



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO DE OBSERVADORES EN MODOS  
DESLIZANTES PARA ECUACIONES  
DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO  
PARABÓLICO**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A:

**RAMÓN FELIPE MIRANDA HERNÁNDEZ**

TUTORES:

DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

DR. JORGE ISAAC CHAIREZ ORIA



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

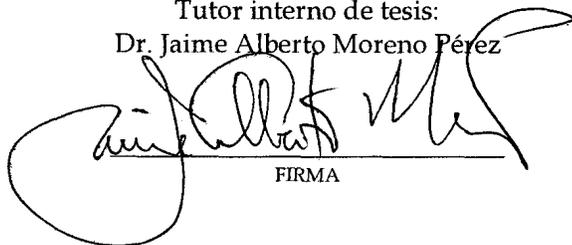
Jurado asignado:

Presidente: Dr. Jesús Álvarez Calderón  
Secretario: Dr. Leonid Fridman  
Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez  
1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Jorge Isaac Chairez Oria  
2<sup>do</sup> Suplente: Dr. Alexander Schaum

Lugar donde se realizó la tesis:

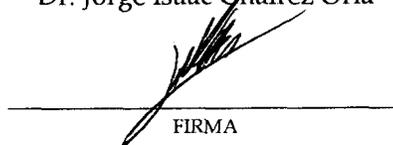
Universidad Nacional Autónoma de México - Facultad de Ingeniería. México,  
Distrito Federal.

Tutor interno de tesis:  
Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez



FIRMA

Tutor externo de tesis:  
Dr. Jorge Isaac Chairez Oria



FIRMA

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Agradecimientos . . . . .	5
1.2. Resumen . . . . .	5
1.3. Contribución Principal . . . . .	7
1.4. Objetivos . . . . .	7
<b>2. Preliminares Matemáticos</b>	<b>8</b>
2.1. Principios de backstepping para ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	8
2.2. Aplicación de backstepping para ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	12
2.3. Teoría de modos deslizantes: una breve introducción . . . . .	15
2.4. Aplicación de la Teoría de modos deslizantes para ecuaciones diferenciales parciales	18
2.4.1. Modos deslizantes en el espacio de Hilbert . . . . .	18
2.4.2. Estabilización de sistemas de fase mínima . . . . .	20
2.5. Desarrollo de observadores para ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	23
2.5.1. Observadores por la técnica de Backstepping para sistemas de dimensión infinita . . . . .	23
2.5.2. Observador tipo Luenberger para sistemas de dimensión infinita . . . . .	25
<b>3. Diseño del observador por modos deslizantes para EDP de tipo parabólico</b>	<b>27</b>
3.1. Clase de sistemas en EDP . . . . .	27
3.2. Observador por modos deslizantes - Observador 1 . . . . .	29
3.3. Observador por modos deslizantes - Observador 2 . . . . .	33

<b>4. Resultados de simulación</b>	<b>37</b>
4.1. Observador para EDP tipo parabólico por Modos Deslizantes . . . . .	37
4.2. Observador para EDP tipo parabólico por Modos Deslizantes y el término lineal	41
4.3. Comparación entre los observadores por modos deslizantes y el obtenido previamente por Krstic . . . . .	45
<b>5. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>6. Apéndices</b>	<b>48</b>
6.1. Apéndice A. Transformación de $\bar{u}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ . . . . .	48
6.2. Apéndice B. Prueba del observador 1 . . . . .	52
6.3. Apéndice C. Transformación inversa, prueba de causalidad - Observador 1 . . . . .	57
6.4. Apéndice D. Prueba del observador 2 . . . . .	61
6.5. Apéndice E. Transformación inversa, prueba de causalidad - Observador 2 . . . . .	66
6.6. Apéndice F. Prueba de estabilidad sistema objetivo 1 . . . . .	70
6.7. Apéndice G. Prueba de estabilidad sistema objetivo 2 . . . . .	73

# Índice de figuras

4-1. Dinámica del sistema inestable en EDP tipo parabólico . . . . .	38
4-2. Estructura del Kernel de la transformación para el observador 1 . . . . .	38
4-3. Distribución en el espacio del error de salida por $K_0(x)$ para el observador 1 . . .	39
4-4. Dinámica del observador 1 . . . . .	40
4-5. Dinámica del error de observación, cuando se aplica el observador 1 . . . . .	40
4-6. Gráfica del error de estimación en $u(x_i, t)$ para los puntos $x = 0$ , $x = 0,25$ , $x = 0,5$ y $x = 0,75$ . El observador aplicado es el 1. . . . .	41
4-7. Dinámica del sistema inestable en EDP tipo parabólico . . . . .	42
4-8. Estructura del Kernel cuando se aplica el observador 2 . . . . .	43
4-9. Distribución en el espacio del error de salida por $K_0(x)$ para el observador 2 . . .	43
4-10. Distribución en el espacio del error de salida por $K_1(x)$ para el observador 2 . . .	44
4-11. Dinámica del observador 2 . . . . .	44
4-12. Dinámica del error de observación, cuando se aplica el observador 2 . . . . .	45
4-13. Gráfica del error de estimación en $u(x_i, t)$ para los puntos $x = 0$ , $x = 0,25$ , $x = 0,5$ y $x = 0,75$ . El observador aplicado es el segundo. . . . .	46
4-14. Comparación de normas entre el observador 1, el observador 2 y el existente anteriormente . . . . .	46

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Agradecimientos

*A CONACyT por el apoyo económico obtenido durante mis estudios de maestría.*

*A la UNAM por darme la posibilidad de ser parte de la máxima casa de estudios.*

*A mis asesores Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez y Dr. Jorge Isaac Chairez Oria, por su dirección y apoyo académico y personal.*

*A mi jurado: Dr. Jesús Álvarez Calderón, Dr. Leonid Fridman y Dr. Alexander Schaum, por el tiempo dedicado a mi trabajo y por sus consejos.*

*A mi familia y seres queridos por brindarme la tranquilidad de saber que siempre cuento con ellos.*

### 1.2. Resumen

Existe una gran cantidad de sistemas cuyo comportamiento dinámico está descrito por Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), [1]. En años recientes, este campo ha ido en crecimiento debido a que se han introducido modelos matemáticos considerablemente más realistas en diferentes áreas de investigación como termodinámica, estructuras elásticas, dinámica de fluidos, sistemas biológicos, entre otros, [2], [3]. A pesar del hecho de que optimización y control de sistemas gobernados por EDP y, más recientemente por desigualdades variacionales, es un campo muy activo de investigación, [4], no mucho se ha desarrollado en el diseño de obser-

vadores. Para esta tesis se tienen dos aportaciones principales descritas en [5] y [6]. El primer trabajo introduce un diseño de observador lineal para sistemas en EDP tipo parabólico. Este trabajo involucra una transformación lineal tipo Volterra que transforma el error de estimación, descrito también en EDP tipo parabólico, hacia un sistema cuya dinámica se conoce es exponencialmente estable. A este último sistema se le denomina sistema objetivo. La transformación involucra la solución de un kernel dado en EDP tipo hiperbólico lineales. Si esta transformación es posible y es causal (invertible), entonces las funciones de corrección de estimación dadas en la estructura del observador propuesto, están dadas pues dependen del kernel. Algunas aplicaciones se han descrito en [7], [8]. Por otro lado, el segundo trabajo muestra cómo realizar un observador de orden reducido de sistemas en EDP multivariable, considerando que se tiene medición en todo el espacio de una variable y reconstruye la otra. Se emplean observadores Luenberger y observadores por modos deslizantes para lograr el objetivo. Algunas aplicaciones se muestran en [9]. En este trabajo se trata de combinar las técnicas de observación por Backstepping para sistemas en EDP tipo parabólico con medición puntual y la técnica de modos deslizantes con las propiedades que las discontinuidades ofrecen en teoría de control. La técnica de Backstepping fue desarrollada para estabilizar sistemas dinámicos y es particularmente satisfactoria en el área de control no lineal, [10]. La idea básica de la técnica de Backstepping para sistemas con dimensión infinita fue desarrollada en [11], donde las propiedades de estabilidad de una clase de ecuaciones en diferencias lineales e invariantes en el tiempo sobre un espacio infinito dimensional fueron estudiadas. Estas ecuaciones en diferencias lineales e invariantes en el tiempo fueron estudiadas debido a la discretización del sistema original (aquel que se desea transformar), del sistema objetivo (hacia el cual se transformará el sistema original) y la propia transformación integral. Esto resulta en una relación recursiva tipo Backstepping. La estabilización del sistema original se garantiza si el kernel de la transformación es causal. Esta causalidad de la transformación tipo Backstepping, aplicada al sistema original que lo lleva a la dinámica exponencialmente estable del sistema objetivo, es necesaria para obtener la función de control, aplicada solo en un punto (en la frontera). La extensión de esta idea hacia sistemas gobernados por EDP para la estimación de estados fue propuesta en [5], donde el sistema a estabilizar es la dinámica del error entre el sistema original y la dinámica del observador propuesto. El control por modos deslizantes, aplicado a sistemas modelados por ecuaciones diferenciales

ordinarias (EDO), ha garantizado estimación de estados en tiempo finito y con robustez ante perturbaciones y dinámicas no modeladas como se ha estudiado en [12], [13], [14] y [15]. Extender este método robusto hacia sistemas con parámetros distribuidos, más específicamente, hacia sistemas modelados por EDP ha sido recientemente investigado [6]. Sin embargo, la convergencia en tiempo finito, que es posible en sistemas de dimensión finita, bajo ciertas consideraciones, solo sería posible en sistemas en EDP tipo parabólico si la medición se puede realizar en todo el espacio en todo tiempo. En casos donde la medición solo es posible en un punto del espacio y el modo deslizante está en ese mismo punto, solo se espera tener convergencia en tiempo finito. Pero, en el resto del espacio, se espera tener convergencia exponencial.

### 1.3. Contribución Principal

En esta tesis se analiza la posibilidad de aplicar modos deslizantes y la técnica de backstepping extendida para sistemas con dimensión infinita con la finalidad de diseñar un observador para sistemas con parámetros distribuidos, en particular, para sistemas en una clase de EDP tipo parabólico donde la salida es únicamente un punto de la variable espacial. No se han realizado trabajos previos donde se empleen modos deslizantes para la estimación de sistemas en EDP tipo parabólico empleando únicamente medición puntual y trabajando conjuntamente con la técnica de backstepping extendida a sistemas de dimensión infinita.

### 1.4. Objetivos

- Revisar los resultados existentes referentes al diseño de estimadores de estado para ecuaciones diferenciales parciales
- Diseñar un estimador de estado empleando la teoría de modos deslizantes convencional para ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico empleando la técnica de *backstepping*.
- Desarrollar un sistema de software para la realización numérica de los estimadores de estado para ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico

## Capítulo 2

# Preliminares Matemáticos

### 2.1. Principios de backstepping para ecuaciones diferenciales ordinarias

El diseño recursivo se compone de algunos pasos simples. Se refiere a un diseño Backstepping porque se da un paso hacia atrás hasta llegar a la entrada de control en un sistema escalar [16]. En general, Backstepping es un esquema recursivo basado en teoría de Lyapunov propuesto en los años 1990's. Backstepping logra metas como estabilización y seguimiento. Esto se logra debido a la estructura recursiva. Para dar una idea clara, de este desarrollo, se considera un sistema de ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_2^2 \\ \dot{x}_3 &= u(t)\end{aligned}$$

donde  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son los estados, y  $u$  es la entrada de control. El objetivo de control es diseñar un control por retroalimentación de estados que estabilice el sistema asintóticamente hacia el origen. Para lograrlo se emplean los siguientes pasos:

1. Se inicia con el estado  $x_1$  y se define  $z_1 = x_1$ . Se deriva la dinámica de la primera coordenada

$$\dot{z}_1 = x_2 + x_1^2 \tag{2.1}$$

En este caso,  $x_2$  se visualiza como la variable de control y se diseña una ley de control

virtual para (2.1) por ejemplo  $\alpha_1$  y se define  $z_2$  como la variable de error que representa la diferencia entre el control actual y el control virtual de la forma

$$z_2 = x_2 - \alpha_1(t)$$

De ahí que en términos de la nueva variable de estado  $z$  se puede reescribir (2.1) de la forma

$$\dot{z}_1 = z_2 + x_1^2 + \alpha_1(t)$$

En este paso, el objetivo es diseñar un control virtual  $\alpha_1$  tal que  $z_1 \rightarrow 0$ . Se considera la función de Lyapunov de control

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$$

La derivada queda

$$\dot{V}_1 = z_1 (\alpha_1(t) + x_1^2) + z_1 z_2$$

Se puede entonces diseñar  $\alpha_1$  tal que el subsistema de primer orden se estabilice. El control se puede elegir como

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -c_1 z_1 - x_1^2 \\ \dot{\alpha}_1 &= -(c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)\end{aligned}$$

donde  $c_1 > 0$ . Por lo tanto se puede escribir

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2$$

y es claro que si  $z_2 = 0$ , entonces

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2$$

se garantiza, entonces, que  $z_1 \rightarrow 0$  asintóticamente.

2. Se obtiene la dinámica del error para  $z_2 = x_2 - \alpha_1$  quedando de la forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1(t) \\ &= x_3 + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)\end{aligned}$$

en donde  $x_3$  es ahora la nueva entrada de control virtual. Se define un nuevo control virtual  $\alpha_2$  y se define también  $z_3$  como la variable de error que representa la diferencia entre el control actual y el control virtual

$$z_3 = x_3 - \alpha_2(t)$$

Entonces se obtiene

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2(t) + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)$$

El objetivo de control ahora es hacer  $z_2 \rightarrow 0$ . Se elige la función de Lyapunov de control

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 (z_3 + \alpha_2(t) + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)) \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_3 + z_2 (z_1 + \alpha_2(t) + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)) \end{aligned}$$

Si el control virtual se escoge de la forma

$$\alpha_2(t) = -c_2 z_2 - z_1 - x_2^2 - (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)$$

con  $c_2 > 0$ . Entonces la derivada de la función de Lyapunov queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_1 z_3 \\ &= -\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

Claramente, si  $z_3 = 0$  se tiene

$$\dot{V}_2 = -\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2$$

Por lo tanto se garantiza que  $z_1$  y  $z_2$  convergen al origen asintóticamente.

3. Para finalizar el diseño, se obtiene la dinámica para  $z_3$  quedando ésta de la forma

$$\dot{z}_3 = u(t) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + x_2^2)$$

En esta ecuación, aparece la función de control  $u$  misma que se desea encontrar tal que  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  converjan a cero. Se escoge una tercera función de Lyapunov de control de la forma

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2$$

donde su derivada es

$$\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 + z_3 \left( u(t) + z_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + x_2^2) \right)$$

Finalmente, es posible diseñar el control  $u$  tal que la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov de control  $V_3$  sea negativa definida. Para lograrlo, el control propuesto satisface

$$u(t) = -z_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + x_2^2) - c_3 z_3$$

donde  $c_3 > 0$ . Por lo tanto, se obtiene

$$\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^3 c_i z_i^2$$

Entonces, por el teorema de Lasalle se garantiza que  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . También se garantiza que  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como puede observarse de los pasos anteriores, si el sistema tiene una forma triangular y es de  $n$  estados, entonces se necesitan  $n$  pasos para poder completar el diseño del control.

## 2.2. Aplicación de backstepping para ecuaciones diferenciales parciales

En [11] y [17] se detalla la extensión de la técnica de Backstepping para la estabilización global de sistemas de dimensión infinita. El método consiste en general, en la discretización del sistema en EDP como la que se muestra a continuación

$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)) \quad (2.2)$$

para  $x \in (0, 1)$ ,  $t > 0$ . Las condiciones a la frontera están dadas por

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(1, t) &= \alpha_1(u(x, t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

y condición inicial

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ x &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se asume que

$$\varepsilon > 0 \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Se busca entonces una transformación de coordenadas de la forma

$$w(x, t) = u(x, t) - \alpha(u(x, t)) \quad (2.5)$$

donde  $\alpha : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  es un operador no lineal que se desea encontrar, tal que el sistema (2.2) con condiciones a la frontera (2.3) y condición inicial (2.3) mediante la transformación (2.5) pueda ser transformado a un sistema exponencialmente estable como el que se muestra a continuación

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= \varepsilon w(x, t) \\ x &\in (0, 1) \\ t &> 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

con condiciones a la frontera

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ w(1, t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Una vez que la transformación (2.5) es encontrada, se puede obtener el control por retroalimentación en la frontera con

$$\alpha_1(u(x, t)) = \alpha(u(x, t))|_{x=1}$$

Con la finalidad de encontrar (2.5) en una manera constructiva, se discretiza en la variable espacial del sistema, con sus condiciones iniciales y de frontera (2.2), (2.3) y (2.4) y se desarrolla una transformación de coordenadas del sistema semidiscretizado. El problema principal consiste en demostrar que la transformación del sistema semidiscretizado converge a la transformación en dimensión infinita (cuando se considera que la variable espacial no está discretizada). En general esto es posible si  $f(u(x, t))$  es una función lineal, como se ha mostrado en [7], [5], [11] y [18]. Se define entonces

$$u_i^n = u(ih, t)$$

para  $i, j = 0, 1, \dots, n+1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  donde  $h = \frac{1}{n+1}$ , y la discretización en diferencias finitas del resto de las funciones se define de manera similar. La versión discretizada de la transformación de coordenadas (2.5) tiene ahora la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^n &= (\mathbf{I} - \alpha^n)(\mathbf{u}^n) \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde  $\alpha^n$  es una función  $n$ -vectorial valuada de  $\mathbf{u}^n$  y

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n &= [u_0^n, u_1^n, \dots, u_{n+1}^n]^T \\ \mathbf{w}^n &= [w_0^n, w_1^n, \dots, w_{n+1}^n]^T \end{aligned}$$

La discretización del sistema (2.2) con condiciones en la frontera (2.3) y condiciones iniciales (2.4) en versión discretizada se muestra a continuación

$$\begin{aligned} u_0^n &= 0 \\ \dot{u}_i^n &= \varepsilon \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f(u_i^n), \quad i = 1, \dots, n \\ u_{n+1}^n &= \alpha_n^n(u_1^n, u_2^n, \dots, u_n^n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con la convención de que  $\alpha_0^n = 0$ , entonces el sistema objetivo (2.6) con condiciones a la frontera (2.7) en su versión discretizada se escribe como:

$$\begin{aligned} w_0^n &= 0 \\ \dot{w}_i^n &= \varepsilon \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n \\ w_{n+1}^n &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Combinando las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) y resolviendo para  $\alpha_i^n$ , se obtiene la siguiente estructura recursiva

$$\alpha_i^n = -\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_i^n) + 2\alpha_{i-1}^n - \alpha_{i-2}^n + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}^n}{\partial u_j} \left( u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_j^n) \right) \quad (2.11)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Algunos de los valores de  $\alpha_i^n$  se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \alpha_0^n &= 0 \\ \alpha_1^n &= -\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) \\ \alpha_2^n &= -\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_2^n) - 2\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) - \frac{h^2}{\varepsilon} f'(u_1^n) \left( u_2^n - 2u_1^n + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) \right) \\ \alpha_3^n &= -\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_3^n) - 2\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_2^n) - 3\frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) - 2\frac{h^2}{\varepsilon} f'(u_1^n) \left( u_2^n - 2u_1^n + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) \right) \\ &\quad \left( -\frac{h^2}{\varepsilon} f''(u_1^n) \left( u_2^n - 2u_1^n + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) \right) - \left( \frac{h^2}{\varepsilon} f'(u_1^n) \right)^2 \right) \left( u_2^n - 2u_1^n + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) \right) \\ &\quad - \left( \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_2^n) + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_1^n) \right) \left( u_3^n - 2u_2^n + \frac{h^2}{\varepsilon} f(u_2^n) \right) \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores, puede observarse que (2.11) mantiene una estructura de backstepping pues tiene una forma triangular. Por lo tanto, cuando  $n \rightarrow \infty$  y debido a este procedimiento sistemático, la transformación (2.5) es una transformación de coordenadas de dimensión infinita

tipo Backstepping o que esta técnica involucra la extensión de Backstepping para sistemas de dimensión infinita, en particular para aquellos descritos por EDP.

