



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**La dispersión Rutherford en la doble  
captura electrónica por protones en  $H_2$**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**FÍSICO**

**PRESENTA:**

ADOLFO EDUARDO GONZÁLEZ ALVARADO

**DIRECTOR DE TESIS:**

DR. GUILLERMO GUADALUPE HINOJOSA AGUIRRE

México D.F. 17 de agosto del 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

## Hoja de datos del jurado

### Datos del alumno

González  
Alvarado  
Adolfo Eduardo  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
096281721

### Datos del tutor

Doctor  
Guillermo Guadalupe  
Hinojosa  
Aguirre

### Datos del sinodal 1

Doctora  
Susana  
Orozco  
Segovia

### Datos del sinodal 2

Doctor  
Juan Carlos  
Alonso  
Huitrón

### Datos del sinodal 3

Doctor  
Miguel Ángel  
Solís  
Atala

### Datos del sinodal 4

Doctor  
Marcos  
Ley  
Koo

### Datos del trabajo escrito

La dispersión Rutherford en la doble captura electrónica por protones  $H_2$   
78 paginas  
2010

- 
- La ciencia no sólo es compatible con la espiritualidad sino que es una fuente de espiritualidad profunda. Cuando reconocemos nuestro lugar en una inmensidad de años luz y en el paso de las eras, cuando captamos la complicación, belleza y sutileza de la vida, la elevación de este sentimiento, la sensación combinada de regocijo y humildad, es sin duda espiritual.
  - ¿He oído alguna vez a un escéptico que se creyera superior y despreciativo? Sin duda. A veces he oído ese tono desagradable, y me aflige recordarlo, en mi propia voz. Hay imperfecciones humanas en toda partes. Incluso cuando se aplica con sensibilidad, el escepticismo científico puede parecer arrogante, dogmático, cruel, despreciativo de los sentimientos y creencias profundas de otros.

Carl Sagan

del libro *El mundo y sus demonios. La ciencia como una luz en la oscuridad.*

1997

- Se dice que los hombres podrían no ser los sueños de los dioses, sino más bien, que los dioses son los sueños de los hombres.

Carl Sagan

del documental *Cosmos: un viaje personal.*

1980

---

## ***Resumen***

El presente trabajo de tesis fue realizado en el Instituto de Ciencias Físicas del estado de Morelos en el Laboratorio de Colisiones donde se encuentra un acelerador lineal de partículas con el que se efectuaron los experimentos. Dicho acelerador de partículas opera en el intervalo de 1 keV a 10 keV el cual es un intervalo de energía en el que la dinámica de colisiones de iones moleculares simples se puede investigar con bastante precisión. Se ha hecho un trabajo experimental con resultados cuantitativos, en el que se estudió el fenómeno de la dispersión al hacer colisionar un haz de protones  $H^+$  contra una muestra de gas hidrógeno molecular  $H_2$ . En dicho experimento se han realizado medidas de los ángulos de dispersión del protón que durante la colisión ha logrado realizar la captura de dos electrones para así convertirse en el ión negativo  $H^-$ . Este sistema es representado simbólicamente por  $H^+ + H_2 \rightarrow H^- + 2 H^+$ . Mediante el análisis de los espectros de los ángulos de dispersión del ión  $H^-$  se pudo determinar una medida de la semejanza con la dispersión de Rutherford.

Después de dar al lector una introducción del marco histórico en torno al tema de la presente tesis, este trabajo escrito comienza con una breve exposición de la teoría básica de la dispersión y de las colisiones entre partículas eléctricamente cargadas, en donde se incluyen los conceptos elementales de la teoría y se hace la descripción del fenómeno de la dispersión desde el sistema de referencia del centro de masas así como desde el sistema del laboratorio además, se detalla la deducción teórica de la fórmula de dispersión de Rutherford y se da al lector un panorama general de la teoría cuántica que respalda la deducción que hiciera Rutherford de su fórmula de dispersión y que lo acreditara como el descubridor del núcleo atómico.

Posteriormente a la exposición de la teoría, se hace una descripción del diseño y del desarrollo del experimento en el que se muestra cada una de las partes que forman el acelerador de partículas y como funciona cada una de ellas, simultáneamente a esta descripción del acelerador se van obteniendo las expresiones teóricas de las magnitudes físicas que se necesitan determinar para su uso posterior en el proceso experimental de la obtención de los ángulos de dispersión del ión  $H^-$  y de su posterior análisis y discusión.

---

## ÍNDICE GENERAL

### AGRADECIMIENTOS

#### 1. ANTECEDENTES

1. Marco histórico

#### 2. TEORÍA BÁSICA DE LA DISPERSIÓN Y DE LAS COLISIONES ENTRE PARTÍCULAS ELÉCTRICAMENTE CARGADAS

1. La estructura atómica
2. Parámetro de impacto y ángulo de dispersión
  1. Obstáculo puntual
  2. Obstáculo en forma de semi-disco
3. La dispersión en el sistema de referencia (S.R.) del centro masas (C.M.) y del laboratorio
  1. Descripción
  2. Movimiento del proyectil y del blanco en el S.R. del Laboratorio.
  3. Movimiento del proyectil y del blanco en el S.R. del C.M.
  4. Relaciones entre los ángulos de dispersión en el S.R. del Laboratorio y en el S.R. del C.M.
4. Dispersión de Rutherford
5. Teoría cuántica de la dispersión elástica
  1. El problema de dos cuerpos
  2. Deducción cuántica de la fórmula de dispersión de Rutherford
    1. La ecuación integral
    2. Serie de perturbaciones y aproximación de Max Born

#### 3. DISEÑO EXPERIMENTAL Y DESARROLLO DEL EXPERIMENTO

1. El acelerador electrostático
  2. Sistema de vacío
  3. Fuente de iones
    1. Especies de iones producidas por la fuente
  4. Lentes electrostáticas de Einzel
  5. Cálculo de la velocidad de los iones acelerados
  6. Electroimán: Espectrómetro de masas
    1. Cálculo de la intensidad del campo magnético necesario para deflectar y separar un haz individual formado por especies iónicas con la misma relación masa-carga
  7. Navajas de colimación
  8. Celda de gas
    1. Camino libre medio
  9. Placas analizadoras
-

- 
10. Analizador de velocidades
  11. Detector de iones

#### **4. DATOS EXPERIMENTALES**

1. Obtención de los espectros del ión  $H^-$
2. Ajuste de datos experimentales
  1. Normalización de los espectros del  $H^-$  respecto a la intensidad del haz de iones
  2. Normalización de los espectros del  $H^-$  respecto a la presión de la celda de gas
  3. Resta del espectro contaminante debido al gas residual

#### **5. ANÁLISIS DE LOS ESPECTROS DEL ION $H^-$**

#### **6. DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO Y CONCLUSIONES**

#### **7. APÉNDICE**

1. Caja de Faraday

#### **8. REFERENCIAS**

---

## ***AGRADECIMIENTOS***

A mis queridos padres *Lorenzo* y *Tella* quienes me han educado lo mejor que han podido y que sin duda son mis mejores amigos. Gracias por su inmenso cariño.

A mi querida *UNAM* que a través de la *Facultad de Ciencias* me ha dado el gran honor de pertenecer a los estudiantes de *Física* y hacerme sentir muy orgulloso de ello. El orgullo que he sentido de pertenecer a nuestra casa de estudios espero poder dárselo también como alumno egresado. Gracias también al *Instituto de Ciencias Físicas* por proporcionarme la ayuda económica con la beca para el proyecto de tesis UNAM-DGAPA IN-106407 y UNAM-DGAPA IN-113010

A todos mis profesores de mi facultad por ser los rectores de mi formación académica. Mis más sinceras disculpas para algunos de ellos por no siempre haber podido cumplir con las elevadas expectativas que se tienen de los estudiantes de *Física*.

A mis dos tutores Guillermo Hinojosa y Olmo González por mostrarme el trabajo en el laboratorio y permitirme trabajar a mi ritmo. A mis amigos del laboratorio de colisiones Cristian Gleason y Martín Salazar a quien personalmente considero un tutor más. A los técnicos Armando Bustos, Anselmo González, Eladio Pérez, Reyes García y Ricardo Gabriel Bustos.

A mis amigos de la facultad, Félix Santiago, Ricardo Pérez y Edgar Moya por brindarme su amistad y valiosa ayuda en las materias que cursamos juntos. A mi amiga Marusia Estrada cuya amistad ha tenido brillos de magia.

A todos mis amigos del estado de Morelos especialmente a mis amigas de Puente de Ixtla, Sandra y Blanca Cadena.

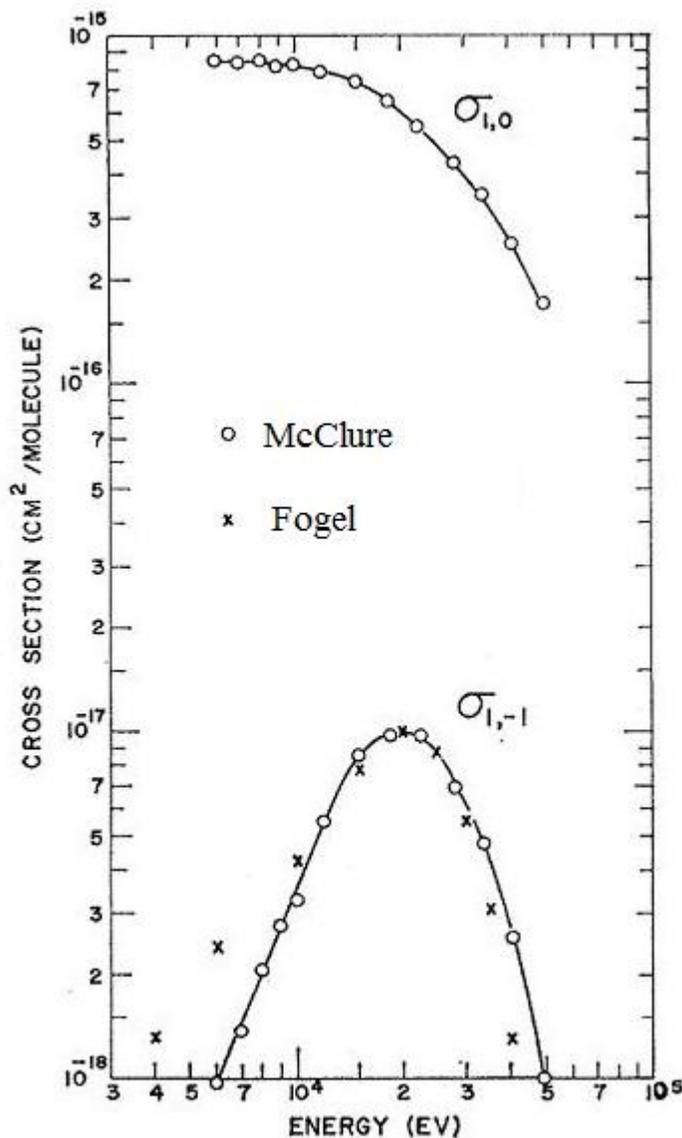
---

## ANTECEDENTES

### Marco histórico

Las investigaciones recientes en el área de la física atómica y molecular están orientadas en gran medida a la construcción de una teoría que explique aspectos todavía no resueltos en el nivel atómico de las colisiones; tal es el caso de la búsqueda del mecanismo físico que explique satisfactoriamente la transferencia de carga eléctrica en una colisión atómica o molecular. Para resolver este problema, desde los inicios de la “*física molecular moderna*” se ha estudiado uno de los sistemas atómicos más sencillos para una colisión a escala atómica en la que se presente la transferencia de carga eléctrica. Este sistema consiste en hacer colisionar a un protón  $H^+$  contra una molécula de hidrógeno  $H_2$ . El caso de la doble captura electrónica por protones -que es lo que se estudiará en esta tesis-, es simbólicamente representado por  $H^+ + H_2 \rightarrow H^- + 2 H^+$  donde la técnica experimental básicamente consiste en hacer pasar un haz monoenergético de iones rápidos  $H^+$  a través de un blanco gaseoso de  $H_2$  y detectar los iones  $H^-$  emergentes de la colisión<sup>1</sup>. La doble ionización del  $H_2$  ya sea por impacto de electrones<sup>2</sup> o por proyectiles<sup>3-5</sup> rápidos  $H^+$  y  $D^+$  ha sido estudiada desde 1930<sup>6</sup> y mucho más recientemente es estudiada en experimentos de *fotoionización*<sup>7,8</sup> en los que se usan pulsos intensos de luz láser para conseguir la ionización del  $H_2$ . A continuación se describen muy brevemente los avances más sobresalientes relacionados sobre estos temas.

En 1958 Fogel<sup>9</sup> *et al.* presentó curvas que mostraban el comportamiento con la energía de la sección transversal total para la captura de dos electrones por protones en colisiones simples con moléculas de  $H_2$  y que sirvieron como referencia para posteriores mediciones en otros trabajos. No obstante, en 1963 McClure<sup>1</sup> con el propósito de obtener una comprobación independiente de las diversas mediciones previas hechas por Fogel *et al.*; redeterminó la misma sección transversal ya mencionada. En su trabajo McClure introdujo perfeccionamientos técnicos en su sistema de detección y conteo de iones; y usó la ya bien conocida sección transversal para el proceso de captura electrónica simple que le proporcionó una base confiable para la calibración de su método de medición. McClure encontró que la sección transversal productiva de  $H^-$  alcanzaba un máximo de  $10^{-17} \text{ cm}^2/\text{molécula gas}$ , a una energía cinética del protón-proyectil de aproximadamente 20 keV; en concordancia con los resultados de Fogel. Sin embargo, la forma de la curva reportada cinco años atrás por Fogel, difería grandemente de la curva obtenida por McClure<sup>1</sup> en cada lado de este máximo en el que ambos concordaban; esta discrepancia, fue evidente, que estaba muy lejos de los límites del error experimental. Ver figura 1.



**Figura 1.** Sección transversal total para simple y doble captura de electrones por protones incidentes en moléculas de hidrógeno  $H_2$ .

$\sigma_{1,0}$  : sección transversal para la captura electrónica simple.

$\sigma_{1,-1}$  : sección transversal para la doble captura electrónica.

Los resultados de McClure están normalizados a un valor de  $8.2 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$  a 10 keV.

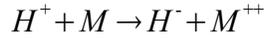
Tomado de la referencia 1.

El trabajo de McClure y el de otros puso de manifiesto que en mediciones tan refinadas como lo son la determinación de secciones transversales y ángulos de dispersión en colisiones atómicas o moleculares, es de vital importancia el aspecto tecnológico de los sistemas electrónicos que se encargan de detectar y contar partículas que en ocasiones quedan ocultas por el ruido de los propios instrumentos.

Posteriormente en 1972 Fournier<sup>10</sup> *et al.*, midieron los espectros de energía traslacional de iones  $H^-$  provenientes de la transferencia de carga simple y doble, en la colisión de protones de 4 keV y  $H_2$  a un ángulo pequeño de dispersión y, después de hacer una comparación de las pérdidas de energía correspondientes a los picos observados con respecto a los valores esperados, Fournier concluyó que el importante Principio de Franck-Condon es obedecido en tales colisiones con transferencia de carga eléctrica.

---

Mediante la medición de la energía traslacional  $T$  de los iones  $H^+$  provenientes de la doble transferencia de carga:



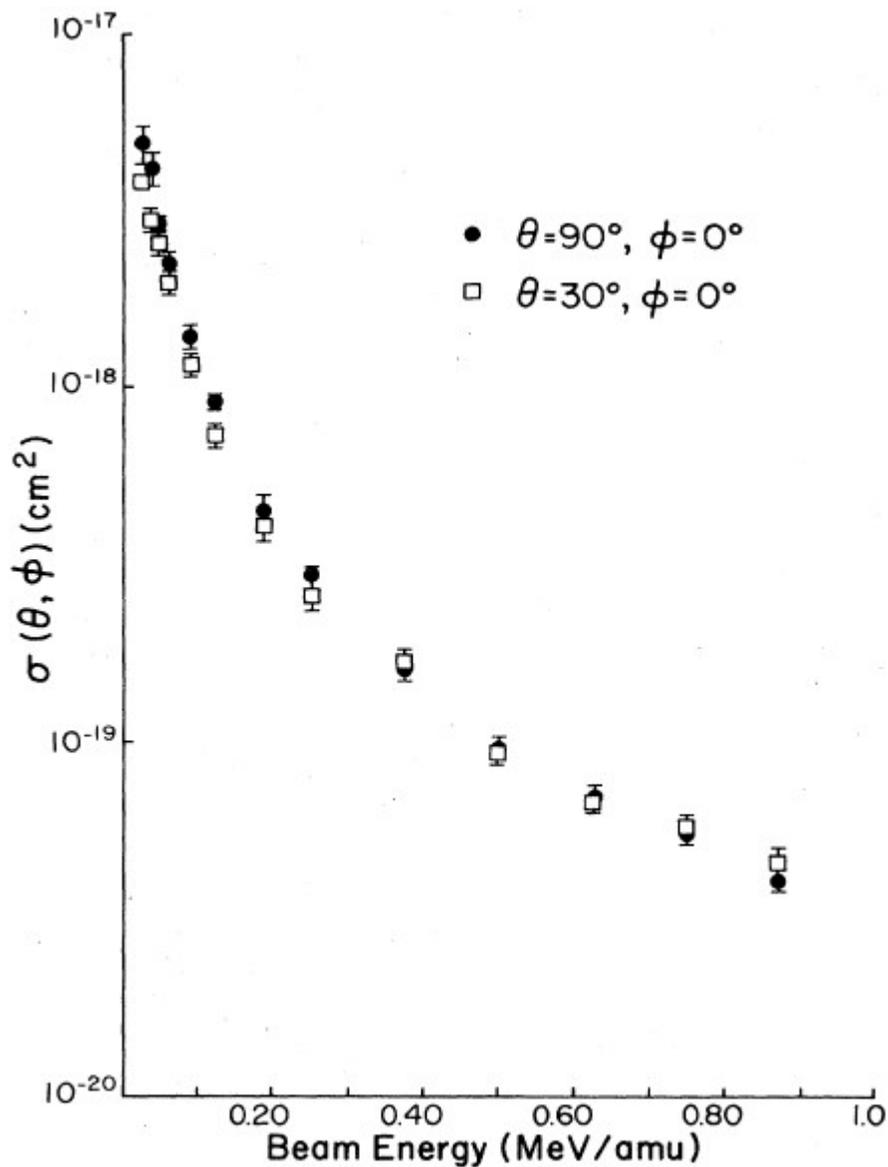
donde  $M$  es cualquier blanco atómico o molecular, se puede obtener el nivel de energía del producto doblemente ionizado  $M^{++}$  a pesar de su estabilidad con respecto a una posible disociación. Bajo ciertas condiciones de experimentación,  $M$  está inicialmente en su estado fundamental. Así el potencial de doble ionización  $I^{++}$  de  $M$  está dado por la ecuación:

$$I^{++} = T - T_0 - T_M - 2T_e - E_{(H^-)}$$

donde  $T_0$  es la energía cinética inicial del  $H^+$ ,  $T_M$  es la energía de retroceso de  $M^{++}$  que es usualmente despreciable (y en esta instancia cercana a los  $10^{-2}$  eV),  $T_e$  es la corrección en la energía cinética de los núcleos rápidos debido a la transferencia de masa que ocurre en la captura electrónica (aquí de 2.2 eV) y  $E_{(H^-)}$  la energía de los estados  $H^-$  producida por la adición de dos electrones al  $H^+$  (en este caso  $H^+$  representa la referencia cero de energía de modo que  $H^-$  en el estado fundamental tiene una  $E_{(H^-)} = 14.35 \text{ eV}$ ).

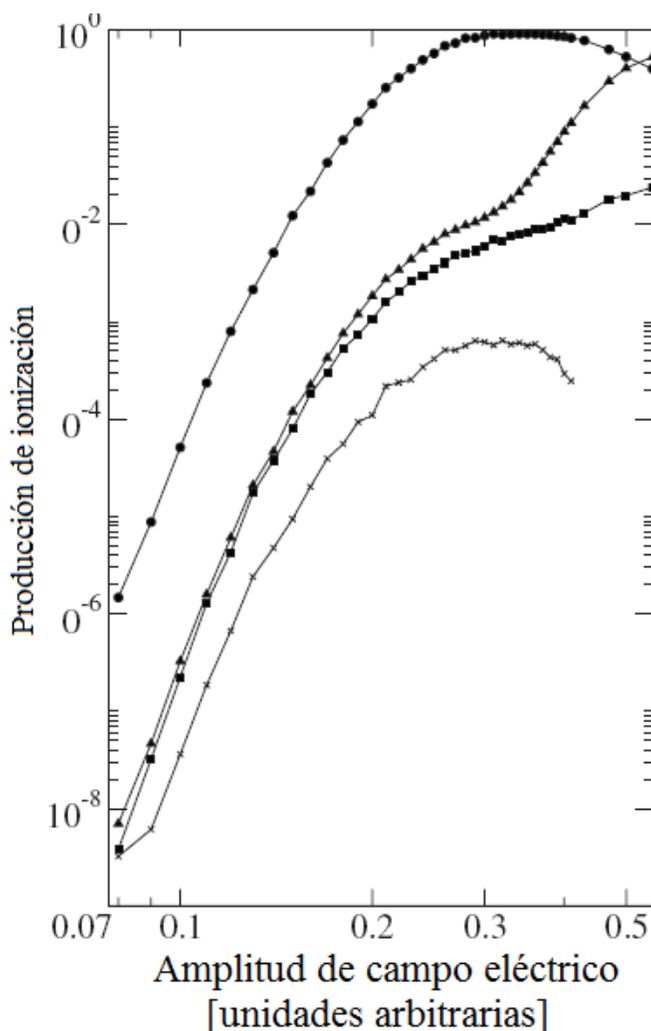
En el campo experimental de las colisiones atómicas y moleculares; fue hasta el año de 1985, que trabajos como los de Edwards<sup>11,12</sup> *et al.* dieron comienzo a las investigaciones de la doble ionización del  $H_2$  que consideraban por primera vez, diversas orientaciones del eje internuclear de esta molécula utilizada como molécula-blanco en las colisiones. Edwards *et al.* en sus experimentos utilizaron el  $He^+$  como ión-proyectil con energías comprendidas en el intervalo de 0.025 MeV/uma a 0.875 MeV/uma y obtuvieron las secciones transversales para la doble ionización del  $H_2$  con su eje internuclear orientado a  $90^\circ$  y  $30^\circ$  con respecto a la dirección del haz de iones-proyectiles  $He^+$ ; los trabajos de Edwards y sus colaboradores reportaron que a bajas velocidades de los proyectiles, hay una dependencia angular aparente para las secciones transversales, siendo mayor tal dependencia para los resultados con el ángulo de  $90^\circ$ . Ver figura 2.

En el presente trabajo de tesis no es posible orientar las moléculas del gas hidrógeno. Las medidas hechas consideran una orientación aleatoria de las moléculas dentro de la celda que las contiene.



**Figura 2.** Sección transversal de la doble ionización del  $H_2$  por iones proyectiles  $He^+$  de 0.025 a 0.875 MeV/uma. El eje internuclear de la molécula  $H_2$  yace en el plano horizontal ( $\phi = 0^\circ$ ) y está orientado a un ángulo  $\theta$  de  $90^\circ$  o  $30^\circ$  respecto a la dirección del haz de iones proyectiles  $He^+$ . Se puede apreciar que a bajas energías de los iones proyectiles, la sección transversal para una orientación a  $90^\circ$  del eje internuclear del  $H_2$  es más grande que la sección transversal correspondiente para  $30^\circ$ . Tomado de la referencia 12.

Los aspectos técnicos, para lograr una determinada orientación del eje internuclear de las moléculas-blancas  $H_2$ , muestran la complejidad y el avance de la técnica experimental en el área de la física atómica. Gracias a progresos como éste, los modelos teóricos pueden ser puestos a prueba y al mismo tiempo disponer de los datos experimentales necesarios para construir la base matemática de una teoría cada vez más completa y precisa que describa las colisiones atómicas y moleculares. Un ejemplo relevante, es el notable caso de la presentación del “*Modelo cuántico para la doble ionización de átomos en campos fuertes de láser*”, fue dado a conocer en el año 2008 por Jakub<sup>8</sup> *et al.* y esto fue gracias en gran medida, a que los avances en la técnica, permitieron la producción de pulsos de luz láser lo suficientemente potentes para poder realizar las orientaciones del eje internuclear de algunas moléculas como el  $H_2$ . En ese modelo, Jakub *et al.* discuten la doble ionización de átomos en pulsos fuertes de luz láser en el que se confina a cada electrón para que se mueva a lo largo de direcciones definidas por la polarización propia del campo láser. Dentro de este modelo, la solución dependiente del tiempo de la ecuación de



Schrödinger permite discutir en detalle la dinámica del proceso de ionización, la formación de paquetes de onda electrónicos así como la evolución de la distribución del momentum de los electrones salientes. La figura 3 muestra los resultados experimentales obtenidos por Jakub *et al.* en sus investigaciones de la doble ionización de átomos por campos eléctricos fuertes que son producidos por muy intensos pulsos de luz láser.

**Figura 3.** Producción de ionización contra fuerza de campo. Tomado de la referencia 8.  
 Círculos: ionización simple.  
 Triángulos: doble ionización no simultánea.  
 Cuadrados: doble ionización simultánea.  
 Diagonales: doble ionización anticorrelacionada

---

Como ya se ha mencionado previamente, el hecho de que un protón pueda capturar a dos electrones y se transforme en un ión negativo durante una colisión con una molécula simple; es un proceso físico de mucho interés cuyos detalles aún son una cuestión abierta en el campo de la *Física Atómica y Molecular*.

La captura por un protón de los dos electrones de la molécula  $H_2$  en el sistema que se examinará:  $H^+ + H_2 \rightarrow H^- + 2H^+$ , ha simplificado el estudio de la captura electrónica por moléculas<sup>13</sup> y el estudio de la disociación molecular inducida por colisión; esto es debido a que, en principio, las distribuciones resultantes del ión  $H^-$  determinan completamente la cinemática de la interacción. Por ejemplo, las distribuciones de energía del  $H^-$  pueden ser utilizadas para medir los potenciales de ionización<sup>14,10</sup>. En este contexto, siguiendo una técnica experimental que proporciona información de manera sencilla y confiable; en el presente trabajo de tesis hemos estudiado la dinámica de la doble captura electrónica por protones, que se deduce de las distribuciones angulares de dispersión del ión  $H^-$ ; obtenidas a partir de las distribuciones de energía dentro del marco de referencia del laboratorio y en el intervalo de 4 a 10 keV de energía de colisión. Adicionalmente, las secciones eficaces totales para el rango de energía de colisión de 1 a 5 keV están reportadas.

