



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Midiendo la Detección Homodina con  
Resolución de Número de Fotones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
MARÍA FLORENCIA NORIEGA ROMERO VARGAS

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*El trabajo experimental presentado en esta tesis fue realizado bajo la asesoría de la Dra. Graciana Puentes y de Offir Cohen en el Clarendon Laboratory de la Universidad de Oxford del Reino Unido, a cargo del Profesor Ian Walmsley.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Descripción del campo electromag.</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo clásico de la luz . . . . .	10
2.1.1. Cuadraturas del campo . . . . .	12
2.2. Modelo cuántico de la luz . . . . .	14
2.2.1. Estados de Fock . . . . .	16
2.2.2. Estados coherentes . . . . .	17
<b>3. Medición de la fase del C. EM</b>	<b>21</b>
3.1. Transformación de un BS . . . . .	21
3.2. Detección homodina . . . . .	22
3.2.1. Detección homodina no balanceada . . . . .	23
<b>4. Tomografía de detector</b>	<b>25</b>
4.1. Postulados de la mecánica cuántica . . . . .	26
4.1.1. Sistema físico . . . . .	26
4.1.2. Evolución de un sistema físico . . . . .	26
4.1.3. Mediciones en mecánica cuántica . . . . .	27
4.2. Generalización de las mediciones en MQ . . . . .	28
4.2.1. Caracterización de un proceso de medición arbitrario . . . . .	28
4.2.2. POVM . . . . .	30
4.3. Tomografía cuántica . . . . .	32
4.3.1. Tomografía de estado . . . . .	33
4.3.2. Tomografía de detector . . . . .	34
4.3.3. Caracterizaciones previas . . . . .	35
4.4. Tomografía de un PNRHD . . . . .	37
4.5. Aplicaciones de un PNRHD . . . . .	38
<b>5. El experimento</b>	<b>39</b>
5.1. Diagrama del experimento . . . . .	39
5.1.1. Alineación del interferómetro . . . . .	41
5.2. Adquisición de los datos . . . . .	42

5.3. Calibración de la señal . . . . .	43
<b>6. Resultados y discusión</b>	<b>45</b>
6.1. Resultados experimentales . . . . .	45
6.2. Conjunto Tomográfico de estados coherentes . . . . .	47
6.2.1. Asignación de la fase . . . . .	48
6.2.2. Cálculo del número promedio de fotones . . . . .	50
6.3. Estadística de clicks . . . . .	52
<b>7. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. PNR</b>	<b>59</b>
A.1. Fotodiodo de Avalancha . . . . .	59
A.2. Detección de modos temporalmente espaciados . . . . .	60
A.3. Detalles experimentales . . . . .	61

# Capítulo 1

## Introducción

Un día típico en el laboratorio de óptica cuántica de la Facultad de Ciencias, dos listos e inquietos estudiantes acaban de probar que la teoría cuántica está mal. Cuando los estudiantes repiten la medición y confirman sus resultados, uno de éstos comienza a tener esperanzas de un premio Nobel cuando de pronto la fantasía es interrumpida por la llegada del profesor encargado del laboratorio, quien les explica donde está el problema en su medición. La placa de media onda que están usando está mal marcada y en realidad es de un cuarto de onda. Una vez más la teoría cuántica ha quedado a salvo, pero queda en el aire la siguiente pregunta ¿cómo saber que un dispositivo en el laboratorio se comporta de acuerdo a nuestras predicciones? o dicho de otra forma ¿cómo saber cuál es el operador cuántico que mejor describe una medición en el laboratorio? La respuesta a estas preguntas está en la **Tomografía de Detector**. Este cuento fue inspirado en un artículo escrito por Markus Aspelmeyer en la sección News and Views de la revista Nature [24].

Esta tesis constituye la parte experimental de la tomografía de un detector homodino con resolución de número de fotones. El término tomografía de detector se refiere a la caracterización completa de un aparato de medición, un ente empleado para interactuar con un sistema cuántico y establecer una conexión con el mundo de los fenómenos clásicos. Como en mecánica cuántica las mediciones están representadas por operadores, la tomografía de un detector cuántico consiste en determinar el operador que representa la medición de dicho detector; “la medición de la medición”. El nombre de tomografía, se debe a la analogía de esta técnica con las tomografías de estado y de proceso, empleadas para determinar el estado y el proceso cuántico en un experimento.

La tomografía de detector ha sido aplicada exitosamente en fotodetectores diodo de avalancha y detectores con resolución de número de fotones, ninguno de éstos es sensible a la fase. En esta tesis se extiende la reciente propuesta de la tomografía de detectores cuánticos [18] a una nueva generación de detectores con sensibilidad de fase y resolución de número de fotones. El trabajo experimental fue realizado en un laboratorio del Ultrafast Group a cargo del Prof. Ian Walmsley en la Universidad de Oxford.

