



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS COSMOLÓGICOS CON
TEORÍAS
DE GRAVEDAD MODIFICADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

LUIS ALBERTO TORRES ANDRADE



TUTOR:
Dr. SERGIO MENDOZA RAMOS

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Torres

Andrade

Luis Alberto

54854484

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

098174371

2. Datos del tutor

Dr.

Sergio

Mendoza

Ramos

Datos del sinodal 1

Dr.

Rodolfo Patricio

Martínez

y Romero

Datos del sinodal 2

Dr.

Shahen

Hacyan

Saleryan

Datos del sinodal 3

Dr.

Xavier

Hernández

Doring

Datos del sinodal 4

Dr.

Adolfo

Zamora

Ramos

Datos del trabajo escrito

Modelos cosmológicos con teorías de gravedad modificada

75 p

2010

A mis padres y hermanos

AGRADECIMIENTOS

Dar gracias me hace pensar...

En mi familia, simplemente sin ellos no hubiera logrado nada. Es el soporte de todo. En mi padre, Federico Torres, por el ejemplo de trabajo constante. En mi madre, Olaya Andrade, por todos los sacrificios que ha hecho por mis hermanos y por mi. En mi hermano, Miguel Ángel Torres, gracias por tu apoyo Mickey. En mi hermana, Teresa Torres, nunca te des por vencida Tere. Agradezco de manera infinita a mi familia por estar de manera constante apoyando mis momentos de adversidad.

En Alba Ivette, por aparecer en mi vida justo cuando más lo necesitaba y por compartir esta esperanza a mi lado.

En Enrique, el mejor amigo que la Secundaria Num. 29 me ha podido brindar.

En Juan Miguel, José Antonio, David, Juan Carlos, Gerardo y Myrna, los mejores amigos que la Escuela Nacional Preparatoria 5 me ha podido brindar.

En Pablo, el mejor amigo que la Facultad de Ciencias me ha podido brindar.

En mi asesor, Dr. Sergio Mendoza Ramos, por el apoyo brindado y su enorme comprensión a lo largo de todo este proceso.

En mis maestros de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México: Romilio Tambutti (por la moraleja del buen estudiante y el compromiso con el aquí y el ahora), Luis Fernando Magaña, Víctor Romero, Eugenio Ley Koo, Miguel Alcubierre, Gerardo García Naumis y Sergio Mendoza.

En el cuerpo de sinodales, por su revisión y comentarios, a la infraestructura académica de la Facultad de Ciencias y al Instituto de Astronomía de la UNAM por las facilidades brindadas para este proyecto.

Índice general

1. Cosmología moderna	1
1.1. Hipótesis de un modelo cosmológico	1
1.2. Relatividad general	3
1.3. La constante cosmológica	6
1.4. Modelo de Friedmann-Lemaître	8
1.5. Inflación	13
1.6. Radiación cósmica de fondo en microondas	15
2. El problema de la energía oscura	19
2.1. Evidencia observacional	19
2.2. Evolución del parametro de desaceleración	24
2.3. El problema de la constante cosmológica	25
2.4. Modelos de campo escalar	27
2.5. Modificaciones a la ecuación de estado	29
3. Teorías métricas de gravedad modificada	31
3.1. Estructura de una teoría de gravitación	31
3.2. Teorías de gravedad generalizada	32
3.3. Gravedad métrica $f(R)$	35
4. Modelo cosmológico con gravedad modificada	37
4.1. Gravedad $f(R)$ como un modelo de energía oscura	37
4.2. Modelo de vacío	40
4.3. Cosmología observacional (SNIa)	41
4.4. Formación de estructura	43
4.5. Lentes gravitacionales	46
4.6. Number counts	47
A. Ecuaciones de campo en teorías $f(R)$	53

Índice de figuras

1.1.	Edad del Universo (en unidades de H_0^{-1}) en función del parámetro $\Omega_M^{(0)}$. Se considera un modelo de universo plano con constante cosmológica. La línea horizontal punteada representa la cota impuesta por los objetos estelares de mayor edad.	12
1.2.	Espectro de fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo para el modelo de universo plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Se puede observar un hecho característico del espectro, al notar la influencia de la constante cosmológica en la altura del primer pico	16
2.1.	Distancia por luminosidad $d_L(z)$ (en unidades de H_0^{-1}) como función del corrimiento al rojo z en un modelo de universo plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. De arriba hacia abajo las curvas se corresponden con $\Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_\Lambda^{(0)}) = (0.3, 0.7)$, $\Omega_M^{(0)} = 1$. Se puede observar que un objeto con la misma luminosidad a un corrimiento al rojo $z = 3$ es detectado a una distancia tres veces mayor en un universo dominado por constante cosmológica al respecto del caso de la dominación por materia.	22
2.2.	Módulo de distancia $\mu(z)$ en función del corrimiento al rojo z para un modelo cosmológico plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Los puntos vienen del conjunto de datos Gold resultantes del <i>Supernova Search Team Collaboration</i> y resumidos en [Riess et al. 2004]. De arriba hacia abajo las curvas se corresponden con $\Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_\Lambda^{(0)}) = (0.3, 0.7)$, $\Omega_M^{(0)} = 1$. Se observa que los datos desfavorecen un universo totalmente dominado por materia o por constante cosmológica. La línea punteada intermedia representa el mejor ajuste a las observaciones en el cual cerca del 70 % de la densidad de energía es compatible con una constante cosmológica.	23
2.3.	Evolución del parámetro de desaceleración $q(z)$ como función del corrimiento al rojo z en un modelo de universo plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Se observa que a medida que se incrementa la densidad de energía en constante cosmológica el universo experimenta una transición hacia una fase de aceleración.	26

4.1. Observaciones de supernovas Ia. Se presenta una gráfica del modulo de distancia $\mu(z)$ contra el corrimiento al rojo z para el caso de universo plano. Los puntos representan el conjunto de datos Gold [Riess et al, 2008]. La línea sólida superior representa un modelo dominado por constante cosmológica $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 1$ mientras que la línea punteada inferior corresponde con un modelo dominado por materia $\Omega_M^{(0)} = 1$. El modelo de concordancia observacional $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_{\Lambda}^{(0)}) = (0.3, 0.7)$ Λ CDM es el que mejor compatibilidad tiene con las observaciones. En el modelo desarrollado en esta tesis, se ha mantenido fijo el parámetro de materia en $\Omega_M^{(0)} = 0.3$ y se ha encontrado mediante un método de mínimos cuadrados que el valor del índice de curvatura de la función $f(R) \propto R^n$ que mejor ajusta las observaciones es $n = 1.70$ 43

4.2. Evolución del contraste en densidad en un modelo de universo plano ($\kappa = 0$). Se presentan los modelos dominados por materia (línea sólida) en comparación al modelo Λ CDM (línea punteada larga). Se enfatiza que la presencia de la constante cosmológica es un inhibidor del proceso de formación de estructura, teniendo más susceptibilidad a generarse en un modelo de dominación total de materia. Se realiza la comparación con el modelo del mejor ajuste a los datos de las supernovas (línea punteada corta) desarrollado en este trabajo, dando cuenta que a épocas tempranas el crecimiento de la inhomogeneidad es muy pequeño, alcanzando un comportamiento similar al del modelo Λ CDM a épocas tardías. Otro aspecto que no se puede pasar por alto es que Una conclusión de este hecho es que una modificación a la gravitación como la expuesta en este trabajo tiene muy poca tendencia a formar estructura a épocas tempranas. 45

4.3. Probabilidad P_{lens} de experimentar fenómeno de lente gravitacional por fuentes localizadas a un redshift $z_s = 2$ en un modelo de universo plano como función del parámetro de densidad $\Omega_M^{(0)} = 1 - \Omega_{\Lambda}^{(0)}$. Se observa que dicha probabilidad se magnifica en presencia de una constante cosmológica. 48

4.4. Conteo de objetos dN por unidad de ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo dz como función del corrimiento al rojo z . La línea sólida representa el modelo Λ CDM. Se observa el rasgo particular de un conteo que diverge para un modelo dominado por constante cosmológica, firma de que dicho modelo se expande exponencialmente y tiene un volumen que crece sin límite. 49

Índice de Tablas

3.1. Modelos de Gravedad.	34
4.1. Comparación de las ecuaciones de Friedmann en el marco de la relatividad general y en el de la gravitación $f(R)$. Se puede observar como en la gravedad $f(R)$ el término tipo constante cosmológica puede ser representado por un término debido a la modificación del sector de curvatura. Adicionalmente, se observa que el término de densidad de materia se ve amortiguado por un factor $1/F$. Estos hechos resaltan que la gravedad métrica $f(R)$ incorpora un cambio de la razón de expansión del universo al respecto del modelo Λ CDM.	40

RESUMEN

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo cosmológico en el contexto de una teoría métrica de gravitación, conocida como gravedad $f(R)$. Al formular la teoría de la relatividad general de Einstein, la parte de la acción correspondiente a la curvatura, conocida como acción de Hilbert-Einstein y de la cual emanan las ecuaciones de campo vía un principio de mínima acción, se manifiesta como la integral de una función lineal del escalar de curvatura R . Por otra parte en los modelos de gravedad $f(R)$ se considera hacer una modificación a la acción de Hilbert-Einstein para considerar a la acción del sector de curvatura como una integral de una función arbitraria del escalar de curvatura. La motivación para tales modificaciones radica primordialmente en intentar estudiar problemas al interior del modelo cosmológico estándar (como lo es el de energía oscura), enfatizando que el sector de curvatura de la teoría gravitacional tal vez necesite mayor atención y así encaminarse a desarrollar modelos donde la energía oscura pudiera ser una manifestación de una teoría de gravitación modificada y evitar la necesidad de recurrir a materia exótica como campos escalares.

En este sentido, el espíritu de este trabajo es primeramente hacer una revisión del modelo cosmológico estándar, considerando a la relatividad general como la teoría fundamental de gravitación y a la constante cosmológica como una representante de la energía del vacío. Acto seguido, se presentan los principales puntos referentes al problema de la energía oscura, dando cuenta de las observaciones astrofísicas que lo señalan y de algunos de los modelos teóricos que están siendo considerados en su estudio. Posteriormente se hace una exposición de la estructura de las teorías de gravedad modificada, exponiendo algunas alternativas a la relatividad general y considerando a la gravedad $f(R)$ como una de las teorías representantes. Con eso en mente, nos encaminamos a estudiar sus ecuaciones de campo y características principales. Como apartado final, se considera exponer cómo la gravedad $f(R)$ puede ser adaptada como un modelo de energía oscura. En particular, se desarrolla el modelo cosmológico al interior de la teoría $f(R) = bR^n$ con la finalidad principal de analizar si la energía oscura puede presentarse como un efecto de tal modificación al sector de curvatura. Para ello se intenta establecer una vinculación observacional de este hecho con varias pruebas astrofísicas, entre las que destacan las supernovas tipo Ia, el proceso de formación de estructura y el fenómeno de lente gravitacional, entre los más notables.

CONVENCIONES Y NOTACIÓN.

A lo largo de todo este trabajo usamos el sistema de unidades naturales, en el cual la velocidad de la luz c y la constante de Planck \hbar son iguales a la unidad:

$$c = 1 = \hbar.$$

En dicho sistema de unidades es común referirse a una escala de energía mediante la masa de Planck, la cual está dada por

$$m_{\text{P}} := G^{-1/2} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV},$$

donde G es la constante de gravitación newtoniana. También se define una masa de Planck reducida, dada por

$$M_{\text{P}} := (8\pi G)^{-1/2} = 2.44 \times 10^{18} \text{ GeV}.$$

Para la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo se adopta una signatura $(-, +, +, +)$.

Los índices griegos toman los valores 0-3 y los latinos toman los valores 1-3. Asumimos la convención de suma de Einstein, donde índices repetidos implica una suma sobre todos sus posibles valores.

Para la operación de derivación con respecto a las coordenadas x^μ se usará la notación

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\dots) = \partial_\mu (\dots) = (\dots)_{,\mu},$$

mientras que para la operación de derivación covariante se usará la notación

$$\nabla_\mu (\dots) = (\dots)_{;\mu}.$$

Capítulo 1

Cosmología moderna

En este capítulo inicial se brinda un panorama general de la construcción de un modelo cosmológico, haciendo énfasis en las hipótesis que son consideradas. Para tal encomienda se considera a la teoría general de la relatividad, expresada por medio de las ecuaciones de campo de Einstein, como la teoría que describe a la interacción gravitacional (la fuerza dominante en el ámbito cosmológico) y en ese sentido se estudian algunas de sus premisas. Se incluye un apartado referente a la aparición de la constante cosmológica y su interpretación como una energía inherente al vacío. Posteriormente, se discuten los principales elementos del modelo cosmológico standard, también conocido como modelo de Friedmann-Lemaître. Luego se resaltan dos tópicos de investigación muy activos en la cosmología moderna: primero, el modelo inflacionario, el cual ha marcado la pauta para estudiar la física del universo temprano y su conexión con el proceso de formación de estructura, segundo, el análisis de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo, que ha establecido el vínculo teoría-observaciones como nunca antes en cosmología. Este último ha sentado muy buenas bases en la determinación de los parámetros cosmológicos, dando cuenta de que aproximadamente el 95 % de la materia que constituye al universo es de naturaleza desconocida. Tal hecho se manifiesta como un precedente para el estudio del problema de la energía oscura.

1.1. Hipótesis de un modelo cosmológico

El punto de partida de la cosmología moderna, es asumir que la geometría del espacio-tiempo es descrita por la teoría general de la relatividad. Además, se debe tener en cuenta que existen hipótesis adicionales a ésta, a saber, aquellas referentes a las propiedades globales del espacio-tiempo y a la física involucrada en la descripción del contenido de materia y energía en el universo. En esta sección analizamos estas hipótesis.

La geometría del espacio tiempo

Una hipótesis esencial en la construcción de un modelo cosmológico es la estructura geométrica que tiene el espacio-tiempo. Básicamente, se considera como una primera aproximación que el universo a muy gran escala es homogéneo e isotrópico. Por homogeneidad entendamos que las observaciones cosmológicas hechas a gran escala deben ser invariantes ante traslaciones y por isotropía entendamos que las observaciones cosmológicas hechas a gran escala deben ser independientes de la dirección de visión. Tal hipótesis de trabajo recibe el nombre de principio cosmológico.¹ Dicho principio también suele presentarse de otra manera, argumentando que nuestra posición como observadores del cosmos no es de ninguna manera privilegiada. En esta vertiente, se han llevado a cabo varios mapeos de galaxias tales como el Cambridge APM Survey y 2dFGRS que muestran la validez de dicha hipótesis a escalas superiores a centenas de megaparsecs (Mpc).²

La manera de incorporar la homogeneidad e isotropía en el modelo cosmológico es por medio de la métrica $g_{\mu\nu}$, el objeto fundamental para describir las propiedades del espacio-tiempo al interior de la teoría general de la relatividad. Matemáticamente, la métrica es un tensor simétrico de rango 2, que es usado para definir una noción de distancia entre 2 puntos vecinos en el espacio-tiempo; tal pseudodistancia se manifiesta por medio del intervalo, dado por [Landau, 2002]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Las condiciones establecidas por el principio cosmológico imponen que debemos escoger una métrica que sea compatible con la homogeneidad e isotropía a gran escala observada en el universo. La métrica que manifiesta esta compatibilidad, independientemente de la teoría de gravitación considerada, es conocida como métrica de Robertson-Walker, cuyo elemento de línea tiene la forma [Weinberg, 2008, Kolb, 1994]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (1.2)$$

A las coordenadas $\{r, \theta, \phi\}$ se les conoce como coordenadas comoviles, debido a que un punto en este sistema de coordenadas mantiene $\{r, \theta, \phi\}$ como constantes. La dinámica del cambio de coordenadas está representada en el factor de escala $a(t)$. Su interpretación es describir el cambio en la distancia relativa entre 2 observadores como función del tiempo cósmico t [Mendoza, 2003]. La curvatura κ es una característica de la geometría de las secciones espaciales. A saber: $\kappa > 0$, $\kappa = 0$ o $\kappa < 0$ si el universo manifiesta una geometría esférica, plana o hiperbólica, respectivamente.

¹Es fácil mostrar que un universo isotrópico es también homogéneo [Mendoza, 2003].