---

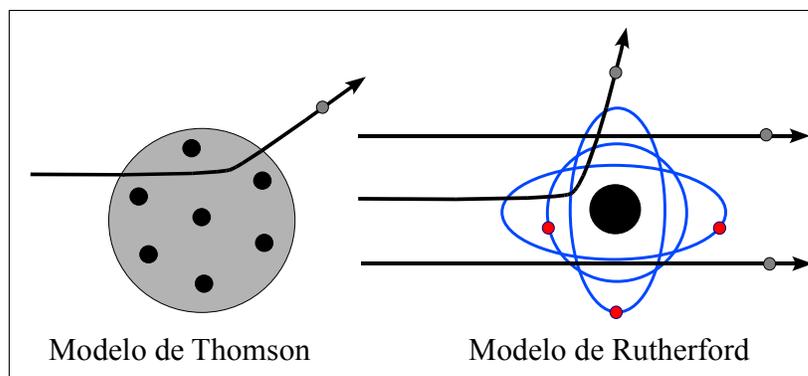
## TEORÍA BÁSICA DE LA DISPERSIÓN Y DE LAS COLISIONES ENTRE PARTÍCULAS ELÉCTRICAMENTE CARGADAS

El tema de las colisiones atómicas es demasiado extenso por lo que abordar sus diversos aspectos con rigor sobrepasaría nuestras intenciones. El hecho de que los detalles de la estructura atómica se hacen menos influyentes a energías de colisión mucho mayores que las energías de enlace entre los átomos (que son del orden de decenas de electronvolts) permite que, aún cuando los efectos cuánticos son de vital importancia en las interacciones que se presentan durante las colisiones, es posible hacer un tratamiento aproximado de la teoría y del experimento considerando argumentos semiclásicos de los fenómenos de la dispersión y de las colisiones atómicas. Para un estudio más detallado de la teoría de las colisiones y de la dispersión se envía al lector a las referencias 15 a 22.

### LA ESTRUCTURA ATÓMICA

El experimento de Rutherford fue crucial en la determinación de la estructura atómica. Los párrafos que siguen son un extracto de su propia comunicación (1911):

*"Es un hecho bien conocido que las partículas alfa y beta sufren desviaciones de sus trayectorias rectilíneas a causa de las interacciones con los átomos de la materia. [...] Parece indudable que estas partículas de movimiento veloz pasan en su recorrido a través de los átomos, y las desviaciones observadas son debidas al campo eléctrico dentro del sistema atómico. [...] Las observaciones de Geiger y Mardsen sobre la dispersión de partículas alfa, indican que algunas de estas partículas deben de experimentar en un solo encuentro desviaciones superiores a un ángulo recto. [...] Un cálculo simple demuestra que el átomo debe de ser asiento de un intenso campo eléctrico para que se produzca una gran desviación en una colisión simple..."*



**Figura 4.** El modelo atómico de Rutherford pudo explicar los grandes ángulos de dispersión de las partículas alfa al colisionar contra átomos. Si bien en los experimentos de colisiones como los realizados por Rutherford, los eventos de grandes ángulos de dispersión son escasos, poner atención en ellos involucró un importante avance en el modelo físico del átomo.

---

En aquella época Thomson había elaborado un modelo del átomo consistente en un cierto número  $N$  de corpúsculos cargados negativamente, acompañados de una cantidad igual de electricidad positiva distribuida uniformemente en toda una esfera central, ver figura 4. Rutherford pone a prueba este modelo y sugiere el actual modelo de átomo:

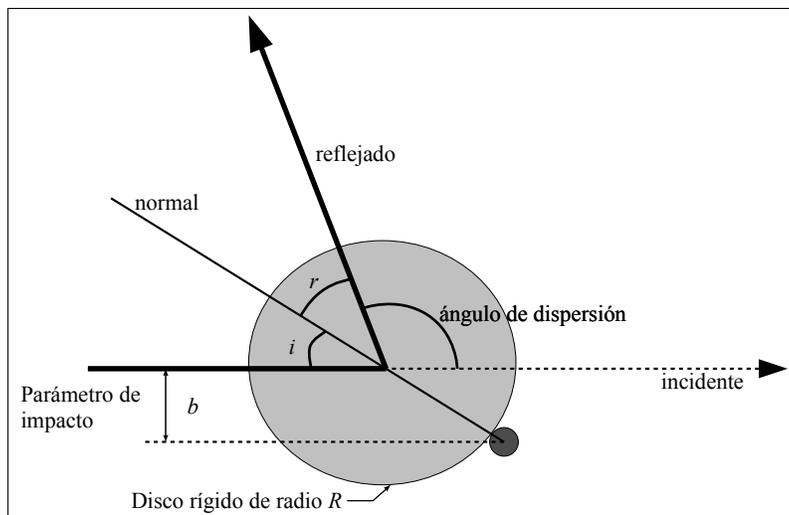
*"La teoría de Thomson está basada en la hipótesis de que la dispersión debida a un simple choque atómico es pequeña y que la estructura supuesta para el átomo no admite una desviación muy grande de una partícula alfa que incida sobre el mismo, a menos que se suponga que el diámetro de la esfera de electricidad positiva es pequeño en comparación con el diámetro de influencia del átomo. Puesto que las partículas alfa y beta atraviesan el átomo, un estudio riguroso de la naturaleza de la desviación debe proporcionar cierta luz sobre la constitución del átomo, capaz de producir los efectos observados. En efecto, la dispersión de partículas cargadas de alta velocidad por los átomos de la materia constituyen uno de los métodos más prometedores de ataque del problema.."*

## PARÁMETRO DE IMPACTO Y ÁNGULO DE DISPERSIÓN

En este apartado se introduce al fenómeno de la dispersión, en particular, los conceptos de parámetro de impacto y ángulo de dispersión, mediante unos modelos simples.

### Obstáculo puntual

Cuando un disco rígido de radio  $R$  choca contra un obstáculo puntual, la dirección de la velocidad de su centro cambia, tal como se muestra en la figura 5.



**Figura 5.** Representación geométrica de una colisión entre un disco rígido y un obstáculo puntual.

Se denomina parámetro de impacto  $b$ , a la distancia entre la dirección de la velocidad del centro del disco y el centro del obstáculo puntual. Si el parámetro de impacto  $b$ , es mayor o igual que el

radio del disco  $R$ , éste no se dispersa continuando con la dirección incidente original. Ahora bien, si el parámetro de impacto es menor que el radio del disco, suponiendo un choque elástico con el obstáculo puntual fijo, el disco se refleja siguiendo una dirección que forma un ángulo suplementario a la suma del ángulo de incidencia  $i$  y reflejado  $r$ .

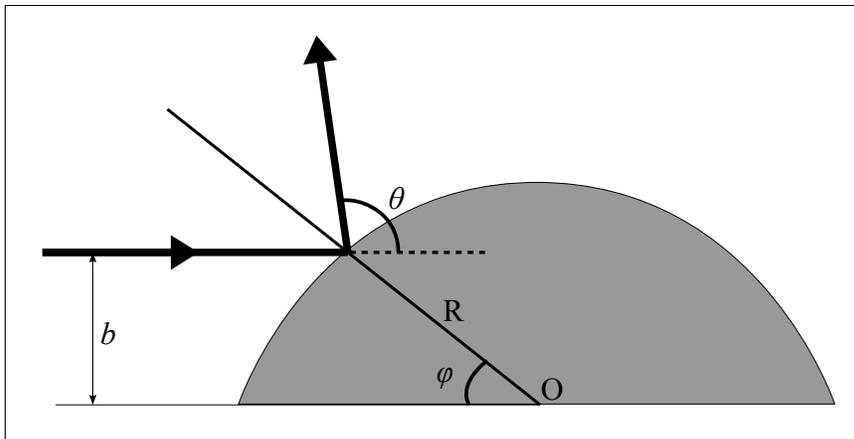
El ángulo de dispersión, como puede deducirse de la figura 5, es:

$$\theta = 180^\circ - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)$$

Del mismo modo que en una reflexión especular, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión,  $i=r$ . La normal en este caso es la recta que une el obstáculo puntual y el centro del disco.

### Obstáculo en forma de semi-disco

Estudiamos ahora, el comportamiento de una partícula que incide sobre un obstáculo fijo en forma de semi-disco de radio  $R$  (ver figura 6). Supondremos que el choque entre la partícula y el obstáculo es perfectamente elástico.



**Figura 6.** Diagrama de una colisión elástica de una partícula con parámetro de impacto  $b$  contra un obstáculo rígido en forma de semi-disco.

El parámetro de impacto  $b$  es la distancia entre la dirección de la velocidad de la partícula y el centro del semi-disco. Como vemos en la figura 6, la relación entre el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión  $\theta$  es similar al caso del obstáculo puntual:

$$\theta = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)$$

## LA DISPERSIÓN EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS Y DEL LABORATORIO

En este apartado se describirá brevemente el proceso de la dispersión situándonos en el Sistema de Referencia del centro de masa (en adelante S.R. del C.M.) o bien en el S.R. del Laboratorio. Es bien sabido que al estudiar las colisiones en una y en dos dimensiones, la descripción desde el S.R. del C.M. es mucho más simple que en el S.R. del Laboratorio.

### Descripción

En una colisión elástica no relativista considérese la siguiente situación: una partícula-proyectil de masa  $m_p$  es dispersada por una partícula-blanco de masa  $m_b$  y defínase la masa reducida de ambas partículas como:

$$\mu = \frac{m_p m_b}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 1.}$$

Con respecto al S.R. del Laboratorio sean  $\vec{r}_p$  la posición del proyectil,  $\vec{r}_b$  la posición del blanco,  $\vec{r}_{cm}$  la posición del centro de masas de ambas partículas y  $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_b$  la posición del proyectil respecto del blanco. Ver figura 7.

La posición de cada una de las partículas respecto del S.R. del C.M. es:

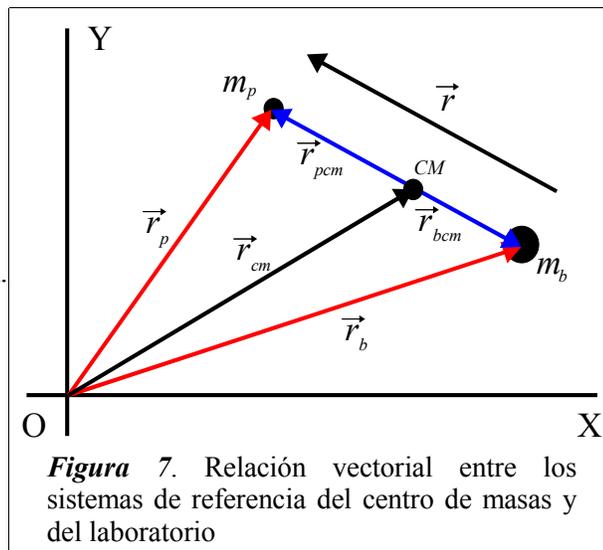
$$\vec{r}_{pcm} = \vec{r}_p - \vec{r}_{cm} = \frac{m_b \vec{r}}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 2}$$

$$\vec{r}_{bcm} = \vec{r}_b - \vec{r}_{cm} = -\frac{m_p \vec{r}}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 3}$$

Las velocidades de las partículas respecto del S.R. del C.M. están relacionadas de forma análoga:

$$\vec{v}_{pcm} = \vec{v}_p - \vec{v}_{cm} = \frac{m_b \vec{v}}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 4}$$

$$\vec{v}_{bcm} = \vec{v}_b - \vec{v}_{cm} = -\frac{m_p \vec{v}}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 5}$$



donde  $\vec{v} = \vec{v}_p - \vec{v}_b$  es la velocidad del proyectil respecto del blanco.

Respecto al S.R. del Laboratorio el vector posición y el vector velocidad *del centro de masas* son respectivamente:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_b \vec{r}_b}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 6}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_p \vec{v}_p + m_b \vec{v}_b}{m_p + m_b} \quad \text{Ecuación 7}$$

En el S.R. del Laboratorio es conveniente expresar a los vectores  $\vec{r}_p$  y  $\vec{r}_b$  (los vectores de posición de la partícula proyectil y de la partícula blanco respectivamente) en términos de la masa reducida  $\mu$ , del vector posición del centro de masas  $\vec{r}_{cm}$  y del vector relativo de posición entre el proyectil y el blanco  $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_b$  (ver figura 7). Para este fin la ecuación 6 la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm} &= \frac{m_p}{m_p + m_b} \vec{r}_p + \frac{m_b}{m_p + m_b} \vec{r}_b \\ &= \frac{\mu}{m_b} \vec{r}_p + \frac{\mu}{m_p} \vec{r}_b \end{aligned}$$

al sustituir por separado en esta última igualdad los vectores  $\vec{r}_b = \vec{r}_p - \vec{r}$  y  $\vec{r}_p = \vec{r} + \vec{r}_b$  obtenemos respectivamente para cada sustitución lo siguiente:

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{cm} + \frac{\mu}{m_p} \vec{r} \quad \text{Ecuación 8}$$

$$\vec{r}_b = \vec{r}_{cm} - \frac{\mu}{m_b} \vec{r} \quad \text{Ecuación 9}$$

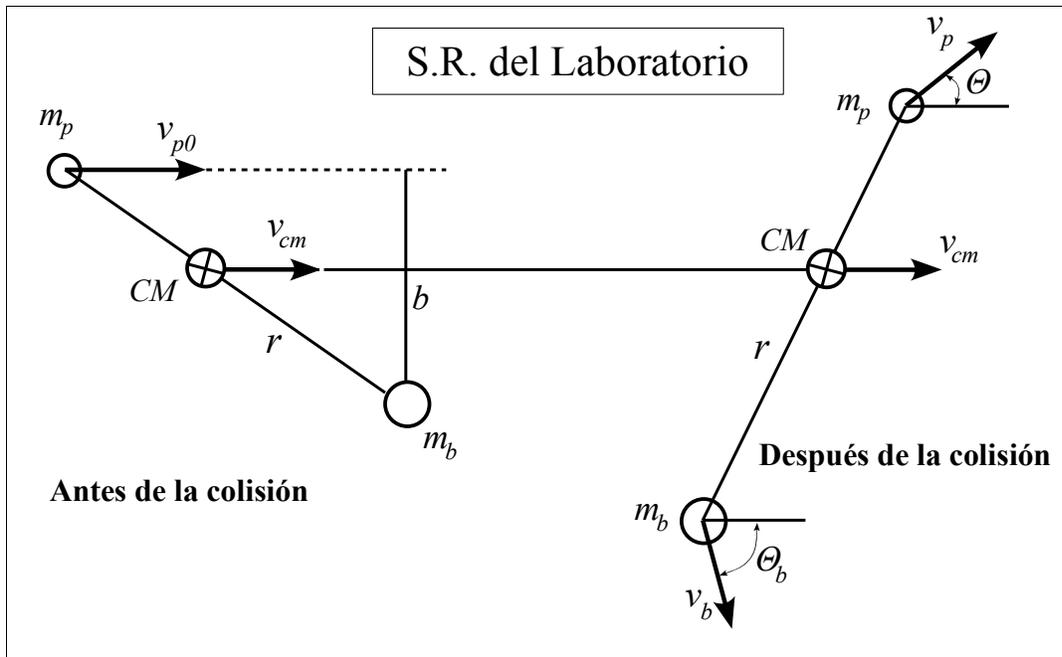
estos dos vectores de posición referidos en el S.R. del Laboratorio, al ser derivados con respecto al tiempo dan expresiones semejantes para la velocidad del proyectil y del blanco dentro del mismo S.R. del Laboratorio:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{cm} + \frac{\mu}{m_p} \vec{v} \quad \text{Ecuación 10}$$

$$\vec{v}_b = \vec{v}_{cm} - \frac{\mu}{m_b} \vec{v} \quad \text{Ecuación 11}$$

## Movimiento del proyectil y del blanco en el S.R. del Laboratorio

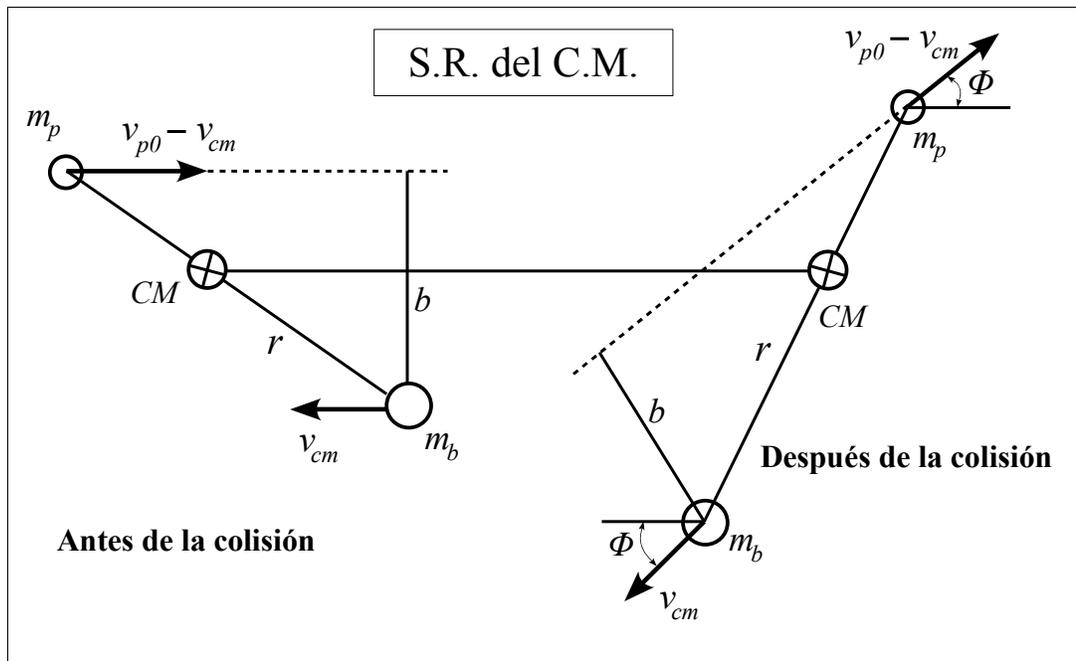
Nuevamente considérese la situación de una partícula-proyectil de masa  $m_p$  que es dispersada por una partícula-blanco de masa  $m_b$ . El blanco está inicialmente en reposo y la velocidad inicial del proyectil es  $\vec{v}_{p0}$  calculada a una distancia muy alejada del blanco para suponer que entre ellas su interacción es nula. Considérese también que la colisión es no relativista y por lo tanto  $|\vec{v}_{p0}| \ll c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. La figura 8 muestra una vista de esta colisión donde el parámetro de impacto es  $b$  y  $\vec{v}_{cm}$  es la velocidad del centro de masas (CM). En el S.R. del Laboratorio, el ángulo de dispersión del proyectil es  $\Theta$  y el ángulo de dispersión de retroceso del blanco es  $\Theta_b$ . Después de la colisión, el proyectil obtiene una velocidad fija  $\vec{v}_p$  y el blanco otra velocidad fija  $\vec{v}_b$ .



**Figura 8.** Vista de la colisión en el S.R. del Laboratorio. El blanco  $m_b$  se encuentra inicialmente en reposo. La distancia  $r$  entre las partículas es mucho mayor que el alcance de la interacción entre ellas. La velocidad inicial del proyectil es  $\vec{v}_{p0}$  y su ángulo de dispersión después de la colisión es  $\Theta$ ; mientras que el blanco retrocede formando un ángulo  $\Theta_b$  con la horizontal.

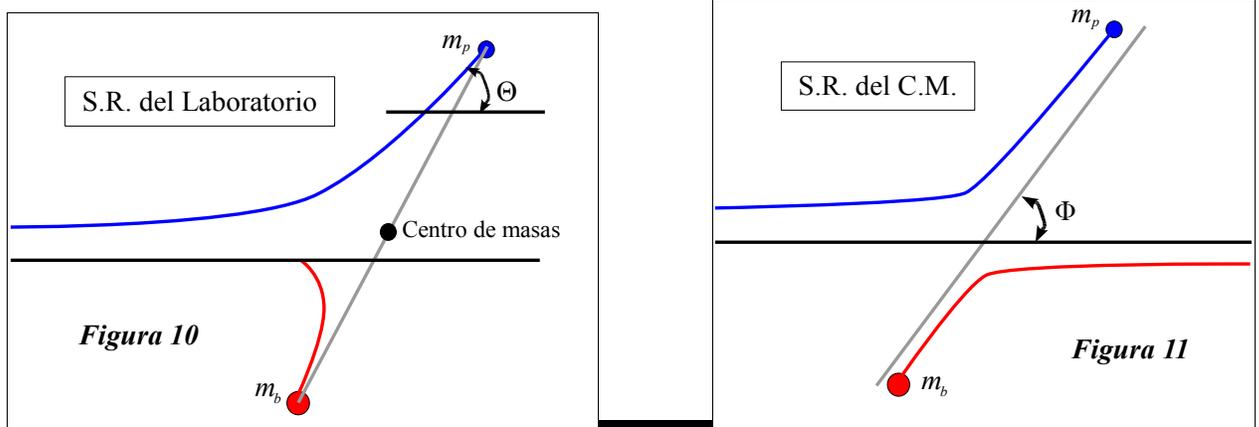
### Movimiento del proyectil y del blanco en el S.R. del C.M.

La misma colisión descrita arriba pero, observada desde el S.R. del C.M. se ilustra en la figura 9. El origen de este sistema de referencia se encuentra en el centro de masa CM de ambas partículas. En este marco de referencia el proyectil y el blanco tienen el mismo ángulo de dispersión  $\Phi$ ; y la velocidad de cada partícula después de la colisión tiene la misma magnitud que tenía inicialmente.



**Figura 9.** Vista de la misma colisión de la **Figura 8** pero ahora mostrada desde el S.R. del C.M. En este sistema ambas partículas son dispersadas con el mismo ángulo  $\Phi$  y sus respectivas velocidades iniciales y finales son las mismas antes y después de la colisión.

En las figuras 10 y 11 se muestran *las trayectorias que recorren ambas partículas durante el proceso de dispersión desde el S.R. del Laboratorio y desde el S.R. del C.M. respectivamente.*



---

## Relaciones entre los ángulos de dispersión en el S.R. del Laboratorio y en el S.R. del C.M.

Al ser conocidos los vectores de posición del proyectil  $\vec{r}_{pcm}$  y del blanco  $\vec{r}_{bcm}$  respecto del S.R. del C.M. (Ecuaciones 2 y 3 respectivamente), y el vector de posición  $\vec{r}_{cm}$  del centro de masas (Ecuación 6); podemos determinar la posición del proyectil  $\vec{r}_p$  y del blanco  $\vec{r}_b$  en el S.R. del Laboratorio. Las ecuaciones vectoriales 2 y 3 pueden reescribirse respectivamente de la siguiente manera:

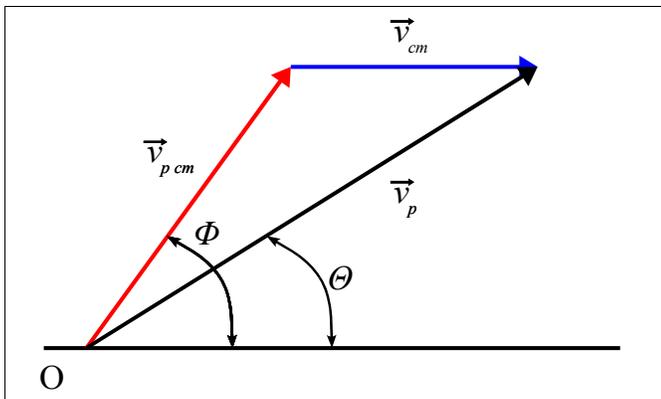
$$\vec{r}_p = \vec{r}_{pcm} + \vec{r}_{cm} \quad \text{Ecuación 12}$$

$$\vec{r}_b = \vec{r}_{bcm} + \vec{r}_{cm} \quad \text{Ecuación 13}$$

Al obtener la derivada de la ecuación 12 respecto del tiempo, la velocidad del proyectil es:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{pcm} + \vec{v}_{cm} \quad \text{Ecuación 14}$$

De esta ecuación es posible deducir el diagrama vectorial de las velocidades *del proyectil* que muestra los ángulos de dispersión según el S.R. del Laboratorio o del S.R. del C.M. Ver figura 12.



**Figura 12.** Diagrama vectorial que ilustra la ecuación:  $\vec{v}_p = \vec{v}_{pcm} + \vec{v}_{cm}$ . Es posible deducir de este diagrama la relación entre los ángulos de dispersión  $\Theta$  ó  $\Phi$  a los que se dispersa el proyectil según el S.R. del Laboratorio o el S.R. del C.M. respectivamente.

Del diagrama vectorial de la figura 12 es claro que:

$$v_p \text{sen } \Theta = v_{pcm} \text{sen } \Phi \quad \text{Ecuación 15}$$

También de la figura 12 podemos deducir que

$$\vec{v}_{pcm} = \vec{v}_p - \vec{v}_{cm} \quad \text{Ecuación 16}$$

y al recordar que la velocidad del proyectil  $\vec{v}_p$  en términos de la masa reducida  $\mu$  está dada

---

por la ecuación 10:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{cm} + \frac{\mu}{m_p} \vec{v}$$

sustituyendo esta ecuación en la ecuación 16 tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{pcm} &= \vec{v}_{cm} + \frac{\mu}{m_p} \vec{v} - \vec{v}_{cm} \\ &= \frac{\mu}{m_p} \vec{v}\end{aligned}$$

al sustituir la última igualdad en la ecuación 15 finalmente obtenemos lo siguiente:

$$\vec{v}_p \text{ sen } \Theta = \frac{\mu}{m_p} \vec{v} \text{ sen } \Phi \quad \text{Ecuación 17}$$

Esta última, es la ecuación que nos permite relacionar las medidas hechas en el S.R. del Laboratorio con las del S.R. del C.M. y poder hacer las transformaciones respectivas entre ambos sistemas de referencia.

Como ya hemos mencionado, el proyectil antes y después de la dispersión tiene el mismo módulo de la velocidad en el S.R. del C.M. las direcciones de la velocidad inicial y final han cambiado solamente un ángulo  $\Phi$ ; además, como el proyectil y el blanco forman un sistema aislado, la energía cinética total antes y después del proceso de dispersión debe conservarse.

En el S.R. del Laboratorio, el blanco se encuentra inicialmente en reposo, y como resultado de la dispersión retrocede. Para que se conserve la energía, el proyectil habrá de experimentar una disminución de su velocidad y energía cinética. Por tanto, como consecuencia del proceso de dispersión hay una transferencia de energía del proyectil al blanco. Al aplicar la conservación de la energía y del momento lineal, en el S.R. del Laboratorio mostrado en la figura 8, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$m_p v_{p0} = m_p v_p \cos(\Theta) + m_b v_b \cos(\Theta_b) \quad \text{Ecuación 18}$$

$$0 = m_p v_p \text{ sen }(\Theta) - m_b v_b \text{ sen }(\Theta_b) \quad \text{Ecuación 19}$$

$$\frac{1}{2} m_p v_{p0}^2 = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_b v_b^2 \quad \text{Ecuación 20}$$

A partir de estas tres últimas ecuaciones es posible deducir la fórmula para encontrar el ángulo de

---

dispersión  $\Theta$  que sufre la partícula proyectil en el S.R. del Laboratorio:

$$\left(\frac{v_p}{v_{p0}}\right)^2 - \frac{2\mu}{m_b} \left(\frac{v_p}{v_{p0}}\right) \cos \Theta - \frac{m_b - m_p}{m_b + m_p} = 0 \quad \text{Ecuación 21}$$

o bien:

$$\Theta = \arccos \left\{ \frac{m_b v_{p0}}{2\mu v_p} \left[ \left(\frac{v_p}{v_{p0}}\right)^2 - \frac{m_b - m_p}{m_b + m_p} \right] \right\} \quad \text{Ecuación 22}$$

Cabe mencionar que bajo la técnica experimental seguida en la realización de este trabajo, la magnitud de la velocidad inicial del proyectil  $v_{p0}$  y de su velocidad final  $v_p$  son calculables teóricamente y experimentalmente medibles; mientras que la masa del proyectil  $m_p$  y la masa del blanco  $m_b$  son consultadas de datos internacionalmente aceptados.