En el próximo capítulo se presentan las herramientas teóricas de la descripción del campo electromagnético en el familiar terreno de la teoría clásica para después llevar esta descripción a una formulación cuántica en términos de operadores. En el tercer capítulo se discute la medición de las propiedades sensibles a la fase del campo electromagnético, donde se introduce la detección homodina. Después de estos dos capítulos de revisión de los fundamentos teóricos, en el cuarto capítulo se plantea el problema de la tomografía de detector, la cual consiste en determinar el conjunto de POVM que representan la medición del detector, a través de una serie de mediciones usando un conjunto de estados bien conocidos. En este capítulo se propone el esquema experimental para la tomografía de un detector homodino no balanceado con resolución de número de fotones, donde se usan estados coherentes como regla para mapear el detector. Los detalles experimentales son especificados en el capítulo 5. En el 6to capítulo se presentan y se discuten los resultados experimentales, donde se incluye la determinación del conjunto tomográfico de estados coherentes con que se mapeó el detector y la distribución de probabilidad de cada una de las salidas del detector en el espacio fase de los estados coherentes.

## Capítulo 2

# Descripciones clásica y cuántica del campo electromagnético

Desde los comienzos de la mecánica cuántica la idea de fotón ha sido usada para describir el origen de la luz; en el efecto fotoeléctrico se habla de que los átomos intercambian energía de manera discreta en unidades de energía  $h\nu$ . Se requiere de un modelo cuántico para la descripción de la generación y absorción de la luz. Sin embargo, no todas las propiedades de la luz requieren de una teoría cuántica para su entendimiento.

La descripción de los fenómenos ópticos se desarrolló amplimente de manera independiente de la teoría cuántica. La interpretación de la luz como una onda electromagnética clásica es perfectamente adecuada para entender los fenómenos ópticos [1] de interferencia y difracción, la formación de imágenes, la óptica no lineal. Inclusive, muchas de las propiedades de los láseres pueden entenderse en términos de una teoría clásica. La mayoría de las tecnologías en comunicación óptica y fotónica son aplicaciones de la óptica clásica [2].

Dado el éxito de la teoría cuántica en los sistemas atómicos, desde los comienzos de la mecánica cuántica se inició la búsqueda de un fenómeno óptico puramente cuántico, es decir que no pudiese ser explicado en términos de la teoría clásica del electromagnetismo. No fue hasta 1963 que Glauber predijo el fenómeno de “anti-agrupamiento”<sup>1</sup> [3], años más tarde dicho fenómeno fue observado en los laboratorios de H.J. Kimble, M. Degenais y L. Mandel [4] en un experimento de emisión de luz fluorescente en resonancia de un átomo de dos niveles. Estos hechos marcaron el inicio de la era de la óptica cuántica.

Las propiedades puramente cuánticas de la luz han encontrado aplicaciones disponibles hoy en día como la encriptación cuántica y otras aún en investigación

---

<sup>1</sup>Luz con una distribución estadística de fotones subpoissonianas, para las cuales la varianza del número medio de fotones es menor que la media. Generalmente se refiere a luz con una distribución de fotones más igualmente espaciada que la luz coherente

como la teleportación de estados y el cómputo cuántico.

Dada la mayor familiaridad que se tiene con los modelos clásicos, en la primera sección de este capítulo se presenta un breve repaso del modelo clásico de la luz con una tendencia a los conceptos con que se trabajará en esta tesis.

En la segunda sección de este capítulo se extienden los conceptos clásicos de la luz a modelo cuántico mediante la cuantización del campo electromagnético.

## 2.1. Modelo clásico de la luz

La teoría del electromagnetismo se puede derivar a partir de las ecuaciones de Maxwell, que en el vacío y en ausencia de fuentes son

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \text{(iii)} \quad \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \text{(iv)} \quad \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Los campos eléctrico y magnético están relacionados por el potencial vectorial  $\vec{A}$  y el potencial escalar  $\Phi$  mediante las ecuaciones

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.3)$$

En ausencia de fuentes, usando la norma de Coulomb  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ,  $\Phi = 0$  se obtiene la ecuación de onda para el potencial vectorial <sup>2</sup>

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

La expresión del potencial vectorial en términos de ondas planas  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  con condiciones de frontera periódicas en una caja de longitud L está dado por [5]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} (\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + \vec{A}_{\vec{k}}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{\vec{k}} t}), \quad (2.5)$$

donde  $\omega_{\vec{k}}$  es la frecuencia angular de la onda. Notemos que los  $\vec{A}_{\vec{k}}$  son los coeficientes de Fourier de la expansión de  $\vec{A}$ . La condición  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  implica que  $\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0$ , de modo que tenemos un campo transversal a la dirección de propagación. Por lo tanto  $\vec{A}$  tiene dos componentes  $A_{\vec{k}\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Para cada  $\vec{k}$  podemos escribir

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha} \vec{e}_{\vec{k}\alpha} A_{\vec{k}\alpha}, \quad (2.6)$$

<sup>2</sup>Sustituyendo la ecuación (2.3) en la ecuación de Maxwell (2.1) (iv)

donde  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$  son vectores de polarización unitarios tales que,  $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} = 0$  y  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}^* \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$ .