²1pc = 3.26 años luz = 3.08×10^{16} m

El contenido de materia-energía

Otra de las hipótesis que debe recibir atención es cómo estudiar la materia y energía en el universo. El camino que es abordado es aquel donde se modela dichas componentes como un fluido perfecto. Tales fluidos tienen la propiedad de mantener una distribución isotrópica de materia en el sistema propio del fluido. Las propiedades que describen la dinámica de un fluido están contenidas en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, que básicamente está caracterizado por la densidad y presión del fluido. La forma del tensor de energía-momento para un fluido perfecto es [Carroll, 1997]

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)U_\mu U_\nu, \quad (1.3)$$

donde ρ es la densidad de energía y p es la presión, ambas medidas en el sistema propio del fluido. La 4-velocidad del fluido en relación a su sistema propio está dada por $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Es habitual escribir el tensor de energía-momento referido a dicho sistema en la forma

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (1.4)$$

De esta manera se pone de manifiesto que la traza del tensor es

$$T^\mu{}_\mu = T = -\rho + 3p. \quad (1.5)$$

Además, debemos considerar una relación entre la presión y la densidad mediante una ecuación de estado. Dentro de la aproximación de fluido, se puede asumir que la presión es una función univaluada de la densidad de energía $p = p(\rho)$. La forma más sencilla en que se manifiesta esta relación está dada por

$$p = w\rho, \quad (1.6)$$

donde w es un parámetro constante.

1.2. Relatividad general

En la sección anterior, analizamos las hipótesis involucradas en la construcción de un modelo cosmológico. Tales hipótesis se manifiestan por una parte en las propiedades del espacio-tiempo y por la otra en el contenido de materia y energía. En este apartado buscamos identificar la forma en que la geometría del espacio-tiempo y el contenido de materia y energía del mismo interactúan. Tal hecho está contenido en las ecuaciones de campo de la teoría general de la relatividad, resaltando a la interacción entre geometría y materia como premisa fundamental.

A la teoría general de la relatividad la consideramos una teoría de gravitación, que viene a reemplazar a la teoría newtoniana en el sector de campos gravitacionales muy intensos. En teoría newtoniana, la ecuación fundamental de la gravitación es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.7)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional y ρ es la densidad de masa³. Para tener una generalización de esta teoría, debemos buscar una extensión de la misma, compatible con una descripción relativista. La generalización relativista de la densidad de energía es el tensor de energía-momento (ya que $T_{00} = \rho$), mientras que la generalización relativista del potencial gravitacional es la métrica del espacio tiempo. Como la ecuación de Poisson involucra derivadas de segundo orden, lo que se busca es una ecuación dinámica (tensorial) de la forma

$$\mathcal{O}(g_{\mu\nu}) = CT_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

En la ecuación anterior identificamos a \mathcal{O} como un operador que actúa sobre la métrica del espacio-tiempo para producir un tensor $\mathcal{O}(g_{\mu\nu})$ con segundas derivadas en la métrica y C es una constante. Además, debido a la estructura de la ecuación anterior, surgen ciertas restricciones sobre la forma de este tensor, a saber:

- El tensor $\mathcal{O}(g_{\mu\nu})$ debe ser simétrico, pues $T_{\mu\nu}$ lo es.
- El tensor $\mathcal{O}(g_{\mu\nu})$ debe contener segundas derivadas de la métrica.
- La constante de proporcionalidad C debe ser compatible con el régimen de gravedad newtoniana. Es decir, la ecuación de campo debe reducirse a la de Poisson en el límite de campo débil.

El tensor $\mathcal{O}(g_{\mu\nu})$ contiene la información de la curvatura del espacio-tiempo. El objeto que se puede construir a partir de la métrica y sus segundas derivadas, que encierra toda la información referente a la curvatura del espacio-tiempo es el tensor de Riemann $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$ dado por [Wald, 1984, Carroll, 2004]:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}, \quad (1.9)$$

donde los terminos $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ son conocidos como símbolos de Christoffel, calculables a partir de la métrica mediante la ecuación:

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.10)$$

Al observar las ecuaciones (1.9) y (1.10) se percibe la presencia de segundas derivadas en la métrica en la estructura del tensor de Riemann. Es de notar que dicho tensor es de rango 4

³Debido a que usamos el sistema de unidades naturales, donde $c = 1$, es indistinto hablar de densidad de masa y de densidad de energía, ya que ambas difieren entre si por un factor multiplicativo c^2

y la igualdad en la ecuación (1.8) se manifiesta entre tensores de rango 2. Es posible obtener un tensor de rango 2 por medio de la contracción del tensor de Riemann. Tal tensor es conocido como tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (1.11)$$

Se podría pensar que una conjetura de ecuaciones de campo, afín a las hipótesis enlistadas anteriormente, sería que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ fuera proporcional al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Sin embargo la igualdad entre el tensor de Ricci y el tensor de energía-momento no es compatible con la ecuación de conservación $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$ ya que la relación $\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = 0$ no se satisface para cualquier geometría. De hecho para una geometría arbitraria se tiene que [Carroll, 1997]

$$2\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}R, \quad (1.12)$$

donde R es conocido como el escalar de curvatura y es obtenido a partir de la contracción del tensor de Ricci

$$R := R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Tal objeto es el escalar más simple construido a partir de la métrica y sus segundas derivadas; jugará un papel muy importante en teorías alternativas que consideran modificaciones a la relatividad general, como se explorará más adelante.

Con estas consideraciones, es posible demostrar que la forma que tiene el tensor $\mathcal{O}(g_{\mu\nu})$ es [Landau, 2002]

$$\mathcal{O}(g_{\mu\nu}) := G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

el cual es conocido como tensor de Einstein y está constituido por el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y la métrica. A partir de su definición y usando la ecuación (1.12) se obtiene que el tensor de Einstein tiene divergencia covariante nula

$$\nabla_{\mu}G^{\mu}{}_{\nu} = 0. \quad (1.15)$$

De esta manera las ecuaciones de campo toman la forma

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

con este hecho, al usar la ecuación (1.15) se obtiene

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu} = 0, \quad (1.17)$$

es decir, la compatibilidad con la ecuación de conservación de energía-momento es recuperada.

El último paso a considerar es la identificación de la constante de proporcionalidad C . Al tomar el límite de campo débil en la ecuación (1.16) y exigir que se satisfaga la ecuación de Poisson (1.7) se obtiene que $C = 8\pi G$ [Carroll, 2004]. De ese modo, las ecuaciones de campo de Einstein toman la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

El camino descrito aquí para la obtención de las ecuaciones de campo de la relatividad general, sigue la línea de acción tomada por Einstein en 1916. Existe otro camino para deducir las ecuaciones de campo, más cercano al espíritu de una teoría de campo, en donde se recurre a un principio de mínima acción. La labor es partir de una acción que identifique a la métrica $g_{\mu\nu}$ como la variable de campo fundamental y que describa, por una parte el sector de curvatura y por la otra al sector de materia. La parte de la acción correspondiente al sector de curvatura es conocida como acción de Hilbert-Einstein⁴, y está dada por

$$\mathcal{S}_{\text{HE}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (1.19)$$

donde R es el escalar de curvatura y $g := \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. La integración en (1.19) se extiende sobre todo el espacio-tiempo. La descripción del sector de materia está constituida en la acción

$$\mathcal{S}_{\text{M}} = \int \mathcal{L}_{\text{M}} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (1.20)$$

aquí \mathcal{L}_{M} constituye el lagrangiano de materia. De esta manera, la acción efectiva para deducir las ecuaciones de campo de Einstein es

$$\mathcal{S}_{\text{RG}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4\mathbf{x} + \int \mathcal{L}_{\text{M}} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Es posible demostrar que la variación de esta acción con respecto a la métrica reproduce las ecuaciones de campo de Einstein [Carroll, 1997, Landau, 2002].

1.3. La constante cosmológica

Hasta ahora, se ha hecho una descripción de los principales elementos que constituyen a la teoría de la relatividad general, resaltando básicamente sus ecuaciones de campo. Sin embargo, un tema de estudio muy vinculado con la estructura de la teoría es la existencia de un término adicional en las ecuaciones de campo, conocido como constante cosmológica. Tal adición, por motivaciones más cercanas a la teoría de campos, se manifestaría como

⁴Historicamente Hilbert obtuvo las ecuaciones de campo de la gravitación mediante este camino antes que Einstein, quien se encaminó más por una ruta de compatibilidad hacia el límite de campo débil.

una contribución del vacío a la energía total del universo [Weinberg, 1989, Carroll et al, 1992]. A continuación veremos de qué manera se presenta.

Hemos señalado que las ecuaciones de campo de Einstein (1.18) exhiben una compatibilidad entre la identidad de Bianchi (1.15) y la conservación de la energía y el momento (1.17). De la ecuación (1.18), y usando el hecho de que la derivada covariante de la métrica es nula, se deduce que las ecuaciones (1.18) están definidas salvo una constante multiplicada por la métrica. Esto es, la adición de un término de la forma $\Lambda g_{\mu\nu}$, (con Λ igual a una constante), es una transformación que modifica la estructura de las ecuaciones de campo pero que deja intactas las leyes de conservación. Con éste agregado, la nueva apariencia de las ecuaciones de Einstein es

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Escritas en esa forma, podemos establecer la vinculación de la constante cosmológica como una energía inherente al vacío. Para tal fin, notemos que en el vacío las ecuaciones de campo se reducen a

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.23)$$

Si pasamos al miembro derecho el término con constante cosmológica notamos que podemos hacer una identificación con un tensor de energía-momento de la forma

$$8\pi G T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

Comparando la forma de este tensor de energía-momento con el de fluido perfecto (1.3) vemos que la constante cosmológica es tal que

$$\rho(\Lambda) + p(\Lambda) = 0, \quad p(\Lambda) = -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.25)$$

lo anterior manifiesta que la energía del vacío asociada a la constante cosmológica satisface la ecuación de estado

$$p(\Lambda) = -\rho(\Lambda), \quad w(\Lambda) = -1, \quad (1.26)$$

y con ello la densidad de energía asociada a la constante cosmológica viene dada por

$$\rho(\Lambda) = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.27)$$

Con tal identificación se tiene una densidad de energía inherente al espacio-tiempo generada por la presencia de la constante cosmológica.

1.4. Modelo de Friedmann-Lemaître

Ahora vamos a aplicar las hipótesis mencionadas en las secciones 1.1 y 1.2 para obtener las ecuaciones dinámicas que describen al modelo cosmológico standard, representando un universo en expansión, tal y como lo señalan las observaciones en la actualidad. Dichas ecuaciones surgen de considerar que la métrica (1.2) es la más compatible con el espacio-tiempo cosmológico y considerando que el contenido de materia del universo es modelable como un fluido perfecto (cf. ecuación (1.4)). Al usar las ecuaciones de campo de Einstein que incorporan la constante cosmológica, se obtiene la ecuación que describe la dinámica del factor de escala $a(t)$, conocida como ecuación de Friedmann [Carroll, 1997]

$$H^2 := \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.28)$$

de aquí en adelante los puntos denotan derivadas respecto al tiempo. En la ecuación anterior $H(t)$ es conocido como parámetro de Hubble y de la forma en que está definido se dice que cuantifica la razón de expansión del universo; ρ representa la densidad de energía y κ es el parámetro de curvatura.

Si en la ecuación anterior, se conociera la función $\rho(a)$ tendríamos una sola ecuación diferencial para la variable $a(t)$. La evolución de la densidad de energía, desde la perspectiva cosmológica, también está sujeta a la conservación de la energía, representada por la relación $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$. Tomando la componente $\nu = 0$ de esta ecuación con el tensor de energía-momento (1.4) se obtiene [Carroll, 1997]

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.29)$$

La ecuación anterior nos dice cómo evoluciona la densidad de energía $\rho(t)$. Hasta este punto, tenemos dos ecuaciones, la (1.28) y la (1.29) y tres incógnitas: $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. Pero recordamos que en nuestras hipótesis, habíamos supuesto la existencia de la ecuación de estado (1.6) relacionando de manera univaluada la presión y la densidad, por lo tanto

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + w) = 0. \quad (1.30)$$

Con tal consideración, llegamos a la condición de tener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas para cerrar el sistema.

Las ecuaciones (1.28) y (1.29) suelen combinarse para producir una tercera ecuación, útil para propósitos dinámicos. Si derivamos la ecuación de Friedmann (1.28) respecto al tiempo y sustituimos el valor de $\dot{\rho}$ dado por la ecuación de conservación (1.29), obtenemos la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1 + 3w) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.31)$$

Las ecuaciones (1.28), (1.30) y (1.31) constituyen las ecuaciones fundamentales de la dinámica cosmológica.

A continuación vamos a establecer la conexión con los parámetros cosmológicos vinculados a las observaciones. Para ello, notemos que en ausencia de constante cosmológica la ecuación de Friedmann hoy en día puede escribirse como

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{\kappa}{a^2H^2}, \quad (1.32)$$

y con ello observar que el valor crítico de la densidad requerido al tiempo actual para hacer al universo plano ($\kappa = 0$) viene dado por

$$\rho_c^{(0)} := \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.33)$$

De hecho, una práctica común en cosmología es medir las contribuciones de materia-energía en el universo en unidades de la densidad crítica actual Ω_i , definida por:

$$\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (1.34)$$

En esta relación el subíndice i puede referirse a materia, radiación o constante cosmológica. Con ello, la ecuación de Friedmann, se puede escribir en la siguiente forma

$$\Omega(t) - 1 = \frac{\kappa}{a^2H^2}. \quad (1.35)$$

De la ecuación anterior emanan las siguientes consecuencias entre la geometría espacial del universo y su contenido de materia:

- $\kappa = 0 \iff \Omega = 1$ (Universo plano)
- $\kappa < 0 \iff \Omega < 1$ (Universo abierto)
- $\kappa > 0 \iff \Omega > 1$ (Universo cerrado).

A continuación, vamos a resolver las ecuaciones cosmológicas (1.28) y (1.30) en el régimen en el cual domina sólo una componente en el universo y cuya ecuación de estado w_i es constante. Por simplicidad, consideremos la constante cosmológica nula. Primeramente, al observar (1.30) notamos que es una ecuación donde podemos separar variables e integrar, obteniendo

$$\rho_i(a) = \rho_i^{(0)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)}, \quad (1.36)$$

donde adoptamos la normalización $\rho_i^{(0)} := \rho_i(a_0)$. De esa manera la ecuación de Friedmann para un universo plano y sin constante cosmológica es integrable y por tanto

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3[(1+w_i)]}. \quad (1.37)$$

Tipo de Materia-Energía	$w = p/\rho$	$\rho(a)$	$a(t)$
Polvo	0	$\rho_M^{(0)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$	$a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$
Radiación	$\frac{1}{3}$	$\rho_\gamma^{(0)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}$	$a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$
Constante Cosmológica	-1	$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$	$a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$

Cuadro Soluciones para el factor de escala dependiendo de la componente de materia-energía que domina en el universo. Todas las soluciones corresponden al modelo de universo plano $\kappa = 0$.

Aquí se considera la normalización⁵ $a(t_0) = a_0$. En la tabla 1 se resumen las soluciones para el factor de escala de un universo plano y con dominio de una componente de materia-energía en el universo, los casos más notables se corresponden con materia, radiación y constante cosmológica que tienen $w = 0$, $w = 1/3$ y $w = -1$ respectivamente.

Si consideramos un universo en el cual coexisten materia ($\rho_M \propto a^{-3}$) y constante cosmológica y que constituye una primera aproximación a nuestro universo en la época actual, en este caso la forma de la ecuación de Friedmann es

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_M^{(0)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.38)$$

La solución de la ecuación anterior está dada por

$$a(t) = a_\star \left[\sinh\left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}} H_0 t\right) \right]^{2/3}, \quad a_\star = a_0 \left(\frac{\Omega_M^{(0)}}{\Omega_\Lambda^{(0)}}\right)^{1/3}. \quad (1.39)$$

Ahora vamos a exponer la forma de la ecuación de Friedmann que resulta más útil para estudios observacionales: aquella que está expresada en términos del corrimiento al rojo z .