## DISPERSIÓN DE RUTHERFORD

Rutherford obtuvo una fórmula para describir la dispersión de las partículas alfa a través de láminas metálicas muy delgadas sobre la base de su modelo atómico, que estaba de acuerdo con los resultados experimentales. La deducción de esta fórmula sirve, al mismo tiempo, para dar cuenta de la aplicación de leyes fundamentales de la física a un nuevo sistema e introducir nuevas nociones, como la *sección eficaz* (o *sección transversal*) de una interacción, que son de suma importancia en otros aspectos de la *Física Moderna*.

Rutherford empezó por suponer que la partícula alfa y el núcleo son tan pequeños que pueden ser considerados como masas y cargas puntuales. Igualmente, admitió que sólo actúa la fuerza electrostática de repulsión (la partícula alfa y el núcleo están cargados positivamente) entre ellos, y que el núcleo, debido a la masa mucho mayor que posee, no se mueve en su interacción con la partícula alfa. Puesto que la variación de la fuerza electrostática es función de  $1/r^2$ , siendo  $r$  la separación instantánea entre la partícula alfa y el núcleo, la trayectoria de la partícula alfa es una hipérbola que tiene al núcleo en el foco exterior (ver figura 13).

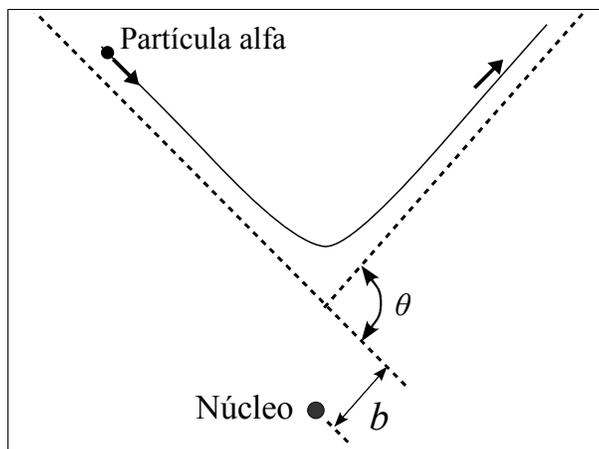


Figura 13. Dispersión de Rutherford

El *parámetro de impacto*  $b$  es la distancia mínima a la que la partícula alfa se aproximaría al núcleo si no existieran fuerzas entre ellos; el *ángulo de dispersión*  $\theta$  es formado por las direcciones asintóticas de aproximación y retroceso de la partícula alfa. El primer paso es encontrar una relación entre  $b$  y  $\theta$ .

Como consecuencia del impulso,  $\int \vec{F} dt$ , dado por el núcleo, la cantidad de movimiento de la partícula alfa varía desde el valor inicial  $\vec{p}_1$  al final  $\vec{p}_2$  en la cantidad  $\Delta \vec{p}$ . Esto es:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \\ &= \int \vec{F} dt \end{aligned} \quad \text{Ecuación 23}$$

la energía cinética de ésta, por hipótesis, se mantiene constante; en consecuencia, la *magnitud* de su cantidad de movimiento también permanece constante, y

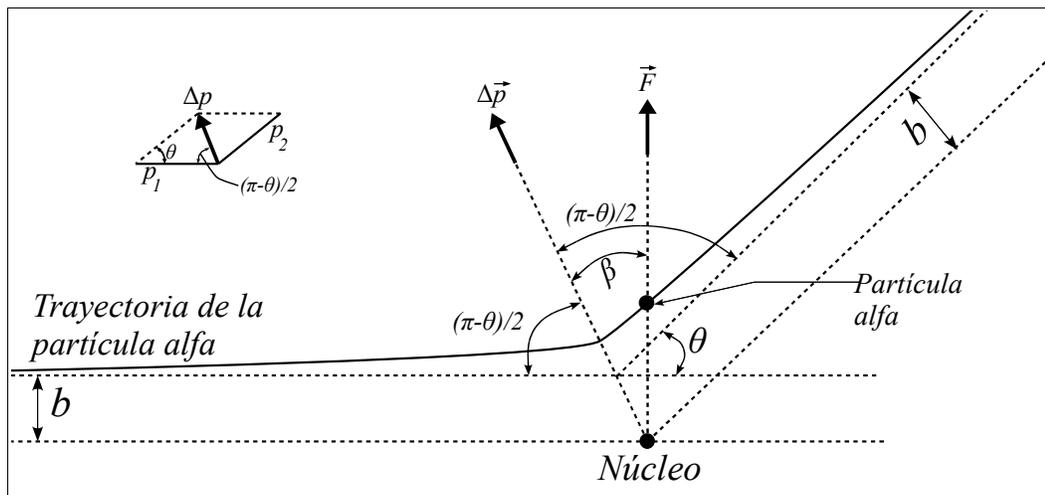
$$p_1 = p_2 = mv$$

en donde  $v$  es la velocidad de la partícula alfa lejos del núcleo. De acuerdo con la ley de los senos, en la figura 14 se ve que,

$$\frac{\Delta p}{\sin \theta} = \frac{mv}{\sin[(\pi - \theta)/2]}$$

y puesto que ,

$$\sin \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$



**Figura 14.** Relaciones geométricas en la dispersión de Rutherford.

---

Tenemos que la variación de la cantidad de movimiento es

$$\Delta p = 2mv \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad \text{Ecuación 24}$$

Puesto que el impulso  $\int \vec{F} dt$  es en la misma dirección que la variación de la cantidad de movimiento  $\Delta \vec{p}$ , su magnitud es

$$\int F dt = \int F \cos \beta dt \quad \text{Ecuación 25}$$

donde  $\beta$  es el ángulo instantáneo entre  $\vec{F}$  y  $\Delta \vec{p}$  a lo largo del recorrido de la partícula alfa. Sustituyendo las ecuaciones 24 y 25 en 23, tenemos:

$$2mv \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \int_0^{\infty} F \cos \beta dt$$

Al hacer el cambio de variable de  $t$  a  $\beta$  notamos que los límites de integración son  $-1/2(\pi-\theta)$  y  $+1/2(\pi-\theta)$  correspondientes al valor de  $\beta$  para  $t=0$  y  $t=\infty$ , y de este modo se tiene:

$$2mv \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \int_{-1/2(\pi-\theta)}^{+1/2(\pi-\theta)} F \cos \beta \frac{dt}{d\beta} d\beta \quad \text{Ecuación 26}$$

El término  $d\beta/dt$  es la velocidad angular  $\omega$  de la partícula alfa alrededor del núcleo (ver figura 14). La fuerza electrostática ejercida por el núcleo sobre la partícula alfa, actúa a lo largo del radio vector que los une. De este modo, no hay par de torsión sobre la partícula alfa y su momento angular  $m\omega r^2$  es constante:

$$\begin{aligned} m\omega r^2 &= \text{constante} \\ &= mr^2 \frac{d\beta}{dt} \\ &= mvb \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{r^2}{vb}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación 26 tenemos,

$$2mv^2 b \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \int_{-1/2(\pi-\theta)}^{+1/2(\pi-\theta)} F r^2 \cos \beta d\beta \quad \text{Ecuación 27}$$

Recordemos que  $F$  es la fuerza electrostática que ejerce el núcleo sobre la partícula alfa, que la carga del núcleo correspondiente a un número atómico  $Z$  es  $Ze$ , y que la de la partícula alfa es  $2e$ . Entonces, tenemos que:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \quad \text{donde } \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

es la constante de permisividad del espacio vacío

y

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0 m v^2 b}{Ze^2} \sin \frac{\theta}{2} &= \int_{-1/2(\pi-\theta)}^{+1/2(\pi-\theta)} \cos \beta d\beta \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

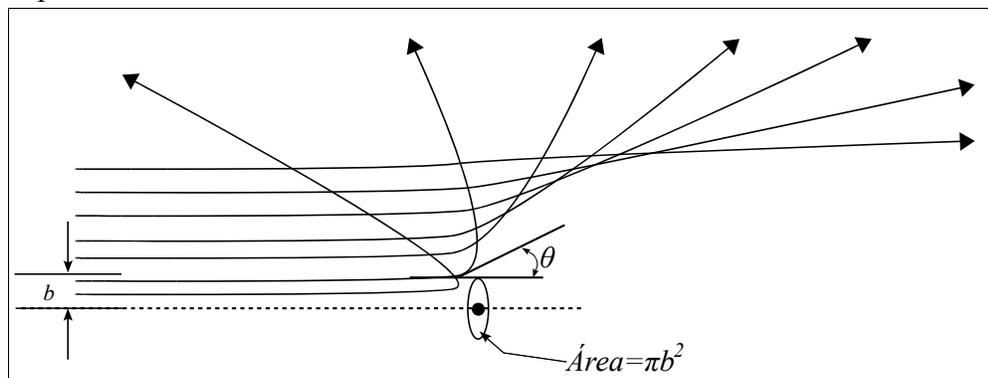
Por lo que el ángulo de dispersión  $\theta$  está relacionado con el parámetro de impacto  $b$  por la ecuación:

$$\cot \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2\pi\epsilon_0 m v^2}{Ze^2} b$$

Es más conveniente determinar la energía cinética de colisión  $E = \frac{1}{2} m v^2$  de la partícula alfa, en lugar de su masa y velocidad por separado. Haciendo esta sustitución finalmente obtenemos:

$$\cot \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 b}{Ze^2} E \quad \text{Ecuación 28}$$

La figura 15 es una representación de la ecuación 28. Al aumentar el valor de  $b$ ;  $\theta$  disminuye rápidamente y es necesario una trayectoria muy próxima al núcleo para que tenga lugar una desviación apreciable.



**Figura 15.** El ángulo de dispersión disminuye al aumentar el parámetro de impacto.

---

La ecuación 28 es conocida como *la fórmula de dispersión de Rutherford en función de la energía cinética E de la partícula proyectil*; esta ecuación muestra la *relación lineal* que hay entre la cotangente de la mitad del ángulo de dispersión  $\theta$  y la energía cinética  $E$  de la partícula proyectil, es decir:

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \propto E \quad \text{Relación 29}$$

Para el caso donde las partículas-blanco son las moléculas de un *gas* (como lo es nuestro caso donde las partículas-blanco son las moléculas del gas hidrógeno  $H_2$ ), la ecuación 28 no puede ser comprobada experimentalmente puesto que no se puede medir el parámetro de impacto que corresponde a un ángulo de dispersión determinado. Es preciso emplear una técnica indirecta de medición.

Toda partícula alfa que se aproxima a un núcleo con un parámetro de impacto que puede ir desde  $0$  hasta  $b$  y con cualquier dirección inicial dentro del área  $\pi b^2$  alrededor del núcleo, será dispersada con un ángulo igual o mayor que  $\theta$  (ver figura 15). El área  $\pi b^2$  recibe el nombre de *sección eficaz* de la interacción. Su símbolo es  $\sigma$  y por tanto:

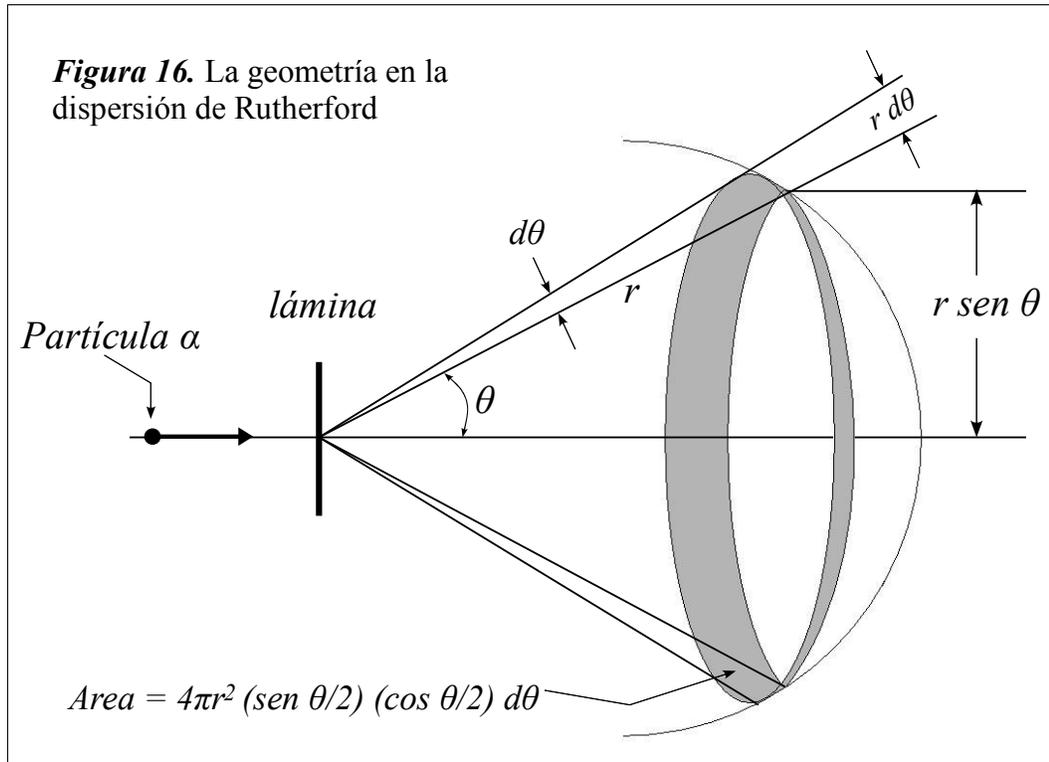
$$\sigma = \pi b^2 \quad \text{Ecuación 30}$$

Hay que tener siempre en cuenta que la partícula alfa incidente sufre dispersión antes de que llegue muy cerca del núcleo y que por tanto, no es necesario que su trayectoria quede contenida en la distancia  $b$ . Si consideramos un lámina metálica de espesor  $t$  que contenga  $n$  átomos por unidad de volumen, entonces el número de núcleos por unidad de área es  $nt$ . Por tanto, un haz incidente de partículas alfa en un área  $A$  encuentra  $ntA$  núcleos. La sección eficaz global, para dispersiones de valor igual o inferior a  $\theta$ , es igual al número de núcleos  $ntA$  multiplicado por la sección  $\sigma$  para la dispersión de cada núcleo; esto es,  $ntA\sigma$ . Por tanto la fracción  $f$  de partículas alfa dispersadas con un valor igual o mayor de  $\theta$  es la relación entre la sección global  $ntA\sigma$  y el área total  $A$ . Esto es:

$$f = \frac{\text{partículas alfa dispersadas en } \theta \text{ o más}}{\text{partículas alfa incidentes}} = \frac{\text{sección eficaz global}}{\text{área}} = \frac{ntA\sigma}{A} = nt\pi b^2 \quad \text{Sustituyendo el valor de } b \text{ de la ecuación 28:}$$

$$f = \pi nt \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \text{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{Ecuación 31}$$

En esta deducción se ha supuesto que la lámina es lo suficientemente fina como para que las secciones eficaces de núcleos vecinos no se solapen y que una partícula alfa deba su desviación solamente al encuentro con un núcleo. En un experimento, un detector mide las partículas alfa dispersadas entre  $\theta$  y  $\theta+d\theta$  (figura 16).



La fracción de partículas incidentes dispersadas se calcula diferenciando la ecuación 31 con respecto a  $\theta$ , dando:

$$df = -\pi nt \left( \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 E} \right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} d\theta \quad \text{Ecuación 32}$$

(el signo menos indica que  $f$  disminuye al aumentar  $\theta$ ) En el experimento original de Rutherford, se colocó una pantalla fluorescente a una distancia  $r$  de la lámina y las partículas dispersadas se detectaron por medio del centelleo que producían. Las partículas dispersadas entre  $\theta$  y  $\theta+d\theta$  forman una zona esférica de radio  $r$  de una anchura  $r d\theta$ . El radio de esta zona es  $r \sin \theta$  y, por tanto, el área  $dS$  de la pantalla barrida por estas partículas es:

---


$$\begin{aligned}
 dS &= (2\pi r \operatorname{sen} \theta)(r d\theta) \\
 &= 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \\
 &= 4\pi r^2 (\operatorname{sen} \theta/2)(\cos \theta/2) d\theta
 \end{aligned}$$

Si durante el experimento un número total de  $N_i$  partículas llegan a la lámina, el número de las partículas dispersadas entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  es  $N_i df$ . El número  $N(\theta)$  que es el que inciden en la pantalla por unidad de área, es el que realmente se mide y vale,

$$\begin{aligned}
 N(\theta) &= \frac{N_i |df|}{dS} \\
 &= \frac{N_i \pi n t \left( \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 E} \right)^2 (\operatorname{ctg} \theta/2)(\operatorname{cosec} \theta/2)^2 d\theta}{4\pi r^2 (\operatorname{sen} \theta/2)(\cos \theta/2) d\theta}
 \end{aligned}$$

$$N(\theta) = \frac{N_i n t Z^2 e^4}{(8\pi \epsilon_0)^2 r^2 E^2 \operatorname{sen}^4(\theta/2)} \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación 33} \\ \text{fórmula clásica de dispersión de Rutherford} \end{array}$$

Según esta ecuación el número de partículas por unidad de área que llegan a la pantalla fluorescente, situada a una distancia  $r$  de la lámina de dispersión, sería, directamente proporcional al espesor  $t$  de la lámina, al número de átomos por unidad de volumen de la lámina y al cuadrado del número atómico  $Z$  de la misma. Por otro lado, sería inversamente proporcional al cuadrado de la energía cinética  $E$  de la partícula y al  $\operatorname{sen}^4(\theta/2)$ , siendo  $\theta$  el ángulo de dispersión. Estas predicciones están de acuerdo con las medidas ya citadas de Geiger y Marsden y llevaron a concluir a Rutherford que estas suposiciones, primeras entre las hipótesis del núcleo atómico, eran correctas. Rutherford se acreditó así como el descubridor del núcleo atómico.

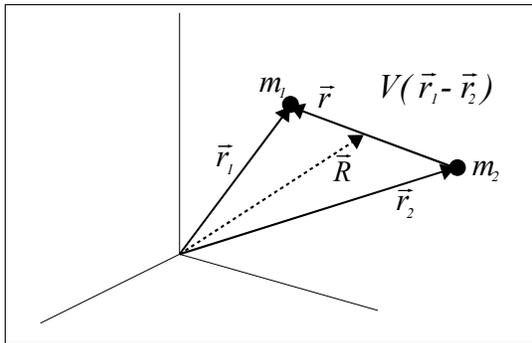
---

## TEORIA CUÁNTICA DE LA DISPERSIÓN ELÁSTICA.

Únicamente con el propósito de ampliar la descripción teórica del fenómeno de la dispersión, se presenta un breve resumen de la teoría cuántica involucrada. Tal resumen se ha extraído de la referencia 18. Para obtener más información teórica sobre el fenómeno de la dispersión de un haz de partículas que son dispersadas por un centro puntual y tratándose de interacciones de tipo coulombianas, es imprescindible hacer consideraciones sobre la *magnitud* del efecto del centro dispersor, es decir, ya que nuestro experimento involucra un estudio dinámico de *dos partículas* en el ámbito de su influencia mutua debida a un potencial eléctrico, es conveniente que consideremos *el problema de dos cuerpos*.

### EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Comencemos con la ecuación de Schrödinger para dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  cuya interacción está descrita por el potencial  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  donde  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son las coordenadas espaciales de las respectivas partículas, ver figura 17.



**Figura 17.** Diagrama para ilustrar el problema de dos cuerpos masivos que interactúan debido a un potencial entre ellos.

Si  $E_{tot}$  denota la energía total del sistema, tendremos:

$$(E_{tot} - H)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \quad \text{Ecuación 34}$$

$$H \equiv \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{Ecuación 35}$$

Definamos las coordenadas del centro de masa y relativas de las dos partículas como  $\vec{R}$  y  $\vec{r}$  respectivamente, es decir:

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad M \equiv m_1 + m_2, \quad \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Al derivar la primera ecuación con respecto al tiempo tenemos el *impulso total*  $\vec{P}$  del sistema:

---


$$\vec{P} \equiv M \dot{\vec{R}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{Ecuación 36}$$

Llamaremos impulso relativo  $\vec{p}$  a:

$$\vec{p} \equiv \mu \dot{\vec{r}} = \mu (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) = \mu \left( \frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2} \right) \quad \text{Ecuación 37}$$

donde  $\mu$  es la llamada masa reducida del sistema de dos partículas. Para asegurar que  $\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2$  sea igual a  $\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}$  se tiene que:

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad \text{Ecuación 38}$$

Observamos que se tendría  $\mu = m/2$  si  $m_1 = m_2 = m$ . Después de un desarrollo algebraico es posible concluir que la suma de las dos energías cinéticas

$$\frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \quad \text{Ecuación 39}$$

es la energía cinética total del sistema. Por lo tanto la ecuación de Schrödinger (34) puede escribirse en coordenadas relativas y de centro de masa como:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, \vec{R}) = E_{tot} \Psi(\vec{r}, \vec{R}) \quad \text{Ecuación 40}$$

si identificamos los operadores  $\vec{p}_1 \rightarrow (\hbar/i)\Delta_1$ ,  $\vec{p}_2 \rightarrow (\hbar/i)\Delta_2$ ,  $\vec{P} \rightarrow (\hbar/i)\Delta_R$  y  $\vec{p} \rightarrow (\hbar/i)\Delta_r$ .

Al intentar una solución por el método de separación de variables y de la forma:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{R}) \equiv \psi(\vec{r}) \Phi(\vec{R}) \quad \text{Ecuación 41}$$

obtenemos que se debe satisfacer lo siguiente:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Phi(\vec{R}) = \text{constante} \times \Phi(\vec{R}) \equiv \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \Phi(\vec{R})$$

---

por lo tanto la solución buscada debe ser:

$$\Phi(\vec{R}) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}}$$

Definimos la *energía intrínseca*  $E$  por:

$$E_{tot} \equiv \frac{\hbar^2 K^2}{2M} + E \quad \text{Ecuación 42}$$

de modo que queda la ecuación para el movimiento intrínseco en coordenadas relativas  $\vec{r}$  como:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(\vec{r}) - E \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad \text{Ecuación 43}$$

Vemos pues, que el problema de dos cuerpos se ha reducido al de *un cuerpo* con masa reducida  $\mu$  dada por la ecuación 38.

## DEDUCCIÓN CUÁNTICA DE LA FÓRMULA DE DISPERSIÓN DE RUTHERFORD

### LA ECUACIÓN INTEGRAL

Partimos de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa  $m_1$ , en el campo de potencial  $V(\vec{r})$  producido por otra partícula de masa  $m_2$ , donde  $\vec{r}$  es la separación entre ambas partículas en una situación similar al de la figura 17. Entonces por la ecuación 43 se tiene:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad \text{Ecuación 44}$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad k^2 \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} E > 0$$

donde hemos eliminado el subíndice  $r$ .

Si este campo de potencial  $V(\vec{r})$  es de *corto alcance*, a saber  $V(\vec{r})=0$  para  $r > d$  una distancia finita, entonces la ecuación 44 se reduce a:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \phi(\vec{r}) &= 0, & r > d \\ \phi(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 45}$$

La ecuación diferencial 44 y su condición de frontera 45 pueden incorporarse en una sola ecuación integral, llamada de Lippman-Schwinger. Las ecuaciones 44 y 45 son del tipo:

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}), \quad (\nabla^2 + k^2) \phi(\vec{r}) = 0 \quad \text{Ecuación 46}$$

Definimos la función kernel  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  tal que

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{Ecuación 47}$$

Entonces, la solución general para la ecuación 46 podrá escribirse como la ecuación integral:

$$\Psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}') \quad \text{Ecuación 48}$$

Como puede verificarse aplicando el operador  $(\nabla^2 + k^2)$  y usando las ecuaciones 46 y 47. En la ecuación 48 la función incógnita  $\Psi(\vec{r})$  aparece también en la integral y por lo tanto se le llama una ecuación de Fredholm de segunda especie. Procedemos a calcular el kernel  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  que por la ecuación 47 debe ser una cantidad sin dinámica, es decir, puramente cinética. La ecuación 47 se escribe entonces como:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= (\nabla^2 + k^2)^{-1} \delta(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= (\nabla^2 + k^2)^{-1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q [e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} ]^{-1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}, \vec{r}')}}{-q^2 + k^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2} \int_{-1}^1 d\mu e^{iq|\vec{r}-\vec{r}'|\mu} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{i}{4\pi^2 |\vec{r}-\vec{r}'|} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iq|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(q-k-i\epsilon/2k)(q+k+i\epsilon/2k)} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 49}$$

donde en el último paso introducimos la infinitesimal real  $\epsilon$  para alejar del eje real los polos en  $q = \pm k$  por una cantidad imaginaria  $\mp i\epsilon/2k$ . Ésta se hará tender a cero, como se puede ver en la figura 18.

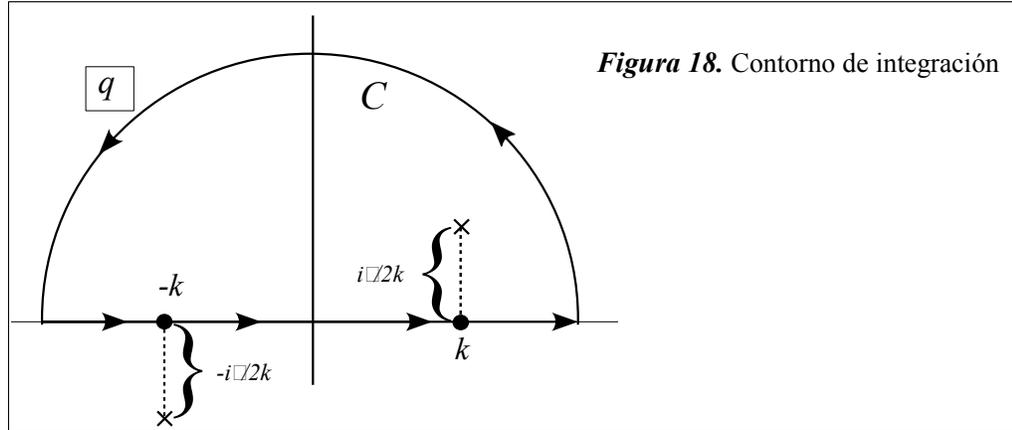


Figura 18. Contorno de integración

Convirtiendo el camino de integración en la ecuación 49 del eje real  $(-\infty, +\infty)$  al contorno cerrado  $C$  de la figura 18, y usando el teorema del residuo, obtenemos el resultado:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{Ecuación 50} \\ \text{( Función kernel )}$$

Al substituir la expresión de la función kernel, en la ecuación 48, llegamos a la ecuación de Lippman-Schwinger:

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') \quad \text{Ecuación 51} \\ \text{Ecuación integral de Lippman-Schwinger}$$

Esta ecuación integral sustituirá a la ecuación diferencial de Schrödinger 44 con la condición 45. Para puntos  $\vec{r}$  en el espacio tales que  $r \gg d$ , donde dijimos que  $V(\vec{r})$  se anula, y por la ley de los cosenos (ver figura 19) el kernel se reduce a:

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\exp(ikr\sqrt{1+[r'/r]^2-2[r'/r]\cos\alpha})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{Ecuación 7.9} \\ \lim_{r \gg d, r'} \frac{e^{ik(r-r'\cos\alpha)}}{r} \equiv \frac{e^{i(kr-\vec{k}'\cdot\vec{r}')}}{r}$$

donde  $\vec{k}' \equiv k \frac{\vec{r}'}{r}$ ,  $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \alpha$

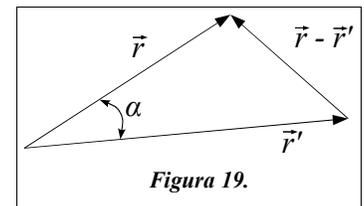


Figura 19.

