



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERIA

**INCERTIDUMBRE EN EL ANALISIS  
DE FLUJO DE AGUA EN SUELOS**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERIA**

INGENIERIA CIVIL –ANALISIS Y DISEÑO DE PRESAS DE TIERRA

P R E S E N T A :

**NORMA PATRICIA LOPEZ ACOSTA**



TUTOR:  
**DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD**

**2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. DANIEL RESÉNDIZ NÚÑEZ

Secretario: DR. RAÚL FLORES BERRONES

Vocal: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

1<sup>er</sup>. Suplente: DR. EFRAÍN OVANDO SHELLEY

2<sup>do</sup>. Suplente: DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

---

**FIRMA**

## Dedicatorias

A mis padres.

A mis hermanas y hermano, mis sobrinos y cuñados.

A toda mi familia.

A mis amigos.

A mi amado esposo. Hugo eres el regalo más grande de mi vida. Para ti, mi amor eterno y mi mayor agradecimiento por tu paciencia y comprensión, por ayudarme y apoyarme incondicionalmente a hacer lo que me gusta.

## Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM.

A los sinodales, Dr. Daniel Reséndiz Núñez, Dr. Raúl Flores Berrones, Dr. Efraín Ovando Shelley y Dr. Rigoberto Rivera Constantino, por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

A José Luis Lezama y Juan Félix Rodríguez por la asesoría y el apoyo computacional.

Dr. Gabriel Auvinet Guichard, merci pour ces expériences et vos conseils, merci pour votre confiance, mais surtout, un grand merci pour m'avoir appris à aimer la recherche, puisque j'ai terminé ce travail précisément quand je commençais à l'apprécier réellement...

# Índice

---

## Incertidumbre en el análisis de flujo de agua en suelos

---

	<b>Página</b>
<b>RESUMEN</b> .....	vii
<b>NOTACIÓN</b> .....	ix
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	xiii
<b>LISTA DE TABLAS</b> .....	xxi
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2. TEORÍAS Y MÉTODOS EMPLEADOS EN LOS ANÁLISIS DE FLUJO DE AGUA EN SUELOS</b> .....	<b>7</b>
<b>2.1 Introducción</b> .....	7
<b>2.2 Determinación de la conductividad hidráulica</b> .....	8
2.2.1 Definición general.....	8
2.2.2 Pruebas de campo y de laboratorio.....	8
2.2.3 Permeabilidad equivalente.....	10
2.2.3.1 Suelos homogéneos isótropos.....	11
2.2.3.2 Suelos homogéneos anisótropos.....	12
2.2.3.3 Suelos estratificados.....	12
2.2.3.4 Suelos heterogéneos.....	14
(a) Conceptos generales.....	14
(b) Métodos de cálculo.....	15
(c) Desigualdades para la permeabilidad equivalente.....	16
(c.1) Límites de Wiener.....	16
(c.2) Límites de Hashin y Shtrikman.....	17
(c.3) Límites de Cardwell y Parsons.....	17
(c.4) Límites de Matheron.....	18
2.2.4 Teoría de percolación.....	19
2.2.4.1 Definiciones generales: permeabilidad, percolación y difusión.....	19
2.2.4.2 Terminología aplicada a la percolación.....	20
2.2.4.3 Aplicación a la permeabilidad equivalente.....	26
<b>2.3 Principales métodos para el análisis del flujo establecido de agua en suelos</b> ....	26
2.3.1 Consideraciones generales.....	26
2.3.2 Método gráfico de la red de flujo.....	27
2.3.3 Método de relajaciones.....	28
2.3.4 Método de los paseos casuales ( <i>RWM</i> ).....	30
2.3.5 Método de los fragmentos.....	31
2.3.6 Transformación o mapeo conforme.....	33
2.3.7 Método de elementos de frontera o ecuaciones integrales ( <i>BEM</i> o <i>BIEM</i> )...	35
2.3.8 Método del elemento finito ( <i>FEM</i> ).....	36
2.3.9 Modelos de laboratorio.....	38

	<b>Página</b>
2.3.10 Modelos analógicos.....	39
2.3.11 Tecnologías denominadas “ <i>soft computing (cómputo aproximado)</i> ” .....	41
2.3.12 Comentarios finales.....	42
<b>CAPÍTULO 3. ORIGEN Y MODELACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1 Principales fuentes de incertidumbre.....</b>	<b>43</b>
3.1.1 Introducción.....	43
3.1.2 Incertidumbre en las condiciones de frontera.....	44
3.1.3 Incertidumbre asociada al método de cálculo.....	45
3.1.4 Incertidumbre en la conductividad hidráulica.....	46
3.1.4.1 Incertidumbre en la estimación o determinación de la permeabilidad de un material homogéneo.....	46
3.1.4.2 Variación espacial.....	47
<b>3.2 Modelado de la incertidumbre en la conductividad hidráulica.....</b>	<b>52</b>
3.2.1 Aspectos preliminares.....	52
3.2.2 Modelación por medio de variables aleatorias.....	52
3.2.3 Modelación por medio de campos aleatorios.....	53
3.2.3.1 Conceptos básicos.....	53
3.2.3.2 Campos aleatorios aparentes.....	56
(a) Ensayes sin sesgo.....	57
(b) Ensayes con sesgo aleatorio.....	58
<b>CAPÍTULO 4. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN LOS RESULTADOS.....</b>	<b>59</b>
<b>4.1 Introducción.....</b>	<b>59</b>
<b>4.2 Métodos de evaluación de la incertidumbre.....</b>	<b>61</b>
4.2.1 Método del <i>Jacobiano</i> .....	61
4.2.2 Métodos de perturbaciones.....	62
4.2.2.1 Métodos de segundos momentos (aproximaciones de primer orden <i>FOSM</i> y de segundo orden <i>SOSM</i> ).....	62
(a) Introducción.....	62
(b) Fundamentos del análisis de incertidumbre de primer y segundo orden.....	63
(b.1) Caso I: Función de una variable.....	63
(b.2) Caso II: Función de varias variables.....	64
(c) Técnicas numéricas para la aplicación de métodos de perturbación de primer y segundo orden.....	65
4.2.2.2 Métodos de estimación puntual ( <i>PEM</i> ).....	66
(a) Fundamentos de la estimación bipuntual de Rosenblueth (1975)..	66
(b) Casos de análisis propuestos por Rosenblueth (1975).....	67
(b.1) Caso I: Dos puntos de estimación; cuando <i>Y</i> es función de una variable <i>X</i> , con media, varianza y coeficiente de asimetría conocidos.....	67
(b.2) Caso II: Varios puntos de estimación; cuando <i>Y</i> es función	

	<b>Página</b>
de una variable $X$ , cuya distribución es simétrica y aproximadamente <i>gaussiana</i> .....	69
(b.3) Caso III: Cuando $Y$ es función de $n$ variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ , cuyas distribuciones son simétricas y pueden o no estar correlacionadas.....	70
(b.3.1) <i>Función de dos variables</i> .....	70
(b.3.2) <i>Función de tres variables</i> .....	71
(b.3.3) <i>Generalización para funciones de varias variables</i> ...	72
(c) Otros métodos de estimación puntual.....	73
4.2.2.3 Método mixto de primer y segundo orden ( <i>MFO</i> y <i>MSO</i> ; Auvinet, 2007).....	75
4.2.3 Métodos espectrales.....	76
4.2.3.1 Representación de la incertidumbre con campos aleatorios.....	77
4.2.3.2 Representación de la respuesta.....	77
4.2.3.3 Evaluación de la propagación de la incertidumbre en problemas de flujo de agua.....	79
4.2.4 Métodos de simulación.....	80
4.2.5 Resumen de las principales características de los métodos más comunes de evaluación de la incertidumbre.....	83
<b>4.3 Método del elemento finito estocástico (<i>SFEM</i>) aplicado al flujo establecido de agua en medios porosos</b> .....	<b>84</b>
4.3.1 Introducción.....	84
4.3.2 Discretización de campos aleatorios.....	85
4.3.2.1 Método del punto medio (midpoint method).....	86
4.3.2.2 Método de la función de forma (shape function method).....	86
4.3.2.3 Método del punto de integración (integration point method).....	86
4.3.2.4 Método de estimación lineal óptima (optimum linear estimation method).....	87
4.3.2.5 Método del promedio espacial (spatial average method).....	88
4.3.2.6 Método de expansión en serie (series expansion method).....	88
4.3.3 Desarrollo de técnicas de perturbación de primer y segundo orden aplicables al método de elementos finitos ( <i>FEM</i> ).....	89
4.3.3.1 Incertidumbre en la carga hidráulica.....	89
4.3.3.2 Incertidumbre en el gradiente hidráulico.....	92
4.3.3.3 Incertidumbre en las fuerzas de filtración.....	95
4.3.3.4 Incertidumbre en la velocidad de flujo.....	95
4.3.3.5 Incertidumbre en el gasto.....	99
4.3.3.6 Algoritmo desarrollado.....	100
4.3.4 Implementación de la técnica de simulación de Monte Carlo en combinación con el método de elementos finitos ( <i>FEM</i> ).....	102
<b>4.4 Desarrollo del método de los paseos casuales en medios heterogéneos simulados</b> .....	<b>104</b>
<b>4.5 Teorema de Bayes enfocado al flujo de agua</b> .....	<b>108</b>
<b>CAPÍTULO 5. APLICACIONES</b> .....	<b>109</b>



	Página
<b>5.1 Evaluación analítica y estudios paramétricos de la propagación de la incertidumbre en problemas de flujo unidimensional en medios porosos aleatorios.....</b>	109
5.1.1 Introducción.....	109
5.1.2 Fundamento de la condición hidráulica.....	110
5.1.3 Características geométricas, de frontera e hidráulicas.....	111
5.1.4 Solución estocástica.....	113
5.1.4.1 CASO I: Flujo a través de un material homogéneo aleatorio.....	113
5.1.4.2 CASO II: Flujo a través de una secuencia de dos materiales aleatorios.....	115
(a) Análisis mediante los métodos de primer y segundo orden segundos momentos ( <i>FOSM</i> y <i>SOSM</i> , respectivamente).....	116
(b) Análisis mediante la estimación puntual de Rosenblueth ( <i>PEM</i> )...	118
(c) Análisis mediante el método mixto de primer y segundo orden ( <i>MFO</i> y <i>MSO</i> , respectivamente).....	120
(d) Análisis con el método de simulación de Monte Carlo.....	121
5.1.4.3 CASO III: Flujo a través de una secuencia de tres materiales aleatorios.....	122
5.1.4.4 Resumen de resultados.....	124
5.1.5 Análisis paramétrico.....	126
5.1.6 Comentarios finales.....	129
<b>5.2 Zonas de incertidumbre en problemas típicos de flujo de agua.....</b>	130
5.2.1 Consideraciones generales.....	130
5.2.2 Análisis estocásticos.....	130
5.2.2.1 Incertidumbre a través de una muestra de suelo aleatoria.....	130
5.2.2.2 Incertidumbre bajo una tablestaca.....	139
5.2.2.3 Incertidumbre bajo un cimacio.....	146
5.2.2.4 Incertidumbre a través de una presa de tierra homogénea.....	156
5.2.2.5 Incertidumbre en la cubierta permeable de una presa de materiales graduados (instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo).....	158
5.2.3 Comentarios finales.....	162
<b>5.3 Solución de un problema inverso de flujo establecido de agua en una presa de tierra y enrocamiento, utilizando un enfoque bayesiano.....</b>	165
5.3.1 Introducción.....	165
5.3.2 Características generales de la presa.....	165
5.3.3 Análisis determinista convencional.....	168
5.3.4 Análisis bayesiano.....	169
5.3.5 Comentarios finales.....	179
<b>5.4 Permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en dos (2D) y tres dimensiones (3D).....</b>	180
5.4.1 Introducción.....	180
5.4.2 Análisis bidimensional.....	180
5.4.2.1 Simulación de campos aleatorios de permeabilidad 2D.....	180
5.4.2.2 Estudio del flujo de agua con elementos finitos.....	185
5.4.3 Análisis tridimensional.....	190

	<b>Página</b>
5.4.3.1 Simulación de campos aleatorios de permeabilidad 3D.....	190
5.4.3.2 Estudio del flujo de agua con <i>pasos casuales</i> .....	194
5.4.4 Comentarios finales.....	200
<b>5.5 Estudio del fenómeno de percolación en una presa de tierra y enrocamiento cimentada en un suelo aluvial.....</b>	<b>201</b>
5.5.1 Introducción.....	201
5.5.2 Características generales de la presa.....	201
5.5.3 Evaluación bidimensional de la percolación.....	203
5.5.4 Evaluación tridimensional de la percolación.....	213
5.5.5 Comentarios finales.....	222
 <b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.....</b>	 <b>225</b>
 <b>REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA.....</b>	 <b>233</b>
 <b>ANEXOS</b>	
<b>I. Métodos para determinar permeabilidades equivalentes de medios heterogéneos.....</b>	<b>247</b>
I.1 Introducción.....	247
I.2 Métodos heurísticos.....	247
I.3 Métodos deterministas.....	249
I.4 Métodos estocásticos.....	253
<b>II. Método de los paseos casuales.....</b>	<b>255</b>
II.1 Análisis bidimensional.....	255
II.2 Análisis tridimensional.....	261
<b>III. Análisis de flujo de agua en suelos utilizando el método de elementos finitos (<i>FEM</i>).....</b>	<b>263</b>
III.1 Conceptos básicos.....	263
III.2 Aplicación del <i>FEM</i> al flujo establecido de agua utilizando un enfoque variacional.....	263
<b>IV. Campos aleatorios.....</b>	<b>273</b>
IV.1 Definiciones.....	273
IV.2 Estimación estadística de los parámetros de un campo aleatorio.....	275
IV.3 Efecto de escala.....	276
IV.4 Estimación condicional.....	277
IV.5 Simulación de campos aleatorios.....	284
<b>V. Técnica de cocientes polinomiales.....</b>	<b>287</b>
V.1 Fundamentos teóricos.....	287
V.2 Aplicación en el cálculo de derivadas de primer y segundo orden empleadas en los métodos <i>FOSM</i> y <i>SOSM</i> del problema del inciso 5.1.4 (Capítulo 5).....	290

# Resumen

---

El énfasis de esta tesis doctoral se centró en investigar el origen y la magnitud de las principales incertidumbres que afectan los análisis de flujo de agua en medios porosos aleatorios y en la evaluación de su influencia sobre los resultados de los mismos. Se reconoció que aun cuando existen diversos factores que pueden afectar la representatividad de los análisis, la incertidumbre más significativa es la que está asociada a la conductividad hidráulica, debida a su variación espacial, a la carencia de datos y a la baja confiabilidad de las estimaciones y pruebas para determinarla. Se señaló que esta incertidumbre puede modelarse con *variables aleatorias* o *campos aleatorios*, mismos que con base en evidencias experimentales, se aconseja referirlos al logaritmo (decimal o natural) de la permeabilidad. Se demostró que los métodos estocásticos, fundamentados en la teoría de la probabilidad, son herramientas matemáticas racionales que permiten la evaluación de la propagación de la incertidumbre en la conductividad hidráulica sobre cantidades tales como el potencial hidráulico, el gradiente hidráulico, la velocidad de flujo, el gasto, entre otras. Diversas técnicas fueron revisadas e implementadas para su uso en los análisis probabilistas de flujo de agua. Entre ellas, los métodos de *primer orden segundos momentos (FOSM)* y *segundo orden segundos momentos (SOSM)*; la *estimación puntual de Rosenblueth (PEM)*; el método de *simulación de Monte Carlo* y el *método de los paseos casuales (RWM)*; asimismo se propuso un nuevo *método mixto* tanto de *primer* como de *segundo orden (MFO y MSO)* que simplifica el cálculo de las derivadas requeridas en las técnicas *FOSM* y *SOSM*. Variados algoritmos (MEFLULOG, PASECA, SIMONC, etc.) fueron desarrollados para la automatización de las técnicas previas. La aplicabilidad y utilidad de estas herramientas se mostró con la solución de distintos problemas prácticos, abordados desde el punto de vista estocástico más elemental hasta situaciones más complejas. Así, en esta disertación se expusieron problemas de flujo establecido confinado y no confinado; unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D); en medios aleatorios homogéneos e isótropos, pero también heterogéneos y anisótropos; resueltos de manera analítica y numérica, principalmente con el método del elemento finito estocástico (*SFEM*) y paseos casuales. Entre otros temas, se estudiaron las zonas o distribución de la incertidumbre en diversos problemas típicos de flujo de agua. Se mostró cómo realizar análisis inversos de flujo de agua aplicando el *teorema de Bayes* al estudio del comportamiento de los materiales constitutivos de una presa de tierra y enrocamiento. Se estudió la *permeabilidad equivalente* para flujo en medios heterogéneos simulados con campos aleatorios 2D y 3D. Se mostró y respaldó la utilidad de la *teoría de percolación* en el cálculo del gasto de infiltración en suelos erráticos como los aluviales, proponiéndose una metodología sencilla para determinar la *probabilidad crítica* o *umbral de percolación* en este tipo de dominios. Finalmente, las conclusiones de los análisis efectuados y las recomendaciones en el empleo de las técnicas usadas, demostraron que a pesar de sus limitaciones, se trata de herramientas más complementarias que antagónicas, las cuales no sustituyen los métodos convencionales ni el juicio ingenieril, sino que contribuyen a hacer más realistas los resultados de los análisis de flujo de agua en medios aleatorios.

# Abstract

---

The emphasis of this thesis focused on the origin and magnitude of main uncertainties affecting analyses of water flow in random porous media and the evaluation of their influence on results. The significant uncertainty on hydraulic conductivity due to spatial variation, lack of data and low reliability of estimates and achieved tests is recognized even when there are several factors damaging the representativeness on analyses. *Random variables* and *random fields* can be used to describe such uncertainty and taking into account experimental evidences they should refer to *decimal or natural logarithm of permeability*. Stochastic methods, based on probability theory, were demonstrated as rational mathematical tools which allow assessing the propagation of uncertainty from hydraulic conductivity to quantities such as hydraulic potential, hydraulic gradient, seepage velocity, flow rate, among others. Several techniques were revised and implemented to perform probabilistic analyses of groundwater seepage; including, *first order second moments (FOSM)* and *second order second moments (SOSM)* methods; *Rosenblueth's point estimate (PEM)*; *Monte Carlo simulation* and *random walk method (RWM)*. Likewise a new *first and second order mixed method (MFO and MSO)*, respectively) that simplifies the calculation of derivatives required in *FOSM* and *SOSM* techniques was proposed. Various algorithms (MEFLULOG, PASECA, SIMONC, etc.) for automation of previous techniques were implemented. The applicability and usefulness of these tools was demonstrated by the resolution of different practical problems approached from the most elementary stochastic viewpoint up to more complex situations. Thus, in this dissertation confined and unconfined steady state flow problems, one-dimensional (1D), two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D), in homogeneous and isotropic random media, but also heterogeneous and anisotropic media were exposed; these problems were solved in an analytical and numerical way mainly with the stochastic finite element method (*SFEM*) and the random walk method. Among other issues, zones or distribution areas of uncertainty in several typical water flow problems were studied. How to perform inverse analyses of groundwater seepage by applying Bayes' theorem to study the behavior of constitutive materials of an earth and rockfill dam was shown. The *equivalent permeability* for seepage in heterogeneous media simulated with 2D and 3D random fields was studied. The utility of *percolation theory* in calculation of flow rate through erratic soils such as alluvial soils was presented and supported, proposing a simple methodology to determine the *critical probability* or *percolation threshold* in this type of domains. Finally, conclusions of performed analyses and recommendations on the use of applied techniques, in spite of their limitations were demonstrated to be more complementary than antagonistic tools, which do not replace conventional methods and engineering judgment, but help to achieve more realistic results of groundwater seepage analyses in random media.

# Résumé

---

Le but de cette thèse de doctorat est focalisé sur l'investigation de l'origine et de la magnitude des principales incertitudes qui affectent les analyses du flux d'eau en milieux poreux aléatoires, ainsi que l'évaluation de leur influence sur les résultats. En effet, parmi les différents facteurs qui affectent la représentation des analyses, l'incertitude la plus significative est celle associée à la conductivité hydraulique, dû à sa variation spatiale, au manque de données et à la faible fiabilité des estimations et des essais pour la déterminer. Cette incertitude peut être modélisée par des *variables aléatoires* ou *champs aléatoires*, même s'ils sont basés sur des évidences expérimentales, doivent être représentés par des logarithmes (décimaux ou naturels) de la perméabilité. Il est démontré que les méthodes stochastiques, fondées sur la théorie des probabilités, sont des outils mathématiques rationnels qui permettent l'évaluation de l'effet de l'incertitude de la conductivité hydraulique sur le potentiel hydraulique, le gradient hydraulique, la vitesse de flux et le débit, entre autres. Plusieurs techniques ont été examinées et mises en œuvre pour leur utilisation dans l'analyse probabiliste du flux d'eau. Parmi eux, les méthodes de *premier ordre seconds moments (FOSM)* et de *second ordre seconds moments (SOSM)*, *l'estimation ponctuelle de Rosenblueth (PEM)*, la méthode de *simulation de Monte Carlo* et la *méthode de la marche au hasard (RWM)*; également une nouvelle *méthode mixte de premier et de second ordre (MFO et MSO)* est proposée, qui simplifie le calcul des dérivées nécessaires dans les techniques *FOSM* et *SOSM*. Divers algorithmes (MEFLULOG, PASEC, SIMONC, etc.) ont été développés pour l'automatisation des techniques précédentes. L'application et l'utilité des outils antérieurs ont permis la résolution de différents problèmes pratiques, abordés du point de vue stochastique le plus élémentaire jusqu'aux situations les plus complexes. Ainsi, dans cette thèse des problèmes d'écoulements permanents confinés et non confinés ont été présentés, à une dimension (1D), en deux dimensions (2D) et trois dimensions (3D), en milieux aléatoires homogènes et isotropes, mais aussi milieux hétérogènes et anisotropes; résolus analytiquement et numériquement principalement avec la méthode des éléments finis stochastiques (*SFEM*) et la méthode de la marche au hasard. Parmi d'autres problématiques, on a étudié les zones ou la distribution de l'incertitude dans plusieurs problèmes typiques du flux d'eau. Il a été montré comment effectuer des *analyses inverses* d'écoulement d'eau en appliquant le *théorème de Bayes* dans le but d'étudier le comportement des matériaux constitutifs d'un barrage de terre et d'enrochement, et d'établir leurs contributions au système de contrôle de flux d'eau du barrage. Aussi, on a étudié la *perméabilité équivalente* pour l'écoulement en milieux hétérogènes simulés en deux et trois dimensions à l'aide de la théorie des champs aléatoires. On a présenté et confirmé l'utilité de la théorie de la percolation pour le calcul du débit d'infiltration dans les sols erratiques ainsi que les sols alluviaux, en proposant une méthodologie simple qui sert à déterminer la *probabilité critique* ou le *seuil de percolation* dans ces types de domaines. Finalement, les conclusions des analyses effectuées et les recommandations à l'emploi des techniques utilisées, ont démontré que malgré leurs limitations, elles sont des outils plus complémentaires qu'antagonistes, qui ne remplacent pas les méthodes conventionnelles et l'esprit ingénieux, mais elles contribuent à rendre les résultats des analyses d'écoulement d'eau en milieux aléatoires plus réalistes.

# Notación

---

Los símbolos empleados en esta investigación se definen donde aparecen por primera vez. No obstante, a continuación se presentan los más usuales o representativos de la misma.

---

$A$	Área de un dominio o de una muestra
$[B]$	Matriz geométrica en el método de elementos finitos
$\beta$	Sesgo aleatorio sobre una prueba de campo o de laboratorio
$C_{max}^{xx}, C_{min}^{xx}$	Permeabilidad máxima y mínima, respectivamente, obtenidas en el método de renormalización
$Cov[w_i, w_j]^I$	Covarianza de primer orden entre las variables aleatorias $w_i$ y $w_j$
$Cov[w_i, w_j]^{II}$	Covarianza de segundo orden entre las variables aleatorias $w_i$ y $w_j$
$CV_{w_i}$	Coefficiente de variación de la variable aleatoria $w_i$
$\chi$	Funcional empleada en el método de elementos finitos
$d_i$	Espesor del estrato $i$
$D_s$	Dimensión en la que se realiza el análisis
$\Delta$	Área de un elemento finito en el método de elementos finitos
$\Delta x$	Espesor de las franjas verticales en el método de ecuaciones integrales
$\Delta y$	Espesor de las franjas horizontales en el método de ecuaciones integrales
$\Delta h$	Pérdida de carga hidráulica
$\delta$	Lado de los cuadrados o cubos en el método de relajaciones o paseos casuales
$e$	Error aleatorio sobre una prueba de campo o de laboratorio
$E\{k(X)\}$	Valor esperado de un campo aleatorio de permeabilidad
$E\{w_i\}^I$	Valor esperado de primer orden de una variable $w_i$
$E\{w_i\}^{II}$	Valor esperado de segundo orden de una variable $w_i$
$f_0, f_1$	Fracciones de las fases de permeabilidad $k_0$ y $k_1$ , respectivamente, empleadas en los métodos de permeabilidad equivalente
$f(u)$	Función en todo punto $u_i$ de la frontera de un dominio $D$
$F_s$	Fracción de las inclusiones de arcilla en el método de la línea de corriente
$\phi$	Función potencial
$\Phi_n$	Factor de forma en el método de los fragmentos
$grad h$	Gradiente de $h$ en análisis vectorial
$G(x, z)$	Función de peso en el método de ecuaciones integrales
$\gamma_w$	Peso volumétrico del agua
$\Gamma$	Perímetro cerrado que define una región de estudio en el método de ecuaciones integrales

## Notación

---

$h$	Carga hidráulica
$\{h\}^e$	Vector de carga hidráulica en el elemento $e$ de una malla de elementos finitos
$i$	Unidad imaginaria referente a los números complejos
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios con dirección igual a la de los ejes positivos $X, Y, Z$
$i_x, i_y, i_z$	Gradientes hidráulicos en las direcciones $X, Y, Z$ , respectivamente
$\bar{i}$	Magnitud del vector gradiente hidráulico
$\{i\}^e$	Vector de gradiente hidráulico en el elemento $e$ de una malla de elementos finitos
$\varphi$	Término aleatorio de error sobre la carga hidráulica
$k_x, k_y, k_z$	Coefficientes de permeabilidad en las direcciones $X, Y, Z$ , respectivamente
$k_h, k_v$	Permeabilidades horizontal y vertical, en el método de la línea de corriente, respectivamente
$k_\gamma$	Permeabilidad en la dirección $\gamma$
$k_{m\acute{a}x}, k_{m\acute{i}n}$	Permeabilidades máxima y mínima de un suelo anisótropo, respectivamente
$k_b$	Permeabilidad de bloque
$k_{ef}$	Permeabilidad efectiva
$k_{eq}$	Permeabilidad equivalente
$k(X)$	Campo aleatorio de permeabilidad
$\bar{k}$	Permeabilidad equivalente en la teoría de la sección transformada
$\tilde{k}(X)$	Campo de permeabilidad aparente
$\mathbf{K}$	Tensor de permeabilidad
$L$	Distancia de correlación
$\log_{10} k$	Logaritmo decimal del coeficiente de permeabilidad
$\ln k$	Logaritmo natural del coeficiente de permeabilidad
$[M]$	Matriz de transición en el método de los paseos casuales
$\mu_a$	Media aritmética
$\mu_c$	Constante conectiva en la teoría de percolación
$\mu_g$	Media geométrica
$\mu_h$	Media armónica
$n_e$	Número de intervalos entre líneas equipotenciales
$n_f$	Número de intervalos entre líneas de flujo
$N_i, N_j, N_m$	Funciones de forma en los nodos $i, j, m$ de un elemento finito
$N_s$	Número de líneas de corriente seleccionadas en el método de la línea de corriente
$NA$	Número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1
$p$	Exponente que varía en el intervalo $[-1, +1]$ en el método de promedio de una potencia
$p_i$	Punto de análisis en el método de los paseos casuales
$p_c$	Probabilidad crítica en la teoría de percolación

---

$p_{cb}$	Probabilidad crítica en el problema de percolación de vínculo “ $b$ ”
$p_{cs}$	Probabilidad crítica en el problema de percolación de sitio “ $s$ ”
$P(i)$	Probabilidad de desplazamiento en el punto $i$ (método de los paseos casuales)
$P(p)$	Probabilidad de percolación
$\frac{P}{\gamma_w}$	Carga de presión en la ecuación de Bernoulli
$q_{rx}, q_{ry}$	Gasto que sale por el lado del elemento finito opuesto al nodo $r$ , en las direcciones $X$ y $Y$ , respectivamente
$Q$	Gasto total a través de un dominio
$[R]$	Matriz de permeabilidad en el método de elementos finitos
$\rho(k(X_1), k(X_2))$	Coefficiente de autocorrelación entre los valores del campo aleatorio $k(X)$ en los puntos $X_1$ y $X_2$ .
$[S]$	Matriz general o global en el método de elementos finitos
$\$$	Factor de forma en una red de flujo
$T$	Trayectoria completa en el método de los paseos casuales
$t$	Tiempo
$u$	Valor medido u observado de una propiedad del suelo
$V_x, V_y, V_z$	Velocidades de flujo en las direcciones $X, Y, Z$ , respectivamente
$\bar{V}$	Magnitud del vector velocidad de flujo
$Vlm$	Volumen de un dominio analizado
$\{V\}^e$	Vector de velocidad de flujo en el elemento $e$ de una malla de elementos finitos
$Var[w_i]^I$	Varianza de primer orden de una variable $w_i$
$Var[w_i]^{II}$	Varianza de segundo orden de una variable $w_i$
$Var[k(X)]$	Varianza de un campo aleatorio de permeabilidad
$w$	Valor real de una propiedad del suelo
$\Omega$	Dominio de análisis
$\xi$	Término aleatorio de error sobre el método de cálculo
$\Psi$	Función de corriente
$z$	Carga de posición en la ecuación de Bernoulli
$z_p$	Número de coordinación de un enrejado en la teoría de percolación
$\zeta$	Plano complejo en el método de transformación o mapeo conforme
$\nabla^2 h$	Laplaciano de $h$

---

# Lista de figuras

---

		<b>Página</b>
Figura 2.1	Permeámetro prototipo para determinar un tensor de permeabilidad en el laboratorio (Renard, Genty & Stauffer, 2001)	10
Figura 2.2	Representación esquemática de la permeabilidad equivalente	11
Figura 2.3	Representación idealizada de un medio homogéneo anisótropo	12
Figura 2.4	Representación para el cálculo de <i>promedios aritmético</i> $\mu_a$ y <i>armónico</i> $\mu_h$ <i>pesados</i> en un medio estratificado	13
Figura 2.5	Permeabilidad equivalente en un medio estratificado y a su vez, en una dirección $\gamma$ (Marsal & Reséndiz, 1968)	13
Figura 2.6	Representación esquemática de las permeabilidades efectiva $k_{ef}$ y de bloque $k_b$	15
Figura 2.7	Clasificación simplificada de métodos para estimar la permeabilidad equivalente	16
Figura 2.8	Esquema para el cálculo de los límites de <i>Cardwell y Parsons</i>	18
Figura 2.9	Representación idealizada de la condición de percolación en un medio poroso aleatorio	20
Figura 2.10	Tipos de problemas de percolación (Weisstein, 2010)	21
Figura 2.11	Algunas definiciones importantes en un problema de percolación de <i>sitios</i>	22
Figura 2.12	Redes bidimensionales usuales (Shante & Kirkpatrick, 1971; Sahimi, 1994)	23
Figura 2.13	Red cúbica simple ( $z_p=6$ ; Stauffer & Aharony, 1985)	24
Figura 2.14	Red con estructura semejante a la de un árbol ( $z_p=4$ ; Shante & Kirkpatrick, 1971)	26
Figura 2.15	Condiciones geométricas de algunas mallas en el método de relajaciones	29
Figura 2.16	Malla empleada en el método de los paseos casuales (caso de un suelo homogéneo e isótropo)	30
Figura 2.17	Posibilidades de desplazamiento sobre los nodos de una malla	31
Figura 2.18	Consideración esquemática del método de los fragmentos	31
Figura 2.19	Transformación conforme del dominio $G$ en el dominio $G_1$	34
Figura 2.20	Mapeo conforme mediante la función de transformación $\zeta=w^2$	34
Figura 2.21	División del dominio de flujo $\Omega$ en franjas en la dirección $Y$ para facilitar la integración con respecto a $x$	36
Figura 2.22	Red de flujo en un medio homogéneo e isótropo (López & Auvinet, 1998)	37
Figura 2.23	Red de flujo en un medio estratificado (López & Auvinet, 1998)	38
Figura 2.24	Modelo de laboratorio para el estudio de la falla de taludes ocasionada por lluvia (Orense <i>et al.</i> , 2004)	39
Figura 2.25	Principio de analogía eléctrica	40
Figura 3.1	Perfil de permeabilidad de un depósito de delta (Terzaghi y Peck, 1955)	47
Figura 3.2	Variabilidad de la conductividad hidráulica en un acuífero de arenisca del Monte Simon en Illinois (Bakr, 1976)	48



		<b>Página</b>
Figura 3.3	Gráficas de frecuencia de una arcilla compactada (Gilbert, 1996)	49
Figura 3.4	Localización de pozos en el perímetro de la laguna de Cerro Prieto y resultados de pruebas de permeabilidad de campo USBRE-19 (Rodríguez, 1996)	50
Figura 3.5	Histograma de las permeabilidades obtenidas en la laguna de Cerro Prieto (procesamiento con datos de Rodríguez, 1996)	50
Figura 3.6	Histograma de las permeabilidades medidas en arcillas pobremente compactadas de un área rectangular de prueba de 20m <sup>2</sup> (procesamiento con datos de Fenton, 1996)	51
Figura 3.7	Variable aleatoria representando la incertidumbre en la permeabilidad	53
Figura 3.8	Parámetros y funciones para describir un campo aleatorio de permeabilidad	54
Figura 3.9	Campo aleatorio de permeabilidad de tipo estimativo	55
Figura 3.10	Campo aleatorio de permeabilidad (Fenton, 1996)	56
Figura 4.1	Clasificación simplificada de las técnicas más comunes para evaluar la propagación de la incertidumbre	60
Figura 4.2	Procedimiento esquemático simplificado de los análisis de flujo de agua	61
Figura 4.3	Interpretación gráfica de la transformación <i>Jacobiana</i> para una función de una variable	62
Figura 4.4	Aproximaciones de primer y segundo orden de la función $Y=g(X)$	63
Figura 4.5	Función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria $x$	67
Figura 4.6	Principio general de la estimación bipuntual de Rosenbluth para una función de una variable aleatoria	69
Figura 4.7	Concentraciones de la función de densidad de probabilidad cuando $Y=g(X_1, X_2)$	70
Figura 4.8	Concentraciones de la función de densidad de probabilidad cuando $Y=g(X_1, X_2, X_3)$	71
Figura 4.9	Seis puntos de estimación en los procedimientos de <i>Harr y Hong</i> (Christian & Baecher, 2002)	74
Figura 4.10	Variación del número de cálculos con diferentes algoritmos de estimación puntual (Christian & Baecher, 2002)	75
Figura 4.11	Ajuste polinomial de la función $Y=g(X)$ para la aplicación del método mixto	76
Figura 4.12	Método de simulación de Monte Carlo para variables aleatorias	82
Figura 4.13	Método de simulación de Monte Carlo para campos aleatorios	82
Figura 4.14	Clasificación general de métodos de discretización de campos aleatorios	85
Figura 4.15	Ventana para visualizar los resultados obtenidos con MEFLULOG (López & Auvinet, 2004)	100
Figura 4.16	Pantalla de inicio del programa MEFLULOG (López & Auvinet, 2004)	101
Figura 4.17	Diagrama de flujo simplificado del algoritmo MEFLULOG (López & Auvinet, 2004)	101
Figura 4.18	Algoritmo SIMONC (López, 2003)	102
Figura 4.19	Diagrama de flujo simplificado del algoritmo SIMONC (López, 2003)	103
Figura 4.20	Ventana de datos solicitados para iniciar los cálculos con el algoritmo SIMONC (López, 2003)	104
Figura 4.21	Condiciones geométricas en el método de los paseos casuales	105

	<b>Página</b>	
Figura 4.22	Diagrama de flujo simplificado del algoritmo PASECA (López, 2003)	106
Figura 4.23	Algoritmo PASECA (López, 2003)	107
Figura 4.24	Código y datos solicitados por el programa PASECA (López, 2003)	107
Figura 5.1	Dominio de flujo analizado	111
Figura 5.2	Propagación directa de la incertidumbre del coeficiente de permeabilidad $k$ al gasto $Q$ en una muestra de suelo homogénea aleatoria	114
Figura 5.3	Concentración de la función de densidad de probabilidad cuando $\log_{10} Q = f(\log_{10} k_1, \log_{10} k_2)$ (cuatro puntos de estimación en el método de Rosenblueth)	119
Figura 5.4	Variación de la función $\log_{10} Q$ con respecto a $\log_{10} k_1$ y $\log_{10} k_2$ , respectivamente (para la aplicación del método mixto)	120
Figura 5.5	Proceso de cálculo del método de Monte Carlo para la secuencia de dos materiales aleatorios	122
Figura 5.6	Influencia de la incertidumbre en el coeficiente de permeabilidad sobre las estadísticas del gasto para las <i>Aproximaciones 1 y 2</i> (Caso II: Secuencia de dos materiales aleatorios)	127
Figura 5.7	Influencia de la incertidumbre en el coeficiente de permeabilidad sobre las estadísticas del gasto para las <i>Aproximaciones 1 y 2</i> (CASO III: Secuencia de tres materiales aleatorios)	128
Figura 5.8	Muestra de suelo aleatoria	131
Figura 5.9	Variación espacial y direccional de la conductividad hidráulica	131
Figura 5.10	Valores esperados en el dominio de estudio (homogéneo e isótropo)	133
Figura 5.11	Desviación estándar de la carga hidráulica en una muestra de suelo con distintos materiales, $cm$	134
Figura 5.12	Desviación estándar del gradiente hidráulico en una muestra de suelo con distintos materiales, $adimensional$	136
Figura 5.13	Desviación estándar de la velocidad de flujo en una muestra de suelo con distintos materiales, $cm/s$	138
Figura 5.14	Suelo de cimentación aleatorio bajo una tablestaca impermeable	140
Figura 5.15	Valores esperados bajo una tablestaca (suelo homogéneo e isótropo)	142
Figura 5.16	Desviación estándar bajo una tablestaca (dos materiales isótropos estratificados)	143
Figura 5.17	Desviación estándar bajo una tablestaca (tres materiales isótropos estratificados)	144
Figura 5.18	Desviación estándar bajo una tablestaca (cuatro materiales isótropos estratificados)	145
Figura 5.19	Suelo de cimentación aleatorio bajo un cimacio	146
Figura 5.20	Valores esperados debajo de un cimacio (suelo homogéneo e isótropo)	149
Figura 5.21	Desviación estándar debajo de un cimacio (dos materiales isótropos estratificados)	150
Figura 5.22	Desviación estándar debajo de un cimacio (tres materiales isótropos estratificados)	151
Figura 5.23	Desviación estándar debajo de un cimacio (cuatro materiales isótropos estratificados)	152
Figura 5.24	Desviación estándar debajo de un cimacio (dos materiales isótropos inclinados)	153

	<b>Página</b>
Figura 5.25	Desviación estándar debajo de un cimacio (dos materiales isótropos en serie) 154
Figura 5.26	Desviación estándar debajo de un cimacio (cuatro materiales isótropos en serie y en paralelo) 155
Figura 5.27	Presa de tierra aleatoria homogénea y anisótropa 156
Figura 5.28	Valores esperados en una presa de tierra (homogénea anisótropa) 157
Figura 5.29	Desviación estándar en una presa de tierra (homogénea anisótropa) 158
Figura 5.30	Cubierta permeable aleatoria de una presa de materiales graduados 159
Figura 5.31	Presa de materiales graduados 159
Figura 5.32	Valores esperados en la cubierta permeable de una presa de materiales graduados (instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo) 160
Figura 5.33	Desviación estándar en la cubierta permeable de una presa de materiales graduados (instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo) 161
Figura 5.34	Incertidumbre en un suelo aleatorio homogéneo e isótropo 162
Figura 5.35	Fotografías de la presa Agly (Soletanche Bachy, 1999) 166
Figura 5.36	Sección transversal de la presa Agly (Soletanche Bachy, 1999) 166
Figura 5.37	Sección longitudinal de la presa Agly (Soletanche Bachy, 1999) 167
Figura 5.38	Permeabilidades de los materiales constitutivos de la presa Agly (m/s) 167
Figura 5.39	Malla de elementos finitos 168
Figura 5.40	Curvas de isovalores de la carga hidráulica (m) 168
Figura 5.41	Variación de la magnitud del gradiente hidráulico (adimensional) 169
Figura 5.42	Variación de la magnitud de la velocidad de flujo (m/s) 169
Figura 5.43	Probabilidades <i>a priori</i> de la permeabilidad $k_c$ del seudo corazón de gneis 170
Figura 5.44	Probabilidades <i>a priori</i> de la permeabilidad $k_m$ del muro diafragma 170
Figura 5.45	Probabilidades <i>a priori</i> de la permeabilidad $k_p$ de la pantalla de inyecciones 170
Figura 5.46	Numeración de nodos de los elementos a lo largo de la pendiente de aguas abajo del seudo corazón de gneis 171
Figura 5.47	Numeración de nodos de los elementos alrededor de la galería de drenaje 171
Figura 5.48	Probabilidades conjuntas para la aplicación del teorema de Bayes 173
Figura 5.49	Agrupación de gastos para el análisis bayesiano 173
Figura 5.50	Probabilidades supuestas ( <i>a priori</i> ) y calculadas ( <i>a posteriori</i> ) de la permeabilidad del muro diafragma para los grupos de gastos estudiados ( $Q_1$ a $Q_6$ ) 176
Figura 5.51	Probabilidades supuestas ( <i>a priori</i> ) y calculadas ( <i>a posteriori</i> ) de la permeabilidad de la pantalla de inyecciones para los grupos de gastos estudiados ( $Q_1$ a $Q_6$ ) 177
Figura 5.52	Probabilidades supuestas ( <i>a priori</i> ) y calculadas ( <i>a posteriori</i> ) de la permeabilidad del seudo corazón de gneis para los grupos de gastos estudiados ( $Q_1$ a $Q_6$ ) 178
Figura 5.53	Dominio bidimensional de análisis 181
Figura 5.54	Función de autocorrelación de tipo exponencial 181
Figura 5.55	Puntos donde se simula el campo aleatorio 2D 182

	<b>Página</b>	
Figura 5.56	Campos aleatorios de permeabilidad 2D para distintas distancias de correlación $L_i$ (representación con mapas de contorno)	183
Figura 5.57	Campos aleatorios de permeabilidad 2D para distintas distancias de correlación $L_i$ (representación con escala de tonalidades grises)	184
Figura 5.58	Malla 2D de elementos finitos	186
Figura 5.59	$\log_{10} \mu_{armónica}$ vs. $\log_{10} k_{aparente}$ en el análisis 2D	186
Figura 5.60	$\log_{10} \mu_{aritmética}$ vs. $\log_{10} k_{aparente}$ en el análisis 2D	187
Figura 5.61	$\log_{10} \mu_{geométrica}$ vs. $\log_{10} k_{aparente}$ en el análisis 2D	187
Figura 5.62	$\log_{10} k_{aparente}$ vs. distancia de correlación $L_i$ en el análisis 2D	188
Figura 5.63	Desviación estándar de $\log_{10} k_{aparente}$ vs. distancia de correlación $L_i$ en el análisis 2D	189
Figura 5.64	Dominio tridimensional de análisis	191
Figura 5.65	Puntos donde se simula el campo aleatorio 3D	191
Figura 5.66	Campos aleatorios de permeabilidad 3D para distintas distancias de correlación $L_i$ (representación con escala de grises)	192
Figura 5.67	Secciones transversales (en perspectiva) de campos de permeabilidad 3D para distintas distancias de correlación $L_i$	193
Figura 5.68	Ejemplo de una caminata aleatoria generada con el algoritmo PASECA	194
Figura 5.69	Planos en los que se calcula la carga hidráulica con el algoritmo PASECA	195
Figura 5.70	$\log_{10} \mu_{armónica}$ vs. $\log_{10} k_{aparente}$ en el análisis 3D	196
Figura 5.71	$\log_{10} \mu_{aritmética}$ vs. $\log_{10} k_{aparente}$ en el análisis 3D	197
Figura 5.72	$\log_{10} \mu_{geométrica}$ vs. $\log_{10} k_{aparente}$ en el análisis 3D	197
Figura 5.73	$\log_{10} k_{aparente}$ vs. distancia de correlación $L_i$ en el análisis 3D	198
Figura 5.74	Desviación estándar de $\log_{10} k_{aparente}$ vs. distancia de correlación $L_i$ en el análisis 3D	199
Figura 5.75	Localización de la presa Tarbela, Pakistán (Google Earth, 2010)	202
Figura 5.76	Fotografías de la presa Tarbela (Google Earth, 2010)	202
Figura 5.77	Sección transversal de la Presa Tarbela (Lowe, 1978)	203
Figura 5.78	Características geométricas y de frontera consideradas en el análisis de percolación 2D de la presa Tarbela	203
Figura 5.79	Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para $L=0$ y $P(k_1)=0.1$ )	205
Figura 5.80	Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para $L=0$ y $P(k_1)=0.2$ )	205
Figura 5.81	Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para $L=0$ y $P(k_1)=0.4$ )	205
Figura 5.82	Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para $L=0$ y $P(k_1)=0.6$ )	205
Figura 5.83	Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para $L=0$ y $P(k_1)=0.8$ )	205
Figura 5.84	Analogía de términos empleados en la teoría de percolación con los del <i>FEM</i>	206
Figura 5.85	Gasto $Q_{total}$ vs. Probabilidad $P(k_1)$ para $L=0$ en el análisis de percolación 2D	207
Figura 5.86	Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en	208

	<b>Página</b>
Figura 5.87	208
Figura 5.88	208
Figura 5.89	208
Figura 5.90	209
Figura 5.91	209
Figura 5.92	209
Figura 5.93	209
Figura 5.94	210
Figura 5.95	210
Figura 5.96	211
Figura 5.97	211
Figura 5.98	211
Figura 5.99	213
Figura 5.100	213
Figura 5.101	214
Figura 5.102	215
Figura 5.103	215
Figura 5.104	215
Figura 5.105	216
Figura 5.106	218
Figura 5.107	219
Figura 5.108	219

	<b>Página</b>	
Figura 5.109	Plano X–Y N° 5 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con $L_x = L_z = 800\text{m}$ y $ES=10$ )	219
Figura 5.110	Plano X–Y N° 14 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con $L_x = L_z = 800\text{m}$ y $ES=10$ )	220
Figura 5.111	Plano Z–Y N° 5 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con $L_x = L_z = 800\text{m}$ y $ES=10$ )	220
Figura 5.112	Plano Z–Y N° 15 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con $L_x = L_z = 800\text{m}$ y $ES=10$ )	220
Figura 5.113	Variación del gasto $Q_{total}$ en las realizaciones efectuadas para $L_x=L_z=200\text{m}$ , $L_y = 10\text{m}$ y $ES=10$	221
Figura 5.114	Variación del gasto $Q_{total}$ en las realizaciones efectuadas para $L_x=L_z=800\text{m}$ , $L_y=10\text{m}$ y $ES=10$	222
Figura I.1	Representación esquemática de la teoría del medio efectivo	250
Figura I.2	Método aproximado para calcular la longitud de una línea de flujo	251
Figura I.3	Principio general del método de renormalización	252
Figura I.4	Ejemplo bidimensional de dos posibilidades para la agrupación sucesiva a lo largo del eje X	253
Figura II.1	Dominio de flujo bidimensional	255
Figura II.2	Frontera impermeable	258
Figura II.3	Medios heterogéneos	260
Figura II.4	Posibilidades de desplazamiento en tres dimensiones	262
Figura III.1	Elemento finito triangular	264
Figura III.2	Algoritmo FLOWNETS (López, 2001)	271
Figura III.3	Red de flujo mostrando la ortogonalidad de las líneas de flujo y equipotenciales obtenidas con el programa FLOWNETS (López, 2001)	271
Figura III.4	Red de flujo en un dominio de forma trapezoidal (con FLOWNETS; López, 2001)	272
Figura III.5	Red de flujo bajo la cimentación de una tablestaca (con FLOWNETS; López, 2001)	272

# Lista de tablas

---

	<b>Página</b>	
Tabla 2.1	Número de coordinación $z_p$ , constante conectiva $\mu_c$ y valores de umbrales de percolación de redes 2D comunes (Shante & Kirkpatrick, 1971; Sahimi, 1994)	24
Tabla 2.2	Número de coordinación $z_p$ y valores de umbrales de percolación de redes 3D comunes (Shante & Kirkpatrick, 1971; Stauffer & Aharony, 1985; Sahimi, 1994)	24
Tabla 2.3	Equivalencias entre el flujo de agua y el flujo de una corriente eléctrica	41
Tabla 3.1	Mediciones de permeabilidad ( $cm/s$ ) obtenidas en arcillas pobremente compactadas de un área rectangular de prueba de $20m^2$ (Fenton, 1996)	51
Tabla 4.1	Principales características de los métodos más comunes de evaluación de la incertidumbre	83
Tabla 5.1	Parámetros estadísticos de la permeabilidad $k$ y de su logaritmo decimal $\log_{10} k$ para el intervalo $0.01 < \sigma_k / \mu_k < 10.00$	112
Tabla 5.2	Resumen de los parámetros estadísticos del gasto $Q$ cuando $\sigma_k / \mu_k = 0.99$ (resultados para los CASOS I, II y III)	125
Tabla 5.3	Descripción y conductividades hidráulicas de los materiales de la presa Agly	167
Tabla 5.4	Combinación de permeabilidades, gastos calculados y probabilidades <i>a priori</i> y conjuntas para el análisis bayesiano de la presa Agly	172
Tabla 5.5	Agrupación de gastos para el análisis bayesiano	174
Tabla 5.6	Probabilidades condicionales $P[Q k_i]$ para la aplicación del teorema de Bayes	174
Tabla 5.7	Probabilidades <i>a posteriori</i> $P[k_i Q]$ obtenidas con el teorema de Bayes	175
Tabla 5.8	Distancias de correlación $L_i$ consideradas en la simulación de los campos aleatorios	182
Tabla 5.9	Parámetros estadísticos de $\log_{10} k_{aparente}$ para las distintas $L_i$ del análisis 2D	189
Tabla 5.10	Parámetros estadísticos de $\log_{10} k_{aparente}$ para las distintas $L_i$ del análisis 3D	199
Tabla 5.11	Resumen de $Q_{total}$ para $L=0$ en el análisis de percolación 2D	206
Tabla 5.12	Gasto total para $L_x=36m$ con $ES=10$ y $ES=20$ , respectivamente	212
Tabla 5.13	Gasto total para $L_x=400m$ con $ES=10$ y $ES=20$ , respectivamente	212
Tabla 5.14	Gasto total para $L_x=800m$ con $ES=10$ y $ES=20$ , respectivamente	212
Tabla 5.15	Resumen de $Q_{total}$ para $L=0$ en el análisis de percolación 3D	217
Tabla 5.16	Gasto total $Q_{total}$ para $L_x=L_z=200m$ y $L_x=L_z=800m$ con $ES=10$ en el análisis 3D	221
Tabla V.1	Coefficientes de la fracción polinomial para la variable $X_i$	288

# Introducción

# 1

Conocer con precisión los mecanismos de filtración y la cantidad de agua que puede circular en una región de flujo resulta fundamental para tratar de prevenir problemas que pueden afectar el buen comportamiento de las obras geotécnicas o provocar en el peor de los casos, la falla total de las estructuras. Un aspecto primordial es que la estabilidad de diversas estructuras que están sujetas a algún tipo de flujo de agua depende notoriamente de los gradientes y de las presiones hidráulicas que se desarrollan en su interior. El fenómeno de *tubificación*, por ejemplo, constituye una de las principales causas de deterioros y fallas de las cortinas de presas de tierra y enrocamiento y de sus cimentaciones.

El flujo de agua a través de suelos se enfoca en el estudio de tres tipos de problemas principales:

- *Pérdidas de agua.*- Cuando el objetivo es el almacenamiento de agua, resulta de interés conocer la cantidad de agua que se infiltra a través del suelo.
- *Altas presiones.*- Pueden provocar problemas de volteo o flotación (*subpresión*) de las estructuras apoyadas en el suelo.
- *Altos gradientes hidráulicos.*- Pueden ocasionar la falla local (erosión y *tubificación*), y en ocasiones, la falla total de las estructuras cimentadas en el suelo o que están sujetas al flujo de agua.

Existen varias razones que justifican el uso de un enfoque estocástico cuando se trata de análisis de flujo de agua a través de medios porosos, y en especial de dominios geológicos. El principal problema es asignar las conductividades hidráulicas correctas al suelo en estudio para considerarlas en los modelos de análisis. En efecto, la conductividad hidráulica es un parámetro difícil de evaluar, inclusive en los medios bastante homogéneos. Diversos factores, como la información incompleta de datos y la baja confiabilidad de las pruebas realizadas para determinar la permeabilidad, ya sea por limitaciones en tiempo y costo, por *errores sistemáticos* propios de



determinados ensayos o bien por diversos *errores aleatorios* cometidos por los operadores, hacen que sea preferible en ocasiones considerarla como una *variable aleatoria*. Adicionalmente, la mayoría de los suelos debido a su naturaleza compleja son indudablemente heterogéneos y como tales sus propiedades presentan en general *variaciones espaciales* importantes. Así, en muchas circunstancias se reconoce que asumir esta variación espacial como una realización de un *campo aleatorio*, puede ser de utilidad. En el caso de la conductividad hidráulica, como otras propiedades de los suelos, también es común el empleo de correlaciones empíricas para evaluarla. Correlaciones que constituyen una fuente significativa de incertidumbre. Y así pueden mencionarse otras fuentes adicionales de incertidumbre como las debidas a las hipótesis simplificadoras de ciertos métodos de cálculo, o la falta de certidumbre en las condiciones de frontera, entre otras.

Es indiscutible la importancia y conveniencia de la aplicación de los métodos estocásticos en los análisis de flujo de agua. Estas técnicas, basadas en la teoría de la probabilidad, proporcionan un marco matemático más racional, al permitir incorporar y cuantificar de una manera sencilla y consistente diferentes tipos de incertidumbre en los cálculos usuales de flujo de agua. Son herramientas que no sustituyen los métodos convencionales ni el juicio ingenieril, sino más bien los complementan, permitiendo con ello un mayor grado de realismo en este tipo de análisis.

### Objetivo general

El objetivo general de esta tesis doctoral es contribuir al desarrollo, calibración, respaldo y difusión de herramientas basadas en la teoría de la probabilidad que permitan al ingeniero geotecnista tomar explícitamente en cuenta las principales incertidumbres que afectan los análisis de flujo establecido de agua a través de suelos, con énfasis en la incertidumbre sobre la conductividad hidráulica.

### Antecedentes

La aplicación de métodos probabilistas que consideran la incertidumbre en la conductividad hidráulica del suelo para determinar a partir de ella la incertidumbre sobre los resultados de un análisis de flujo de agua, ha sido tema de gran interés para diversos autores desde hace ya varios decenios. Una de las primeras investigaciones en las que se relacionan los elementos de la teoría de la probabilidad y estadística con los análisis del flujo de agua se remontan al libro “*Éléments pour une Théorie des Milieux Poreux*” (1967) y la publicación “*Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène: Critique de la règle de pondération géométrique*” (1968) de Matheron; en los cuales dicho autor presenta entre otros temas, una interesante conjetura a partir promedios algebraicos para representar la permeabilidad equivalente de un medio heterogéneo. Tres decenios después (1997) Renard y de Marsily en su artículo “*Calculating equivalent permeability: a review*”, proporcionan un panorama resumido de los distintos métodos heurísticos (medias promedio, promedio de una potencia, etc.), deterministas (teoría del medio efectivo, método de la línea de corriente, etc.) y estocásticos (regla de la media geométrica, etc.) que se han propuesto para calcular permeabilidades equivalentes de medios porosos heterogéneos; mostrando que todavía existe controversia en su determinación.

Por su parte en México (1971), Auvinet presenta un marco teórico extenso y algunas aplicaciones

de las técnicas de Monte Carlo (*método de los paseos casuales* o *caminitas aleatorias*) en los análisis de flujo de agua. Años más tarde (1995) expone un enfoque variacional para resolver problemas de flujo de agua mediante el método de elementos finitos e introduce la consideración de la incertidumbre sobre la conductividad hidráulica en este tipo de análisis a través del método del elemento finito estocástico (con base en una aproximación de primer orden segundos momentos). Desde entonces a la fecha se ha intensificado dicha línea de investigación bajo la tutoría de tal autor: en 1994 por Bencheikh en la tesis “*Éléments finis stochastiques pour les écoulements permanents*” (Institut National Polytechnique de Lorraine, France); en 2000 por López en la tesis “*Flujo de agua en suelos con permeabilidad aleatoria*” (UNAM), y diversos artículos, como: “*Flujo de agua en suelos con permeabilidad aleatoria*” (López & Auvinet, 1998), “*Incertidumbre en el análisis del vaciado rápido de embalses*” (López & Auvinet, 2000), “*Aplicación del método del elemento finito estocástico al flujo de agua en suelos*” (López & Auvinet, 2002), “*Comparison between first and second order approximations in stochastic analyses of groundwater seepage in soils*” (López & Auvinet, 2002), entre otros; artículos en los que la incertidumbre sobre la permeabilidad se modela principalmente con variables aleatorias y los análisis de flujo de agua 2D se realizan con el método del elemento finito estocástico (aproximaciones de primer y segundo orden segundos momentos). Similarmente, investigadores de otros países precursores en el tema son: Gutjahr *et al.* (*Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows 2: Evaluation and Application*, 1978); Dagan (*Models of groundwater flow in statistically homogeneous porous formations*, 1979); Rubin & Gómez-Hernández (*A stochastic approach to the problem of upscaling the conductivity in disordered media: Theory and unconditional numerical simulations*, 1990), entre otros, autores cuyos trabajos de investigación se enfocan más en las propias técnicas numéricas o en el desarrollo de herramientas matemáticas que en las implicaciones prácticas de los resultados de análisis estocásticos. Adicionalmente, destacan en la actualidad autores como Fenton y Griffiths, quienes han mostrado una marcada preocupación por considerar la incertidumbre sobre la permeabilidad en los análisis de flujo de agua. Lo anterior se distingue en artículos como: “*Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil*” (Griffiths & Fenton, 1993); “*Statistics of free surface flow through stochastic earth dam*” (Fenton & Griffiths, 1996); “*Extreme hydraulic gradient statistics in stochastic earth dam*” (Fenton & Griffiths, 1997); “*Three-dimensional seepage through spatially random soil*” (Griffiths & Fenton, 1997); “*Probabilistic analysis of exit gradients due to steady seepage*” (Griffiths & Fenton, 1998), en los cuales la incertidumbre sobre la permeabilidad se modela mediante campos aleatorios y los análisis de flujo de agua se llevan a cabo principalmente con el método de elementos finitos en combinación con simulaciones de Monte Carlo.

Por otra parte, el concepto de *percolación* propuesto en 1957 por Broadbent y Hammersley, que permite una descripción estadística de medios aleatorios constituidos por un gran número de partículas que pueden relacionarse entre ellas, ha sido discutido por varios autores en artículos como: “*An introduction to percolation theory*” (Shante & Kirkpatrick, 1971); “*La percolation: le concept unificateur*” (Gilles de Gennes, 1976); en los libros: “*Percolation structures and processes*” (Deutscher, Zallen & Adler, 1983); “*Introduction to percolation theory*” (Stauffer & Aharony, 1985), “*Applications of percolation theory*” (Sahimi, 1994), “*Percolation*” (Grimmett, 1999). Sin embargo, aplicaciones de esta teoría relacionadas con la geotecnia y ciencias afines se dan hasta los años 90’s: “*Percolation theory and its application to groundwater hydrology*” (Berkowitz & Balberg, 1993); “*Analysis of groundwater seepage of tunnels in fractured rock*” (Lin *et al.*, 1999); “*La percolación en la consolidación de suelos*” (López-Lara *et al.*, 2004); “*Percolation theory for flow in porous media*” (Hunt, 2005); “*Modelo híbrido de percolación y*

*elemento finito para el análisis micromecánico de suelos*” (Pérez-Rea *et al.*, 2009). Aun cuando parece extenso el campo de aplicación de esta teoría a los medios porosos, no se tienen evidencias claras del empleo del concepto de percolación al tipo de análisis discutidos en esta investigación.

Técnicas recientes como las denominadas “*soft computing*” (o cómputo aproximado) se han utilizado sobre todo en el área de laboratorio: las *redes neuronales artificiales*, para evaluar la permeabilidad de arcillas compactadas (“*Utilizing computational neural networks for evaluating the permeability of compacted clay liners*”, Najjar & Basheer, 1996), o para determinar la permeabilidad de suelos no saturados (“*Use of neural networks for hydraulic conductivity determination in unsaturated soil*”, Gribb & Gribb, 1994); los *sistemas expertos basados en el conocimiento* para simular pruebas de permeabilidad (“*Geotechnical laboratory test simulation using AI techniques*”, Davey-Wilson, 1991). Asimismo los *sistemas de soporte de decisión avanzada interactiva* (ADSS) se han utilizado como asistentes en la toma de decisiones de problemas relacionados con el flujo de agua a través de presas (“*Dam seepage analysis using artificial intelligence*”, Sieh, King & Gientke, 1988; “*An expert system for diagnosis and treatment of dam seepage problems*”, Asgian *et al.*, 1988), y los *sistemas expertos* como ayuda en la selección del sitio de construcción de una presa (“*DSS - Dam Site Selector Expert System for Education*”, Engel & Beasley, 1991). No se tiene conocimiento de estudios concretos referidos al tipo de análisis realizados en esta investigación doctoral.

### Organización del escrito

Se aborda inicialmente el tema de la determinación de la conductividad hidráulica mediante el concepto de *permeabilidad equivalente*, discutido desde el punto de vista de promedios algebraicos. Al respecto, se describen los métodos que existen para calcularla (heurísticos, deterministas y estocásticos) y las desigualdades básicas en las que se fundamenta. En las aplicaciones referidas a este tema, se pone especial atención a la *conjetura de Matheron* (1967), que indica que la permeabilidad equivalente de un medio heterogéneo con flujo unidimensional corresponde a la media armónica del campo de permeabilidad; en un medio heterogéneo con flujo bidimensional corresponde a la media geométrica; y con flujo tridimensional, tiende a la media aritmética. A continuación, se expone la *teoría de percolación*; proporcionándose de manera breve, la terminología y conceptos formales empleados para su estudio, también se dan algunas de las expresiones para determinar la *probabilidad de percolación* y la *probabilidad crítica* o *umbral de percolación* (es decir, la probabilidad de que el fluido se propague por algún camino preferencial y que prevalezcan condiciones de flujo totalmente diferentes a las existentes en un material homogéneo). Enseguida, se discuten los principales métodos que existen para realizar análisis de flujo establecido de agua a través de suelos.

Posteriormente se estudian las principales fuentes de incertidumbre en los análisis de flujo de agua y cómo pueden modelarse. Se establece que la incertidumbre sobre la conductividad hidráulica,  $k$ , es generalmente la principal incertidumbre que afecta este tipo de análisis. Se explica que esta incertidumbre puede modelarse con *variables aleatorias* o *campos aleatorios*. Asimismo con base en evidencias prácticas, se muestra que la conductividad hidráulica puede ajustarse razonablemente a una distribución de probabilidad log-normal. De esta manera, se enfatiza que las variables o campos aleatorios deben referirse preferentemente al *logaritmo natural* o *decimal* de la permeabilidad,  $\ln k$  ó  $\log_{10} k$ . Adicionalmente, se dan de manera breve

los conceptos más importantes para el empleo de variables aleatorias y campos aleatorios. Más adelante, se discuten las principales técnicas que permiten la discretización de campos aleatorios para su utilización en métodos de cálculo, como el del elemento finito estocástico.

A continuación se examinan los principales métodos estocásticos que permiten la cuantificación de la incertidumbre en los resultados de un análisis de flujo de agua (como la carga hidráulica, el gradiente hidráulico, la velocidad de flujo, el gasto, etc.) a partir de la propagación de la incertidumbre sobre el logaritmo decimal de la permeabilidad. En primer lugar, se presenta el desarrollo matemático de técnicas de perturbación de *primer orden segundos momentos (FOSM)* y *segundo orden segundos momentos (SOSM)* acopladas con el método de elementos finitos (*SFEM*); en este sentido, se proporcionan las expresiones que permiten el cálculo de las derivadas de las funciones de interés respecto al logaritmo de la permeabilidad, empleadas en la serie de Taylor truncada en la que se basan dichas técnicas. Enseguida, se exponen los principios básicos de la *estimación puntual de Rosenblueth (PEM)*; y con las bases anteriores, se propone un nuevo *método mixto* tanto de *primer* como de *segundo orden (MFO y MSO)*, respectivamente) que simplifica el cálculo de las derivadas requeridas en técnicas como la de perturbaciones. También se proporciona la implementación del *método de simulación de Monte Carlo* para su empleo en los análisis de flujo de agua efectuados con la técnica de elementos finitos. De igual manera, se establecen las fórmulas matemáticas para la aplicación del *método de los paseos casuales (RWM)* al estudio del flujo de agua en medios heterogéneos simulados con la teoría de campos aleatorios. Finalmente, se muestra el planteamiento del *teorema de Bayes* a los análisis de flujo de agua. La automatización de los métodos anteriores se lleva a cabo con la elaboración de diversos algoritmos (MEFLULOG, SIMONC, PASECA, entre otros) que presentan características especiales, como el empleo de la técnica de la *silueta* o *skyline*, y la visualización tridimensional en pantalla de las denominadas *caminatas aleatorias*.

Los métodos y conceptos anteriores se ilustran con distintos ejemplos prácticos de complejidad variable, que muestran las ventajas y limitaciones del empleo de las técnicas probabilistas expuestas en esta investigación. Como primera aplicación se realizan evaluaciones analíticas y una serie de estudios paramétricos para cuantificar la propagación de la incertidumbre en la permeabilidad al gasto de infiltración en análisis unidimensionales de flujo establecido de agua a través de medios aleatorios homogéneos y estratificados. En esta aplicación se muestra el empleo de las técnicas estocásticas más usuales expuestas en el capítulo anterior (*FOSM, SOSM, Rosenblueth, MFO, MSO, Monte Carlo*); al final de la misma se dan comentarios de la comparación entre ellas y de los resultados obtenidos en los análisis. En una segunda aplicación, se estudian con análisis numéricos mediante el método del elemento finito estocástico (*SFEM*) las zonas o distribución de la incertidumbre en diversos problemas típicos de flujo de agua (confinado y no confinado; unidimensionales y bidimensionales). En estos análisis numéricos se evalúa la propagación de la incertidumbre en el logaritmo de la permeabilidad al potencial hidráulico, al gradiente hidráulico y a la velocidad de flujo, para distintas condiciones como: suelos homogéneos anisótropos; suelos heterogéneos con materiales isotropos (dos a seis materiales); variación de la estratigrafía respecto a la dirección del flujo; entre otras. Enseguida, en otra aplicación se utiliza el *teorema de Bayes* en el estudio del comportamiento de los materiales que constituyen una presa de tierra y enrocamiento. En este caso se expone cómo llevar a cabo un *análisis inverso* en la presa Agly (de Perpignan, Francia) con un enfoque bayesiano; la finalidad es determinar la permeabilidad *a posteriori* de algunos de los materiales de la presa cuando se conoce el gasto de infiltración a través del dominio, y tratar de establecer de esta forma cuál es la contribución de dichos materiales al sistema de control del flujo de agua

de la presa. Posteriormente, en otra de las aplicaciones se aborda el problema de la estimación de la permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en dos y tres dimensiones. En este caso se demuestra la utilidad del empleo de los campos aleatorios para describir la variación espacial del logaritmo de la permeabilidad, permitiendo a través de distintas distancias de correlación describir la heterogeneidad del medio aleatorio; asimismo se ilustra el acoplamiento de estos campos aleatorios con el método de elementos finitos en los análisis de flujo bidimensionales y con el método de los paseos casuales en los análisis tridimensionales; al final, se sugieren unos promedios algebraicos para describir dominios heterogéneos en función de la dimensión espacial de la región de flujo. Por último, se evalúa el fenómeno de percolación en la presa Tarbela (de Pakistán); poniéndose de manifiesto la conveniencia de utilizar esta teoría en el cálculo del gasto de infiltración en suelos erráticos como los aluviales en los que está cimentada dicha presa. En este caso se propone una metodología sencilla que permite “*sembrar*” o *propagar* de manera aleatoria zonas de mayor permeabilidad dentro del medio, las cuales si se unen, son las que constituyen el canal o los canales de percolación. En este caso, para cada configuración aleatoria del medio, el gasto de infiltración se determina con las técnicas de elementos finitos en los análisis bidimensionales y con paseos casuales en los análisis tridimensionales. Se discuten entre otros resultados, la *probabilidad crítica* o *umbral de percolación* en los análisis 2D y 3D efectuados.

Finalmente se presentan conclusiones y recomendaciones para la aplicación de estas técnicas en la ingeniería geotécnica práctica.

# Teorías y métodos empleados en los análisis de flujo de agua en suelos

## 2.1 Introducción

Dentro de los datos más importantes, necesarios para realizar análisis de flujo de agua a través de suelos se pueden mencionar las *condiciones de frontera* (usualmente corresponden a los valores de la *carga hidráulica*,  $h$ ) y los *parámetros del suelo* (la *conductividad hidráulica* o *permeabilidad*,  $k$ ). La carga hidráulica se determina de manera muy sencilla mediante la *ecuación de Bernoulli* a partir de los niveles del agua existentes en el problema de estudio. Estos valores se consideran condiciones de frontera que se asignan en las fronteras localizadas entre el agua y el material permeable del dominio de interés. Por su parte, la conductividad hidráulica se obtiene mediante pruebas de laboratorio o de campo (permeámetro de carga variable o carga constante, prueba Nasberg, prueba Lefranc, prueba Lugeon, etc.), o bien a partir de algún método indirecto como la prueba de consolidación, la prueba de capilaridad horizontal (Juárez & Rico, 1972), la distribución granulométrica (*p. ej.* mediante la fórmula de Hazen) o alguna otra correlación (Arya *et al.*, 1999; etc.).

En los últimos decenios los *métodos numéricos* (*elementos finitos*, *diferencias finitas*, entre otros) han sido comúnmente empleados para estudiar el flujo de agua a través de suelos. Una de las mayores inquietudes hasta hoy en día es ¿qué permeabilidades se deben introducir en tales modelos? Actualmente gracias a las computadoras los análisis de flujo de agua se pueden realizar con una precisión creciente, no obstante por cuestiones de tiempo y costo resulta imposible medir los coeficientes de permeabilidad en todos los puntos del suelo. En efecto, cuando se estudia un dominio de flujo particular solamente se cuenta con algunos de los valores puntuales de  $k$  obtenidos en las pruebas de permeabilidad realizadas ¿Es posible entonces calcular simplemente la media aritmética de los valores obtenidos en las pruebas y obtener así una permeabilidad equivalente que represente todo el dominio y además utilizar este valor en los análisis? En realidad, es incorrecto calcular estrictamente la media aritmética de las permeabilidades puntuales de un medio para tener un único valor de  $k$  que lo represente, debido a que la permeabilidad no es una variable aditiva. Como lo señaló Matheron (1967), la dimensión espacial ejerce una gran influencia en la manera como se constituyen las permeabilidades en el medio. De esta manera, como se advertirá más adelante, dependiendo de factores como la estratificación, la

anisotropía, e inclusive la dimensión espacial (una, dos o tres dimensiones), entre otros, existen métodos y por ende, fórmulas que permiten calcular permeabilidades equivalentes para representar medios porosos con características particulares.

Es indiscutible entonces que el mayor cuidado al seleccionar los datos que se van a utilizar en un análisis de flujo de agua recae principalmente sobre la conductividad hidráulica o permeabilidad del suelo. Por este motivo la primera parte de este capítulo se dedica al estudio de dicha propiedad. Posteriormente se discuten los principales métodos que existen para llevar a cabo análisis de flujo de agua a través de medios porosos.

## 2.2 Determinación de la conductividad hidráulica

### 2.2.1 Definición general

El coeficiente de permeabilidad de un suelo,  $k$ , es una constante física de proporcionalidad que surge de la conocida ley de Darcy,  $V = -k \cdot i$ , la cual establece que la velocidad de descarga  $V$  es proporcional al gradiente hidráulico  $i$  (Harr, 1962). Otra interpretación aceptada para entender el significado físico de  $k$ , es aquella en la que si se asigna al gradiente hidráulico  $i$  un valor de uno en la ley de Darcy, el coeficiente de permeabilidad  $k$  se define como una velocidad con gradiente hidráulico unitario (Marsal & Reséndiz, 1968; Flores, 1999). Puesto que  $i$  es adimensional, el coeficiente de permeabilidad  $k$  se expresa en unidades de velocidad, tales como  $m/s$ ,  $cm/s$ , etc.

El coeficiente de permeabilidad  $k$  depende de diversas propiedades del suelo, pero también del fluido como son: contenido de agua, grado de saturación, relación de vacíos, distribución del tamaño de las partículas, forma y orientación de las partículas, distribución del tamaño y conectividad de los poros, composición química y viscosidad del líquido permeante, densidad y temperatura del fluido, edad del espécimen de prueba, etc. (Harr, 1962; Juárez & Rico, 1972).

De esta manera, cuando el fluido que circula a través del medio poroso es el agua, diversos autores prefieren emplear el término *conductividad hidráulica* (o simplemente *permeabilidad*) para referirse a  $k$ ; y solamente recurrir al término *coeficiente de permeabilidad* en un sentido general cuando no se especifique el líquido permeante (Harr, 1962; Reddi, 2003).

### 2.2.2 Pruebas de campo y de laboratorio

Debido a que el intervalo de valores de  $k$  es muy amplio, la selección del método y del equipo para su determinación depende de diversas condiciones: tipo de suelo, magnitud y tipo de proyecto, etc. Algunos de los métodos más comunes para estimar la conductividad hidráulica de un suelo son:

- Permeámetro de carga constante (Juárez & Rico, 1972; Whitlow, 1994)
- Permeámetro de carga variable (Juárez & Rico, 1972; Whitlow, 1994)
- Prueba del permeámetro de pozo USBR E-19 (Auvinet & Esquivel, 1986)
- Prueba Nasberg (Auvinet & Esquivel, 1986)
- Prueba Lugeon (Flores, 1999)
- Prueba Lefranc (Auvinet & Esquivel, 1986; Flores, 1999)

- Prueba de bombeo en pozos (Whitlow, 1994)
- Celda de Rowe (Whitlow, 1994), etc.

La mayoría de estos métodos permiten obtener un valor de  $k$  único (escalar), es decir, no se enfatiza en la anisotropía que existe en gran parte de los suelos. Inclusive, buena parte de las mediciones con permeámetro que se obtienen en laboratorio consideran un flujo unidimensional dentro de las muestras (Auzerais *et al.*, 1990; Hurst & Rosvoll, 1991; Burger & Belitz, 1997). Algunas pruebas permiten evaluar dicha anisotropía al menos de manera independiente; una de ellas es la de celda de Rowe<sup>(2.1)</sup> con la cual es posible determinar conductividades hidráulicas en las direcciones horizontal y vertical, con un permeámetro distinto en cada ensayo (Whitlow, 1994). De esta manera, la permeabilidad puede representarse por un escalar, o por un tensor (de segundo orden) si el medio es anisótropo.

Para evitar la consideración de flujo unidimensional en las muestras y poder medir la anisotropía a pequeña escala, se han propuesto distintas técnicas (Rice *et al.*, 1970; Bernabé, 1992). Una de las más convincentes fue publicada en años recientes (Bieber *et al.*, 1996); esta técnica experimental emplea una inyección de traza puntual y tomografía de rayos  $X$  para observar la forma o traza de la pluma dentro de la muestra. Si la forma es una esfera, el medio es isótropo; si la forma es un elipsoide, el medio es anisótropo. En esta prueba, el tensor completo de conductividad hidráulica se determina con la solución del problema inverso. Una de las limitaciones prácticas de la misma, es que requiere precisamente de equipo sofisticado. En la actualidad, ya se han implementado otro tipo de permeámetros (más sencillos), con los que se pueden determinar tensores de permeabilidad de la forma (Renard, Genty & Stauffer, 2001):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Se trata del permeámetro prototipo que se muestra en la Figura 2.1 (Renard, Genty & Stauffer, 2001). Es una caja cúbica de plexiglás (resina sintética que tiene el aspecto de vidrio) de 20cm×20cm×20cm, que en este caso se llena con cuentas de vidrio de tres formas distintas: 1) Generando un paquete homogéneo con cuentas de 1mm de diámetro; 2) Generando estratos horizontales de 1cm de espesor, alternando cuentas de 1mm de diámetro y cuentas de menor diámetro (entre 0.4 y 0.6mm); 3) Generando una especie de estratos inclinados 18.8° respecto al plano horizontal, con cuentas de 1mm de diámetro separadas por cinco láminas de plástico (con huecos). El procedimiento de prueba implica realizar series de experimentos de flujo establecido en los que se miden los valores medios del gradiente hidráulico y de la velocidad de infiltración. El tensor de permeabilidad se calcula con un algoritmo de mínimos cuadrados. En las conclusiones del artículo, los autores señalan que efectivamente con la ayuda de este permeámetro han podido medir los términos cruzados del tensor de permeabilidad (ec. 2.1) para una anisotropía inclinada; sin embargo, indican también que el equipo y sus resultados deben ser mayormente probados.

<sup>(2.1)</sup> Fue introducida por Rowe y Barden (1966) para llevar a cabo pruebas de consolidación. Sin embargo, también se implementó su uso para realizar pruebas de permeabilidad con flujo unidimensional y flujo radial (Whitlow, 1994).





Figura 2.1 Permeámetro prototipo para determinar un tensor de permeabilidad en el laboratorio (Renard, Genty & Stauffer, 2001)

### 2.2.3 Permeabilidad equivalente

Podría considerarse que de manera formal, el concepto de *permeabilidad equivalente* surgió debido al problema del cambio de escala (o *permeabilidad efectiva*) que Matheron (1967) estudió en su libro: “*Elements pour une théorie des milieux poreux*” (Delhomme & de Marsily, 2005). Las contribuciones de Matheron encontraron aplicación principalmente en la hidrogeología y la industria del petróleo. A los hidrogeólogos les interesaba estudiar los acuíferos a gran escala, con heterogeneidades más bien a escalas grandes relacionadas con los procesos de deposición de sedimentos y condiciones de frontera complejas, no a escala de los poros o escalas locales (Delhomme & de Marsily, 2005). Así, el cambio de escala<sup>(2.2)</sup> plantea el problema de cómo calcular una conductividad hidráulica efectiva o permeabilidad equivalente a una escala mayor (sobre las bases de un modelo geológico; Renard & de Marsily, 1997) en términos de la variabilidad que ésta exhibe en una escala menor (Hunt, 2005). La Figura 2.2 muestra una interpretación esquemática de la permeabilidad equivalente.

Como se expone al principio de la sección siguiente, el concepto mismo de permeabilidad equivalente se ha usado desde hace ya varios años para describir medios con características particulares típicas; estudiados, no necesariamente desde el punto de vista de Matheron. Así, a partir de conceptos básicos de flujo de agua (como la ley de Darcy y el principio de continuidad de flujo) se han establecido fórmulas para determinar la permeabilidad equivalente principalmente de *medios homogéneos anisótropos y estratificados*. Sin embargo, como se señala más adelante, existen definiciones generales formales, así como desigualdades fundamentales y distintos métodos que permiten describir los campos de permeabilidad en medios heterogéneos

---

<sup>(2.2)</sup> En otras áreas, como en la Ingeniería Petrolera se le ha denominado “*escalamiento*” (del inglés “*upscaling*”).

mediante el concepto de permeabilidad equivalente sugerido inicialmente por Matheron y estudiado posteriormente por otros autores (Renard & de Marsily, 1997). Con estas bases, en los párrafos siguientes se exponen inicialmente los casos básicos conocidos para el cálculo de conductividades equivalentes y al final, se dan los fundamentos para la representación de campos heterogéneos en general.

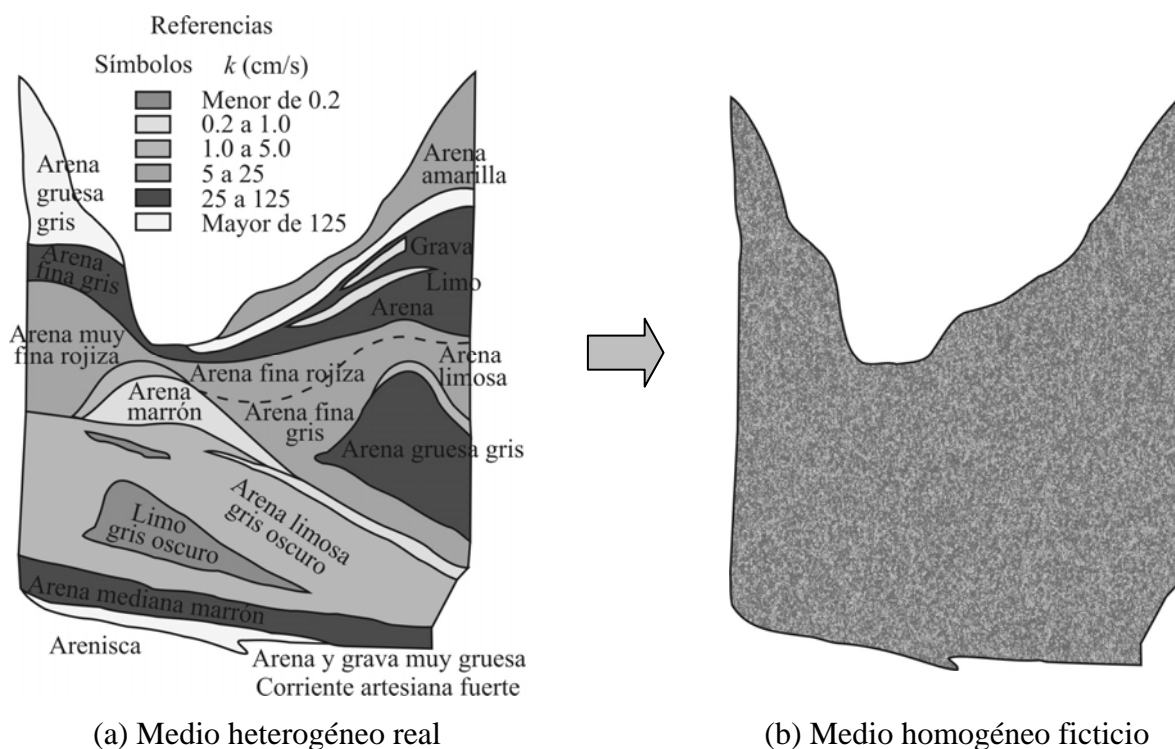


Figura 2.2 Representación esquemática de la permeabilidad equivalente

### 2.2.3.1 Suelos homogéneos isótropos

La realidad indica que generalmente ningún suelo es homogéneo e isótropo. Sin embargo, en diversos problemas prácticos se acepta por simplicidad o como condición del método empleado, que el suelo es homogéneo y que su permeabilidad  $k$  es la misma en todas las direcciones. El caso más conocido en donde dicha consideración es aceptable e incluso necesaria para la solución del problema, es cuando se realiza un análisis de flujo de agua por medio del método gráfico de la red de flujo. Ante estas situaciones, para considerar un único valor de  $k$  (suelo *homogéneo ficticio*) que represente un suelo *heterogéneo real*, se recomienda utilizar alguno de los métodos existentes para determinar una *permeabilidad equivalente* (dependiendo del medio que se trate, como se expone más adelante), y no calcular necesariamente la media aritmética como se acostumbra en diversas áreas (de las que no escapa la geotecnia) cuando se desea estimar el promedio de cierta propiedad del suelo. La media aritmética en los análisis de flujo de agua solamente es aplicable para cierto tipo de dominios.

### 2.2.3.2 Suelos homogéneos anisótropos

En un medio homogéneo anisótropo (Figura 2.3) la permeabilidad equivalente se determina con:

$$\bar{k} = \sqrt{k_x \cdot k_y} \quad (2.2)$$

La permeabilidad  $\bar{k}$  obtenida con la expresión anterior, que no es más que la media geométrica  $\mu_g$  de los valores de la permeabilidad  $k_x$  y  $k_y$  de un suelo anisótropo, se utiliza en la *teoría de la sección transformada* para convertir un suelo en el que las permeabilidades tanto horizontal como vertical son diferentes, al caso de un suelo homogéneo e isotrópico; logrando con esta reducción que la ecuación de Laplace y sus soluciones sean aplicables para describir el flujo de agua en el dominio de interés.

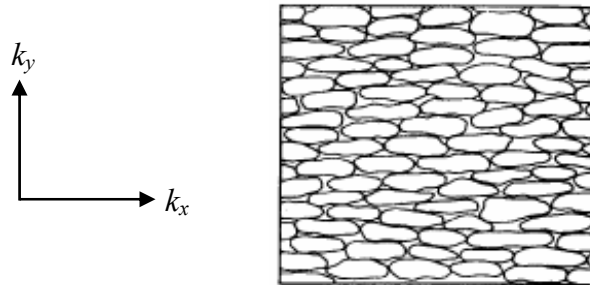


Figura 2.3 Representación idealizada de un medio homogéneo anisótropo

### 2.2.3.3 Suelos estratificados

En los suelos estratificados la permeabilidad en el sentido de la estratificación es mayor en comparación con la que se tiene en el sentido perpendicular a ésta. La diferencia puede ser de diez veces o más. En este caso las permeabilidades equivalentes máxima  $k_{m\acute{a}x}$  (en el sentido de la estratificación, Figura 2.4a) y mínima  $k_{m\acute{i}n}$  (en el sentido perpendicular a ésta, Figura 2.4b), se determinan utilizando los siguientes *promedios aritmético pesado*  $\mu_a$  y *armónico pesado*  $\mu_h$ , respectivamente:

$$k_{m\acute{a}x} = \mu_a = \frac{\sum_{i=1}^n k_i d_i}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad ; \quad k_{m\acute{i}n} = \mu_h = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{d_i}{k_i} \right)} \quad (2.3)$$

- Siendo  $n$  Número de estratos analizados.  
 $k_i$  Coeficiente de permeabilidad del estrato  $i$ .  
 $d_i$  Espesor del estrato  $i$ .

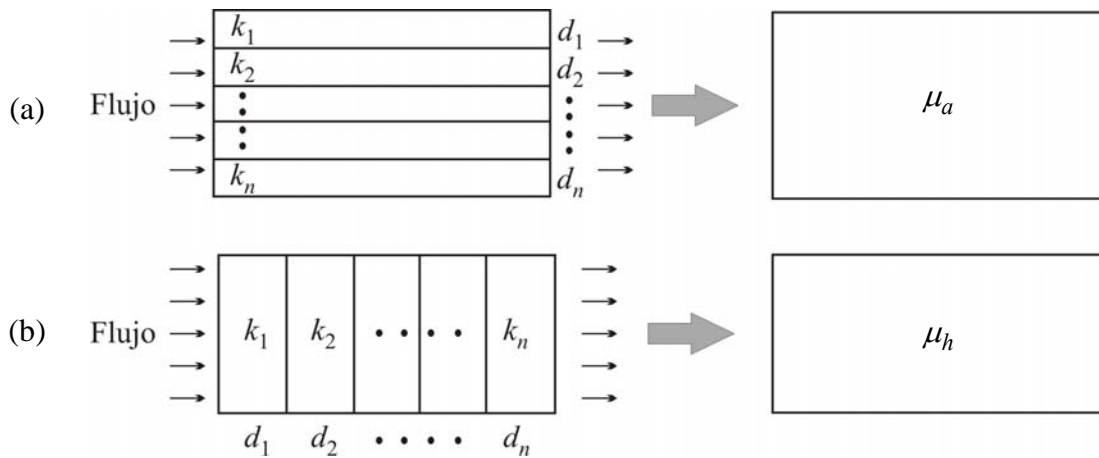


Figura 2.4 Representación para el cálculo de *promedios aritmético*  $\mu_a$  y *armónico*  $\mu_h$  pesados en un medio estratificado

Similarmente, a partir de las permeabilidades de un suelo anisótropo (o de las permeabilidades máxima y mínima obtenidas en un medio estratificado, Figura 2.5a) es posible calcular la permeabilidad equivalente en cualquier dirección  $\gamma$  del medio, como se señala en la Figura 2.5b (Marsal & Reséndiz, 1968; Flores, 1999):

$$k_\gamma = \frac{1}{\frac{\text{Cos}^2 \gamma}{k_{\text{máx}}} + \frac{\text{Sen}^2 \gamma}{k_{\text{mín}}}} \quad (2.4)$$

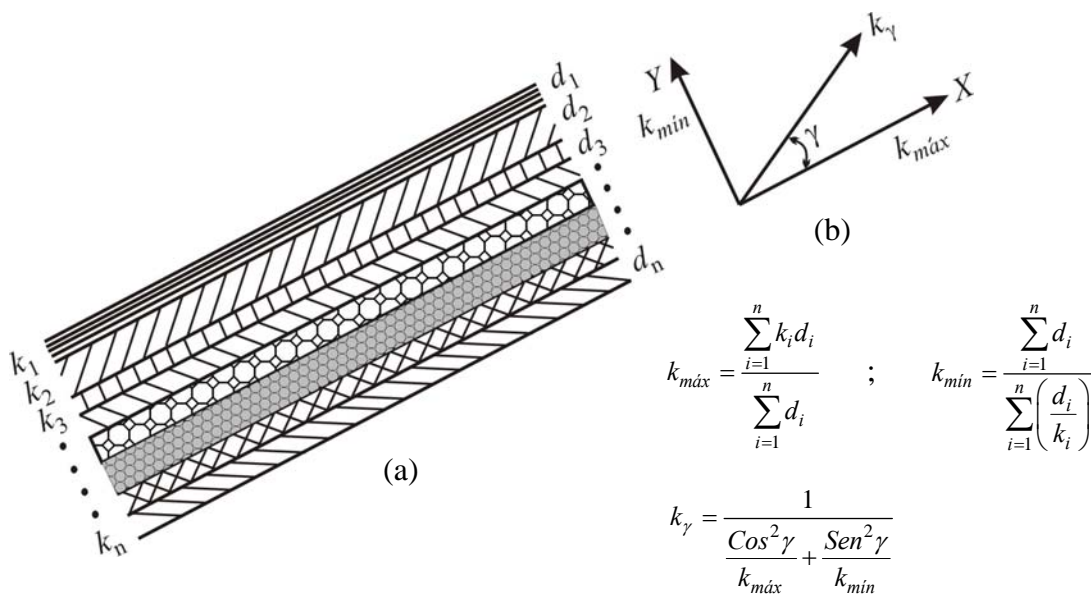


Figura 2.5 Permeabilidad equivalente en un medio estratificado y a su vez, en una dirección  $\gamma$  (Marsal & Reséndiz, 1968)

### 2.2.3.4 Suelos heterogéneos

#### (a) Conceptos generales

Generalmente hablando, por *permeabilidad equivalente* se entiende un tensor de permeabilidad constante empleado para representar un medio heterogéneo; aunque también puede estar dada por un simple escalar (Renard & de Marsily, 1997). Una equivalencia completa entre el medio heterogéneo real y el medio homogéneo ficticio es imposible. Se le define por consiguiente en un sentido limitado, según cierto criterio que debe ser igual para ambos medios. Los criterios utilizados para esta equivalencia son:

- De *igualdad de flujo* (Cardwell & Parsons, 1945; Warren & Price, 1961). En este caso, el flujo en las fronteras del dominio debe ser igual en el medio heterogéneo y en el medio homogéneo equivalente, y estar sujeto a la misma carga hidráulica (es el criterio más usado).
- De *igualdad de energía disipada* por las fuerzas viscosas en el medio heterogéneo y en el medio equivalente homogéneo (Matheron, 1967; Indelman & Dagan, 1993).

La permeabilidad equivalente puede ser: *efectiva* o *de bloque* (Figura 2.6). La *permeabilidad efectiva*,  $k_{ef}$ , es un término usado para un medio que es estadísticamente homogéneo a gran escala (también llamado por Matheron: *permeabilidad macroscópica*). En un contexto estocástico se define por la siguiente expresión (Matheron, 1967):

$$E\{V\} = -k_{ef} \cdot E\{i\} \quad (2.5)$$

donde  $E\{V\}$  representa la esperanza matemática de la velocidad de flujo en el dominio de estudio y  $E\{i\}$  es la esperanza matemática del gradiente hidráulico. La permeabilidad efectiva es una magnitud física intrínseca, independiente de las condiciones de frontera macroscópicas. El tensor de permeabilidad efectiva tiene la característica de ser un tensor de segundo orden, simétrico y positivo-definido<sup>(2.3)</sup>. Por su parte la *permeabilidad de bloque*<sup>(2.4)</sup>,  $k_b$ , es la permeabilidad equivalente de un bloque de tamaño finito. El concepto de homogeneidad estadística desaparece puesto que el bloque observado es demasiado pequeño. Contrariamente a la permeabilidad efectiva, la permeabilidad de bloque no es una característica intrínseca del medio, ésta si depende de las condiciones de frontera. Es importante remarcar que si el dominio en estudio es demasiado grande, la permeabilidad de bloque tiende hacia la permeabilidad efectiva, si ésta existe:

$$\lim_{\text{bloque} \rightarrow \infty} k_b = k_{ef} \quad (2.6)$$

Con base en lo anterior y de forma muy general, se puede decir que un medio heterogéneo puede describirse mediante un solo valor: la *permeabilidad efectiva*; o bien, por un grupo de valores: la *permeabilidad de bloque* (Renard & de Marsily, 1997), como se ilustra en la Figura 2.6.

---

<sup>(2.3)</sup> Un tensor simétrico es positivo-definido si y sólo si sus valores característicos son todos estrictamente positivos (Anton, 1999).

<sup>(2.4)</sup> También denominada “*permeabilidad fuera de escala*” (del inglés “*upscaled permeability*”; Renard & de Marsily, 1997).

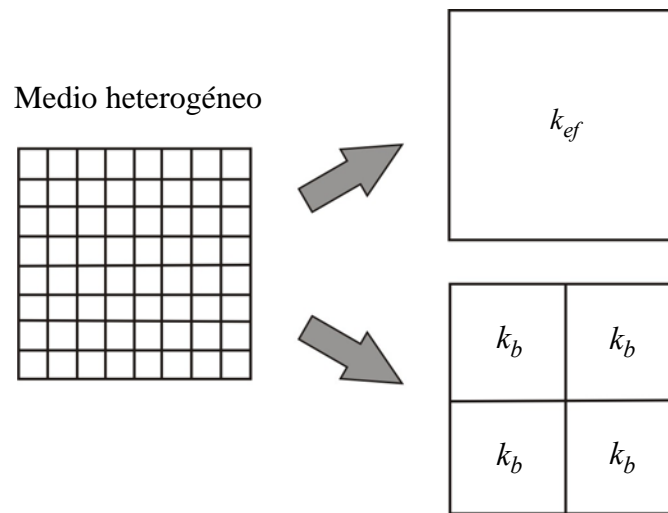


Figura 2.6 Representación esquemática de las permeabilidades efectiva  $k_{ef}$  y de bloque  $k_b$

### (b) Métodos de cálculo

Los métodos para calcular la permeabilidad equivalente de un medio poroso heterogéneo se han clasificado en tres grupos (Renard & de Marsily, 1997), Figura 2.7:

- Heurísticos.- Proponen reglas para calcular permeabilidades equivalentes creíbles.
- Deterministas.- Consideran que las condiciones hidráulicas del medio son perfectamente conocidas.
- Estocásticos.- Aceptan un conocimiento aproximado de las condiciones hidráulicas del medio y asumen una perspectiva probabilista.

Es evidente que, los *métodos estocásticos* son los únicos capaces de cuantificar la incertidumbre ligada al conocimiento parcial de la distribución exacta del coeficiente de permeabilidad de un suelo. Los desarrollos analíticos realizados en un contexto estocástico se basan en consideraciones muy particulares, como la distribución log-normal de la permeabilidad. El *método de Monte Carlo* destaca como la aproximación más directa para evaluar la incertidumbre. Esta técnica establece un vínculo con los *métodos deterministas*: el principio del método de Monte Carlo es generar simulaciones igualmente probables del modelo geológico y usar técnicas deterministas para evaluar el efecto en el flujo de las diferencias en la permeabilidad entre las simulaciones del medio. En cuanto a los *métodos heurísticos*, éstos representan una alternativa de los métodos deterministas, además tienen la ventaja de ser sumamente simples, rápidos y no limitados por el espacio de memoria requerido; sin embargo, necesitan ser demostrados.

Los principales métodos heurísticos, deterministas y estocásticos que existen para determinar la permeabilidad equivalente de medios heterogéneos se proporcionan de manera resumida en la Figura 2.7. La mayoría de ellos se describen con detalle en el ANEXO I. Se aclara simplemente que las técnicas de cálculo de los métodos anteriores pueden ser: analíticas o numéricas, exactas o aproximadas. Las soluciones analíticas se refieren a simples promedios algebraicos. Los métodos numéricos requieren la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

Asimismo los métodos anteriores se fundamentan en las desigualdades básicas que se indican a continuación (Renard & de Marsily, 1997).

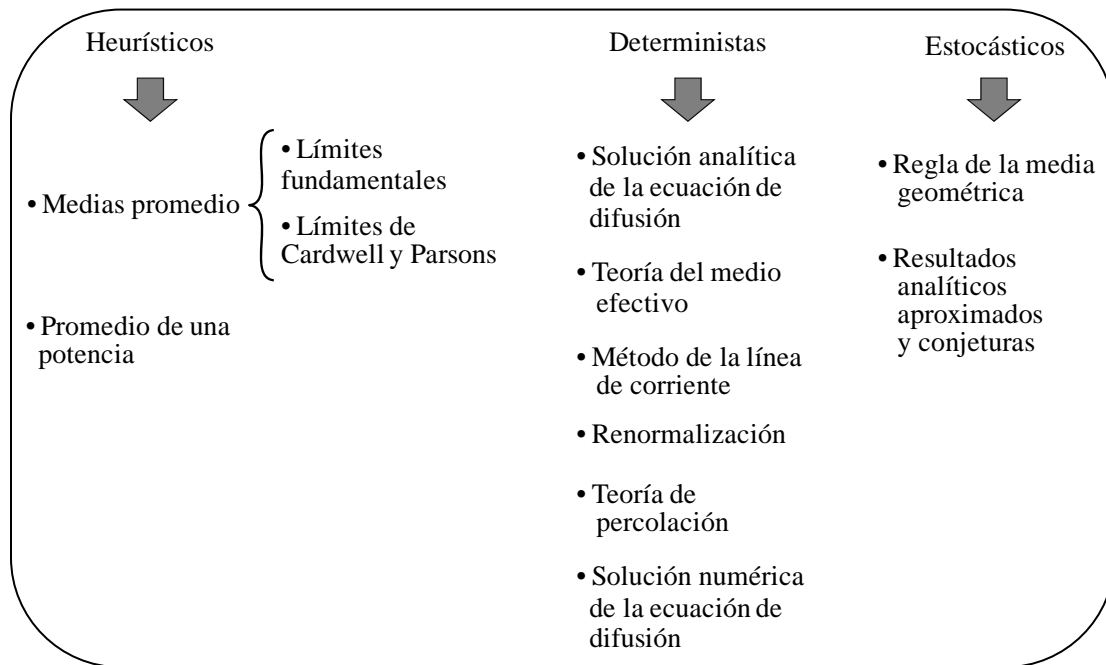


Figura 2.7 Clasificación simplificada de métodos para estimar la permeabilidad equivalente

(c) Desigualdades para la permeabilidad equivalente

(c.1) Límites de Wiener

Esta desigualdad también se conoce como *desigualdad fundamental*, porque siempre es válida. Ha sido demostrada por varios autores (Wiener, 1912; Cardwell & Parsons, 1945; Matheron, 1967; Dagan, 1989, entre otros):

$$\mu_h \leq k_{ef} \leq \mu_a \tag{2.7}$$

donde  $\mu_h$  Media armónica.  
 $\mu_a$  Media aritmética.  
 $k_{ef}$  Permeabilidad efectiva.

Matheron (1967) opinaba que la media geométrica,  $\mu_g$ , siempre estaba comprendida entre las medias armónica y aritmética de la expresión (2.7) anterior, las cuales constituyen los dos valores o “polos” extremos en el caso de medios estratificados:

$$\mu_h \leq \mu_g \leq \mu_a \tag{2.8}$$

Con estas bases, enunció una proposición general que dice: “En todos los casos, sea el medio

*estratificado o no, la permeabilidad macroscópica (o efectiva)  $k_{ef}$  está siempre comprendida entre las medias armónica y aritmética*". Sin embargo, esto no proporciona un valor numérico preciso de la permeabilidad; no indica si ésta debe estar más próxima a cuál de los dos límites extremos. A este respecto, Matheron (1967) también pensaba que la dimensión espacial,  $D_s$ , debía ejercer una gran influencia en la manera en cómo se constituyen las permeabilidades puntuales en el medio. Así, este autor proporcionó la siguiente conjetura como expresiones generales para el valor promedio de la permeabilidad en medios heterogéneos (isótropos) en una, dos y tres dimensiones:

- En  $D_s = 1$  (unidimensional),  $k_{ef}$  es la media armónica,  $\mu_h$ .
- En  $D_s = 2$  (bidimensional),  $k_{ef}$  es la media geométrica,  $\mu_g$  (con distribución log-normal).
- En  $D_s = 3$  (tridimensional),  $k_{ef}$  se sitúa aproximadamente a dos tercios del intervalo entre las medias armónica y aritmética de la expresión (2.7). En general, si fuera permitido considerar espacios cuyo número de dimensiones aumentara indefinidamente, este valor promedio tendería asintóticamente a la media aritmética,  $\mu_a$ . Más tarde, Matheron (1993) también sugirió que en el caso 3D,  $k_{ef}$  podía estar representada por un promedio de potencia con exponente 1/3.

La influencia de la dimensión espacial en la permeabilidad equivalente de medios heterogéneos simulados se estudia con mayor detalle en el inciso 5.4 del Capítulo 5.

### (c.2) Límites de Hashin y Shtrikman

Esta desigualdad se aplica a medios isótropos binarios, y se define como (Hashin & Shtrikman, 1963):

$$\mu_a - \frac{f_1 f_0 (k_1 - k_0)^2}{(d_i - f_0)k_0 + f_0 k_1} \leq k_{ef} \leq \mu_a - \frac{f_1 f_0 (k_1 - k_0)^2}{(d_i - f_1)k_1 + f_1 k_0} \quad (2.9)$$

donde  $f_0 = V_0 / V_{tot}$  y  $f_1 = V_1 / V_{tot}$  son las fracciones de las fases de permeabilidad  $k_0$  y  $k_1$ , siendo  $k_1$  mayor que  $k_0$ ;  $d_i$  es la dimensión del espacio, y  $\mu_a = f_0 k_0 + f_1 k_1$  es la media aritmética en este caso.

Si se trabaja en términos de fracciones volumétricas, esta desigualdad es la mejor opción posible (Renard & De Marsily, 1997; Hashin, 1983).

### (c.3) Límites de Cardwell y Parsons

Cardwell y Parsons (1945) utilizaron la analogía eléctrica, y Le Loc'h (1987) empleó un método variacional para demostrar que la permeabilidad equivalente  $k_{eq}$  en una determinada dirección del flujo, está dada por (Figura 2.8):



- La media aritmética de las medias armónicas de las permeabilidades puntuales, calculadas en cada línea de celdas paralelas a la dirección del flujo (límite superior o máximo).
- La media armónica de las medias aritméticas de las permeabilidades puntuales calculadas en cada “*rebanada*” de celdas perpendiculares a la dirección del flujo (límite inferior o mínimo).

Es decir:

$$k_1 = \mu_h^x \left( \mu_a^z \left( \mu_a^y \right) \right) \leq k_{eq}^{xx} \leq k_2 = \mu_a^z \left( \mu_y \left( \mu_h^x \right) \right) \quad (2.10)$$

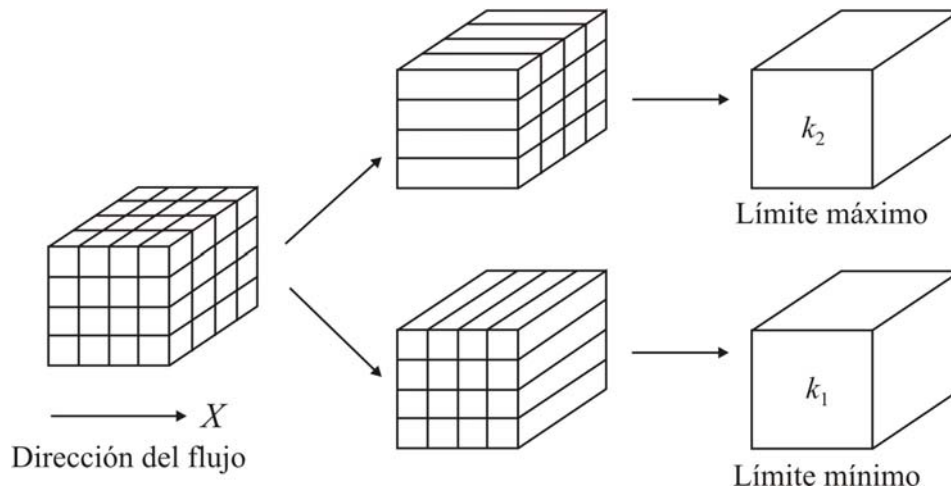


Figura 2.8 Esquema para el cálculo de los límites de *Cardwell* y *Parsons*

Los *límites de Cardwell y Parsons* constituyen los fundamentos de uno de los métodos más utilizado actualmente para determinar la permeabilidad equivalente de medios heterogéneos: el *método de renormalización* (ver descripción en ANEXO I). Los resultados derivados de este método son similares a los obtenidos con técnicas numéricas, como las diferencias finitas (Renard & De Marsily, 1997). Una limitante es que se pueden obtener errores sistemáticos altos, por ejemplo, cuando existe una gran anisotropía en el medio (Zhang, 2002).

#### (c.4) *Límites de Matheron*

En el caso de un medio isótropo bidimensional aleatorio con dos fases, Matheron (1968) propone calcular la permeabilidad efectiva como:

$$\begin{aligned} f_0 \geq 0.5 &\Rightarrow k_{ef} \geq k_{ac} \\ f_0 \leq 0.5 &\Rightarrow k_{ef} \leq k_{ac} \\ f_1 = 0.5 &\Rightarrow k_{ef} = \sqrt{k_0 k_1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde:

$$k_{ac} = \frac{1}{2} \left[ (f_1 - f_0)(k_1 - k_0) + \sqrt{(f_1 - f_0)^2 (k_1 - k_0)^2 + 4k_0k_1} \right] \quad (2.12)$$

Además  $f_0 = V_0 / V_{tot}$  y  $f_1 = V_1 / V_{tot}$  son las fracciones de las fases de permeabilidad  $k_0$  y  $k_1$ .

## 2.2.4 Teoría de percolación

### 2.2.4.1 Definiciones generales: permeabilidad, percolación y difusión

La *permeabilidad* es la capacidad de un medio poroso para que el agua u otro fluido lo atraviese sin alterar su estructura interna. La *percolación* es la propagación de un fluido dentro de un medio aleatorio o desordenado dependiendo de las conexiones que existan entre sus partículas. En un *proceso de difusión* la circulación de las partículas se realiza al azar (p. ej. el movimiento de una molécula dentro de un gas) con el medio jugando un papel completamente pasivo. En cambio, en un *proceso de percolación* el movimiento del fluido está gobernado por el medio (Shante & Kirkpatrick, 1971).

Formalmente hablando, el *concepto de percolación* propuesto en 1957 por Broadbent y Hammersley, permite una descripción estadística de aquellos sistemas complejos constituidos por un gran número de partículas u objetos que pueden relacionarse entre ellos en un medio aleatorio. Dentro de tales sistemas, puede ser posible la comunicación a grandes distancias dependiendo del número de partículas u objetos y de los enlaces o conexiones que existan entre ellas (Gilles de Gennes, 1976).

Generalmente hablando, la teoría de percolación es una teoría que se aplica a múltiples disciplinas, que estudia medios desordenados, en los cuales los componentes o propiedades están distribuidos aleatoriamente en una red, permitiendo estudiar fenómenos críticos. Los fenómenos críticos se presentan en medios que se caracterizan por la existencia de un punto crítico en el cual ciertas propiedades del medio cambian. A este punto crítico se le conoce como *umbral de percolación*, el cual aparece en una gran variedad de problemas de ingeniería, entre ellos los de flujo de agua a través de medios porosos (Broadbent & Hammersley, 1957; Guyon *et al.*, 1984; Berkowitz & Balberg, 1993).

El fenómeno de percolación es un factor importante que no debe ignorarse en los análisis de flujo de agua a través de suelos, sobre todo cuando existen zonas con distintas permeabilidades dentro del medio (detalles geológicos menores, suelos aluviales, entre otros). El peligro consiste en que si estas zonas se interconectan por medio de vínculos *desconocidos* pueden constituir un canal a través del cual el agua puede circular con grandes gastos. Una representación idealizada de esta condición de percolación en un medio poroso aleatorio se muestra en la Figura 2.9. En la misma se observa que si no se evalúa cuidadosamente la condición de percolación, la estimación del gasto por infiltración puede resultar totalmente equivocada. Es evidente entonces que, si el campo de permeabilidades es aleatorio, debido al desconocimiento que se tiene de su estructura, es de gran interés estudiar las *trayectorias de percolación*, es decir, que el flujo pueda presentarse por algún camino preferencial y que prevalezcan condiciones de flujo totalmente diferentes a las

existentes en un material homogéneo.

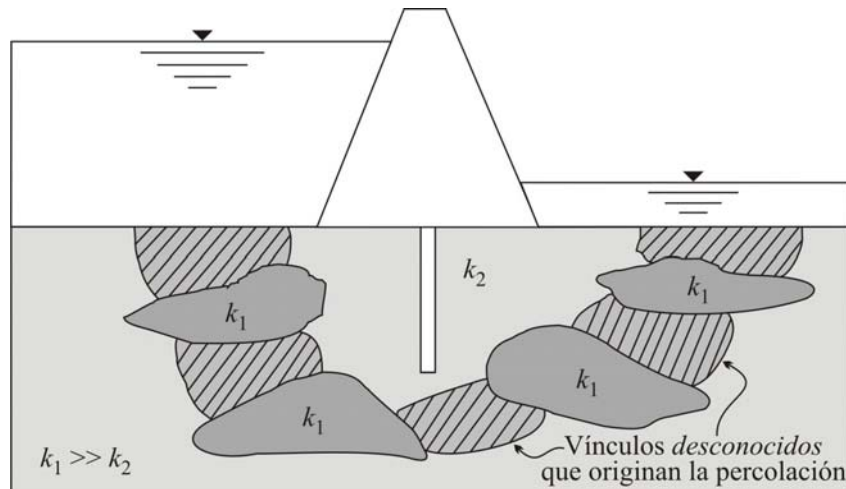


Figura 2.9 Representación idealizada de la condición de percolación en un medio poroso aleatorio

#### 2.2.4.2 Terminología aplicada a la percolación

Existe toda una terminología general formal aplicable a los problemas de percolación en medios aleatorios, de acuerdo con lo que se explica a continuación.

El medio<sup>(2.5)</sup> se describe como un grupo infinito de partículas abstractas denominadas *sitios* o *átomos*. Un fluido<sup>(2.5)</sup> circula de los sitios fuente a lo largo de *camino*s que conectan varios sitios (Shante & Kirkpatrick, 1971). Los caminos se denominan convencionalmente *vínculos* o *enlaces*.

Así, para definir un *proceso de percolación* se debe atribuir algún mecanismo aleatorio al medio. La *teoría de percolación clásica* se centra alrededor de dos tipos de problemas (Shante & Kirkpatrick, 1971; Stauffer & Aharony, 1985; Sahimi, 1994; Hunt, 2005):

- Problema de *percolación de vínculos* (o *enlaces*).- Considera los bordes de la red como las entidades aleatorias relevantes (Figura 2.10a). Un ejemplo puede ser la circulación de un líquido en un medio poroso.
- Problema de *percolación de sitios* (o *átomos*).- Considera los vértices de la red como las entidades aleatorias principales (Figura 2.10b). Un ejemplo puede ser la dispersión de cristales ferromagnéticos.

<sup>(2.5)</sup> Los términos “*fluido*” y “*medio*” fueron considerados desde un punto de vista totalmente general: un *fluido* puede ser un líquido, vapor, flujo de calor, corriente eléctrica, una infección, un sistema solar, etc.; el *medio* (donde el fluido circula) puede ser el espacio de poro de las rocas o del suelo mismo, una colección de árboles, el universo, etc. (Sahimi, 1994).

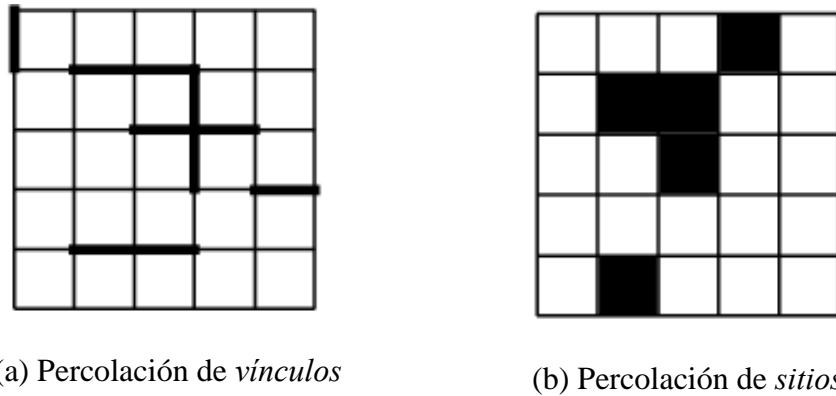


Figura 2.10 Tipos de problemas de percolación (Weisstein, 2010)

En el *problema de percolación de vínculos* (Sahimi, 1994), los vínculos de la red pueden estar “*ocupados*” aleatoria e independientemente de los otros con una probabilidad  $p$ , o estar “*vacantes*” con una probabilidad  $1-p$ . Por su parte, dos *sitios* se dicen “*conectados*”, si existe al menos un camino entre ellos constituido únicamente por vínculos “*ocupados*”. Un grupo de sitios “*conectados*” delimitados por vínculos “*vacantes*” se denomina un “*cluster*” o *racimo*. Si la red o malla es de extensión muy grande y si  $p$  es suficientemente pequeño, el tamaño de cualquier “*racimo*” conectado es pequeño. Pero si  $p$  es cercano a 1, la red debería estar completamente conectada, además de tener unos cuantos vacíos. Para algunos valores de  $p$  bien definidos, existe una transición en la estructura topológica<sup>(2.6)</sup> de la red aleatoria que va de una estructura desconectada macroscópicamente a una conectada. Este valor es el que se conoce como “*umbral de percolación de vínculo*”,  $p_{cb}$ . Ésta es la fracción más grande de vínculos ocupados debajo de la cual no existe un *racimo* (camino de expansión o percolación) de vínculos ocupados. En otras palabras, es el umbral en el que los canales de percolación se generan repentinamente; o bien, la concentración a la que existe la máxima probabilidad de que aparezca un *racimo* infinito o percolante de un componente o propiedad del medio.

Similarmente, en el *problema de percolación de sitios* (Sahimi, 1994), los sitios de la red están “*ocupados*” con una probabilidad  $p$  y “*vacantes*” con probabilidad  $1-p$ . Los dos sitios vecinos más cercanos se dicen “*conectados*” si ambos están “*ocupados*”. Los *racimos* conectados de la red se definen de manera similar. Asimismo, existe un “*umbral de percolación de sitio*”  $p_{cs}$  arriba del cual un *racimo* infinito (canal de percolación) de sitios ocupados se expande en la red. Ver definiciones ilustrativas en la Figura 2.11.

De manera general, se puede decir que el umbral de percolación es la probabilidad crítica ( $p_c$ ) o punto crítico en el que la propiedad o componente de interés del medio (de *vínculo* o de *sitio*) cambia súbitamente.

<sup>(2.6)</sup> Topología: Rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella, como las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma.

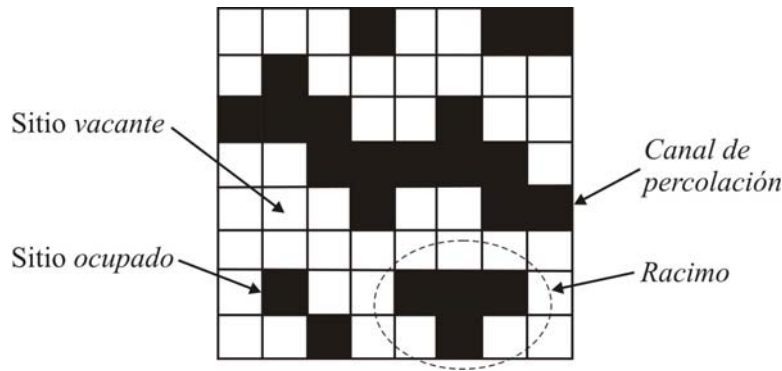


Figura 2.11 Algunas definiciones importantes en un problema de percolación de *sitios*

Bajo condiciones bastante generales, un medio posee una propiedad topológica llamada *constante conectiva*  $\mu_c$ , definida como (Shante & Kirkpatrick, 1971):

$$\ln \mu_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln c_n \quad (2.13)$$

Donde  $c_n$  es el número de vínculos “evadidos” de  $n$  pasos que salen de cualquier sitio del medio. Un vínculo se dice *evitado* o *evadido* si no llega a los *sitios* más de una vez.

La *constante conectiva*  $\mu_c$ , también conocida como *vínculo límite*, es una medida de la conectividad de la red, es decir, de la abundancia de vínculos interconectados en el medio (Shante & Kirkpatrick, 1971). En algunos casos de redes 2D comunes, se ha observado que esta constante se incrementa con el *número de coordinación de la red*,  $z_p$ , el cual se define por ejemplo, como el número de *vínculos* que parten de cada *sitio* (Shante & Kirkpatrick, 1971), o el número de *vínculos* conectados al mismo *sitio* (Sahimi, 1994).

En la actualidad, la estimación de valores exactos de los umbrales de percolación  $p_{cb}$  y  $p_{cs}$  solamente ha sido posible para ciertas redes relacionadas con la red de *Bethe* y para algunas redes bidimensionales comunes (ver Figuras 2.12a–e). En el caso de redes tridimensionales (Figura 2.13), los umbrales de percolación se han calculado numéricamente con simulaciones de Monte Carlo y otras técnicas, como métodos de series (Sahimi, 1994). La expresión rigurosa más simple de la *probabilidad crítica*,  $p_c$ , es (Shante & Kirkpatrick, 1971):

$$p_c \geq \frac{1}{\mu_c} \quad (2.14)$$

aplicable tanto a problemas de percolación de *vínculos* como de *sitios*; donde  $\mu_c$  es la *constante conectiva*.

En el *problema de percolación de sitios* se observa que  $\mu_c \leq z_p - 1$  (donde  $z_p$  es el número de coordinación de la red) conduce a un límite moderadamente bajo de la probabilidad crítica (Shante & Kirkpatrick, 1971):

$$p_{cs} \geq \frac{1}{\mu_c} \geq \frac{1}{z_p - 1} \quad (2.15)$$

Diversas desigualdades rigurosas han sido propuestas para determinar  $p_c$  en redes específicas a partir de redes asociadas. Esto es, se considera que existe un isomorfismo entre el problema de percolación de vínculo y de sitio; de esta manera, es posible utilizar una cubierta de red equivalente y definir de manera análoga la probabilidad crítica en el *problema de percolación de vínculos* (Shante & Kirkpatrick, 1971):

$$p_{cb} \geq \frac{1}{z^c - 1} \quad (2.16)$$

donde  $z^c$  es el número de coordinación de la cubierta de red equivalente.

En el caso particular, de la red de *Bethe* se observa que (Fisher & Essam, 1961):

$$p_{cb} = p_{cs} = \frac{1}{z_p - 1} \quad (2.17)$$

En las Figuras 2.12a-e se presentan algunas redes bidimensionales comunes. La Figura 2.13 muestra una red cúbica simple. Por su parte, las Tablas 2.1 y 2.2 resumen los valores de umbrales de percolación y números de coordinación de varias redes 2D y 3D usuales. De las mismas, se puede observar que en general  $p_{cb} \leq p_{cs}$ .