⁵Otra normalización habitual para estas soluciones es tomar como unidad el factor de escala hoy día $a(t_0) = 1$

La relación factor de escala a con el corrimiento al rojo z está constituida por la siguiente ecuación [Weinberg, 1972]

$$\frac{a}{a_0} := \frac{1}{1+z}. \quad (1.40)$$

Con esto, la ecuación de Friedman en terminos del corrimiento al rojo y los parámetros cosmológicos toma la forma

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_\gamma^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\kappa^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]^{1/2}, \quad (1.41)$$

donde⁶

$$\Omega_i^{(0)} = \frac{\rho_i^{(0)}}{\rho_c}, \quad \Omega_\kappa^{(0)} := -\frac{\kappa}{a_0^2 H_0^2}, \quad (1.42)$$

y H_0 constituye el parámetro de Hubble hoy día. Las observaciones realizadas con el telescopio espacial Hubble [Freedman et al., 2001] han permitido restringir H_0 en la forma

$$H_0 = 100h \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad \text{con } 0.64 < h < 0.80. \quad (1.43)$$

La razón por la cual H_0 tiene unidades de km/(seg Mpc) es debido a que, escrita en la forma (1.43), se manifiesta que dos galaxias separadas entre sí por 1 Mpc de distancia se alejan una de otra a una velocidad de $100h$ km/s.

Otro tema habitual en el modelo cosmológico es la edad del universo. Para los modelos de universo plano, donde domine una sola componente de ecuación de estado constante, la edad puede ser calculada analíticamente, en unidades de H_0^{-1} , mediante

$$H_0 t_0 = H_0 \int_0^{t_0} dt = H_0 \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \frac{2}{3(1+w)}, \quad (1.44)$$

mientras que para modelos donde coexisten varias componentes, la edad del universo (también en unidades de H_0^{-1}) se puede expresar mediante

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) \left[\Omega_\gamma^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\kappa^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]^{1/2}}. \quad (1.45)$$

Para un universo plano, donde predominan materia y constante cosmologica, la expresión anterior se reduce a

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}}}, \quad \text{con } \Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1, \quad (1.46)$$

⁶El superíndice (0) indica cantidades evaluadas hoy día.

la cual puede calcularse de manera analítica dando como resultado [Copeland et al, 2006]

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_M^{(0)}}} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_M^{(0)}}}{\sqrt{\Omega_M^{(0)}}} \right]. \quad (1.47)$$

En la Figura 1.1 mostramos este resultado como función del parámetro $\Omega_M^{(0)}$, resaltando que la edad del universo se incrementa conforme $\Omega_M^{(0)}$ disminuye. Además, es de notar que el modelo dominado por materia $\Omega_M^{(0)} = 1$ queda descartado por las observaciones de los objetos estelares de mayor edad (típicamente cúmulos globulares), los cuales establecen una cota de edad $t_0 > 11 - 12 \times 10^9$ años. El modelo de concordancia observacional $\Omega_M^{(0)} = 0.3$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$ reproduce $H_0 t_0 \approx 0.96$ que corresponde a una edad $t_0 = 13.1 \times 10^9$ años cuando $h = 0.72$. De esta manera la presencia de la constante cosmológica subsana un posible problema de edad al interior del modelo cosmológico.

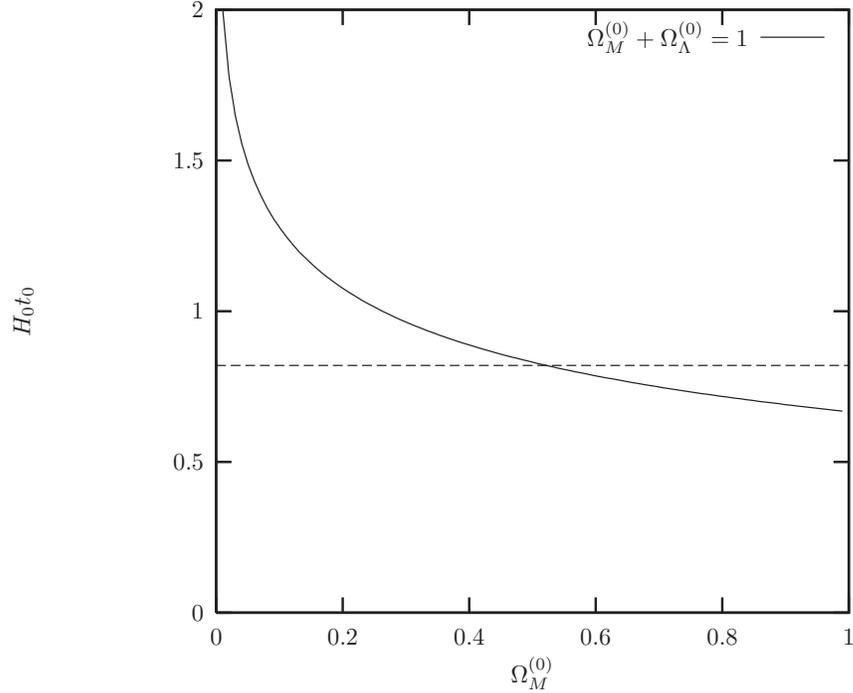


Figura 1.1: Edad del Universo (en unidades de H_0^{-1}) en función del parámetro $\Omega_M^{(0)}$. Se considera un modelo de universo plano con constante cosmológica. La línea horizontal punteada representa la cota impuesta por los objetos estelares de mayor edad.

1.5. Inflación

En la sección previa dimos un ligero bosquejo del modelo cosmológico standard. Todo ese aparato constituye en gran medida una buena descripción del universo actual. Sin embargo, a medida que nos acercamos al universo temprano, ciertas preguntas permanecen aún en discusión, en especial aquellas vinculadas con procesos de formación de estructura. En otras palabras, el modelo cosmológico actual necesita un modelo de condiciones iniciales para generar las inhomogeneidades primordiales que a la postre se convierten en la estructura a gran escala que observamos hoy día. El modelo inflacionario constituye el fenómeno generador de perturbaciones primordiales y además puede resolver ciertos problemas que manifiesta el modelo estándar [Guth, 1981]. Uno de ellos es el problema del aplanado. Para visualizar tal hecho, recordemos que la ecuación de Friedmman (1.28) puede escribirse como

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (1.48)$$

Sin embargo, en el dominio de materia o radiación, el miembro derecho es una función creciente del tiempo, lo que nos diría que la desviación respecto a 1 del factor Ω crece con el tiempo, es decir, el modelo de universo plano en el modelo estándar es una situación inestable. Si las observaciones actuales señalan al factor Ω muy cerca de la unidad, entonces en el pasado Ω debió de haber estado aún más cerca de la unidad. Este rasgo de ajuste fino con el factor Ω , sumado a algunos otros problemas como lo son la isotropía de la radiación cósmica de fondo en direcciones causalmente desconectadas del cielo es lo que ha llevado a considerar alternativas dinámicas del universo temprano, en particular una con un régimen de universo inflacionario, cuya consecuencia sea aplanar al universo y visualizar que en algún momento regiones que actualmente están causalmente desconectadas lo pudieron haber estado en el universo temprano.

Por inflación, entendemos un periodo de aceleración exponencial en la expansión del universo, lo cual dinámicamente se manifiesta como

$$\ddot{a} > 0. \quad (1.49)$$

Si observamos la ecuación de aceleración (1.31), cualquier tipo de materia cuya ecuación de estado satisfaga

$$w < -\frac{1}{3}, \quad (1.50)$$

será capaz de generar un efecto repulsivo ya que contribuye de manera positiva al factor \ddot{a}/a . Es claro que la ecuación de estado de la constante cosmológica con $w = -1$ satisface tal relación, reproduciendo una solución de inflación exponencial para el factor de escala. Sin embargo tal fase de aceleración prosigue por siempre y se necesita un proceso inflacionario finito y que constituya un modelo de condiciones iniciales generador de perturbaciones

primordiales capaces de evolucionar en la estructura a gran escala que se observa hoy día en el modelo estándar [Longair, 2008].

Tal condición de régimen inflacionario finito puede ser implementada con la dinámica de un campo escalar. Desde la perspectiva de la física de partículas y teoría de campos, los campos escalares son usados para representar partículas de spin cero y son ingredientes cruciales en el fenómeno conocido como ruptura espontánea de simetría [Liddle, 2000]. Un ejemplo de esto lo constituye el campo de Higgs, asociado al proceso de ruptura de la simetría electrodébil y cuya existencia se espera confirmar en el acelerador de partículas LHC (Large Hadron Collider).

El punto de partida en teoría de campos para representar la evolución de un campo escalar es la acción, la cual viene dada por

$$\mathcal{S}_\varphi = \int \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \sqrt{-g} d^4 \mathbf{x}, \quad (1.51)$$

donde el primer término se asemeja a un término cinético y $V(\varphi)$ es el potencial, el cual puede pensarse como una función que representa cuanta energía interna está asociada con un valor particular del campo.

Se puede demostrar [Zel'dovich, 1986] que la ecuación de evolución para el campo escalar está dada por⁷

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \quad (1.52)$$

Entre los modelos que más se han estudiado en la literatura destacan [Linde, 1990]

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (1.53)$$

$$V(\varphi) = \lambda \varphi^4. \quad (1.54)$$

Para estudiar cualitativamente los modelos inflacionarios, especialmente en el régimen conocido como de rodamiento lento se introducen los parámetros inflacionarios [Liddle, 2000]

$$\epsilon(\varphi) := \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad \eta(\varphi) := M_{\text{P}}^2 \left(\frac{V''}{V} \right). \quad (1.55)$$

En resumen, la propiedad más importante del modelo inflacionario es su capacidad de generar un espectro de perturbaciones en densidad mediante las fluctuaciones de un campo escalar, tales fluctuaciones constituyen las inhomogeneidades que a la postre se magnifican para generar la estructura a gran escala en el universo.

⁷Revisaremos la dinámica de un campo escalar al interior del modelo cosmológico en el capítulo 2, al hablar del campo de quintaesencia.

1.6. Radiación cósmica de fondo en microondas

La radiación cósmica de fondo en microondas (RCF), es considerada como uno de los vestigios del universo temprano que actualmente permea el universo como un mar de radiación a una temperatura de 2.7 K. Por las consideraciones de homogeneidad e isotropía se podría pensar que dicho remanente de radiación permea todo el cosmos de manera isotrópica. Sin embargo, la radiación cósmica de fondo no constituye un mar de radiación totalmente isotrópico. Desviaciones de la isotropía al nivel de una parte en 10^5 en escalas menores a 10° en el cielo fueron primeramente detectadas por el satélite COBE y posteriormente confirmadas por el satélite WMAP [Hinshaw et al, 2008].

El origen de dichas fluctuaciones está vinculado con el proceso de formación de estructura en el universo [Longair, 2008]. Al tiempo actual, la materia en el universo está acumulada en estructuras astrofísicas como estrellas, galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias. El modelo más aceptado de cómo se originó la estructura a gran escala en el universo consiste en la magnificación de ligeras inhomogeneidades en densidad por medio de inestabilidades gravitacionales. Tal enfoque requiere que hubiese habido pequeñas variaciones en el valor de la densidad de materia y de la temperatura en diferentes partes del plasma constituido por fotones y bariones justo en el tiempo en el que los fotones se desacoplaron para posteriormente propagarse libremente por el universo y constituir la radiación cósmica de fondo. De hecho, al tiempo del desacople de los fotones, diferentes fotones fueron liberados de regiones del espacio con valores ligeramente diferentes de potencial gravitacional. Debido a que los fotones experimentan un corrimiento al rojo al escapar de los pozos de potencial gravitacional, los fotones de algunas regiones recibieron un mayor corrimiento al rojo que otros de regiones diferentes, dando lugar a una pequeña anisotropía en temperatura. Es en este sentido en el que la RCF lleva una huella digital del modelo de condiciones iniciales que ultimadamente dio lugar a la estructura en el universo.

Se ha desarrollado todo un formalismo matemático para el estudio de dichas fluctuaciones de temperatura. Para tal efecto, se introduce una descomposición en armónicos esféricos de las fluctuaciones $\Delta T/T$ del campo escalar de temperatura T dado por [Dodelson, 2003]

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.56)$$

donde $a_{\ell m}$ son los coeficientes de expansión y la presencia de los armónicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ resalta la interpretación de estar desarrollando el campo escalar de temperaturas en una serie de Fourier sobre la superficie de la esfera. El espectro de potencias característico de las fluctuaciones está definido mediante un promedio de los coeficientes de expansión

$$C_\ell = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle. \quad (1.57)$$

Es una práctica habitual graficar la cantidad $\ell(\ell + 1)C_\ell$ contra ℓ para producir lo que se

conoce como espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo. La forma característica de este espectro puede ser visto en la Figura 1.2.

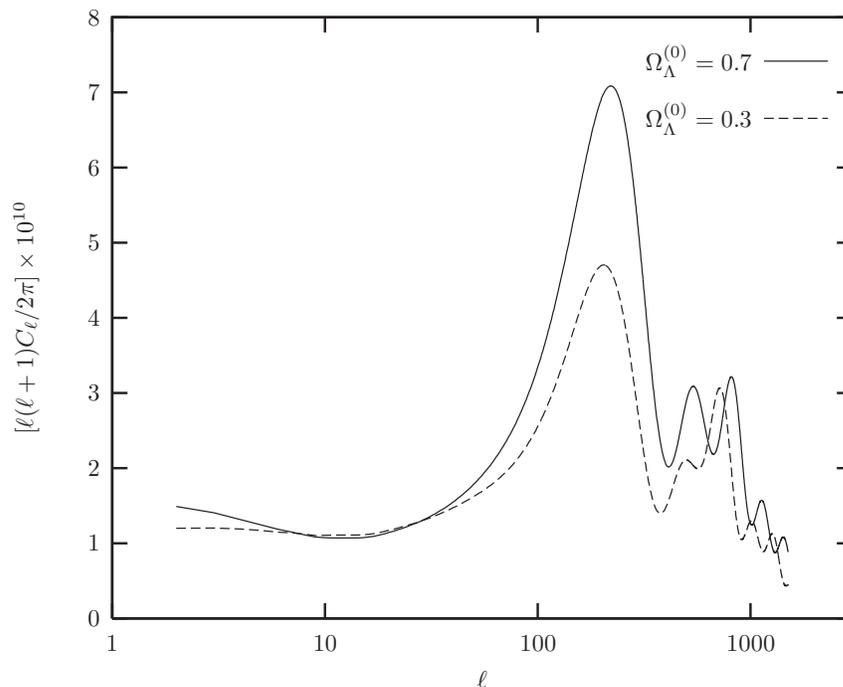


Figura 1.2: Espectro de fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo para el modelo de universo plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Se puede observar un hecho característico del espectro, al notar la influencia de la constante cosmológica en la altura del primer pico

El proyecto WMAP ha permitido la medición del parámetro cosmológico de materia reportando [Hinshaw et al, 2008]

$$\Omega_b^{(0)} = 0.0456 \pm 0.0015 \quad (1.58)$$

En lo que respecta a la edad del universo, el valor reportado es

$$t_0 = (13.72 \pm 0.12) \times 10^9 \text{ años}, \quad (1.59)$$

y en cuanto a la geometría espacial del universo

$$-0.0175 < \Omega_\kappa^{(0)} < 0.085, \quad (1.60)$$

es decir, hoy en día el universo manifiesta a muy buena aproximación una geometría plana. Sin embargo, si este es el caso, el contenido de materia-energía que lograría dicho aplanado

($\Omega = 1$) no proviene totalmente de materia bariónica, es decir, lo que actualmente constituye el modelo de concordancia observacional, es un universo plano y con cerca del 95 % de la materia-energía que lo constituye de naturaleza desconocida. Se resalta que cerca del 24 % corresponde a materia oscura (que se cree en su mayoría podría estar en los halos galácticos y especialmente asociado con el fenómeno anómalo de las curvas de rotación galácticas) y 72 % corresponde a energía oscura representativa de una constante cosmológica en su formulación más simple. De las observaciones del satélite WMAP se reporta

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{mo}}^{(0)} &= 0.228 \pm 0.0013 \quad (\text{Materia Oscura}), \\ \Omega_{\Lambda}^{(0)} &= 0.726 \pm 0.015 \quad (\text{Energía Oscura}),\end{aligned}\tag{1.61}$$

donde $\Omega_M^{(0)} = \Omega_b^{(0)} + \Omega_{\text{mo}}^{(0)}$. Esto senta un motivante para enfatizar que el sector de materia del modelo cosmológico necesita recibir más atención, sin descartar que estamos ante la posibilidad de descubrir nueva física en la dinámica del universo, el problema de la energía oscura es una vertiente en esta dirección.