Sustituyendo esta forma aproximada en la ecuación 51 obtenemos la forma asintótica de la función de onda total como

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \gg d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \equiv \psi_{inc} + \psi_{disp} \quad \text{Ecuación 53}$$

$$f(\theta, \phi) \equiv -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi' | V | \psi \rangle \quad \text{Ecuación 54}$$

Ésta aparece como la superposición de una onda incidente  $\psi_{inc}(\vec{r}) \equiv e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  más una onda dispersada  $\psi_{disp} \equiv f(\theta, \phi) e^{ikr}/r$ . Esta última es una onda esférica saliente multiplicada por la llamada *amplitud de dispersión*  $f(\theta, \phi)$  que por la ecuación 54 contiene toda la dinámica del problema. Veremos a continuación que esta función  $f(\theta, \phi)$  encierra toda la información empíricamente observable. La probabilidad de encontrar la partícula incidente en el punto  $\vec{r}$  mucho antes de la colisión será:

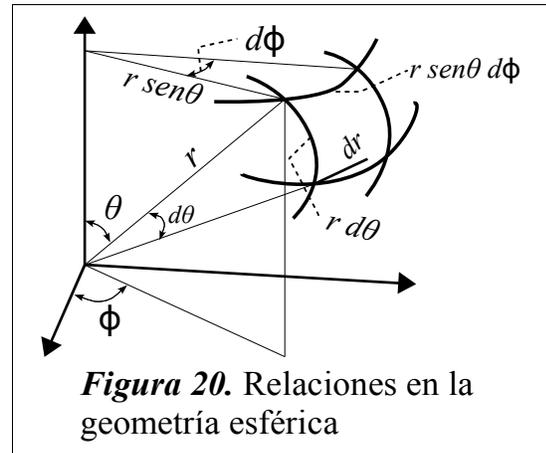
$$|\psi_{inc}(\vec{r})|^2 d^3r = |e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|^2 d^3r = dx dy dz \quad \text{Ecuación 55}$$

Si suponemos incidencia a lo largo del eje  $z$ , el *flujo* o corriente de probabilidad de incidencia por unidad de área y unidad de tiempo será:

$$\frac{|\psi_{inc}(\vec{r})|^2 d^3r}{dx dy dz} = \frac{dz}{dt} = v_i \quad \text{Ecuación 56}$$

donde  $v_i$  es la velocidad de la partícula incidente mucho antes de la colisión. Por otro lado, la probabilidad de encontrar una partícula *dispersada* mucho *después* de la colisión será, por la ecuación 53, (ver figura 20)

$$\begin{aligned} |\psi_{disp}(\vec{r})|^2 d^3r &= |\psi_{disp}(\vec{r})|^2 r^2 dr d\Omega \\ &\equiv |f(\theta, \phi)|^2 dr d\Omega \\ d\Omega &\equiv \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad \text{Ecuación 57}$$



La corriente de probabilidad, por unidad de tiempo, para partículas lanzadas dentro del ángulo sólido  $d\Omega$  no es más que la ecuación 57 dividida por  $dt = dr/v_f$ , donde  $v_f$  es la velocidad final de la partícula mucho después de la colisión. De modo que:

$$\frac{|\psi_{disp}(\vec{r})|^2 d^3 r}{dt} = \frac{|f(\theta, \phi)|^2 dr d\Omega}{dr/v_f} = v_f |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad \text{Ecuación 58}$$

Llamando  $d\sigma$  al cociente del flujo dispersado en  $d\Omega$ , 58, entre el flujo incidente 56 evaluado cuando  $v_f \rightarrow v_i$ , se llama *sección diferencial* a la cantidad:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{v_f |f(\theta, \phi)|^2}{v_i} \xrightarrow{v_f \rightarrow v_i} |f(\theta, \phi)|^2 \quad \text{Ecuación 59}$$

En el último paso nos restringimos a *colisiones elásticas*. La *sección integrada*  $\sigma$  es, entonces,

$$\sigma \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int d\Omega |f(\theta, \phi)|^2 \quad \text{Ecuación 60}$$

## SERIE DE PERTURBACIONES Y APROXIMACIÓN DE MAX BORN

Si el efecto del centro dispersor  $V(\vec{r})$  es leve, podemos realizar una serie perturbativa para la función de onda total  $\psi(\vec{r})$ . Iterando la ecuación integral de Lippman-Schwinger (51), se tiene:

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3 \vec{r}' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') + \dots \quad \text{Ecuación 61}$$

Continuando este proceso se genera en la ecuación 54, la serie infinita:

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &\equiv -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi' | V | \psi \rangle \\ &= \langle \phi' | \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^{n+1} (QV)^n | \phi \rangle \end{aligned} \quad \text{Ecuación 62}$$

La  $Q$  se define aquí de modo que:

$$\langle \phi' | V Q V | \phi \rangle \equiv \int d^3 r \int d^3 r' \phi'^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \phi(\vec{r}')$$

Llamamos *aproximación de Max Born* al primer término de la serie infinita 62. La aproximación de primer orden en  $V$ , o  $n=0$ , es:

$$f^B(\theta, \phi) \equiv -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi' | V | \phi \rangle$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} V(\vec{r})$$

Ecuación 63  
Aproximación de Born

Que no es más que la transformada de Fourier del potencial. Para el caso especial de un potencial dispersor central  $V(\vec{r})=V(r)$  -como es el caso en nuestro experimento-, la integral triple en la ecuación 63 se reduce a la integral siguiente:

$$f^B(\theta) = -\frac{\mu}{\hbar^2 k \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)} \int_0^\infty dr r V(r) \sin\left[2kr \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right]$$

Ecuación 64

pues si  $\vec{k}-\vec{k}' \equiv \vec{q}$  entonces  $q = \sqrt{k^2+(k')^2-2kk'\cos\theta} = k\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2k \sin(\theta/2)$  ya que, por la ecuación 52,  $k=k'$  (dispersión elástica) y  $\theta$  es el ángulo (de la dispersión) entre  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$ .

Notamos que la amplitud de la dispersión  $f^B(\theta, \phi)$  en aproximación de Born (63) es *lineal* en  $V(\vec{r})$ . Pero no será así en el caso general (54) ya que  $\psi$  depende de forma complicada de la interacción. Una ilustración de esta linealidad es el tratamiento de la dispersión de las partículas alfa por un núcleo atómico de carga  $Z$  representado por el potencial central

$$V(r) = V_{nucl}(r) + V_{coul}(r)$$

$$V_{nucl}(r) \equiv -V_0 \theta(a-r), \quad V_0 > 0$$

$$V_{coul}(r) \equiv \theta(r-a) \frac{2Ze^2}{r}$$

Ecuación 65

donde  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  es la función escalón de Heavside. Por la ecuación 64 tenemos,

$$f^B(\theta) = f_{nucl}^B(\theta) + f_{coul}^B(\theta)$$

$$f_{nucl}^B(\theta) = \frac{2\mu V_0 a}{\hbar^2 Q} \int_0^a dr r \sin \frac{Qr}{a}, \quad Q \equiv qa = 2ka \sin \frac{\theta}{2}$$

$$f_{coul}^B(\theta) = \frac{-4\mu Ze^2 a}{\hbar^2 Q} \int_a^\infty dr \sin \frac{Q}{a} r$$

---

Efectuando las integrales esto dará la amplitud y sección diferencial totales, en la aproximación de Max Born de primer orden:

$$f^B(\theta) = \frac{-4\mu Ze^2 a^2}{\hbar^2 Q^2} \left[ \frac{V_0 a}{2Ze^2} \left( \cos Q - \frac{\text{sen} Q}{Q} \right) + \cos Q \right]$$

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = |f^B(\theta)|^2 = \frac{Z^2 e^4}{\mu^2 v^2 \text{sen}^4(\theta/2)} \left[ \frac{V_0 a}{2Ze^2} \left( \cos Q - \frac{\text{sen} Q}{Q} \right) + \cos Q \right]^2 \quad \text{Ecuación 66}$$

donde  $v \equiv \hbar k / \mu$  es la velocidad inicial de la partícula alfa. El paréntesis cuadrado en la última igualdad representa el efecto del tamaño finito del núcleo y tiende a la unidad cuando  $a \rightarrow 0$ . El factor que multiplica este paréntesis es, por lo tanto, la sección diferencial (de Coulomb) debido a un potencial  $Ze^2/r$  a saber:

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{\mu^2 v^2 \text{sen}^4(\theta/2)} \quad \text{Ecuación 67}$$

*fórmula de Rutherford*

Esta es la fórmula de Rutherford para la dispersión de una partícula alfa por un núcleo puntual, obtenida por él con argumentos clásicos.

El hecho de que a partir de razonamientos cuánticos sea posible obtener resultados previamente obtenidos por la teoría clásica de la *física*; representa en este caso, la posibilidad de poder realizar aproximaciones semi-clásicas en el análisis teórico de un experimento y que de otra manera el formalismo matemático de la mecánica cuántica complicaría en un alto grado. La importancia de este hecho radica en que puede obtenerse información de una manera relativamente sencilla y muy confiable del comportamiento físico de procesos complicados que se combinan como lo son en este caso el proceso de dispersión y el proceso de la doble captura electrónica.

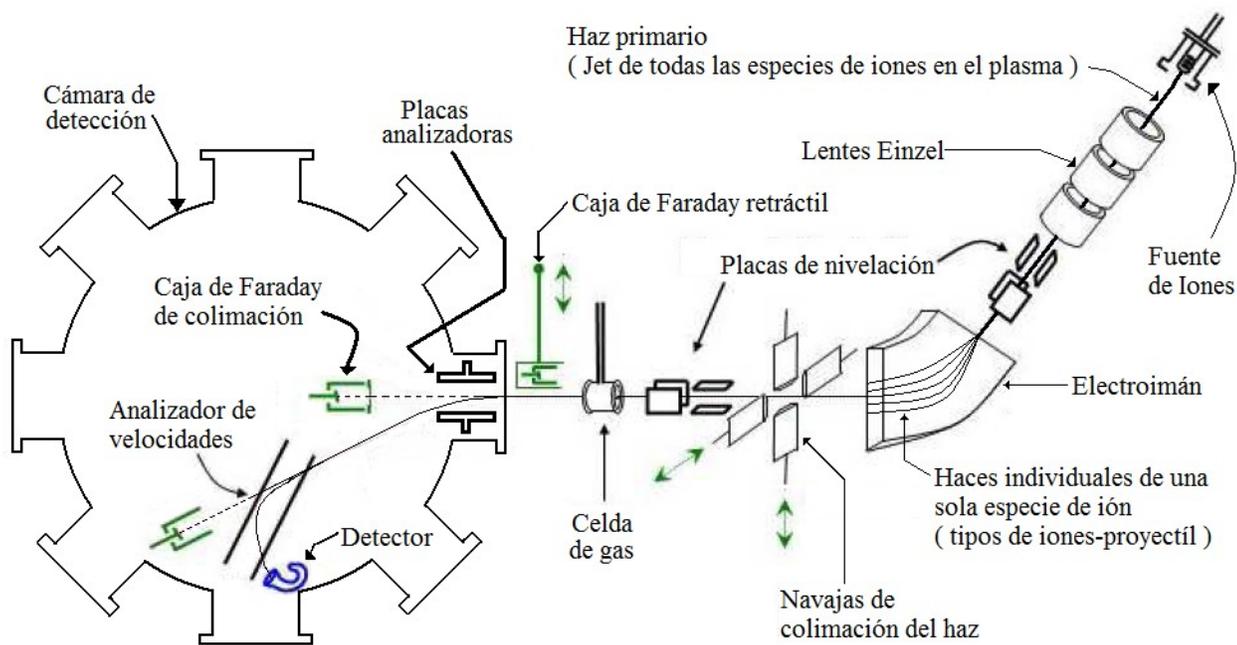
---

## DISEÑO EXPERIMENTAL Y DESARROLLO DEL EXPERIMENTO

### Acelerador electrostático de iones

Un acelerador típico de bajas energías como el que se tiene en el *Laboratorio de Colisiones del Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM*, opera en un intervalo de energía de 1 keV a 10 keV que es un intervalo de energía en el cual, la dinámica de colisiones de iones moleculares simples, se puede investigar con bastante buena precisión<sup>23</sup>. Un diagrama simplificado de todo el acelerador se muestra en la figura 21.

Básicamente, el tipo de experimento que se realiza con este acelerador consiste en la producción de un haz de iones colimados que se hace colisionar con una muestra gaseosa, para luego en base a las medidas, analizar los procesos que son resultado de las colisiones atómicas o moleculares específicas que se investigan.



**Figura 21.** Diagrama del acelerador electrostático de partículas cargadas. Los experimentos de la presente tesis fueron tomados con este aparato que está instalado en el del Laboratorio de Colisiones del Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM, ubicado en la ciudad de Cuernavaca, Morelos.

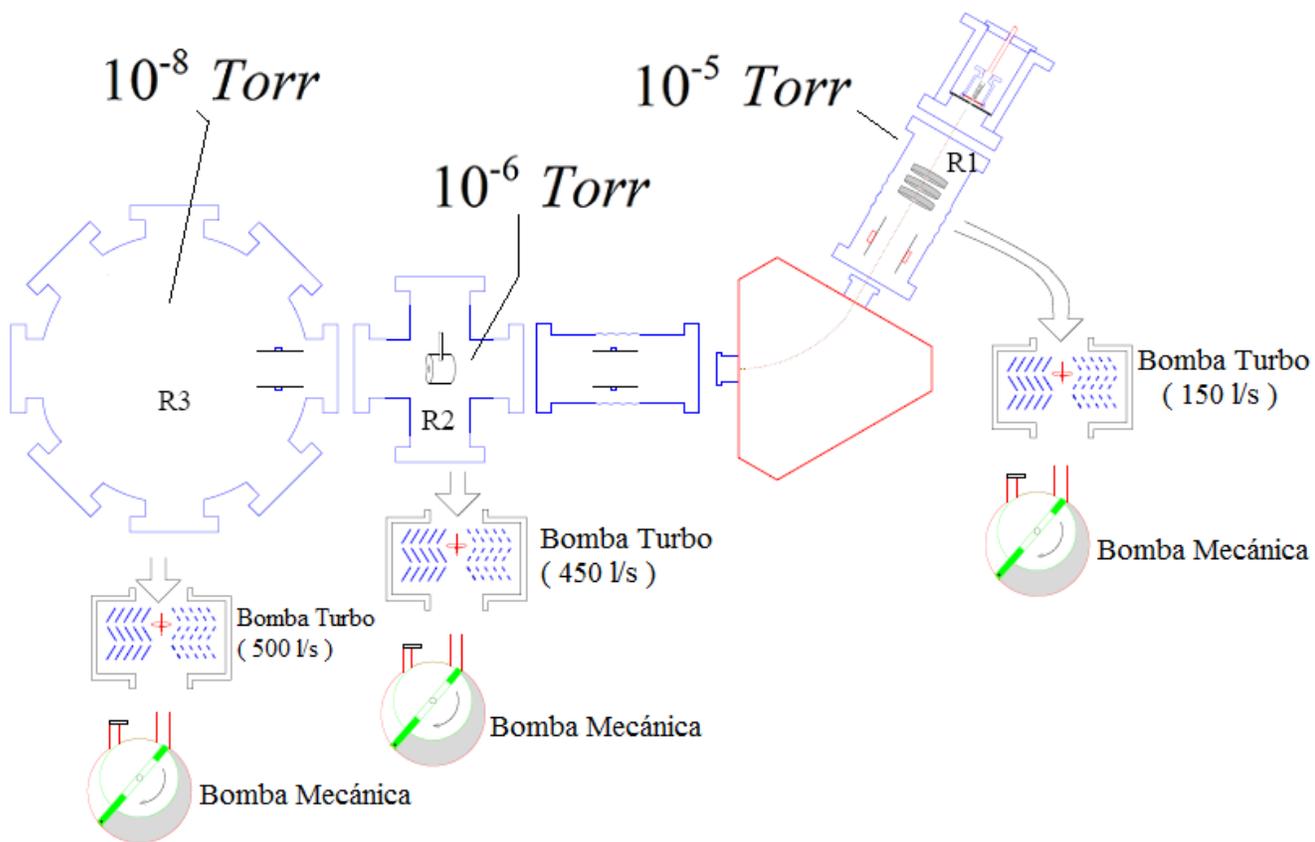
---

## Sistema de vacío

En todos los experimentos de colisiones a nivel atómico o molecular, es de vital importancia que sean realizados dentro de un *espacio vacío* carente de partículas que puedan interferir con las partículas que son el objeto real de nuestro estudio<sup>24,25</sup>. Por *espacio vacío* o simplemente *vacío*, debemos entender que se refiere a un espacio cerrado del que se ha eliminado en la medida de lo posible la presencia de aire u otro gas; teniendo siempre en consideración, que experimentalmente no es posible alcanzar un vacío absoluto carente de toda partícula y que por tanto el vacío es medido en unidades de presión como el *Pascal*.

El sistema de vacío de todo acelerador, debe garantizar que el haz de iones-proyectiles colisione *únicamente* con las partículas que son estudiadas y consideradas como las partículas-blanco; sin que haya colisiones del haz con partículas contaminantes que puedan estar situadas en alguna parte del interior del acelerador. Las colisiones deben llevarse a cabo únicamente dentro de la *celda de gas* entre el ión-proyectil y las moléculas-blanco que en nuestro caso son el protón  $H^+$  y la molécula del hidrógeno  $H_2$  respectivamente.

La presencia de gases contaminantes en el interior del acelerador es primordialmente debida a gases atmosféricos como el oxígeno, nitrógeno, CO, CO<sub>2</sub> así como partículas microscópicas de polvo. A estos gases contaminantes que permanecen atrapados dentro del interior del acelerador y que no pueden ser desalojados por el sistema de vacío se les denomina en su conjunto con el nombre de *gas residual*. En el interior del acelerador el grado de vacío -o presión debida al gas residual- es medido en *Torrs*, siendo  $1\text{ Torr} = 1\text{ mmHg} = (1/760)\text{ atm} = 133.32\text{ Pa}$ . El sistema de vacío de nuestro acelerador, emplea dos clases de bombas de extracción: mecánicas y turbomoleculares; ambos tipos de bombas se utilizan de manera acoplada como lo muestra la figura 22.



**Figura 22.** Sistema de vacío. Es importante señalar, que por el diseño propio del acelerador se tienen tres regiones principales de vacío:

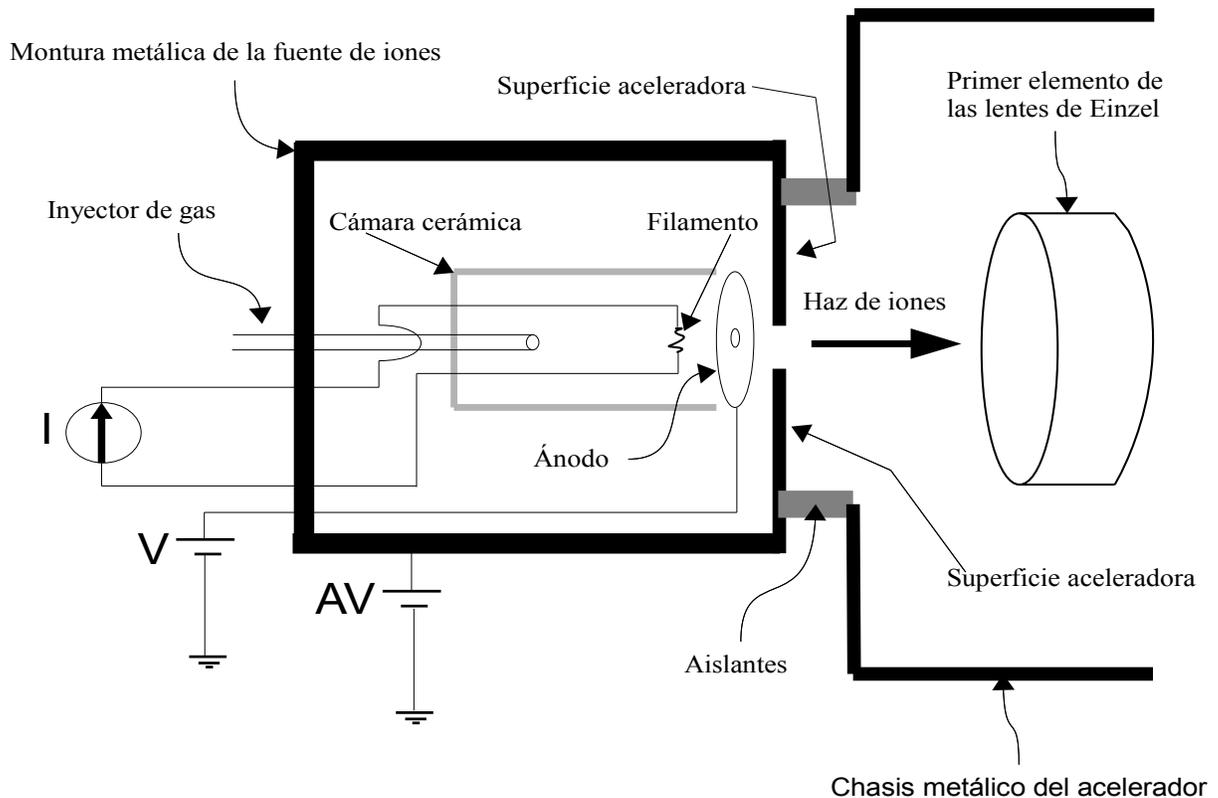
R1: la zona de la *fuentes de iones* a  $10^{-5}$  Torr

R2: la zona de la *celda de gas* a  $10^{-6}$  Torr

R3: la zona de la *cámara de detección* a  $10^{-8}$  Torr

## Fuente de Iones

Comenzaré con la descripción general del trayecto realizado por el haz de iones así como de las principales partes del acelerador: la producción del haz de iones se consigue con una fuente de iones que consiste en un filamento de tungsteno dentro de una cámara cerámica de nitruro de boro en donde se confina una mezcla de gases, ver figura 23.



**Figura 23.** Diagrama sin escala de la fuente de iones con sus principales componentes. La separación entre el ánodo y el filamento es de 3mm, el orificio del ánodo es de 1mm de diámetro. Obsérvese que toda la *Montura metálica de la fuente* está a alto voltaje (AV) y que la *superficie aceleradora* forma parte de ella.

Por el filamento circula una corriente eléctrica que hace que su temperatura aumente y entonces emita electrones y fotones, el proceso de la emisión de electrones se llama *emisión termoiónica* y el proceso de la emisión de fotones se llama *incandescencia*. Estos procesos hacen que los gases confinados dentro de la cámara se ionicen para formar un plasma; este proceso de ionización básicamente se da por los impactos de los electrones emitidos por el filamento contra los átomos de los gases confinados. Hay que señalar que los gases que se inyectan en la fuente determinan la clase de iones que se pueden producir y posteriormente ser utilizados como iones proyectiles para la colisión.

La cámara cerámica de la fuente de iones está tapada con un ánodo perforado —un orificio circular de 1mm de diámetro, por donde sale el haz— al que se le aplica un potencial de 100V respecto del filamento de tungsteno siendo esta diferencia de potencial la que en un principio acelera a los electrones que emite el filamento, haciendo posible que se puedan presentar las

---

colisiones de estos electrones contra los átomos de la mezcla de gases que se inyectaron dentro de la cámara de la fuente, formando de este modo todos los distintos iones que componen nuestro plasma; los iones que escapan por el orificio del ánodo de la cámara de la fuente pueden ser de todas las especies de iones producidas en la fuente y que pueden ser utilizadas como iones proyectiles.

