb{N}$, $z_\theta(S_n) = z_\theta(S_0)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{z}_\theta(S_n) = \widehat{z}_\theta(S_0).$$

Por lo tanto $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = z_\theta(S_0)$, si $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan 3$.

Teorema 1.2.5. *Sea θ un ángulo de inclinación de la sombra, tal que $\arctan 3 < \theta \leq \arctan 3^2$. Entonces $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formado por dos intervalos, $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = I_1 \cup I_2$, tales que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.*

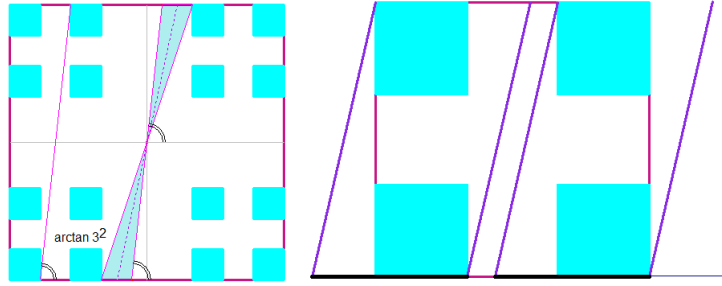


Figura 1.2.6.

Y más en general demostraremos que si $\arctan 3^n < \theta \leq \arctan 3^{n+1}$. Entonces $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formada por exactamente 2^n intervalos.

Para ello hagamos el siguiente análisis.

Tenemos que $z_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$z_\theta(x, y) = x - y \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \text{ con } 0 < \theta < \pi.$$

Observación 1.2.2. *Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(x, y) = (\frac{x}{3}, y)$ Entonces $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap ([0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]) = \psi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Es decir, $\psi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es la parte de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ sobre el intervalo $[0, \frac{1}{3}]$.*

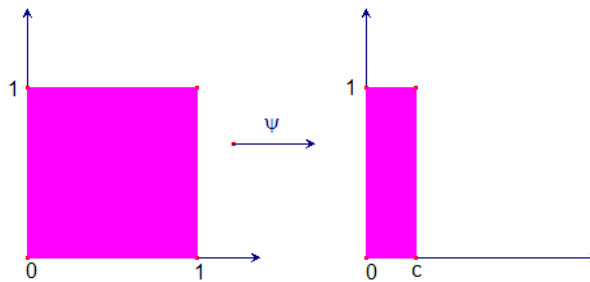


Figura 1.2.7.

Antes de enunciar la siguiente proposición veamos qué ocurre con las rectas con ángulo de inclinación θ al aplicarles el homomorfismo $\psi(x, y) = (cx, y)$, $c > 0$.

La idea es muy sencilla y la podemos representar en el siguiente dibujo.

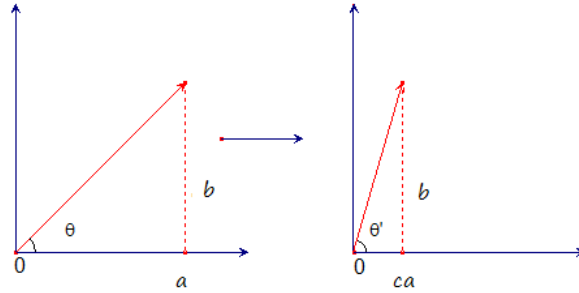


Figura 1.2.8.

Luego, si $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $\tan \theta' = \frac{b}{ca}$.

$$\text{De donde } \tan \theta' = \frac{1}{c} \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{1}{c} \tan \theta$$

$$\text{o bien, } \theta' = \arctan\left(\frac{1}{c} \tan \theta\right).$$

Lema 1.2.1. Sea $c > 0$, fijo. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\psi(x, y) = (cx, y)$, sea $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta' = \arctan(\frac{1}{c} \tan \theta)$ y sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = cx$. Entonces para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$z_{\theta'}(\psi(x, y)) = \gamma(z_{\theta}(x, y)) \tag{1.1}$$

Demostración. Demostrar 1.1 es equivalente a demostrar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^2 \\ z_{\theta} \downarrow & & \downarrow z_{\theta'} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R} \end{array}$$