Capítulo 2

El problema de la energía oscura

En este capítulo se considera hacer una exposición del problema de la energía oscura, su vinculación con las observaciones de supernovas tipo Ia, así como su relación con el fenómeno de la aceleración actual del universo. Se menciona a la constante cosmológica como una posible responsable de este fenómeno, dando cuenta de sus ventajas hacia el lado astrofísico y sus desventajas hacia el lado de la física de partículas y teoría de campos. Otros modelos para describir a la energía oscura son considerados. Por una parte se consideran aquellos fundamentados en la dinámica de un campo escalar, siendo el campo de quintaesencia el más famoso de ellos. Por la otra, la posibilidad de considerar la existencia de fluidos con diferente ecuación de estado como el gas de Chaplygin.

2.1. Evidencia observacional

En el año 1998, mediante observaciones de las supernovas tipo Ia, dos grupos de investigación independientes [Perlmutter et. al., 1999, Riess et al., 1998.] reportaron evidencia de la expansión acelerada del universo, además de dar cuenta de que la materia no es la componente dominante en el mismo. Las conclusiones de las investigaciones realizadas señalan que para manifestar compatibilidad con las observaciones se necesita invocar la presencia de una energía oscura, a primera instancia representada por la presencia de una constante cosmológica.

Las explosiones de supernova son eventos estelares de tipo cataclísmico. El modelo standard de una explosión de supernova tipo Ia considera que dicho evento sucede cuando una estrella enana blanca supera su límite de Chandrasekhar (aproximadamente 1.4 masas solares). En este régimen la presión por degeneración de los electrones no es capaz de contrarrestar la fuerza gravitacional y ante tal pérdida de balance el objeto estelar explota dejando como remanente una estrella de neutrones.

Dichas explosiones se consideran sucesos muy poco frecuentes en la escala cósmica.

Su conteo da razón de tal vez unos pocos eventos por siglo en una galaxia similar a la nuestra. Sin embargo, hoy día la infraestructura observacional ha permitido el desarrollo de telescopios capaces de realizar mapeos del cielo cubriendo un vasto número de galaxias en una sola corrida de observación. Es de esta forma que el desarrollo del campo de las observaciones de supernova ha ido estableciendo un vínculo muy sólido entre la teoría y la observación.

El hecho de que las supernovas tipo Ia sean objetos astrofísicos útiles radica en que manifiestan luminosidades intrínsecas muy similares, hecho por el cual en la literatura reciben el nombre de candelas estándar. Dicho de otro modo, las supernovas tipo Ia manifiestan una curva de luz característica, la cual es básicamente una gráfica de la luminosidad como función del tiempo. El hecho clave del estudio es analizar a que distancia se encuentra la galaxia huésped a partir de la luminosidad de la supernova.

En este sentido, un concepto importante para la cosmología observacional es el de distancia, teniendo en cuenta la física de la expansión del universo. Tal noción emplea el uso de dos sistemas de coordenadas, el comovil y el físico, conectado uno con otro mediante el factor de escala, el cual cambia con el tiempo [Dodelson, 2003]. Sin embargo, también se puede definir una distancia por medio de la luminosidad de un objeto astrofísico. En un espacio euclídeo, la luminosidad L de un objeto a una distancia d del observador se relaciona con el flujo de energía F mediante la expresión [Mendoza, 2003]

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.1)$$

enfaticando que la luminosidad o potencia L constituye la energía radiada por unidad de tiempo, mientras que el flujo F es la energía radiada por unidad de tiempo y por unidad de área. La ecuación anterior se hace extensiva a un universo en expansión, definiendo la distancia por luminosidad mediante la ecuación

$$d_L^2 := \frac{L}{4\pi F}, \quad (2.2)$$

donde en sentido estricto, debido a la dinámica de expansión del universo, el factor d_L debe manifestar cierta dependencia con la razón de expansión del universo. Como esta última depende de las componentes de materia en el universo, es de pensarse que tal dependencia sea heredada por la distancia por luminosidad y de esa manera pensar en $d_L(z)$. De hecho, en una métrica de fondo de tipo FRW, (cf. ec. (1.2)), la distancia por luminosidad en un modelo de universo plano está dada por (cf. apéndice)

$$H_0 d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{d\bar{z}}{E(\bar{z})}, \quad \text{con } E(z) := \frac{H(z)}{H_0}. \quad (2.3)$$

La relación anterior establece un vínculo observacional entre mediciones de la distancia por luminosidad $d_L(z)$ y la razón de expansión del universo, cuantificada por $H(z)$.

Si la forma de $H(z)$ contiene una sola componente de materia cuya ecuación de estado w sea constante y asumimos la hipótesis de universo plano ($\kappa = 0$), entonces la ecuación de Friedmann puede escribirse en la forma

$$H(z) = H_0 \left[(1+z)^{3(1+w)} \right]^{1/2}, \quad (2.4)$$

y así la ecuación (2.3) puede ser integrada de manera analítica dando como resultado

$$H_0 d_L(z) = \frac{(1+z)^{2-3(1+w)/2} - (1+z)}{1-3(1+w)/2}, \quad (2.5)$$

la cual al considerar dominación por materia ($w = 0$) se reduce a

$$H_0 d_L(z) = 2 \left[1 + z - \sqrt{1+z} \right], \quad \left(\Omega_M^{(0)} = 1 \right); \quad (2.6)$$

mientras que en el caso de dominación por constante cosmológica ($w = -1$), la razón de expansion $H(z)$ se mantiene constante y con ello

$$H_0 d_L(z) = z(1+z), \quad \left(\Omega_\Lambda^{(0)} = 1 \right). \quad (2.7)$$

Hoy en día, el modelo cosmológico resalta la idea de un universo plano [Perlmutter et al, 1999, Riess et al, 1998] en el que 2 componentes, materia sin presión y constante cosmológica (o en su caso energía oscura) predominan. En tal modelo la relación de distancia por luminosidad se manifiesta como

$$H_0 d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\left[\Omega_M^{(0)}(1+\bar{z})^3 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]^{1/2}}, \quad \left(\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1 \right). \quad (2.8)$$

donde la integral debe ser evaluada numericamente. En la Figura 2.1 se grafica la distancia por luminosidad para diferentes modelos cosmológicos.

Hasta este punto hemos dado el manejo teórico de la distancia por luminosidad y su dependencia en los parámetros cosmológicos. Ahora vamos a transitar al ámbito observacional para analizar cómo las observaciones de supernova puede ser conectadas con los aspectos teóricos. Para tal fin, exponemos que la distancia por luminosidad que manifiesta un objeto puede ser adaptada a una escala de magnitudes mediante la relación [Mendoza, 2003]

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (2.9)$$

donde m es la magnitud aparente y M es la magnitud absoluta. La ecuación (2.9) en cierta manera constituye una versión logarítmica de la ecuación (2.2). Los factores numéricos y la

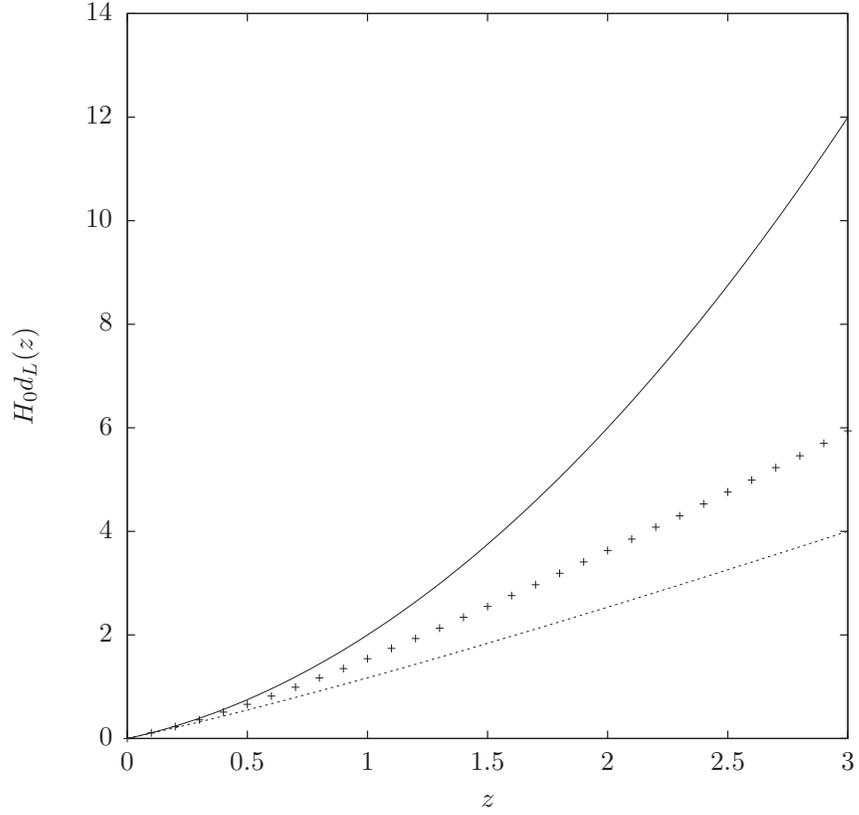


Figura 2.1: Distancia por luminosidad $d_L(z)$ (en unidades de H_0^{-1}) como función del corrimiento al rojo z en un modelo de universo plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. De arriba hacia abajo las curvas se corresponden con $\Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_\Lambda^{(0)}) = (0.3, 0.7)$, $\Omega_M^{(0)} = 1$. Se puede observar que un objeto con la misma luminosidad a un corrimiento al rojo $z = 3$ es detectado a una distancia tres veces mayor en un universo dominado por constante cosmológica al respecto del caso de la dominación por materia.

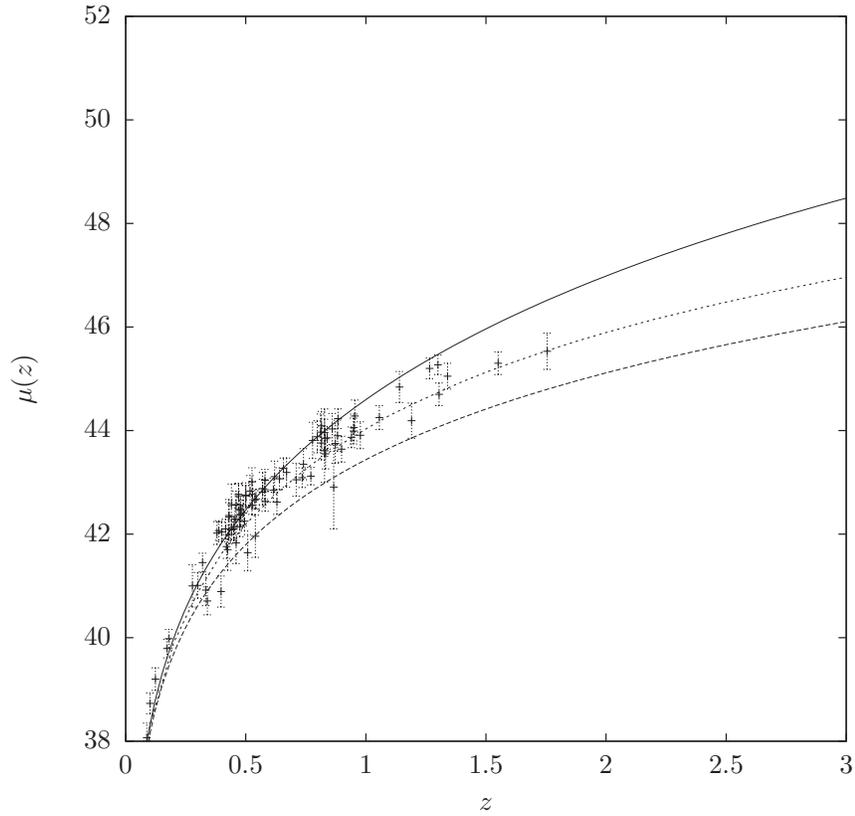


Figura 2.2: Módulo de distancia $\mu(z)$ en función del corrimiento al rojo z para un modelo cosmológico plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Los puntos vienen del conjunto de datos Gold resultantes del *Supernova Search Team Collaboration* y resumidos en [Riess et al. 2004]. De arriba hacia abajo las curvas se corresponden con $\Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_\Lambda^{(0)}) = (0.3, 0.7)$, $\Omega_M^{(0)} = 1$. Se observa que los datos desfavorecen un universo totalmente dominado por materia o por constante cosmológica. La línea punteada intermedia representa el mejor ajuste a las observaciones en el cual cerca del 70% de la densidad de energía es compatible con una constante cosmológica.

normalización de d_L en Mpc emanan de convenciones usadas en astronomía. A la cantidad $m - M$, la cual es función del corrimiento al rojo vía el factor $d_L(z)$, recibe el nombre de módulo de distancia y se denota con la letra griega μ .

De la expresión para $d_L(z)$ (2.3), se resalta la dependencia en el parámetro de Hubble hoy día H_0 . Observacionalmente tal parámetro es conocido bajo cierta incertidumbre, la cual se pondrá de manifiesto en el valor del módulo de distancia $\mu(z)$. Es posible escribir la expresión para el módulo de distancia exhibiendo esta incertidumbre [Padmanabhan, 2003];

$$\mu(z) := m - M = 5 \log_{10} [H_0 d_L(z)] - 5 \log_{10} h + 42.38. \quad (2.10)$$

Esta ecuación es la que nos va a permitir hacer la comparación entre los valores de la distancia por luminosidad que arroje el modelo teórico con el módulo de distancia que arrojen las observaciones de supernova. En la Figura 2.2 podemos ver una gráfica del módulo de distancia en función del corrimiento al rojo para un modelo de universo plano, enfatizando que el mejor ajuste a las observaciones de supernova es aquel en el cual el parámetro de materia $\Omega_M^{(0)} \approx 0.3$. Además, de las observaciones es claro que el modelo de dominación por materia $\Omega_M^{(0)} = 1$ queda totalmente descartado. Ello permite definir un modelo de concordancia observacional en el cual tenemos un universo plano, con dominio de 2 componentes y aproximadamente el 70% de la energía del universo ($\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$) se manifiesta en la forma de una constante cosmológica o energía oscura.

2.2. Evolución del parámetro de desaceleración

Veamos ahora cómo se cuantifica la aceleración al interior de un modelo cosmológico. En el capítulo 1 expresamos la condición dinámica para una fase de aceleración mediante la condición $\ddot{a} > 0$. En el ámbito de la cosmología observacional una fase de desaceleración o aceleración se cuantifica con el parámetro de desaceleración q , definido mediante la ecuación

$$q(z) := -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}. \quad (2.11)$$

Tal definición es representativa de hacer un desarrollo en serie del factor de escala en la vecindad de t_0

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}_0}{a_0} (t - t_0)^2 + \dots \right) \quad (2.12)$$

con lo que el parámetro de desaceleración se interpreta como el factor de proporcionalidad en el término a segundo orden en el desarrollo en serie del factor de escala, donde dicho sea de paso, el parámetro de Hubble juega el mismo papel a primer orden. Así, la condición dinámica sobre el factor de escala para tener aceleración o desaceleración la trasladamos

al factor q . Es decir, una fase de aceleración se manifestaría con la condición $q < 0$. De su definición, notamos que el parámetro de desaceleración constituye en cierta manera el cociente de la ecuación de aceleración con la ecuación de Friedmann. Usando esta observación y considerando un modelo de universo plano donde predomina materia sin presión y constante cosmológica, dicho par de ecuaciones toma la forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_M^{(0)}(1+z)^3 + \frac{\Lambda}{3}, \quad H^2 = H_0^2 \left[\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]. \quad (2.13)$$

En términos del corrimiento al rojo el parámetro de desaceleración toma la forma

$$q(z) = \frac{\frac{1}{2}\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 - \Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}}. \quad (2.14)$$

Una gráfica del parámetro de desaceleración en términos del corrimiento al rojo es presentada en la Figura 2.3. Además notemos que el corrimiento que define la transición a la fase de aceleración esta definido mediante la condición $q < 0$, la cual de (2.14) se manifiesta si y sólo si

$$z < z_* := \left(\frac{2\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_M^{(0)}} \right)^{1/3} - 1. \quad (2.15)$$

Para la ecuación previa, el modelo de concordancia $\Omega_M^{(0)} = 0.3$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$ arroja $z_* = 0.67$, resaltando que el fenómeno de la expansión acelerada del universo es un fenómeno relativamente reciente. Nótese también que en este mismo modelo, al usar la relación de aplanado $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, el valor actual del parámetro de desaceleración es

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_M^{(0)} - \Omega_\Lambda^{(0)} = \frac{3}{2}\Omega_M^{(0)} - 1, \quad (2.16)$$

el cual para el modelo de concordancia reproduce $q_0 \approx -0.55$.