### **Especies de iones producidas por la fuente**

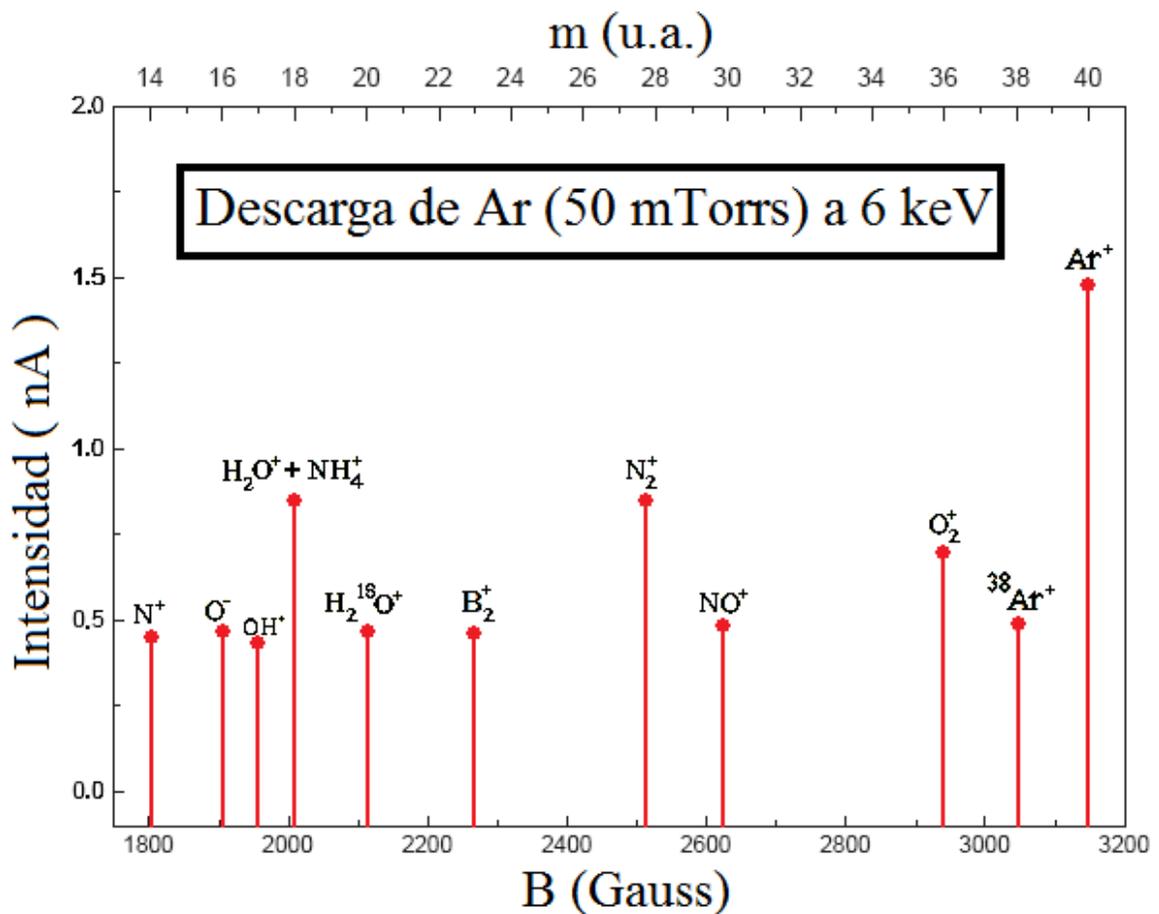
Como ya se mencionó, los gases que se inyecten dentro de la cámara de la fuente de iones determinarán las distintas *especies de iones* que se puedan formar dentro del plasma y puedan ser utilizados posteriormente como iones-proyectiles. En nuestro caso; el objetivo de producir un *haz de protones*, se consiguió al inyectar en la cámara de la fuente una mezcla de gas argón (*Ar*) y de gas hidrógeno molecular ( $H_2$ ). El flujo de ambos gases hacia la cámara de la fuente es controlado por un dispositivo de válvulas de alta precisión que regula la presión de los tanques que contienen el gas argón y el gas hidrógeno por separado. Por medio de este dispositivo regulador de presión, dentro de la cámara de la fuente de iones la presión del gas ionizado -el plasma- es mantenida a unos 110 mTorr. El empleo de una mezcla de argón e hidrógeno para formar el plasma de iones, se debe a que en el caso del gas argón se trata de un elemento químico que es rico en electrones, es inerte y relativamente fácil de ionizar; en el caso del gas hidrógeno ( $H_2$ ) se trata de una molécula que al disociarse dentro de la fuente de iones, suministra una adecuada cantidad de protones para formar un haz lo suficientemente “denso de protones”. Estas propiedades de ambos gases hacen que su combinación sea idónea para la formación de un plasma en condiciones de laboratorio.

Debido a condiciones propias de la experimentación en laboratorio, la producción de un plasma para la formación de un haz de iones siempre conllevará un grado de contaminación que es inevitable. Gran parte de los contaminantes de cualquier sistema de vacío provienen de los gases que se encuentran en la atmósfera terrestre, ya sea como átomos individuales o como compuestos moleculares más complejos; pudiendo en ambos casos ser eléctricamente neutros o cargados. En la Tabla 1 se muestran algunos de los gases que conforman la atmósfera terrestre y cuya presencia dentro de la cámara de la fuente de iones es considerada contaminante.

Los contaminantes del plasma para formar el haz, no sólo provienen del exterior del acelerador. Dentro de la fuente de iones al incandescer el filamento con una temperatura aproximada de  $3000\text{ }^\circ\text{C}$  se presenta una pequeña desintegración propia de los materiales debido a esta elevada temperatura. El *nitruro de boro* (*BN*) del que está hecha la cámara de la fuente de iones, el *acero inoxidable* (*Fe*, *C*, *Cr* y *Ni*) de la montura metálica de la fuente y el propio tungsteno (*W*) del filamento; al desprenderse de las superficies que los contiene entran a formar parte del gas que se ioniza para formar el plasma. En la figura 24, se muestra el espectro de salida de algunos de los iones contenidos en el plasma y que posteriormente son acelerados. La medida del flujo de partículas esta hecho en nano ampers ( $1\text{ nA} = 1\text{ A} \times 10^{-9}$ ).

Nitrógeno	(N)	78.10%
Oxígeno	(O)	20.94%
Argón	(Ar)	0.93%
Dióxido de carbono	(CO <sub>2</sub> )	0.04%
Vapor de agua	(H <sub>2</sub> O)	variable
Neón	(Ne)	0.00182%
Helio	(He)	0.000524%
Kriptón	(Kr)	0.000114%
Hidrógeno	(H <sub>2</sub> )	0.00005%
Ozono	(O <sub>3</sub> )	0.00116%

**Tabla 1.** Componentes principales de la atmósfera terrestre. La presencia de estos gases dentro de la cámara de la fuente de iones constituye una contaminación para la formación del plasma.

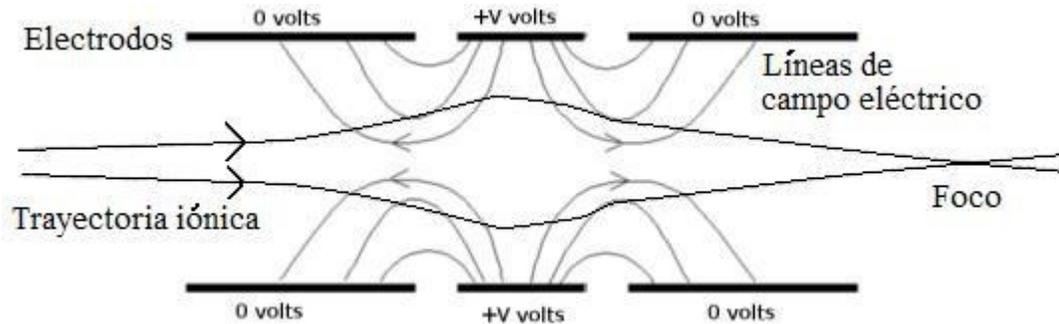


**Figura 24.** Espectro de salida de algunos de los iones contenidos en el plasma que conforma el haz primario. En este caso el espectro corresponde a una energía del haz primario de 6 KeV.

---

## Las lentes electrostáticas de Einzel

El jet de partículas del plasma así producido y que escapan de la fuente de iones, es recibido por el primer elemento del sistema de lentes electrostáticas de Einzel, que se encargan de enfocar este haz de iones primario que contiene todas las especies de iones en un punto situado a 33cm de la fuente de iones. Ver figura 25.



**Figura 25.** Las lentes electrostáticas de Einzel en un corte transversal donde se puede apreciar la forma aproximada del campo eléctrico en su interior y la trayectoria del haz de iones que lo atraviesan.

Las lentes de Einzel se utilizan en la óptica de iones para enfocar las partículas cargadas en vuelo y se componen de tres o más conjuntos de prismas en serie -éstos son los electrodos, que pueden ser de forma cilíndrica o rectangular-, alineados a lo largo de un eje de simetría. Es mediante la manipulación de la intensidad del campo eléctrico en el interior de las lentes, como se pueden enfocar los iones que atraviesan este campo eléctrico. En nuestro acelerador el sistema de las lentes de Einzel consta de tres electrodos cilíndricos de metal en donde el electrodo central es más largo que los dos laterales, siendo en el electrodo central donde se aplica el voltaje para enfocar el haz de iones, mientras que los dos electrodos laterales están aterrizados. Para todas las energías cinéticas que se le pueden imprimir al haz de iones la relación entre el voltaje de enfoque y el voltaje de aceleración siempre es el mismo y para nuestro acelerador es aproximadamente igual a 0.7, es decir:

$$\frac{\text{Voltaje de enfoque}}{\text{Voltaje de aceleración}} \approx 0.7 \quad \text{es decir:} \quad V_{\text{acel}} \approx \frac{V_{\text{enfoque}}}{0.7}$$

De la figura 21 podemos ver que al salir el haz de las lentes electrostáticas de Einzel, el haz es recibido por el primer par de placas de nivelación que proporcionan dos campos eléctricos perpendiculares entre sí y cuyo efecto es el de estabilizar la trayectoria del haz que atraviesa ambos campos eléctricos. Las placas de nivelación operan exactamente igual que un capacitor de placas paralelas cuya descripción se omitirá por motivos de brevedad.

---

## Cálculo de la velocidad de los iones acelerados

Puesto que en la fuente de iones, la separación filamento-ánodo es relativamente pequeña (3mm) y la formación de los iones (positivos y negativos) se da dentro de esta separación; podemos considerar que los iones *positivos* -protones en nuestro experimento- que logran escapar por el orificio del ánodo fueron formados en las cercanías de su orificio de 1mm de diámetro y que por tanto no experimenta el efecto repelente que el propio ánodo ejerce sobre los iones positivos; es decir, podemos suponer que los iones positivos que escapan del orificio del ánodo y del orificio de la superficie aceleradora, lo hacen saliendo de ambos orificios con una velocidad  $v_0$  casi igual a cero:  $v_0 \approx 0$ ; y por lo tanto ingresan al potencial de aceleración  $V_{acel}$  con esta velocidad inicial de  $v_0 \approx 0$ . Esta aproximación es importante saberla para poder realizar el cálculo de la velocidad final  $v_f$  que nuestro acelerador puede darle a los iones del haz cuando éstos finalmente salen del potencial de aceleración  $V_{acel}$  y así poder calcular la energía cinética  $E_k$  que adquieren estos iones que serán utilizados como iones proyectiles.

Como se ve en el diagrama de la figura 26 el potencial de aceleración  $V_{acel}$  de nuestro acelerador, está delimitado por la superficie de aceleración y el primer elemento de las lentes de Einzel llamado *extractor*; a este espacio de separación entre la superficie de aceleración y el extractor de las lentes de Einzel le llamaremos “*zona principal de aceleración*” del acelerador.

Debido al voltaje de aceleración  $V_{acel}$  que se aplica entre la superficie de aceleración y el extractor, dentro del espacio que los separa se establece un campo eléctrico  $\vec{E}_{acel}$  que por la geometría de la disposición de la superficie aceleradora y el extractor puede considerarse un campo eléctrico uniforme en su zona central y cuyos efectos de borde podemos ignorar, siendo la intensidad de este campo eléctrico de aceleración igual a:

$$E_{acel} = \frac{V_{acel}}{S} \quad \text{Ecuación 68}$$

Donde  $S$  es la longitud de separación entre la superficie aceleradora y el extractor y cuyo valor es innecesario medir para efectuar los cálculos.

Cuando dentro del campo eléctrico de aceleración  $\vec{E}_{acel}$  ingresa un ión de masa  $m$  y carga eléctrica  $q$ , este ión experimenta una fuerza electrostática de magnitud dada por:

$$F = qE_{acel} \quad \text{Ecuación 69}$$

Como el movimiento de los iones dentro de este campo eléctrico  $\vec{E}_{acel}$ , es un movimiento uniformemente acelerado -pues  $\vec{E}_{acel}$  es uniforme-, las ecuaciones de la cinemática establecen que la velocidad final  $v_f$  de los iones a lo largo de la distancia  $S$  es:

---

$$v_f^2 = v_0^2 + 2aS \quad \text{Ecuación 70}$$

Donde  $a$  es la aceleración uniforme que experimenta el ión debido a  $\vec{E}_{acel}$  y donde  $v_0$  es la velocidad inicial con la que ingresan los iones positivos al campo  $\vec{E}_{acel}$ ; pero debe recordarse que los iones que ingresan a este campo eléctrico desde el orificio del ánodo, lo hacen ingresando con un velocidad inicial  $v_0 \approx 0$ ; por lo que la ecuación 70 se simplifica a:

$$v_f^2 = 2aS \quad \text{Ecuación 71}$$

Ahora bien, la energía cinética que adquiere el ión cuando finalmente alcanza la velocidad  $v_f$  es:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \text{Ecuación 72}$$

Sustituyendo en esta ecuación, la ecuación 71 obtenemos:

$$E_k = maS \quad \text{Ecuación 73}$$

Reconociendo en esta ecuación que el producto ( $ma$ ) de la masa por la aceleración del ión, es la fuerza electrostática  $F = qE_{acel}$  dada por la ecuación 69, tenemos que:

$$E_k = (qE_{acel})S \quad \text{Ecuación 74}$$

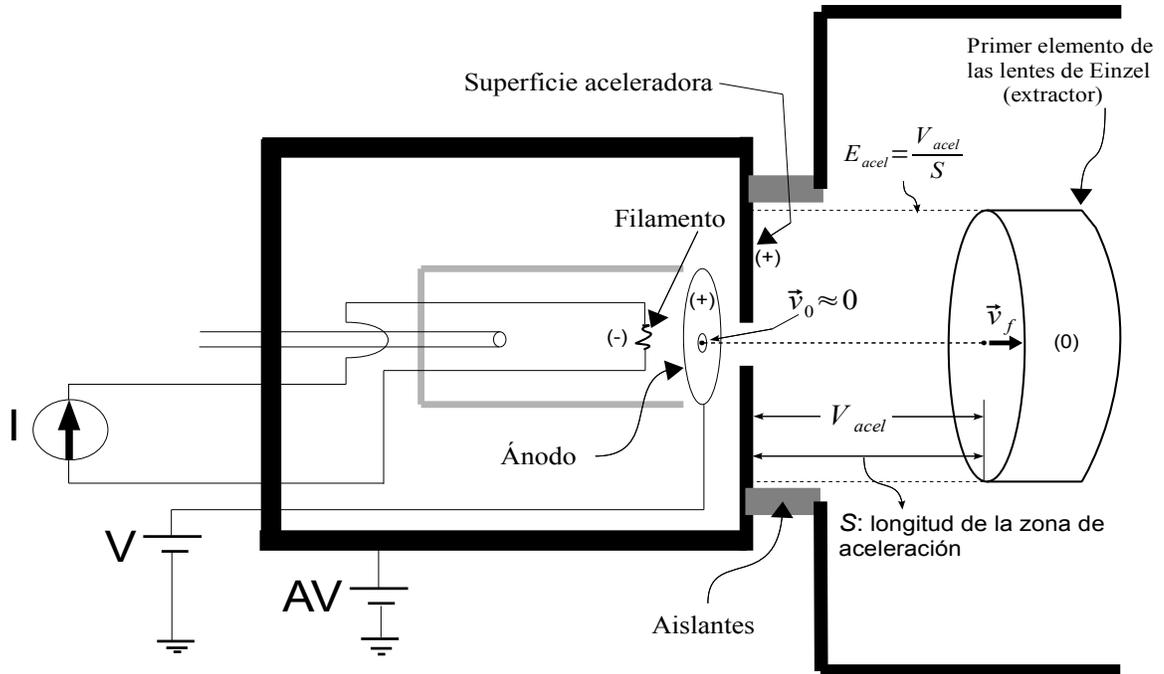
El valor de  $S$  lo podemos obtener de la ecuación 68:  $S = \frac{V_{acel}}{E_{acel}}$  que al sustituir en la ecuación 74, obtenemos que la energía cinética del ión es:

$$E_k = qV_{acel} \quad \text{Ecuación 75}$$

Igualando las ecuaciones 75 y 72 obtenemos la velocidad final  $v_f$  del ión después de ser acelerado:

$$v_f = \sqrt{\frac{2qV_{acel}}{m}} \quad \text{Ecuación 76}$$

Las ecuaciones 75 y 76 son nuestras fórmulas prácticas en el laboratorio con las que efectuamos los cálculos concernientes al proceso de doble captura electrónica que realiza el protón-proyectil cuando colisiona con los átomos-blanco o con las moléculas-blanco y cuyo estudio, descripción e interpretación son los objetivos de esta tesis.



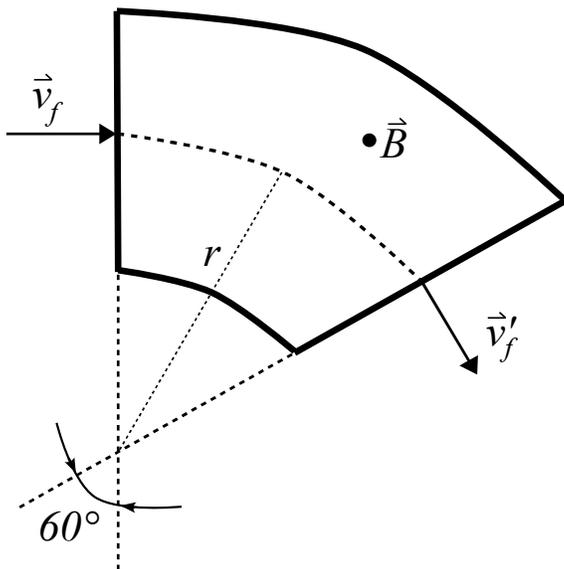
**Figura 26.** Eléctricamente el filamento es negativo, el ánodo es positivo, la superficie aceleradora es positiva también y el primer elemento de las lentes de Einsel es neutro. Con líneas punteadas se muestra la zona principal de aceleración en cuyo interior el voltaje de aceleración  $V_{acel}$  establece un campo eléctrico  $\vec{E}_{acel}$  que es uniforme dentro de esta zona. Debe recordarse que los iones que ingresan a este campo eléctrico desde el orificio del ánodo, lo hacen ingresando con una velocidad inicial  $\vec{v}_0 \approx 0$ . La determinación de la velocidad final  $\vec{v}_f$  que obtienen los iones se basa en el cálculo de la energía cinética  $E_k$  que adquieren los iones debido al movimiento uniformemente acelerado que experimentan debido a  $\vec{E}_{acel}$ . La magnitud de la velocidad final que alcanzan los iones es:  $v_f = \sqrt{\frac{2qV_{acel}}{m}}$  y por tanto la energía cinética que adquieren es:  $E_k = qV_{acel}$ .

---

## Espectrómetro de masas (Electroimán)

Para seleccionar un haz individual compuesto por una sola especie de ión que deseamos utilizar como partícula proyectil; el siguiente paso importante es la identificación y separación de las diferentes partículas que componen el haz de iones primario. Este proceso, se logra haciendo atravesar al haz primario a través de un electroimán que proporciona un campo magnético constante  $B$ , como se muestra en la figura 21. Por la propiedad de separar a las partículas según su masa, al electroimán comúnmente se le llama espectrómetro de masas.

El campo magnético dentro del espectrómetro de masas, defleca las trayectorias de los iones que lo atraviesan, haciendo posible la identificación y selección de los diversos iones por medio de la manipulación y medición del campo magnético  $B$  que se registra en el imán.



**Figura 27.** Diagrama del electroimán donde se muestra la relación vectorial entre el campo magnético  $\vec{B}$  y la velocidad final  $\vec{v}_f$  que adquieren los iones después de ser acelerados y cuyo valor está dado por la ecuación 76. Dentro del campo magnético los iones describen una trayectoria circular con un radio de curvatura  $r$  determinado por la geometría del electroimán. La aceleración centrípeta que experimenta el ión debido a su trayectoria circular es:  $a_c = \frac{v_f^2}{r}$ . Nótese que los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{v}_f$  son perpendiculares entre sí.

### Cálculo de la intensidad del campo magnético necesario para deflecar y separar un haz individual formado por especies iónicas con la misma relación masa-carga ( $m/q$ )

La intensidad del campo magnético  $B$  necesaria para deflecar la trayectoria de un ion en vuelo, es función de la velocidad con la que este ión ingrese al electroimán; no obstante un breve cálculo muestra que esta intensidad de campo magnético  $B$ , también dependerá de la relación masa-carga ( $m/q$ ) propia del ión cuya trayectoria se está tratando de deflecar para su identificación. Según se aprecia en la figura 27, un ión de carga eléctrica  $q$  y masa  $m$  después de ser acelerado, al entrar dentro del campo magnético  $B$  con una velocidad  $v_f$  (expresada por la ecuación 76), experimentará una fuerza debida a  $B$  que está dada por la fuerza de Lorentz:

---

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_f \times \vec{B}) = q\vec{v}_f \times \vec{B} \quad \text{Ecuación 77}$$

donde  $\vec{E}$  es un campo eléctrico que en este caso es igual a cero. Debido a la configuración con la que se ha diseñado nuestro experimento, los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí y por lo tanto la magnitud del vector  $\vec{F}$  en la ecuación 77 la podemos expresar simplemente así:

$$F = qv_f B \quad \text{Ecuación 78}$$

La fuerza  $\vec{F}$  la identificamos como la fuerza centrípeta que experimenta el ión dentro del electroimán debido a la trayectoria circular que el campo magnético le obliga a seguir; esta fuerza centrípeta tiene una magnitud igual a:

$$F = ma_c = m \left( \frac{v_f^2}{r} \right) \quad \text{Ecuación 79}$$

donde  $a_c$  es la aceleración centrípeta y  $r$  es el radio de curvatura de la trayectoria circular. Al igualar las ecuaciones 78 y 79 podemos fácilmente obtener la ecuación que expresa la intensidad de campo magnético necesario para deflectar al ión:

$$B = \frac{v_f}{r} \frac{m}{q} \quad \text{Ecuación 80}$$

La ecuación 80 muestra claramente la dependencia de  $B$  con respecto a la relación masa-carga ( $m/q$ ). Ya que el valor del cociente ( $m/q$ ) puede ser el mismo para distintos tipos de iones; entonces de la ecuación 80, podemos hacer la importante conclusión de que para todas las distintas especies iónicas que tengan entre sí la misma relación masa-carga ( $m/q$ ) son indistinguibles para el electroimán; pues el campo magnético  $B$  para deflectarlos es el mismo.

La incapacidad del espectrómetro de masas de no poder distinguir entre iones con la misma relación masa-carga ( $m/q$ ) pese a ser de distintas especies iónicas; es debido a que todos estos iones adquieren la misma velocidad  $v_f$  al ser acelerados por el voltaje de aceleración  $V_{acel}$  y como el radio de curvatura  $r$  es un parámetro constante fijo y propio del electroimán, entonces en la ecuación 80 la relación  $v_f/r$  también es exactamente igual para todos esos iones cuya relación masa-carga ( $m/q$ ) es igual a pesar de tratarse de iones de especies diferentes. En pocas palabras el electroimán no puede distinguir iones eléctricamente iguales y cuyas masas también son iguales pues la velocidad de todos ellos al entrar al campo magnético  $B$  se supone necesariamente que es la misma.

A partir del cálculo de la fuerza que el campo magnético de intensidad  $B$  ejerce sobre las partículas eléctricamente cargadas que forman el haz de iones, podemos deducir la relación matemática que nos permite identificar las diferentes especies de iones -es decir, las de distinta

---

relación  $m/q$ - contenidas en el haz. Para una partícula cuya carga eléctrica es  $q$  y cuya masa es  $m$  la relación para identificarla es:

$$B = B_0 \left( \frac{q_0 m}{m_0 q} \right)^{1/2} \quad \text{Ecuación 81}$$

En donde  $B_0$  es un campo magnético conocido para deflectar un ión (partícula) de referencia cuyos parámetros de masa  $m_0$  y carga  $q_0$  son conocidos; en nuestro caso la partícula que se toma de referencia es el catión del Argón ( $Ar^+$ ) con  $m_0=39.948u$  y  $q_0=+e$ .

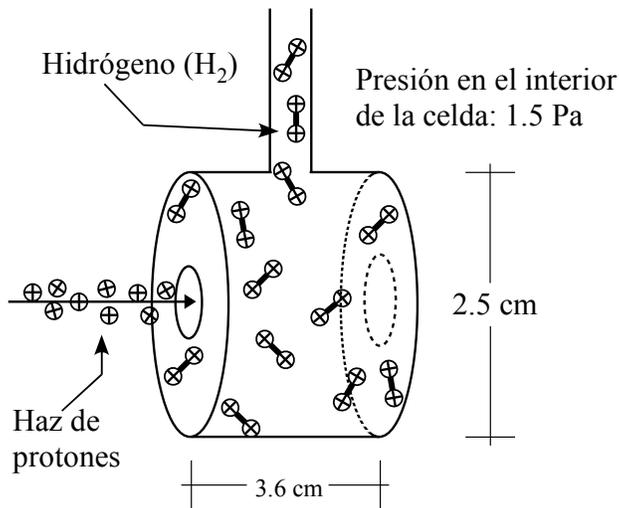
Es importante hacer énfasis que con el espectrómetro de masas, para identificar y seleccionar correctamente los distintos iones que forman el haz, nosotros debemos buscar fijar en nuestros instrumentos la medida de la intensidad del campo magnético  $B$  al valor que se deduce de la ecuación 81 y que es necesario para deflectar el ión de nuestro interés cuyos valores de carga eléctrica  $q$  y masa  $m$  son consultados o deducidos de tablas experimentales.

### Navajas de colimación

Una vez que con el espectrómetro de masas hemos separado los iones que deseamos utilizar como proyectiles, este haz de iones-proyectiles es necesario colimarlos para que su intensidad en toda su trayectoria sea la misma y para disminuir la dispersión del haz debido al *efecto de la densidad de espacio-carga eléctrica*. El procedimiento de colimación del haz consiste, en cerrar uniformemente las cuatro navajas de colimación que están situadas a la salida del espectrómetro de masas hasta que, la intensidad del haz que se mide en la caja de Faraday de colimación es igual a la intensidad del haz que se detecta en la caja de Faraday retráctil situada a la salida de la celda de gas. Ver figura 21. Para el proceso de colimación del haz, se mantiene vacía la celda de gas que contendrá las moléculas de gas hidrógeno ( $H_2$ ) que actuarán de moléculas-blancas en las colisiones. Las cajas de Faraday se describen en el *apéndice* y por el momento basta mencionar que son los dispositivos que se emplean para medir y monitorear la intensidad del haz por medio de la medición de una corriente eléctrica que se registra en los sensores de estas cajas de Faraday.

### Celda de gas

Como ya se ha mencionado antes, la celda de gas es donde se producen las colisiones que dan lugar a las disociaciones atómicas y moleculares. La celda de gas está hecha de acero inoxidable y tiene la forma de un cilindro de  $2.5\text{ cm}$  de diámetro y una longitud de  $3.6\text{ cm}$ , las caras circulares tienen perforaciones de  $1\text{ mm}$  y  $1.5\text{ mm}$  de diámetro por donde entra y sale el haz respectivamente. Ver figura 28.



**Figura 28.** La celda de gas está montada en un manipulador vertical que permite alinear el eje de simetría de la celda con la trayectoria del haz. Es importante que la presión en el interior de la celda de gas se mantenga lo suficientemente baja para garantizar que el protón colisione sólo una vez con la molécula del hidrógeno. La presión en el interior de la celda es medida con un manómetro de alta precisión de tipo Baratrón.

Para poder realizar un sencillo análisis de la física involucrada en la dinámica de la colisión que estamos investigando; es de suma importancia que las colisiones del protón contra la molécula del hidrógeno ( $H_2$ ) se realicen en un *régimen de colisión simple*, es decir; se debe garantizar que el protón colisione solamente una vez con la molécula  $H_2$ . Experimentalmente, la condición del régimen de colisión simple, es posible conseguirla manteniendo el interior de la celda de gas a una presión aproximada de  $1.5 Pa$ , pues ésta es una presión en la que el gas hidrógeno está lo suficientemente enrarecido para que la longitud del *camino libre medio* del protón sea mucho mayor a la longitud de la celda de gas y así, de este modo; garantizar una alta probabilidad de que una colisión que se presente en el interior de la celda de gas, se haya efectuado bajo el régimen de colisión simple.