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} z_{\theta'} \circ \psi(x, y) &= z_{\theta'}(cx, y) = cx - y \left(\frac{\cos \theta'}{\sin \theta'} \right) \\ &= cx - y \left(\frac{1}{\tan \theta'} \right) = cx - y \left(\frac{c}{\tan \theta} \right). \end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$\gamma \circ z_{\theta}(x, y) = \gamma\left(x - y \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)\right) = cx - cy \left(\frac{1}{\tan \theta} \right).$$

□

Corolario 1.2.1. Si $\arctan 3 \leq \theta \leq \arctan 3^2$, y

$$A = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : 0 \leq x \leq \frac{1}{3}\}$$

entonces $z_\theta(A)$ es un intervalo.

Demostración. Sea θ , tal que $\arctan 3 \leq \theta \leq \arctan 3^2$ entonces,

$$3 \leq \tan \theta \leq 3^2 \text{ entonces, } 1 \leq \frac{1}{3} \tan \theta \leq 3 \text{ de donde,}$$

$$\arctan 1 \leq \arctan\left(\frac{1}{3} \tan \theta\right) \leq \arctan 3.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\pi}{4} \leq \arctan\left(\frac{1}{3} \tan \theta\right) \leq \arctan 3.$$

Llamemos $\arctan\left(\frac{1}{3} \tan \theta\right) = \beta$.

Luego, por Teorema 1.2.3 sabemos que $z_\beta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = \left[-\frac{\cos \beta}{\sin \beta}, 1\right] = \left[\frac{-1}{\tan \beta}, 1\right]$.

Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, y\right)$. Entonces $A = \psi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.

Por el Lema 1.2.1

$$z_\theta(A) = z_\theta(\psi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})) = \gamma(z_\beta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})).$$

Entonces,

$$z_\theta(A) = \gamma\left(\left[-\frac{\cos \beta}{\sin \beta}, 1\right]\right) = \left[-\frac{1}{3} \frac{\cos \beta}{\sin \beta}, \frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{\tan \beta}, \frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{\frac{1}{3} \tan \theta}, \frac{1}{3}\right].$$

$$\text{Por tanto } z_\theta(A) = \left[\frac{-1}{\tan \theta}, \frac{1}{3}\right].$$

□

Ahora demostraremos un corolario más general

Corolario 1.2.2. Si $\arctan 3^n \leq \theta \leq \arctan 3^{n+1}$, y

$$A = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : 0 \leq x \leq \frac{1}{3^n}\},$$

entonces $z_\theta(A) = \left[\frac{-1}{\tan \theta}, \frac{1}{3^n}\right]$.

Demostración. Sea θ , tal que $\arctan 3^n \leq \theta \leq \arctan 3^{n+1}$ entonces,

$$3^n \leq \tan \theta \leq 3^{n+1} \text{ entonces, } 1 \leq \frac{1}{3^n} \tan \theta \leq 3 \text{ de donde,}$$

$$\arctan 1 \leq \arctan\left(\frac{1}{3^n} \tan \theta\right) \leq \arctan 3.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\pi}{4} \leq \arctan\left(\frac{1}{3} \tan \theta\right) \leq \arctan 3.$$

Llamemos $\arctan\left(\frac{1}{3^n} \tan \theta\right) = \beta$

Luego, por Teorema 1.2.3 sabemos que $z_\beta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = \left[\frac{-1}{\tan \beta}, 1\right]$.

Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\psi(x, y) = \left(\frac{1}{3^n}x, y\right)$, $\gamma(x) = \frac{1}{3^n}x$.

Entonces $A = \psi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.

Por el Lema 1.2.1 y dado que $\tan \theta = 3^n \tan \beta$.

$$z_\theta(A) = z_\theta(\psi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})) = \gamma(z_\beta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})).$$

Entonces,

$$z_\theta(A) = \gamma\left(\left[\frac{-1}{\tan \beta}, 1\right]\right) = \left[\frac{-1}{3^n \tan \beta}, \frac{1}{3^n}\right] = \left[\frac{-1}{\tan \theta}, \frac{1}{3^n}\right].$$

□

Lema 1.2.2. Sea $0 < \theta < \pi$. Sean $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $v(x, y) = (x + c, y)$, $\tau(x) = x + c$.