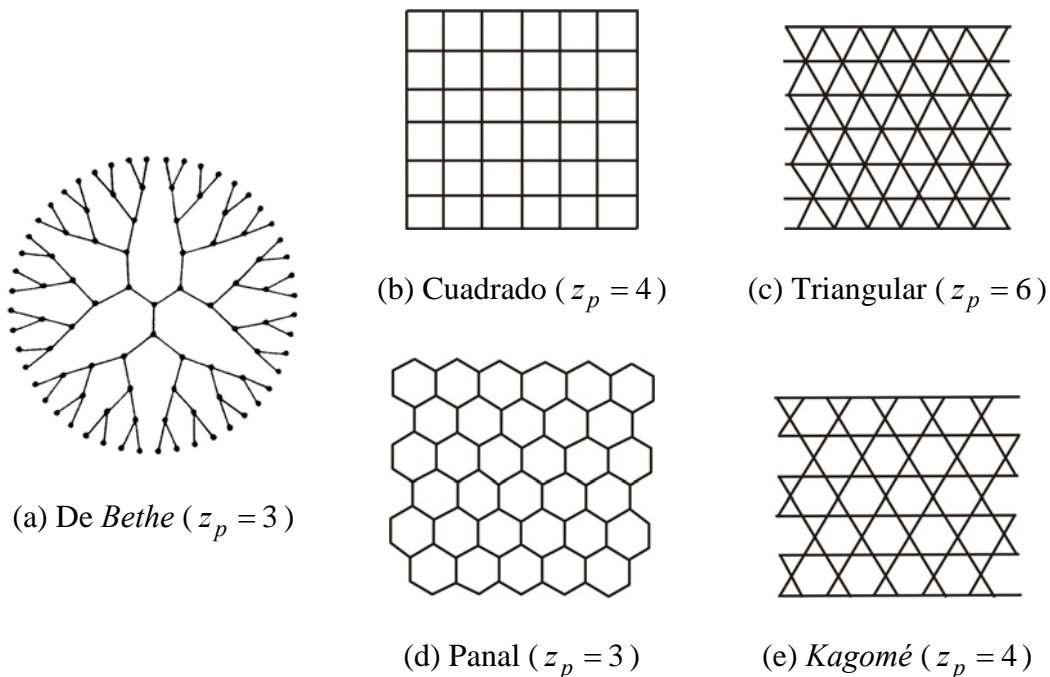


Figura 2.12 Redes bidimensionales usuales (Shante & Kirkpatrick, 1971; Sahimi, 1994)

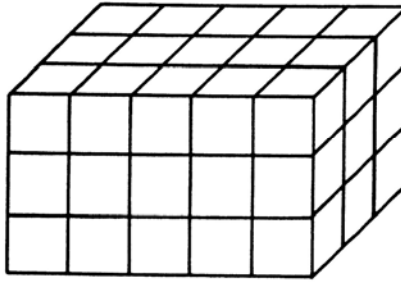


Figura 2.13 Red cúbica simple ( $z_p = 6$ ; Stauffer & Aharony, 1985)

Tabla 2.1 Número de coordinación  $z_p$ , constante conectiva  $\mu_c$  y valores de umbrales de percolación de redes 2D comunes (Shante & Kirkpatrick, 1971; Sahimi, 1994)

Red	$z_p$	$\mu_c$	Monte Carlo		Método de series			
			$P_{cb}$	$P_{cs}$	$P_{cb}$	$P_{cs}$		
Panal	3	1.8484	0.640	---	0.688 - 0.679	$1 - 2sen(\pi / 18) \cong 0.6527^{(*)}$	0.700	
Kagomé	4	---	---	0.435	---	0.655	---	$0.6527^{(*)}$
Cuadrado	4	2.6390	0.493 - 0.498	---	0.581 - 0.569	$0.5000^{(*)}$	---	0.590
Triangular	6	4.1515	0.341 - 0.349	---	0.493 - 0.486	$2sen(\pi / 18) \cong 0.3473^{(*)}$	---	$0.5000^{(*)}$

<sup>(\*)</sup> Resultado exacto.

Tabla 2.2 Número de coordinación  $z_p$  y valores de umbrales de percolación de redes 3D comunes (Shante & Kirkpatrick, 1971; Stauffer & Aharony, 1985; Sahimi, 1994)

Red	$z_p$	$P_{cb}$	$P_{cs}$
Diamante	4	0.3886	0.4299
Cúbica simple	6	0.2488	0.3116
BCC ( <i>Body Centered Cubic</i> )	8	0.1795 - 0.1803	0.2464
FCC ( <i>Face Centered Cubic</i> )	12	0.119	0.195 - 0.198

En adición al umbral de percolación, las propiedades topológicas de redes de percolación se caracterizan por diversas cantidades importantes (Sahimi, 1994):

- *Probabilidad de percolación*  $P(p)$ .- Es la probabilidad de que cuando la fracción de vínculos ocupados es  $p$ , un sitio dado pertenezca al *racimo* infinito (canal de percolación) de vínculos ocupados.
- *Fracción accesible*  $X^A(p)$ .- Es la fracción de vínculos ocupados pertenecientes al *racimo* infinito.

- *Fracción de soporte*  $X^B(p)$ .- Es la fracción de vínculos ocupados en el *racimo* infinito los cuales en realidad llevan el flujo o la corriente (existen algunos vínculos en el *racimo* que no tienen salida y no llevan ningún flujo). El soporte de un sistema de percolación tiene un papel primordial en sus propiedades de transporte, debido a que la tortuosidad de las trayectorias de transporte está controlada por la estructura del soporte.
- *Distancia de correlación*  $\xi_p(p)$ .- Es el radio típico de los *racimos* conectados para  $p < p_c$ , y la escala de longitud en la que la red aleatoria es macroscópicamente homogénea (es decir, la escala de longitud en la que las propiedades del sistema son independientes de su tamaño lineal  $L$ ) para  $p > p_c$ . Es decir que, en cualquier simulación de Monte Carlo de la percolación se debe tener  $L \gg \xi_p$  para que los resultados sean independientes de  $L$ .
- *Conductividad eléctrica efectiva*  $g_e$ .- Es la conductividad eléctrica de una red de resistencia aleatoria en la cual una fracción  $p$  de vínculos son conductores y el resto son aislantes. Análogamente, si la red representa un medio poroso en el que una fracción  $p$  de los poros está abierta al flujo o difusión, una difusividad efectiva  $D_e$  y una permeabilidad hidrodinámica  $k$  también pueden definirse.

Cabe remarcar que cerca del umbral de percolación de sitio o de vínculo,  $p_c$ , se ha observado que la mayoría de las cantidades de percolación anteriores ( $P(p)$ ;  $X^A(p)$ ; etc.) obedecen a leyes de escalamiento que son independientes de la estructura de la red y de los detalles microscópicos del sistema. Los exponentes topológicos de estas leyes dependen únicamente de la dimensión del sistema. El detalle de las leyes de escalamiento queda fuera del alcance de la presente investigación. Mayor información se puede consultar *p. ej.* en *Sahimi (1994)*.

Al igual que en el caso de la probabilidad crítica  $p_c$ , casi toda la información cuantitativa disponible acerca de la probabilidad de percolación  $P(p)$  para redes específicas proviene de cálculos con el *método de Monte Carlo*. Existen sin embargo, algunos resultados exactos, como el propuesto por Hammersley (1961) para un medio determinado:

$$P_s(p) \leq P_b(p) \quad (2.18)$$

en la cual, los superíndices  $s$  y  $b$  denotan las propiedades de *sitio* y de *vínculo*, respectivamente.

En la mayoría de los casos se presenta la desigualdad estricta de la expresión (2.18). La igualdad existe si y sólo si  $p = 0$  ó  $p = 1$ , o si la red posee una estructura semejante a la de un árbol, es decir, que tiene ramas abiertas como las que se muestran en la Figura 2.14.

La comparación entre la *probabilidad crítica* (o *umbral de percolación*)  $p_c$  y la *probabilidad de percolación*  $P(p)$  es de gran utilidad, puesto que (Shante & Kirkpatrick, 1971):

- Si  $P(p) < p_c \rightarrow$  El componente se extiende sólo localmente, es decir, todos los *racimos* o grupos de sitios o vínculos ocupados son finitos en tamaño.



- Si  $P(p) > p_c \rightarrow$  Se extiende a través del medio un racimo de tamaño infinito o un *canal de percolación*. Fenómeno que tiene implicaciones físicas significativas.

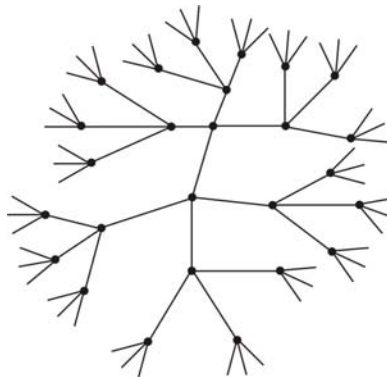


Figura 2.14 Red con estructura semejante a la de un árbol  
( $z_p = 4$ ; Shante & Kirkpatrick, 1971)

En el inciso 5.5 del Capítulo 5 se presenta la evaluación del *fenómeno de percolación* en la presa Tarbela de Pakistán, una presa de tierra y enrocamiento conocida debido a las dificultades ocasionadas por el suelo aluvial de su cimentación.

#### 2.2.4.3 Aplicación a la permeabilidad equivalente

En el contexto de la teoría de percolación, no se tiene una validez general de la aproximación dada por la conjetura de Matheron (1967) respecto a las medias armónica, geométrica y aritmética para representar permeabilidades equivalentes; sin embargo, cada uno de estos promedios tiene aplicabilidad en casos especiales (Hunt, 2005):

- La media armónica corresponde a un umbral de percolación de 1.
- La media aritmética corresponde a un umbral de percolación de 0.
- La media geométrica corresponde a un umbral de percolación de 0.5.

## 2.3 Principales métodos para el análisis del flujo establecido de agua en suelos

### 2.3.1 Consideraciones generales

Los análisis de flujo de agua a través de medios porosos pueden resolverse de manera *exacta* o *aproximada*.

Las *soluciones exactas* se basan en la aplicación de los principios básicos de flujo de agua, como las conocidas leyes de continuidad de flujo y de Darcy. Estas consideraciones pueden llevar a establecer ecuaciones de tipo diferencial parcial que rigen el comportamiento de fluidos a través de medios porosos. Un ejemplo es la conocida ecuación de Laplace, que gobierna el flujo

establecido de agua en suelos; la cual en el caso de un medio tridimensional homogéneo anisótropo se expresa como:

$$k_x \frac{\partial h^2}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial h^2}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial h^2}{\partial z^2} = 0 \quad (2.19)$$

Donde  $h$  es la carga hidráulica (o potencial hidráulico) y  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  son los coeficientes de permeabilidad en las direcciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , respectivamente.

En la práctica, una desventaja de las *soluciones analíticas exactas* es que resultan laboriosas cuando la geometría del dominio de flujo y las condiciones hidráulicas y de frontera se tornan complejas. En estas situaciones es posible recurrir a *soluciones aproximadas* (analíticas o numéricas). Dentro de los principales métodos aproximados que existen para estos fines se pueden mencionar:

- Método gráfico de la red de flujo
- Método de relajaciones (–Relaxation Method– basado en diferencias finitas: *FDM* –Finite Differences Method–)
- Método de los pasos o paseos casuales (*RWM* –Random Walk Method–)
- Método de los fragmentos (–Method of fragments–)
- Transformación o mapeo conforme (–Conformal mapping–)
- Método de elementos de frontera o ecuaciones integrales de frontera (*BEM* –Boundary Element Method– o *BIEM* –Boundary Integral Equation Method–)
- Método de elementos finitos (*FEM* –Finite Element Method–)
- Modelos de laboratorio
- Modelos analógicos

Los métodos anteriores se describen brevemente en los párrafos siguientes.

### 2.3.2 Método gráfico de la red de flujo

La técnica aproximada más popular que existe para resolver problemas de flujo de agua, es la conocida como *red de flujo*. Esta técnica establece que existen dos funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y que, geoméricamente, constituyen dos familias de curvas ortogonales entre sí: las líneas equipotenciales (de potencial  $\phi$  constante) y las líneas de corriente (de valores iguales de la función de corriente  $\psi$ ). La construcción gráfica de tales líneas es la que recibe el nombre de red de flujo. Un dibujo de este tipo que satisfaga las condiciones de frontera y de ortogonalidad, permite resolver de un modo sencillo y puramente gráfico un problema de flujo de agua en el que el suelo es homogéneo e isótropo. Podría decirse que un inconveniente de este método es precisamente la consideración anterior, ya que como se sabe, un suelo es en general heterogéneo y puede presentar incluso anisotropía. No obstante, para resolver las limitaciones anteriores existen otros métodos, como la *teoría de la sección transformada* mediante la cual es posible realizar los cambios geométricos correspondientes para convertir un suelo anisótropo en uno isótropo, o bien, el concepto de *permeabilidad equivalente* que permite convertir un suelo

heterogéneo en uno homogéneo (como se expuso en párrafos anteriores). La gran virtud de las redes de flujo sin embargo, es que con dibujos relativamente simples es posible detectar zonas problemáticas de la región de flujo en estudio.

Mediante una red de flujo es posible calcular el gasto total que atraviesa el medio analizado, de acuerdo con la ley de Darcy y para un espesor unitario, a partir de la siguiente expresión:

$$q = k h \left( \frac{n_f}{n_e} \right) = k h \mathcal{S} \quad (2.20)$$

donde  $k$       Coeficiente de permeabilidad del suelo.  
 $h$         Carga hidráulica.  
 $n_f$       Número de intervalos entre líneas de flujo.  
 $n_e$       Número de intervalos entre líneas equipotenciales.  
 $\mathcal{S}$         Factor de forma.

### 2.3.3 Método de relajaciones

El *método de relajaciones* (–Relaxation Method–), introducido por Southwell en 1940, se emplea en los problemas de flujo de agua para resolver la ecuación diferencial de Laplace en la vecindad de un punto mediante una ecuación algebraica de *diferencias finitas* (FDM –Finite Differences Method–; Panov, 1963; Juárez & Rico, 1972). Este método consiste en construir una malla en dos o tres dimensiones que cubra el dominio de flujo  $\Omega$  mediante una serie de líneas o planos horizontales y verticales que formen entre ellos cuadrados o cubos de lado  $\delta$  (Figura 2.15a). En este tipo de problemas, los valores de frontera corresponden a los valores de la carga hidráulica  $h$  en las fronteras del dominio analizado. Para llegar a la solución mediante este método es necesario asignar una serie de valores de  $h$  en los puntos donde no se conoce, respetando los valores de  $h$  conocidos, y buscando mediante iteraciones el cumplimiento de la ecuación de Laplace expresada en diferencias finitas para todos los puntos del dominio  $\Omega$ . Las fórmulas que representan la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas son muy variadas y dependen de la zona del problema que se esté analizando (Panov, 1963). Así por ejemplo, para la malla cuadrada de la Figura 2.15a, la ecuación de Laplace para un suelo homogéneo e isótropo:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.21)$$

se escribe en términos de diferencias finitas para un nodo interior como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &\approx \frac{(h_1 - h_0)/\delta - (h_0 - h_3)/\delta}{\delta} = \frac{h_1 + h_3 - 2h_0}{\delta^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &\approx \frac{h_2 + h_4 - 2h_0}{\delta^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

La expresión que satisface la ecuación de Laplace en cualquier nodo interior de una malla similar a la de la Figura 2.15a es por tanto:

$$4h_0 \approx h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \quad (2.23)$$

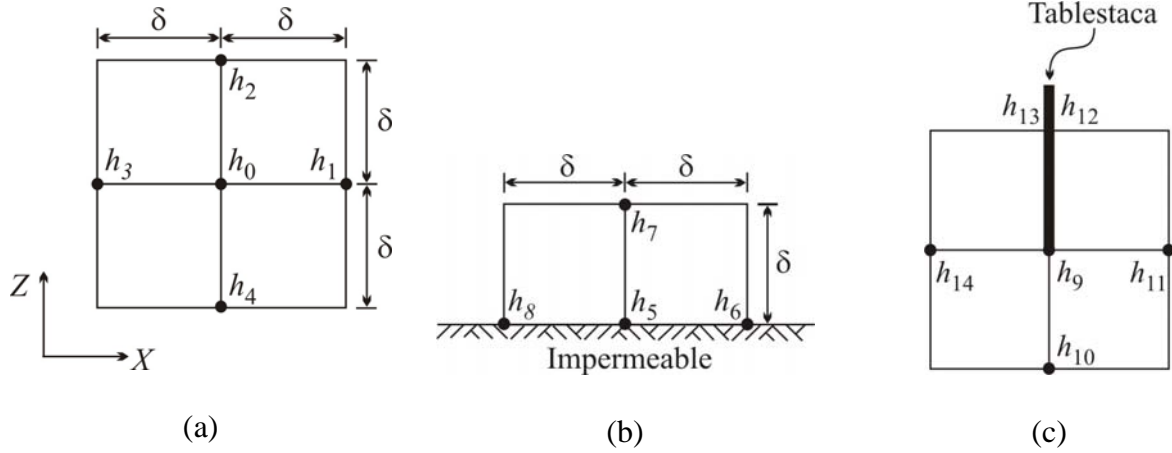


Figura 2.15 Condiciones geométricas de algunas mallas en el método de relajaciones

Las expresiones para los nodos en diversos puntos de la frontera se pueden obtener de manera análoga. No obstante, también pueden determinarse a partir de la ley de Darcy. Por ejemplo, para la malla cuadrada de la Figura 2.15b, de la ley de Darcy se obtiene:

$$\begin{aligned} q_{8 \rightarrow 5} &= V \cdot A = \frac{\partial h}{\partial x} \delta \approx \frac{h_8 - h_5}{\delta} \frac{\delta}{2} = \frac{h_8 - h_5}{2} \\ q_{5 \rightarrow 6} &\approx \frac{h_5 - h_6}{\delta} \frac{\delta}{2} = \frac{h_5 - h_6}{2} \\ q_{5 \rightarrow 7} &\approx h_5 - h_7 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Y puesto que se cumple el principio de continuidad de flujo,  $q_{entrada} - q_{salida} = 0$ , se llega a que en los nodos de la frontera se satisface la expresión:

$$2h_5 \approx \frac{h_6}{2} + h_7 + \frac{h_8}{2} \quad (2.25)$$

De manera similar, se determina que en la malla de la Figura 2.15c se cumple la ecuación:

$$4h_9 \approx h_{10} + h_{11} + \frac{h_{12}}{2} + \frac{h_{13}}{2} + h_{14} \quad (2.26)$$

Así sucesivamente, se pueden obtener distintas expresiones de diferencias finitas equivalentes a la ecuación de Laplace para diversas condiciones geométricas y de flujo (medios anisótropos, heterogéneos, tridimensionales, etc.). Esta es precisamente, debido a su fácil adaptación a condiciones de fronteras muy diversas y obtención de resultados con cualquier grado de aproximación, una de las ventajas de este método. Pese a ello, este tipo de análisis resulta tedioso al intentar obtener soluciones aproximadas si no han sido programadas por computadora;

tampoco proporciona soluciones generales, sino que debe aplicarse a cada caso particular.

### 2.3.4 Método de los paseos casuales (*RWM*)

Este método recurre a las denominadas *técnicas de Monte Carlo* (Marsal & Reséndiz, 1968; Auvinet, 1975) las cuales constituyen una alternativa a los métodos usuales de análisis de flujo de agua. El método de los paseos casuales (*RWM* –Random Walk Method–) consiste en estudiar los movimientos de una partícula que se desplaza en forma aleatoria sobre los nodos de una malla similar a la de la Figura 2.16 (con que se modela el dominio de flujo bidimensional en estudio), permitiendo determinar la carga hidráulica en los puntos de interés del suelo a partir de la resolución numérica de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas.

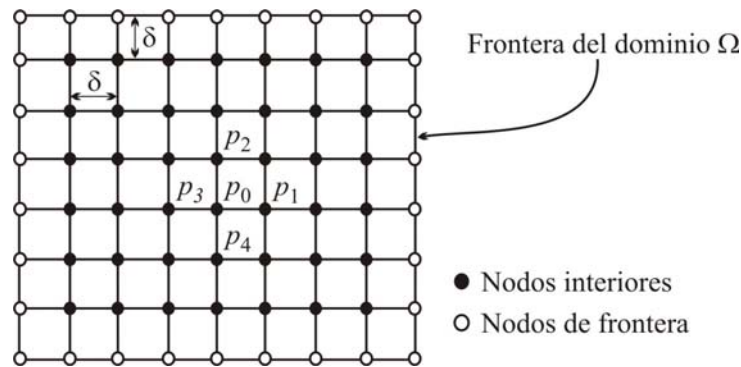


Figura 2.16 Malla empleada en el método de los paseos casuales (caso de un suelo homogéneo e isótropo)

Específicamente, este método consiste en generar una serie de trayectorias aleatorias (mediante números aleatorios) a partir del nodo  $p_0$  de la malla en el cual se desea estimar la carga hidráulica. Así, la partícula se desplaza de manera aleatoria a través de los nodos interiores de una malla determinada y se detiene cuando llega a alguno de los nodos de la frontera, denominados *absorbentes*, porque en ellos se conoce el valor de la carga hidráulica (condición de frontera impuesta). De esta manera, una trayectoria completa está constituida por una secuencia de nodos, siendo el último un nodo *absorbente*. La carga hidráulica se determina entonces, contando los números de trayectorias que terminan en las distintas fronteras, multiplicándolos por el valor de la carga hidráulica en la frontera respectiva y dividiendo el resultado entre el número total de trayectorias. Este procedimiento se repite un número de veces determinado y el resultado obtenido es una medida insesgada de la carga hidráulica en el nodo estudiado.

Cuando el análisis del flujo de agua se realiza en un medio homogéneo e isótropo, la resolución de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas indica que, en una malla bidimensional las probabilidades de movimiento desde cualquier nodo interior son iguales a 1/4 (cuatro direcciones posibles –Figura 2.17a–), mientras que, en un problema tridimensional las probabilidades de movimiento son iguales a 1/6 (seis direcciones posibles desde cualquier nodo interior –Figura 2.17b–). El paso o módulo de la malla depende de las permeabilidades, así: a) Cuando el medio es isótropo, la malla es cuadrada o es un cubo (paso constante en las direcciones espaciales correspondientes); y b) Cuando el medio es anisótropo la malla es

rectangular o es un paralelepípedo (paso distinto en las direcciones espaciales correspondientes). De esta manera, cuando las condiciones de flujo son diferentes al caso de un suelo homogéneo e isótropo (anisotropía, medios heterogéneos, fronteras impermeables, etc.), el método de los paseos casuales se puede adaptar de manera sencilla, modificando la resolución de la ecuación de Laplace en los nodos que lo requieran (Marsal & Reséndiz, 1968; Auvinet, 1975). Lo anterior se explica con mayor detalle en el ANEXO II. De igual manera, en el inciso 4.4 del Capítulo 4 se expone la implementación de este método al caso de medios heterogéneos simulados, discutido en esta investigación.

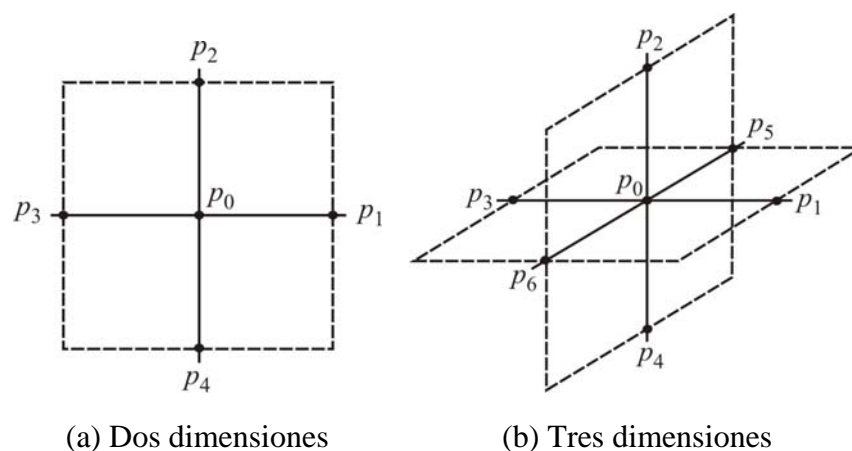


Figura 2.17 Posibilidades de desplazamiento sobre los nodos de una malla

### 2.3.5 Método de los fragmentos

En 1933 Pavlovsky desarrolló un método analítico aproximado de solución para dominios de flujo confinado de profundidad finita (Polubarinova-Kochina, 1962; Harr, 1962). La consideración fundamental de este método, denominado de los *fragmentos* (–Method of fragments–), es que las líneas equipotenciales en diversas partes críticas de la región de flujo, pueden representarse de manera aproximada mediante líneas rectas verticales (Figura 2.18), las cuales, dividen la región de flujo en secciones o fragmentos.

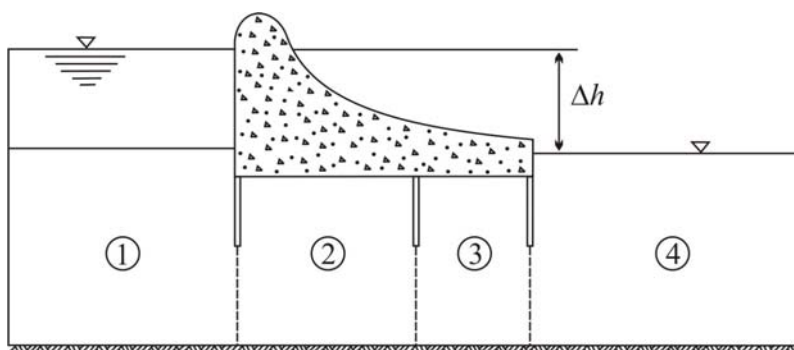


Figura 2.18 Consideración esquemática del método de los fragmentos

De esta manera, el gasto en el *enésimo* fragmento se puede obtener con:

$$q_n = \frac{k \Delta h_n}{\Phi_n} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (2.27)$$

Donde  $\Delta h_n$  es la pérdida de carga hidráulica en cada fragmento; y  $\Phi_n$  es un factor de forma adimensional (equivalente al inverso del factor  $n_f/n_e$  empleado en una red de flujo; ver ecuación 2.20).

De igual modo, debido al principio de continuidad de flujo, el gasto en todos los fragmentos debe ser el mismo:

$$q = \frac{k \Delta h_1}{\Phi_1} = \frac{k \Delta h_2}{\Phi_2} = \dots = \frac{k \Delta h_m}{\Phi_m} \quad (2.28)$$

Es decir:

$$q = k \frac{\sum \Delta h_n}{\sum \Phi_n} = \frac{k \cdot \Delta h}{\sum_{n=1}^m \Phi_n} \quad (2.29)$$

donde  $\Delta h$  (sin subíndice) es la pérdida de carga total en el dominio. De manera similar, la pérdida de carga en el *enésimo* fragmento se obtiene mediante:

$$\Delta h_n = \frac{\Delta h \cdot \Phi_n}{\sum \Phi} \quad (2.30)$$

Finalmente, una vez que se conoce la pérdida de carga en cada fragmento es posible calcular la distribución de presiones, el gradiente de salida, etc.

Quizá uno de los inconvenientes del método es la obtención del factor de forma  $\Phi$ , el cual se determina en general, mediante la solución de integrales definidas que se establecen para cada fragmento distinto en que se divide la región de flujo. Existen tablas que proporcionan las expresiones de diversos factores de forma que ya han sido calculados para ciertos problemas típicos de flujo confinado (Poluvarinova-Kochina, 1962; Harr, 1962). Por ejemplo, si el dominio de flujo debajo de una tablestaca se separa en dos partes, el factor de forma se determina con

$\Phi = Sen \frac{\pi s}{2T}$ , siendo  $s$  la profundidad de la tablestaca y  $T$  el espesor del estrato. La explicación

para la obtención de este factor queda fuera del alcance de la presente tesis. Lectores interesados pueden consultar *p. ej.* Harr (1962) y Reddi (2003). Igualmente, en una investigación más o menos reciente, Griffiths (1984) proporciona gráficas de las que se pueden obtener directamente los valores de  $\Phi$  para fragmentos de algunos problemas típicos de flujo confinado.

Cabe destacar que el método de los fragmentos actualmente se ha empleado con cierta regularidad. Griffiths (1984) por ejemplo, lo utilizó para establecer unas gráficas adimensionales que permiten estimar el gasto de infiltración y los gradientes de salida en ciertos problemas de flujo confinado. Por su parte, Shehata (2006) lo utilizó en la solución analítica del problema de las filtraciones bajo un vertedor cimentado sobre un suelo anisótropo ( $k_x > k_y$ ); en este caso el autor

estudió la influencia de la colocación de un delantal impermeable y de dos tablestacas en la subpresión y tubificación que podría presentarse en este tipo de suelo. Inclusive, este método en combinación con el mapeo conforme y la parábola de Kozeny se ha aplicado recientemente a la solución de problemas de flujo no confinado (Mishra & Singh, 2005) a través de bordos de material homogéneo con un filtro horizontal descansando sobre una base impermeable. Es decir, que este método que originalmente se propuso para estudiar el flujo confinado en medios homogéneos isótropos, actualmente ya se ha implementado en la solución de medios anisótropos, y regiones de flujo no confinado.

### 2.3.6 Transformación o mapeo conforme

Una de las soluciones analíticas aproximadas que existen para resolver problemas de flujo bidimensional de agua, sugiere la obtención de una función que permita transformar un problema del dominio geométrico que se busca resolver en un problema cuya solución sea conocida (Flores, 1999). Se trata de funciones que transforman figuras geométricas de un plano complejo  $\zeta$  en figuras de otro plano complejo  $w$ . Se entiende entonces por *mapeo* el procedimiento mediante el cual se hacen corresponder los puntos de una figura de un plano  $\zeta$  con los puntos de la figura respectiva en el plano  $w$ . Una transformación o función de mapeo se llama *conformal* o *conforme* (–Conformal mapping–) cuando no modifica los ángulos de intersección y las formas geométricas aproximadas entre los planos de interés (Harr, 1962). Con estas bases, la ecuación diferencial de Laplace puede resolverse para un dominio  $G$  (Figura 2.19a), si la *transformación o mapeo conforme* de este dominio con algún otro dominio  $G_1$  más simple (Figura 2.19b) es conocida (Harr, 1962; Panov, 1963; Spiegel, 1964). La transformación se realiza por medio de la función analítica de una variable compleja:

$$\zeta = f(w) \quad (2.31)$$

Donde:

$$\zeta = \lambda + i\eta \quad ; \quad w = x + iy \quad (2.32)$$

Además:

$$f(w) = g_1(x, y) + i g_2(x, y) \quad (2.33)$$

La correspondencia o transformación está dada por las funciones:

$$\lambda = g_1(x, y) \quad ; \quad \eta = g_2(x, y) \quad (2.34)$$

Finalmente, la ecuación de Laplace para un flujo establecido bidimensional:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.35)$$

se transforma en:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.36)$$



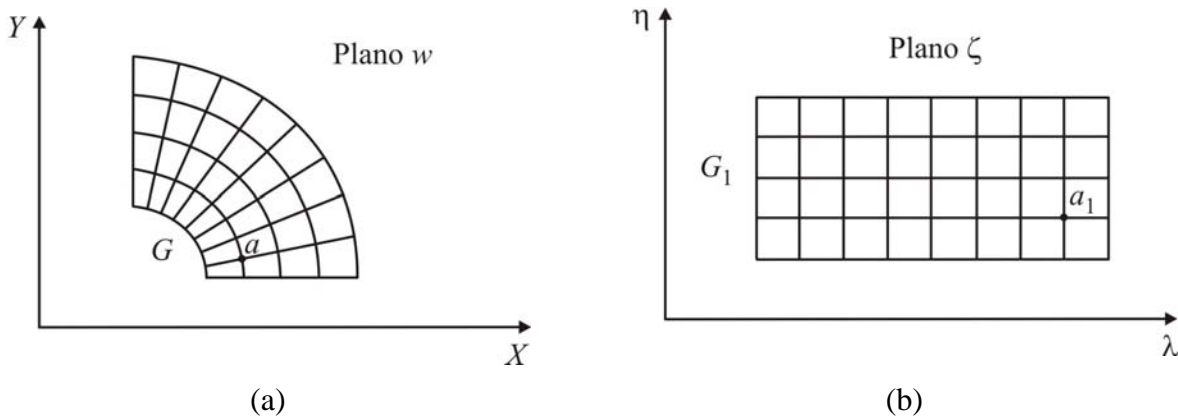


Figura 2.19 Transformación conforme del dominio  $G$  en el dominio  $G_1$

Existen diversas transformaciones generales, tales como traslación, inversión, rotación, estrechamiento, que permiten trasladar, invertir, etc. el dominio del plano original al plano correspondiente (Harr, 1962). Algunas de estas transformaciones especiales se indican en la forma de tablas (Spiegel, 1964). Una de las funciones más conocidas que transforma un sistema de flujo uniforme en el plano  $w$  (Figura 2.20a) en un sistema de flujo con parábolas cofocales en el plano  $\zeta$  (Figura 2.20b) es:

$$\zeta = w^2 \quad (2.37)$$

La expresión anterior resulta de gran importancia, puesto que fue la base para plantear la solución de problemas de flujo no confinado de agua (flujo a través de una presa de tierra con un filtro horizontal) mediante la denominada *parábola de Kozeny* (Harr, 1962).

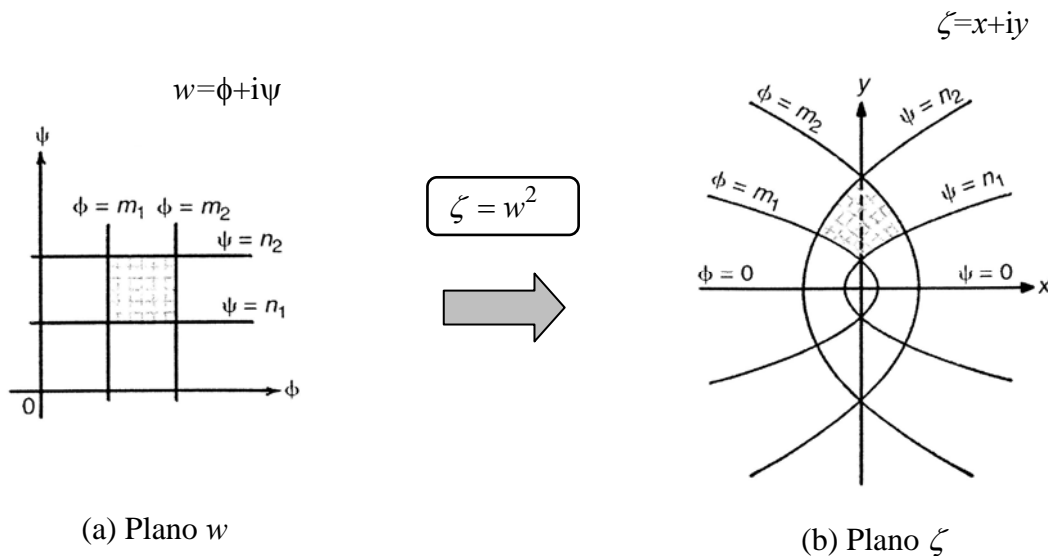


Figura 2.20 Mapeo conforme mediante la función de transformación  $\zeta = w^2$

### 2.3.7 Método de elementos de frontera o ecuaciones integrales (*BEM* o *BIEM*)

El método de *elementos de frontera* o *ecuaciones integrales* (*BEM* –Boundary Element Method– o *BIEM* –Boundary Integral Equation Method–) consiste en obtener la representación integral de la solución de una ecuación diferencial parcial en términos de valores de frontera (Balas *et al.*, 1989). El procedimiento de solución es semi-analítico y por tanto, se considera que presenta fundamentos matemáticos sólidos (Ramachandran, 1994). Cuando el problema de interés ya ha sido expresado en términos de una ecuación integral, es posible utilizar algún método de integración numérica para resolverlo (por ejemplo, la cuadratura de gauss). En el caso de problemas unidimensionales la frontera se representa por los dos puntos extremos, y la integral se reduce a una suma. Los problemas en dos y tres dimensiones son un poco más complejos. En un problema de valores de frontera bien definido solo algunas de las condiciones de frontera (las cuales se introducen en la representación integral de la solución) son establecidas (Balas *et al.*, 1989; Istok, 1989). Las condiciones desconocidas deben ser calculadas con las ecuaciones integrales respectivas.

En un problema de flujo establecido bidimensional de agua, la solución de la ecuación de Laplace en un dominio  $\Omega$  homogéneo e isótropo:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.38)$$

se obtiene resolviendo la ecuación integral de frontera correspondiente. Esta representación integral se establece mediante el método de residuos pesados (que es la base del método de ecuaciones integrales) (Liggett & Liu, 1983; Ramachandran, 1994):

$$\int_{\Omega} G(x, y) \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] d\Omega = 0 \quad (2.39)$$

Donde  $d\Omega = dx dy$ , así la integral se refiere a una integral doble sobre el dominio bidimensional  $\Omega$ , y  $G(x, y)$  es una función de peso. La expresión anterior se resuelve integrando por partes, primero respecto a  $x$  y posteriormente, respecto a  $y$ . La integración se realiza dividiendo el dominio  $\Omega$  en franjas horizontales de espesor  $\Delta y$  o verticales de espesor  $\Delta x$  según se integre para  $X$  (Figura 2.21) o para  $Y$ , respectivamente. Las condiciones de frontera se especifican sobre el perímetro cerrado  $\Gamma$  (Figura 2.21), el cual, puede dividirse en varios segmentos, cuya característica es que cada uno de ellos puede referirse a diferentes tipos de condiciones de frontera.

De acuerdo con lo anterior, la expresión (2.39) se transforma en (con notación simplificada):

$$\int_{\Omega} G \nabla^2 h \, d\Omega = \int_{\Omega} h \nabla^2 G \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ G \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Gamma = 0 \quad (2.40)$$

Donde  $\frac{\partial h}{\partial n}$  y  $\frac{\partial G}{\partial n}$  son las derivadas direccionales definidas por:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = n_x \frac{\partial h}{\partial x} + n_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial n} = n_x \frac{\partial G}{\partial x} + n_y \frac{\partial G}{\partial y} \quad (2.41)$$

Siendo  $n_x$  el coseno del ángulo entre la normal y la dirección positiva del eje  $X$ ;  $n_y$  se define de manera análoga.

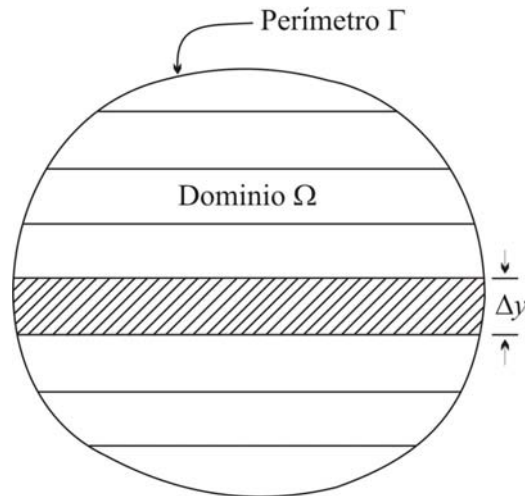


Figura 2.21 División del dominio de flujo  $\Omega$  en franjas en la dirección  $Y$  para facilitar la integración con respecto a  $x$

### 2.3.8 Método del Elemento Finito (*FEM*)

El Método del elemento finito (*FEM*) se originó como un procedimiento general de *discretización de problemas continuos* planteados por expresiones definidas matemáticamente, que sólo pueden resolverse con técnicas especiales (diferencias finitas, residuos ponderados, etc.) que permiten la simplificación del problema mediante ciertas aproximaciones. Con este método, el continuo se divide en un número finito de partes (elementos) cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros, y la solución del sistema completo como un ensamblaje de todos los elementos sigue las mismas reglas que se aplican a los *problemas discretos* (Zienkiewicz & Taylor, 1994). De esta manera, el *FEM* es simplemente una técnica numérica que proporciona soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales para resolver un problema de campo determinado (Livesley, 1994).

El *método de elementos finitos* se ha empleado para resolver diversos problemas de flujo de agua a través de suelos (Zienkiewicz, Meyer & Cheung, 1966; Finn, 1967; Neuman & Witherspoon, 1970; Tristán, 1975; Istok, 1989; Zienkiewicz & Taylor, 1994; Livesley, 1994; Auvinet, 1997; Griffiths & Fenton, 1993, 1997 y 1998; Fenton & Griffiths, 1996 y 1997; López, 2000; entre otros). El *FEM* se caracteriza por ser muy versátil, en comparación con otros métodos, ya que permite analizar todo tipo de problemas de flujo de agua, con consideraciones tan complejas

como anisotropía, heterogeneidad y múltiples condiciones de frontera, sin requerir adaptaciones especiales adicionales al planteamiento original. En esta tesis se emplea para resolver problemas de flujo establecido bidimensional de agua aplicando un enfoque variacional en la resolución de la ecuación de Laplace (Auvinet, 1997). La aplicación del *FEM* se lleva a cabo sustituyendo el medio analizado por elementos finitos triangulares que se adaptan a su geometría; y en los cuales, se acepta como aproximación que la carga hidráulica varía linealmente. Asimismo, la carga hidráulica de cada elemento es función del potencial en cada uno de los tres nodos o vértices del triángulo y de sus respectivas coordenadas, así como del área del elemento. La resolución de la ecuación de Laplace en el dominio analizado se sustituye por la obtención del mínimo de una funcional que está precisamente expresada en términos de la expresión aproximada de  $h$  para este mismo dominio. Con estas bases se establece el siguiente sistema matricial de ecuaciones (ver desarrollo en el ANEXO III):

$$[S]\{h\} = 0 \quad (2.42)$$

La resolución del sistema anterior (*p. ej.* con eliminación gaussiana) proporciona los potenciales  $h$  en cada nodo de los elementos finitos de la malla empleada. Las líneas de contorno dibujadas con estos valores, representan las líneas equipotenciales de una red de flujo. Calculados los potenciales  $h$ , es posible determinar a partir de ellos, los gradientes hidráulicos; y con éstos a su vez, los gastos y las velocidades de flujo de acuerdo con la ley de Darcy (ANEXO III).

Con un procedimiento similar al anterior es posible establecer el sistema de ecuaciones:

$$[S]\{\psi\} = 0 \quad (2.43)$$

Cuya solución proporciona en este caso, los valores nodales de la función de corriente  $\psi$ . De manera análoga, las líneas dibujadas con estos valores representan las líneas de flujo de una red de flujo. Con las dos familias de líneas anteriores, y mediante un algoritmo de interpolación se puede trazar la red de flujo correspondiente (Christian, 1980; López & Auvinet, 1998). Ejemplos de redes de flujo dibujadas con la metodología anterior, se ilustran en las Figuras 2.22 y 2.23. El desarrollo matemático del *FEM* para la solución de problemas de flujo establecido de agua 2D utilizando un enfoque variacional se presenta en el ANEXO III.

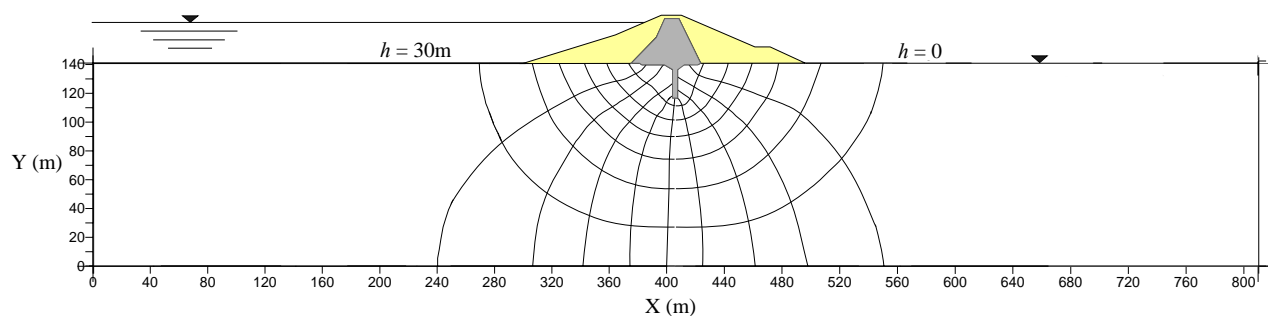


Figura 2.22 Red de flujo en un medio homogéneo e isótropo (López & Auvinet, 1998)

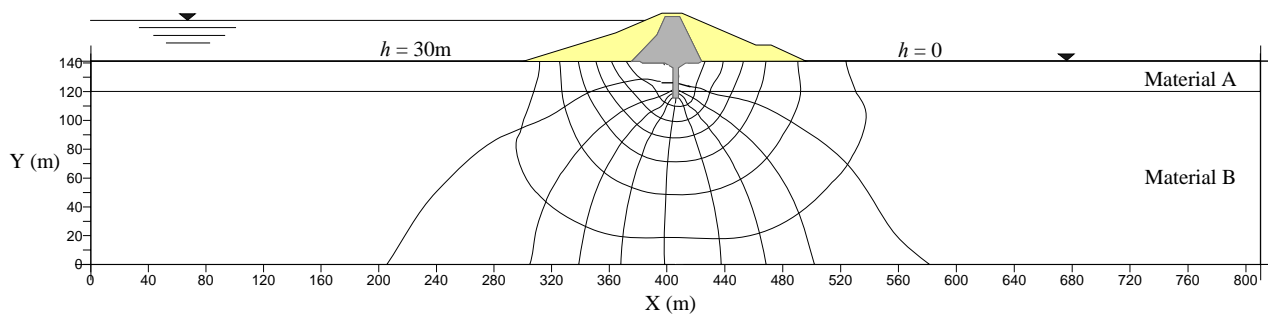


Figura 2.23 Red de flujo en un medio estratificado (López & Auvinet, 1998)

### 2.3.9 Modelos de laboratorio

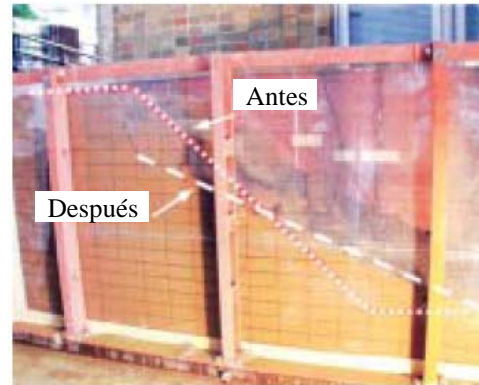
Los *modelos de laboratorio* que reproducen a escala la región de flujo de interés, se han empleado con frecuencia para calcular el gasto utilizando un flujo bidimensional, también para estudiar los efectos del fenómeno de tubificación y de arenas movedizas (Sellmeijer, 1981), entre otros. Los dispositivos utilizados para alojar tales modelos son generalmente tanques con paredes de vidrio, de poco ancho, dentro de los cuales se simula la región por estudiar a rigurosa escala geométrica. El material comúnmente empleado para reproducir la región de flujo, es una arena más o menos fina (Cahill, 1967). Otros tipos de modelos de laboratorio usualmente empleados son los denominados de *Hele-Shaw* (Harr, 1962; Juárez & Rico, 1972; Hernández, 1990), los cuales, constan de dos placas planas de material transparente y rígido, separadas a una distancia muy pequeña, entre las cuales se hace fluir un líquido viscoso (p. ej. glicerina) hasta alcanzar el flujo establecido; la imagen de las líneas de corriente se obtiene tiñendo un número arbitrario de filamentos de flujo mediante colorante que se inyecta a la entrada del fluido. Estos modelos utilizan las ecuaciones de Navier-Stokes en sustitución de la ley de Darcy para estudiar el movimiento del fluido; asimismo, tienen dos formas principales de operación (Hernández, 1990): como *túnel* (cuando las placas que confinan el flujo forman un túnel o conducto a presión) y como *canal* (cuando el flujo presenta una superficie expuesta a la atmósfera). Los modelos de *Hele-Shaw* han permitido estudiar problemas de flujo en dos dimensiones, flujo confinado y no confinado, flujo establecido y transitorio, flujo radial, así como flujo en suelos estratificados (Kashef, 1987; Hernández, 1990).

Un ejemplo muy interesante (Orense *et al.*, 2004) de modelos de pequeña escala (220cm de largo, 80cm de ancho y 100cm de alto) con los que recientemente se han estudiado los factores que influyen en las fallas de taludes durante o inmediatamente después de una lluvia, se refieren a una serie de experimentos de laboratorio efectuados en modelos de taludes areno-limosos (Figura 2.24). Se trata de modelos que estudian el flujo transitorio, en particular la variación con el tiempo de la presión de poro, el contenido de agua y la deformación del suelo en taludes que se inducen a la falla por filtración de agua en el lado de aguas arriba del talud, o bien, por la generación de lluvia artificial en la parte superior del mismo (Figura 2.24a). En estos experimentos, los resultados mostraron que la falla de los taludes se induce cuando el contenido de agua alcanza prácticamente la saturación completa en zonas cercanas al pie del talud, aun cuando otras partes de la masa deslizante se encuentren todavía en estado parcialmente saturado. Asimismo las conclusiones de este trabajo señalan que la ocurrencia de falla en los taludes debida al agua de lluvia podría predecirse si se lleva a cabo el monitoreo del contenido de agua en los taludes y si se realizan mediciones de desplazamientos en los mismos.

Este tipo de modelos son muy ilustrativos de fenómenos que como en el caso anterior son difíciles de modelar numéricamente. No obstante, presentan desventajas de costo y tiempo de construcción; además de requerir inicialmente una calibración para mostrar su aplicabilidad.



(a) Modelo experimental



(b) Posición del talud después de una de las pruebas



(c) Otra vista del modelo después de una de las pruebas



(d) Generación de grietas cerca del pie del talud

Figura 2.24 Modelo de laboratorio para el estudio de la falla de taludes ocasionada por lluvia (Orense *et al.*, 2004)

### 2.3.10 Modelos analógicos

La ecuación de Laplace, que gobierna el flujo establecido de agua a través de un medio poroso, se emplea también en otras áreas de la ingeniería y de la física aplicada. Se utiliza principalmente, en la solución de problemas de flujo establecido de electricidad y calor, y problemas relacionados con la teoría de elasticidad. La razón de dicha correspondencia resulta evidente cuando se considera que las leyes físicas que gobiernan estos fenómenos son, en esencia, de la misma naturaleza. De este modo, la ley de Darcy para el flujo de agua es análoga a la ley de Fourier en conducción de calor, a la ley de Maxwell en electrostática, a la ley de Ohm en la conducción de corrientes eléctricas y a la ley de Hooke en elasticidad (Harr, 1962). El objetivo primordial al utilizar modelos analógicos es resolver el problema equivalente de flujo de agua, de tal manera que midiendo los parámetros correspondientes en el modelo, se conozca el valor de los términos que interesan en el problema de flujo que se trate. Con esta finalidad, se han empleado modelos de tipo calorífico, magnético, de membrana elástica, de analogía eléctrica, etc.

Los *modelos caloríficos* implican la construcción de una zona geoméricamente análoga a la región de flujo con condiciones térmicas de frontera equivalentes a las que se tienen en el problema original. Aun cuando en la actualidad, no es difícil simular las fronteras impermeables (por el aislamiento que se requiere), ni mantener la temperatura constante en las fronteras equipotenciales, este tipo de modelos no es muy empleado.

Por su parte, los *modelos magnéticos*, reproducen el patrón de flujo utilizando fibras de material dieléctrico, tales como, limaduras de hierro, fragmentos de carbón, yeso, polvo de mica, etc. (Hague, 1929). Los *modelos magnéticos* y los de *membrana elástica* (Hansen, 1952) son poco usuales, se les emplea generalmente solo para propósitos ilustrativos y académicos.

Los *modelos de analogía eléctrica* se utilizan con regularidad. Se les ha empleado para estudiar el flujo a través de suelos homogéneos y heterogéneos, isotropos o anisotropos (Röhnisch & Marotz, 1965); asimismo para simular canales de flujo, estudiar problemas de irrigación, problemas de protección costera, etc. Si bien existen diversos métodos de analogía eléctrica, algunos más elaborados que otros, la mayoría de ellos se basan en el método propuesto por Pavlovsky (1933), que se indica en la Figura 2.25b. En la misma, *A* representa el dominio de flujo constituido por un material de alta resistencia, *B* es la frontera permeable de aguas arriba con potencial  $V_1$  y *C* es la frontera permeable de aguas abajo con potencial  $V_2$ . El método consiste en obtener, mediante una sonda, la ubicación de las líneas de igual voltaje, la que corresponde a la ubicación de las líneas equipotenciales para un flujo confinado con condiciones de frontera y configuración similares (Figura 2.25a). Entre las principales técnicas que permiten representar de una manera sencilla y rápida las regiones de flujo para diversas condiciones de circulación del agua, se mencionan: la construcción de modelos a partir de papel conductor y los modelos realizados con circuitos de resistencia eléctrica (Todd, 1980).

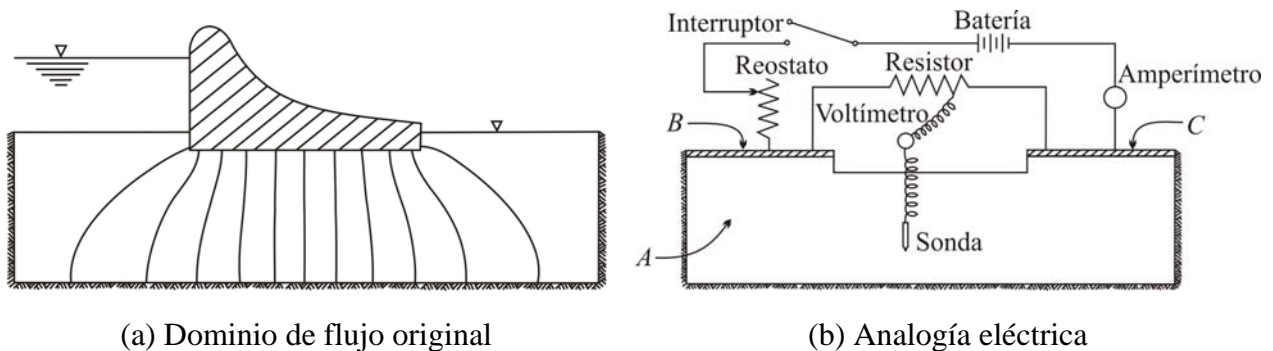


Figura 2.25 Principio de analogía eléctrica

La equivalencia o analogía que existe entre el flujo establecido de agua a través de un medio poroso y el flujo establecido de una corriente eléctrica se indica en la Tabla 2.3, en la misma  $\nabla^2 h$  es el laplaciano de  $h$  y  $grad h$  es el gradiente de  $h$ <sup>(2.7)</sup>.

(2.7) Definido como  $grad h = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) h$ , donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  son vectores unitarios cuya dirección es la misma que la de los ejes positivos  $X, Y, Z$ , respectivamente.

Tabla 2.3 Equivalencias entre el flujo de agua y el flujo de una corriente eléctrica

<b>Flujo establecido de agua</b>	<b>Flujo de una corriente eléctrica</b>
Carga hidráulica $h$	Voltaje $v$
Coefficiente de permeabilidad $k$	Conductividad $\sigma$
Velocidad de flujo $V$	Corriente $I$
Ley de Darcy: $V = -k \cdot grad\ h$	Ley de Ohm: $I = -\sigma \cdot grad\ v$
$\nabla^2 h = 0$	$\nabla^2 v = 0$
Líneas equipotenciales: $h = \text{constante}$	Líneas equipotenciales: $v = \text{constante}$

Los modelos analógicos, al igual que los modelos de laboratorio, presentan esencialmente desventajas de tiempo y costo de construcción.

### 2.3.11 Tecnologías denominadas “*soft computing (cómputo aproximado)*”

En los últimos decenios se han incrementado las aplicaciones de las denominadas *tecnologías emergentes* o *soft computing (cómputo aproximado)* en diversas áreas, entre ellas la geotecnia. Su objetivo es resolver los problemas que presentan los sistemas digitales de procesamiento y control en la solución de problemas reales. Los modelos de procesamiento inspirados en las soluciones encontradas por la naturaleza durante millones de años de evolución, que permiten resolver problemas tecnológicos como la visión, el habla, el procesamiento de señales o la inteligencia artificial, son los que en los últimos años han alcanzado gran popularidad. De entre todos ellos destacan especialmente las *redes neuronales artificiales*, los *sistemas borrosos*, los *algoritmos genéticos* y los *sistemas basados en el conocimiento* (Del brío & Sanz, 1997).

Las *redes neuronales artificiales* imitan esquemáticamente la estructura neuronal del cerebro para tratar de reproducir algunas de sus capacidades. Estos sistemas son capaces de aprender a partir de ejemplos, mediante un estilo de computación paralelo, distribuido y adaptativo. En la práctica, una red neuronal artificial puede simularse mediante un programa de computadora o con circuitos electrónicos específicos dotados de cierto paralelismo de cómputo. Por su parte, los *sistemas borrosos* se utilizan para manejar eficazmente conceptos vagos e imprecisos como los empleados en la vida cotidiana, y que nuestro cerebro está acostumbrado a tratar. Como una generalización de las reglas de la lógica booleana (que es la base de los sistemas digitales), los sistemas borrosos llevan a cabo un tipo de razonamiento aproximado semejante al desarrollado por el cerebro. Finalmente, los *algoritmos genéticos* están inspirados en los métodos de solución de problemas utilizados por la naturaleza para hacer evolucionar a los seres vivos, adaptándolos a los diferentes entornos o hábitats. La técnica empleada por la naturaleza consiste principalmente en la codificación de las características de los seres vivos en el genoma y su evolución a través de la reproducción sexual y las mutaciones. Esta idea básica, que permite que los seres vivos se adapten al entorno en el que viven (y que no es otra cosa que su optimización para unas condiciones de contorno dadas), motiva a utilizar los algoritmos basados en estas técnicas como metodología general de optimización de sistemas.

Los artículos existentes referidos a estas técnicas señalan que sus aplicaciones en diversas áreas son numerosas, sin embargo, debe reconocerse que se trata de herramientas complementarias o



asistentes en la toma de decisiones que no pueden remplazar el ingenio humano. Asimismo, por ser técnicas más o menos recientes resulta necesario proveerlas de axiomas sólidos que hagan confiable su implementación. Se consideran útiles en la solución de algunos problemas de ingeniería, sin embargo, existe una variedad de métodos todavía más convenientes para resolver determinados problemas. Por lo que se refiere al tema de flujo de agua a través de suelos, el panorama de aplicación de las mismas parece extenso, pese a ello, no se tiene conocimiento de estudios concretos que se refieran al tipo de análisis realizados en esta investigación. Algunas aplicaciones solamente relacionadas con el tema de esta tesis, se mencionan a continuación (Toll, 1996).

Las *redes neuronales artificiales* se han utilizado para evaluar la permeabilidad de arcillas compactadas (Najjar & Basheer, 1996). Los *sistemas expertos basados en el conocimiento* se han empleado para simular pruebas geotécnicas de laboratorio, entre ellas de permeabilidad (Davey-Wilson, 1991; Gribb & Gribb 1994). Los *sistemas de soporte de decisión avanzada interactiva* (ADSS) se han empleado como asistentes en la toma de decisiones de diversos problemas de ingeniería, por ejemplo, en las presas de enrocamiento utilizando sistemas expertos que ayudan a diagnosticar el tipo de problema que se tiene y cuán serio es, que aconsejan lo que debería hacerse y que indican (de acuerdo con una base de datos) si ya se han tenido problemas similares y qué es lo que se ha hecho en esos casos (Sieh, King & Gientke, 1988; Asgian *et al.*, 1988). Otros sistemas expertos se han utilizado para ayudar en la selección del sitio de construcción de una presa (Engel & Beasley, 1991).

### 2.3.12 Comentarios finales

Como se pudo apreciar en las secciones previas, varios de los métodos para el análisis de flujo de agua en medios porosos se plantean evidentemente para resolver problemas en suelos homogéneos isótropos, o bien, para condiciones muy particulares de la región de flujo. Su aplicación a otro tipo de suelos u otro tipo de condiciones de frontera, ha tenido que ser implementada, en ocasiones, para cada problema específico. Tal es el caso del método de los fragmentos y de las ecuaciones integrales, por ejemplo. Por su parte, los modelos de laboratorio y los modelos analógicos, presentan desventajas de costo y tiempo de construcción, principalmente.

Así, es evidente que algunos métodos de solución de problemas de flujo de agua son más fáciles de adaptarse a situaciones más complejas que otros (como suelos heterogéneos anisótropos). Puede decirse que, de entre todos ellos destacan las técnicas de elementos finitos (*FEM*) y de diferencias finitas (*FDM*).

En esta investigación doctoral se utilizan principalmente técnicas numéricas aproximadas. En particular se emplea el *método de elementos finitos* en los análisis bidimensionales de flujo de agua, y el *método de pasos o paseos casuales* (que se basa en diferencias finitas) en los análisis tridimensionales. Aunque también se aplica una *solución analítica exacta*, en el caso de uno de los análisis de flujo unidimensional que se presenta en este trabajo. Estos métodos se combinan por supuesto con técnicas estocásticas para la consideración de la incertidumbre en los parámetros del suelo en este tipo de análisis, que es precisamente el tema de estudio de esta tesis.

## Origen y modelación de la incertidumbre

### 3.1 Principales fuentes de incertidumbre

#### 3.1.1 Introducción

Es una realidad que todo suelo es un medio heterogéneo, anisótropo y discontinuo que presenta en cada punto características diferentes. Esta incertidumbre debida a su variación espacial, es quizá el factor aleatorio más importante que debería tomarse en cuenta en los análisis de flujo de agua en suelos. Por otra parte, al resolver cualquier problema real es común e incluso necesario, considerar ciertas hipótesis que simplifican la solución, pero que introducen en los resultados del análisis, errores que en general, no se pueden cuantificar con exactitud. Otros factores como las limitaciones en tiempo y costo de las exploraciones y pruebas de campo y de laboratorio, las estimaciones subjetivas, los errores sistemáticos propios de determinadas pruebas o los errores aleatorios cometidos por los operadores al realizar las mismas, etc., son aspectos importantes que también afectan la validez de los resultados. Estos factores pueden agruparse en tres tipos principales de incertidumbres que deberían considerarse en los análisis de flujo de agua en suelos:

- Incertidumbre en las condiciones de frontera
- Incertidumbre en el método de cálculo
- Incertidumbre en la conductividad hidráulica del suelo

Es frecuente que estas incertidumbres se introduzcan en los cálculos a través de términos aleatorios de error de tipo aditivo o multiplicativo (Cornell, 1971; Cambou, 1974; Auvinet, 2002; Baecher & Christian, 2003). Por ejemplo, un modelo comúnmente empleado para considerar la incertidumbre sobre una propiedad determinada es (Baecher & Christian, 2003):

$$u = cw + \varepsilon \quad (3.1)$$

En la cual,  $u$  es la propiedad medida u observada,  $c$  es un término de sesgo,  $w$  es la propiedad real y  $\varepsilon$  es un error aleatorio con distribución normal, media cero y desviación estándar  $\sigma_\varepsilon$ . Así, en la expresión (3.1) los términos de error son  $c$  y  $\varepsilon$ . Para un determinado valor de  $w$ , la media y la varianza de  $u$  se pueden obtener a partir de una expansión sencilla (por ejemplo, con una serie de Taylor) de la variable derivada:

$$Var[u] = \mu_w^2 Var[c] + \mu_c^2 Var[w] + \mu_w \mu_c Cov[w, c] + Var[\varepsilon] \quad (3.2)$$

En la cual,  $\mu_w$  es la media de la propiedad actual. Usualmente se ignora la dependencia de  $w$  respecto a  $c$ , y por tanto el término  $Cov[w, c]$  se considera despreciable.

En lo que sigue, se discute con mayor detalle la manera de considerar las incertidumbres anteriores en los análisis de flujo de agua a través de suelos.

### 3.1.2 Incertidumbre en las condiciones de frontera

Las condiciones de frontera en los análisis de flujo de agua corresponden generalmente a los valores de la carga hidráulica en las fronteras permeables del dominio de flujo. Si se considera que existen ciertas situaciones, en las cuales se pueden tener dudas en cuanto a estos valores (por ejemplo, que no se conozcan con precisión los niveles del agua aguas arriba y aguas abajo del problema en estudio), el error aleatorio sobre las condiciones de frontera puede representarse mediante el sistema (Cambou, 1974):

$$\{h_j\} = \varphi \{h_{0j}\} \quad (3.3)$$

Donde  $\varphi$  es un factor que presenta cierta incertidumbre definida por  $Var[\varphi]$  y  $\{h_{0j}\}$  es un vector perfectamente determinado con  $Var[h_{0j}] = 0$ .

De esta manera, si un sistema de cargas hidráulicas involucra varios factores de incertidumbre, se puede considerar cada término como un solo sistema, es decir:

$$\{h_j\} = \varphi_1 \{h_{1j}\} + \varphi_2 \{h_{2j}\} + \dots \quad (3.4)$$

Cuando la carga hidráulica se calcula mediante el método del elemento finito descrito en el ANEXO III (ecuación III.30), se obtienen expresiones del tipo:

$$\varphi_i [S] \{h_{ij}\} = 0 \quad (3.5)$$

Así, para determinar las cargas hidráulicas afectadas por los valores aleatorios  $\varphi_i$ , utilizando por ejemplo una serie de Taylor truncada en el primer orden (método explicado en el inciso 4.3.3. del

Capítulo 4), se pueden evaluar las derivadas  $\frac{\partial \{h_{ij}\}}{\partial \varphi_i}$  a partir del sistema derivado (3.5):

$$\varphi_i [S] \frac{\partial \{h_{ij}\}}{\partial \varphi_i} + [S] \{h_{ij}\} = 0 \quad (3.6)$$

El valor esperado y la varianza de la carga hidráulica se obtienen entonces con:

$$E \{h_j\} = E \{\varphi_i\} \cdot E \{h_{ij}\} \quad (3.7)$$

$$Var [h_j] = \left( \frac{\partial \{h_{ij}\}}{\partial \varphi_i} \right)^2 Var [\varphi_i] \quad (3.8)$$

Aun cuando no existe dificultad para incluir estos factores aleatorios en los análisis estocásticos de flujo de agua (Cambou, 1974; Bittnar & Sadejnoha, 1996), en esta investigación se consideran despreciables.

### 3.1.3 Incertidumbre asociada al método de cálculo

La realidad es siempre tan compleja, que todo método de cálculo, analítico o numérico, implica cierto número de hipótesis simplificadoras que suelen introducir un error significativo en la apreciación de la realidad. Así, si  $w_i$ ;  $i=1,2,\dots,n$  son los valores medios espaciales de las características del suelo (por ejemplo, las conductividades hidráulicas o sus logaritmos decimales o naturales en diversos puntos), y si se supone que el modelo matemático que permite obtener el parámetro de interés (la carga hidráulica o cualquier otro resultado de un análisis de flujo de agua) es una función de las variables  $w_i$ :

$$Y = g(w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (3.9)$$

La incertidumbre sobre el método de cálculo puede tomarse en cuenta a través de un término aleatorio de error de tipo multiplicativo (Cornell, 1971; Cambou, 1974):

$$Y = g(w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot \xi \quad (3.10)$$

Donde  $E \{\xi\} = 1$ , si se asume que el modelo matemático no introduce errores.

De este modo, de la expresión (3.10) se puede escribir que:

$$E \{Y\} = E \{g\} \cdot E \{\xi\} \quad (3.11)$$

Y la varianza debida a la incertidumbre sobre el método de cálculo es:

$$Var[Y] = E\{g\}^2 \cdot Var[\xi] \quad (3.12)$$

Los términos  $E\{\xi\}$  y  $Var[\xi]$ , que dependen de las diversas hipótesis hechas durante el cálculo, son difíciles de estimar. Pueden sin embargo, evaluarse comparando los resultados experimentales con los resultados de los cálculos efectuados por el método considerando un medio con características bien determinadas o conocidas. Este tipo de incertidumbre no se toma en cuenta en esta tesis.

### 3.1.4 Incertidumbre en la conductividad hidráulica

#### 3.1.4.1 Incertidumbre en la estimación o determinación de la permeabilidad de un material homogéneo

Aun cuando se admita que un material permeable pueda considerarse como homogéneo en un dominio dado, resulta difícil contar con un valor fidedigno de su conductividad hidráulica o permeabilidad. En efecto, en la práctica este valor se estima recurriendo a alguna de las técnicas siguientes:

- *Estimación subjetiva.*- Es usual que la permeabilidad de un dominio de flujo se defina simplemente a partir de la opinión de un experto después de observar muestras de material o de inspecciones *in situ*. Este tipo de estimación puede verse afectada por un error importante. En materia de permeabilidad, la estimación subjetiva se referirá generalmente sólo al orden de magnitud.
- *Correlaciones.*- Es común también estimar la permeabilidad de un material a partir de correlaciones entre esta propiedad y propiedades índice como la distribución granulométrica. Estas correlaciones son generalmente poco confiables, especialmente en presencia de un porcentaje significativo de finos.
- *Pruebas de laboratorio.*- Un problema típico es la falta de representatividad de las pruebas de laboratorio realizadas sobre muestras pequeñas en las que no se ve reflejada la macroestructura del medio; pueden escapar así algunos rasgos importantes del suelo, como la estratificación, la existencia de fisuras, lentes, etc., incluso, los detalles geológicos menores que pueden condicionar el comportamiento de la estructura térrea (Terzaghi, 1955). Asimismo, las pruebas de permeabilidad tienden a subestimar en gran medida el valor real de la propiedad en una proporción desconocida. A estas incertidumbres se suma la introducida por los sesgos inherentes al procedimiento de prueba adoptado (conocidos como *errores sistemáticos* y ocasionados por el remoldeo de las muestras u otros factores similares), o por los *errores aleatorios* cometidos por los operadores, o por condiciones ambientales difíciles de reproducir como temperatura, humedad ambiente, etc. Por otra parte, una exploración limitada implica el riesgo de un *error estadístico*, es decir, de la posibilidad de subestimar o sobreestimar el valor medio y la dispersión de la permeabilidad del suelo debido al número insuficiente de muestras obtenidas (Cambou, 1974; Auvinet, 2002).

- *Pruebas de campo.*- Las pruebas de campo son más representativas que las de laboratorio por lo que se refiere al efecto de escala. Sin embargo, padecen de todas las demás limitaciones señaladas para las pruebas de laboratorio, con la agravante de que se realizan en condiciones menos controladas. Las principales diferencias entre las condiciones de campo y de laboratorio pueden atribuirse a las variaciones de porosidad y densidad, a las variaciones de la dirección del flujo con respecto a la estratificación, a las limitaciones de las muestras pequeñas para simular condiciones anisótropas y a la variación de la presión de poro y de esfuerzos efectivos.

### 3.1.4.2 Variación espacial

La afirmación o aceptación de que un dominio de flujo es homogéneo e isótropo es raramente una hipótesis realista. De hecho, la conductividad hidráulica  $k$  es una de las propiedades de los suelos que presenta gran variabilidad natural. Un ejemplo muy ilustrativo de ello se muestra en la Figura 3.1 (Terzaghi, 1955; Terzaghi & Peck, 1967). Se trata de un perfil de permeabilidad de un depósito de delta en el que se aprecia la gran dispersión de permeabilidades que se tiene en esa región de suelo. Por esta razón, en los depósitos de este tipo no es de extrañarse encontrar coeficientes de variación hasta de varios órdenes de magnitud para la permeabilidad. Al respecto, Lumb (1974) ha obtenido coeficientes de variación de 200 a 300% para  $k$ , Benson (1993) ha reportado valores de 50 a 200%, e incluso en algunos suelos se han alcanzado valores hasta de 500% y 700% (Baecher & Christian, 2003).

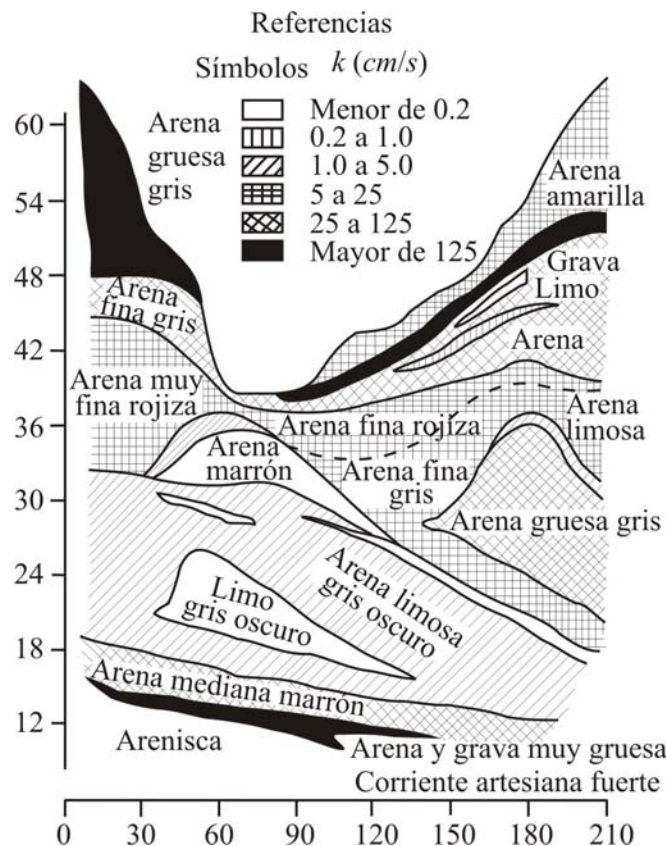


Figura 3.1 Perfil de permeabilidad de un depósito de delta (Terzaghi y Peck, 1955)

Otro ejemplo donde se puede apreciar la variabilidad de la permeabilidad se presenta en la Figura 3.2. Se refiere a la conductividad hidráulica log-transformada obtenida de mediciones en muestras de núcleos de una perforación en un acuífero de arenisca del Monte Simon en Illinois (Bakr, 1976).

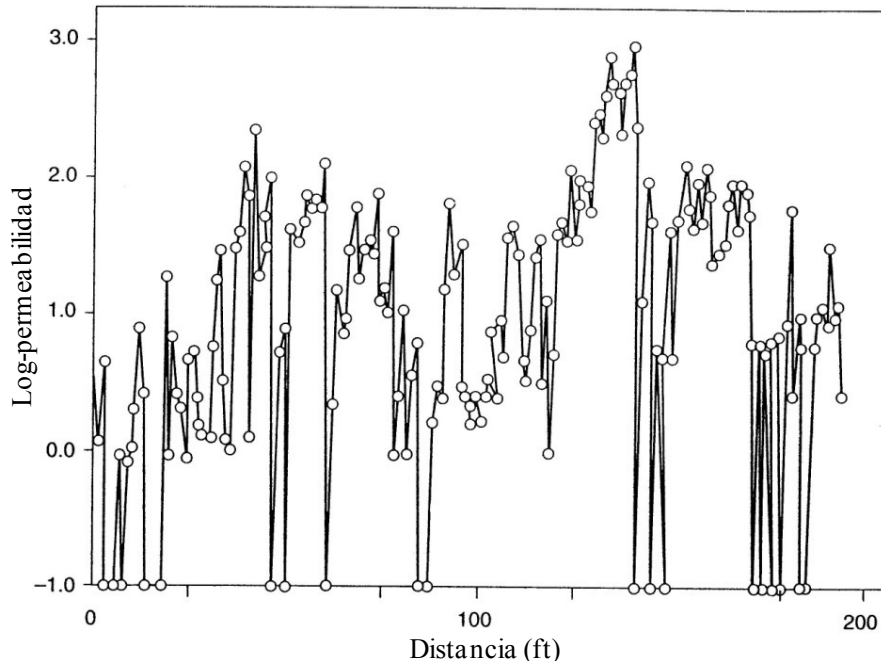


Figura 3.2 Variabilidad de la conductividad hidráulica en un acuífero de arenisca del Monte Simon en Illinois (Bakr, 1976)

Al realizar pruebas de permeabilidad de campo o de laboratorio, lo ideal sería conocer los valores de la conductividad hidráulica en todos los puntos de la zona de interés. Sin embargo, aun si se realiza un amplio programa de muestreo o de pruebas, la permeabilidad permanece incierta en la mayor parte del dominio. Así, para un determinado número de valores de permeabilidad conocidos, su dispersión se puede tomar en cuenta recurriendo a la *estadística descriptiva*, la cual permite presentar de un modo compacto los valores de  $k$ .

Específicamente, la variabilidad de la permeabilidad  $k$  de un suelo se puede evaluar mediante:

- *Métodos gráficos:*
  - Histogramas.
  - Gráficas de frecuencia absoluta.
  - Gráficas de frecuencia relativa, etc.
- *Métodos cuantitativos:*
  - Medidas de tendencia central (media, mediana, moda).
  - Medidas de dispersión (desviación estándar, varianza).

- Correlación o dependencia entre datos (covarianza, coeficiente de correlación).

De igual modo, debido a que la conductividad hidráulica  $k$  varía en un intervalo de diversos órdenes de magnitud, es frecuentemente útil transformar los datos (Gilbert, 1996). Así, para representar la permeabilidad de un suelo, en vez de utilizar una gráfica de frecuencia de los valores de  $k$  (Figura 3.3a), es generalmente preferible emplear una gráfica de frecuencia del *logaritmo decimal* (o *natural*) de  $k$  (Figura 3.3b).

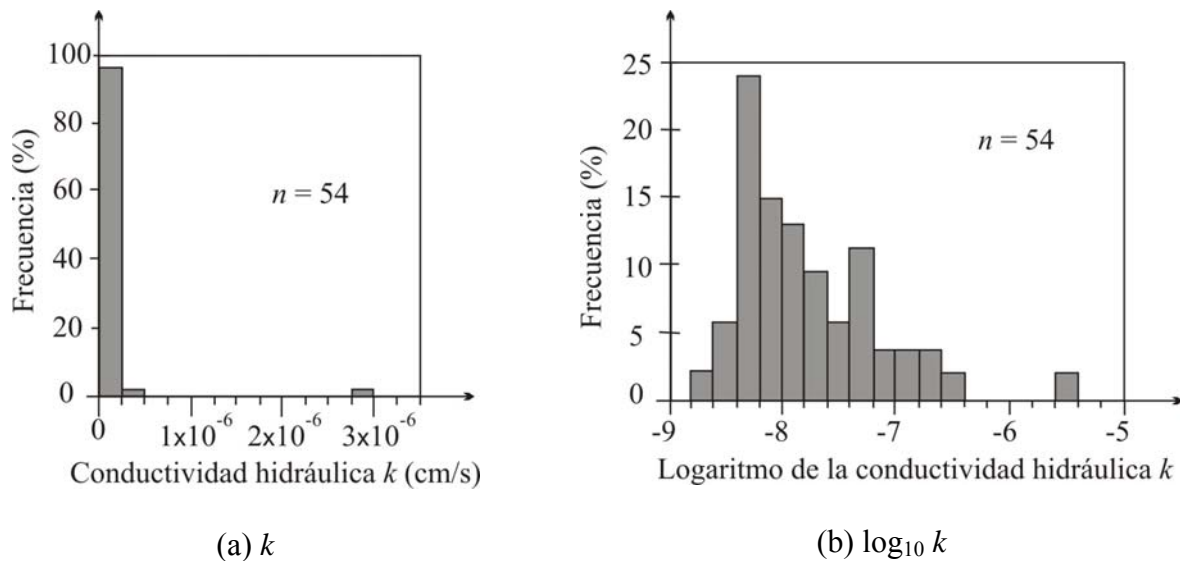


Figura 3.3 Gráficas de frecuencia de una arcilla compactada (Gilbert, 1996)

Estas representaciones frecuenciales pueden llevar a la definición de un modelo probabilista, es decir, a la definición de variables aleatorias asociadas a diversos subdominios estadísticamente homogéneos<sup>(3.1)</sup>.

La densidad de probabilidad de tipo log-normal ha sido sugerida por diversos autores para representar la variabilidad de la conductividad hidráulica de un suelo (Ang & Tang, 1975; Smith & Hebbert, 1979; de Marsily, 1986; Sudicky, 1986; Sitar & Der Kiureghian, 1987; Rubin & Dagan, 1992; Kitanidis, 1997; Griffiths & Fenton, 1998; López & Auvinet, 2002).

Lo anterior se puede apreciar mejor en el histograma que se muestra en la Figura 3.5, correspondiente a los resultados de 34 pruebas de permeabilidad de campo USBRE-19 en pozos de 5m de profundidad (Figura 3.4), realizadas en el perímetro de la laguna de *Cerro Prieto* en Baja California, donde se almacena salmuera geotérmica (Rodríguez, 1996).

<sup>(3.1)</sup> Cuando la esperanza, la varianza y los demás parámetros estadísticos son constantes en el dominio considerado.



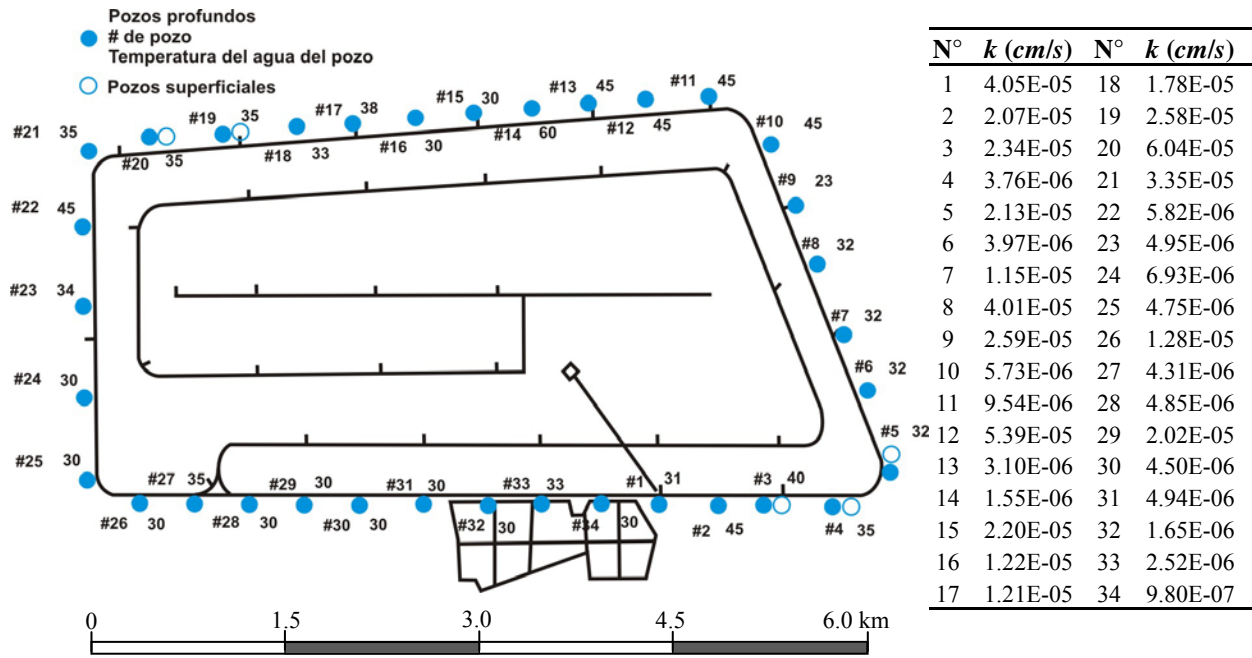


Figura 3.4 Localización de pozos en el perímetro de la laguna de Cerro Prieto y resultados de pruebas de permeabilidad de campo USBRE-19 (Rodríguez, 1996)

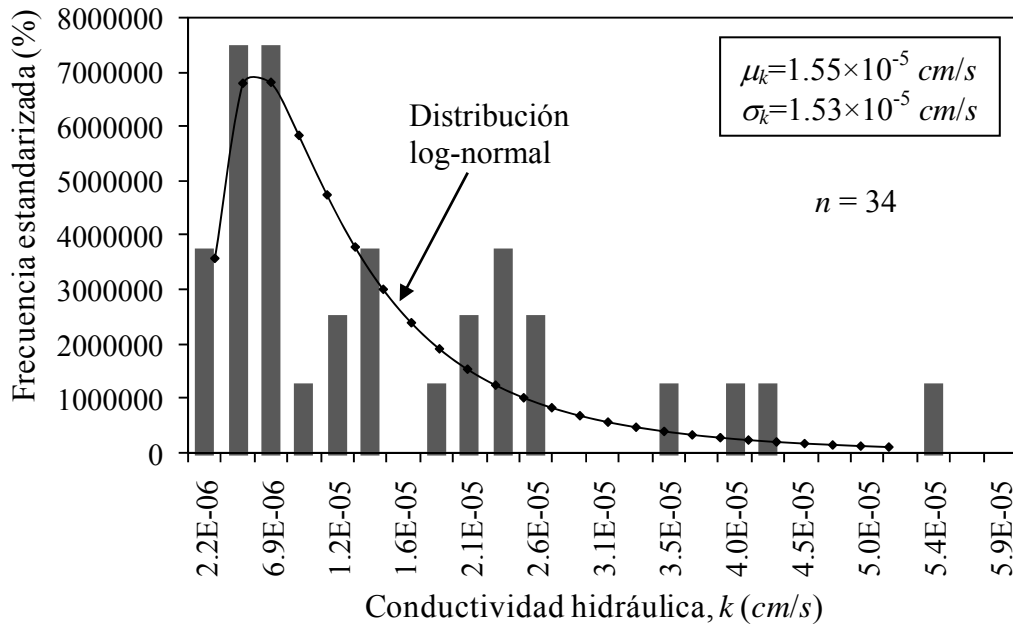


Figura 3.5 Histograma de las permeabilidades obtenidas en la laguna de Cerro Prieto (procesamiento con datos de Rodríguez, 1996)

De igual manera, en la Figura 3.6 se proporciona otro histograma obtenido a partir de 64 mediciones de permeabilidad de campo efectuadas con infiltrómetro en muestras de arcilla pobremente compactada de 60cm×60cm extraídas de un área rectangular de prueba de 20 m<sup>2</sup> (ver datos en la Tabla 3.1) (Fenton, 1996).

Tabla 3.1 Mediciones de permeabilidad ( $cm/s$ ) obtenidas en arcillas pobremente compactadas de un área rectangular de prueba de  $20m^2$  (Fenton, 1996)

$X_2$ (m)	$X_1$ (m)							
	0.30	0.91	1.52	2.13	2.74	3.35	3.96	4.57
0.30	5.37E-06	6.19E-06	8.24E-06	6.55E-06	4.97E-06	1.79E-06	4.28E-06	1.47E-06
0.91	9.84E-06	4.69E-06	1.09E-05	9.94E-06	7.01E-07	1.67E-06	2.07E-06	1.88E-07
1.52	4.18E-06	6.32E-07	2.08E-06	3.15E-06	6.11E-07	2.69E-06	3.37E-06	1.35E-06
2.13	1.49E-05	1.15E-06	6.30E-08	1.49E-06	8.84E-07	7.32E-06	4.08E-06	3.00E-06
2.74	1.41E-05	3.03E-06	1.04E-07	9.20E-08	2.81E-07	3.49E-06	3.31E-07	2.40E-08
3.35	1.06E-05	1.27E-07	1.06E-06	2.10E-08	4.00E-09	5.70E-08	2.92E-07	7.09E-07
3.96	9.91E-06	1.21E-06	1.20E-08	9.70E-08	5.09E-07	6.90E-07	6.50E-08	1.29E-07
4.57	1.64E-05	7.38E-07	1.34E-06	1.09E-06	8.53E-07	2.22E-07	3.26E-07	7.30E-08

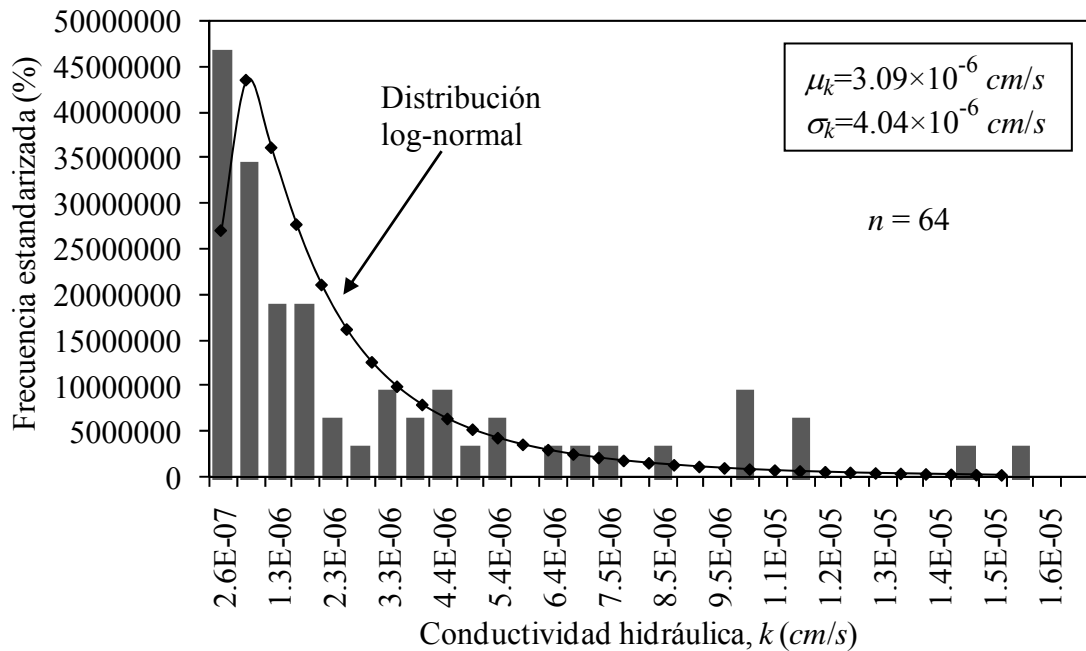


Figura 3.6 Histograma de las permeabilidades medidas en arcillas pobremente compactadas de un área rectangular de prueba de  $20m^2$  (procesamiento con datos de Fenton, 1996)

La distribución de probabilidad log-normal<sup>(3.2)</sup> que se distingue evidentemente en los histogramas anteriores, muestra porqué al realizar los análisis del flujo de agua se recomienda utilizar logaritmos decimales “ $\log_{10} k$ ” o naturales “ $\ln k$ ” para describir la incertidumbre en la conductividad hidráulica. Así, en los análisis estocásticos efectuados en esta investigación, la densidad de probabilidad log-normal es la que se asume para representar la incertidumbre de las permeabilidades del suelo.

<sup>(3.2)</sup> La densidad log-normal tiene la característica de permitir modelar variables que son mayores que cero y que varían en diversos órdenes de magnitud, como la conductividad hidráulica.

Finalmente, cabe remarcar que de las incertidumbres discutidas en las secciones precedentes, la existente en las condiciones de frontera o en los métodos de cálculo, no se considera tan significativa en comparación con la que existe sobre la conductividad hidráulica del suelo. Esta última (debida principalmente a la variación espacial y a la baja confiabilidad de las estimaciones o pruebas realizadas) es la que se toma en cuenta en los análisis probabilistas de flujo de agua realizados en esta tesis. Asimismo, se opta por el empleo del logaritmo decimal de la permeabilidad “ $\log_{10} k$ ”.

### 3.2 Modelado de la incertidumbre en la conductividad hidráulica

#### 3.2.1 Aspectos preliminares

La opinión dominante actual es que la teoría de la probabilidad es la herramienta matemática más adecuada para representar la incertidumbre en ingeniería (Ditlevsen & Madsen, 1996; Auvinet, 2002; Baecher & Christian, 2003). En los últimos decenios otros lenguajes matemáticos formales han recibido gran atención para modelar la incertidumbre (lógica borrosa, teoría de los conjuntos borrosos, entre otros; Zadeh, 1965; Auvinet, 1986), sin embargo, su principal inconveniente es la dificultad para dotarlos de axiomas sólidos. El concepto de probabilidad es en efecto una herramienta muy flexible puesto que se puede interpretar tanto en términos de “*frecuencia relativa*” como de “*grado de creencia*” (Auvinet, 2002; Baecher & Christian, 2003).

Las modelaciones realizadas en esta investigación de la incertidumbre que afecta los análisis de flujo de agua, se llevan a cabo recurriendo a la teoría de la probabilidad y estadística. De esta manera, la incertidumbre sobre la conductividad hidráulica o sobre su logaritmo decimal, se modela mediante *variables aleatorias* o *campos aleatorios*, como se indica a continuación.

#### 3.2.2 Modelación por medio de variables aleatorias

La incertidumbre existente sobre la conductividad hidráulica,  $k$ , puede modelarse considerando a ésta ( $k$ ) o a su logaritmo (decimal  $\log_{10} k$  o natural  $\ln k$ ) como una *variable aleatoria continua*<sup>(3.3)</sup> (Figura 3.7). Específicamente, estas variables aleatorias describen los posibles valores que la permeabilidad puede tomar en diversos subdominios de flujo considerados estadísticamente homogéneos (*p. ej.* los subdominios de la Figura 3.1). La incertidumbre sobre la permeabilidad  $k$  se toma en cuenta a través de su densidad de probabilidad o por lo menos de sus primeros momentos (esperanza y varianza o desviación estándar de  $k$ ); estos parámetros pueden estimarse mediante algún método estadístico si se cuenta con los resultados de pruebas de campo o de laboratorio (*p. ej.* los datos de las Figuras 3.5 y 3.6), o bien, en forma subjetiva (opinión del experto en cuanto a la confiabilidad de su estimación). Una desventaja de la modelación con variables aleatorias, es que éstas no toman en cuenta la posición específica de las muestras ni la dependencia existente entre ellas; aun cuando es indiscutible que, en todo medio geotécnico existe una cierta *correlación espacial*, es decir, que las propiedades de dos muestras de suelo tienden en general a parecerse más entre sí cuando fueron extraídas en puntos cercanos que cuando lo fueron en puntos distantes (Auvinet, 2002).

---

<sup>(3.3)</sup> Aquella que puede asumir un número infinitamente grande de valores correspondientes a los puntos en uno o varios intervalos en el campo de los reales.

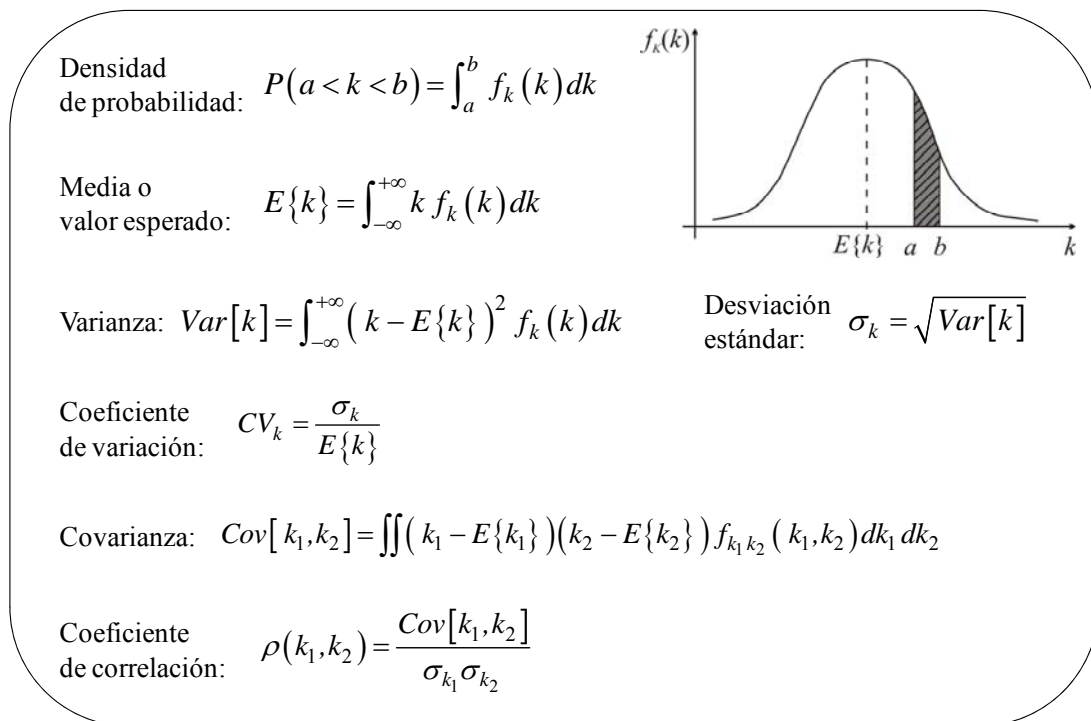


Figura 3.7 Variable aleatoria representando la incertidumbre en la permeabilidad

### 3.2.3 Modelación por medio de campos aleatorios

#### 3.2.3.1 Conceptos básicos

Una herramienta matemática formal que actualmente es muy empleada para modelar la variación espacial de las propiedades del suelo, incluyendo la conductividad hidráulica, son los *campos aleatorios* (ANEXO IV), también conocidos como *procesos estocásticos espaciales* o *procesos aleatorios* (Fenton, 1996; Auvinet, 2000). El término *campo* indica que el parámetro espacio es multidimensional (Vanmarcke, 1983). A diferencia de las variables aleatorias, la ventaja principal de la representación con campos aleatorios es que permiten describir la *correlación o dependencia espacial* entre propiedades en diferentes puntos del medio analizado. Asimismo, permiten abordar en forma racional el *efecto de escala geométrico*, es decir, la estabilización progresiva de las propiedades medias de materiales estadísticamente homogéneos conforme aumentan las dimensiones del volumen de referencia.

En el ANEXO IV se explica con mayor detalle la teoría de campos aleatorios; sin embargo, se exponen a continuación algunos conceptos generales importantes.

Un campo aleatorio de permeabilidad  $k(X)$  es una familia de variables aleatorias  $k_1, k_2, \dots$ , cada una asociada con el valor de la conductividad hidráulica del suelo en los puntos  $X_1, X_2, \dots$  del campo (Auvinet, 2002). Un campo de permeabilidad  $k(X)$  puede describirse con los parámetros y funciones que se indican en la Figura 3.8: su *media* o *valor esperado*; su *varianza* (que representa el grado de dispersión del campo respecto a la media); su *estructura de correlación*

(descrita mediante el *coeficiente de autocorrelación* entre valores del campo en distintos puntos); su *función de densidad de probabilidad conjunta* (es decir la descripción probabilista de todos los puntos del campo); entre otros.

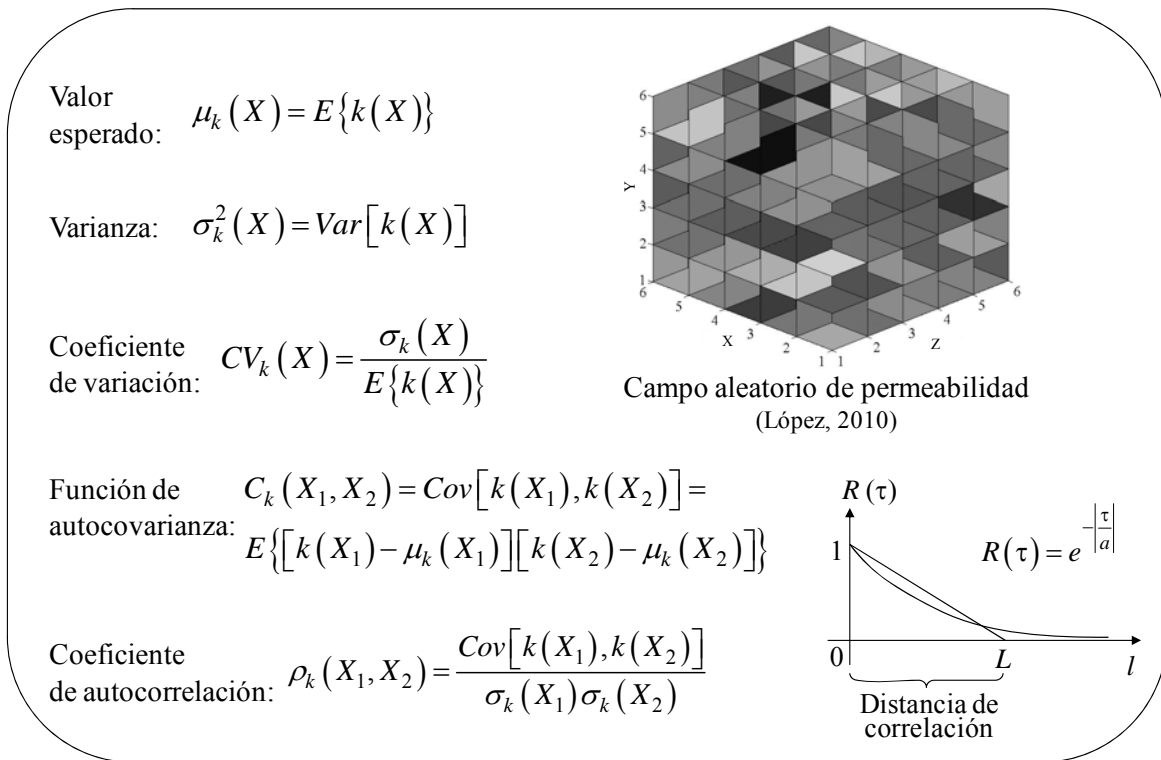


Figura 3.8 Parámetros y funciones para describir un campo aleatorio de permeabilidad

Dependiendo de la forma en cómo se evalúen los parámetros del campo, Auvinet (2002) ha sugerido distinguir tres tipos de campos aleatorios:

- *Campo aleatorio estimativo*: Corresponde a una situación en la que no se cuenta con muestreo ni mediciones de campo, por ejemplo en la etapa de diseño de una estructura de tierra y enrocamiento (Figura 3.9). En este caso los parámetros se estiman con base en la experiencia y opinión de un experto; de esta manera, los parámetros reflejan el conocimiento pero también la ignorancia del experto.
- *Campo aleatorio descriptivo*: Corresponde a una situación en la que los muestreos o ensayos de campo realizados permiten formular un modelo de tipo campo aleatorio que represente la variación espacial. En este caso los parámetros se estiman mediante un análisis geoestadístico<sup>(3,4)</sup>. La estimación y simulación incondicional o condicional de un campo aleatorio se expone en el ANEXO IV.

<sup>(3,4)</sup> Matheron (1965) definió la geoestadística como “La aplicación de las funciones aleatorias al reconocimiento y estimación de fenómenos naturales”. Journel por su parte, definió la Geoestadística como “Una rama de la Estadística que trata con fenómenos espaciales” (Journel & Huijbregts, 1978). Meyers (1987) la definió como “Una rama de los procesos estocásticos y de la estadística, siendo sus intereses primordiales los problemas de estimación, predicción y simulación en diversas disciplinas”.

- *Campo aleatorio mixto*: Corresponde a la combinación de las dos situaciones previas.

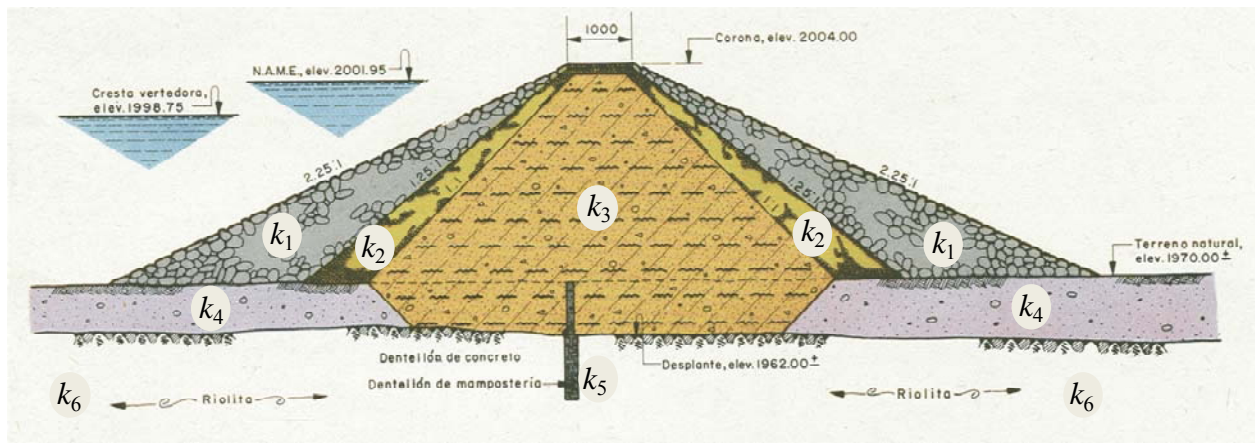


Figura 3.9 Campo aleatorio de permeabilidad de tipo estimativo

Un campo aleatorio es *estacionario*, si sus densidades de probabilidad y momentos asociados son invariantes por traslación en el espacio.

Un campo aleatorio es *ergódico*, si toda la información acerca de sus distribuciones de probabilidad conjunta y sus parámetros estadísticos pueden obtenerse a partir de una realización única del mismo.

Un campo aleatorio es *gaussiano*, si cada una de las variables del campo tiene densidad de probabilidad normal o gaussiana.

Si se cuenta con varios puntos de muestreo, para una mejor descripción de las variaciones espaciales es conveniente pasar del campo aleatorio original al *campo condicional* cuyo valor esperado debe coincidir con los valores medidos y cuya varianza debe anularse en los puntos de muestreo. Si el campo aleatorio adoptado es de tipo *gaussiano*, el campo condicional se define sin dificultad (Mood & Graybill, 1963). Así, para obtener los valores esperados *condicionales* de las propiedades de interés en puntos en los cuales no se han realizado mediciones (estimación puntual), se puede recurrir a la *estimación lineal multivariable* o a alguna de sus variantes como la técnica del *kriging* (Matheron, 1965; Krige, 1966; Juárez, 2001).

Disponer de un modelo basado en campos aleatorios permite también, realizar *simulaciones*, es decir, definir configuraciones posibles de la variación espacial de las propiedades. Si se genera un número importante de estas imágenes, es factible evaluar la posibilidad (y si se desea, la probabilidad) de que se alcancen localmente condiciones extremas que pudieran resultar críticas para la obra estudiada. La simulación se llama *incondicional* si es solamente compatible con los parámetros del campo y *condicional* si toma en cuenta además la localización y las características de las muestras disponibles (ANEXO IV). Ejemplos de campos aleatorios simulados en dos y tres dimensiones se pueden encontrar en el inciso 5.4 del Capítulo 5.

Los campos aleatorios han sido empleados por diversos autores para estudiar el flujo del agua a través de suelos (Smith & Freeze, 1979; Mantoglou & Gelhar, 1987; Griffiths, Fenton & Paice, 1996; López & Auvinet, 2004). En la mayoría de estos estudios se ha trabajado predominantemente con el campo aleatorio del logaritmo natural de la permeabilidad,  $\ln k$ . Un ejemplo de un *campo aleatorio de permeabilidad* se muestra en la Figura 3.10 (Fenton, 1996); en la misma, se observa que los puntos que están muy cercanos entre sí tienden a tener permeabilidades similares (es decir, están altamente correlacionados), y los puntos que están más alejados tienen diferentes permeabilidades (están poco correlacionados). Debido a que la correlación entre los puntos decrece con la distancia, la estructura de correlación a menudo se considera como una sencilla función de la distancia entre los mismos. Los modelos comúnmente empleados para estos fines dependen de la denominada *distancia de influencia*,  $L$ , que de manera burda, se define como la distancia más allá de la cual el campo no está correlacionado (Fenton, 1996).

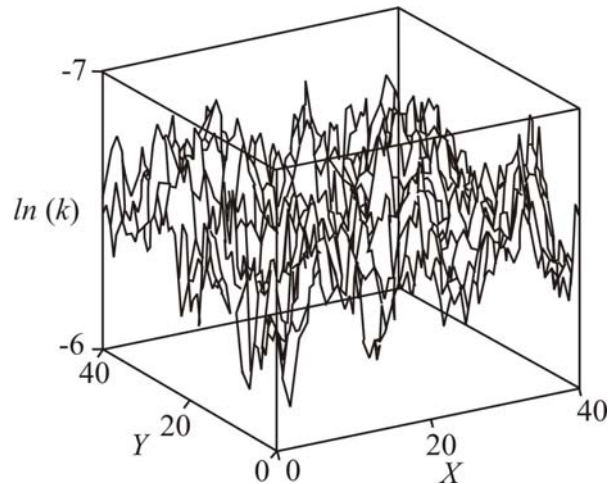


Figura 3.10 Campo aleatorio de permeabilidad (Fenton, 1996)

### 3.2.3.2 Campos aleatorios aparentes

Ya se mencionó con anterioridad que las pruebas de campo o de laboratorio proporcionan en general, resultados afectados por *errores sistemáticos y/o aleatorios* atribuibles a los operadores y a las imprecisiones implícitas en la técnica de prueba empleada. Estos errores significan que en realidad se trabaja con *campos aleatorios aparentes*. Un error de tipo aditivo aleatorio diluye la estructura de correlación del campo y genera el denominado “efecto de pepita” (pérdida de correlación entre puntos contiguos), mientras que, un sesgo sistemático, pero de magnitud aleatoria, aumenta la correlación espacial aparente, como se explica a continuación (Auvinet, 2002).

#### (a) Ensayes sin sesgo

Si  $k(X)$  es el valor real de la permeabilidad en el punto de medición, se considera que el resultado del ensaye proporciona un valor aparente (Auvinet, 2002):

$$\tilde{k}(X) = k(X) + e \quad (3.13)$$

donde  $e$  es el error aleatorio, de tipo aditivo, sobre el resultado del ensaye. Este error se supone no correlacionado en el espacio e independiente del campo aleatorio.

Si el ensaye no presenta sesgo, o si el sesgo es conocido y ha sido corregido,  $e$  es una variable aleatoria definida por su esperanza  $E\{e\} = 0$  y varianza  $Var[e]$ . Se tiene entonces, utilizando una notación simplificada:

$$E\left\{\tilde{k}\right\} = E\{k\} \quad (3.14)$$

La incertidumbre sobre los resultados de ensayes o estimaciones no sesgadas no afecta por tanto la percepción que el observador puede tener de la esperanza del campo. Por lo contrario, aumenta la incertidumbre global sobre los valores del campo, en efecto:

$$Var\left[\tilde{k}\right] = Var[k] + Var[e] \quad (3.15)$$

Por otra parte:

$$Cov\left[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2\right] = E\left\{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2\right\} - E\left\{\tilde{k}_1\right\} E\left\{\tilde{k}_2\right\} = Cov[k_1, k_2] \quad (3.16)$$

Si  $\rho_k\left(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2\right)$  es el coeficiente de correlación de las permeabilidades aparentes  $\tilde{k}$  en los puntos  $X_1$  y  $X_2$ , es posible escribir:

$$\rho_k\left(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2\right) = \frac{Cov\left[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2\right]}{\sqrt{Var\left[\tilde{k}_1\right] \cdot Var\left[\tilde{k}_2\right]}} = \frac{Cov[k_1, k_2]}{\sqrt{(Var[k_1] + Var[e]) (Var[k_2] + Var[e])}} \quad (3.17)$$

y, puesto que  $Var[e] \geq 0$ :

$$\rho_k\left(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2\right) \leq \rho_k(k_1, k_2) \quad (3.18)$$

Por tanto, la incertidumbre sobre los resultados de ensayes o estimaciones no sesgados reduce el grado de correlación aparente entre las propiedades asociadas a diferentes puntos del medio considerado. En particular introduce una reducción brusca del coeficiente de correlación entre



valores medidos en puntos contiguos (efecto de *pepita*).

(b) Ensayes con sesgo aleatorio

La situación es muy diferente cuando las mediciones presentan un error sistemático o sesgo aditivo,  $\beta$ , no conocido. Se tiene entonces:

$$\tilde{k}(X) = k(X) + \beta \tag{3.19}$$

donde  $\beta$  es el sesgo aleatorio, supuesto constante para todas las mediciones y definido por su valor esperado  $E\{\beta\}$  y su varianza  $Var[\beta]$ . Si se admite que  $\beta$  es independiente del campo aleatorio, se tiene, usando una notación simplificada:

$$E\{\tilde{k}\} = E\{k\} + E\{\beta\} \tag{3.20}$$

$$Var[\tilde{k}] = Var[k] + Var[\beta] \tag{3.21}$$

$$Cov[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2] = E\{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2\} - E\{\tilde{k}_1\} \cdot E\{\tilde{k}_2\} = Cov[k_1, k_2] + Var[\beta] \tag{3.22}$$

$$\rho_k(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) = \frac{Cov[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2]}{\sqrt{Var[\tilde{k}_1] \cdot Var[\tilde{k}_2]}} = \frac{Cov[k_1, k_2] + Var[\beta]}{\sqrt{(Var[k_1] + Var[\beta]) \cdot (Var[k_2] + Var[\beta])}} \dots\dots\dots(3.23)$$

En este caso particular, el sesgo aleatorio introduce una correlación ficticia entre las variables.

Los errores introducidos por la estimación de ciertas propiedades a partir de otras características del material mediante relaciones poco confiables son análogos a los introducidos por los ensayos dudosos y tienen las mismas consecuencias.

Cuando se usan propiedades índices que presentan correlaciones imperfectas para estimar las propiedades mecánicas e hidráulicas de los suelos, solamente se puede esperar tener acceso a un campo aparente de variaciones de estas últimas propiedades afectado por las distorsiones analizadas en esta sección.

# Evaluación de la incertidumbre en los resultados

# 4

## 4.1 Introducción

Para evaluar la propagación de la incertidumbre que afecta los resultados de un análisis geotécnico (mediante variables aleatorias o campos aleatorios), es necesario recurrir a técnicas especiales desarrolladas o adaptadas para tomar en cuenta la naturaleza aleatoria de los parámetros inciertos del análisis (propiedades de los materiales, condiciones de frontera, fuerzas o cargas aplicadas, los propios métodos de cálculo, entre otros).

En la Figura 4.1 se presenta una clasificación sencilla de las técnicas comúnmente empleadas en la evaluación de la propagación de la incertidumbre en los resultados de análisis geomecánicos. Los métodos se dividen en aquéllos que permiten obtener soluciones exactas (*transformación Jacobiana*) y aproximadas (*métodos de perturbaciones; métodos espectrales*). Se incluye el *método* o *simulación de Monte Carlo*, que se utiliza generalmente para calibrar los resultados obtenidos con otras técnicas probabilistas.

Dentro de los métodos de perturbaciones mayormente utilizados en la actualidad, se pueden mencionar las *técnicas de segundos momentos* (aproximaciones de primer o mayor orden); el *método de estimación puntual*, cuyo creador fue Rosenblueth (1975) y que a la fecha este método ha sido discutido con gran interés por diversos autores en vista del potencial reconocido en el mismo; como una extensión de las técnicas anteriores se incluye un nuevo método denominado “*mixto*”. En cuanto a los *métodos espectrales*, el enfoque propuesto por Ghanem y Spanos (1991) que combina el método de elementos finitos con expansiones en serie de *Karhunen-Loève* y *caos polinomial*, es el más empleado. Las técnicas anteriores son aquéllas en las que se centra la atención en este capítulo.

Existen otros métodos estocásticos (*expansión en serie de Neumann; método de Hasofer-Lind -FORM-; método de la integral ponderada -weighted integral method-; método de cuadratura -quadrature method-; entre otros*), para la evaluación de la propagación de la incertidumbre en problemas geotécnicos que quedan fuera del alcance de la presente investigación. Lectores

interesados pueden consultar p. ej. *Yamasaki et al.* (1988); *Baecher & Christian* (2003); *Sudret & Der Kiureghian* (2000), respectivamente.

Los métodos estocásticos e inclusive la simulación de Monte Carlo, generalmente se combinan con otras técnicas numéricas para la solución de problemas geomecánicos, entre éstas se pueden mencionar el *método de elementos finitos (FEM –Finite Element Method–)*, el *método de diferencias finitas (FDM –Finite Differences Method–)*, el *método de elementos de frontera o de ecuaciones integrales de frontera (BEM –Boundary Element Method–)*, el *método de los paseos casuales (RWM –Random Walk Method–)*, entre otros (ver Figura 4.1).

En general, el principio básico de las técnicas probabilistas es la transformación de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria  $X$  (variable independiente, p.ej. una propiedad del suelo, como la conductividad hidráulica) en la densidad de probabilidad de cualquier función  $Y=g(X)$  de dicha variable (variable dependiente, p.ej. el gasto). Estos métodos son aplicables a funciones de una o varias variables aleatorias. Cuando no es posible trabajar con la función de densidad de probabilidad de una o varias variables aleatorias, se utilizan los primeros momentos que las definen (media o valor esperado y desviación estándar o varianza).

Así, en los análisis de flujo de agua realizados en esta tesis, si la densidad de probabilidad (o los primeros momentos) de la conductividad hidráulica  $k$  (o de su logaritmo decimal  $\log_{10} k$ ) se conoce en cierto dominio, es posible evaluar la propagación de la incertidumbre de la permeabilidad a cualquier función de la misma, tal como el potencial o carga hidráulica, el gradiente hidráulico, la velocidad de flujo y el gasto, entre otros, obteniéndose el valor esperado, la varianza o desviación estándar, y cuando es posible, la densidad de probabilidad de esta variable (Figura 4.2).

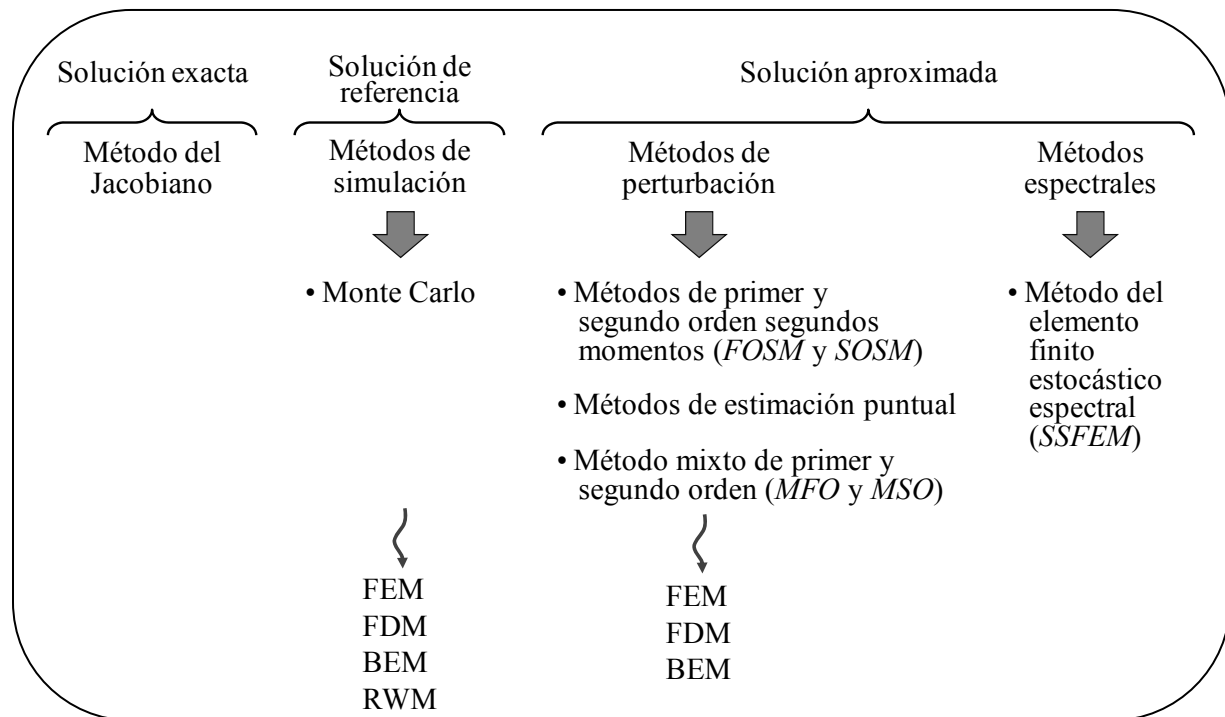


Figura 4.1 Clasificación simplificada de las técnicas más comunes para evaluar la propagación de la incertidumbre

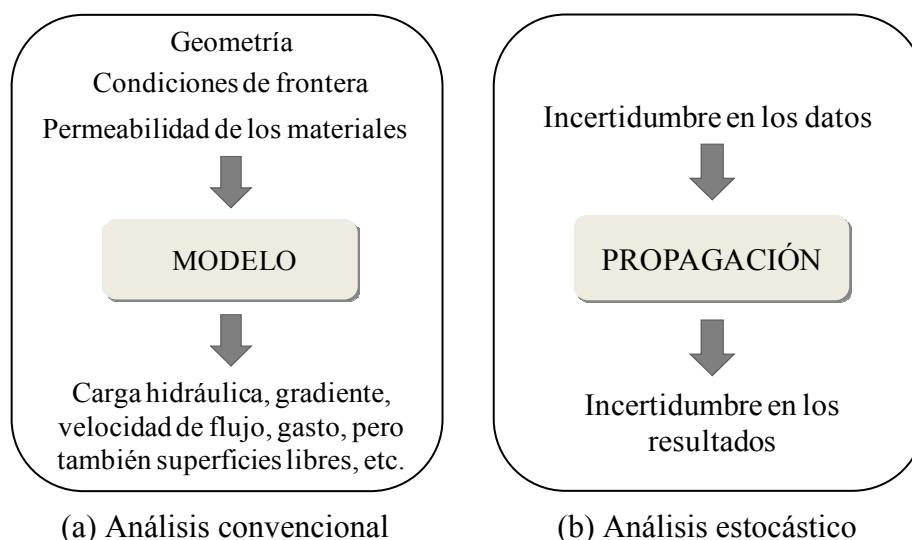


Figura 4.2 Procedimiento esquemático simplificado de los análisis de flujo de agua

A continuación se discuten con detalle los principales métodos estocásticos para evaluar la propagación de la incertidumbre.

## 4.2 Métodos de evaluación de la incertidumbre

### 4.2.1 Método del *Jacobiano*

La interpretación gráfica de la transformación *Jacobiana* se ilustra en la Figura 4.3. En la misma,  $f_X(x)$  es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria independiente  $X$ ;  $Y=g(X)$  es una función determinista o de comportamiento de  $X$ . El método del *Jacobiano* es un *método exacto* que permite obtener la función de densidad de probabilidad  $f_Y(y)$  de  $Y$ , considerando  $f_X(x)$  y la función  $g(X)$  por medio de la siguiente expresión (Benjamin & Cornell, 1970):

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f_X(x) \quad (4.1)$$

Donde  $\left| dx/dy \right|$  se conoce como el *Jacobiano*.

El método puede generalizarse fácilmente a funciones de varias variables aleatorias (Mood & Graybill, 1963). En algunos casos, la solución del problema estocástico es trivial y no es necesario inclusive, la aplicación de la transformación *Jacobiana*. Lo anterior puede ocurrir cuando la función  $Y=g(X)$  es explícita y su función de densidad de probabilidad es conocida. Por otra parte, cuando una solución exacta no está disponible (porque las condiciones geométricas, de frontera e hidráulicas se tornan más complejas; el caso del método del elemento finito es un ejemplo donde la función  $g(X)$  no es explícita), es posible utilizar métodos aproximados, como se explica en lo que sigue.