La conclusión de este hecho es que si las observaciones de supernova son compatibles con el valor $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$, entonces el universo debe estar sufriendo una expansión acelerada actualmente.

2.3. El problema de la constante cosmológica

Las observaciones cosmológicas indican que aproximadamente el 70 % de la densidad de energía del universo está asociada con la presencia de una constante cosmológica. Desde la perspectiva astrofísica tal enfoque representa la solución más económica al problema de la energía oscura, sin embargo desde la perspectiva de la teoría de campos tal enfoque no resulta del todo satisfactorio. Para ver en que radica este punto comentemos que la teoría

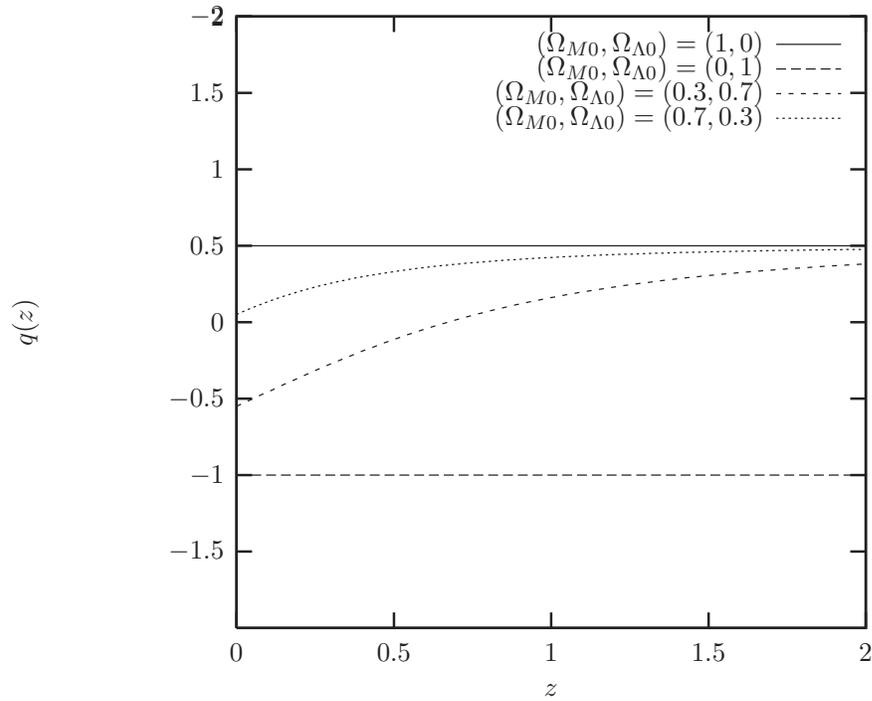


Figura 2.3: Evolución del parámetro de desaceleración $q(z)$ como función del corrimiento al rojo z en un modelo de universo plano con $\Omega_M^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Se observa que a medida que se incrementa la densidad de energía en constante cosmológica el universo experimenta una transición hacia una fase de aceleración.

de la relatividad general en ausencia de constante cosmológica representa una teoría libre de escala. De hecho, la incorporación de la constante cosmológica a las ecuaciones de campo y cuyas dimensiones son L^{-2} define una escala.

Vamos a establecer una comparación de la siguiente manera. Si las observaciones nos dicen $\Omega_{\Lambda}^{(0)} \approx 0.7$, veamos si existe compatibilidad entre la energía del vacío asociada a la constante cosmológica con la energía del vacío que la escala microscópica (o en un mejor sentido, aquella propuesta por la teoría cuántica de campos) pudiera proporcionar.

Para ello, notemos que de la definición del factor $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 8\pi G\rho_{\Lambda}/3H_0^2 = \rho_{\Lambda}/3M_{\text{P}}^2 H_0^2$, en combinación con las observaciones se obtiene

$$\rho_{\Lambda}(\text{observación}) = \Omega_{\Lambda}^{(0)} (3M_{\text{P}}^2 H_0^2) = 0.7 (3M_{\text{P}}^2 H_0^2), \quad (2.17)$$

en unidades naturales. Por otra parte, desde la perspectiva de la teoría cuántica de campos (TCC), la energía del vacío se presentaría a la escala fundamental de Planck, es decir

$$\rho_{\Lambda}(\text{TCC}) = M_{\text{P}}^4. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, al tomar el cociente obtenemos debido a que $H_0^{-1} = 9.776h^{-1} \times 10^9 \text{ años} \sim 10^{-33} \text{ eV}$

$$\frac{\rho_{\Lambda}(\text{observación})}{\rho_{\Lambda}(\text{TCC})} = 2.1 \frac{H_0^2}{M_{\text{P}}^2} \sim 2.1 \frac{(10^{-33} \text{ eV})^2}{M_{\text{P}}^2} \sim 10^{-120}. \quad (2.19)$$

Esta discrepancia de 120 órdenes de magnitud entre lo expuesto por la observación astrofísica y la teoría cuántica de campos constituye el problema de la constante cosmológica.

Resultados como este, alientan a que posibles escenarios alternativos al modelaje de la energía oscura pudiera incluir modelos dinámicos, cuya densidad de energía cambie con la evolución cósmica y que subsanen el hecho de que las densidades dadas por la observación y la teoría de campos presenten una mayor cordura [Carroll, 1997].

2.4. Modelos de campo escalar

En la sección previa se expuso un argumento en favor de la posibilidad de considerar modelos dinámicos de energía oscura. En esta sección vamos a explorar uno de los primeros modelos, el cual está fundamentado en la dinámica de un campo escalar conocido como campo de quintaesencia [Ratra & Peebles, 1988, Caldwell, Steinhardt, 1998].

El punto de partida se asemeja mucho a la construcción del campo escalar inflacionario, partiendo de la acción dada por [Liddle et al. 2000]

$$\mathcal{S}_{\Phi} = \int \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi - V(\Phi) \right] \sqrt{-g} d^4 \mathbf{x}. \quad (2.20)$$

La definición del tensor de energía-momento se expresa mediante la variación de la acción, es decir, [Carroll, 1997]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_\Phi}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.21)$$

Usando esta definición en (2.20) y observando que $\delta\sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ se obtiene

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi + V(\Phi) \right). \quad (2.22)$$

La ecuación anterior básicamente constituye una manifestación del teorema de Noether, donde el término entre paréntesis representa el Lagrangiano de un campo escalar [Liddle, 2000].

Con esto, por medio de una identificación con un fluido perfecto y en la hipótesis de un universo plano, podemos extraer la densidad de energía y presión asociados al campo escalar [Copeland et al, 2006]

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi), \quad p_\Phi = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi). \quad (2.23)$$

De esta manera, la ecuación de Friedmann en un universo dominado por el campo escalar toma la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Phi = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right). \quad (2.24)$$

La conservación del tensor de energía-momento para un fluido perfecto en la métrica de FRW implica entonces que [Copeland et al, 2006]

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0, \quad (2.25)$$

que constituye la ecuación de evolución para el campo escalar. Combinando esta ecuación con la ecuación de Friedmann (2.24), podemos obtener la ecuación de aceleración del universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left(\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \right), \quad (2.26)$$

la cual refleja que si el término de potencial domina sobre el término cinético entonces traerá como resultado una fase de aceleración. De hecho, es posible definir una ecuación de estado del campo escalar y que además cambia con el tiempo, acorde a la relación

$$w_\Phi = \frac{p_\Phi}{\rho_\Phi} = \frac{\dot{\Phi}^2 - 2V(\Phi)}{\dot{\Phi}^2 + 2V(\Phi)}. \quad (2.27)$$

Es posible resolver estas ecuaciones para encontrar que el potencial que da origen a una ley de potencias $a(t) = (t/t_0)^\alpha$ para el factor de escala tiene la forma [Copeland et al, 2006]

$$V(\Phi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{\Phi}{M_{\text{P}}}\right), \quad (2.28)$$

y que además el campo escalar evoluciona con el tiempo acorde a la ecuación

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \sqrt{2\alpha} M_{\text{P}} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right). \quad (2.29)$$

Estos resultados expresan que el potencial exponencial puede ser usado para construir una fase de aceleración siempre que $\alpha > 1$.

2.5. Modificaciones a la ecuación de estado

La otra vertiente en los modelos de energía oscura consiste en poner un mayor énfasis en la ecuación de estado de la misma. Una de tales consideraciones es el modelaje de la energía oscura como un fluido con ecuación de estado de la forma [Kamenshchik et al., 2001]

$$p(\rho) = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (2.30)$$

donde A es una constante positiva y α un parámetro constante. Con tal ecuación de estado, la solución de la ecuación para la densidad de energía (1.29) es

$$\rho(a) = \left[A + (\rho_0^{\alpha+1} - A) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\alpha)} \right]^{1/(1+\alpha)}, \quad (2.31)$$

donde $\rho_0 := \rho(a_0)$.

El modelo donde $\alpha = 1$ es conocido como gas de Chaplygin y fue el modelo pionero en la línea de acción de modificar la ecuación de estado. Para el gas de Chaplygin notamos que

$$\rho_{\text{Ch}}(a) = \sqrt{A + (\rho_0^2 - A) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-6}} \sim \begin{cases} a^{-3} & \text{para un universo temprano,} \\ \text{const.} & \text{para un universo tardío.} \end{cases}, \quad (2.32)$$

Este hecho proporciona una posibilidad interesante de poder unificar la fenomenología de materia oscura y energía oscura con la presencia de un solo fluido cosmológico.

Además, podemos establecer una comparación entre la evolución de la componente de materia y la del gas de Chaplygin, observando que

$$\frac{\rho_M(z)}{\rho_{\text{Ch}}(z)} = \frac{\rho_M^{(0)}(1+z)^3}{\sqrt{A + (\rho_0^2 - A)(1+z)^6}} \xrightarrow{z \gg 1} \chi := \frac{\rho_M^{(0)}}{\sqrt{\rho_0^2 - A}}. \quad (2.33)$$

Lo anterior expresa que la constante adimensional χ establece qué proporción de densidad de energía del gas de Chaplygin hay en referencia a la de materia cuando ésta comienza a dominar.

La forma de la razón de expansión para un universo plano conteniendo materia y gas de Chaplygin viene dado por [Alam et. al., 2003]

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \frac{1}{\chi} \Omega_M^{(0)} \sqrt{\frac{A}{\rho_0^2 - A} + (1+z)^6} \right]^{1/2}, \quad (2.34)$$

la cual al evaluar actualmente reproduce

$$\frac{A}{\rho_0^2 - A} = \chi^2 \left(\frac{1 - \Omega_M^{(0)}}{\Omega_M^{(0)}} \right)^2 - 1 \quad (2.35)$$

y de esa manera considerar que la razón de expansión toma la forma

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + \frac{1}{\chi} \Omega_M^{(0)} \left(\chi^2 \left(\frac{1 - \Omega_M^{(0)}}{\Omega_M^{(0)}} \right)^2 - 1 + (1+z)^6 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

lo que nos dice que dicho modelo sólo manifiesta dependencia en los parámetros $\Omega_M^{(0)}$ y χ .

Tales consideraciones hacia poner más énfasis al estudiar el sector de materia puede ser visualizado como una lección de experiencia al considerar con mayor detenimiento el sector de curvatura y encaminarse a definir si la teoría de la relatividad general es la mejor teoría de gravitación con la que contamos o vale la pena considerar extensiones. Pasos en esa vertiente lo están empezando a constituir las teorías de gravedad modificada [Capozziello et al., 2002], de las cuales hablamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Teorías métricas de gravedad modificada

En este capítulo se desarrolla un bosquejo de las teorías métricas de gravedad modificada. Tales teorías son consideradas extensiones a la teoría de la relatividad general y su principal motivación es abordar el estudio de problemas de tipo cosmológico, siendo el problema de la energía oscura un ejemplo prominente. Ponemos especial atención al modelo de gravedad $f(R)$, ya que entre sus premisas se encuentra poner un mayor énfasis al sector de curvatura al interior de una teoría de gravitación.

3.1. Estructura de una teoría de gravitación

Hoy en día, el modelo cosmológico standard está construido sobre los pilares de la teoría general de la relatividad. Tal enfoque ha permitido (con suplementos como la constante cosmológica y el modelo inflacionario) establecer una descripción general del universo, cubriendo puntos como lo son la nucleosíntesis o la formación de estructura galáctica.

Agregado a esto, la teoría de la relatividad general está condicionada a tener compatibilidad con la teoría de la relatividad especial y con la gravitación newtoniana en el régimen de bajas energías y campos gravitacionales débiles. Es decir, cualquier intento a modificar o extender la teoría de la relatividad general debe seguir preservando esta compatibilidad.

Desde una perspectiva física, el igualar el tensor de Einstein con el tensor energía-momento para constituir las ecuaciones de campo de la relatividad general, refleja el principal mensaje de la teoría de Einstein: la curvatura en cada punto del espacio-tiempo está influenciada por la distribución de materia y energía. Este hecho caracteriza la comunicación de 2 sectores al interior de una teoría de gravitación, el sector de curvatura y el sector de materia. Además, una teoría de gravitación en sí constituye una teoría de campo, y el espíritu de su formulación es identificar una acción de la cual emanen las ecuaciones del

mismo. En este contexto, se reconoce a la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo como la variable de campo fundamental. De esta manera, la acción de la teoría gravitacional debe presentar la forma [Weinberg, 1972, Carroll, 2004]

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4\mathbf{x} + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

donde el primer término es representativo del sector de curvatura y el segundo del sector de materia. Además, como estructura global, la teoría debe compartir las hipótesis afines a la relatividad general de Einstein, a saber [Capozziello et al., 2007]

- *Principio de Relatividad.* Todas las leyes de la física tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales
- *Principio de Equivalencia.* Manifestando que a nivel local, los efectos inerciales deben ser indistinguibles de los efectos gravitacionales, además de establecer la igualdad entre masa inercial y masa gravitacional.
- *Formulación Covariante.* Las ecuaciones de campo deben ser covariantes
- *Causalidad.* La teoría no debe permitir la aparición de fenómenos superlumínicos, enfatizando que en cada punto del espacio-tiempo la noción de presente, pasado y futuro sea consistente.

Los anteriores constituyen los pilares de la teoría, la cual, si pretende extender o modificar a la relatividad general, debe ser capaz de explicar los fenómenos astrofísicos vinculados con la formación de estructura, nucleosíntesis primordial y aspectos cosmológicos en general.

3.2. Teorías de gravedad generalizada

Ahora vamos a exponer qué estructura presentan las teorías que intentan llevar a cabo modificaciones o extensiones a la teoría de la relatividad general. Para tal fin, y con la fundamentación de proceder como en una teoría de campos, consideramos a la acción como nuestro punto de partida. La familia de las teorías que proponen modificaciones a la teoría de la relatividad general, principalmente mediante campos escalares y un mayor énfasis al sector de curvatura de la misma, pueden ser representadas dentro de la siguiente acción [Hwang et al., 1996]

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \int \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \psi(\phi) g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - V(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4\mathbf{x} + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

donde $f(\phi, R)$ es una función arbitraria del escalar de curvatura y del campo escalar, el cual tiene asociado un potencial $V(\phi)$. La función $\psi(\phi)$ representa un parámetro de acoplamiento. Tales teorías son conocidas en la literatura como modelos de gravedad generalizada. La

esencia de la acción anterior es que la dinámica de una teoría de gravitación posiblemente esté fundamentada en considerar invariantes de mayor orden en el sector de curvatura o en su caso con un posible acoplamiento con un campo escalar, ya sea en acople mínimo y no mínimo. Observamos que la acción anterior involucra 2 variables de campo, la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ y el campo escalar ϕ . En la Tabla 3.1 se presenta un panorama de las teorías de gravitación generalizadas y algunos casos particulares. Considerando a la métrica como variable de campo, al tomar la variación de la acción (3.2) en vacío surgen las ecuaciones de campo de la gravedad generalizada [Hwang et al., 1996]

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{F} \left[\psi \left(\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi \right) - \frac{1}{2}(RF - f + 2V)g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F - g_{\mu\nu}\square F \right], \quad (3.3)$$

donde $F := \partial f / \partial R$ y $\square = g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}$ es el operador de Laplace-Beltrami.