Entonces para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z_\theta \circ v(x, y) = \tau \circ z_\theta(x, y)$.

Geoméricamente lo que estamos diciendo es que la sombra de un conjunto A que sufre una traslación coincide con la sombra de conjunto A y luego trasladar dicha sombra en \mathbb{R} .

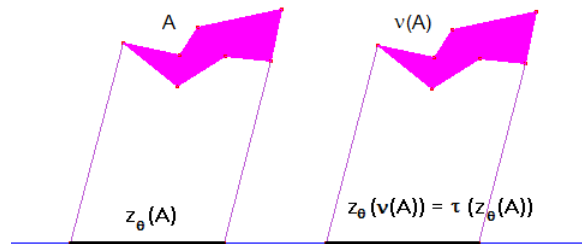


Figura 1.2.9.

Demostración.

$$z_\theta \circ v(x, y) = z_\theta(x + c, y) = x + c - \frac{1}{\tan \theta} y.$$

Por otro lado,

$$\tau \circ z_\theta(x, y) = \tau\left(x - \frac{1}{\tan \theta} y\right) = x + c - \frac{1}{\tan \theta} y.$$

□

Ahora la demostración del siguiente corolario es inmediata.

Corolario 1.2.3. Si $\arctan 3^n \leq \theta \leq \arctan 3^{n+1}$, y

$$A_i = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : x \in J_i\}, \text{ donde } 1 \leq i \leq 2^n, y$$

J_i es uno de los 2^n intervalos de C_n (el paso n de la construcción de \mathcal{C}).

$$\text{Entonces } z_\theta(A_i) \text{ es un intervalo de longitud } \frac{1}{3^n} + \frac{1}{\tan \theta}.$$

Demostración. Sea $A = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : 0 \leq x \leq \frac{1}{3^n}\}$

Para cada $1 \leq i \leq 2^n$, A_i es una translación de A . Por el Lema 1.2.2, para $\arctan 3^n \leq \theta \leq \arctan 3^{n+1}$, $z_\theta(A_i)$ es un intervalo de la misma longitud que $z_\theta(A)$.

□

Observación 1.2.3. Si $\arctan 3 < \theta \leq \arctan 3^2$ entonces $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ tiene al menos dos componentes.

Esto es porque en la región $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times [0, 1]$, el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ no tiene ningún punto.

De manera análoga, dada $n \in \mathbb{N}$, si θ es un ángulo que satisface $\arctan 3^n < \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

entonces $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ tiene al menos 2^n componentes, ya que hay $2^n - 1$ rectángulos de tipo $[\alpha, \beta] \times [0, 1]$ con $\beta - \alpha \geq (\frac{1}{3})^n$ que el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ no intersecta..

Ahora, utilizando la notación del Corolario 1.2.3, $\mathcal{C} \times \mathcal{C} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{2^n}$

Si $\arctan 3^n < \theta \leq \arctan 3^{n+1}$, entonces para cada $i, 1 \leq i \leq 2^n$, $z_\theta(A_i)$ es un intervalo. Por lo tanto si $\arctan 3^n < \theta \leq \arctan 3^{n+1}$, $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formada por exactamente 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n} + \frac{1}{\tan \theta}$.

Así cuando θ va de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, la sombra de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ va transformándose. Primero es sólo *un* intervalo, luego *dos*, luego *cuatro*, ...

Estos cambios obedecen a la sucesión de ángulos:

$\arctan 1, \arctan 3, \arctan 3^2, \dots, \arctan 3^n, \dots$

Finalmente cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene que la sombra $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ ¡es el conjunto de cantor \mathcal{C} !

Obsérvese que sólo en $\theta = \frac{\pi}{2}$ la sombra es un conjunto de Cantor.