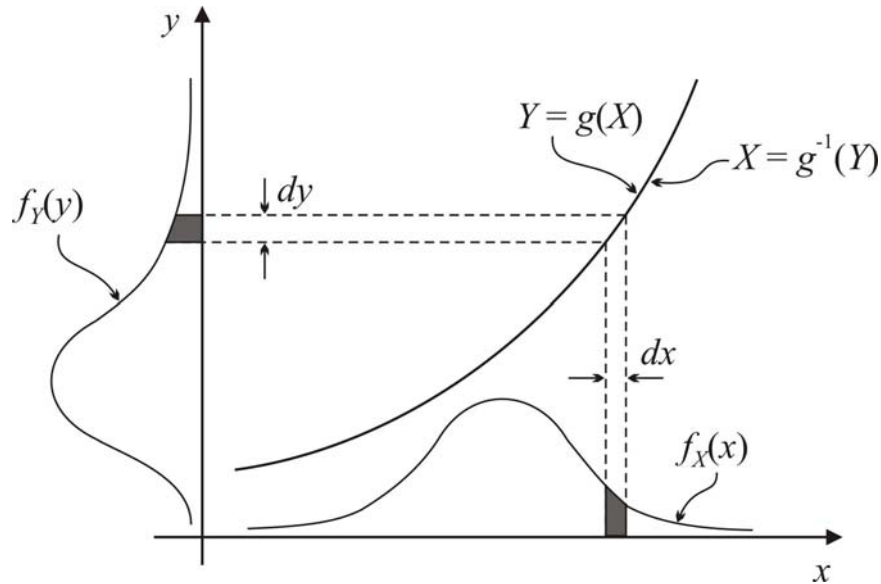


Figura 4.3 Interpretación gráfica de la transformación Jacobiana para una función de una variable

#### 4.2.2 Métodos de perturbaciones

El *método de las perturbaciones* (Mathews & Walker, 1964; Auvinet & Cambou, 1974; Carels, 1982) se basa en una representación simplificada de la densidad de probabilidad de funciones de variables aleatorias, mediante los  $i$  primeros momentos de la misma (donde el número  $i$  depende de la técnica empleada). Estos momentos se estiman agregando a un término central medio los efectos “perturbadores” de cada variable aleatoria (Auvinet, 2002). En la práctica, este método consiste generalmente en obtener los dos primeros momentos (valor esperado y desviación estándar o varianza) de cada uno de los parámetros de interés (por ejemplo, carga hidráulica, gradiente hidráulico, velocidad de flujo, etc.) que son función de las variables aleatorias del sistema (en este caso, las conductividades hidráulicas del suelo ó sus logaritmos decimales), cuyo comportamiento aleatorio se introduce en términos de su varianza y esperanza matemática.

##### 4.2.2.1 Métodos de segundos momentos (aproximaciones de primer orden *FOSM* y de segundo orden *SOSM*)

###### (a) Introducción

Los *métodos de primer orden segundos momentos* y *segundo orden segundos momentos* constituyen un caso particular del método de perturbaciones. Se llaman de *segundos momentos* porque es el momento estadístico de mayor orden empleado en el análisis. En estos métodos, la función de una o varias variables aleatorias se sustituye por una expansión en serie de Taylor truncada hasta el orden deseado. En la práctica, esta técnica se ha empleado hasta el segundo orden. La *aproximación de primer orden* recurre a una representación aproximada de la función por medio de una recta, y la *aproximación de segundo orden* lo hace por medio de una parábola (Figura 4.4); en ambos casos, la expansión en serie de Taylor se trunca alrededor de la media o valor esperado de la variable o variables aleatorias de interés. Estas técnicas envuelven el cálculo

de derivadas parciales, cuyo orden depende de la aproximación deseada. Cuando las derivadas parciales no pueden obtenerse de manera explícita, se deben calcular numéricamente (Chowdhury, 1993; Nechnech, 1994; El-Ramly *et al.*, 2001), como se explica más adelante en el inciso (c).

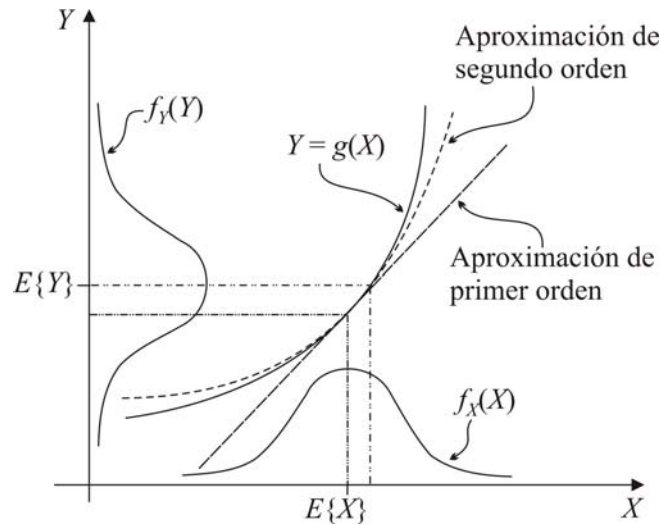


Figura 4.4 Aproximaciones de primer y segundo orden de la función  $Y = g(X)$

Así, en el caso simple en el que el parámetro de interés  $Y$  en un punto es función de una sola variable  $X$ , el algoritmo de cálculo puede representarse por la función de comportamiento  $Y = g(X)$  que se ilustra en la Figura 4.4. Entonces la aplicación del método de segundos momentos consiste en evaluar la propagación de la incertidumbre de la variable  $X$  aproximando la función de comportamiento mediante una expansión en serie de Taylor truncada, y obtener a través de esta información la densidad de probabilidad  $f_Y(Y)$  o al menos sus primeros momentos, como se explica a continuación (Benjamin & Cornell, 1970).

## (b) Fundamentos del análisis de incertidumbre de primer y segundo orden

### (b.1) Caso I: Función de una variable

Sea una función que depende de una sola variable:

$$Y = g(X) \quad (4.2)$$

El desarrollo en serie de Taylor de la función  $Y = g(X)$  en la vecindad del valor medio de  $X$ , es:

$$g(X) = g(\mu_X) + (X - \mu_X) \left[ \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]_{\mu_X} + \frac{(X - \mu_X)^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 g(X)}{\partial X^2} \right]_{\mu_X} + \dots \quad (4.3)$$

Donde  $\left[ \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]_{\mu_X}$  y  $\left[ \frac{\partial^2 g(X)}{\partial X^2} \right]_{\mu_X}$  son las derivadas de primer y segundo orden de  $g(X)$  con respecto a  $X$ , evaluadas para el valor medio de  $X$ ,  $\mu_X$ .

Si el coeficiente de variación de  $X$  y el grado de no-linealidad de la función  $g(X)$  son pequeños en las cercanías del valor medio de  $X$ , resulta aceptable conservar sólo los dos primeros términos de la expansión en serie de Taylor anterior.

Si se toma la esperanza matemática de ambos miembros de la igualdad (4.3), conservando los dos primeros términos de la serie de Taylor y considerando que  $E\{\mu_X\} = 0$ , la siguiente *aproximación de primer orden* del valor esperado de la función  $Y = g(X)$  es válida:

$$E\{Y\}^I = E\{g(X)\} \cong g(\mu_X) \quad (4.4)$$

Es decir, que el valor esperado de la función  $Y = g(X)$  es aproximadamente igual a evaluar dicha función para el valor medio o esperado de la variable  $X$ .

Asimismo, si se consideran los tres primeros términos de la serie de Taylor, la *aproximación de segundo orden* del valor esperado de la función  $Y = g(X)$  es:

$$E\{Y\}^{II} \cong g(\mu_X) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g(X)}{\partial X^2} \right]_{\mu_X} Var[X] \quad (4.5)$$

De la misma forma se puede obtener la *aproximación de primer orden* de la varianza de la función  $Y$ , considerando que  $Var[g(E\{X\})] = 0$ :

$$Var[Y]^I \cong Var \left\{ \left[ \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]_{\mu_X} (X - \mu_X) \right\} \cong \left\{ \left[ \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]_{\mu_X} \right\}^2 Var[X] \quad (4.6)$$

O bien, la *aproximación de segundo orden* de la varianza de la función  $Y$ :

$$Var[Y]^{II} \cong Var[Y]^I + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 g(X)}{\partial X^2} \right]_{\mu_X} \cdot Var[X] \right\}^2 \quad (4.7)$$

Las aproximaciones de primer orden anteriores, son rigurosamente exactas cuando  $Y = g(X)$  es una función lineal de  $X$ .

### (b.2) Caso II: Función de varias variables

Se pueden considerar las mismas aproximaciones utilizando el desarrollo de Taylor anterior, pero ahora para una función que depende de varias variables:

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4.8)$$

La *aproximación de primer orden* del valor esperado de  $Y$  resulta:

$$E\{Y\}^I \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (4.9)$$

donde  $\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}$  son los valores medios de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

La *aproximación de segundo orden* del valor esperado de  $Y$  es:

$$E\{Y\}^{II} \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{\mu_X} Cov[X_i, X_j] \quad (4.10)$$

La *aproximación de primer orden* de la varianza de la función  $Y$  es:

$$Var[Y]^I \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{\mu_{X_i}} \left[ \frac{\partial g}{\partial X_j} \right]_{\mu_{X_j}} Cov[X_i, X_j] \quad (4.11)$$

Cuando no existe correlación entre las variables  $X_i$ , la varianza anterior resulta:

$$Var[Y]^I \cong \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{\mu_{X_i}} \right\}^2 Var[X_i] \quad (4.12)$$

De igual manera, la *aproximación de segundo orden* de la varianza de la función  $Y$  es:

$$Var[Y]^{II} \cong Var[Y]^I + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial X_l \partial X_m} \right]_{\mu_{X_l} \mu_{X_m}} \times \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial X_p \partial X_q} \right]_{\mu_{X_p} \mu_{X_q}} \left( Cov[X_l, X_q] \cdot Cov[X_m, X_p] + Cov[X_l, X_p] \cdot Cov[X_m, X_q] \right) \quad (4.13)$$

(c) Técnicas numéricas para la aplicación de métodos de perturbación de primer y segundo orden

Como se pudo observar en los incisos anteriores, una de las características de los métodos *FOSM* o *SOSM* es que se basan en el cálculo de derivadas parciales de funciones de una o varias variables aleatorias. En ocasiones resulta complicado calcular estas derivadas de manera exacta, sobre todo cuando las funciones son altamente no-lineales. Ante esta situación existe la posibilidad de determinarlas numéricamente. Uno de los métodos más conocidos para estos fines, es la *diferenciación numérica* o *aproximación por diferencias*, la cual permite evaluar las derivadas de una función por medio de sus valores dados en ciertos puntos (ver *p. ej.* El-Ramly



*et al.*, 2001). Otra de estas técnicas, es la de *cocientes polinomiales* (Chowdhury, 1993; Nechnech, 1994), misma que se describe y aplica con detalle en el ANEXO V. Otra posibilidad, es sustituir la función original por una ecuación más sencilla (por ejemplo un polinomio de segundo orden considerando solamente tres puntos de la función real) que facilite el cálculo de las derivadas parciales de dicha función; este es el principio básico del *método mixto* que se describe en el inciso 4.2.2.3. Adicionalmente, un resumen completo de técnicas de derivación numérica puede consultarse en *Kuo* (1972).

#### 4.2.2.2 Métodos de estimación puntual (*PEM*)

##### (a) Fundamentos de la estimación bipuntual de Rosenblueth (1975)

En 1975 Rosenblueth propuso esta técnica para evaluar la propagación de la incertidumbre de variables continuas independientes por medio de valores puntuales. La idea básica consiste en remplazar las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas por distribuciones de probabilidad equivalentes discretas que tienen los mismos momentos estadísticos, para calcular entonces la media o valor esperado, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría de una función de comportamiento de una o varias variables aleatorias. Lo anterior se lleva a cabo considerando dos puntos de estimación en una desviación estándar a cada lado de la media o valor esperado de cada distribución que representa las variables aleatorias de interés. La función de comportamiento se evalúa para cada combinación posible de puntos de estimación, produciendo  $2^n$  soluciones, donde  $n$  es el número de variables aleatorias que se están estudiando. Así, el valor esperado, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría de la función de comportamiento pueden determinarse a partir de estas  $2^n$  soluciones.

El método es razonablemente robusto y satisfactoriamente exacto para una variedad de problemas prácticos. En esta técnica los requerimientos computacionales se incrementan con el número de las cantidades inciertas de interés; a pesar de ello, permanece como una herramienta estocástica simple, directa y efectiva para el cálculo de los primeros momentos de funciones de variables aleatorias; aun más, los principios básicos de esta técnica han resultado muy atractivos para diversos autores, quienes en años recientes han sugerido algunas variantes del método, como se verá al final de este inciso.

Rosenblueth (1975) describió el método para tres casos principales: (1) Caso I: Cuando  $Y$  es función de una variable  $X$ , cuya media, varianza y coeficiente de asimetría son conocidos; (2) Caso II: Cuando  $Y$  es función de una variable  $X$  cuya distribución es simétrica y aproximadamente *gaussiana*; y (3) Caso III: Cuando  $Y$  es función de  $n$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , cuyas distribuciones son simétricas y pueden estar correlacionadas o no. En la mayoría de los casos, los cálculos se efectúan en dos puntos, para los que Rosenblueth emplea la siguiente notación:

$$E\{Y^m\} \approx P_+ y_+^m + P_- y_-^m \quad (4.14)$$

En esta ecuación:

$Y$                       Función de la variable  $X$ ,  $Y = g(X)$ .

$E\{Y^m\}$	Valor esperado de $Y$ elevado a la potencia $m$ .
$y_+$	Valor de $Y$ evaluado en el punto $x_+$ , el cual es mayor que la media $\mu_X$ .
$y_-$	Valor de $Y$ evaluado en el punto $x_-$ , el cual es menor que la media $\mu_X$ .
$P_+, P_-$	Pesos (o probabilidades).

Los casos anteriores, se describen con detalle a continuación.

(b) Casos de análisis propuestos por Rosenblueth (1975)

(b.1) Caso I: Dos puntos de estimación; cuando  $Y$  es función de una variable  $X$ , con media, varianza y coeficiente de asimetría conocidos

Sea  $f_X(x)$  la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua  $X$  (como se ilustra en la Figura 4.5), con dos valores de  $x$ :  $x_-$  y  $x_+$ , localizados a ambos lados de su esperanza matemática o valor medio  $\mu_X$ . Si se asume que  $x_-$  y  $x_+$  constituyen el dominio de definición de alguna variable aleatoria discreta  $x^0$ , las probabilidades correspondientes a dicha variable discreta están definidas por:

$$P_+ = \text{probabilidad}[x^0 = x_+] \quad ; \quad P_- = \text{probabilidad}[x^0 = x_-] \quad (4.15)$$

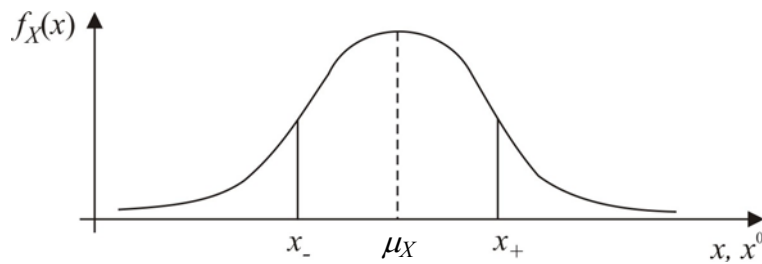


Figura 4.5 Función de densidad de probabilidad  $f_X(x)$  de una variable aleatoria  $x$

De acuerdo con Rosenblueth (1975),  $x^0$  constituye una aproximación puntual de la variable continua  $X$ , siempre que los tres primeros momentos de la distribución de  $x^0$  sean iguales a los de la distribución de  $X$ . Es decir, que se cumplan las siguientes condiciones:

— La esperanza de  $x^0$  es equivalente a la de  $X$  ( $\mu_{x^0} = \mu_X$ ), esto es:

$$\mu_X = P_+x_+ + P_-x_- \quad (4.16)$$

— La varianza de  $x^0$  es equivalente a la de  $X$  ( $\sigma_{x^0}^2 = \sigma_X^2$ ), donde:

$$\sigma_X^2 = P_+(x_+ - \mu_X)^2 + P_-(x_- - \mu_X)^2 \quad (4.17)$$

— El tercer momento central de  $x^0$  es equivalente al de  $X$ , es decir:

$$\nu_X \sigma_X^3 = P_+ (x_+ - \mu_X)^3 + P_- (x_- - \mu_X)^3 \quad (4.18)$$

Donde  $\nu_X$  es el coeficiente de asimetría<sup>(4.1)</sup>.

— Finalmente, con base en la teoría de probabilidad, también se debe cumplir:

$$P_+ + P_- = 1 \quad (4.19)$$

La solución del sistema constituido por las ecuaciones (4.16) a (4.19) permite determinar de manera sencilla los valores de  $P_+$ ,  $P_-$ ,  $x_+$  y  $x_-$  (Rosenblueth, 1981):

$$P_+ = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\nu_X}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\nu_X / 2)^2}} \right] \quad (4.20)$$

$$P_- = 1 - P_+ \quad (4.21)$$

$$x_+ = \mu_X + \sigma_X \left[ \frac{\nu_X}{2} + \sqrt{1 + (\nu_X / 2)^2} \right] \quad (4.22)$$

$$x_- = \mu_X + \sigma_X \left[ \frac{\nu_X}{2} - \sqrt{1 + (\nu_X / 2)^2} \right] \quad (4.23)$$

Cuando la función de distribución de probabilidad es simétrica ( $\nu_X = 0$ ), las expresiones de (4.20) a (4.23) se simplifican:

$$P_+ = P_- = \frac{1}{2} \quad (4.24)$$

$$x_{\pm} = \mu_X \pm \sigma_X \quad (4.25)$$

Así, Rosenblueth considera que la densidad de probabilidad de la función  $Y = g(X)$ , en la que  $X$  es una variable aleatoria, puede representarse por una aproximación puntual  $y^0$  definida por los valores  $y_+$ ,  $y_-$  y sus probabilidades. Los valores  $y_+$  y  $y_-$  se determinan evaluando la función  $Y = g(X)$  para los valores  $x_+$  y  $x_-$ :

$$y_+ = g(x_+) \quad ; \quad y_- = g(x_-) \quad (4.26)$$

Las probabilidades correspondientes son:

$$P_+ = \text{probabilidad} [y^0 = y_+] \quad ; \quad P_- = \text{probabilidad} [y^0 = y_-] \quad (4.27)$$

---

<sup>(4.1)</sup> Las medidas de asimetría son indicadores que permiten establecer el *grado de simetría* (o *asimetría*) que presenta la distribución de probabilidad de una variable aleatoria sin tener que hacer su representación gráfica. *P. ej.* el coeficiente de asimetría  $\nu_X$  definido como:  $\nu_X = \mu_{3X} / \sigma_X^3$  (donde  $\mu_{3X}$  es el tercer momento central de  $X$ ) representa la medida de la asimetría de una distribución de probabilidad con respecto a su dispersión. Si  $\nu_X = 0$ , la distribución es simétrica. Si  $\nu_X > 0$ , la distribución es asimétrica positiva o a la derecha. Si  $\nu_X < 0$ , la distribución es asimétrica negativa o a la izquierda (Canavos, 1988).

De esta manera, conociendo  $x_+$ ,  $x_-$ ,  $P_+$  y  $P_-$ , los parámetros de la distribución  $f_Y(y)$  se pueden obtener fácilmente con las ecuaciones (4.16) a (4.18):

$$\mu_Y = P_+y_+ + P_-y_- \quad (4.28)$$

$$\sigma_Y^2 = P_+(y_+ - \mu_Y)^2 + P_-(y_- - \mu_Y)^2 \quad (4.29)$$

$$v_X\sigma_Y^3 = P_+(y_+ - \mu_Y)^3 + P_-(y_- - \mu_Y)^3 \quad (4.30)$$

El principio general de la estimación bipuntual de Rosenblueth para una función de una variable aleatoria se ilustra en la Figura 4.6.

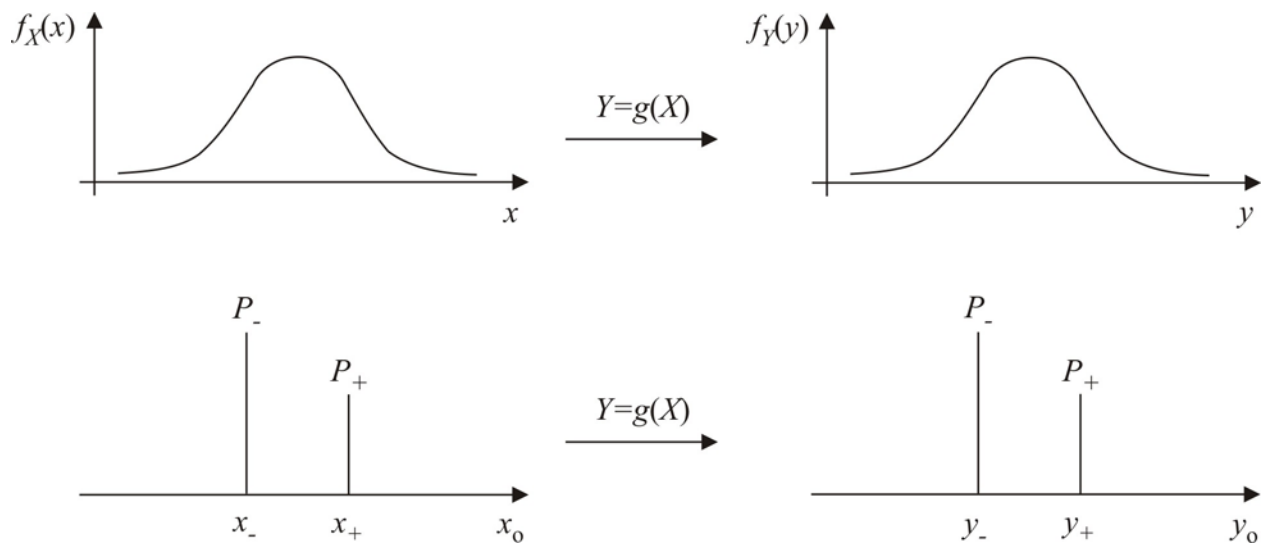


Figura 4.6 Principio general de la estimación bipuntual de Rosenblueth para una función de una variable aleatoria

(b.2) Caso II: Varios puntos de estimación; cuando  $Y$  es función de una variable  $X$ , cuya distribución es simétrica y aproximadamente *gaussiana*

En este caso, Rosenblueth sugiere que la aproximación de la expresión (4.14) puede mejorarse si se considera que la densidad de probabilidad se concentra en más de dos puntos. Por ejemplo, para tres puntos de estimación se puede considerar un punto central en  $x=\mu_X$ , y dos puntos  $x_+$  y  $x_-$  simétricamente distribuidos alrededor de la media. La probabilidad del punto central es  $P$ ; la notación restante es similar al Caso I anterior. De esta manera:

$$\sigma_X^2 = 2P_+(x_+ - \mu_X)^2 \quad (4.31)$$

$$3\sigma_X^4 = 2P_+(x_+ - \mu_X)^4 \quad (4.32)$$

$$2P_+ + P = 1 \quad (4.33)$$

La solución del sistema de ecuaciones previo, proporciona los siguientes resultados (similar a como se obtuvo en el Caso I):

$$P = \frac{2}{3} \quad ; \quad P_+ = P_- = \frac{1}{6} \quad (4.34)$$

$$x_{\pm} = \mu_X \pm \sqrt{3}\sigma_X \quad (4.35)$$

Por analogía con el Caso I:

$$E\{Y^m\} \approx P_-(y_-)^m + P(y_{\mu})^m + P_+(y_+)^m \quad (4.36)$$

Donde  $y_{\mu}$  es el valor de  $Y$  evaluado en  $\mu_X$ .

(b.3) Caso III: Cuando  $Y$  es función de  $n$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , cuyas distribuciones son simétricas y pueden o no estar correlacionadas

(b.3.1) *Función de dos variables*

Sea la función  $Y = g(X_1, X_2)$ , en la que  $X_1, X_2$  son variables aleatorias independientes o no. La discretización geométrica y las concentraciones de probabilidades para dos variables se muestran en la Figura 4.7.

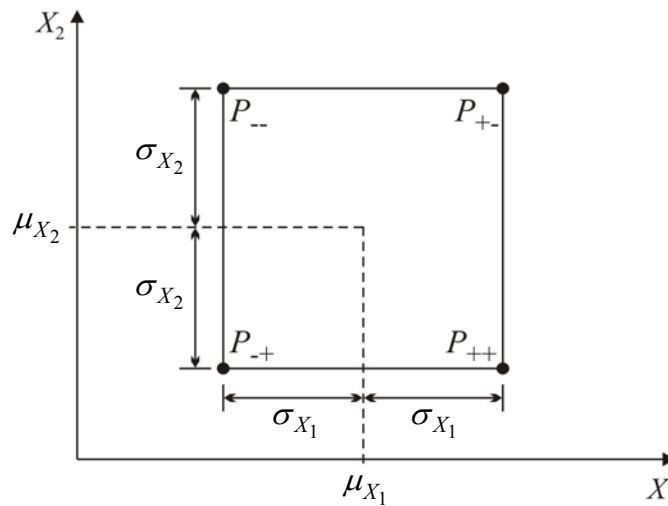


Figura 4.7 Concentraciones de la función de densidad de probabilidad cuando  $Y = g(X_1, X_2)$

Los primeros momentos de la función se obtienen con:

$$\mu_Y = P_{++}y_{++} + P_{+-}y_{+-} + P_{-+}y_{-+} + P_{--}y_{--} \quad (4.37)$$

Donde:

$$y_{\pm\pm} = g(\mu_{X_1} \pm \sigma_{X_1}, \mu_{X_2} \pm \sigma_{X_2}) \quad (4.38)$$

$$\mu_{Y^n} = P_{++}y_{++}^n + P_{+-}y_{+-}^n + P_{-+}y_{-+}^n + P_{--}y_{--}^n \quad (4.39)$$

$$Var[Y] = \sigma_Y^2 = \mu_{Y^2} - (\mu_Y)^2 \quad (4.40)$$

– Cuando las variables son simétricas e independientes, las probabilidades son:

$$P_{++} = P_{+-} = P_{-+} = P_{--} = \frac{1}{4} \quad (4.41)$$

– Cuando las variables son simétricas pero correlacionadas, las probabilidades resultan:

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{4}(1 + \rho) \quad ; \quad P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{4}(1 - \rho) \quad (4.42)$$

Donde  $\rho$  es el coeficiente de correlación entre las variables  $X_1$  y  $X_2$ .

### (b.3.2) Función de tres variables

Sea la función  $Y = g(X_1, X_2, X_3)$ , en la que  $X_1, X_2, X_3$  son variables aleatorias independientes o no. La discretización geométrica y las concentraciones de probabilidades para tres variables se muestran en la Figura 4.8.

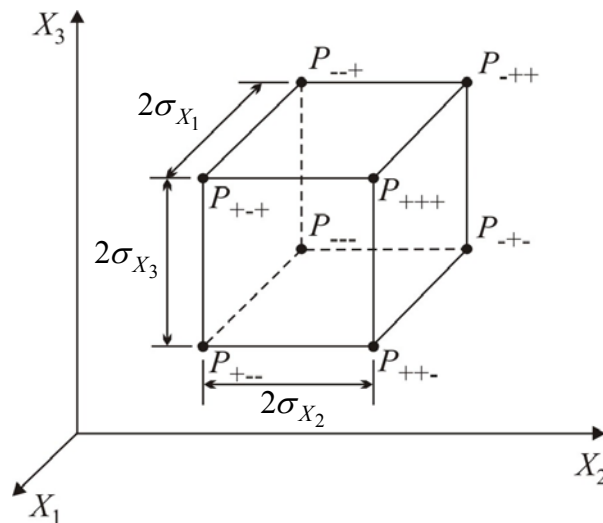


Figura 4.8 Concentraciones de la función de densidad de probabilidad cuando  $Y = g(X_1, X_2, X_3)$

En este caso, los primeros momentos de la función se obtienen con:

$$\mu_Y = P_{+++}y_{+++} + P_{++-}y_{++-} + P_{+-+}y_{+-+} + P_{+--}y_{+--} + P_{-++}y_{-++} + P_{-+-}y_{-+-} + P_{-+}y_{-+} + P_{++}y_{++} \quad (4.43)$$

$$\mu_{Y^n} = P_{+++}y_{+++}^n + P_{++-}y_{++-}^n + P_{+-+}y_{+-+}^n + P_{+--}y_{+--}^n + P_{-++}y_{-++}^n + P_{-+-}y_{-+-}^n + P_{-+ -}y_{-+ -}^n + P_{---}y_{---}^n \quad (4.44)$$

$$Var[Y] = \sigma_Y^2 = \mu_{Y^2} - (\mu_Y)^2 \quad (4.45)$$

– Cuando las variables son simétricas e independientes, las probabilidades resultan:

$$P_{+++} = \dots = P_{---} = \frac{1}{8} \quad (4.46)$$

– Cuando las variables son simétricas pero correlacionadas, las probabilidades son:

$$P_{+++} = P_{---} = \frac{1}{8}(1 + \rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31}) \quad (4.47)$$

$$P_{++-} = P_{--+} = \frac{1}{8}(1 + \rho_{12} - \rho_{23} - \rho_{31}) \quad (4.48)$$

$$P_{+-+} = P_{-+-} = \frac{1}{8}(1 - \rho_{12} - \rho_{23} + \rho_{31}) \quad (4.49)$$

$$P_{+--} = P_{-++} = \frac{1}{8}(1 - \rho_{12} + \rho_{23} - \rho_{31}) \quad (4.50)$$

Donde  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación parcial entre las variables  $X_i$  y  $X_j$ , el signo que precede al valor de  $\rho_{ij}$  resulta del producto de signos en virtud de las posiciones  $i$  y  $j$  dentro de la permutación.

### (b.3.3) Generalización para funciones de varias variables

La generalización para funciones de más de tres variables se lleva a cabo de manera análoga. Así, para funciones  $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de  $n$  variables, los primeros momentos se obtienen con:

$$\mu_Y = \sum_1^{2n} P_{i,j,k,l,\dots,n} \cdot y_{i,j,k,l,\dots,n} \quad (4.51)$$

$$\mu_{Y^n} = \sum_1^{2n} P_{i,j,k,l,\dots,n} \cdot y_{i,j,k,l,\dots,n}^n \quad (4.52)$$

$$Var[Y] = \sigma_Y^2 = \mu_{Y^2} - (\mu_Y)^2 \quad (4.53)$$

Donde los subíndices  $i, j, k, l, \dots, n$  son las permutaciones de los signos  $\pm$ ; existen  $2^n$  permutaciones posibles.

– Si las variables aleatorias están correlacionadas, la probabilidad correspondiente a cada una de ellas está dada por:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = \frac{1}{2^n} \left[ 1 \pm \rho_{n,1} \pm \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{i,i+1} \right] \quad (4.54)$$

Siendo  $\rho$  es el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias.

– Además, si las variables aleatorias son independientes, la probabilidad se escribe como sigue:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = \frac{1}{2^n} \quad (4.55)$$

Adicionalmente, Rosenblueth propuso que cuando las variables no están correlacionadas (son independientes), las siguientes aproximaciones también son una generalización válida de las ecuaciones (4.24) y (4.25):

$$\frac{\mu_Y}{y} \approx \frac{\mu_{Y_1}}{y} \frac{\mu_{Y_2}}{y} \dots \frac{\mu_{Y_n}}{y} \quad (4.56)$$

$$1 + CV_Y^2 \approx (1 + CV_{Y_1}^2)(1 + CV_{Y_2}^2) \dots (1 + CV_{Y_n}^2) \quad (4.57)$$

donde  $\mu_Y$  es la estimación del valor esperado de  $Y$ ;  $y$  es el valor de  $Y$  evaluada en los valores medios de las variables (p. ej.  $y = g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$ );  $\mu_{Y_i}$  y  $CV_{Y_i}$  son respectivamente el valor esperado y el coeficiente de variación de  $Y$  calculados como si  $X_i$  fuera la única variable aleatoria y las otras fueran iguales a sus valores esperados. Si  $Y$  es el producto de funciones de  $X_1$  solamente, de  $X_2$  solamente, etc., las ecuaciones (4.56) y (4.57) anteriores son exactas; únicamente requerirían  $2n+1$  ó  $2n$  puntos de estimación.

### (c) Otros métodos de estimación puntual

Diversos autores consideran el método de estimación puntual de Rosenblueth como un caso especial de los procedimientos de aproximación polinomial ortogonal que conducen a las fórmulas de cuadratura *gaussiana*, mismas que son bien conocidas y empleadas en análisis numérico y el método de elementos finitos (Christian & Baecher, 1999). Este tipo de aproximación es aplicable a la integración de funciones de variables aleatorias con diferentes tipos de distribuciones de probabilidad (uniforme, normal, exponencial, entre otras). De esta manera, por ejemplo, si se asume que  $X$  es una variable uniformemente distribuida entre  $a$  y  $b$ , entonces la solución equivalente de las ecuaciones (4.16) a (4.19) (planteadas por Rosenblueth) es (Baecher & Christian, 2003):

$$P_+ = P_- = \frac{1}{2} \quad (4.58)$$

$$x_{\pm} = \mu_X \pm \sigma_X = \frac{(b-a)}{2} \pm \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}} \quad (4.59)$$

Las expresiones anteriores son iguales a los pesos y puntos de integración requeridos en la cuadratura de Gauss-Legendre de dos puntos, la cual es la forma de cuadratura *gaussiana* que se aplica en el caso de una función de peso uniforme.

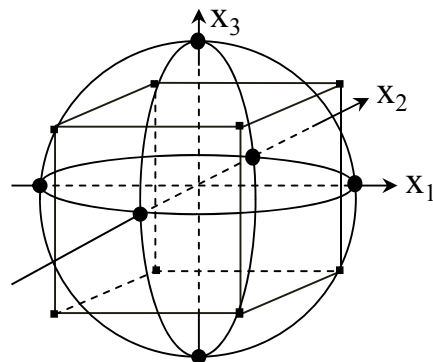
Por otra parte, otros autores consideran los cálculos en  $2^n$  puntos del método original de Rosenblueth, como una limitación. Así, con base en lo que el mismo Rosenblueth propuso



inicialmente para reducir los puntos de estimación a  $2n+1$  ó  $2n$  cuando se tienen variables aleatorias no correlacionadas y con coeficientes de asimetría nulos, se han desarrollado diversas variantes del método para reducir los puntos de cálculo (Christian & Baecher, 2002; Baecher & Christian, 2003):

- *Lind* (1983) propuso que en vez de utilizar puntos de las esquinas del hipercubo de la Figura 4.7, se seleccionen puntos cercanos a los centros de las caras del mismo. Este autor proporciona un procedimiento para encontrar  $2n$  puntos de estimación y sus pesos o probabilidades son simplemente  $1/2n$ .
- *Harr* (1989) propuso un método que aplica para variables aleatorias correlacionadas con coeficientes de asimetría nulos. El procedimiento consiste en obtener inicialmente los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de correlación. Posteriormente, el hipercubo se debe rotar a un sistema coordenado cuyos ejes coincidan con los eigenvectores. Después, suponer una hiperesfera que pase por las esquinas del hipercubo. Los puntos de cálculo son entonces las intersecciones entre los ejes de coordenadas que se rotaron y la superficie de la hiperesfera (ver Figura 4.9). Esto genera  $2n$  puntos de cálculo. Finalmente, el autor recomienda además que, la contribución de cada punto de cálculo se pondere en proporción a su valor propio (o eigenvalor).
- *Li* (1992) propuso un método que aplica cuando la función está constituida por polinomios de las variables individuales y sus productos cruzados. Con esta técnica se establecen  $(n^3+3n+2)/2$  puntos de estimación.
- *Hong* (1996, 1998) propuso un método que aplica para variables aleatorias no correlacionadas con coeficientes de asimetría significativos. El autor desarrolló para cada variable un procedimiento de dos y tres puntos de estimación; en los que se tienen  $2n+1$  puntos de cálculo.

La Figura 4.10 muestra cómo varía el número de cálculos en función del número de variables para algunos de los procedimientos descritos previamente (Baecher & Christian, 2003). Se observa que los métodos con  $2n+1$  puntos de cálculo, son los que conducen a un menor número de análisis.



Nota: Los puntos negros son las intersecciones de la esfera circunscrita con los ejes coordenados.

Figura 4.9 Seis puntos de estimación en los procedimientos de *Harr* y *Hong* (Christian & Baecher, 2002)

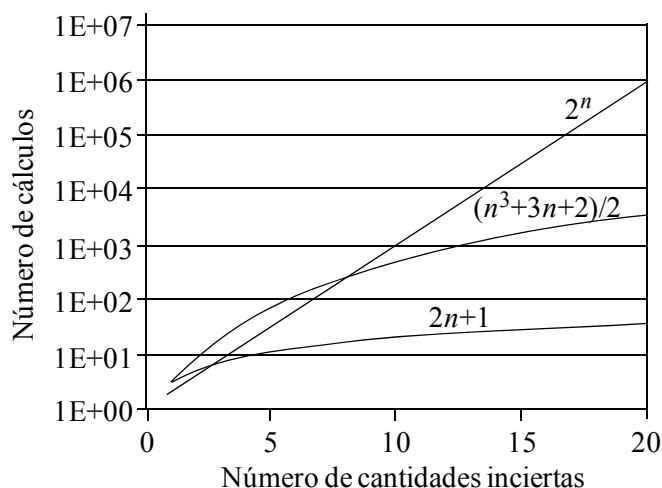


Figura 4.10 Variación del número de cálculos con diferentes algoritmos de estimación puntual (Christian & Baecher, 2002)

#### 4.2.2.3 Método mixto de primer y segundo orden (*MFO* y *MSO*; Auvinet, 2007)

Un nuevo método mixto propuesto por Auvinet (2007) para el análisis de la propagación de la incertidumbre de la variable de interés, sugiere una especie de combinación de las técnicas estocásticas de segundos momentos (*FOSM*; *SOSM*) y de Rosenblueth (1975). De acuerdo con este método, el análisis puede llevarse a cabo ajustando una función simple (por ejemplo un polinomio de segundo orden considerando solamente tres puntos de la función) a la función real (Figura 4.11). El objetivo es sustituir la función original por una ecuación más sencilla que facilite el cálculo de las derivadas parciales de dicha función.

El método mixto puede emplearse para ajustar toda la función en un amplio intervalo y no solo alrededor de la media o valor esperado, con el objetivo de obtener resultados más realistas cuando el coeficiente de variación de la variable independiente es alto (ver Figura 4.11). Esta es la principal ventaja del método.

Las sencillas derivadas de primer y segundo orden de la función simple pueden emplearse entonces en los métodos *FOSM* y *SOSM* respectivamente para evaluar la incertidumbre en la variable de interés.

El método es aplicable a funciones de una o varias variables aleatorias. A la fecha, la técnica se ha utilizado con variables no correlacionadas (independientes). El método implica dibujar tantas gráficas como variables contenga la función de estudio, para el cálculo de las derivadas. El detalle de la aplicación de este método se describe con un ejemplo en la sección 5.1.4.2c del Capítulo 5.

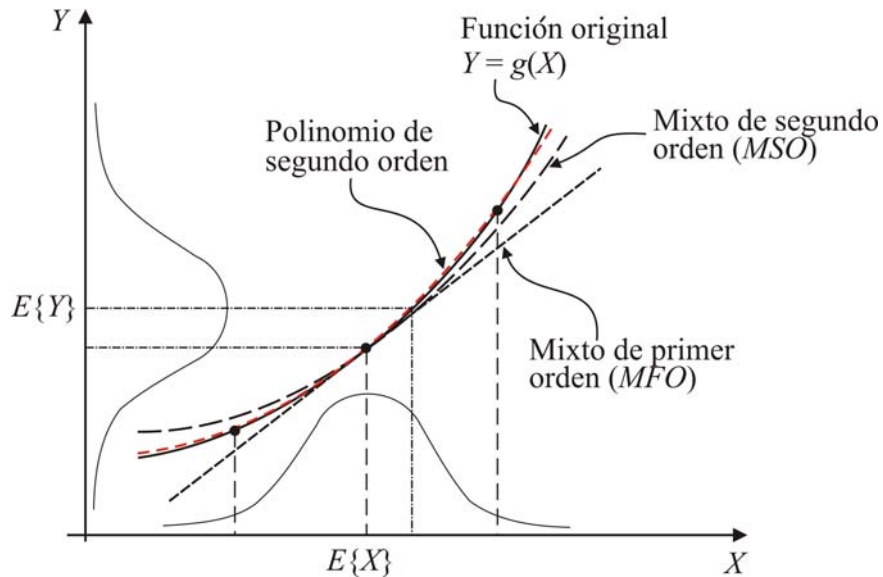


Figura 4.11 Ajuste polinomial de la función  $Y = g(X)$  para la aplicación del método mixto

### 4.2.3 Métodos espectrales

Los métodos espectrales se basan en aplicar expansiones separadas sobre un conjunto de subdominios o elementos, los cuales son acoplados para establecer una solución global. En aplicaciones a la geotecnia, los métodos espectrales se utilizan para representar la incertidumbre de los parámetros del suelo, generalmente mediante campos aleatorios, los cuales se discretizan por medio de una expansión en serie denominada de *Karhunen-Loève*. En este caso, la variabilidad espacial de la propiedad de interés del suelo se considera como una dimensión adicional en el espacio de Hilbert de dimensión infinita. Debido a la naturaleza abstracta de los espacios funcionales en los que se estudia la variabilidad, no es posible una discretización física del dominio, siendo necesario recurrir a una discretización espectral de la función de autocovarianza (Ghanem & Spanos, 1991).

Un caso particular que combina estos métodos con el método de los elementos finitos es el propuesto por Ghanem y Spanos (1991) llamado *enfoque espectral*. Este enfoque consiste en utilizar la función de autocovarianza para representar el campo aleatorio de la propiedad de interés del suelo (*p. ej.* el logaritmo decimal de la permeabilidad) a través de una expansión en serie de *Karhunen-Loève* (Papoulis, 1991) utilizando un número finito de variables aleatorias que, posteriormente se emplean para conocer la respuesta del sistema mediante una expansión en *caos polinomial*. Estos dos procedimientos son un artificio matemático que permite finalmente, el planteamiento del método de elementos finitos estocásticos espectral –SSFEM– (Pineda & Auvinet, 2006; Pineda, 2007).

A continuación se describe brevemente el planteamiento general del enfoque espectral propuesto por Ghanem y Spanos (1991).

#### 4.2.3.1 Representación de la incertidumbre con campos aleatorios

La descomposición espectral de la función de autocovarianza mediante una expansión en serie de *Karhunen-Loève*, se lleva a cabo expandiendo el campo aleatorio por medio de un conjunto de variables aleatorias y funciones deterministas ortogonales:

$$V(X) = E\{V(X)\} + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \quad (4.60)$$

Donde  $E\{V(X)\}$  representa la esperanza matemática del campo aleatorio;  $\xi_i(\theta)$  son las coordenadas de realización con respecto a un conjunto de funciones deterministas  $\varphi_i$  y forman un conjunto de variables aleatorias;  $\lambda_i$  y  $\varphi_i$  son los valores y funciones característicos de la función de autocovarianza, definidas a su vez, por la solución de la ecuación integral cuya forma es:

$$\int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) \varphi_i(X_2) d\Omega_{X_2} = \lambda_i \varphi_i(X_1) \quad (4.61)$$

Donde  $\Omega$  es el dominio espacial en el cual se define el campo aleatorio.

La expresión (4.61) se conoce como ecuación integral de Fredholm homogénea de segundo género, en la cual el núcleo  $C_V(X_1, X_2)$  está definido por la función de autocovarianza, que es real, simétrica y positiva. La solución de la ecuación integral se puede obtener de forma analítica o numérica. Ambas soluciones fueron propuestas por Ghanem y Spanos (1991) para el caso de campos aleatorios *gaussianos*.

#### 4.2.3.2 Representación de la respuesta

Debido a que la respuesta del sistema es una función de la variabilidad de la propiedad de interés del suelo (*p. ej.* el logaritmo decimal de la permeabilidad), queda expresada en términos de funcionales no lineales, representadas a través de un conjunto de polinomios ortogonales de variables aleatorias *gaussianas*, denominado *caos polinomial*. La respuesta se expande por medio de estos polinomios debido a que la función de autocovarianza no se conoce *a priori* como en el caso del campo aleatorio de la propiedad de interés.

La formulación del caos polinomial propuesta por Ghanem y Spanos (1991) se fundamenta en el concepto de *caos homogéneo* introducido por Wiener (1938). En general se puede decir que el concepto de *caos polinomial* es una generalización de las series de Taylor a funcionales no lineales basada en el teorema de Cameron y Martin (1947).

Lo que se pretende determinar es el campo aleatorio de la respuesta del sistema (*p. ej.* la carga hidráulica) a través de expansiones no lineales. Así, cada variable aleatoria puede ser expandida mediante el *caos polinomial* de la siguiente manera:

$$h(\theta) = h_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} h_{i_1} \Gamma_1 [\xi_{i_1}(\theta)] + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} h_{i_1 i_2} \Gamma_2 [\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)] + \dots \quad (4.62)$$

Donde  $\Gamma_p [\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_2}(\theta)]$  denota el *caos homogéneo* de orden  $p$ , y  $h_{i_p}$  son las coordenadas de la variable  $h(\theta)$  asociadas a este orden (cero, primero, segundo, etc.).

La construcción del *caos polinomial* de dimensión finita se realiza a partir de un número  $M$  de variables aleatorias gaussianas ortonormales,  $\xi_k(\theta)$ , provenientes de la expansión en serie de *Karhunen-Loève*. De esta manera, el *caos polinomial* de dimensión  $M$  y orden  $p$  se obtiene a partir de polinomios multidimensionales de Hermite. Cada uno de estos polinomios se define como una secuencia de  $M$  enteros negativos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$  de la siguiente manera:

$$\Psi_{\alpha} = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\xi_i), \quad \alpha_i \geq 0 \quad (4.63)$$

Donde  $H_{\alpha_i}$  es el polinomio de Hermite asociado a la secuencia  $\alpha$  cuyo grado es menor o igual que  $p$ .

El número  $P$  de coeficientes que constituyen el caos polinomial se obtiene mediante una combinación binomial dada por:

$$P = \sum_{s=0}^p \binom{M+s-1}{s} \quad (4.64)$$

Los valores usuales empleados en las aplicaciones del método espectral son  $M=4$  y  $p=2$  ó  $3$ . Así cada carga hidráulica nodal expresada en la ecuación (4.62), puede escribirse en función de estos coeficientes como:

$$h(\theta) = \sum_{i=0}^{P-1} a_i \Psi_i [\{\xi_k\}] \quad (4.65)$$

Donde  $a_i$  y  $\Psi_i [\{\xi_k\}]$  corresponden a  $u_{i_p}$  y  $\Gamma_p [\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_2}(\theta)]$ , respectivamente.

Cuando el campo aleatorio es gaussiano se requiere el cálculo de las esperanzas de los polinomios para representar la respuesta; tales esperanzas se expresan a través de los siguientes coeficientes:

$$c_j = E(\Psi_j^2) \quad (4.66)$$

$$c_{ijm} = E(\lambda_i \Psi_j \Psi_m) \quad (4.67)$$

Donde  $\Psi_j$ ,  $\Psi_m$  son polinomios multidimensionales de Hermite asociados al orden  $j$  y  $m$  respectivamente. La ecuación (4.66) representa el cuadrado de la norma de la base polinomial  $\Psi_j$ , y la expresión (4.67) es el producto de dos polinomios y una variable aleatoria gaussiana.

#### 4.2.3.3 Evaluación de la propagación de la incertidumbre en problemas de flujo de agua

Aun cuando se trata de una técnica de desarrollo reciente que no se ha aplicado al tipo de problemas discutidos en esta tesis, sino que ha sido mayormente empleada en problemas de elasticidad lineal (Ghanem & Spanos, 1991a y b; Ghanem & Brzkala, 1996; Waubke, 1996), el *método del elemento finito estocástico espectral* (SSFEM) puede aplicarse en la evaluación de la propagación de la incertidumbre de los resultados de un análisis de flujo de agua.

En particular, se puede realizar una analogía con el enfoque espectral propuesto por Ghanem y Spanos (1991) para la solución de otros problemas geomecánicos; así la esperanza y la matriz de covarianza de la carga hidráulica por ejemplo, se pueden determinar con las siguientes expresiones:

$$E\{h\} \cong h_0 \quad (4.68)$$

$$Cov[h, h] = \sum_{i=1}^P E\{\Psi_i^2\} h_i h_i^T \quad (4.69)$$

La ecuación (4.69) define la matriz de covarianza en términos de los coeficientes  $c_j$ .

Dentro de los pocos estudios del SSFEM relacionados con el flujo de agua en suelos, se puede mencionar su aplicación a problemas de transporte de contaminantes en medios porosos no saturados (Ghanem, 1998), y a problemas de conducción de calor (Ghanem, 1999). Recientemente, Yang *et al.* (2004) presentó un desarrollo matemático que combina la expansión de *Karhunen-Loève* con el método de perturbaciones para el análisis estocástico del flujo saturado y no saturado en medios heterogéneos; en este caso no se emplea el método de elementos finitos estocásticos, sino solamente ecuaciones diferenciales parciales para el cálculo de los momentos estadísticos de las variables de interés.

Algunos autores que han estudiado el método espectral reconocen ciertas limitaciones en su aplicación (Sudret & Der Kiureghian, 2000); entre las principales, que se pueden mencionar aquí porque se considera tienen repercusión en los análisis de flujo de agua, están:

- La cantidad de cálculos requeridos en un problema dado es mucho mayor que la equivalente en un problema determinista. Por ejemplo, en los análisis de elasticidad lineal típicamente se han requerido de 15 a 35 coeficientes para caracterizar cada desplazamiento nodal.
- Cuando se trabaja con campos aleatorios log-normales (como los empleados para la

conductividad hidráulica), inclusive para una variable aleatoria, se requeriría un número infinito de términos en la expansión para reproducir la característica log-normal. Esto significa que el campo de entrada definido utilizando solamente algunos términos en la expansión de caos polinomial, puede no ser representativo del campo log-normal real.

En esta investigación las variables o campos aleatorios que se emplean para representar la incertidumbre en la conductividad hidráulica se asume que tienen una distribución log-normal. Por este motivo, no se considera apropiado emplear el método espectral.

Finalmente, cabe remarcar que aunque limitado hasta este momento y puesto que la mayoría de las aplicaciones que se han estudiado con este método no han sido comparadas con otras técnicas estocásticas, el método espectral merece una mayor investigación y comparaciones con otras técnicas probabilistas que permitan evaluar su eficiencia y garantizar la conveniencia de su uso.

#### 4.2.4 Métodos de simulación

Debido a su simplicidad conceptual, las técnicas de simulación basadas en el método de Monte Carlo constituyen una alternativa para evitar los esfuerzos requeridos al emplear los métodos de transformación de la incertidumbre analíticos y numéricos disponibles, que resultan en ocasiones de difícil implementación y cuyo campo de aplicación es restringido (Auvinet, 2002). Sin embargo, la principal desventaja del método de Monte Carlo es que requiere un gran número de grupo de valores de la función de comportamiento (realizaciones) para obtener las estadísticas de respuesta con una exactitud adecuada.

Las técnicas de Monte Carlo resultan especialmente útiles en aquellos problemas que implican variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida o supuesta. Consisten en obtener por muestreo al azar un juego de valores de los parámetros aleatorios de interés, respetando las densidades y correlaciones existentes. Con estos valores, se realiza el cálculo analítico o numérico del problema en estudio; y repitiendo el proceso un número de veces es posible obtener una muestra de soluciones, de las que se determinan los momentos buscados (la media o valor esperado, la desviación estándar, la varianza, etc.) mediante algún método de estimación estadística. Si el vector de variables aleatorias considerado tiene componentes independientes, la simulación se realiza para cada uno de los componentes. Si el vector tiene componentes dependientes, es posible regresar al caso anterior utilizando el método de Cholesky generalizado para diagonalizar la matriz de covarianza de estos componentes. Este método solamente es válido para variables *gaussianas*; sin embargo, siempre es posible regresar al caso de las variables *gaussianas* aplicando los métodos de transformación existentes (anamorfosis, Rosenblatt, 1952).

Las Figuras 4.12 y 4.13 muestran de manera esquemática el proceso de Monte Carlo para la simulación de variables aleatorias y campos aleatorios, respectivamente.

Al final de este capítulo se presenta la implementación del método de Monte Carlo en combinación con otras técnicas (como el *método de elementos finitos –FEM–*; y los *paseos*

*casuales o caminatas aleatorias –RWM–*) para la resolución de algunos de los problemas estocásticos de flujo de agua discutidos en esta investigación.

Entre los métodos más usuales para estimar el número de simulaciones necesarias para lograr una aproximación estadística determinada, se pueden mencionar:

- El *método clásico de convergencia* (intervalos de confianza de la esperanza y de la varianza de la cantidad estimada).- Para una distribución normal el intervalo de confianza está dado por:

$$\mu_x - \lambda \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq m \leq \mu_x + \lambda \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (4.70)$$

Donde:  $m$  Valor de la variable media esperada.

$\mu_x$  Esperanza matemática de la variable considerada.

$\sigma_x$  Desviación estándar de la variable considerada.

$\lambda$  Argumento de la distribución normal (deducido de tablas estadísticas para un nivel de confianza dado).

$n$  Número de realizaciones.

- La *desigualdad de Chebyshev*.- Cuando no se conoce la distribución de probabilidad de los resultados obtenidos, esta desigualdad permite determinar el número de realizaciones necesarias para una tolerancia dada, a partir de la siguiente expresión:

$$P \left[ \mu_x - \tau \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq m \leq \mu_x + \tau \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \right] \leq 1 - \frac{1}{\tau^2} \quad (4.71)$$

Donde  $\tau$  es un número real mayor que uno.

Los criterios anteriores muestran que el método de Monte Carlo presenta una convergencia muy lenta que puede llevar a tiempos y costos de cálculo inaceptables.



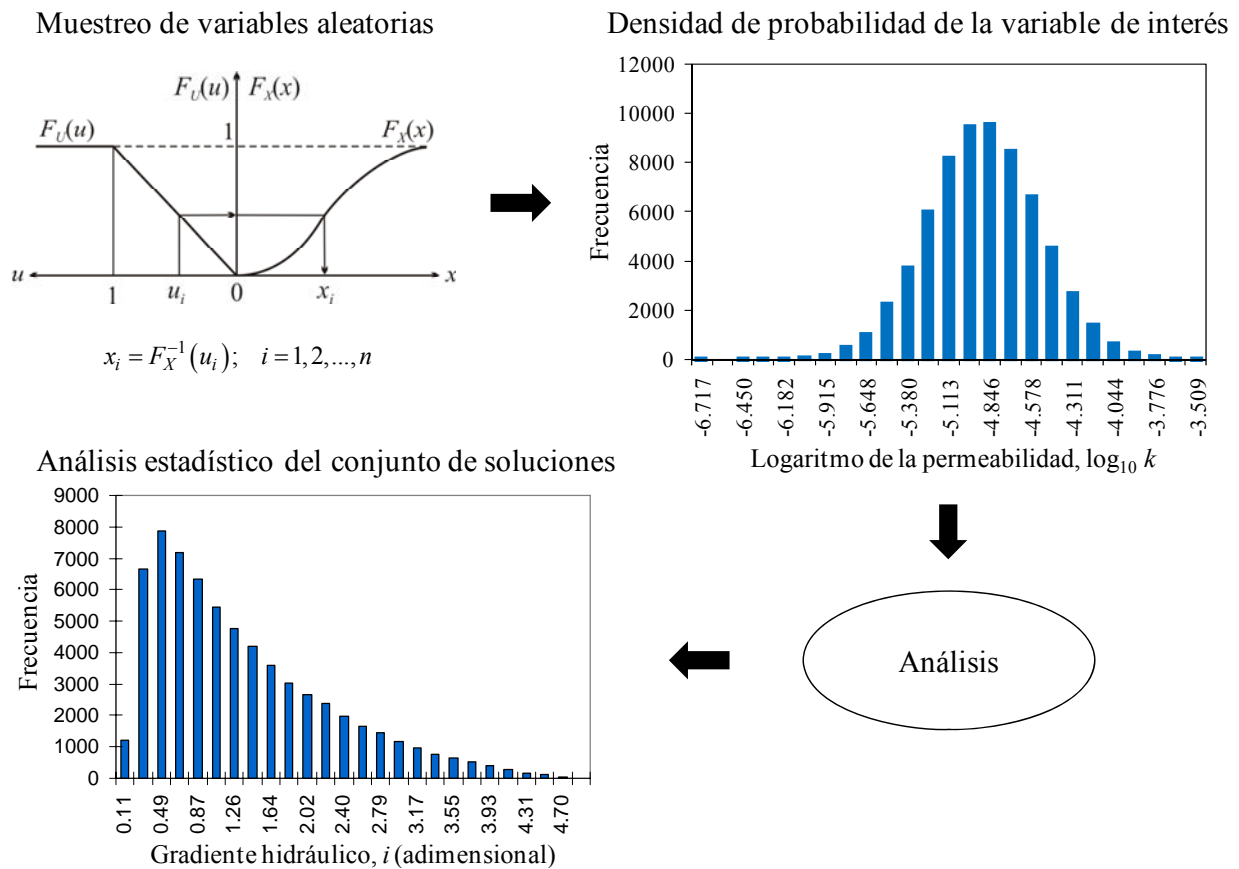


Figura 4.12 Método de simulación de Monte Carlo para variables aleatorias

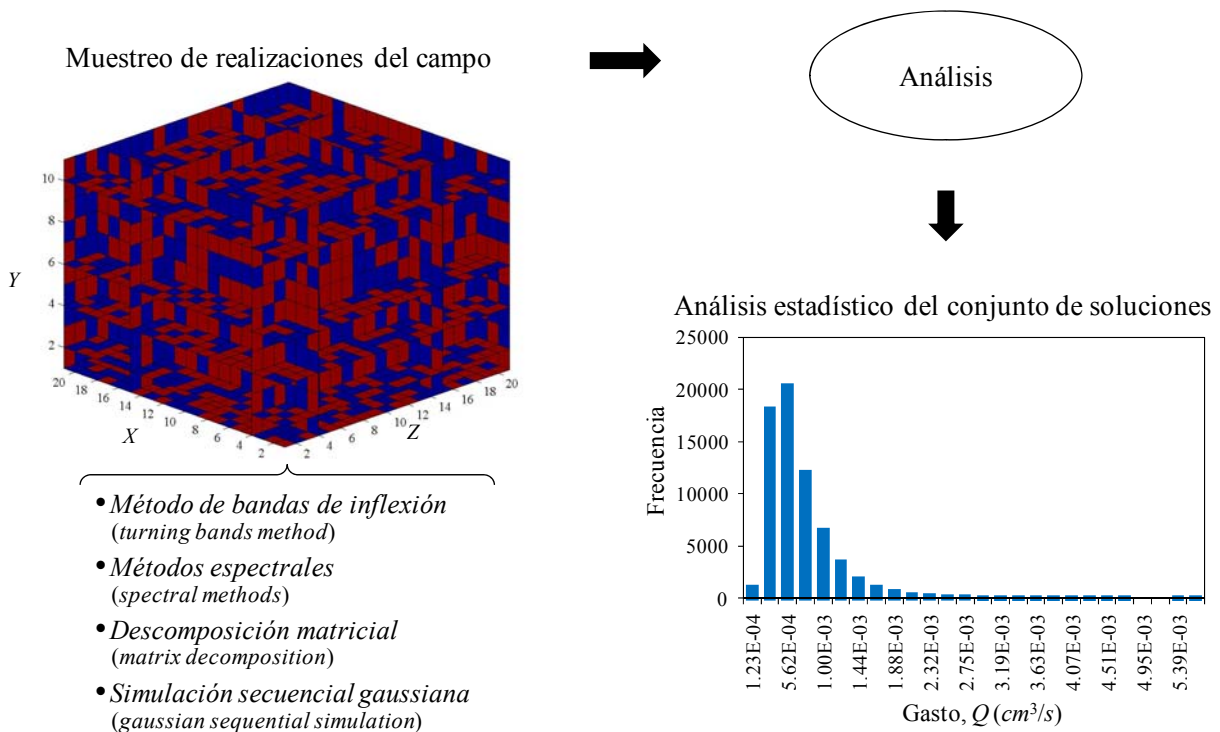


Figura 4.13 Método de simulación de Monte Carlo para campos aleatorios

4.2.5 Resumen de las principales características de los métodos más comunes de evaluación de la incertidumbre

Tabla 4.1 Principales características de los métodos más comunes de evaluación de la incertidumbre

Método	Principales características
Solución exacta ( <i>p. ej.</i> método del Jacobiano)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es laboriosa cuando las condiciones geométricas, de frontera ó hidráulicas se tornan complejas.</li> <li>No es aplicable cuando la función de comportamiento no es explícita.</li> </ul>
Primer orden segundos momentos ( <i>FOSM</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza los primeros términos de una expansión en serie de Taylor de una función de comportamiento para estimar el valor esperado y la varianza de dicha función.</li> <li>Se llama de segundos momentos porque es el momento estadístico de mayor orden empleado en el análisis.</li> <li>Involucra el cálculo de derivadas parciales de primer orden.</li> <li>El número <math>n</math> de variables inciertas, es el número de derivadas de la función de comportamiento que se deben evaluar analíticamente o numéricamente.</li> </ul>
Segundo orden segundos momentos ( <i>SOSM</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>Exhibe características similares a <i>FOSM</i>; la diferencia principal es que utiliza los términos de una expansión en serie de Taylor hasta el segundo orden.</li> <li>Envuelve el cálculo de derivadas parciales de segundo orden.</li> </ul>
Estimación puntual de Rosenblueth	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sustituye la densidad de probabilidad de cada variable aleatoria de interés por una distribución de probabilidad binaria discreta con los mismos momentos estadísticos.</li> <li>La función de las variables aleatorias de interés debe evaluarse <math>2^n</math> veces dependiendo del número <math>n</math> de variables.</li> </ul>
Mixto de primer orden ( <i>MFO</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es una combinación de las técnicas estocásticas de segundos momentos (<i>FOSM</i> ó <i>SOSM</i>) y de Rosenblueth.</li> <li>Sustituye la función de comportamiento original por una ecuación más sencilla (<i>p. ej.</i> un polinomio de segundo orden) que facilita el cálculo de las derivadas parciales de dicha función.</li> <li>El método permite el ajuste de toda la función en un amplio intervalo y no solo alrededor de la media o valor esperado; con lo que es posible obtener resultados más realistas cuando el coeficiente de variación de la variable independiente es alto.</li> <li>El método implica dibujar tantas gráficas (para el cálculo de las derivadas) como variables contenga la función en estudio.</li> </ul>
Mixto de segundo orden ( <i>MSO</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>Exhibe características similares que <i>MFO</i>; la diferencia es que implica el cálculo de derivadas de segundo orden.</li> </ul>
Métodos espectrales	<ul style="list-style-type: none"> <li>La representación de la incertidumbre mediante el campo aleatorio de la propiedad de interés se lleva a cabo en un espacio funcional utilizando una expansión en serie de <i>Karhunen-Loève</i> (a la fecha no se ha utilizado ninguna otra expansión).</li> <li>Los parámetros estadísticos de respuesta se representan mediante una expansión en <i>caos polinomial</i>.</li> <li>La exactitud de los resultados está condicionada por el número de términos empleados en las dos expansiones.</li> <li>La representación del campo aleatorio se aleja del concepto físico.</li> <li>Es una técnica reciente que no ha sido lo suficientemente comparada con otros métodos estocásticos para evaluar su eficiencia.</li> </ul>
Simulación de Monte Carlo	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tiene la ventaja de simplicidad conceptual.</li> <li>Permite resolver cualquier tipo de problema geomecánico con diversas condiciones geométricas, de frontera ó hidráulicas mediante la aplicación repetida de cualquier método determinista.</li> <li>El número de repeticiones del proceso es definido por el usuario. Se requiere sin embargo, un gran número de grupo de valores de la función de comportamiento (realizaciones) para obtener las estadísticas de respuesta con una exactitud adecuada. La aproximación se incrementa con <math>1/\sqrt{N}</math>; <i>p. ej.</i> si <math>N=1000</math>, para reducir el error en un factor de 10 se requeriría incrementar <math>N=100000</math>.</li> </ul>

### 4.3 Método del elemento finito estocástico (*SFEM*) aplicado al flujo establecido de agua en medios porosos

#### 4.3.1 Introducción

No obstante los múltiples avances matemáticos en la implementación de nuevas técnicas estocásticas, el Método del Elemento Finito Estocástico (*SFEM*) es probablemente hoy en día la técnica probabilista más empleada para cuantificar la incertidumbre en los análisis geomecánicos. Se trata de una técnica que combina el *método de elementos finitos* con algún método probabilista que permita evaluar la propagación de la incertidumbre en los resultados de un análisis geomecánico considerando la incertidumbre que existe respecto a las variables de interés (parámetros de entrada, como las propiedades del material).

En esta investigación, los análisis estocásticos de flujo de agua realizados con dicha técnica se llevan a cabo utilizando la teoría de elementos finitos del ANEXO III (López & Auvinet, 1998; López, 2000) en combinación con alguno de los siguientes métodos:

- Método de *primer orden* o *segundo orden segundos momentos*
- Técnica de *simulación de Monte Carlo*

Al recurrir al método del elemento finito para resolver problemas de flujo de agua, es necesario asignar a cada elemento o a grupos de elementos unas *conductividades hidráulicas* específicas. Si se opta por una modelación de la incertidumbre con variables aleatorias asociadas a subdominios estadísticamente homogéneos, deben coincidir los grupos de elementos con estos subdominios. En la modelación por medio de campos aleatorios se deben tener presentes los siguientes aspectos:

- Si se admite que existe una variación espacial significativa, ésta se presenta generalmente en las tres direcciones. La hipótesis de flujo bidimensional deja de ser válida y es necesario recurrir a un modelo tridimensional.
- Para conocer con precisión las características del campo es necesario contar con un número importante de resultados de pruebas, raramente disponible.
- Cuando los parámetros del campo son conocidos, es necesario proceder a una discretización del mismo. Los valores representativos (aleatorios) que deben asignarse a cada elemento o grupo de elementos son difíciles de definir. En todo caso, no son simples promedios aritméticos espaciales del campo como lo han considerado algunos autores (dependiendo de la dimensión espacial en la que se realiza el análisis y según la dirección del flujo respecto a las heterogeneidades, el promedio representativo puede ser el promedio armónico pesado, aritmético pesado o geométrico, como se puede apreciar en el inciso 5.4 del Capítulo 5). La discretización de un campo de permeabilidad se puede realizar con alguno de los métodos que se indican a continuación.

### 4.3.2 Discretización de campos aleatorios

Sea  $V(X)$ ;  $X \in \Omega$  un campo aleatorio gaussiano multidimensional univariado<sup>(4.2)</sup> definido en el dominio  $\Omega$ ; representado por su esperanza  $\mu_V(X)$ , su varianza  $\sigma_V^2(X)$  y su coeficiente de autocorrelación  $\rho_V(X_1, X_2)$ . Y sea  $\mathbf{V}$  el vector de variables que permiten representar el campo aleatorio, definido a su vez por un vector medio  $\boldsymbol{\mu}$  y una matriz de covarianza  $\mathbf{T}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ . El procedimiento de *discretización* de un campo aleatorio consiste en representar de manera aproximada a  $V(X)$  con  $\mathbf{V}$ . Se trata de definir la “mejor” aproximación con respecto a algún estimador de error, es decir, aquella aproximación que emplee el menor número de variables aleatorias. Los métodos disponibles para la discretización de campos aleatorios se pueden dividir de manera general en tres grupos (Sudret & Der Kiureghian, 2000), Figura 4.14:

- *Métodos de discretización puntual*.- Donde el conjunto de variables aleatorias son valores seleccionados del campo  $V(X)$  en puntos  $X_i$  determinados.
- *Métodos de discretización promedio*.- Donde el conjunto de variables aleatorias son integrales pesadas o ponderadas del campo  $V(X)$  en un cierto dominio  $\Omega_e$ .
- *Métodos de expansión en series*.- Donde el campo se representa de manera exacta mediante una serie que involucra variables aleatorias y funciones espaciales deterministas. La aproximación o discretización se obtiene con el truncamiento de la serie.

Revisiones detalladas de varias técnicas de discretización pueden encontrarse en Li y Der Kiureghian (1993); Ditlevsen (1996a y b); Matthies *et al.* (1997). Algunos de los métodos de discretización más usuales se exponen en los párrafos siguientes.

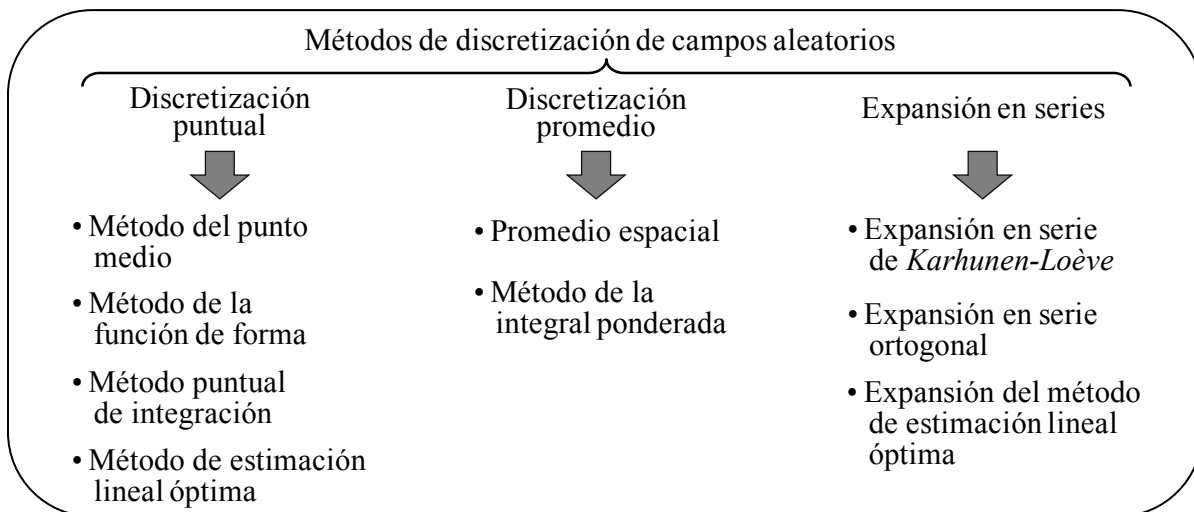


Figura 4.14 Clasificación general de métodos de discretización de campos aleatorios

<sup>(4.2)</sup> Un *campo* es *gaussiano* si cada una de las variables del campo tiene una densidad de probabilidad gaussiana y además las densidades de probabilidad conjuntas de cualquier orden de estas variables son también gaussianas (Auvinet, 2002). Un *campo* se denomina *univariado* o *multivariado* dependiendo de si el mismo está referido a una variable aleatoria o a un vector aleatorio asociados a puntos  $X$  del campo. Un campo es *uni* o *multidimensional* de acuerdo con la dimensión  $d$  de  $X$ , esto es  $d=1$  ó  $d>1$  (Sudret & Der Kiureghian, 2000).

#### 4.3.2.1 Método del punto medio (midpoint method)

El método del punto medio, introducido por Der Kiureghian y Ke (1988), permite aproximar el campo aleatorio en cada elemento  $\Omega_e$  mediante una sencilla variable aleatoria definida como el valor del campo en el centroide  $X_c$  del elemento:

$$\tilde{V}(X) = V(X_c) \quad \text{con } X \in \Omega_e \quad (4.72)$$

El campo aproximado  $\tilde{V}(X)$  está definido entonces por el vector aleatorio  $\mathbf{V} = \{V(X_c^1), \dots, V(X_c^{N_e})\}$ , siendo  $N_e$  el número de elementos en la malla. La media y la matriz de covarianza del vector están dadas en función de la media, la varianza y los coeficientes de autocorrelación del campo  $V(X)$ , evaluados en el centro de gravedad de los elementos (Der Kiureghian *et al.*, 1991). La realización del campo así definido es una función que presenta discontinuidades en las fronteras de los elementos. El método tiende en general a sobreestimar la variabilidad en el interior de cada elemento; y obviamente solo será válido si las dimensiones del elemento son pequeñas respecto a la distancia de influencia. Lo anterior obliga a manejar un número grande de elementos y de variables aleatorias, lo que puede resultar muy laborioso.

#### 4.3.2.2 Método de la función de forma (shape function method)

Este método, introducido por Liu *et al.* (1986), aproxima el campo aleatorio  $V(X)$  en cada elemento mediante valores nodales  $X_i$  y las funciones de forma que se emplean generalmente en el método de elementos finitos:

$$\tilde{V}(X) = \sum_i^n N_i(X) \cdot V(X_i) \quad \text{con } X \in \Omega_e \quad (4.73)$$

Donde  $n$  es el número de nodos del elemento  $e$ ,  $X_i$  son las coordenadas del  $i$ -ésimo nodo y  $N_i(X)$  son las funciones de forma polinomiales asociadas con el elemento; generalmente las funciones polinomiales tienen la forma siguiente:  $N_i(X) = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la *delta de Kronecker*. El campo aproximado  $\tilde{V}(X)$  se obtiene en este caso de  $\mathbf{V} = \{V(X_1), \dots, V(X_N)\}$ , donde  $\{X_i, i=1, \dots, N\}$  es el conjunto de coordenadas nodales de la malla. Una ventaja de esta técnica sobre el método del punto medio es que cada realización del campo discretizado es una función continua sobre  $\Omega$ .

#### 4.3.2.3 Método del punto de integración (integration point method)

Con este método (Brenner & Bucher, 1995) el campo aleatorio se discretiza asociando cada variable aleatoria sencilla con los puntos de integración de Gauss usuales en los esquemas de resolución de problemas geomecánicos con elementos finitos. El método proporciona resultados exactos para distancias de correlación pequeñas. Sin embargo, el número total de variables

aleatorias envueltas en el análisis se incrementa considerablemente con el tamaño del problema.

#### 4.3.2.4 Método de estimación lineal óptima (optimum linear estimation method)

Este método, propuesto por Li y Der Kiureghian (1993), permite representar el campo aproximado  $\tilde{V}(X)$  por medio de una función lineal de valores nodales  $\mathbf{V} = \{V(X_1), \dots, V(X_m)\}$  como:

$$\tilde{V}(X) = a(X) + \sum_i^m b_i(X)^T \cdot V(X_i) \quad \text{con } X \in \Omega \quad (4.74)$$

Donde  $m$  es el número de puntos nodales involucrados en la aproximación.

Las funciones  $a(X)$  y  $b_i(X)$  se obtienen minimizando en cada punto  $X$  la varianza del error  $Var[V(X) - \tilde{V}(X)]$ , donde  $\tilde{V}(X)$  es un estimador sin sesgo de la media. Estas condiciones se escriben:

$$\text{Minimizar } Var[V(X) - \tilde{V}(X)] \quad \forall X \in \Omega \quad (4.75)$$

$$\text{Con } E\{V(X) - \tilde{V}(X)\} = 0 \quad (4.76)$$

Efectuando operaciones matemáticas, la estimación lineal óptima resulta:

$$\tilde{V}(X) = \mu_V(X) + \mathbf{T}_{V(X)\mathbf{V}}^T \mathbf{T}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{-1} (\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}) \quad \text{con } X \in \Omega \quad (4.77)$$

Donde  $\mathbf{V}$  es el vector de valores nodales;  $\mathbf{T}_{V(X)\mathbf{V}}^T$  es un vector de dimensión  $N \times 1$  que contiene las covarianzas de  $V(X)$  de los elementos de  $\mathbf{V}$ ;  $\mathbf{T}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$  es una matriz definida no singular (que tiene inversa).

Así, el método de estimación lineal óptima permite minimizar el error de la varianza como (Li & Der Kiureghian, 1993):

$$Var[V(X) - \tilde{V}(X)] = \sigma_{V(X)}^2(X) - \mathbf{T}_{V(X)\mathbf{V}}^T \mathbf{T}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{T}_{V(X)\mathbf{V}} \quad (4.78)$$

El segundo término de la expresión anterior es idéntico a  $Var[\tilde{V}(X)]$ . De esta manera, el error de la varianza es simplemente la diferencia entre las varianzas de  $V(X)$  y  $\tilde{V}(X)$ . Puesto que el error de la varianza es siempre positivo, se sabe que  $\tilde{V}(X)$  siempre subestima la varianza del campo aleatorio original.

Debido a la semejanza, en algunas ocasiones el método de estimación lineal óptima también se ha

denominado como *método de Kriging* (Vanmarcke, 1983), la diferencia es que en este último  $\mathbf{V}$  representa los valores observados del campo.

#### 4.3.2.5 Método del promedio espacial (spatial average method)

Este método, propuesto por Vanmarcke y Grigoriu (1983), requiere de una malla para discretizar el campo aleatorio. La discretización se lleva a cabo aproximando el campo en cada elemento como una constante obtenida con el promedio o media espacial del campo original sobre el elemento, representada por:

$$\tilde{V}(X) = \frac{\int_{\Omega_e} V(X) d\Omega_e}{\int_{\Omega_e} d\Omega_e} \equiv \bar{V}_e \quad \text{con } X \in \Omega_e \quad (4.79)$$

El vector  $\mathbf{V}$  se define entonces como la colección de estas variables aleatorias, es decir  $\mathbf{V}^T = \{\bar{V}_e, e=1, \dots, N_e\}$ . La media y matriz de covarianza de  $\mathbf{V}$  se calculan a partir de la media y covarianza de la función del campo  $V(X)$  como integrales sobre el dominio  $\Omega_e$ .

Algunas dificultades que envuelve este método son:

- La varianza del promedio espacial sobre un elemento subestima la varianza local del campo aleatorio (Der Kiureghian & Ke, 1988).
- El método sólo es válido para los campos aleatorios gaussianos (Matthies *et al.*, 1997). Si el campo no es gaussiano, la solución de la expresión (4.79) se torna difícil, e incluso imposible. En este caso, se ha propuesto remplazar el proceso por una distribución aproximada.

#### 4.3.2.6 Método de expansión en serie (series expansion method)

En este método, desarrollado por Lawrence en 1987, el campo se expresa en términos de descomposición espectral:

$$\tilde{V}(X) = \mu_V(X) + \sigma_V(X) \sum_{i=1}^r g_{s_i} \cdot \sqrt{\lambda_i} \cdot f_i(X) \quad \text{con } X \in \Omega \quad (4.80)$$

Donde  $g_{s_i}$  son variables gaussianas (media cero y varianza unitaria),  $\lambda_i$  y  $f_i(X)$  son respectivamente, los valores propios y las funciones propias del coeficiente de autocorrelación espacial definidos por:

$$\lambda_i \cdot f_i(X) = \int_{\Omega} \rho(X_1, X_2) f_i(X_2) dX_2 \quad (4.81)$$

Para mejorar la eficiencia del método y describir el campo con cierta precisión, se deben tomar

solamente algunos grupos de variables aleatorias  $g_{s_i}$  asociadas a los valores propios más grandes. Sin embargo, si las funciones y los valores propios no se conocen con exactitud, es decir, si las funciones de correlación son arbitrarias, es necesario recurrir a algún método aproximado.

Para realizar lo anterior, es posible utilizar un método de integración cuadrática para convertir el problema integral de valores propios en un problema de valores propios matriciales, eligiendo funciones de interpolación que minimicen el error de representación del campo; o bien, se puede emplear una aproximación de tipo Galerkin para la integración, es decir una descomposición de la función  $f_i$  en un ensamblaje de funciones de base en  $\Omega$  y un ensamblaje de coeficientes que aseguren la transformación a un problema de valores propios matriciales.

Otras variantes del método original anterior son (Sudret & Der Kiureghian, 2000):

- *Método de expansión en serie ortogonal (ortogonal series expansion)*.- Propuesto por Zhang y Ellingwood (1994), evita resolver la ecuación integral de Fredholm seleccionando un conjunto de funciones ortogonales que formen una base en el espacio de Hilbert.
- *Expansión del método de estimación lineal óptima (expansión optimal linear estimation method)*.- Propuesto por Li y Der Kiureghian (1993), es una extensión del método de estimación lineal óptima del inciso anterior, que utiliza en este caso una representación espectral del vector de las variables nodales  $\mathbf{V}$ .

### 4.3.3 Desarrollo de técnicas de perturbación de primer y segundo orden aplicables al método de elementos finitos (*FEM*)

Se presenta en esta sección la implementación del acoplamiento de las técnicas estocásticas de primer y segundo orden segundos momentos (*FOSM* y *SOSM*, del inciso 4.2.2.1) con el método de elementos finitos (*FEM*, desarrollado en el ANEXO III), para evaluar la propagación de la incertidumbre en los resultados de un análisis de flujo de agua (*p. ej.* cargas hidráulicas o equipotenciales, gradientes hidráulicos, velocidades de flujo, gasto, entre otros).

Considerando que la conductividad hidráulica de los materiales del dominio en estudio tiene una distribución log-normal (es decir, la variabilidad de la conductividad hidráulica se representa con su logaritmo decimal o natural), se procede como se indica a continuación.

#### 4.3.3.1 Incertidumbre en la carga hidráulica

##### (a) *Aproximación de primer orden*

La carga hidráulica en cada nodo  $r$  de una malla de elementos finitos, es una función implícita de varias variables aleatorias (logaritmos decimales o naturales de las conductividades hidráulicas, representados por  $w_N$ ):

$$h_r = g(w_1, w_2, \dots, w_N) \quad (4.82)$$



Recurriendo a un desarrollo en serie de Taylor truncado en el primer orden (Benjamin & Cornell, 1970), la aproximación del valor esperado de la carga hidráulica,  $h_r$ , es:

$$E\{h_r\}^I = g\left(\mu_{w_1}, \mu_{w_2}, \dots, \mu_{w_N}\right) \quad (4.83)$$

donde  $\mu_{w_1}, \mu_{w_2}, \dots, \mu_{w_N}$  son los valores esperados de  $w_1, w_2, \dots, w_N$ .

Por otra parte, las estimaciones de primer orden de las varianzas y covarianzas de la carga hidráulica se obtienen respectivamente con las expresiones siguientes:

$$Var[h_r]^I = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial h_r}{\partial w_p} \right]_{\mu_{w_p}} \left[ \frac{\partial h_r}{\partial w_q} \right]_{\mu_{w_q}} Cov[w_p, w_q] \quad (4.84)$$

$$Cov[h_r, h_s]^I = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial h_r}{\partial w_p} \right]_{\mu_{w_p}} \left[ \frac{\partial h_s}{\partial w_q} \right]_{\mu_{w_q}} Cov[w_p, w_q] \quad (4.85)$$

Los términos  $Cov[w_p, w_q]$  son las covarianzas entre las variables aleatorias  $w_p$  y  $w_q$ , y  $\left[ \frac{\partial h_r}{\partial w_p} \right]_{\mu_{w_p}}$  y  $\left[ \frac{\partial h_r}{\partial w_q} \right]_{\mu_{w_q}}$ , representan las primeras derivadas de la carga hidráulica  $h_r$  en el nodo  $r$ ,

con respecto a  $w_p$  y  $w_q$ , (evaluadas para el valor esperado de  $w_p$  y  $w_q$ , respectivamente). Estas derivadas pueden obtenerse de manera sencilla a partir de las derivadas directas de  $h_r$  respecto a las conductividades hidráulicas  $k_p$ . En efecto:

— Si  $w_p$  es el logaritmo decimal de  $k_p$  ( $w_p = \log_{10} k_p$ ): 
$$\frac{\partial h_r}{\partial w_p} = \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \cdot \frac{k_p}{0.434294} \quad (4.86)$$

— Si  $w_p$  es el logaritmo natural de  $k_p$  ( $w_p = \ln k_p$ ): 
$$\frac{\partial h_r}{\partial w_p} = \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \cdot k_p \quad (4.87)$$

donde  $\frac{\partial h_r}{\partial k_p}$  se obtiene a su vez resolviendo el sistema  $[S]\{h_r\} = 0$  (expresión III.30 del ANEXO

III) derivado:

$$[S] \frac{\partial h_r}{\partial k_p} = - \frac{\partial [S]}{\partial k_p} h_r \quad (4.88)$$

El algoritmo requerido al considerar el logaritmo decimal como variable aleatoria, se obtiene por tanto mediante una modificación sencilla del algoritmo aplicable al caso en que la conductividad hidráulica es la variable aleatoria (López, 2000).

(b) *Aproximación de segundo orden*

La aproximación de segundo orden del valor esperado de la carga hidráulica (López & Auvinet, 2002) se obtiene con:

$$E\{h_r\}^{II} = E\{h_r\}^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p \partial w_q} \right]_{\mu_{g_p}, \mu_{g_q}} \text{Cov}[w_p, w_q] \quad (4.89)$$

La aproximación de segundo orden de la varianza de la carga hidráulica es:

$$\begin{aligned} \text{Var}[h_r]^{II} = \text{Var}[h_r]^I + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 h_r}{\partial w_l \partial w_m} \right]_{\mu_{w_l}, \mu_{w_m}} \\ \times \left[ \frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p \partial w_q} \right]_{\mu_{g_p}, \mu_{g_q}} \left( \begin{aligned} &\text{Cov}[w_l, w_q] \cdot \text{Cov}[w_m, w_p] + \\ &\text{Cov}[w_l, w_p] \cdot \text{Cov}[w_m, w_q] \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4.90)$$

En las expresiones anteriores, los términos:  $\left[ \frac{\partial^2 h_r}{\partial w_l \partial w_m} \right]_{\mu_{w_l}, \mu_{w_m}}$  y  $\left[ \frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p \partial w_q} \right]_{\mu_{w_p}, \mu_{w_q}}$ , son las

segundas derivadas de la carga hidráulica,  $h_r$ , respecto a los logaritmos decimales o naturales de las conductividades hidráulicas, representados por las variables  $w_i$ :

— Si  $w_i$  son logaritmos decimales de  $k_i$ : 
$$\frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p^2} = \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p^2} \cdot \left( \frac{k_p}{0.434294} \right)^2 + \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \cdot \frac{k_p}{(0.434294)^2} \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p \partial w_q} = \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p \partial k_q} \cdot \frac{k_p k_q}{(0.434294)^2} \quad (4.92)$$

— Si  $w_i$  son logaritmos naturales de  $k_i$ : 
$$\frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p^2} = \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p^2} \cdot k_p^2 + \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \cdot k_p \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial^2 h_r}{\partial w_p \partial w_q} = \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p \partial k_q} \cdot k_p k_q \quad (4.94)$$

Por lo que, las derivadas de segundo orden respecto a las permeabilidades se pueden obtener en forma sencilla derivando nuevamente el sistema (4.88):

$$[S] \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p^2} = -2 \cdot \frac{\partial [S]}{\partial k_p} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \quad (4.95)$$

$$[S] \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p \partial k_q} = - \frac{\partial [S]}{\partial k_p} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_q} - \frac{\partial [S]}{\partial k_q} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \quad (4.96)$$

### 4.3.3.2 Incertidumbre en el gradiente hidráulico

#### (a) Aproximación de primer orden

La estimación de primer orden del valor esperado del gradiente hidráulico en dirección  $X$  se obtiene con:

$$E\{i_x\}^I = \frac{1}{2\Delta} \sum_{p=1}^3 b_p E\{h_p\}^I \quad (4.97)$$

El valor esperado del gradiente hidráulico en dirección  $Y$  se obtiene de manera análoga.

En la misma forma, la estimación de primer orden de la varianza del gradiente hidráulico, en la dirección  $X$ , puede calcularse en cada elemento, utilizando la siguiente expresión:

$$Var[i_x]^I = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \left[ \frac{b_p}{2\Delta} \right] \left[ \frac{b_q}{2\Delta} \right] Cov[h_p, h_q]^I \quad (4.98)$$

donde  $b_p$  y  $b_q$ , son términos de la matriz geométrica  $[B]$  (ver ANEXO III),  $E\{h_p\}^I$  y  $Cov[h_p, h_q]^I$  son las estimaciones de primer orden del valor esperado y de las covarianzas de las cargas hidráulicas en los nodos del elemento. Las estimaciones de primer orden del valor esperado y de la varianza del gradiente hidráulico en la dirección  $Y$ , se determinan de manera análoga.

Por otra parte, la estimación de primer orden del valor esperado de la magnitud del vector gradiente hidráulico es:

$$E\{\bar{i}\}^I = \sqrt{\left[ E\{i_p\}^I \right]^2 + \left[ E\{i_q\}^I \right]^2} \quad (4.99)$$

donde  $E\{i_p\}^I$  y  $E\{i_q\}^I$  representan las estimaciones de primer orden del valor esperado del gradiente hidráulico en las direcciones  $X$  y  $Y$  obtenidas con la expresión (4.97).

La estimación de primer orden de la varianza de la magnitud del vector gradiente hidráulico,  $\bar{i}$ , en un elemento determinado puede ser evaluada con:

$$\text{var}[\bar{i}]^I = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left[ \frac{\partial \bar{i}}{\partial i_p} \right]_{\mu_{i_p}} \left[ \frac{\partial \bar{i}}{\partial i_q} \right]_{\mu_{i_q}} \text{Cov}[i_p, i_q]^I \quad (4.100)$$

donde las derivadas son:

$$\frac{\partial \bar{i}}{\partial i_p} = \frac{i_p}{\sqrt{i_p^2 + i_q^2}} \quad (4.101)$$

y  $\text{Cov}[i_p, i_q]^I$  puede estimarse como:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[i_p, i_q]^I &= \left( \frac{1}{2\Delta} \right)^2 \left\{ c_l b_l \text{Var}[h_l]^I \right. \\ &\quad + c_l b_m \text{Cov}[h_l, h_m]^I + c_l b_n \text{Cov}[h_l, h_n]^I \\ &\quad + c_m b_l \text{Cov}[h_m, h_l]^I + c_m b_m \text{Var}[h_m]^I \\ &\quad + c_m b_n \text{Cov}[h_m, h_n]^I + c_n b_l \text{Cov}[h_n, h_l]^I \\ &\quad \left. + c_n b_m \text{Cov}[h_n, h_m]^I + c_n b_n \text{Var}[h_n]^I \right\} \quad (4.102) \end{aligned}$$

donde  $\text{Var}[h_l]^I$  y  $\text{Cov}[h_l, h_m]^I$  son las estimaciones de primer orden de las varianzas y covarianzas de las cargas hidráulicas en los nodos de la malla de elementos finitos;  $c_i$  y  $b_i$  son términos de la matriz geométrica  $[B]$  (ver ANEXO III).

#### (b) Aproximación de segundo orden

Tomando en cuenta que el gradiente es una función lineal de las cargas nodales, la aproximación de segundo orden del valor esperado del gradiente y de su varianza en la dirección  $X$ , por ejemplo, puede obtenerse simplemente sustituyendo en las ecuaciones (4.97) y (4.98) las aproximaciones de primer orden del valor esperado y de las covarianzas de las cargas hidráulicas, por las de segundo orden:

$$E\{i_x\}^{II} = \frac{1}{2\Delta} \sum_{p=1}^3 b_p E\{h_p\}^{II} \quad (4.103)$$

$$\text{Var}[i_x]^{II} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \left[ \frac{b_p}{2\Delta} \right] \left[ \frac{b_q}{2\Delta} \right] \text{Cov}[h_p, h_q]^{II} \quad (4.104)$$

Por lo que se refiere a la magnitud del vector gradiente hidráulico,  $\bar{i}$ , la estimación de segundo orden del valor esperado es:

$$E\{\bar{i}\}^H = E\{\bar{i}\}^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial i_p \partial i_q} \right]_{\mu_{i_p} \mu_{i_q}} Cov[i_p, i_q]^H \quad (4.105)$$

en la cual, las derivadas de segundo orden se calculan de acuerdo con:

$$\frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial i_p^2} = \frac{1}{(i_p^2 + i_q^2)^{1/2}} - \frac{i_p^2}{(i_p^2 + i_q^2)^{3/2}} \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial i_p \partial i_q} = -\frac{i_p i_q}{(i_p^2 + i_q^2)^{3/2}} \quad (4.107)$$

Asimismo,  $Cov[i_p, i_q]^H$  puede estimarse como:

$$\begin{aligned} Cov[i_p, i_q]^H &= \left( \frac{1}{2\Delta} \right)^2 \left\{ c_l b_l Var[h_l]^H \right. \\ &\quad + c_l b_m Cov[h_l, h_m]^H + c_l b_n Cov[h_l, h_n]^H \\ &\quad + c_m b_l Cov[h_m, h_l]^H + c_m b_m Var[h_m]^H \\ &\quad + c_m b_n Cov[h_m, h_n]^H + c_n b_l Cov[h_n, h_l]^H \\ &\quad \left. + c_n b_m Cov[h_n, h_m]^H + c_n b_n Var[h_n]^H \right\} \quad (4.108) \end{aligned}$$

donde  $Var[h_l]^H$  y  $Cov[h_l, h_m]^H$  son las estimaciones de segundo orden de las varianzas y covarianzas de las cargas hidráulicas en los nodos de la malla de elementos finitos;  $c_i$  y  $b_i$  son términos de la matriz geométrica  $[B]$ .

De igual manera, la estimación de segundo orden de la varianza de la magnitud del vector gradiente hidráulico,  $\bar{i}$ , en un elemento determinado puede ser evaluada con:

$$\begin{aligned} Var[\bar{i}]^H &= Var[\bar{i}]^I + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial i_l \partial i_m} \right]_{\mu_{i_l} \mu_{i_m}} \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial i_p \partial i_q} \right]_{\mu_{i_p} \mu_{i_q}} \left( \begin{aligned} &Cov[i_l, i_q]^H \cdot Cov[i_m, i_p]^H + \\ &Cov[i_l, i_p]^H \cdot Cov[i_m, i_q]^H \end{aligned} \right) \quad (4.109) \end{aligned}$$

Donde las derivadas de segundo orden  $\left[ \frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial i_l \partial i_m} \right]_{\mu_{i_l} \mu_{i_m}}$  se obtienen con las expresiones (4.106) y

(4.107), y  $Cov[i_l, i_m]^H$  se determina con (4.108).

### 4.3.3.3 Incertidumbre en las fuerzas de filtración

En el caso de las fuerzas de filtración, puesto que para su obtención solamente se multiplica el gradiente hidráulico por el peso volumétrico del agua  $\gamma_w$  (expresión III.17 del ANEXO III), la incertidumbre se calcula asimismo con las expresiones empleadas para el gradiente hidráulico, pero multiplicadas por el valor constante  $\gamma_w$  (para las estimaciones de primer y segundo orden del *valor esperado* en las direcciones  $X$  y  $Y$ ) y por  $\gamma_w^2$  (para las estimaciones de primer y segundo orden de la *varianza* en las direcciones  $X$  y  $Y$ ).

### 4.3.3.4 Incertidumbre en la velocidad de flujo

#### (a) Aproximación de primer orden

La estimación de primer orden del valor esperado de la velocidad de flujo en dirección  $X$ , se obtiene con:

$$E\{V_{x_s}\}^I = -\frac{1}{2\Delta} \sum_{p=1}^3 E\{k_p\} b_p E\{h_p\}^I \quad (4.110)$$

donde  $E\{k_p\}$  es el valor esperado de la permeabilidad,  $b_p$  es un término de la matriz geométrica  $[B]$  (ANEXO III), y  $E\{h_p\}^I$  es la estimación de primer orden del valor esperado de la carga hidráulica.

Las estimaciones de primer orden de las varianzas y covarianzas de la velocidad de flujo en la dirección  $X$ , pueden obtenerse respectivamente utilizando las siguientes expresiones:

$$Var[V_{x_s}]^I = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial V_{x_s}}{\partial w_p} \right]_{\mu_{w_p}} \left[ \frac{\partial V_{x_s}}{\partial w_q} \right]_{\mu_{w_q}} Cov[w_p, w_q] \quad (4.111)$$

$$Cov[V_{x_s}, V_{x_t}]^I = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial V_{x_s}}{\partial w_p} \right]_{\mu_{g_p}} \left[ \frac{\partial V_{x_t}}{\partial w_q} \right]_{\mu_{g_q}} Cov[w_p, w_q] \quad (4.112)$$

donde  $\left[ \frac{\partial V_{x_s}}{\partial w_p} \right]_{\mu_{w_p}}$  y  $\left[ \frac{\partial V_{x_t}}{\partial w_q} \right]_{\mu_{w_q}}$  son las primeras derivadas de la velocidad de flujo respecto a las

variables  $w_p$  y  $w_q$ , respectivamente (evaluadas para el valor esperado de  $w_p$  y  $w_q$ ). Estas derivadas pueden obtenerse de manera sencilla a partir de las derivadas directas de  $V_{x_s}$  respecto a las conductividades hidráulicas  $k_p$ . Esto es, si  $w_p$  son los logaritmos decimales de  $k_p$ , entonces:

$$\frac{\partial V_{x_s}}{\partial w_p} = \frac{\partial V_{x_s}}{\partial k_p} \cdot \frac{k_p}{0.434294} \quad (4.113)$$

Recordando que, si se emplean *logaritmos naturales*, el factor 1/0.434294 debe omitirse de la derivada anterior (como en el caso de la carga hidráulica, ver ecuación 4.87).

Adicionalmente,  $\frac{\partial V_{x_s}}{\partial k_p}$  se obtiene derivando el sistema  $\{V\} = -\frac{1}{2\Delta}[R][B]\{h_r\}$  (expresión III.31 del ANEXO III):

$$\frac{\partial V_{x_s}}{\partial k_p} = -\frac{h_r}{2\Delta} \cdot \frac{\partial [R][B]}{\partial k_p} - \frac{[R][B]}{2\Delta} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \quad (4.114)$$

Las estimaciones de primer orden del valor esperado, las varianzas y covarianzas en la velocidad de flujo para la dirección  $Y$ , se obtienen de manera análoga.

Por otra parte, la estimación de primer orden del valor esperado de la magnitud del vector velocidad de flujo es:

$$E\{\bar{V}\}^I = \sqrt{\left[E\{V_s\}^I\right]^2 + \left[E\{V_t\}^I\right]^2} \quad (4.115)$$

donde  $E\{V_s\}^I$  y  $E\{V_t\}^I$  representan las estimaciones de primer orden del valor esperado de la velocidad de flujo en las direcciones  $X$  y  $Y$ , obtenidas con la expresión (4.110).

La estimación de primer orden de la varianza de la magnitud del vector velocidad de flujo,  $\bar{V}$ , puede obtenerse con:

$$Var[\bar{V}]^I = \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial V_s} \right]_{\mu_{V_s}} \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial V_t} \right]_{\mu_{V_t}} Cov[V_s, V_t]^I \quad (4.116)$$

donde las derivadas son:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial V_s} = \frac{V_s}{\sqrt{V_s^2 + V_t^2}} \quad (4.117)$$

asimismo,  $Cov[V_s, V_t]^I$ , puede determinarse con:

$$Cov[V_s, V_t]^I = \left( \frac{-k_p k_q}{2\Delta} \right)^2 \{c_l b_l Var[h_l]^I\}$$

$$\begin{aligned}
 &+c_l b_m Cov[h_l, h_m]^I + c_l b_n Cov[h_l, h_n]^I \\
 &+c_m b_l Cov[h_m, h_l]^I + c_m b_m Var[h_m]^I \\
 &+c_m b_n Cov[h_m, h_n]^I + c_n b_l Cov[h_n, h_l]^I \\
 &+c_n b_m Cov[h_n, h_m]^I + c_n b_n Var[h_n]^I \} \quad (4.118)
 \end{aligned}$$

(b) *Aproximación de segundo orden*

La estimación de segundo orden del valor esperado de la velocidad de flujo en dirección  $X$ , se obtiene con:

$$E\{V_{x_s}\}^{II} = E\{V_{x_s}\}^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_p \partial w_q} \right]_{\mu_{w_p} \mu_{w_q}} Cov[w_p, w_q] \quad (4.119)$$

La estimación de segundo orden de la varianza de la velocidad de flujo en dirección  $X$ , es:

$$\begin{aligned}
 Var[V_{x_s}]^{II} &= Var[V_{x_s}]^I + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_l \partial w_m} \right]_{\mu_{w_l} \mu_{w_m}} \\
 &\times \left[ \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_p \partial w_q} \right]_{\mu_{w_p} \mu_{w_q}} \left( Cov[w_l, w_q] \cdot Cov[w_m, w_p] + \right. \\
 &\left. Cov[w_l, w_p] \cdot Cov[w_m, w_q] \right) \quad (4.120)
 \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, los términos  $\left[ \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_l \partial w_m} \right]_{\mu_{w_l} \mu_{w_m}}$  y  $\left[ \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_p \partial w_q} \right]_{\mu_{w_p} \mu_{w_q}}$ , son las

segundas derivadas de la velocidad de flujo en dirección  $X$  respecto a las variables  $w_i$ . En el caso en que dichas variables corresponden a los logaritmos decimales de las conductividades hidráulicas  $k_i$ , estas derivadas se obtienen fácilmente con:

$$\frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_p^2} = \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial k_p^2} \cdot \left( \frac{k_p}{0.434294} \right)^2 + \frac{\partial V_{x_s}}{\partial k_p} \cdot \frac{k_p}{(0.434294)^2} \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial w_p \partial w_q} = \frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial k_p \partial k_q} \cdot \frac{k_p k_q}{(0.434294)^2} \quad (4.122)$$

Nuevamente recordando que si las variables  $w_i$  son los *logaritmos naturales* de las conductividades hidráulicas  $k_i$ , entonces el factor  $1/(0.434294)^2$  debe omitirse de las derivadas anteriores (como en el caso de la carga hidráulica, ver ecuaciones 4.93 y 4.94).



Adicionalmente, las derivadas de segundo orden de la velocidad con respecto a la permeabilidad, se pueden obtener en forma sencilla derivando nuevamente el sistema (4.114):

$$\frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial k_p^2} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_p} \cdot \frac{\partial [R][B]}{\partial k_p} - \frac{[R][B]}{2\Delta} \cdot \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p^2} \quad (4.123)$$

$$\frac{\partial^2 V_{x_s}}{\partial k_p \partial k_q} = -\frac{[R][B]}{2\Delta} \cdot \frac{\partial^2 h_r}{\partial k_p \partial k_q} - \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{\partial [R][B]}{\partial k_q} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_p} - \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{\partial [R][B]}{\partial k_p} \cdot \frac{\partial h_r}{\partial k_q} \quad (4.124)$$

Las estimaciones de segundo orden del valor esperado y de la varianza de la velocidad de flujo en dirección  $Y$ , se obtienen de manera análoga.

La estimación de segundo orden del valor esperado de la magnitud del vector velocidad de flujo se obtiene con:

$$E\{\bar{V}\}^{II} = E\{\bar{V}\}^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial V_p \partial V_q} \right]_{\mu_{V_p} \mu_{V_q}} Cov[V_p, V_q] \quad (4.125)$$

Asimismo, la estimación de segundo orden de la varianza de la magnitud del vector velocidad de flujo es:

$$\begin{aligned} Var[\bar{V}]^{II} = & Var[\bar{V}]^I + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial V_l \partial V_m} \right]_{\mu_{V_l} \mu_{V_m}} \\ & \times \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial V_p \partial V_q} \right]_{\mu_{V_p} \mu_{V_q}} \left( Cov[V_l, V_q]^{II} \cdot Cov[V_m, V_p]^{II} + \right. \\ & \left. Cov[V_l, V_p]^{II} \cdot Cov[V_m, V_q]^{II} \right) \end{aligned} \quad (4.126)$$

donde las derivadas de segundo orden se determinan con:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial V_p^2} = \frac{1}{(V_p^2 + V_q^2)^{1/2}} - \frac{V_p^2}{(V_p^2 + V_q^2)^{3/2}} \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial V_p \partial V_q} = -\frac{V_p V_q}{(V_p^2 + V_q^2)^{3/2}} \quad (4.128)$$

y  $Cov[V_l, V_q]^{II}$  puede obtenerse con:

$$Cov[V_l, V_q]^{II} = \left( \frac{-k_p k_q}{2\Delta} \right)^2 \{c_l b_l Var[h_l]\}^{II}$$

$$\begin{aligned}
 &+c_l b_m Cov[h_l, h_m]^{II} + c_l b_n Cov[h_l, h_n]^{II} \\
 &+c_m b_l Cov[h_m, h_l]^{II} + c_m b_m Var[h_m]^{II} \\
 &+c_m b_n Cov[h_m, h_n]^{II} + c_n b_l Cov[h_n, h_l]^{II} \\
 &+c_n b_m Cov[h_n, h_m]^{II} + c_n b_n Var[h_n]^{II} \} \quad (4.129)
 \end{aligned}$$

#### 4.3.3.5 Incertidumbre en el gasto

##### (a) Aproximación de primer orden

La estimación de primer orden del valor esperado del gasto que sale por el lado del elemento finito opuesto al nodo  $r$ ,  $q_{rx}$  y  $q_{ry}$ , en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente, se determina con:

$$\begin{aligned}
 E\{q_{rx}\}^I &= -b_r E\{V_x\}^I \\
 E\{q_{ry}\}^I &= -c_r E\{V_y\}^I
 \end{aligned} \quad (4.130)$$

donde  $E\{V_x\}^I$  y  $E\{V_y\}^I$  son las aproximaciones de primer orden del valor esperado de la velocidad en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente, y  $b_r$  y  $c_r$  son términos de la matriz geométrica  $[B]$ .

Asimismo, la aproximación de primer orden de la varianza en el gasto se obtiene con:

$$\begin{aligned}
 Var[q_{rx}]^I &= -b_r^2 Var[V_x]^I \\
 Var[q_{ry}]^I &= -c_r^2 Var[V_y]^I
 \end{aligned} \quad (4.131)$$

donde  $Var[q_{rx}]$  y  $Var[q_{ry}]$  son las varianzas del gasto que sale por el lado opuesto al nodo  $r$  del elemento considerado en las direcciones  $X$  y  $Y$ , y  $Var[V_x]^I$  y  $Var[V_y]^I$  son las estimaciones de primer orden de la varianza de la velocidad en las direcciones  $X$  y  $Y$ , en las cuales, la incertidumbre en  $\log_{10} k$  ya está incluida.

##### (b) Aproximación de segundo orden

La estimación de segundo orden del valor esperado del gasto es:

$$\begin{aligned}
 E\{q_{rx}\}^{II} &= -b_r E\{V_x\}^{II} \\
 E\{q_{ry}\}^{II} &= -c_r E\{V_y\}^{II}
 \end{aligned} \quad (4.132)$$

donde  $E\{V_x\}^{II}$  y  $E\{V_y\}^{II}$  son las aproximaciones de segundo orden del valor esperado de la velocidad en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente.

Asimismo, para la varianza del gasto se tiene:

$$\begin{aligned} Var[q_{rx}]^{II} &= -b_r^2 Var[V_x]^{II} \\ Var[q_{ry}]^{II} &= -c_r^2 Var[V_y]^{II} \end{aligned} \quad (4.133)$$

donde  $Var[V_x]^{II}$  y  $Var[V_y]^{II}$  son las aproximaciones de segundo orden de la varianza de la velocidad en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente.

#### 4.3.3.6 Algoritmo desarrollado

Para la aplicación de la teoría anterior se implementó el algoritmo MEFLULOG (López & Auvinet, 2004), en lenguaje Visual Basic 6.0. Este algoritmo permite realizar análisis estocásticos de flujo de agua en suelos considerando como variable aleatoria el logaritmo decimal de la permeabilidad,  $\log_{10} k$ , y aplicando las *aproximaciones de primer y segundo orden segundos momentos (FOSM y SOSM, respectivamente)* expuestas con anterioridad. Algunas de sus principales características son el empleo de la técnica de la *silueta* o *skyline* (Bathe & Wilson, 1976), la que optimiza el espacio de memoria ocupado durante las operaciones con matrices. Asimismo en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se emplea el *método de eliminación gaussiana* (Bathe & Wilson, 1976). En las Figuras 4.15 y 4.16 se muestran algunas de las ventanas de este programa. En la Figura 4.17 se presenta el diagrama de flujo simplificado del mismo.

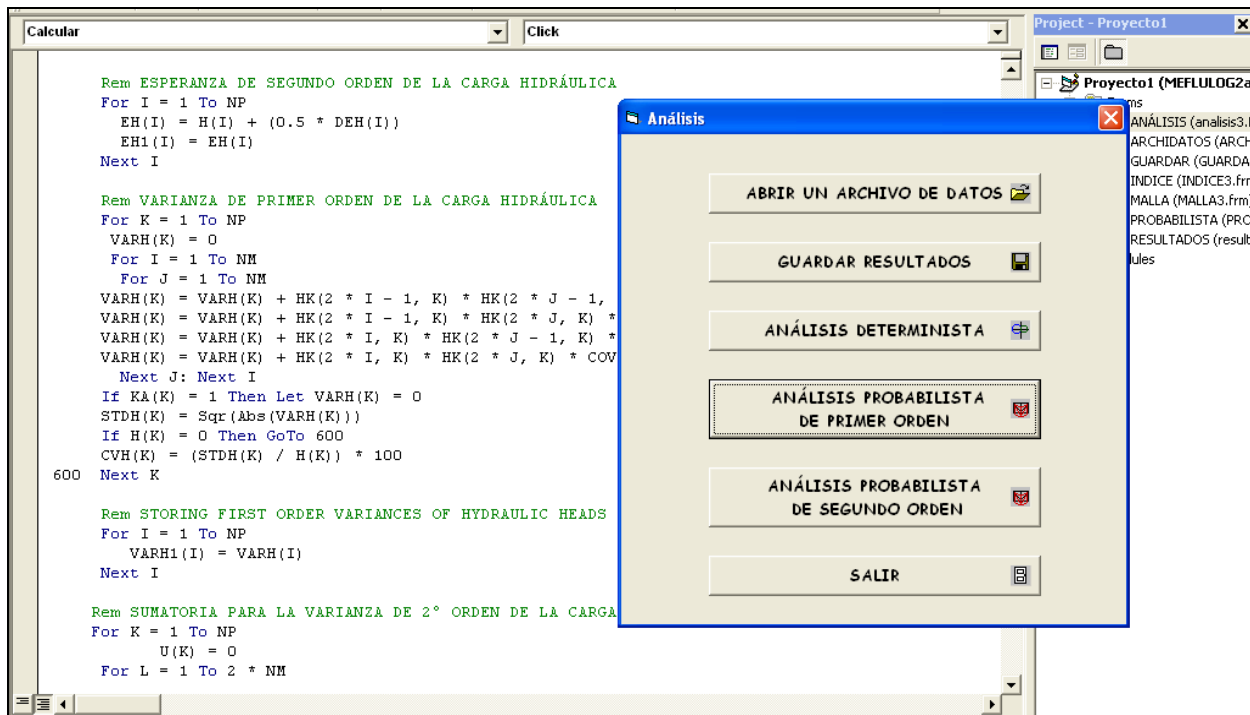


Figura 4.15 Ventana para visualizar los resultados obtenidos con MEFLULOG (López & Auvinet, 2004)

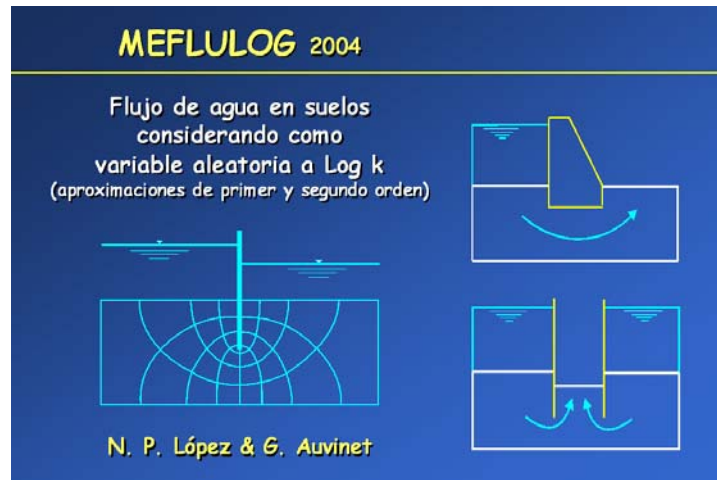


Figura 4.16 Pantalla de inicio del programa MEFLULOG (López & Auvinet, 2004)

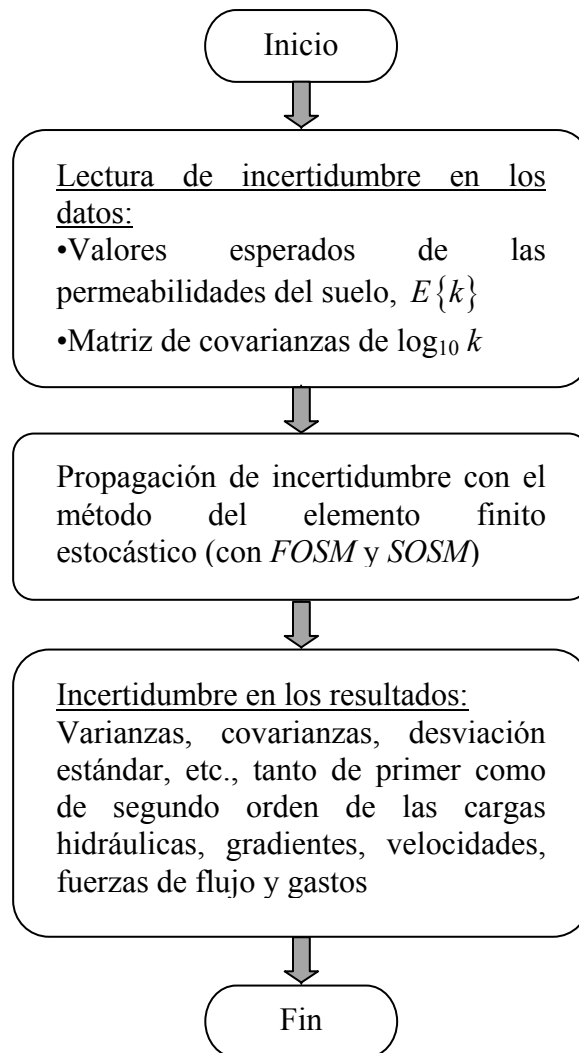


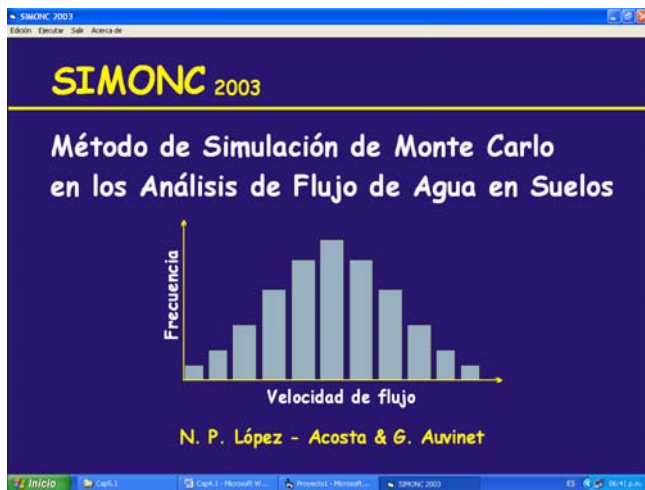
Figura 4.17 Diagrama de flujo simplificado del algoritmo MEFLULOG (López & Auvinet, 2004)

#### 4.3.4 Implementación de la técnica de simulación de Monte Carlo en combinación con el método de elementos finitos (*FEM*)

Se desarrolló una metodología que permite acoplar la técnica de simulación de Monte Carlo con el método de elementos finitos (*FEM*) para efectuar análisis de flujo de agua en dos dimensiones. El proceso consiste en obtener inicialmente por muestreo al azar un conjunto de variables aleatorias correlacionadas  $X_i$  que tienen una distribución normal (en este caso, corresponden a los logaritmos decimales de las conductividades hidráulicas,  $\log_{10} k$ ), respetando las densidades y correlaciones existentes. Estos valores se asignan a elementos o grupos de elementos finitos (con base en el *método del punto medio -midpoint method-*) de la malla con la que se modela el dominio en estudio. Posteriormente a partir de estos datos, se realiza el cálculo numérico del flujo de agua con el método de elementos finitos (*FEM*). Se repite el proceso de cálculo un número de veces hasta obtener una muestra de soluciones, de la que se determinan los momentos buscados (la media o valor esperado, la desviación estándar, la varianza, etc.) mediante algún método de estimación estadística.

El algoritmo SIMONC (Figura 4.18) en lenguaje Visual Basic 6.0 (López, 2003), se elaboró para determinar las variables aleatorias correlacionadas  $X_i$  mencionadas, de acuerdo con el diagrama de flujo simplificado que se muestra en la Figura 4.19. Algunos de los datos adicionales solicitados por este programa se ilustran en la Figura 4.20.

De igual manera, después de generadas y asignadas las variables aleatorias  $X_i$  a los elementos de la malla con que se modela la región de flujo en estudio, el análisis numérico del flujo de agua se lleva a cabo mediante el método de elementos finitos con ayuda del algoritmo FLOWNETS (López & Auvinet, 2000). Se trata de un programa escrito en lenguaje Visual Basic 6.0 que se fundamenta en la teoría del ANEXO III (ver algoritmo en Figura III.2 del mencionado anexo).



(a) Pantalla de inicio



(b) Creación de archivo de datos

Figura 4.18 Algoritmo SIMONC (López, 2003)

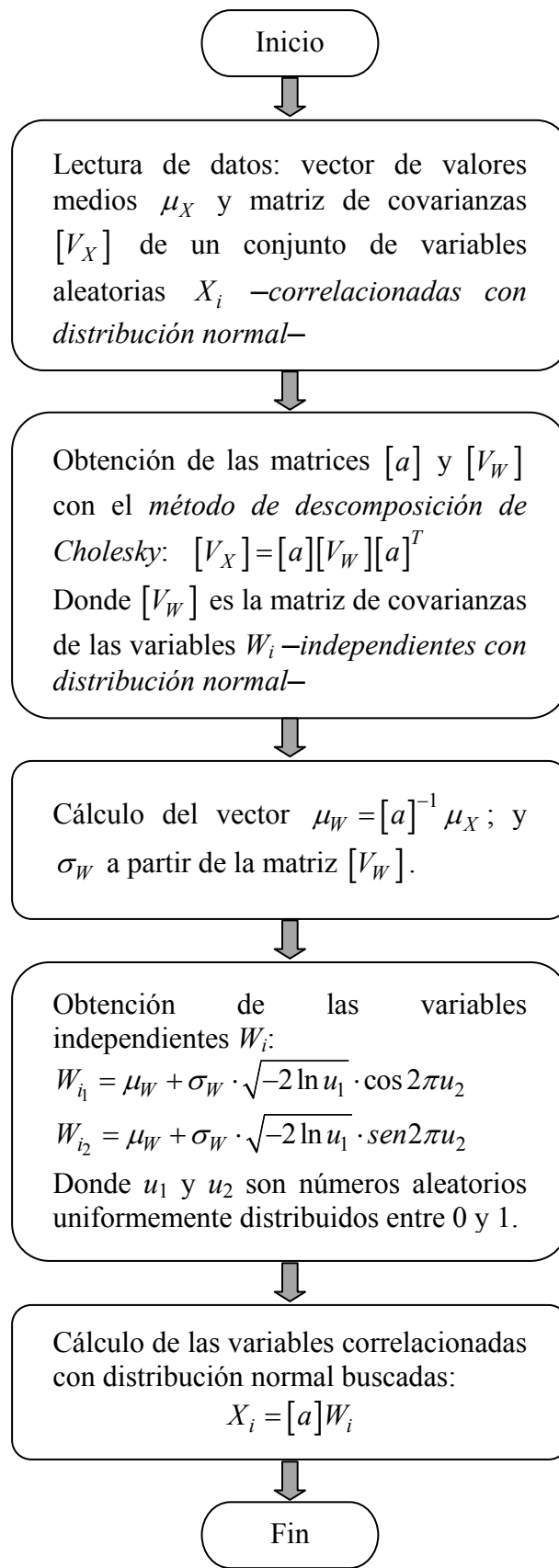


Figura 4.19 Diagrama de flujo simplificado del algoritmo SIMONC (López, 2003)

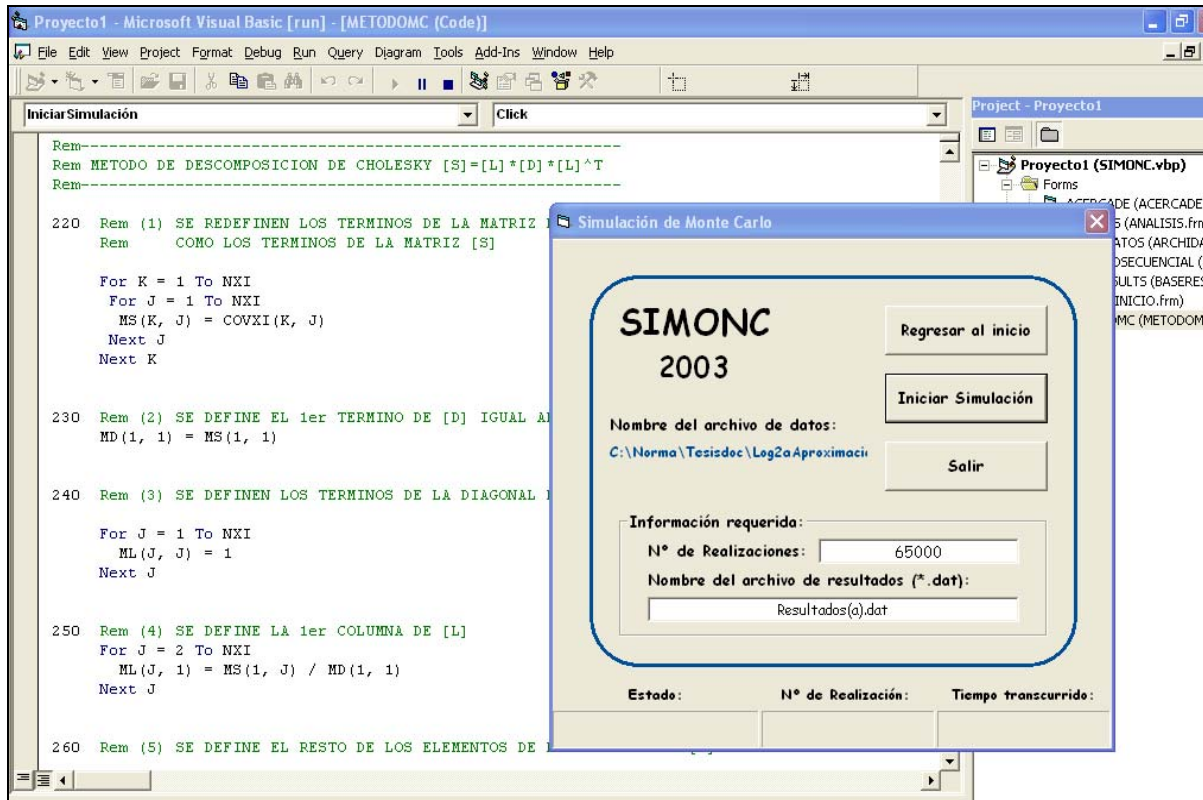


Figura 4.20 Ventana de datos solicitados para iniciar los cálculos con el algoritmo SIMONC (López, 2003)

Cabe aclarar que la metodología propuesta anteriormente, también fue aplicable en esta investigación a la solución analítica estocástica de problemas unidimensionales de flujo de agua (inciso 5.1.4. del Capítulo 5). En este caso, las variables aleatorias  $X_i$  generadas con el algoritmo SIMONC en vez de asignarse a elementos finitos de una malla, se asignaron a subdominios estadísticamente homogéneos representando la región de flujo de interés. El análisis de flujo de agua en lugar de realizarse con el *FEM*, se efectuó analíticamente a través de funciones explícitas de la permeabilidad establecidas como se indica en el inciso 5.1.4. del Capítulo 5.