### 2.3. Teoría de modos deslizantes: una breve introducción

Desde los años 70's hasta hoy día, el control por modos deslizantes ha ganado mucha atención en el campo de la ingeniería debido a su insensibilidad ante perturbaciones y variaciones en los parámetros de un sistema. El control por modos deslizantes es un caso particular de sistemas con estructura variable. Los sistemas con modos deslizantes tienen capacidad para ser una herramienta eficiente para el control complejo de alto orden de plantas dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas. Los modos deslizantes como un fenómeno pueden aparecer en un sistema dinámico gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias donde el lado derecho de la ecuación contiene términos discontinuos. El término modo deslizante apareció primero en el contexto de los sistemas relevadores. El control por modos deslizantes puede ser dividido en dos subtarefas:

- Diseñar una superficie estable para un fin en particular.
- Diseñar una ley de control que fuerce a los estados del sistema ir hacia la superficie diseñada previamente en tiempo finito.

Un ejemplo de motivación para ejemplificar los modos deslizantes es el siguiente [19]. Se considera un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) + \xi(x, t) \quad (2.12)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}$  es el estado,  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  son parámetros del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la función de entrada de control y  $\xi(x, t) \in \mathbb{R}$  es la perturbación y las incertidumbres debidas a variación en parámetros y dinámicas no modeladas. El objetivo de control es estabilizar  $x(t)$  cuando se conocen las cotas de la perturbación. Para estabilizar el sistema (2.12), cuando  $x(t) > 0$  entonces se debe cumplir  $\dot{x}(t) < 0$  y viceversa. De ahí que, dependiendo del signo de  $x(t)$ , la acción del control debe cambiar alternadamente para cumplir con el objetivo de estabilización.

Un caso en particular escogido es el siguiente

$$u(t) = -\frac{1}{b} (ax(t) + Q\text{sign}(x(t))) \quad (2.13)$$

en este caso,  $Q > 0$  se escoge tal que se satisfaga

$$|\xi(x, t)| \leq Q$$

Sustituyendo el control (2.13) en el sistema (2.12) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + b \left[ -\frac{1}{b} (ax(t) + Q\text{sign}(x(t))) \right] + \xi(x, t) \\ \dot{x}(t) &= -Q\text{sign}(x(t)) + \xi(x, t) \end{aligned}$$

Para analizar el resultado anterior, se consideran los casos mencionados sobre el signo del estado y su derivada. Primero, si  $x(t) > 0$  implica que  $\dot{x}(t) < 0$ . y si  $x(t) < 0$  implica que  $\dot{x}(t) > 0$ . Se puede concluir que  $x(t)$  decrece y se dirige a  $x(t) = 0$ . Visto de otra forma,  $x(t)$  se dirige hacia la línea  $x(t) = 0$ . De ahí que, independientemente de la condición inicial, el sistema es forzado a caer en la línea  $x(t) = 0$ . Sobre la línea  $x(t) = 0$ , la parte discontinua del control no está definida; sin embargo, independientemente del valor que pueda tener, si  $x(t)$  sale de la línea  $x(t) = 0$  inmediatamente es forzado a volver a  $x(t) = 0$ . La fase inicial, cuando  $x(t)$  es llevada hacia la línea  $x(t) = 0$  se conoce como fase de alcance. Mientras que si  $x(t) = 0$  se conoce como fase deslizante o modo deslizante. Puede notarse que cuando el sistema está en la fase de deslizamiento, las perturbaciones no afectan al sistema mientras que cuando se está en la fase de alcance, las perturbaciones afectan al sistema. La línea  $x(t) = 0$  a través de la cual el sistema conmuta el valor de control se conoce como superficie deslizante o hiperplano deslizante. Usualmente se representa como  $s(x, t) = c^T x(t)$  donde para el caso anterior,  $c^T = 1$ .

Debido a que la ley de control, para el ejemplo anterior (2.13) no satisface la condición de Lipschitz, el análisis no puede realizarse por medios convencionales. Una manera para resolver la ecuación diferencial en lazo cerrado que involucra a (2.13) y (2.12) es necesario emplear la teoría de Fillipov [20] y la otra emplea el método del control equivalente como se muestra en [21].

La solución por el método de Fillipov [20] se emplea en sistemas de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.14)$$

puede notarse que el sistema (2.12) está dentro de este caso más general de ecuaciones diferenciales. Durante la fase de deslizamiento,  $s(x, t) = x(t) = 0$ , para cualquier tiempo  $t_2 > t_1$  puede definirse  $f_-$  y  $f_+$  como los valores de la función  $f(x, u, t)$  cuando se aproxima a la superficie de deslizamiento  $s(x, t)$ . La propuesta de Fillipov emplea el valor promedio de  $f_-$  y  $f_+$  para obtener la solución. Por lo tanto, el sistema (2.14) puede ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = (1 - v)f_- + vf_+ \quad (2.15)$$

donde el valor escalar  $0 \leq v \leq 1$ . se escoge con la finalidad de que

$$f_{av} = (1 - v)f_- + vf_+$$

permanezca tangencial a la superficie  $s(x, t) = x(t)$ .

La otra técnica para resolver la ecuación diferencial en lazo cerrado que involucra a (2.12) y (2.13) y que es ampliamente aceptada es el control equivalente. Este método reemplaza el término discontinuo de la ecuación diferencial por un control lineal al que se le denomina control equivalente. Para el sistema (2.12) el control equivalente es de la forma

$$u_{eq}(t) = -b^{-1}ax(t)$$

Para analizar la dinámica del sistema durante el modo deslizante, el control discontinuo se reemplaza por el control equivalente. Puede notarse que si el sistema fuese ideal, las trayectorias permanecerían en la superficie  $s(x, t)$  para todo tiempo después de haber alcanzado la superficie. Sin embargo, en práctica no se puede tener frecuencia infinita de conmutación por lo que en general siempre se alcanza una vecindad de la superficie  $s(x, t)$ . Cabe mencionar que el método del control equivalente puede analizar problemas que no pueden ser resueltos por el método de Fillipov, como se muestra en [21].

De aquí en adelante se han presentado muchos avances y aplicaciones incrementando el orden de los sistemas, extendiendo resultados a control y observación entre algunos otros, como se muestra en [22], [23], [24] y [25] entre otros.

## 2.4. Aplicación de la Teoría de modos deslizantes para ecuaciones diferenciales parciales

### 2.4.1. Modos deslizantes en el espacio de Hilbert

La extensión de modos deslizantes para sistemas que pertenecen al espacio de Hilbert  $H$  se ha introducido en [6] y [26] donde se introduce la descripción del comportamiento de un sistema discontinuo semilineal sobre la discontinuidad de su modo deslizante. La clase de sistemas de dimensión infinita, que se manejan en el espacio de Hilbert satisfacen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, t) + bu(x, t), & t > 0 \\ x(0) &= x^0 \in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde  $x \in H$  el operador infinitesimal  $A$  se asume que forma semigrupos fuertemente continuos  $T_A(t)$  en el espacio de Hilbert  $U$ , la acción de control discontinuo está dada por  $u(x, t)$ ,  $b \in L(U, H)$ . La función operador  $f(x, t)$  con valores en  $H$  representa las incertidumbres del sistema. Asumiendo que las condiciones anteriores se cumplen, se garantiza que el sistema no forzado (2.16) cuando  $u(x, t) \equiv 0$ , tiene una única solución fuerte  $x(t)$ . Se propone un control unitario  $u(x, t)$  que es continuamente diferenciable en sus argumentos excepto en

$$cx = 0 \tag{2.17}$$

donde  $c \in L(H, S)$  y  $S$  es un espacio de Hilbert. Se define

$$H_1 = \ker c = \{x_1 \in H_1 : cx_1 = 0\} \subseteq H$$

como un subespacio en el espacio de Hilbert es complementario, existe  $H_2$  tal que

$$H = H_1 \oplus H_2$$

Para describir los modos deslizantes en dimensión infinita, se reescribe (2.16) en términos de sus variables  $x_1(t) \in H_1$  y  $x_2(t) \in H_2$  de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + P_1f(x_1, x_2, t) + P_1bu(x_1, x_2, t) \\ t &\geq 0, \quad x_1(0) = x_1^0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + P_2f(x_1, x_2, t) + P_2bu(x_1, x_2, t) \\ t &\geq 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \end{aligned}$$

donde  $P_i$  es una proyección sobre el espacio  $H_i$ ,  $A_{ij} = P_iA_j$  es el operador de  $H_i$  hacia  $H_j$ ,  $A_j = A|_{H_j}$  es el operador de restricción sobre  $H_j$ ,  $i, j = 1, 2$ . Claramente (2.17) en las nuevas coordenadas tiene la forma

$$x_2 = 0$$

Asumiendo lo siguiente

- El operador  $P_2b$  de  $U$  hacia  $H_2$  es invertible y su inversa está acotada.
- El operador  $\tilde{A} = A_{11} - GA_{21}$ , con  $G = P_1b(P_2b)^{-1}$  genera un semigrupo exponencialmente estable  $T_{\tilde{A}}(t)$  sobre  $H_1$ .
- El operador  $G_0 = \tilde{A}G$  de  $H_2$  hacia  $H_1$  es gobernado por  $A_{12}$ , en otras palabras,  $\mathcal{D}(G_0) \subseteq \mathcal{D}(A_{12})$  y  $\|G_0y\| \leq k\|A_{12}y\|$ ,  $\forall y \in \mathcal{D}(G_0)$  y para alguna  $k > 0$ .

De acuerdo con el método del control equivalente, la ecuación de modo deslizante

$$\dot{x}_1 = \tilde{A}x_1 + [P_1 - GP_2]f(x_1, 0, t) \tag{2.19}$$

en la discontinuidad  $x_2 = 0$ . es obtenida mediante la sustitución de la solución continua

$$u_{eq}(x, t) = -(P_2b)^{-1} [A_{21}x_1 + P_2f(x_1, 0, t)]$$

de la ecuación  $\dot{x}_2 = 0$  en  $\dot{x}_1$  de la ecuación (2.18) para  $u(x_1, x_2, t)$ . Se asume que la perturbación externa satisface

$$[P_1 - GP_2] f(x, t) = \left[ P_1 - P_1 b (P_2 b)^{-1} P_2 \right] bh(x, t) = 0$$

por lo tanto el sistema reducido (2.19) queda de la forma

$$\dot{x}_1 = \tilde{A}x_1$$

La validez de este método se prueba con detalle en [26].

#### 2.4.2. Estabilización de sistemas de fase mínima

La extensión de la técnica de modos deslizantes para sistemas con parámetros distribuidos (particularmente a sistemas gobernados por EDP) ha sido desarrollada por Orlov, Utkin, Dochain y colaboradores en [6], [9]. En estos resultados se ha considerado un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(x, t) &= A_1 \xi_1(x, t) + f_1(\xi_1, \xi_2) + v(\xi_1, t) \\ \dot{\xi}_2(x, t) &= A_2 \xi_2(x, t) + f_2(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde  $x \in [0, L]$ ,  $t > 0$ . Aquí se considera que el estado del sistema en EDP  $\xi(x, t) = [\xi_1(x, t), \xi_2(x, t)]^\top$ ,  $\xi(x, t) \in H$  un espacio de Hilbert. En la descripción anterior  $A_1$  y  $A_2$  son operadores infinitesimales que generan semigrupos en los espacios de Hilbert  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente. En el desarrollo de este trabajo se asume que

$$\begin{aligned} H &= H_1 \oplus H_2 \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2) \in H \\ \xi_1 &\in H_1, \quad \xi_2 \in H_2 \\ u(x, t) &\in H_1 \\ f_1(\xi_1, \xi_2), f_2(\xi_1, \xi_2) &\in C^1 \{[0, 1] \times [0, \infty)\} \end{aligned}$$

con condiciones a la frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1(0, t)}{\partial x} &= u(\xi_1(0, t), t) & \frac{\partial \xi_1(1, t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \xi_2(0, t)}{\partial x} &= u(\xi_2(0, t), t) & \frac{\partial \xi_2(1, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} \xi_1(x, 0) &= \xi_1^0 \in \mathcal{D}(A_1) \\ \xi_2(x, 0) &= \xi_2^0 \in \mathcal{D}(A_2) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{D}(A_i)$  con  $i = 1, 2$  es el dominio del operador lineal  $A_i$ . La aplicación de modos deslizantes para la estabilización del sistema (2.20) requiere las siguientes condiciones

$$\xi_1(x, t) \begin{cases} \text{Medible} \\ \text{Controlable} \end{cases}$$

El desarrollo del controlador requiere las siguientes condiciones adicionales:

1. Los operadores infinitesimales  $A_1$  y  $A_2$  generan semigrupos analíticos  $T_1$  y  $T_2$  sobre los espacios de Hilbert  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente.
2.  $A_1$  es no positiva definida sobre su dominio  $\mathcal{D}(A_1)$ . Es decir,  $\langle A_1 \xi_1, \xi_1 \rangle \leq 0, \forall \xi_1 \in \mathcal{D}(A_1)$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interior definido en  $H$ .
3.  $\dot{\xi}_2(x, t) = A_2 \xi_2(x, t) + f_2(0, \xi_2)$  tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable en  $\xi_2(x, t) = 0$ .
4.  $f_1(0, 0) = 0$  y  $f_2(0, 0) = 0$  tiene un punto fijo.
5.  $f_2(\xi_1, \xi_2)$  satisface la siguiente condición de crecimiento lineal en  $\xi_2, \forall \xi_1 \in \mathcal{D}(A_1)$ .

$$\|f_2(\xi_1, \xi_2)\| \leq k(\|\xi_1\|)(1 + \|\xi_2\|)$$

6. Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  están acotadas de la forma

$$f_1(\xi_1, \xi_2), f_2(\xi_1, \xi_2) < F(\xi) < \infty$$

En [10], se propuso un control unitario de la forma

$$v(\xi_1, t) = -M(\xi_1, t)U(\xi_1)$$

donde

$$\begin{aligned} M(\xi_1, t) &\geq F(\xi) + c \|\xi_1\|^\alpha, \\ c &> 0, \alpha \in [0, 1) \\ U(\xi_1) &= \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \end{aligned}$$

En el mencionado trabajo se logro demostrar que las trayectorias de (2.20) convergen asintóticamente. La estabilidad se prueba mediante el uso del segundo método de Lyapunov, donde la función candidato es la siguiente:

$$V(\xi_1) = \|\xi_1\|^2$$

A través de la aplicación del método de Lyapunov, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi_1) &= -2cV^{\alpha_0}(\xi_1) \\ \alpha_0 &= (\alpha + 1)/2 \in (0, 1) \end{aligned}$$

Por lo que  $\xi_1$  converge a cero en tiempo finito y por la condición 3,  $\xi_2$  converge a cero asintóticamente. El principal problema de esta técnica es debido a que se considera que una de las variables se puede medir en todo el espacio. Los autores mencionan que con el desarrollo de micro-tecnologías, como los Micro Electrical and Mechanical Systems (MEMS) se puede resolver el problema de medición de una de las variables; sin embargo, no siempre es posible realizar sensores para lograrlo.