Dada la simetría del conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, cuando θ viaja de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$ el proceso que sufre $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es el inverso del descrito antes. Ahora su forma va de un conjunto de Cantor a un intervalo pasando por periodos donde $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es exactamente 2^n intervalos cerrados.



Figura 1.2.10.

1.3. Proyecciones ortogonales del conjunto \mathcal{L} .

La proyección ortogonal sobre las recta vertical y horizontal es un intervalo.

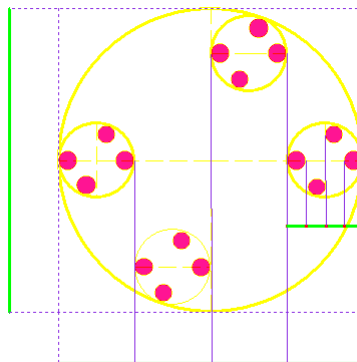


Figura 1.3.1.

Para demostrar ello basta hacer la siguiente observación:

Observación 1.3.1. $\pi_{\frac{\pi}{2}}(D_n) = I$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La función π_θ es continua y está definida como $\pi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego por Teorema 1.2.4 induce una función $\widehat{\pi}_\theta$ en los hiperespacios:

$$\widehat{\pi}_\theta : 2^{\mathbb{R}^2} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$$

Como \mathcal{L} es el atractor del *SIF* dado por $\Phi_{\mathcal{L}}(D_0)$ y para cada n , D_n es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Se cumple por Lema ??,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(D_n, \mathcal{L}) = 0.$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\pi}_{\frac{\pi}{2}}(D_n) = \widehat{\pi}_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{L})$$

Pero por Observación 1.3.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\pi}_{\frac{\pi}{2}}(D_n) = \lim_{n \rightarrow 0} \widehat{\pi}_{\frac{\pi}{2}}(D_0) = \widehat{\pi}_{\frac{\pi}{2}}(D_0).$$

Por lo tanto $\pi_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{L}) = \pi_{\frac{\pi}{2}}(D_0) = I$.

La prueba es análoga para la otra dirección.

En el siguiente capítulo mostraremos un resultado más general que nos permitirá determinar que las proyecciones ortogonales de este conjunto son un conjunto de medida cero para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.

A continuación demostraremos unos casos evidentes sobre este hecho.

Mostraremos que las proyecciones ortogonales sobre las rectas l_1 que pasa por los puntos: $p_1 = (-\frac{1}{4}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y $p_2 = (\frac{3}{4}, 0)$, los centros del círculo inferior y el derecho, la recta l_2 que pasa por los puntos: $p_2 = (\frac{3}{4}, 0)$ y $p_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, los centros del círculo derecho y superior, la recta l_3 que pasa por los puntos: $p_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $p_4 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y la recta l_4 que pasa por los puntos: $p_4 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $p_1 = (-\frac{1}{4}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ son todas ellas sobre un conjunto de medida cero.

La prueba es análoga para las cuatro así que la haremos para la recta l_1 .

Puesto que los discos están alineados con l_2 en pares, la proyección ortogonal de D_j sobre l_1 forma una sucesión anidada de conjuntos compactos con longitudes que decrecen un factor de 2 cada que j crece. Luego, podemos ver que la proyección ortogonal de \mathcal{L} sobre l_1 es un conjunto de medida cero.

Observación 1.3.2. *El conjunto \mathcal{A} se proyecta ortogonalmente en todas las direcciones sobre un conjunto de medida positiva.*

La prueba de este hecho, está fuera de los objetivos de este trabajo sin embargo en [??] de la Bibliografía podran consultar una demostración.

Capítulo 1

Dimensión de Hausdorff y Teoremas de Proyección

Los fractales son objetos especiales que desafían las medidas convencionales que conocemos como: longitud, área y la más sorprendente, *dimensión*. Muchos de ellos se caracterizan por su medida dimensional fraccionaria.

En este capítulo nos internaremos en el mundo de la dimensión de *Hausdorff* y calcularemos la dimensión de cada uno de los conjuntos que presentamos.

Con estos resultados estaremos en posición de comprender uno de los teoremas más importantes y conocidos de la *Teoría de Proyecciones Fractales*, presentada por Falconer en [??].