La variación de la acción respecto a ϕ produce la ecuación de evolución del campo escalar

$$\square\phi + \frac{1}{2\omega} \left(\frac{d\omega}{d\phi}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi + \frac{\partial f}{\partial\phi} - 2\frac{dV}{d\phi} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Vale la pena mencionar que no es la primera vez que se considera la posibilidad de tener un campo escalar que interactúe con el sector gravitacional. El campo escalar inflacionario y el de quintaesencia (ambos con acople mínimo) representan esfuerzos en esta dirección, sin embargo, otros ejemplos (con acople no mínimo) ya se han dado en el pasado, en especial con la vinculación de implementar el principio de Mach al interior de una teoría de gravitación, lo cual encaminó a la posibilidad de considerar una constante gravitacional que cambia con el tiempo [Fujii, 2003]. El principio de Mach establece que el sistema inercial local está determinado por el movimiento promedio de los objetos astronómicos más distantes. Esto implicaría que la constante gravitacional pudiera estar determinada por la dinámica de un campo escalar acoplado de manera no mínima al sector gravitacional. La teoría de Brans-Dicke [Brans et al., 1961] representó un primer esfuerzo en esta línea de pensamiento, postulando un acoplamiento no mínimo entre el campo escalar (carente de potencial) y el sector gravitacional de la forma $f(\phi, R) = \phi R$ y con un parámetro de acoplamiento $\psi(\phi) = \omega_{\text{BD}}/\phi$, donde ω_{BD} representa un parámetro adimensional constante, que hace recuperar el régimen de relatividad general cuando $\omega_{\text{BD}} \rightarrow \infty$. Con tales consideraciones, las ecuaciones de campo de la teoría de Brans-Dicke toman la forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega_{\text{BD}}}{\phi^2} \left(\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi \right) + \frac{1}{\phi}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\square\phi). \quad (3.5)$$

Otra motivación independiente para extender la teoría de gravitación viene de cuestionar su régimen de aplicabilidad, en especial en el límite de altas energías, aquel en el

Teoría de gravitación	Lagrangiano gravitacional \mathcal{L}_g
Relatividad general	R
Relatividad general + Λ	$R - 2\Lambda$
Teorías métricas de gravitación	$f(R)$
Brans-Dicke	$\phi R - \frac{w}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$
Escalar-Tensorial	$\phi R - \psi(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$
Campo escalar mínimamente acoplado	$R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$

Cuadro 3.1: Modelos de Gravedad.

cual las interacciones fundamentales parecen presentar un esquema de unificación. Tales desarrollos teóricos están encaminados hacia la teoría de cuerdas, supergravedad o teorías de gran unificación, las cuales consideran acciones efectivas que contienen acoplamientos no mínimos a la geometría y términos de mayor orden en los invariantes de curvatura, como pudieran ser R^2 , $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, con la finalidad de poder hacer un primer intento por transitar del marco de la gravedad clásica a la gravedad cuántica. Tales términos se podrían interpretar como correcciones a la acción de Hilbert-Einstein a la hora de hacer teoría cuántica de campos en espacios-tiempos curvos [Birrell et al., 1982].

De hecho, un modelo de gravitación en este sentido es construido a partir del invariante de Gauss-Bonnet, dado por [Barrow et al., 2007]

$$I_{\text{GB}} = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.6)$$

y cuando la acción se construye a partir de una función arbitraria de este invariante se habla del modelo de gravedad $f(I_{\text{GB}})$.

3.3. Gravedad métrica $f(R)$

Desde la perspectiva teórica, no existe una razón de principios fundamentales para restringir el lagrangiano gravitacional a una función lineal del escalar de curvatura. Es cierto que el escalar de curvatura es el más simple construido a partir de la métrica y sus segundas derivadas, sin embargo, se podría pensar que la acción fundamental pudiera ser considerada como una función arbitraria del escalar de curvatura $f(R)$. Previamente se habían estudiado modelos (como el modelo R^2) con la finalidad de reproducir un modelo de expansión acelerada del universo [Starobinsky, 1980].

Fundamentado en esto, se ha considerado la familia de teorías conocidas como $f(R)$, donde el sector de materia ha quedado intacto respecto a relatividad general, más en cambio, tales teorías proponen que la acción correspondiente al sector de curvatura pudiera ser generalizada mediante la función $f(R)$. Con esto en mente, la acción del modelo de gravedad $f(R)$ tiene la forma

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int f(R)\sqrt{-g} d^4\mathbf{x} + \int \mathcal{L}_M\sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (3.7)$$

donde se ha normalizado a la Hilbert-Einstein, haciendo que las dimensiones de la función f sean las mismas que las del escalar de curvatura; tomando la variación de la acción con respecto a la métrica, se obtienen las ecuaciones de campo de la gravedad $f(R)$ [cf. Apéndice]

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\square f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Observemos que estas ecuaciones de campo son de cuarto orden en las variables de la métrica, ese es el precio que se paga por considerar una acción distinta a una función lineal

en el escalar de curvatura. La traza de la ecuación de campo (3.8) es

$$f'(R)R - 2f(R) - 3\Box f'(R) = 8\pi GT, \quad (3.9)$$

donde T es la traza del tensor de energía-momento de materia. Notemos que lo anterior se manifiesta como una ecuación diferencial de segundo orden para $f'(R)$; cuando $f(R) = R$ se recupera la relación familiar de relatividad general $R = -8\pi GT$ que es una ecuación puramente algebraica. Este hecho hace pensar en la literatura que $f'(R)$ constituye un grado de libertad escalar inherente a la teoría [Capozziello et al., 2007]. Este formalismo de la gravedad $f(R)$ es el que se considera subsecuentemente en esta tesis para construir un modelo cosmológico, principalmente con la meta de estudiar el problema de la energía oscura como una manifestación de esta modificación al sector de curvatura.

Capítulo 4

Modelo cosmológico con gravedad modificada

En este capítulo se da un panorama general del modelo cosmológico en el contexto de una teoría métrica de gravitación $f(R)$, considerándola como una modificación a la teoría general de la relatividad y encaminada a poder estudiar el problema de la energía oscura. Con esta hipótesis se obtienen las ecuaciones de Friedmann para dicho modelo en los casos de vacío y de presencia de materia sin presión. Con lo anterior, se establece un vínculo con la cosmología observacional, en particular con las observaciones de supernova Ia para hacer una comparación con el modelo de concordancia observacional. Finalmente, se lleva a cabo una análisis del proceso de formación de estructura al interior de este modelo de gravedad modificada.

4.1. Gravedad $f(R)$ como un modelo de energía oscura

En este apartado se construye un modelo cosmológico al interior del modelo métrico de gravitación dado por

$$f(R) = bR^n, \tag{4.1}$$

donde b es una constante. Como aplicación principal se abordará el problema de la energía oscura como una manifestación de haber modificado al sector de curvatura. El punto de partida es resaltar que se comparten características con el modelo cosmológico construido con la teoría de la relatividad general. Básicamente la hipótesis de homogeneidad e isotropía, representada en la métrica de FLRW (ecuación 1.2) es heredada y además el sector de materia es descrito mediante un tensor de energía-momento de fluido perfecto (ecuación 1.3). El punto que contrasta es que las ecuaciones de campo que relacionan la interacción entre el sector de curvatura y el sector de materia han sido modificadas por las ecuaciones

de campo de la gravedad métrica $f(R)$ dadas por la ecuación (3.8). Para aprovechar toda la experiencia previa en el manejo del modelo cosmológico usando la relatividad general, dichas ecuaciones pueden ser escritas en la forma [Capozziello et al., 2007]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[\frac{1}{F} T_{\mu\nu} + \frac{M_{\text{P}}^2}{F} \left[\left(\frac{1}{2} (f(R) - RF) - \square F \right) g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} F \right] \right], \quad (4.2)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein (1.14). Aquí se ha definido $F := f'(R)$, en donde la prima representa derivación respecto al argumento y además $M_{\text{P}} = (8\pi G)^{-1/2}$. Si definimos un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}^{(R)}$ vinculado con la curvatura [Capozziello et al., 2002] como

$$T_{\mu\nu}^{(R)} := \frac{M_{\text{P}}^2}{F} \left[\left(\frac{1}{2} (f(R) - RF) - \square F \right) g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} F \right], \quad (4.3)$$

entonces las ecuaciones de campo (3.8) pueden escribirse en la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(E)}, \quad (4.4)$$

con un tensor de energía-momento efectivo $T_{\mu\nu}^{(E)}$ dado por

$$T_{\mu\nu}^{(E)} := \frac{1}{F} T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(R)}, \quad (4.5)$$

el cual tiene contribuciones del sector de materia y del sector de curvatura.

En la identificación de fluido perfecto, es posible asociar una densidad de energía ρ_R y una presión p_R vinculadas a la curvatura mediante las ecuaciones

$$T_{00}^{(R)} = \rho_R, \quad T^1_{\ 1}{}^{(R)} = T^2_{\ 2}{}^{(R)} = T^3_{\ 3}{}^{(R)} = p_R. \quad (4.6)$$

Considerando esto y usando la definición del tensor de energía-momento vinculado a la curvatura (4.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_R(t) &= \frac{M_{\text{P}}^2}{F} \left[\frac{1}{2} (RF - f) + \square F + \ddot{F} \right], \\ p_R(t) &= \frac{M_{\text{P}}^2}{F} \left[\frac{1}{2} (f - RF) - \square F \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El operador de Laplace-Beltrami \square aplicado sobre una función escalar está dado por [Liddle, 2000]

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu}). \quad (4.8)$$

De esta manera, usando la métrica de FLRW para el modelo de universo plano ($\kappa = 0$), las ecuaciones (4.7) toman la forma

$$\rho_R(t) = \frac{M_{\text{P}}^2}{F} \left[\frac{1}{2}(RF - f) - 3H\dot{F} \right], \quad (4.9)$$

$$p_R(t) = \frac{M_{\text{P}}^2}{F} \left[\frac{1}{2}(f - RF) + \ddot{F} + 3H\dot{F} \right]. \quad (4.10)$$

Hasta este punto, hemos hecho énfasis que nuestro modelo cosmológico tiene una dependencia en una función arbitraria del escalar de curvatura. De hecho, dada una métrica, el escalar de curvatura puede ser calculado. En particular, para la métrica de FLRW está dado por [Carroll, 1997]

$$R(t) = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \quad (4.11)$$

Si la razón de expansión sigue una ley de potencias $a(t) = (t/t_0)^\alpha$ y asumimos universo plano la ecuación anterior toma la forma

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}, \quad \text{con } R_0 = 6H_0^2 (2 - 1/\alpha). \quad (4.12)$$

Con todo lo anterior, podemos obtener las ecuaciones cosmológicas para una teoría $f(R)$. De hecho, considerando la componente 00 de la ecuación de campo (3.8) se obtiene la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho}{F} + \rho_R \right) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (4.13)$$

Para la evolución de la densidad de energía, consideramos que el tensor de energía-momento se conserva, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, la componente $\nu = 0$ de esta ecuación reproduce

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (4.14)$$

Las ecuaciones (4.13) y (4.14) constituyen nuestras ecuaciones de Friedmann modificadas. En la tabla 4.1 se establece un comparativo de las ecuaciones de cosmológicas dentro del marco de la relatividad general y su contraparte en la teoría de gravedad métrica $f(R)$.

Si consideramos que el término de densidad de energía tiene contribuciones de materia y radiación, i.e. $\rho = \rho_M + \rho_\gamma$ entonces al evaluar la ecuación de Friedmann para el tiempo actual t_0 obtenemos la relación de aplanado en el modelo $f(R)$

$$\frac{1}{F_0} \left(\Omega_M^{(0)} + \Omega_\gamma^{(0)} \right) + \Omega_R^{(0)} + \Omega_\kappa^{(0)} = 1, \quad (4.15)$$

donde $\Omega_i^{(0)}$ y $\Omega_\kappa^{(0)}$ están definidos como en la ecuación (1.42).

	Relatividad General	Gravedad $f(R)$
Friedmann	$H^2 = 8\pi G (\rho + \rho_\Lambda) / 3 - \kappa/a^2$	$H^2 = 8\pi G (\rho/F + \rho_R) / 3 - \kappa/a^2$
Energía	$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$	$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$

Cuadro 4.1: Comparación de las ecuaciones de Friedmann en el marco de la relatividad general y en el de la gravitación $f(R)$. Se puede observar como en la gravedad $f(R)$ el término tipo constante cosmológica puede ser representado por un término debido a la modificación del sector de curvatura. Adicionalmente, se observa que el término de densidad de materia se ve amortiguado por un factor $1/F$. Estos hechos resaltan que la gravedad métrica $f(R)$ incorpora un cambio de la razón de expansión del universo al respecto del modelo Λ CDM.

4.2. Modelo de vacío

Como primer paso, vamos a resolver la ecuación de Friedman (4.13) para un universo plano ($\kappa = 0$) y en la aproximación de vacío ($\rho_M = 0$), la cual en ese caso se reduce a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_R. \quad (4.16)$$

Buscando soluciones en forma de una ley de potencias para el factor de escala $a(t) = (t/t_0)^\alpha$, normalizado a la unidad al tiempo actual, entonces

$$H^2 = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^2. \quad (4.17)$$

Además, al usar las ecuaciones (4.1), (4.10) y (4.12) obtenemos

$$\rho_R(t) = 3M_{\text{P}}^2 \left[\frac{(n-1)}{n} (2\alpha^2 - \alpha + 2\alpha n) \right] t^{-2}. \quad (4.18)$$

Con ello nos damos cuenta que α y n no son independientes, sino que deben ser compatibles con la ecuación de Friedmann (4.16). De hecho, para satisfacerla se necesita que

$$[\alpha(n-2) + 2n^2 - 3n + 1] = 0, \quad (4.19)$$

y por lo tanto

$$\alpha(n) = \frac{3n - 2n^2 - 1}{n - 2} = \frac{(2n - 1)(1 - n)}{n - 2}. \quad (4.20)$$

Con esto, la evolución del factor $\rho_R(a)$ está dada por

$$\rho_R(a) = \rho_R^{(0)} a^{-2/\alpha} = \rho_R^{(0)} a^{-2(n-2)/(2n-1)(1-n)}. \quad (4.21)$$

Si comparamos la solución de la ecuación de Friedmann (1.37) con la solución obtenida en (4.20) podemos identificar una ecuación de estado efectiva dada por

$$w_{ef} = -1 + \frac{2(n-2)}{3(2n-1)(1-n)}. \quad (4.22)$$

Escrito de esta manera, el segundo miembro del lado derecho cuantifica la desviación respecto a una ecuación de estado tipo constante cosmológica. Al observar las ecuaciones (4.21) y (4.22) se observa que el caso $n = 2$ reproduce una densidad de energía ρ_R constante y además una ecuación de estado efectiva $w_{ef} = -1$, es decir, mimetiza el comportamiento de una constante cosmológica. Para verificar tal hecho, veamos cuál es la solución compatible con una solución exponencial para el factor de escala $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$ manteniendo la ley de potencias $f(R) = bR^n$. Usando las ecuaciones (4.9) y (4.11) obtenemos

$$H^2 = \beta^2, \quad \rho_R = 6M_{\text{P}}^2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \beta^2, \quad (4.23)$$

de donde es fácil ver que para satisfacer la ecuación de Friedmann (4.16) se necesita $n = 2$. Lo anterior constituye un ejemplo de la posibilidad de tener una fase expansión exponencial en el universo como parte de una teoría modificada de gravitación y sin la necesidad de una constante cosmológica. La demostración aquí mostrada es un camino alternativo al mostrado por [Rosas-Guevara, 2006]

4.3. Cosmología observacional (SNIa)

Como vimos en el capítulo 2, las observaciones cosmológicas muestran un indicio de la existencia de una constante cosmológica diferente de cero. En términos simples, la constante cosmológica representa la solución más económica (sólo un parámetro que no cambia en el tiempo) al problema de la energía oscura. En el capítulo 2 se expusieron algunos motivos de conflicto en esta línea de pensamiento y algunos modelos alternativos para aliviar este problema. En este apartado se va a explicar vincular de manera observacional el problema de la energía oscura de manera alternativa con el uso de una teoría $f(R)$. El punto de partida es identificar a la razón de expansión $H(z)$ como la cantidad fundamental de la cosmología observacional. Al conocer su valor, todas las demás cantidades observacionales

pueden ser calculadas vía integrales [Carroll et al, 1992]. En tal sentido, lo que necesitamos llevar a cabo es resolver la ecuación de Friedmann (4.13) al interior de nuestro modelo en ley de potencias de la función $f(R)$. Además vamos a considerar un modelo de universo plano, i.e. $\kappa = 0$, en el que existe materia sin presión y cuya densidad de energía evoluciona como a^{-3} . Para simplificar el problema, hacemos las ecuaciones adimensionales, midiendo el tiempo en unidades de H_0^{-1} y definiendo la variable $\tau = H_0 t$. La ecuación de Friedmann en este caso es una ecuación de tercer orden en el tiempo para el factor de escala. Dicho comportamiento se sigue de la ecuación (4.13) y de la ecuación (4.9) para el factor ρ_R . Por esta razón necesitamos tres condiciones iniciales para poderla resolver.