## 2.5. Desarrollo de observadores para ecuaciones diferenciales parciales

### 2.5.1. Observadores por la técnica de Backstepping para sistemas de dimensión infinita

La técnica de Backstepping para sistemas de dimensión infinita, aplicada al problema de observación, ha sido desarrollada en [5], [7] y [18]. En estos trabajos se tiene como principal aportación el poder estabilizar el error de estimación de estados mediante mediciones puntuales únicamente en la frontera. Los controles estabilizantes requieren mediciones, en general, desde el interior del dominio, que usualmente no están disponibles. De esta manera se buscan observadores para estimar la variable de estado  $u(x, t)$  dentro de este dominio. Se considera la siguiente planta:

$$\begin{aligned}u_t(x, y) &= u_{xx}(x, t) + \lambda u(x, t) \\u_x(0, t) &= 0 \\u(1, t) &= U(t)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Supóngase que la única medición disponible es en  $x = 0$ , el opuesto al actuador ( $x = 1$ ). Se propone la siguiente estructura de observador:

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(x, y) &= \hat{u}_{xx}(x, t) + \lambda \hat{u}(x, t) + p_1(x)[u(0, t) - \hat{u}(0, t)] \\ \hat{u}_x(0, t) &= p_{10}[u(0, t) - \hat{u}(0, t)] \\ \hat{u}(1, t) &= U(t)\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde  $p_1(x)$  y  $p_{10}$  son funciones de inyección de la salida. Este observador es una copia del sistema, más una inyección del error de estimación de la salida. El error de observación, dado por:

$$\tilde{u} = u - \hat{u}$$

Satisface las siguientes EDP:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t &= \tilde{u}_{xx} + \lambda\tilde{u} - p_1(x)\tilde{u}(0) \\
\tilde{u}_x(0) &= -p_{10}\tilde{u}(0) \\
\tilde{u}(1) &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Las ganancias  $p_1(x)$  y  $P_{10}$  deben ser escogidas de tal forma que estabilicen el sistema del error (2.23). Para lograrlo, se emplea una transformación de coordenadas:

$$\tilde{u}(x) = \tilde{w}(x) - \int_0^x p(x, y)\tilde{w}(y)dy \tag{2.24}$$

La función (2.24), hace que el sistema (2.21) se transforme en el sistema que es exponencialmente estable:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t(x, t) &= \tilde{w}_{xx}(x, t) \\
\tilde{w}_x(0, t) &= 0 \\
\tilde{w}(1, t) &= 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Sustituyendo la transformación (2.24), su derivada con respecto al tiempo y su doble derivada con respecto a  $x$  en (2.25) se obtienen un conjunto de condiciones sobre el kernel  $p(x, t)$  en la forma de EDP hiperbólicas:

$$\begin{aligned}
p_{yy}(x, y) - p_{xx}(x, y) &= \lambda p(x, y), \text{ para } 0 < y < x < 1 \\
\frac{dp(x, x)}{dx} &= \frac{\lambda}{2} \\
p(1, y) &= 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Debido a (2.25) debido a la transformación (2.24) y al kernel (2.26), el sistema resulta en:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t &= \tilde{w}_{xx} - p(x, 0)\tilde{w}_x(0) + (p_y(x, 0) - p_1(x))\tilde{w}(0) \\
\tilde{w}_x(0) &= (p(0, 0) - p_{10})\tilde{w}(0) \\
\tilde{w}(1) &= 0
\end{aligned}$$

que comparada con (2.25) se obtiene que las ganancias del observador deben ser escogidas como:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_y(x, 0) \\ p_{10} &= p(0, 0) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Finalmente se obtiene que dado el sistema (2.21) se diseña un observador (2.22) con las ganancias (2.27) entonces el error (2.23) converge exponencialmente.

### 2.5.2. Observador tipo Luenberger para sistemas de dimensión infinita

En esta sección se presenta un resultado mostrado en [6], donde se estabiliza un sistema con parámetros distribuidos con retroalimentación de estados estimados mediante una extensión del observador de Luenberger para sistemas de dimensión infinita. Se considera una clase de sistemas con la estructura

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu(x, t), \quad t > 0 \\ y &= Cx \\ x(0) &= x^0 \in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \tag{2.28}$$

definidos en un espacio de Hilbert  $H$ ,  $x \in H$  es el estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control y  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida medible.  $A$  es un operador infinitesimal con un dominio denso  $\mathcal{D}(A)$  que genera un semigrupo fuertemente continuo  $T_A(t)$ ,  $B$  y  $C$  son operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert  $U$  y  $H$ . Suponiendo que el sistema es estabilizable y detectable, se propone un observador de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu(\tilde{x}) - L(y - C\tilde{x}) \\ u(\tilde{x}) &= D\tilde{x} \end{aligned}$$

donde  $D$  es un operador tal que  $A + BD$  genera un semigrupo exponencialmente estable (propiedad de estabilizabilidad) y  $L$  es un operador tal que  $A + LC$  genera un semigrupo exponencialmente estable (propiedad de detectabilidad). Además, bajo la suposición de que el sistema (2.28) es exponencialmente detectable y estabilizable,  $H$  puede ser descompuesto en

$H = H_1 \oplus H_2$ , y el sistema (2.28) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u(x, t) \\ \dot{x}_2 &= A_2x_2 + B_2u(x, t) \\ y &= C_1x + C_2x\end{aligned}$$

donde  $H_1 = \mathbb{R}^n$  es un subespacio de dimensión finita,  $A_j = A|_{H_j}$  y  $C_j = C|_{H_j}$  son operadores de restricción sobre  $H_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $B_j = P_jB$  y  $P_j$  esa una proyección sobre  $H_j$ . La separación de (2.28) en un subsistema  $x_1$  de dimensión finita con, posiblemente, una parte inestable y otro subsistema  $x_2$  estable ha sido reconocido como un método eficiente para estabilizar sistemas de dimensión infinita, como se describe en [27].

## Capítulo 3

# Diseño del observador por modos deslizantes para EDP de tipo parabólico

En este capítulo se presenta la integración de las dos metodologías principales descritas en los preliminares matemáticos: la técnica de backstepping propuesta por [5] y modos deslizantes [21].

### 3.1. Clase de sistemas en EDP

Se considera a una clase de sistemas cuya dinámica puede ser representada por una clase de EDP tipo parabólico como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\bar{u}_t(x, t) &= \bar{a}\bar{u}_{xx}(x, t) + \bar{b}(x)\bar{u}_x(x, t) \\ &+ \bar{c}(x)\bar{u}(x, t) + \bar{g}(x)\bar{u}(0, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde la notación usada es la siguiente

$$\bar{u}_t(x, t) := \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t}$$

$$\bar{u}_x(x, t) := \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} \quad \bar{u}_{xx}(x, t) := \frac{\partial^2 \bar{u}(x, t)}{\partial x^2}$$

El dominio de la EDP es  $x \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ , donde  $x$  es la variable espacial escalada y  $t$  es el tiempo. Las condiciones a la frontera son

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(0, t) &= q\bar{u}(0, t) \\ \bar{u}(1, t) &= U(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde la medición se puede realizar en  $\bar{u}(0, t)$  y la función de entrada puede aplicarse en  $\bar{u}(1, t)$ . Los parámetros y las funciones no lineales involucradas en (3.1) satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \bar{a} > 0, \quad q \in \mathbb{R} \quad \bar{b}(\cdot), \bar{c}(\cdot), \bar{g}(\cdot) &\in C^1[0, 1] \\ \bar{b}(0) = 0 \quad \bar{b}_x(0) = 0 \\ \bar{b}(x)_{x=1} = \bar{b}(x)_{x=0} \quad \bar{b}_x(x)_{x=1} = \bar{b}_x(x)_{x=0} \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, puede ser mostrado que  $\bar{b}(x) = 0$  no disminuye la cantidad de sistemas involucrados en (3.1) debido a que existe una transformación no lineal invertible que transforma al sistema (3.1) en otro donde  $\bar{b}(x) = 0$  y la demás estructura del sistema es mantenida. La transformación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &\rightarrow u(x, t) e^{r(x)} \\ r(x) &:= -\frac{1}{2a} \int_0^x \bar{b}(y) dy \end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces el sistema original (3.1) puede ser convertido en

$$u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) + c(x)u(x, t) + g(x)u(0, t) \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a &:= \bar{a} \\
 c(x) &:= -\bar{b}_x(x) + \frac{1}{4\bar{a}^2}\bar{b}^2(x) - \frac{1}{2\bar{a}}\bar{b}^2(x) + \bar{c}(x) \\
 g(x) &:= \frac{\bar{g}(x)e^{r(0)}}{e^{r(x)}}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Las nuevas funciones y parámetros obtenidos deben satisfacer los siguiente

$$\begin{aligned}
 a > 0, q \in \mathbb{R} \quad c(\cdot), g(\cdot) \in C^1[0, 1] \\
 \int c(x) dx|_{x=1} = -\mu \quad \mu > 0 \quad c(0) = 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Las condiciones a la frontera se mantienen, no sufren cambios significativos, es decir,

$$\begin{aligned}
 u_x(0, t) &= \bar{u}_x(0, t) = qu(0, t) \\
 \alpha u(1, t) &= \bar{u}(1, t) = U(t) \\
 \alpha &= e^{r(1)}
 \end{aligned}$$

La medición de este nuevo sistema está en  $u(0, t)$  y la función de entrada se aplica en  $u(1, t)$ .

La prueba de la transformación se puede observar en el apéndice A de esta tesis.

### 3.2. Observador por modos deslizantes - Observador 1

Se considera a la clase de sistemas descritos por (3.1) con (3.2) y como ha sido visto anteriormente, puede ser transformado en (3.4) con (3.5). El diseño del observador, será desarrollado empleando al sistema transformado (3.4) con (3.5). En el caso en particular de esta tesis, se ha trabajado con el arreglo actuación-medición conocido como anticolocado donde se considera lo siguiente

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &\rightarrow \text{Medible} \\
 u(1, t) &= \alpha^{-1}U(t) \rightarrow \text{Función de entrada}
 \end{aligned}$$

El observador propuesto satisface la siguiente EDP tipo parabólico

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(x, t) &= a\hat{u}_{xx}(x, t) + g(x)u(0, t) + c(x)\hat{u}(x, t) \\ &\quad + K_0(x)\text{sign}(u(0, t) - \hat{u}(0, t)) \\ \hat{u}_x(0, t) &= qu(0, t) + K_2(t)\text{sign}[u(0, t) - \hat{u}(0, t)]\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\hat{u}(1, t) = \alpha^{-1}U(t)$$

Puede notarse que la estructura es similar a la del sistema original agregando dos términos de corrección en función de la salida:  $K_0(x)\text{sign}(u(0, t) - \hat{u}(0, t))$  para el estado y  $K_2(t)\text{sign}[u(0, t) - \hat{u}(0, t)]$  para la condición en la frontera. Considerando al sistema transformado (3.4) con (3.5), se puede definir la dinámica del error de la forma

$$\tilde{u}(x, t) := u(x, t) - \hat{u}(x, t)$$

Diferenciando el error con respecto al tiempo

$$\tilde{u}_t(x, t) := u_t(x, t) - \hat{u}_t(x, t)$$

Sustituyendo  $u_t(x, t)$  y  $\hat{u}_t(x, t)$  de las ecuaciones (3.4) y (3.7) se obtiene la dinámica del error, el cual se describe a continuación

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x)\tilde{u}(x, t) - K_0(x)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ \tilde{u}_x(0, t) &= -K_2\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_3\tilde{u}(0, t) \\ \tilde{u}(1, t) &= 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

La idea desarrollada en [5], [7] y [18] consiste en estabilizar el error de estimación. Para lograrlo se propone una transformación lineal tipo Volterra de la forma

$$\tilde{w}(x, t) = \tilde{u}(x, t) - \int_0^x M(x, y)\tilde{u}(y, t)dy\tag{3.9}$$

Esta transformación será empleada para llevar a la dinámica del error (3.8) a un sistema que es exponencialmente estable en las coordenadas de  $\tilde{w}(x, t)$ . Para lograr que esta transformación sea posible, es necesario encontrar cuales son las condiciones que debe satisfacer el kernel  $M(x, y)$ . Posteriormente se verifica que la transformación sea invertible y así probar la causalidad de la transformación. El sistema objetivo que se propone en esta tesis es el siguiente

$$\begin{aligned}\tilde{w}_t(x, t) &= \tilde{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ \tilde{w}_x(0, t) &= -q_2\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ \tilde{w}(1, t) &= 0\end{aligned}\tag{3.10}$$

La estabilidad del sistema objetivo se probó mediante teoría de Lyapunov. Los detalles se muestran en el apéndice F. Uno de los resultados principales de esta tesis se resume en el siguiente teorema.

**Theorem 1** *Sea el sistema dado por (3.1) con las condiciones a la frontera (3.2) y parámetros y funciones no lineales dadas por (3.6). Mediante la transformación no lineal (3.3), el sistema original puede ser descrito por (3.4) con las condiciones a la frontera (6.3) y los parámetros y funciones no lineales resultantes (3.5) satisfacen (6.2). Entonces, un observador con la estructura (3.7) se propone para el sistema transformado (3.4) donde las ganancias de corrección del error de estimación se calculan de la forma*

$$\begin{aligned}K_0(x) &= \int_0^x K_0(y) M(x, y) dy - \tilde{K}_0(x) \\ K_2 &= q_2\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde  $M(x, y)$  satisface la siguiente ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} + c(x) - 2aM_x(x, x) - a\left(\frac{d}{dx}M(x, x)\right) &= 0 \\ -aM_{xx}(x, y) + \tilde{\mu}M(x, y) + c(y)M(x, y) + aM_{yy}(x, y) &= 0 \\ M(x, 0) &= 0 \\ K_0(x) - \int_0^x K_0(y) M(x, y) dy + \tilde{K}_0(x) &= 0\end{aligned}$$

con las condiciones a la frontera

$$\begin{aligned}
 M(x, 0) &= 0 \\
 M(1, y) &= 0 \\
 M(x, x) &= \frac{\mu x + \int c(x) dx}{3a}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

tal que la dinámica del error de observación (3.8), mediante la transformación (3.9) es visto en el nuevo sistema de coordenadas descritas por el sistema objetivo (3.10) y se obtiene convergencia tipo exponencial.

**Proof.** La prueba de este teorema se presenta con detalle en el apéndice B. ■

Para completar el diseño, se necesita establecer que la estabilidad del sistema objetivo (3.10) implica estabilidad en el sistema en lazo cerrado dado por (3.8) y (3.11). Para lograr probar la invertibilidad de la transformación (3.9), es necesario proponer una nueva transformación

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L(x, y) \tilde{w}(y, t) dy \tag{3.13}$$

El resultado de invertibilidad se resume en el siguiente teorema.

**Theorem 2** *Sea el sistema dado por (3.1) con las condiciones a la frontera (3.2) y parámetros y funciones no lineales dadas por (3.6). Mediante la transformación no lineal (3.3), el sistema original puede ser descrito por (3.4) con las condiciones a la frontera (6.3) y los parámetros y funciones no lineales resultantes (3.5) satisfacen (6.2). Entonces, bajo la suposición de que el teorema 1 se satisface, las condiciones para que el sistema objetivo (3.10) bajo la nueva*

transformación (3.13) sea descrito por (3.8) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
& -c(x) - \tilde{\mu} - 2\bar{a}L_x(x, x) - a\frac{dL(x, x)}{dx} = 0 \\
& -c(x)L(x, y) - \tilde{\mu}L(x, y) + \bar{a}L_{yy}(x, y) - \bar{a}L_{xx}(x, y) = 0 \\
& L(x, 0) = 0 \\
& L(1, y) = 0 \\
& \tilde{K}_0(x) = \int_0^x \tilde{K}_0(y)L(x, y) dy - K_0(x) \\
& q_2 = K_2
\end{aligned}$$

**Proof.** La prueba de este teorema se presenta con detalle en el apéndice C. ■

### 3.3. Observador por modos deslizantes - Observador 2

Se considera a la clase de sistemas descritos por (3.1) con (3.2) y como ha sido visto anteriormente, puede ser transformado en (3.4) con (3.5). El diseño del observador, será desarrollado empleando al sistema transformado (3.4) con (3.5). En el caso en particular de esta tesis, se ha trabajado con el arreglo actuación-medición conocido como anticolidado donde se considera lo siguiente

$$\begin{aligned}
& u(0, t) \rightarrow \text{Medible} \\
& u(1, t) = \alpha^{-1}U(t) \rightarrow \text{Función de entrada}
\end{aligned}$$

El observador propuesto satisface la siguiente EDP tipo parabólico

$$\begin{aligned}
& \hat{u}_t(x, t) = a\hat{u}_{xx}(x, t) + g(x)u(0, t) + c(x)\hat{u}(x, t) \\
& \quad + K_0(x)\text{sign}(u(0, t) - \hat{u}(0, t)) \\
& \quad + K_1(x)[u(0, t) - \hat{u}(0, t)] \\
& \hat{u}_x(0, t) = qu(0, t) + K_2(t)\text{sign}[u(0, t) - \hat{u}(0, t)] \\
& \quad + K_3[u(0, t) - \hat{u}(0, t)] \\
& \hat{u}(1, t) = \alpha^{-1}U(t)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Puede notarse que la estructura es similar a la del sistema original agregando cuatro términos de corrección en función de la salida, a diferencia del observador 1. Estos términos son:  $K_0(x) \text{sign}(u(0,t) - \hat{u}(0,t))$  y  $K_1(x)[u(0,t) - \hat{u}(0,t)]$  para el estado y  $K_2(t)\text{sign}[u(0,t) - \hat{u}(0,t)]$  y  $K_3[u(0,t) - \hat{u}(0,t)]$  para la condición en la frontera. Considerando al sistema transformado (3.4) con (3.5), se puede definir la dinámica del error de la forma

$$\tilde{u}(x,t) := u(x,t) - \hat{u}(x,t)$$

Diferenciando el error con respecto al tiempo

$$\tilde{u}_t(x,t) := u_t(x,t) - \hat{u}_t(x,t)$$

Sustituyendo  $u_t(x,t)$  y  $\hat{u}_t(x,t)$  de las ecuaciones (3.4) y (3.14) se obtiene la dinámica del error, el cual se describe a continuación

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x,t) &= a\tilde{u}_{xx}(x,t) + c(x)\tilde{u}(x,t) - K_0(x)\text{sign}(\tilde{u}(0,t)) - K_1(x)\tilde{u}(0,t) \\ \tilde{u}_x(0,t) &= -K_2\text{sign}(\tilde{u}(0,t)) - K_3\tilde{u}(0,t) \\ \tilde{u}(1,t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La idea desarrollada en [5], [7] y [18] consiste en estabilizar el error de estimación. Para lograrlo se propone una transformación lineal tipo Volterra de la forma

$$\tilde{w}(x,t) = \tilde{u}(x,t) - \int_0^x M(x,y)\tilde{u}(y,t)dy \tag{3.16}$$

que se empleará para llevar a la dinámica del error (3.15) a un sistema que es exponencialmente estable en las coordenadas de  $\tilde{w}(x,t)$ . Para lograr que esta transformación sea posible, es necesario encontrar cuales son las condiciones que debe satisfacer el kernel  $M(x,y)$ . Y posteriormente verificar que la transformación sea invertible y así probar la causalidad de la

transformación. El sistema objetivo que se propone en esta tesis es el siguiente

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \\
\tilde{w}_x(0, t) &= -q_1\tilde{w}(0, t) - q_2\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\
\tilde{w}(1, t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

La estabilidad del sistema objetivo se probó mediante teoría de Lyapunov. Los detalles se muestran en el apéndice G. Uno de los resultados principales de esta tesis se resume en el siguiente teorema

**Theorem 3** *Sea el sistema dado por (3.1) con las condiciones a la frontera (3.2) y parámetros y funciones no lineales dadas por (3.6). Mediante la transformación no lineal (3.3), el sistema original puede ser descrito por (3.4) con las condiciones a la frontera (6.3) y los parámetros y funciones no lineales resultantes (3.5) satisfacen (6.2). Entonces, un observador con la estructura (3.14) se propone para el sistema transformado (3.4) donde las ganancias de corrección del error de estimación se calculan de la forma*

$$\begin{aligned}
K_0(x) &= \int_0^x K_0(y) M(x, y) dy - \tilde{K}_0(x) \\
K_1(x) &= \int_0^x K_1(y) M(x, y) dy - \tilde{K}_1(x) \\
K_2 &= q_2 \\
K_3 &= q_1
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde  $M$  satisface (6.6) con las condiciones a la frontera

$$\begin{aligned}
M(x, 0) &= 0 \\
M(1, y) &= 0 \\
M(x, x) &= \frac{\mu x + \int c(x) dx}{3a}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

tal que la dinámica del error de observación (3.15), mediante la transformación (3.16) es visto en el nuevo sistema de coordenadas descritas por el sistema objetivo (3.17) y se obtiene convergencia tipo exponencial.