1.1. Dimensión de Hausdorff

Definición 1.1.1. Una familia \mathcal{G} de subconjuntos de S se llama cubierta numerable del conjunto F si

$$F \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G,$$

donde \mathcal{G} es una familia de subconjuntos numerable (posiblemente finita). Sea ε un número positivo. La cubierta \mathcal{G} es una ε -**cubierta** si y sólo si el $\text{diam}G \leq \varepsilon$ para todo $G \in \mathcal{G}$.

Definición 1.1.2. La clase de los conjuntos de Borel es la más pequeña colección de subconjuntos de \mathbb{R}^n con las siguientes propiedades:

- (a) Todo conjunto abierto y todo conjunto cerrado es un conjunto de Borel.
- (b) La unión de toda colección finita o numerable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel y la intersección de toda colección finita o numerable de conjuntos de Borel, es un conjunto de Borel.

2CAPÍTULO 1. DIMENSIÓN DE HAUSDORFF Y TEOREMAS DE PROYECCIÓN

Definición 1.1.3. Sea S un espacio métrico. Considere un entero positivo s , el candidato para la dimensión. La medida s -dimensional de Hausdorff para todo conjunto de Borel se denota como \mathcal{H}^s . Sea \mathcal{G} una ε -**cubierta** numerable de $F \subseteq S$. Definimos

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(F) = \inf \left\{ \sum_{G \in \mathcal{G}} (\text{diam} G)^s : G \text{ es una } \varepsilon\text{-cubierta numerable de } F \right\}$$

Finalmente:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(F).$$

Teorema 1. Sea F un conjunto de Borel. Sea $0 < s < t$. Si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$. Si $\mathcal{H}^t(F) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.

Una demostración puede consultarse en [??].

Esto significa que, dado un conjunto F , existe un único *valor crítico* $s_0 \in [0, \infty]$ tal que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \infty \text{ para todo } s < s_0$$

$$\mathcal{H}^s(F) = 0 \text{ para todo } s > s_0.$$

A este valor s_0 se le llama la **Dimensión de Hausdorff** del conjunto F o $\dim_{\mathcal{H}}(F)$.

1.1.1. La dimensión de Hausdorff de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$

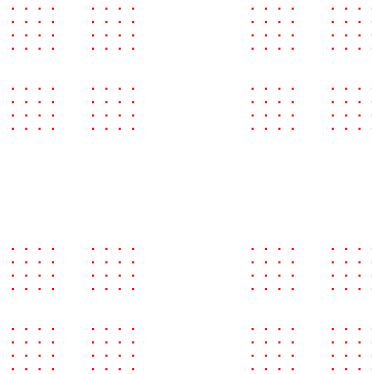


Figura 1.1.1.

Para ello haremos uso del siguiente teorema sobre dimensión el cual nos dice lo siguiente:

Teorema 1.1.1. Sean E y F subconjuntos de \mathbb{R} con F el conjunto de Cantor \mathcal{C} . Entonces $\dim_{\mathcal{H}}(E \times F) = \dim_{\mathcal{H}}(E) + \dim_{\mathcal{H}}(F)$

Una demostración puede consultarse en [??]

Luego, nuestro problema se reduce a calcular la $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.

Teorema 1.1.2. *La $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.*

Demostración. Lo que probaremos primero es que $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Tomemos una cubierta cerrada, $\{U_i\}$, de \mathcal{C} la cual consiste de los 2^k intervalos que nos arrojan el k -ésimo paso de la construcción del conjunto de Cantor, los cuales sabemos que tienen longitud 3^{-k} . De acuerdo a la definición 1.1.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3^{-k}}^s(\mathcal{C}) &= \inf \left\{ \sum \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\} \text{ es una } 3^{-k}\text{-cubierta de } \mathcal{C} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^k} |U_i|^s = 2^k 3^{-ks}, \text{ donde } |U_i| = \text{diam}(U_i). \\ &\text{Observemos que } 2^k 3^{-ks} = 1, \text{ Si } s = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Así para dicho s y nuevamente por Definición 1.1.3,