De igual manera, es importante remarcar que una metodología similar a la anterior se desarrolló para simular campos aleatorios de permeabilidad en dos (2D) y tres dimensiones (3D), y representar con ellos dominios heterogéneos en los que el flujo de agua se estudia con elementos finitos (*FEM*) en el caso 2D y con paseos casuales (*RWM*) en el caso 3D. El proceso se expone con detalle en los incisos 5.4.2. y 5.4.3 del Capítulo 5.

#### 4.4 Desarrollo del método de los paseos casuales en medios heterogéneos simulados

El método de los paseos casuales (*RWM*, explicado brevemente en el inciso 2.3.4 del Capítulo 2 y con mayor detalle en el ANEXO II) (Marsal & Reséndiz, 1968; Auvinet, 1975) se emplea en esta tesis para realizar análisis tridimensionales de flujo de agua a través de medios heterogéneos simulados mediante la teoría de campos aleatorios que se explica en el ANEXO IV. Este método permite estudiar los movimientos (*caminatas*) de una partícula que se desplaza de manera aleatoria sobre los nodos de una malla con la que se modela el dominio tridimensional de flujo

(Figura 4.21a). En los nodos de esta malla, separados entre sí una distancia  $\delta$  (paso de la malla en cualquier dirección), se asignan las permeabilidades que constituyen el campo aleatorio de permeabilidad simulado (con base en el *método del punto medio -midpoint method-*). La *caminata aleatoria* de la partícula inicia en el punto  $p_0$  donde se desea conocer la carga hidráulica  $h_0$ , continúa en cualquiera de las seis direcciones que se indican en la Figura 4.21b, y termina cuando la partícula llega a algún nodo (*absorbente*) localizado en una frontera permeable que tiene carga hidráulica conocida o impuesta. La probabilidad de desplazamiento de la partícula en cualquiera de las seis direcciones del medio heterogéneo en estudio está dada por (López & Auvinet, 2004):

$$P(j) = \frac{k_j}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}; \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.134)$$

Donde  $k_1, k_2, \dots, k_6$  son las medias o promedios armónicos de las conductividades hidráulicas en los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_6$  del medio, respectivamente (Figura 4.21b).

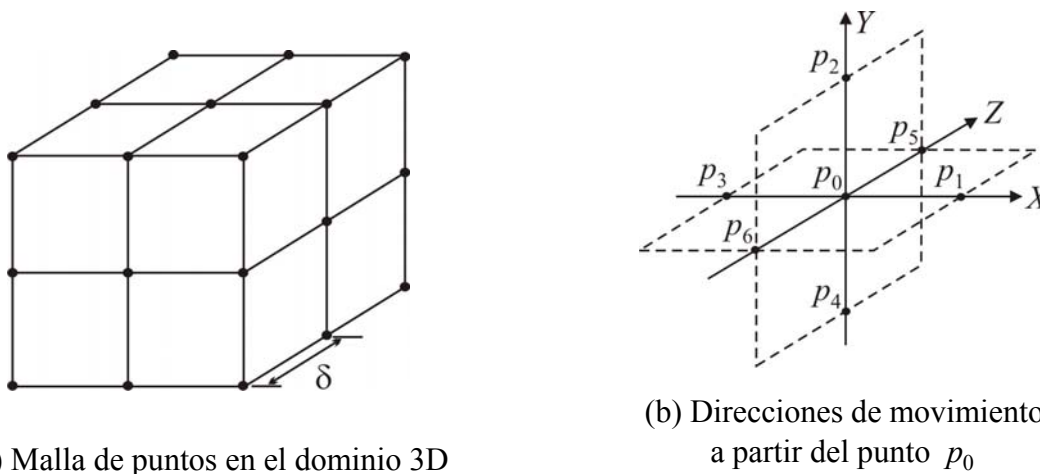


Figura 4.21 Condiciones geométricas en el método de los paseos casuales

La carga hidráulica  $h_0$  se determina entonces contando los números de trayectorias que terminan en las fronteras permeables de la región de flujo ( $m_1$  aguas arriba y  $m_2$  aguas abajo), multiplicándolos por el valor del potencial impuesto en la frontera respectiva ( $h_1$  aguas arriba y  $h_2$  aguas abajo) y dividiendo el resultado entre el número total de trayectorias:

$$h_0 = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2} \quad (4.135)$$

Se repite el procedimiento anterior un número de veces determinado y el resultado obtenido es una medida insesgada de la carga hidráulica en el nodo deseado. Una vez conocidas las cargas hidráulicas en los puntos de interés, es posible calcular los gradientes hidráulicos en los mismos, y posteriormente, las velocidades de flujo y el gasto con base en la ley de Darcy. El conjunto de estos resultados obtenidos con un número suficiente de realizaciones, puede procesarse con métodos estadísticos, los cuales permiten conocer la incertidumbre en los mismos.



Para implementar la teoría anterior se elaboró el algoritmo PASECA en lenguaje Visual Basic 6.0 (López, 2003) de acuerdo con el diagrama de flujo simplificado que se ilustra en la Figura 4.22. En las Figuras 4.23a y 4.23b se muestran respectivamente la ventana de inicio de dicho programa y una caminata aleatoria generada por el mismo. Por su parte, el código y algunos de los datos solicitados por PASECA se señalan en la Figura 4.24. Una de las características principales de este algoritmo es que permite observar en pantalla las caminatas aleatorias tridimensionales en tiempo de ejecución (ver aplicaciones en el Capítulo 5.4.3). Esto es posible gracias al empleo de fórmulas de rotación, traslación y proyección (Hermosillo *et al.*, 2002) mediante las cuales se transforman las coordenadas  $(X, Y, Z)$  de la región de flujo tridimensional original en coordenadas de pantalla gráfica  $(X, Y)$ .

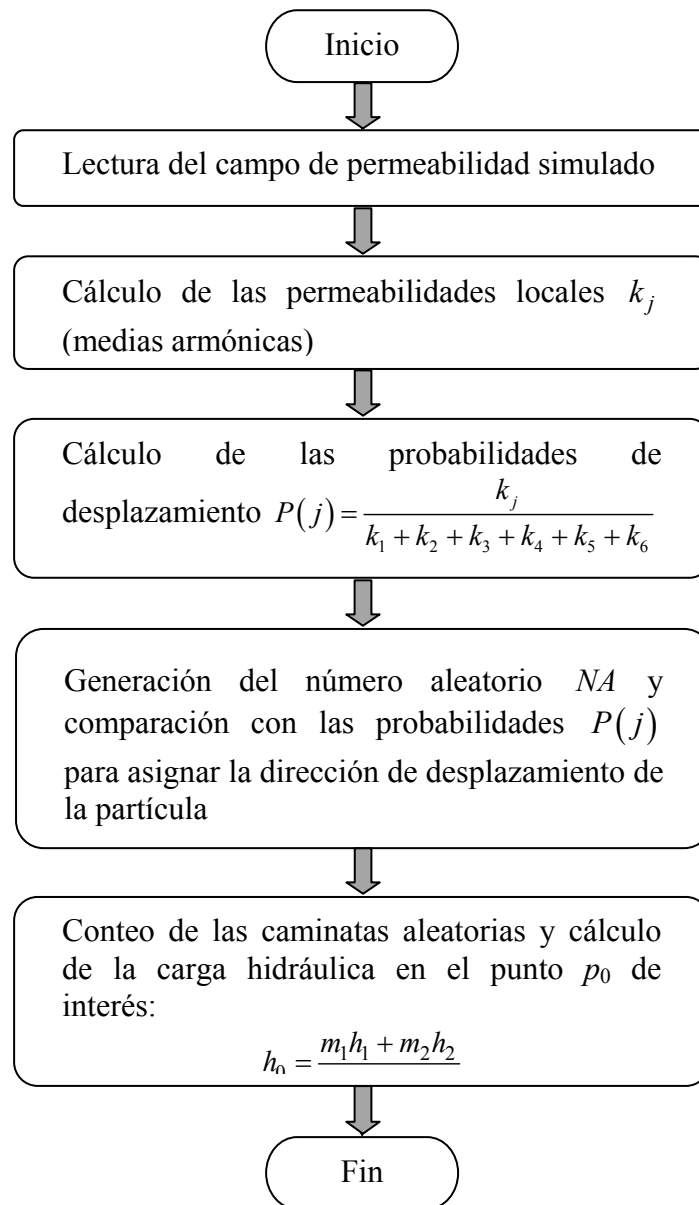
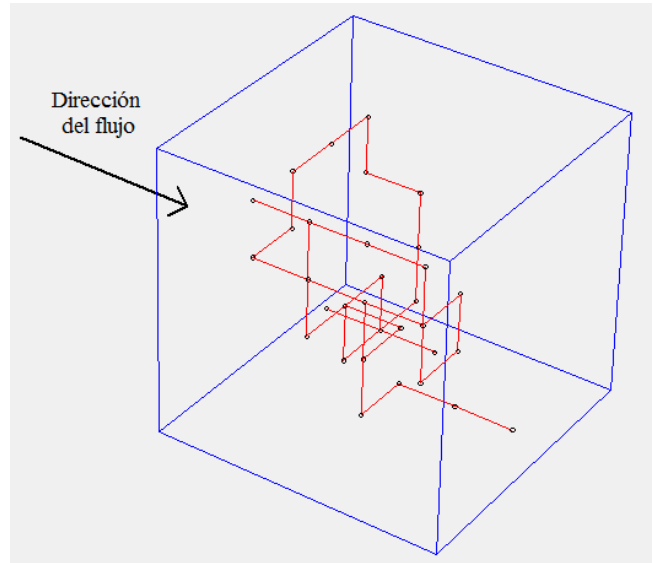


Figura 4.22 Diagrama de flujo simplificado del algoritmo PASECA (López, 2003)



(a) Pantalla de inicio

(b) Ejemplo de una caminata aleatoria generada por el programa

Figura 4.23 Algoritmo PASECA (López, 2003)

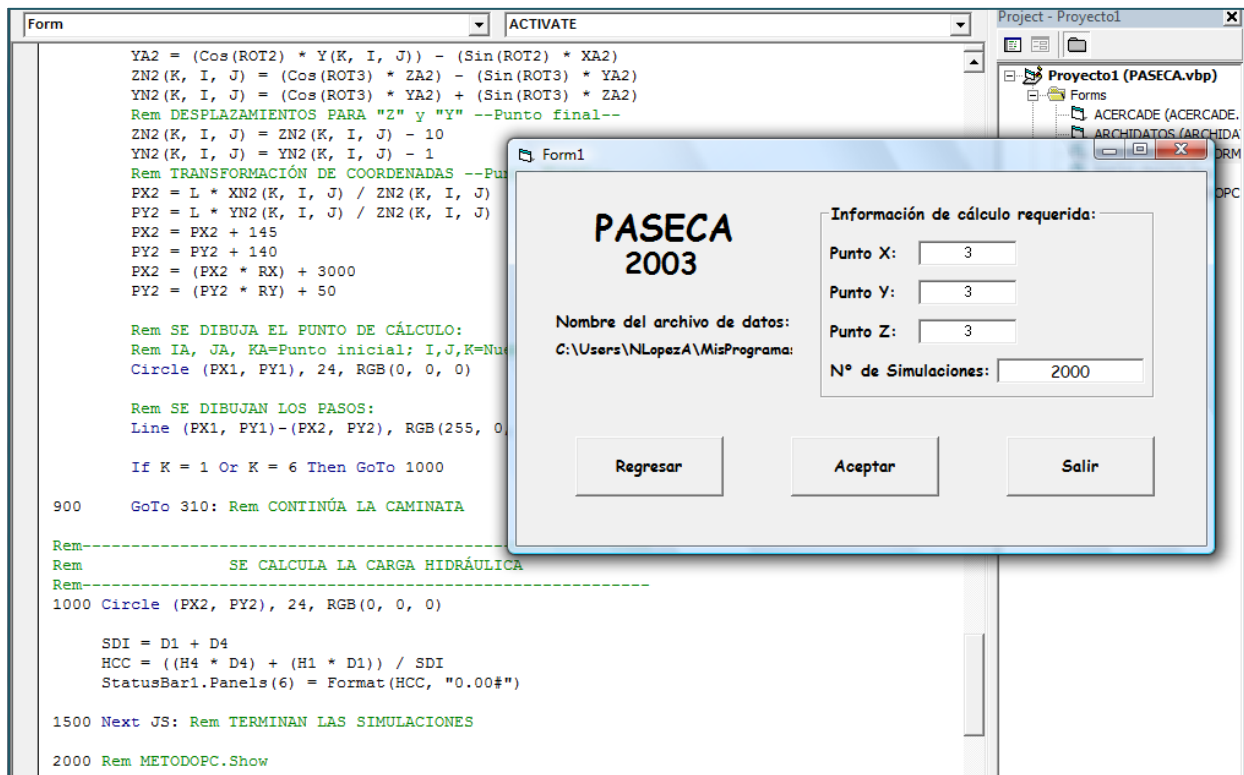


Figura 4.24 Código y datos solicitados por el programa PASECA (López, 2003)

#### 4.5 Teorema de Bayes enfocado al flujo de agua

La fórmula encontrada por el probabilista Thomas Bayes, conocida como *teorema de Bayes* (Bayes, 1763) para la probabilidad de causas, no es más que una aplicación de las probabilidades condicionales. Ha sido clave sin embargo, en el desarrollo de la *inferencia estadística bayesiana* en la que se emplea la interpretación subjetiva de la probabilidad.

El *teorema de Bayes* se expresa matemáticamente para un problema de flujo de agua como:

$$P[k_i|Q] = \frac{P[Q|k_i] \cdot P[k_i]}{\sum_{j=1}^n P[Q|k_j] \cdot P[k_j]} \quad (4.136)$$

En la cual,  $P[k_i]$  es la *probabilidad a priori* de la permeabilidad  $k_i$  (representa la probabilidad de la conductividad hidráulica antes de llevar a cabo el experimento —cálculo analítico o numérico—). La asignación de esta probabilidad depende de la convicción del investigador con respecto a los valores de  $k_i$  antes de que la información muestral sea conocida. Esta convicción se puede basar en cualquier tipo de dato que se encuentre disponible, incluyendo el juicio subjetivo. Si se desconoce por completo dicha información, Bayes sugiere que estas probabilidades se tomen todas con el mismo valor, es decir, suponer que las poblaciones sobre las cuales se define el experimento son igualmente probables y, por tanto, asignar las mismas probabilidades a los diversos valores de  $k_i$ .

Por su parte,  $P[Q|k_i]$  es la *probabilidad condicional* de obtener el gasto  $Q$  dada la permeabilidad  $k_i$ ; misma que se determina con:

$$P[Q|k_i] = \frac{P[Q \cap k_i]}{P[k_i]} \quad (4.137)$$

Finalmente, el término  $P[k_i|Q]$  de la expresión (4.136), es la *probabilidad a posteriori* de obtener la permeabilidad  $k_i$  dado el gasto  $Q$ . Dicha probabilidad, refleja el grado de creencia modificado del investigador con respecto a  $k_i$  después de conocer la información muestral.

La aplicabilidad y respaldo de este teorema se demuestra con la solución de un problema inverso de flujo de agua en una presa de tierra y enrocamiento en el inciso 5.3 del Capítulo 5.

## 5.1 Evaluación analítica y estudios paramétricos de la propagación de la incertidumbre en problemas de flujo unidimensional en medios porosos aleatorios

### 5.1.1 Introducción

El objetivo principal de esta aplicación es evaluar la propagación de la incertidumbre de la conductividad hidráulica en los análisis de flujo de agua a través de medios porosos aleatorios. El estudio se enfoca en el problema clásico del flujo establecido unidimensional de agua a través de una muestra de suelo constituida por un material homogéneo ó estratificado. Este problema elemental típico tiene generalmente una solución determinista directa, sin embargo se considera de gran utilidad analizarlo en un contexto estocástico. Con este fin, se presenta la *solución analítica estocástica* del flujo establecido unidimensional en una muestra de suelo considerada inicialmente como homogénea pero aleatoria. Posteriormente, el análisis se extiende al estudio del flujo asumiendo que la muestra está constituida por una secuencia de dos y tres materiales aleatorios independientes, respectivamente.

En cada caso, el dominio o subdominios de flujo se consideran estadísticamente homogéneos<sup>(5.1)</sup> Asimismo, se reconoce que la incertidumbre se origina en un conocimiento poco preciso de la conductividad hidráulica del suelo  $k$  (debido a la dificultad de obtener una estimación fidedigna de esta propiedad). Esta incertidumbre se modela con variables aleatorias para las que, tomando en cuenta las evidencias experimentales, se adopta la distribución *log-normal*.

Así, el énfasis de los análisis aquí expuestos se pone en la propagación de la incertidumbre del logaritmo decimal de la permeabilidad  $\log_{10} k$  al gasto de infiltración  $Q$  calculado en el dominio de flujo. La atención se centra en esta propiedad ya que se considera que refleja mejor que otras (carga, gradiente hidráulico, fuerza de filtración, velocidad de flujo) el comportamiento hidráulico integral del suelo.

---

<sup>(5.1)</sup> Cuando la esperanza, la varianza y los demás parámetros estadísticos son constantes en el dominio considerado.

Las expresiones analíticas de la función de interés se establecen con base en conceptos básicos de la teoría de flujo, como la ley de Darcy y el principio de continuidad de flujo. La evaluación de la propagación de la incertidumbre del logaritmo de la permeabilidad a la propiedad en estudio se realiza mediante las técnicas estocásticas más comunes disponibles para estos fines, entre ellas el *método de primer orden segundos momentos (FOSM)*, *método de segundo orden segundos momentos (SOSM)*, la *estimación puntual de Rosenblueth*, incluyéndose la aplicación de un nuevo *método mixto* tanto de *primer* como de *segundo orden (MFO y MSO)*, respectivamente). Se analiza la aplicabilidad y limitaciones de estas técnicas. Asimismo, los resultados obtenidos con los métodos anteriores se calibran con los que se determinan a partir de simulaciones de Monte Carlo.

Adicionalmente, con el objetivo de establecer la influencia general de la incertidumbre en la permeabilidad del suelo sobre los resultados de los análisis de flujo de agua, se realizan estudios paramétricos con los que se obtienen diversas gráficas que muestran las estadísticas de salida del gasto en función del coeficiente de variación de la permeabilidad.

Finalmente, se presentan conclusiones respecto a los análisis efectuados y algunas recomendaciones para el aprovechamiento de las técnicas estocásticas empleadas.

### 5.1.2 Fundamento de la condición hidráulica

Los parámetros estocásticos de la conductividad hidráulica impuestos en los materiales estudiados en este problema se asignan con base en los resultados de 34 pruebas de permeabilidad de campo USBRE-19 en pozos de 5m de profundidad (Figura 3.4 del Capítulo 3), realizadas en el perímetro de la laguna de *Cerro Prieto* en Baja California, donde se almacena salmuera geotérmica (Rodríguez, 1996). El análisis estadístico de estos datos indica los siguientes parámetros para la conductividad hidráulica: media o valor esperado  $\mu_k=1.55 \times 10^{-5}$  cm/s y desviación estándar  $\sigma_k=1.53 \times 10^{-5}$  cm/s. El histograma correspondiente a estos resultados se muestra en la Figura 3.5 del Capítulo 3, el cual puede ajustarse razonablemente a una densidad de probabilidad *log-normal*. El logaritmo natural de la permeabilidad ( $\ln k$ ) puede entonces considerarse como normalmente distribuido con parámetros que se determinan mediante las siguientes expresiones<sup>(5.2)</sup> (Benjamin & Cornell, 1970):

$$\mu_{\ln k} = \ln(\mu_k) - \frac{1}{2} \sigma_{\ln k}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_{\ln k}^2 = \ln \left[ \frac{\sigma_k^2}{\mu_k^2} + 1 \right] \quad (5.1)$$

En los análisis aquí efectuados se prefiere utilizar los logaritmos decimales ( $\log_{10} k$ ) en lugar de los naturales ( $\log_{10} k=0.434294 \ln k$ ), debido a que éstos son más fáciles de relacionar con el valor original de la conductividad hidráulica. La transformación de los parámetros estadísticos de la permeabilidad de la laguna de *Cerro Prieto* a los parámetros del logaritmo decimal resulta finalmente:

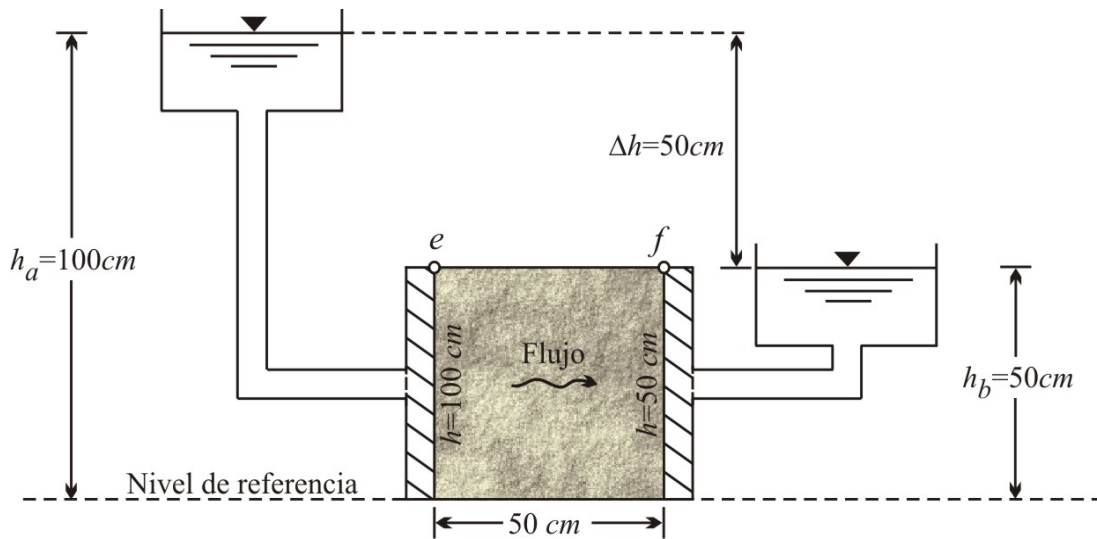
$$\mu_k=1.55 \times 10^{-5} \text{ cm/s} \quad \rightarrow \quad \mu_{\log_{10} k} = -4.957 \quad (5.2)$$

$$\sigma_k=1.53 \times 10^{-5} \text{ cm/s} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\log_{10} k} = 0.358 \quad (5.3)$$

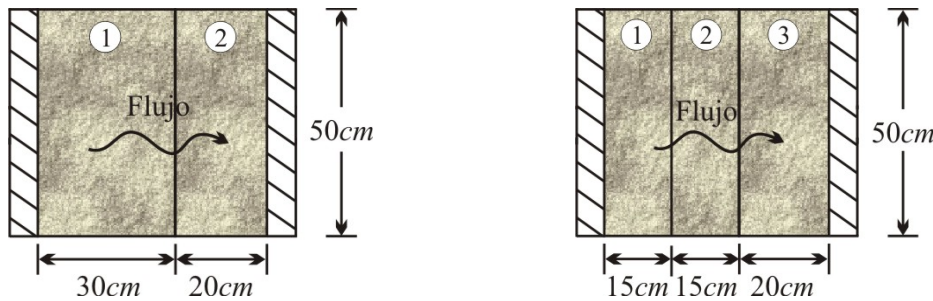
<sup>(5.2)</sup> Debido a la no linealidad, la media de  $\ln k$  no es igual a  $\ln \mu_k$ . Es decir, la media del logaritmo no es el logaritmo de la media (Benjamin & Cornell, 1970).

5.1.3 Características geométricas, de frontera e hidráulicas

Se analiza la muestra de suelo de 50cm de lado con las características geométricas y de frontera que se indican en la Figura 5.1. La pérdida de carga hidráulica de  $\Delta h=50\text{cm}$  ocasiona el flujo unidimensional que ahí se señala y que se estudia para tres condiciones: Caso I: la muestra de suelo se asume como homogénea pero aleatoria (Figura 5.1a); Casos II y III: la muestra de suelo está constituida por una secuencia de dos y tres materiales aleatorios independientes, respectivamente (Figuras 5.1b y 5.1c).



(a) Caso I. Material homogéneo aleatorio



(b) Caso II. Secuencia de dos materiales      (c) Caso III. Secuencia de tres materiales

Figura 5.1 Dominio de flujo analizado

La media o valor esperado de la conductividad hidráulica que se considera para cada material es  $\mu_k=1.55 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$  y la desviación estándar es  $\sigma_k=1.53 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$ , como en el caso de la laguna de *Cerro Prieto*. El coeficiente de variación se fija inicialmente en  $\sigma_k/\mu_k=0.99$ , sin embargo en los análisis paramétricos se considera un rango variable de  $0.01 < \sigma_k/\mu_k < 10.00$ . Asumiendo que la conductividad hidráulica está log-normalmente distribuida, la equivalencia en logaritmos decimales de los parámetros estadísticos anteriores es (ecuación 5.1):  $\mu_{\log_{10} k} = -4.957$ ,  $\sigma_{\log_{10} k} = 0.358$  y  $\sigma_{\log_{10} k} / \mu_{\log_{10} k} = 0.072$ . En el Caso II la matriz de covarianzas de los

parámetros mencionados es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\log_{10} k_1}^2 & \rho(\log_{10} k_1, \log_{10} k_2) \cdot \sigma_{\log_{10} k_1} \sigma_{\log_{10} k_2} \\ \rho(\log_{10} k_1, \log_{10} k_2) \cdot \sigma_{\log_{10} k_1} \sigma_{\log_{10} k_2} & \sigma_{\log_{10} k_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1283 & 0 \\ 0 & 0.1283 \end{bmatrix}$$

La matriz de covarianzas para el Caso III resulta similar:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\log_{10} k_1}^2 & Cov[\log_{10} k_1, \log_{10} k_2] & Cov[\log_{10} k_1, \log_{10} k_3] \\ Cov[\log_{10} k_2, \log_{10} k_1] & \sigma_{\log_{10} k_2}^2 & Cov[\log_{10} k_2, \log_{10} k_3] \\ Cov[\log_{10} k_3, \log_{10} k_1] & Cov[\log_{10} k_3, \log_{10} k_2] & \sigma_{\log_{10} k_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1283 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1283 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1283 \end{bmatrix}$$

En los Casos II y III, debido a que los materiales son independientes, el coeficiente de correlación entre dos y tres materiales diferentes es cero:  $\rho(\log_{10} k_i, \log_{10} k_j)=0$ .

De manera similar, la equivalencia en logaritmos decimales de los parámetros estadísticos de la permeabilidad correspondiente al rango estudiado de  $0.01 < \sigma_k / \mu_k < 10.00$ , se proporciona con detalle en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Parámetros estadísticos de la permeabilidad  $k$  y de su logaritmo decimal  $\log_{10} k$  para el intervalo  $0.01 < \sigma_k / \mu_k < 10.00$

N°	Estadísticas de $k$			Estadísticas de $\log_{10} k$		
	$\mu_k$ (cm/s)	$\sigma_k$ (cm/s)	$\sigma_k / \mu_k$ (adim.)	$\mu_{\log_{10} k}$	$\sigma_{\log_{10} k}$	$\sigma_{\log_{10} k} / \mu_{\log_{10} k}$
1	1.55E-05	1.55E-07	0.01	-4.810	0.004	0.0009
2	1.55E-05	3.10E-07	0.02	-4.810	0.009	0.002
3	1.55E-05	6.20E-07	0.04	-4.810	0.017	0.004
4	1.55E-05	9.30E-07	0.06	-4.810	0.026	0.005
5	1.55E-05	1.24E-06	0.08	-4.811	0.035	0.007
6	1.55E-05	1.55E-06	0.10	-4.812	0.043	0.009
7	1.55E-05	3.10E-06	0.20	-4.818	0.086	0.018
8	1.55E-05	4.65E-06	0.30	-4.828	0.127	0.026
9	1.55E-05	6.20E-06	0.40	-4.842	0.167	0.035
10	1.55E-05	9.30E-06	0.60	-4.876	0.241	0.049
11	1.55E-05	1.24E-05	0.80	-4.917	0.305	0.062
12	1.55E-05	1.53E-05	0.99	-4.957	0.358	0.072
13	1.55E-05	1.55E-05	1.00	-4.960	0.362	0.073
14	1.55E-05	3.10E-05	2.00	-5.159	0.551	0.107
15	1.55E-05	6.20E-05	4.00	-5.425	0.731	0.135
16	1.55E-05	9.30E-05	6.00	-5.594	0.825	0.148
17	1.55E-05	1.24E-04	8.00	-5.716	0.887	0.155
18	1.55E-05	1.55E-04	10.00	-5.812	0.933	0.161

### 5.1.4 Solución estocástica

#### 5.1.4.1 Caso I: Flujo a través de un material homogéneo aleatorio

Considerando los conceptos básicos de la teoría de flujo, es fácil observar que en este caso tanto la carga  $h$  como el gradiente hidráulico  $i$  no dependen de la conductividad hidráulica. Por tanto, en un material homogéneo aleatorio no existe incertidumbre ni en la carga ni en el gradiente hidráulico. La incertidumbre en la conductividad hidráulica afecta directamente la velocidad de flujo y el gasto. La solución del problema de flujo unidimensional a través del material aleatorio homogéneo de la Figura 5.1a es suficientemente simple para permitir realizar los cálculos probabilistas de manera exacta. De hecho, debido a que la función es explícita y la densidad de probabilidad de la variable  $k$  o de su logaritmo decimal  $\log_{10} k$  es conocida, la solución se vuelve trivial. De esta manera, centrando la atención en el gasto (función que se estudia en esta aplicación), esta función de la permeabilidad se define como:

$$Q = kiA = 50k \quad (5.4)$$

Donde  $A$  es el área transversal del dominio de flujo e  $i$  es el gradiente hidráulico.

Tomando logaritmos decimales en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\log_{10} Q = \log_{10} 50 + \log_{10} k \quad (5.5)$$

Consecuentemente, si se toma tanto la esperanza matemática como la desviación estándar o la varianza en ambos miembros de la expresión (5.5), los momentos del gasto se obtienen fácilmente con:

$$\mu_{\log_{10} Q} = \log_{10} 50 + \mu_{\log_{10} k} \quad \text{y} \quad \sigma_{\log_{10} Q} = \sigma_{\log_{10} k} \quad (5.6)$$

La relación lineal existente entre los logaritmos decimales de la conductividad hidráulica ( $\log_{10} k$ ) y del gasto ( $\log_{10} Q$ ) que se observa en las expresiones (5.4) ó (5.5), ocasiona que  $\log_{10} Q$  esté normalmente distribuido al igual que  $\log_{10} k$ . Consecuentemente, el gasto  $Q$  exhibe una densidad de probabilidad *log-normal*, igual que la conductividad hidráulica (Figura 5.4a).

Para la obtención de la equivalencia o transformación de la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$ , se considera inicialmente la relación entre logaritmos decimales y naturales ( $\log_{10} Q = 0.434294 \ln Q$ ):

$$\mu_{\ln Q} = \frac{\mu_{\log_{10} Q}}{0.434294} \quad \text{y} \quad \sigma_{\ln Q} = \frac{\sigma_{\log_{10} Q}}{0.434294} \quad (5.7)$$

Finalmente, los parámetros estadísticos del gasto  $\mu_Q$  y  $\sigma_Q^2$  se obtienen con las expresiones siguientes (Benjamin & Cornell, 1970):

$$\mu_Q = \exp \left[ \mu_{\ln Q} + \frac{1}{2} \sigma_{\ln Q}^2 \right] \quad \text{y} \quad \sigma_Q^2 = [\mu_Q]^2 \left[ \exp \{ \sigma_{\ln Q}^2 \} - 1 \right] \quad (5.8)$$



Así, en el caso sencillo de un material homogéneo, la transformación de la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$  es directa (mediante la ecuación 5.8), debido a la mencionada relación lineal que existe entre  $k$  y  $Q$ .

Finalmente, para la incertidumbre en el gasto del CASO I (material homogéneo aleatorio), se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- El valor esperado del gasto  $\mu_Q$  es igual a su valor determinista  $Q_{\mu_k} = 7.75 \times 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}$  (asumiendo permeabilidad constante =  $\mu_k$  en toda la muestra). Lo anterior se debe a que dicha propiedad depende directamente de la media de la conductividad hidráulica  $\mu_k$  (ecuación 5.6).
- La desviación estándar del gasto es  $\sigma_Q = 50\sigma_k$  y su coeficiente de variación es  $\sigma_Q/\mu_Q = \sigma_k/\mu_k$ , debido a la relación lineal entre  $k$  y  $Q$  (Figura 5.2).

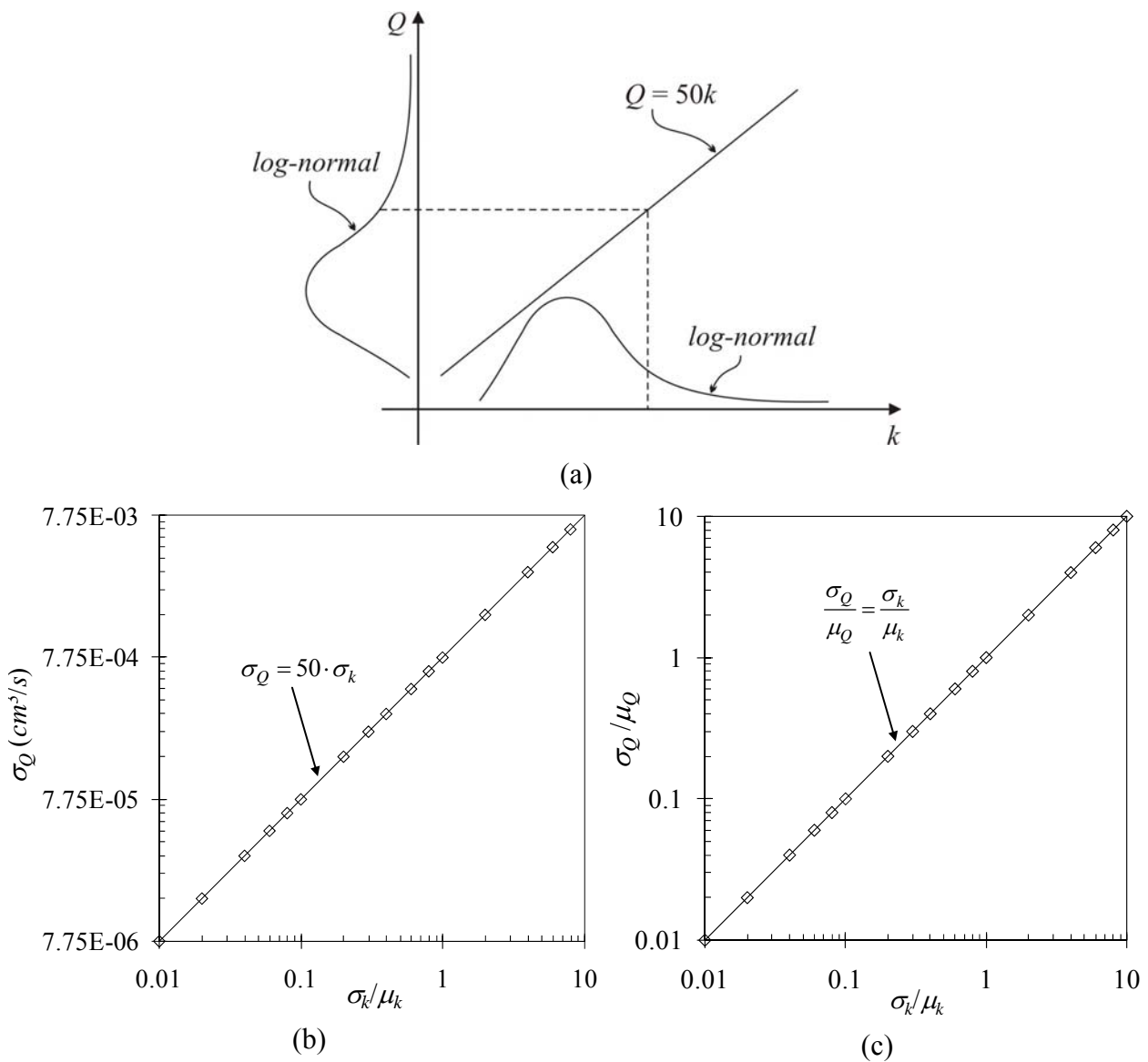


Figura 5.2 Propagación directa de la incertidumbre de la conductividad hidráulica  $k$  al gasto  $Q$  en una muestra de suelo homogénea aleatoria

5.1.4.2 CASO II: Flujo a través de una secuencia de dos materiales aleatorios

La expresión que define el gasto a través de la muestra de dos materiales que se ilustra en la Figura 5.1b, se determina a partir de las ecuaciones básicas de la teoría de flujo establecido y asumiendo las condiciones geométricas y de frontera del dominio, como se indica a continuación.

— Pérdida de carga hidráulica: Con base en el principio de continuidad de flujo:

$$V_1 = V_2$$

$$k_1 i_1 = k_2 i_2$$

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{L_1} = k_2 \frac{\Delta h_2}{L_2}$$

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{30} = k_2 \frac{\Delta h_2}{20}$$

Donde:  $\Delta h_2 = 50 - \Delta h_1$ , por tanto:

$$20k_1 \Delta h_1 = 30k_2 (50 - \Delta h_1)$$

$$\Delta h_1 (20k_1 + 30k_2) = 1500k_2$$

$$\Delta h_1 = \frac{150k_2}{2k_1 + 3k_2} \quad \leftarrow \quad \text{Material 1} \quad (5.9)$$

Además:

$$\Delta h_2 = 50 \left[ 1 - \frac{3k_2}{2k_1 + 3k_2} \right] \quad \leftarrow \quad \text{Material 2} \quad (5.10)$$

— Gradiente hidráulico:

$$i_1 = \frac{\Delta h_1}{30} = \frac{5k_2}{2k_1 + 3k_2} \quad \leftarrow \quad \text{Material 1} \quad (5.11)$$

$$i_2 = \frac{\Delta h_2}{20} = 2.5 \left[ 1 - \frac{3k_2}{2k_1 + 3k_2} \right] \quad \leftarrow \quad \text{Material 2} \quad (5.12)$$

— Velocidad de flujo:

$$V_1 = k_1 \cdot i_1 = \frac{5k_1k_2}{2k_1 + 3k_2} \quad \leftarrow \quad \text{Material 1} \quad (5.13)$$

$$V_2 = k_2 \cdot i_2 = 2.5k_2 \left[ 1 - \frac{3k_2}{2k_1 + 3k_2} \right] \quad \leftarrow \quad \text{Material 2} \quad (5.14)$$

— Finalmente, la función del gasto queda definida por:

$$Q = V_1 \cdot A = V_2 \cdot A$$

$$Q = f(k_1, k_2) = \frac{250k_1k_2}{2k_1 + 3k_2} \quad (5.15)$$

Donde  $A$  es el área transversal del dominio de flujo.

La expresión (5.15) es igual a estimar el gasto con la conocida ecuación  $Q = kiA = k \frac{\Delta h}{L} A$ , pero considerando una *permeabilidad equivalente*  $k_{eq}$  para la secuencia de dos materiales de la Figura 5.1b:

$$k_{eq} = \frac{50}{\frac{30}{k_1} + \frac{20}{k_2}} \quad (5.16)$$

En este caso, la propagación de la incertidumbre no puede realizarse de manera exacta como en el CASO I anterior. Se recurre a métodos probabilistas aproximados; algunos de los más usuales se discuten a continuación.

Para la aplicación de estos métodos, frecuentemente resulta útil una transformación juiciosa de la función de interés. De esta manera, la función que se estudia en los párrafos siguientes es la que se obtiene tomando logaritmos decimales en ambos miembros de la ecuación (5.15), esto es:

$$\log_{10} Q = f(\log_{10} k_1, \log_{10} k_2) = \log_{10} 250 + \log_{10} k_1 + \log_{10} k_2 - \log_{10} (2 \cdot 10^{\log_{10} k_1} + 3 \cdot 10^{\log_{10} k_2}) \quad (5.17)$$

(a) Análisis mediante los métodos de primer y segundo orden segundos momentos (*FOSM* y *SOSM*, respectivamente)

En estos métodos, la función de las variables aleatorias se sustituye por una expansión en serie de Taylor truncada. Estas técnicas envuelven el cálculo de derivadas parciales, cuyo orden depende de la aproximación deseada. Cuando las derivadas parciales no pueden obtenerse de manera explícita, se deben calcular numéricamente (Chowdhury, 1993; Nechnech, 1994; El-Ramly *et al.*, 2001).

En este problema, las derivadas primera y segunda de la función analizada (ecuación 5.17)

respecto al logaritmo decimal de la permeabilidad se calcularon con la técnica numérica de *cocientes polinomiales* (Chowdhury, 1993), el detalle de los cálculos se proporciona en el ANEXO V. Las derivadas se evaluaron para el valor medio de las variables aleatorias  $\log_{10} k_1$  y  $\log_{10} k_2$ , respectivamente, resultando:

$$\left[ \frac{\partial \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1}} = 0.5986 \quad \text{y} \quad \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1}} = -0.5517 \quad (5.18)$$

$$\left[ \frac{\partial \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_2}} = 0.3988 \quad \text{y} \quad \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_2^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_2}} = -0.5499 \quad (5.19)$$

Nótese que las derivadas mixtas como  $\left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1 \partial \log_{10} k_2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1} \mu_{\log_{10} k_2}}$  no son necesarias en este análisis, debido a que los materiales son independientes entre sí.

De esta manera, aplicando los métodos de segundos momentos a la función dada en la ecuación (5.17) y considerando los parámetros estadísticos de la permeabilidad mencionados al principio del problema, las aproximaciones de primer y segundo orden del *valor esperado* de  $\log_{10} Q$  son respectivamente (Benjamin & Cornell, 1970):

$$E\{\log_{10} Q\}^I = \mu_{\log_{10} Q}^I \cong f(\mu_{\log_{10} k_1}, \mu_{\log_{10} k_2}) = -3.2584 \quad (5.20)$$

$$E\{\log_{10} Q\}^{II} = \mu_{\log_{10} Q}^{II} \cong \mu_{\log_{10} Q}^I + \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1}} \text{Cov}[\log_{10} k_1, \log_{10} k_1] + \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_2^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_2}} \text{Cov}[\log_{10} k_2, \log_{10} k_2] \right) \quad (5.21)$$

$$E\{\log_{10} Q\}^{II} = \mu_{\log_{10} Q}^{II} \cong -3.2584 + \frac{1}{2} ([-0.5517 \times 0.1283] + [-0.5499 \times 0.1283]) = -3.3290 \quad (5.22)$$

Las aproximaciones de primer y segundo orden de la *varianza y desviación estándar* de  $\log_{10} Q$  son correspondientemente (Benjamin & Cornell, 1970):

$$\text{Var}[\log_{10} Q]^I \cong \left[ \frac{\partial \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1}}^2 \text{Cov}[\log_{10} k_1, \log_{10} k_1] + \left[ \frac{\partial \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_2}}^2 \text{Cov}[\log_{10} k_2, \log_{10} k_2] \quad (5.23)$$

$$Var[\log_{10} Q]^I \cong \left[ (0.5986)^2 \times 0.1283 \right] + \left[ (0.3988)^2 \times 0.1283 \right] = 0.06637 \quad (5.24)$$

$$\sigma_{\log_{10} Q}^I \cong 0.2576 \quad (5.25)$$

$$Var[\log_{10} Q]^H \cong Var[\log_{10} Q]^I + \frac{1}{4} \left( \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1}}^2 \cdot Cov[\log_{10} k_1, \log_{10} k_1]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_2^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_2}}^2 \cdot Cov[\log_{10} k_2, \log_{10} k_2]^2 + 2 \cdot Cov \left[ \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_1^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_1}} \left[ \frac{\partial^2 \log_{10} Q}{\partial \log_{10} k_2^2} \right]_{\mu_{\log_{10} k_2}} \right] \cdot Cov[\log_{10} k_1, \log_{10} k_2] \right) \quad (5.26)$$

$$Var[\log_{10} Q]^H \cong 0.06637 + \frac{1}{4} \left( \left[ -0.5517^2 \times 2 \times 0.1283^2 \right] + \left[ -0.5499^2 \times 2 \times 0.1283^2 \right] \right) = 0.07136 \quad (5.27)$$

$$\sigma_{\log_{10} Q}^H \cong 0.2671 \quad (5.28)$$

Finalmente, para transformar la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$ , se proponen dos métodos aproximados:

— *Aproximación 1.*- Se aplica la ecuación (5.8), aceptando que la densidad de probabilidad del gasto  $Q$  es aproximadamente log-normal. Los valores esperados y las desviaciones estándar de primer y segundo orden del gasto obtenidas en este caso (teniendo presente la relación entre logaritmos decimales y naturales:  $\log_{10} Q = 0.434294 \ln Q$ ) se resumen en la Tabla 5.2.

— *Aproximación 2.*- Utilizar la misma técnica estocástica empleada para obtener la incertidumbre en  $\log_{10} Q$ . En consecuencia, las estadísticas de salida de primer y segundo orden del gasto obtenidas con *FOSM* y *SOSM* se proporcionan en la Tabla 5.2.

### (b) Análisis mediante la estimación puntual de Rosenblueth (*PEM*)

Este método (Rosenblueth, 1975) consiste en sustituir la densidad de probabilidad actual de cada variable aleatoria por una distribución de probabilidad discreta binaria con los mismos momentos estadísticos. La función de las variables aleatorias se debe evaluar  $2^n$  veces, dependiendo del número  $n$  de variables.

La aplicación de la estimación puntual de Rosenblueth (*PEM*) al problema estudiado aquí se ilustra en la Figura 5.3. El método permite determinar los dos primeros momentos (valor esperado y desviación estándar o varianza) de la función  $\log_{10} Q$  (ecuación 5.17) a partir de cuatro puntos de estimación  $\mu_{\log_{10} k_{1+}}$ ,  $\mu_{\log_{10} k_{1-}}$ ,  $\mu_{\log_{10} k_{2+}}$  y  $\mu_{\log_{10} k_{2-}}$  (Figura 5.3), localizados alrededor de los valores medios  $\mu_{\log_{10} k_1}$  y  $\mu_{\log_{10} k_2}$ , respectivamente. Estos puntos de estimación se obtienen con  $\mu_{\log_{10} k_{n\pm}} = \mu_{\log_{10} k_n} \pm \sigma_{\log_{10} k_n}$ . Así, el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de  $\log_{10} Q$ , se determinan con las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{\log_{10} Q} \cong P_{++} (\log_{10} Q_{++}) + P_{+-} (\log_{10} Q_{+-}) + P_{-+} (\log_{10} Q_{-+}) + P_{--} (\log_{10} Q_{--}) = -3.323 \quad (5.29)$$

$$\sigma_{\log_{10} Q}^2 \cong \mu_{\log_{10} Q^2} - (\mu_{\log_{10} Q})^2 = 0.070 \quad \rightarrow \quad \sigma_{\log_{10} Q} \cong 0.265 \quad (5.30)$$

Donde los valores  $\log_{10} Q_{++} = -2.900$ ;  $\log_{10} Q_{+-} = -3.329$ ;  $\log_{10} Q_{-+} = -3.447$  y  $\log_{10} Q_{--} = -3.617$  se calcularon con la expresión:

$$\log_{10} Q_{\pm\pm} = f(\mu_{\log_{10} k_1} \pm \sigma_{\log_{10} k_1}, \mu_{\log_{10} k_2} \pm \sigma_{\log_{10} k_2}) \quad (5.31)$$

Adicionalmente:

$$P_{++} = P_{+-} = P_{-+} = P_{--} = 1/4 \quad (5.32)$$

$$\mu_{\log_{10} Q^n} = P_{++} (\log_{10} Q_{++}^n) + P_{+-} (\log_{10} Q_{+-}^n) + P_{-+} (\log_{10} Q_{-+}^n) + P_{--} (\log_{10} Q_{--}^n) = 11.113 \quad (5.33)$$

Siendo  $n$  el número de variables (en este caso  $n=2$ ).

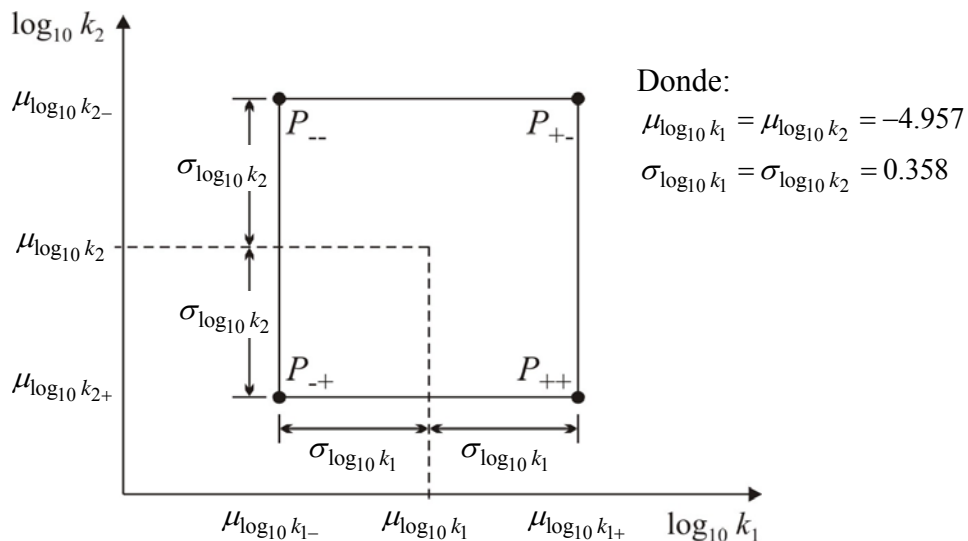


Figura 5.3 Concentración de la función de densidad de probabilidad cuando  $\log_{10} Q = f(\log_{10} k_1, \log_{10} k_2)$  (cuatro puntos de estimación en el método de Rosenblueth)

Por último, para la transformación de la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$ , nuevamente se emplean los dos métodos aproximados mencionados en el inciso anterior (ecuación 5.8 para la *Aproximación 1*, y estimación puntual de Rosenblueth para la *Aproximación 2*). En la Tabla 5.2 se presentan los valores esperados y las desviaciones estándar del gasto obtenidas en este caso.

(c) Análisis mediante el método mixto de primer y segundo orden (*MFO* y *MSO*, respectivamente)

De acuerdo con esta técnica (Auvinet, 2007), el análisis de la propagación de la incertidumbre de la variable de interés puede llevarse a cabo ajustando una función simple (por ejemplo un polinomio de segundo orden considerando solamente tres puntos de la función) a la función real. El objetivo es sustituir la función original por una ecuación más sencilla que facilite el cálculo de las derivadas parciales de dicha función. El método mixto puede emplearse para ajustar toda la función en un amplio intervalo y no solo en un pequeño intervalo cerca del valor esperado, con el objetivo de obtener resultados más realistas cuando el coeficiente de variación de la variable independiente es alto. Esta es la principal ventaja del método. Las derivadas de primer y segundo orden de la función simple pueden emplearse entonces en los métodos *FOSM* y *SOSM* respectivamente para evaluar la incertidumbre en  $\log_{10} Q$ .

En el problema analizado aquí, la función que describe el logaritmo decimal del gasto ( $\log_{10} Q$ , ecuación 5.17) depende de dos variables. Fue entonces necesario dibujar dos gráficas: la primera variando  $\log_{10} k_1$  y asumiendo  $\log_{10} k_2 = \mu_{\log_{10} k_2} = \text{constante}$  (Figura 5.4a); y la segunda, variando  $\log_{10} k_2$  y considerando  $\log_{10} k_1 = \mu_{\log_{10} k_1} = \text{constante}$  (Figura 5.4b). En este caso, los puntos para evaluar la función  $\log_{10} Q$  fueron<sup>(5.3)</sup>:

$$\mu_{\log_{10} k_1} \pm 2\sigma_{\log_{10} k_1} \quad \text{y} \quad \mu_{\log_{10} k_2} \pm 2\sigma_{\log_{10} k_2} \quad (5.34)$$

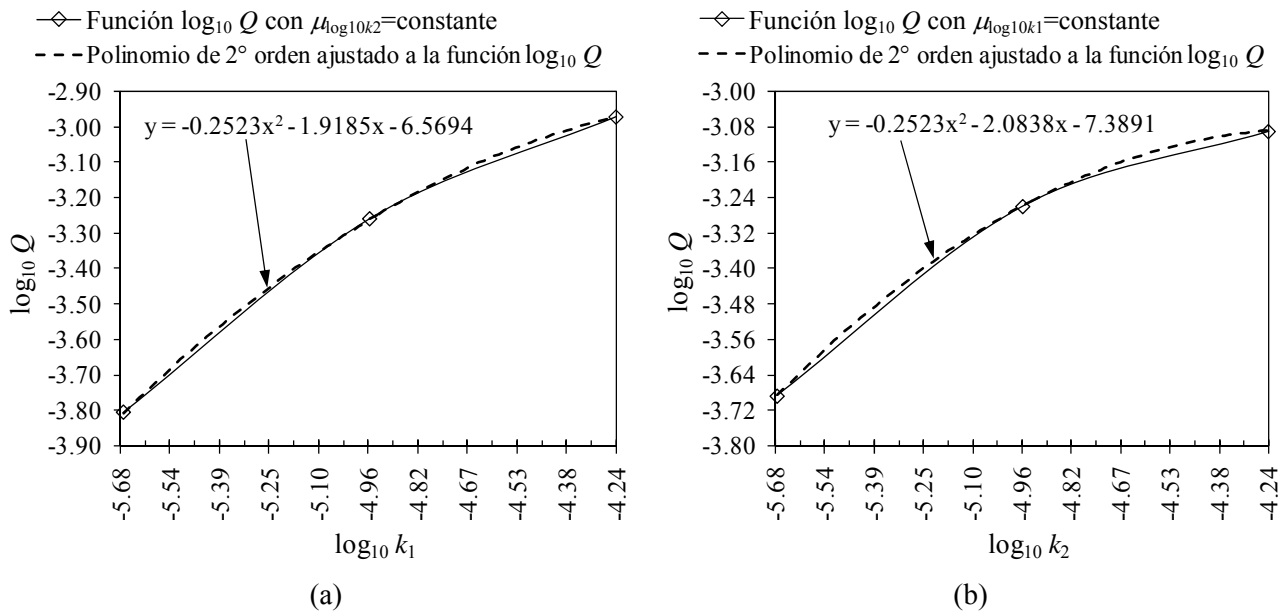


Figura 5.4 Variación de la función  $\log_{10} Q$  con respecto a  $\log_{10} k_1$  y  $\log_{10} k_2$ , respectivamente (para la aplicación del método mixto)

<sup>(5.3)</sup> En probabilidad y estadística se sabe que una variable con distribución normal tiene 95% de probabilidad de estar dentro del intervalo  $\mu \pm 2\sigma$  (Fenton, 1996).

Después de dibujar las funciones, se ajustaron polinomios de segundo orden a cada gráfica. Las ecuaciones se indican en las Figuras 5.4a y 5.4b, respectivamente. Posteriormente, se calcularon las sencillas derivadas de primer y segundo orden de estas ecuaciones polinomiales, mismas que se emplearon para estimar las estadísticas de salida del gasto con las técnicas *FOSM* y *SOSM*.

Al final, la equivalencia de la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$  tanto de primer como de segundo orden se obtuvo con las antedichas *Aproximación 1* (aplicando la ecuación 5.8) y *Aproximación 2* (empleando en este caso el método mixto de primer y segundo orden). El resumen de estos resultados se proporciona en la Tabla 5.2.

#### (d) Análisis con el método de simulación de Monte Carlo

Este método tiene una ventaja de simplicidad conceptual; sin embargo, requiere de un gran número de grupos de valores de la función de interés (realizaciones) para determinar la respuesta estadística con suficiente exactitud.

En este análisis se obtuvo inicialmente por muestreo al azar un grupo de valores del logaritmo decimal de las conductividades hidráulicas del dominio analizado, respetando las densidades de probabilidad existentes y los coeficientes de variación indicados al principio del problema. El muestreo del logaritmo decimal de la permeabilidad se realizó por medio del algoritmo SIMONC (López, 2003) que se describe con detalle en el inciso 4.3.4 del Capítulo 4.

Para cada grupo de parámetros se efectuaron 65500 realizaciones del flujo establecido unidimensional a través del dominio de la Figura 5.1b, considerando la siguiente función para describir el gasto:

$$Q = \frac{250 \cdot 10^{\log_{10} k_1} \cdot 10^{\log_{10} k_2}}{2 \cdot 10^{\log_{10} k_1} + 3 \cdot 10^{\log_{10} k_2}} \quad (5.35)$$

La Figura 5.5 muestra esquemáticamente el proceso de cálculo del método de Monte Carlo para los parámetros  $\mu_{\log_{10} k_1} = \mu_{\log_{10} k_2} = -4.957$  y  $\sigma_{\log_{10} k_1} = \sigma_{\log_{10} k_2} = 0.358$ . El valor esperado  $\mu_Q$  y la desviación estándar  $\sigma_Q$  del gasto obtenidos en este caso se indican en el inciso (d) de la misma figura.

La simulación de Monte Carlo es un método que se puede emplear como una referencia para calibrar los resultados obtenidos con otras técnicas estocásticas. De esta forma, en la Tabla 5.2 se proporciona el resumen de los parámetros estadísticos del gasto estimados de manera analítica mediante las técnicas estocásticas precedentes, cuando el suelo está constituido por dos materiales aleatorios independientes con  $\sigma_k/\mu_k=0.99$ . En la Sección 5.1.4.4 se presenta una amplia discusión de estos resultados en comparación con aquéllos obtenidos con la simulación de Monte Carlo.



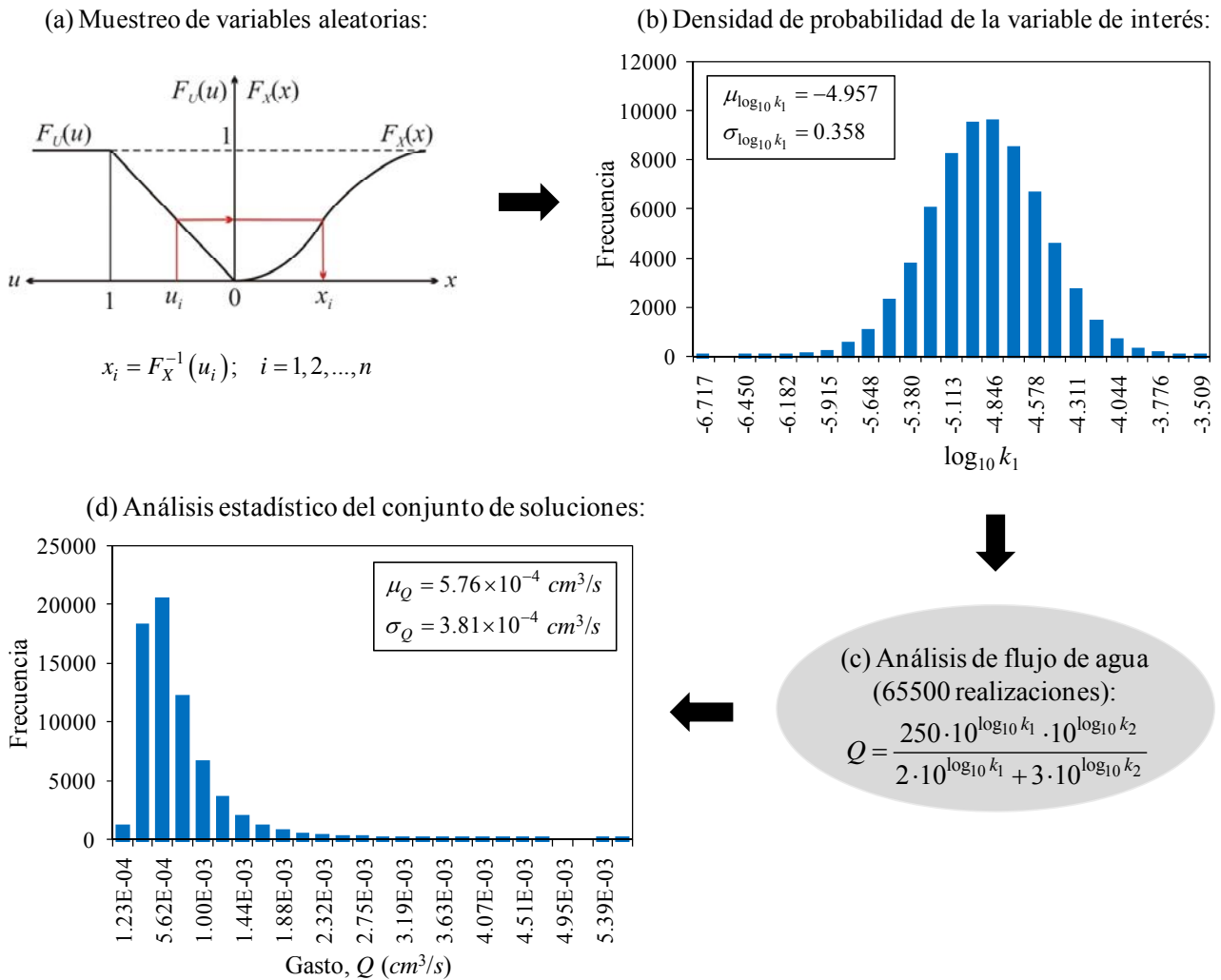


Figura 5.5 Proceso de cálculo del método de Monte Carlo para la secuencia de dos materiales aleatorios

### 5.1.4.3 CASO III: Flujo a través de una secuencia de tres materiales aleatorios

La expresión que define el gasto a través de la muestra de tres materiales que se ilustra en la Figura 5.1c, se obtiene de manera similar a como se realizó en el CASO II, según se indica en lo que sigue.

— Pérdida de carga hidráulica total:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \\ 50 &= \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \end{aligned} \quad (5.36)$$

— Por continuidad de flujo:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 & V_1 &= V_3 \\ k_1 i_1 &= k_2 i_2 & k_1 i_1 &= k_3 i_3 \end{aligned}$$

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{L_1} = k_2 \frac{\Delta h_2}{L_2}$$

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{15} = k_2 \frac{\Delta h_2}{15} \quad (5.37)$$

$$\Delta h_1 = \frac{k_2}{k_1} \Delta h_2 \quad (5.39)$$

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{L_1} = k_3 \frac{\Delta h_3}{L_3}$$

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{15} = k_3 \frac{\Delta h_3}{20} \quad (5.38)$$

Sustituyendo la ecuación (5.39) en la (5.38):

$$k_1 \frac{\left( \frac{k_2}{k_1} \Delta h_2 \right)}{15} = k_3 \frac{\Delta h_3}{20}$$

$$\Delta h_2 = \frac{3k_3}{4k_2} \Delta h_3 \quad \leftarrow \text{Material 2} \quad (5.40)$$

Sustituyendo la ecuación (5.40) en la (5.39):

$$\Delta h_1 = \frac{k_2}{k_1} \left( \frac{3k_3}{4k_2} \Delta h_3 \right)$$

$$\Delta h_1 = \frac{3k_3}{4k_1} \Delta h_3 \quad \leftarrow \text{Material 1} \quad (5.41)$$

Sustituyendo  $\Delta h_1$  y  $\Delta h_2$  en la ecuación (5.36):

$$50 = \frac{3k_3}{4k_1} \Delta h_3 + \frac{3k_3}{4k_2} \Delta h_3 + \Delta h_3$$

$$\Delta h_3 = \frac{50}{\frac{3k_2k_3 + 3k_1k_3 + 4k_1k_2}{4k_1k_2}}$$

$$\Delta h_3 = \frac{200k_1k_2}{3k_2k_3 + 3k_1k_3 + 4k_1k_2} \quad \leftarrow \text{Material 3} \quad (5.42)$$

— Velocidad de flujo (es la misma para los tres materiales por el principio de continuidad):

$$V_3 = k_3 \cdot i_3 = \frac{k_3}{20} \left( \frac{200k_1k_2}{3k_2k_3 + 3k_1k_3 + 4k_1k_2} \right)$$

$$V_3 = \frac{10k_1k_2k_3}{3k_2k_3 + 3k_1k_3 + 4k_1k_2} \quad (5.43)$$

— Finalmente, el gasto a través de la muestra de suelo está dado por:

$$Q = V_1 \cdot A = V_2 \cdot A = V_3 \cdot A$$

$$Q = f(k_1, k_2, k_3) = \frac{500k_1k_2k_3}{3k_2k_3 + 3k_1k_3 + 4k_1k_2} \quad (5.44)$$

Donde  $A$  es el área transversal del dominio de flujo.

La expresión (5.44) es igual a estimar el gasto con la conocida ecuación  $Q = kiA = k \frac{\Delta h}{L} A$ , pero considerando una *permeabilidad equivalente*  $k_{eq}$  para la secuencia de tres materiales:

$$k_{eq} = \frac{500}{\frac{3}{k_1} + \frac{3}{k_2} + \frac{4}{k_3}} \quad (5.45)$$

La incertidumbre en el gasto  $Q$  se evalúa empleando los mismos métodos probabilistas aproximados aplicados en el CASO II anterior, por medio de la siguiente función (obtenida tomando logaritmos decimales en ambos miembros de la ecuación 5.44):

$$\begin{aligned} \log_{10} Q = f(\log_{10} k_1, \log_{10} k_2, \log_{10} k_3) &= \log_{10} 500 + \log_{10} k_1 + \log_{10} k_2 + \log_{10} k_3 \\ &\quad - \log_{10} \left( 3 \cdot 10^{\log_{10} k_2} \cdot 10^{\log_{10} k_3} + 3 \cdot 10^{\log_{10} k_1} \cdot 10^{\log_{10} k_3} + 4 \cdot 10^{\log_{10} k_1} \cdot 10^{\log_{10} k_2} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

La metodología a seguir en cada método probabilista es similar a la del CASO II: 1) Se evalúa la incertidumbre en  $\log_{10} Q$  considerando la ecuación (5.46); 2) La transformación de la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$  se determina con las *Aproximaciones* 1 y 2 mencionadas previamente.

Los resultados obtenidos con los métodos aproximados se calibran con aquéllos que se determinan a partir de la simulación de Monte Carlo, para la cual se emplea la siguiente función que define el gasto:

$$Q = \frac{500 \cdot 10^{\log_{10} k_1} \cdot 10^{\log_{10} k_2} \cdot 10^{\log_{10} k_3}}{3 \cdot 10^{\log_{10} k_2} \cdot 10^{\log_{10} k_3} + 3 \cdot 10^{\log_{10} k_1} \cdot 10^{\log_{10} k_3} + 4 \cdot 10^{\log_{10} k_1} \cdot 10^{\log_{10} k_2}} \quad (5.47)$$

En la Tabla 5.2 se da un resumen de las estadísticas de salida del gasto a través de la muestra de suelo constituida por tres materiales aleatorios independientes con  $\sigma_k/\mu_k=0.99$ . Comentarios de estos resultados se proporcionan en la siguiente sección.

#### 5.1.4.4 Resumen de resultados

La Tabla 5.2 proporciona un resumen de los resultados obtenidos en los tres casos analizados. Una conclusión importante derivada de los mismos es que cuando el número de materiales

independientes en la muestra de suelo se incrementa, tanto el valor esperado como la desviación estándar del gasto tienden a disminuir. Esto puede atribuirse a un fenómeno de compensación estadística (Auvinet, 2002), un efecto promedio similar a la ley de los grandes números.

Por otra parte, comparando las estadísticas de salida del gasto obtenidas analíticamente con diferentes técnicas estocásticas cuando  $\sigma_k/\mu_k=0.99$  (resumidas en la Tabla 5.2) con los resultados de la simulación de Monte Carlo, se puede concluir que en general, los valores obtenidos con las dos maneras diferentes propuestas para transformar la incertidumbre de  $\log_{10} Q$  a  $Q$ , son similares. La diferencia más evidente se observa en los métodos de primer orden (*FOSM* y *mixto de primer orden*), los que sobrestiman el valor esperado y la desviación estándar cuando se asume para el gasto  $Q$  una distribución *log-normal* (*Aproximación 1*). La *estimación puntual de Rosenblueth* y *SOSM* dan resultados similares a aquéllos calculados con el método de Monte Carlo (para ambas *Aproximaciones 1* y *2*).

Tabla 5.2 Resumen de los parámetros estadísticos del gasto  $Q$  cuando  $\sigma_k/\mu_k=0.99$  (resultados para los CASOS I, II y III)

Método	Tipo de aproximación	Estadísticas del gasto $Q$					
		Caso I (un material)		Caso II (dos materiales)		Caso III (tres materiales)	
		$\mu_Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\sigma_Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\mu_Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\sigma_Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\mu_Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\sigma_Q$ (cm <sup>3</sup> /s)
Solución exacta	-----	$7.75 \times 10^{-4}$	$7.65 \times 10^{-4}$	-----	-----	-----	-----
Primer orden- segundos momentos ( <i>FOSM</i> )	1 <sup>(*)</sup>	-----	-----	$6.580 \times 10^{-4}$	$4.27 \times 10^{-4}$	$6.19 \times 10^{-4}$	$3.15 \times 10^{-4}$
	2 <sup>(**)</sup>	-----	-----	$5.520 \times 10^{-4}$	$3.27 \times 10^{-4}$	$5.52 \times 10^{-4}$	$2.64 \times 10^{-4}$
Segundo orden- segundos momentos ( <i>SOSM</i> )	1 <sup>(*)</sup>	-----	-----	$5.660 \times 10^{-4}$	$3.84 \times 10^{-4}$	$5.03 \times 10^{-4}$	$2.76 \times 10^{-4}$
	2 <sup>(**)</sup>	-----	-----	$5.580 \times 10^{-4}$	$3.14 \times 10^{-4}$	$4.99 \times 10^{-4}$	$2.41 \times 10^{-4}$
Estimación puntual de Rosenblueth ( <i>PEM</i> )	1 <sup>(*)</sup>	-----	-----	$5.722 \times 10^{-4}$	$3.84 \times 10^{-4}$	$5.02 \times 10^{-4}$	$2.54 \times 10^{-4}$
	2 <sup>(**)</sup>	-----	-----	$5.660 \times 10^{-4}$	$3.08 \times 10^{-4}$	$5.00 \times 10^{-4}$	$2.22 \times 10^{-4}$
Mixto de primer orden ( <i>MFO</i> )	1 <sup>(*)</sup>	-----	-----	$6.570 \times 10^{-4}$	$4.25 \times 10^{-4}$	$6.27 \times 10^{-4}$	$3.40 \times 10^{-4}$
	2 <sup>(**)</sup>	-----	-----	$5.520 \times 10^{-4}$	$3.26 \times 10^{-4}$	$5.52 \times 10^{-4}$	$2.80 \times 10^{-4}$
Mixto de segundo orden ( <i>MSO</i> )	1 <sup>(*)</sup>	-----	-----	$5.720 \times 10^{-4}$	$3.84 \times 10^{-4}$	$5.17 \times 10^{-4}$	$2.98 \times 10^{-4}$
	2 <sup>(**)</sup>	-----	-----	$6.400 \times 10^{-4}$	$3.49 \times 10^{-4}$	$6.16 \times 10^{-4}$	$2.94 \times 10^{-4}$
Simulación de Monte Carlo	-----	-----	-----	$5.760 \times 10^{-4}$	$3.81 \times 10^{-4}$	$5.13 \times 10^{-4}$	$2.76 \times 10^{-4}$

(\*) *Aproximación 1*: Se aplica la ecuación (5.8), aceptando que la densidad de probabilidad del gasto  $Q$  es aproximadamente *log-normal*.

(\*\*) *Aproximación 2*: Se utiliza la misma técnica estocástica (*FOSM*, *SOSM*, *Rosenblueth*, etc.) empleada para estimar la incertidumbre en  $\log_{10} Q$ .

### 5.1.5 Análisis paramétrico

Adicionalmente, con la finalidad de evaluar la influencia general de la incertidumbre en la permeabilidad sobre el gasto, se realizan análisis paramétricos en los que se conservan los valores medios de la conductividad hidráulica empleados antes ( $\mu_k = 1.55 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$ ) para cada material de la muestra de suelo y se hace variar el coeficiente de variación de la permeabilidad en el rango de  $0.01 < \sigma_k / \mu_k < 10.00$ . Los parámetros estadísticos del gasto obtenidos a partir de estos análisis para el Caso II se presentan en las Figuras 5.6a a 5.6c (para la *Aproximación 1*) y en las Figuras 5.6d a 5.6f (para la *Aproximación 2*). Del mismo modo, los resultados obtenidos para el Caso III se proporcionan en las Figuras 5.7a a 5.7c (para la *Aproximación 1*) y en las Figuras 5.7d a 5.7f (para la *Aproximación 2*).

En general, los resultados obtenidos para los Casos II y III son similares. En particular, las gráficas referentes al valor esperado del gasto (Figuras 5.6a y 5.6d para el Caso II; Figuras 5.7a y 5.7d para el Caso III) demuestran que para valores del coeficiente de variación de la permeabilidad mayores que  $\sigma_k / \mu_k \approx 0.2$ , el valor esperado del gasto  $\mu_Q$  es consistentemente inferior al valor determinista de  $Q_{\mu_k} = 7.75 \times 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}$  (obtenido asumiendo permeabilidad constante= $\mu_k$  en toda la muestra). Esto es una consecuencia del hecho de que cuando dos materiales contiguos toman valores de permeabilidad aleatorios, la permeabilidad aparente del sistema tiende a ser controlada por el valor más bajo (Daoud, 1996). Esta tendencia es más notable en el Caso III (tres materiales) en comparación con el Caso II (dos materiales). Por otra parte, comparando los valores esperados del gasto obtenidos con las *Aproximaciones 1* y 2, se puede apreciar que con respecto a la simulación de Monte Carlo: los métodos de primer orden (*FOSM* y *método mixto de primer orden*) sobrestiman  $\mu_Q$  en la *Aproximación 1*; y en la *Aproximación 2* todos los métodos proporcionan resultados más o menos similares a aquéllos estimados con la simulación de Monte Carlo.

Adicionalmente, las gráficas que se refieren a la desviación estándar del gasto (Figuras 5.6b y 5.6e para el Caso II; Figuras 5.7b y 5.7e para el Caso III) muestran que cuando el coeficiente de variación de la permeabilidad se incrementa hasta aproximadamente  $\sigma_k / \mu_k = 0.99$ , la desviación estándar del gasto  $\sigma_Q$  también se incrementa. Más allá de este valor,  $\sigma_Q$  tiende a decrecer debido al hecho de que la permeabilidad equivalente está controlada por el valor más bajo, como ya se había explicado antes. Esta tendencia se acentúa cuando se utiliza la *Aproximación 2* (en ambos Casos II y III).

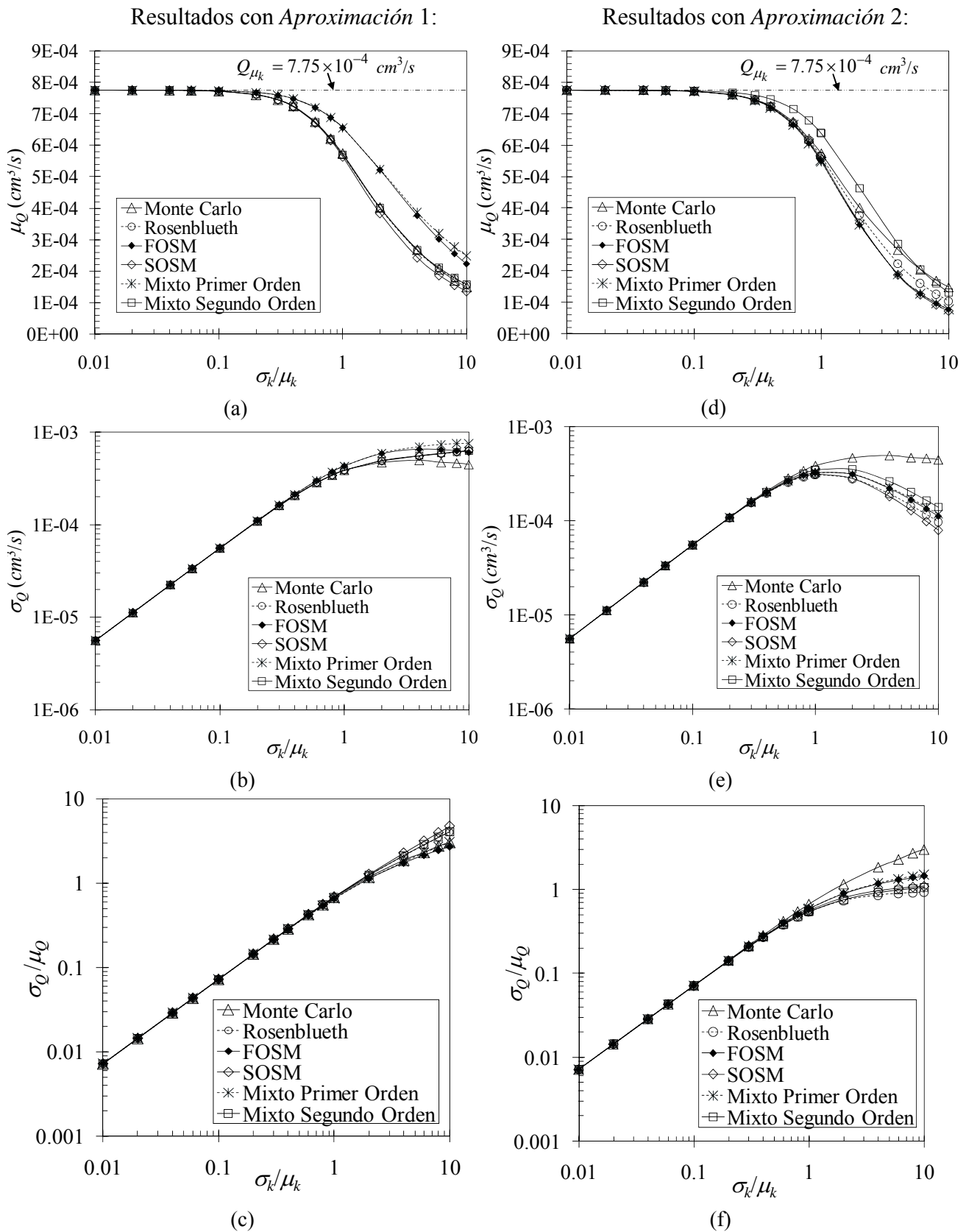


Figura 5.6 Influencia de la incertidumbre en la conductividad hidráulica sobre las estadísticas del gasto para las Aproximaciones 1 y 2 (Caso II: Secuencia de dos materiales aleatorios)

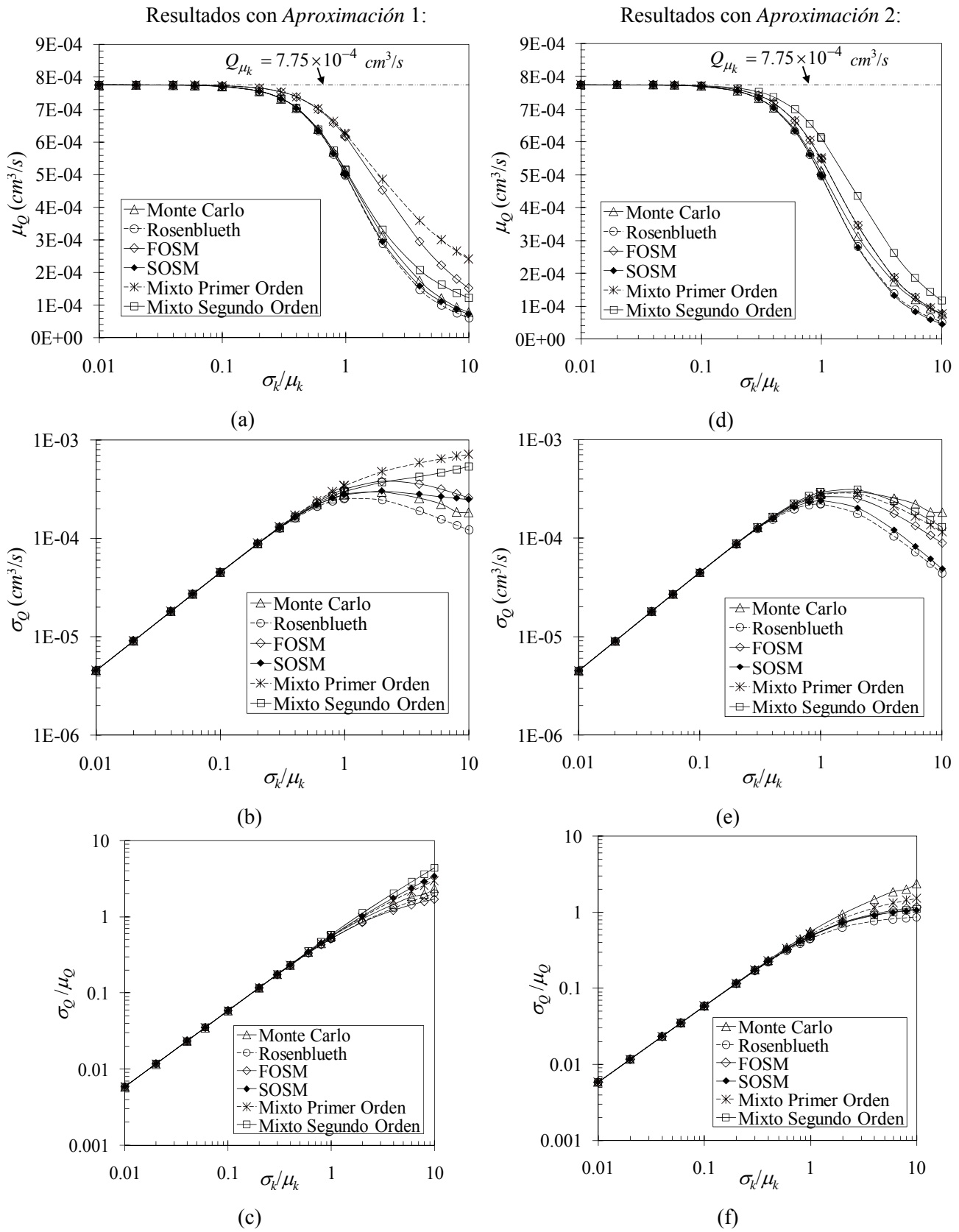


Figura 5.7 Influencia de la incertidumbre en la conductividad hidráulica sobre las estadísticas del gasto para las Aproximaciones 1 y 2 (CASO III: Secuencia de tres materiales aleatorios)

### 5.1.6 Comentarios finales

Se realizaron evaluaciones analíticas y una serie de estudios paramétricos para cuantificar la propagación de la incertidumbre en análisis unidimensionales de flujo establecido de agua a través de suelos homogéneos y estratificados. En particular, se analizó la propagación de la incertidumbre en la conductividad hidráulica  $k$  al gasto  $Q$  a través de una muestra de suelo constituida por un material homogéneo aleatorio (CASO I), y por una secuencia de dos y tres materiales aleatorios independientes (CASOS II y III, respectivamente). Diferentes técnicas estocásticas fueron aplicadas en estos estudios (perturbaciones de primer y segundo orden —*FOSM* y *SOSM*—; Rosenblueth —*PEM*—; mixto de primer y segundo orden —*MFO* y *MSO*—; Monte Carlo). Algunos resultados importantes de las estadísticas de salida del gasto en función del coeficiente de variación de la permeabilidad son:

— Con respecto al *valor esperado del gasto*  $\mu_Q$ : (a) en el caso de un material homogéneo aleatorio,  $\mu_Q$  es igual al valor determinista de  $Q_{\mu_k} = 7.75 \times 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}$  (asumiendo permeabilidad constante  $=\mu_k$  en toda la muestra), debido a que esta propiedad es directamente proporcional al valor esperado de la conductividad hidráulica  $\mu_k$ ; (b) en el caso de un suelo estratificado (dos o tres materiales aleatorios), se observó que más allá de cierto valor del coeficiente de variación ( $\sigma_k/\mu_k \approx 0.2$  en este estudio),  $\mu_Q$  es consistentemente inferior al mencionado valor determinista de  $Q_{\mu_k}$ . Esto es una consecuencia del hecho de que cuando materiales contiguos toman valores de permeabilidad aleatorios, la permeabilidad aparente del sistema está definida por un promedio armónico de la permeabilidad de los diferentes materiales, en el cual el valor más bajo tiende a tener un peso preponderante.

— En cuanto a la *desviación estándar del gasto*  $\sigma_Q$ : (a) en el caso de un suelo homogéneo, esta propiedad exhibe una relación lineal perfecta con respecto al coeficiente de variación de la permeabilidad, esto es, la desviación estándar del gasto se incrementa de manera proporcional cuando aumenta la incertidumbre en la permeabilidad; (b) en el caso de un suelo estratificado, la desviación estándar del gasto  $\sigma_Q$  tiende a incrementarse mientras el coeficiente de variación de la permeabilidad es menor que cierto valor ( $\sigma_k/\mu_k \approx 0.99$  en esta investigación); más allá del mismo  $\sigma_Q$  tiende a decrecer. Lo anterior, se debe al hecho de que la permeabilidad equivalente está controlada por el valor más bajo, como se explicó antes. Finalmente se puede decir que la incertidumbre en el comportamiento de un suelo aleatorio estratificado es menor que la incertidumbre que se esperaría si el suelo fuera aleatorio pero homogéneo.

En lo referente a las técnicas estocásticas empleadas en los análisis para evaluar la propagación de la incertidumbre en la permeabilidad, se puede decir que:

— Todas reflejan adecuadamente las tendencias mencionadas en los párrafos anteriores.

— En comparación con los resultados del método de Monte Carlo, como era de esperarse, los métodos de segundo orden (*SOSM* y *MSO*) proporcionan resultados más exactos que aquéllos obtenidos con los métodos de primer orden (*FOSM* y *MFO*).

— A pesar de su simplicidad, el método de estimación puntual de Rosenblueth (*PEM*) proporciona resultados generalmente muy satisfactorios.

— A pesar de sus limitaciones, estas técnicas resultan más complementarias que antagónicas.



## 5.2 Zonas de incertidumbre en problemas típicos de flujo de agua

### 5.2.1 Consideraciones generales

En esta aplicación se llevan a cabo análisis probabilistas de problemas típicos de flujo de agua mediante el *método del elemento finito estocástico (SFEM)*. En particular, en los análisis se combina la técnica de *elementos finitos (FEM)* con el *método de segundo orden segundos momentos (SOSM)*, de acuerdo con los fundamentos teóricos señalados en el inciso 4.3.3 del Capítulo 4 y con ayuda del algoritmo MEFLULOG (López & Auvinet, 2004). El objetivo principal es estudiar las zonas de incertidumbre o cómo se distribuye la incertidumbre en resultados representativos de análisis de flujo de agua, que se obtienen al considerar incertidumbre en el logaritmo de la permeabilidad del suelo. En estos problemas típicos se evalúan condiciones como:

- Suelos homogéneos anisótropos.
- Suelos heterogéneos con materiales isótropos (dos a seis materiales).
- Variación de la estratigrafía respecto a la dirección del flujo; entre otras.

Los datos que se toman en cuenta para la realización de los análisis estocásticos son:

- Incertidumbre en el logaritmo decimal de la conductividad hidráulica del material o los materiales del dominio en estudio, la cual se modela con variables aleatorias. Asimismo la transformación de la incertidumbre de  $k$  a  $\log_{10} k$  se lleva a cabo como ya se ha mencionado en incisos anteriores (ec. 5.1, inciso 5.1.2).
- Carga hidráulica impuesta de acuerdo con los niveles de agua (aguas arriba y aguas abajo), en las fronteras permeables del dominio analizado.

Al principio de cada problema se señala de manera general la geometría del dominio de estudio, las condiciones analizadas, así como la incertidumbre en los materiales del dominio (media o valor esperado de la permeabilidad, desviación estándar y matriz de covarianza correspondiente). Posteriormente, en cada problema se presentan los resultados obtenidos en la forma de mapas de contorno que representan la desviación estándar del potencial o carga hidráulica, del gradiente hidráulico y de la velocidad de flujo, y se dan comentarios de los mismos. Al final de todos los ejemplos se presentan conclusiones generales de los análisis realizados.

### 5.2.2 Análisis estocásticos

#### 5.2.2.1 Incertidumbre a través de una muestra de suelo aleatoria

Se estudia el flujo confinado unidimensional en la muestra de suelo que se ilustra en la Figura 5.8. Los análisis estocásticos de flujo de agua se llevan a cabo considerando que dicha muestra está constituida por: dos, tres, cuatro y seis materiales aleatorios isótropos e independientes. Se asume que en cada caso, los materiales tienen un valor esperado o media de la conductividad hidráulica  $E\{k\} = \mu_k = 1.55 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$  y un coeficiente de variación  $\sigma_k / \mu_k = 0.99$ , con una desviación estándar  $\sigma_k = 1.53 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$ . La incertidumbre se considera en el logaritmo decimal de la permeabilidad; así, después de transformar la incertidumbre de  $k$  a  $\log_{10} k$ , las matrices de covarianza correspondientes a cada caso analizado se indican en los párrafos siguientes. En ellas, se acepta debido a la isotropía, que las permeabilidades de cada material en las direcciones  $X$  y  $Y$

están perfectamente correlacionadas: coeficiente de correlación  $\rho(\log_{10} k_i, \log_{10} k_j) = 1$ ; y que las permeabilidades entre los distintos materiales (dos, tres, cuatro, seis) no están correlacionadas: coeficiente de correlación  $\rho(\log_{10} k_i, \log_{10} k_j) = 0$ , es decir, son materiales independientes.

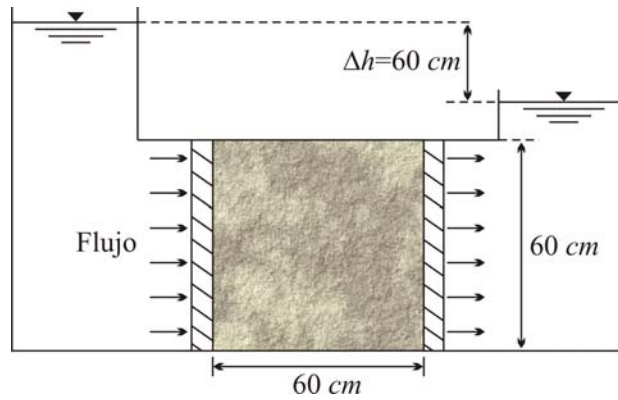


Figura 5.8 Muestra de suelo aleatoria

Para facilitar la comprensión de las matrices de covarianza que se presentan en éste y en los ejemplos siguientes, en la Figura 5.9 se muestra de manera esquemática la variación espacial y direccional de la conductividad hidráulica.

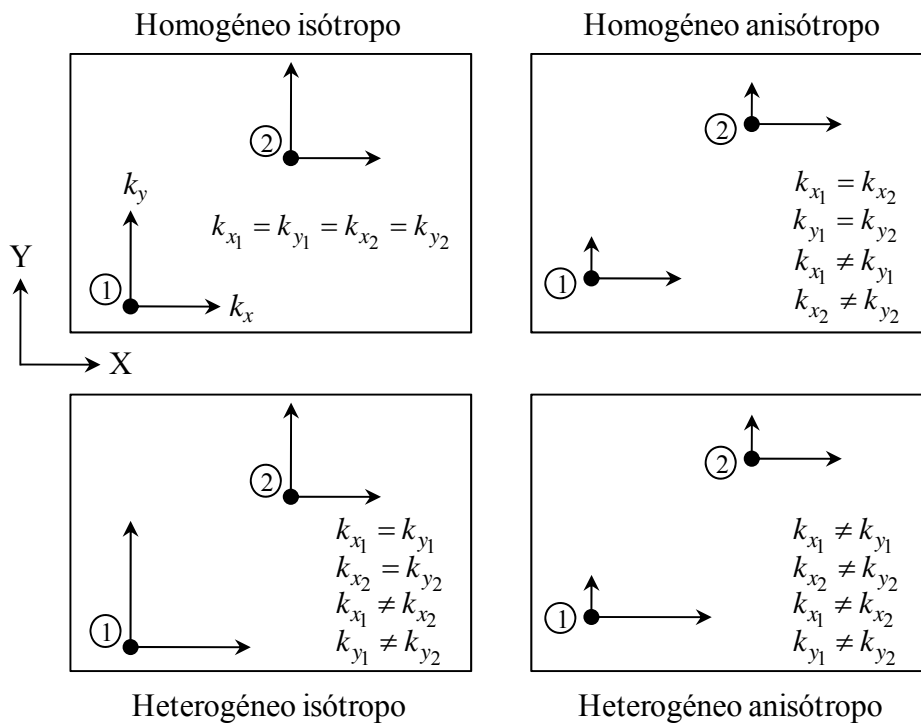


Figura 5.9 Variación espacial y direccional de la conductividad hidráulica

— Matriz de covarianza para dos materiales isotropos independientes:

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.1283	0.1283
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.1283	0.1283

Covarianzas (fuera de la diagonal principal)

Varianzas (en la diagonal principal)

— Matriz de covarianza para tres materiales isotropos independientes:

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.1283	0.1283	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.1283	0.1283	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.1283	0.1283
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.1283	0.1283

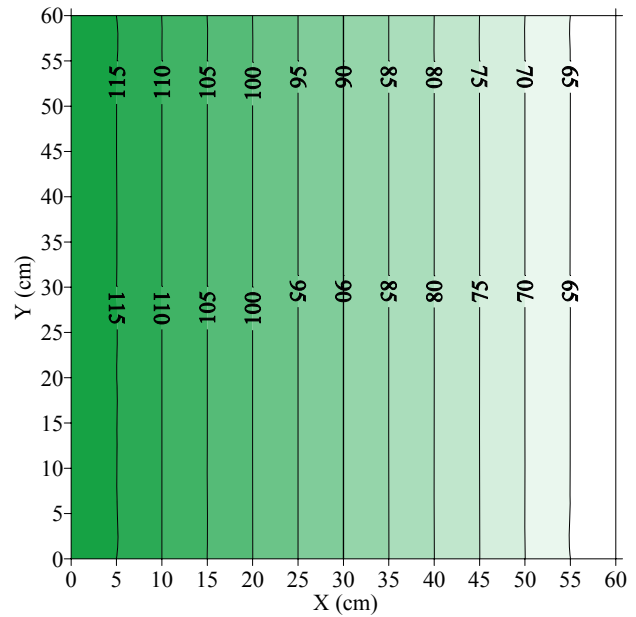
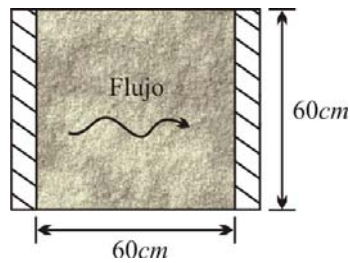
— Matriz de covarianza para cuatro materiales isotropos independientes:

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$	$\log_{10} k_{x_4}$	$\log_{10} k_{y_4}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{x_4}$	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283
$\log_{10} k_{y_4}$	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283

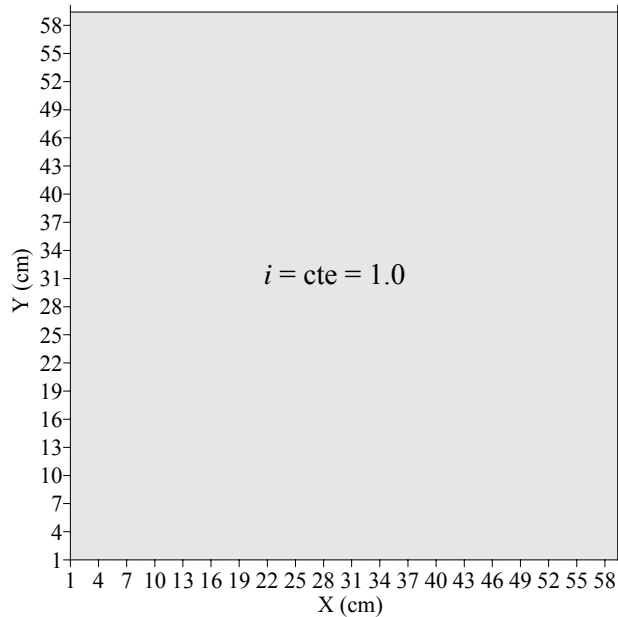
— Matriz de covarianza para seis materiales isotropos independientes:

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$	$\log_{10} k_{x_4}$	$\log_{10} k_{y_4}$	$\log_{10} k_{x_5}$	$\log_{10} k_{y_5}$	$\log_{10} k_{x_6}$	$\log_{10} k_{y_6}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_4}$	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_4}$	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{y_5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283	0	0
$\log_{10} k_{x_6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283
$\log_{10} k_{y_6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1283	0.1283

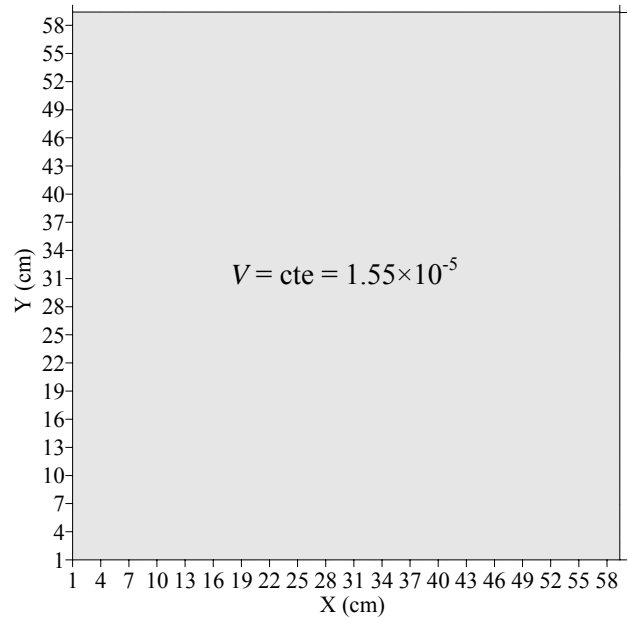
Los valores esperados de la carga hidráulica, del gradiente y de la velocidad de flujo para el caso en el que el medio aleatorio se asume homogéneo e isótropo, se presentan en la Figura 5.10. Evidentemente, las esperanzas del gradiente y de la velocidad son constantes en el dominio de estudio. Por su parte, las desviaciones estándar para estas mismas propiedades se muestran en las Figuras 5.11 a 5.13, incisos (a) a (e) para cada caso analizado respectivamente.



(a) Esperanza de la carga hidráulica, *cm*



(b) Esperanza del gradiente hidráulico, *adimensional*



(c) Esperanza de la velocidad de flujo, *cm/s*

Figura 5.10 Valores esperados en el dominio de estudio (homogéneo e isótropo)

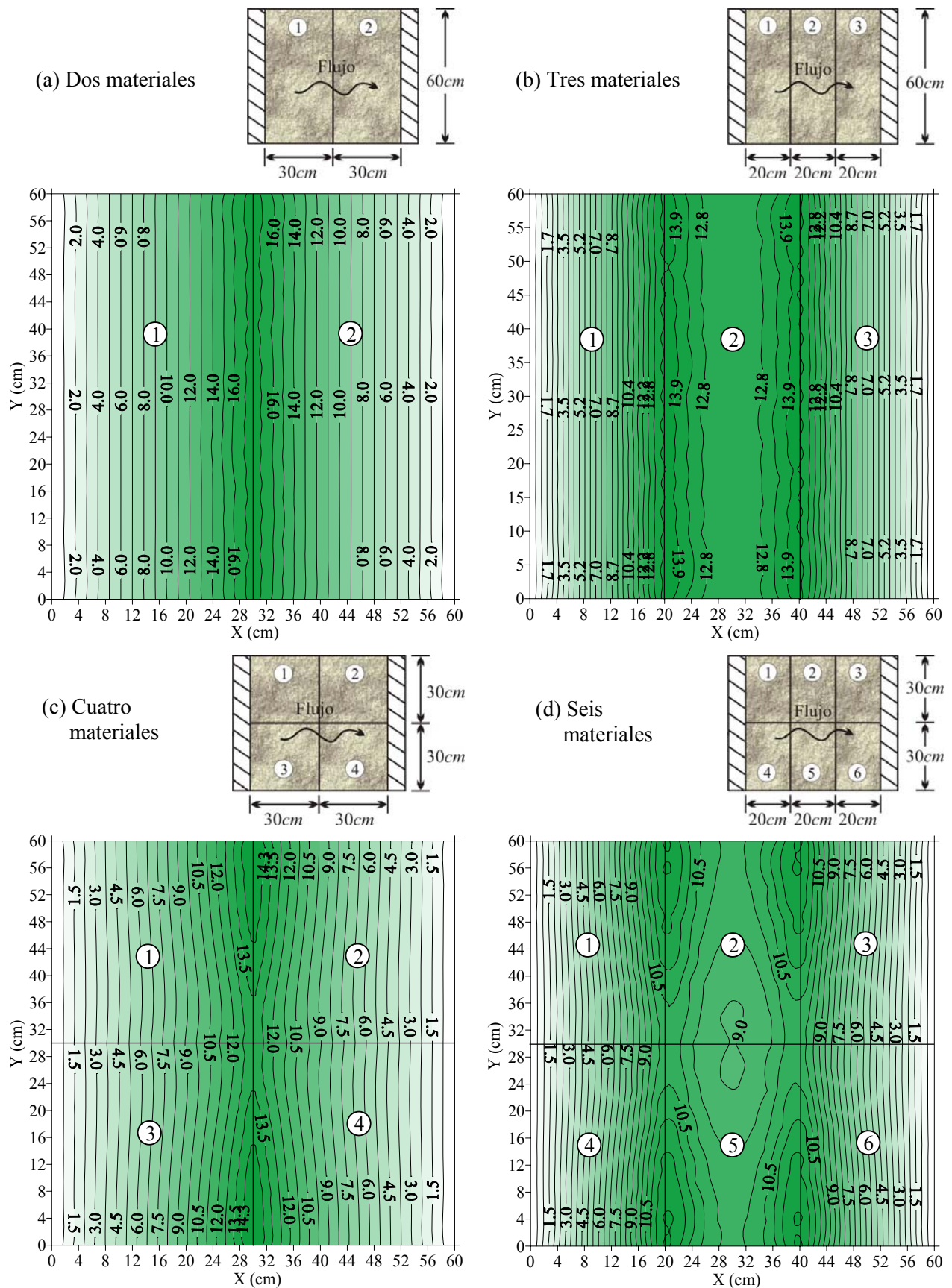


Figura 5.11 Desviación estándar de la carga hidráulica en una muestra de suelo con distintos materiales, *cm*

(e) Dos materiales  
(paralelos al flujo)

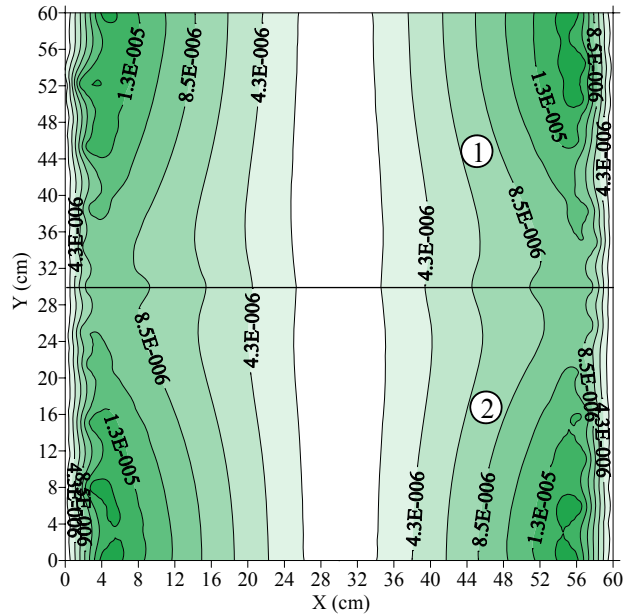
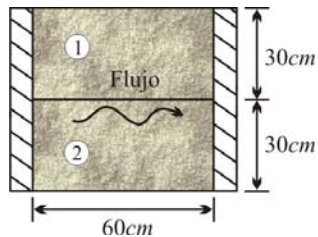


Figura 5.11 (Continuación) Desviación estándar de la carga hidráulica en una muestra de suelo con distintos materiales, *cm*

De las Figuras 5.11a-e anteriores se observa que en la *desviación estándar de la carga hidráulica*:

- No existe incertidumbre en las fronteras donde la carga hidráulica ha sido impuesta (en este caso: las líneas verticales de la extrema izquierda y derecha de la muestra de suelo; Figuras 5.11a-e).
- La incertidumbre tiende a ser máxima en las regiones más alejadas de las fronteras con carga hidráulica impuesta (Figuras 5.11a-d).
- La incertidumbre es nula en el eje de simetría de la muestra (respecto a la dirección del flujo); Figura 5.11e.
- La incertidumbre se distribuye de manera distinta si los estratos de suelo se encuentran en *serie* (Figura 5.11a) o en *paralelo* (Figura 5.11e) respecto a la dirección del flujo.
- La incertidumbre tiende a crecer en las fronteras entre materiales contiguos que están en serie respecto a la dirección del flujo (Figuras 5.11a-d); y tiende a disminuir en las fronteras de los materiales contiguos que son paralelos al flujo (Figuras 5.11c-d y e).
- La interferencia entre distintos materiales del dominio da lugar a un *fenómeno de compensación estadística*, es decir, un efecto de promedio mediante el cual la incertidumbre en la carga hidráulica se distribuye entre los diferentes materiales del medio, sobre todo si éstos se consideran independientes (Figuras 5.11a-d).

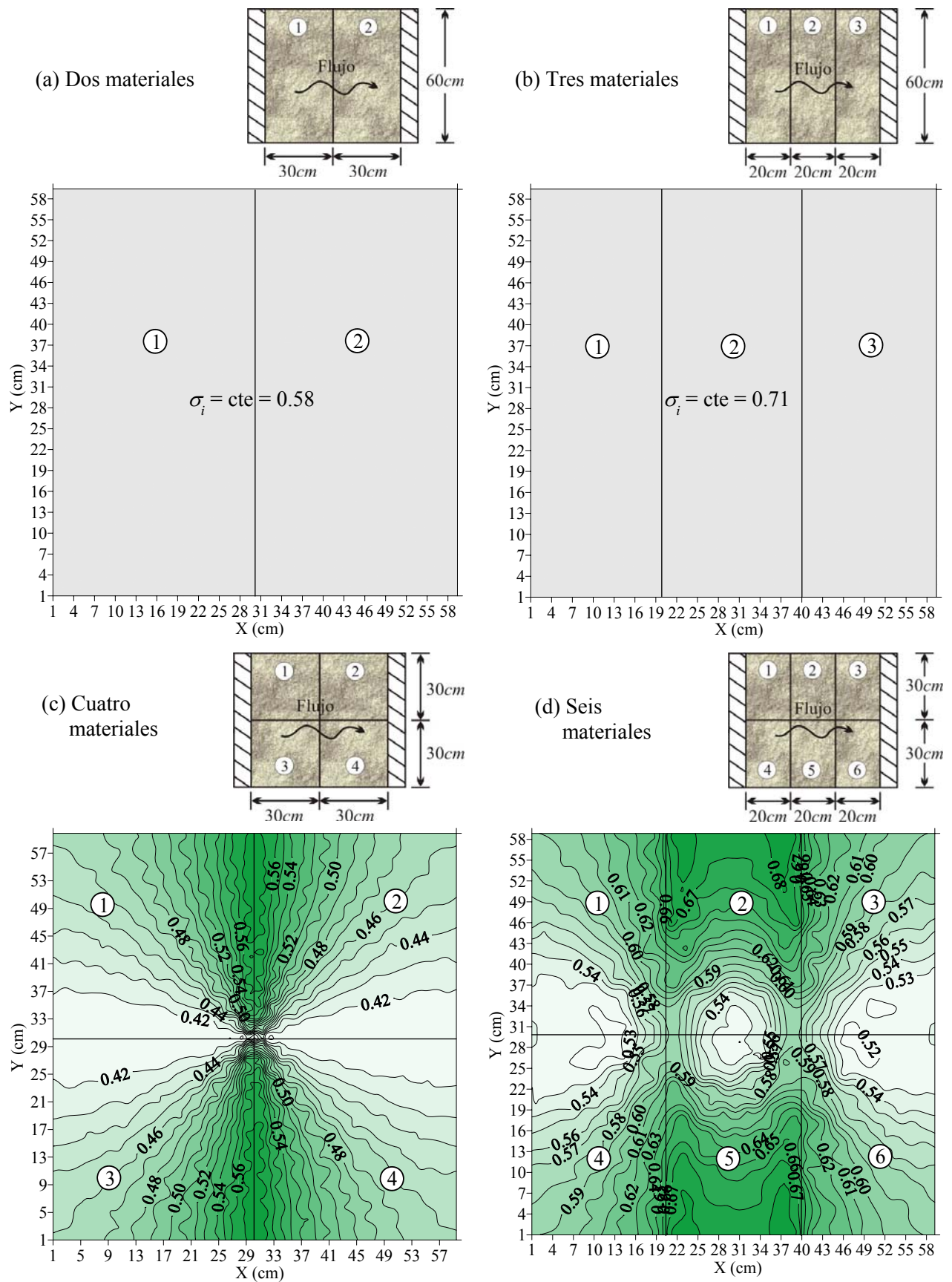


Figura 5.12 Desviación estándar del gradiente hidráulico en una muestra de suelo con distintos materiales, *adimensional*

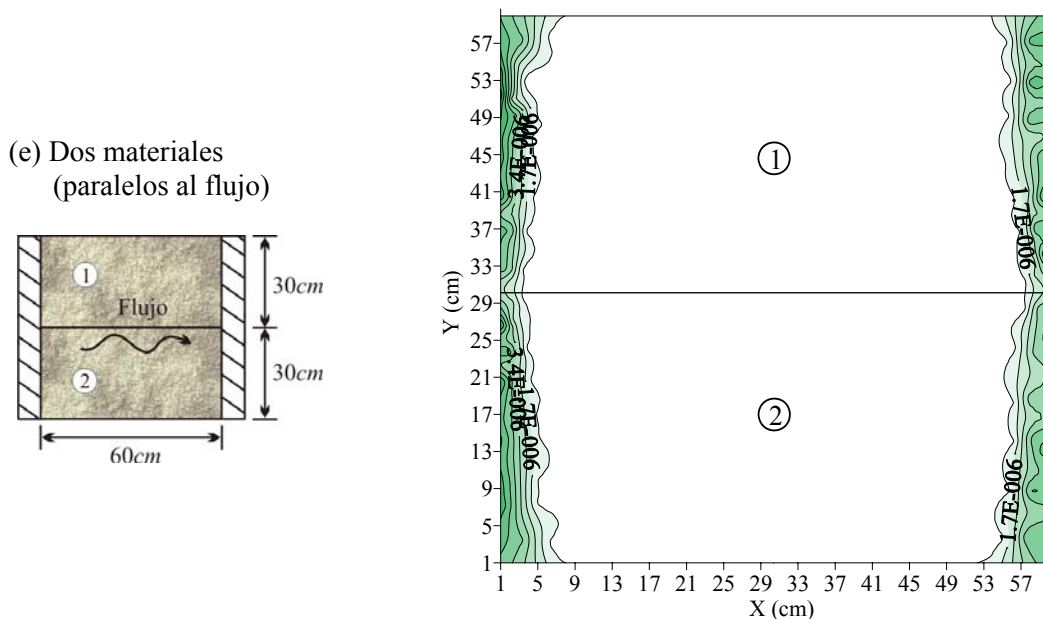


Figura 5.12 (Continuación) Desviación estándar del gradiente hidráulico en una muestra de suelo con distintos materiales, *adimensional*

De las Figuras 5.12a-e anteriores se observa que en la *desviación estándar del gradiente hidráulico*:

- La incertidumbre se distribuye de manera distinta si los estratos se encuentran en *serie* (Figuras 5.12a y b) o en *paralelo* (Figura 5.12e) respecto a la dirección del flujo.
- Para estratos en serie respecto a la dirección del flujo (Figuras 5.12a y b), la incertidumbre es constante, debido a que el valor esperado del gradiente es constante. Lo anterior se debe al flujo unidimensional, a la geometría y a las condiciones de frontera específicas consideradas en este problema. Además, su magnitud tiende a crecer conforme disminuye la distancia de recorrido del agua (de acuerdo con la definición de gradiente hidráulico:  $\Delta h/\ell$ ) en cada material aleatorio isótropo independiente.
- Contrariamente, para estratos paralelos a la dirección del flujo (Figura 5.12e), la incertidumbre es nula en el eje de simetría (respecto a la dirección del flujo); esta incertidumbre nula se extiende en prácticamente toda la muestra de suelo.
- Cuando hay materiales en serie y en paralelo en el dominio de estudio (Figuras 5.12c y d), la incertidumbre tiende a crecer en las fronteras entre materiales contiguos que están en serie respecto al flujo; y tiende a disminuir en las fronteras de materiales contiguos pero paralelos a la dirección del flujo.





(e) Dos materiales (paralelos al flujo)

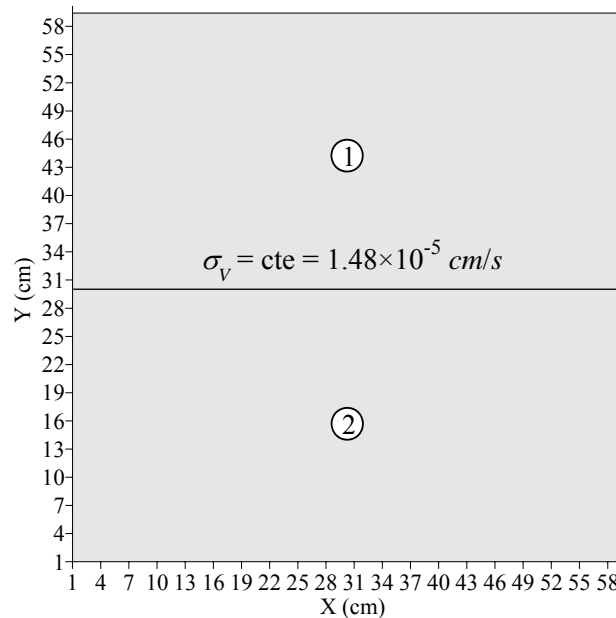
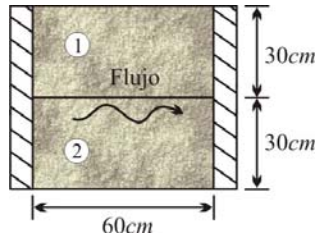


Figura 5.13 (Continuación) Desviación estándar de la velocidad de flujo en una muestra de suelo con distintos materiales,  $cm/s$

De las Figuras 5.13a-e anteriores se observa que en la *desviación estándar de la velocidad de flujo*:

- Cuando los materiales están o solo en *serie* (Figura 5.13a y b) o solo en *paralelo* (Figura 5.13e), la incertidumbre en la velocidad de flujo es constante. Lo anterior se debe por una parte, a que la esperanza de la velocidad es constante (Figura 5.10c), pero también a la magnitud de la incertidumbre en la conductividad hidráulica de los materiales del medio.
- Cuando hay materiales en serie y en paralelo en el dominio de estudio (Figuras 5.13c y d), la incertidumbre tiende a disminuir en las fronteras de materiales contiguos que están en serie respecto a la dirección del flujo; y tiende a crecer en las fronteras de materiales contiguos pero paralelos a la dirección del flujo. Asimismo esta incertidumbre tiende a ser máxima en la interferencia o intersección de distintos materiales.

### 5.2.2.2 Incertidumbre bajo una tablestaca

Se realizan análisis estocásticos de flujo de agua (confinado bidimensional) bajo la tablestaca que se muestra en la Figura 5.14 (López & Auvinet, 2002). Se estudian diferentes condiciones (dos, tres y cuatro materiales estratificados aleatorios, isótropos e independientes) con los parámetros de incertidumbre en la conductividad hidráulica que se indican en los párrafos siguientes.

— Parámetros de incertidumbre en un suelo con dos materiales isótropos independientes:

$$\mu_{k_1} = \mu_{k_2} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\sigma_{k_1} / \mu_{k_1} = \sigma_{k_2} / \mu_{k_2} = 0.50$$

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.04209	0.04209
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.04209	0.04209

— Parámetros de incertidumbre en un suelo con tres materiales isotrópicos independientes:

$$\mu_{k_1} = \dots = \mu_{k_3} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\sigma_{k_1} / \mu_{k_1} = \dots = \sigma_{k_3} / \mu_{k_3} = 0.50$$

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209

— Parámetros de incertidumbre en un suelo con cuatro materiales isotrópicos independientes:

$$\mu_{k_1} = \dots = \mu_{k_4} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s} \quad ; \quad \sigma_{k_1} / \mu_{k_1} = \dots = \sigma_{k_4} / \mu_{k_4} = 0.50$$

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$	$\log_{10} k_{x_4}$	$\log_{10} k_{y_4}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{x_4}$	0	0	0	0	0	0	0.04209	0.04209
$\log_{10} k_{y_4}$	0	0	0	0	0	0	0.04209	0.04209

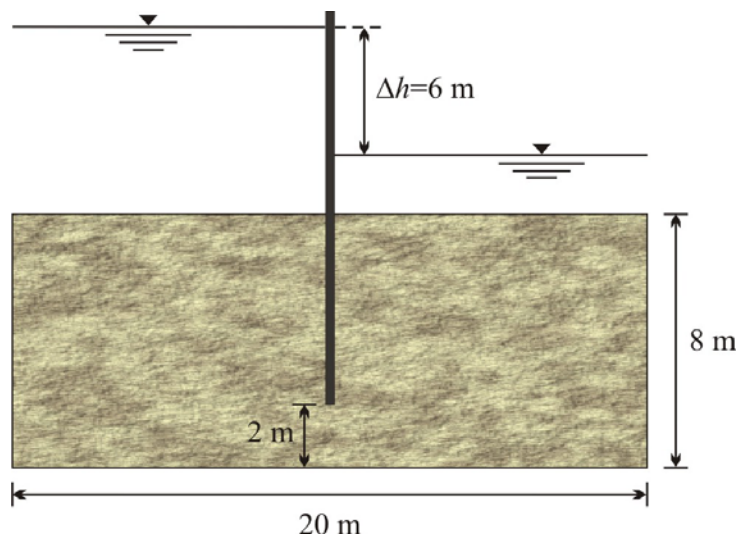


Figura 5.14 Suelo de cimentación aleatorio bajo una tablestaca impermeable

La red de flujo esperada para el caso del suelo homogéneo e isotrópico, así como las esperanzas del gradiente y de la velocidad de flujo se proporcionan en las Figuras 5.15a–c. En las mismas se

distingue que los valores esperados más altos tanto del gradiente como de la velocidad se presentan en la punta de la tablestaca; y que los valores más bajos, ocurren simétricamente en las esquinas inferiores izquierda y derecha de la región de flujo.

Por su parte, en las Figuras 5.16 a 5.18 se presentan las desviaciones estándar obtenidas en cada caso analizado (dos, tres y cuatro materiales isótropos estratificados, respectivamente).

De las Figuras 5.16a-5.18a anteriores se observa que en la desviación estándar de la carga *hidráulica*:

- No existe incertidumbre en las fronteras donde el potencial ha sido impuesto (en este caso: las líneas horizontales permeables de aguas arriba y aguas abajo que se señalan en cada figura).
- La incertidumbre es nula en el eje de simetría del problema.
- Se aprecia que una zona extensa de incertidumbres altas se presenta consistentemente a ambos lados de la tablestaca, y que además en dicha zona la incertidumbre máxima ocurre en la frontera de los materiales contiguos que se localizan más cercanos a la punta de la tablestaca.
- Se aprecia un efecto de compensación estadística, mediante el cual, la incertidumbre tiende a disminuir conforme aumenta el número de materiales en el dominio de estudio.

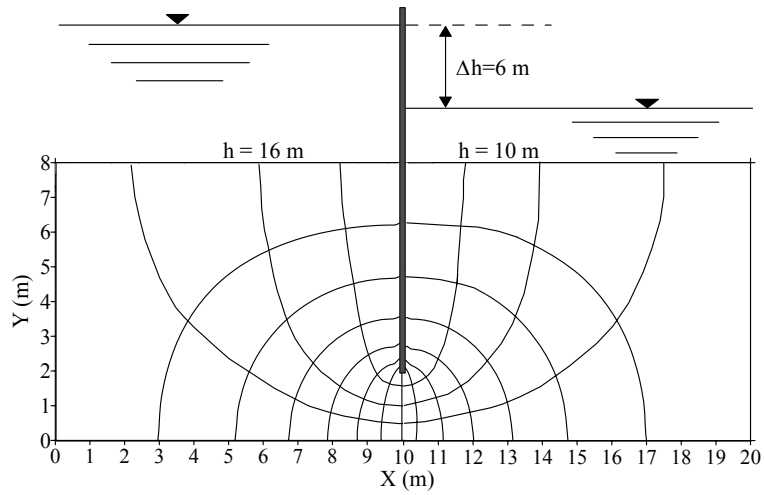
De las Figuras 5.16b-5.18b se distingue que en la desviación estándar del gradiente hidráulico:

- Una región de incertidumbre máxima se genera alrededor de la punta de la tablestaca.
- Se observan zonas simétricas de incertidumbre nula en los extremos inferiores izquierdo y derecho de la región de flujo, las cuales están delimitadas por la frontera superior del último estrato del dominio de estudio.