Por hipótesis se han impuesto las mismas condiciones iniciales que hoy en día presenta el modelo Λ CDM, las cuales básicamente se manifiestan mediante el factor de escala a_0 , el parámetro de Hubble H_0 y el parámetro de desaceleración q_0 , adimensionalmente pueden ser escritas como

$$(a_0, a'_0, a''_0) = (1, 1, -0.55). \quad (4.24)$$

En esta relación, la prima representa derivada respecto a τ , y el parámetro de desaceleración actualmente ($z = 0$) se ha asumido como en el modelo con $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_\Lambda^{(0)}) = (0.3, 0.7)$ sustituido en la ecuación (2.16). Habiendo establecido esto, se lleva a cabo una integración numérica de la ecuación de Friedmann con este modelo. Este procedimiento nos permite obtener de manera numérica la razón de expansión del universo, representada por el parámetro de Hubble.

Una de las premisas de la cosmología observacional es que dada la razón de expansión podemos calcular cantidades importantes, siendo el módulo de distancia (2.10) una de ellas. Con esto podemos establecer una comparación con las observaciones de SNIa, la cual se muestra en la Figura 4.1. Puede observarse que acorde a los datos recabados de observaciones de supernova, un universo dominado por constante cosmológica sobrestima el módulo de distancia mientras que un universo dominado por materia hace pensar que las supernovas están más lejos de lo que se esperaría.

En el formalismo del modelo Λ CDM se dice que la situación física que mejor representa las observaciones es un universo en el cual predominan 2 componentes, materia sin presión y energía oscura, con valores en sus parámetros de densidad de $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_\Lambda^{(0)}) = (0.3, 0.7)$.

Actualmente, la escala de observación de las supernovas tipo Ia apenas cruza el rango de corrimiento al rojo $z \gtrsim 2$ y el número de supernovas sondeadas con buena sistemática de observación es cercano a 200. Si consideramos los millones de galaxias que existen en el cosmos y la factibilidad que en muchas de ellas existan eventos SNIa, sin lugar a dudas la muestra estadística es muy corta. Ello no quiere decir que el modelaje observacional de la energía oscura sea erróneo, sino que un punto clave hacia la mejora de este punto va a ser la extensión del rango de corrimientos $z > 3$. Esfuerzos en esta vertiente ya se están dando con el considerar a los destellos de rayos gamma como candidatos a candelas estándar y así poder extender el diagrama de Hubble a mayores corrimientos al rojo con la finalidad de cuantificar mejor la razón de expansión del universo [Firmani, 2007].

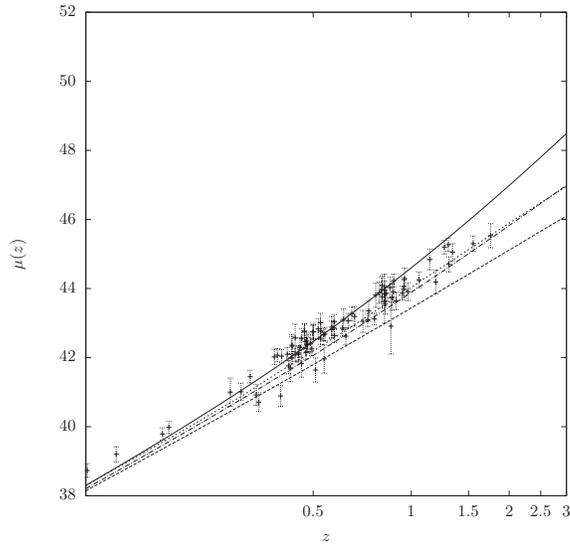


Figura 4.1: Observaciones de supernovas Ia. Se presenta una gráfica del módulo de distancia $\mu(z)$ contra el corrimiento al rojo z para el caso de universo plano. Los puntos representan el conjunto de datos Gold [Riess et al, 2008]. La línea sólida superior representa un modelo dominado por constante cosmológica $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 1$ mientras que la línea punteada inferior corresponde con un modelo dominado por materia $\Omega_M^{(0)} = 1$. El modelo de concordancia observacional $(\Omega_M^{(0)}, \Omega_{\Lambda}^{(0)}) = (0.3, 0.7)$ Λ CDM es el que mejor compatibilidad tiene con las observaciones. En el modelo desarrollado en esta tesis, se ha mantenido fijo el parámetro de materia en $\Omega_M^{(0)} = 0.3$ y se ha encontrado mediante un método de mínimos cuadrados que el valor del índice de curvatura de la función $f(R) \propto R^n$ que mejor ajusta las observaciones es $n = 1.70$.

4.4. Formación de estructura

Uno de los problemas fundamentales del ámbito astrofísico es dar justificación al proceso de formación de las galaxias y la estructura a gran escala en el universo. Dicho evento no está exento de visualizar a una teoría de gravitación como ingrediente principal. El proceso de la formación de estructura a gran escala considera como punto fundamental el colapso gravitacional de pequeñas inhomogeneidades en densidad hacia estructuras cosmológicas de mayor escala. Dichas inhomogeneidades habrían sido dejadas por el periodo inflacionario. En este proceso, el balance entre materia sin presión y constante cosmológica juega un papel importante. De hecho, como hemos visto, esta última corresponde a una densidad de energía que está uniformemente distribuida en todo el espacio-tiempo, es decir,

no manifiesta variaciones en ninguna escala. Así, en el lapso temporal en el que domina la materia sobre la constante cosmológica, la amplificación de las inhomogeneidades sembradas por el proceso inflacionario se ejemplifica con el crecimiento del contraste de densidad $\delta(a)$. En el intervalo en el cual $\delta \ll 1$ se dice que se tiene un régimen lineal de formación de estructura, donde las ecuaciones que describen el fenómeno se aproximan a ecuaciones diferenciales lineales. Tal aproximación no es válida en el régimen $\delta \approx 1$ donde se presenta una transición a la no linealidad en el proceso de formación de estructura. Físicamente, para un parámetro de curvatura Ω_κ fijo, incrementar el valor de Ω_Λ disminuye el valor de Ω_M que a la postre es la cantidad de materia disponible para colapso gravitacional. Debido a que el modelo inflacionario constituye un modelo de condiciones iniciales que reproduce $\Omega_\kappa = 0$ con gran precisión, entonces la relación de aplanado del universo se presenta como $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, lo que da un indicio de que la presencia de la constante cosmológica influye en los procesos de formación de estructura.

En el régimen de escalas cosmológicas cortas, donde el límite newtoniano es aplicable, la ecuación de movimiento para las fluctuaciones en densidad del tipo i (e.g. materia sin presión, radiación, etc.) es [Padmanabhan, 1993]

$$\ddot{\delta}_i + 2H\dot{\delta}_i - \frac{v_i^2}{a^2}k^2\delta_i = 4\pi G \sum_B \rho_B \delta_B, \quad (4.25)$$

donde v_i es la velocidad del sonido, $H = \dot{a}/a$ y la suma del miembro derecho es sobre todas las componentes energéticas presentes. Aquí cabe hacer notar que en el caso de la constante cosmológica, ρ_Λ no cambia con el tiempo y por ende no tiene fluctuación asociada. La situación se simplifica cuando asumimos que solo una componente, por ejemplo materia sin presión, domina sobre las demás. Debido a que dicha componente carece de presión, como la velocidad del sonido v_i es proporcional a la presión, ésta es necesariamente nula y por lo tanto en el dominio de materia sin presión, la ecuación de evolución se reduce a

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\rho\delta. \quad (4.26)$$

La solución de esta ecuación es [Heath, 1977, Dodelson, 2003]

$$\delta(a) = \frac{5}{2}\Omega_M^{(0)}\frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{d\bar{a}}{(\bar{a}H(\bar{a})/H_0)^3}. \quad (4.27)$$

Esta solución está normalizada a recuperar el comportamiento conocido $\delta(a) = a \propto t^{2/3}$ cuando $\Omega_M^{(0)} = 1$. Tal situación enfatiza el hecho de que diferentes valores de los parámetros $\Omega_M^{(0)}$ y $\Omega_\Lambda^{(0)}$ llevan a diferentes evoluciones temporales hasta el presente ($a = 1$) del contraste de densidad de formación de estructura. Para un modelo de universo plano, a mayor presencia de constante cosmológica se tiene menor cantidad de materia sin presión, la cual es la que presenta la susceptibilidad a generar el colapso. Esto cataloga a la constante cosmológica como un inhibidor del proceso de formación de estructura. En la Figura 2 se

presentan los resultados de analizar el proceso de formación de estructura (en el régimen lineal) al interior de la teoría de gravedad modificada abordada en este trabajo. Se lleva a cabo una comparación entre el modelo de dominación total de materia y el modelo Λ CDM con el modelo obtenido del mejor ajuste a los datos de las supernovas.

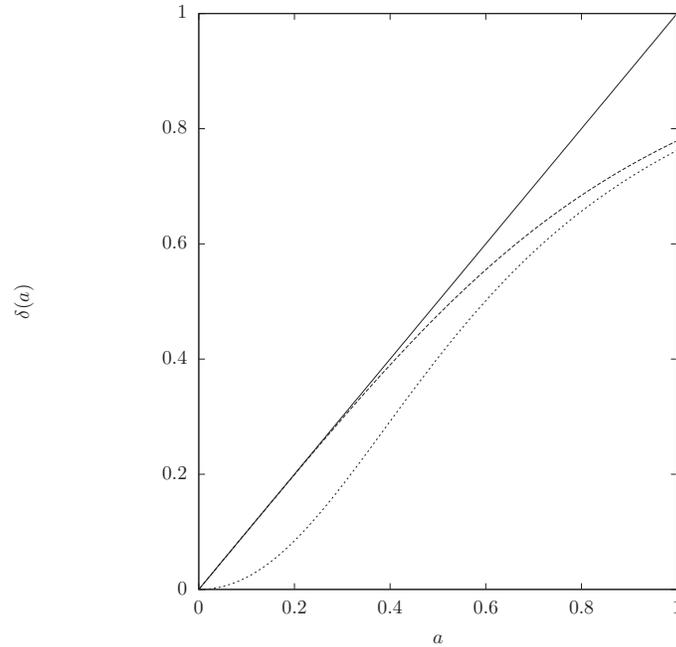


Figura 4.2: Evolución del contraste en densidad en un modelo de universo plano ($\kappa = 0$). Se presentan los modelos dominados por materia (línea sólida) en comparación al modelo Λ CDM (línea punteada larga). Se enfatiza que la presencia de la constante cosmológica es un inhibidor del proceso de formación de estructura, teniendo más susceptibilidad a generarse en un modelo de dominación total de materia. Se realiza la comparación con el modelo del mejor ajuste a los datos de las supernovas (línea punteada corta) desarrollado en este trabajo, dando cuenta que a épocas tempranas el crecimiento de la inhomogeneidad es muy pequeño, alcanzando un comportamiento similar al del modelo Λ CDM a épocas tardías. Otro aspecto que no se puede pasar por alto es que Una conclusión de este hecho es que una modificación a la gravitación como la expuesta en este trabajo tiene muy poca tendencia a formar estructura a épocas tempranas.

4.5. Lentes gravitacionales

A lo largo del estudio de la energía oscura diversa fenomenología astrofísica ha ido surgiendo con la finalidad de tener diferentes frentes de estudio al problema. Uno de ellos muy vinculado también al problema de la materia oscura es el fenómeno de lente gravitacional. Tal evento está caracterizado por ser una manifestación astronómica de la teoría general de la relatividad. El fenómeno de lente gravitacional ocurre cuando la luz proveniente de una fuente astronómica lejana (por ejemplo un cuasar) pasa en su camino a nuestro punto de observación en la tierra por un objeto de escala de masa muy grande, siendo un cúmulo de galaxias el arquetipo de ello. Ante tal suceso, como una de las predicciones de la relatividad general es que la luz manifestaría cierta desviación al pasar cerca de cuerpos muy masivos. El objeto astrofísico reproduciría entonces el efecto de una lente óptica y de esa manera la imagen del cuasar ante nuestro proceso de observación generaría cierta distorsión, lo que sería en alguna manera el sello de la lente gravitacional. La presencia de la constante cosmológica tiene impacto sobre este hecho. A nivel cualitativo, podemos esperar que el fenómeno de lente gravitacional esté vinculado al balance entre materia y constante cosmológica, la cual influye en la razón de expansión del universo. Se ha postulado [Fukugita et al., 1992] que un efecto de la presencia de una constante cosmológica es cambiar la probabilidad de que los cuasares experimenten el fenómeno de lente gravitacional ocasionado por todas las galaxias que se encuentran a lo largo de la línea de visión. La presencia de lentes gravitacionales y su estudio en cierta manera sondea el volumen de espacio a un corrimiento al rojo dado. Ello manifiesta dependencia en los parámetros cosmológicos, como veremos más adelante. En su sentido más estricto, la probabilidad de que un cuasar experimente el fenómeno de lente gravitacional depende del potencial gravitacional de las galaxias que han de ser el lente, así como de su densidad absoluta. Una herramienta de tipo estadística que ha resultado más útil es analizar la probabilidad de que un cuasar experimente un lente gravitacional debido a un conjunto de galaxias, modeladas como esferas isotérmicas, de densidad comovil constante. Tal probabilidad es medida respecto al caso $\Omega_M^{(0)} = 1, \Omega_\Lambda^{(0)} = 0$ y viene dada por la ecuación [Fukugita et al., 1992, Carroll et al, 1992]

$$P_{\text{lens}} = \frac{15}{4} \left(1 + (1 + z_s)^{-1/2}\right)^{-3} \int_0^{z_s} \frac{H_0^2(1+z)^2}{H(z)/H_0} \left[\frac{d_A(0, z)d_A(z, z_s)}{d_A(0, z_s)} \right]^2 dz. \quad (4.28)$$

El factor previo a la integral es el responsable de la normalización, es decir, $P_{\text{lens}} = 1$ cuando $\Omega_M^{(0)} = 1$. El corrimiento al rojo de la fuente está dado por z_s y la función $d_A(z_1, z_2)$ es la distancia angular entre los corrimientos al rojo z_1 y z_2 , que en el caso del modelo de universo plano tiene la forma [Longair, 2008]

$$d_A(z_1, z_2) = \frac{1}{1 + z_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{H(z)}. \quad (4.29)$$

En la Figura 4.4 se grafica P_{lens} para un modelo de universo plano y considerando fuentes localizadas a $z_s = 2$. Se puede observar que es aproximadamente 12 veces más probable

sufrir fenómeno de lente gravitacional en un universo dominado con constante cosmológica respecto a uno dominado por materia. Tal probabilidad disminuye si aumenta el parámetro $\Omega_M^{(0)}$. De hecho, para el modelo de concordancia observacional $\Omega_M^{(0)} = 0.3$, es 2.93 veces más probable sufrir lente gravitacional que en un modelo con modelo $\Omega_M^{(0)} = 1$. Con el modelo de gravedad métrica emanado del mejor ajuste a los datos de supernova, con un exponente de curvatura $n = 1.70$ se ha calculado el valor de la probabilidad citada, obteniendo

$$P_{\text{lens}} \left(\Omega_M^{(0)} = 0.3, n = 1.70 \right) = 3.00 \quad (4.30)$$

el cual se asemeja en gran medida al modelo de concordancia observacional. La ecuación (4.28) cuantifica las modificaciones que la geometría del espacio-tiempo, parametrizada por $\Omega_M^{(0)}$ y $\Omega_\Lambda^{(0)}$, hacen sobre las trayectorias de rayos de luz dentro del modelo cosmológico. Debido a la gran magnificación de la probabilidad para modelos de universo con bajo $\Omega_M^{(0)}$, el fenómeno de lente gravitacional se establece como un serio aspirante para poner límites sobre el valor de $\Omega_\Lambda^{(0)}$. De hecho, la sensibilidad del fenómeno de lente gravitacional a la energía oscura responde al hecho de que a mayor presencia de la constante cosmológica la razón de expansión del universo aumenta, con lo cual su tamaño crece. Ante tal evento la materia debe distribuirse de manera mucho más homogénea y con ello la luz que ha de experimentar el fenómeno de lente gravitacional debe viajar una mayor distancia ante una mayor cantidad de materia candidata a ser lente gravitacional.