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = \lim_{3^{-k} \rightarrow 0} \mathcal{H}_{3^{-k}}^s(\mathcal{C}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{3^{-k}}^s(\mathcal{C}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = 1$$

Puesto que el diámetro de esta cubierta puede hacerse arbitrariamente pequeño para este valor fijo s tenemos que $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1$ así, $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

A continuación demostraremos que $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Sea $\{U_i\}$ una cubierta abierta de \mathcal{C} , como \mathcal{C} es compacto, podemos extraer una subcubierta finita de \mathcal{C} , $\{U_i\}_{i=1}^n$.

Para cada U_i sea k el entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}. \quad (1.1)$$

Luego, U_i puede intersectar a lo más a un intervalo del nivel k -ésimo de la construcción de \mathcal{C} debido a que la separación de los intervalos en este nivel es al menos 3^{-k} . Si $j \geq k$, U_i intersecta a lo más 2^{j-k} intervalos del nivel j -ésimo de la construcción de \mathcal{C} .

Si hacemos $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk}$ entonces obtenemos que $2^{-k} = 3^{-sk}$ y por definición $e^{-k \ln 2} = e^{-ks \ln 3}$. De donde se sigue inmediatamente que $\ln 2 = s \ln 3$, esto es, $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Por la desigualdad 1.1 sabemos que $3^{-(k+1)s} \leq |U_i|^s$, luego $3^{-ks} \leq 3^s |U_i|^s$ por tanto U_i intersecta a lo más a $2^j 3^s |U_i|^s$ intervalos del nivel j -ésimo de la construcción de \mathcal{C} .

Ahora tomemos j suficientemente grande de tal forma que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo U_i , $1 \leq i \leq n$. De lo anterior es claro que $\{U_i\}_{i=1}^n$ intersecta a todos los 2^j intervalos de longitud 3^{-j} de donde

4CAPÍTULO 1. DIMENSIÓN DE HAUSDORFF Y TEOREMAS DE PROYECCIÓN

$$2^j \leq \sum_{i=1}^n 2^j 3^s |U_i|^s = \sum_{i=1}^n 2^j 2 |U_i|^s .$$

$$\text{Entonces } 3^{-s} = \frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^n |U_i|^s .$$

Por tanto, $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{2}$, con $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ luego $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.
Y por Teorema 1.1.1,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = \dim_{\mathcal{H}}\mathcal{C} + \dim_{\mathcal{H}}\mathcal{C} = \frac{\ln 2}{\ln 3} + \frac{\ln 2}{\ln 3} = 2\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3} > 1$$

□

Para calcular las dimensiones de Hausdorff de cada uno de nuestros conjuntos de una manera más directa haremos uso de la Teoría de los *SIF* vista en el Capítulo 1.

Una de las ventajas de usar un *SIF* es que la dimensión del atractor es con frecuencia relativamente fácil de calcular en terminos de las contracciones que lo definen.

Existe una teoría muy desarrollada en éste sentido para el caso en que las contracciones ϕ_1, \dots, ϕ_m son similitudes, con c_i , los factores de contracción de cada ϕ_i .

Estas similitudes transforman subconjuntos de \mathbb{R}^2 en conjuntos geométricamente similares, el atractor definido por esta colección de similitudes se le conoce como un *conjunto autosimilar*.

Definición 1.1.4. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una contracción en $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Si ϕ preserva la geometría de E , es decir, ϕ es una composición de una traslación, una rotación, una reflexión o una homotecia entonces a ϕ se le conoce como una similitud.

Teorema 1.1.3. Sea $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una similitud en \mathbb{R}^2 , $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Sea $\{S_i\}_{i=1}^N$ una colección de contracciones en \mathbb{R}^2 , con c_i los respectivos factores de contracción.