**Proof.** La prueba de este teorema se presenta con detalle en el apéndice D. ■

Para completar el diseño, se necesita establecer que la estabilidad del sistema objetivo (3.10) implica estabilidad en el sistema en lazo cerrado dado por (3.8) y (3.11). Para lograr probar la invertibilidad de la transformación (3.9), es necesario proponer una nueva transformación

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L(x, y) \tilde{w}(y, t) dy \quad (3.20)$$

El resultado de invertibilidad se resume en el siguiente teorema.

**Theorem 4** *Sea el sistema dado por (3.1) con las condiciones a la frontera (3.2) y parámetros y funciones no lineales dadas por (3.6). Mediante la transformación no lineal (3.3), el sistema original puede ser descrito por (3.4) con las condiciones a la frontera (6.3) y los parámetros y funciones no lineales resultantes (3.5) satisfacen (6.2). Entonces, bajo la suposición de que el teorema 3 se satisface, las condiciones para que el sistema objetivo (3.17) bajo la nueva transformación (3.16) sea descrito por (3.15) son las siguientes:*

$$\begin{aligned} -c(x) - \tilde{\mu} - 2\bar{a}L_x(x, x) - a\frac{dL(x, x)}{dx} &= 0 \\ -c(x)L(x, y) - \tilde{\mu}L(x, y) + \bar{a}L_{yy}(x, y) - \bar{a}L_{xx}(x, y) &= 0 \\ L(x, 0) &= 0 \\ L(1, y) &= 0 \\ \tilde{K}_0(x) &= \int_0^x \tilde{K}_0(y)L(x, y) dy - K_0(x) \\ \tilde{K}_1(x) &= \int_0^x \tilde{K}_1(y)L(x, y) dy - K_1(x) \\ q_1 &= K_3 \\ q_2 &= K_2 \end{aligned}$$

**Proof.** La prueba de este teorema se presenta con detalle en el apéndice E. ■

# Capítulo 4

## Resultados de simulación

### 4.1. Observador para EDP tipo parabólico por Modos Deslizantes

El sistema considerado en este ejemplo está descrito por las siguientes EDP tipo parabólico

$$u_t(x, t) = 0,01u_{xx}(x, t) + (0,2 \sin(\pi x) + 0,01 \sin(2\pi x) + 0,015 \sin(0,5\pi x)) u(x, t)$$

Como se ha mencionado en el arreglo antecedido, los datos disponibles en medición están de  $u(0, t)$  y la función de entrada está en  $u(1, t) = 10 \sin(3t)$ .

La dinámica del sistema inestable, con condiciones iniciales arbitrarias se muestra en la figura (4-1)

El comportamiento del kernel, que es calculado previamente, antes del observador, se muestra en la figura (4-2), donde es evidente que satisface las condiciones necesarias obtenidas durante la prueba. Las oscilaciones que se muestran a lo largo de  $M(x, x)$  están dadas por diferentes valores de los parámetros y funciones del sistema, en este caso en particular, de  $a$  y  $c(x)$ .

Una vez que el kernel es numéricamente calculado, las funciones de inyección de salida pueden ser obtenidas de acuerdo con (3.11). La figura (4-3) muestra la distribución espacial de la función de inyección de la salida  $K_0(x)$  de la estructura del observador. De ahí que el observador puede ser computado.

Una vez que el kernel es numéricamente calculado, y las ganancias del observador son cono-

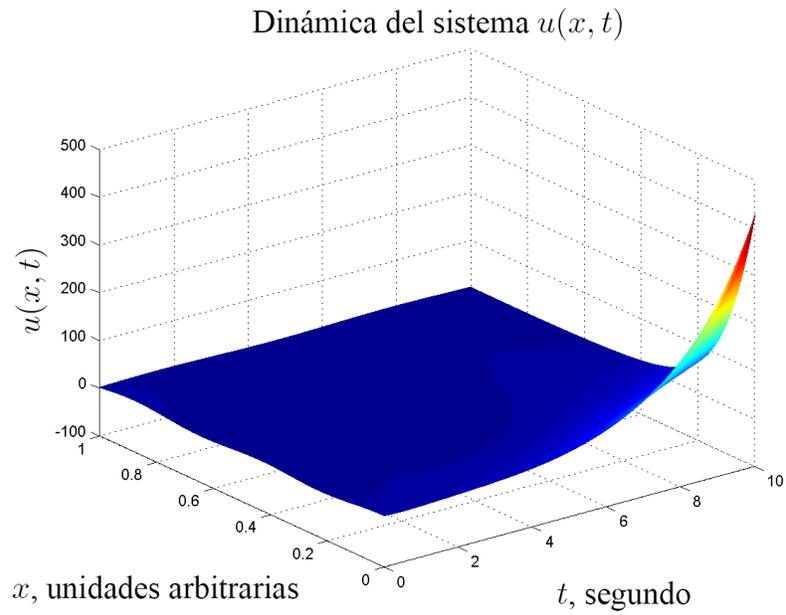


Figura 4-1: Dinámica del sistema inestable en EDP tipo parabólico

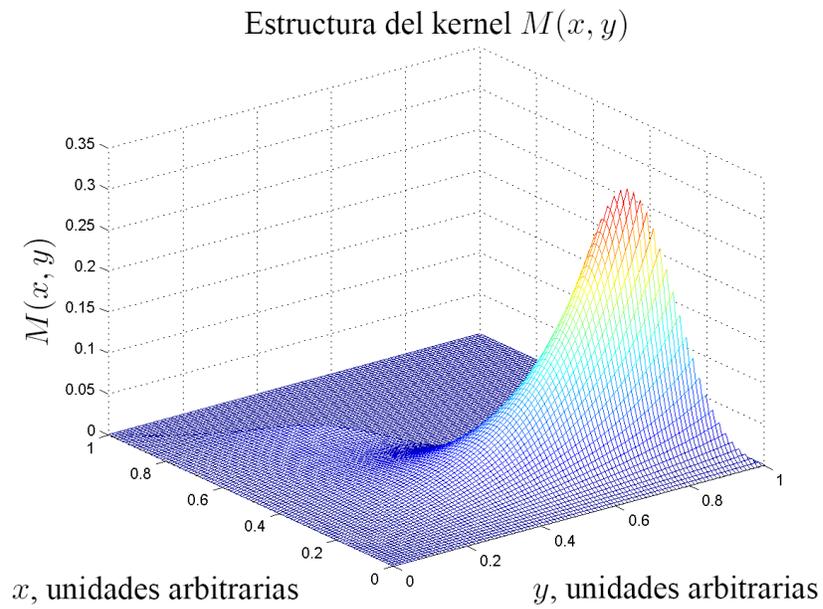


Figura 4-2: Estructura del Kernel de la transformación para el observador 1

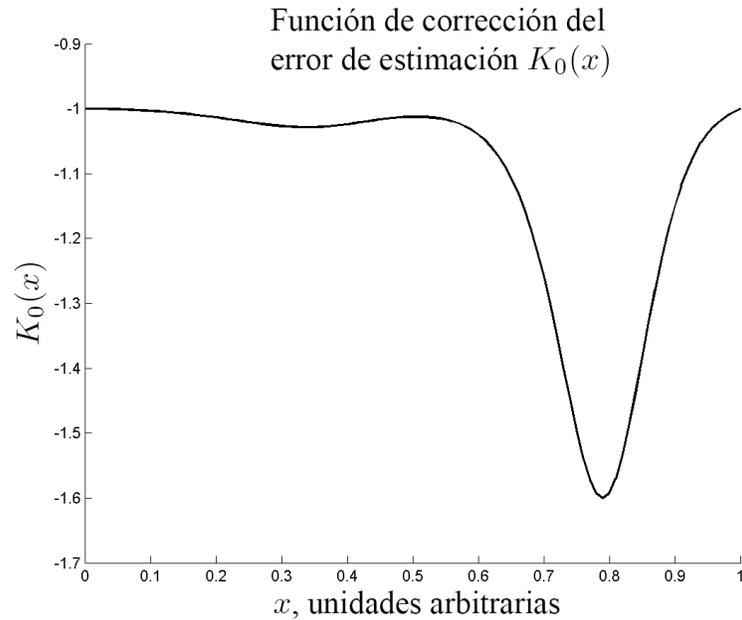


Figura 4-3: Distribución en el espacio del error de salida por  $K_0(x)$  para el observador 1

cidas, puede computarse el observador. En la figura (4-4) se muestra la dinámica del observador. Evidentemente las condiciones iniciales, que son escogidas arbitrariamente, son diferentes a las de la planta en algunos puntos del espacio.

Como es visualmente complicado graficar el sistema y el observador juntos, una forma de mostrar que el observador converge al sistema es mediante la gráfica del error la cual puede ser observada en la figura (4-5). Es evidente que las trayectorias del error en todo el espacio convergen a cero.

Como es esperado, en la frontera  $x = 0$  el observador converge en tiempo finito. Sin embargo, en otros valores de la variable espacial  $x$  la convergencia se obtiene de forma exponencial. Esto puede ser visto en la figura (4-6) donde arbitrariamente han sido escogidos algunos valores de  $x_i$  y se ha graficado  $u(x_i, t)$ . En este caso en particular, los puntos  $x_i$  escogidos son los siguientes:  $x = 0$ ,  $x = 0,25$ ,  $x = 0,5$  y  $x = 0,75$ .

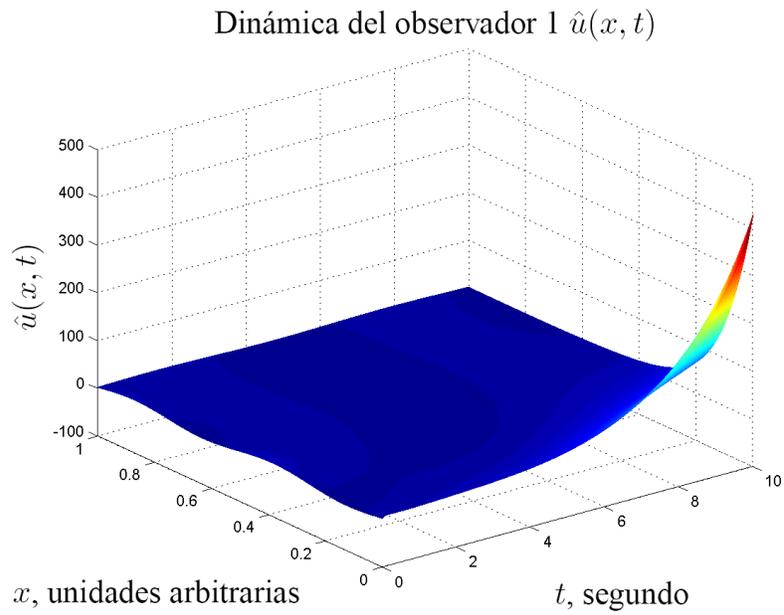


Figura 4-4: Dinámica del observador 1

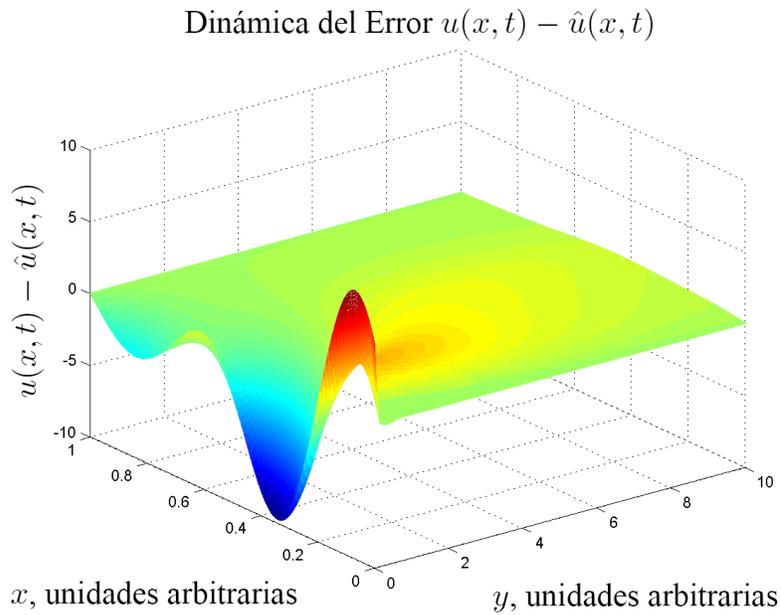


Figura 4-5: Dinámica del error de observación, cuando se aplica el observador 1

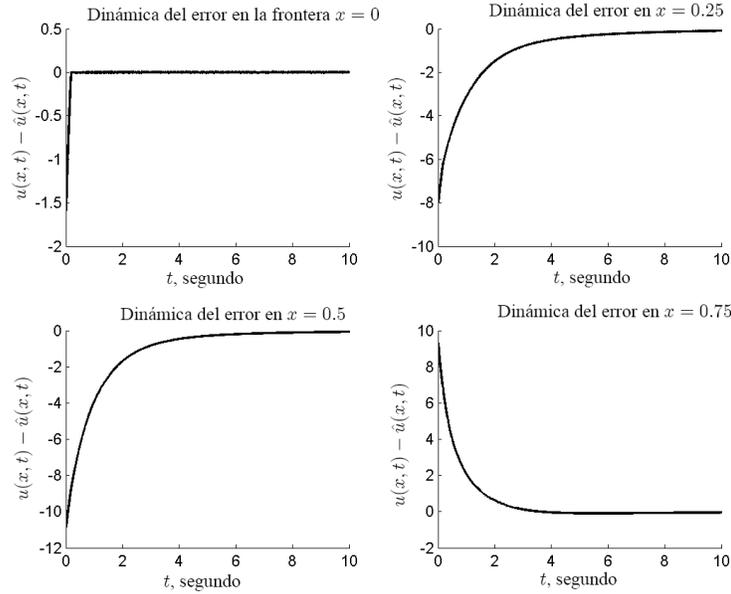


Figura 4-6: Gráfica del error de estimación en  $u(x_i, t)$  para los puntos  $x = 0$ ,  $x = 0,25$ ,  $x = 0,5$  y  $x = 0,75$ . El observador aplicado es el 1.

## 4.2. Observador para EDP tipo parabólico por Modos Deslizantes y el término lineal

El sistema considerado en este ejemplo está descrito por las siguientes EDP tipo parabólico

$$u_t(x, t) = 0,02u_{xx}(x, t) - (0,2 \sin(\pi x) - 0,01 \sin(2\pi x) + 0,15 \sin(5\pi x)) u(x, t)$$

Como se ha mencionado en el erreglo anticolocado, los datos disponibles en medición están de  $u(0, t)$  y la función de entrada está en  $u(1, t) = 10 \sin(3t)$ .

La dinámica del sistema inestable, con condiciones iniciales arbitrarias se muestra en la figura (4-7)

El comportamiento del kernel, que es calculado previamente, antes del observador, se muestra en la figura (4-8), donde es evidente que satisface las condiciones necesarias obtenidas durante la prueba. Las oscilaciones que se muestran a lo largo de  $M(x, x)$  estánda dadas por

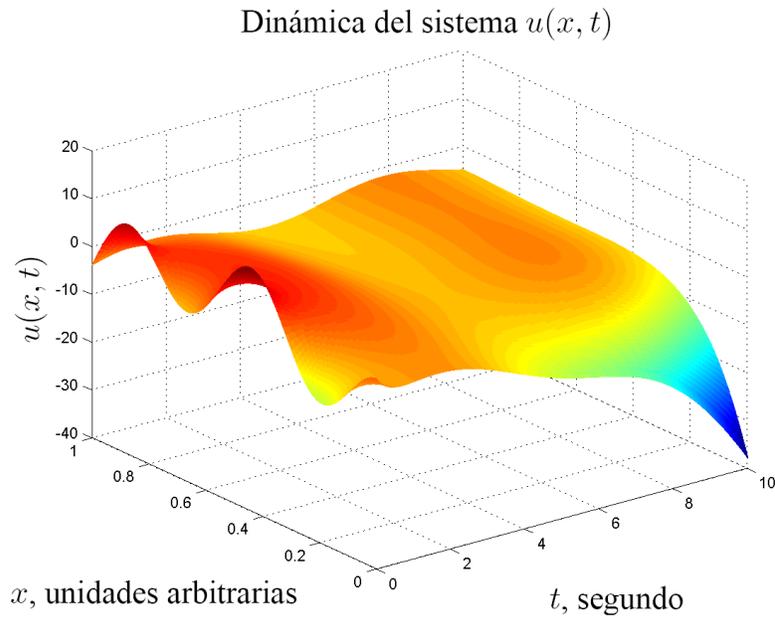


Figura 4-7: Dinámica del sistema inestable en EDP tipo parabólico

diferentes valores de los parámetros y funciones del sistema, en este caso en particular, de  $a$  y  $c(x)$ .