4.6. Number counts

Para la teoría de la relatividad general, materia y geometría tienen un lazo muy estrecho, en tal sentido es de esperarse que sondeando la cantidad de materia visible en el universo podría darse una idea de la geometría global del mismo, siendo las galaxias el objeto fundamental que marca la estructura en el cosmos. Esta es la idea detrás del concepto de los “number counts” en cosmología. Este conteo en número de objetos representa llevar a cabo estudios de distribuciones en fuentes, típicamente galaxias, con cierta distribución de luminosidad. Debido a que la luminosidad tiene dependencia en la distancia al objeto, lo cual a su vez tiene dependencia en la razón de expansión del universo, entonces esto constituye una herramienta para estudiar la dinámica cosmológica. [Weinberg, 2008]. Sin embargo pudieran existir problemas debido a que las galaxias son entes que evolucionan en una escala temporal aproximadamente igual o menor al tiempo de Hubble H_0^{-1} , además de que no tienen una evolución temporal estándar [Coles, 2002]. Hacia el lado de la descripción global del universo, también debemos mencionar que la geometría del espacio-tiempo determina el volumen propio del universo en un intervalo de corrimiento al rojo entre z y $z + dz$ y que subtiende cierto ángulo sólido $d\Omega$. Si además, la densidad de fuentes $n(z)$, por ejemplo galaxias, es asumida, entonces podemos establecer una comparación entre el conteo de objetos y el volumen propio de espacio-tiempo. En la hipótesis de homogeneidad

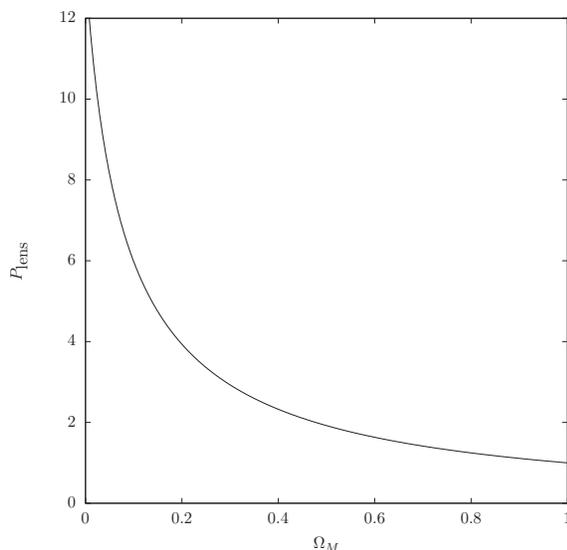


Figura 4.3: Probabilidad P_{lens} de experimentar fenómeno de lente gravitacional por fuentes localizadas a un redshift $z_s = 2$ en un modelo de universo plano como función del parámetro de densidad $\Omega_M^{(0)} = 1 - \Omega_\Lambda^{(0)}$. Se observa que dicha probabilidad se magnifica en presencia de una constante cosmológica.

e isotropía a muy gran escala, se puede aproximar la distribución de fuentes por una función continua del corrimiento al rojo z . El conteo del número de objetos dN por unidad de ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de corrimiento al rojo entre z y $z + dz$ está dado por [Padmanabhan, 2002]

$$\frac{dN}{d\Omega dz} = n(z) \frac{dV}{d\Omega dz} = \frac{n(z)}{(1+z)^3} \frac{r^2(z)}{H(z)(1+z)^3}, \quad (4.31)$$

donde el factor $r(z)$ está dado por la ecuación

$$r(z) = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}. \quad (4.32)$$

De esta forma, lo anterior representa una forma de estimar la geometría del universo dada una distribución de fuentes $n(z)$ y modelo de expansión $H(z)$. En la figura 4.4 se muestran varios modelos para el conteo de objetos en la aproximación del continuo con $n(z) = n_0(1+z)^3 a^{-3}$ y teniendo universo plano. Como agregado, se ha hecho una comparación con el modelo de la gravedad métrica arrojado al mejor ajuste a las observaciones de supernova, con $n = 1.7$ y se observa el mismo comportamiento cualitativo respecto del modelo Λ CDM.

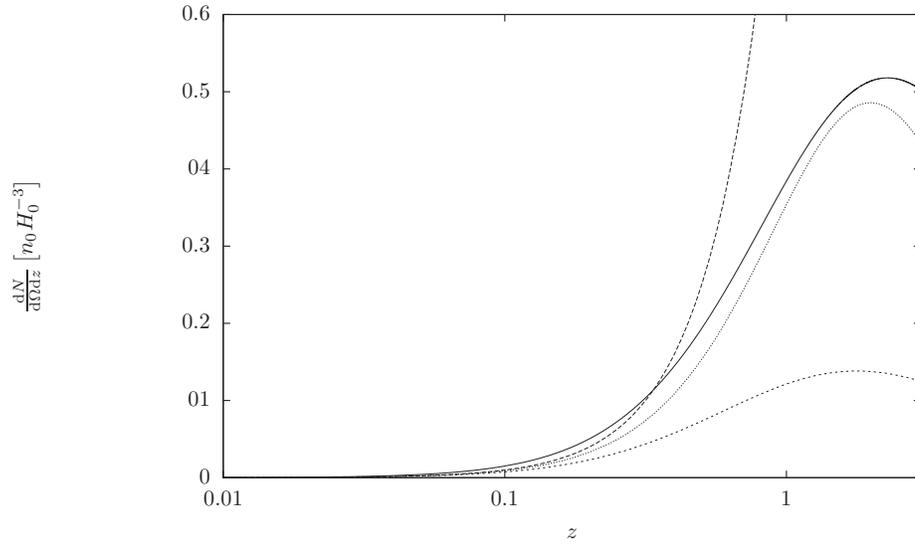


Figura 4.4: Conteo de objetos dN por unidad de ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo dz como función del corrimiento al rojo z . La línea sólida representa el modelo Λ CDM. Se observa el rasgo particular de un conteo que diverge para un modelo dominado por constante cosmológica, firma de que dicho modelo se expande exponencialmente y tiene un volumen que crece sin límite.

Los fenómenos expuestos en este capítulo simplemente mandan el mensaje de la posibilidad de que el modelo cosmológica estándar continúe siendo explorado, siempre con la finalidad de que sus diferentes vertientes de estudio, básicamente orientadas hacia la cosmología observacional y la estructura a gran escala, manifiesten congruencia.

Conclusiones

En esta tesis se ha hecho una exposición del modelo cosmológico estándar fundamentado en la teoría de la relatividad general. Se han expuesto los principales problemas que dicho modelo enfrenta desde la perspectiva teórica y observacional, resaltando al problema de la energía oscura como uno de los más notables.

El problema de la energía oscura desde su estudio observacional hasta su modelaje en el ámbito de la teoría fue estudiado, exponiendo algunos modelos notables que están siendo considerados en la actualidad, principalmente el campo de quintaesencia y fluidos exóticos.

La principal propuesta de este trabajo considera estudiar el modelaje del problema de la energía oscura como una manifestación de una teoría diferente a la relatividad general, una en la cual el sector de curvatura recibe mucha mayor atención. Tal teoría es conocida como gravedad métrica $f(R)$. Su motivación principal radica en que se carece de un argumento de principios fundamentales del por qué la acción de la relatividad general debe ser construida a partir del escalar más simple construible de la métrica y sus segundas derivadas, a saber, el escalar de curvatura. En este sentido en las teorías métricas, la acción de la que emergen las ecuaciones de campo se considera una función arbitraria del escalar de curvatura. Cuando dicha función es lineal se recuperan las ecuaciones de campo de la relatividad general. Existen modelos de gravedad en los cuales se construyen escalares más complejos que el escalar de curvatura como pueden ser combinaciones lineales de contracciones de los tensores de Ricci y Riemann. Este proceder está motivado primordialmente por aproximaciones a bajas energías de teorías encaminadas a conectar la gravitación con la mecánica cuántica, por ejemplo la teoría de cuerdas. En este trabajo se utilizó de manera particular una ley de potencias para la función de curvatura $f \propto R^n$ y sometimos dicho modelo a diferentes pruebas vinculadas con las observaciones astrofísicas. Como resultado de restringir n con las observaciones de supernovas tipo Ia, se obtiene que el valor que más se acerca a reproducir el modelo Λ CDM es $n = 1.70$ con un parámetro de densidad $\Omega_M^{(0)} = 0.3$.

Para el caso del estudio de la formación de estructura, se consideró por hipótesis que la ecuación de evolución de perturbaciones, la cual expresa la evolución temporal del contraste de densidad de materia, preserva su forma (a primer orden) con respecto al caso de relatividad general. Se realizó una comparación entre el modelo de dominación total de

materia, el Λ CDM y el modelo que mejor ajustó a los datos de la supernovas con $n = 1.70$. Se observó que en el caso de la presencia de la constante cosmológica, ésta constituye un factor inhibitor de la formación de estructura puesto que el crecimiento del contraste de densidad disminuye. En el caso de la gravedad métrica, se observa que no es un buen modelo generador de estructura, ya que su evolución genera un menor crecimiento del contraste en densidad. A este respecto vale la pena mencionar que la hipótesis de la existencia de materia oscura es también una hipótesis involucrada en la formación de estructura. Sin embargo, vale la pena considerar una línea de acción donde se tenga la posibilidad de modelar la contribución de materia oscura Ω_{DM} como una teoría del tipo $f(R)$.

En el caso de fenómeno de lente gravitacional, analizando la probabilidad de que un cuasar experimente dicho fenómeno por un cuerpo de galaxias modeladas como esferas isotérmicas, se obtuvo prácticamente la misma probabilidad de dicho evento en el modelo Λ CDM en comparación con el modelo arrojado por el ajuste a las supernovas con $n = 1.70$.

Este trabajo representa la posibilidad de considerar extensiones de la teoría general de la relatividad mediante modificaciones al sector de curvatura y sus posibles aplicaciones a la cosmología. El analizar el problema de la energía oscura bajo esta perspectiva senta un buen precedente de tal esfuerzo.

Apéndice A

Ecuaciones de campo en teorías $f(R)$

En esta sección vamos a deducir las ecuaciones de campo del modelo de gravedad $f(R)$. Para ello, partimos de la acción para el sector gravitacional, dada por

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int f(R)\sqrt{-g} d^4\mathbf{x}. \quad (\text{A.1})$$

Recordando que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, al tomar la variación de esta acción con respecto a la métrica se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{16\pi G} \int [f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}f'(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}] d^4\mathbf{x} \quad (\text{A.2}) \\ &= \frac{1}{16\pi G} (\delta\mathcal{S}_1 + \delta\mathcal{S}_2 + \delta\mathcal{S}_3), \end{aligned}$$

donde se ha establecido una correspondencia obvia con cada uno de los términos de (A.2). Usando la siguiente identidad para el determinante de la métrica [Carroll, 1997]

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

se obtiene que el primer término de (A.2) es

$$\delta\mathcal{S}_1 = \int \left[-\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (\text{A.4})$$

mientras que inmediatamente la forma del segundo término es

$$\delta\mathcal{S}_2 = \int [f'(R)R_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (\text{A.5})$$

las 2 ecuaciones anteriores ya tienen la forma requerida $\int [\dots] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}$, para manipular el tercer término, realizamos una doble integración por partes y el uso del teorema de Gauss para eliminar términos a la frontera [Bertschinger, 2000], el resultado que se obtiene es

$$\delta\mathcal{S}_3 = \int [-\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + \square f'(R)] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x} \quad (\text{A.6})$$

Si conjuntamos todos los términos e incorporamos la acción de materia, definiendo al tensor de energía-momento mediante la ecuación [Carroll, 1997]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{A.7})$$

al anular la variación total, obtenemos las ecuaciones de campo de la gravitación $f(R)$

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + \square f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

las cuales claramente recuperan las ecuaciones de campo de la relatividad general cuando $f(R) = R$.

Bibliografía

- Barrow et al. The cosmology of modified Gauss-Bonnet gravity. arxiv: gr-qc0705.3795. 2007.
- Edmund Bertschinger. Class notes in general relativity. *Physics Department, MIT*, 2000.
- Birrell et al. *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, 1982.
- Brans et al. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925, 1961.
- Capozziello et al. Curvature quintessence. *Int. J. Mod. Phys.*, D11:483–492, 2002.
- Capozziello et al. Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. *Arxiv: astro-ph 0706.1146*, 2007.
- Carroll. Lecture notes in general relativity. arxiv: astro-ph/9712019. 1997.
- S. Carroll. *An Introduction to General Relativity, Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.
- S. Carroll et al. The cosmological constant. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30:499, 1992.
- J. Cohn. Living with lambda. *ArXiv:astro-ph/9807128*, 1998.
- Coles et al. *Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure*. Wiley, 2002.
- E. J. Copeland et al. Dynamics of dark energy. *Astron. J.*, 116:1009, 2006.
- S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- Firmani et al. *ArXiv:astro-ph/0610248*, 2006.
- Freedman et al. Final results from the Hubble space telescope to measure the Hubble constant. *Astrophys. J.*, 533:47–72, 2001.
- Fukugita et al. *Ap. J.*, 393:3, 1992.

- A. Guth. The inflationary universe. *Phys. Rev. D.*, 23:347, 1981.
- Heath. *MNRAS*, 179:3351, 1977.
- E. J. Hinshaw et al. 5 year wmap observations: Data processing, sky maps & basic results. *Arxiv: astro-ph 0803.0732*, 2008.
- Hwang et al. Cosmological perturbations in generalized gravity theories. *Phys. Rev. D*, 54: 1470–1472, 1996.
- Kamenshchik et al. An alternative to quintessence. *Phys. Lett. B*, 511:265, 2001.
- E. Kolb, M. Turner. *The Early Universe*. Perseus, 1994.
- E. Landau, L. D. & Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, 2002.
- A. Liddle. *An introduction to cosmological inflation*. Cambridge University Press, 2000.
- A. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Wiley, 2003.
- Lightman et al. *Problem book in relativity and gravitation*. Princeton University Press, 1975.
- M. Longair. *Galaxy Formation*. Springer-Verlag, 2008.
- Magnano et al. Non linear gravitational lagrangians. *Gen. Rel. Grav.*, 19:465, 1987.
- S. Mendoza. *Notas de Clase Curso de Astrofísica Relativista*. 2003.
- Misner et al. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- T Padmanabhan. Cosmological constant - the weight of the vacuum. *Arxiv: astro-ph 0212290*, 2002.
- T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge University Press, 1993.
- J. A. Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge University Press, 1999.
- Peebles et al. The cosmological constant and dark energy. *ArXiv:astro-ph/0207347*, 2002.
- P. J. E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- S. Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565, 1999.
- A. G. Riess et al. Supernova cosmology project results. *Astron. J.*, 116:1009, 1998.
- Y. Rosas Guevara. *Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias UNAM*. 2007.

-
- Varun Sahni. The case for a positive cosmological Λ -term. *ArXiv:astro-ph/9904398*, 2000.
- Varun Sahni. Dark matter and dark energy. *ArXiv:astro-ph/0403324*, 2004.
- A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett.*, B91:99, 1980.
- R. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- S. Weinberg. *Principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1, 1989.