### Camino libre medio y sección transversal

Por definición, el *camino libre medio* de una “partícula  $A$ ” que se desplaza, es la longitud promedio que ésta puede desplazarse antes de colisionar con alguna otra partícula del medio. Analíticamente, el camino libre medio  $L_s$  se expresa así:

$$L_s = \frac{1}{n \sigma_c} \quad \text{Ecuación 82}$$

donde  $n$  es el número de partículas por  $cm^3$  del medio y  $\sigma_c$  la *sección transversal* de colisión entre la partícula  $A$  y las partículas del medio.

---

En física nuclear, la sección transversal también es llamada *sección eficaz* (*cross section* en inglés) y es una medida que esta relacionada con la probabilidad de interacción entre dos partículas; es una magnitud con unidades de superficie y suele medirse en *barns*:

$1 b = 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Dependiendo de la clase de partículas y del tipo de interacción que éstas tengan entre sí, las secciones transversales pueden variar enormemente yendo desde los 1000 *barns* hasta los 0.001 *barns*. En las colisiones atómicas o moleculares, la sección transversal es un parámetro altamente dependiente de la energía que resulta extremadamente complicado de medir a bajas energías de colisión, que pueden ser energías de 1 *keV* a 10 *keV* y que corresponden al intervalo de energías en el que se efectuó nuestro trabajo de tesis. La dificultad de realizar mediciones de secciones transversales a bajas energías; radica primordialmente en que a bajas energías, la probabilidad de que colisionen las partículas es extremadamente pequeña debido a las dimensiones de escala atómica propia de las partículas, lo cual hace que las colisiones entre las partículas-proyectil y la partículas-blanco rara vez se presenten y su detección sea una complicación técnica difícil de superar en algunos casos.

En general, el camino libre medio de una partícula que atraviesa un entorno gaseoso -como es nuestro caso, con el protón que atraviesa el gas hidrógeno dentro de la celda de gas-, también dependerá de la temperatura y de la presión que tenga el entorno gaseoso. De la ley de Boyle

$P = nk_B T$  donde  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  es la constante de Boltzmann, podemos calcular el valor de  $n$  en función de la presión  $P$  y de la temperatura  $T$  de la celda de gas:

$$n = \left[ \frac{1}{k_B} \frac{P}{T} \right] \quad \text{Ecuación 83}$$

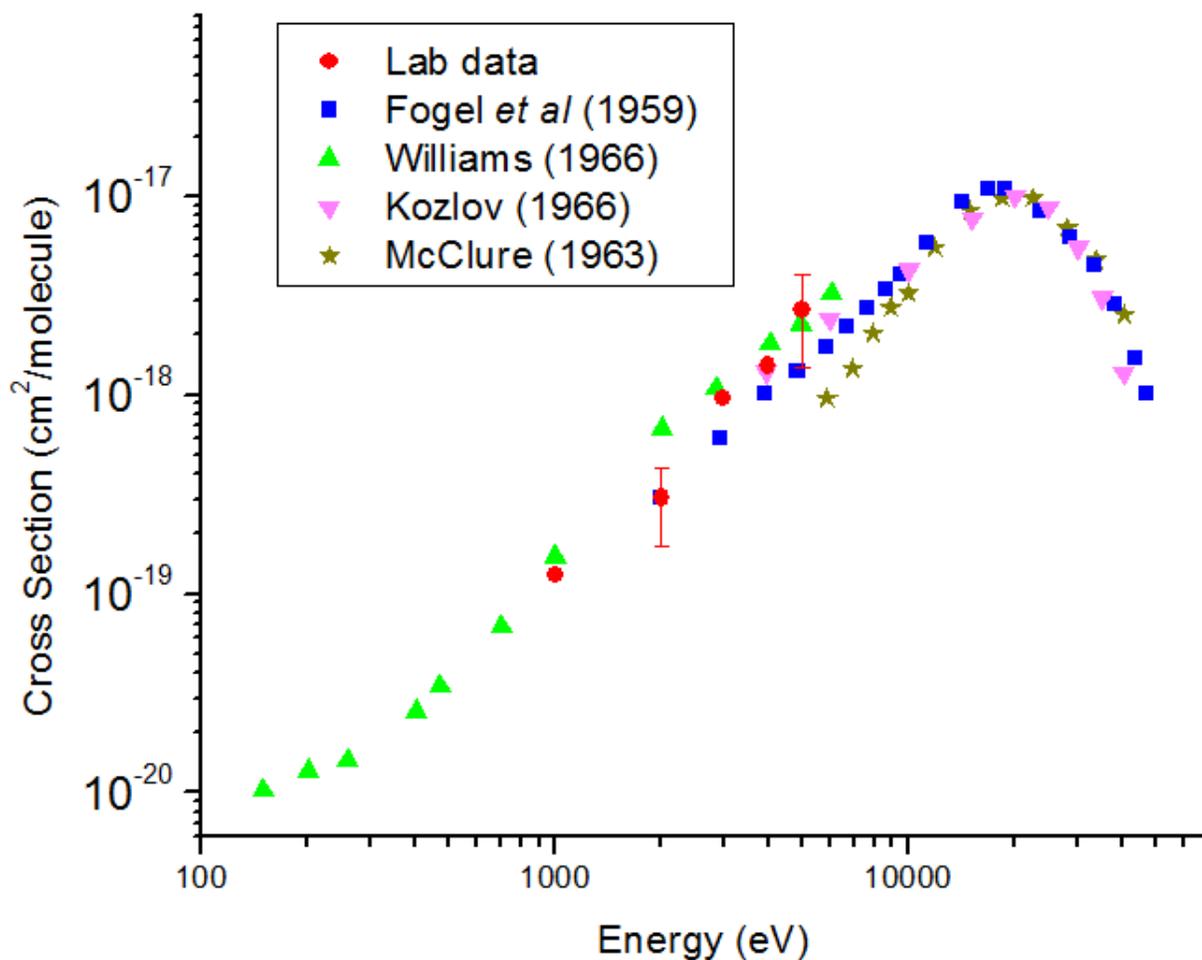
Al sustituir esta ecuación, en la ecuación 82 obtenemos:

$$L_s = \frac{1}{\left[ \frac{1}{k_B} \frac{P}{T} \right] \sigma_c} \quad \text{Ecuación 84}$$

En nuestra investigación bibliográfica se halló que el valor de la sección transversal que reportan diversos autores para la colisión: *Protón*  $\rightarrow$   $H_2$  en el intervalo de 1 a 10 *keV*, va desde

$$\sigma_{c(1 \text{ keV})} \approx 10^{-19} \text{ cm}^2 = 10^{-23} \text{ m}^2 \quad \text{a} \quad \sigma_{c(10 \text{ keV})} \approx 4 \times 10^{-18} \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-22} \text{ m}^2 \quad \text{respectivamente.}$$

Ver Figura 29.



**Figura 29.** Sección transversal reportada por diversos autores para el sistema colisionante:  $H^+ + H_2 \rightarrow H + 2H^+$ . Los puntos rojos (Lab data) corresponden a los valores medidos con nuestro acelerador. Las barras de error corresponden a la desviación estándar.

Al hacer uso de estos valores de la sección transversal  $\sigma_c$  y teniendo en cuenta las condiciones de temperatura y de presión dentro de la celda de gas con las que se realizaron todos nuestros experimentos, podemos con la ecuación 84 calcular los límites para el valor que puede tener el camino libre medio del protón que atraviesa el gas hidrógeno dentro de la celda de gas.

Para una presión dentro de la celda de gas de  $P=1.5 \text{ Pa}$  y una temperatura de  $T = 20^\circ\text{C} = 293.15 \text{ K}$  tenemos:

$$L_{s(1\ keV)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{1.38 \times 10^{-23}\ J/K} \quad \frac{1.5\ Pa}{293.15\ K} \right) (10^{-23}\ m^2)} = 269.698\ m$$

$$L_{s(10\ keV)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{1.38 \times 10^{-23}\ J/K} \quad \frac{1.5\ Pa}{293.15\ K} \right) (4 \times 10^{-22}\ m^2)} = 6.74245\ m$$

Como la longitud de nuestra celda de gas es de 3.6 cm; es claro que esta longitud es mucho menor que cualesquiera de las longitudes que el camino libre medio  $L_s$  puede tomar dentro de este intervalo de:  $L_s = [6.74245\ m, 269.698\ m]$  definido para las energías de 1 a 10 keV. Es por esta razón que podemos estar seguros de garantizar que las colisiones dentro de la celda de gas se realizan bajo el régimen de colisión simple, pues el trayecto del protón dentro de la celda de gas es mucho menor al camino libre medio  $L_s$  en cualesquiera de los casos.

Cabe mencionar que el protón-proyectil en su recorrido a lo largo de todo el acelerador, también atraviesa gas residual con el que no se puede descartar una posible interacción; no obstante, como se muestran en la figura 22 las tres regiones principales del acelerador están a un alto vacío con unas presiones mucho menores que en el interior de la celda de gas, de lo cual podemos deducir en base a los cálculos previos (de  $L_{s(1\ keV)}$  y  $L_{s(10\ keV)}$  los caminos libres medios del protón *dentro de la celda de gas*) que los diversos valores del camino libre medio del protón al atravesar el gas residual de las tres regiones de vacío ilustradas en la figura 22 son mucho mayores y por lo tanto, la interacción del haz de protones con el gas residual dentro de estas tres zonas del acelerador es en extremo mínima. Por ejemplo, de la Tabla 1 podemos ver que la propia molécula del gas hidrógeno cuando se encuentra fuera de la celda de gas es considerada una partícula contaminante; suponiendo que el gas residual de estas moléculas de hidrógeno estuviera en la región de la fuente de iones con la presión especificada en la figura 22, de  $P = 10^{-5}\ Torr = 1.33322 \times 10^{-3}\ Pa$  tendríamos un camino libre medio del protón igual a:

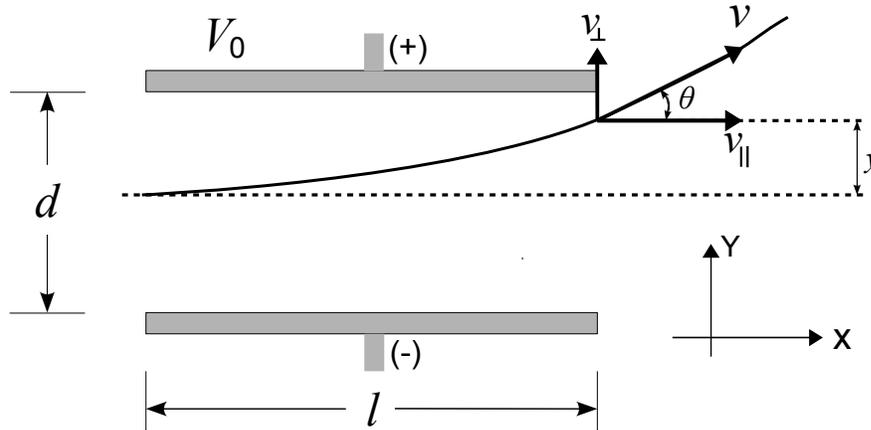
$$L_{s(1\ keV)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{1.38 \times 10^{-23}\ J/K} \quad \frac{1.33322 \times 10^{-3}\ Pa}{293.15\ K} \right) (10^{-23}\ m^2)} = 303436.0421\ m$$

$$L_{s(10\ keV)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{1.38 \times 10^{-23}\ J/K} \quad \frac{1.33322 \times 10^{-3}\ Pa}{293.15\ K} \right) (4 \times 10^{-22}\ m^2)} = 7585.901052\ m$$

donde el parámetro de temperatura de  $T = 293.15\ K$  se ha mantenido constante. Como es evidente apreciar, estos valores para el camino libre medio son muy grandes lo cual implica una menor interacción entre las partículas.

## Placas analizadoras

Después de efectuarse la colisión entre el ión-proyectil y la molécula-blanco, las partículas resultantes salen de la celda de gas y son sometidas a atravesar un campo eléctrico proporcionado por un par de placas paralelas llamadas *Placas Analizadoras*. Las placas analizadoras deflecan la trayectoria de los partículas y las dirigen en dirección al *Analizador de Velocidades*. Ver figura 30



**Figura 30.** Las placas analizadoras consisten en dos láminas metálicas rectangulares de igual longitud  $l$ , separadas una distancia  $d$  entre si. A las placas se les aplica una diferencia de potencial  $V_0$  que establece entre ellas un campo eléctrico que separa las partículas cargadas en función de su energía cinética en un ángulo de deflexión  $\theta$ .

Por el principio de la conservación del momento lineal, sabemos que en un sistema de referencia inercial como lo es el sistema de referencia del laboratorio (SR-L); un proyectil que se fragmenta en vuelo debido a una colisión o a una explosión interna, mantendrá su centro de masas viajando a la misma velocidad que tenía antes de la fragmentación. No obstante, las partículas resultantes de dicha colisión pueden cambiar su vector velocidad tanto en magnitud como en sentido. Es por esta razón; que el efecto del campo eléctrico de las placas analizadoras es la de separar a los iones de acuerdo a su *energía cinética*. Las placas analizadoras al desviar los iones de acuerdo a su energía cinética nos permite nuevamente, la identificación de las partículas.

Del análisis de la figura 30, podemos observar que el movimiento de un ión en la dirección Y cuando atraviesa las placas analizadoras será un movimiento uniformemente acelerado debido a la fuerza  $F=qE$  que el ión de carga  $q$  experimenta debido al campo eléctrico constante  $E=V_0/d$ , siendo su desplazamiento en la dirección Y igual a:

$$y = \frac{1}{2} a t_v^2 \quad \text{Ecuación 85}$$

donde  $t_v$  es el tiempo de vuelo que tarda el ión en atravesar las placas analizadoras y  $a$  es la aceleración uniforme en la dirección del eje Y que está dada por:

---


$$a = \frac{qV_0}{md} \quad \text{Ecuación 86}$$

donde  $m$  es la masa del ión que se está tratando de desviar. Para determinar el ángulo de deflexión  $\theta$  que experimentan los iones, es necesario calcular las magnitudes de las componentes vectoriales  $v_{\parallel}$  y  $v_{\perp}$  de la velocidad de salida de los iones al abandonar las placas analizadoras; para efectuar ésto, partimos del hecho de que después de la colisión el protón-proyectil al entrar a las placas analizadoras no ha disminuido significativamente su velocidad debido a la doble captura electrónica y que por lo tanto la componente paralela  $v_{\parallel}$  de su velocidad de salida de las placas analizadoras es la velocidad original de aceleración que previamente se calculó y está expresada por la ecuación 76, es decir:

$$v_{\parallel} = v_f = \sqrt{\frac{2qV_{acel}}{m}} \quad \text{Ecuación 87}$$

Ahora bien, de la figura 30 podemos visualizar que el ión al entrar en el espacio de las placas analizadoras tiene una velocidad perpendicular inicial igual a cero ( $v_{\perp 0} = 0$ ) y puesto que en esta dirección del eje Y el ión está sujeto a una aceleración uniforme dada por la ecuación 86 tenemos que:

$$v_{\perp} = at_v \quad \text{Ecuación 88}$$

en donde  $t_v$  es el tiempo de vuelo que podemos expresar en función de la velocidad paralela  $v_{\parallel}$  que ya conocemos, teniendo que:

$$t_v = \frac{l}{v_{\parallel}} \quad \text{Ecuación 89}$$

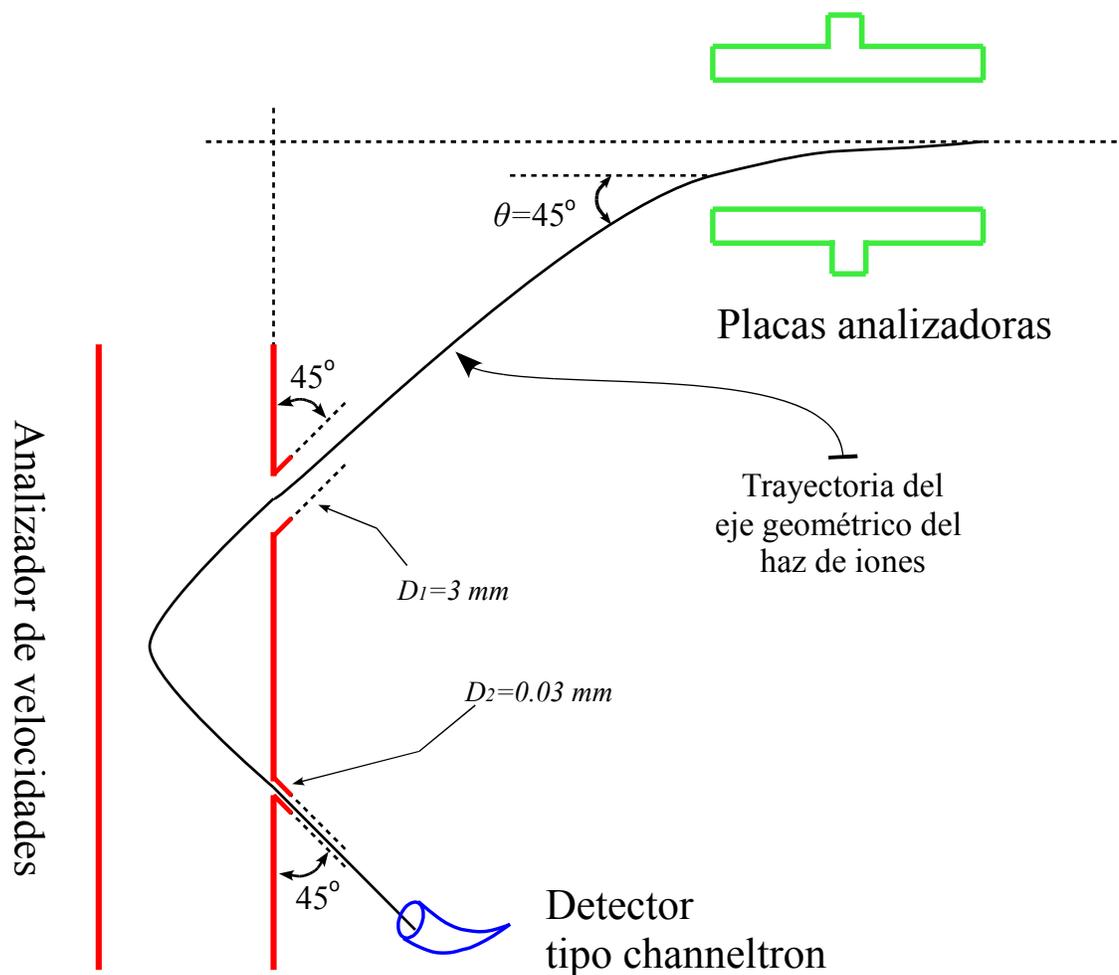
Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación 88 las expresiones de la aceleración  $a$  y el tiempo de vuelo  $t_v$  dados por las ecuaciones 86 y 89 respectivamente, obtenemos:

$$v_{\perp} = \frac{qlV_0}{mdv_{\parallel}} \quad \text{Ecuación 90}$$

Entonces, de la figura 30 se aprecia que el ángulo de deflexión estará dado por:

$$\tan(\theta) = \left( \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) = \frac{l V_0}{2d V_{acel}} \quad \text{Ecuación 91}$$


---



**Figura 31.** Diagrama que muestra la disposición experimental que tienen las placas analizadoras y el analizador de velocidades.  $D_1$  y  $D_2$  son los diámetros de los orificios de entrada y salida respectivamente

Ya que en el arreglo experimental el ángulo de deflexión  $\theta$  siempre debe ser de  $45^\circ$  para que los iones se orienten de forma correcta al orificio colimador de entrada de analizador de velocidades (ver figura 31), de la ecuación 91 podemos entonces deducir que para desviar con las placas analizadoras los fragmentos iónicos que deseamos estudiar, es necesario aplicar entre sus placas un voltaje  $V_0$  igual a:

$$V_0 = V_{acel} \left( \frac{2d}{l} \right) \quad \text{Ecuación 92}$$

---

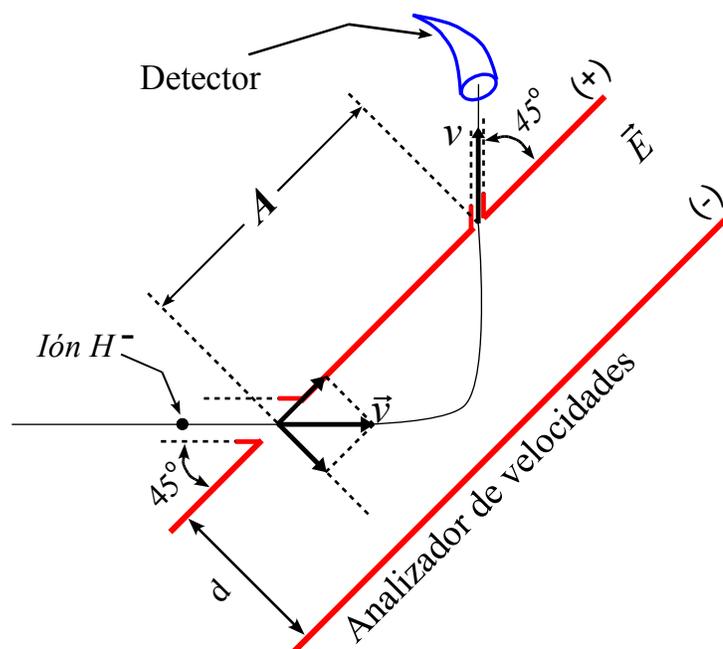
## Analizador de Velocidades

Como se muestra en la figura 31 el analizador de velocidades es un dispositivo que básicamente consiste en dos placas metálicas, una de ellas perforada con dos orificios de distintos diámetros<sup>26</sup>. Al llegar el haz de iones al orificio de entrada del analizador de velocidades; los iones que conforman el haz entran con diversos vectores de velocidad. La función del analizador de velocidades consiste en seleccionar a los iones que tienen el mismo vector de velocidad, permitiendo su libre recorrido por el orificio de salida para llegar finalmente al detector que cuenta el número de dichos iones. La selección de los iones de una misma velocidad, es lograda por el analizador de velocidades por medio de una diferencia de potencial  $V$  entre sus placas; la magnitud de esta diferencia de potencial es controlada por un software hecho con LabView que incrementa la intensidad de  $V$  en una cantidad constante  $\Delta V$  en intervalos de tiempo  $\Delta t$  también constantes, obteniendo de este modo un espectro de velocidades para cada experimento realizado a una energía específica de aceleración.

Con ayuda de la figura 32, podemos realizar el análisis cinemático de la trayectoria parabólica que describe un ion al entrar y salir del analizador de velocidades y podremos deducir que la velocidad del ion al entrar en el analizador de velocidades es:

$$v = \left( \frac{A|q|V}{md} \right)^{1/2} \quad \text{Ecuación 93}$$

donde  $A$  es la separación entre los orificios del analizador de velocidades,  $m$  es la masa del ion,  $q$  la carga eléctrica del ion y  $d$  la separación de las placas paralelas del analizador de velocidades. Obsérvese que  $v$  es la **velocidad final** de la partícula-proyectil después del proceso de dispersión y del proceso de la doble captura electrónica que lo ha convertido en un ion  $H^-$ .



**Figura 32.** Trayectoria de un ion  $H^-$  dentro del campo eléctrico  $\vec{E}$  del analizador de velocidades. Nótese que la magnitud de la velocidad inicial  $v$  con la que entra el ion en el analizador de velocidades es la misma velocidad con la que el ion llega al detector.

---

## Detector de iones

Los iones  $H^-$  son detectados por un detector tipo *channeltron* cuyo funcionamiento es el de un multiplicador de electrones. Como se ve en la figura 33, el channeltron tiene una entrada cónica conectada a un tubo en forma de espiral. Las paredes internas del channeltron están recubiertas por un material semiconductor con un alto coeficiente de emisión de electrones secundarios, es decir emite mas electrones de los que le golpea.

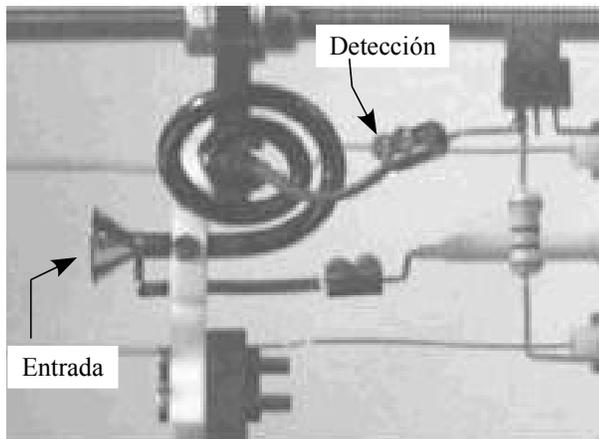


Figura 33. Fotografía del channeltron.

Para la detección de los iones negativos  $H^-$  el cono de entrada es sometido a un alto potencial positivo. Cuando los iones  $H^-$  salen del analizador de velocidades son atraídos por éste potencial positivo del cono. Los iones  $H^-$  que chocan con la superficie de las paredes internas del channeltron liberan electrones que se aceleran al otro extremo del channeltron, estos electrones a su vez también golpean las paredes internas dando lugar a una multiplicación en cascada de los electrones. La corriente eléctrica así generada por el channeltron es lo suficientemente intensa para poder ser medida. A la entrada del channeltron es útil colocar una rejilla metálica con un potencial eléctrico pequeño que sirva para repeler otras partículas contaminantes que estén cercanas a la entrada del channeltron y que no provengan del haz de iones que se trata de detectar. Ver figura 34.

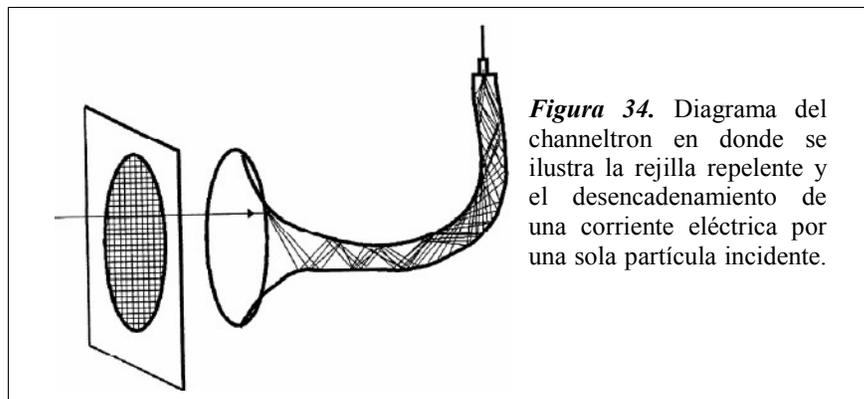


Figura 34. Diagrama del channeltron en donde se ilustra la rejilla repelente y el desencadenamiento de una corriente eléctrica por una sola partícula incidente.