Una vez que el kernel es numéricamente calculado, las funciones de inyección de salida pueden ser obtenidas de acuerdo con (3.18). La figura (4-3) muestra la distribución espacial de la función de inyección de la salida  $K_0(x)$  de la estructura del observador. De ahí que el observador puede ser computado.

La figura (4-10) muestra la distribución espacial de la función de inyección de la salida  $K_1(x)$  de la estructura del observador. De ahí que el observador puede ser computado.

Una vez que el kernel es numéricamente calculado, y las ganancias del observador son conocidas, puede computarse el observador. En la figura (4-11) se muestra la dinámica del observador. Evidentemente las condiciones iniciales, que son escogidas arbitrariamente, son diferentes a las de la planta en algunos puntos del espacio.

Como es visualmente complicado graficar el sistema y el observador juntos, una forma de mostrar que el observador converge al sistema es mediante la gráfica del error la cual puede ser observada en la figura (4-12)

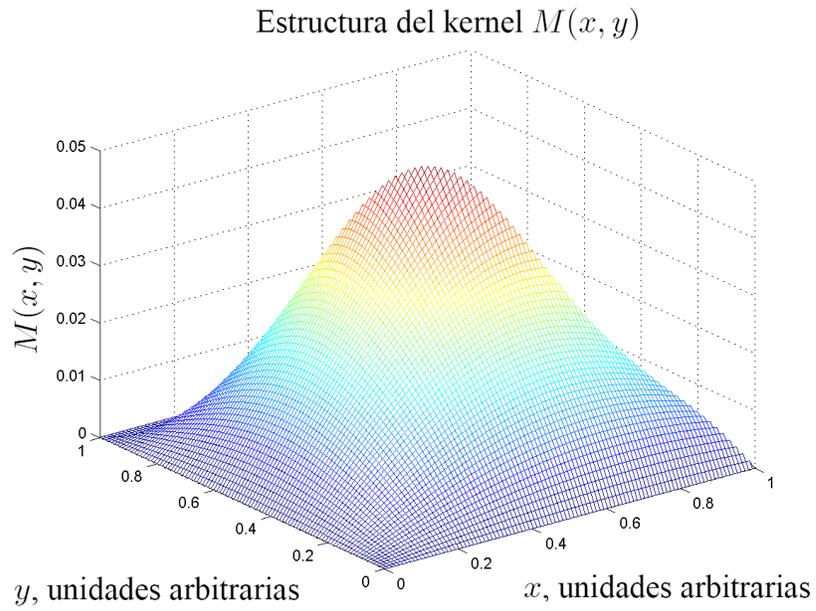


Figura 4-8: Estructura del Kernel cuando se aplica el observador 2

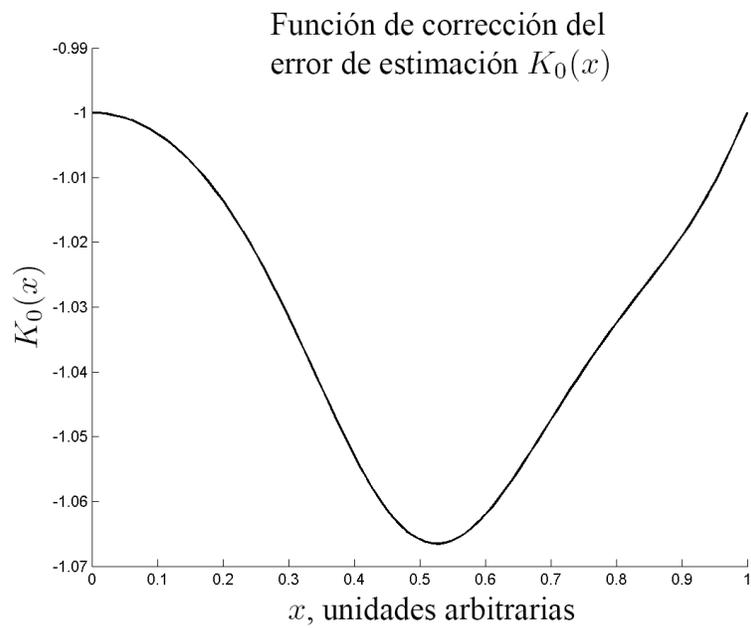


Figura 4-9: Distribución en el espacio del error de salida por  $K_0(x)$  para el observador 2

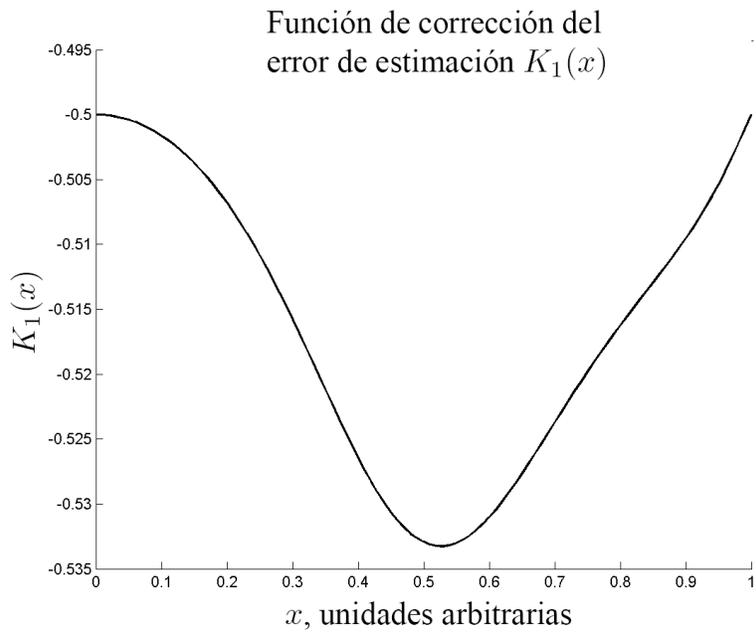


Figura 4-10: Distribución en el espacio del error de salida por  $K_1(x)$  para el observador 2

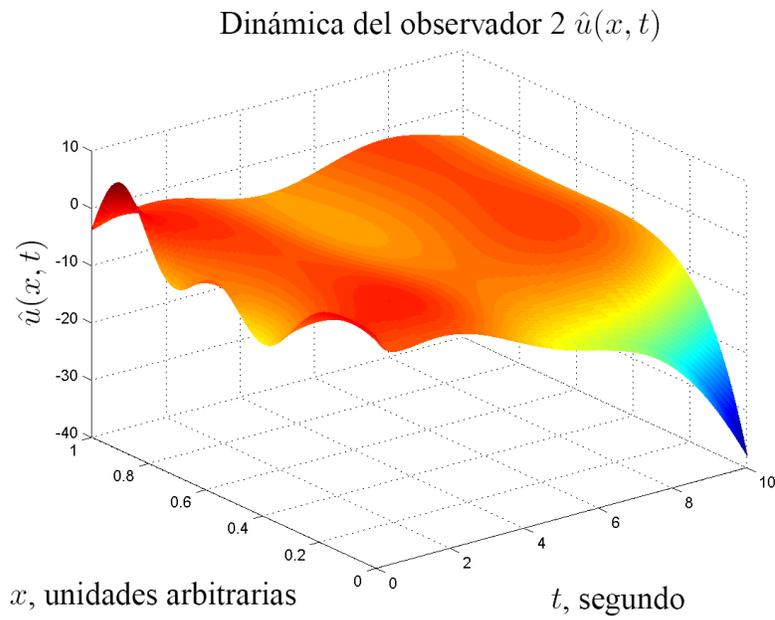


Figura 4-11: Dinámica del observador 2

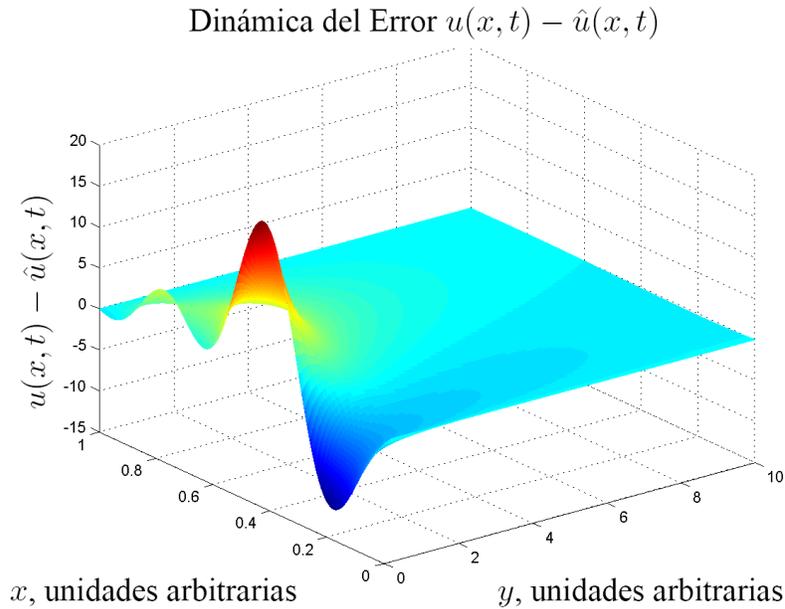


Figura 4-12: Dinámica del error de observación, cuando se aplica el observador 2

Como es esperado, en la frontera  $x = 0$  el observador converge en tiempo finito. Sin embargo, en otros valores de la variable espacial  $x$  la convergencia se obtiene de forma exponencial. Esto puede ser visto en la figura (4-13) donde arbitrariamente han sido escogidos algunos valores de  $x_i$  y se ha graficado  $u(x_i, t)$ . En este caso en particular, los puntos  $x_i$  escogidos son los siguientes:  $x = 0$ ,  $x = 0,25$ ,  $x = 0,5$  y  $x = 0,75$ .

### 4.3. Comparación entre los observadores por modos deslizantes y el obtenido previamente por Krstic

En esta sección se presenta la comparación de dos casos en particular (véanse figura 4-14), donde en rojo se muestra la norma del error cuando se tiene únicamente la ganancia  $K_0(x)$  correspondiente al primer observador, en negro se tienen los dos términos  $K_0(x)$  y  $K_1(x)$  correspondientes al segundo observador y en verde se presenta el caso previo, donde se tiene únicamente  $K_1(x)$ . Puede notarse que en ambos casos el comportamiento es similar, por lo que no se puede concluir que algunos de los observadores propuestos sea mejor.

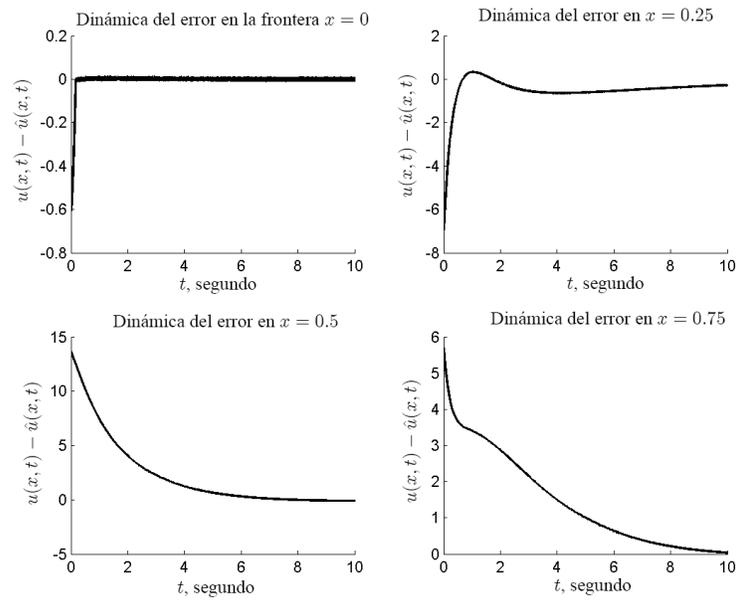


Figura 4-13: Gráfica del error de estimación en  $u(x_i, t)$  para los puntos  $x = 0$ ,  $x = 0,25$ ,  $x = 0,5$  y  $x = 0,75$ . El observador aplicado es el segundo.

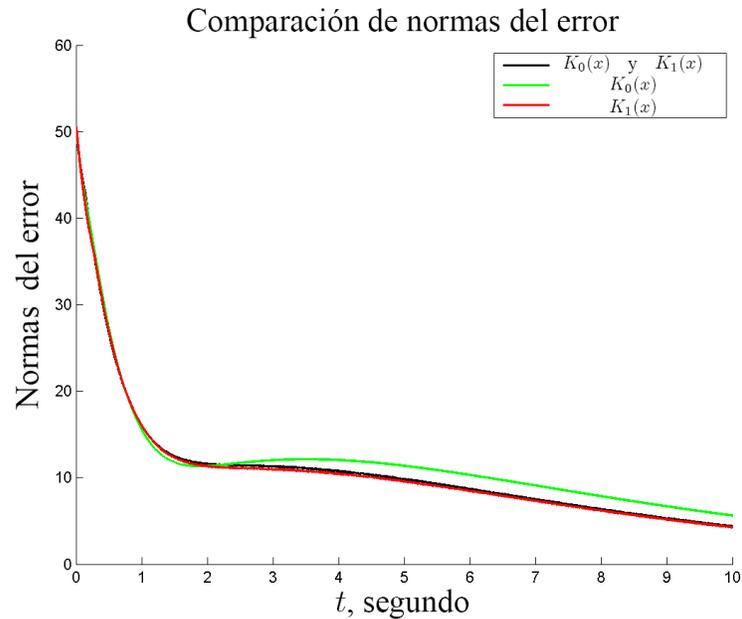


Figura 4-14: Comparación de normas entre el observador 1, el observador 2 y el existente anteriormente

## Capítulo 5

# Conclusiones

- En este trabajo se han presentado dos diseños de observadores para una clase de EDP tipo parabólico empleando la técnica de modos deslizantes y la transformación tipo backstepping.
- Se obtuvo convergencia exponencial en toda  $x$  excepto en  $x = 0$  donde convergencia en tiempo finito fue lograda para los dos casos
- Una transformación integral tipo Volterra fue empleada para hacer un cambio de coordenadas de la dinámica del error de observación (en los dos casos) hacia un sistema objetivo que es exponencialmente estable.
- Las funciones de corrección en las estructuras de los observadores fueron obtenidas mediante la solución de un kernel modelado con EDP tipo hiperbólico.
- La causalidad de la transformación tipo backstepping fue provada mediante la existencia de la invertibilidad de dicha transformación, la cual depende de la solución de otro kernel cuya dinámica también está regida por EDP tipo hiperbólico
- La estabilidad fue provada mediante teoría de Lyapunov.
- Los resultados numéricos demuestran la efectividad de aplicar este observador.

# Capítulo 6

## Apéndices

### 6.1. Apéndice A. Transformación de $\bar{u}(x, t) \rightarrow u(x, t)$

La prueba de esta transformación es como se muestra. Primero, se sustituye  $\bar{u}(x, t) \rightarrow u(x, t) e^{r(x)}$  en (3.1) obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} (u(x, t) e^{r(x)})_t &= \bar{a} (u(x, t) e^{r(x)})_{xx} + \bar{b}(x) (u(x, t) e^{r(x)})_x \\ &+ \bar{c}(x) (u(x, t) e^{r(x)}) + \bar{g}(x) (u(0, t) e^{r(0)}) \end{aligned}$$

Simplificando y obteniendo la derivada con respecto al tiempo del lado izquierdo de la ecuación y la derivada con respecto a  $x$  una vez en el lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) e^{r(x)} &= a \left( u(x, t) \frac{de^{r(x)}}{dx} + e^{r(x)} u_x(x, t) \right)_x \\ &+ b(x) \left( u(x, t) \frac{de^{r(x)}}{dx} + e^{r(x)} u_x(x, t) \right) \\ &+ c(x) (u(x, t) e^{r(x)}) + g(x) (u(0, t) e^{r(0)}) \end{aligned}$$

Simplificando el término  $a \left( u(x, t) \frac{de^{r(x)}}{dx} + e^{r(x)} u_x(x, t) \right)_x$  la ecuación resulta en

$$\begin{aligned} u_t(x, t) e^{r(x)} &= a \left( u(x, t) \frac{d^2 e^{r(x)}}{dx^2} + 2 \frac{de^{r(x)}}{dx} u_x(x, t) + e^{r(x)} u_{xx}(x, t) \right) \\ &+ b(x) \left( u(x, t) \frac{de^{r(x)}}{dx} + e^{r(x)} u_x(x, t) \right) \\ &+ c(x) (u(x, t) e^{r(x)}) + g(x) (u(0, t) e^{r(0)}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Donde las expresiones  $\frac{de^{r(x)}}{dx}$  y  $\frac{d^2 e^{r(x)}}{dx^2}$  pueden ser calculadas de la forma

$$\frac{de^{r(x)}}{dx} = -e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{d\left(\int_0^x b(y)dy\right)}{dx} = -e^{r(x)} \frac{1}{2a} \left(b(x) + \int_0^x b_x(y) dy\right)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= -e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{d\left(\int_0^x b(y)dy\right)}{dx} \\ &= -\frac{1}{2a} e^{r(x)} b(x) - \frac{1}{2a} e^{r(x)} \int_0^x b_x(y) dy \\ \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= -e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{d^2\left(\int_0^x b(y)dy\right)}{dx^2} - \frac{1}{2a} \frac{d\left(\int_0^x b(y)dy\right)}{dx} \frac{de^{r(x)}}{dx} \\ \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= -e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{d\left(b(x) + \int_0^x b_x(y)dy\right)}{dx} - \frac{1}{2a} \left(b(x) + \int_0^x b_x(y) dy\right) \frac{de^{r(x)}}{dx} \\ \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= -e^{r(x)} \frac{1}{2a} \left(b_x(x) + b_x(x) + \int_0^x b_{xx}(y) dy\right) \\ &\quad - \frac{1}{2a} \left(b(x) + \int_0^x b_x(y) dy\right) \left[-e^{r(x)} \frac{1}{2a} \left(b(x) + \int_0^x b_x(y) dy\right)\right] \\ \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= -e^{r(x)} \frac{2}{2a} b_x(x) - e^{r(x)} \frac{1}{2a} \int_0^x b_{xx}(y) dy \\ &\quad + e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{1}{2a} b(x)b(x) + e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{1}{2a} b(x) \int_0^x b_x(y) dy \\ &\quad + e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{1}{2a} b(x) \int_0^x b_x(y) dy + e^{r(x)} \frac{1}{2a} \frac{1}{2a} \int_0^x b_x(y) dy \int_0^x b_x(y) dy \\ \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= \frac{1}{2a} e^{r(x)} \left\{-2b_x(x) - \int_0^x b_{xx}(y) dy + \frac{1}{2a} b^2(x)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2a} e^{r(x)} \left\{\left(\frac{1}{2a} b(x) + 1\right) \int_0^x b_x(y) dy + \left(\int_0^x b_x(y) dy\right)^2\right\} \end{aligned}$$