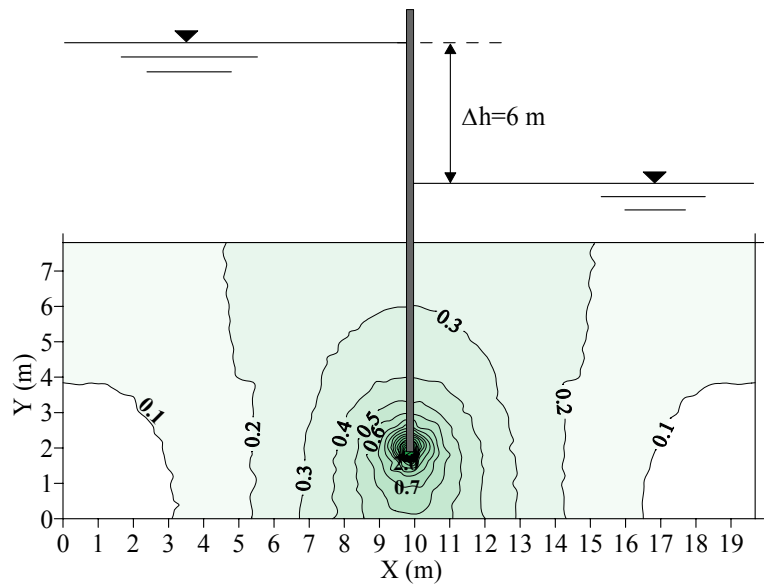
De las Figuras 5.16c-5.18c se distingue que en la *desviación estándar de la velocidad de flujo* se presenta un comportamiento similar al caso de la desviación en el gradiente hidráulico, esto es:

- Una región de incertidumbre máxima se genera alrededor de la punta de la tablestaca.
- Se observan zonas simétricas de incertidumbre nula en los extremos inferiores izquierdo y derecho de la región de flujo; la diferencia es que en este caso, estas zonas se extienden hasta la parte superior del dominio de estudio conforme aumenta el número de estratos.

(a) Red de flujo esperada



(b) Esperanza del gradiente hidráulico, adimensional



(c) Esperanza de la velocidad de flujo, m/s

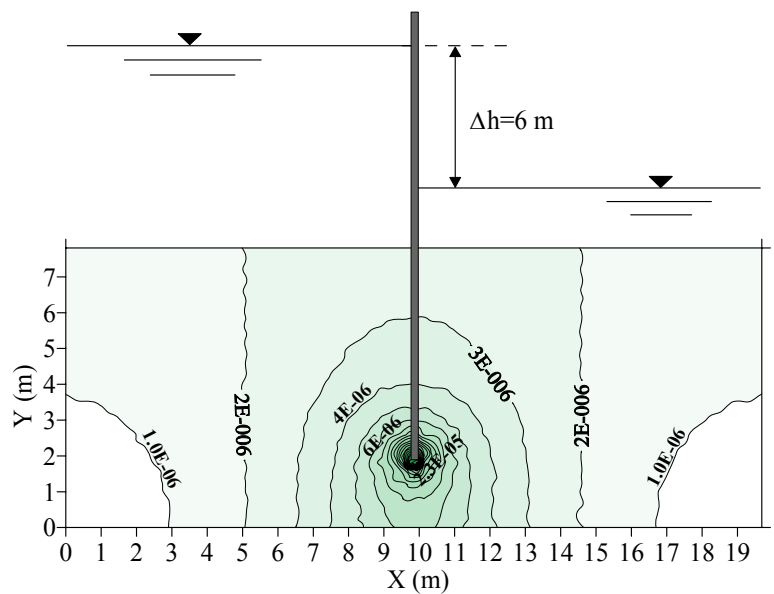


Figura 5.15 Valores esperados bajo una tablestaca (suelo homogéneo e isótropo)



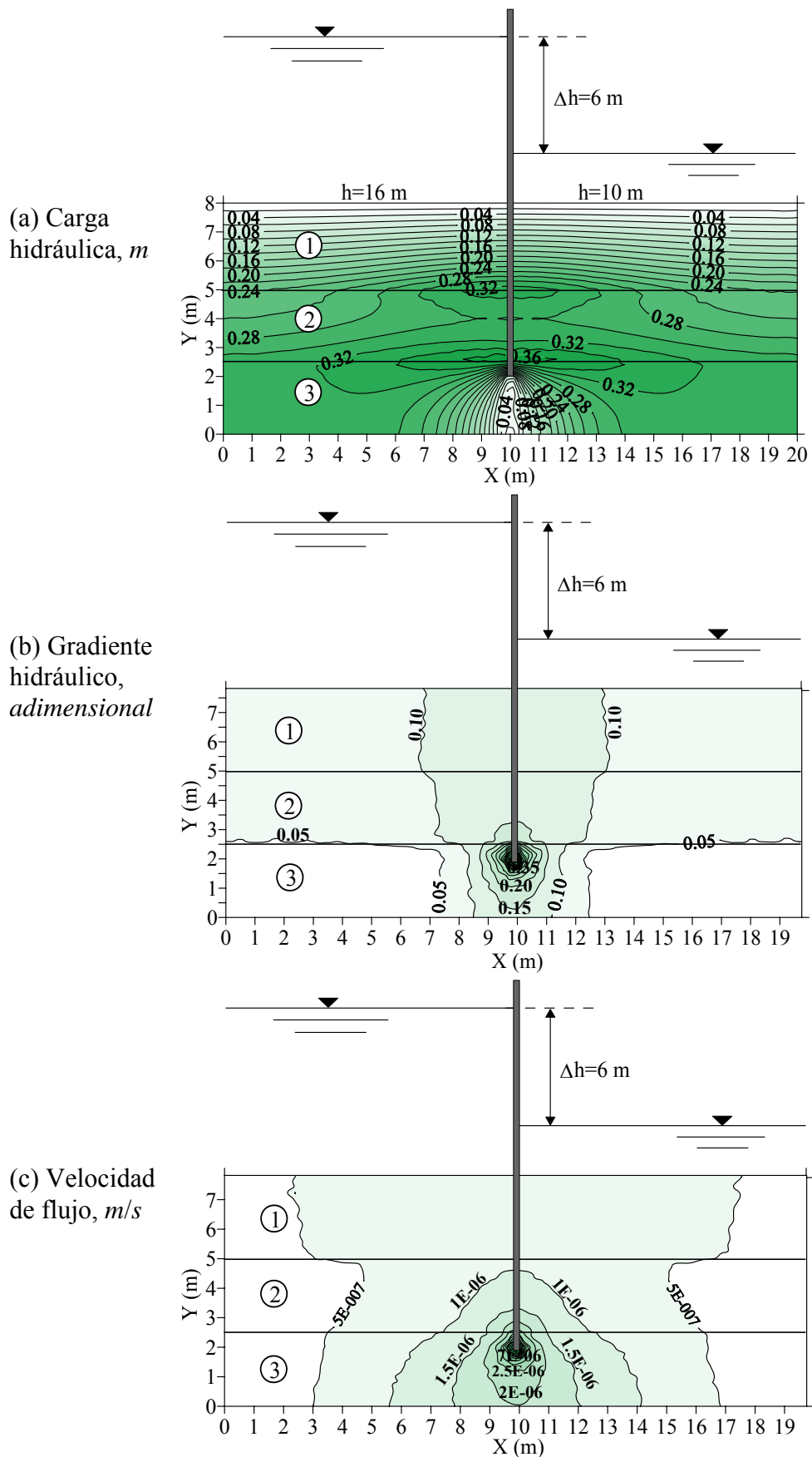


Figura 5.17 Desviación estándar bajo una tablestaca (tres materiales isotrópicos estratificados)

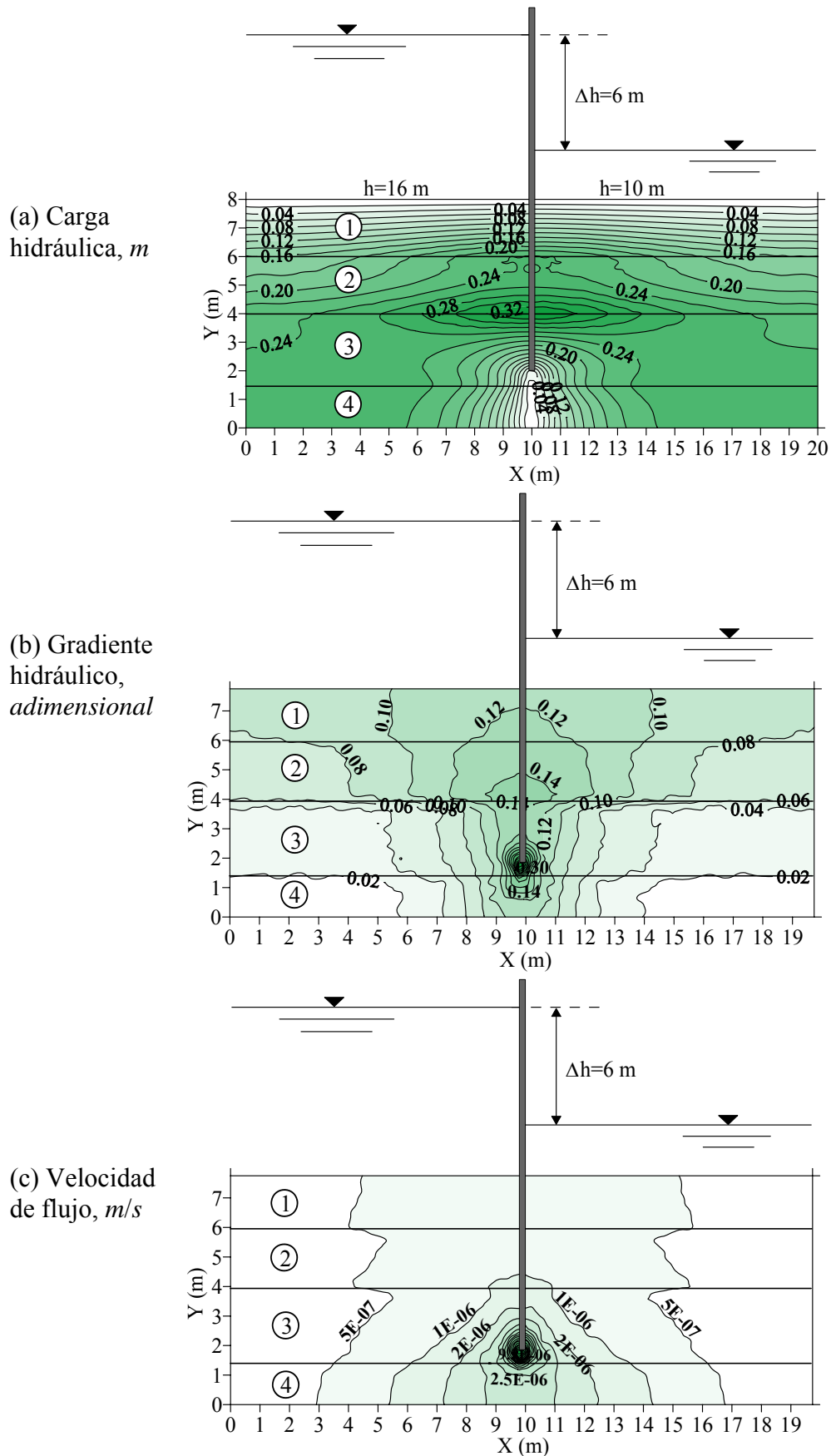


Figura 5.18 Desviación estándar bajo una tablestaca (cuatro materiales isotropos estratificados)



5.2.2.3 Incertidumbre bajo de un cimacio

Se realizan análisis estocásticos de flujo de agua (confinado bidimensional) en el suelo de cimentación del cimacio que se muestra en la Figura 5.19 (López & Auvinet, 2002; López & Auvinet, 2003). Se estudian distintas condiciones: dos, tres y cuatro materiales estratificados aleatorios, isotropos e independientes; pero también, estratos inclinados; estratos en serie; y estratos en serie y en paralelo respecto a la dirección del flujo.

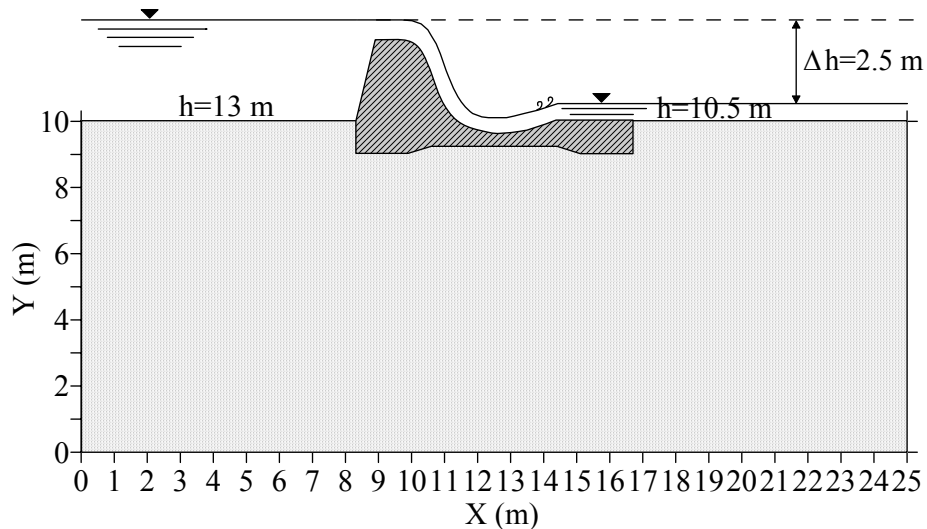


Figura 5.19 Suelo de cimentación aleatorio bajo un cimacio

Se asumen los parámetros de incertidumbre en la conductividad hidráulica que se señalan a continuación.

— Parámetros de incertidumbre en un suelo con dos materiales isotropos independientes:

$$\mu_{k_1} = \mu_{k_2} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\sigma_{k_1} / \mu_{k_1} = \sigma_{k_2} / \mu_{k_2} = 0.50$$

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.04209	0.04209
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.04209	0.04209

— Parámetros de incertidumbre en un suelo con tres materiales isotropos independientes:

$$\mu_{k_1} = \dots = \mu_{k_3} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\sigma_{k_1} / \mu_{k_1} = \dots = \sigma_{k_3} / \mu_{k_3} = 0.50$$

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209

— Parámetros de incertidumbre en un suelo con cuatro materiales isótropos independientes:

$$\mu_{k_1} = \dots = \mu_{k_4} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s} \quad ; \quad \sigma_{k_1} / \mu_{k_1} = \dots = \sigma_{k_4} / \mu_{k_4} = 0.50$$

	$\log_{10} k_{x_1}$	$\log_{10} k_{y_1}$	$\log_{10} k_{x_2}$	$\log_{10} k_{y_2}$	$\log_{10} k_{x_3}$	$\log_{10} k_{y_3}$	$\log_{10} k_{x_4}$	$\log_{10} k_{y_4}$
$\log_{10} k_{x_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_1}$	0.04209	0.04209	0	0	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{y_2}$	0	0	0.04209	0.04209	0	0	0	0
$\log_{10} k_{x_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{y_3}$	0	0	0	0	0.04209	0.04209	0	0
$\log_{10} k_{x_4}$	0	0	0	0	0	0	0.04209	0.04209
$\log_{10} k_{y_4}$	0	0	0	0	0	0	0.04209	0.04209

Las Figuras 5.20a–c ilustran los valores esperados de la carga hidráulica, del gradiente y de la velocidad de flujo para el caso en que se asume al suelo homogéneo e isótropo. En las mismas se distingue que los valores esperados más altos tanto del gradiente como de la velocidad se presentan en forma simétrica alrededor de las esquinas inferiores de aguas arriba y aguas abajo del cimacio; y que los valores más bajos, ocurren también simétricamente en los extremos inferiores izquierdo y derecho del dominio de flujo.

Por su parte, las Figuras 5.21 a 5.23 muestran las desviaciones estándar obtenidas cuando el medio está constituido por dos, tres y cuatro materiales isótropos estratificados, respectivamente. Del inciso (a) de cada figura anterior, se observa que en la *desviación estándar de la carga hidráulica*:

- No existe incertidumbre en las fronteras donde el potencial ha sido impuesto (en este caso: las líneas horizontales permeables de aguas arriba y aguas abajo que se señalan en cada figura).
- La incertidumbre es nula en el eje de simetría del problema.
- La incertidumbre tiende a crecer en las fronteras de materiales contiguos. Pero además, es máxima en las regiones más alejadas tanto de las fronteras con carga impuesta como del eje de simetría, donde la incertidumbre es nula.
- Se aprecia un efecto de compensación estadística, mediante el cual, la incertidumbre tiende a disminuir conforme aumenta el número de materiales en el dominio de estudio.

Del inciso (b) de las Figuras 5.21 a 5.23 se distingue que en la *desviación estándar del gradiente hidráulico*:

- Las zonas de incertidumbres altas se presentan de forma simétrica a ambos lados del cimacio (aguas arriba y aguas abajo), y están delimitadas por la frontera inferior del estrato donde se ubica el cimacio.
- Se observan zonas simétricas de incertidumbre nula en los extremos inferiores izquierdo y derecho de la región de flujo, las cuales están delimitadas por la frontera superior del último estrato del dominio de estudio.
- Llama la atención que, en todos los casos se generan simétricamente zonas imprevistas de *certidumbre* (zonas donde la incertidumbre en el gradiente es nula) debajo de las esquinas del cimacio tanto aguas arriba como aguas abajo. Estas zonas están delimitadas por la frontera inferior del estrato donde se ubica el cimacio.

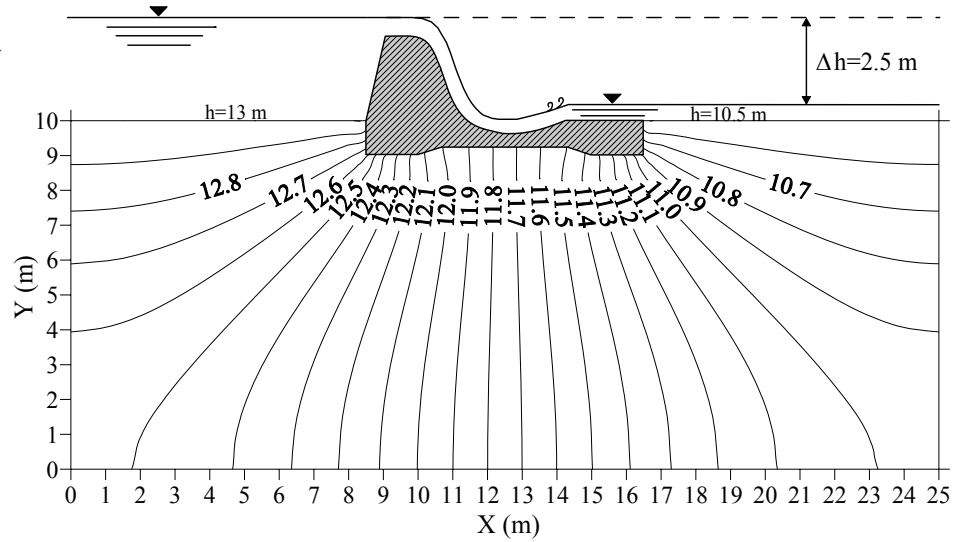
Del inciso (c) de las Figuras 5.21 a 5.23 se aprecia que en la *desviación estándar de la velocidad de flujo*:

- Las zonas de incertidumbre más altas se presentan en forma simétrica alrededor de las esquinas inferiores de aguas arriba y aguas abajo del cimacio. Esto es, donde ocurren los máximos valores esperados de la velocidad de flujo.
- Se observan zonas simétricas de incertidumbre nula en los extremos inferiores izquierdo y derecho de la región de flujo, las cuales están delimitadas por la frontera superior del último estrato del dominio de estudio.

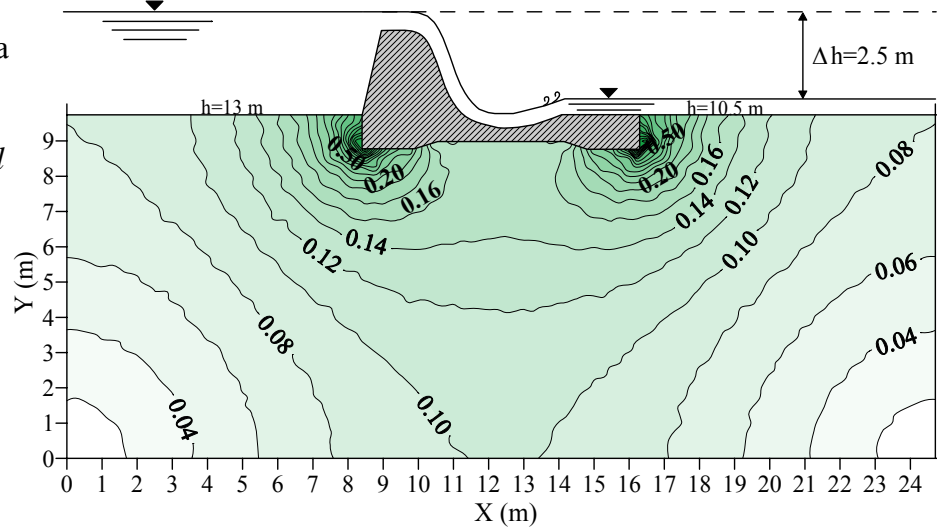
Para el caso en el que se considera al medio constituido por dos materiales isótropos inclinados (Figura 5.24), las zonas de incertidumbres máximas y mínimas que se generan son similares al caso en el que el medio está constituido por dos materiales isótropos estratificados (Figura 5.21), la diferencia es que ahora las desviaciones estándar más altas y nulas tanto de la carga como del gradiente hidráulico se desplazan o distorsionan en función de la inclinación del estrato. Por su parte, la desviación estándar de la velocidad de flujo no se ve afectada en gran medida por el cambio de la posición de los estratos de horizontales a inclinados. En el caso particular de la *desviación estándar de la carga hidráulica*: existe incertidumbre nula en las fronteras con potencial impuesto; la zona de incertidumbre nula que se observaba al centro del dominio, desaparece puesto que ya no hay simetría en el problema; la incertidumbre tiende a crecer en la frontera de materiales contiguos y es máxima en la región más alejada de la frontera con potencial conocido. Con respecto a la *desviación estándar del gradiente hidráulico*: las zonas inesperadas de *certidumbre* que se observaban debajo de las esquinas izquierda y derecha del cimacio se desplazan de acuerdo con la inclinación del estrato; lo mismo ocurre con las zonas de incertidumbre nula en los extremos inferiores izquierdo y derecho del dominio, y con las zonas de incertidumbre máxima a ambos lados del cimacio. En cuanto a la *desviación estándar de la velocidad de flujo*, la distribución de las zonas de incertidumbres máximas y mínimas permanecen prácticamente sin cambios tanto en uno (Figura 5.24c) como en el otro caso (Figura 5.21c).

Para el caso en el que se considera al medio constituido por dos materiales isótropos en serie (Figura 5.25), y por cuatro materiales isótropos en serie y en paralelo (Figura 5.26), enfocando la comparación a la parte central del dominio en la que la dirección del flujo es horizontal, se aprecian conclusiones similares a las obtenidas en el caso de la muestra sujeta a flujo unidimensional (Figura 5.8). Esto es, en cuanto a la *desviación estándar de la carga hidráulica*: para materiales en serie respecto al flujo la incertidumbre tiende a crecer en la frontera de materiales contiguos; no existe incertidumbre nula al centro del dominio porque los estratos ya no son paralelos respecto al flujo; existe incertidumbre nula en la frontera con potencial impuesto; se aprecia el mencionado efecto de compensación estadística, mediante el cual la incertidumbre disminuye conforme aumenta el número de materiales en el medio. Con respecto a la *desviación estándar del gradiente hidráulico*: predomina el efecto de los estratos que están en serie, aunque la incertidumbre no es constante como en el caso de la muestra sujeta a flujo unidimensional (Figura 5.12a y b) porque ahora la esperanza del gradiente no es constante debido al flujo 2D (Figura 5.20b); en este caso, las zonas de incertidumbres más altas y nulas coinciden con las regiones donde se tienen los valores esperados más altos y nulos respectivamente (Figura 5.20b); además, las zonas de incertidumbre nula que se observaban en los casos anteriores debajo de las esquinas izquierda y derecha del cimacio, desaparecen debido a que los estratos ya no son paralelos al flujo (Figura 5.25b) o bien, porque predomina el efecto de los estratos en serie (Figura 5.26b). Finalmente, en relación con la *desviación estándar de la velocidad de flujo*, la distribución de las zonas de incertidumbres máximas y mínimas permanece prácticamente sin cambios respecto a lo obtenido en todos los casos anteriores.

(a) Esperanza de la carga hidráulica, m



(b) Esperanza del gradiente hidráulico, adimensional



(c) Esperanza de la velocidad de flujo, m/s

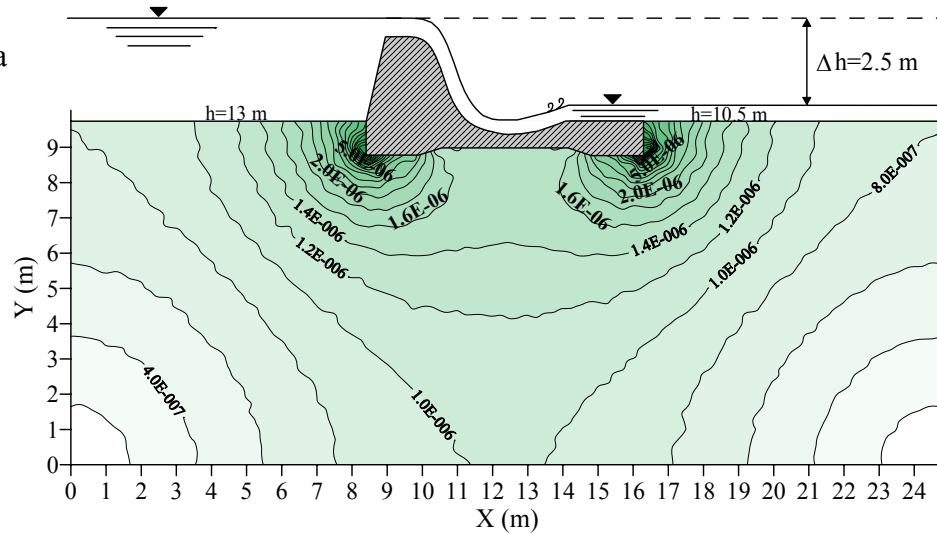
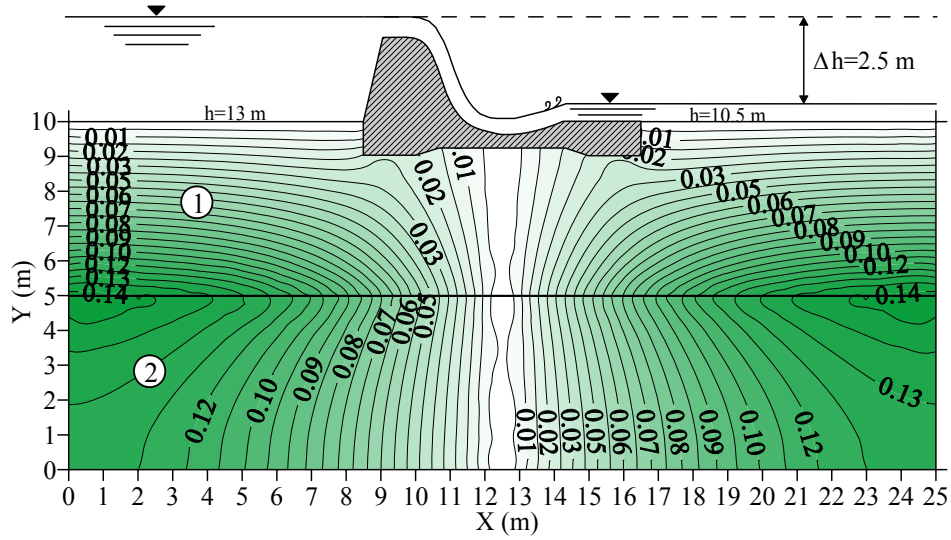
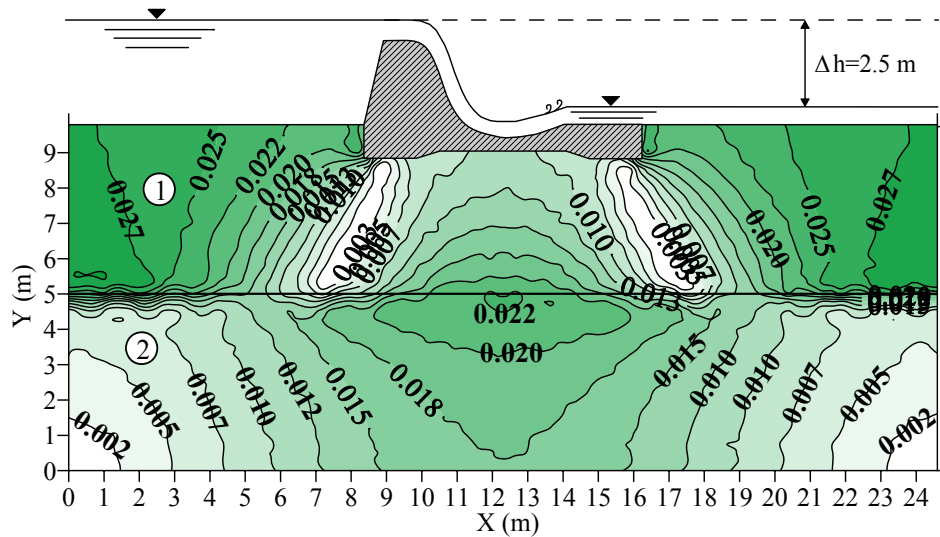


Figura 5.20 Valores esperados debajo de un cimacio (suelo homogéneo e isótropo)

(a) Carga hidráulica, m



(b) Gradiente hidráulico, adimensional



(c) Velocidad de flujo, m/s

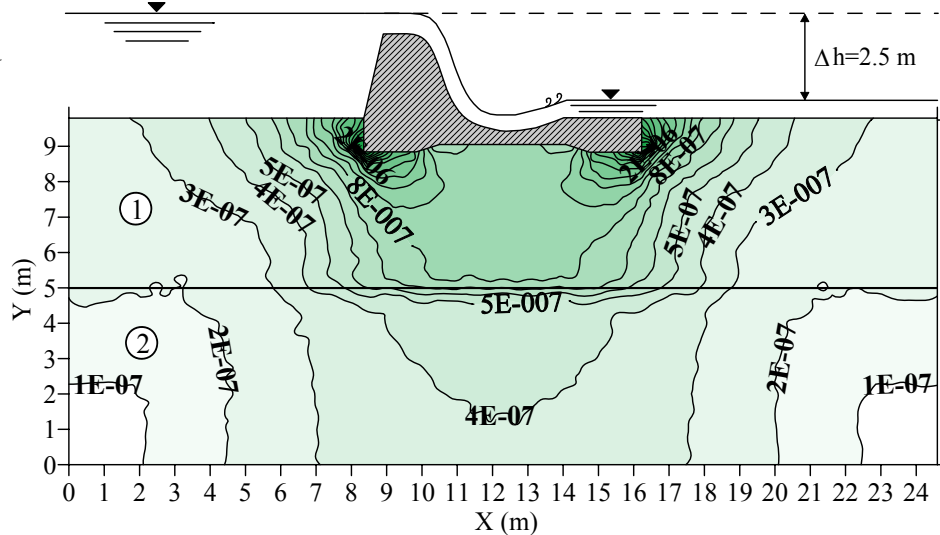


Figura 5.21 Desviación estándar debajo de un cimacio (dos materiales isotropos estratificados)

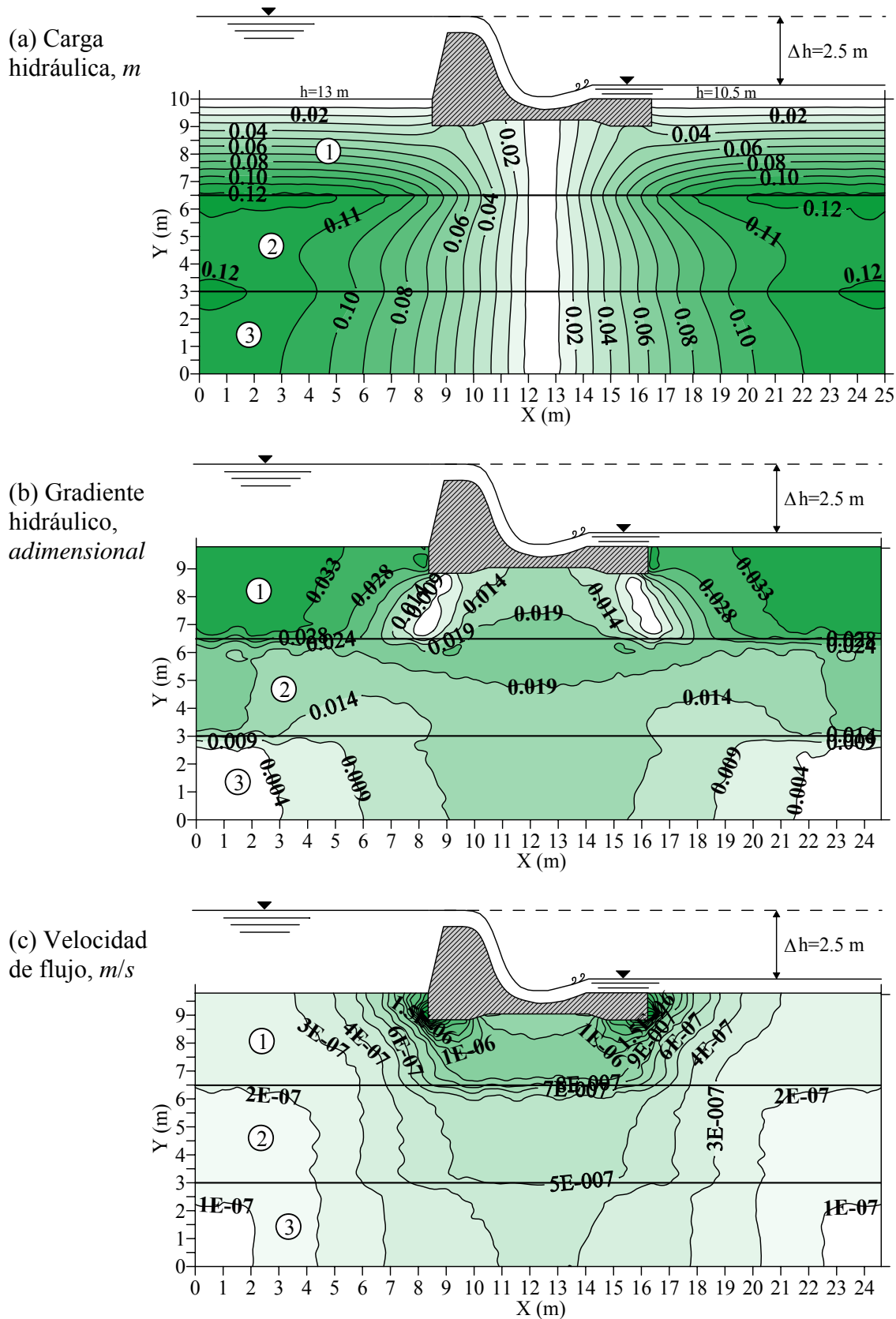
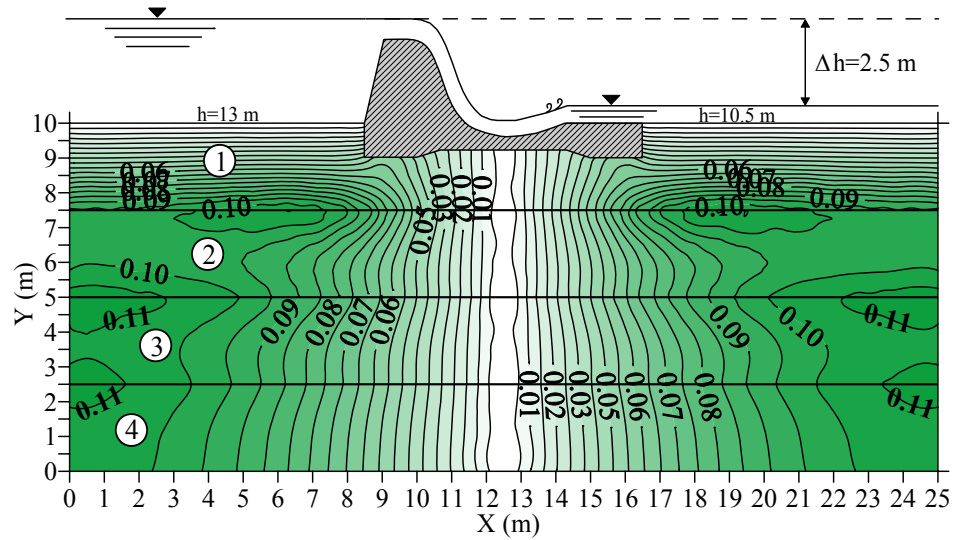
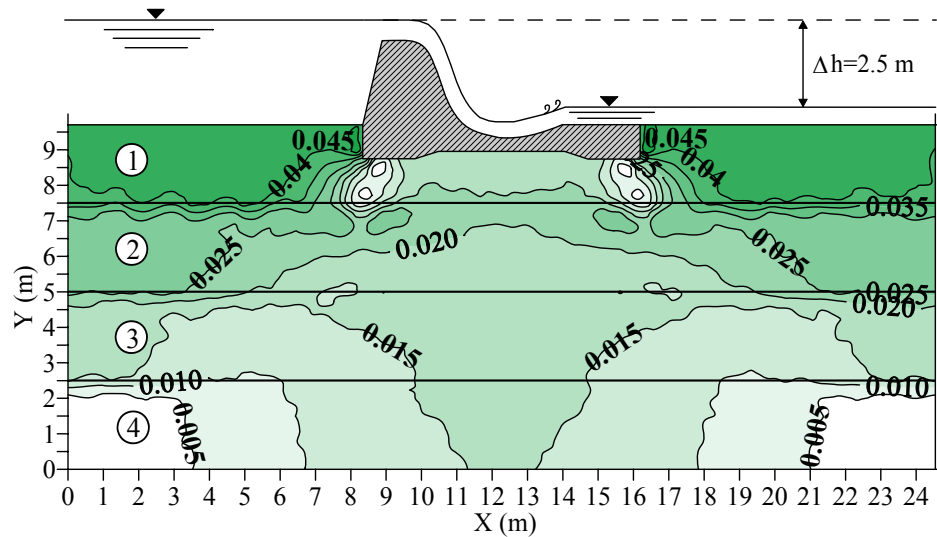


Figura 5.22 Desviación estándar debajo de un cimacio (tres materiales isótropos estratificados)

(a) Carga hidráulica, m



(b) Gradiente hidráulico, adimensional



(c) Velocidad de flujo, m/s

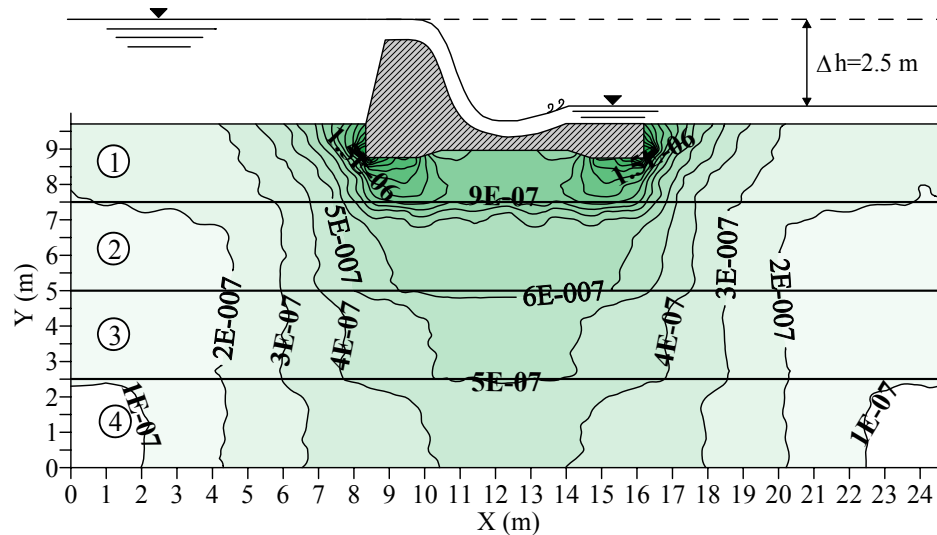
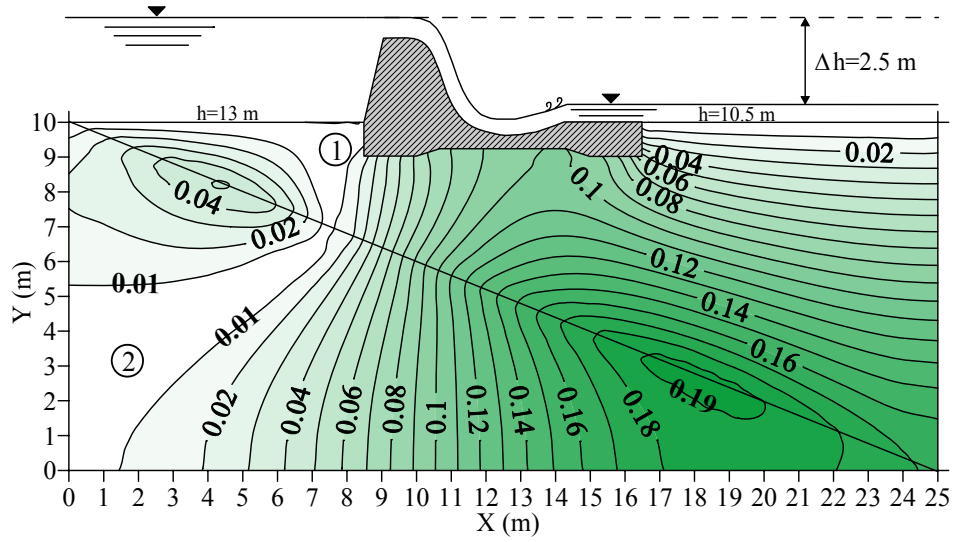
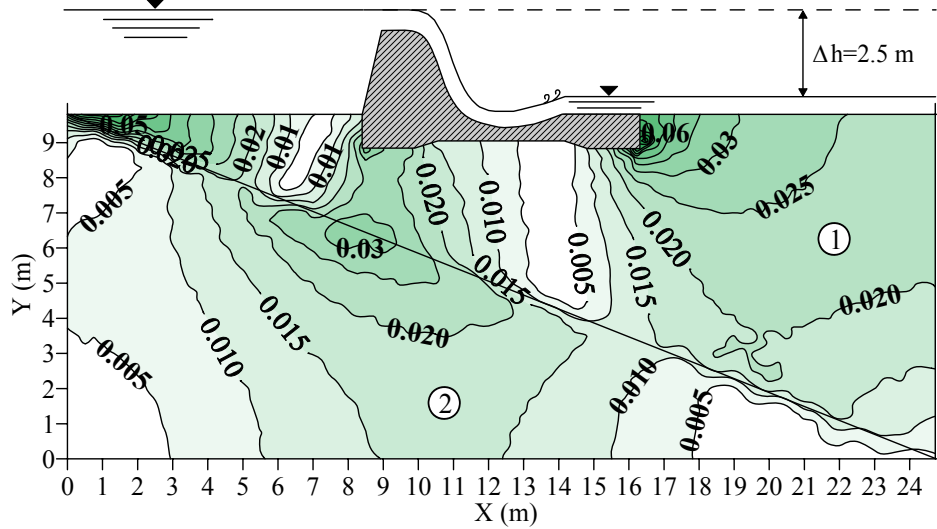


Figura 5.23 Desviación estándar debajo de un cimacio (cuatro materiales isotrópicos estratificados)

(a) Carga hidráulica, m



(b) Gradiente hidráulico, adimensional



(c) Velocidad de flujo, m/s

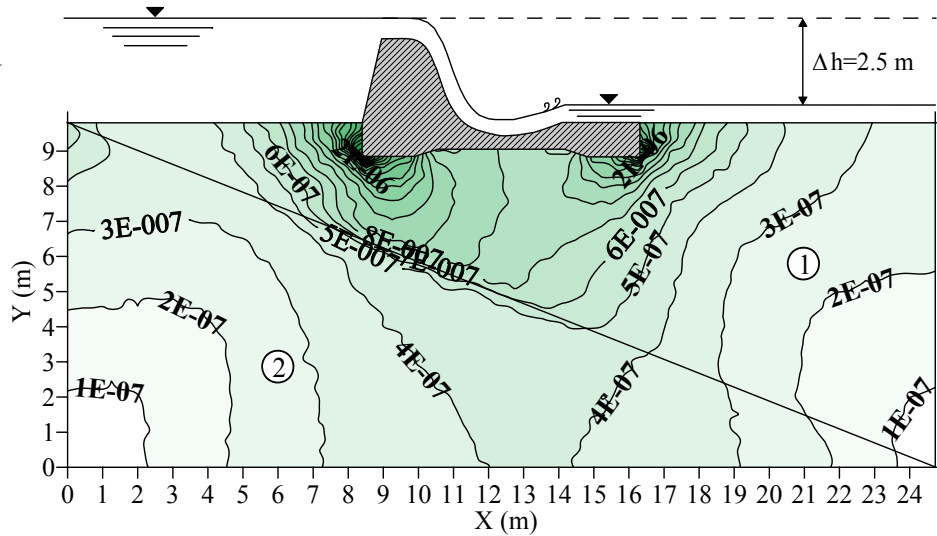
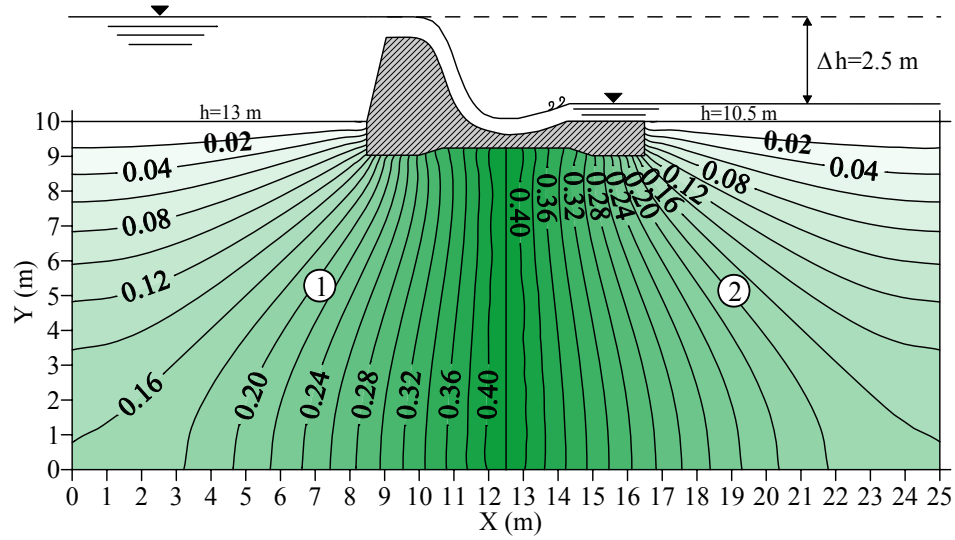


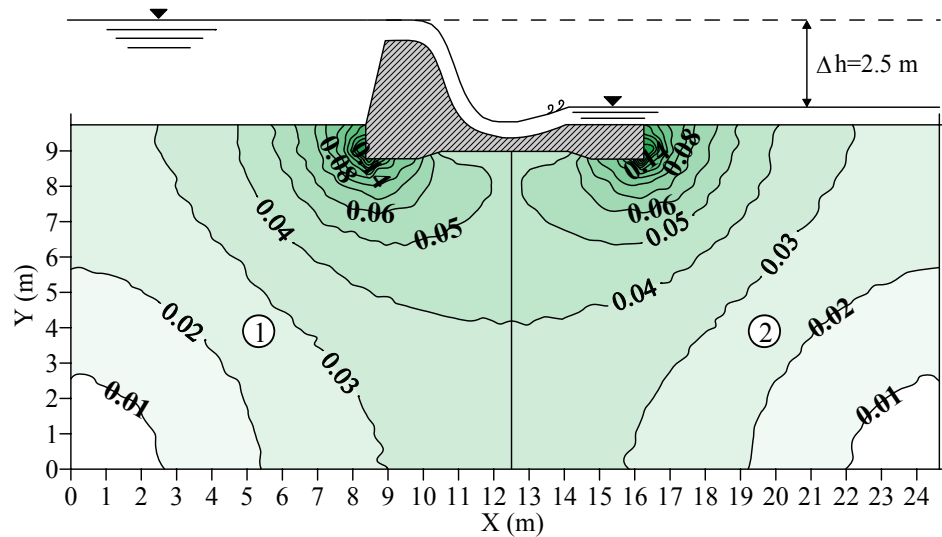
Figura 5.24 Desviación estándar debajo de un cimacio (dos materiales isotópicos inclinados)



(a) Carga hidráulica, m



(b) Gradiente hidráulico, adimensional



(c) Velocidad de flujo, m/s

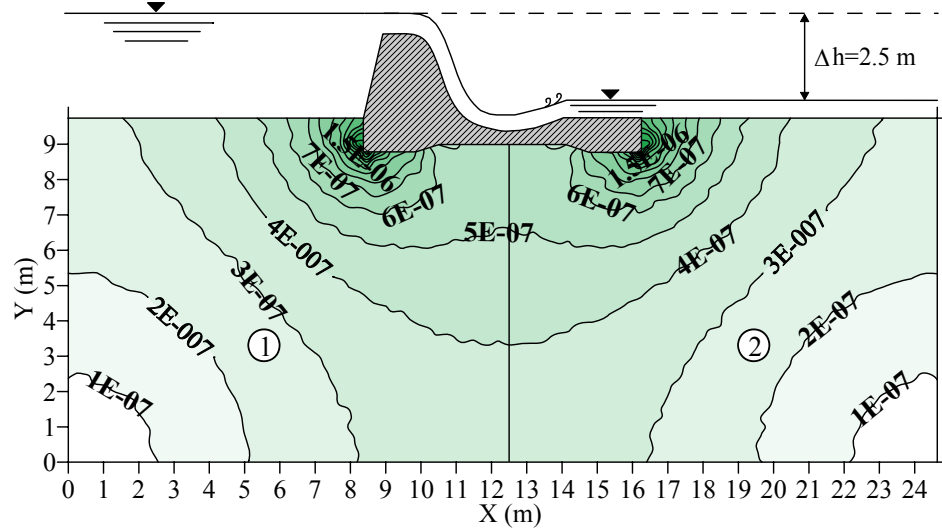
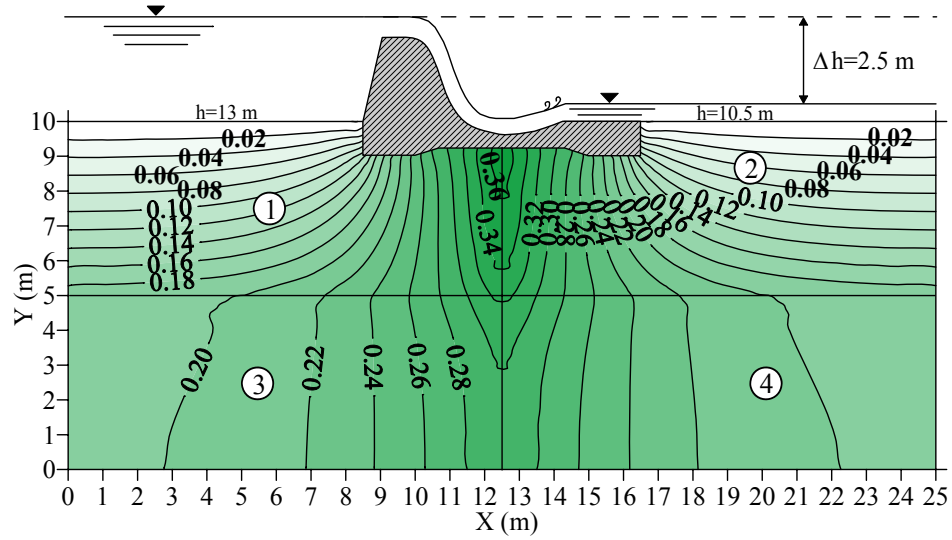
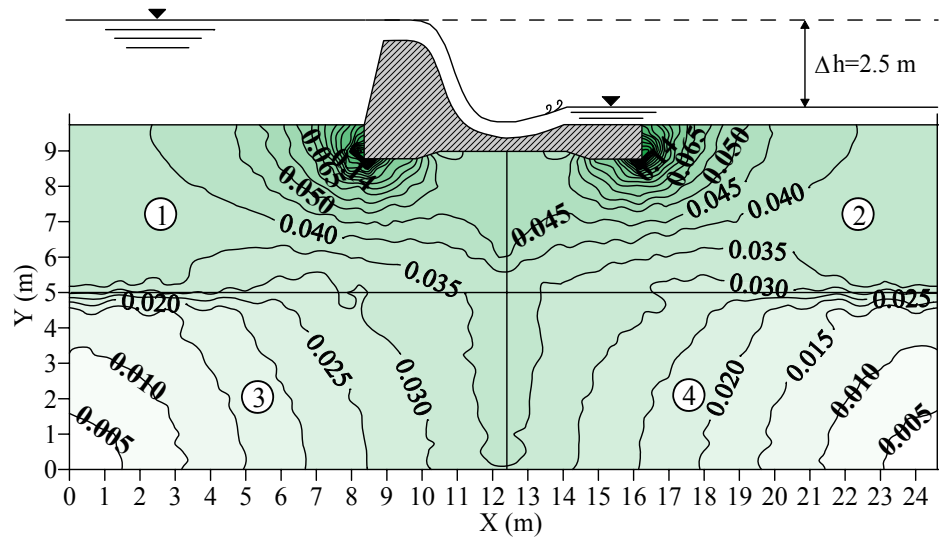


Figura 5.25 Desviación estándar debajo de un cimacio (dos materiales isótopos en serie)

(a) Carga hidráulica, m



(b) Gradiente hidráulico, adimensional



(c) Velocidad de flujo, m/s

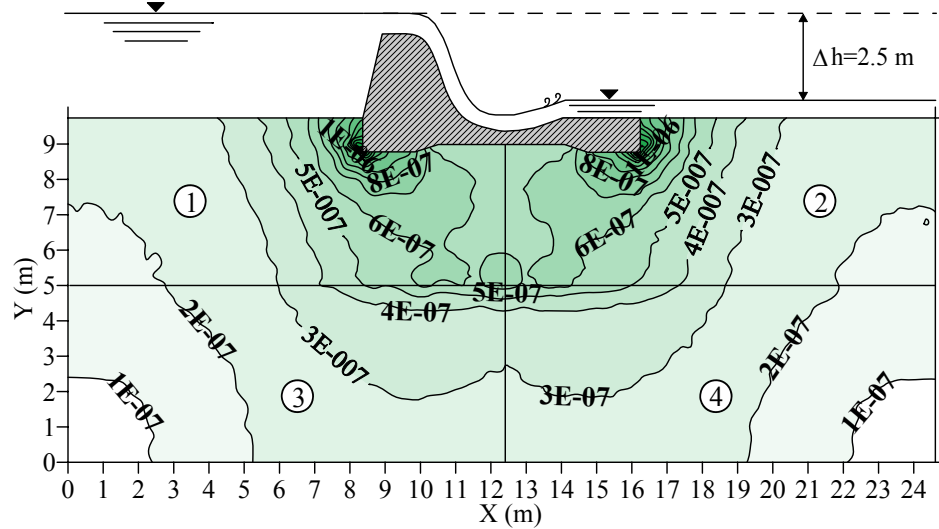


Figura 5.26 Desviación estándar debajo de un cimacio (cuatro materiales isotropos en serie y en paralelo)

5.2.2.4 Incertidumbre a través de una presa de tierra homogénea

Se realiza el análisis estocástico de flujo de agua (no confinado bidimensional) a través de la presa de tierra que se ilustra en la Figura 5.27. Se considera que el suelo es homogéneo anisótropo, con los parámetros de incertidumbre en la conductividad hidráulica que se indican a continuación.

— Media o valor esperado:

$$E\{k_x\} = \mu_{k_x} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s} \quad ; \quad E\{k_y\} = \mu_{k_y} = 1 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

— Coeficiente de variación:

$$\sigma_{k_x} / \mu_{k_x} = 0.50 \quad ; \quad \sigma_{k_y} / \mu_{k_y} = 0.50$$

— Matriz de covarianza del logaritmo decimal de la permeabilidad:

$$\begin{matrix} & \log_{10} k_x & \log_{10} k_y \\ \log_{10} k_x & \left[ \begin{array}{c|c} 0.04209 & 0 \\ \hline 0 & 0.04209 \end{array} \right] \\ \log_{10} k_y & & \end{matrix}$$

En la matriz anterior el coeficiente de correlación entre la permeabilidad horizontal y vertical es nulo,  $\rho(\log_{10} k_x, \log_{10} k_y) = 0$ , debido a la anisotropía.

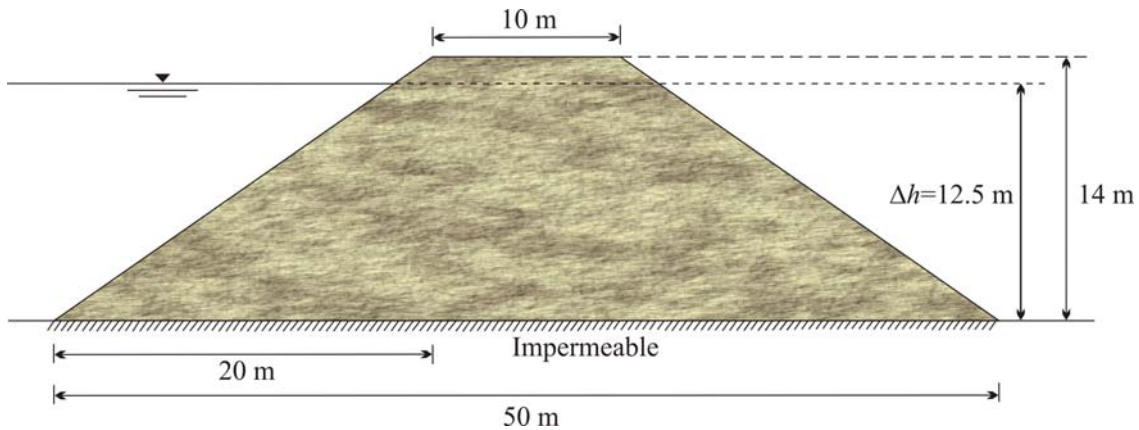


Figura 5.27 Presa de tierra aleatoria homogénea y anisótropa

Los resultados del análisis proporcionan los valores esperados de la carga hidráulica, del gradiente y de la velocidad de flujo que se señalan en las Figuras 5.28a–c respectivamente. Se aprecia que en el caso del gradiente hidráulico los máximos valores esperados se presentan en la zona de la superficie libre de salida de la presa, y se extienden ligeramente hacia la parte central de dicha estructura. Con respecto a los máximos valores esperados de la velocidad de flujo, éstos se presentan más hacia el pie del talud de aguas abajo de la presa.

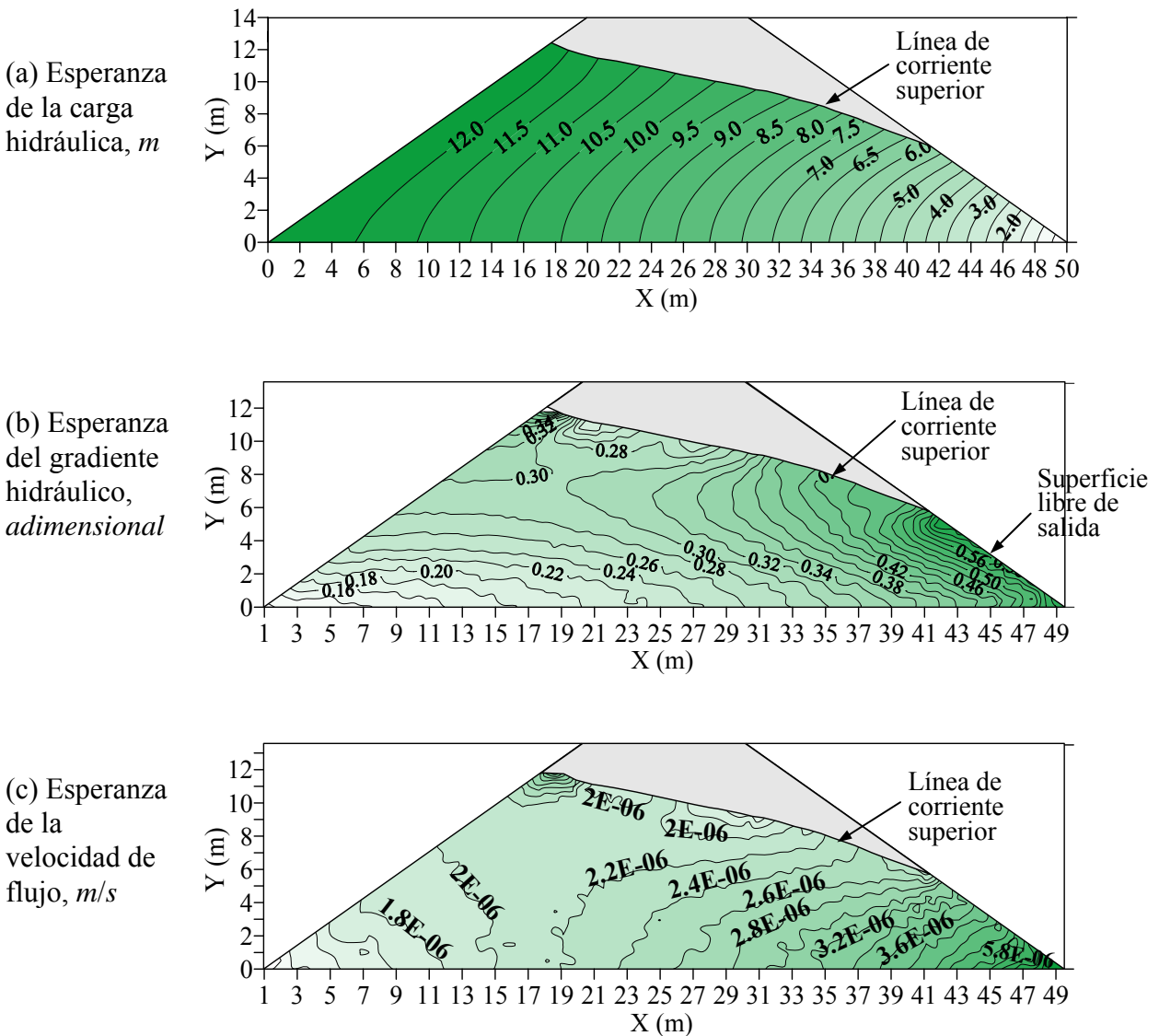


Figura 5.28 Valores esperados en una presa de tierra (homogénea anisótropa)

En lo referente a las desviaciones estándar, los resultados se proporcionan en las Figuras 5.29a–c para la carga, el gradiente y la velocidad de flujo respectivamente. En las mismas, se observa que en el caso de la *carga hidráulica*, la desviación estándar es nula en las fronteras con potencial impuesto y es máxima en la zona más alejada de dichas fronteras (Figura 5.29a). En el caso del *gradiente hidráulico*, se aprecia que existen zonas de desviaciones estándar mínimas tanto en la base impermeable de la presa como en la parte superior de la región de flujo hacia el lado aguas arriba de la presa (contigua a las líneas equipotencial y de corriente superior del problema; Figura 5.29b); asimismo, que en su parte intermedia se genera una zona de desviaciones altas. En cuanto a la *velocidad de flujo* (Figura 5.29c), las zonas de desviaciones estándar máximas y mínimas coinciden aproximadamente con las regiones donde la esperanza de la velocidad es máxima y mínima respectivamente (Figura 5.28c).

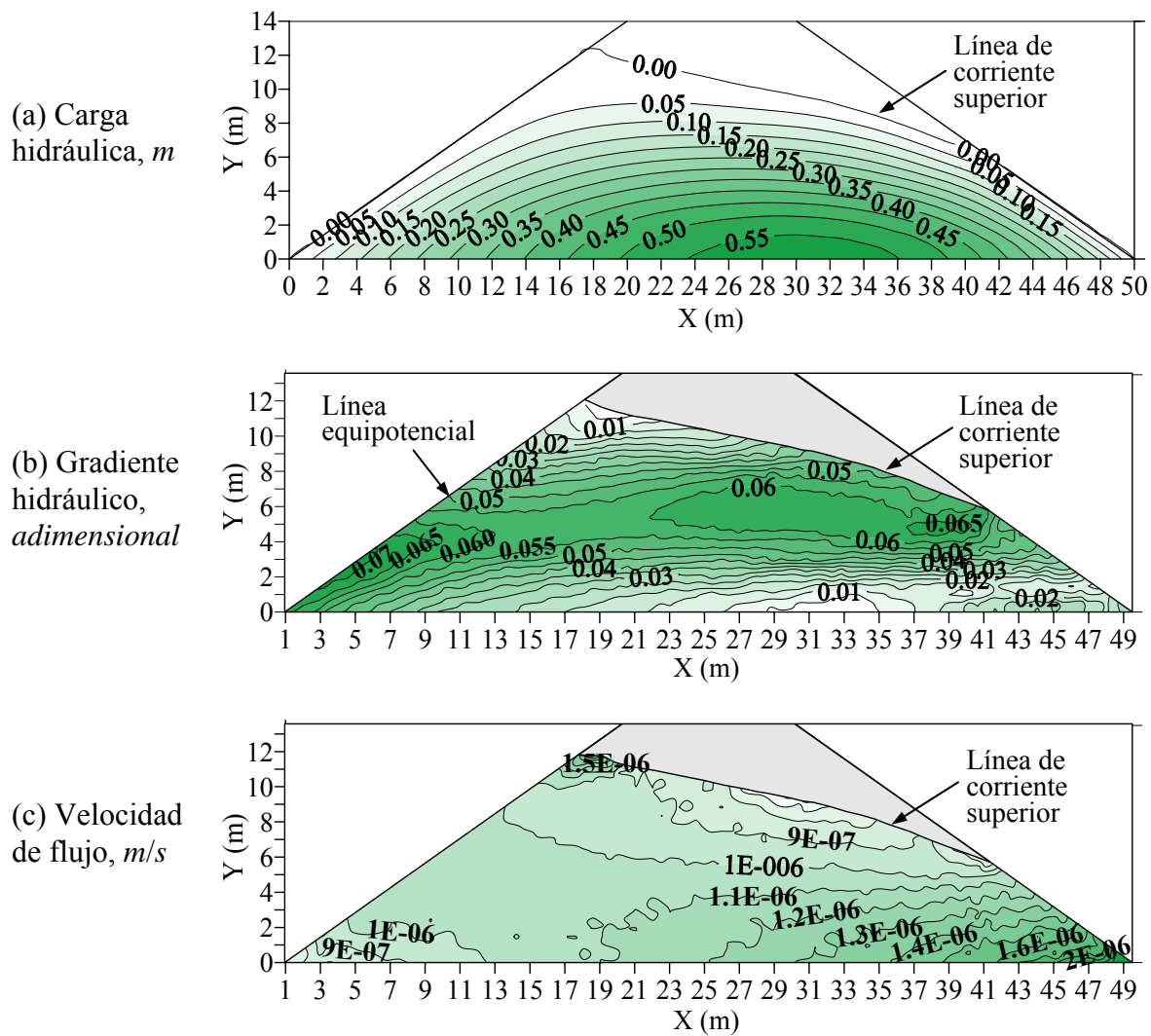


Figura 5.29 Desviación estándar en una presa de tierra (homogénea anisótropa)

### 5.2.2.5 Incertidumbre en la cubierta permeable de una presa de materiales graduados (instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo)

Se realiza el análisis estocástico de flujo de agua (no confinado bidimensional) en la cubierta permeable (Figura 5.30) de la presa de materiales graduados que se ilustra en la Figura 5.31. Se estudia el instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo (López & Auvinet, 2000; Auvinet & López, 2010; López, Auvinet & Lezama, 2010). Se considera que el material de la cubierta es homogéneo anisótropo, con los parámetros de incertidumbre en la conductividad hidráulica que se indican a continuación.

— Media o valor esperado:

$$E\{k_x\} = \mu_{k_x} = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s} \quad ; \quad E\{k_y\} = \mu_{k_y} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

— Coeficiente de variación:

$$\sigma_{k_x} / \mu_{k_x} = 0.50 \quad ; \quad \sigma_{k_y} / \mu_{k_y} = 0.50$$

— Matriz de covarianza del logaritmo decimal de la permeabilidad:

$$\begin{matrix} & \log_{10} k_x & \log_{10} k_y \\ \log_{10} k_x & \begin{bmatrix} 0.04209 & 0 \\ 0 & 0.04209 \end{bmatrix} \\ \log_{10} k_y & \end{matrix}$$

En la matriz anterior el coeficiente de correlación entre la permeabilidad horizontal y vertical es nulo,  $\rho(\log_{10} k_x, \log_{10} k_y) = 0$ , debido a la anisotropía.

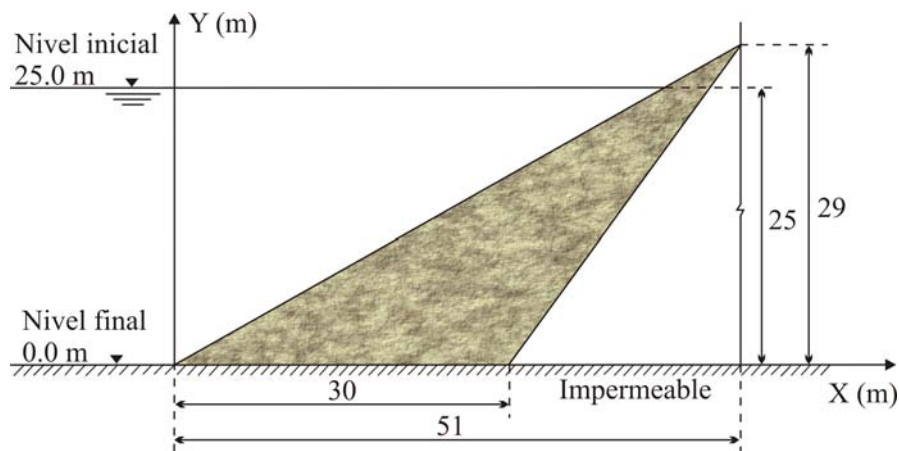


Figura 5.30 Cubierta permeable aleatoria de una presa de materiales graduados

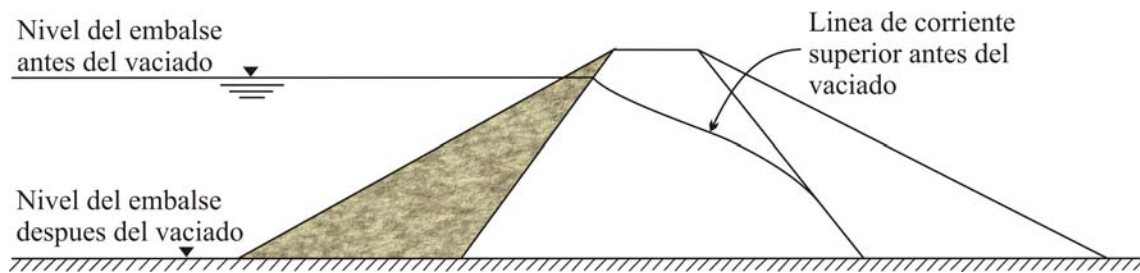
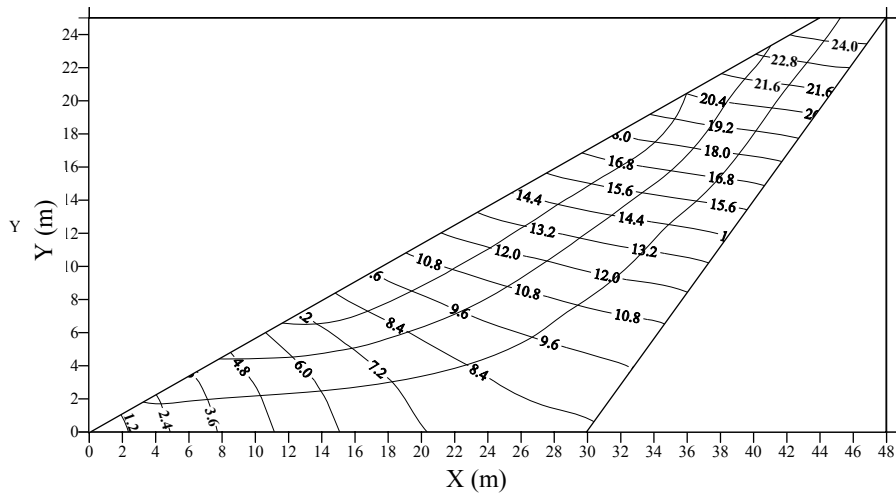


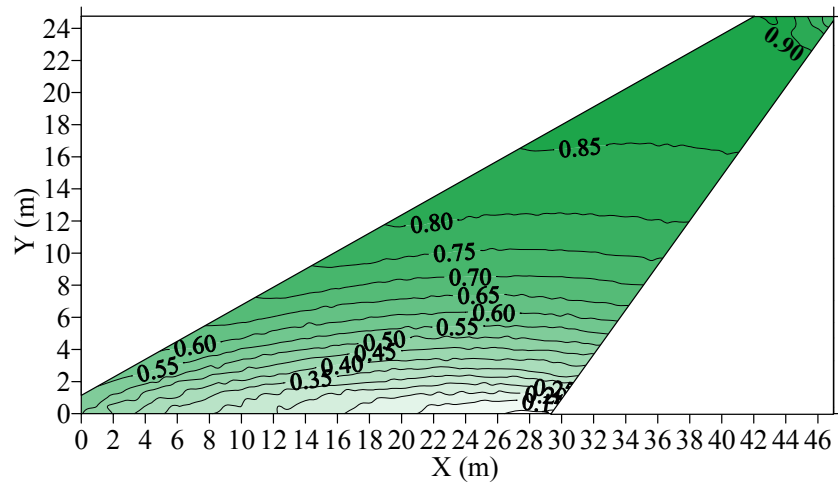
Figura 5.31 Presa de materiales graduados

La red de flujo esperada, así como las esperanzas del gradiente hidráulico y de la velocidad de flujo obtenidas en el análisis, se presentan en las Figuras 5.32a–c. En las mismas se observa que los valores esperados más altos del *gradiente hidráulico* se presentan en la parte media superior de la cubierta, y los valores más bajos ocurren en la zona cercana a la base impermeable. En cuanto a la *velocidad de flujo*, los máximos valores esperados ocurren al pie del talud de la cubierta permeable.

(a) Red de flujo esperada,  $m$



(b) Esperanza del gradiente hidráulico, *adimensional*



(c) Esperanza de la velocidad de flujo,  $m/s$

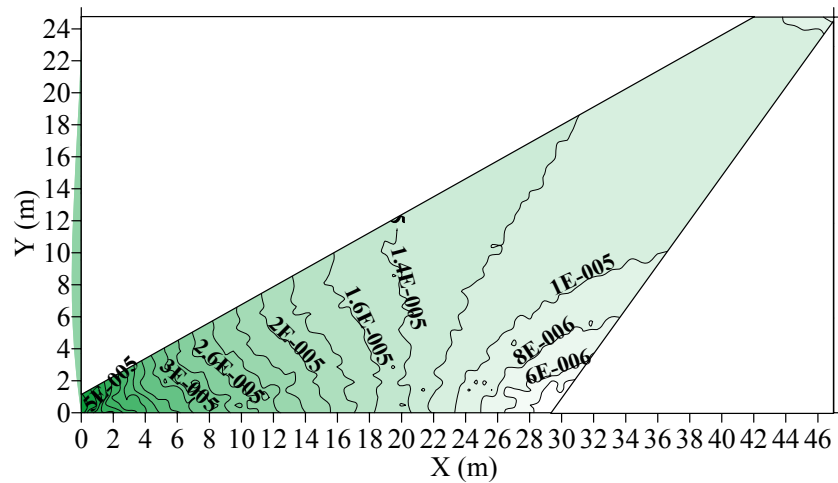


Figura 5.32 Valores esperados en la cubierta permeable de una presa de materiales graduados (instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo)

Por su parte, las desviaciones estándar de la carga, del gradiente y de la velocidad de flujo se proporcionan en las Figuras 5.33a–c. Se observa que en el caso de la *carga hidráulica*, la desviación estándar es nula en las fronteras con potencial impuesto y es máxima en la zona más alejada de dichas fronteras. En el caso del *gradiente hidráulico*, se aprecia que la desviación

estándar tiende a ser mínima en la base de la cubierta, y en su parte intermedia inferior se genera una zona de desviaciones altas. En cuanto a la *velocidad de flujo*, las desviaciones estándar máximas y mínimas coinciden aproximadamente con las regiones donde la esperanza de la velocidad es máxima y mínima, respectivamente.

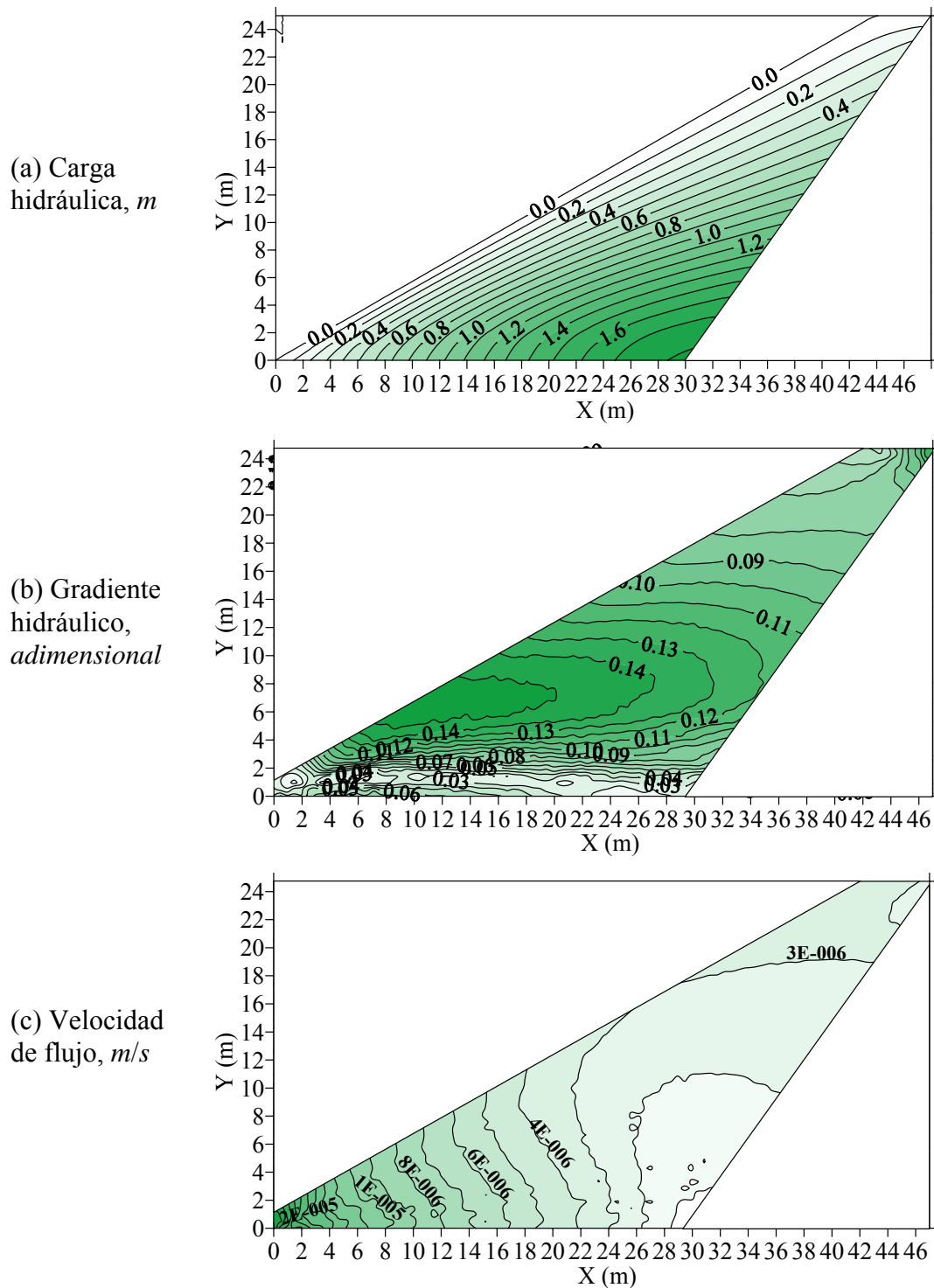


Figura 5.33 Desviación estándar en la cubierta permeable de una presa de materiales graduados (instante inmediato después de un vaciado supuesto instantáneo)



5.2.3 Comentarios finales

Se realizaron análisis numéricos estocásticos en problemas típicos de flujo confinado y no confinado de agua, unidimensionales y bidimensionales, en los que se evaluó la propagación de la incertidumbre en el logaritmo de la permeabilidad sobre el potencial hidráulico, el gradiente hidráulico y la velocidad de flujo. Los cálculos se efectuaron mediante el *método de elementos finitos (FEM)* en combinación con la técnica probabilista de *segundo orden segundos momentos (SOSM)*. El objetivo del estudio fue analizar distintas condiciones (geométricas, hidráulicas y de frontera) para un mismo problema y evaluar la distribución de las zonas de incertidumbre máximas y mínimas obtenidas en cada caso. El enfoque se puso en estudiar suelos homogéneos anisótropos y suelos heterogéneos con materiales isotropos (dos a seis materiales), y distintas consideraciones de materiales en *serie*, en *paralelo* o *inclinados* respecto a la dirección del flujo.

Como preámbulo de las conclusiones obtenidas en los análisis aquí efectuados, se debe remarcar que en el caso de los suelos homogéneos e isotropos aleatorios no existe incertidumbre ni en la carga  $h$  ni en el gradiente hidráulico  $i$ . De acuerdo con los principios básicos del flujo de agua en suelos, tanto la carga como el gradiente hidráulico no dependen de la conductividad hidráulica  $k$ , como se puede apreciar en la Figura 5.34. En efecto, en un material homogéneo e isotropo aleatorio la incertidumbre existente en la conductividad hidráulica afecta directamente solo la velocidad de flujo y el gasto (por proporcionalidad con la ley de Darcy).

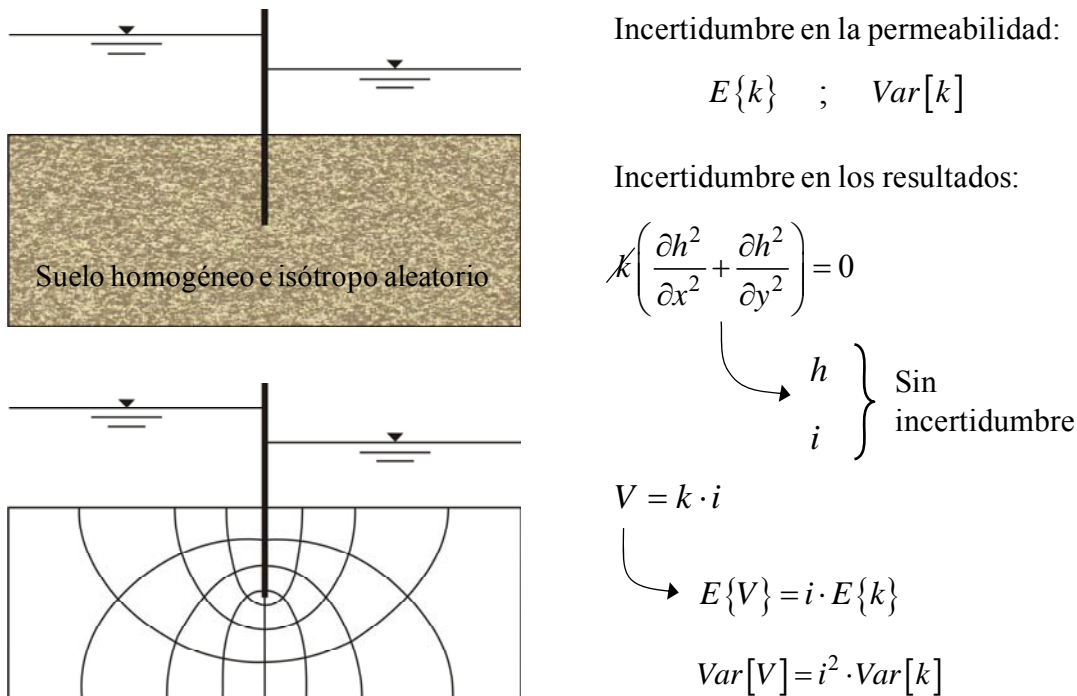


Figura 5.34 Incertidumbre en un suelo aleatorio homogéneo e isotrópico

Para el caso de los suelos homogéneos anisótropos, y suelos heterogéneos con materiales isotropos (dos a seis materiales) estudiados aquí, y con base en las configuraciones resultantes de

desviaciones estándar de cada análisis efectuado, se observó que se generan zonas características de incertidumbres máximas y mínimas que dependen de diversos factores como:

- La incertidumbre en la conductividad hidráulica de los materiales del dominio y de la anisotropía.
- El número de materiales en el dominio.
- La geometría del dominio.
- Las condiciones de frontera.
- La simetría de los subdominios del medio poroso.
- La posición de los estratos (en *serie*, en *paralelo* o inclinados) respecto a la dirección del flujo.

Por otra parte, respecto a las desviaciones estándar de los parámetros analizados en este estudio, se puede decir de manera general que:

(a) En el caso de la *carga hidráulica*:

- No existe incertidumbre en las fronteras donde la carga hidráulica ha sido impuesta.
- La incertidumbre es nula en los ejes de simetría del problema, si es que éstos existen.
- La incertidumbre tiende a ser máxima en las regiones más alejadas tanto de los ejes de simetría como de las fronteras con carga hidráulica impuesta.
- En general, se observa un efecto de *amplificación* de la incertidumbre en las fronteras de materiales contiguos que están en serie respecto a la dirección del flujo. Por el contrario, un efecto de *atenuación* se presenta en las fronteras de materiales contiguos paralelos al flujo.
- La interferencia entre distintos materiales del dominio da lugar a un *fenómeno de compensación estadística*, es decir, un efecto de promedio mediante el cual la incertidumbre en la carga hidráulica se distribuye entre los distintos materiales del medio, sobre todo si éstos se consideran independientes.
- La distribución de la incertidumbre en el medio de interés está influenciada por la posición de los estratos (en *serie*, en *paralelo* o inclinados respecto al flujo).

(b) En cuanto al *gradiente hidráulico*:

- Principalmente en problemas de flujo confinado 2D, las zonas de incertidumbres máximas y mínimas coinciden con las regiones donde se presentan los valores esperados más altos y más bajos respectivamente (*p. ej.* alrededor de la punta de una tablestaca; alrededor de las esquinas inferiores de aguas arriba y aguas abajo de un cimacio o cualquier otra estructura impermeable; etc.).

— Llama la atención que, en varios de los casos de flujo confinado 2D analizados se generan zonas imprevistas de *certidumbre*, es decir, zonas donde la incertidumbre en el gradiente hidráulico es nula. Se observó que este hecho está influenciado por la posición de los estratos en el medio analizado.

— La distribución de la incertidumbre en el medio de interés está afectada por la posición de los estratos (en *serie*, en *paralelo* o inclinados respecto al flujo).

(c) Con respecto a la *velocidad de flujo*:

— Principalmente en problemas de flujo confinado 2D, la incertidumbre tiende a ser máxima en aquellas zonas donde ocurren los máximos valores esperados de la velocidad (*p. ej.* alrededor de la punta de una tablestaca; alrededor de las esquinas inferiores de aguas arriba y aguas abajo de un cimacio o cualquier otra estructura impermeable; etc.). Correspondientemente, la menor incertidumbre tiende a presentarse en zonas de valores esperados pequeños de la velocidad.

— La distribución de la incertidumbre en el medio de interés no depende de la posición de los estratos (en *serie*, en *paralelo* o inclinados respecto al flujo), sino que está influenciada mayormente por la magnitud de la incertidumbre en la conductividad hidráulica de los materiales del dominio.

### 5.3 Solución de un problema inverso de flujo establecido de agua en una presa de tierra y enrocamiento, utilizando un enfoque bayesiano

#### 5.3.1 Introducción

El énfasis de este problema se pone en la aplicación del *teorema de Bayes* al estudio del comportamiento de los materiales que constituyen una presa de tierra y enrocamiento. Lo que se pretende específicamente es, mediante la solución de un problema inverso de flujo establecido de agua, obtener las conductividades hidráulicas *a posteriori* de algunos de los materiales constitutivos de una presa, cuando de ella se conocen *a priori* los gastos que la atraviesan (López & Auvinet, 2006). Un análisis de este tipo también podría realizarse, si en vez de conocer los gastos, se conocieran los potenciales hidráulicos a partir de mediciones piezométricas, por ejemplo.

El análisis bayesiano que aquí se presenta, se lleva a cabo haciendo variar inicialmente las conductividades hidráulicas (consideradas como variables aleatorias) de algunos materiales de interés de una presa en un determinado intervalo de diversos órdenes de magnitud, a los cuales se les asignan ciertas probabilidades *a priori*, impuestas a juicio subjetivo. Se tienen de esta manera diversas permeabilidades para cada material estudiado, con las cuales se pueden establecer distintas combinaciones, y para cada una de ellas calcular numéricamente el gasto correspondiente que atraviesa la presa mediante el método de elementos finitos. Con estos gastos de infiltración es posible resolver el problema inverso, es decir, determinar a partir de ellos cuáles son las permeabilidades *a posteriori* de los materiales de interés de la presa. El teorema puede servir entonces para indicar cómo deben modificarse las probabilidades subjetivas cuando se recibe información adicional después de haber realizado un experimento (en este caso, el análisis con elementos finitos).

Si en este tipo de análisis el enfoque se dirige al estudio del comportamiento de aquellos materiales que ayudan a controlar el flujo del agua a través del cuerpo y la cimentación de una presa, uno de los beneficios del método estriba en que al resolver el problema inverso podría determinarse cuál es la contribución de estos materiales al sistema de control del flujo de agua de la presa.

En lo que sigue se describe la metodología propuesta para llevar a cabo este tipo de análisis. Se presenta en particular la aplicación del enfoque bayesiano al comportamiento de tres de los materiales que constituyen la presa Agly en Perpignan, Francia. Al final se proporcionan conclusiones respecto a la utilidad de la técnica expuesta.

#### 5.3.2 Características generales de la presa

Se trata de una presa de tierra y enrocamiento localizada sobre el río Agly, a 30 km al este de la ciudad de Perpignan, en Francia (Soletanche Bachy, 1999). Algunos de los objetivos de la construcción de esta presa fueron: controlar inundaciones, almacenar agua en verano, regular el nivel del río y generar electricidad.

La presa tiene una altura de 60 m y una longitud de 250 m, constituyendo un volumen total de un millón de metros cúbicos. Algunas fotografías de la misma se pueden apreciar en la Figura 5.35.



Figura 5.35 Fotografías de la presa Agly (Soletanche Bachy, 1999)

El enrocamiento de la presa está formado por gneis<sup>(5.4)</sup>, producto de las excavaciones para el vertedor; la cimentación está constituida por gneis intemperizada, bastante fracturada a profundidad, en la cual se controla el flujo de agua hasta una profundidad de 50 m por medio de cinco filas de cortinas de inyección (Figuras 5.36 y 5.37). La característica principal del proyecto de esta presa es el diseño del sistema de control de flujo. Otra particularidad de la misma es que su núcleo no está construido como es usual, por arcilla (los depósitos arcillosos cerca del sitio no eran los adecuados para esta estructura), sino que está constituido por un seudo corazón semipermeable de gneis intemperizada (mismo material de la cimentación) dentro del cual existe un muro diafragma de concreto (que se construyó cuando la presa había aumentado a 4 m de la altura de diseño) de 1 m de espesor y empotrado hasta 5 m en la roca de cimentación, y que se extiende hacia abajo por medio de una cortina de inyecciones, como se ilustra en la Figura 5.37.

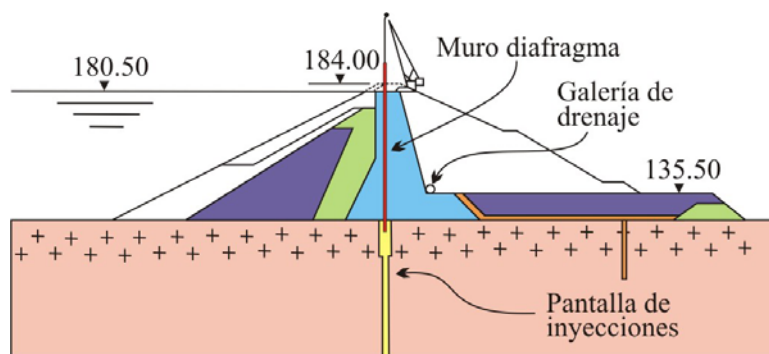


Figura 5.36 Sección transversal de la presa Agly (Soletanche Bachy, 1999)

<sup>(5.4)</sup> Roca metamórfica de grano grueso, compuesta por los mismos minerales que el granito (cuarzo, feldespato y mica). Su estructura se presenta en capas alternas de minerales claros y oscuros. Su orientación está definida en bandas.

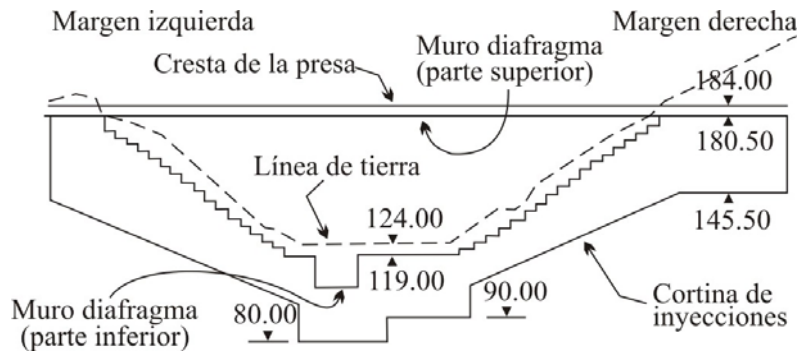


Figura 5.37 Sección longitudinal de la presa Agly (Soletanche Bachy, 1999)

La presa consta de los ocho materiales que se indican en la Figura 5.38; en la misma se pueden apreciar también los valores de sus conductividades hidráulicas (indicadas de igual manera en la Tabla 5.3) (Soletanche Bachy, 1999).

Tabla 5.3 Descripción y conductividades hidráulicas de los materiales de la presa Agly

Material	Descripción	$k$ (m/s)
1	Enrocamiento grueso	$5 \times 10^{-4}$
2	Enrocamiento fino	$2.75 \times 10^{-5}$
3	Seudo corazón de gneis	$2.75 \times 10^{-6}$
4	Muro diafragma de concreto	$5 \times 10^{-8}$
5	Filtro	$1 \times 10^{-4}$
6	Gneis	$1 \times 10^{-6}$
7	Pantalla de inyecciones	$2 \times 10^{-7}$
8	Cama de roca	$1 \times 10^{-7}$

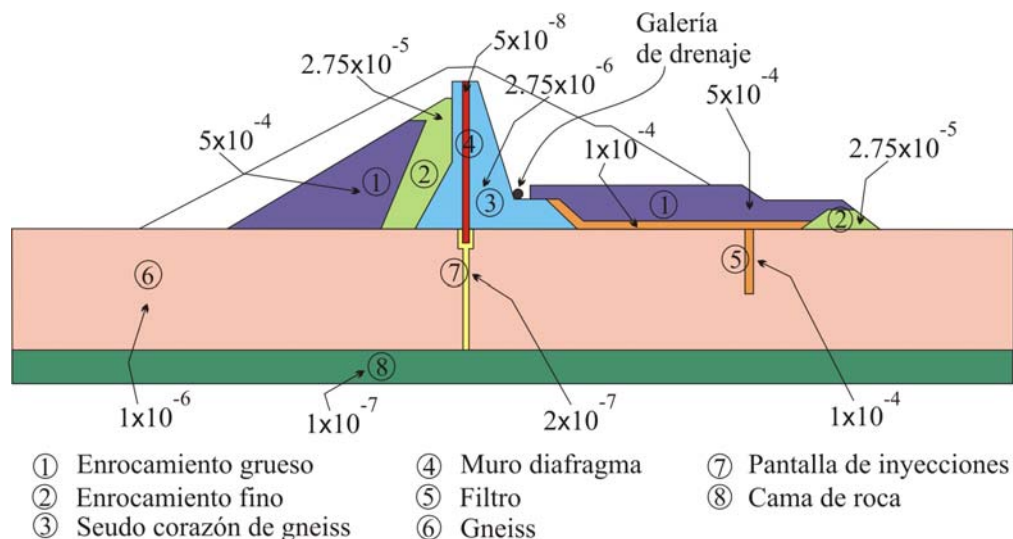


Figura 5.38 Permeabilidades de los materiales constitutivos de la presa Agly (m/s)

### 5.3.3 Análisis determinista convencional

El análisis determinista del flujo de agua a través de la cimentación y el cuerpo de la presa Agly, se realiza numéricamente mediante el método de elementos finitos con ayuda del algoritmo FLOWNETS (López, 2000). Los fundamentos teóricos del programa se explican con detalle en el ANEXO III. La presa y el suelo de cimentación se modelan con la malla de 1540 elementos finitos y 854 nodos que se muestra en la Figura 5.39. Se considera una pérdida de carga hidráulica  $\Delta h = 45$  m entre las zonas de aguas arriba y aguas abajo de la presa, de acuerdo con los niveles de agua que se indican en la Figura 5.36.

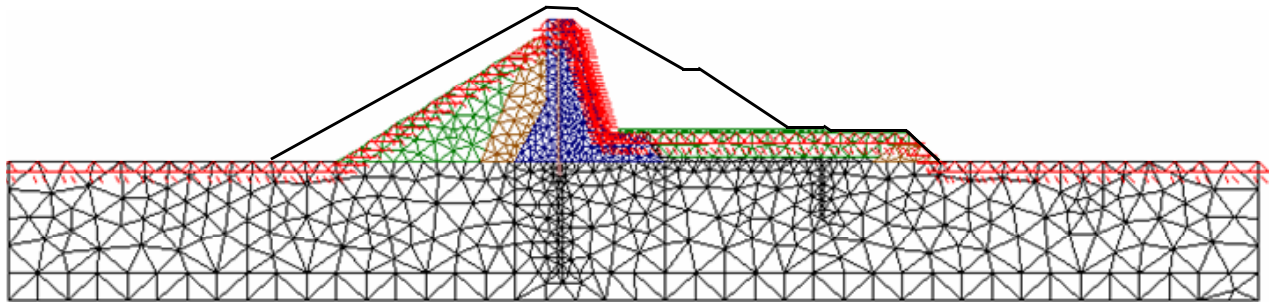


Figura 5.39 Malla de elementos finitos

A partir de este análisis se obtienen las *líneas equipotenciales* que se ilustran en la Figura 5.40. En la misma se observa que las equipotenciales se agrupan mayormente cerca del eje vertical donde se localiza el muro diafragma y la pantalla impermeable. Lo anterior ocasiona que precisamente a lo largo de dicho eje se presenten los máximos valores del *gradiente hidráulico*:  $i_{m\acute{a}x} \approx 1$  a 3; de igual manera en la zona de la galería de drenaje se presentan gradientes hidráulicos altos con valores aproximados de  $i \approx 1$  (Figura 5.41). Por otra parte, la *velocidad de flujo* máxima,  $V_{m\acute{a}x} \approx 3.8 \times 10^{-6}$  m/s, ocurre en la zona que desemboca en la galería de drenaje (Figura 5.42). Debido a los resultados anteriores, el análisis bayesiano que se presenta a continuación concentra su atención en la galería de drenaje y sus zonas aledañas.

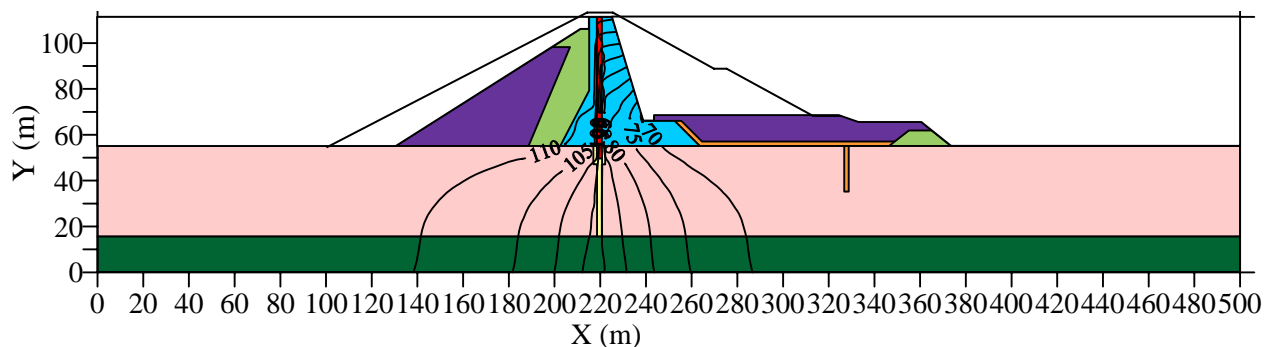


Figura 5.40 Curvas de isovalores de la carga hidráulica (m)

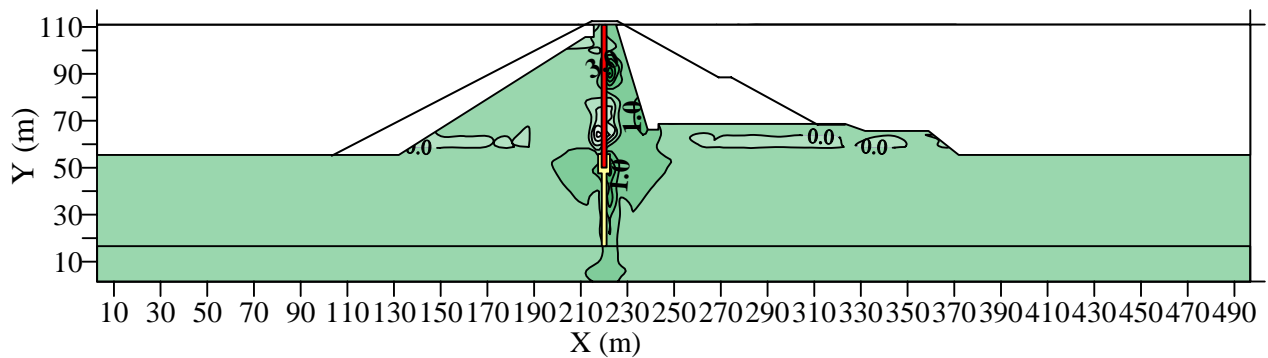


Figura 5.41 Variación de la magnitud del gradiente hidráulico (adimensional)

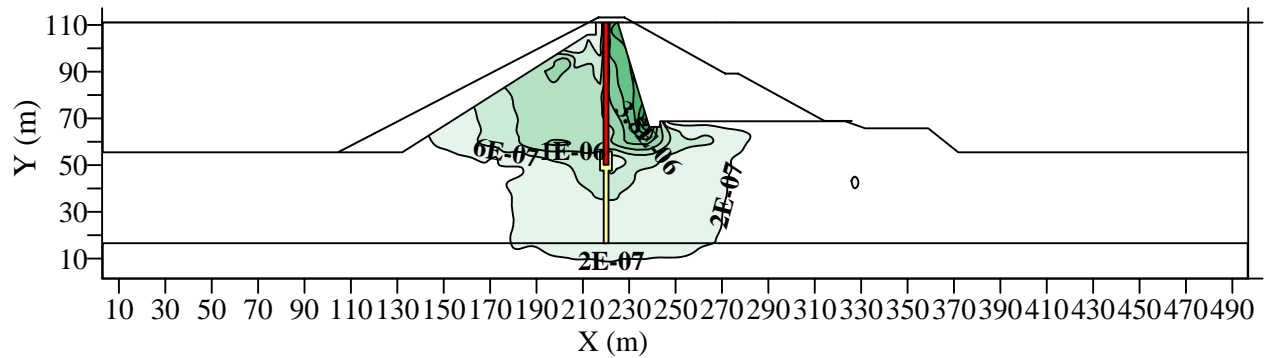


Figura 5.42 Variación de la magnitud de la velocidad de flujo (m/s)

### 5.3.4 Análisis bayesiano

El teorema de *Bayes* mediante el cual se determina la probabilidad de obtener una permeabilidad  $k_i$  (probabilidad *a posteriori* buscada) dado un gasto  $Q$ , está dado por:

$$P[k_i|Q] = \frac{P[Q|k_i] \cdot P[k_i]}{\sum_{j=1}^n P[Q|k_j] \cdot P[k_j]} \quad (5.48)$$

De acuerdo con la expresión anterior, la información requerida para llevar a cabo el análisis bayesiano son las probabilidades *a priori* (o *marginales*)  $P[k_i]$ , y las *probabilidades condicionales*  $P[Q|k_i]$  (de obtener el gasto  $Q$  dada la permeabilidad  $k_i$ ), mismas que se determinan con:

$$P[Q|k_i] = \frac{P[Q \cap k_i]}{P[k_i]} \quad (5.49)$$

Donde  $P[k_i]$  son las *probabilidades marginales* mencionadas antes y  $P[Q \cap k_i]$  son las *probabilidades conjuntas*.



En lo que sigue, la intención es entonces determinar por medio del teorema de *Bayes* cuál es la contribución del seudo corazón de gneis, del muro diafragma y de la pantalla de inyecciones (materiales 3, 4 y 7 respectivamente, de la Tabla 5.3) al sistema del control del flujo de agua a través del cuerpo de la presa Agly y de su cimentación. Con este fin, se asume inicialmente que la conductividad hidráulica de los materiales de estas tres estructuras varía en cierto orden de magnitud de acuerdo con determinadas probabilidades *a priori* (probabilidades marginales), establecidas de manera subjetiva según se muestra en las Figuras 5.43 a 5.45.

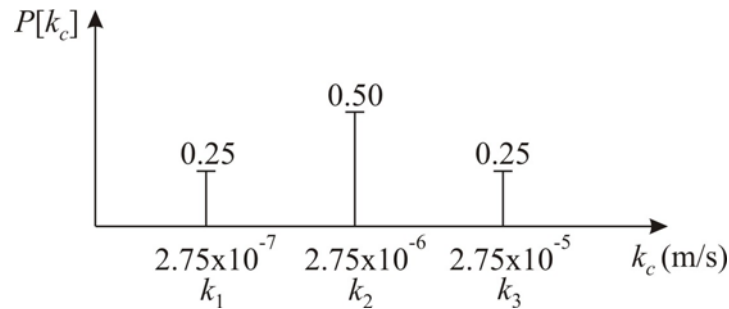


Figura 5.43 Probabilidades *a priori* de la permeabilidad  $k_c$  del seudo corazón de gneis

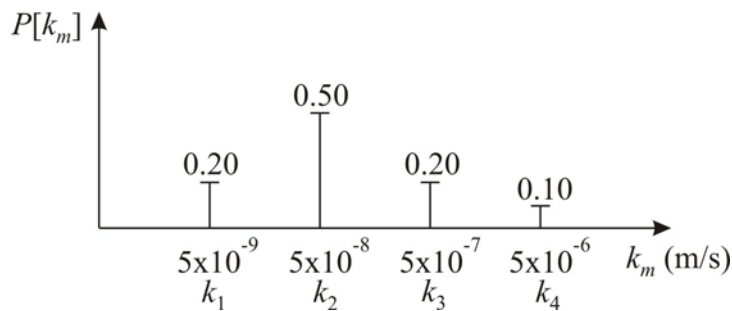


Figura 5.44 Probabilidades *a priori* de la permeabilidad  $k_m$  del muro diafragma

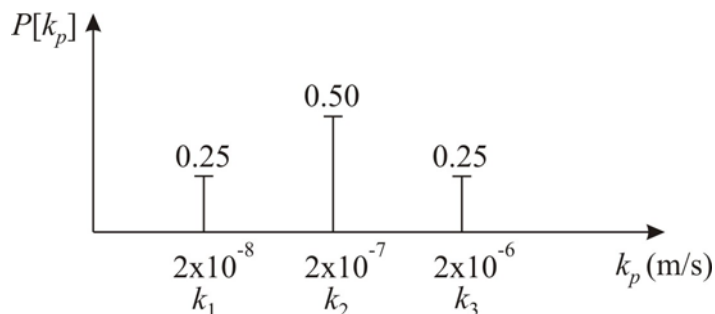


Figura 5.45 Probabilidades *a priori* de la permeabilidad  $k_p$  de la pantalla de inyecciones

De acuerdo con la variación de las conductividades hidráulicas de las figuras anteriores, es posible establecer 36 combinaciones diferentes (que se dan en la Tabla 5.4) para las permeabilidades del seudo corazón de gneis, del muro diafragma y de la pantalla de inyecciones. Con cada una de estas combinaciones de permeabilidades y respetando las permeabilidades de los cinco materiales restantes de la presa (dadas en la Tabla 5.3), se calcula el gasto total que llega a la galería de drenaje mediante el algoritmo FLOWNETS. Este algoritmo permite determinar la descarga que sale por el lado del elemento finito opuesto al nodo de interés (ver ANEXO III). Así, para determinar el gasto que llega a la galería de drenaje, éste se calcula sumando el gasto individual de los elementos finitos ubicados en la pendiente aguas abajo del seudo corazón de gneis (Figura 5.46), más el de los elementos que se localizan alrededor de la propia galería de drenaje (Figura 5.47).

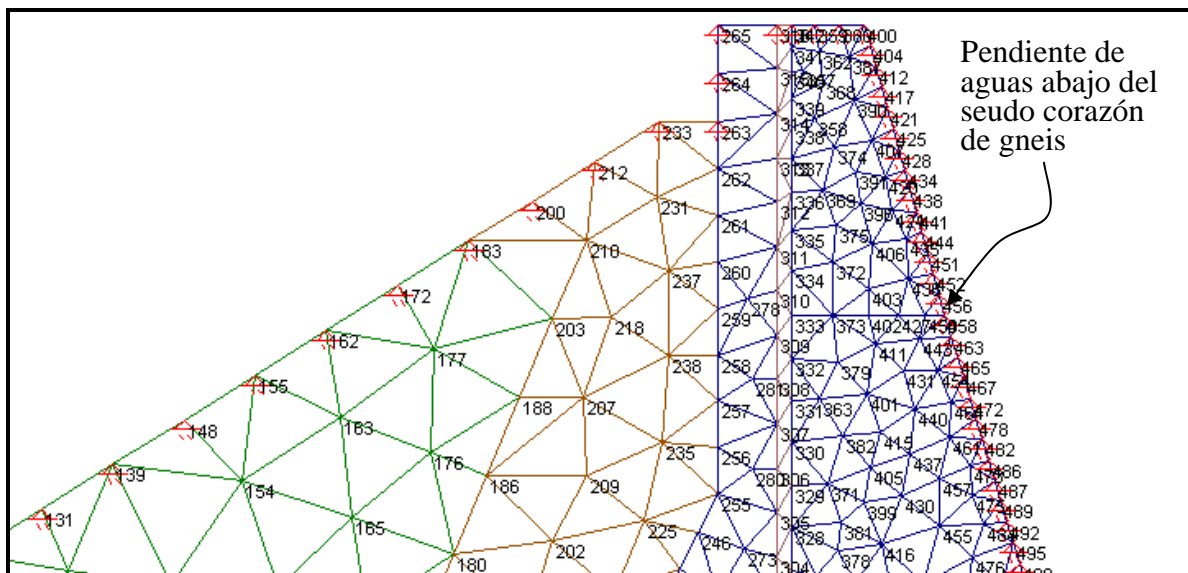


Figura 5.46 Numeración de nodos de los elementos a lo largo de la pendiente de aguas abajo del seudo corazón de gneis

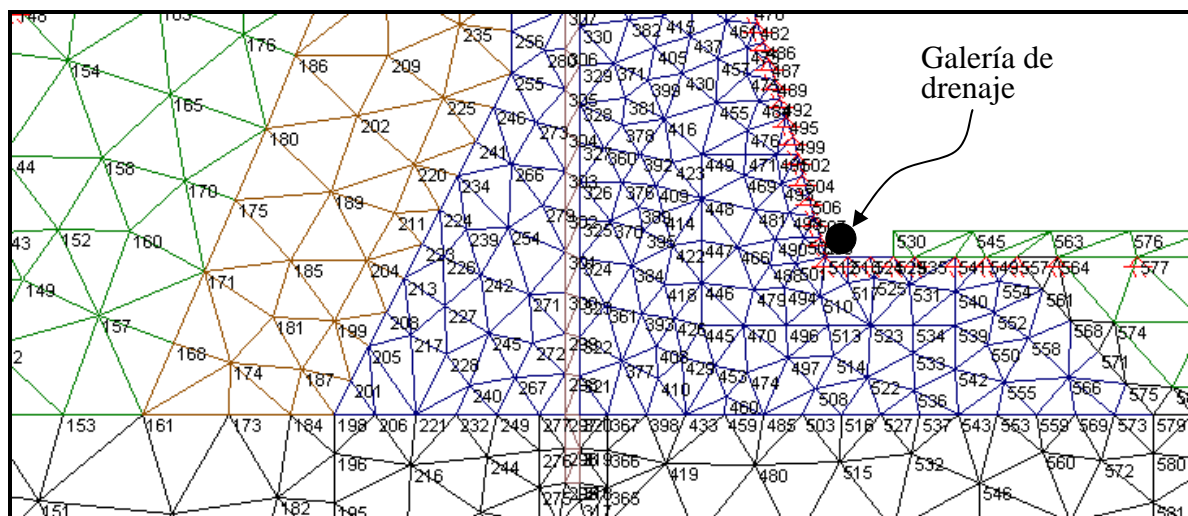


Figura 5.47 Numeración de nodos de los elementos alrededor de la galería de drenaje

El resumen de los gastos calculados para cada combinación de permeabilidades se presenta en la Tabla 5.4. En la misma también se indican las probabilidades marginales de cada valor de la permeabilidad (probabilidades *a priori* propuestas de manera subjetiva al inicio de este inciso) y sus correspondientes probabilidades conjuntas, las cuales se calculan multiplicando las probabilidades *a priori* de la combinación de permeabilidades correspondiente (son las intersecciones de las probabilidades de las permeabilidades señaladas en la Figura 5.48).

Tabla 5.4 Combinación de permeabilidades, gastos calculados y probabilidades *a priori* y conjuntas para el análisis bayesiano de la presa Agly

Grupo	N°	Combinación de permeabilidades (m/s)			Gasto en la galería $Q$ (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidad <i>a priori</i>			Probabilidad conjunta $P[Q \cap k_i]$ (*)
		$k_c$	$k_m$	$k_p$		$P[k_c]$	$P[k_m]$	$P[k_p]$	
1	1	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$7.15 \times 10^{-06}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	2	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$1.39 \times 10^{-05}$	0.25	0.50	0.25	0.03125
	3	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$1.69 \times 10^{-05}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	4	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$1.75 \times 10^{-05}$	0.25	0.10	0.25	0.00625
	5	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$7.99 \times 10^{-06}$	0.25	0.20	0.50	0.025
	6	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$1.45 \times 10^{-05}$	0.25	0.50	0.50	0.0625
	7	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$1.74 \times 10^{-05}$	0.25	0.20	0.50	0.025
	8	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$1.80 \times 10^{-05}$	0.25	0.10	0.50	0.0125
	9	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$8.51 \times 10^{-06}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	10	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.48 \times 10^{-05}$	0.25	0.50	0.25	0.03125
	11	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.76 \times 10^{-05}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	12	$2.75 \times 10^{-07}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.82 \times 10^{-05}$	0.25	0.10	0.25	0.00625
2	13	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$4.52 \times 10^{-05}$	0.50	0.20	0.25	0.025
	14	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$7.07 \times 10^{-05}$	0.50	0.50	0.25	0.0625
	17	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$4.72 \times 10^{-05}$	0.50	0.20	0.50	0.05
	18	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$7.29 \times 10^{-05}$	0.50	0.50	0.50	0.125
	22	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$7.51 \times 10^{-05}$	0.50	0.50	0.25	0.0625
3	15	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$1.37 \times 10^{-04}$	0.50	0.20	0.25	0.025
	16	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$1.64 \times 10^{-04}$	0.50	0.10	0.25	0.0125
	19	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$1.38 \times 10^{-04}$	0.50	0.20	0.50	0.05
	20	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$1.65 \times 10^{-04}$	0.50	0.10	0.50	0.025
	21	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.38 \times 10^{-04}$	0.50	0.20	0.25	0.025
	23	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.39 \times 10^{-04}$	0.50	0.20	0.25	0.025
	24	$2.75 \times 10^{-06}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.65 \times 10^{-04}$	0.50	0.10	0.25	0.0125
4	25	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$4.20 \times 10^{-04}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	26	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$4.48 \times 10^{-04}$	0.25	0.50	0.25	0.03125
	29	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$4.22 \times 10^{-04}$	0.25	0.20	0.50	0.025
	30	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$4.51 \times 10^{-04}$	0.25	0.50	0.50	0.0625
	33	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-09}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$4.26 \times 10^{-04}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	34	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-08}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$4.55 \times 10^{-04}$	0.25	0.50	0.25	0.03125
5	27	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$6.69 \times 10^{-04}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
	31	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$6.72 \times 10^{-04}$	0.25	0.20	0.50	0.025
	35	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-07}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$6.75 \times 10^{-04}$	0.25	0.20	0.25	0.0125
6	28	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-08}$	$1.08 \times 10^{-03}$	0.25	0.10	0.25	0.00625
	32	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-07}$	$1.09 \times 10^{-03}$	0.25	0.10	0.50	0.0125
	36	$2.75 \times 10^{-05}$	$5.00 \times 10^{-06}$	$2.00 \times 10^{-06}$	$1.09 \times 10^{-03}$	0.25	0.10	0.25	0.00625

$c$ =seudo corazón de gneis;  $m$ =muro diafragma;  $p$ =pantalla de inyecciones

(\*)  $k_i$  se refiere a las permeabilidades  $k_c$ ,  $k_m$  y  $k_p$ .



Tabla 5.5 Agrupación de gastos para el análisis bayesiano

Grupo	Gasto (m <sup>3</sup> /s)	Denominación
1	$Q_1=1.44 \times 10^{-5}$	Bajo
2	$Q_2=6.22 \times 10^{-5}$	Bajo
3	$Q_3=1.49 \times 10^{-4}$	Intermedio
4	$Q_4=4.37 \times 10^{-4}$	Intermedio
5	$Q_5=6.72 \times 10^{-4}$	Alto
6	$Q_6=1.09 \times 10^{-3}$	Alto

Adicionalmente, las probabilidades condicionales  $P[Q|k_i]$  (de obtener el gasto  $Q$  dada la permeabilidad  $k_i$ ), se determinan con la expresión (5.49) para los grupos de gastos anteriores ( $Q_1$  a  $Q_6$ ) y considerando las probabilidades marginales y conjuntas indicadas en la Tabla 5.4. Las probabilidades así calculadas se proporcionan en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6 Probabilidades condicionales  $P[Q|k_i]$  para la aplicación del teorema de Bayes

Estructura	Probabilidad condicional <sup>(*)</sup>	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$
Muro diafragma	$P_m[Q_i k_1]$	0.25	0.375	0.125	0.25	0	0
	$P_m[Q_i k_2]$	0.25	0.5	0	0.25	0	0
	$P_m[Q_i k_3]$	0.25	0	0.5	0	0.25	0
	$P_m[Q_i k_4]$	0.25	0	0.5	0	0	0.25
Pantalla de inyecciones	$P_p[Q_i k_1]$	0.25	0.35	0.15	0.175	0.05	0.025
	$P_p[Q_i k_2]$	0.25	0.35	0.15	0.175	0.05	0.025
	$P_p[Q_i k_3]$	0.25	0.25	0.25	0.175	0.05	0.025
Seudo corazón de gneis	$P_c[Q_i k_1]$	1	0	0	0	0	0
	$P_c[Q_i k_2]$	0	0.65	0.35	0	0	0
	$P_c[Q_i k_3]$	0	0	0	0.7	0.2	0.1

<sup>(\*)</sup>  $k_1, k_2, k_3, k_4$  son las permeabilidades que se indican en las Figuras 5.43 a 5.45, referidas al  $m$ =muro diafragma, a la  $p$ =pantalla de inyecciones y al  $c$ =seudo corazón de gneis, respectivamente.

Finalmente, al sustituir la información correspondiente en el teorema de Bayes (ecuación 5.48), es posible determinar la probabilidad *a posteriori* de la permeabilidad de interés  $P[k_i|Q]$  correspondiente a cada grupo de gasto estudiado ( $Q_1$  a  $Q_6$ ). Estos resultados se presentan en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7 Probabilidades *a posteriori*  $P[k_i|Q]$  obtenidas con el teorema de Bayes

Estructura	Probabilidad <i>a posteriori</i> <sup>(*)</sup>	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$
Muro diafragma	$P_m[k_1 Q_i]$	0.2	0.23	0.14	0.29	0	0
	$P_m[k_2 Q_i]$	0.5	0.77	0	0.71	0	0
	$P_m[k_3 Q_i]$	0.2	0	0.57	0	1	0
	$P_m[k_4 Q_i]$	0.1	0	0.29	0	0	1
Pantalla de inyecciones	$P_p[k_1 Q_i]$	0.25	0.27	0.21	0.25	0.25	0.25
	$P_p[k_2 Q_i]$	0.50	0.54	0.43	0.50	0.50	0.50
	$P_p[k_3 Q_i]$	0.25	0.19	0.36	0.25	0.25	0.25
Seudo corazón de gneis	$P_c[k_1 Q_i]$	1	0	0	0	0	0
	$P_c[k_2 Q_i]$	0	1	1	0	0	0
	$P_c[k_3 Q_i]$	0	0	0	1	1	1

<sup>(\*)</sup>  $k_1, k_2, k_3, k_4$  son las permeabilidades que se indican en las Figuras 5.43 a 5.45, referidas al  $m$ =muro diafragma, a la  $p$ =pantalla de inyecciones y a la  $c$ =seudo corazón de gneis, respectivamente.