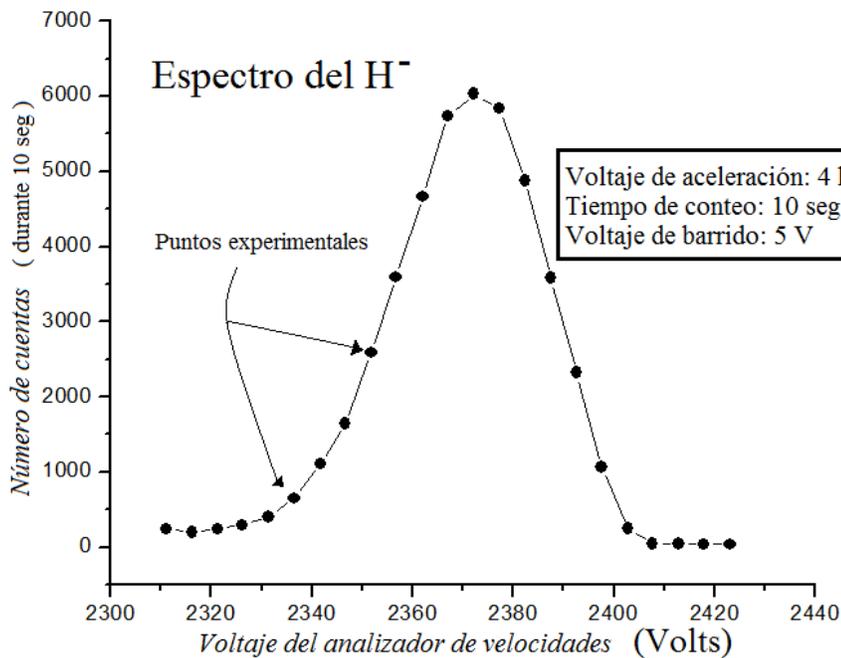
---

## DATOS EXPERIMENTALES

### Obtención de los espectros del ión $H^-$

Los espectros que se obtienen del experimento son los *espectros de la energía cinética* del ión  $H^-$ . Cada punto en estos espectros muestra el número de iones  $H^-$  que se cuentan en un lapso de 10 segundos con un voltaje fijo en el analizador de velocidades de la figura 32. Estos primeros espectros contienen un número finito de puntos experimentales  $n = \{1, 2, 3, \dots, n_f\}$  que típicamente tienen la distribución mostrada en la figura 35. Se dice que son espectros de la energía cinética del ión  $H^-$  porque los voltajes del analizador de velocidades mostrados en el *eje x* pueden ser transformados a la energía cinética que los iones  $H^-$  debieron tener para poder entrar y salir del analizador de velocidades y ser contados por el detector.

Para poder transformar el *eje x* de los voltajes del analizador de velocidades a las energías cinéticas del ión  $H^-$ , basta recordar que el voltaje  $V$  de las placas paralelas del analizador establece un campo eléctrico  $E = V/d$  donde  $d$  es la separación de las placas del analizador. Sabiendo la magnitud de este campo eléctrico  $E$ , podemos utilizar la ecuación 93 para calcular la velocidad  $v$  que debieron tener los iones  $H^-$  que lograron *entrar y salir* del analizador para ser detectados. Ya conocida la velocidad  $v$  de los iones  $H^-$  su energía cinética  $K = \frac{1}{2}mv^2$  se calcula sabiendo su masa  $m = 1.00794u$ . Cabe mencionar que con la misma ecuación 93 es posible transformar el *eje x* de los espectros (voltaje del analizador de velocidades) a las *velocidades del ión  $H^-$*  en vez de su energía cinética y así obtener *espectros de velocidades del ión  $H^-$* . Con el fin de simplificar el análisis se ha optado por mantener los espectros en función del voltaje.



**Figura 35.** Ejemplo típico de un espectro de energía del  $H^-$  obtenido directamente de los instrumentos de conteo y registro. En este caso  $n_f = 23$ . Para registrar cada punto experimental; cada 10 segundos los instrumentos incrementan el voltaje del *analizador de velocidades* en 5 V y en ese voltaje, el *detector de iones  $H^-$*  cuenta el número de iones durante los 10 segundos que dura cada registro de cada uno de los puntos experimentales.

---

## Ajuste De Datos Experimentales

### Normalización de los espectros del $H^-$ respecto a la intensidad del haz de iones.

Al examinar el diseño propio del acelerador y de cada uno de sus elementos, podemos deducir de manera evidente; que debido a imperfecciones inherentes en la producción de un haz iónico y del sistema de vacío dentro del acelerador, es muy importante considerar las variaciones de la intensidad del haz durante los experimentos. Considerar esta variación del haz es especialmente importante al momento de analizar los datos experimentales que representan los espectros medidos. El tratamiento estadístico para considerar el efecto de la variación de la intensidad del haz durante los experimentos, es el tratamiento de *normalización de espectros discretos*.

Debido a que son los parámetros de la *intensidad del haz* y la *presión de la celda de gas*, los dos parámetros físicos que más influyen en el conteo de los iones representados en los espectros experimentales como el mostrado en la figura 35; es por esta razón que, en nuestro caso las normalizaciones de los espectros deben realizarse respecto al parámetro de intensidad del haz y respecto al parámetro de la presión de la celda de gas considerando sus magnitudes iniciales y sus magnitudes finales cada vez que se realiza el experimento. Es importante señalar que en el caso de la normalización con respecto a la presión; se considera que es la presión dentro de la celda de gas; la que sigue una variación lineal; mientras que en el resto de todo el interior del acelerador la presión -o vacío- se mantiene constante según se muestra en la figura 22. Como ya se ha mencionado antes, durante los experimentos realizados se intentó mantener una presión promedio dentro de la celda de gas igual a: 1.5 Pa.

Las normalizaciones respecto a la intensidad y la de respecto a la presión; son ambas muy similares entre sí y consisten, básicamente, en hallar una función que proporcione un factor numérico de corrección para cada punto experimental  $n = \{1, 2, 3, \dots, n_f\}$  registrado en los espectros que se obtienen directamente de los instrumentos. Esta función de normalización que proporciona el factor numérico de corrección se obtiene, partiendo de la suposición que tanto la corriente eléctrica -que representa la intensidad del haz- como la presión dentro de la celda de gas, siempre siguen una *variación lineal* durante el tiempo que dura el experimento. Por ejemplo para la normalización respecto a la intensidad  $I$  del haz, la función de normalización debe tener la forma :

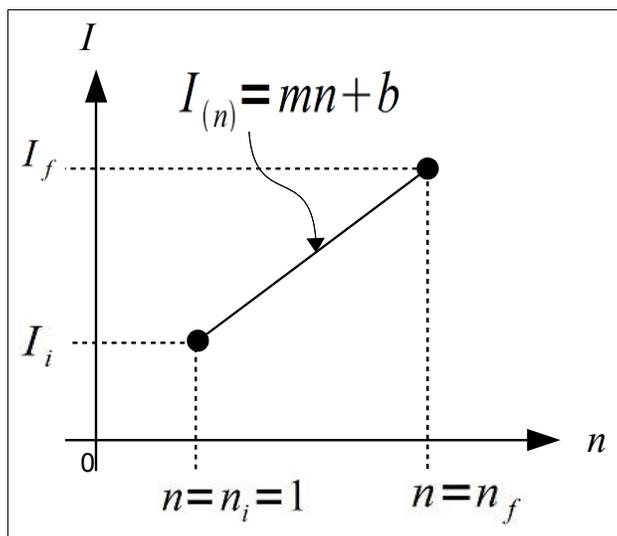
$$I_{(n)} = mn + b \quad \text{Ecuación 94}$$

que representa una variación lineal de la intensidad del haz en función de los puntos experimentales  $n = \{1, 2, 3, \dots, n_f\}$ , y en donde  $m$  y  $b$  son parámetros por determinar. Esta función de normalización  $I_{(n)}$  debe satisfacer la condición inicial  $I_{(n)} = I_i$  y la condición final  $I_{(n_f)} = I_f$  de la intensidad del haz al iniciar y finalizar cada experimento y que son conocidas por ser mediadas; es decir:

$$I_i = mn_i + b \quad (1)$$

$$I_f = mn_f + b \quad (2)$$

Este sistema de ecuaciones está gráficamente representado en la figura 36.



**Figura 36.** Representación gráfica de la función de normalización  $I_{(n)}$ . Obsérvese que el conteo de los números experimentales  $n$  inicia con  $n = n_i = 1$  y finaliza con  $n = n_f$ .

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$I_{(n)} = \left[ \frac{I_i - I_f n_i}{(1 - n_f) n_i} \right] n + \frac{I_f n_i - I_i n_f}{1 - n_f} \quad \text{Ecuación 95}$$

Considerando que en las gráficas de los espectros los puntos experimentales comienzan a ser contados con  $n_i = 1$  la ecuación 95 se simplifica para dar finalmente la función de normalización respecto a la intensidad del haz:

$$I_{(n)} = \left( \frac{I_i - I_f}{1 - n_f} \right) n + \frac{I_f - I_i n_f}{1 - n_f} \quad \text{Ecuación 96}$$

### Normalización de los espectros del $H^-$ respecto a la presión base de la celda de gas

La normalización de los espectros respecto a la presión  $P$  es similarmente llevada a cabo obteniéndose una función de normalización semejante:

$$P_{(n)} = \left( \frac{P_i - P_f}{1 - n_f} \right) n + \frac{P_f - P_i n_f}{1 - n_f} \quad \text{Ecuación 97}$$

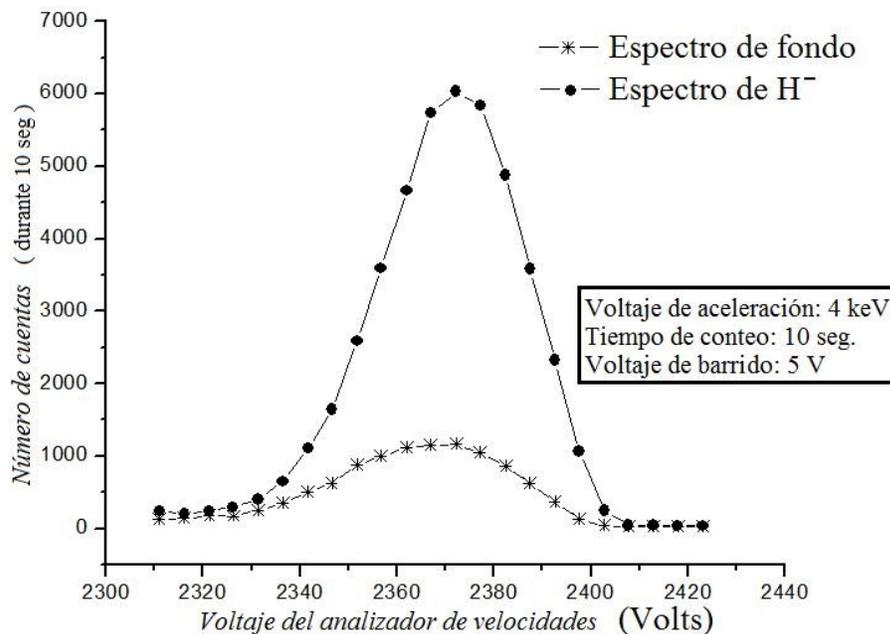
---

Ambas normalizaciones fueron realizadas con ayuda del software Origin que tomó los datos numéricos de los espectros obtenidos en un principio por el software LabView<sup>27,28</sup> que es el que controla los instrumentos de medición y registro de los datos experimentales.

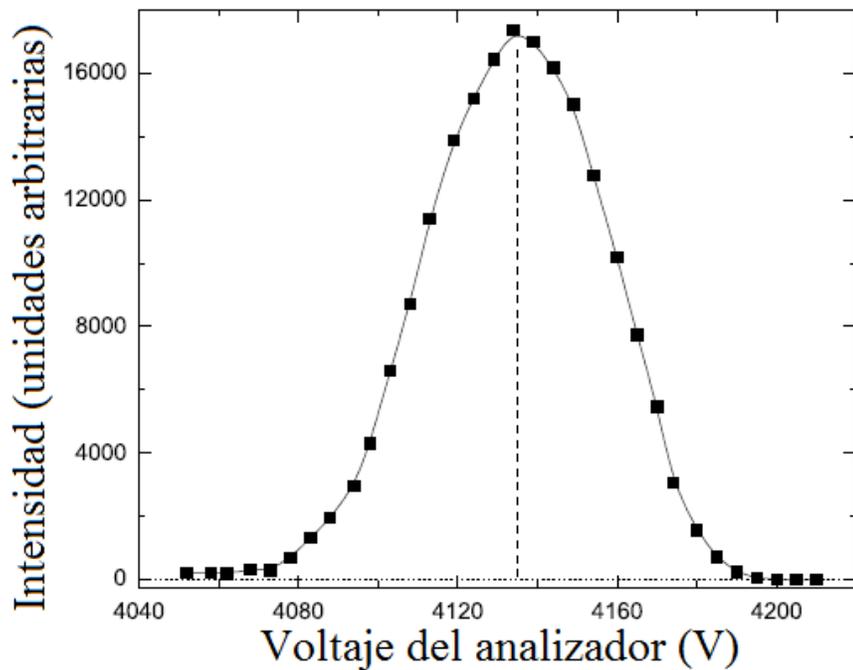
### Resta del espectro contaminante debido al gas residual

Debido a que en el interior del acelerador es inevitable la presencia de gases contaminantes como el agua de la atmósfera, es preciso que a los espectros ya corregidos por las normalizaciones se les sea restado el espectro debido a las cuentas originadas por los gases contaminantes, es decir; restarles un “*espectro de fondo*”. Esta resta, del espectro de fondo a los espectros ya normalizados; es necesaria realizarla para obtener, finalmente, un espectro que represente fielmente la física involucrada en nuestro experimento y se pueda llevar a cabo la investigación de manera precisa.

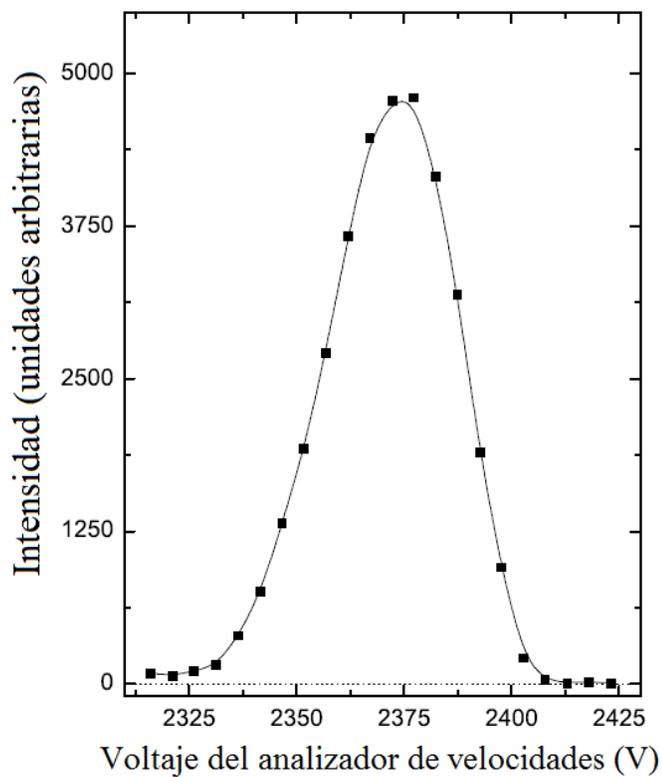
El espectro de fondo es obtenido haciendo recorrer el haz sin la interacción de ninguna muestra gaseosa en el interior de la celda de gas, obteniendo de este modo en los instrumentos de conteo y registro las cuentas que únicamente son debidas a los gases contaminantes dentro del acelerador. Por los mismos motivos de variación en la producción del haz con el que se trabaja, este espectro de fondo también recibe el tratamiento de normalización respecto a los parámetros de intensidad del haz y presión dentro del acelerador. El aspecto del espectro de fondo se muestra en la figura 37.



**Figura 37.** El espectro de fondo y el espectro del  $H^-$  se obtienen experimentalmente por separado con la única diferencia de que el espectro de fondo es obtenido con la celda de gas vacía. En esta figura se muestran ambos espectros con los tratamientos de normalización ya realizados.



**Figura 38.** Espectro de distribución de energía del ión  $H^-$  medido para una energía de colisión de **7 keV**. La línea continua representa un ajuste polinomial de tercer grado.



**Figura 39.** Otro ejemplo de distribución de energías del ión  $H^-$  medidos con el analizador electrostático de velocidades. Este espectro fue obtenido con una energía de colisión de **4 keV**. La línea continua corresponde a una curva representativa de un ajuste polinomial de tercer grado.

---

## ANÁLISIS DE LOS ESPECTROS DEL IÓN $H^-$

Ejemplos de distribuciones de energía del  $H^-$  ya normalizadas se muestran en las figuras 38 y 39. Con el propósito de transformar estos espectros de energía a *distribuciones angulares de dispersión de los iones  $H^-$* , se sigue la siguiente metodología:

- 1) A partir de los espectros de energía del ión  $H^-$  se deducen las *velocidades finales*  $v_p$  del protón-proyectil dispersado (y ya transformado en un ión  $H^-$  por el proceso de doble captura electrónica). Para poder realizar ésto, *el eje x* de los espectros de energía se transforma a las velocidades que el ión  $H^-$  tiene a esa energía (cinética) y que corresponden a las velocidades finales  $v_p$  que se desean conocer. Este cálculo se realiza con la ecuación 93 que tendrá la siguiente expresión:

$$v_p = \left( \frac{A|-2e|V}{m_p d} \right)^{1/2} \quad \text{Ecuación 98}$$

donde  $m_p$  es la masa del protón-proyectil dispersado (en realidad del  $H^-$  )

- 2) Se calculan las velocidades iniciales  $v_{p0}$  del protón-proyectil  $H^+$  antes de la colisión contra el  $H_2$ . Este cálculo se efectúa con la ecuación 76 cuya expresión es:

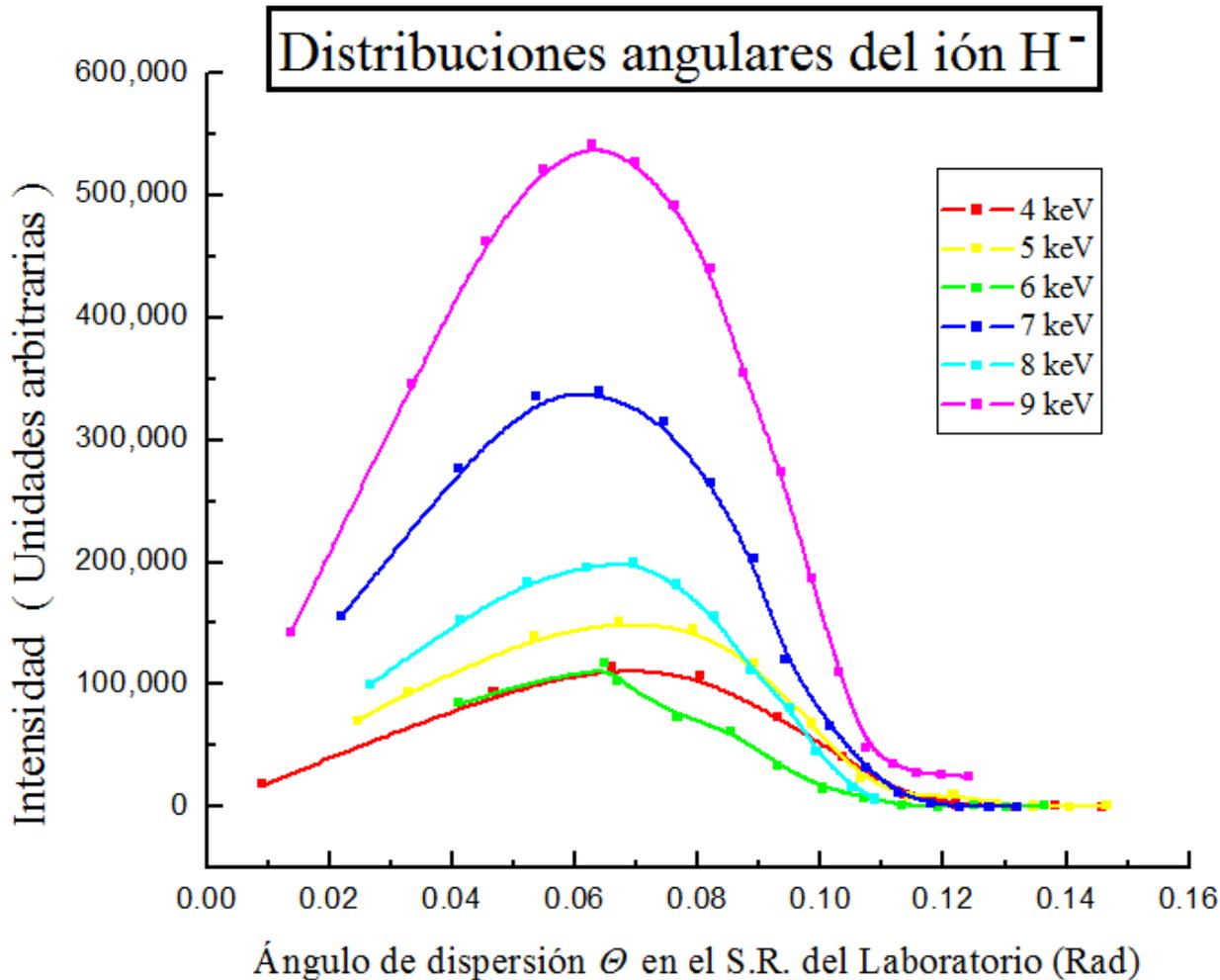
$$v_{p0} = \left( \frac{2eV_{acel}}{m_p} \right)^{1/2} \quad \text{Ecuación 99}$$

- 3) Se calculan los diversos ángulos de dispersión  $\Theta$  del ión  $H^-$  con respecto al S.R. del Laboratorio. Para este cálculo se hace uso de la ecuación 22 expresada de la siguiente forma:

$$\Theta = \arccos \left\{ \frac{m_b v_{p0}}{2\mu v_p} \left[ \left( \frac{v_p}{v_{p0}} \right)^2 - \frac{m_b - m_p}{m_b + m_p} \right] \right\} \quad \text{Ecuación 100}$$

- 4) Finalmente, con los valores dados por la ecuación 100 se procede a graficar el espectro de dispersión del ión  $H^-$  mostrando la intensidad de  $\Theta$ . Esta intensidad de  $\Theta$  teóricamente, corresponde a la intensidad mostrada en los espectros originales de energía que ya han sido normalizados; es decir, muestran *el número de iones* dispersados a un ángulo  $\Theta$ .

Todos los espectros de las distribuciones angulares así obtenidos se muestran en la Figura 40.



**Figura 40.** Espectros de los ángulos de dispersión del ión  $H^-$  para los diversos voltajes de aceleración que se estudiaron. Nuestro objetivo es el estudio de los ángulos cuya *intensidad es máxima* (no confundir con el *ángulo máximo de dispersión* registrado); en otras palabras: Nuestro interés radica en examinar el comportamiento que muestran los ángulos cuya *intensidad es máxima* (es decir, los ángulos de *conteo máximo* en cada espectro). A estos ángulos los designaremos con  $\Theta_{c\ max}$ .