Entonces, suponiendo  $b(x)_{x=1} - b(x)_{x=0} = 0$  y  $b_x(x)_{x=1} - b_x(x)_{x=0} = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{de^{r(x)}}{dx} &= -e^{r(x)} \frac{1}{2a} b(x) \\ \frac{d^2e^{r(x)}}{dx^2} &= \frac{1}{2a} e^{r(x)} \left\{-2b_x(x) + \frac{1}{2a} b^2(x)\right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (6.1), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) e^{r(x)} &= a \left( u(x, t) \left[ \frac{1}{2a} e^{r(x)} \left\{ -2b_x(x) + \frac{1}{2a} b^2(x) \right\} \right] \right) \\
&+ a \left( 2 \left[ -e^{r(x)} \frac{1}{2a} b(x) \right] u_x(x, t) + e^{r(x)} u_{xx}(x, t) \right) \\
&+ b(x) \left( u(x, t) \left[ -e^{r(x)} \frac{1}{2a} b(x) \right] + e^{r(x)} u_x(x, t) \right) \\
&+ c(x) (u(x, t) e^{r(x)}) + g(x) (u(0, t) e^{r(0)})
\end{aligned}$$

Simplificando los términos de la expresión anterior se llega a

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) e^{r(x)} &= -u(x, t) e^{r(x)} b_x(x) + u(x, t) e^{r(x)} \frac{1}{4a^2} b^2(x) \\
&- e^{r(x)} b(x) u_x(x, t) + a e^{r(x)} u_{xx}(x, t) \\
&- \frac{1}{2a} b^2(x) u(x, t) e^{r(x)} + b(x) e^{r(x)} u_x(x, t) \\
&+ c(x) (u(x, t) e^{r(x)}) + g(x) (u(0, t) e^{r(0)})
\end{aligned}$$

Dividiendo entre  $e^{r(x)}$  se tiene

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= -u(x, t) b_x(x) + u(x, t) \frac{1}{4a^2} b^2(x) - b(x) u_x(x, t) + a u_{xx}(x, t) \\
&- \frac{1}{2a} b^2(x) u(x, t) + b(x) u_x(x, t) + c(x) u(x, t) + \frac{g(x) e^{r(0)}}{e^{r(x)}} u(0, t)
\end{aligned}$$

Rearreglando la última expresión

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= a u_{xx}(x, t) + g(x) u(0, t) \\
&+ \left[ -b_x(x) + \frac{1}{4a^2} b^2(x) - \frac{1}{2a} b^2(x) + c(x) \right] u(x, t)
\end{aligned}$$

Por lo que se puede concluir de ésta última expresión que

$$\begin{aligned}
\bar{a} &:= a \\
\bar{c}(x) &:= -b_x(x) + \frac{1}{4a^2} b^2(x) - \frac{1}{2a} b^2(x) + c(x) \\
\bar{g}(x) &:= \frac{g(x) e^{r(0)}}{e^{r(x)}}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Ahora, trabajando con las condiciones a la frontera se puede emplear la transformación (3.3) y sustituir  $x = 0$  de la forma

$$\begin{aligned}
\bar{u}(0, t) &= u(0, t) e^{r(0)} \\
r(0) &:= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(0, t) = \bar{u}(0, t)$$

Considerando ahora, la condición a la frontera, cuando  $x = 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{u}(1, t) &= u(1, t) e^{r(1)} \\ r(1) &:= -\frac{1}{2a} \int_0^1 \bar{b}(y) dy \end{aligned}$$

Entonces, definiendo  $\alpha = e^{r(1)}$  se tiene

$$u(1, t) = \alpha^{-1} \bar{u}(1, t) = \alpha^{-1} U(t)$$

Para hacer coincidir las condiciones a la frontera tipo Robin, se emplea la primer derivada con respecto a  $x$  de la transformación (3.3) como se muestra

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(x, t) &= u_x(x, t) e^{r(x)} + u(x, t) \frac{de^{r(x)}}{dx} \\ r(x) &:= -\frac{1}{2a} \int_0^x \bar{b}(y) dy \end{aligned}$$

Pero considerando que  $\frac{de^{r(x)}}{dx} = -e^{r(x)} \frac{1}{2a} b(x)$  y sustituyendo  $x = 0$  se tiene

$$\bar{u}_x(0, t) = u_x(0, t) + u(0, t) \left( -\frac{1}{2a} b(0) \right)$$

Bajo la suposición de que  $b(0) = 0$  se tiene que

$$u_x(0, t) = \bar{u}_x(0, t) = qu(0, t)$$

Finalmente, se puede concluir que los parámetros y funciones del sistema transformado satisfacen (6.2) y las condiciones a la frontera de este nuevo sistema transformado son

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \bar{u}(0, t) \\ u_x(0, t) &= \bar{u}_x(0, t) = qu(0, t) \\ u(1, t) &= \alpha^{-1} \bar{u}(1, t) = \alpha^{-1} U(t) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Por lo que queda comprobado que el sistema (3.1) mediante la transformación (3.3) y las condiciones a la frontera (3.2) y las condiciones de parámetros y funciones no lineales (3.6), puede ser transformado al sistema (3.4), con las condiciones a la frontera (6.3) y parámetros y funciones con condiciones (6.2).

## 6.2. Apéndice B. Prueba del observador 1

Con la finalidad de obtener las condiciones que se necesitan para que la transformación sea posible e invertible, el primer paso consiste en derivar con respecto al tiempo (3.10), quedando de la forma

$$\tilde{w}_t(x, t) = \tilde{u}_t(x, t) + \int_0^x M(x, y) \tilde{u}_t(y, t) dy$$

Sustituyendo  $\tilde{u}_t(x, t)$  en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x)\tilde{u}(x, t) - K_0(x)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ &+ \int_0^x M(x, y) [a\tilde{u}_{yy}(y, t) + c(y)\tilde{u}(y, t) - K_0(y)\text{sign}(\tilde{u}(0, t))] dy \end{aligned}$$

Simplificando los términos dentro de la integral

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x)\tilde{u}(x, t) - K_0(x)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ &+ \int_0^x a\tilde{u}_{yy}(y, t) M(x, y) dy + \int_0^x c(y)\tilde{u}(y, t) M(x, y) dy \\ &\quad - \int_0^x K_0(y)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \end{aligned}$$

Integrando por partes  $a \int_0^x \tilde{u}_{yy}(y, t) M(x, y) dy$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} a \int_0^x \tilde{u}_{yy}(y, t) M(x, y) dy &= a\tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) \\ &\quad - a\tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\ &\quad + \int_0^x a\tilde{u}(y, t) M_{yy}(x, y) dy \end{aligned}$$

Por lo tanto, la simplificación queda

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x) \tilde{u}(x, t) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ &\quad + \int_0^x c(y) \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\ &\quad + a\tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) - a\tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\ &\quad + \int_0^x a\tilde{u}(y, t) M(x, y) dy \end{aligned}$$

Ahora, derivando con respecto a  $x$  se tiene

$$\tilde{w}_x(x, t) = \tilde{u}_x(x, t) + \frac{d\left(\int_0^x M(x, y) \tilde{u}(y, t) dy\right)}{dx}$$

Por la regla de diferenciación de Leibnitz

$$\frac{d\left(\int_0^x f(x, y) dy\right)}{dx} = f(x, x) + \int_0^x f_x(x, y) dy \quad (6.4)$$

La expresión queda

$$\tilde{w}_x(x, t) = \tilde{u}_x(x, t) + M(x, x) \tilde{u}(x, t) + \int_0^x M_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy$$

Derivando con respecto a  $x$  por segunda ocasión, se tiene

$$\tilde{w}_{xx}(x, t) = \tilde{u}_{xx}(x, t) + M(x, x) \tilde{u}_x(x, t) + \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \tilde{u}(x, t) + \frac{d \left( \int_0^x M_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \right)}{dx}$$

Nuevamente, usando la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{xx}(x, t) = & \tilde{u}_{xx}(x, t) + \tilde{u}_x(x, t) M(x, x) + \tilde{u}(x, t) \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \\ & + \tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + \int_0^x M_{xx}(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \end{aligned}$$

Se tiene ahora, por la sustitución de  $w_t(x, t)$  y  $w_{xx}(x, t)$  en el sistema objetivo (3.10), lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mu} \left( \tilde{u}(x, t) + \int_0^x M(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \right) - \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ & a \tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x) \tilde{u}(x, t) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ & + \int_0^x c(y) \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\ & + a \tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a \tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) \\ & - a \tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a \tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\ & + \int_0^x a \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy \\ & - a \tilde{u}_{xx}(x, t) - a \tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a \tilde{u}(x, t) \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \\ & - a \tilde{u}(x, t) M_x(x, x) - \int_0^x a M_{xx}(x, y) \tilde{u}(y, t) dy = 0 \end{aligned}$$

Simplificando se obtiene:

$$\tilde{\mu} \tilde{u}(x, t) + \tilde{\mu} \int_0^x M(x, y) \tilde{u}(y, t) dy - \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t))$$

$$\begin{aligned}
& +c(x) \tilde{u}(x, t) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\
& + \int_0^x c(y) \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\
& - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) \\
& - 2a\tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\
& + \int_0^x a\tilde{u}(y, t) M(x, y) dy \\
& - a\tilde{u}(x, t) \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \\
& - \int_0^x aM_{xx}(x, y) \tilde{u}(y, t) dy = 0
\end{aligned}$$

Agrupando términos con  $\tilde{u}(x, t)$  se llega a

$$\begin{aligned}
& \left[ \tilde{\mu} + c(x) - 2aM_x(x, x) - a \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \right] \tilde{u}(x, t) \\
& + \int_0^x [aM_{yy}(x, y) + \tilde{\mu}M(x, y) + c(y)M(x, y) - aM_{xx}(x, y)] \tilde{u}(y, t) dy \\
& - \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\
& - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\
& - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que, con la finalidad de que se satisfaga la ecuación anterior, y sabiendo que en general,  $\tilde{u}(x, t) \neq 0$ , se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico que describe la dinámica del kernel  $M(x, y)$ . Así, el comportamiento en EDP tipo Hiperbólico del kernel es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mu} + c(x) - 2aM_x(x, x) - a \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) = 0 \\
& -aM_{xx}(x, y) + \tilde{\mu}M(x, y) + c(y)M(x, y) + aM_{yy}(x, y) = 0 \\
& M(x, 0) = 0 \\
& K_0(x) - \int_0^x K_0(y) M(x, y) dy + \tilde{K}_0(x) = 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Una condición a la frontera del kernel  $M(x, y)$ , aparece cuando se sustituye  $x = 1$  en la transformación (3.9), quedando

$$\begin{aligned}\tilde{w}(1, t) &= \tilde{u}(1, t) - \int_0^1 M(1, y) \tilde{u}(y, t) dy \\ 0 &= 0 - \int_0^1 M(1, y) \tilde{u}(y, t) dy\end{aligned}$$

por lo que

$$M(1, y) = 0$$

Otra condición a la frontera es obtenida en la primer derivada con respecto a  $x$  de la transformación (3.9)

$$\tilde{w}_x(x, t) = \tilde{u}_x(x, t) - M(x, x) \tilde{u}(x, t) - \int_0^x M_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy$$

Si se evalúa en  $x = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_x(0, t) &= \tilde{u}_x(0, t) + K(0, 0) \tilde{u}(0, t) - \int_0^0 K_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \\ -q_2 \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) &= -K_2 \text{sign}(\tilde{u}(0, t))\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$K_2 = q_2$$

Integrando a lo largo de  $x$  la primera ecuación de (6.5) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu x + \int c(x) dx - 2aM(x, x) - aM(x, x) &= 0 \\ M(x, x) &= \frac{\mu x + \int c(x) dx}{3a}\end{aligned}$$

Anteriormente ha sido probado, por la ecuación 3 de (6.5), que  $M(0,0) = 0$  por lo que de la ecuación anterior, si se evalúa en  $x = 0$

$$M(0,0) = \frac{\mu(0) + \int c(x) dx|_{x=0}}{3a} = 0$$

Se obtiene otra condición:

$$c(0) = 0$$

Ahora, cuando  $x = 1$  el kernel está en  $M(1,1) = 0$ . Por lo que

$$M(1,1) = \frac{\mu + \int c(x) dx|_{x=1}}{3a} = 0$$

Entonces se concluye lo siguiente

$$\int c(x) dx|_{x=1} = -\mu$$

### 6.3. Apéndice C. Transformación inversa, prueba de causalidad - Observador 1

Con la finalidad de probar la invertibilidad de la transformación del teorema 1, se realizan los siguientes cálculos Considerando la transformación de coordenadas  $\tilde{u}(x,t) = \tilde{w}(x,t) + \int_0^x L(x,y) \tilde{w}(y,t) dy$ , puede notarse que cuando  $x = 0$ ,  $\tilde{u}(0,t) = \tilde{w}(0,t)$ , lo que corresponde a las condiciones dadas anteriormente. Derivando con respecto al tiempo (3.13) se obtiene:

$$\tilde{u}_t(x,t) = \tilde{w}_t(x,t) + \int_0^x L(x,y) \tilde{w}_t(y,t) dy$$

Sustituyendo  $\tilde{w}_t(x,t)$  en la ecuación resultante anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x,t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x,t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x,t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) \\ &+ \int_0^x L(x,y) \left[ \bar{a}\tilde{w}_{yy}(y,t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(y,t) + \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) \right] dy \end{aligned}$$

Simplificando los términos de la integral se llega a

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) \\ &\quad + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ &\quad + \int_0^x \bar{a}\tilde{w}_{yy}(y, t) L(x, y) dy - \int_0^x \tilde{\mu}\tilde{w}(y, t) L(x, y) dy \\ &\quad + \int_0^x \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0, t))L(x, y) dy\end{aligned}$$

Integrando por partes  $\int_0^x \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) L(x, y) dy$  se obtiene

$$\begin{aligned}a \int_0^x \tilde{w}_{xx}(x, t) L(x, y) dy &= \bar{a}\tilde{w}_y(y, t) L(x, y) \Big|_0^x - \bar{a}\tilde{w}(y, t) L_y(x, y) \Big|_0^x \\ &\quad + \int_0^x \bar{a}\tilde{w}(y, t) L_{yy}(x, y) dy\end{aligned}$$

Sustituyendo esta integración por partes en la ecuación obtenida anteriormente la expresión queda de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ &\quad - \int_0^x \tilde{\mu}\tilde{w}(y, t) L(x, y) dy + \int_0^x \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0, t))L(x, y) dy \\ &\quad + \bar{a}\tilde{w}_x(x, t) L(x, x) - \bar{a}\tilde{w}_x(0, t) L(x, 0) \\ &\quad - \bar{a}\tilde{w}(x, t) L_x(x, x) + \bar{a}\tilde{w}(0, t) L_x(x, 0) + \int_0^x \bar{a}\tilde{w}(y, t) L_{yy}(x, y) dy\end{aligned}$$

Ahora, derivando con respecto a  $x$  se logra

$$\tilde{u}_x(x, t) = \tilde{w}_x(x, t) + \frac{d\left(\int_0^x L(x, y)\tilde{w}(y, t)dy\right)}{dx}$$

Usando la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4), se obtiene

$$\tilde{u}_x(x, t) = \tilde{w}_x(x, t) + L(x, x) \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L_x(x, y) \tilde{w}(y, t) dy$$

Nótese que cuando la expresión se evalúa en  $x = 0$ , se llega a tener

$$\tilde{u}_x(0, t) = \tilde{w}_x(0, t) + L(0, 0) \tilde{w}(0, t)$$

Sustituyendo  $\tilde{u}_x(0, t)$  y  $\tilde{w}_x(0, t)$  de las condiciones iniciales de (3.8) y (3.10), se logra obtener

$$-K_2 \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) = -q_2 \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + L(0, 0) \tilde{w}(0, t)$$

Se puede concluir que

$$q_2 = K_2 + L(0, 0)$$

Ahora, derivando con respecto a  $x$  otra vez, se tiene

$$\tilde{u}_{xx}(x, t) = \tilde{w}_{xx}(x, t) + \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) + \tilde{w}(x, t) \frac{dL(x, x)}{dx} + \frac{d\left(\int_0^x L_x(x, y) \tilde{w}(y, t) dy\right)}{dx}$$

Empleando la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4), se llega a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx}(x, t) &= \tilde{w}_{xx}(x, t) + \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) + \tilde{w}(x, t) \frac{dL(x, x)}{dx} \\ &\quad + L_x(x, x) \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L_{xx}(x, y) \tilde{w}(y, t) dy \end{aligned}$$