La comparación gráfica entre las probabilidades supuestas *a priori* y las probabilidades *a posteriori* obtenidas con el teorema de Bayes, se presenta en las Figuras 5.50 a 5.52, correspondientes a las permeabilidades de los tres materiales estudiados y referidas a los grupos de gastos analizados.

En la Figura 5.50, correspondiente al caso del muro diafragma, se observa que la probabilidad *a posteriori* de obtener una permeabilidad “alta” dado un gasto “bajo” es baja o nula; que la probabilidad *a posteriori* de obtener una permeabilidad “intermedia” dado un gasto “intermedio” es alta; y que la probabilidad *a posteriori* de obtener una permeabilidad “alta” dado un gasto “alto” es alta (uno). En este último caso, para un gasto alto la obtención de una permeabilidad alta no indica necesariamente que el muro sea deficiente.

En cuanto a la pantalla de inyecciones (Figura 5.51), se aprecia que en general las probabilidades *a posteriori* no se modifican, o bien, permanecen prácticamente iguales a las probabilidades *a priori* supuestas inicialmente (Figura 5.45). Esto sugiere que la magnitud del gasto en la galería de drenaje no depende del comportamiento de la pantalla. No dice nada de su calidad. Es decir, que la pantalla no contribuye en realidad al sistema del control del flujo de agua de la presa.

Finalmente, en el caso del seudo corazón de gneis (Figura 5.52), se observa que la probabilidad de obtener una permeabilidad “baja” dado un gasto “bajo” es alta (uno); la probabilidad de obtener una permeabilidad “intermedia” dado un gasto “intermedio” es alta (uno); y la probabilidad de obtener una permeabilidad “alta” dado un gasto “alto” es alta (uno). Nuevamente, al igual que para el caso del muro diafragma, la obtención de probabilidades “altas” no indica necesariamente que el seudo corazón de gneis sea deficiente.

Con base en los resultados anteriores, puede concluirse que el gasto que llega a la galería de drenaje de la presa (ver Figura 5.36 ó 5.47) depende tanto del comportamiento del seudo corazón de gneis como del muro diafragma, no así de la pantalla de inyecciones.

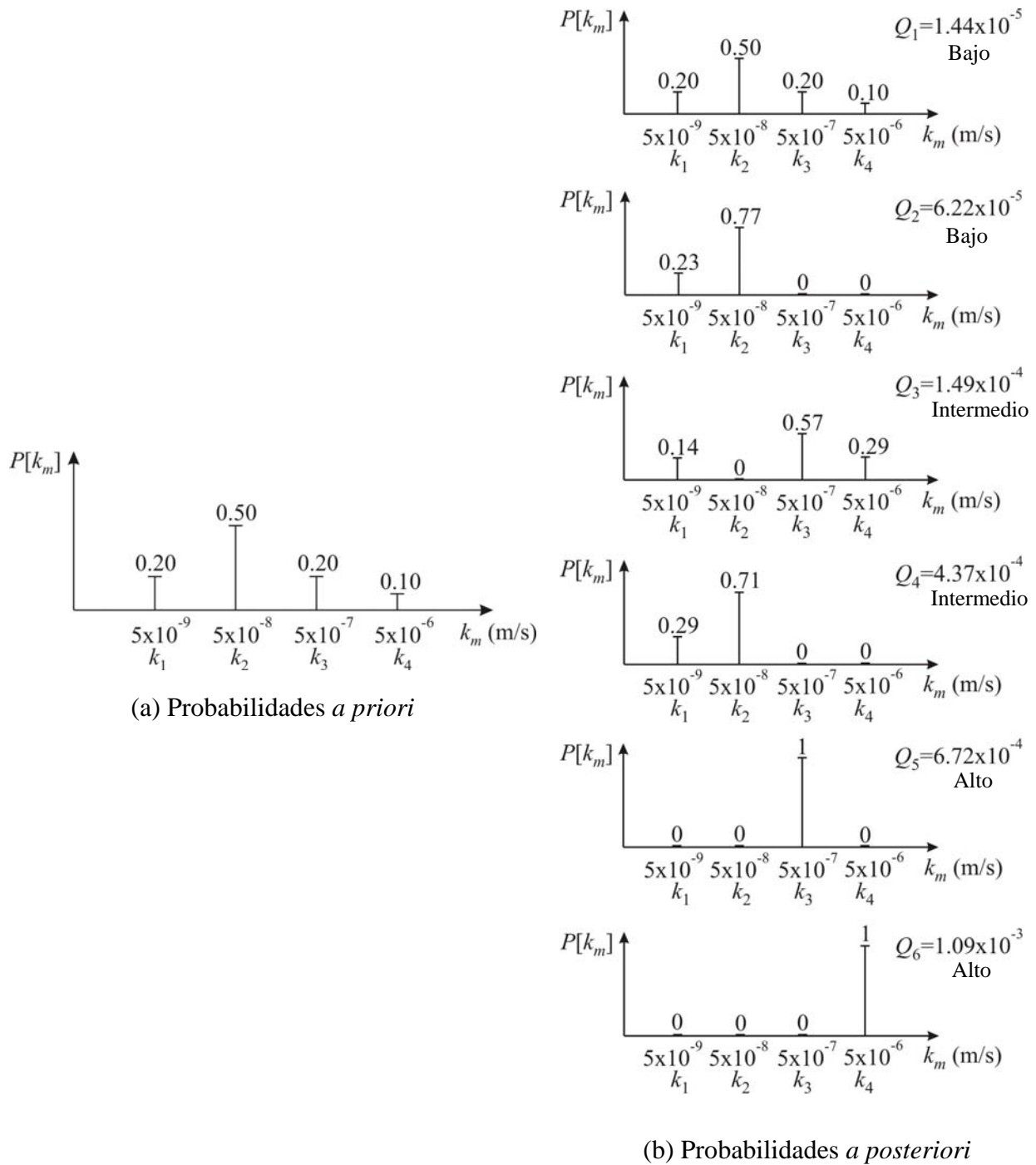


Figura 5.50 Probabilidades supuestas (*a priori*) y calculadas (*a posteriori*) de la permeabilidad del muro diafragma para los grupos de gastos estudiados ( $Q_1$  a  $Q_6$ )

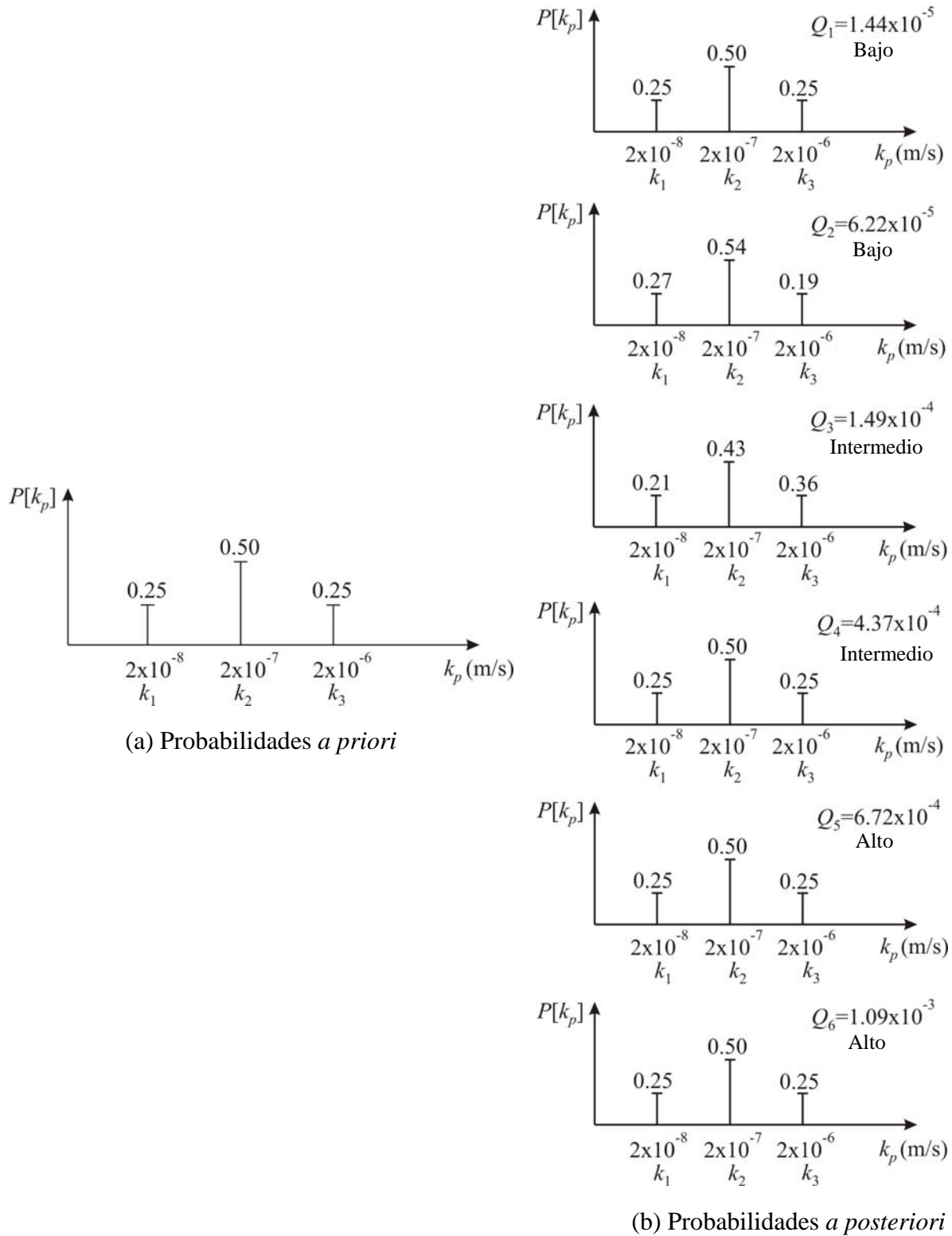


Figura 5.51 Probabilidades supuestas (*a priori*) y calculadas (*a posteriori*) de la permeabilidad de la pantalla de inyecciones para los grupos de gastos estudiados ( $Q_1$  a  $Q_6$ )



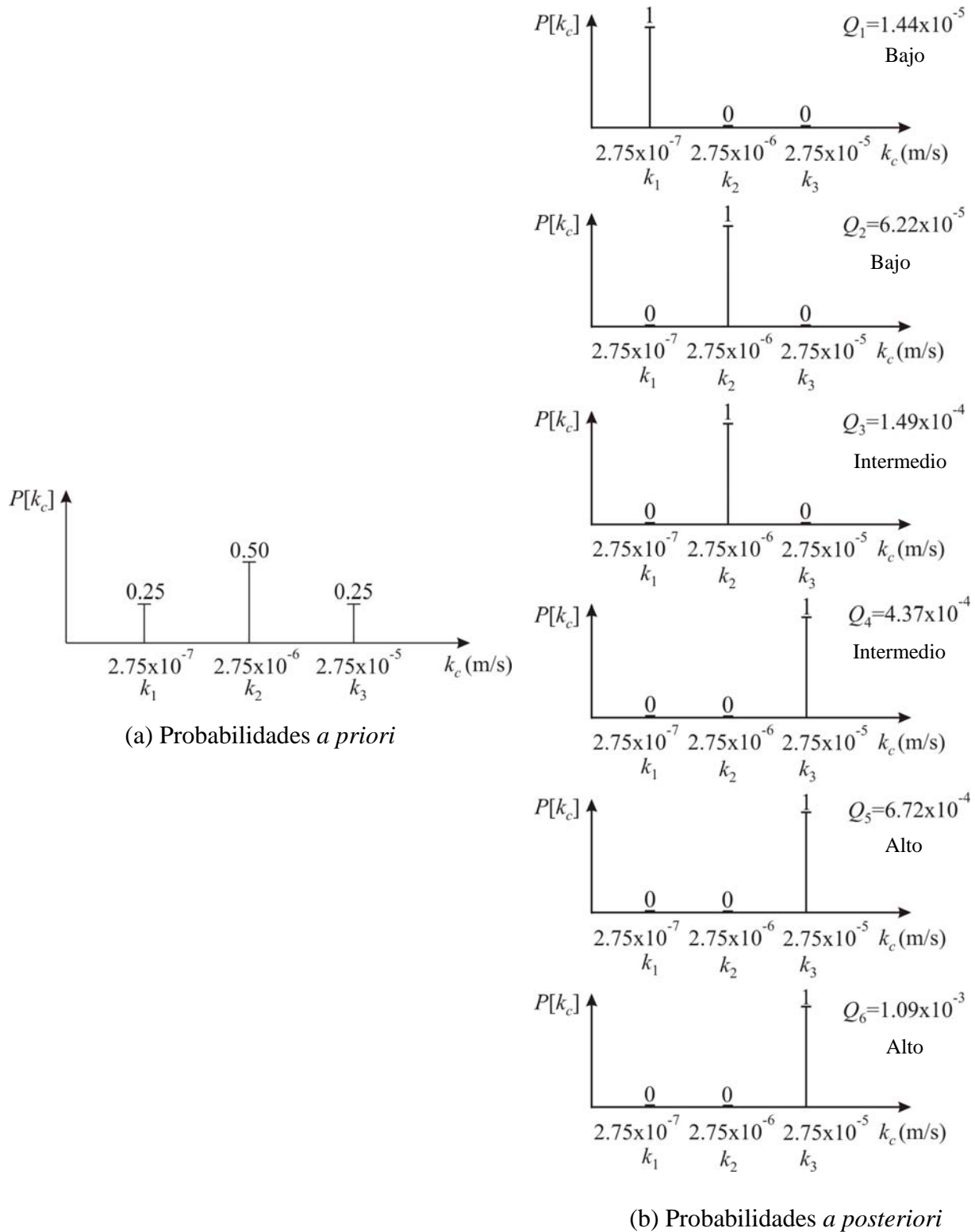


Figura 5.52 Probabilidades supuestas (*a priori*) y calculadas (*a posteriori*) de la permeabilidad del seudo corazón de gneis para los grupos de gastos estudiados ( $Q_1$  a  $Q_6$ )

### 5.3.5 Comentarios finales

El *teorema de Bayes* describe las alternativas para calcular la probabilidad de que sucedan eventos, empleando la probabilidad condicional. El teorema permite alcanzar un juicio racional a partir de datos poco confiables o incompletos, que a menudo constituyen la única información disponible cuando se resuelven problemas de ingeniería. El permitir alcanzar juicios racionales en función de la evidencia es lo que convierte al enfoque bayesiano en una herramienta útil en la solución de un problema inverso de flujo de agua a través de suelos.

Una de las ventajas al realizar un análisis de este tipo antes de la construcción de una presa, consiste en que a partir de él pueden determinarse las secciones de la presa en las que sería importante llevar a cabo un estricto control de calidad de las permeabilidades de los materiales durante la etapa de construcción.

En el caso particular de la presa aquí analizada, se determinó con base en el análisis bayesiano, que el gasto en la galería de drenaje depende del comportamiento del muro diafragma y del seudo corazón de gneis, no de la pantalla de inyecciones. Lo anterior, hace plantear la pregunta de si era en verdad necesaria la construcción de esta estructura para ayudar a controlar el flujo de agua a través de la presa. De hecho, deja en claro la utilidad del *teorema de Bayes* como una ayuda adicional en la toma de decisiones durante la etapa de proyecto o diseño de una presa.

## 5.4 Permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en dos (2D) y tres dimensiones (3D)

### 5.4.1 Introducción

El objetivo de esta aplicación es, teniendo en cuenta la conjetura propuesta por Matheron (Capítulo 2), determinar y/o sugerir una permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en dos (2D) y tres dimensiones (3D)<sup>(5.5)</sup> (López & Auvinet, 2004).

A diferencia de las aplicaciones anteriores en donde la variabilidad espacial de la permeabilidad se modeló con variables aleatorias, en este estudio se utilizan campos aleatorios. Así, los medios heterogéneos considerados en esta aplicación se modelan con *campos aleatorios de permeabilidad*, mismos que se fundamentan en la teoría del ANEXO IV. En la simulación de los campos se pone énfasis en la dependencia espacial entre valores del logaritmo de la permeabilidad en diferentes puntos del medio. De esta manera, en los cálculos se consideran distintas distancias de correlación (las que permiten describir la heterogeneidad del medio). Por su parte, los análisis de flujo de agua a través de los medios heterogéneos 2D y 3D se llevan a cabo con dos técnicas numéricas distintas. En el caso bidimensional se emplea el método de elementos finitos (*FEM*, ANEXO III). En el caso tridimensional, se presenta la implementación del método de los pasos o paseos casuales (*RWM*, ANEXO II) a este tipo de dominios.

En lo que sigue se describe por tanto, la metodología propuesta que permite acoplar la simulación de campos aleatorios de permeabilidad con el análisis numérico del flujo de agua a través de los dominios simulados. El estudio consiste básicamente en determinar primero la cantidad de agua que pasa a través del medio heterogéneo simulado (2D ó 3D). Posteriormente, mediante un análisis inverso calcular la *permeabilidad aparente* del medio con base en la ley de Darcy. Al final, esta permeabilidad aparente se compara con la permeabilidad promedio del campo aleatorio simulado (media armónica, geométrica y aritmética de los valores tomados por esta propiedad en diversos puntos del medio). Finalmente, con base en los resultados, se sugieren unos promedios algebraicos para describir dominios heterogéneos en función de la dimensión espacial de la región de flujo (2D ó 3D). Asimismo se presentan comentarios concluyentes de la incertidumbre en la permeabilidad aparente de este tipo de dominios.

### 5.4.2 Análisis bidimensional

#### 5.4.2.1 Simulación de campos aleatorios de permeabilidad 2D

Los análisis se realizan en el dominio 2D cuyas características geométricas y de frontera se ilustran en la Figura 5.53. El medio heterogéneo se modela con campos de permeabilidad bidimensionales. La simulación de cada campo aleatorio se realiza con la ayuda del programa CARBON2002 (Bonnet & Auvinet, 2002) que se fundamenta en la teoría descrita con detalle en el párrafo IV.5 del ANEXO IV (*simulación de campos aleatorios*). Se trabaja con los campos aleatorios referidos al logaritmo decimal de la conductividad hidráulica,  $\log_{10} k$ , por presentar un comportamiento más estable que  $k$ . Asimismo los campos aleatorios aquí simulados son *gaussianos*, esto es, que cada una de las variables del campo tiene densidad de probabilidad normal o gaussiana. De igual manera, se trata de campos *estacionarios*, es decir, sus densidades de probabilidad y momentos asociados son invariantes por traslación en el espacio.

---

<sup>(5.5)</sup> El caso de flujo unidimensional en medios heterogéneos no se discute en esta aplicación, por considerarse un tema suficientemente estudiado: ya se sabe que en la dirección de la estratificación la permeabilidad equivalente corresponde al promedio aritmético pesado, y en el sentido perpendicular a ésta, al promedio armónico pesado.

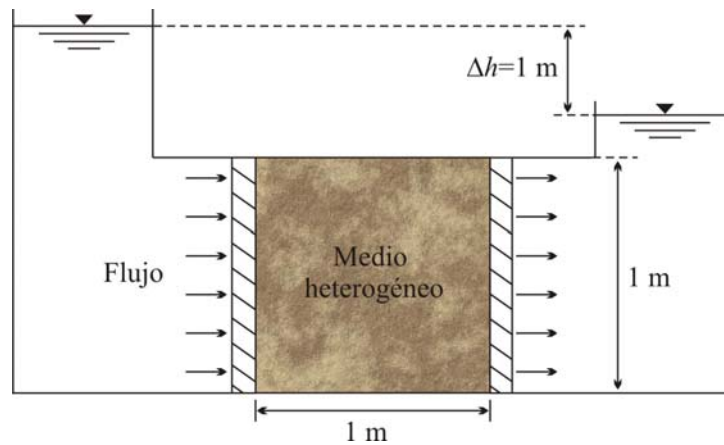


Figura 5.53 Dominio bidimensional de análisis

De esta manera, se asume que los campos aleatorios simulados tienen los siguientes parámetros:

— Media o valor esperado:  $\mu_{\log_{10} k}(X) = E\{\log_{10} k(X)\} = -4$ .

— Varianza:  $\sigma_{\log_{10} k}^2(X) = \text{Var}[\log_{10} k(X)] = 1$ .

— Función de autocorrelación: se considera de tipo exponencial:  $R(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{a}}$ , donde  $\tau$  es la separación entre puntos,  $a$  es el área bajo la curva y  $2a=L$  es la distancia de correlación o de influencia (ver Figura 5.54).

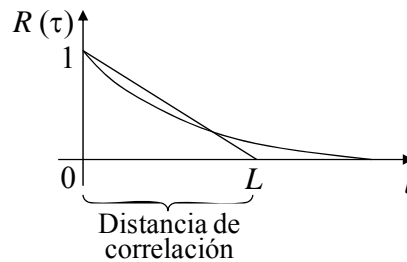


Figura 5.54 Función de autocorrelación de tipo exponencial

Cada campo de logaritmo de la permeabilidad se simula en la malla de puntos  $X_i$  del dominio de estudio que se muestra en la Figura 5.55. Así, introduciendo los valores conocidos de la media y la varianza mencionados previamente, la simulación del campo aleatorio se lleva a cabo generando realizaciones de  $\log_{10} k(X_i)$ :

$$\log_{10} k(X_i) = \mu_{\log_{10} k}(X_i) + \sigma_{\log_{10} k}(X_i) \cdot G(X_i) \quad (5.50)$$

Donde  $G(X_i)$  representa un *campo aleatorio normal estándar correlacionado*, que se obtiene a partir de una matriz de correlación y variables normales estándar independientes generadas como se indica en el ANEXO IV.

Adicionalmente, las simulaciones se realizan para las distancias de correlación o de influencia<sup>(5.6)</sup> de la permeabilidad,  $L_i$ , que se señalan en la Tabla 5.8. Se asume que la correlación es la misma tanto en la dirección horizontal como en la vertical ( $X$  y  $Y$ , respectivamente).

Tabla 5.8 Distancias de correlación  $L_i$  consideradas en la simulación de los campos aleatorios

Relación de distancias $L_i$				
$L_1 = 0.0001$	$L_7 = 0.25$	$L_{12} = 7.5$	$L_{17} = 100$	$L_{22} = 3000$
$L_2 = 0.001$	$L_8 = 0.5$	$L_{13} = 10$	$L_{18} = 200$	$L_{23} = 5000$
$L_3 = 0.003$	$L_9 = 1$	$L_{14} = 20$	$L_{19} = 500$	$L_{24} = 7000$
$L_4 = 0.01$	$L_{10} = 2.5$	$L_{15} = 40$	$L_{20} = 1000$	$L_{25} = 10000$
$L_5 = 0.03$	$L_{11} = 5$	$L_{16} = 75$	$L_{21} = 2000$	$L_{26} = 30000$
$L_6 = 0.1$				

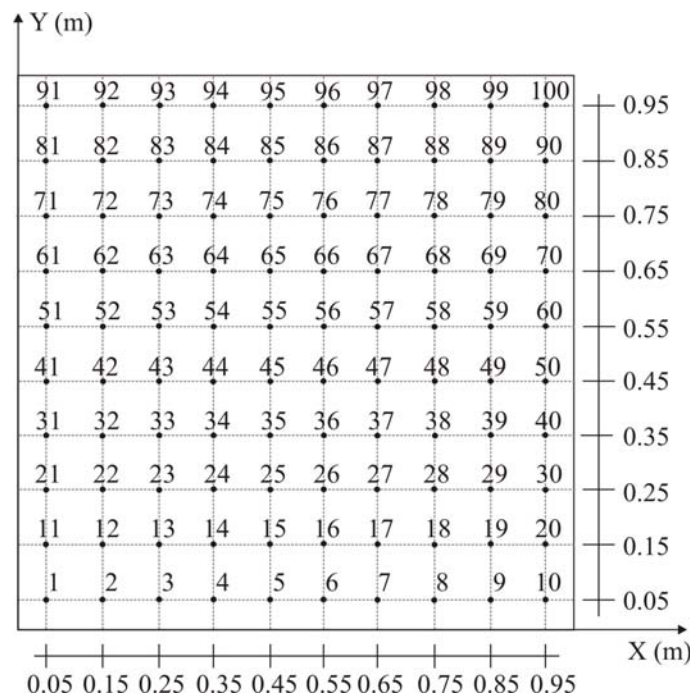
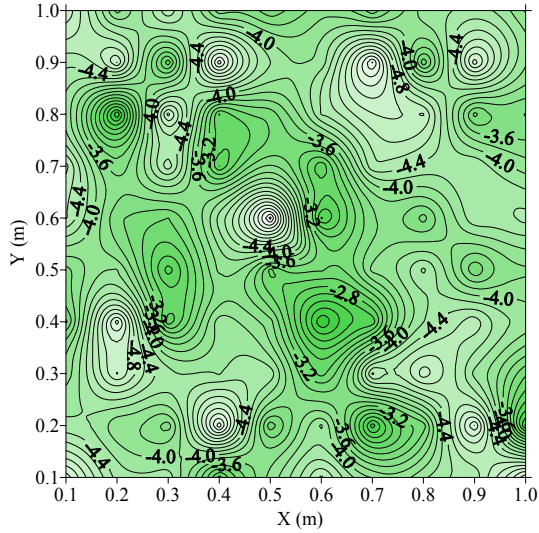


Figura 5.55 Puntos donde se simula el campo aleatorio 2D

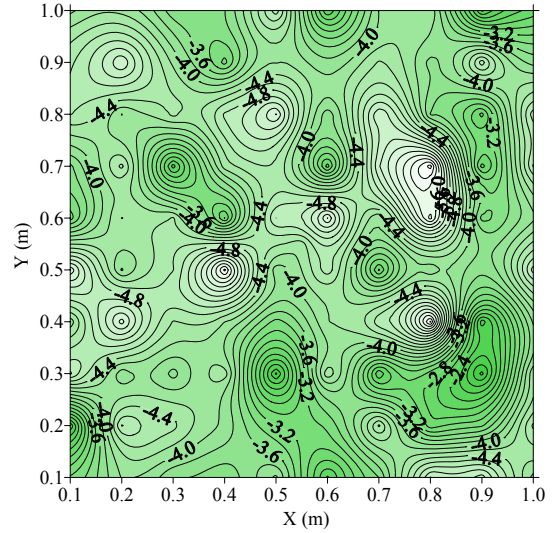
Algunas configuraciones de los campos de  $\log_{10} k$  simulados de esta manera, se presentan en las Figuras 5.56a-f en la forma de mapas contorno, para distintas distancias de correlación  $L_i$ . Los mapas de contorno de estos campos muestran que a menor distancia de correlación se forman una especie de *islas* que indican la heterogeneidad del medio; en cambio, a mayor distancia de correlación el dominio tiende a homogeneizarse y tales *islas* tienden a desaparecer. Estos mismos campos aleatorios se proporcionan en las Figuras 5.57a-f, pero en este caso con una representación mediante escala de tonalidades grises; en estas figuras el significativo contraste de tonos indica una mayor cantidad de permeabilidades distintas, y conforme se homogenizan los tonos de grises se demuestra que las permeabilidades son más parecidas entre sí.

<sup>(5.6)</sup> Distancia hasta la cual la variable de interés está autocorrelacionada.

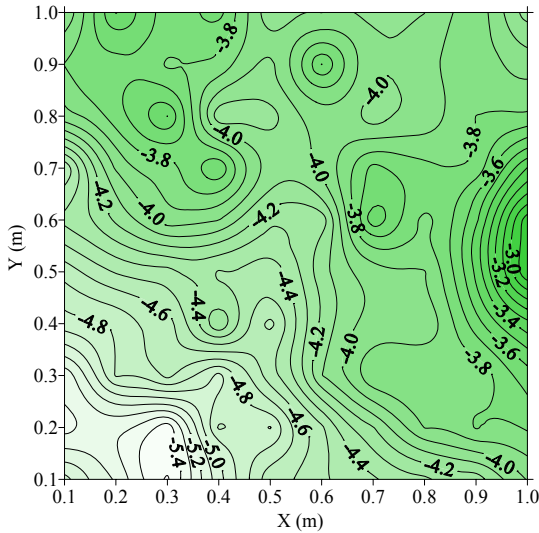
(a)  $L_1 = 0.0001$



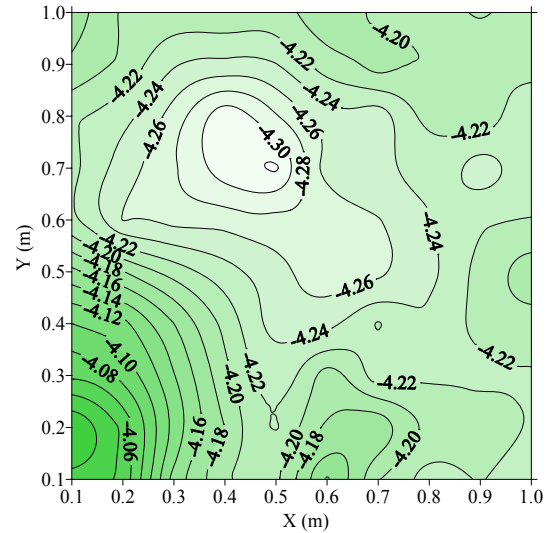
(b)  $L_4 = 0.01$



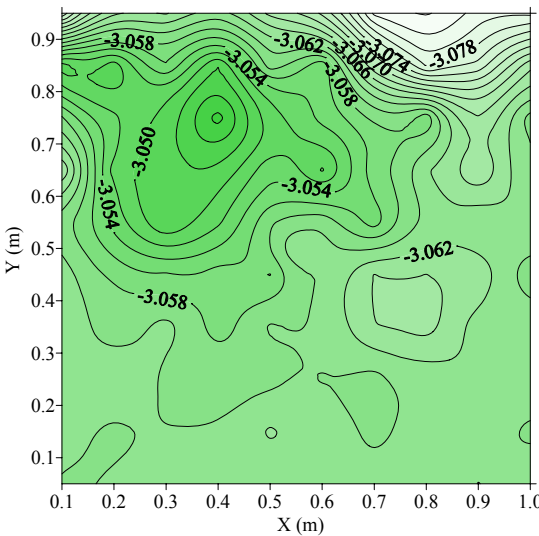
(c)  $L_9 = 1$



(d)  $L_{13} = 10$



(e)  $L_{20} = 1000$



(f)  $L_{26} = 30000$

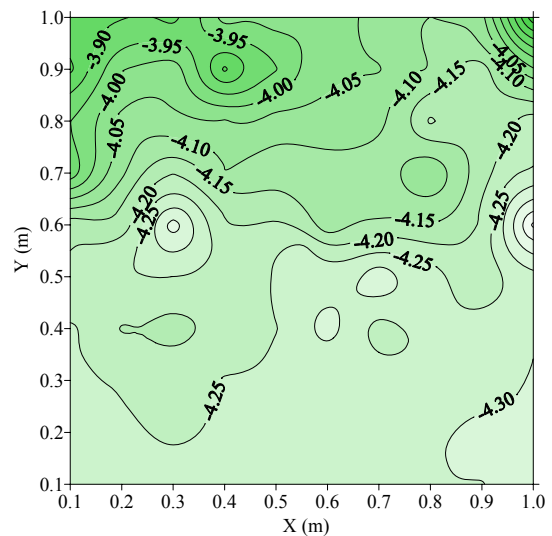
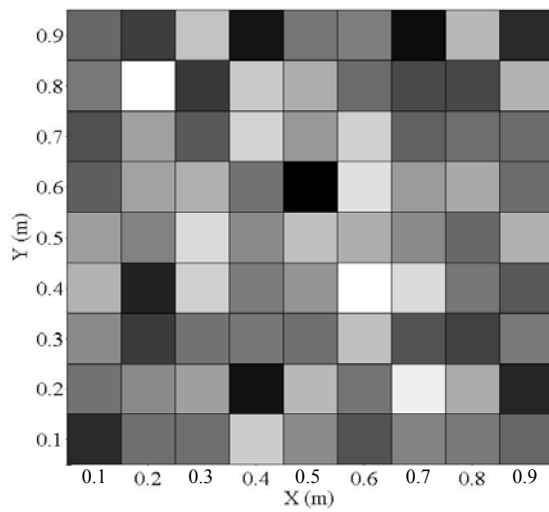
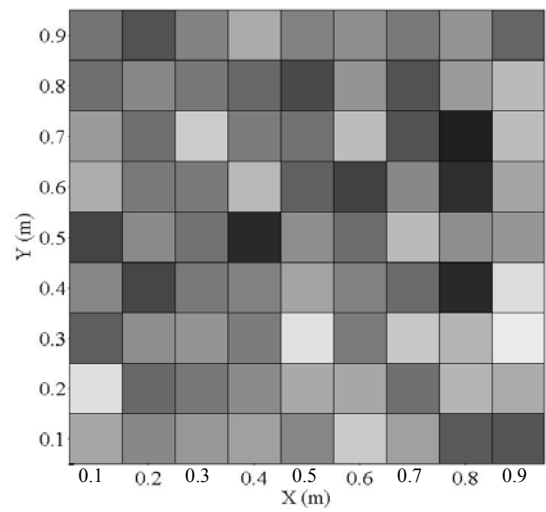


Figura 5.56 Campos aleatorios de permeabilidad 2D para distintas distancias de correlación  $L_i$  (representación con mapas de contorno)

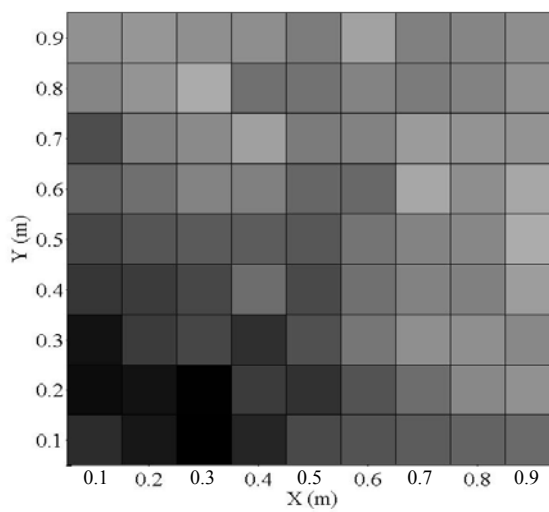
(a)  $L_1 = 0.0001$



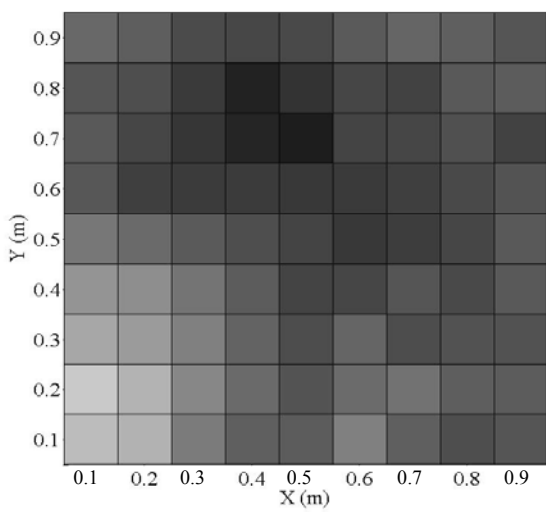
(b)  $L_4 = 0.01$



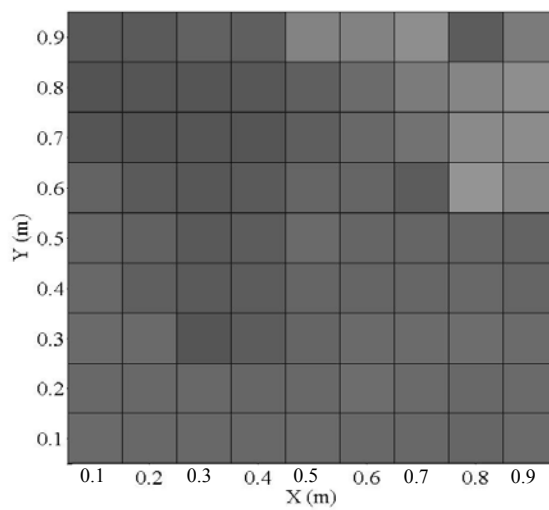
(c)  $L_9 = 1$



(d)  $L_{13} = 10$



(e)  $L_{20} = 1000$



(f)  $L_{26} = 30000$

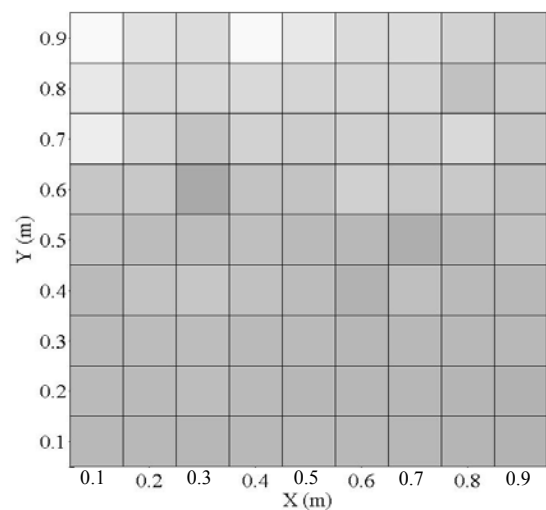


Figura 5.57 Campos aleatorios de permeabilidad 2D para distintas distancias de correlación  $L_i$  (representación con escala de tonalidades grises)

Para cada campo simulado se calcula la media armónica, la media geométrica y la media aritmética de los antilogaritmos de los valores de  $\log_{10} k(X_i)$  del campo:

$$\mu_{armónica} = \frac{n}{\frac{1}{k(X_1)} + \frac{1}{k(X_2)} + \dots + \frac{1}{k(X_n)}} \quad (5.51)$$

$$\mu_{geométrica} = \sqrt[n]{k(X_1) \times k(X_2) \times \dots \times k(X_n)} \quad (5.52)$$

$$\mu_{aritmética} = \frac{k(X_1) + k(X_2) + \dots + k(X_n)}{n} \quad (5.53)$$

El objetivo es comparar los promedios anteriores con la permeabilidad aparente,  $k_{aparente}$ , obtenida de un análisis de flujo de agua 2D con elementos finitos (*FEM*), como se indica a continuación.

#### 5.4.2.2 Estudio del flujo de agua con elementos finitos

El análisis numérico del flujo establecido de agua a través del medio heterogéneo simulado se lleva a cabo con el algoritmo FLOWNETS (López, 2001), que se fundamenta en la teoría de elementos finitos del ANEXO III. En los análisis se considera una pérdida de carga hidráulica de  $\Delta h=1\text{m}$ , según los niveles del agua señalados en la Figura 5.53. La región de flujo se modela con la malla de 200 elementos finitos y 121 nodos que se ilustra en la Figura 5.58. El valor de la conductividad hidráulica asignado (con base en el *método del punto medio —midpoint method—*) a cada elemento finito de la malla anterior corresponde a los antilogaritmos de los valores de  $\log_{10} k(X_i)$  del campo simulado en los puntos  $X_i$  (ec. 5.50).

A partir del estudio anterior se calcula el gasto total  $Q_{total}$  que atraviesa el medio heterogéneo; el cual se utiliza posteriormente para que, mediante un análisis inverso y teniendo en cuenta las características hidráulicas y geométricas del problema ( $i=1$  y  $A=1\text{m}^2$ , según se aprecia en la Figura 5.53), se determine la *permeabilidad aparente* en el medio despejando de la ley de Darcy:

$$k_{aparente} = \frac{Q_{total}}{i \cdot A} \quad (5.54)$$

Las *permeabilidades aparentes* así obtenidas se dibujan respecto a las medias armónicas, aritméticas y geométricas de los campos aleatorios simulados (obtenidas con anterioridad). La comparación gráfica de cada uno de estos promedios con la permeabilidad aparente calculada se ilustra en las Figuras 5.59 a 5.61 respectivamente. De las mismas, se puede apreciar que la mejor correlación se obtiene para los valores de la media geométrica (Figura 5.61); no así para las medias armónica y aritmética. Se muestra entonces que en un análisis de flujo bidimensional, la permeabilidad equivalente de un medio heterogéneo está representada por la media geométrica del campo de permeabilidad. Siendo erróneo utilizar, como es la práctica común en la geotecnia (para varias propiedades del suelo), la media aritmética como un promedio representativo de esta propiedad.



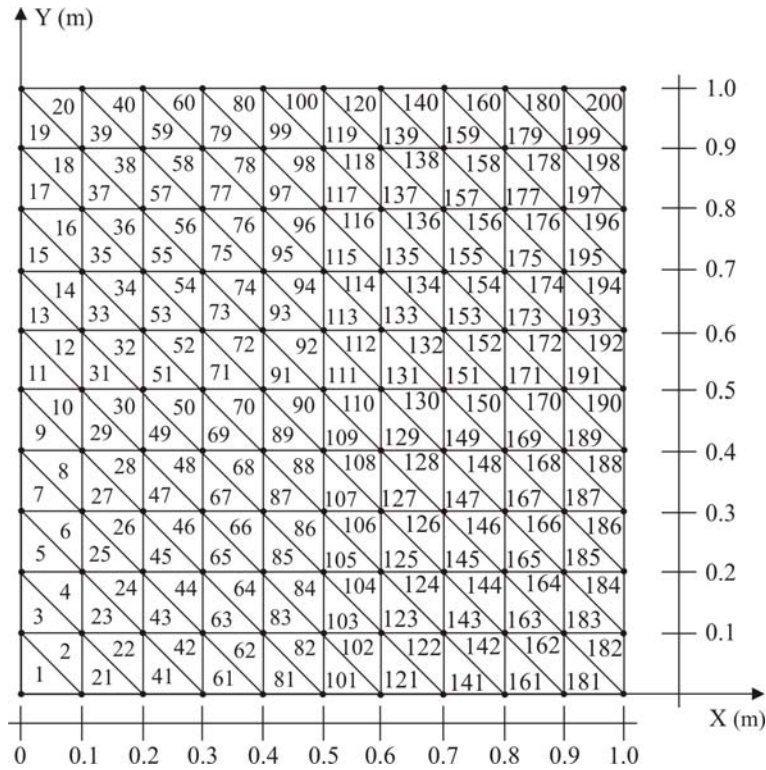


Figura 5.58 Malla 2D de elementos finitos

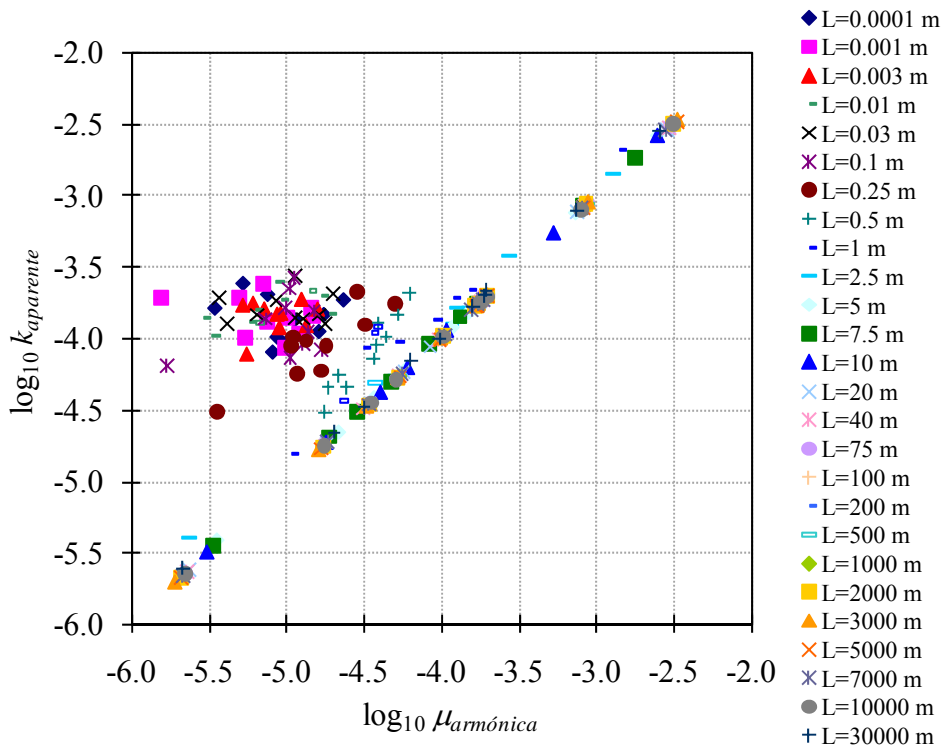


Figura 5.59  $\log_{10} \mu_{armónica}$  vs.  $\log_{10} k_{aparente}$  en el análisis 2D

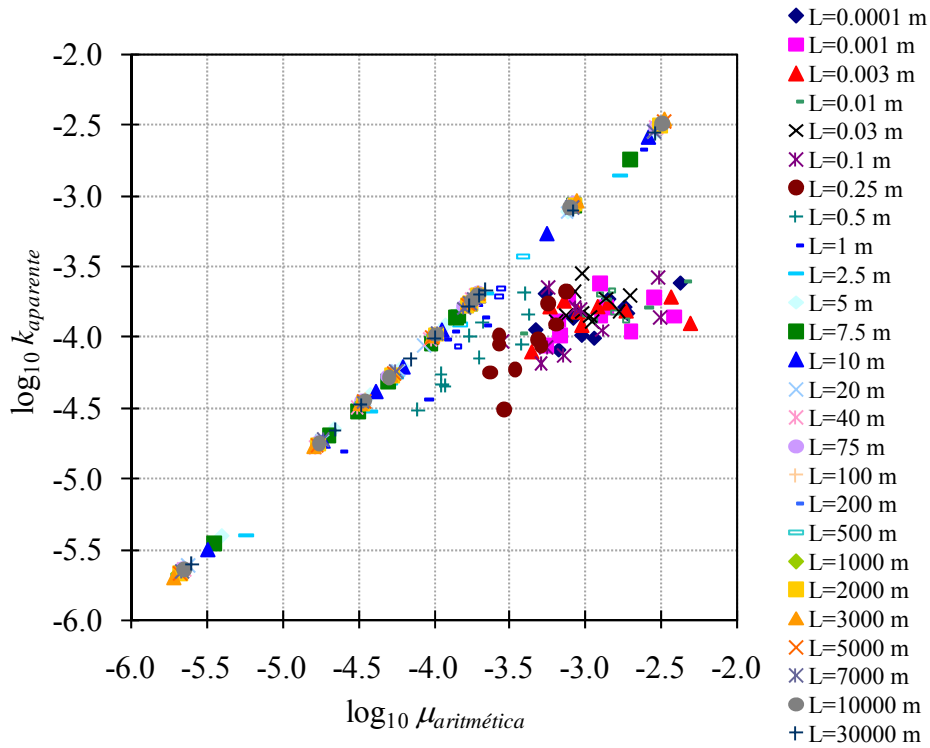


Figura 5.60  $\log_{10} \mu_{aritmética}$  vs.  $\log_{10} k_{aparente}$  en el análisis 2D

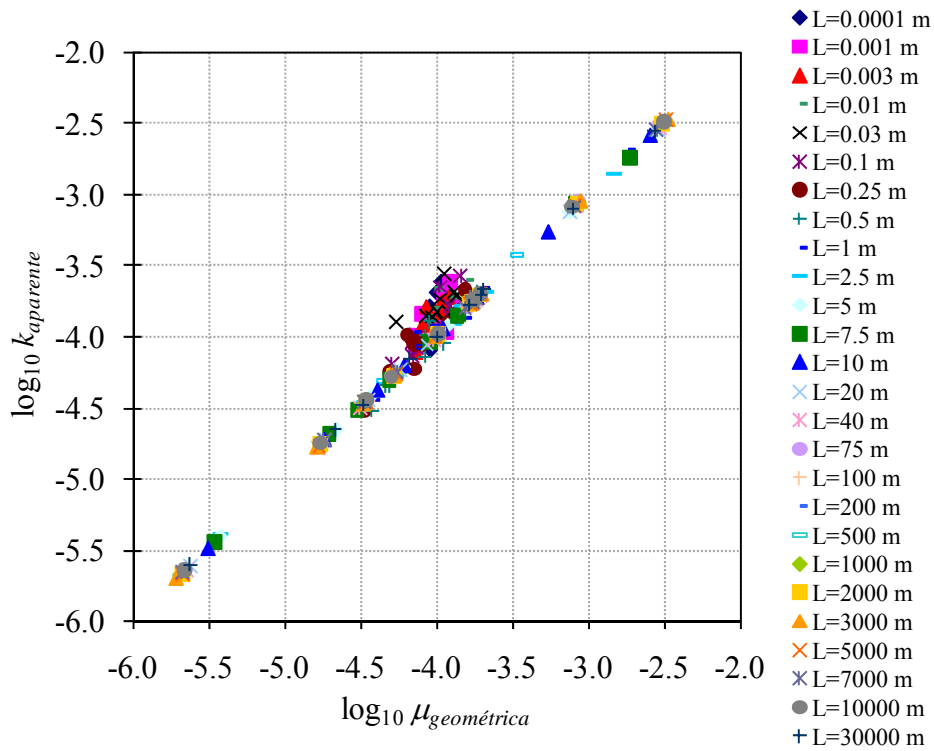


Figura 5.61  $\log_{10} \mu_{geométrica}$  vs.  $\log_{10} k_{aparente}$  en el análisis 2D

Adicionalmente, con los cálculos anteriores también fue posible determinar las medias y desviaciones estándar de los valores del logaritmo de la permeabilidad aparente,  $\log_{10} k_{aparente}$ , para cada grupo de distancias de correlación  $L_i$  estudiado. El resumen de estos resultados se presenta en la Tabla 5.9. En la misma se observa que cuando la distancia de correlación  $L_i$  aumenta de manera importante en el medio analizado ( $\geq 1m$ ), éste tiende a comportarse como un material homogéneo aleatorio, en el que la media de la permeabilidad aparente es aproximadamente igual a la media del campo de permeabilidad,  $E\{\log_{10} k(X)\} = -4$ . Este mismo comportamiento puede apreciarse gráficamente en la Figura 5.62, que ilustra la curva que representa la media de  $\log_{10} k_{aparente}$ , así como las curvas de esta media más y menos la desviación estándar de  $\log_{10} k_{aparente}$ , todas en función de las distancias de correlación analizadas. De las curvas anteriores resulta evidente que a menor distancia de correlación la desviación estándar es menor, y para distancias de correlación mayores que la longitud del medio analizado, la desviación estándar aumenta considerablemente. De manera independiente, la variación de la desviación estándar en función de las distancias  $L_i$  se presenta en la Figura 5.63; en la misma se observa que cuando el material es fuertemente heterogéneo (para distancias de correlación pequeñas) la desviación estándar es pequeña; esto se debe en realidad a un *fenómeno de compensación estadística*, mediante el cual la interferencia entre un mayor número de permeabilidades distintas ocasiona que la incertidumbre se *compense* o distribuya entre las mismas. Contrariamente, a mayor distancia de correlación la desviación estándar aumenta de manera significativa hasta alcanzar un valor casi constante que es muy cercano a la desviación estándar del campo aleatorio de permeabilidad (cuando el material se vuelve prácticamente homogéneo). En tales condiciones existe la posibilidad de que se presente el *fenómeno de percolación*; es decir que si la correlación aumenta, las permeabilidades de ciertos elementos tienden a parecerse, originándose zonas más permeables que otras por las cuales el agua puede circular con mayor facilidad.

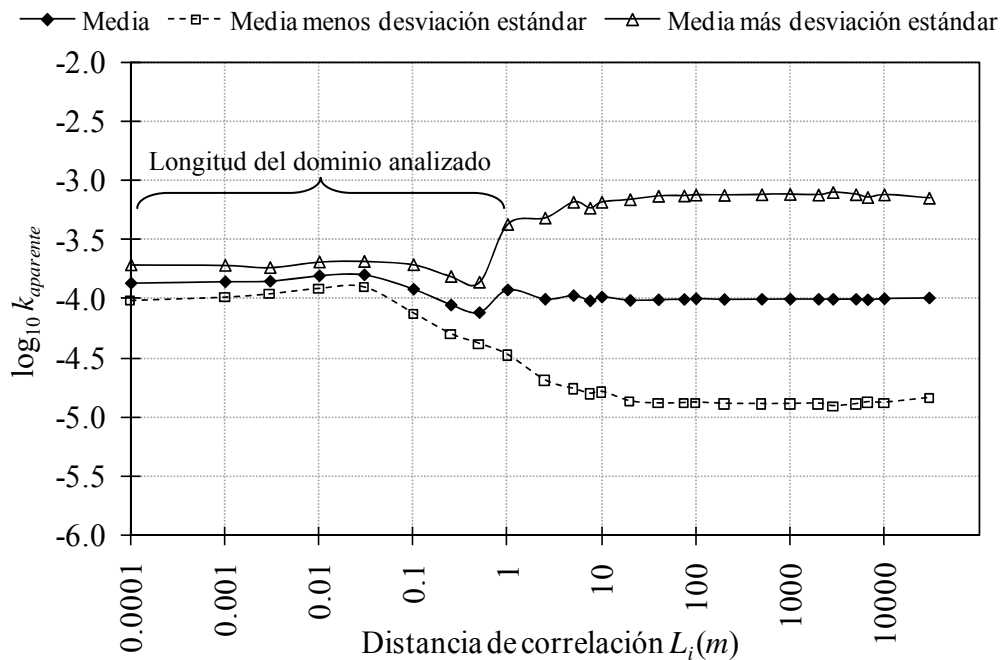


Figura 5.62  $\log_{10} k_{aparente}$  vs. distancia de correlación  $L_i$  en el análisis 2D

Tabla 5.9 Parámetros estadísticos de  $\log_{10} k_{aparente}$  para las distintas  $L_i$  del análisis 2D

Distancia de correlación $L_i$ (m)	Media	Desviación estándar	$\mu_{\log_{10} k_{aparente}}$ menos	$\mu_{\log_{10} k_{aparente}}$ más
	$\mu_{\log_{10} k_{aparente}}$	$\sigma_{\log_{10} k_{aparente}}$	$\sigma_{\log_{10} k_{aparente}}$	$\sigma_{\log_{10} k_{aparente}}$
0.0001	-3.86	0.15	-4.01	-3.71
0.001	-3.85	0.14	-3.99	-3.71
0.003	-3.84	0.11	-3.96	-3.73
0.01	-3.80	0.11	-3.91	-3.68
0.03	-3.79	0.11	-3.90	-3.68
0.1	-3.91	0.21	-4.12	-3.70
0.25	-4.05	0.24	-4.29	-3.80
0.5	-4.11	0.26	-4.38	-3.85
1	-3.92	0.55	-4.47	-3.37
2.5	-4.00	0.69	-4.68	-3.31
5	-3.97	0.79	-4.76	-3.18
7.5	-4.01	0.78	-4.79	-3.23
10	-3.98	0.80	-4.78	-3.18
20	-4.01	0.85	-4.86	-3.16
40	-4.00	0.87	-4.88	-3.13
75	-4.00	0.87	-4.87	-3.13
100	-3.99	0.87	-4.87	-3.12
200	-4.00	0.88	-4.88	-3.12
500	-4.00	0.88	-4.88	-3.12
1000	-4.00	0.88	-4.88	-3.11
2000	-4.00	0.88	-4.88	-3.12
3000	-4.00	0.90	-4.90	-3.10
5000	-4.00	0.88	-4.88	-3.12
7000	-4.00	0.86	-4.87	-3.14
10000	-3.99	0.88	-4.87	-3.12
30000	-3.99	0.84	-4.83	-3.15

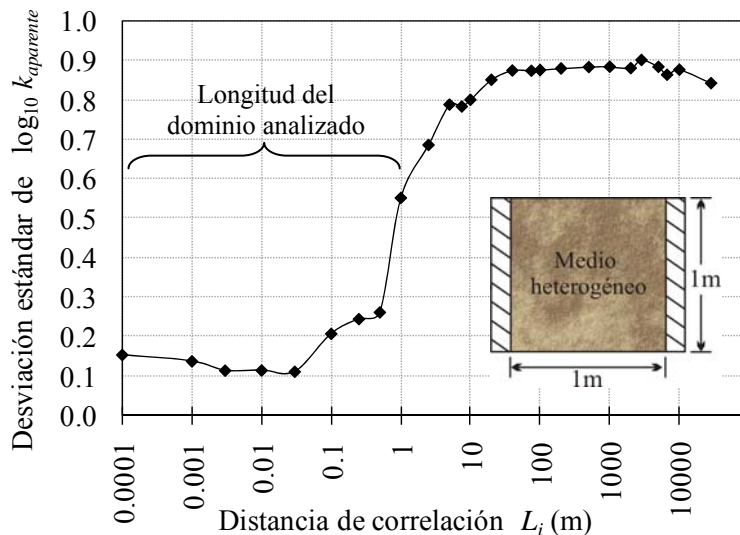


Figura 5.63 Desviación estándar de  $\log_{10} k_{aparente}$  vs. distancia de correlación  $L_i$  en el análisis 2D

### 5.4.3 Análisis tridimensional

#### 5.4.3.1 Simulación de campos aleatorios de permeabilidad 3D

El análisis se extiende ahora al estudio del flujo de agua a través del dominio tridimensional que se muestra en la Figura 5.64. El medio heterogéneo se modela con campos de permeabilidad 3D, cuya simulación se lleva a cabo con el mismo programa (CARBON2002; Bonnet & Auvinet, 2002) que se empleó en la simulación de campos 2D, pero con algunas modificaciones para poder generar ahora campos aleatorios 3D (López & Auvinet, 2004). La teoría en la que se basan los programas se presenta en el ANEXO IV.

Los campos tridimensionales tienen las mismas características que en el caso bidimensional anterior. Esto es, se refieren al logaritmo decimal de la conductividad hidráulica,  $\log_{10} k$ ; también son *gaussianos* y *estacionarios*, y están definidos por los siguientes parámetros:

$\mu_{\log_{10} k}(X) = E\{\log_{10} k(X)\} = -4$  como media o valor esperado y  $\sigma_{\log_{10} k}^2(X) = Var[\log_{10} k(X)] = 1$  como varianza. Asimismo se asume una función de

autocorrelación de tipo exponencial:  $R(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{a}}$  (Figura 5.54).

Cada campo aleatorio del logaritmo de la permeabilidad se simula en la malla de puntos  $X_i$  de la región de flujo 3D que se muestra en la Figura 5.65. Las simulaciones se realizan para las mismas distancias de correlación de la permeabilidad  $L_i$  que se estudiaron en el caso bidimensional (señaladas en la Tabla 5.8), solo que ahora aplican para las tres direcciones del espacio ( $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente). De esta manera, introduciendo los valores conocidos de la media y la varianza indicados antes, la simulación del campo aleatorio 3D se lleva a cabo generando realizaciones de  $\log_{10} k(X_i)$  igualmente con la expresión (5.50) vista antes.

Algunas configuraciones de los campos de  $\log_{10} k$  simulados de esta manera, se presentan en la Figura 5.66 (mediante escala de tonalidades grises) para distintas distancias de correlación  $L_i$ . Los números que aparecen sobre los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  de estas figuras, simplemente indican los planos de los puntos donde se simulan los campos aleatorios. Es fácil distinguir en estas figuras que el medio más heterogéneo (donde las distancias de correlación son más pequeñas) presenta un contraste mayor en las tonalidades de grises, respecto al caso en el que el medio tiende a ser más homogéneo debido al aumento de la distancia de correlación y en el que el dominio presenta prácticamente un mismo tono de gris. Una situación similar se puede apreciar en las secciones transversales de los campos aleatorios para ciertas  $L_i$  que se muestran en las Figuras 5.67a-d (mediante mapas de contorno en este caso). En ellas, los campos de permeabilidad que tienen distancias de correlación pequeñas forman *picos* que indican la heterogeneidad del medio; en cambio a mayores distancias de correlación tales *picos* tienden a desaparecer, revelando la homogeneización del medio aleatorio.

Nuevamente, para cada campo simulado se calcula la media armónica, geométrica y aritmética de los antilogaritmos de los valores de  $\log_{10} k(X_i)$  del campo, con las ecuaciones (5.51) a (5.53) señaladas antes. Promedios que posteriormente se comparan con las *permeabilidades aparentes* obtenidas del análisis de flujo de agua a través del medio heterogéneo 3D, que en este caso se

realiza con el *método de pasos* o *paseos casuales (RWM)*, como se explica en los párrafos siguientes.

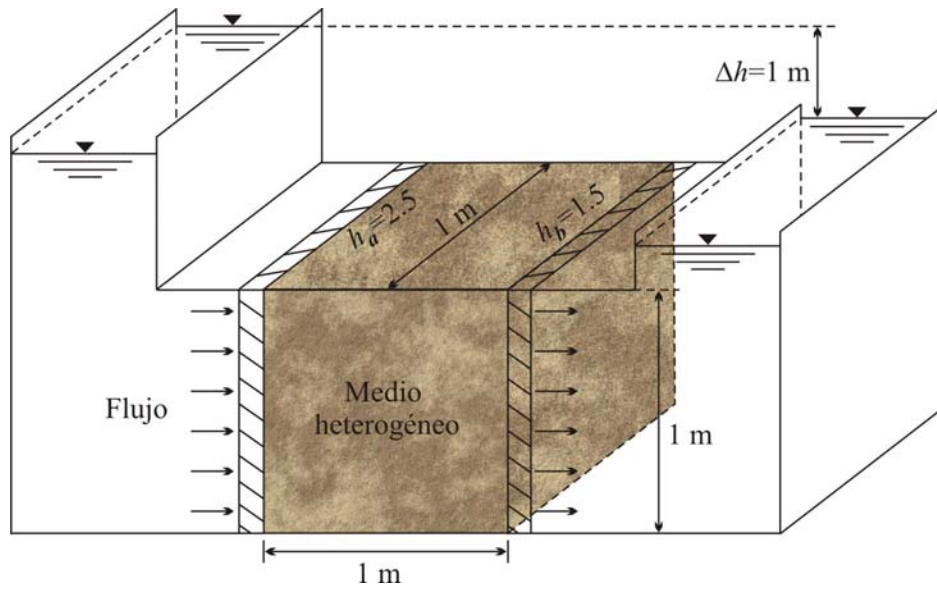


Figura 5.64 Dominio tridimensional de análisis

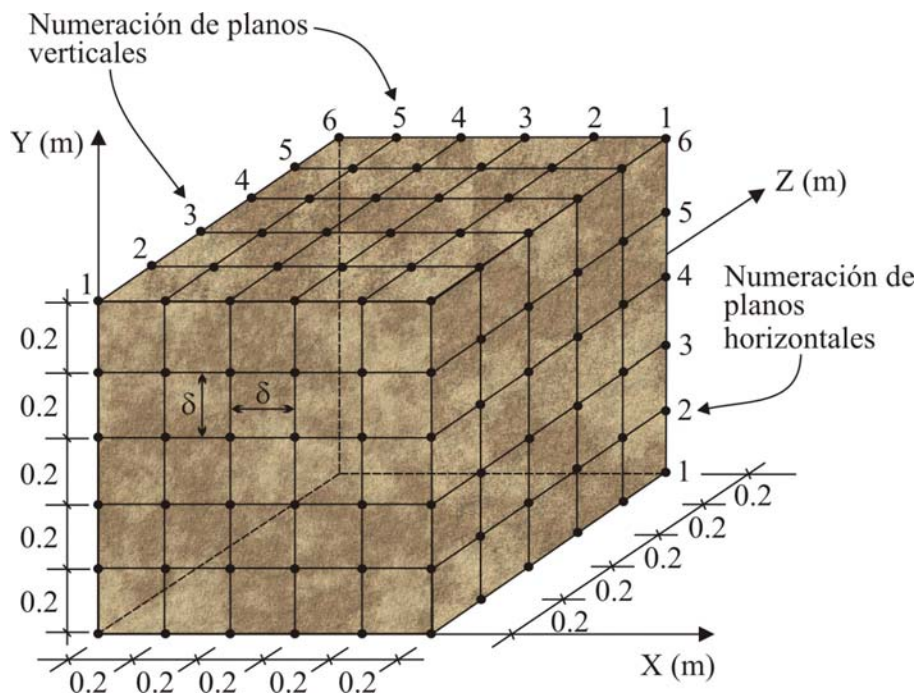


Figura 5.65 Puntos donde se simula el campo aleatorio 3D

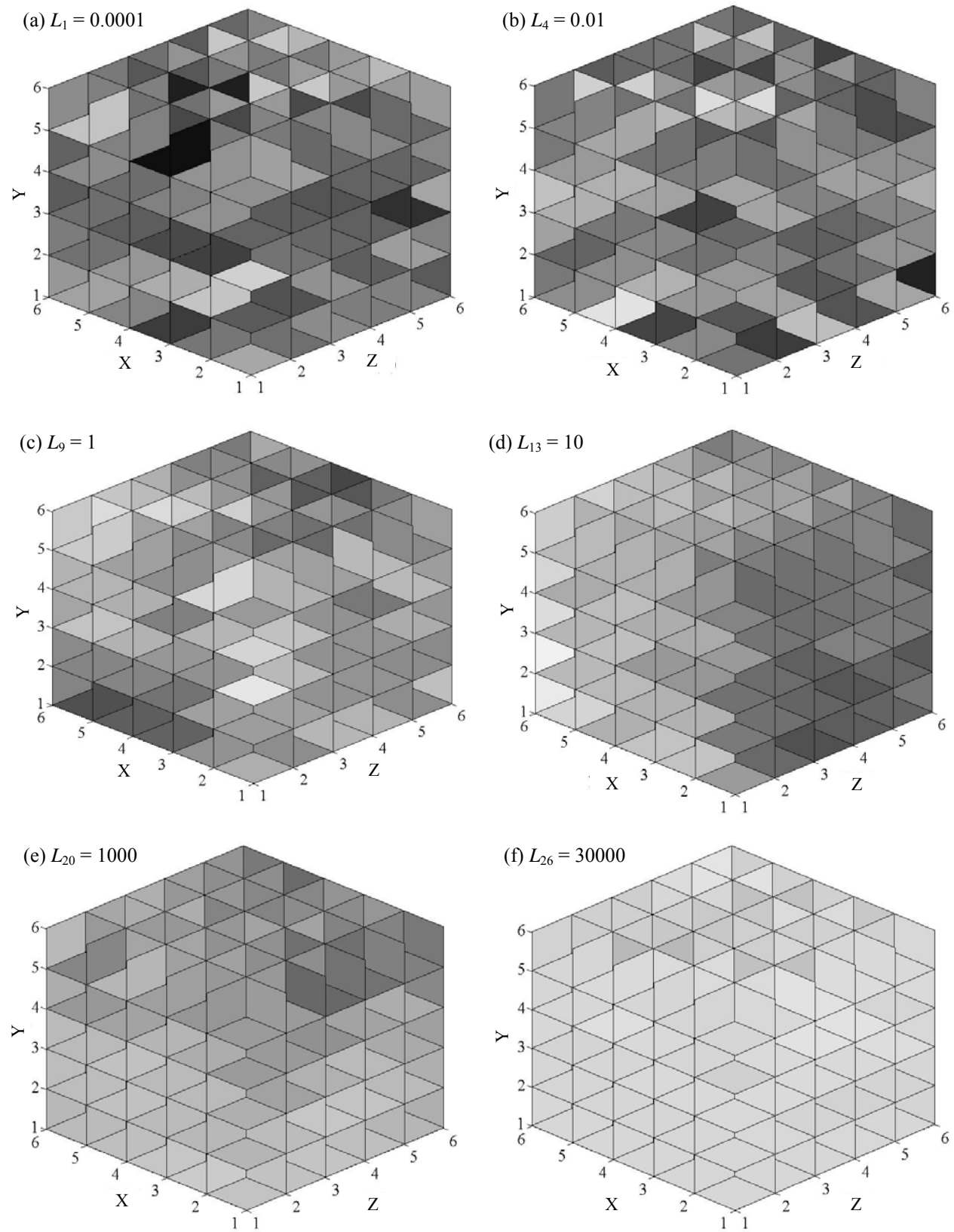


Figura 5.66 Campos aleatorios de permeabilidad 3D para distintas distancias de correlación  $L_i$  (representación con escala de grises)

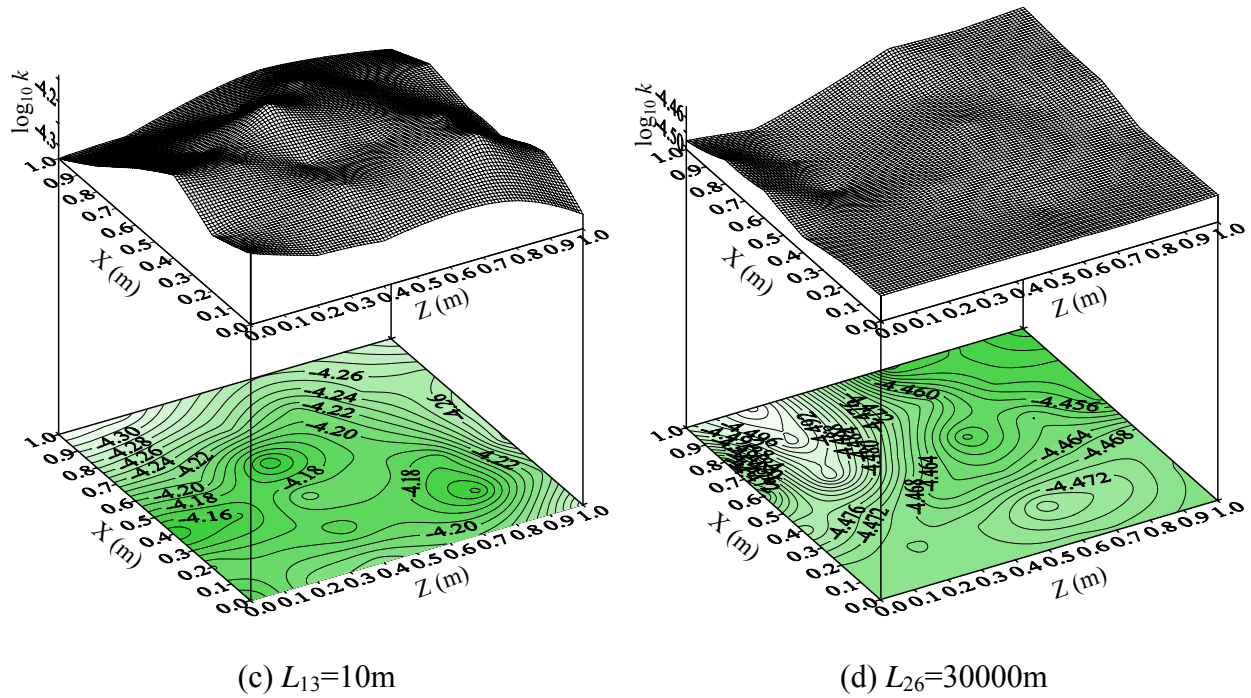
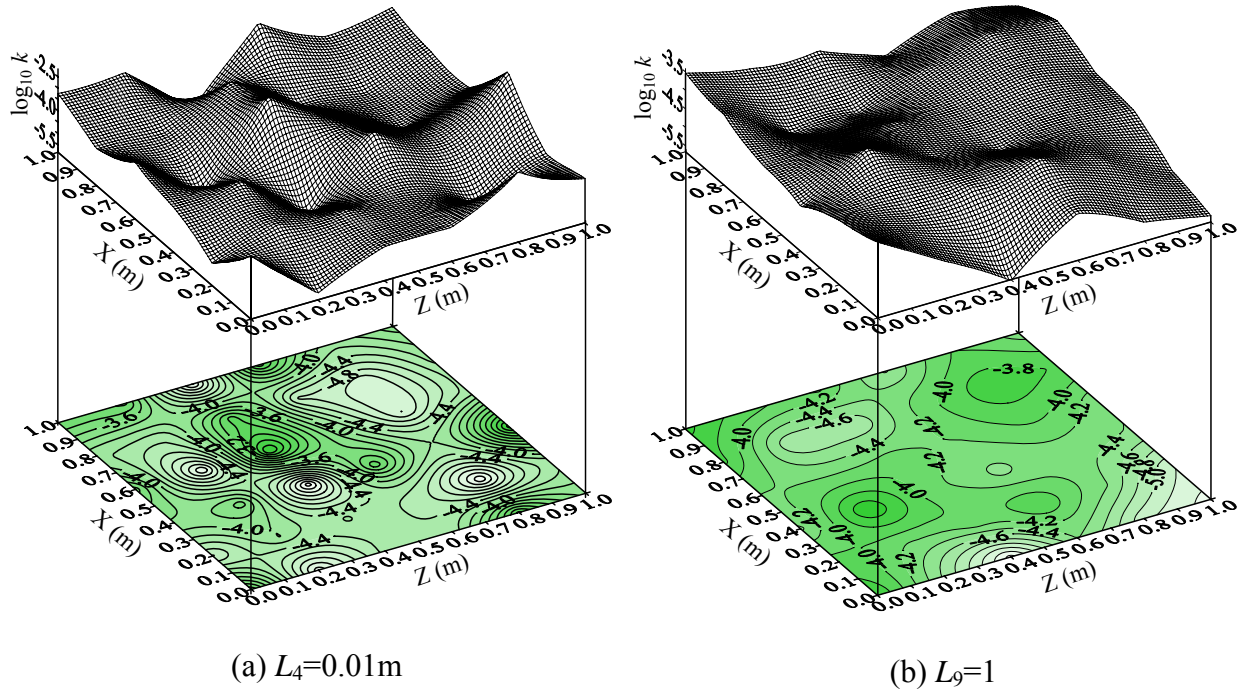


Figura 5.67 Secciones transversales (en perspectiva) de campos de permeabilidad 3D para distintas distancias de correlación  $L_i$



5.4.3.2 Estudio del flujo de agua con *pasos casuales*

A diferencia del caso bidimensional en el que se emplearon elementos finitos, el análisis numérico del flujo de agua a través del medio heterogéneo simulado 3D se lleva a cabo con el *método de los pasos o paseos casuales*. La malla tridimensional de los puntos a través de los cuales se desplaza la partícula que se estudia mediante este método (explicado en el inciso 4.4 del Capítulo 4 y con mayor detalle en el ANEXO II) es la misma malla de la Figura 5.65 donde se simulan los campos aleatorios. La conductividad hidráulica impuesta en los nodos de esta malla (con base en el *método del punto medio –midpoint method–*), corresponde a los antilogaritmos de los valores de  $\log_{10} k(X_i)$  del campo simulado. Para la aplicación de este método se recurre al algoritmo PASECA (López, 2003), el cual permite obtener la carga hidráulica en cualquier nodo a través de estudiar los movimientos (*caminatas*) de una partícula que se desplaza de manera aleatoria (con paso constante  $\delta=0.2$ ) sobre los nodos de la malla mencionada (Figura 5.65). La carga hidráulica  $h^*$  se determina entonces contando los números de trayectorias que terminan en las fronteras permeables ( $m_a$  aguas arriba y  $m_b$  aguas abajo), multiplicándolos por el valor del potencial impuesto en la frontera respectiva ( $h_a$  aguas arriba y  $h_b$  aguas abajo) y dividiendo el resultado entre el número total de trayectorias:

$$h^* = \frac{m_a h_a + m_b h_b}{m_a + m_b} \quad (5.55)$$

Se repite este procedimiento un número de veces determinado y el resultado obtenido es una medida insesgada de la carga hidráulica en el nodo deseado. Un ejemplo de las caminatas aleatorias generadas con PASECA se ilustra en la Figura 5.68.

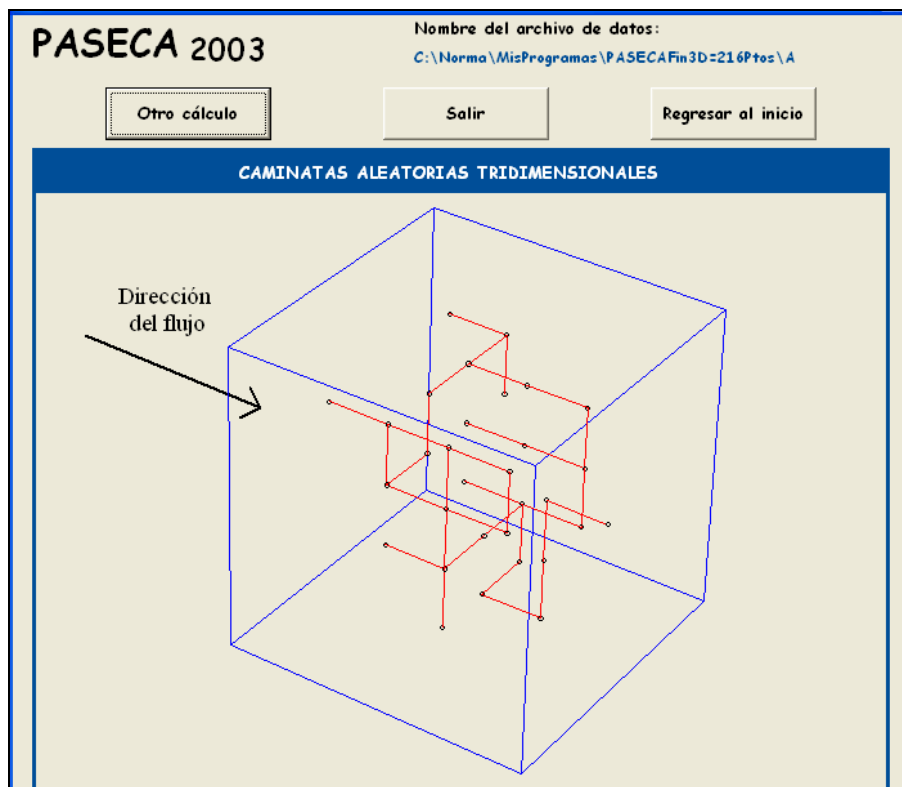


Figura 5.68 Ejemplo de una caminata aleatoria generada con el algoritmo PASECA

En los cálculos se considera una pérdida de carga hidráulica de  $\Delta h=1\text{m}$ , según los niveles del agua señalados en la región de flujo 3D de la Figura 5.64. De igual manera, las condiciones impuestas en las fronteras son:  $h_a=2.5\text{m}$  en el plano vertical de aguas arriba y  $h_b=1.5\text{m}$  en el plano vertical de aguas abajo, como se aprecia en la misma figura.

El estudio consiste entonces en determinar la carga hidráulica en los puntos de análisis de los dos planos transversales a la dirección del flujo que se señalan en la Figura 5.69. En la misma se advierte que en el Plano 2 ya se conoce el potencial en todos sus puntos:  $h_b=1.5\text{m}$  (se asumió como carga impuesta). Se calculan por tanto, los potenciales únicamente en el Plano 1. El propósito es obtener, a partir de estos potenciales, los gradientes hidráulicos  $i_n$  y con ellos a su vez, las velocidades de flujo locales  $V_n$  mediante la ley de Darcy:

$$V_n = k(X_n) \cdot i_n \quad (5.56)$$

donde  $n$  es el número total de puntos en el plano de interés (en este caso  $n = 16$ ).

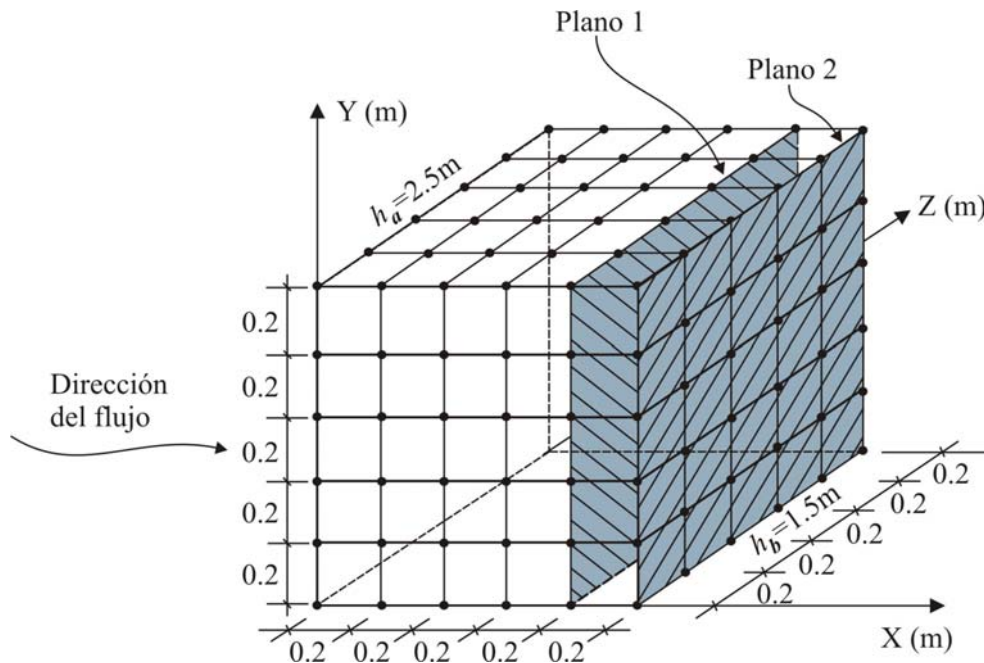


Figura 5.69 Planos en los que se calcula la carga hidráulica con el algoritmo PASECA

De esta manera, los gradientes hidráulicos  $i_n$  de la ecuación (5.56) anterior se determinan restando los potenciales calculados en los puntos del Plano 1 de los potenciales impuestos en los puntos correspondientes del Plano 2 (ver Figura 5.69), y dividiendo este resultado entre la distancia que los separa  $\delta=0.2\text{m}$  (constante para todos los cálculos).

Por su parte las permeabilidades  $k(X_n)$  de la ecuación (5.56) se calculan con el promedio armónico de las permeabilidades locales  $k(X_1)$  y  $k(X_2)$  de los puntos correspondientes en los Planos 1 y 2, respectivamente:

$$k(X_n) = \frac{2}{\frac{1}{k(X_1)} + \frac{1}{k(X_2)}} \quad (5.57)$$

La velocidad  $V$  en la región de flujo se asume como el promedio aritmético de las velocidades  $V_n$  anteriores. Finalmente, mediante un análisis inverso y teniendo en cuenta las características hidráulicas y geométricas del problema (gradiente total  $i=1$ , según se aprecia en la Figura 5.64), es posible evaluar la *permeabilidad aparente* del medio, despejando de la ley de Darcy:

$$k_{aparente} = \frac{V}{i} \quad (5.58)$$

Las *permeabilidades aparentes* así obtenidas se dibujan respecto a las medias armónicas, aritméticas y geométricas de los campos aleatorios 3D simulados (obtenidas con anterioridad). La comparación gráfica de cada uno de estos promedios con la permeabilidad aparente calculada se ilustra en las Figuras 5.70 a 5.72 respectivamente. De las gráficas anteriores, se aprecia que la media geométrica (Figura 5.72) es la que presenta la menor dispersión respecto a la permeabilidad aparente del medio. No ocurre lo mismo con las medias aritmética y armónica. Lo anterior muestra que, la permeabilidad equivalente de un medio heterogéneo tridimensional puede estar representada por la media geométrica del campo de permeabilidad. Conviene subrayar que en las figuras anteriores las desviaciones pronunciadas de algunos resultados respecto a las correlaciones generales obtenidas, deben probablemente atribuirse al fenómeno de percolación (existencia de caminos preferentes de filtración para algunas configuraciones del campo aleatorio).

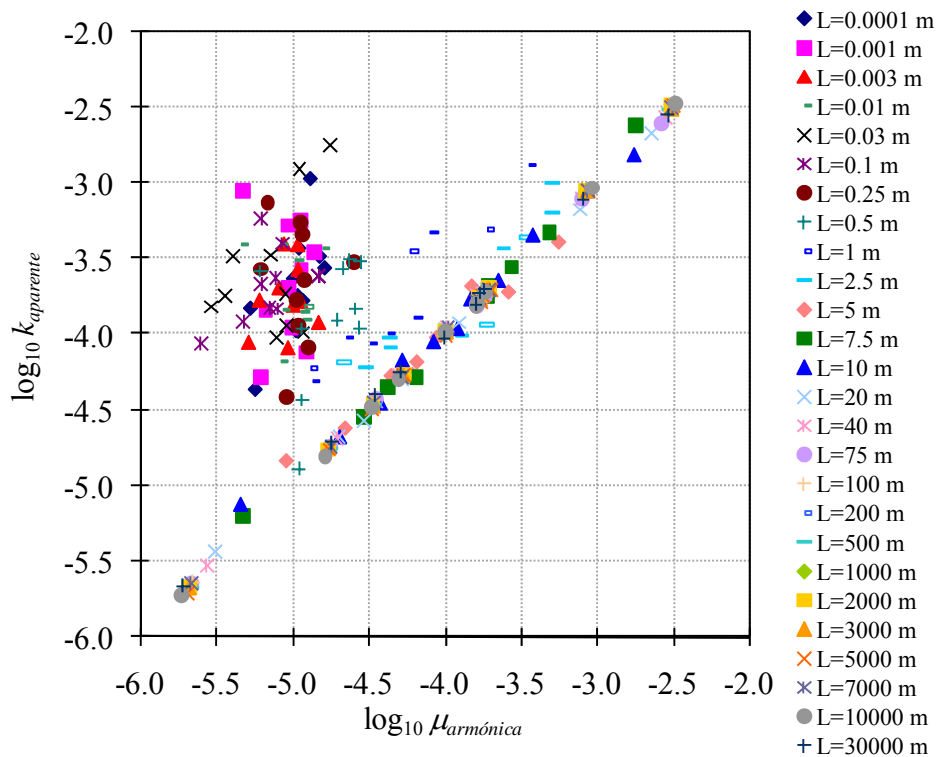


Figura 5.70  $\log_{10} \mu_{armónica}$  vs.  $\log_{10} k_{aparente}$  en el análisis 3D

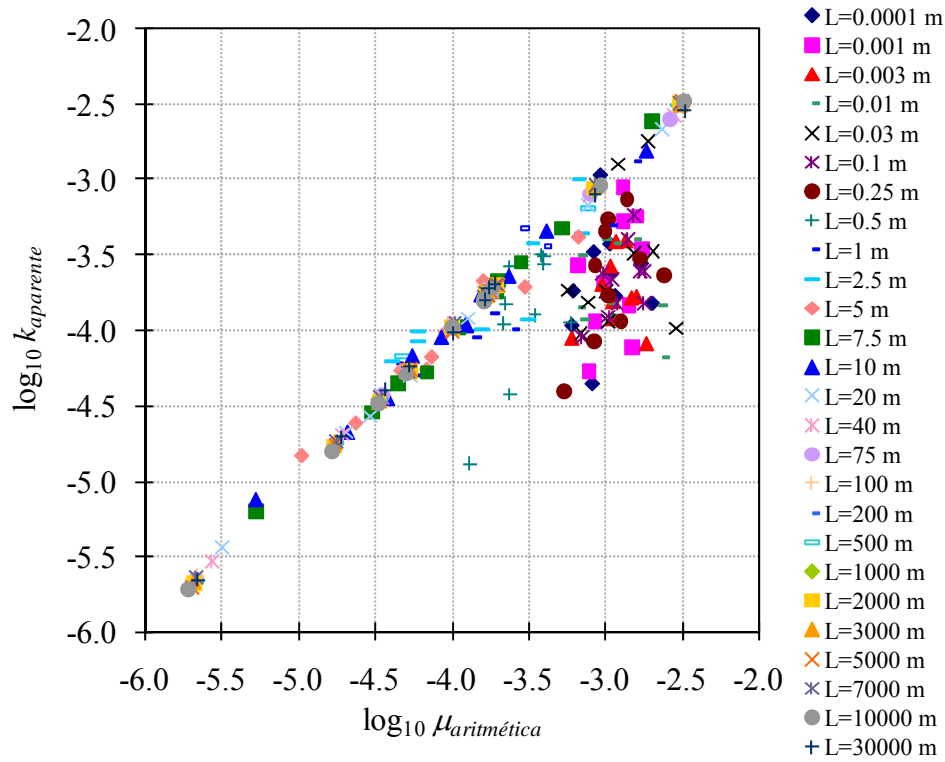


Figura 5.71  $\log_{10} \mu_{aritmética}$  vs.  $\log_{10} k_{aparente}$  en el análisis 3D

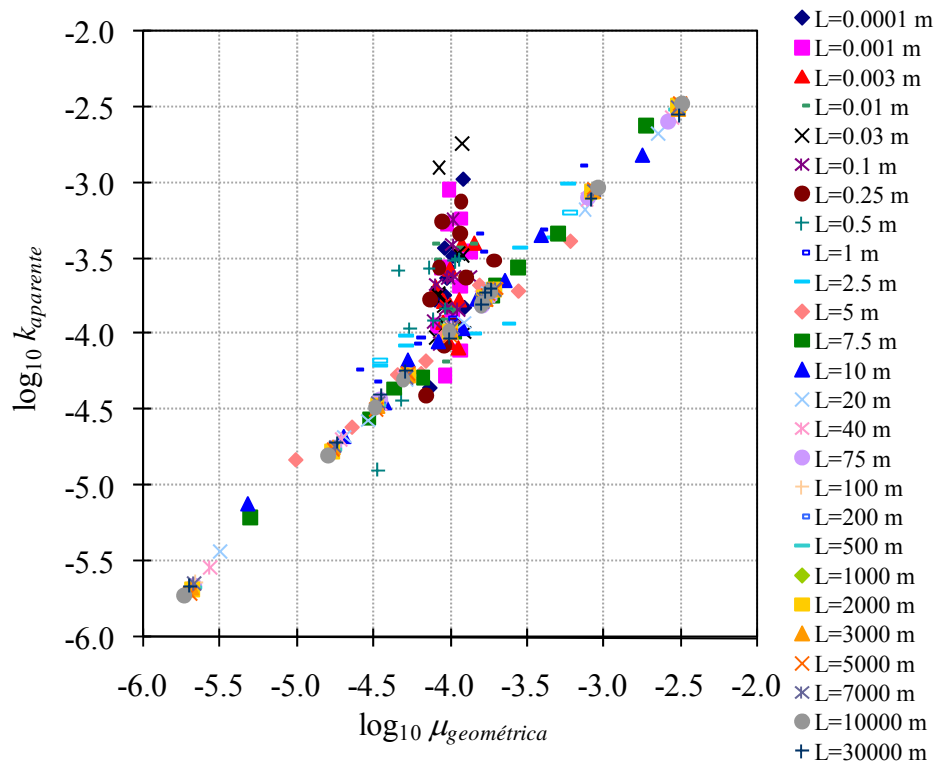


Figura 5.72  $\log_{10} \mu_{geométrica}$  vs.  $\log_{10} k_{aparente}$  en el análisis 3D

De manera adicional, en la Tabla 5.10 se proporcionan las medias y las desviaciones estándar del logaritmo de la permeabilidad aparente,  $\log_{10} k_{aparente}$ , para cada grupo de distancias de correlación  $L_i$  estudiado (Tabla 5.8). Un comportamiento similar al obtenido en el caso bidimensional se observa en dicha tabla; esto es que, cuando la distancia de correlación  $L_i$  aumenta de manera importante en el medio analizado ( $\geq 1m$ ), éste tiende a comportarse como un material homogéneo aleatorio, en el que la media de la permeabilidad aparente es aproximadamente igual a la media del campo de permeabilidad  $E\{\log_{10} k(X)\} = -4$ . Esta misma conclusión se puede apreciar de manera gráfica en la Figura 5.73, que muestra la curva que representa la media de  $\log_{10} k_{aparente}$ , así como las curvas de esta media más y menos la desviación estándar de  $\log_{10} k_{aparente}$ , respectivamente, todas en función de las distancias de correlación analizadas. Por su parte, el incremento de incertidumbre que se distingue en estas curvas para distancias mayores que la longitud del medio analizado ( $\geq 1m$ ), se muestra de manera independiente en la Figura 5.74 con la variación de la desviación estándar en función de las distancias  $L_i$ ; en ella, cuando el material es significativamente heterogéneo (para distancias de correlación pequeñas), la desviación estándar es pequeña (debido al referido fenómeno de compensación estadística). Contrariamente, a mayor distancia de correlación la desviación estándar aumenta hasta alcanzar un valor casi constante que es muy cercano a la desviación estándar del campo aleatorio de permeabilidad (cuando el material se vuelve prácticamente homogéneo). En tales condiciones existe la posibilidad de que se presente el fenómeno de percolación.

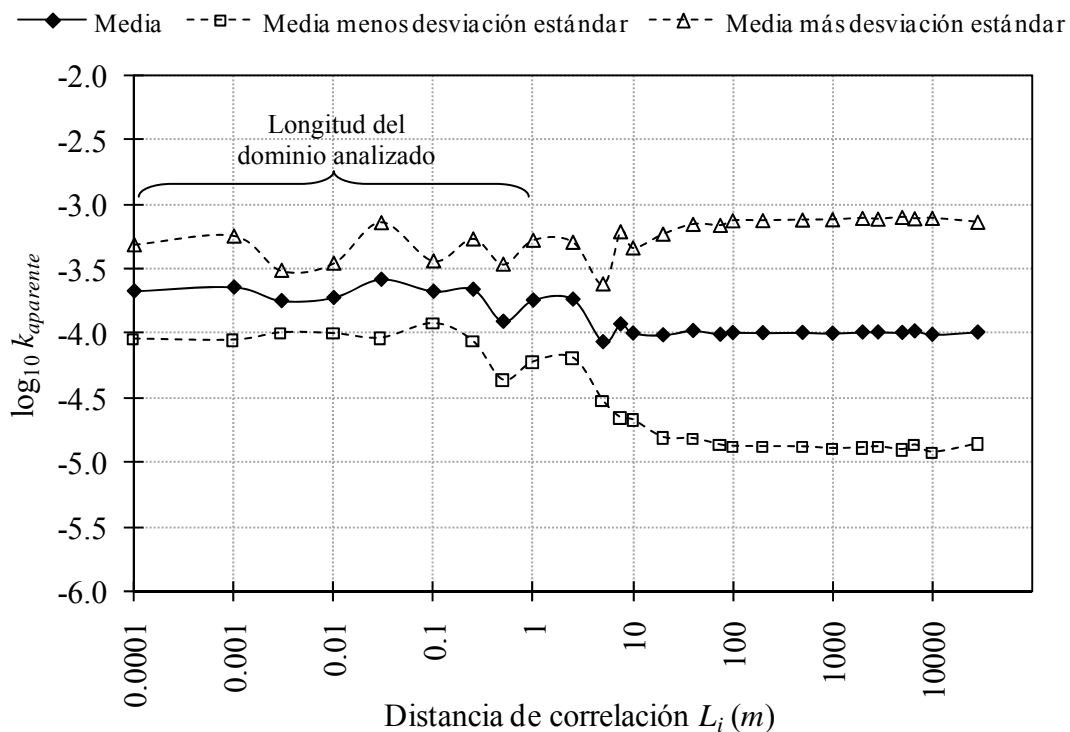


Figura 5.73  $\log_{10} k_{aparente}$  vs. distancia de correlación  $L_i$  en el análisis 3D

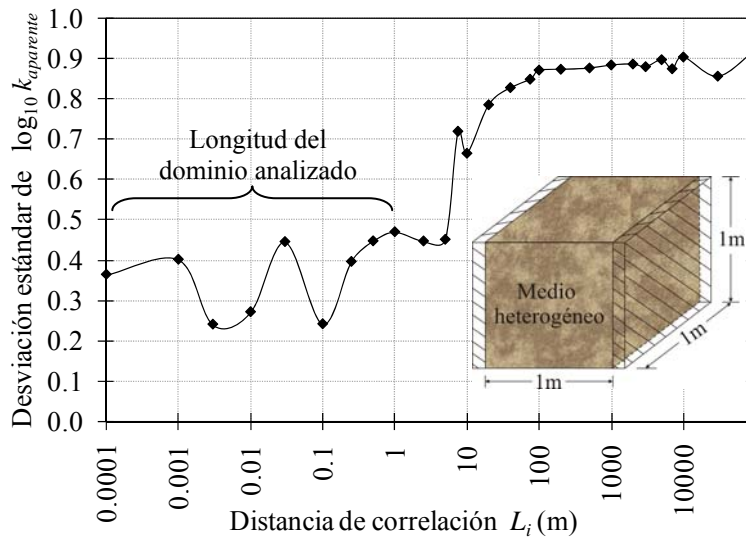


Figura 5.74 Desviación estándar de  $\log_{10} k_{aparente}$  vs. distancia de correlación  $L_i$  en el análisis 3D

Tabla 5.10 Parámetros estadísticos de  $\log_{10} k_{aparente}$  para las distintas  $L_i$  del análisis 3D

Distancia de correlación $L_i$ (m)	Media	Desviación estándar	$\mu_{\log_{10} k_{aparente}}$ menos	$\mu_{\log_{10} k_{aparente}}$ más
	$\mu_{\log_{10} k_{aparente}}$	$\sigma_{\log_{10} k_{aparente}}$	$\sigma_{\log_{10} k_{aparente}}$	$\sigma_{\log_{10} k_{aparente}}$
0.0001	-3.674	0.364	-4.038	-3.310
0.001	-3.644	0.402	-4.046	-3.243
0.003	-3.749	0.240	-3.990	-3.509
0.01	-3.725	0.271	-3.996	-3.454
0.03	-3.584	0.446	-4.030	-3.139
0.1	-3.677	0.241	-3.918	-3.436
0.25	-3.662	0.396	-4.058	-3.265
0.5	-3.909	0.447	-4.356	-3.462
1	-3.745	0.470	-4.215	-3.275
2.5	-3.738	0.447	-4.185	-3.291
5	-4.066	0.451	-4.517	-3.615
7.5	-3.929	0.720	-4.649	-3.209
10	-4.000	0.665	-4.665	-3.335
20	-4.014	0.786	-4.799	-3.228
40	-3.980	0.828	-4.808	-3.152
75	-4.009	0.849	-4.858	-3.160
100	-3.996	0.872	-4.867	-3.124
200	-3.997	0.874	-4.871	-3.123
500	-3.995	0.877	-4.872	-3.118
1000	-4.000	0.885	-4.885	-3.116
2000	-3.992	0.887	-4.879	-3.105
3000	-3.991	0.880	-4.872	-3.111
5000	-3.995	0.898	-4.893	-3.098
7000	-3.983	0.875	-4.858	-3.108
10000	-4.010	0.904	-4.914	-3.105
30000	-3.992	0.857	-4.849	-3.135

#### 5.4.4 Comentarios finales

Se analizó el problema de la estimación de la permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en dos y tres dimensiones. Se demostró la utilidad del empleo de los campos aleatorios para describir la variación espacial de la conductividad hidráulica, permitiendo a través de distintas distancias de correlación describir la heterogeneidad de los medios aleatorios analizados.

Con estas bases, se propuso una metodología sencilla para determinar la *permeabilidad aparente* de medios heterogéneos simulados en dos y tres dimensiones, a través de realizar análisis inversos con el método de elementos finitos en el caso 2D y con el método de paseos casuales en el caso 3D. Los análisis de flujo de agua 3D que se realizan con la técnica de paseos casuales presentan ventajas en cuanto al tiempo de cálculo, respecto a aquéllos que se efectúan con elementos finitos 3D; los cuales se ha observado, incrementan aun más el tiempo computacional conforme aumenta la distancia de correlación del campo aleatorio de permeabilidad considerado.

La comparación de las permeabilidades aparentes obtenidas en este estudio con las medias armónicas, geométricas y aritméticas de los medios heterogéneos simulados, permitió establecer que la *permeabilidad equivalente* de un medio heterogéneo en dos dimensiones está representada por la media geométrica del campo de permeabilidad. En el caso tridimensional, aun cuando se observó una mayor dispersión respecto a estos promedios, la media geométrica es la que exhibió un mejor ajuste con la permeabilidad aparente del dominio. Así, con base en estos resultados, ya sea que la dimensión espacial de la región de flujo sea 2D ó 3D, se sugiere emplear la media geométrica como el promedio algebraico para describir dominios heterogéneos. Lo anterior muestra que la conductividad hidráulica, no es como otras propiedades de los suelos que puede o debe necesariamente promediarse, como es la práctica común en la geotecnia, con la media aritmética como un promedio representativo de la misma.

Finalmente, respecto a la variación de la incertidumbre en la permeabilidad aparente de los campos aleatorios de permeabilidad simulados (2D ó 3D) en función de la distancia de correlación  $L_i$ , se determinó que:

- Cuando la distancia de correlación aumenta de manera significativa en el medio analizado ( $\geq 1\text{m}$ ), éste tiende a comportarse como un material homogéneo aleatorio, en el que la media de la permeabilidad aparente es aproximadamente igual a la media del campo de permeabilidad.
- Cuando el material es fuertemente heterogéneo (para distancias de correlación pequeñas) la desviación estándar de la permeabilidad aparente es pequeña; esto se debe a un *fenómeno de compensación estadística* mediante el cual la interferencia entre un mayor número de permeabilidades distintas ocasiona que la incertidumbre se *compense* o distribuya entre las mismas.
- Cuando la distancia de correlación es mayor que la longitud del medio analizado ( $\geq 1\text{m}$ ), la desviación estándar de la permeabilidad aparente aumenta de manera significativa hasta alcanzar un valor casi constante que es muy cercano a la desviación estándar del campo aleatorio de permeabilidad (cuando el material se vuelve prácticamente homogéneo). En tales condiciones existe la posibilidad de que se presente el *fenómeno de percolación*; es decir que si la correlación aumenta, las permeabilidades de ciertos elementos tienden a parecerse, originándose zonas más permeables que otras por las cuales el agua puede circular con mayor facilidad.

## 5.5 Estudio del fenómeno de percolación en una presa de tierra y enrocamiento cimentada en un suelo aluvial

### 5.5.1 Introducción

El tema de investigación de esta aplicación es la evaluación del *fenómeno de percolación* en la presa Tarbela de Pakistán, una presa de tierra y enrocamiento conocida debido a las dificultades ocasionadas por el suelo aluvial de su cimentación. En este tipo de materiales es muy factible que los resultados de los análisis no correspondan con el comportamiento físico de los mismos. Se tiene conocimiento, por ejemplo, de potenciales hidráulicos calculados con métodos numéricos que no coinciden con las lecturas piezométricas medidas en campo. Asimismo en este tipo de materiales, existe la posibilidad de que la estimación del gasto de infiltración resulte totalmente equivocada, debido al desconocimiento que se tiene de la estructura del suelo. Ante estas situaciones resulta muy útil evaluar el *fenómeno de percolación*, es decir, determinar cuáles son los caminos *preferenciales* de circulación del agua que pueden suscitar condiciones de flujo muy diferentes a las supuestas correctas o “reales” debido a los cálculos. Esto no quiere decir necesariamente que los análisis sean erróneos, sino más bien, pone en evidencia que a la exploración geotécnica pueden escapar detalles del subsuelo que no se reflejan en los datos considerados en los análisis, y que facilitan el paso del agua a través de ellos, pudiendo provocar serios problemas en la cimentación y el cuerpo de una presa, e incluso en situaciones extremas ocasionar la falla de las estructuras.

En este estudio se desarrolla y respalda una metodología sencilla para la determinación de los probables caminos de percolación en el suelo de cimentación de una presa, así como del cálculo del gasto correspondiente a estas situaciones críticas. En particular, se evalúa este fenómeno en el suelo aluvial de la presa Tarbela de Pakistán. Con estos fines, se implementan unos algoritmos que permiten “sembrar” de manera aleatoria zonas de mayor permeabilidad dentro del medio, las cuales si se unen, constituyen un canal de percolación. Se generan de esta manera configuraciones aleatorias con subdominios de permeabilidad alta en el suelo de cimentación de la presa, para las que se evalúa numéricamente el fenómeno de percolación para un flujo de agua tanto en dos (2D) como en tres dimensiones (3D). El gasto de infiltración en la región de flujo se calcula con el *método de elementos finitos (FEM, ANEXO III)* en el caso bidimensional, y con el *método de los paseos casuales (RWM, ANEXO II)* en el caso tridimensional. Los resultados obtenidos se analizan al finalizar los cálculos y se presentan comentarios al respecto.

### 5.5.2 Características generales de la presa

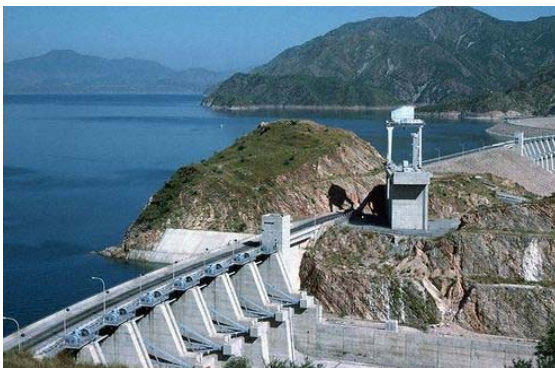
La presa Tarbela, una de las estructuras de tierra y enrocamiento más grandes del mundo, se localiza en el río Indo en Pakistán, aproximadamente a 50 km al noroeste de Islamabad cerca del Distrito de Haripur, donde el río pasa a través de las colinas de los Himalayas (Figura 5.75).

La presa fue construida entre 1968 y 1976; tiene 145m de altura y 2743m de longitud en su cresta, con un volumen de 106,000,000 m<sup>3</sup> y una capacidad de almacenamiento de 13,690,000,000 m<sup>3</sup>. Esta presa se construyó inicialmente para regular el flujo del río Indo y beneficiar la irrigación; sin embargo, otros de sus objetivos de construcción fueron: la generación de energía eléctrica, la contribución substancial al turismo, las posibilidades de pesca comercial y las oportunidades de empleo durante y después de la construcción (Lowe, 1978). Algunas fotografías de la misma se muestran en las Figuras 5.76a-d.





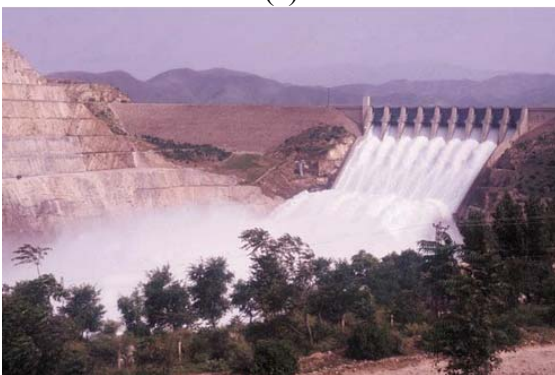
Figura 5.75 Localización de la presa Tarbela, Pakistán (Google Earth, 2010)



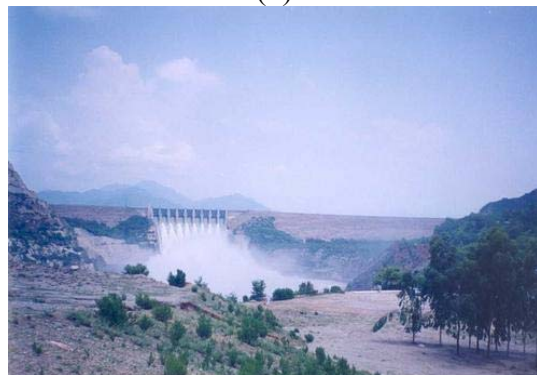
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.76 Fotografías de la presa Tarbela (Google Earth, 2010)

La presa Tarbela está cimentada sobre un profundo y errático suelo aluvial (Lowe, 1978). La sección transversal de la misma, que se ilustra en la Figura 5.77, muestra que efectivamente el suelo de cimentación está constituido por material muy permeable, e inclusive se puede distinguir una zona crítica denominada “*openwork*”, la cual constituye un canal que propicia la percolación. Más adelante se advertirá sin embargo, que éste no es el único canal de percolación que se puede presentar en este tipo de suelo.

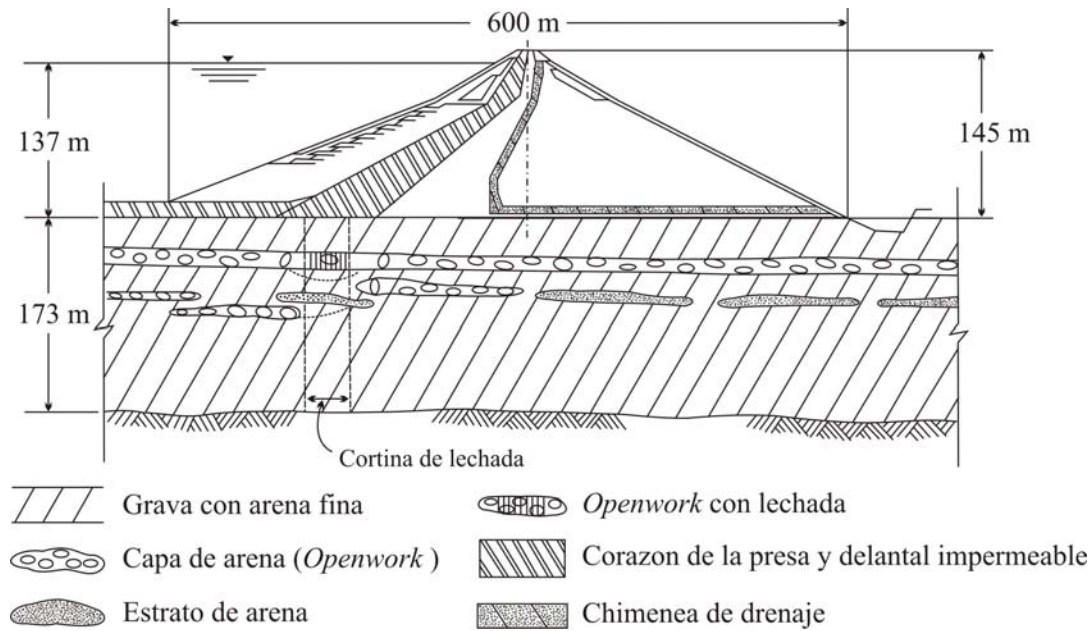


Figura 5.77 Sección transversal de la Presa Tarbela (Lowe, 1978)

### 5.5.3 Evaluación bidimensional de la percolación

La evaluación bidimensional de la percolación se realiza con ayuda del método de elementos finitos (*FEM*, ANEXO III), modelando el suelo de cimentación con una malla de 3026 elementos y 1620 nodos. Las dimensiones del dominio consideradas en el análisis son las que se indican en la Figura 5.78. Asimismo las condiciones impuestas en las fronteras permeables del dominio son:  $h=310\text{m}$  en la línea horizontal de aguas arriba y  $h=173\text{m}$  en la línea horizontal de aguas abajo, correspondiendo a una pérdida de carga hidráulica  $\Delta h=137\text{m}$ , como se señala en la misma figura.

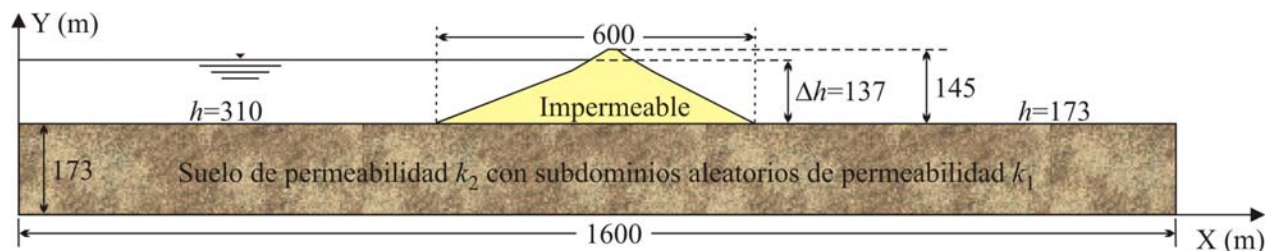


Figura 5.78 Características geométricas y de frontera consideradas en el análisis de percolación 2D de la presa Tarbela

Tomando en cuenta la Figura 5.77, se acepta que el suelo de cimentación de la presa está constituido en su mayoría por el material 2 (con permeabilidad  $k_2$ ), y que dentro de él existen zonas de mayor permeabilidad (material 1, con permeabilidad  $k_1$ ), las cuales si en algún momento se conectan, son las que originan el canal o los canales de percolación. Se asume que las conductividades hidráulicas de estos materiales son:

$$k_1 = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s} \quad \leftarrow \quad \text{Material 1} \quad (5.59)$$

$$k_2 = 1 \times 10^{-6} \text{ m/s} \quad \leftarrow \quad \text{Material 2} \quad (5.60)$$

Para tratar de representar la naturaleza errática del suelo aluvial de la cimentación, la distribución de estos dos materiales (o de las permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$ ) en el dominio de estudio se realiza de manera aleatoria por medio de un algoritmo que se basa en la generación de números aleatorios (PERCOLA2DA; López, 2004). Este algoritmo permite asignar (con base en el *método del punto medio –midpoint method–*) a cada elemento o grupos de elementos finitos la conductividad hidráulica  $k_1$  ó  $k_2$  dependiendo de una probabilidad  $P(k_1)$  impuesta al material 1, la cual se compara con los números aleatorios  $NA$  generados por el programa en el momento de ejecución. Esto es, si  $NA < P(k_1)$  se impone la permeabilidad  $k_1$  al elemento correspondiente, en caso contrario, se le atribuye la permeabilidad  $k_2$ .

En los análisis aquí efectuados, la creación de zonas de permeabilidad alta se realiza para distintas *distancias de correlación o de influencia*<sup>(5.7)</sup>  $L_i$ . En un primer caso de estudio, se considera una distancia de correlación  $L = 0$ , que indica una independencia lineal entre las permeabilidades de los elementos finitos o subdominios de análisis. De igual manera, se considera un rango variable de cero a uno para la probabilidad asignada al material 1:

$$P(k_1) = 0; 0.1; 0.2; \dots; 1 \quad (5.61)$$

La finalidad es estudiar el comportamiento del suelo de cimentación de la presa conforme aumenta la presencia de zonas de permeabilidad alta (material 1) y mostrar en qué condiciones pueden formarse canales de percolación.

Algunas de las distribuciones aleatorias de los materiales 1 y 2 generadas de esta manera en el dominio analizado, se ilustran en las mallas de elementos finitos de las Figuras 5.79 a 5.83. En estas figuras, la permeabilidad  $k_2$  se representa de color café y la permeabilidad alta  $k_1$ , de color verde. Así, en la Figura 5.79 se puede apreciar que existen muy pocas regiones de permeabilidad alta, puesto que la probabilidad de que se presente dicho material es muy baja:  $P(k_1) = 0.1$ . Por el contrario, en la Figura 5.83, debido a que se tiene una probabilidad  $P(k_1) = 0.8$ , el suelo en su mayoría está constituido por el material 1 con permeabilidad alta  $k_1$ .

---

<sup>(5.7)</sup> Distancia hasta la cual la conductividad hidráulica está autocorrelacionada.

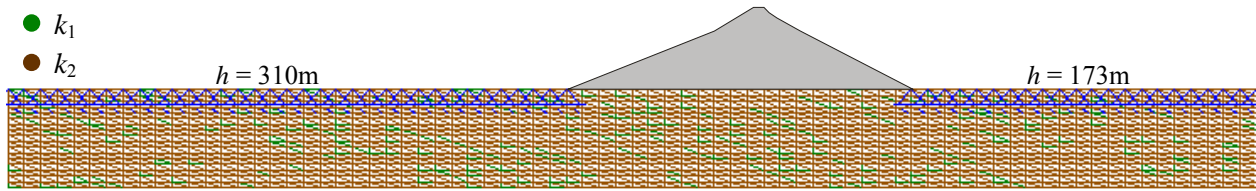


Figura 5.79 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.1$ )

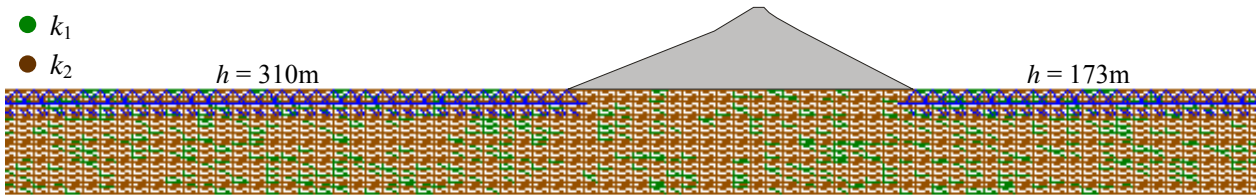


Figura 5.80 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.2$ )

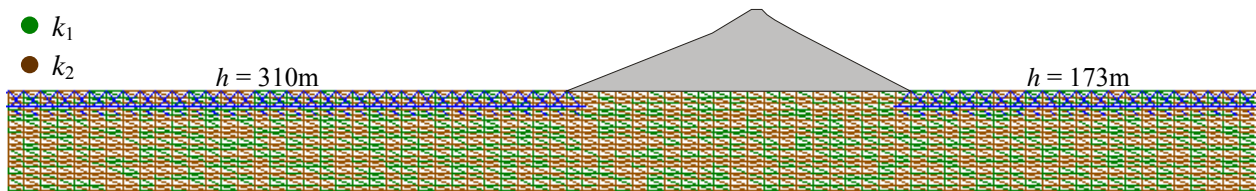


Figura 5.81 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.4$ )

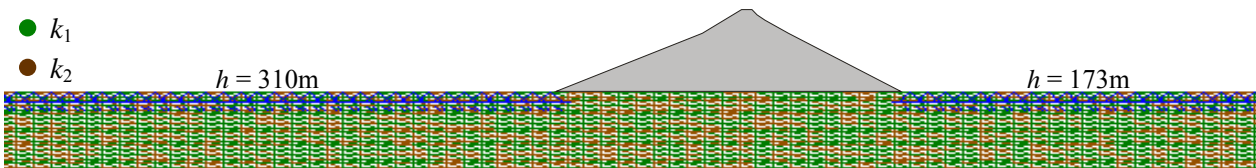


Figura 5.82 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.6$ )

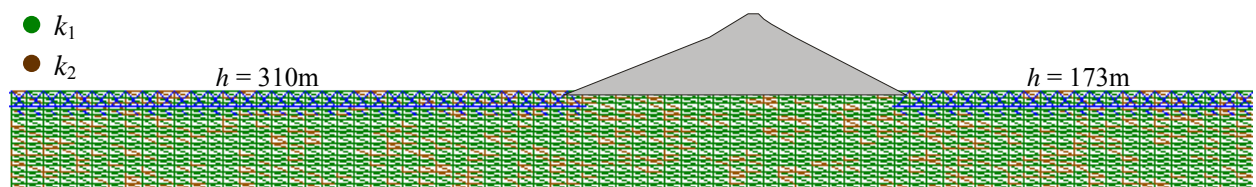


Figura 5.83 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.8$ )

Después de haber asignado de manera aleatoria los valores de las permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$  a todos los elementos finitos de la malla, se calcula el gasto que atraviesa el suelo de cimentación con el algoritmo FLOWNETS (López, 2001), que se fundamenta en la teoría del ANEXO III. En la Tabla 5.11 se presenta el resumen de los gastos obtenidos para cada una de las probabilidades  $P(k_1)$  consideradas en el análisis. Estos mismos resultados se pueden apreciar de manera gráfica en la Figura 5.85, en la que se observa que conforme aumenta la probabilidad  $P(k_1)$  (de que se tenga el material 1), el gasto es cada vez mayor, lo cual resulta lógico puesto que  $k_1 > k_2$ . Se advierte también que para una probabilidad  $P(k_1) \approx 0.70$ , el gasto aumenta de manera significativa. Lo anterior sugiere que a partir de esta probabilidad se presenta en el dominio de estudio el *fenómeno de percolación* (ver Figura 5.85). Tal probabilidad es la que en la literatura se conoce como *probabilidad crítica o umbral de percolación* (Shante & Kirkpatrick, 1971; Gilles de Gennes, 1976). El valor anterior coincide aproximadamente con los resultados de estudios realizados en el marco de la denominada *teoría de percolación* (Shante & Kirkpatrick, 1971); estos resultados señalan que en una red bidimensional con *número de coordinación*<sup>(5.8)</sup>  $z_p = 3$  la *probabilidad crítica* es  $p_{cb} = 0.67-0.70$  (Tabla 2.1 del Capítulo 2). En la Figura 5.84 se presenta la analogía de los términos empleados en la teoría de percolación con los del *FEM* aplicado aquí.

Tabla 5.11 Resumen de  $Q_{total}$  para  $L = 0$  en el análisis de percolación 2D

$P(k_1)$	$P(k_2)$	$Q_{total}$ (m <sup>3</sup> /s/metro lineal)
0	1	$3.156 \times 10^{-05}$
0.1	0.9	$8.728 \times 10^{-05}$
0.2	0.8	$6.479 \times 10^{-05}$
0.3	0.7	$1.803 \times 10^{-04}$
0.4	0.6	$4.127 \times 10^{-04}$
0.5	0.5	$9.077 \times 10^{-04}$
0.6	0.4	$1.184 \times 10^{-03}$
0.7	0.3	$2.471 \times 10^{-03}$
0.8	0.2	$2.336 \times 10^{-03}$
0.9	0.1	$2.871 \times 10^{-03}$
1	0	$3.156 \times 10^{-03}$

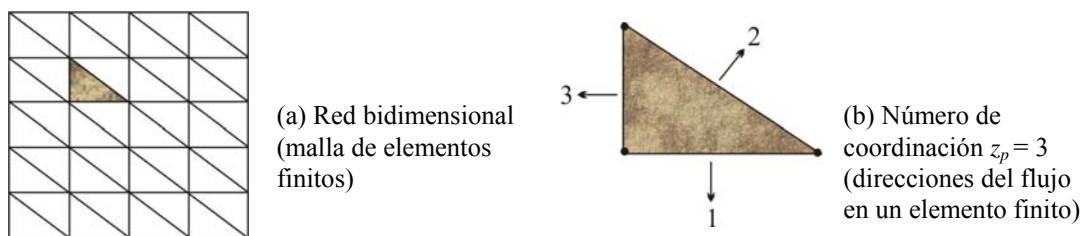


Figura 5.84 Analogía de términos empleados en la teoría de percolación con los del *FEM*

<sup>(5.8)</sup> Número de coordinación  $z_p$ : Las posibles direcciones en las que el agua puede circular (por el lado opuesto al nodo del elemento finito).