Tratamos de averiguar si los *ángulos de conteo máximo*  $\Theta_{c\ max}$  evidencian un comportamiento de dispersión similar al fenómeno de *dispersión de Rutherford* y cuya ley física él plasmara matemáticamente en su famosa ecuación de dispersión y que tiene entre sus principales hipótesis comprobadas la de predecir *un comportamiento lineal* entre: la magnitud de la cotangente de la mitad del ángulo de dispersión  $\theta$  que sufre una partícula proyectil alfa y su energía cinética  $E$  al momento de colisionar con un átomo dispersor. Dicha hipótesis es:

---


$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4\pi \varepsilon_0 b}{Z e^2} E \quad \text{Ecuación 101}$$

o más sencillamente:

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \propto E \quad \text{Relación 102}$$

y que corresponden a las ecuaciones deducidas 28 y 29 respectivamente. En nuestro caso deseamos verificar si:

$$\boxed{\cot\left(\frac{\Theta_{c \max}}{2}\right) \propto E} \quad \text{Relación 103}$$

5) Se calcula un valor para el ángulo de conteo máximo  $\Theta_{c \max}$  de cada una de las energías de aceleración de la figura 40. Para esta operación se consideran *dos valores*:

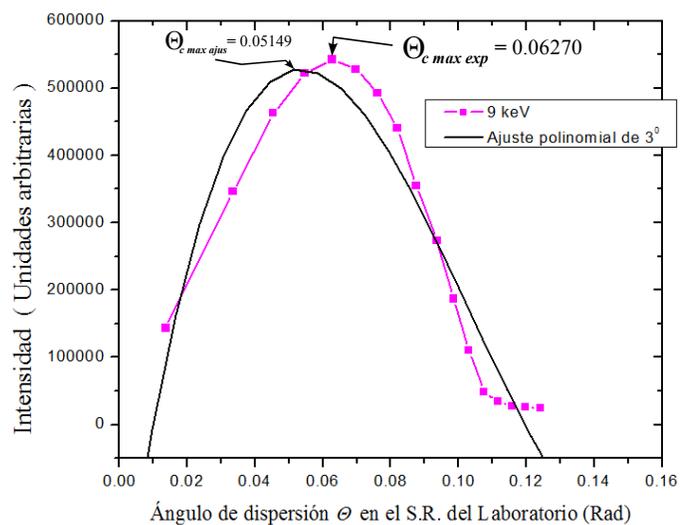
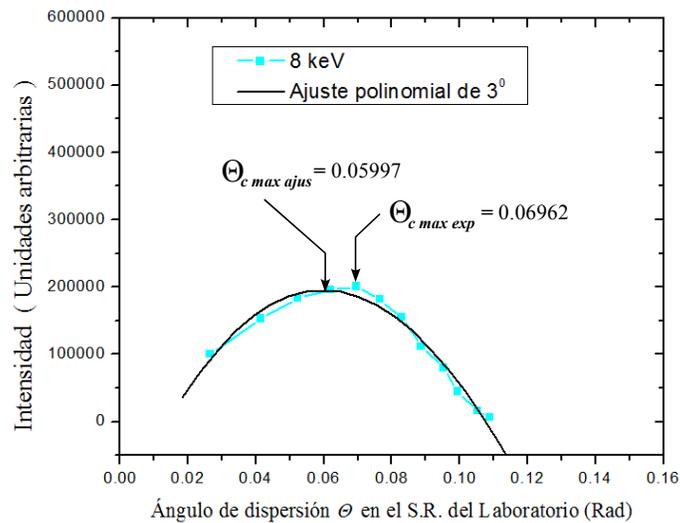
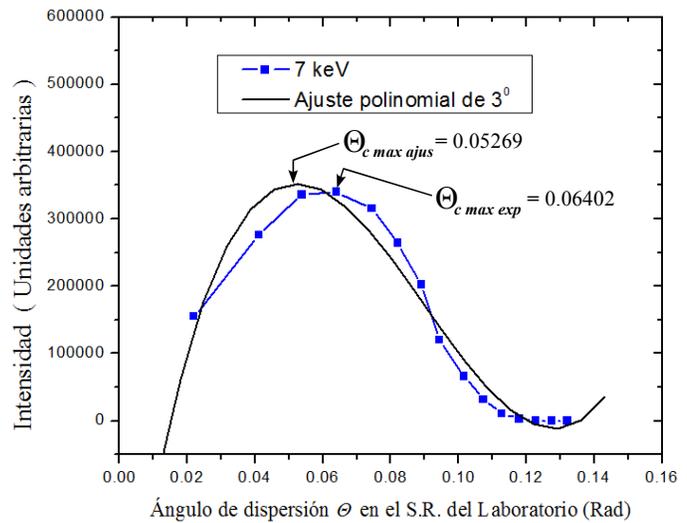
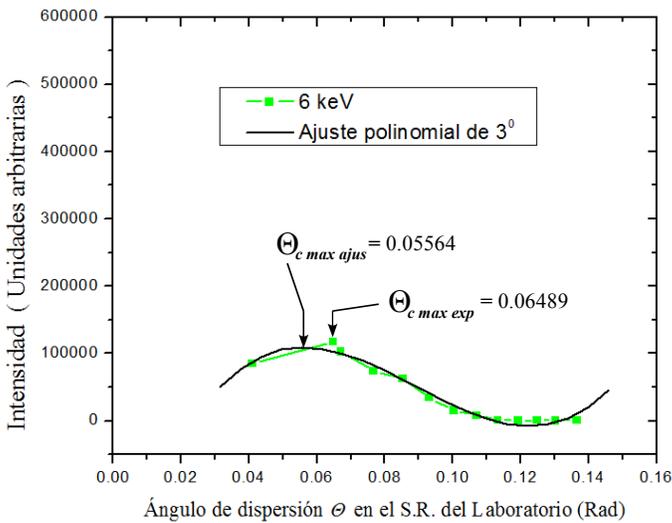
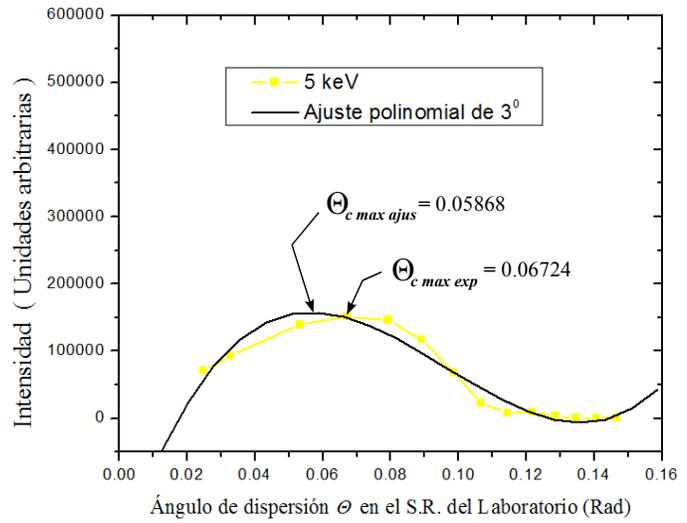
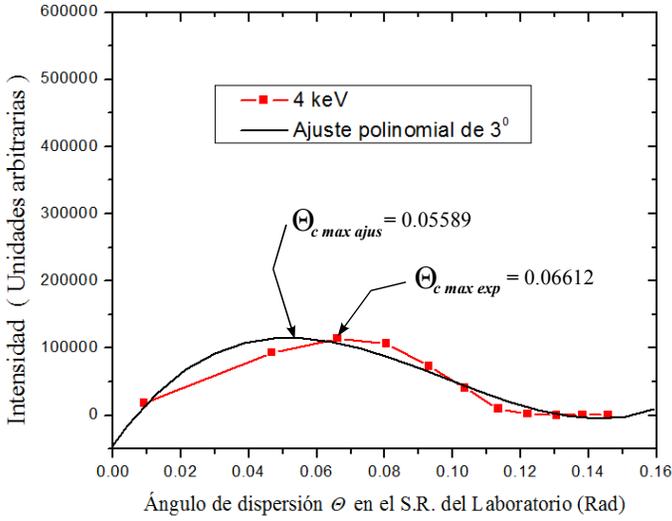
- 1) los ángulos de conteo máximo que se observan directamente de los espectros (experimentales) de la figura 40. Los llamaremos:  $\Theta_{c \max \text{ exp}}$
- 2) los ángulos de conteo máximo que se deducen de un ajuste polinomial de tercer grado de cada uno de los espectros de la misma figura 40. Los llamaremos:  $\Theta_{c \max \text{ ajus}}$   
Esta operación se realiza por medio del criterio de la segunda derivada de la función ajustada.

Se realiza una interpolación de estos dos ángulos para obtener un valor que los considera igualmente a los dos. Dicha interpolación es:

$$\Theta_{c \max} = \Theta_{c \max \text{ ajus}} + \frac{\Theta_{c \max \text{ ajus}} - \Theta_{c \max \text{ exp}}}{2} \quad \text{Ecuación 104}$$

Las curvas de los espectros ajustados se muestran en las figuras 41 y los ángulos  $\Theta_{c \max}$  así como el valor de  $\cot\left(\frac{\Theta_{c \max}}{2}\right)$  se muestran en la tabla 2.

Figura 41. Distribuciones angulares del ión  $H^-$



Energía (keV)	<b>Ángulo de dispersión de conteo máximo</b> $\Theta_{c\ max} = \Theta_{c\ max\ ajus} + \frac{\Theta_{c\ max\ ajus} - \Theta_{c\ max\ exp}}{2}$ <b>(rad)</b>	$\cot\left(\frac{\Theta_{c\ max}}{2}\right)$
4	0.06101	32.77246
5	0.06296	31.75673
6	0.06027	33.17610
7	0.05835	34.26463
8	0.06479	30.85749
9	0.05709	35.01984

**Tabla 2.**

Para poder visualizar mejor la relación que existe entre la *Energía* y la  $\cot\left(\frac{\Theta_{c\ max}}{2}\right)$  se ha realizado la gráfica de la figura 42:

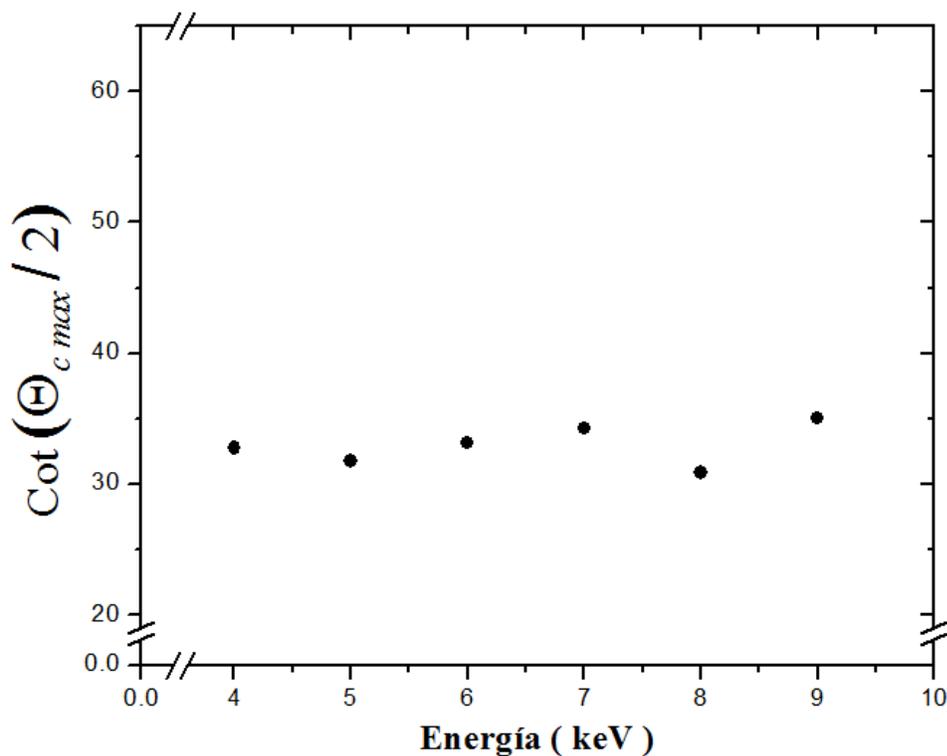


Figura 42. **Diagrama de dispersión** para las dos variables de nuestro interés. La investigación de la relación entre dos variables comienza, generalmente, con una examen visual de este tipo de diagrama. En este caso, el aspecto general del diagrama, aunque vago, podría decirse que muestra una posible relación lineal entre los puntos.

Con el propósito de tener un criterio independiente de toda percepción subjetiva de la distribución de puntos de la figura 42, se procede a un sencillo análisis de correlación lineal<sup>29,30,31</sup> entre la *Energía* y la  $\cot\left(\frac{\Theta_{c\ max}}{2}\right)$ . Los parámetros estadísticos que resultan de dicho análisis son los siguientes:

Coefficiente de correlación lineal :  $r = 0.33366$

Desviación estándar de los puntos :  $s = 1.54234$

Probabilidad de que  $r$  sea igual a cero :  $p = 0.51808$

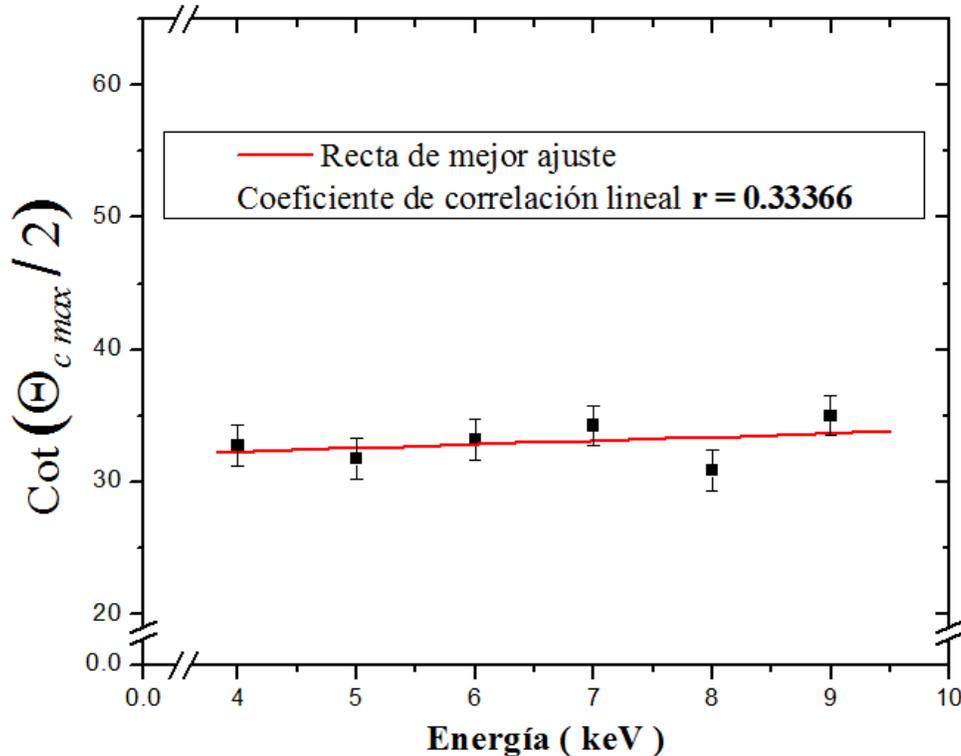
Recta de mejor ajuste :  $Y = A + B * X$

donde  $Y := \cot\left(\frac{\Theta_{c\ max}}{2}\right)$  y  $X := \text{Energía}$

$A = 31.18654$  con un error de 2.61152

$B = 0.27508$  con un error de 0.38858

El diagrama de dispersión de la figura 42 así como la recta de mejor ajuste para dicha dispersión se grafican en la figura 43.



**Figura 43.** Se muestra el diagrama de dispersión junto con la recta de mejor ajuste. Las barras de error en los puntos tienen un valor dado por la desviación estándar  $s=1.54234$

---

## DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO Y CONCLUSIONES

Es sabido que la interpretación de un coeficiente de correlación como medida del grado de relación lineal entre dos variables es una interpretación matemática pura y está completamente desprovista de implicaciones de causa y efecto. El hecho de que dos variables tiendan a aumentar o disminuir al mismo tiempo no implica que una tenga algún afecto directo o indirecto en la otra. Ambas pueden estar sometidas a la influencia de muchas otras variables que pueden alterar sensiblemente el análisis estadístico de la correlación lineal entre ambas variables. Por lo tanto, sólo de nuestro cálculo del coeficiente de correlación lineal  $r = 0.33366$  concluimos que la relación lineal expresada por:

$$\cot\left(\frac{\Theta_{c \max}}{2}\right) \propto E$$

sólo es válida en un 33.366% para poder explicar la dispersión del ión  $H^-$  de manera semejante a la dispersión de Rutherford la cual sí exhibe un cumplimiento del 100% de dicha relación lineal.

Al inspeccionar visualmente la figura 43 correspondiente al diagrama de dispersión con la recta de mejor ajuste y teniendo en consideración la relativamente pequeña desviación estándar de los puntos  $s = 1.54234$ , podría pensarse que el análisis de correlación lineal resulta demasiado estricto en este caso con un coeficiente de correlación lineal  $r = 0.33366$  demasiado bajo, no obstante, no debe olvidarse que la dinámica de la colisión del sistema estudiado:

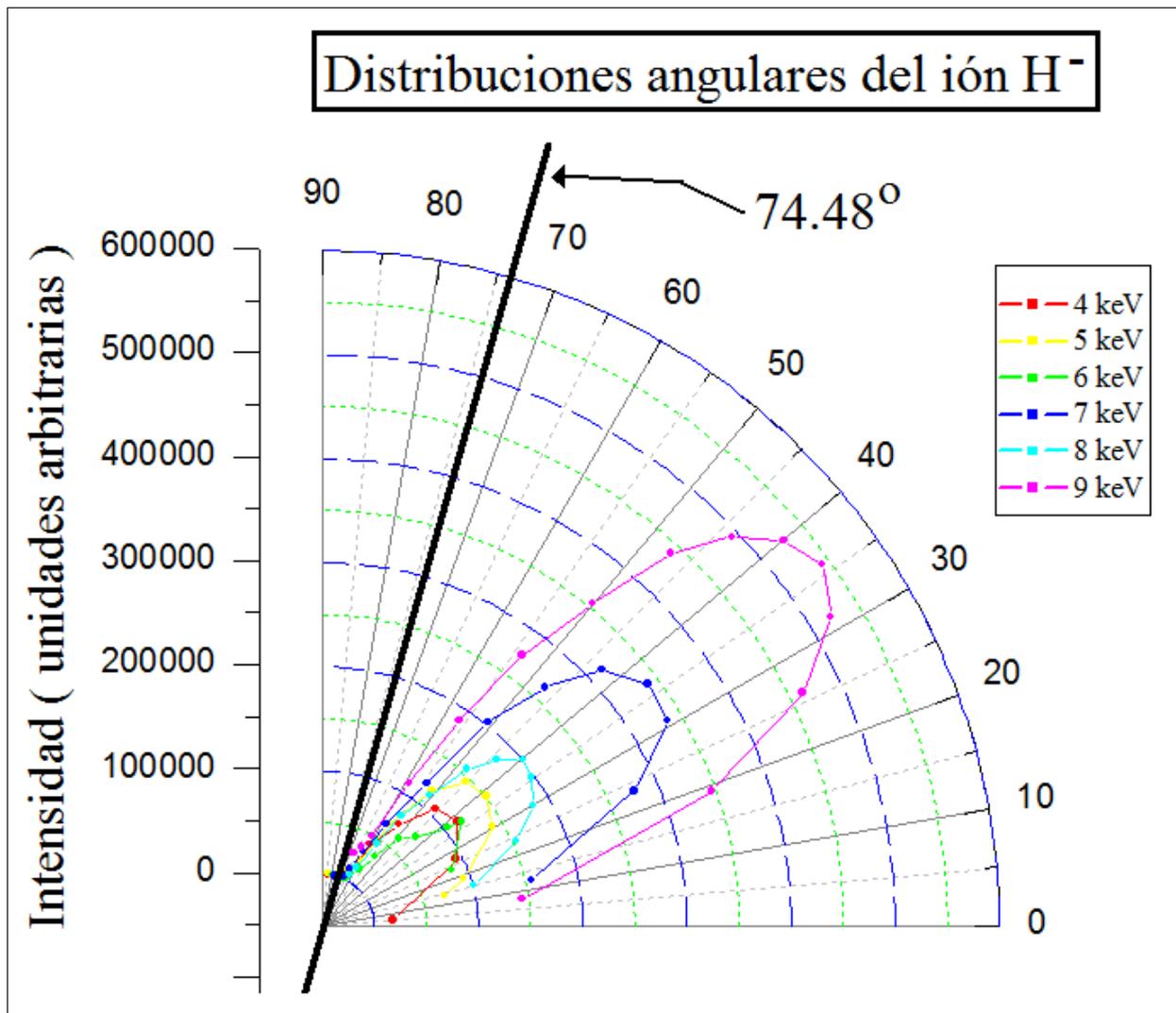
$H^+ + H_2 \rightarrow H^- + 2H^+$ , involucra un proceso de doble captura electrónica que no puede ignorar su fuerte dependencia de los grados de libertad que tiene el blanco  $H_2$  tales como su vibración y rotación molecular entre otros.

El hecho de que el valor de la probabilidad de que  $r$  sea igual a cero:  $p = 0.51808$ , nos permite inferir que la ocurrencia de dicho evento es casi igual de probable que se presente o que no se presente en un experimento semejante al realizado; es decir, la nula correlación lineal entre

$\cot\left(\frac{\Theta_{c \max}}{2}\right)$  y  $E$  es igualmente probable que se presente en un experimento de las mismas características al de este trabajo. En este caso, una posible variación del valor de  $p$  en otros estudios que se pudieran hacer para el mismo sistema estudiado, dependería por ejemplo, de la técnica experimental empleada para realizar dicho experimento.

A primera vista de la figura 40, el intervalo en el que se definen los espectros es relativamente constante como función de la energía de interacción, es decir, no se observa una gran translación de los espectros a lo largo del eje  $x$ ; la longitud de este intervalo de dispersión es de

aproximadamente de 0.12 radianes ( $\approx 6.875^\circ$ ). De la figura 40, también podemos comentar que los *ángulos máximos de dispersión* que se registraron muestran que dichos ángulos tienden a un mismo valor constante situado alrededor de los 0.13 radianes ( $\approx 7.448^\circ$ ), para poder apreciar mejor esto, los espectros de la figura 40 se han graficado de nuevo pero en coordenadas polares  $(r, \theta)$  donde el radio vector  $r$  corresponde a la *Intensidad* y  $\theta$  corresponde al *Ángulo de dispersión*  $\Theta$  multiplicado por un factor de 10 y mostrado en grados para poder visualizar mejor la gráfica. Ver figura 44.



**Figura 44.** Las gráficas corresponden a los espectros mostrados en la figura 40 pero en coordenadas polares  $(r, \theta)$  donde el radio vector  $r$  corresponde a la *Intensidad* y  $\theta$  corresponde al *Ángulo de dispersión*  $\Theta$  multiplicado por un factor de 10 y mostrado en grados. Se aprecia que para todos los espectros dicho ángulo se aproxima a un valor de  $7.448^\circ$  en realidad.

---

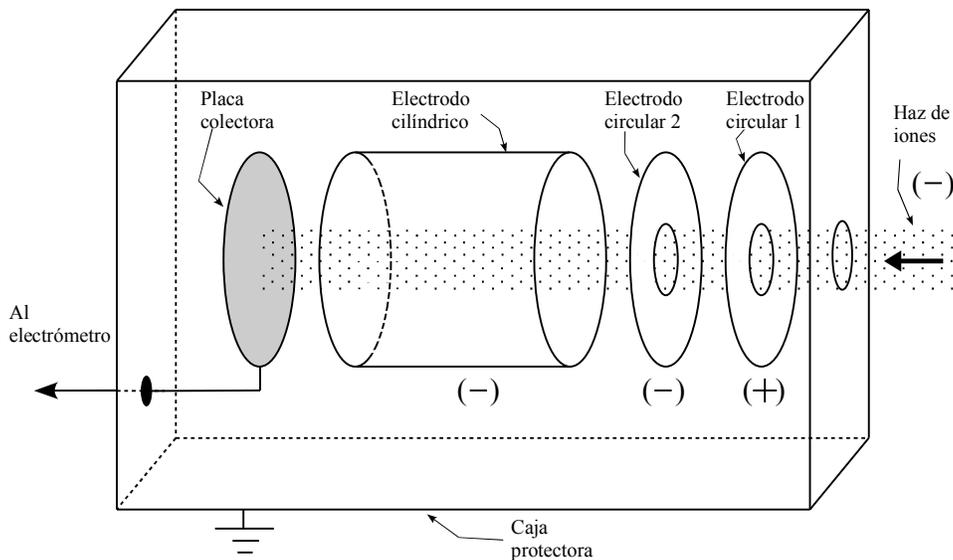
A pesar de su simplicidad, se demuestra que el método que aquí se propone se puede usar para derivar información sobre la dinámica de la doble captura electrónica. No se tiene conocimiento de un análisis similar al presente en las energías que aquí se reportan por lo que este estudio es el primero, con la ventaja de que la presente técnica se puede extender al estudio de otros sistemas colisionales y los resultados son susceptibles de compararse con modelos teóricos de la colisión.

---

## APÉNDICE

### Caja de Faraday

Las cajas de Faraday son empleadas para medir la corriente de partículas eléctricamente cargadas que forman un haz de iones. La figura 45 muestra el esquema de una caja de Faraday con el signo del potencial eléctrico de cada uno de sus cuatro electrodos que usualmente son de cobre.



**Figura 45.** Esquema de la caja de Faraday.

El electrodo circular 1 tiene un potencial positivo para repeler a los iones positivos del gas residual que circundan las proximidades del orificio de entrada de la caja de Faraday; el electrodo circular 2, cuyo potencial es negativo tiene la función de evitar que escapen electrones secundarios producidos en el interior de la misma caja de Faraday; el electrodo cilíndrico, regresa a la placa colectora los electrones que se desprenden de ella debido a los impactos de las partículas del haz de iones; finalmente, la placa colectora (que también es un electrodo) está conectada a un electrómetro que mide la corriente eléctrica debida a los impactos de las partículas del haz con la placa colectora. La caja protectora que contiene los cuatro electrodos es metálica y está conectada a tierra.

Para determinar el número de partículas incidentes  $\eta$  en un determinado tiempo  $t$ , se utiliza la relación:

$$\frac{\eta}{t} = \frac{I_0}{e}$$

donde  $I_0$  es la corriente incidente medida en la caja de Faraday, y  $e$  es la magnitud de la carga eléctrica del electrón.

---

## REFERENCIAS

1. Gordon W. McClure, Phys. Rev. **132**, 4, (1963).
2. K. E. McCulloh and H. M. Rosenstock, J. Chem. Phys. **48**, 2084 (1968).
3. A. K. Edwards, R. M. Woods, and R. L. Ezell, Phys. Rev. A **31**, 99 (1985).
4. A. K. Edwards, R. M. Woods, and R. L. Ezell, Phys. Rev. A **31**, 3972 (1985).
5. A. K. Edwards, R. M. Woods, and R. L. Ezell, Phys. Rev. A **32**, 1873 (1985).
6. W. W. Lorzier, Phys. Rev. **36** 1285 (1930).
7. M. S. Schöffler, K. Kreidi, D. Akoury, T. Jahnke, A. Staudte, N. Neumann, J. Titze, L. Ph. H. Schmidt, A. Czasch, O. Jagutzki, R. A. Costa Fraga, R. E. Grisenti, M. Smolarski, P. Ranitovic, C. L. Cocke, T. Osipov, H. Adaniya, S. Lee, J. C. Thompson, M. H. Prior, A. Belkacem, Th. Weber, A. Landers, H. Schmidt-Böcking, R. Dörner. Phys. Rev. A **78**, 013414 (2008).
8. Jakub S. Prauzner-Bechcicki, Krzysztof Sacha, Bruno Eckhardt, Jakub Zakrzewski. Phys. Rev. A **78**, 013419 (2008).
9. Ia. M. Fogel, R. V. Mitin, V. F. Kozlov and N. D. Romashko, Zh. Eksperim i Teor. Fiz. **35**, 565 (1958).
10. P. G. Fournier, J. Appel, F. C. Fehsenfeld and J. Durup, J. Phys. B **5**, L58 (1972).
11. A. K. Edwards, R. M. Wood and R. L. Ezell, Phys. Rev. A **31**, 99 (1985).
12. A. K. Edwards, R. M. Wood and R. L. Ezell, Phys. Rev. A **31**, 3972 (1985).
13. S Martinez, G Bernardi, P Focke, A D Gonzalez, and S Suarez. H<sup>2</sup> dissociation by H<sup>+</sup> and He<sup>2+</sup> projectiles at intermediate energies. J. Phys. B, 36(24):4813, 2003.
14. P. G. Fournier, H. Aouchiche, V. Lorent, and J. Baudon. Phys. Rev. A **34**, 3743, (1986).
15. Earl W. McDaniels, J.B.A. Mitchell, and M. Eugene Rudd. (John Wiley and Sons, New York, 1993).
16. Kenneth Smith, The calculation of Atomic Collision process, (Wiley Interscience, New York, 1971).
17. Arthur Beiser, Conceptos de Física Moderna, (McGraw-Hill Book Company, 1965).
18. Manuel de Llano, Mecánica Cuántica, (Las Prensas de Ciencias UNAM, México, 2002).
19. XVI Escuela de Verano en Física, 18 Julio a 26 Agosto, 2008, Instituto de Física UNAM,

---

Instituto de Ciencias Físicas, UNAM, Facultad de Ciencias UNAM.

20. Física con ordenador, página web <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>
21. Guillermo Hinojosa Aguirre, Generación de los haces H+3 y D+3 en su estado base y estudio de su disociación polar. Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 1997.
22. O. González-Magaña, *Disociación del catión de Agua inducida por colisión con Helio*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Sep. 2006.
23. Olmo González M, Cristian Gleason, Guillermo Hinojosa, *Revista Mexicana de Física E* **54**, 104-119 (2000).
24. J. F. O'Hanlon. *A User's Guide to Vacuum Technology*. (Wiley, New York, 1980).
25. Lafferty James M. *Foundations of Vacuum Science and Technology*. (Wiley, New York, 1998).
26. G. A. Harrower. *The Rev. Sci. Instrum.*, 26(9):850 (1955).
27. Antoni Manuel Lázaro, Joaquín del Río Fernández. *LabView7.1 Programación gráfica para el control de instrumentación*. Editorial Thomson, Barcelona, (2005).
28. José Rafael Lajara Vizcaíno, José Pelegrí Sebastián. *LabView 8.2 Entorno gráfico de programación*. (Editorial Afaomega marcombo, 2007).
29. Paul G. Hoel, *Estadística elemental*. (Editorial CECSA, 1991).
30. Robert Johnson, *Estadística elemental*. (Editorial Trillas, 1990).
31. Berta Oda Noda, *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*, (Las Prensas de Ciencias, México, 1997).