Y supongamos que las componentes S_i satisfacen la condición abierta, es decir, que existe un subconjunto, V acotado, abierto y no vacío, tal que,

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V, \text{ y para cada } i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset.$$

Si Ω es el atractor del *SIF* $\{S_1, \dots, S_m\}$, esto es

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m S_i(\Omega),$$

Entonces $\dim_{\mathcal{H}}\Omega = s$, donde s está dado por

$$\sum_{i=1}^N c_i^s = 1.$$

Más aún, para este valor s , $0 < \mathcal{H}^s(\Omega) < \infty$.

Una demostración puede consultarse en [??].

1.2. Dimensión de Hausdorff de nuestros conjuntos

Antes de calcular la dimensión de Hausdorff de cada uno de nuestros ejemplos con ayuda del Teorema 1.1.3, haremos las siguientes observaciones.

Observación 1.2.1. *Todos nuestros conjuntos: $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, \mathcal{M} , \mathcal{A} y \mathcal{L} son **auto-similares**, es decir, las contracciones que las definen son similitudes.*

Observación 1.2.2. *Es claro que para cada uno de nuestros conjuntos **la condición abierta** se satisface para cada ϕ_i si tomamos a V como el cuadrado unitario abierto $(0, 1) \times (0, 1)$ para $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, \mathcal{M} y \mathcal{A} y tomamos a la bola abierta unitaria para \mathcal{L} .*

Entonces;

1. $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = \frac{\ln 4}{\ln 3} > 1$

Pues, $\sum_{i=1}^4 (c_i)^s = 4\left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{4}{3^s} = 1$ si y sólo si $s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

2. $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = \frac{\ln 10}{\ln 6} > 1$

Pues, $\sum_{i=1}^{10} (c_i)^s = 10\left(\frac{1}{6}\right)^s = \frac{10}{6^s} = 1$ si y sólo si $s = \frac{\ln 10}{\ln 6}$.

3. $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}) = \frac{\ln 5}{\ln 3} > 1$

Pues, $\sum_{i=1}^5 (c_i)^s = 5\left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{5}{3^s} = 1$ si y sólo si $s = \frac{\ln 5}{\ln 3}$.

4. $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{L}) = 1$

Pues, $\sum_{i=1}^4 (c_i)^s = 4\left(\frac{1}{4}\right)^s = \frac{4}{4^s} = 1$ si y sólo si $s = 1$.

1.3. Teoremas de proyecciones ortogonales

En este trabajo analizamos las proyecciones ortogonales de varios conjuntos auto similares en el plano. Un resultado clásico de Marstrand y que podemos consultar en [??] nos dice lo siguiente:

Teorema 1.3.1. *Sea $F \subset \mathbb{R}^2$, un conjunto de Borel.*

- *Si $\dim_{\mathcal{H}}(F) \leq 1$, entonces $\dim_{\mathcal{H}}(\pi_{\theta}(F)) = \dim_{\mathcal{H}}(F)$ para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.*
- *Si $\dim_{\mathcal{H}}(F) > 1$, entonces $\pi_{\theta}(F)$ tiene medida positiva como un subconjunto de \mathcal{L} , y tiene dimensión de Hausdorff 1 para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.*

Una demostración puede consultarse en [??].

Una vez presentado este importante resultado y puesto que la $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ y $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ es estrictamente mayor que 1 podemos corroborar los resultados del análisis realizado en el capítulo previo en donde demostramos que para el conjunto \mathcal{M} , $\pi_{\theta}(\mathcal{M})$ es un intervalo para todo $\theta \in [0, \pi)$ y para el conjunto \mathcal{A} , $\pi_{\theta}(\mathcal{A})$ tiene medida positiva para todo $\theta \in [0, \pi)$ como muestran en [??].

Por otro lado puesto que $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{L}) = 1$ el teorema de Marstrand nos dice que las proyecciones de \mathcal{L} sobre casi todas las direcciones L_{θ} tienen dimensión 1. Sin embargo para estos valores no nos da información el teorema sobre cuándo las proyecciones tienen medida cero o positiva.

Afortunadamente en esta dirección hay teoría desarrollada muy interesante y que también puede consultarse en [??]. Aquí simplemente enunciaremos sin mayor preámbulo un teorema que nos ayudará a entender las proyecciones del conjunto \mathcal{L} .