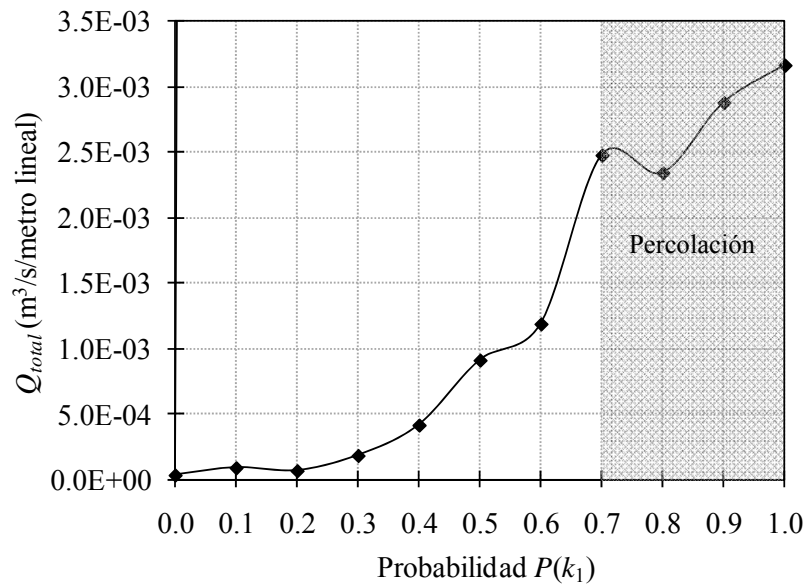


Figura 5.85 Gasto  $Q_{total}$  vs. Probabilidad  $P(k_1)$  para  $L = 0$  en el análisis de percolación 2D

Adicionalmente, se realizaron otros cálculos en los que se consideraron distintas distancias de correlación en las direcciones horizontal y vertical, con la finalidad de generar una especie de “*openworks*” o subdominios homogéneos de permeabilidad alta  $k_1$ . Para lo cual se implementó un algoritmo (PERCOLA2DB; López, 2004) que permite “sembrar” al azar (mediante números aleatorios) un determinado número de “*elementos semilla*” (*ES*), cada uno de los cuales constituyen los centros de gravedad de los “*openworks*” que se crean a partir de ellos (con base en las distancias de correlación consideradas). Cabe la aclaración de que los “*openworks*” se hicieron coincidir con grupos de elementos de la malla de elementos finitos empleada en los cálculos, a ellos que se les asignó la permeabilidad  $k_1$ , a los demás elementos fuera de estos subdominios se les asignó la permeabilidad  $k_2$ . Así, otros casos de estudio se efectuaron para un número de elementos semilla  $ES = 10$  y  $ES = 20$ ; cada uno para distancias de correlación horizontal  $L_x = 36$  m,  $L_x = 100$  m,  $L_x = 400$  m y  $L_x = 800$  m, y distancia de correlación vertical constante en todos ellos de  $L_y = 10$  m. En cada combinación diferente de estos datos se efectuaron un total de 25 realizaciones (lo que permitió obtener en cada ejecución una distribución diferente de los materiales 1 y 2 en el dominio analizado). Algunas de las configuraciones aleatorias obtenidas de este modo, se ilustran en las Figuras 5.86 a 5.95. En ellas los subdominios con permeabilidad alta  $k_1$  se dibujan de color verde, y el material restante que representa a  $k_2$  se dibuja de color café. De manera general, y para las condiciones aquí consideradas, en las figuras anteriores se aprecia que para distancias de correlación  $L_x \leq 100$  m (con  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ ) no se generan canales de percolación. En cambio para una pequeña cantidad de *openworks* ( $ES = 10$ ) con dimensiones  $L_x = 400$  m y  $L_y = 10$  m, en varias de las realizaciones efectuadas se presenta el fenómeno de percolación. Algunos de los canales de percolación que se forman (ver Figuras 5.92 a 5.95) son similares incluso a los “*openworks*” del suelo de cimentación de la presa Tarbela (ver Figura 5.77). Asimismo, en varias de las

configuraciones obtenidas se distingue una condición que se considera crítica; ésta corresponde al caso en el que se genera un canal de percolación debajo de la presa, y éste a su vez, conecta las zonas permeables de aguas arriba y aguas abajo de la presa (ver Figuras 5.88–5.90 y 5.92–5.95).

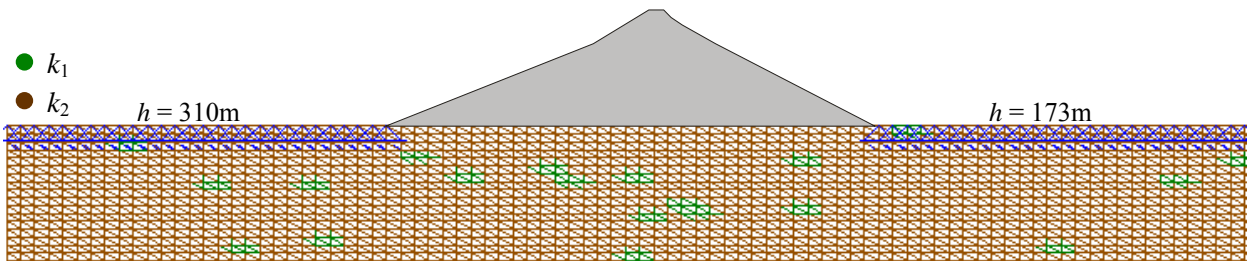


Figura 5.86 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 14 con  $L_x = 36$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 20$ )

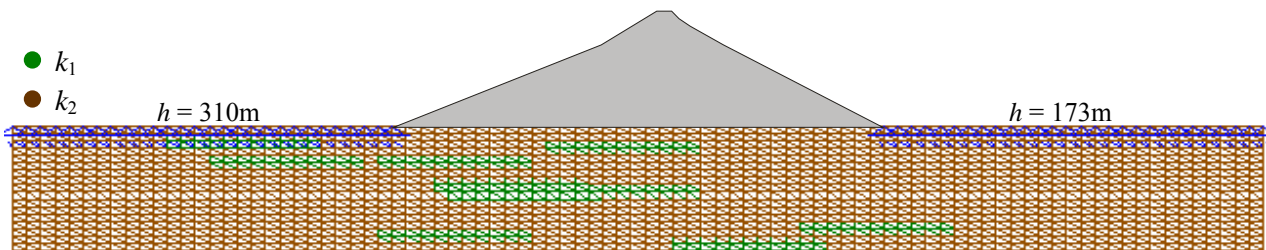


Figura 5.87 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 19 con  $L_x = 100$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

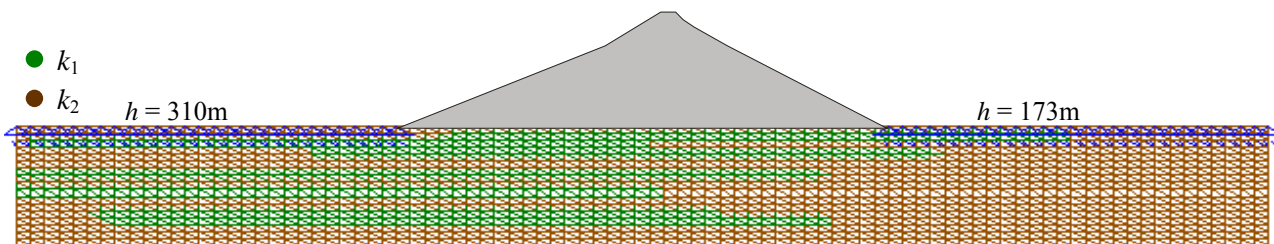


Figura 5.88 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 5 con  $L_x = 400$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

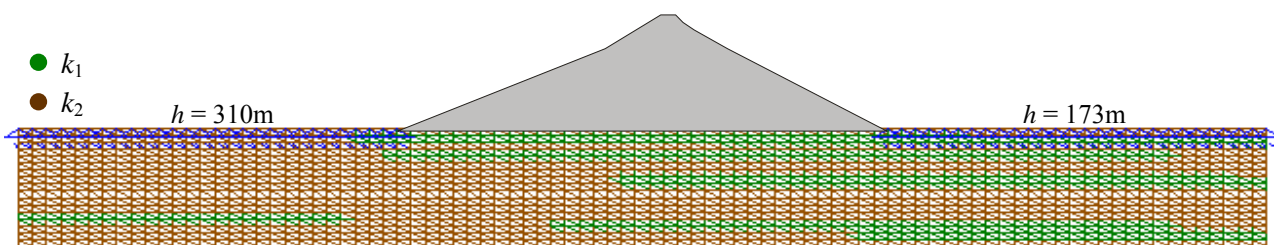


Figura 5.89 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 11 con  $L_x = 400$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

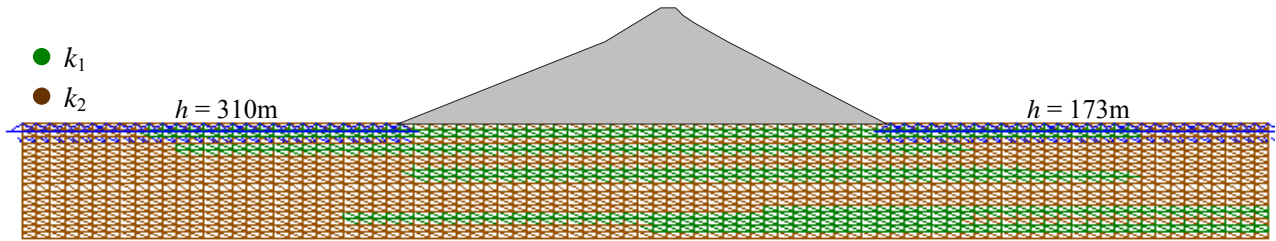


Figura 5.90 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 17 con  $L_x = 400$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

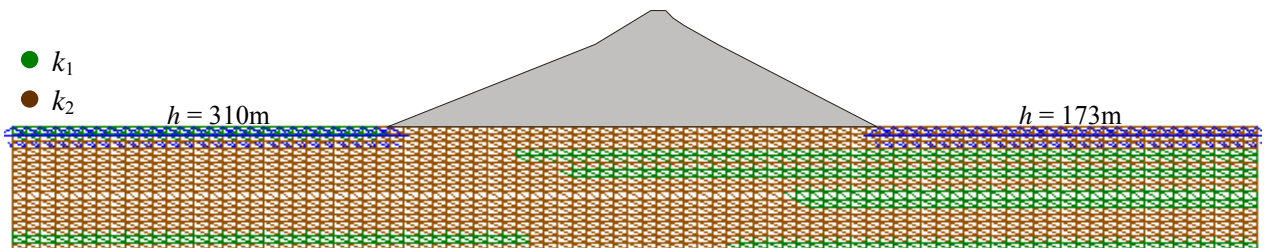


Figura 5.91 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 18 con  $L_x = 400$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

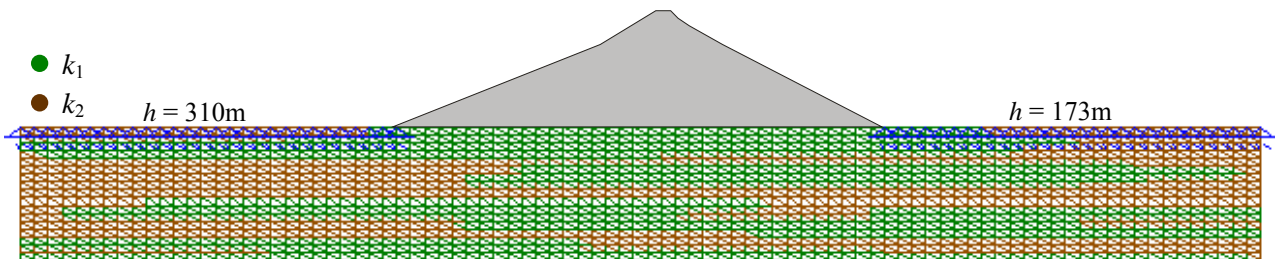


Figura 5.92 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 3 con  $L_x = 400$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 20$ )

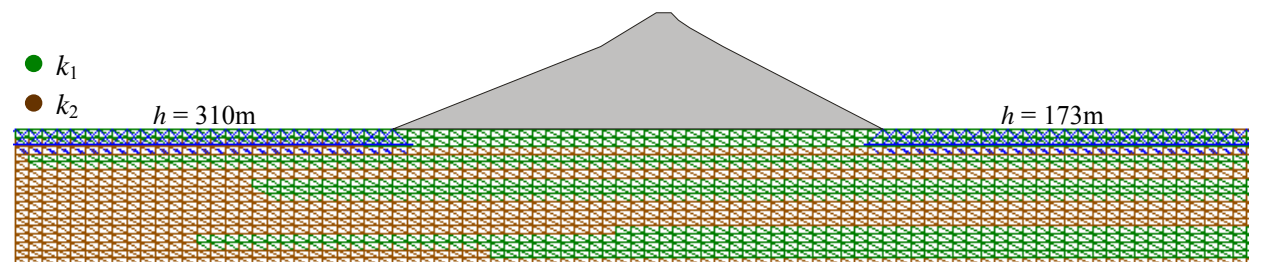


Figura 5.93 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 4 con  $L_x = 800$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )



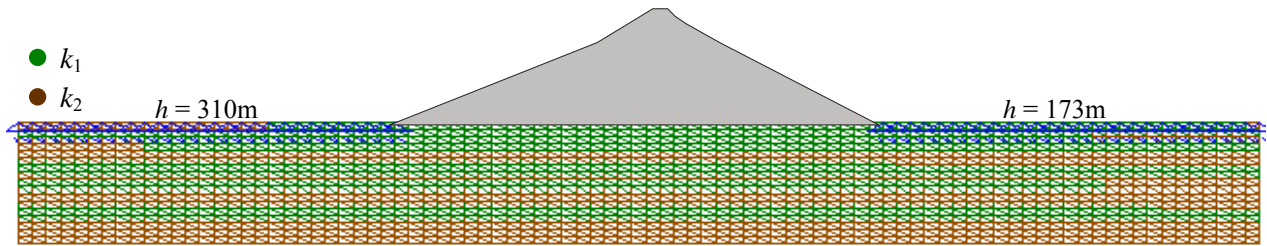


Figura 5.94 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 12 con  $L_x = 800$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

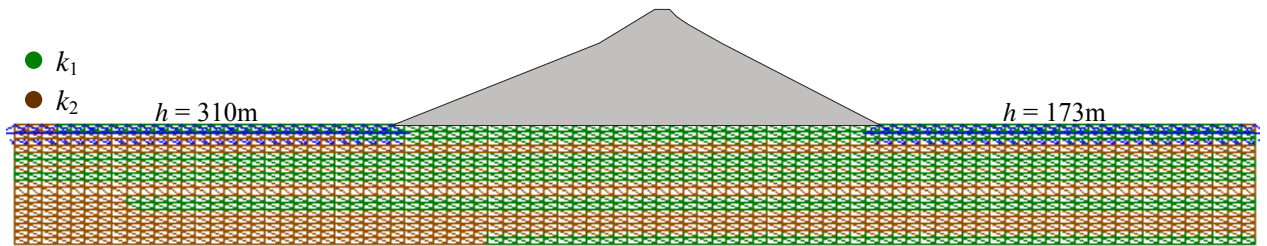


Figura 5.95 Configuración aleatoria 2D de las zonas de mayor permeabilidad -en verde- (realización N° 25 con  $L_x = 800$  m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$ )

Con base en las distribuciones aleatorias de los materiales 1 y 2 generadas previamente para distancias  $L \neq 0$ , se determina el gasto  $Q_{total}$  en el dominio mediante el algoritmo FLOWNETS (López, 2001). En las Tablas 5.12 a 5.14 se presenta el resumen de los resultados obtenidos en cada realización para un número de elementos semilla  $ES = 10$  y  $ES = 20$ , y distancias de correlación  $L_x = 36$  m,  $L_x = 400$  m y  $L_x = 800$  m, respectivamente. Estos mismos resultados se pueden apreciar gráficamente en las Figuras 5.96 a 5.98 (curvas de  $Q_{total}$  vs. N° de realización).

La principal contribución de las gráficas anteriores es que ayudan a distinguir cuáles son las condiciones críticas para las que puede presentarse el fenómeno de percolación, el cual se manifiesta en las mismas por los “picos” o cambios bruscos en el valor del gasto. En estas gráficas se señalan con círculos varias de estas situaciones críticas, ahí mismo también se indica el número de figura en la que se puede apreciar la configuración aleatoria de  $k_1$  y  $k_2$  correspondiente. Así, los círculos rojos de las Figuras 5.97 y 5.98 revelan la generación de canales de percolación. Se aclara que en la Figura 5.97 se señala un círculo azul que no corresponde a un cambio brusco del gasto (su distribución aleatoria de materiales se puede ver en la Figura 5.91), sino que simplemente se seleccionó para que se pueda distinguir la diferencia respecto a los casos donde se presenta el fenómeno de percolación. Similarmente en la Figura 5.96, aun cuando se distingue un cambio brusco en el gasto, que se señala con un círculo amarillo, éste no se refiere a un canal de percolación debido a la pequeña distancia de correlación considerada en ese cálculo; también se puede observar la diferencia en el orden de magnitud del gasto calculado para esta condición respecto a los gastos de las Figuras 5.97 y 5.98 donde sí se generan conductos de percolación. La configuración aleatoria del dominio para este último caso se muestra en la Figura 5.86.

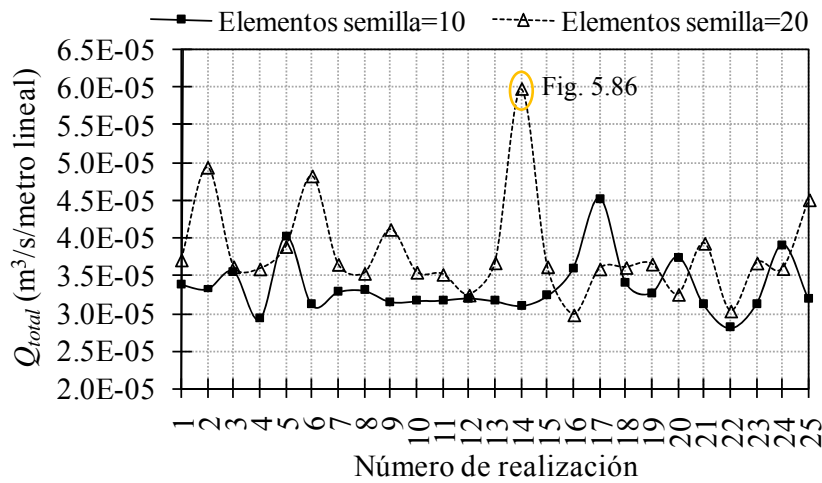


Figura 5.96 Variación del gasto  $Q_{total}$  en las realizaciones efectuadas para  $L_x = 36$  m y  $L_y = 10$  m

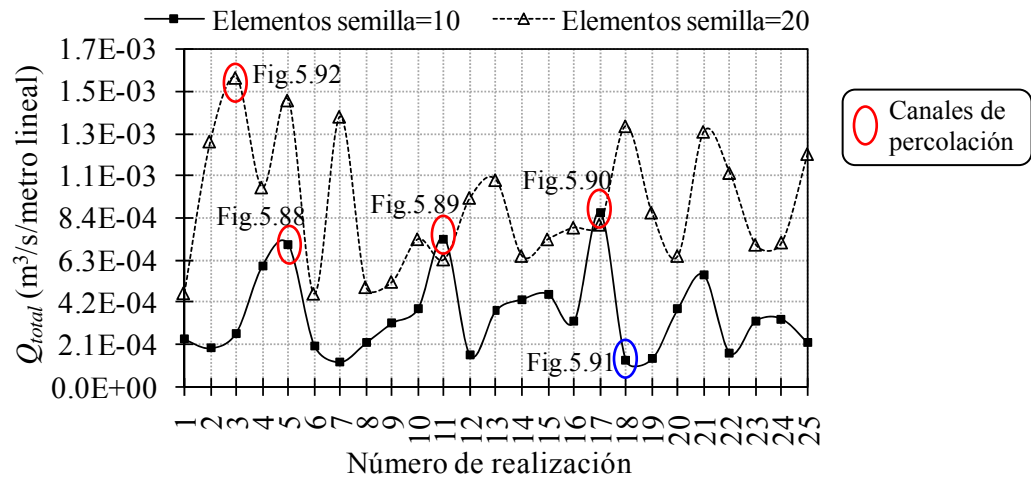


Figura 5.97 Variación del gasto  $Q_{total}$  en las realizaciones efectuadas para  $L_x = 400$  m y  $L_y = 10$  m

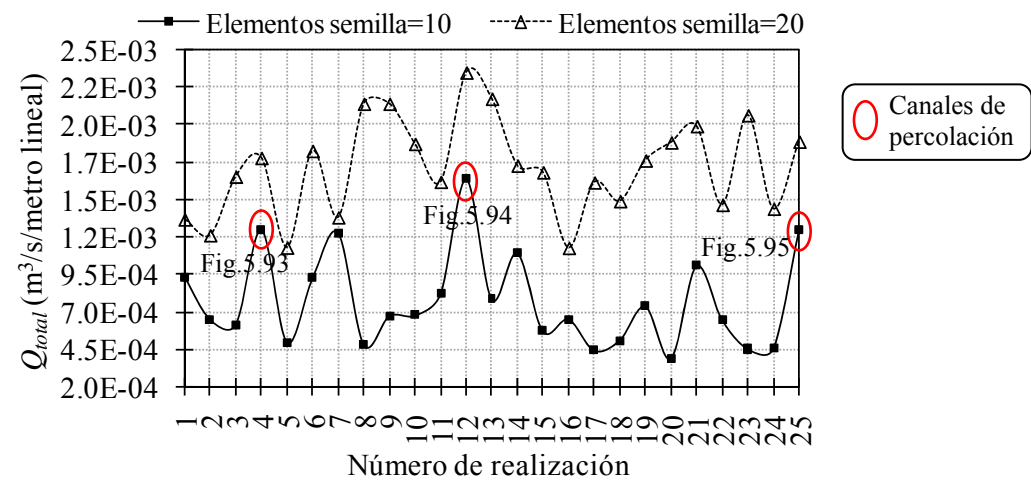


Figura 5.98 Variación del gasto  $Q_{total}$  en las realizaciones efectuadas para  $L_x = 800$  m y  $L_y = 10$  m

Tabla 5.12 Gasto total para  $L_x = 36$  m con  $ES = 10$  y  $ES = 20$ , respectivamente

Realización	$Q_{total}$ (m <sup>3</sup> /s/metro lineal)	
	Elementos semilla=10	Elementos semilla=20
1	$3.376 \times 10^{-05}$	$3.703 \times 10^{-05}$
2	$3.319 \times 10^{-05}$	$4.928 \times 10^{-05}$
3	$3.552 \times 10^{-05}$	$3.614 \times 10^{-05}$
4	$2.921 \times 10^{-05}$	$3.584 \times 10^{-05}$
5	$4.018 \times 10^{-05}$	$3.882 \times 10^{-05}$
6	$3.106 \times 10^{-05}$	$4.814 \times 10^{-05}$
7	$3.279 \times 10^{-05}$	$3.645 \times 10^{-05}$
8	$3.295 \times 10^{-05}$	$3.526 \times 10^{-05}$
9	$3.150 \times 10^{-05}$	$4.106 \times 10^{-05}$
10	$3.158 \times 10^{-05}$	$3.541 \times 10^{-05}$
11	$3.170 \times 10^{-05}$	$3.512 \times 10^{-05}$
12	$3.197 \times 10^{-05}$	$3.240 \times 10^{-05}$
13	$3.158 \times 10^{-05}$	$3.666 \times 10^{-05}$
14	$3.098 \times 10^{-05}$	$5.969 \times 10^{-05}$
15	$3.229 \times 10^{-05}$	$3.613 \times 10^{-05}$
16	$3.600 \times 10^{-05}$	$2.977 \times 10^{-05}$
17	$4.524 \times 10^{-05}$	$3.584 \times 10^{-05}$
18	$3.405 \times 10^{-05}$	$3.603 \times 10^{-05}$
19	$3.269 \times 10^{-05}$	$3.649 \times 10^{-05}$
20	$3.748 \times 10^{-05}$	$3.248 \times 10^{-05}$
21	$3.106 \times 10^{-05}$	$3.923 \times 10^{-05}$
22	$2.805 \times 10^{-05}$	$3.028 \times 10^{-05}$
23	$3.124 \times 10^{-05}$	$3.662 \times 10^{-05}$
24	$3.910 \times 10^{-05}$	$3.588 \times 10^{-05}$
25	$3.182 \times 10^{-05}$	$4.498 \times 10^{-05}$

Tabla 5.13 Gasto total para  $L_x = 400$  m con  $ES = 10$  y  $ES = 20$ , respectivamente

Realización	$Q_{total}$ (m <sup>3</sup> /s/metro lineal)	
	Elementos semilla=10	Elementos semilla=20
1	$2.371 \times 10^{-04}$	$4.648 \times 10^{-04}$
2	$1.939 \times 10^{-04}$	$1.219 \times 10^{-03}$
3	$2.700 \times 10^{-04}$	$1.535 \times 10^{-03}$
4	$6.000 \times 10^{-04}$	$9.906 \times 10^{-04}$
5	$7.059 \times 10^{-04}$	$1.423 \times 10^{-03}$
6	$2.084 \times 10^{-04}$	$4.626 \times 10^{-04}$
7	$1.253 \times 10^{-04}$	$1.342 \times 10^{-03}$
8	$2.200 \times 10^{-04}$	$4.951 \times 10^{-04}$
9	$3.176 \times 10^{-04}$	$5.216 \times 10^{-04}$
10	$3.894 \times 10^{-04}$	$7.335 \times 10^{-04}$
11	$7.371 \times 10^{-04}$	$6.326 \times 10^{-04}$
12	$1.596 \times 10^{-04}$	$9.389 \times 10^{-04}$
13	$3.800 \times 10^{-04}$	$1.027 \times 10^{-03}$
14	$4.348 \times 10^{-04}$	$6.504 \times 10^{-04}$
15	$4.616 \times 10^{-04}$	$7.331 \times 10^{-04}$
16	$3.241 \times 10^{-04}$	$7.910 \times 10^{-04}$
17	$8.661 \times 10^{-04}$	$8.056 \times 10^{-04}$
18	$1.345 \times 10^{-04}$	$1.295 \times 10^{-03}$
19	$1.399 \times 10^{-04}$	$8.660 \times 10^{-04}$
20	$3.872 \times 10^{-04}$	$6.500 \times 10^{-04}$
21	$5.548 \times 10^{-04}$	$1.267 \times 10^{-03}$
22	$1.705 \times 10^{-04}$	$1.062 \times 10^{-03}$
23	$3.281 \times 10^{-04}$	$7.057 \times 10^{-04}$
24	$3.384 \times 10^{-04}$	$7.170 \times 10^{-04}$
25	$2.214 \times 10^{-04}$	$1.157 \times 10^{-03}$

Tabla 5.14 Gasto total para  $L_x = 800$  m con  $ES = 10$  y  $ES = 20$ , respectivamente

Realización	$Q_{total}$ (m <sup>3</sup> /s/metro lineal)	
	Elementos semilla=10	Elementos semilla=20
1	$9.378 \times 10^{-04}$	$1.321 \times 10^{-03}$
2	$6.540 \times 10^{-04}$	$1.215 \times 10^{-03}$
3	$6.201 \times 10^{-04}$	$1.607 \times 10^{-03}$
4	$1.254 \times 10^{-03}$	$1.732 \times 10^{-03}$
5	$5.020 \times 10^{-04}$	$1.133 \times 10^{-03}$
6	$9.314 \times 10^{-04}$	$1.778 \times 10^{-03}$
7	$1.233 \times 10^{-03}$	$1.334 \times 10^{-03}$
8	$4.868 \times 10^{-04}$	$2.093 \times 10^{-03}$
9	$6.775 \times 10^{-04}$	$2.093 \times 10^{-03}$
10	$6.815 \times 10^{-04}$	$1.825 \times 10^{-03}$
11	$8.247 \times 10^{-04}$	$1.572 \times 10^{-03}$
12	$1.592 \times 10^{-03}$	$2.302 \times 10^{-03}$
13	$7.886 \times 10^{-04}$	$2.127 \times 10^{-03}$
14	$1.098 \times 10^{-03}$	$1.680 \times 10^{-03}$
15	$5.758 \times 10^{-04}$	$1.635 \times 10^{-03}$
16	$6.553 \times 10^{-04}$	$1.131 \times 10^{-03}$
17	$4.480 \times 10^{-04}$	$1.567 \times 10^{-03}$
18	$5.157 \times 10^{-04}$	$1.443 \times 10^{-03}$
19	$7.425 \times 10^{-04}$	$1.715 \times 10^{-03}$
20	$3.928 \times 10^{-04}$	$1.835 \times 10^{-03}$
21	$1.012 \times 10^{-03}$	$1.944 \times 10^{-03}$
22	$6.532 \times 10^{-04}$	$1.418 \times 10^{-03}$
23	$4.574 \times 10^{-04}$	$2.016 \times 10^{-03}$
24	$4.581 \times 10^{-04}$	$1.392 \times 10^{-03}$
25	$1.247 \times 10^{-03}$	$1.840 \times 10^{-03}$

### 5.5.4 Evaluación tridimensional de la percolación

La evaluación tridimensional del fenómeno de percolación en la presa Tarbela, se lleva a cabo en el dominio 3D cuyas características geométricas y de frontera se ilustran en la Figura 5.99. El análisis del flujo de agua se efectúa con el *método de los pasos ó paseos casuales (RWM*, discutido con detalle en el ANEXO II), para las condiciones de frontera impuestas en los planos permeables horizontales de aguas arriba y aguas abajo como:  $h=317$  m y  $h=180$  m, respectivamente; potenciales que corresponden a una pérdida de carga hidráulica  $\Delta h=137$  m, según el nivel del agua (aguas arriba) que se señala en la misma figura. La malla tridimensional de los puntos a través de los cuales se desplaza la partícula que se estudia mediante este método es la malla de 4851 puntos que se indica en la Figura 5.100.

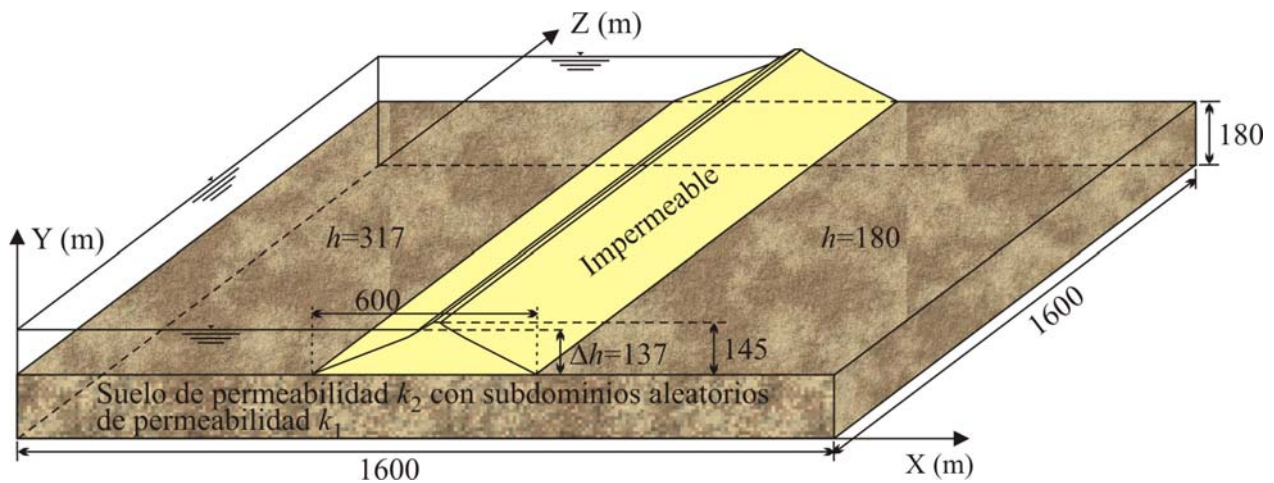


Figura 5.99 Condiciones geométricas y de frontera consideradas en el análisis de percolación 3D de la presa Tarbela

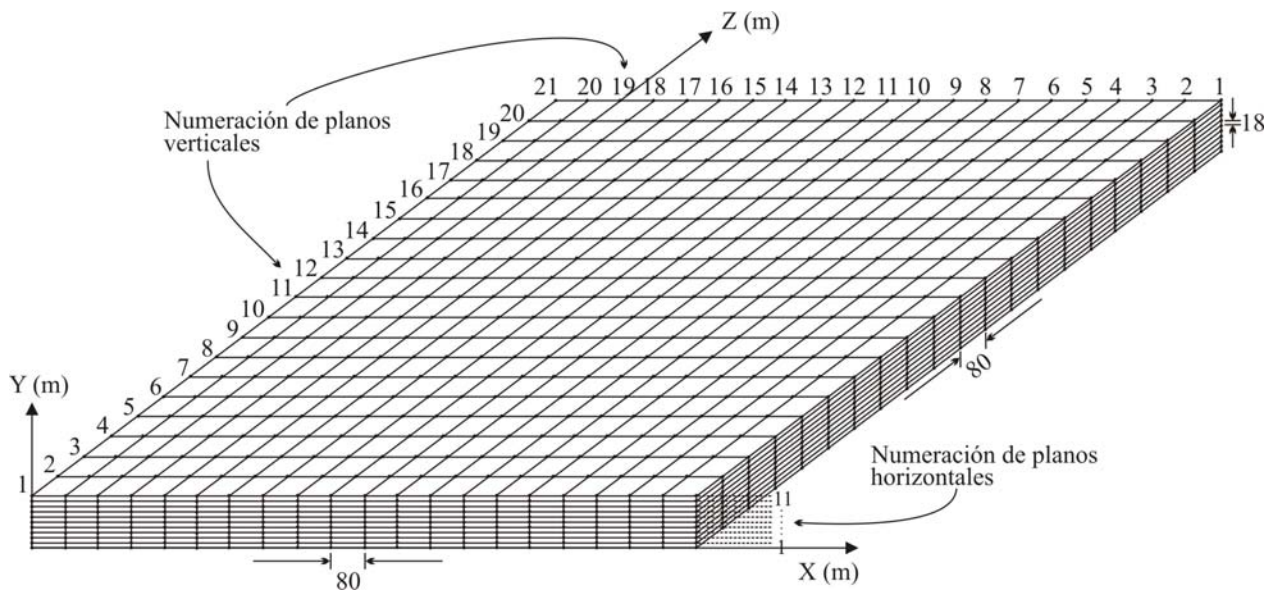


Figura 5.100 Malla de puntos en el dominio 3D, empleada para el cálculo de potenciales con el algoritmo PASECA (método de *paseos casuales*)

Similarmente al caso 2D anterior, se admite que el suelo de cimentación de la presa está constituido por una matriz principal que es el material 2 (con permeabilidad  $k_2$ ), y que existen zonas de mayor permeabilidad (material 1, con permeabilidad  $k_1$ ) dentro del medio, las que si se conectan pueden originar caminos de percolación. Las conductividades hidráulicas asumidas para  $k_1$  y  $k_2$ , son los mismos que se consideraron en el caso 2D (ecs. 5.59 y 5.60 respectivamente). Para crear las zonas o subdominios 3D de permeabilidad alta  $k_1$ , se implementó el algoritmo PERCOLA3DA (López, 2004), el cual asigna (con base en el *método del punto medio –midpoint method–*) a cada punto de la malla de la Figura 5.100 la conductividad hidráulica  $k_1$  ó  $k_2$  dependiendo de una probabilidad  $P(k_1)$  impuesta al material 1, que se compara con los números aleatorios  $NA$  generados por el programa en el momento de ejecución. Así, si  $NA < P(k_1)$ , se designa la permeabilidad  $k_1$  al punto correspondiente de la malla, en caso contrario, se le atribuye la permeabilidad  $k_2$ . Nuevamente, por analogía al caso 2D, se considera un rango variable de cero a uno para la probabilidad asignada al material 1:  $P(k_1) = 0; 0.1; 0.2; \dots; 1$ . De igual manera, en los análisis tridimensionales la creación de zonas de permeabilidad alta también se realiza para distintas *distancias de correlación o de influencia*<sup>(5.9)</sup>  $L_i$ . En un primer caso de estudio, se considera una distancia de correlación  $L = 0$ , que indica una independencia lineal entre las permeabilidades de los puntos de la malla de la Figura 5.100. Algunas de las configuraciones aleatorias 3D de los materiales 1 y 2 generadas de esta manera para distintas probabilidades del material  $k_1$ , se ilustran en las Figuras 5.101 a 5.104. Los números que aparecen sobre los ejes coordenados  $X, Y, Z$  que ahí se indican, se refieren a los planos de los puntos de cálculo de la malla de la Figura 5.100. Asimismo en estas figuras la permeabilidad  $k_2$  se representa de color azul y la permeabilidad alta  $k_1$ , de color rojo. De esta manera, en la Figura 5.101 se observa una pequeña cantidad de zonas de permeabilidad alta  $k_1$ , puesto que la probabilidad de que se presente dicho material es muy baja:  $P(k_1) = 0.1$ . Por el contrario, en la Figura 5.104, debido a que se tiene la probabilidad  $P(k_1) = 0.9$ , el suelo está constituido mayormente por el material 1 con permeabilidad  $k_1$ .

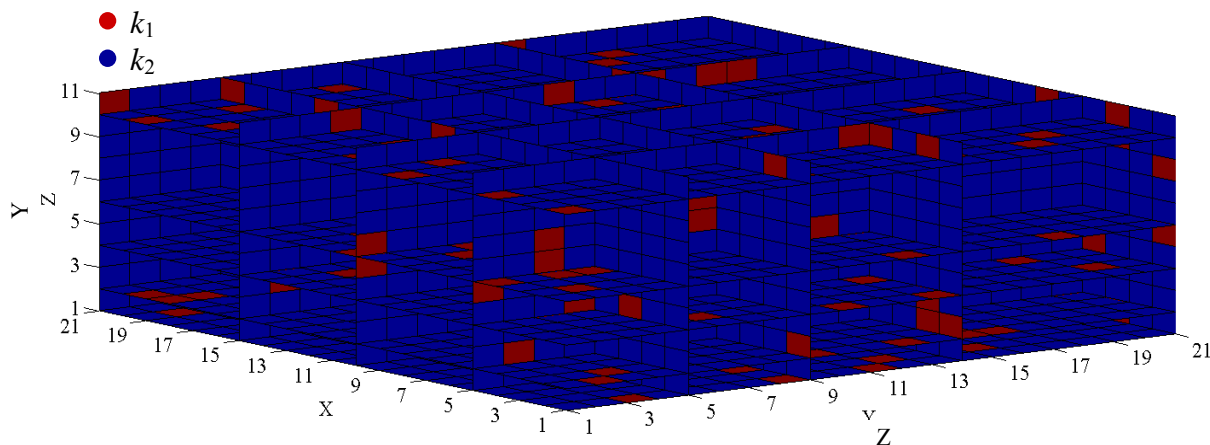


Figura 5.101 Configuración aleatoria 3D de las zonas de mayor permeabilidad -en rojo- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.1$ )

<sup>(5.9)</sup> Distancia hasta la cual la conductividad hidráulica está autocorrelacionada.

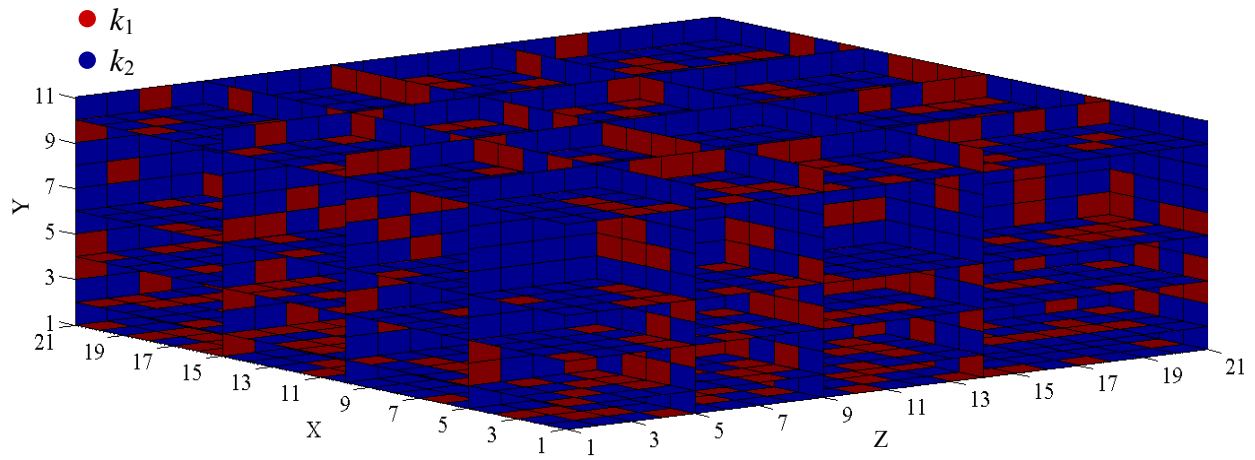


Figura 5.102 Configuración aleatoria 3D de las zonas de mayor permeabilidad -en rojo- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.3$ )

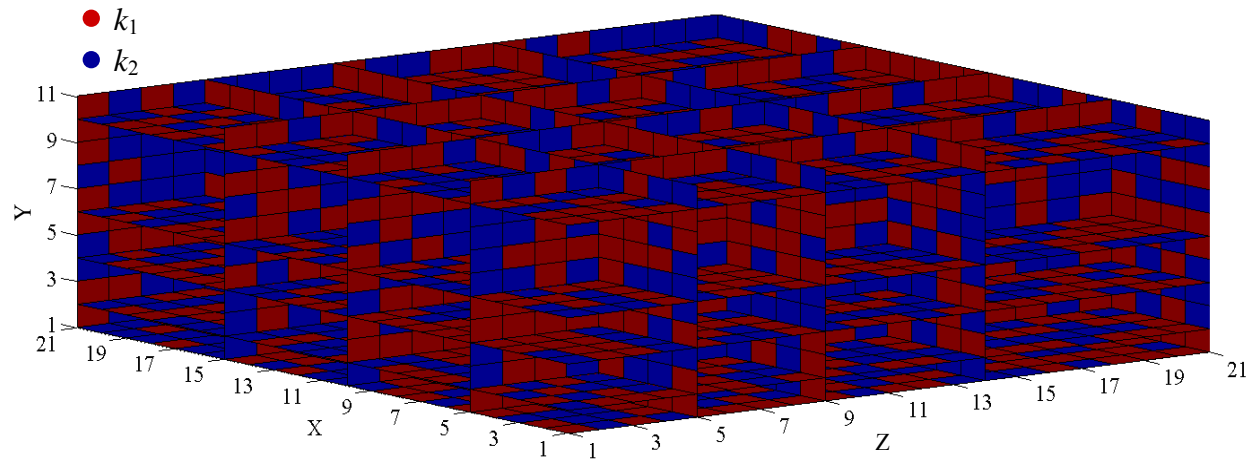


Figura 5.103 Configuración aleatoria 3D de las zonas de mayor permeabilidad -en rojo- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.6$ )

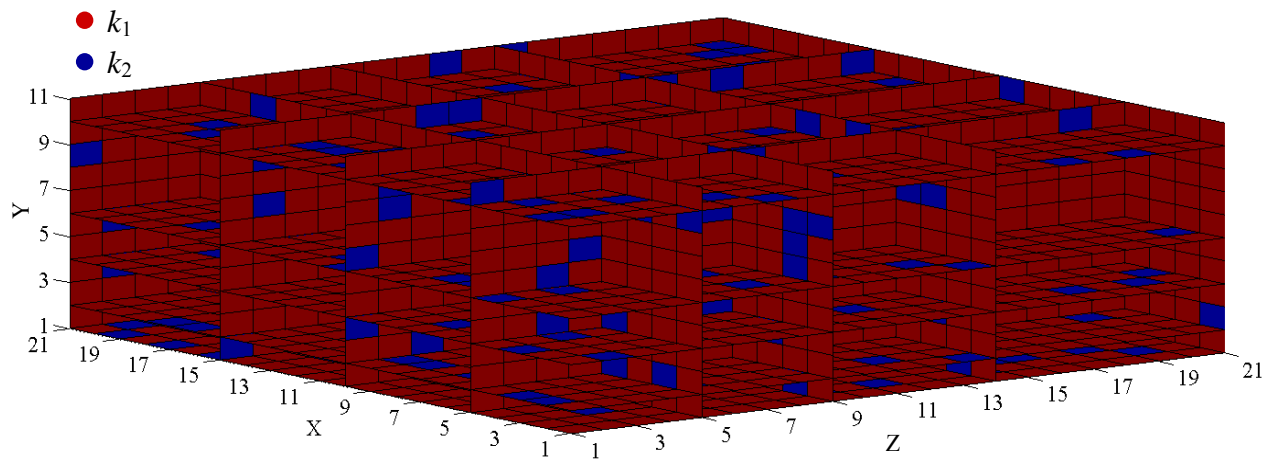


Figura 5.104 Configuración aleatoria 3D de las zonas de mayor permeabilidad -en rojo- (para  $L = 0$  y  $P(k_1) = 0.9$ )

Una vez asignadas de manera aleatoria las permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$  a todos los puntos de la malla de la Figura 5.100, se procede al cálculo del gasto  $Q_{total}$  que atraviesa la región de flujo para las probabilidades  $P(k_1)$  antes indicadas. Con este fin, se recurre al algoritmo PASECA (López, 2003), que se fundamenta en el método de los *pasos o paseos casuales* (ANEXO II). Con esta técnica se calculan inicialmente los potenciales hidráulicos en todos los puntos de los planos verticales 1 y 2 (transversales a la dirección del flujo) que se muestran en la Figura 5.105. Las *condiciones de absorción y rebote* en las que se basa el método, se indican en la misma figura. Los *planos de absorción* significan fronteras permeables a través de las cuales el agua puede fluir; las *caminatas aleatorias* de la partícula que se estudia con este método, terminan precisamente en tales planos cuando llegan a ellos. Por el contrario, los *planos de rebote* denotan fronteras impermeables en las que, si la partícula en estudio llega a alguna de ellas, debe necesariamente “rebotar” y continuar su caminata aleatoria en cualquier otra dirección. Una vez obtenidos los potenciales hidráulicos en estos planos, se toman en cuenta para el cálculo de los gradientes hidráulicos  $i_n$ , y con ellos a su vez se determinan los *gastos locales*  $q_n$  mediante la ley de Darcy:

$$q_n = k_n \cdot i_n \cdot A_n \quad (5.62)$$

Donde  $n$  es el número total de puntos en el plano de interés (en este caso  $n = 171$ ).

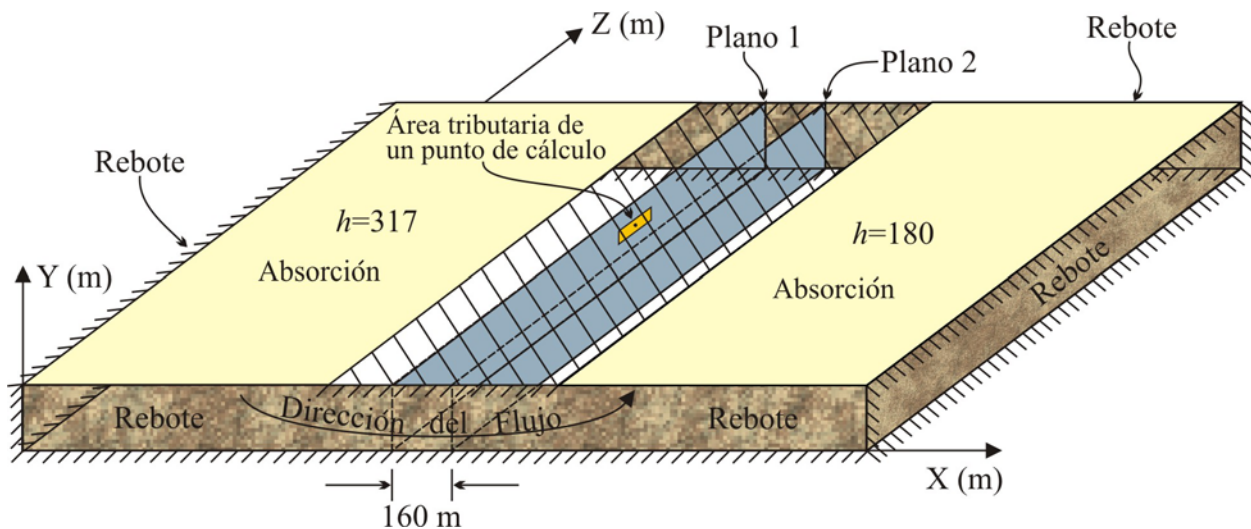


Figura 5.105 Condiciones de absorción y rebote, y planos en los que se calcula el potencial con el algoritmo PASECA (método de *paseos casuales*)

Los gradientes hidráulicos  $i_n$  de la ecuación (5.62), se obtienen restando los potenciales calculados en los puntos del plano 1 de los potenciales calculados en el Plano 2 (ver Figura 5.105), y dividiendo este resultado entre la distancia que los separa  $\delta=160\text{m}$ ; distancia que es

constante para todos los cálculos, al igual que el área tributaria de cada punto de análisis:  $A_n = 18 \times 80 \text{ m}^2$ .

Por su parte, las permeabilidades  $k_n$  (ec. 5.62) se calculan con el promedio armónico de las permeabilidades locales  $k_1$  y  $k_2$  de los puntos correspondientes en los planos 1 y 2, respectivamente:

$$k_n = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (5.63)$$

El gasto  $Q_{total}$  en el dominio de estudio se asume como el promedio aritmético de los gastos  $q_n$  anteriores. Finalmente, el resumen de los gastos así obtenidos para las probabilidades  $P(k_1)$  estudiadas, se presenta en la Tabla 5.15. Igualmente estos resultados se pueden apreciar de manera gráfica en la Figura 5.106. En la misma, se observa que conforme aumenta la probabilidad  $P(k_1)$ , el gasto también aumenta, lo anterior es evidente ya que  $k_1 > k_2$ . Se advierte también que para una probabilidad  $P(k_1) \approx 0.6$  el gasto se incrementa de manera importante; asumiéndose que a partir de dicha probabilidad se presenta en el dominio de estudio el fenómeno de percolación. Esta es la denominada *probabilidad crítica* que se mencionó en el caso 2D. La conclusión anterior se puede comprender mejor en las Figuras 5.103 y 5.104, en las que se observa que existen diversas posibles conexiones (en rojo) que originarían la percolación 3D cuando  $P(k_1) \geq 0.6$ .

Tabla 5.15 Resumen de  $Q_{total}$  para  $L = 0$  en el análisis de percolación 3D

$P(k_1)$	$P(k_2)$	$Q_{total}$ ( $\text{m}^3/\text{s}/\text{metro lineal}$ )
0	1	$7.76 \times 10^{-08}$
0.1	0.9	$7.61 \times 10^{-08}$
0.2	0.8	$4.25 \times 10^{-07}$
0.3	0.7	$7.81 \times 10^{-07}$
0.4	0.6	$1.18 \times 10^{-06}$
0.5	0.5	$1.76 \times 10^{-06}$
0.6	0.4	$5.48 \times 10^{-06}$
0.7	0.3	$5.42 \times 10^{-06}$
0.8	0.2	$6.01 \times 10^{-06}$
0.9	0.1	$5.54 \times 10^{-06}$
1	0	$7.04 \times 10^{-06}$



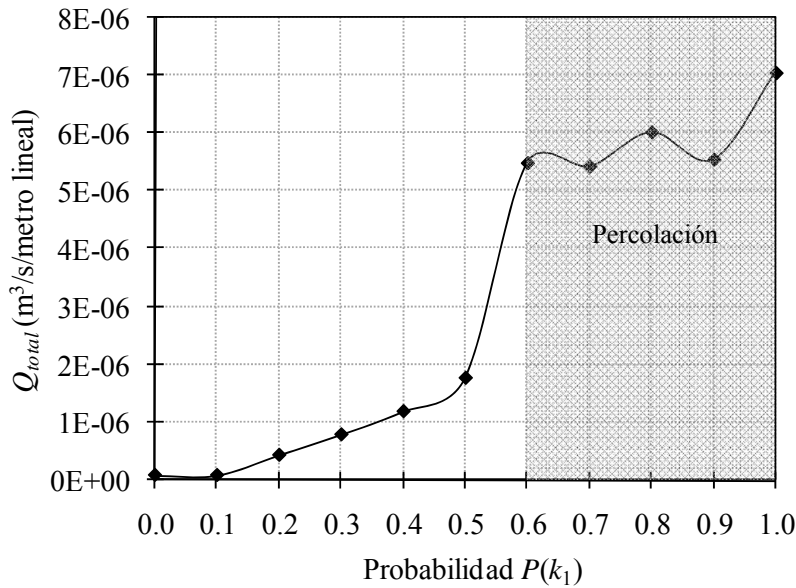


Figura 5.106 Gasto  $Q_{total}$  vs. Probabilidad  $P(k_1)$  para  $L = 0$  en el análisis de percolación 3D

Similarmente al caso 2D, se realizaron cálculos adicionales para distancias de correlación mayores que cero ( $L > 0$ ). Se implementó en este caso el programa PERCOLA3DB (López, 2004), el cual permite “sembrar” al azar (mediante números aleatorios) una cierta cantidad de “puntos semilla” ( $ES$ ) en la malla de la Figura 5.100, cada uno de los cuales constituyen los centros de gravedad de los “*openworks*” o subdominios homogéneos de permeabilidad alta  $k_1$ , que se crean a partir de ellos. Los subdominios son en este caso paralelepípedos que tienen distancias de correlación distintas en las direcciones horizontal  $L_x$  y vertical  $L_y$ . La permeabilidad  $k_1$  se asignó a todos los puntos de la malla contenidos en los “*openworks*”; la permeabilidad  $k_2$  se asignó a los puntos fuera de estos subdominios. Así, otros casos de estudio se efectuaron para un número de elementos semilla  $ES = 10$ , distancias de correlación horizontal  $L_x = L_z = 200$  m y  $L_x = L_z = 800$  m, y distancia de correlación vertical constante en ambos casos de  $L_y = 10$  m. En cada combinación diferente de estos datos se efectuaron un total de 10 realizaciones (lo que permitió obtener en cada ejecución una distribución distinta de los materiales 1 y 2 en el dominio analizado). Algunas de las configuraciones aleatorias 3D obtenidas de este modo, se ilustran en las Figuras 5.107 y 5.108. En las mismas, se observa que los canales de percolación no se generan de manera tan evidente como en el análisis bidimensional. Esto se puede comprender mejor, si se compara alguno de los casos estudiados tanto en dos como en tres dimensiones; por ejemplo, el caso donde  $ES = 10$  y  $L_x = 800$  m, el cual en el análisis 2D presenta claramente diversos caminos de percolación (Figuras 5.93-5.95); sin embargo, en el análisis 3D para estas mismas condiciones, ( $ES = 10$  y  $L_x = L_z = 800$  m) no se manifiesta de manera evidente tal fenómeno (ver perspectiva en la Figura 5.108). Para clarificar este hecho, en las Figuras 5.109 a 5.112 se muestran de manera independiente algunos de los planos transversales verticales correspondientes al caso 3D de la Figura 5.108 anterior. En esos planos se observa que los caminos de percolación no se generan de extremo a extremo como ocurre en el caso 2D.

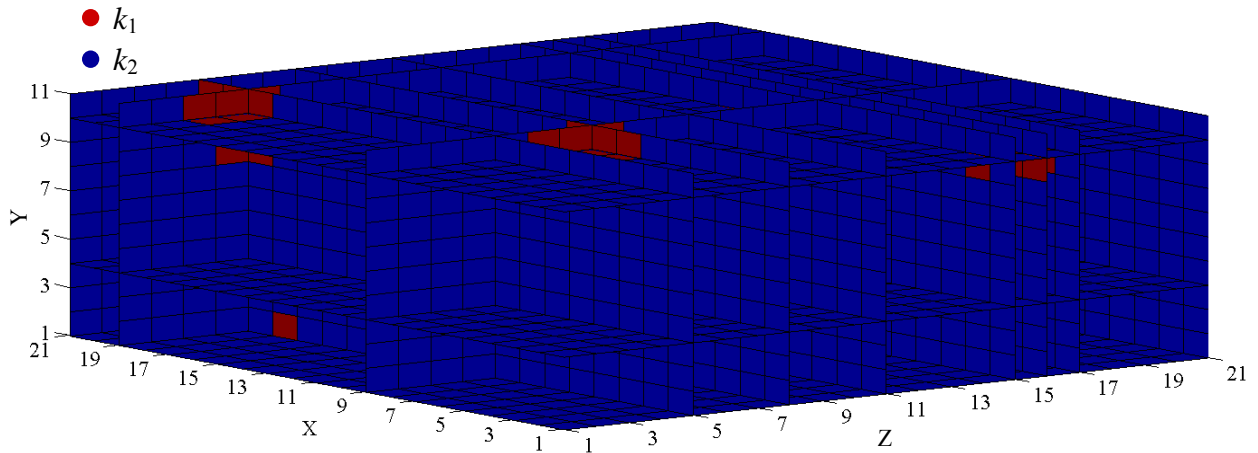


Figura 5.107 Configuración aleatoria 3D de las zonas de mayor permeabilidad -en rojo- (realización N° 9 con  $L_x = L_z = 200$  m y  $ES = 10$ )

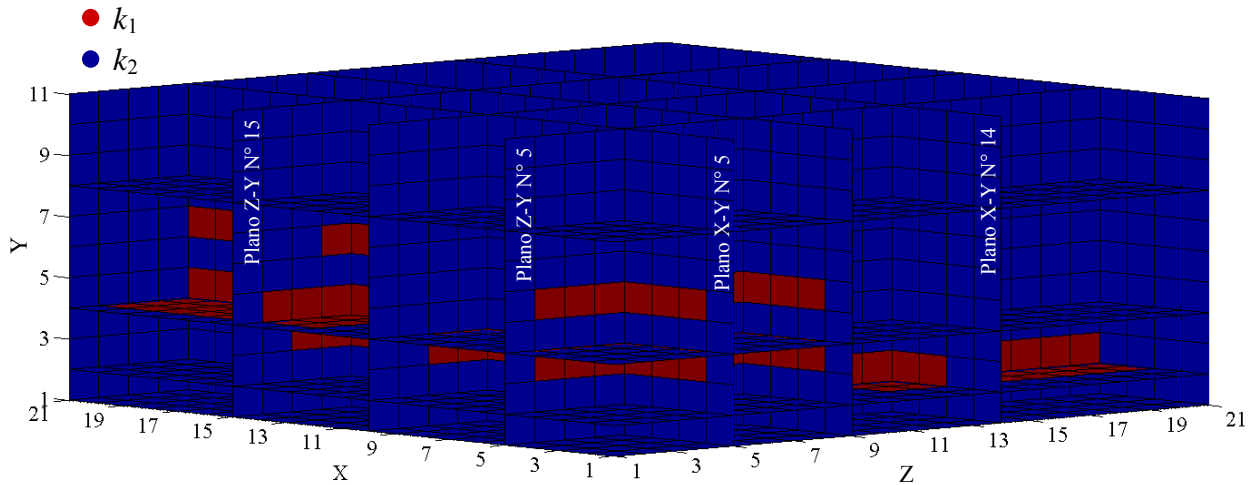


Figura 5.108 Configuración aleatoria 3D de las zonas de mayor permeabilidad -en rojo- (realización N° 1 con  $L_x = L_z = 800$  m y  $ES = 10$ )

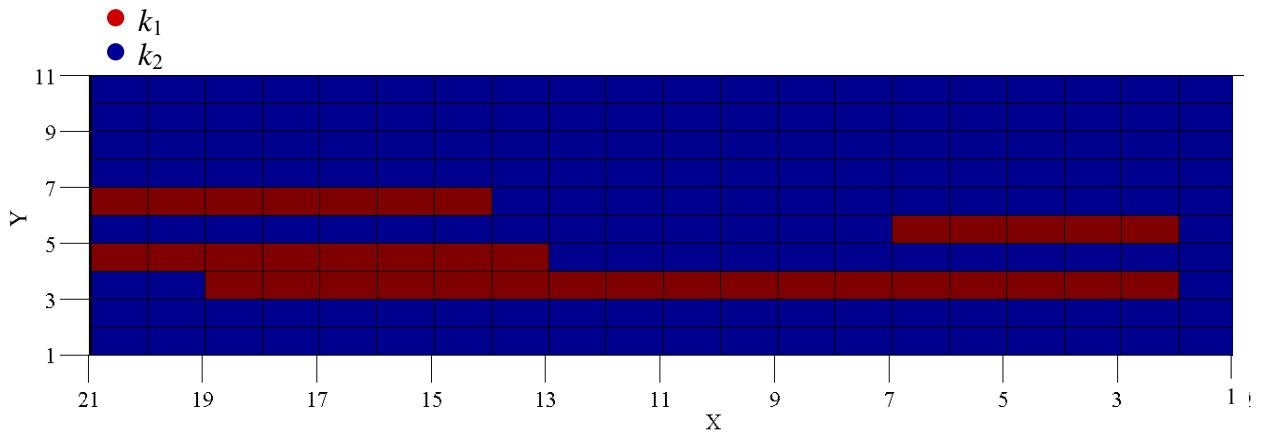


Figura 5.109 Plano X-Y N° 5 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con  $L_x = L_z = 800$  m y  $ES = 10$ )

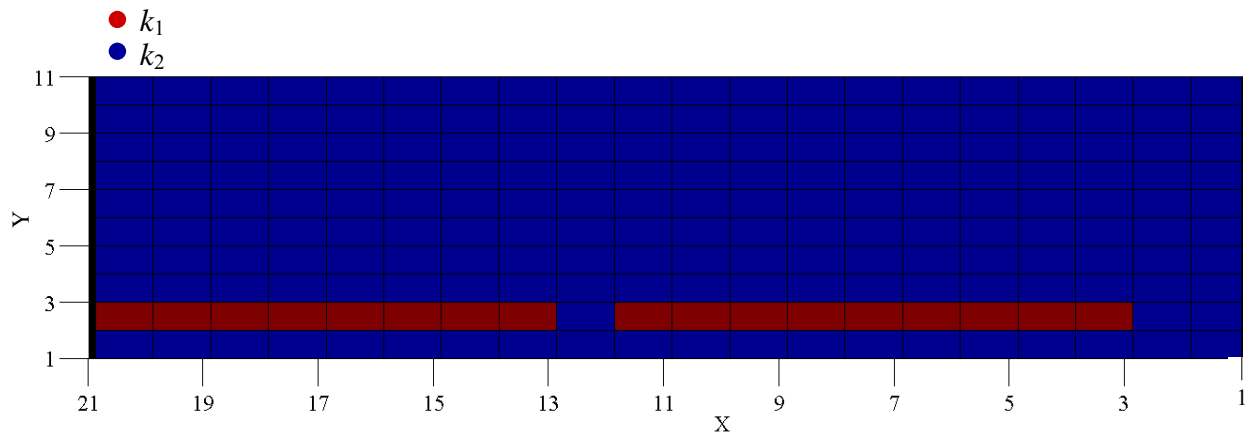


Figura 5.110 Plano X–Y N° 14 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con  $L_x = L_z = 800\text{m}$  y  $ES = 10$ )

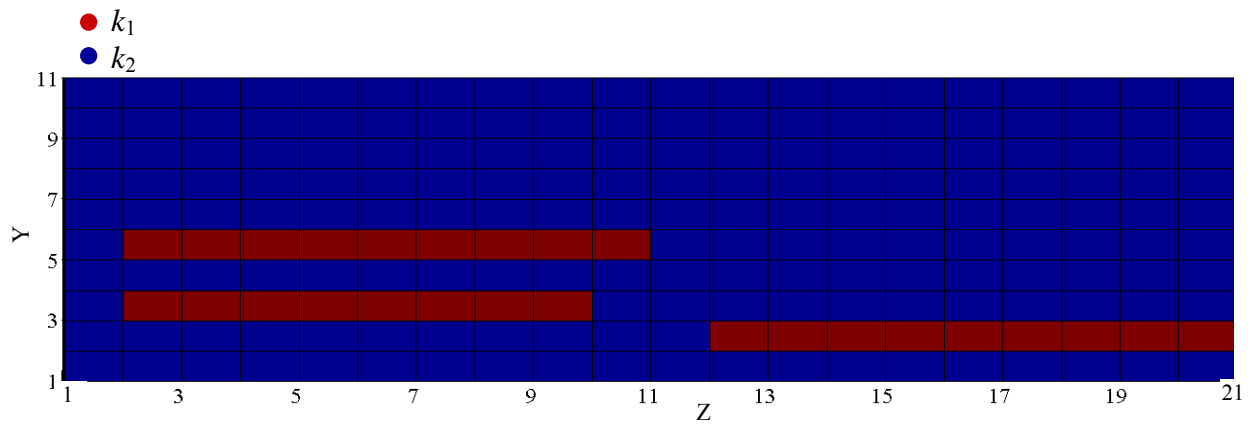


Figura 5.111 Plano Z–Y N° 5 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con  $L_x = L_z = 800\text{m}$  y  $ES = 10$ )

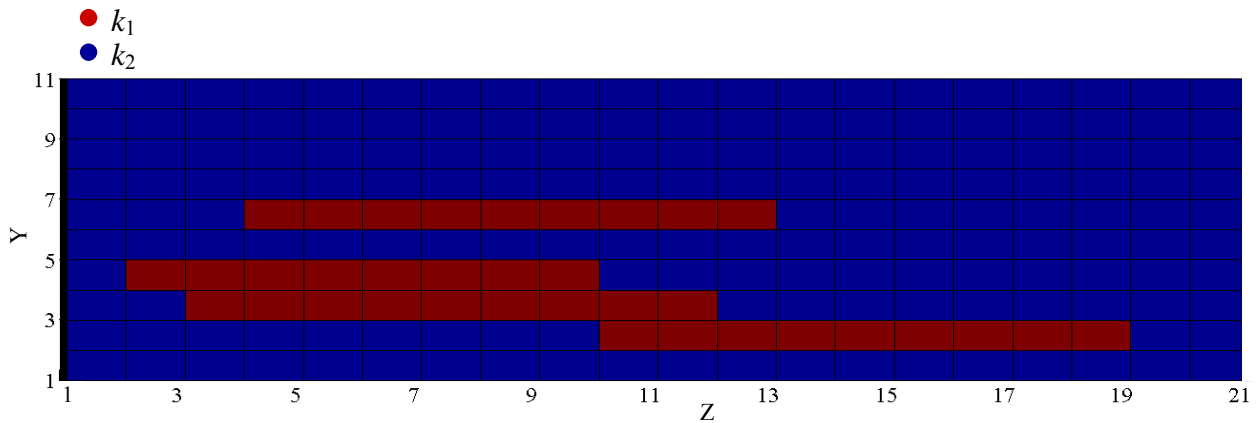


Figura 5.112 Plano Z–Y N° 15 de la Figura 5.108 (realización N° 1 con  $L_x = L_z = 800\text{m}$  y  $ES = 10$ )

Finalmente, para las configuraciones obtenidas antes, también se determinó el gasto que atraviesa la región de flujo con el *método de los paseos casuales* (PASECA; López, 2003); el procedimiento de cálculo es el mismo que se aplicó para el caso 3D en el que la distancia de correlación es nula ( $L = 0$ ). En la Tabla 5.16 se presenta el resumen de los gastos calculados en cada realización para un número de elementos semilla  $ES = 10$  y distancias de correlación  $L_x = L_z = 200\text{ m}$  y  $L_x = L_z = 800\text{ m}$ , respectivamente. Estos mismos resultados se pueden apreciar

en las curvas de  $Q_{total}$  vs. n° de realización de las Figuras 5.113 y 5.114. Los resultados anteriores muestran que en efecto, para el caso que se estaba comparando previamente (donde  $ES = 10$  y  $L_x = L_z = 800$  m), el orden de magnitud del gasto obtenido en el análisis 3D ( $10^{-7} - 10^{-10}$  m<sup>3</sup>/s/metro lineal; Tabla 5.16 y Figura 5.114) es menor que el orden de magnitud del gasto calculado para este mismo caso en el análisis 2D ( $10^{-3} - 10^{-4}$  m<sup>3</sup>/s/metro lineal; Tabla 5.14 y Figura 5.98). Lo anterior demuestra que existen diferencias en la generación de los caminos de percolación en dos y en tres dimensiones. Resultando que en el caso bidimensional los canales de percolación se generan con mayor facilidad, y por ende los valores del gasto son más significativos en 2D que en el caso 3D. Finalmente, para las realizaciones efectuadas en los análisis 3D, en las Figuras 5.113 y 5.114 se señalan con círculos los casos de las distribuciones aleatorias más críticas obtenidas de los materiales 1 y 2, ahí mismo se indica el número de figura en la que se puede ver su configuración respectiva.

Tabla 5.16 Gasto total  $Q_{total}$  para  $L_x = L_z = 200$ m y  $L_x = L_z = 800$ m con  $ES = 10$  en el análisis 3D

Realización	$Q_{total}$ (m <sup>3</sup> /s/metro lineal)	
	$L_x = L_z = 200$ m	$L_x = L_z = 800$ m
1	$6.63 \times 10^{-08}$	$7.75 \times 10^{-07}$
2	$7.96 \times 10^{-08}$	$4.77 \times 10^{-10}$
3	$1.21 \times 10^{-07}$	$2.34 \times 10^{-07}$
4	$6.28 \times 10^{-08}$	$1.14 \times 10^{-10}$
5	$1.02 \times 10^{-07}$	$3.24 \times 10^{-08}$
6	$6.83 \times 10^{-08}$	$1.85 \times 10^{-10}$
7	$8.12 \times 10^{-08}$	$7.79 \times 10^{-08}$
8	$5.58 \times 10^{-08}$	$3.04 \times 10^{-08}$
9	$1.80 \times 10^{-07}$	$8.16 \times 10^{-08}$
10	$6.93 \times 10^{-08}$	$1.21 \times 10^{-07}$

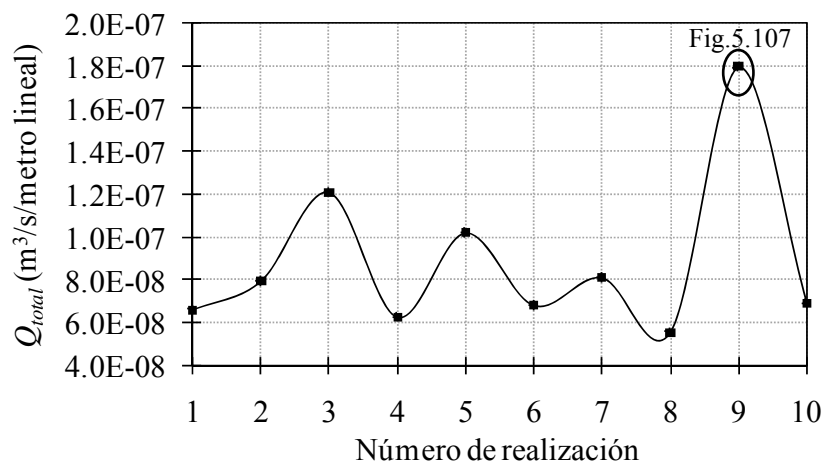


Figura 5.113 Variación del gasto  $Q_{total}$  en las realizaciones efectuadas para  $L_x = L_z = 200$ m,  $L_y = 10$  m y  $ES = 10$

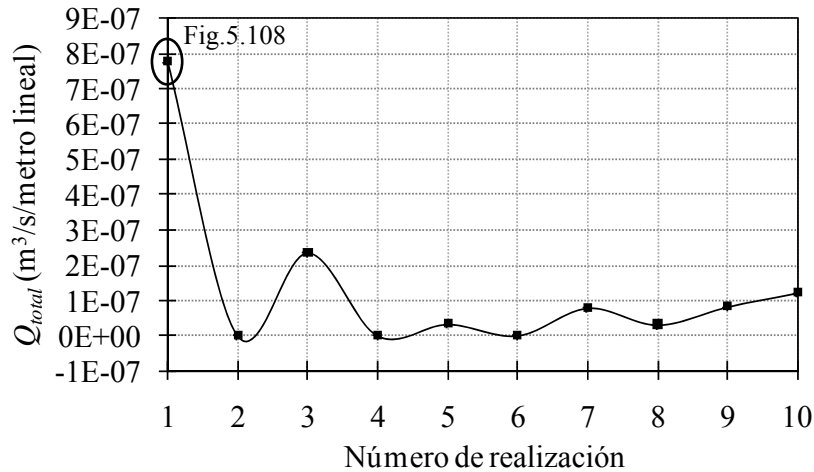


Figura 5.114 Variación del gasto  $Q_{total}$  en las realizaciones efectuadas para  $L_x = L_z = 800\text{m}$ ,  $L_y = 10\text{m}$  y  $ES = 10$

### 5.5.5 Comentarios finales

Se mostró una metodología sencilla para la evaluación del fenómeno de percolación en una presa de tierra y enrocamiento cimentada en un suelo de tipo aluvial (presa Tarbela de Pakistán). La metodología consistió inicialmente en “sembrar” de manera aleatoria zonas de mayor permeabilidad dentro del medio, las cuales si se unen, son las que constituyen el canal o los canales de percolación. Se generaron de esta manera configuraciones aleatorias con subdominios de permeabilidad alta  $k_1$  en el suelo de cimentación de la presa (de permeabilidad  $k_2$ ), para las que se calculó numéricamente el gasto de infiltración que atraviesa la región de flujo tanto en dos (2D) como en tres dimensiones (3D) mediante las técnicas de elementos finitos y paseos casuales, respectivamente. De los análisis efectuados, algunas conclusiones importantes son:

(a) De manera general, y solamente para las condiciones consideradas en este estudio, no se generaron canales de percolación en los siguientes casos:

- Análisis 2D con distancias de correlación  $L_x \leq 100\text{ m}$  y  $L_y = 10\text{ m}$  (con número de elementos semilla  $ES=10$ ).
- Análisis 3D con distancias de correlación  $L_x = L_z \leq 200\text{ m}$  y  $L_y = 10\text{ m}$  (con número de elementos semilla  $ES=10$ ).

(b) Para distancias de correlación  $L = 0$  entre las permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$  distribuidas de manera aleatoria en el medio, la probabilidad crítica  $P_c(k_1)$  a partir de la cual se manifiesta el fenómeno de percolación resultó:

- $P_c(k_1) \approx 0.70 \rightarrow$  En los análisis bidimensionales.
- $P_c(k_1) \approx 0.60 \rightarrow$  En los análisis tridimensionales.

(c) Con base en lo anterior, se demostró que existen diferencias en la propagación de los caminos de percolación en dos y en tres dimensiones. Se observó que en los análisis tridimensionales los canales de percolación no se generan de manera tan evidente como en los análisis bidimensionales. Es decir, la probabilidad crítica en general es mayor en los análisis 2D que en los análisis 3D.

(d) Debido a que el fenómeno de percolación se presentó con mayor facilidad en los análisis 2D, los gastos de infiltración en la región de flujo resultaron más significativos (mayor orden de magnitud) en el caso bidimensional, en comparación con los obtenidos en el caso 3D.

(e) En los análisis 2D, en varias de las configuraciones generadas se distinguió una condición de caminos de percolación que se considera crítica o que podría ser de consecuencias importantes. Ésta correspondió al caso en el que se forma un canal de percolación debajo de la presa, y éste a su vez, conecta las zonas permeables de aguas arriba y aguas abajo de la misma presa.

(f) Se demostró, de acuerdo con los resultados, que el fenómeno de percolación está gobernado por el medio, esto es, por la distribución aleatoria de las zonas o subdominios de permeabilidad alta dentro de la región de flujo.

## Conclusiones

# 6

El énfasis de esta tesis doctoral se centró en investigar el origen y la magnitud de las principales incertidumbres que afectan los análisis de flujo de agua en medios porosos aleatorios y en la evaluación de su influencia sobre los resultados de los mismos. Se reconoció que aun cuando existen diversos factores que pueden afectar la representatividad de los análisis, la incertidumbre más significativa es la que está asociada a la conductividad hidráulica, debida a su variación espacial, a la carencia de datos y a la baja confiabilidad de las estimaciones y pruebas para determinarla. Se señaló que esta incertidumbre puede modelarse con *variables aleatorias* o *campos aleatorios*, mismos que con base en evidencias experimentales se aconseja referirlos al logaritmo (decimal o natural) de la permeabilidad.

Se demostró que los métodos estocásticos, fundamentados en la teoría de la probabilidad, son herramientas matemáticas racionales que permiten la evaluación de la propagación de la incertidumbre en la conductividad hidráulica sobre cantidades tales como el potencial hidráulico, el gradiente hidráulico, la velocidad de flujo, el gasto de infiltración, entre otras.

Diversas técnicas estocásticas fueron revisadas e implementadas para su uso en los análisis probabilistas de flujo de agua. Entre ellas, los métodos de *primer orden segundos momentos (FOSM)* y *segundo orden segundos momentos (SOSM)*, la *estimación puntual de Rosenblueth (PEM)*, el método de *simulación de Monte Carlo*, el *método de los pasos o paseos casuales (RWM)*, incluyéndose también un nuevo *método mixto* tanto de *primer* como de *segundo orden (MFO y MSO)*, y el *teorema de Bayes*. Variados algoritmos (MEFLULOG, PASECA, SIMONC, etc.) fueron desarrollados para la automatización de las técnicas previas.

La aplicabilidad y utilidad, así como las ventajas y limitaciones de las herramientas matemáticas anteriores se demostraron con la solución de distintos problemas prácticos de complejidad variable. Principalmente se mostró en qué casos y cómo pueden aplicarse. De esta manera, se expusieron problemas de flujo establecido confinado y no confinado; unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D); en medios aleatorios homogéneos e isótropos, pero también heterogéneos y anisótropos; resueltos de manera analítica y numérica,

principalmente con el método del elemento finito estocástico (*SFEM*) y con la técnica de paseos casuales (*RWM*).

Conclusiones generales de los temas aquí estudiados se presentan a continuación.

*(a) De las evaluaciones analíticas y estudios paramétricos para cuantificar la incertidumbre en análisis de flujo unidimensional en medios aleatorios homogéneos y estratificados*

En estos estudios se analizó la propagación de la incertidumbre en la conductividad hidráulica  $k$  al gasto  $Q$  a través de una muestra de suelo constituida por un material homogéneo aleatorio, y por una secuencia de dos y tres materiales aleatorios independientes, respectivamente. Diferentes técnicas estocásticas fueron aplicadas: perturbaciones de primer y segundo orden (*FOSM* y *SOSM*), estimación puntual de Rosenblueth (*PEM*), y un nuevo método mixto de primer y segundo orden (*MFO* y *MSO*), mismas que se calibraron con el método de simulación de Monte Carlo. Algunos resultados importantes de las estadísticas de salida del gasto en función del coeficiente de variación de la permeabilidad son:

➤ Con respecto al *valor esperado del gasto*  $\mu_Q$ : (a) en el caso de un material homogéneo aleatorio,  $\mu_Q$  es igual al valor determinista de  $Q_{\mu_k} = 7.75 \times 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}$  (asumiendo permeabilidad constante  $=\mu_k$  en toda la muestra), debido a que esta propiedad es directamente proporcional al valor esperado de la conductividad hidráulica  $\mu_k$ ; (b) en el caso de un suelo estratificado (dos o tres materiales aleatorios), se observó que más allá de cierto valor del coeficiente de variación ( $\sigma_k/\mu_k \approx 0.2$  en ese estudio),  $\mu_Q$  es consistentemente inferior al mencionado valor determinista de  $Q_{\mu_k}$ . Esto es una consecuencia del hecho de que cuando materiales contiguos toman valores de permeabilidad aleatorios, la permeabilidad aparente del sistema está definida por un promedio armónico de la permeabilidad de los diferentes materiales, en el cual el valor más bajo tiende a tener un peso predominante.

➤ En cuanto a la *desviación estándar del gasto*  $\sigma_Q$ : (a) en el caso de un suelo homogéneo, esta propiedad exhibe una relación lineal perfecta con respecto al coeficiente de variación de la permeabilidad, esto es, la desviación estándar del gasto se incrementa de manera proporcional cuando aumenta la incertidumbre en la permeabilidad; (b) en el caso de un suelo estratificado, la desviación estándar del gasto  $\sigma_Q$  tiende a incrementarse mientras el coeficiente de variación de la permeabilidad es menor que cierto valor ( $\sigma_k/\mu_k \approx 0.99$  en esta investigación); más allá del mismo  $\sigma_Q$  tiende a decrecer. Lo anterior, se debe al hecho de que la permeabilidad equivalente está controlada por el valor más bajo, como se explicó antes. Finalmente se puede decir que la incertidumbre en el comportamiento de un suelo aleatorio estratificado es menor que la incertidumbre que se esperarías si el suelo fuera aleatorio pero homogéneo.

En lo referente a las técnicas estocásticas empleadas en los análisis (*FOSM*, *SOSM*, *PEM*, *MFO* y *MSO*) para evaluar la propagación de la incertidumbre en la permeabilidad, se observó que:

➤ Todas reflejan adecuadamente las tendencias mencionadas en los párrafos anteriores.

➤ En comparación con los resultados del método de Monte Carlo, como era de esperarse, los métodos de segundo orden (*SOSM* y *MSO*) proporcionan resultados más exactos que aquéllos obtenidos con los métodos de primer orden (*FOSM* y *MFO*).



- A pesar de su simplicidad, el método de estimación puntual de Rosenblueth (*PEM*) proporciona resultados generalmente muy satisfactorios.
- No obstante sus limitaciones, estas técnicas resultan más complementarias que antagónicas.

(b) *De las zonas o distribución de la incertidumbre en problemas típicos de flujo de agua*

En estos estudios se realizaron análisis numéricos combinando el *método de elementos finitos (FEM)* con la técnica probabilista de *segundo orden segundos momentos (SOSM)*. Se evaluó la propagación de la incertidumbre en la conductividad hidráulica sobre el potencial, el gradiente hidráulico y la velocidad de flujo en problemas típicos de flujo confinado y no confinado de agua, unidimensionales y bidimensionales. El objetivo del estudio fue analizar distintas condiciones (geométricas, hidráulicas y de frontera) para un mismo problema y evaluar la distribución de las zonas de incertidumbre máximas y mínimas obtenidas en cada caso. El enfoque se puso en estudiar suelos homogéneos anisótropos y suelos heterogéneos con materiales isotropos (dos a seis materiales), y distintas consideraciones de materiales en *serie*, en *paralelo* o *inclinados* respecto a la dirección del flujo.

Se aclara que el caso de los suelos homogéneos e isotropos aleatorios no se discutió, ya que en este tipo de medios no existe incertidumbre ni en la carga  $h$  ni en el gradiente hidráulico  $i$ . De acuerdo con los principios básicos del flujo de agua en suelos, tanto la carga como el gradiente hidráulico no dependen de la conductividad hidráulica  $k$ . En efecto, en un material homogéneo e isotropo aleatorio la incertidumbre existente en la conductividad hidráulica afecta directamente solo la velocidad de flujo y el gasto (por proporcionalidad con la ley de Darcy).

Para el caso de los suelos homogéneos anisótropos, y suelos heterogéneos con materiales isotropos expuestos en esta aplicación, y con base en las configuraciones resultantes de desviaciones estándar de cada análisis efectuado, se observó que se generan zonas características de incertidumbres máximas y mínimas que dependen de diversos factores como:

- La incertidumbre en la conductividad hidráulica de los materiales del dominio y de la anisotropía.
- El número de materiales en el dominio.
- La geometría del dominio.
- Las condiciones de frontera.
- La simetría de los subdominios del medio poroso.
- La posición de los estratos (en *serie*, en *paralelo* o *inclinados*) respecto a la dirección del flujo.

Por otra parte, respecto a las desviaciones estándar de los parámetros analizados en este estudio, se puede decir de manera general que:

(i) En el caso de la *carga hidráulica*:

- No existe incertidumbre en las fronteras donde el potencial ha sido impuesto.
- La incertidumbre es nula en los ejes de simetría del problema, si es que éstos existen.

- La incertidumbre tiende a ser máxima en las regiones más alejadas tanto de los ejes de simetría como de las fronteras con potencial impuesto.
- En general, se observa un efecto de *amplificación* de la incertidumbre en las fronteras de materiales contiguos que están en serie respecto a la dirección del flujo. Por el contrario, un efecto de *atenuación* se presenta en las fronteras de materiales contiguos paralelos al flujo.
- La interferencia entre distintos materiales del dominio da lugar a un *fenómeno de compensación estadística*, es decir, un efecto de promedio mediante el cual la incertidumbre en la carga hidráulica se distribuye entre los distintos materiales del medio, sobre todo si éstos se consideran independientes.
- La distribución de la incertidumbre en el medio está influenciada por la posición de los estratos (*en serie*, *en paralelo* o inclinados respecto al flujo).

(ii) En cuanto al *gradiente hidráulico*:

- Principalmente en problemas de flujo confinado 2D, las zonas de incertidumbres máximas y mínimas coinciden generalmente con las regiones donde se presentan los valores esperados más altos y más bajos respectivamente (*p. ej.* alrededor de la punta de una tablestaca; alrededor de las esquinas inferiores de aguas arriba y aguas abajo de un cimacio o cualquier otra estructura impermeable; etc.).
- Llama la atención que, en varios de los casos de flujo confinado 2D analizados se generan zonas imprevistas de *certidumbre*, es decir, zonas donde la incertidumbre en el gradiente hidráulico es nula. Se observó que este hecho está influenciado por la posición de los estratos en el medio analizado.
- La distribución de la incertidumbre en el medio de interés está afectada por la posición de los estratos (*en serie*, *en paralelo* o inclinados respecto al flujo).

(iii) Con respecto a la *velocidad de flujo*:

- Principalmente en problemas de flujo confinado 2D, la incertidumbre tiende a ser máxima en aquellas zonas donde ocurren los máximos valores esperados de la velocidad (*p. ej.* alrededor de la punta de una tablestaca; alrededor de las esquinas inferiores de aguas arriba y aguas abajo de un cimacio o cualquier otra estructura impermeable; etc.). Correspondientemente, la menor incertidumbre tiende a presentarse en zonas de valores esperados pequeños de la velocidad.
- La distribución de la incertidumbre en el medio de interés no depende de la posición de los estratos (*en serie*, *en paralelo* o inclinados respecto al flujo), sino que está influenciada mayormente por la magnitud de la incertidumbre en la conductividad hidráulica de los materiales del dominio.

(c) *De los análisis inversos de flujo de agua aplicando un enfoque Bayesiano*

El *teorema de Bayes* permite alcanzar un juicio racional a partir de datos poco confiables o incompletos, que a menudo constituyen la única información disponible cuando se resuelven problemas de ingeniería. El permitir alcanzar juicios racionales en función de la evidencia es lo que convierte al enfoque bayesiano en una herramienta útil en la solución de un problema inverso de flujo de agua a través de suelos.

En esta investigación se aplicó el *teorema de Bayes* a la evaluación del comportamiento de tres de los materiales que constituyen una presa de tierra y enrocamiento (muro diafragma, seudo corazón de gneis y pantalla de inyecciones). Específicamente, los análisis inversos realizados permitieron determinar de una manera muy sencilla cuál es la contribución de esos materiales al sistema de control de flujo de agua a través del cuerpo y de la cimentación de la presa. Así, de los resultados del análisis bayesiano se determinó que el gasto en la galería de drenaje de la presa depende del comportamiento del muro diafragma y del seudo corazón de gneis, no de la pantalla de inyecciones colocada en su suelo de cimentación. Lo anterior, hizo plantear la pregunta de si fue en verdad necesaria la construcción de esa estructura para ayudar a controlar el flujo de agua a través de la presa. De hecho, deja en claro la utilidad del *teorema de Bayes* como una ayuda adicional en la toma de decisiones durante la etapa de proyecto o diseño de una presa.

Otra de las ventajas de realizar análisis bayesianos de flujo de agua antes de la construcción de una presa, consiste en que a partir de ellos pueden determinarse las secciones de una presa en las que sería importante llevar a cabo un estricto control de calidad de las permeabilidades de los materiales durante la etapa de construcción.

*(d) De la permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en 2D y 3D*

En este estudio se abordó el problema de la estimación de la permeabilidad equivalente para flujo en medios heterogéneos simulados en dos y tres dimensiones. Se demostró la utilidad del empleo de los campos aleatorios para describir la variación espacial de la conductividad hidráulica, permitiendo a través de distintas distancias de correlación representar la heterogeneidad de los medios aleatorios analizados.

Con estos fines, se propuso una metodología sencilla para determinar inicialmente la *permeabilidad aparente* de los medios heterogéneos simulados, a través de realizar análisis inversos con el método de elementos finitos en el caso bidimensional y con el método de paseos casuales en el caso tridimensional. Posteriormente, la comparación de las permeabilidades aparentes obtenidas en este estudio con los promedios armónicos, geométricos y aritméticos de los medios heterogéneos simulados, permitió establecer que la *permeabilidad equivalente* de un medio heterogéneo en dos dimensiones está representada por la media geométrica del campo de permeabilidad. En el caso tridimensional, aun cuando se observó una mayor dispersión respecto a estos promedios, la media geométrica es la que exhibió un mejor ajuste con la permeabilidad aparente del dominio. Así, con base en estos resultados, ya sea que la dimensión espacial de la región de flujo sea 2D ó 3D, se sugiere emplear la media geométrica como el promedio algebraico para describir dominios heterogéneos. Lo anterior muestra que la conductividad hidráulica, no es como otras propiedades de los suelos que puede o debe necesariamente promediarse, como es la práctica común en la geotecnia, con la media aritmética como un promedio representativo de la misma.

Se remarca que los análisis tridimensionales de flujo de agua que se realizan con la técnica de paseos casuales presentan ventajas en cuanto al tiempo de cálculo, respecto a aquéllos que se efectúan con elementos finitos 3D; los cuales se ha observado, incrementan aun más el tiempo computacional conforme aumenta la distancia de correlación del campo aleatorio de permeabilidad considerado.

Adicionalmente, respecto a la variación de la incertidumbre en la permeabilidad aparente de los campos aleatorios de permeabilidad simulados (2D ó 3D) en función de la distancia de correlación  $L_i$ , se determinó que:

- Cuando la distancia de correlación aumenta de manera significativa en el medio analizado ( $\geq 1\text{m}$ ), éste tiende a comportarse como un material homogéneo aleatorio, en el que la media de la permeabilidad aparente es aproximadamente igual a la media del campo de permeabilidad.
- Cuando el material es fuertemente heterogéneo (para distancias de correlación pequeñas) la desviación estándar de la permeabilidad aparente es pequeña; esto se debe a un *fenómeno de compensación estadística* mediante el cual la interferencia entre un mayor número de permeabilidades distintas ocasiona que la incertidumbre se *compense* o distribuya entre las mismas.
- Cuando la distancia de correlación es mayor que la longitud del medio analizado ( $\geq 1\text{m}$ ), la desviación estándar de la permeabilidad aparente aumenta de manera significativa hasta alcanzar un valor casi constante que es muy cercano a la desviación estándar del campo aleatorio de permeabilidad (cuando el material se vuelve prácticamente homogéneo). En tales condiciones existe la posibilidad de que se presente el *fenómeno de percolación*; es decir que si la correlación aumenta, las permeabilidades de ciertos elementos tienden a parecerse, originándose zonas más permeables que otras por las cuales el agua puede circular con mayor facilidad.

*(e) De la teoría de percolación aplicada al cálculo del gasto de infiltración en suelos erráticos*

Se propuso una metodología sencilla para la evaluación del fenómeno de percolación en una presa de tierra y enrocamiento cimentada en un suelo de tipo aluvial. La metodología consistió inicialmente en *sembrar* de manera aleatoria zonas de mayor permeabilidad dentro del medio, las cuales si se unen, son las que constituyen el canal o los canales de percolación. Se generaron de esta manera configuraciones aleatorias con subdominios de permeabilidad alta  $k_1$  en el suelo de cimentación de la presa (de permeabilidad  $k_2$ ), para las que se calculó numéricamente el gasto de infiltración que atraviesa la región de flujo tanto en dos (2D) como en tres dimensiones (3D) mediante las técnicas de *elementos finitos (FEM)* y *paseos casuales (RWM)*, respectivamente. De los análisis efectuados, algunas conclusiones importantes son:

(i) De manera general, y solamente para las condiciones consideradas en este estudio, no se generaron canales de percolación en los siguientes casos:

- Análisis 2D con distancias de correlación  $L_x \leq 100\text{ m}$  y  $L_y = 10\text{ m}$  (con número de elementos semilla  $ES=10$ ).
- Análisis 3D con distancias de correlación  $L_x = L_z \leq 200\text{ m}$  y  $L_y = 10\text{ m}$  (con número de elementos semilla  $ES=10$ ).

(ii) Para distancias de correlación  $L=0$  entre las permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$  distribuidas de manera aleatoria en el medio (donde  $k_1 \gg k_2$ ), la probabilidad crítica  $P_c(k_1)$  a partir de la cual se manifiesta el fenómeno de percolación resultó:

➤  $P_c(k_1) \approx 0.70 \rightarrow$  En los análisis bidimensionales.

➤  $P_c(k_1) \approx 0.60 \rightarrow$  En los análisis tridimensionales.

(iii) Con base en lo anterior, se demostró que existen diferencias en la propagación de los caminos de percolación en dos y en tres dimensiones. Se observó que en los análisis tridimensionales los canales de percolación no se generan de manera tan evidente como en los análisis bidimensionales. Es decir, la probabilidad crítica en general es mayor en los análisis 2D que en los análisis 3D.

(iv) Debido a que el fenómeno de percolación se presentó con mayor facilidad en los análisis 2D, los gastos de infiltración en la región de flujo resultaron evidentemente más significativos (mayor orden de magnitud) en el caso bidimensional, en comparación con los obtenidos en el caso 3D.

(v) En los análisis 2D, en varias de las configuraciones generadas se distinguió una condición de caminos de percolación que se considera crítica o que podría ser de consecuencias importantes. Ésta correspondió al caso en el que se forma un canal de percolación debajo de la presa, y éste a su vez, conecta las zonas permeables de aguas arriba y aguas abajo de la presa.

(vi) Se demostró, de acuerdo con los resultados, que el fenómeno de percolación está gobernado por el medio, esto es, por la distribución aleatoria de las zonas o subdominios de permeabilidad alta dentro de la región de flujo.

Los planteamientos matemáticos y las metodologías propuestas en esta investigación pretenden ser una contribución a la aplicación de métodos estocásticos en el estudio del flujo de agua a través de medios aleatorios, mostrando que un análisis probabilista no requiere de mayor esfuerzo que aquél que se necesita en un estudio determinista convencional; en cambio, proporciona un medio muy útil en la modelación y cuantificación de las incertidumbres envueltas en los cálculos.

Finalmente, se recuerda que los métodos probabilistas complementan, más no sustituyen los métodos tradicionales ni el juicio ingenieril; contribuyen a hacer más realista la evaluación del flujo de agua a través de suelos.

# Referencias y bibliografía

---

- ABABOU R., McLAUGHLIN D., GELHAR L. W. & THOMPSON A. F., 1989, Numerical simulation of three-dimensional saturated flow in randomly heterogeneous porous media, *Trans. Porous Media*, 4(6).
- ABABOU, R., 1995, Random porous media flow on large 3-D grids: numerics, performance and application to homogeneization, in *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, "Environmental Studies: Mathematical, Computational and Statistical Analysis", Ed. M. F. Wheeler & Springer-Verlag, New York Publishers, pp. 1-25.
- ANG, A. H. & TANG, W. H., 1975, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol. I, John Wiley & Sons, New York.
- ANTON, H., 1999, *Introducción al algebra lineal*, Segunda Edición, Editorial LIMUSA.
- ARYA L. M., LEIJ F. J., VAN GENUCHTEN M. TH. & SHOUSE P. J., 1999, Relationship between the hydraulic conductivity function and particle-size distribution, *Soil Science Society of America Journal*, 63, 1063-1070.
- ASGIAN M. I., ARULMOLI K., MILLER W. O. & SANJEEVAN K., 1988, An expert system for diagnosis and treatment of dam seepage problems, in *Microcomputer knowledge-based expert systems in Civil Engineering*, Ed. Adeli, H., ASCE: New York, pp. 118-126.
- AUVINET, G., 1971, Monte Carlo techniques applied to water flow analysis in soils, *Revista Latinoamericana de Geotecnia*, Vol. 1, Caracas, Venezuela, pp. 68-95.
- AUVINET, G., 1975, Técnicas de Monte Carlo, Cap. VI del Libro: *Presas de tierra y enrocamiento*, pp. 123-131, Editado por R. J. Marsal & D. Reséndiz, Edit. LIMUSA, México.
- AUVINET, G., 1986, *Aplicación de la Teoría de Conjuntos Borrosos en Ingeniería Civil*, Memoria de Examen Predoctoral, DEPFI, UNAM, México.
- AUVINET, G. & ESQUIVEL, R., 1986, *Impermeabilización de Lagunas Artificiales*, Editorial LIMUSA y SMMS, México.
- AUVINET, G., 1995, Étude de écoulements en milieux poreux par la méthode de Monte Carlo, *Revue Française de Géotechnique*, N° 70, Paris, France, pp. 15-24.
- AUVINET, G., BOUAYED, A. & BEN CHEIKH, M., 1995, Modélisation stochastique par éléments finis en géomécanique. Actes du 12<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, France, Vol. 4, pp. 201-204.
- AUVINET, G., 1997, *Enfoque variacional aplicado al flujo de agua en suelos*, Apuntes del Seminario de Elementos Finitos para Geotecnistas, DEPFI, UNAM.

- AUVINET, G., 2000, Probabilidad y estadística, Notas del curso impartido en la División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- AUVINET, G. & LÓPEZ-ACOSTA, N. P., 2001, Uncertainty in Analyses of Rapid Drawdown of Reservoirs. Foundations and retaining structures (Design and performance of retaining structures under static and dynamic loading). Proceedings of the XVth International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Istanbul, Turkey, August 2001, Vol. 2 pp 1065-1068.
- AUVINET, G., 2002, Decimosexta Conferencia Nabor Carrillo: Incertidumbre en Geotecnia, XXI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Querétaro, México.
- AUVINET, G. & LÓPEZ-ACOSTA, N. P., 2002, Stochastic Finite Element Method Applied to Groundwater Seepage in Soils, *Publication of the International Association of Science and Technology for Development (IASTED)*, ACTA Press, Proceedings of the 13th IASTED International Conference in Modelling and Simulation (MS 2002), Marina del Rey California, USA, pp. 213-217.
- AUVINET, G., LÓPEZ-ACOSTA, N. P. & VÁZQUEZ, F., 2007, Flow through random porous media. A State of the art, 7<sup>th</sup> North American Workshop on Applications of the Physics of Porous Media, Puerto Vallarta, Mexico.
- AUVINET, G., 2007, Método mixto, Comunicación personal.
- AUVINET, G. & LÓPEZ-ACOSTA, N. P., 2010, Condición de vaciado rápido en taludes sumergidos, Libro: 15 Presentaciones de amigos y colegas en el Homenaje al Ing. Jesús Alberro Aramburu, Edición de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica y del Instituto de Ingeniería de la UNAM, pp. 167-189. ISBN 978-607-02-0866-9.
- BAECHER, G. B. & CHRISTIAN, J. T., 2003, Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering, John Wiley & Sons.
- BALAS, J., SLÁDEK, J. & SLÁDEK, V., 1989, Stress Analysis by Boundary Element Methods, Studies in Applied Mechanics 23, ELSEVIER.
- BATHE, K. J. & WILSON, E. L., 1976, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall Inc.
- BAYES, THOMAS; PRICE, MR., 1763, "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 53, pp. 370-418, [doi:10.1098/rstl.1763.0053](https://doi.org/10.1098/rstl.1763.0053).
- BENJAMIN, J. R. & CORNELL, C. A., 1970, Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York.
- BENMANSOUR, A., 1996, Fiabilité des conduites enterrées, Thèse de Doctorat, ENSG, INPL, Nancy, France, 232 pp. (Dir. G. Auvinet).

- BENSON, C. H., 1993, Probability Distributions for Hydraulic Conductivity of Compacted Soil Liners, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 119(3), pp. 471-486.
- BERKOWITZ, B. & BALBERG, I., 1993, Percolation theory and its application to groundwater hydrology, *Water Resources Research*, Vol. 29, N° 4, pp. 775-794.
- BRENNER, C. & BUCHER, C., 1995, A contribution to the SFE-based reliability assessment of non linear structures under dynamic loading, *Prob. Eng. Mech.*, Vol. 10, N° 4, pp. 265-273.
- BITTNAR, Z. & SADEJNOHA, J., 1996, *Numerical Methods in Structural Mechanics*, ASCE, Press, Thomas Telford.
- BONNET, V., 2002, Interprétation géostatistique des travaux de reconnaissance sur le site du nouvel aéroport international de Mexico, Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, France.
- BOUAYED, A., 1997, Modélisation stochastique par éléments finis en géomécanique, Thèse de Doctorat, ENSG, INPL, Nancy, France, 157 pp. (Dir. G. Auvinet).
- BROADBENT, S. R. & HAMMERSLEY, J.M., 1957, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 53, pp. 629.
- CAMBOU, B., 1974, Método del elemento finito. Análisis de incertidumbre de primer orden. Publicación N° 339 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México (Dir. G. Auvinet).
- CANAVOS, G., 1988, *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos*, Mc Graw-Hill, México.
- CARDWELL, W. T. & PARSONS, R. L., 1945, Average perméabilités of heterogeneous oil sands, *Trans. Am. Inst. Mining. Met. Pet. Eng.*, pp. 34-42.
- CARELS, P., 1982, Influencia de la dispersión en las propiedades del suelo en la evaluación del comportamiento dinámico de obras de tierra. Tesis de Maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos), División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- CHOWDHURY, R. N. & XU, D. W., 1993, *Rational polynomial technique in slope reliability analysis*, *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 119, N° 12, pp. 1910-1928.
- CHRISTIAN, J. T., 1980, Flow nets from finite element data, *International Journal for numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol 4, pp. 191-196.
- CHRISTIAN, J. T. & BAECHER, G. B., 1999, The point-estimate method as numerical quadrature, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol 125, N° 9, pp. 779-786.
- CHRISTIAN, J. T. & BAECHER, G. B., 2002, The point-estimate method with large numbers of variables, *International Journal for numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol 26, N° 15, pp. 1515-1529.



- CORNELL, A. C., 1971, First order uncertainty analysis of soils deformation and stability, Proceedings, First International Conference on Applications of Statistics and Probability to soil and Structural Engineering, Hong Kong, pp. 130-144.
- DAGAN, G., 1979, Models of groundwater flow in statistically homogeneous porous formations, Water Resources Research, 15(1), pp. 47-63.
- DAGAN, G., 1989, Flow and transport in porous formations, Springer-Verlag, New York.
- DAGAN, G., 1993, High order correction of effective permeability of heterogeneous isotropic formations of lognormal conductivity distribution, Trans. Porous Media, 12, pp.279-290.
- DAVEY-WILSON, I. E. G., 1991, Geotechnical Laboratory Test Simulation using AI Techniques, in Artificial Intelligence and Civil Engineering, Ed. Topping B. H. V., Civil-Comp. Press, pp. 119-124.
- DEL BRÍO, B. M. & SANZ, A., 1997, Redes neuronales y sistemas borrosos, Edit. Ra-Ma.
- DELHOMME, J. P. & DE MARSILY, G., 2005, Capítulo: "Flow in porous media: An attempt to outline Georges Matheron's contributions" del Libro: "*Lecture Notes in Statistics. Space, Structure and Randomness. Contributions in Honor of Georges Matheron in the Field of Geostatistics, Random Sets and Mathematical Morphology*", Michel Bilodeau, Fernand Meyer & Michel Schmitt (Editors), Springer New York, Vol. 183, Parte I, pp. 69-87.
- DER KIUREGHIAN, A. & KE, J.-B., 1988, The stochastic finite element method in structural reliability, Probability Engineering Mechanics, Vol. 3, N° 2, pp. 83-91.
- DER KIUREGHIAN, A., LI, C. C. & ZHANG, Y., 1991, Recent developments in stochastic finite elements, Proceedings, 4<sup>th</sup> IFIP W. G. 7.5 Conference, Springer-Verlag, Munich, Germany, pp. 19-38.
- DESBARATS, A. J., 1987, Numerical estimation of effective permeability in sand-shale formations, Water Resources Research, 23(2), pp.273-286.
- DEUTSCHER, G., ZALLEN, R & ADLER, J., 1983, Percolation structures and processes, Annals of the Israel Society, Issn. 0309-8710, Vol. 5, Bristol England: A. Hilger & Jerusalem Israel: Israel Physical Society.
- DITLEVSEN, O., 1996, Dimension reduction and discretization in stochastic problems by regression method, in F. Casciati and B. Roberts, Editors, Mathematical models for structural reliability analysis, CRC Mathematical Modelling Series, Vol. 2, pp. 51-138.
- DITLEVSEN, O. & MADSEN, H. O., 1996, Structural Reliability Methods, John Wiley & Sons.
- ELSGOLTZ, L., 1977, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Edit MIR, Moscú.
- EL-RAMLY, H., MORGENSTERN, N.R. & CRUDEN, D.M., 2001, "Probabilistic slope stability analysis for practice", Canadian Geotechnical Journal, Vol. 40, pp. 851-855.

- ENGEL, B.A. & BEASLEY, D.B., 1991, DSS - Dam Site Selector Expert System for Education, *Jnl. Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 5, pp. 774-784.
- FAYERS, F. J. & HEWETT, T. A., 1992, A review of current trends in petroleum reservoir description and assessment of the impacts on oil recovery, *Adv. in Water Resources*, 15, pp. 341-365.
- FENTON, G.A. & GRIFFITHS, D.V., 1993, Statistics of block conductivity through a simple bounded stochastic medium, *Water Resources Research*, 29(6), pp.1825-1830.
- FENTON, G. A., 1996, Data Analysis/Geostatistics, Chapter 4 of Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, edited by G. A. Fenton, ASCE, Uncertainty'96 Conference, Madison, Wisconsin, USA., pp. 47-69.
- FENTON, G. A. & GRIFFITHS, D. V., 1996, Statistics of free surface flow through stochastic earth dam, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 122 N° 6, pp. 427-436.
- FENTON, G. A. & GRIFFITHS, D. V., 1997, Extreme hydraulic gradient statistics in stochastic earth dam, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 123 N° 11, pp. 995-1000.
- FINN, W. D. L., 1967, Finite Element Analysis of Seepage through dams, *Proceedings American Society of Civil Engineers*, Vol. 93.
- FLORES, R., 1999, Flujo de agua a través de suelos, *Avances en Hidráulica 4*, Tercera Edición, Asociación Mexicana de Hidráulica e Instituto Mexicano de Tecnología del agua, México.
- GELHAR L.W. & AXNESS, C. L., 1983, Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers, *Water Resources Research*, 19, pp. 161-180.
- GHANEM, R. G. & SPANOS, P. D., 1991a, Spectral stochastic finite element formulation for reliability analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, 117, 10, pp. 2351-2372.
- GHANEM, R. G. & SPANOS, P. D., 1991b, *Stochastic finite elements. A spectral approach*, Springer Verlag.
- GHANEM, R. G. & BRZKALA, V., 1996, Stochastic finite element analysis of randomly layered media, *Journal of Engineering Mechanics*, 122, 4, pp. 361-369.
- GHANEM, R. G., 1998, Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 158, pp. 199-220.
- GHANEM, R. G., 1999, Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 125, 1, pp. 26-40.
- GILBERT, R. B., 1996, Basic Random Variables, Chapter 2 of Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Edited by G. A. Fenton, ASCE Uncertainty'96 Conference, pp. 10-34, Madison, Wisconsin, USA.

- GILLES DE GENNES, P., 1976, La percolation: le concept unificateur, La Recherche, France, Vol. 7, N° 72, pp. 919-927.
- GRIBB, M. M. & GRIBB, G.W., 1994, Use of Neural Networks for Hydraulic Conductivity Determination in Unsaturated Soil, Proc. 2nd International Conference on Ground Water Ecology, Eds. Stanford, J.A. & Valett, H.M., Bethesda MD: Amer. Water Resources Assoc., Atlanta, pp. 155-163.
- GRIFFITHS, D. V., 1984, Rationalized charts for the method of fragments applied to confined seepage, *Géotechnique*, 34(2), pp.229-238.
- GRIFFITHS, D. V. & FENTON, G. A., 1993, Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil, *Géotechnique* 43, N° 4, PP. 577-587.
- GRIFFITHS, D. V., FENTON, G. A. & PAICE, G. M., 1996, Reliability-based exit gradient design of water retaining structures, Proceedings of uncertainty 1996, ASCE, Vol. 1, pp. 518-533.
- GRIFFITHS, D. V. & FENTON, G. A., 1997, Three-dimensional seepage through spatially random soil, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 123 N° 2, pp. 153-160.
- GRIFFITHS, D. V. & FENTON, G. A., 1998, Probabilistic analysis of exit gradients due to steady seepage, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 124 N° 9, pp. 789-797.
- GRIMMETT, G., 1999, Percolation, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer, New York.
- GUÈRILLOT D., RUDKIEWICKZ J. L., RAVENNE C., Renard G. & GALLI A., 1990, An integrated model for computer aided reservoir description: from outcrop study to fluid flow simulations, *Revue de l'IFP*, 45(1).
- GUTJAHR A. L., GELHAR L.W., BAKR A. A. & McMILLAN J. R., 1978, Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows 2: Evaluation and Application, *Water Resources Research*, 14(5), pp. 953-959.
- GUYON E., HULIN J. P. & LENORMAND R., 1984, Application de la percolation à la physique des milieux poreux, *Annales des Mines*, 5-6, pp.17-40.
- HALDORSEN, M. H. & LAKE, L. W., 1982, A new approach to shale management in field scale simulation models, SPE 10976, Society of Petroleum Engineers.
- HAMMERSLEY, J. M., 1961, *J. Math. Phys.*, 2, pp. 728.
- HARR, M. E., 1962, *Groundwater and seepage*, Dover Publications, INC.
- HARR, M. E., 1989, Probabilistic estimates for multivariate analyses, *Appl Math Model*, Vol. 13, N° 5, pp. 313-318.
- HASHIN, Z., 1983, Análisis of composite materials, *J. Appl. Mech.*, 50, pp.481-505.

- 
- HERMOSILLO, A., MAGAÑA, R. & PÉREZ, M., 2002, Visualización mediante lenguaje C++ para diseño geotécnico, Memoria, XXI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Vol. II, pp. 363-372, Querétaro, México.
- HERNÁNDEZ R., D. A., 1990, Modelo de Hele-Shaw aplicado al estudio del flujo de agua en suelos, Tesis de Licenciatura (dirigida por R. Flores), Facultad de Ingeniería, UNAM.
- HONG, H. P., 1996, Point-estimate moment-based reliability analysis, Civil Engineering System, 13(4), pp. 281-294.
- HONG, H. P., 1998, An efficient point estimate method for probabilistic analysis, Reliability Engineering System Safety, 59(3), pp. 261-267.
- HUNT, A. G., 2005, Percolation theory for flow in porous media, Lecture notes in physics, ISSN: 0075-8450, Springer, Berlin.
- INDELMAN, P. & DAGAN, G., 1993, Upscaling of heterogeneous formations: General approach and application to isotropic media, Trans. Porous Media, 12(2), pp. 61-183.
- ISTOK, J., 1989, Groundwater Modeling by the Finite Element Method, American Geophysical Union, Water Resources Monograph 13.
- JOURNAL, A. G. & HUIJBREGTS, CH. J., 1978, Mining Geostatistics, Academic Press, New York.
- JOURNAL A. G., DEUTSCH C. V. & DESBARATS A. J., 1986, Power averaging for block effective permeability, SPE 15128, Society of Petroleum Engineers.
- JUÁREZ, E. & RICO, A., 1972, Mecánica de suelos. Tomo I Fundamentos de la Mecánica de Suelos, Edit LIMUSA, México.
- JUÁREZ, E. & RICO, A., 1972, Mecánica de suelos. Tomo III Flujo de agua en suelos, Edit LIMUSA, México.
- JUÁREZ, M., 2001, Aplicación de la Geoestadística a la descripción estratigráfica del subsuelo del valle de México, Tesis de Maestría en Ciencias (Mecánica de Suelos), Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, IPN, México, D. F.
- KASHEF, A. A. I., 1987, Groundwater Engineering, Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
- KITANIDIS, P. K., 1997, Introduction to Geostatistics: Applications to Hydrogeology, Cambridge University Press, New York.
- KRIGE, D. G., 1966, Two-Dimensional weighted moving average trend surface for one valuation, Journal South African Inst. of Mining and Metallurgy, pp. 13-38.
- KRUEL-ROMEU R. & NOETINGE B., 1995, Calculation of internodal transmissibilities in finite difference models of flow in heterogeneous media, Water Resources Research, 31(4), pp. 943-959.
-

- KUO, S. S., 1972, Computer Applications of Numerical Methods, Addison Wesley.
- LAWRENCE, M., 1987, Basic random variables in finite element analysis, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 24, pp. 1849-1863.
- LEBRECHT, W. & VALDÉS, J. F., 2009, Umbrales de percolación de sitios. Pequeñas celdas bidimensionales asimétricas, Revista Mexicana de Física, 55(4), pp. 307-311.
- LE LOC'H, G., 1987, Étude de la composition des perméabilités par des méthodes variationnelles, PhD thesis, Paris School of Mines.
- LEMOUZY, P., 1991, Calcul de la perméabilité absolue effective, Revue de l'IFP (note interne, RF40 N° 2685).
- LEVI, E., 1980, Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas, Facultad de ingeniería, UNAM.
- LI, C. C. & DER KIUREGHIAN, A., 1993, Optimal discretization of random fields, Journal of Engineering Mechanics, Vol 119, N° 6, pp. 1136-1154.
- LI, K. S., 1992, Point-estimate method for calculating statistical moments, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 118, N° 7, pp.1506-1511.
- LIGGETT, J. A. & LIU, Ph. L. F., 1983, The boundary integral equation method for porous media flow, Allen & Unwin Inc.
- LIND, N. C., 1983, Modelling uncertainty in discrete dynamical systems, Appl Math Model, 7(3) 146-152.
- LIU, W.-K., BELYTSCHKO, T. & MANI, A., 1986, Random field finite elements, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 23, N° 10, pp. 1831-1845.
- LIVESLEY, R. K., 1994, Elementos finitos, introducción para ingenieros, Edit LIMUSA, México.
- LÓPEZ-LARA ET AL., 2004, La percolación en la consolidación de suelos, Tomo I, Sesión 2: Caracterización de suelos, XXII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, pp. 223-227, Guadalajara, México.
- LÓPEZ, N. P. & AUVINET, G., 1998, Flujo de agua en suelos con permeabilidad aleatoria, Memorias de la XIX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Sesión 7, pp. 404-411, Puebla, México. [Citado en el Libro: 'Introducción al Flujo de Agua en Suelos'. Autor: Abimael Cruz Alabez. (2008). Editorial: Helios Comunicación.]
- LÓPEZ, N. P. & AUVINET, G., 2000, Incertidumbre en el Análisis del Vaciado Rápido de Embalses, Sesión 2: La Geotecnia y la Ingeniería de Presas, Memorias de la XX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Oaxaca 2000, pp 157-166.
- LÓPEZ, N. P., 2000, Flujo de agua en suelos con permeabilidad aleatoria, Tesis de Maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos), División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México.

- LÓPEZ-ACOSTA, N. P & AUVINET, G., 2002, Aplicación del Método del Elemento Finito Estocástico al Flujo de Agua en Suelos, Memorias del II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Guanajuato, Gto., Vol. 1, pp. 247-256.
- LÓPEZ, N. P. & AUVINET, G., 2002, Comparación entre las aproximaciones de primer y segundo orden en los análisis de incertidumbre en el flujo de agua en suelos, Memorias de la XXI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Querétaro, México, Vol. II, pp. 373-380.
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P. & AUVINET, G., 2003, Comparison between first and second order approximations in stochastic analyses of groundwater seepage in soils, Proceedings of the 12th Panamerican Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Cambridge, Massachusetts, USA (Jun 2003). Vol. 2 pp 1291-1296.
- LÓPEZ, N. P. & AUVINET, G., 2004, Flujo de agua en medios heterogéneos, Memorias de la XXII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Guadalajara, México, 18 de Noviembre de 2004, Tomo 1, pp 215-222.
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P & AUVINET, G., 2006, Solución de un problema inverso de flujo de agua utilizando un enfoque bayesiano, Memorias de la XXIII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, Tomo I, pp. 393-400.
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P & AUVINET, G., 2006, Reseña del artículo: “Comparación entre las aproximaciones de primer y segundo orden en los análisis estocásticos de flujo de agua en suelos”, *Revista de la Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos*, No. 202 Abr-Jun de 2006, México, D. F., pp. 17-24. [Citada en el Libro: ‘Introducción al Flujo de Agua en Suelos’. Autor: Abimael Cruz Alabez. (2008). Editorial: Helios Comunicación.]
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P & AUVINET, G., 2008, Análisis de flujo establecido de agua en la excavación de un dique seco, Memorias de la XXIV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Aguascalientes, Aguascalientes, 19-22 Noviembre de 2008, Tomo 2, pp. 451-461.
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P. & AUVINET, G., 2009, Rapid drawdown condition in submerged slopes, Proceedings of the 8th North American Workshop on Applications of the Physics of Porous Media, October 9-12, Ensenada, Baja California, Mexico.
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P., AUVINET, G. & LEZAMA, J. L., 2010, Estudio del flujo transitorio ocasionado por llenado y vaciado rápido en bordos de protección, Memorias del 1er Coloquio de Jóvenes Geotecnistas, Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica, 19 de Febrero de 2010 pp 129-141.
- LÓPEZ-ACOSTA, N. P., AUVINET, G. & LEZAMA, J. L., 2010, Study of transient flow caused by rapid filling and drawdown in protection levees, *Geo-Institute ASCE Geotechnical Special Publication (GSP)*, Proceedings of the 5th International Conference on Scour and Erosion (ICSE-5, November 7-10, 2010), San Francisco, CA, USA (aceptado para publicación/en prensa).
- LOWE, J. III, 1978, Cuarta Conferencia Nabor Carrillo: Foundation design – Tarbela dam, IX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Mérida, México.

- LUMB, P., 1974, Application of Statistics in Soil Mechanics, Soil Mechanics: New Horizons, Lee, I. K., ed., London, Newnes-Butterworth, pp. 44-112, 221-239.
- MANTOGLU, A. & GELHAR, L., 1987, Stochastic modeling of large-scale transient unsaturated flow systems, Water Resources Research, Vol 23, N° 1, pp. 37-46.
- MARTIN, J. H. & COOPER, J. A., 1984, An integrated approach to the modeling of permeability barrier distribution in a sedimentologically complex reservoir, in 59<sup>th</sup> Annual Technical Conference, Society of Petroleum Engineers.
- MATHERON, G., 1962, Traite de Geostatistique Apliquee, Tome I. Memoires bureau de Recherches Geologiques et Minieres, N 24, Editions Bureau de Recherche et Minieres, Paris.
- MATHERON, G., 1965, Les variables régionalisées et leur estimation, Masson et Cie., Paris, France.
- MATHERON, G., 1967, Eléments pour une Théorie des Milieux Poreux, Masson, Paris.
- MATHERON, G., 1968, Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène: Critique de la règle de pondération géométrique, Revue de l'IFP, 23, pp. 201-218.
- MATHEWS, J. & WALKER, R. L., 1964, Mathematical Methods of Physics, 2<sup>nd</sup> Edition, Benjamin Publishers, pp. 286-298.
- MATTHIES, G., BRENNER, C., BUCHER, C. & GUEDES SOARES, C., 1997, Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids-stochastic finite elements, Structural Safety, Vol 19, N° 3, pp. 283-336.
- MARSAL, R. J. & RESÉNDIZ, D., 1968, Análisis de flujo de agua, Cap. 6 del Libro: "Fundamentos del diseño y construcción de presas de tierra y enrocamiento", Publicación N° 183 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- MARSAL, R. J. & RESÉNDIZ, D., 1975, Presas de tierra y enrocamiento, LIMUSA, México.
- MARSILY, G. de, 1986, Quantitative Hydrogeology: Groundwater Hydrology for Engineers, Academic Press, Orlando, FL.
- MELLAH, R., 1999, Modelisation stochastique par elements finis en elastoplasticité appliquée à la geomecanique, These Doctorale (Spécialité: Génie Civil-Hydrosystèmes-Géotechnique), Institut Polytechnique de Lorraine, École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy, France.
- MENDENHALL, W., 1982, Introducción a la probabilidad y la estadística, Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V., México.
- MISHRA, G. C. & SINGH, A. K., 2005, Seepage through a levee, Technical Notes, International Journal of Geomechanics, ASCE, Vol. 5, No. 1, pp. 74-79.
- MOOD, A. M. & GRAYBILL, F. A., 1963, Introduction to the Theory of Statistics, Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

- MYERS, D. E., 1987, Optimization of Sampling Locations for Variogram Calculations, *Water Resources Research*, 23(3), pp. 283-293.
- NAJJAR, Y. M. & BASHEER, I. A., 1996, Utilizing computational neural networks for evaluating the permeability of compacted clay liners, *Journal of Computing in Civil Engineering*, ASCE, 14, pp. 193-212.
- NECHNECH, A., 1994, Etude fiabiliste des murs de soutènement, Mémoire de DEA, ENSG, INPL, Nancy, France, 59 pp. (Dir. G. Auvinet).
- NETINGER, B., 1994, The effective permeability of a heterogeneous porous medium, *Trans. Porous Media*, Vol. 15, pp. 99-127.
- NEUMAN, S. P. & WITHERSPOON, P. A., 1970, Finite Element Method of Analyzing Steady Seepage with a Free Surface, *Water Resources Research*, Vol 6, N° 3, pp. 889-897.
- ORENSE, R. P., SHIMOMA, S., MAEDA, K. & TOWHATA, I., 2004, Instrumented model slope failure due to water seepage, *Journal of Natural Disaster Science*, Volume 26, Number 1, pp. 15-26.
- ORLANDI, S. G., 1996, Método del elemento finito estocástico en geotecnia. Análisis no lineal, Tesis de Maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos), División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- PANOV, D. J., 1963, Formulas for the Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Method of Differences, FREDERICK UNGAR PUBLISHING CO., New York.
- PAVLOVSKY, N. N., 1933, Motion of water under dams, *Trans. First Congr. on Large Dams*, Stockholm, Vol. 4.
- PARZEN, E., 1960, *Modern Probability Theory and its Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- PÉREZ-REA, M. L., HORTA-RANGEL, J., LÓPEZ-CAJÚN, C. S., LÓPEZ-LARA, T., HERNÁNDEZ-ZARAGOZA, J. B. & CASTAÑO, V. M., 2009, Modelo híbrido de percolación y elemento finito para el análisis micromecánico de suelos, *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, Vol. 26, N° 2, pp. 335-346.
- PINEDA, A. R. & AUVINET, G., 2006, Método del elemento finito estocástico en geotecnia. Enfoque espectral, Memoria, XXIII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, SMMS, Tomo 1, pp. 35-43, Chiapas, México.
- PINEDA, A. R., 2007, Método del elemento finito estocástico en geotecnia. Enfoque espectral, Tesis de Maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos), División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P. YA., 1962, *Theory of the motion of groundwater*, Chap.3, Princeton University Press.