Usando la dinámica del error (3.8) y sustituyendo  $\tilde{u}_t(x, t)$  and  $\tilde{u}_{xx}(x, t)$  obtenidas mediante la derivación de (3.13) con respecto a  $x$  dos veces y con respecto a  $t$ , la expresión resultante es la

siguiente

$$\begin{aligned}
& -c(x) \tilde{u}(x, t) + K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\
& + \bar{a} \tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu} \tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\
& - \int_0^x \tilde{\mu} \tilde{w}(y, t) L(x, y) dy + \int_0^x \tilde{K}_0(y) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) L(x, y) dy \\
& + \bar{a} \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) - \bar{a} \tilde{w}_x(0, t) L(x, 0) \\
& - \bar{a} \tilde{w}(x, t) L_x(x, x) + \bar{a} \tilde{w}(0, t) L_x(x, 0) + \int_0^x \bar{a} \tilde{w}(y, t) L_{yy}(x, y) dy \\
& - a \tilde{w}_{xx}(x, t) - a \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) - a \tilde{w}(x, t) \frac{dL(x, x)}{dx} \\
& - a L_x(x, x) \tilde{w}(x, t) - a \int_0^x L_{xx}(x, y) \tilde{w}(y, t) dy = 0
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos se logra reducir la expresión anterior en

$$\begin{aligned}
& \left[ -c(x) - \tilde{\mu} - 2\bar{a}L_x(x, x) - a \frac{dL(x, x)}{dx} \right] \tilde{w}(x, t) \\
& + \int_0^x [-c(x) L(x, y) - \tilde{\mu} L(x, y) + \bar{a} L_{yy}(x, y) - \bar{a} L_{xx}(x, y)] \tilde{w}(y, t) dy \\
& + K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\
& + \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\
& + \int_0^x \tilde{K}_0(y) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) L(x, y) dy \\
& - \bar{a} \tilde{w}_x(0, t) L(x, 0) + \bar{a} \tilde{w}(0, t) L_x(x, 0) = 0
\end{aligned}$$

Adicionalmente, las siguientes condiciones deben satisfacerse de manera similar y análoga a las obtenidas en el teorema 1

$$\begin{aligned}
-c(x) - \tilde{\mu} - 2\bar{a}L_x(x, x) - a\frac{dL(x, x)}{dx} &= 0 \\
-c(x)L(x, y) - \tilde{\mu}L(x, y) + \bar{a}L_{yy}(x, y) - \bar{a}L_{xx}(x, y) &= 0 \\
L(x, 0) &= 0 \\
L(1, y) &= 0 \\
\tilde{K}_0(x) &= \int_0^x \tilde{K}_0(y)L(x, y) dy - K_0(x) \\
q_2 &= K_2
\end{aligned}$$

## 6.4. Apéndice D. Prueba del observador 2

Con la finalidad de obtener las condiciones que se necesitan para que la transformación sea posible e invertible, el primer paso consiste en derivar con respecto a l tiempo (3.17), quedando de la forma

$$\tilde{w}_t(x, t) = \tilde{u}_t(x, t) + \int_0^x M(x, y) \tilde{u}_t(y, t) dy$$

Sustituyendo  $\tilde{u}_t(x, t)$  en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x)\tilde{u}(x, t) - K_0(x)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_1(x)\tilde{u}(0, t) \\
&+ \int_0^x M(x, y) [a\tilde{u}_{yy}(y, t) + c(y)\tilde{u}(y, t) - K_0(y)\text{sign}(\tilde{u}(0, t) - K_1(x)\tilde{u}(0, t))] dy
\end{aligned}$$

Simplificando los términos dentro de la integral de la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x)\tilde{u}(x, t) - K_0(x)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_1(x)\tilde{u}(0, t) \\
&+ \int_0^x a\tilde{u}_{yy}(y, t) M(x, y) dy + \int_0^x c(y)\tilde{u}(y, t) M(x, y) dy \\
&- \int_0^x K_0(y)\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy - \int_0^x K_1(y)\tilde{u}(0, t) M(x, y) dy
\end{aligned}$$

Integrando por partes  $a \int_0^x \tilde{u}_{yy}(y, t) M(x, y) dy$  se obtiene

$$\begin{aligned} a \int_0^x \tilde{u}_{yy}(y, t) M(x, y) dy &= a\tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) \\ &\quad - a\tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\ &\quad + \int_0^x a\tilde{u}(y, t) M_{yy}(x, y) dy \end{aligned}$$

Por lo tanto, la simplificación queda como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t(x, t) &= a\tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x) \tilde{u}(x, t) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ &\quad + \int_0^x c(y) \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\ &\quad + a\tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) - a\tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\ &\quad - \int_0^x K_1(y) \tilde{u}(0, t) M(x, y) dy + \int_0^x a\tilde{u}(y, t) M(x, y) dy \end{aligned}$$

Ahora, derivando con respecto a  $x$  se tiene

$$\tilde{w}_x(x, t) = \tilde{u}_x(x, t) + \frac{d\left(\int_0^x M(x, y) \tilde{u}(y, t) dy\right)}{dx}$$

Por la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4), la expresión anterior queda

$$\tilde{w}_x(x, t) = \tilde{u}_x(x, t) + M(x, x) \tilde{u}(x, t) + \int_0^x M_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy$$

Derivando con respecto a  $x$  por segunda ocasión, se tiene

$$\tilde{w}_{xx}(x, t) = \tilde{u}_{xx}(x, t) + M(x, x) \tilde{u}_x(x, t) + \left(\frac{d}{dx} M(x, x)\right) \tilde{u}(x, t) + \frac{d\left(\int_0^x M_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy\right)}{dx}$$

Nuevamente, usando la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{xx}(x, t) = & \\ & \tilde{u}_{xx}(x, t) + \tilde{u}_x(x, t) M(x, x) + \tilde{u}(x, t) \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \\ & + \tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + \int_0^x M_{xx}(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \end{aligned}$$

Se tiene ahora, sustituyendo  $w_t(x, t)$  y  $w_{xx}(x, t)$  en el sistema objetivo (3.17), lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mu} \left( \tilde{u}(x, t) + \int_0^x M(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \right) - \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ & - \tilde{K}_1(x) \tilde{w}(0, t) + a \tilde{u}_{xx}(x, t) + c(x) \tilde{u}(x, t) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\ & + \int_0^x c(y) \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\ & \quad + a \tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a \tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) \\ & \quad - a \tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a \tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\ & + \int_0^x a \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_1(y) \tilde{u}(0, t) M(x, y) dy \\ & - a \tilde{u}_{xx}(x, t) - a \tilde{u}_x(x, t) M(x, x) - a \tilde{u}(x, t) \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \\ & \quad - a \tilde{u}(x, t) M_x(x, x) - \int_0^x a M_{xx}(x, y) \tilde{u}(y, t) dy = 0 \end{aligned}$$

Simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mu}\tilde{u}(x, t) + \tilde{\mu} \int_0^x M(x, y) \tilde{u}(y, t) dy - \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\
& - \tilde{K}_1(x) \tilde{w}(0, t) + c(x) \tilde{u}(x, t) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) \\
& + \int_0^x c(y) \tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy \\
& - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) \\
& - 2a\tilde{u}(x, t) M_x(x, x) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) \\
& + \int_0^x a\tilde{u}(y, t) M(x, y) dy - \int_0^x K_1(y) \tilde{u}(0, t) M(x, y) dy \\
& - a\tilde{u}(x, t) \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) - \int_0^x aM_{xx}(x, y) \tilde{u}(y, t) dy = 0
\end{aligned}$$

Agrupando términos con  $\tilde{u}(x, t)$  se llega a

$$\begin{aligned}
& \left[ \tilde{\mu} + c(x) - 2aM_x(x, x) - a \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) \right] \tilde{u}(x, t) \\
& + \int_0^x [aM_{yy}(x, y) + \tilde{\mu}M(x, y) + c(y)M(x, y) - aM_{xx}(x, y)] \tilde{u}(y, t) dy \\
& - \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_1(x) \tilde{u}(0, t) - \tilde{K}_1(x) \tilde{u}(0, t) \\
& - \int_0^x K_0(y) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) M(x, y) dy - \int_0^x K_1(y) \tilde{u}(0, t) M(x, y) dy \\
& - a\tilde{u}_x(0, t) M(x, 0) + a\tilde{u}(0, t) M_x(x, 0) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que, con la finalidad de que se satisfaga la ecuación anterior, y sabiendo que en general,  $\tilde{u}(x, t) \neq 0$ , se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico que describe la dinámica del kernel  $M(x, y)$ . Así, el comportamiento en EDP tipo Hiperbólico del

kernel es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mu} + c(x) - 2aM_x(x, x) - a \left( \frac{d}{dx} M(x, x) \right) = 0 \\
& -aM_{xx}(x, y) + \tilde{\mu}M(x, y) + c(y)M(x, y) + aM_{yy}(x, y) = 0 \\
& M(x, 0) = 0 \\
& K_0(x) - \int_0^x K_0(y) M(x, y) dy + \tilde{K}_0(x) = 0 \\
& K_1(x) - \int_0^x K_1(y) M(x, y) dy + \tilde{K}_1(x) = 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Una condición a la frontera del kernel  $M(x, y)$ , aparece cuando se sustituye  $x = 1$  en la transformación (3.16), quedando

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(1, t) &= \tilde{u}(1, t) - \int_0^1 M(1, y) \tilde{u}(y, t) dy \\
0 &= 0 - \int_0^1 M(1, y) \tilde{u}(y, t) dy
\end{aligned}$$

por lo que

$$M(1, y) = 0$$

Otra condición a la frontera es obtenida en la primer derivada con respecto a  $x$  de la transformación (3.16)

$$\tilde{w}_x(x, t) = \tilde{u}_x(x, t) - M(x, x) \tilde{u}(x, t) - \int_0^x M_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy$$

Si se evalúa en  $x = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_x(0, t) &= \tilde{u}_x(0, t) + K(0, 0) \tilde{u}(0, t) - \int_0^0 K_x(x, y) \tilde{u}(y, t) dy \\
-q_1 \tilde{w}(0, t) - q_2 \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) &= -K_2 \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_3 \tilde{u}(0, t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$K_3 = q_1 \quad K_2 = q_2$$

Integrando a lo largo de  $x$  la primera ecuación de (6.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu x + \int c(x) dx - 2aM(x, x) - aM(x, x) &= 0 \\ M(x, x) &= \frac{\mu x + \int c(x) dx}{3a} \end{aligned}$$

Anteriormente ha sido probado, por la ecuación 3 de (6.6), que  $M(0, 0) = 0$  por lo que de la ecuación anterior, si se evalúa en  $x = 0$

$$M(0, 0) = \frac{\mu(0) + \int c(x) dx|_{x=0}}{3a} = 0$$

Se obtiene otra condición:

$$c(0) = 0$$

Ahora, cuando  $x = 1$  el kernel está en  $M(1, 1) = 0$ . Por lo que

$$M(1, 1) = \frac{\mu + \int c(x) dx|_{x=1}}{3a} = 0$$

Entonces se concluye lo siguiente

$$\int c(x) dx|_{x=1} = -\mu$$

## 6.5. Apéndice E. Transformación inversa, prueba de causalidad - Observador 2

Para completar el diseño, se necesita establecer que la estabilidad del sistema objetivo (3.17) implica estabilidad en el sistema en lazo cerrado dado por (3.15) y (3.18). Para lograr probar la invertibilidad de la transformación (3.16), es necesario proponer una nueva transformación  $\tilde{u}(x, t) = \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L(x, y) \tilde{w}(y, t) dy$ . Puede notarse que cuando  $x = 0$ ,  $\tilde{u}(0, t) = \tilde{w}(0, t)$ , lo que corresponde a las condiciones dadas anteriormente. Derivando con respecto al tiempo

(3.20), se obtiene:

$$\tilde{u}_t(x, t) = \tilde{w}_t(x, t) + \int_0^x L(x, y) \tilde{w}_t(y, t) dy$$

Sustituyendo  $\tilde{w}_t(x, t)$  en la ecuación resultante anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \\ &+ \int_0^x L(x, y) \left[ \bar{a}\tilde{w}_{yy}(y, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(y, t) + \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(y)\tilde{w}(0, t) \right] dy \end{aligned}$$

Simplificando los términos de la integral se llega a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) \\ &+ \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \\ &+ \int_0^x \bar{a}\tilde{w}_{yy}(y, t) L(x, y) dy - \int_0^x \tilde{\mu}\tilde{w}(y, t) L(x, y) dy \\ &+ \int_0^x \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0, t))L(x, y) dy + \int_0^x \tilde{K}_1(y)\tilde{w}(0, t)L(x, y) dy \end{aligned}$$

Integrando por partes  $\int_0^x \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) L(x, y) dy$ , se obtiene

$$\begin{aligned} a \int_0^x \tilde{w}_{xx}(x, t) L(x, y) dy &= \bar{a}\tilde{w}_y(y, t) L(x, y) \Big|_0^x - \bar{a}\tilde{w}(y, t) L_y(x, y) \Big|_0^x \\ &+ \int_0^x \bar{a}\tilde{w}(y, t) L_{yy}(x, y) dy \end{aligned}$$

Sustituyendo esta integración por partes en la ecuación obtenida anteriormente la expresión se transforma en

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \\ &\quad - \int_0^x \tilde{\mu}\tilde{w}(y, t) L(x, y) dy + \int_0^x \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0, t))L(x, y) dy \\ &\quad + \int_0^x \tilde{K}_1(y)\tilde{w}(0, t)L(x, y) dy + \bar{a}\tilde{w}_x(x, t) L(x, x) - \bar{a}\tilde{w}_x(0, t) L(x, 0) \\ &\quad - \bar{a}\tilde{w}(x, t) L_x(x, x) + \bar{a}\tilde{w}(0, t) L_x(x, 0) + \int_0^x \bar{a}\tilde{w}(y, t) L_{yy}(x, y) dy\end{aligned}$$

Ahora, derivando con respecto a  $x$  se logra

$$\tilde{u}_x(x, t) = \tilde{w}_x(x, t) + \frac{d\left(\int_0^x L(x, y) \tilde{w}(y, t) dy\right)}{dx}$$

Usando la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4), se obtiene

$$\tilde{u}_x(x, t) = \tilde{w}_x(x, t) + L(x, x) \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L_x(x, y) \tilde{w}(y, t) dy$$

Nótese que cuando la expresión se evalúa en  $x = 0$  se llega a tener

$$\tilde{u}_x(0, t) = \tilde{w}_x(0, t) + L(0, 0) \tilde{w}(0, t)$$

Sustituyendo  $\tilde{u}_x(0, t)$  y  $\tilde{w}_x(0, t)$  de las condiciones iniciales de (3.15) y (3.17), se logra obtener

$$-K_2\text{sign}(\tilde{u}(0, t)) - K_3\tilde{u}(0, t) = -q_1\tilde{w}(0, t) - q_2\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + L(0, 0) \tilde{w}(0, t)$$

Por lo que se puede concluir que

$$q_1 = K_3 + L(0, 0)$$

$$q_2 = K_2$$

Ahora, derivando con respecto a  $x$  otra vez, se tiene

$$\tilde{u}_{xx}(x, t) = \tilde{w}_{xx}(x, t) + \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) + \tilde{w}(x, t) \frac{dL(x, x)}{dx} + \frac{d \left( \int_0^x L_x(x, y) \tilde{w}(y, t) dy \right)}{dx}$$

Empleando la regla de diferenciación de Leibnitz (6.4) se llega a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx}(x, t) &= \tilde{w}_{xx}(x, t) + \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) + \tilde{w}(x, t) \frac{dL(x, x)}{dx} \\ &\quad + L_x(x, x) \tilde{w}(x, t) + \int_0^x L_{xx}(x, y) \tilde{w}(y, t) dy \end{aligned}$$

Usando la dinámica del error (3.15) y sustituyendo  $\tilde{u}_t(x, t)$  and  $\tilde{u}_{xx}(x, t)$  obtenidas mediante derivar (3.20) con respecto a  $x$  dos veces y con respecto a  $t$ , la expresión resultante es la siguiente

$$\begin{aligned} &-c(x) \tilde{u}(x, t) + K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) + K_1(x) \tilde{u}(0, t) \\ &+ \bar{a} \tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu} \tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x) \tilde{w}(0, t) \\ &\quad - \int_0^x \tilde{\mu} \tilde{w}(y, t) L(x, y) dy + \int_0^x \tilde{K}_0(y) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) L(x, y) dy \\ &+ \int_0^x \tilde{K}_1(y) \tilde{w}(0, t) L(x, y) dy + \bar{a} \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) - \bar{a} \tilde{w}_x(0, t) L(x, 0) \\ &\quad - \bar{a} \tilde{w}(x, t) L_x(x, x) + \bar{a} \tilde{w}(0, t) L_x(x, 0) + \int_0^x \bar{a} \tilde{w}(y, t) L_{yy}(x, y) dy \\ &\quad - \bar{a} \tilde{w}_{xx}(x, t) - \bar{a} \tilde{w}_x(x, t) L(x, x) - \bar{a} \tilde{w}(x, t) \frac{dL(x, x)}{dx} \\ &\quad - \bar{a} L_x(x, x) \tilde{w}(x, t) - \bar{a} \int_0^x L_{xx}(x, y) \tilde{w}(y, t) dy = 0 \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos se logra reducir a

$$\begin{aligned}
& \left[ -c(x) - \tilde{\mu} - 2\bar{a}L_x(x, x) - a\frac{dL(x, x)}{dx} \right] \tilde{w}(x, t) \\
& + \int_0^x [-c(x)L(x, y) - \tilde{\mu}L(x, y) + \bar{a}L_{yy}(x, y) - \bar{a}L_{xx}(x, y)] \tilde{w}(y, t) dy \\
& + K_0(x) \text{sign}(\tilde{u}(0, t)) + K_1(x)\tilde{u}(0, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \\
& + \int_0^x \tilde{K}_0(y)\text{sign}(\tilde{w}(0, t))L(x, y) dy + \int_0^x \tilde{K}_1(y)\tilde{w}(0, t)L(x, y) dy \\
& - \bar{a}\tilde{w}_x(0, t)L(x, 0) + \bar{a}\tilde{w}(0, t)L_x(x, 0) = 0
\end{aligned}$$