Teorema 1.3.2. *Sea F un 1-conjunto irregular en \mathbb{R}^2 . Entonces $\pi_{\theta}(F)$ tiene medida cero para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.*

La definición de conjunto irregular y la demostración de este teorema puede consultarse en [??].

El conjunto \mathcal{L} tiene la propiedad de ser un 1-conjunto irregular luego, por teorema 1.3.2, sabemos que $\pi_{\theta}(\mathcal{L})$ tiene medida cero para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.

1.4. Preguntas interesantes

Finalmente desearía añadir una serie de preguntas relacionadas con el tema de proyecciones de conjuntos que me parecen muy interesantes y que me gustaría culminar esta tesina con su planteamiento, unas de ellas han

sido estudiadas recientemente y se ha dado una respuesta, sin embargo hay otras que aún siguen abiertas.

1. De acuerdo al Teorema de Marstrand enunciado en 1.3.1, es natural preguntarse: ¿Cuándo las proyecciones ortogonales de Ω tienen medida positiva para el caso cuando $\dim_{\mathcal{H}}(\Omega) < 1$?
2. Si dividimos los conjuntos planos autosimilares en dos categorías: una cuando las similitudes no involucran rotaciones de ángulo irracional o reflexiones, y las otras. En [??], Kemal Ilgar prueba que dado E un conjunto autosimilar con dimensión d cuyas similitudes generan un conjunto denso de rotaciones, entonces la medida d -dimensional de Hausdorff de la proyección ortogonal de E sobre cualquier recta es cero.
3. Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es invisible, si su proyección ortogonal es de medida cero para casi toda dirección; A es un conjunto visible si no es invisible. Decimos que A es invisible desde un punto, si para casi todas las rectas que pasan por ese punto no intersectan al conjunto, excepto posiblemente al punto mismo. P. Mattila se preguntó cuándo el conjunto de puntos desde el cual un conjunto invisible es visible es visible. Y la respuesta nos la da Marianna Csörnyei en [??].

De forma muy especial enunciaré un resultado de Cobb que demuestra en [??], el cual nos indica la imposibilidad de generalizar la construcción del conjunto \mathcal{M} , esto es, nos niega la existencia de un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^3 para el cual las proyecciones ortogonales en todas sus planos sean conjuntos convexos.

Y el resultado dice lo siguiente:

Teorema 1.4.1. *No existe un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, cuyas proyecciones ortogonales sobre todos los $(m - 1)$ - planos sean conjuntos convexos.*

En esta dirección Karol Borsuk nos proporciona un ejemplo de un conjunto de Cantor en el espacio cuyas proyecciones en todo plano poseen puntos interiores. Ver [??].

Sin embargo queda la pregunta abierta si ¿podrán existir conjuntos de Cantor en \mathbb{R}^m con $m \geq 3$ cuyas proyecciones en todas direcciones sean conexas?

Bibliografía

- [1] G. Arenas, R. Isaacs, S. Sabogal y H. Méndez: *Sistemas Dinámicos Discretos y Fractales* Vínculos Matemáticos, No. 87, Facultad de Ciencias, UNAM, (2009).
- [2] G. A. Edgar: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, (1992).
- [3] K. Borsuk: *An exemple of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points.*, Fund. Math. No. 34, (1947), 272-277.
- [4] M. Csörnyei: *On the visibility of invisible sets*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, Volumen 25, (2000), 417-421.
- [5] J. Coob: *Raising dimension under all projections*, Fundamenta Mathematicae No. 144, (1994), 119-127.
- [6] K. I. Eroglu: *On planar self-similar sets with a dense set of rotations*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, Volumen 32, (2007), 409-424.
- [7] K.J. Falconer: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley, Nueva York, (1990).
- [8] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. No. 30, (1981), 713-747.
- [9] F. Mendivil, T.D. Taylor *Thin sets with fat shadows: projections of Cantor Sets*, American Mathematical Monthly Vol. 115, (2008), 451-456.
- [10] H. R. Parks, *Purely Unrectifiable sets with large projections*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 6, No. 1, (2009), 1-10.