- QUINTARD, M. & WHITAKER, S., 1987, Ecoulement monophasique en milieu poreux: effets des hétérogénéités locales, *J. Mec. Theor. Appl.*, 6(5), pp. 691-726.
- RAMACHANDRAN, P. A., 1994, *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science.
- REDDI, L. N., 2003, *Seepage in soils: principles and applications*, John Wiley & Sons Inc.
- RENARD PH. & DE MARSILY G., 1997, Calculating equivalent permeability: a review, *Advances in Water Resources*, Vol. 20, N° 5-6, pp. 253-278.
- RENARD PH., GENTY A. & STAUFFER F., 2001, Laboratory determination of the full permeability tensor, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 106, N° B11, pp. 26443-26452.
- RODRÍGUEZ, J. F., 1996, Determinación de las pérdidas por filtración en una laguna artificial de evaporación solar de 1400 Ha, Tesis de Licenciatura, ENEP Acatlán, UNAM.
- RÖHNISCH, A. & MAROTZ, G., 1965, On the movement of groundwater through anisotropic soil, *Proceedings of the Sixth International Conference on Soil Mechanics and foundation Engineering*, Montreal, Canadá, Vol. I, pp. 104-108.
- ROSENBLATT, M., 1952, Remarks on a multivariable transformation, *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 23.
- ROSENBLUETH, E., 1975, Point Estimates for Probability Moments. *Proceedings of National Academy of Science, USA*, Vol. 72(10), pp. 3812-3814.
- ROSENBLUETH, E., 1981, Two-point estimates in probabilities, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 5, N° 2, pp.329-335.
- RUBIN, Y. & GÓMEZ-HERNÁNDEZ, J., 1990, A stochastic approach to the problem of upscaling the conductivity in disordered media: Theory and unconditional numerical simulations, *Water Resources Research*, Vol. 26, N° 3, pp. 691-701.
- RUBIN, Y. & DAGAN, G., 1992, A note on head and velocity covariances in three-dimensional flow through heterogeneous anisotropic porous media, *Water Resources Research*, Vol 28, N° 5, pp 1463-1470.
- SAHIMI, M., 1994, *Applications of percolation theory*, Bristol: Taylor & Francis Group.
- SELLMEIJER, J. B., 1981, Piping due to flow towards ditches and holes, *Proceedings of Euromech 143 Flow and Transport in Porous Media*, edited by A. Verruijt y F. B. Barends, A. A. BALKEMA, pp 69-72.
- SHANTE, V. & KIRKPATRICK, S., 1971, An introduction to percolation theory, *Advances in Physics*, Vol. 20, pp. 325-357.
- SHEHATA, A. K., 2006, Design of downstream blanket for overflow spillway founded on complex formations, *Journal of Applied Sciences Research*, 2(12), pp. 1217-1227.

- SIEH D., KING D. & GIENCKE F., 1988, Dam seepage analysis using artificial intelligence, in Planning Now for Irrigation and Drainage in the 21<sup>st</sup> Century, New York, ASCE, pp. 417-422.
- SILLIMAN, S. E., 1990, Influence of grid discretization on the percolation probability within discrete random fields, Journal of Hidrology, Vol. 3, N° 1, pp. 177-191.
- SITAR N, CAWFIELD JD, DER KIUREGHIAN A, 1987, First-order reliability approach to stochastic analysis of surface flow and contaminant transport, Water Resources, 23(5), pp. 794-804.
- SMITH, R. & HEBBERT, R., 1979, A Monte Carlo Analysis of the Hydrologic Effects of Spatial Variability of Infiltration, Water Resources Research, Vol 15, N° 2, pp. 419-429.
- SMITH, L. & FREEZE, A., 1979, Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain. One-dimensional simulations, Water Resources Research, Vol 15, N° 3, pp. 521-528.
- STAUFFER, D., & AHARONY, A., 1985, Introduction to percolation theory, 1<sup>st</sup> Edition, Routledge: Taylor & Francis Group.
- SOUTHWELL, R. V., 1940, Relaxation Methods in Engineering Science, Oxford University Press.
- SUDICKY, EA, 1986, A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer: spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process, Water Resources 22(13), pp. 2069-2083.
- SUDRET, B. & DER KIUREGHIAN, A., 2000, Stochastic finite element methods and reliability (A State-of-the-Art Report), Report N° UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.
- SPIEGEL, M. R., 1964, Theory and Problems of Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and its Applications, SCHAUUM PUBLISHING CO., New York.
- SYKES, M. F. & ESSAM, J. W., 1964, Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions, J. Math. Phys., 5, pp.1117-1127.
- TERZAGHI, K., 1955, Influence of Geological Factors on the Engineering Properties of Sediments, Economic Geology, Fiftieth Anniversary Volume, USA.
- TERZAGHI, K. & PECK, R. B., 1967, Soil mechanics in engineering practice, John Wiley & Sons Inc.
- TOLL, D. G., 1996, Artificial Intelligence Applications in Geotechnical Engineering, Electronic Journal of Geotechnical Engineering, <http://geotech.civen.okstate.edu/ejge/ppr9608/index.htm>.
- TRISTÁN, A., 1975, Programa para resolver el flujo establecido en suelos por el método de elementos finitos, Revista de Ingeniería, UNAM, Julio-Septiembre.

- VANMARCKE, E. H., 1983, Random fields: analysis and synthesis, Cambridge, Massachusetts, London, England.
- VANMARCKE, E. H. & GRIGORIU, M., 1983, Stochastic finite element analysis of simple beams, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 109, N° 5, pp. 1203-1214.
- VÁZQUEZ, F., 2005, Incertidumbre en el modelado de la construcción de presas de tierra mediante elementos finitos, Tesis de Maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos), División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- WARREN, J. & PRICE, H., 1961, Flow in heterogeneous porous media, SPE J.1, pp. 153-169.
- WAUBKE, H., 1996, Dynamische Berechnungen für den Halbraum mit streuenden Parametern mittels orthogonaler Polynome, Ph. D. Thesis, Technische Universität, München.
- WEISSTEIN, E. W., 2010, "Percolation Theory" From [MathWorld](http://mathworld.wolfram.com/PercolationTheory.html)– A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/PercolationTheory.html>.
- WHITLOW, R., 1994, Fundamentos de mecánica de suelos, Edit. CECSA, México.
- WIENER, O., 1912, Abhandlungen der mathematisch. Physischen Klasse der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 32, pp. 509.
- YAMASAKI, F., SHINOZUKA, M. & DASGUPTA, G., 1988, Neumann expansion for stochastic finite analysis, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 114, N° 8, pp. 1335-1354.
- YANG, J., ZHANG, D. & LU, Z., 2004, Stochastic analysis of saturated-unsaturated flow in heterogeneous media by combining Karhunen-Loève expansion and perturbation method, Journal of Hydrology, 294, pp. 18-38.
- ZADEH, L. A., 1965, Fuzzy sets, Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353.
- ZHANG, D. & ELLINGWOOD, B., 1994, Orthogonal series expansion of random fields in reliability analysis, J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 120, N° 12, pp. 2660-2677.
- ZHANG, D., 2002, Stochastic methods for flow in porous media. Coping with uncertainties, Academic Press.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L., 1994, El método de los elementos finitos, Vol. 1, Mc Graw-Hill, México.
- ZIENKIEWICZ, O. C., MEYER, P. & CHEUNG, Y. K., 1966, Solution of Anisotropic Seepage Problems by Finite Elements, Proceedings American Society of Civil Engineers, Vol. 92 EMI, pp. 111-120.

# ANEXO I

---

## Métodos para determinar permeabilidades equivalentes de medios heterogéneos

---

### I.1 Introducción

Se proporciona a continuación un breve resumen de algunos de los diversos métodos que existen (heurísticos, deterministas y estocásticos) para calcular la *permeabilidad equivalente* en un medio poroso heterogéneo (Renard & de Marsily, 1997). Para cada uno de estos métodos, pueden utilizarse técnicas de cálculo diferentes: analíticas o numéricas, exactas o aproximadas.

### I.2 Métodos heurísticos

#### I.2.1 Medias promedio

La idea general consiste en tomar un valor entre dos límites teóricos conocidos. Dos de estos métodos son los que a continuación se indican.

##### I.2.1.1 Límites fundamentales

Matheron (1967) sugiere una expresión donde la permeabilidad efectiva es un promedio pesado de los límites de Wiener (estudiados en el Capítulo 2):

$$k_{ef} = \mu_a^\alpha \cdot \mu_h^{1-\alpha} \quad \text{con } \alpha \in [0,1] \quad (\text{I.1})$$

donde  $\mu_a$  es la media aritmética y  $\mu_h$  es la media armónica; si el dominio es estadísticamente homogéneo e isótropo, el exponente  $\alpha$  está dado por:

$$\alpha = \frac{D_s - 1}{D_s} \quad (\text{I.2})$$

siendo  $D_s$  la dimensión espacial.

Si además de ser estadísticamente homogéneo, el dominio es anisótropo, Ababou (1995) considera:

$$k_{ef}^{ii} = \mu_a^{\alpha_i} \cdot \mu_h^{1-\alpha_i} \quad (\text{I.3})$$

$$\alpha_i = \frac{\left( D_s - \frac{L_h}{L_i} \right)}{D_s} \quad (\text{I.4})$$

donde  $L_i$  es la distancia de correlación en la dirección principal y  $L_h$  es la media armónica de las distancias de correlación en las direcciones de anisotropía.

### I.2.1.2 Límites de Cardwell y Parsons

De acuerdo con Krueel-Romeu (1995), Guérillot (1990) propone que se tome la media geométrica de los límites de Cardwell y Parsons, y Lemouzy (1991) generaliza esta idea proponiendo para un medio tridimensional:

$$k_b^{xx} = \sqrt[6]{k_1^2 k_2^2 k_3 k_4} \quad (\text{I.5})$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu_h^x \left( \mu_a^y \left( \mu_a^z \right) \right) = \mu_h^x \left( \mu_a^z \left( \mu_a^y \right) \right) \\ k_2 &= \mu_a^y \left( \mu_a^z \left( \mu_h^x \right) \right) = \mu_a^z \left( \mu_a^y \left( \mu_h^x \right) \right) \\ k_3 &= \mu_a^y \left( \mu_h^x \left( \mu_a^z \right) \right) \\ k_4 &= \mu_a^z \left( \mu_h^x \left( \mu_a^y \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

### I.2.2 Promedio de una potencia (o promedio de orden $p$ )

Journal *et al.* (1986) propone que la permeabilidad efectiva,  $k_{ef}$ , sea igual al promedio de una potencia (o promedio de orden  $p$ ) con un exponente  $p$  que varía en el intervalo  $[-1, +1]$ , dependiendo de la distribución espacial de las permeabilidades:

$$\mu_p = \left( k^p \right)^{1/p} = \left( \frac{1}{Vlm} \int_{Vlm} k(x)^p dVlm \right)^{1/p} \quad (\text{I.7})$$

donde  $Vlm$  es el volumen del medio analizado, y  $p$  se define para medios estadísticamente homogéneos e isotrópicos como (Netinger, 1994):

$$p = 1 - \frac{2}{D_s} \quad (\text{I.8})$$

En el caso de un medio con distribución log-normal, Ababou *et al.* (1989) propone que:

$$\mu_p = \mu_g \cdot \exp\left(\frac{p \cdot \sigma_{lnk}^2}{2}\right) \quad (I.9)$$

Para el caso de un medio binario, la expresión (I.7) se transforma en:

$$k_{ef} = \left(f_0 k_0^p + f_1 k_1^p\right)^{1/p} \quad (I.10)$$

### I.3 Métodos deterministas

#### I.3.1 Solución analítica de la ecuación de difusión

Como se mencionó al principio del Capítulo 2 (inciso 2.2.3), esta ecuación ya se resolvió analíticamente para un flujo establecido en medios estratificados. Los dos resultados más conocidos de dicha solución son la permeabilidad equivalente para un flujo paralelo al estrato (promedio aritmético pesado  $\mu_a$ ) y la permeabilidad equivalente para un flujo perpendicular al estrato (media armónica pesado  $\mu_h$ ). Las medias o promedios anteriores pueden utilizarse cuando las permeabilidades puntuales o locales son escalares. Cuando las permeabilidades puntuales son tensoriales, para el caso de un medio estratificado compuesto de dos fases con permeabilidades  $\mathbf{K}_0$  y  $\mathbf{K}_1$ , el tensor de permeabilidad efectiva está expresado por (Quintard & Whitaker, 1987):

$$\mathbf{K}_{ef} = f_0 \mathbf{K}_0 + f_1 \mathbf{K}_1 + \frac{f_0 f_1 (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (f_0 \mathbf{K}_1 + f_1 \mathbf{K}_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (I.11)$$

Donde  $f_0 = V_0/V_{tot}$  es la fracción del medio con permeabilidad  $\mathbf{K}_0$ , y  $f_1 = V_1/V_{tot}$  es la fracción del medio con permeabilidad  $\mathbf{K}_1$ .

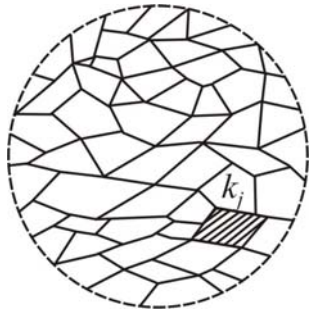
#### I.3.2 Teoría del medio efectivo

Dentro de esta teoría, también conocida como *aproximación de igual-consistencia* o *método de la matriz incluida*, el medio heterogéneo (compuesto por bloques homogéneos colocados uno a un costado del otro) se reemplaza por una sencilla inclusión de permeabilidad  $k$  que se introduce en un medio homogéneo con permeabilidad  $k_0$  desconocida (Figura I.1). Las condiciones de frontera se suponen lo suficientemente alejadas de la inclusión, ocasionando un flujo establecido alrededor de la misma. Si la inclusión tiene una forma simple, existe una solución analítica para el campo de carga hidráulica dentro y fuera de ella. Se considera como hipótesis, que las perturbaciones del campo de carga debido a cualquier inclusión no interfieren con las perturbaciones ocasionadas por otras inclusiones y  $k_0 = k_{ef}$ .

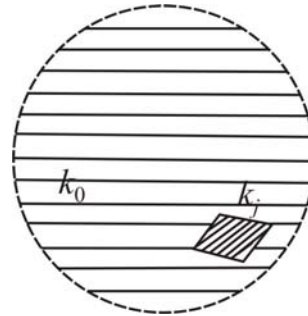
Cálculos realizados para inclusiones esféricas muestran que la permeabilidad efectiva está dada por (Dagan, 1979):

$$k_{ef} = \frac{1}{D_s} \left[ \int_0^\infty \frac{f(k) dk}{k(D_s - 1) + k_{ef}} \right]^{-1} \quad (I.12)$$

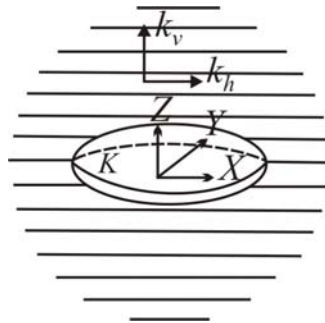
donde  $f(k)$  es la función de densidad de probabilidad de la permeabilidad, y  $D_s$  es la dimensión espacial. La expresión anterior se puede integrar numéricamente incrementando  $k_{ef}$  hasta obtener la igualdad.



(a) Medio heterogéneo constituido por bloques homogéneos  $k$



(b) Inclusión dentro de una matriz uniforme con permeabilidad constante  $k_0$



(c) Inclusión representada por un esferoide dentro de un medio infinito

Figura I.1 Representación esquemática de la teoría del medio efectivo

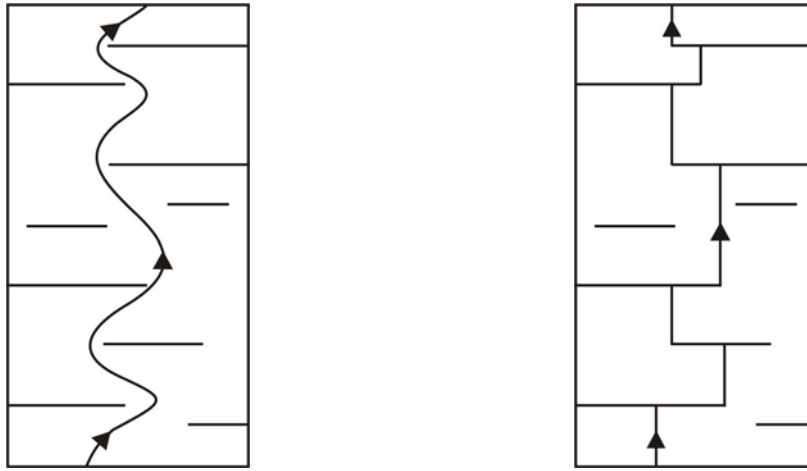
Para el caso de un medio binario la expresión (I.12) se transforma en:

$$k_{ef} = \frac{1}{D_s} \left[ \frac{f_0}{k_0 + (D_s - 1)k_{ef}} + \frac{f_1}{k_1 + (D_s - 1)k_{ef}} \right]^{-1} \quad (I.13)$$

La cual se satisface para el caso  $f_0 < 0.6$  con fase 0 que representa a la permeabilidad más baja (Desbarats, 1987).

I.3.3 Método de la línea de corriente

El *método de la línea de corriente* se utiliza para calcular la permeabilidad vertical  $k_v$  de un sistema binario arcillo-arenoso. Las formaciones de arcilla se representan por medio de rectángulos (en dos dimensiones) o paralelepípedos (en tres dimensiones) con permeabilidad cero. Asimismo, se asume que la arena tiene permeabilidades anisótropas  $k_{h_j}$  y  $k_{v_j}$ . La permeabilidad de bloque se determina calculando las pérdidas de carga a lo largo de un tubo sinuoso (línea de corriente) que circula dentro de la arena (Figura I.2) (Haldorsen & Lake, 1982; Martin & Cooper, 1984).



(a) Línea de flujo real

(b) Aproximación con segmentos de línea recta

Figura I.2 Método aproximado para calcular la longitud de una línea de flujo

La expresión para determinar la permeabilidad vertical es (Fayers & Hewett, 1992):

$$k_v = \frac{(1 - F_s) T_s^2}{N_s \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{S_i S_{ei}}} \quad (I.14)$$

donde  $F_s$  es la fracción de las inclusiones de arcilla,  $N_s$  es el número de líneas de corriente seleccionadas,  $T_s$  es el espesor de la formación,  $S_i$  es la longitud de la  $i$ -ésima línea de corriente y  $S_{ei}$  es la longitud pesada de la permeabilidad, definidas por:

$$S_i = \sum_j^{N_j} \left( \tau_j + \sum_j^{n_j} d_{ijk} \right) ; \quad S_{ei} = \sum_k^{N_j} \left( \frac{\tau_j}{k_{v_j}} + \sum_j^{n_j} d_{eijk} \right) \quad (I.15)$$



siendo  $n_j$  el número de inclusiones impermeables localizadas en el estrato  $j$ . Las longitudes horizontales de la  $k$ -ésima iteración en la  $i$ -ésima línea de corriente del  $j$ -ésimo estrato están dadas por:

$$d_{ijk} = NA_{1ijk} \cdot l_{ijk} = NA_{2ijk} \cdot w_{ijk} \quad (I.16)$$

$$d_{eijk} = \frac{NA_{1ijk} \cdot l_{ijk}}{k_{xj}} = \frac{NA_{2ijk} \cdot w_{ijk}}{k_{yj}} \quad (I.17)$$

donde  $NA_{1ijk}$  y  $NA_{2ijk}$  son números aleatorios uniformemente distribuidos, y  $l_{ijk}$  y  $w_{ijk}$  son las longitudes y espesores de las inclusiones, respectivamente.

### I.3.4 Renormalización

La *renormalización* es un método recursivo, mediante el cual, la permeabilidad equivalente de una cuadrícula fina se determina con una serie de iteraciones sucesivas. Por ejemplo, en un espacio de dimensión  $D_s$ , se parte de una cuadrícula de  $2^{nD_s}$  mallas y se llega a una cuadrícula menos discretizada con  $2^{(n-1)D_s}$  mallas. Este procedimiento se repite hasta obtener una cuadrícula de una sola malla como la que se indica en la Figura I.3.

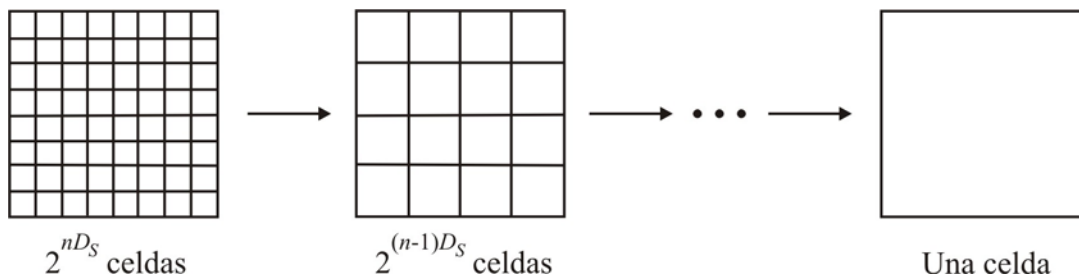


Figura I.3 Principio general del método de renormalización

La operación básica es el cálculo de la permeabilidad equivalente de una celda con  $2D_s$  mallas. No se cuenta con fórmulas exactas en dos y tres dimensiones, por este motivo los cálculos son aproximados. Diversos métodos de renormalización, que se refieren al tipo de formulación de diferencias finitas y condiciones de frontera, han sido propuestos. Entre ellos, el método de *renormalización simplificada* es el más conocido (Le Loc'h, 1987). En este método las celdas se agrupan de dos en dos: si las dos celdas están en serie respecto a la dirección del flujo (perpendiculares), las permeabilidades puntuales se pueden promediar como una media armónica; si son paralelas, se emplea una media aritmética. En cada iteración, la dirección del grupo de celdas se cambia. En tres dimensiones por ejemplo, una agrupación a lo largo del eje  $X$  se alterna con una a lo largo del eje  $Z$  y finalmente a lo largo del eje  $Y$ . Este orden se guarda durante todo el proceso de cálculo (Figura I.4). Los valores de la permeabilidad de bloque son diferentes, dependiendo de la elección de las direcciones sucesivas. De esta manera, para los casos que empiezan o terminan con una agrupación en serie respecto a la dirección del flujo

(media armónica), para un flujo en dirección  $X$  los valores máximo y mínimo son respectivamente:

$$C_{máx}^{xx} = \mu_h^{xx} \left( \mu_a^u \left( \mu_a^z \right) \right) = \mu_h^x \left( \mu_a^z \left( \mu_a^y \right) \right) \quad (I.18)$$

$$C_{mín}^{xx} = \mu_a^u \left( \mu_a^z \left( \mu_h^z \right) \right) = \mu_a^z \left( \mu_a^y \left( \mu_h^x \right) \right) \quad (I.19)$$

donde  $\mu_h^X$  representa la media armónica de dos mallas agrupadas en la dirección  $X$ , y  $\mu_a^Y$  es la media aritmética en la dirección  $Y$ .

La permeabilidad de bloque se determina entonces con la media geométrica de estos dos valores:

$$k_b^{xx} = \sqrt{C_{máx}^{xx} \cdot C_{mín}^{xx}} \quad (I.20)$$

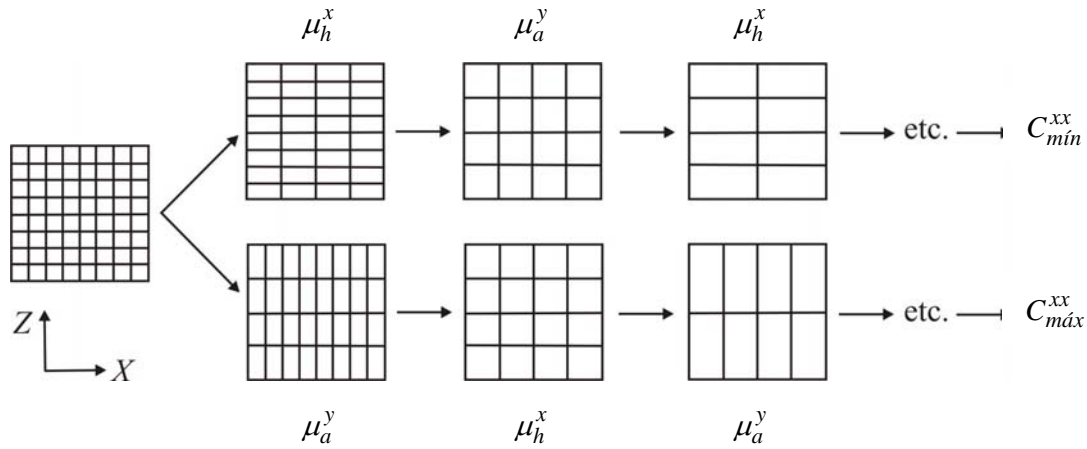


Figura I.4 Ejemplo bidimensional de dos posibilidades para la agrupación sucesiva a lo largo del eje  $X$

## I.4 Métodos estocásticos

### I.4.1 Regla de la media geométrica

Este método (Matheron, 1967) es uno de los pocos resultados exactos que se tienen en cuanto a los métodos estocásticos. La demostración del mismo, se basa en el hecho de que en un espacio bidimensional, una rotación de  $90^\circ$  transforma un vector gradiente en un vector conservador, y viceversa; asimismo, se considera que la permeabilidad  $k$  y su inverso  $k' = 1/k$  son funciones aleatorias que tienen la misma distribución de probabilidad y son invariantes para una rotación de  $90^\circ$ . En este caso, la permeabilidad efectiva se define como:

$$k_{ef} = \mu_g = \exp \left( E \{ \log k \} \right) \quad (I.21)$$

Las hipótesis anteriores se satisfacen en el caso específico de un medio isótropo log-normal y únicamente para un dominio con flujo uniforme (o paralelo). No se satisfacen por ejemplo, para un flujo radial. En el caso de flujo radial, para distancias grandes, debe utilizarse un promedio armónico (Matheron, 1967).

#### I.4.2 Resultados analíticos aproximados y conjeturas

En el caso de flujo uniforme en un medio isótropo, el resultado exacto anterior en dos dimensiones se puede extender a un espacio de dimensión  $D_s$ , utilizando una aproximación de primer orden para la permeabilidad efectiva (Matheron, 1967):

$$k_{ef} = \mu_a^{(D_s-1)/D_s} \mu_a^{1/D_s} \quad (I.22)$$

En un dominio tridimensional con distribución de permeabilidad log-normal, la expresión anterior se transforma en:

$$k_{ef} = \mu_g \cdot \exp \left[ \sigma_{lnk}^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D_s} \right) \right] \quad (I.23)$$

en la cual,  $\sigma_{lnk}^2$  representa la varianza del logaritmo natural de la permeabilidad.

La validez de la expresión anterior ha sido estudiada por un gran número de autores, por ejemplo, si se utiliza el método de perturbaciones y se asume que  $\sigma_{lnk}^2$  es pequeño, se tiene Gutjahr *et al.*, 1978):

$$k_{ef} = \mu_g \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D_s} \right) \sigma_{lnk}^2 \right] \quad (I.24)$$

La expresión (I.24) proporciona las aproximaciones de primer orden de los resultados exactos clásicos en una y dos dimensiones (media armónica y geométrica, respectivamente). Llevando estos mismos cálculos hasta el cuarto orden se obtiene (Dagan, 1993):

$$k_{ef} = \mu_g \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D_s} \right) \sigma_{lnk}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D_s} \right)^2 \sigma_{lnk}^4 \right] \quad (I.25)$$

Las expresiones (I.24) y (I.25) pueden considerarse respectivamente, como los términos de primer y segundo orden de la expansión de serie de Taylor de la expresión (I.23); las cuales por supuesto, se han utilizado para justificar la conjetura (I.23), cuya principal ventaja es que no se limitan a varianzas pequeñas.

# ANEXO II

## Método de los paseos casuales

### II.1 Análisis bidimensional

#### II.1.1 Fundamentos para dominios homogéneos e isótropos

El estudio del flujo establecido del agua a través de un medio homogéneo e isótropo puede reducirse a la resolución del problema de Dirichlet, es decir, a encontrar una función  $h$  (en este caso, la carga hidráulica) definida, continua y derivable en un dominio cerrado  $\Omega$ , tal que (Auvinet, 1975):

$$\nabla^2 h = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$h = f(u), \text{ en todo punto } u_i \text{ de la frontera del dominio } \Omega \quad (\text{II.2})$$

donde  $f(u)$  es una función conocida que define las condiciones en los límites y  $\nabla^2$  es el operador laplaciano.

La resolución numérica del problema anterior, se lleva a cabo sustituyendo la expresión (II.1) por su aproximación en términos de diferencias finitas. Cuando el dominio  $\Omega$  es bidimensional, dicha sustitución implica cubrir al dominio con una malla cuadrada de módulo  $\delta$ , y nodos interiores  $p_i$  y nodos de frontera  $u_i$  (Figura II.1).

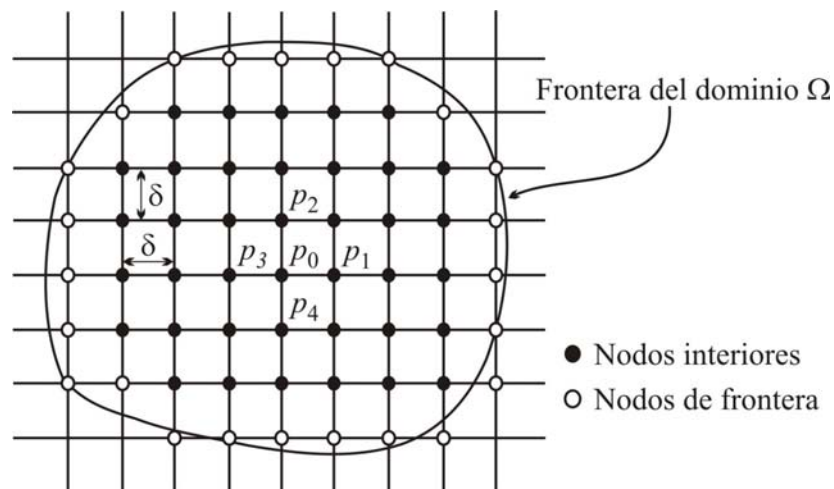


Figura II.1 Dominio de flujo bidimensional

La aproximación en términos de diferencias finitas de la expresión (II.1) para los nodos interiores  $p_i$  de un dominio bidimensional  $\Omega$ , puede escribirse:

$$\frac{1}{\delta^2}[h_1 - 2h_0 + h_3] + \frac{1}{\delta^2}[h_2 - 2h_0 + h_4] = 0 \quad (\text{II.3})$$

es decir:

$$h_0 = \frac{1}{4}[h_1 + h_2 + h_3 + h_4] \quad (\text{II.4})$$

En los nodos de frontera  $u_i$ , el valor de  $h$  puede considerarse aproximadamente igual a  $f(u)$ , siendo  $u$  el punto de la frontera más cercano al nodo considerado.

Las cargas hidráulicas en los nodos de la malla satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{h\} = \{f\} + [M]\{h\} \quad (\text{II.5})$$

donde:

$\{h\}$  Vector columna de las cargas hidráulicas  $h_i$  en los  $n$  nodos  $i$  de la malla.

$\{f\}$  Vector columna de componentes  $f_i = f(u)$  para los nodos de frontera  
y  $f_i = 0$  para los nodos interiores.

$[M]$  Matriz cuadrada de  $n \times n$  elementos,  $m_{ij}$ , iguales a  $1/4$  o nulos

El sistema de ecuaciones (II.5) puede resolverse mediante métodos convencionales, como el conocido *método de relajaciones*; sin embargo, también es factible aprovechar la similitud que existe entre la matriz  $[M]$  y la de transición de una cadena de Markov, transformando el problema en uno de *paseos casuales*. El problema de los paseos casuales (Parzen, 1960) consiste en estudiar los movimientos de una partícula que se desplaza en forma aleatoria sobre los nodos de una malla similar a la de la Figura II.1. La simulación de este proceso estocástico, con la ayuda de una computadora, permite resolver el sistema de ecuaciones (II.5) como se describe a continuación.

A partir del nodo  $p_0$  de la malla, en el cual se desea estimar la carga hidráulica, se genera una serie de trayectorias aleatorias. Las probabilidades de transición de un nodo a otro se definen mediante los elementos  $m_{ij}$  de la matriz  $[M]$ . Para un nodo interior, las probabilidades de movimiento en cualquier dirección son idénticas e iguales a  $1/4$  (ecuación II.4 para un suelo homogéneo e isótropo). Por lo contrario, los nodos de la periferia son *absorbentes*, es decir, que las trayectorias aleatorias terminan en estos puntos si llegan a ellos. Una trayectoria completa,  $T$ , está constituida por una secuencia de nodos:

$$S_T = (p_0, p_1, \dots, p_k) \quad (6)$$

donde  $p_k$  es necesariamente un *nodo absorbente*.

De acuerdo con la ecuación de Chapman-Kolmogorov (Parzen, 1960), la probabilidad de transición del nodo  $p_0$  a cualquier otro nodo  $p_i$  en  $l$  pasos es igual al elemento  $m_{ij}(l)$  de la matriz  $[M]^l$ . La esperanza matemática del valor  $f_T$  de la función  $f(u)$  en el nodo absorbente de la trayectoria aleatoria  $T$  puede expresarse como:

$$E\{f_T\} = \sum_T P(T)f_T = f_{p_0} + [M]_{p_0} \{f\} + [M]_{p_0}^2 \{f\}_{p_0} + \dots + [M]_{p_0}^l \{f\} + \dots \quad (7)$$

donde  $[M]_{p_0}^l$  es el vector línea de la matriz  $[M]^l$  correspondiente al nodo  $p_0$ .

El vector de componentes  $h_p = E\{f_T | p_0 = p\}$  es, por tanto, la solución del sistema de ecuaciones (II.5).

Cualquier componente  $h_i$  de este vector puede estimarse generando un cierto número de trayectorias aleatorias a partir del nodo  $p_i$  y calculando la media de los valores  $f_T$  obtenidos. Este valor medio es una medida insesgada de la carga hidráulica en el nodo  $p_i$ .

## II.1.2 Aplicación del método

El método de los paseos casuales puede adaptarse fácilmente a dominios de flujo complejos, modificando la ecuación (II.4) y la matriz de transición  $[M]$  en los nodos que lo requieran. Algunos aspectos prácticos de dicha adaptación se presentan a continuación.

### II.1.2.1 Fronteras impermeables

Las fronteras impermeables son líneas de corriente que pueden considerarse como ejes de simetría que separan dos dominios idénticos (Juárez & Rico, 1972). Si la malla con la que se modela el dominio de flujo  $\Omega$  presenta una posición similar a la que se muestra en la Figura II.2 respecto a una frontera impermeable, la expresión (II.4) sigue siendo válida si se reemplaza  $p_4$  por su imagen  $p_4'$  con respecto a la frontera. En consecuencia, si se incide sobre una frontera impermeable, el paso puede darse hacia el punto  $p_4'$  en vez del punto  $p_4$ . Se desplaza entonces la malla paralelamente a sí misma y la trayectoria aleatoria vuelve a iniciarse a partir del punto  $p_4'$ .

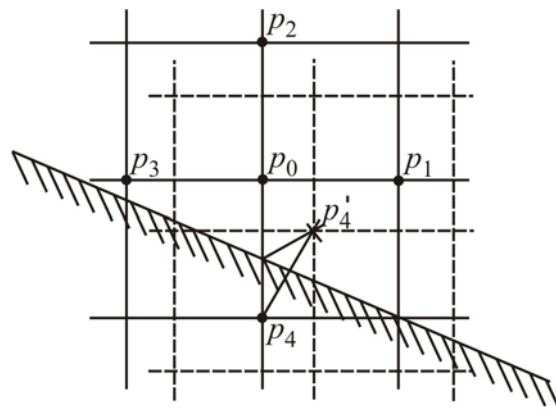


Figura II.2 Frontera impermeable

### II.1.2.2 Medios anisótropos

La anisotropía del coeficiente de permeabilidad se presenta principalmente en los suelos estratificados. En estos suelos es posible definir un coeficiente de permeabilidad  $k_x$  en la dirección de la estratificación y otro  $k_y$  en la dirección perpendicular a ésta. El flujo bidimensional del agua está regido por la ecuación de Laplace:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Superponiendo al dominio de flujo una malla rectangular de dimensiones  $\delta x$  y  $\delta y$ , la ecuación anterior puede escribirse en términos de diferencias finitas como:

$$\frac{k_x}{(\delta x)^2} [h_1 - 2h_0 + h_3] + \frac{k_y}{(\delta y)^2} [h_2 - 2h_0 + h_4] = 0 \quad (\text{II.9})$$

Ecuación que puede reducirse a la expresión (II.3) si se elige una malla tal que:

$$\frac{k_x}{(\delta x)^2} = \frac{k_y}{(\delta y)^2} \quad (\text{II.10})$$

Es decir:

$$\delta x = \delta y \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \quad (\text{II.11})$$

Por tanto, el método de los paseos casuales puede aplicarse a medios anisótropos con la condición de emplear una malla rectangular que tenga dimensiones congruentes con la expresión (II.11) anterior.

De forma similar, es posible aplicar al dominio de flujo la siguiente transformación:

$$x_t = x \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}; \quad y_t = y \quad (\text{II.12})$$

O bien:

$$y_t = y \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}; \quad x_t = x \quad (\text{II.13})$$

y superponer una malla cuadrada al dominio transformado (Juárez & Rico, 1972). El primer método propuesto resulta generalmente más sencillo.

### II.1.2.3 Medios heterogéneos

Los dominios de flujo constan frecuentemente de varios medios con diferentes permeabilidades. En cada medio, considerado como homogéneo, el método se aplica sin modificaciones, pero las fronteras entre los mismos requieren un tratamiento especial. En un nodo  $p_i$  de la frontera entre dos medios de permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$  (Figura II.3a) la ecuación (II.4) deja de ser válida. Si la frontera coincide con uno de los ejes de la malla (Figura II.3b), es posible demostrar (Juárez & Rico, 1972) que dicha ecuación debe sustituirse por:

$$\frac{h_1}{4} + \frac{k_1 h_2}{2(k_1 + k_2)} + \frac{h_3}{4} + \frac{k_2 h_4}{2(k_1 + k_2)} = h_0 \quad (\text{II.14})$$

Las probabilidades de desplazamiento de la partícula en las direcciones 1 a 4 se modifican como sigue:

$$P(1) = \frac{1}{4} \quad (\text{II.15})$$

$$P(2) = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.16})$$

$$P(3) = \frac{1}{4} \quad (\text{II.17})$$

$$P(4) = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.18})$$

Si la frontera es oblicua a la malla (Figura II.3a), las ecuaciones (II.15) a (II.18) pueden generalizarse en la forma siguiente:



$$P(1) = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} + \frac{(1 - \tan \alpha)}{4(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot \frac{(k_1 - k_2)}{(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.19})$$

$$P(2) = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} + \frac{\tan \alpha (1 - \tan \alpha)}{4(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot \frac{(k_1 - k_2)}{(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.20})$$

$$P(3) = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} + \frac{(1 - \tan \alpha)}{4(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot \frac{(k_2 - k_1)}{(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.21})$$

$$P(4) = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} + \frac{\tan \alpha (1 - \tan \alpha)}{4(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot \frac{(k_2 - k_1)}{(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.22})$$

Por otra parte, para las condiciones descritas en la Figura II.3c, las probabilidades resultan:

$$P(1) = \frac{1}{4} \quad (\text{II.23})$$

$$P(2) = \frac{1}{4} \quad (\text{II.24})$$

$$P(3) = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.25})$$

$$P(4) = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} \quad (\text{II.26})$$

En los suelos heterogéneos la malla utilizada puede ser uniforme, pero las probabilidades de movimiento en los nodos de frontera deben modificarse en la forma indicada por las ecuaciones anteriores.

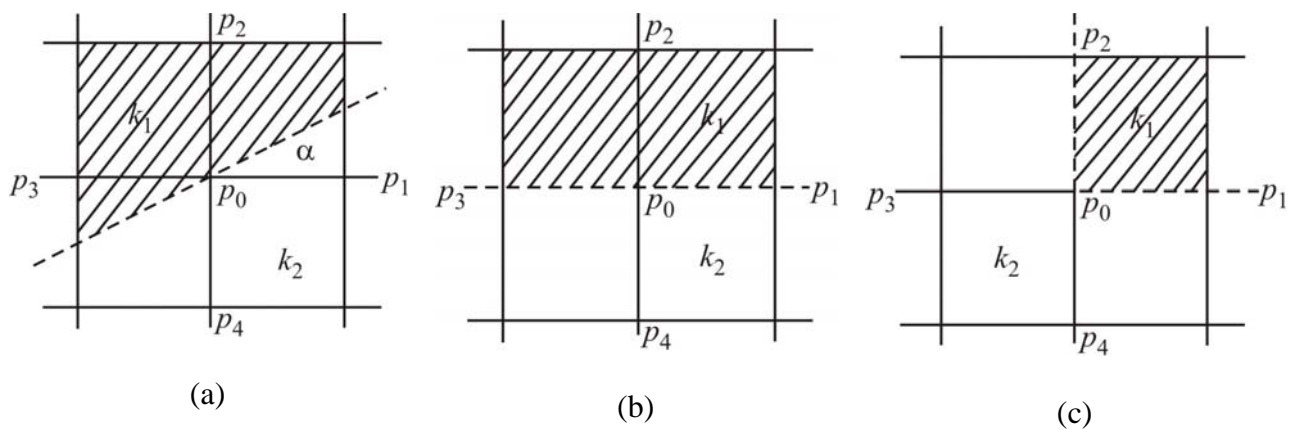


Figura II.3 Medios heterogéneos

### II.1.2.4 Línea de corriente superior

El método de los paseos casuales no resulta práctico para resolver problemas de flujo establecido no confinado. La determinación de la línea de corriente superior podría llevarse a cabo por aproximaciones sucesivas (Juárez & Rico, 1972), esto implicaría la obtención reiterada de la carga hidráulica en un número importante de nodos y resultaría en un tiempo de cálculo excesivo. Sin embargo, es obvio que el método puede emplearse para determinar la carga hidráulica en los puntos de un dominio que incluya una línea de corriente superior o de descarga libre, si la posición de éstas puede determinarse *a priori* con suficiente aproximación.

### II.1.3 Generación de los paseos casuales

En el caso de un dominio homogéneo e isótropo bidimensional, es posible definir cuatro probabilidades,  $P(1)$  a  $P(4)$ , de movimiento en las direcciones 1 a 4 de la Figura II.1. Para que en cada nodo el movimiento sea efectivamente regido por estas probabilidades, es posible proceder en la forma siguiente:

- Se genera un número aleatorio  $NA$  comprendido entre 0 y 1.
- Una vez definido el número aleatorio  $NA$ , se sigue la estrategia definida a continuación:
  - Si  $NA < P(1)$  se da un paso en la dirección 1.
  - Si  $P(1) < NA < [P(1) + P(2)]$  se da un paso en la dirección 2.
  - Si  $[P(1) + P(2)] < NA < [P(1) + P(2) + P(3)]$  se da un paso en la dirección 3.
  - Si  $[P(1) + P(2) + P(3)] < NA$  se da un paso en la dirección 4.

Este procedimiento se generaliza fácilmente a los casos de flujo unidimensional y tridimensional.

## II.2 Análisis tridimensional

### II.2.1 Dominios homogéneos e isótropos

En el caso de un dominio de flujo homogéneo e isótropo en tres dimensiones, la resolución de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas para los nodos interiores  $p_i$  (Figura II.4), se escribe:

$$\frac{1}{\delta^2}[h_1 - 2h_0 + h_3] + \frac{1}{\delta^2}[h_2 - 2h_0 + h_4] + \frac{1}{\delta^2}[h_5 - 2h_0 + h_6] = 0 \quad (\text{II.27})$$

Es decir:

$$h_0 = \frac{1}{6}[h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6] \quad (\text{II.28})$$

Las probabilidades de desplazamiento en cualquiera de las seis direcciones posibles (Figura II.4), son iguales a  $1/6$ .

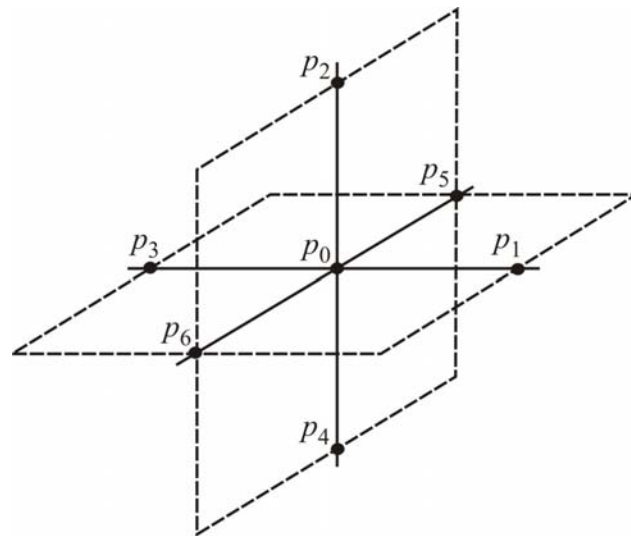


Figura II.4 Posibilidades de desplazamiento en tres dimensiones

### II.2.2 Dominios heterogéneos

En el caso de un dominio de flujo heterogéneo tridimensional, la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas se expresa como (López & Auvinet, 2004):

$$k_1 \frac{(h_1 - h_0)}{\delta} \delta^2 + k_2 \frac{(h_2 - h_0)}{\delta} \delta^2 + k_3 \frac{(h_3 - h_0)}{\delta} \delta^2 + k_4 \frac{(h_4 - h_0)}{\delta} \delta^2 + k_5 \frac{(h_5 - h_0)}{\delta} \delta^2 + k_6 \frac{(h_6 - h_0)}{\delta} \delta^2 = 0 \quad (\text{II.29})$$

Es decir:

$$\delta [k_1 (h_1 - h_0) + k_2 (h_2 - h_0) + k_3 (h_3 - h_0) + k_4 (h_4 - h_0) + k_5 (h_5 - h_0) + k_6 (h_6 - h_0)] = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3 + k_4 h_4 + k_5 h_5 + k_6 h_6 - h_0 [k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6] = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$h_0 = \frac{k_1}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_1 + \frac{k_2}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_2 + \frac{k_3}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_3 + \frac{k_4}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_4 + \frac{k_5}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_5 + \frac{k_6}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_6 \quad (\text{II.32})$$

Donde, en este caso,  $k_1, k_2, \dots, k_6$  son las medias o promedios armónicos de los coeficientes de permeabilidad en los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_6$  del medio, respectivamente (Figura II.4); los denominadores de la expresión (II.32) se refieren a la suma de estas seis permeabilidades.

En este caso, las probabilidades de desplazamiento de la partícula en las seis direcciones posibles (Figura II.4) están dadas por (López & Auvinet, 2004):

$$P(j) = \frac{k_j}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}; \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{II.33})$$

# ANEXO III

---

## Análisis de flujo de agua en suelos utilizando el método del elemento finito (*FEM*)

---

### III.1 Conceptos básicos

Conjuntamente con aquellos problemas en los que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función  $Y = g(X)$ , con frecuencia surge la necesidad, en los problemas físicos, de hallar los valores máximos o mínimos de un género especial de magnitudes llamadas *funcionales*. Las *funcionales* se definen como magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones (Elsgolts, 1977). Específicamente una *funcional* es una función de función.

El *análisis variacional* consiste en sustituir la resolución de una ecuación en un determinado dominio por la obtención del mínimo de una funcional asociada a dicha ecuación y definida para el mismo dominio. Tal análisis es el que se emplea en esta investigación y se ilustra a continuación, con la aplicación del Método del Elemento Finito (*FEM*) al flujo establecido de agua en medios porosos.

### III.2 Aplicación del *FEM* al flujo establecido de agua utilizando un enfoque variacional

Se supondrá conocida la teoría del flujo establecido de agua, recordando simplemente que la carga hidráulica  $h$  en un punto del medio está definida por la expresión de Bernoulli (despreciando el cuadrado de la velocidad):

$$h = z + \frac{P}{\gamma_w} \quad (\text{III.1})$$

donde  $z$  es la carga de posición,  $\frac{P}{\gamma_w}$  es la carga de presión y  $\gamma_w$  es el peso volumétrico del agua.

Para la aplicación del *FEM* (Auvinet, 1997) el medio analizado se divide en pequeños elementos que se adaptan a su geometría. Se puede por ejemplo sustituir el dominio donde se presenta el flujo por elementos triangulares cuyos vértices son los nodos  $i, j, m$  como se ilustra en la Figura III.1.

Dentro del *FEM* se acepta como aproximación más simple que la carga hidráulica varía linealmente dentro de cada elemento finito:

$$h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (III.2)$$

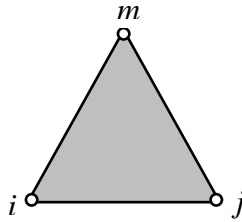


Figura III.1 Elemento finito triangular

En particular, la expresión (III.2) debe ser válida para los tres nodos  $i$ ,  $j$ ,  $m$  del elemento triangular, es decir:

$$\begin{aligned} h_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ h_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ h_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (III.3)$$

donde  $x_i$  y  $y_i$  son la abscisa y la ordenada del nodo  $i$ ; de manera análoga es para los nodos  $j$  y  $m$ .

La resolución del sistema de ecuaciones anterior proporciona las expresiones de  $\alpha_i$  :

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} h_i & x_i & y_i \\ h_j & x_j & y_j \\ h_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & h_i & y_i \\ 1 & h_j & y_j \\ 1 & h_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & h_i \\ 1 & x_j & h_j \\ 1 & x_m & h_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} \quad (III.4)$$

donde el denominador se llama  $2\Delta$ , siendo  $\Delta$  el área del triángulo:

$$\Delta = \frac{1}{2} (x_i b_i + x_j b_j + x_m b_m) \quad (III.5)$$

Los escalares  $\alpha_i$  resultan por tanto:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i [x_j y_m - x_m y_j] + h_j [x_m y_i - x_i y_m] + h_m [x_i y_j - x_j y_i] \right\}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i [y_j - y_m] + h_j [y_m - y_i] + h_m [y_i - y_j] \right\} \quad (\text{III.6})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i [x_m - x_j] + h_j [x_i - x_m] + h_m [x_j - x_i] \right\}$$

Sustituyendo (III.6) en (III.2):

$$h = \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i [x_j y_m - x_m y_j] + h_j [x_m y_i - x_i y_m] + h_m [x_i y_j - x_j y_i] \right. \\ \left. + \left( h_i [y_j - y_m] + h_j [y_m - y_i] + h_m [y_i - y_j] \right) x \right. \\ \left. + \left( h_i [x_m - x_j] + h_j [x_i - x_m] + h_m [x_j - x_i] \right) y \right\} \quad (\text{III.7})$$

Factorizando:

$$h = \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i \left[ (x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m) x + (x_m - x_j) y \right] \right. \\ \left. + h_j \left[ (x_m y_i - x_i y_m) + (y_m - y_i) x + (x_i - x_m) y \right] \right. \\ \left. + h_m \left[ (x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j) x + (x_j - x_i) y \right] \right\} \quad (\text{III.8})$$

Y considerando:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j & a_j &= x_m y_i - x_i y_m & a_m &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_m & b_j &= y_m - y_i & b_m &= y_i - y_j \\ c_i &= x_m - x_j & c_j &= x_i - x_m & c_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

La expresión que define la carga hidráulica resulta finalmente:

$$h = \frac{1}{2\Delta} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) h_i + (a_j + b_j x + c_j y) h_j + (a_m + b_m x + c_m y) h_m \right] \quad (\text{III.10})$$

Además, si se introducen las *funciones de forma*:

$$\begin{aligned} N_i &= a_i + b_i x + c_i y \\ N_j &= a_j + b_j x + c_j y \\ N_m &= a_m + b_m x + c_m y \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

La carga hidráulica  $h$  puede escribirse de manera vectorial como:

$$\{h\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

En la cual, se ha introducido el vector de cargas hidráulicas de los tres nodos del elemento:

$$\{h\}^e = \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Derivando la expresión (III.10) se obtienen las componentes del gradiente hidráulico (pérdida de carga por unidad de longitud):

$$\begin{aligned} i_x &= \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} [b_i h_i + b_j h_j + b_m h_m] \\ i_y &= \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} [c_i h_i + c_j h_j + c_m h_m] \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

De manera vectorial el gradiente hidráulico se escribe:

$$\{i\}^e = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} [B] \{h\}^e \quad (\text{III.15})$$

Siendo  $[B]$  la matriz geométrica de cada elemento:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Asimismo, si el gradiente hidráulico se multiplica por el peso volumétrico del agua,  $\gamma_w$ , se obtienen las componentes de la fuerza de filtración:

$$\{j\}^e = \begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = \frac{\gamma_w}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} = \frac{\gamma_w}{2\Delta} [B] \{h\}^e \quad (\text{III.17})$$

Por otra parte, la *ecuación de Laplace* (obtenida a partir de las leyes de continuidad de flujo y de Darcy) que representa al flujo establecido bidimensional es:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.18})$$

En análisis variacional (Levi, 1980) se demuestra que, de acuerdo con el teorema de Euler, la

resolución de esta ecuación es equivalente a minimizar en el dominio de flujo  $D$  la *funcional*:

$$\chi = \iint_D \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix} dx dy \quad (\text{III.19})$$

donde  $\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} = [R]$  es la matriz de permeabilidad.

La funcional anterior expresada en términos de la expresión aproximada de  $h$ , depende de los valores de la carga hidráulica  $h_i$  en los nodos y será mínima si, para todos los nodos:

$$\frac{\partial \chi}{\partial h_i} = 0 \quad (\text{III.20})$$

La contribución de cada elemento a esta derivada parcial, si es que no es nula, es:

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial h_i} = \iint_e \frac{\partial}{\partial h_i} \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix} dx dy \quad (\text{III.21})$$

donde la integración se realiza sobre el elemento considerado.

Derivando la ecuación (III.14) con respecto a  $h_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_i} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) &= \frac{b_i}{2\Delta} \\ \frac{\partial}{\partial h_i} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{c_i}{2\Delta} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Sustituyendo en (III.21):

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial h_i} = \frac{1}{(2\Delta)^2} \iint_e \left( k_x [b_i \quad b_j \quad b_m] \{h\}^e b_i + k_y [c_i \quad c_j \quad c_m] \{h\}^e c_i \right) dx dy \quad (\text{III.23})$$

De manera análoga se obtienen las derivadas con respecto a  $h_j$  y  $h_m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_j} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) &= \frac{b_j}{2\Delta} & \frac{\partial}{\partial h_m} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) &= \frac{b_m}{2\Delta} \\ \frac{\partial}{\partial h_j} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{c_j}{2\Delta} & \frac{\partial}{\partial h_m} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{c_m}{2\Delta} \end{aligned} ; \quad (\text{III.24})$$



Por tanto:

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial h_j} = \frac{1}{(2\Delta)^2} \iint_e \left( k_x [b_i \ b_j \ b_m] \{h\}^e b_j + k_y [c_i \ c_j \ c_m] \{h\}^e c_j \right) dx dy \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial h_m} = \frac{1}{(2\Delta)^2} \iint_e \left( k_x [b_i \ b_j \ b_m] \{h\}^e b_m + k_y [c_i \ c_j \ c_m] \{h\}^e c_m \right) dx dy$$

Es decir, el vector  $\left\{ \frac{\partial \chi^e}{\partial h} \right\}$  puede expresarse como:

$$\left\{ \frac{\partial \chi^e}{\partial h} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial h_i} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial h_j} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial h_m} \end{Bmatrix} = [S]^e \{h\}^e \quad (\text{III.26})$$

donde  $[S]^e$  es la siguiente matriz definida para cada elemento:

$$[S]^e = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{pmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_m b_j \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m b_m \end{pmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{pmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_m c_j \\ c_i c_m & c_j c_m & c_m c_m \end{pmatrix} \quad (\text{III.27})$$

La matriz anterior es simétrica y puede escribirse:

$$[S]^e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_m & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} = \frac{1}{4\Delta} [B]^T [R] [B] \quad (\text{III.28})$$

Para que la *funcional* sea mínima deben cumplirse las ecuaciones:

$$\frac{\partial \chi}{\partial h_i} = \sum \frac{\partial \chi^e}{\partial h_i} = \sum \sum [S_{ir}] \{h_r\} = 0 \quad (\text{III.29})$$

donde la suma se realiza sobre todos los elementos.

De esta manera se llega al sistema global de ecuaciones:

$$[S]\{h_r\} = 0 \quad (\text{III.30})$$

donde  $[S]$  recibe el nombre de matriz general o global y  $\{h_r\}$  es el vector de cargas hidráulicas en los nodos  $r$  de la malla de elementos finitos.

La resolución del sistema (III.30), mediante algún método conocido como el de *Gauss-Jordan* o el de *eliminación de Gauss*, proporciona la carga hidráulica  $h_r$  en cada nodo  $r$  de los elementos finitos de la malla empleada. Los contornos de isovalores dibujados con estos datos representan las *líneas equipotenciales* ( $\phi = \text{cte.}$ ) de una red de flujo.

Una vez conocidas las cargas hidráulicas, es posible calcular los gradientes hidráulicos por las relaciones ya vistas (ecuación III.14), y las velocidades de flujo en los elementos finitos por medio de la ley de Darcy expresada en forma vectorial como:

$$\{V\}^e = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = -[R]\{i\}^e = -\frac{1}{2\Delta}[R][B]\{h\}^e \quad (\text{III.31})$$

donde  $[R]$  es la matriz de permeabilidad,  $\{i\}^e$  es el vector de gradientes hidráulicos en el elemento  $e$ ,  $[B]$  es la matriz geométrica y  $\{h\}^e$  es el vector de cargas hidráulicas del elemento  $e$ .

Asimismo, los gastos que salen por el lado del elemento finito opuesto al nodo  $r$ ,  $q_{rx}$  y  $q_{ry}$ , en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente se obtienen con:

$$\begin{aligned} q_{rx} &= -b_r \{V_x\}^e \\ q_{ry} &= -c_r \{V_y\}^e \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

donde  $b_r$  y  $c_r$  son términos de la matriz geométrica  $[B]$  definidos por la expresión (III.16).

Adicionalmente, los valores nodales de la *función de corriente*  $\psi$  se pueden obtener con una rutina del *FEM* similar a la empleada para determinar el potencial  $h$ , con las consideraciones que se señalan en los párrafos siguientes (Christian, 1980; López & Auvinet, 1998). Las curvas de isovalores de estos resultados corresponden a las líneas de corriente ( $\psi = \text{cte.}$ ) de una red de flujo.

En cada punto de la región de flujo la velocidad está relacionada con la *función de corriente*  $\psi(x,y)=\text{cte}$  y con la *función potencial*  $\phi = h$  mediante la expresión vectorial (Christian, 1980):

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial\psi/\partial y \\ -\partial\psi/\partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{Bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Sustituyendo este vector de velocidad en la ley de Darcy:

$$\begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\psi/\partial x \\ \partial\psi/\partial y \end{Bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Sustituyendo la expresión (III.34) en la (III.19) resulta:

$$\chi = \iint_D \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \partial\psi/\partial x \\ \partial\psi/\partial y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_x^* & 0 \\ 0 & k_y^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\psi/\partial x \\ \partial\psi/\partial y \end{Bmatrix} dx dy \quad (\text{III.35})$$

donde:

$$\begin{bmatrix} k_x^* & 0 \\ 0 & k_y^* \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}} \quad (\text{III.36})$$

Se puede observar que la expresión (III.35) es similar a la (III.19) excepto que los términos de la matriz de permeabilidad son ahora los inversos de los mismos (pero la matriz no es la matriz inversa). Por tanto, es posible emplear el mismo algoritmo que para la obtención de los potenciales hidráulicos  $h$ , pero ahora utilizando la matriz de permeabilidad dada en (III.36). Aplicando de nuevo el enfoque variacional y aceptando que la función de corriente  $\psi$  varía linealmente dentro de cada elemento finito, se llega al sistema global de ecuaciones:

$$[S] \{ \psi \} = 0 \quad (\text{III.37})$$

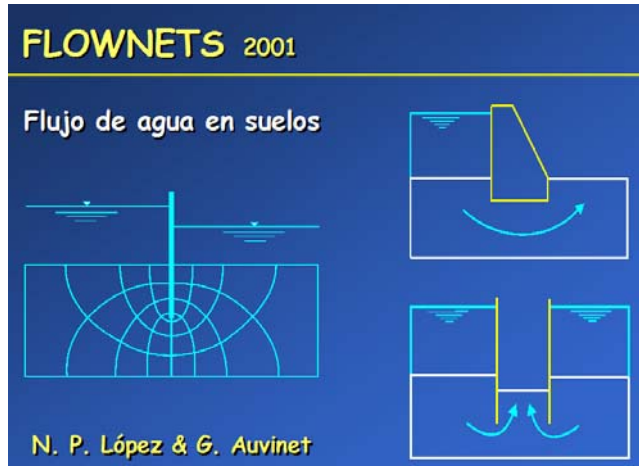
que es similar al sistema de la expresión (III.30). De esta manera, la resolución del sistema de ecuaciones (III.37), proporciona los valores nodales de la función de corriente  $\psi$ .

Adicionalmente, para determinar los valores de la función de corriente  $\psi$  que deben imponerse en las fronteras del dominio de flujo, es importante recordar que el gasto que pasa entre dos líneas de flujo es constante en cualquier sección:

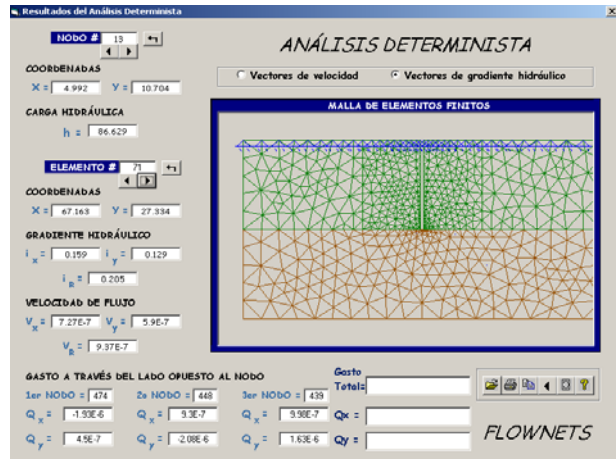
$$q = \psi_1 - \psi_2 = cte \quad (\text{III.38})$$

Así, si primero se calcula el gasto que pasa a través del medio analizado, es posible considerar este valor como condición de frontera de  $\psi$  (López & Auvinet, 1998).

El algoritmo FLOWNETS (Figura III.2, en lenguaje Visual Basic V6.0) se desarrolló para realizar análisis de flujo de agua que se fundamentan en la teoría de elementos finitos expuesta en los párrafos anteriores (López, 2001). Ejemplos de redes de flujo en medios homogéneos e isótropos obtenidas con dicho programa se presentan en las Figuras III.3 a III.5. Otros resultados de análisis de flujo de agua (gradientes hidráulicos, velocidades, gasto) para otras condiciones, como suelos anisótropos y heterogéneos, flujo confinado y no confinado, etc. se abordan en las secciones principales de esta investigación.



(a) Pantalla de inicio



(b) Ventana de resultados

Figura III.2 Algoritmo FLOWNETS (López, 2001)

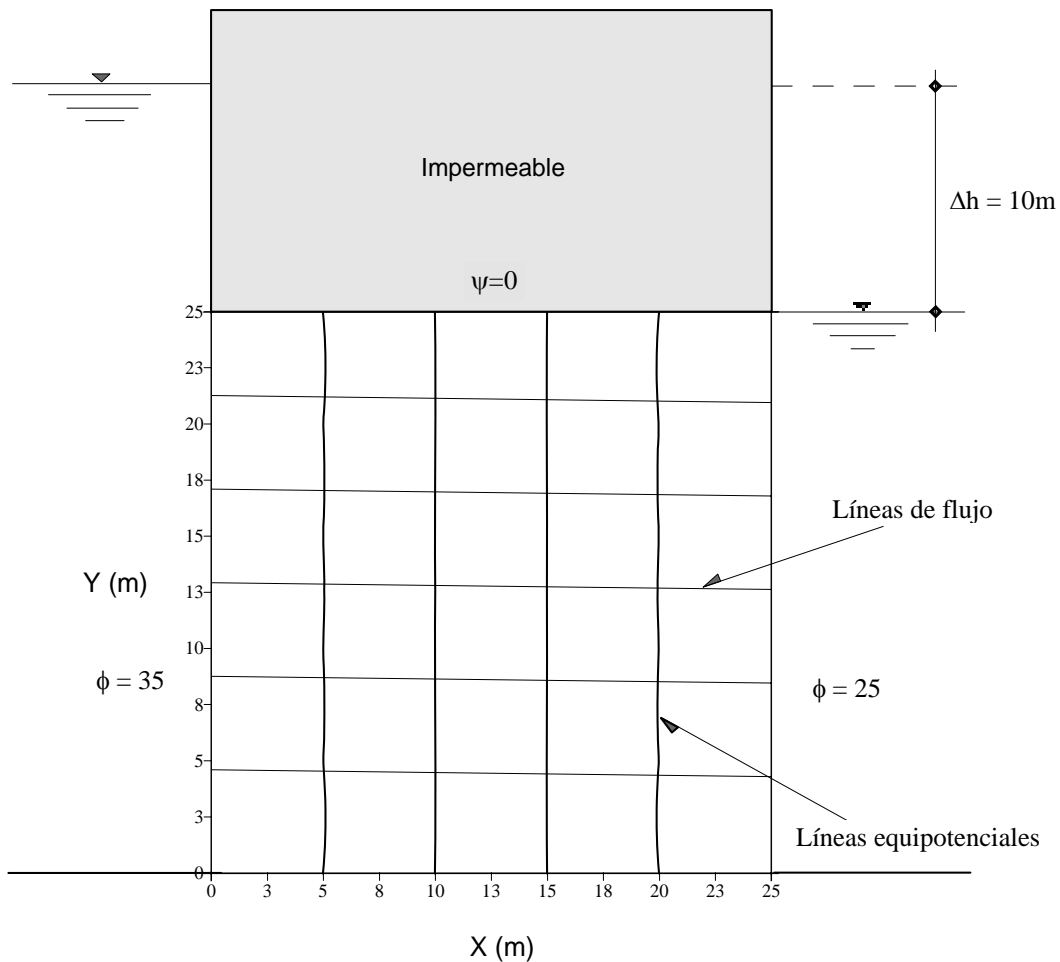


Figura III.3 Red de flujo mostrando la ortogonalidad de las líneas de flujo y equipotenciales obtenidas con el programa FLOWNETS (López, 2001)

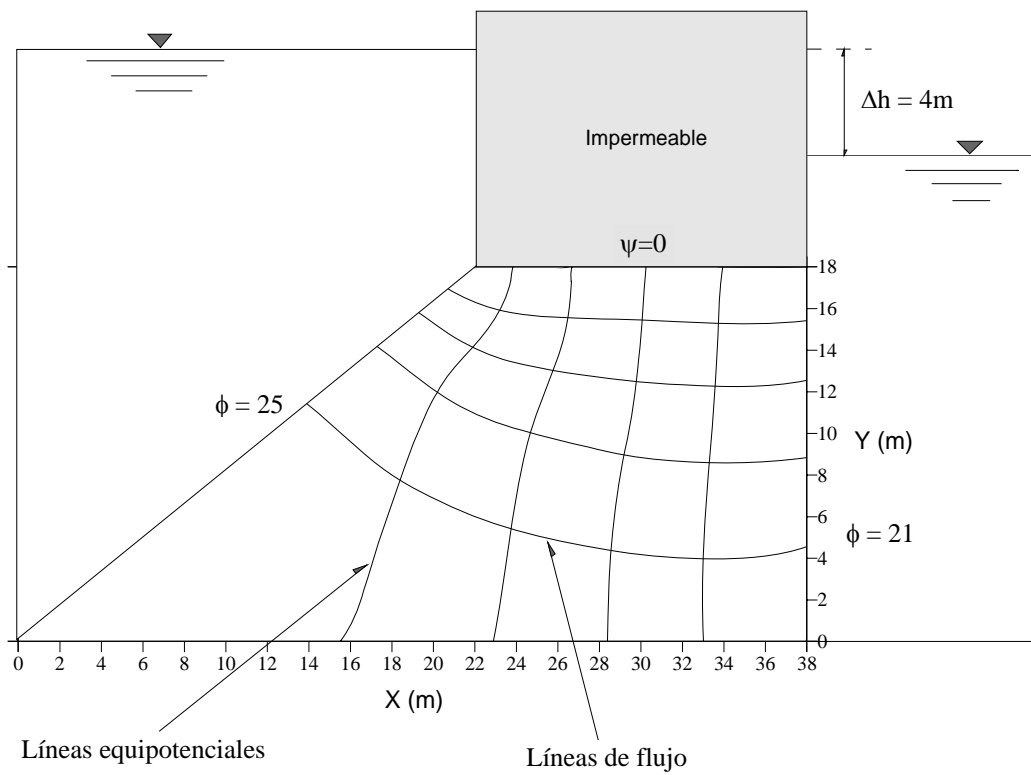


Figura III.4 Red de flujo en un dominio de forma trapezoidal (con FLOWNETS; López, 2001)

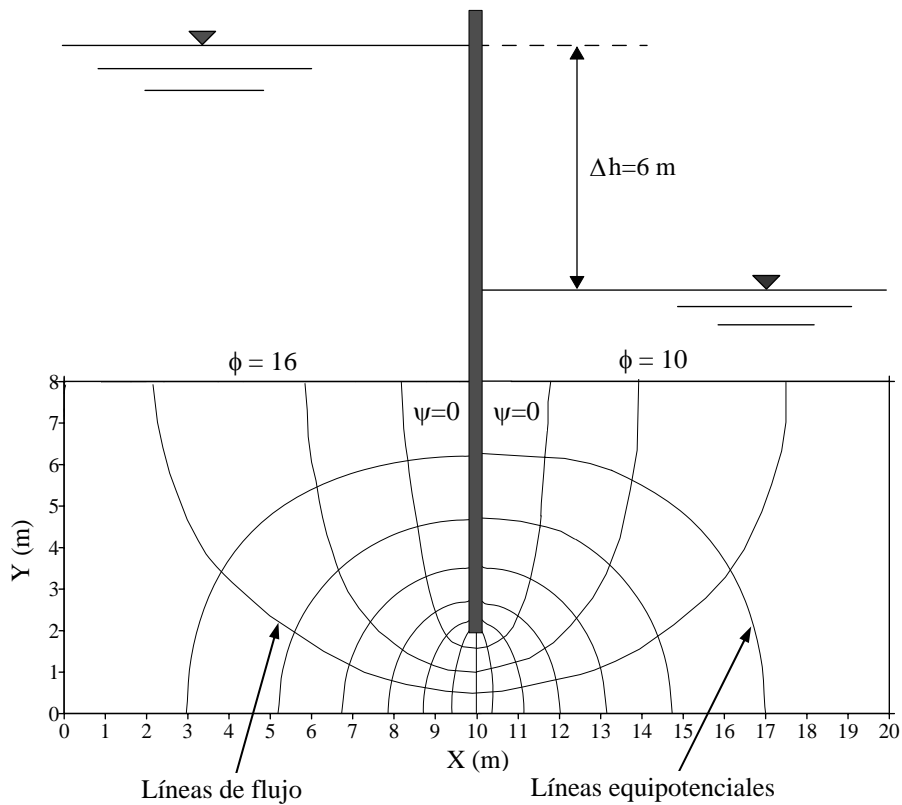


Figura III.5 Red de flujo bajo la cimentación de una tablestaca (con FLOWNETS; López, 2001)

# ANEXO IV

---

## Campos aleatorios

---

### IV.1 Definiciones

Sea  $V(X)$  una variable geotécnica de tipo físico (i.e. coeficiente de permeabilidad), mecánico (i.e. resistencia al corte no-drenada) o geométrico (i.e. espesor de algún estrato), definida en los puntos  $X$  del dominio estudiado  $R^p$  ( $p = 1, 2, \text{ ó } 3$ ). Si en cada punto del dominio, esta variable se considera como aleatoria, el conjunto de estas variables aleatorias constituye un *campo aleatorio*.

Para poder describir este campo pueden emplearse los siguientes parámetros y funciones:

–Valor esperado:  $\mu_V(X) = E\{V(X)\}$  (IV.1)

–Varianza:  $\sigma_V^2(X) = Var[V(X)]$  (IV.2)

La raíz cuadrada  $\sigma_V(X)$  de la varianza se llama *desviación estándar* y el cociente  $CV(X) = \sigma_V(X) / E\{V(X)\}$  se conoce como *coeficiente de variación*.

–Función de autocorrelación, definida en el espacio  $R^p \times R^p$ :

$$R_V(X_1, X_2) = E\{V(X_1)V(X_2)\} \quad (IV.3)$$

Esta función es un momento de segundo orden mixto que puede centrarse introduciendo el concepto de función de autocovarianza:

–Función de autocovarianza:

$$C_V(X_1, X_2) = Cov[V(X_1), V(X_2)] = E\{[V(X_1) - \mu_V(X_1)][V(X_2) - \mu_V(X_2)]\} \quad (IV.4)$$

La autocovarianza representa el grado de dependencia lineal existente entre los valores de la propiedad de interés en dos puntos diferentes del medio. Se puede escribir bajo la forma de un *coeficiente de autocorrelación* adimensional, cuyo valor queda siempre comprendido entre -1 y +1:

–Coeficiente de autocorrelación:

$$\rho_V(X_1, X_2) = \frac{C_V(X_1, X_2)}{\sigma_V(X_1)\sigma_V(X_2)} \quad (IV.5)$$

Conviene subrayar que las funciones (IV.3) a (IV.5) no son propiedades intrínsecas de los puntos  $X_1$  y  $X_2$  ya que dependen también de la población, es decir, del dominio en el que el campo se

encuentra definido. En efecto, si se considera globalmente un manto de suelo de gran espesor, puede existir una alta correlación entre las propiedades correspondientes a dos puntos pertenecientes a un mismo sustrato; sin embargo, esta correlación puede desvanecerse si el estudio se enfoca a la variación espacial dentro del sustrato específico en el que se encuentran.

–Funciones de distribución de probabilidad:

$$F_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = P[V(X_1) \leq v_1, \dots, V(X_n) \leq v_n] \quad (\text{IV.6})$$

entre las que destaca la función de distribución de primer orden:

$$F_V(v; X) = P[V(X) \leq v] \quad (\text{IV.7})$$

y sus derivadas, las densidades de probabilidad:

$$f_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) \text{ y } f_V(v; X) \quad (\text{IV.8})$$

Si estas funciones (y los momentos asociados) son invariantes por traslación en el espacio para cualquier valor de  $n$  y cualquier conjunto de puntos:  $X_1, \dots, X_n$ , se dice que el campo aleatorio es *estrictamente estacionario*.

Si en el medio considerado, la esperanza, la varianza y los demás parámetros son constantes, se dice que es *estadísticamente homogéneo*. Si parámetros como la esperanza y la varianza del campo no son constantes se dice que presentan cierta *tendencia o deriva*.

Cuando es posible aceptar la hipótesis de que el valor esperado de la variable de interés es constante en todo el dominio (eventualmente después de haber removido la tendencia) y que la autocovarianza espacial depende solamente de la distancia entre los puntos  $X_1$  y  $X_2$ , se dice que el campo es *estacionario en el sentido amplio* y se cumple:

$$C_V(X_1, X_2) = C_V(X_2 - X_1) = C_V(s) \quad (\text{IV.9})$$

Donde  $s$  es un escalar igual a la distancia entre los puntos  $X_1$  y  $X_2$ . La ecuación (IV.9) implica que la varianza de  $V(X)$  es también constante en todo el dominio.

En la misma forma, en este caso, el coeficiente de correlación puede ser escrito como:

$$\rho_V(X_1, X_2) = \rho_V(s) \quad (\text{IV.10})$$

En muchas aplicaciones, sin embargo, será más realista admitir que la relación anterior solamente es válida a lo largo de una dirección determinada, es decir que la estructura de correlación del medio es anisótropa. En este caso, se pueden usar las notaciones  $C_V(s\mathbf{u})$  y  $\rho_V(s\mathbf{u})$  donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario en la dirección considerada.

En medios con deriva lineal, el campo no es estacionario, pero los incrementos  $V(X+s) - V(X)$  pueden serlo. Algunos autores, especialmente en las aplicaciones mineras, suelen por tanto usar

el concepto de variograma de preferencia al de autocovarianza. El variograma  $2\gamma(s)$  es el momento de segundo orden del incremento  $V(X+s)-V(X)$ :

$$2\gamma(s) = E\left\{[V(X+s)-V(X)]^2\right\} \quad (\text{IV.11})$$

Para un campo estacionario en el sentido amplio:

$$2\gamma(s) = \text{Var}[V(X+s)-V(X)] \quad (\text{IV.12})$$

$$\gamma(s) = C_V(0) - C_V(s) \quad (\text{IV.13})$$

En la mayoría de las aplicaciones ingenieriles, el uso del concepto de variograma no presenta realmente ventajas por lo que se usa comúnmente el de función de autocovarianza. De hecho, algunos de los programas para computadora comerciales de geoestadística más comunes transforman sistemáticamente los variogramas en funciones de autocovarianza para dar mayor estabilidad a los algoritmos numéricos empleados (Deutsch, 1992).

## IV.2 Estimación estadística de los parámetros de un campo aleatorio

Los parámetros descriptivos de un campo aleatorio definidos en el inciso anterior pueden ser estimados a partir de los resultados “discretos” (muestras aisladas) o “continuos” (sondeos) de las campañas de reconocimiento. En este último caso, aceptando que el campo es *estadísticamente homogéneo y ergódico* (es decir que sus parámetros pueden ser estimados a partir de una sola *función muestra o realización*), el valor esperado puede ser evaluado (Auvinet, 2002) utilizando la aproximación:

$$\mu_V \cong \mu^* = \frac{1}{L} \int_0^L V(x) dx \quad (\text{IV.14})$$

Donde  $L$  es la longitud del sondeo.

En la misma forma, es posible estimar la autocovarianza a lo largo de la dirección  $\mathbf{u}$  como:

$$C_V(s\mathbf{u}) \cong \frac{1}{L} \int_0^L V(x)V(x+s\mathbf{u}) dx - \mu^{*2} \quad (\text{IV.15})$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector unitario en la dirección en la que se evalúa la covarianza y  $s$  es un escalar. La estimación de la autocovarianza mediante esta expresión presenta un ligero sesgo, como puede verificarse evaluando la esperanza del segundo miembro.

Por otra parte, si se introduce la función indicadora:

$$I_V(v, X) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(X) \leq v \\ 0 & \text{si } V(X) > v \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

La función de distribución de probabilidad de primer orden del campo puede ser estimada a partir



de registros continuos con base en la relación:

$$F_V(v, X) = P[V(X) \leq v] \cong \frac{1}{L} \int_0^L I_V(v, x) dx \quad (\text{IV.17})$$

La estimación de los parámetros del campo a partir de los datos disponibles recibe generalmente el nombre de *análisis estructural*.

En el caso de muestras aisladas, las estimaciones se realizan usando expresiones discretas análogas a las expresiones anteriores (Deutsch, 1992). Esta situación es la más común cuando la variable de interés es de tipo geométrico (espesor de determinado estrato por ejemplo) o en problemas de control de compactación de obras de tierra mediante calas puntuales.

### IV.3 Efecto de escala

El conocimiento de los parámetros principales del campo aleatorio representativo de las variaciones de las propiedades permite evaluar la esperanza y dispersión de los valores medios de dichas propiedades en áreas o volúmenes contenidos dentro del dominio. Así, en un campo estacionario, la esperanza del valor medio  $V_\Omega$  de la propiedad de interés en un subdominio  $\Omega$  es (Papoulis, 1984):

$$E\{V_\Omega\} = E\left\{\frac{1}{\Omega} \int_\Omega V(X) dX\right\} = E\{V(X)\} \quad (\text{IV.18})$$

y su varianza:

$$\text{Var}[V_\Omega] = E\{V_\Omega^2\} - E^2\{V_\Omega\} \quad (\text{IV.19})$$

es decir:

$$\text{Var}[V_\Omega] = \frac{1}{\Omega^2} \left[ E\left\{\int_\Omega V(X) dX \int_\Omega V(X) dX\right\} - E\left\{\int_\Omega V(X) dX\right\}^2 \right] \quad (\text{IV.20})$$

lo que puede escribirse como:

$$\text{Var}[V_\Omega] = \frac{1}{\Omega^2} \left[ \int_\Omega \int_\Omega E\{V(X_1)V(X_2)\} dX_1 dX_2 - \int_\Omega \int_\Omega E\{V(X_1)\} E\{V(X_2)\} dX_1 dX_2 \right] \quad (\text{IV.21})$$

es decir:

$$\text{Var}[V_\Omega] = \frac{1}{\Omega^2} \int_\Omega \int_\Omega C_V(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (\text{IV.22})$$

En la misma forma, se muestra que la covarianza entre valores medios de la propiedad en dos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , con o sin traslape, es:

$$Cov[V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}] = \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} C_V(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (IV.23)$$

La ecuación (IV.22) puede también escribirse:

$$Var[V_{\Omega}] = \frac{Var[V(X)]}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \rho_V(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (IV.24)$$

Dado que el coeficiente de autocorrelación es inferior o igual en valor absoluto a la unidad, se observa que la varianza del valor medio de una propiedad aleatoria estacionaria en un dominio dado tiende a disminuir cuando las dimensiones de dicho dominio crecen (excepto en el caso trivial de la correlación perfecta). Este es el fenómeno de *reducción de varianza* o *efecto de escala*.

#### IV.4 Estimación condicional

Un problema de gran interés en geoestadística es la estimación del valor de una propiedad de interés en un punto del medio en el cual no se cuenta con medición (estimación puntual). Disponer de una solución a este problema permite en particular *interpolarse* entre datos disponibles e inclusive definir sondeos y cortes *virtuales*. El problema puede generalizarse a la estimación del valor medio de la misma propiedad en cualquier subdominio estudiado, por ejemplo en un volumen dado o a lo largo de determinada superficie potencialmente crítica (estimación global).

Una técnica que permite alcanzar este objetivo es la *estimación condicional lineal sin sesgo y con mínima varianza* (Mood y Graybill, 1963), conocida también como filtro de Wiener. En ingeniería minera, se usa una técnica básicamente similar, pero con algunas variantes, conocida como *kriging* (Krige, 1966; Matheron, 1971).

##### IV.4.1 Estimación lineal bivariable

El modelado mediante un campo aleatorio de una propiedad definida en un dominio,  $\Omega$ , permite evaluar el valor esperado condicional y la varianza condicional de  $V_{\Omega_1}$ , propiedad puntual o media en un subdominio,  $\Omega_1$ , a partir del valor  $V_{\Omega_2}$ , también puntual o medio, obtenido por medición directa en otro subdominio  $\Omega_2$ .

Se usa un estimador lineal  $V_{\Omega_1}^*$  tal que:

$$V_{\Omega_1}^* = aV_{\Omega_2} + b \quad (IV.25)$$

que sea además insesgado:

$$E\left\{V_{\Omega_1}^* - V_{\Omega_1}\right\} = 0 \quad (IV.26)$$

Es posible obtener una expresión para los valores  $a$  y  $b$ , tal que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones (IV.25) y (IV.26), y que se minimice la esperanza del cuadrado del error o *varianza de estimación*:

$$E\left\{(V_{\Omega_1}^* - V_{\Omega_1})^2\right\} = \text{Var}\left[aV_{\Omega_2} + b - V_{\Omega_1}\right] \quad (\text{IV.27})$$

De (IV.26), se deduce que el valor de  $b$  es:

$$b = E\left\{V_{\Omega_1}\right\} - aE\left\{V_{\Omega_2}\right\} \quad (\text{IV.28})$$

Por otra parte, es fácil verificar que anulando la derivada de la expresión (IV.27) respecto a la variable  $a$  para minimizar el error de estimación, se obtiene:

$$a = \frac{\text{Cov}\left[V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}\right]}{\sigma_{V_{\Omega_2}}^2} \quad (\text{IV.29})$$

La expresión (IV.25) resultante es:

$$V_{\Omega_1}^* = E\left\{V_{\Omega_1}\right\} + \rho_V(V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}) \frac{\sigma_{V_{\Omega_1}}}{\sigma_{V_{\Omega_2}}} \left[V_{\Omega_2} - E\left\{V_{\Omega_2}\right\}\right] \quad (\text{IV.30})$$

Donde  $\rho_V(V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2})$  es el coeficiente de correlación entre  $V_{\Omega_1}$  y  $V_{\Omega_2}$ :

$$\rho_V(V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}) = \frac{\text{Cov}\left[V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}\right]}{\sigma_{V_{\Omega_1}} \sigma_{V_{\Omega_2}}} \quad (\text{IV.31})$$

La varianza de estimación minimizada correspondiente es:

$$E\left\{(V_{\Omega_1}^* - V_{\Omega_1})^2\right\} = \text{Var}\left[V_{\Omega_1}\right] \left(1 - \rho_V^2\right) \quad (\text{IV.32})$$

Si las dos variables tienen la misma esperanza y la misma varianza, dos situaciones extremas pueden presentarse en cuanto al coeficiente de correlación:

- Si  $V_{\Omega_1}$  y  $V_{\Omega_2}$  están perfectamente correlacionadas, entonces  $\rho_V(V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}) = 1$  y  $V_{\Omega_1}^* = V_{\Omega_2}$ .
- Si  $V_{\Omega_1}$  y  $V_{\Omega_2}$  no están correlacionadas, la información sobre  $\Omega_2$  no contribuye a reducir la incertidumbre sobre  $\Omega_1$ .

Se observa que, en el caso general, el conocimiento del campo en un subdominio dado conduce a una corrección de la esperanza y a una reducción de la varianza del campo o de su valor medio en otros subdominios.

#### IV.4.2 Estimación lineal multivariable

El método anterior puede generalizarse a la estimación de las esperanzas, varianzas y covarianzas condicionales de los valores puntuales o medios asociados respectivamente a diferentes puntos o subdominios del medio estudiado, a partir de cierto número de resultados de mediciones efectuadas en diferentes puntos o subdominios.

Sea  $\mathbf{V}$  un vector de dimensión  $p$  conteniendo las  $k$  variables por estimar y las  $p-k$  variables conocidas, definido como:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } \mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} V_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_p \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Donde  $\mathbf{V}_1$  es el vector de las variables por estimar y  $\mathbf{V}_2$  es el vector de las variables conocidas.

Sea  $\mathbf{U}$  el vector, también de dimensión  $p$ , de los valores esperados de las variables por estimar y de las variables conocidas, definido como:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \mu_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_p \end{pmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

Por otra parte, sea  $\mathbf{K}$  la matriz de las covarianzas para el conjunto de las variables conocidas y por estimar:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

Donde:

- $\mathbf{K}_{11}$  Submatriz de las covarianzas entre las variables asociadas a los diferentes puntos o dominios de estimación, de orden  $k$ .
- $\mathbf{K}_{22}$  Submatriz de las covarianzas entre las variables asociadas a los diferentes puntos o subdominios conocidos, de orden  $p-k$ .

$\mathbf{K}_{12}$  y  $\mathbf{K}_{21}$  Submatrices de las covarianzas entre los diferentes datos y las variables asociadas a los diferentes puntos o subdominios de estimación, respectivamente de orden  $k$  y  $p-k$ . Obsérvese que  $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{12}^T$ .

Es posible obtener un vector  $\mathbf{V}_1^*$ , estimador del vector  $\mathbf{V}_1$  conociendo  $\mathbf{V}_2$ , cuyos elementos sean lineales, insesgados y conduzcan a una mínima varianza de estimación.

Los elementos de este vector serán combinaciones lineales de los elementos de  $\mathbf{V}_2$ :

$$\mathbf{V}_1^* = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{b} \quad (\text{IV.36})$$

La estimación será sin sesgo si:

$$E\{\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_1\} = \mathbf{A}\mathbf{U}_2 + \mathbf{b} - \mathbf{U}_1 = 0 \quad (\text{IV.37})$$

La submatriz de las varianzas de estimación tendrá la forma:

$$\mathbf{K}_{11.2} = E\left\{(\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_1)^T\right\} \quad (\text{IV.38})$$

es decir:

$$\mathbf{K}_{11.2} = \mathbf{A}\mathbf{K}_{22}\mathbf{A}^T + \mathbf{K}_{11} - \mathbf{A}\mathbf{K}_{12}^T - \mathbf{K}_{12}\mathbf{A}^T \quad (\text{IV.39})$$

Procediendo nuevamente por derivación para minimizar los elementos de esta matriz, se obtiene que la matriz de los coeficientes óptimos es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1} \quad (\text{IV.40})$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene el vector de los valores estimados:

$$\mathbf{V}_1^* = \mathbf{U}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{U}_2) \quad (\text{IV.41})$$

y la submatriz de varianzas de estimación minimizadas resulta:

$$\mathbf{K}_{11.2} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} \quad (\text{IV.42})$$

Este método permite por tanto estimar valores puntuales o medios del campo aleatorio en subdominios del medio (por ejemplo, elementos finitos o grupos de estos elementos) tomando en cuenta resultados obtenidos por muestreo.

### IV.4.3 Kriging

La técnica del *kriging*, ampliamente usada en ingeniería minera consiste, al igual que la anterior, en obtener estimadores lineales de mínima varianza. Sin embargo, la técnica tiene algunas variantes que pueden ser de interés y se discute brevemente a continuación para el caso de la estimación puntual.

#### IV.4.3.1 Kriging *simple* (Deutsch, 1992)

El kriging *simple* es una técnica que puede usarse cuando  $E\{V(X)\}$  es una función conocida de  $X$  (eventualmente constante). Consiste en obtener los estimadores puntuales en el campo de media nula,  $V(X) - E\{V(X)\}$ , en vez de  $V(X)$ . Los elementos del vector  $\mathbf{V}_1^*$  de la ecuación (IV.36), se sustituyen entonces por:

$$V^*(X) - E\{V(X)\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (V_i - E\{V_i\}) \quad (\text{IV.43})$$

Donde  $V_i$  representa los elementos conocidos del vector  $\mathbf{V}_2$  y  $E\{V_i\}$  los elementos correspondientes del vector de esperanzas  $\mathbf{U}_2$ .

Los coeficientes  $\lambda_i$  y los estimadores buscados pueden obtenerse usando las ecuaciones del inciso IV.4.2. El kriging *simple* es de hecho rigurosamente equivalente a la técnica de estimación condicional planteada en IV.4.1 y IV.4.2.

#### IV.4.3.2 Kriging *ordinario*

Cuando el campo es estacionario, la ecuación (IV.43) del kriging *simple* puede escribirse:

$$V^*(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right] \mu_V \quad (\text{IV.44})$$

Donde  $\mu_V$  es la esperanza constante del campo.

Es posible encontrar un estimador lineal, insesgado y de mínima varianza que no requiera el conocimiento de la media  $\mu_V$ , imponiendo la condición:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (\text{IV.45})$$

La varianza de estimación:

$$\sigma_E^2(X) = \text{Var}[V(X) - V^*(X)] = E\left\{\left(V(X) - V^*(X)\right)^2\right\} \quad (\text{IV.46})$$

puede escribirse como:

$$\sigma_E^2(X) = \text{Var}[V^*(X)] + \text{Var}[V(X)] - 2\text{Cov}[V^*(X), V(X)] \quad (\text{IV.47})$$

pero:

$$\text{Var}[V^*(X)] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i\right] = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_V(X_i, X_j) \quad (\text{IV.48})$$

y:

$$\text{Cov}[V^*(X), V(X)] = \text{Cov}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i, V(X)\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_V(X, X_i) \quad (\text{IV.49})$$

Por tanto:

$$\sigma_E^2(X) = \text{Var}[V(X)] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_V(X_i, X_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_V(X, X_i) \quad (\text{IV.50})$$

Es posible minimizar  $\sigma_E^2(X)$  respetando la condición de ausencia de sesgo recurriendo a la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_V(X_i, X_j) - \nu = C_V(X, X_i) \quad i = 1 \text{ a } n \quad (\text{IV.51})$$

Con la ecuación (IV.45), se cuenta en total con  $n+1$  ecuaciones que permiten determinar los  $n$  coeficientes,  $\lambda$ , y el multiplicador de Lagrange,  $\nu$ .

La varianza de estimación minimizada correspondiente es:

$$\sigma_E^2(X) = \text{Var}[V(X)] + \nu - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_V(X, X_i) \quad (\text{IV.52})$$

El estimador proporcionado por el kriging *ordinario* se considera más *robusto* que el del kriging *simple*. Al no requerir el conocimiento de la esperanza, puede adaptarse mejor a variaciones locales. Sin embargo, el hecho de que el método no requiera el conocimiento de la esperanza solamente constituye una ventaja mínima ya que este parámetro se conoce generalmente mejor que la función de autocovarianza.

Nota: Al usar las técnicas de estimación anteriores, debe tomarse en cuenta que la varianza de estimación minimizada (ecuación IV.42 ó IV.52) no es, en general, la varianza condicional del valor estimado. No depende de los datos disponibles. Esta coincidencia solamente se da en el caso de campos gaussianos (sección 4.5).

#### IV.4.4 Estimación no paramétrica de la función de distribución condicional

Al aplicar las técnicas de estimación lineal a la función indicadora  $I_V(v, X)$  de un campo de interés  $V(X)$ , es posible obtener una estimación no paramétrica (es decir sin pasar por la esperanza, varianza u otros parámetros) de la función de distribución de probabilidad de los valores del campo en cualquier punto. En efecto, la estimación lineal aplicada a la función indicadora proporciona la esperanza condicional de esta función,  $E\{I_V(v, X)|datos\}$  la cual, por tratarse de una función binaria en 0 y 1, es igual a la probabilidad:

$$P[V(X) \leq v | datos] = F_{V|datos}(v; X) \quad (\text{IV.53})$$

La función de distribución puede ser obtenida por puntos para diferentes valores de la variable  $v$ . Esta posibilidad es muy valiosa, especialmente cuando se considera insuficiente caracterizar el campo por medio de una media y varianza.

#### IV.4.5 Campos gaussianos

Un caso particular de gran importancia es el de los campos *gaussianos*. Conviene recordar que un campo aleatorio es *gaussiano* si cada una de las variables del campo  $V(X)$  tiene una densidad de probabilidad del tipo:

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_V} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu_V}{\sigma_V}\right)^2\right] \quad (\text{IV.54})$$

y si la densidad de probabilidad conjunta de cualquier grupo de  $n$  variables del campo está definida por la ecuación siguiente (Mood y Graybill, 1963):

$$f_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\frac{1}{|\mathbf{K}|} \frac{\pi}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu})}$$

para  $-\infty < v_i < +\infty$  e  $i = 1, \dots, n$  (IV.55)

donde  $\mathbf{V}$  es el vector de las variables aleatorias  $V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_n)$ ;  $\boldsymbol{\mu}$ , es un vector de valores reales tales que  $\mu_i = E\{V(X_i)\}$  y  $\mathbf{K}$  es la matriz de covarianza de las variables aleatorias que contiene en la diagonal principal las varianzas respectivas de las diferentes variables y, fuera de la diagonal, sus covarianzas por pares.

El teorema del límite central (Mood y Graybill, 1963) hace que este tipo de campo surja naturalmente cuando el fenómeno analizado es el resultado de la suma de los efectos de múltiples campos. En muchos casos, no hay razón particular para pensar que esto ocurra en el caso de las variables geotécnicas, sin embargo este tipo de campo puede de todos modos ser utilizado como una primera aproximación de campos más complejos.



Los campos gaussianos, tienen la propiedad interesante de que los estimadores lineales de mínima varianza presentados en los incisos anteriores son exactos. En otros términos, para un vector  $\mathbf{V}$  de dimensión  $p$  presentando una distribución  $p$ -gausiana de vector esperanza  $\mathbf{U}$  y matriz de covarianza  $\mathbf{K}$ , la distribución condicional del vector  $\mathbf{V}_1$ , de orden  $k$ , conociendo  $\mathbf{V}_2$  es una distribución  $k$ -gausiana de vector esperanza  $\mathbf{V}_1^*$ , definido por la ecuación (IV.41) y con matriz de covarianza dada por la expresión (IV.42) (Mood y Graybill, 1963).

#### IV.4.6 Transformación de campos aleatorios. Anamorfosis.

Es posible mostrar que cualquier campo puede ser transformado en un campo gaussiano. Esta transformación se conoce como anamorfosis. Las técnicas de transformación más conocidas son las de Rosenblatt (1952) y de Nataf (1963).

### IV.5. Simulación de campos aleatorios

La *simulación* es el proceso por medio del cual se genera una posible configuración del campo aleatorio compatible con sus parámetros descriptivos (simulación *incondicional*) o con estos parámetros y, además, con los datos disponibles (simulación *condicional*). Se puede generar así una serie de realizaciones o imágenes del campo que permiten apreciar en particular valores extremos potencialmente problemáticos.

La forma más sencilla de simular un campo aleatorio consiste en considerar que el mismo está representado por  $n$  puntos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  donde, para cada punto, se deben obtener realizaciones del grupo de variables aleatorias  $V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_n)$  con la estructura correcta del campo en cuanto a media y covarianza. La simulación se realiza generalmente sobre una malla de puntos en el dominio de interés y se reduce por tanto a generar un cierto número de variables aleatorias conjuntamente distribuidas. A continuación se presenta una introducción a este tema.

#### IV.5.1 Técnica general

La técnica más común para obtener al azar un valor representativo de una variable aleatoria  $V(X)$  con determinada función de distribución de probabilidad,  $F_V(v, X)$ , consiste en adoptar un valor  $v$  tal que:

$$F_V^{-1}(v, X) = u \quad (\text{IV.56})$$

donde  $u$  es un número aleatorio con densidad de probabilidad uniforme entre 0 y 1 (Mood y Graybill, 1963). Los diversos algoritmos que permiten obtener números aleatorios con estas características han sido revisados por Fogli (1980).

Si  $V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_n)$  es el conjunto de  $n$  variables aleatorias representativas del campo que se pretende simular y estas variables son estadísticamente independientes, entonces sus funciones conjuntas de densidad y de distribución de probabilidad pueden expresarse como:

$$f_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_{V_i}(v_i; X_i) \quad (\text{IV.57})$$

$$F_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n F_{V_i}(v_i; X_i) \quad (\text{IV.58})$$

donde  $f_{V_i}(v_i; X_i)$  y  $F_{V_i}(v_i; X_i)$  son, respectivamente, las funciones marginales (individuales) de densidad y de distribución de probabilidad de  $V(X_i)$ . En este caso, los valores aleatorios de cada variable pueden generarse separada e independientemente por medio de la técnica descrita anteriormente (ecuación IV.56).

Para un grupo de variables aleatorias dependientes  $V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_n)$ , las funciones conjuntas de densidad y de distribución de probabilidad pueden expresarse como:

$$f_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = f_{V_1}(v_1; X_1) f_{V_2}(v_2 | v_1; X_2) \dots f_{V_n}(v_n | v_1, \dots, v_{n-1}; X_n) \quad (\text{IV.59})$$

$$F_{V_1, \dots, V_n}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = F_{V_1}(v_1; X_1) F_{V_2}(v_2 | v_1; X_2) \dots F_{V_n}(v_n | v_1, \dots, v_{n-1}; X_n) \quad (\text{IV.60})$$

donde  $f_{V_i}(v_i | v_1, \dots, v_{i-1}; X_i)$  y  $F_{V_i}(v_i | v_1, \dots, v_{i-1}; X_i)$  representan respectivamente, las funciones condicionales de densidad y distribución de probabilidad de  $V(X_i)$  dado que  $V(X_1) = v_1, V(X_2) = v_2, \dots, V(X_{i-1}) = v_{i-1}$ . Debido a que las variables aleatorias son dependientes, ya no es válido usar directamente un conjunto de números aleatorios uniformemente distribuidos e independientes para generar los valores deseados. Cuando el campo es gaussiano o ha sido transformado en campo gaussiano por anamorfosis, es posible emplear el procedimiento indicado a continuación.

#### IV.5.2 Simulación incondicional

Este tipo de simulación requiere inicialmente la generación de una secuencia de *variables aleatorias estándar independientes distribuidas normalmente* (con media cero y varianza unitaria), obtenidas a partir de dos variables aleatorias,  $U_i$  y  $U_{i+1}$ , distribuidas uniformemente entre 0 y 1 (Fogli, 1980):

$$Z_i = \sqrt{-2 \ln(1 - U_i)} \cos(2\pi U_{i+1}) \quad (\text{IV.61})$$

$$Z_{i+1} = \sqrt{-2 \ln(1 - U_i)} \text{sen}(2\pi U_{i+1})$$

Por otra parte, la matriz de correlación,  $\rho$ , constituida por los elementos:

$$\rho_V(X_i, X_j) = \frac{C_V(X_i, X_j)}{\sigma_V(X_i)\sigma_V(X_j)} \quad (\text{IV.62})$$

puede descomponerse en el producto de una matriz triangular inferior y de su traspuesta:

$$\mathbf{LL}^T = \boldsymbol{\rho} \quad (\text{IV.63})$$

esta operación, conocida como *descomposición de Cholesky*, presenta ciertas desventajas: no puede llevarse a cabo cuando algunas de las  $V(X_i)$  están perfectamente correlacionadas entre sí, es difícil de calcular cuando el número de puntos en el campo es demasiado grande, y tiende a generar errores de redondeo numérico. Sin embargo, ya existen algoritmos estándar eficientes para su cálculo.

A partir de la matriz  $\mathbf{L}$  de la expresión (IV.63), se puede obtener un *campo aleatorio normal estándar correlacionado*, como una combinación lineal de las variables normales estándar independientes,  $Z_j$ :

$$G(X_i) = \sum_{j=1}^i L_{ij} Z_j; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.64})$$

Finalmente, se introducen los valores conocidos de la media y la varianza para generar realizaciones de  $V(X_i)$ , lo cual proporciona la simulación del campo:

$$V(X_i) = \mu_V(X_i) + \sigma_V(X_i)G(X_i) \quad (\text{IV.65})$$

Cuando la simulación del campo aleatorio  $V(X)$  ya haya sido generada, esta realización puede utilizarse como punto de partida para un análisis determinista. La simulación puede repetirse tantas veces como se desea para evaluar la variabilidad del resultado del mismo como parte de un análisis de *Monte Carlo*.

### IV.5.3 Simulación condicional

Se supone ahora que el campo aleatorio  $V(X)$  ha sido medido en los puntos  $X_1, X_2, \dots, X_p$  y que será simulado en los puntos  $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_{p+n}$ . Se desea generar realizaciones de  $V(X)$  que igualen de manera exacta los datos en  $p$  puntos y que sean aleatorias en los  $n - p$  puntos restantes.

La *simulación condicional de un campo aleatorio* puede hacerse directamente por el método del inciso anterior, pero usando las esperanzas, varianzas y covarianzas condicionales sobre los datos disponibles. Se pueden generar varios puntos al mismo tiempo o generar uno a la vez e incorporar el punto generado a los datos. Esta última forma de proceder parece ser la más eficiente (Shinozuka, 1996). Los valores simulados se incorporan entonces entre los datos disponibles y es entonces posible generar nuevos puntos.

# ANEXO V

---

## Técnica de cocientes polinomiales

---

### V.1 Fundamentos teóricos

Se trata de una técnica numérica que permite el cálculo aproximado de derivadas, integrales y de la interpolación de funciones de varias variables aleatorias (Chowdhury, 1993; Nechnech, 1994).

La técnica de cocientes polinomiales se ha aplicado en esta investigación al cálculo de derivadas de funciones de varias variables aleatorias, las cuales son necesarias en el empleo de algunos métodos probabilistas (como *primer y segundo orden segundos momentos*, *FOSM* y *SOSM*, respectivamente) para la evaluación de la incertidumbre en los análisis de flujo de agua. La explicación que se presenta a continuación se centra precisamente en el cálculo de estas derivadas.

Para determinar numéricamente las derivadas parciales de una función de  $n$  variables aleatorias  $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  con respecto a una cualquiera de sus variables  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), se debe evaluar la función  $Y$  asignando  $m$  valores discretos a la variable  $X_i$  de interés y manteniendo los valores de las  $n-1$  variables restantes iguales a sus valores medios, esto es:

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= g\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, X_i^{(1)}, \dots, \mu_{X_n}\right) \\ Y_{i2} &= g\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, X_i^{(2)}, \dots, \mu_{X_n}\right) \\ &\vdots \\ Y_{im} &= g\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, X_i^{(m)}, \dots, \mu_{X_n}\right) \end{aligned} \quad (V.1)$$

Si la media o valor esperado y la desviación estándar de la variable de interés  $X_i$  son conocidas, entonces los “ $m$ ” valores discretos pueden asignarse considerando como valor máximo y mínimo, aquéllos que se obtienen a partir de la media: sumando y restando  $k$  veces el valor de la desviación estándar; se sugiere por ejemplo:

$$X_i^{(1)} = \mu_{X_i} + k \cdot \sigma_{X_i} \quad \leftarrow \quad \text{Valor máximo} \quad (V.2)$$

$$X_i^{(l+1)} = X_i^{(l)} - \text{Incremento} \quad \leftarrow \quad \text{Demás valores, con } l = 1, \dots, m-1 \quad (V.3)$$

Donde:

$$\text{Incremento} = \frac{(\mu_{X_i} + k \cdot \sigma_{X_i}) - (\mu_{X_i} - k \cdot \sigma_{X_i})}{m-1} \quad (V.4)$$

Se considera como valor razonable de  $k=2$  ó  $3$ . De igual manera, para los valores discretos el rango  $3 < m < 5$  se considera aceptable.

La función parcial en el argumento  $X_i$  se puede aproximar mediante una relación polinomial expresada en la forma de una fracción continua:

$$Y_i = g\left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, X_i, \dots, \mu_{X_n}\right) \approx a_1 + \frac{X_i - X_i^{(1)}}{a_2 + \frac{X_i - X_i^{(2)}}{a_3 + \frac{\vdots}{\ddots + \frac{X_i - X_i^{(m-1)}}{a_{m-1} + \frac{X_i - X_i^{(m-1)}}{a_m}}}}} = \phi_j(X_i) \quad (V.5)$$

La relación entre el  $j$ -ésimo valor de la función en  $X_i$ ,  $\phi_j(X_i)$ , y el consecutivo  $\phi_{j+1}(X_i)$  se puede escribir como:

$$\phi_j(X_i) = a_j + \frac{X_i - X_i^{(j)}}{\phi_{j+1}(X_i)}; \quad \text{con } j = 1, \dots, m \quad (V.6)$$

De donde el último valor (para  $j = m$ ) está dado por:

$$\phi_m(X_i) = a_m \quad (V.7)$$

Las constantes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de la expresión (V.5), se calculan de acuerdo con el procedimiento indicado en la Tabla V.1.

Tabla V.1 Coeficientes de la fracción polinomial para la variable  $X_i$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_m$
$a_1 = g_{11}$	-----	-----	-----	...	-----
$a_{21} = g_{12}$	$a_2 = \frac{X_i^{(2)} - X_i^{(1)}}{a_{21} - a_1}$	-----	-----	...	-----
$a_{31} = g_{13}$	$a_{32} = \frac{X_i^{(3)} - X_i^{(1)}}{a_{31} - a_1}$	$a_3 = \frac{X_i^{(3)} - X_i^{(2)}}{a_{32} - a_2}$	-----	...	-----
$a_{41} = g_{14}$	$a_{42} = \frac{X_i^{(4)} - X_i^{(1)}}{a_{41} - a_1}$	$a_{43} = \frac{X_i^{(4)} - X_i^{(2)}}{a_{42} - a_2}$	$a_4 = \frac{X_i^{(4)} - X_i^{(3)}}{a_{43} - a_3}$	...	-----
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$a_{m1} = g_{1m}$	$a_{m2} = \frac{X_i^{(m)} - X_i^{(1)}}{a_{m1} - a_1}$	$a_{m3} = \frac{X_i^{(m)} - X_i^{(2)}}{a_{m2} - a_2}$	$a_{m4} = \frac{X_i^{(m)} - X_i^{(3)}}{a_{m3} - a_3}$	...	$a_m = \frac{X_i^{(m)} - X_i^{(m-1)}}{a_{m(m-1)} - a_{m-1}}$

La derivada parcial de la función  $Y$  con respecto a la variable  $X_i$  se puede aproximar con:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} \approx \phi_j'(X_i) \quad (\text{V.8})$$

De manera general, la diferenciación de la expresión (V.5), se escribe:

$$\phi_j'(X_i) = \frac{\phi_{j+1}(X_i) - [X_i - X_i^{(j)}] \phi'_{j+1}(X_i)}{[\phi_{j+1}(X_i)]^2} \quad (\text{V.9})$$

De donde se observa que cuando  $j = m$ :

$$\phi_m'(X_i) = 0 \quad (\text{V.10})$$

El valor de la derivada parcial alrededor del valor medio de la variable  $X_i$ , se determina substituyendo  $X_i$  por  $\mu_{X_i}$ :

$$\phi_j'(X_i) = \frac{\phi_{j+1}(\mu_{X_i}) - [\mu_{X_i} - X_i^{(j)}] \phi'_{j+1}(\mu_{X_i})}{[\phi_{j+1}(\mu_{X_i})]^2} \quad (\text{V.11})$$

Finalmente, para evaluar las derivadas parciales de la función  $Y$  con respecto a otras variables, se procede de manera análoga. De igual forma, si se desea calcular derivadas de mayor orden.

La técnica de los cocientes polinomiales se ha aplicado a numerosos estudios en los que se han obtenido resultados satisfactorios tanto en lo referente a análisis de sensibilidad (Orlandi, 1996; Bouayed, 1997; Vázquez, 2005), como en análisis de confiabilidad (Nechnech, 1994; Benmansour, 1996).

Se remarca que una de las principales ventajas de la técnica numérica de cocientes polinomiales, es que el cálculo de las derivadas puede efectuarse de manera externa a un código de cálculo existente basado en algún método numérico, como el de los elementos finitos por ejemplo.

Se presenta a continuación el cálculo de unas derivadas de primer y segundo orden aplicando la técnica de cocientes polinomiales. Estas derivadas se utilizaron en los métodos *FOSM* y *SOSM* del problema resuelto en el inciso 5.1.4 del Capítulo 5. El formato que se muestra corresponde a una hoja de cálculo elaborada en Mathcad V14.0 (Parametric Technology Corporation, 2007).

## V.2 Aplicación en el cálculo de derivadas de primer y segundo orden empleadas en los métodos *FOSM* y *SOSM* del problema del inciso 5.1.4 (Capítulo 5)

### (a) Parámetros de incertidumbre de la variable $v_1$

$$\mu v_1 := -4.95735 \quad \sigma v_1 := 0.35817 \quad \text{COV}v_1 := \sigma v_1^2 = 1.283 \times 10^{-1} \quad \mu v_2 := \mu v_1 \quad \sigma v_2 := \sigma v_1$$

### (b) Asignación de "m" valores discretos a la variable $v_1$

$$m_1 := 5$$

$$\mu v_1 + 2 \cdot \sigma v_1 = -4.241 \quad \text{Incremento}_1 := \frac{[(\mu v_1 + 2 \cdot \sigma v_1) - (\mu v_1 - 2 \cdot \sigma v_1)]}{4} = -0.35817$$

$$\mu v_1 - 2 \cdot \sigma v_1 = -5.6737$$

$$X_{11} := \mu v_1 + 2 \cdot \sigma v_1 \quad X_{12} := X_{11} + \text{Incremento}_1 \quad X_{13} := X_{12} + \text{Incremento}_1 \quad X_{14} := X_{13} + \text{Incremento}_1 \quad X_{15} := X_{14} + \text{Incremento}_1$$

$$X_{11} = -4.241 \quad X_{12} = -4.5992 \quad X_{13} = -4.9573 \quad X_{14} = -5.3155 \quad X_{15} = -5.6737$$

### (c) Evaluación de la función para los valores $X_{1m}$ y la variable $v_2$ constante

$$\log Q_{x11} := \log(250) + X_{11} + \mu v_2 - \log\left[\left(2 \cdot 10^{X_{11}}\right) + \left(3 \cdot 10^{\mu v_2}\right)\right] \quad \log Q_{x11} = -2.9704 \quad ax_1 := \log Q_{x11}$$

$$\log Q_{x12} := \log(250) + X_{12} + \mu v_2 - \log\left[\left(2 \cdot 10^{X_{12}}\right) + \left(3 \cdot 10^{\mu v_2}\right)\right] \quad \log Q_{x12} = -3.0799 \quad ax_{21} := \log Q_{x12}$$

$$\log Q_{x13} := \log(250) + X_{13} + \mu v_2 - \log\left[\left(2 \cdot 10^{X_{13}}\right) + \left(3 \cdot 10^{\mu v_2}\right)\right] \quad \log Q_{x13} = -3.2584 \quad ax_{31} := \log Q_{x13}$$

$$\log Q_{x14} := \log(250) + X_{14} + \mu v_2 - \log\left[\left(2 \cdot 10^{X_{14}}\right) + \left(3 \cdot 10^{\mu v_2}\right)\right] \quad \log Q_{x14} = -3.506 \quad ax_{41} := \log Q_{x14}$$

$$\log Q_{x15} := \log(250) + X_{15} + \mu v_2 - \log\left[\left(2 \cdot 10^{X_{15}}\right) + \left(3 \cdot 10^{\mu v_2}\right)\right] \quad \log Q_{x15} = -3.8052 \quad ax_{51} := \log Q_{x15}$$

### (d) Coeficientes de la fracción polinomial para la variable $v_1$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$ax_1 = -2.9704$	-----	-----	-----	-----
$ax_{21} = -3.0799$	$ax_2 := \frac{X_{12} - X_{11}}{ax_{21} - ax_1} = 3.2719$	-----	-----	-----
$ax_{31} = -3.2584$	$ax_{32} := \frac{X_{13} - X_{11}}{ax_{31} - ax_1} = 2.4878$	$ax_3 := \frac{X_{13} - X_{12}}{ax_{32} - ax_2} = 0.4568$	-----	-----
$ax_{41} = -3.506$	$ax_{42} := \frac{X_{14} - X_{11}}{ax_{41} - ax_1} = 2.0061$	$ax_{43} := \frac{X_{14} - X_{12}}{ax_{42} - ax_2} = 0.5659$	$ax_4 := \frac{X_{14} - X_{13}}{ax_{43} - ax_3} = -3.2809$	-----
$ax_{51} = -3.8052$	$ax_{52} := \frac{X_{15} - X_{11}}{ax_{51} - ax_1} = 1.7162$	$ax_{53} := \frac{X_{15} - X_{12}}{ax_{52} - ax_2} = 0.6907$	$ax_{54} := \frac{X_{15} - X_{13}}{ax_{53} - ax_3} = -3.0622$	$ax_5 := \frac{X_{15} - X_{14}}{ax_{54} - ax_4} = -1.6375$

### (e) Valor de la función en el argumento $v_1$

$$\phi_{x5}(\mu v_1) := ax_5 \quad \phi_{x4}(\mu v_1) := ax_4 + \frac{\mu v_1 - X_{14}}{\phi_{x5}(\mu v_1)} \quad \phi_{x3}(\mu v_1) := ax_3 + \frac{\mu v_1 - X_{13}}{\phi_{x4}(\mu v_1)} \quad \phi_{x2}(\mu v_1) := ax_2 + \frac{\mu v_1 - X_{12}}{\phi_{x3}(\mu v_1)} \quad \phi_{x1}(\mu v_1) := ax_1 + \frac{\mu v_1 - X_{11}}{\phi_{x2}(\mu v_1)}$$

$$\phi_{x5}(\mu v_1) = -1.6375 \quad \phi_{x4}(\mu v_1) = -3.4997 \quad \phi_{x3}(\mu v_1) = 0.4568 \quad \phi_{x2}(\mu v_1) = 2.4878 \quad \phi_{x1}(\mu v_1) = -3.2584$$

### (f) Cálculo de derivadas respecto al valor medio de la variable $v_1$

$$\frac{d}{d\mu v_1}(\phi_{x1}(\mu v_1)) = 0.5986$$

$$\frac{d}{d\mu v_1} \phi_{x2}(\mu v_1) = 1.6988$$

$$\frac{d^2}{d\mu v_1^2}(\phi_{x1}(\mu v_1)) = -0.5517$$

$$\text{Derivada}\phi_{x1} := \frac{\phi_{x2}(\mu v_1) - (\mu v_1 - X_{11}) \cdot \left(\frac{d}{d\mu v_1} \phi_{x2}(\mu v_1)\right)}{(\phi_{x2}(\mu v_1))^2}$$

$$\text{Derivada}\phi_{x1} = 0.5986$$

**(g) Parámetros de incertidumbre de la variable v2**

$$\mu v2 = -4.95735$$

$$\sigma v2 = 0.35817$$

$$COVv2 := \sigma v2^2 = 1.283 \times 10^{-1}$$

**(h) Asignación de "m" valores discretos a la variable v2**

$$m2 := 5$$

$$\mu v2 + 2 \cdot \sigma v2 = -4.241$$

$$\mu v2 - 2 \cdot \sigma v2 = -5.6737$$

$$\text{Incremento2} := \frac{[(\mu v2 + 2 \cdot \sigma v2) - (\mu v2 - 2 \cdot \sigma v2)]}{4} = -0.35817$$

$$Y11 := \mu v1 + 2 \cdot \sigma v1$$

$$Y12 := Y11 + \text{Incremento1}$$

$$Y13 := Y12 + \text{Incremento1}$$

$$Y14 := Y13 + \text{Incremento1}$$

$$Y15 := Y14 + \text{Incremento1}$$

$$Y11 = -4.241$$

$$Y12 = -4.5992$$

$$Y13 = -4.9573$$

$$Y14 = -5.3155$$

$$Y15 = -5.6737$$

**(i) Evaluación de la función para los valores  $Y_{1m}$  y la variable v1 constante**

$$\log Qy11 := \log(250) + \mu v1 + Y11 - \log(2 \cdot 10^{\mu v1}) + (3 \cdot 10^{Y11})$$

$$\log Qy11 = -3.0889$$

$$ay1 := \log Qy11$$

$$\log Qy12 := \log(250) + \mu v1 + Y12 - \log(2 \cdot 10^{\mu v1}) + (3 \cdot 10^{Y12})$$

$$\log Qy12 = -3.1479$$

$$ay21 := \log Qy12$$

$$\log Qy13 := \log(250) + \mu v1 + Y13 - \log(2 \cdot 10^{\mu v1}) + (3 \cdot 10^{Y13})$$

$$\log Qy13 = -3.2584$$

$$ay31 := \log Qy13$$

$$\log Qy14 := \log(250) + \mu v1 + Y14 - \log(2 \cdot 10^{\mu v1}) + (3 \cdot 10^{Y14})$$

$$\log Qy14 = -3.4381$$

$$ay41 := \log Qy14$$

$$\log Qy15 := \log(250) + \mu v1 + Y15 - \log(2 \cdot 10^{\mu v1}) + (3 \cdot 10^{Y15})$$

$$\log Qy15 = -3.6868$$

$$ay51 := \log Qy15$$

**(j) Coeficientes de la fracción polinomial para la variable v2**

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
ay1 = -3.0889	-----	-----	-----	-----
ay21 = -3.1479	ay2 := $\frac{Y12 - Y11}{ay21 - ay1} = 6.0714$	-----	-----	-----
ay31 = -3.2584	ay32 := $\frac{Y13 - Y11}{ay31 - ay1} = 4.2262$	ay3 := $\frac{Y13 - Y12}{ay32 - ay2} = 0.1941$	-----	-----
ay41 = -3.4381	ay42 := $\frac{Y14 - Y11}{ay41 - ay1} = 3.0771$	ay43 := $\frac{Y14 - Y12}{ay42 - ay2} = 0.2392$	ay4 := $\frac{Y14 - Y13}{ay43 - ay3} = -7.9373$	-----
ay51 = -3.6868	ay52 := $\frac{Y15 - Y11}{ay51 - ay1} = 2.3962$	ay53 := $\frac{Y15 - Y12}{ay52 - ay2} = 0.2924$	ay54 := $\frac{Y15 - Y13}{ay53 - ay3} = -7.2905$	ay5 := $\frac{Y15 - Y14}{ay54 - ay4} = -0.5538$

**(k) Valor de la función en el argumento v2**

$$\begin{aligned} \phi y5(\mu v2) &:= ay5 & \phi y4(\mu v2) &:= ay4 + \frac{\mu v2 - Y14}{\phi y5(\mu v2)} & \phi y3(\mu v2) &:= ay3 + \frac{\mu v2 - Y13}{\phi y4(\mu v2)} & \phi y2(\mu v2) &:= ay2 + \frac{\mu v2 - Y12}{\phi y3(\mu v2)} & \phi y1(\mu v2) &:= ay1 + \frac{\mu v2 - Y11}{\phi y2(\mu v2)} \\ \phi y5(\mu v2) &= -0.5538 & \phi y4(\mu v2) &= -8.5841 & \phi y3(\mu v2) &= 0.1941 & \phi y2(\mu v2) &= 4.2262 & \phi y1(\mu v2) &= -3.2584 \end{aligned}$$

**(l) Cálculo de derivadas respecto al valor medio de la variable v2**

$$\frac{d}{d\mu v2}(\phi y1(\mu v2)) = 0.3988$$

$$\frac{d}{d\mu v2} \phi y2(\mu v2) = 4.0443$$

$$\frac{d^2}{d\mu v2^2}(\phi y1(\mu v2)) = -0.5499$$

$$\text{Derivada}\phi y1 := \frac{\phi y2(\mu v2) - (\mu v2 - Y11) \cdot \left(\frac{d}{d\mu v2} \phi y2(\mu v2)\right)}{(\phi y2(\mu v2))^2}$$

$$\text{Derivada}\phi y1 = 0.3988$$