Adicionalmente, las siguientes condiciones deben satisfacerse de manera similar y análoga a las obtenidas en el teorema 1

$$\begin{aligned}
& -c(x) - \tilde{\mu} - 2\bar{a}L_x(x, x) - a\frac{dL(x, x)}{dx} = 0 \\
& -c(x)L(x, y) - \tilde{\mu}L(x, y) + \bar{a}L_{yy}(x, y) - \bar{a}L_{xx}(x, y) = 0 \\
& L(x, 0) = 0 \qquad L(1, y) = 0 \\
& \tilde{K}_0(x) = \int_0^x \tilde{K}_0(y)L(x, y) dy - K_0(x) \\
& \tilde{K}_1(x) = \int_0^x \tilde{K}_1(y)L(x, y) dy - K_1(x) \\
& q_1 = K_3 \qquad q_2 = K_2
\end{aligned}$$

## 6.6. Apéndice F. Prueba de estabilidad sistema objetivo 1

Se propone la función candidata de Lyapunov de la forma en que se muestra

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \tilde{w}^2(x, t) + \frac{1}{2} (\tilde{w}(x, t)\tilde{w}(0, t))^2 + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2(x, t) \right] dx$$

Separando los términos de la integral

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (\tilde{w}(x, t)\tilde{w}(0, t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t) dx$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
V_t &= \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_t(x, t) dx + \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}(0, t) \frac{d\tilde{w}(x, t) \tilde{w}(0, t)}{dt} dx + \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) \tilde{w}_{x,t}(x, t) dx \\
&= \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_t(x, t) dx + \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}(0, t) (\tilde{w}(x, t) \tilde{w}_t(0, t) + \tilde{w}_t(x, t) \tilde{w}(0, t)) dx \\
&= \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \left( \bar{a} \tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu} \tilde{w}(x, t) + \tilde{K}(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \right) dx + \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) \tilde{w}_{t,x}(x, t) dx \\
&+ \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}(0, t) \left( \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_t(0, t) + \left( \bar{a} \tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu} \tilde{w}(x, t) + \tilde{K}(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \right) \tilde{w}(0, t) \right) dx
\end{aligned}$$

Seleccionando  $\tilde{w}(0, t) = 0$  entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
V_t &= \bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) dx - \tilde{\mu} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx + \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{K}(x) dx \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\
&+ \int_0^1 \bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx - \int_0^1 \tilde{\mu} \tilde{w}^2(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx \\
&+ \int_0^1 \tilde{K}(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \tilde{w}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx + \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) \tilde{w}_{x,t}(x, t) dx
\end{aligned}$$

Trabajando con  $\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) dx$  e integrando por partes queda

$$\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) dx = \bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_x(x, t) \Big|_0^1 - \bar{a} \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t) dx$$

Dado que

$$\tilde{w}_x(1, t) = \tilde{w}_x(0, t) = 0$$

Por lo tanto, la funcional de Lyapunov, queda:

$$\begin{aligned}
V_t &= -\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t) dx - \tilde{\mu} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx - \int_0^1 \tilde{\mu} \tilde{w}^2(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx \\
&+ \int_0^1 \tilde{w}(x, t) \tilde{K}(x) dx \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\
&+ \int_0^1 \bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx \\
&+ \int_0^1 \tilde{K}(x) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \tilde{w}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx \\
&+ \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) \tilde{w}_{x,t}(x, t) dx
\end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes  $\int_0^1 \bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx$  y considerando que

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}^2(0, t)}{dx} &= \bar{a} \tilde{w}^2(0, t) \tilde{w}_x(x, t) + \tilde{w}(x, t) \bar{a} \frac{d\tilde{w}^2(0, t)}{dx} \\
&= \bar{a} \tilde{w}^2(0, t) \tilde{w}_x(x, t)
\end{aligned}$$

Se obtiene

$$\int_0^1 \bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}_{xx}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx = \bar{a} \tilde{w}(x, t) \tilde{w}^2(0, t) \tilde{w}_x(x, t) \Big|_0^1 - \bar{a} \int_0^1 \tilde{w}^2(0, t) \tilde{w}_x^2(x, t) dx$$

Como se puede hacer

$$\tilde{w}_x(1, t) = \tilde{w}_x(0, t) = 0$$

Reordenando los términos, queda:

$$\begin{aligned} V_t = & -\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t) dx - \tilde{\mu} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx - \int_0^1 \tilde{\mu} \tilde{w}^2(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx \\ & -\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}^2(0, t) \tilde{w}_x^2(x, t) dx + \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) \dot{\tilde{w}}_x(x, t) dx \\ & + \int_0^1 \tilde{K}(x) \tilde{w}(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t)) dx \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \end{aligned}$$

Ahora, trabajando con  $\int_0^1 \tilde{K}(x) \tilde{w}(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t)) dx$  integrando por partes se tiene:

$$\frac{d\tilde{w}(x, t)(1 + \tilde{w}^2(0, t))}{dx} = \tilde{w}_x(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{K}(x) \tilde{w}(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t)) dx = & \tilde{w}(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t)) \int_0^1 \tilde{K}(x) dx \Big|_0^1 \\ & - \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t)) \int \tilde{K}(x) dx dx \end{aligned}$$

Sustituyendo y simplificando

$$\begin{aligned} V_t = & -\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t) dx - \tilde{\mu} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx - \int_0^1 \tilde{\mu} \tilde{w}^2(x, t) \tilde{w}^2(0, t) dx \\ & -\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}^2(0, t) \tilde{w}_x^2(x, t) dx + \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) \tilde{w}_{x,t}(x, t) dx \\ & - \int_0^1 \tilde{w}_x(x, t) (1 + \tilde{w}^2(0, t)) \int \tilde{K}(x) dx \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) dx \end{aligned}$$

Se debe cumplir que

$$\tilde{w}_{x,t}(x, t) - (1 + \tilde{w}^2(0, t)) \int \tilde{K}(x) dx \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) = 0$$

## 6.7. Apéndice G. Prueba de estabilidad sistema objetivo 2

Sea el sistema objetivo

$$\begin{aligned}\tilde{w}_t(x, t) &= \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \\ \tilde{w}_x(0, t) &= q_1\tilde{w}(0, t) + q_2\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \\ \tilde{w}(1, t) &= 0\end{aligned}$$

Donde la condición a la frontera  $\tilde{w}(0, t)$  satisface los siguiente

$$\begin{aligned}\tilde{w}_t(0, t) &= a\tilde{w}_{xx}(0, t) + c(x)\tilde{w}(0, t) - K_0(0)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) - K_1(0)\tilde{w}(0, t) \\ \tilde{w}_x(0, t) &= -K_2\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) - K_3\tilde{w}(0, t)\end{aligned}$$

Sea la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 (\tilde{w}(0, t) \tilde{w}(x, t))^2 dx$$

Se obtiene la derivada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}V_t &= \frac{1}{2} \int_0^1 2\tilde{w}(x, t)\tilde{w}(0, t) (\tilde{w}(0, t)\tilde{w}_t(x, t) + \tilde{w}_t(0, t)\tilde{w}(x, t)) dx \\ &= \int_0^1 \tilde{w}^2(0, t)\tilde{w}(x, t)\tilde{w}_t(x, t) + \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_t(0, t)\tilde{w}^2(x, t) dx\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de  $w_t(x, t)$  y  $w_t(0, t)$  se obtiene

$$\begin{aligned}V_t &= \int_0^1 \tilde{w}^2(0, t)\tilde{w}(x, t) \left[ \bar{a}\tilde{w}_{xx}(x, t) - \tilde{\mu}\tilde{w}(x, t) + \tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0, t) \right] \\ &+ \tilde{w}(0, t) [a\tilde{w}_{xx}(0, t) + c(x)\tilde{w}(0, t) - K_0(0)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) - K_1(0)\tilde{w}(0, t)] \tilde{w}^2(x, t) dx\end{aligned}$$

Agrupando términos se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}V_t &= \bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{w}_{xx}(x, t) dx - \tilde{\mu}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx \\ &+ \tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x) dx + \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x) dx \\ &+ \bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t) \tilde{w}^2(x, t) dx + \tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 c(x) \tilde{w}^2(x, t) dx \\ &- \int_0^1 \tilde{w}(0, t)K_0(0)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \tilde{w}^2(x, t) dx - K_1(0)\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx\end{aligned}$$

Hasta este momento, los términos no adecuados son los siguientes, considerando que  $c(x) < 0$   
 $\forall x, t, K_0(0) \geq 0, \forall t$  y  $K_1(0) \geq 0, \forall t$ .

$$\begin{aligned} & \bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{w}_{xx}(x, t) dx \\ & \tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx \\ & \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\ & +\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t) \tilde{w}^2(x, t)dx \\ & -K_1(0)\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \end{aligned}$$

Integrando por partes  $\bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{w}_{xx}(x, t) dx$  se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{w}_{xx}(x, t) dx &= \bar{a}\tilde{w}^2(0, t)\tilde{w}(x, t)\tilde{w}_x(x, t) \Big|_0^1 \\ &\quad -\bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t)dx \end{aligned}$$

Por lo tanto  $V_t$  queda de la forma

$$\begin{aligned} V_t &= \bar{a}\tilde{w}^3(1, t)\tilde{w}_x(1, t) - \bar{a}\tilde{w}^3(0, t)\tilde{w}_x(0, t) \\ &\quad -\bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t)dx - \tilde{\mu}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \\ &\quad +\tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx + \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\ &\quad +\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t) \tilde{w}^2(x, t)dx + \tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 c(x) \tilde{w}^2(x, t)dx \\ &\quad - \int_0^1 \tilde{w}(0, t)K_0(0) \text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \tilde{w}^2(x, t)dx - K_1(0)\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \end{aligned}$$

Considerando que  $\tilde{w}(1, t) = 0$  se reduce a

$$\begin{aligned} V_t &= -\bar{a}\tilde{w}^3(0, t)\tilde{w}_x(0, t) - \bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t)dx - \tilde{\mu}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \\ &\quad +\tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx + \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\ &\quad +\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t) \tilde{w}^2(x, t)dx + \tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 c(x) \tilde{w}^2(x, t)dx \\ &\quad -K_0(0) |\tilde{w}(0, t)| \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx - K_1(0)\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \end{aligned}$$

Hasta este momento, los términos malos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
& -\bar{a}\tilde{w}^3(0, t)\tilde{w}_x(0, t) \\
& \tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx \\
& \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\
& +\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)dx
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $\tilde{w}_x(0, t)$  en la expresión anterior queda

$$\begin{aligned}
V_t &= -\bar{a}\tilde{w}^3(0, t)(q_1\tilde{w}(0, t) + q_2\text{sign}(\tilde{w}(0, t))) \\
& -\bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t)dx - \tilde{\mu}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \\
& +\tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx + \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\
& +\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)dx + \tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 c(x)\tilde{w}^2(x, t)dx \\
& -K_0(0)|\tilde{w}(0, t)| \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx - K_1(0)\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
V_t &= -\bar{a}q_1\tilde{w}^4(0, t) - \bar{a}q_2\tilde{w}^2(0, t)|\tilde{w}(0, t)| \\
& -\bar{a}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}_x^2(x, t)dx - \tilde{\mu}\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx \\
& +\tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx + \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\
& +\bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)dx + \tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 c(x)\tilde{w}^2(x, t)dx \\
& -K_0(0)|\tilde{w}(0, t)| \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx - K_1(0)\tilde{w}^2(0, t) \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t)dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando que  $q_1, q_2 > 0$  solo quedan los términos

$$\begin{aligned}
& \tilde{w}^2(0, t)\text{sign}(\tilde{w}(0, t)) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_0(x)dx \\
& \tilde{w}^3(0, t) \int_0^1 \tilde{w}(x, t)\tilde{K}_1(x)dx \\
& \bar{a} \int_0^1 \tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)dx
\end{aligned}$$

Trabajando con  $\int_0^1 \bar{a}\tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)dx$  e integrándola por partes, la expresión queda de la forma

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \bar{a}\tilde{w}(0, t)\tilde{w}_{xx}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)dx &= \bar{a}\tilde{w}(0, t)\tilde{w}^2(x, t)\tilde{w}_x(0, t) \Big|_0^1 \\
& - \int_0^1 \bar{a}\tilde{w}^2(x, t)\tilde{w}_x^2(0, t)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_t &= \bar{a}\tilde{w}(1,t)\tilde{w}_x(1,t) - \bar{a}q_1\tilde{w}^2(0,t) - \bar{a}q_2|\tilde{w}(0,t)| \\
&\quad - \bar{a}\int_0^1\tilde{w}_x^2(x,t)dx - \tilde{\mu}\int_0^1\tilde{w}^2(x,t)dx \\
&+ \int_0^1\left[\tilde{K}_0(x)\tilde{w}(x,t)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(x,t)\tilde{w}(0,t)\right]dx
\end{aligned}$$

Considerando que  $\tilde{w}(1,t) = 0$ , se podría tener

$$\begin{aligned}
V_t &= -\bar{a}q_1\tilde{w}^2(0,t) - \bar{a}q_2|\tilde{w}(0,t)| \\
&\quad - \bar{a}\int_0^1\tilde{w}_x^2(x,t)dx - \tilde{\mu}\int_0^1\tilde{w}^2(x,t)dx \\
&+ \int_0^1\left[\tilde{K}_0(x)\tilde{w}(x,t)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(x,t)\tilde{w}(0,t)\right]dx
\end{aligned}$$

Donde el término

$$\int_0^1\left[\tilde{K}_0(x)\tilde{w}(x,t)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(x,t)\tilde{w}(0,t)\right]dx$$

‘También descrito por

$$\int_0^1\tilde{w}(x,t)\left[\tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) + \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0,t)\right]dx$$

Conlleva a la que se satisfaga

$$\tilde{K}_0(x)\text{sign}(\tilde{w}(0,t)) = \tilde{K}_1(x)\tilde{w}(0,t)$$

Entonces la función de Lyapunov resulta en

$$\begin{aligned}
V_t &= -\bar{a}q_1\tilde{w}^2(0,t) - \bar{a}q_2|\tilde{w}(0,t)| \\
&\quad - \bar{a}\int_0^1\tilde{w}_x^2(x,t)dx - \tilde{\mu}\int_0^1\tilde{w}^2(x,t)dx
\end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] W. E. Schiesser and G. W. Griffiths, *A Compendium of Partial Differential Equation Models*, C. U. Press, Ed. 1st, 2009.
- [2] G. T. R. Imanuilov, Oleg; Leugering and Z. Bing-Yu, *Control Theory of Partial Differential Equations*, C. . H. T. . F. Group, Ed. 1st, 2005.
- [3] R. P. Mondaini and P. M. Pardalos, *Mathematical Modelling of Biosystems*, Springer, Ed. 1st, 2008.
- [4] G. S. J. Kunisch, Karl; Leugering and F. Trltzsch, *Control of Coupled Partial Differential Equations*, B. . B. . Berlin, Ed. Birkhuser, 2007.
- [5] M. Krstic and A. Smyshlyaev, “Backstepping observers for a class of parabolic pdes,” *Systems & Control Letters*, vol. 54, p. 613–625, 2005.
- [6] Y. V. Orlov, *Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions*, E. Mxico, Ed. Springer, 2009.
- [7] B. Z. B. A. Krstic, M; Guo and A. Smyshlyaev, “Observer based boundary control of an unstable wave equation,” *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, vol. WeC19.2, p. 6, 2007.
- [8] R. Vazquez and M. Krstic, “A closed-form observer for the channel flow navier-stokes system,” *44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, vol. WeC12.4, p. 6, 2005.

- [9] Y. Orlov and D. Dochain, “Discontinuous feedback stabilization of minimum-phase semi-linear infinite-dimensional systems with application to chemical tubular reactor,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, p. 12, 2002.
- [10] I. Krstic, M; Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, N. York, Ed. Wiley, 1995.
- [11] A. Balogh and M. Krstic, “Stability of partial difference equations governing control gains in infinite-dimensional backstepping,” *Systems & Control Letters*, vol. 51, p. 151–164, 2004.
- [12] A. Benallegue, A; Mokhtari and F. L, “High-order sliding-mode observer for a quadrotor uav,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. DOI: 10.1002/rnc.1225, p. 427440, 2007.
- [13] L. Davila, J; Fridman and A. Poznyak, “Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes,” *International Journal of Control*, vol. 10, p. 12511262, 2006.
- [14] L. Davila, Jorge; Fridman and A. Levant, “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 1785–1789, 2005.
- [15] Y. E. C. Fridma, Leonid; Shtessel and X.-G. Yan, “Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, p. 399412, 2008.
- [16] R. Cochran, Jennie; Vazquez and M. Krstic, “Backstepping boundary control of navier-stokes channel flow: A 3d extension,” *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, vol. WeB02.1, p. 6, 2006.
- [17] V. D. Blondel and A. Megretski, *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, Princeton and Oxford, Eds. Princeton University Press, 2004.
- [18] M. Krstic and A. Smyshlyaev, *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*, U. S. of America, Ed. SIAM, 2008.
- [19] F. D. Bijnan Bandyopadhyay and K.-S. Kim, *Sliding Mode Control Using Novel Sliding Surfaces*, L.Ñ. in Control and I. Sciences, Eds. Springer, 2009.

- [20] A. F. Fillipov, “Differential equations with discontinuous right hand side,” *American Mathematical Society Translations*, vol. 42, pp. 199–231, 1964.
- [21] G. J. S. J. Utkin, V. I., *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, T. . Francis, Ed. Abington, 1999.
- [22] F. C. E. F. L. Edwards, C., *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, L.Ñ. in Control and I. Sciences, Eds. Springer, 2006.
- [23] F. L. S. S. Sabanovic, A., *Variable Structure Systems: From Principles to Implementation*, T. I. of Engineering and Technology, Eds. IET Control Engineering Series 66, 2004.
- [24] B. J. P. Perruquetti, W., *Sliding Mode control In Engineering*, N. Y. . Basel, Ed. Marcel Dekker, Inc, 2002.
- [25] N.-L. A. Bartoszewicz, A., *Time Varying Sliding Modes for Second and Third Order Systems*, L.Ñ. in Control and I. S. 382, Eds. Springer, 2009.
- [26] Y. Orlov, “Discontinuous unit feedback control of uncertain infinite-dimensional systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 834–843, 2000.
- [27] C. R. and Z. H, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems*, Verlag, Ed. Springer, 1995.