Definiendo las nuevas variables

$$\vec{P}_{\vec{k}}(t) = \frac{k}{c\sqrt{4\pi}}[\vec{A}_{\vec{k}}(t) + \vec{A}_{\vec{k}}^*(t)] \quad (2.7)$$

$$\vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \frac{i}{\sqrt{4\pi}}[\vec{A}_{\vec{k}}(t) - \vec{A}_{\vec{k}}^*(t)], \quad (2.8)$$

donde

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t}. \quad (2.9)$$

Se puede mostrar que el paréntesis de Poisson de las nuevas variables  $\vec{P}_{\vec{k}}$  y  $\vec{Q}_{\vec{k}}$  es 1, y que el hamiltoniano de este sistema está dado por la expresión de la energía del campo electromagnético clásico <sup>3</sup>

$$u_E = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) d\tau \quad (2.10)$$

de modo que podemos sustituir  $\vec{A}_{\vec{k}}$  en la expresión (2.5) y calcular  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  con las ecuaciones (2.2) y (2.3). Sustituyendo en la expresión para la energía y tomando el límite cuando L tiende a infinito, se obtiene

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\vec{P}_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{Q}_{\vec{k}}^2) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \alpha} (P_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k}\alpha}^2) \quad (2.11)$$

En la última igualdad se cambiaron los vectores por sus componentes de polarización, como se hizo en la ecuación (2.6). Vemos que la energía del campo electromagnético ha tomado la forma de una suma de hamiltonianos de osciladores armónicos no interactuantes con frecuencia  $\omega_{\vec{k}}$ .

A partir de la expresión del potencial vectorial, ecuación (2.6) podemos calcular el campo eléctrico con la ecuación (2.2), de donde obtenemos

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k}} \left( \frac{1}{\omega_{\vec{k}}^2 L^3} \right)^{\frac{1}{2}} (\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} - \vec{A}_{\vec{k}}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{\vec{k}}t}), \quad (2.12)$$

Tomando uno de los modos del campo  $\omega_{\vec{k}}$

$$\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = iE_0 (A(\vec{r}) e^{-i\omega t} - A^*(\vec{r}) e^{i\omega t}) \vec{\epsilon}_{\omega}, \quad (2.13)$$

---

<sup>3</sup>La identificación de las variables P y Q no es trivial y requiere de un largo desarrollo que no está dentro de las intenciones de esta tesis. En los dos primeros capítulos del libro: "Photons & Atoms, Introduction to Electrodynamics" de Cohen-Tannoudji, et al, [6] se puede encontrar una deducción formal.

donde  $E_0 = \omega/cL^{3/2}$ . La distribución espacial de la onda está dada por la amplitud adimensional compleja  $A(\vec{r})$ , esto se observa claramente si la escribimos en términos de una amplitud  $A_0(\vec{r})$  y la fase  $\theta(\vec{r})$

$$A(\vec{r}) = A_0(\vec{r}) e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (2.14)$$

$\alpha_0(\vec{r})$  determina la extensión espacial de la onda. La forma y la dirección de propagación de la onda está dada por  $\theta(\vec{r})$  [2].

Para dejar la notación anterior más clara, consideremos el ejemplo de una onda plana monocromática propagándose en la dirección  $z$  (O.p.z), en este caso la amplitud compleja sería  $A(\vec{r}, t) = A_0 e^{ikz}$  y el vector de polarización del campo sería una combinación lineal de los vectores transversales a la dirección de propagación de la onda  $\vec{e}(\vec{r}) = c_1 \hat{x} + c_2 \hat{y}$ , con  $c_1$  y  $c_2$  constantes complejas. Así, el vector de campo eléctrico quedaría.

$$\vec{E}_{O.p.z}(\vec{r}) = E_0 A_0 (e^{i(kz+\omega t)} + e^{-i(kz-\omega t)}) \vec{e} = 2E_0 A_0 \sin(kz - \omega t) \vec{e}. \quad (2.15)$$

### 2.1.1. Cuadraturas del campo

La descripción de una onda en términos de una amplitud compleja, como se muestra en la ecuación (2.14) es muy útil para el tratamiento de problemas de interferencia y difracción. Sin embargo suele ser conveniente diferenciar la fase absoluta de la onda  $\theta$  de la fase que define al frente de onda. Para ello se introducen las cuadraturas de amplitud  $X_1$  y  $X_2$ , definidas en términos de la amplitud compleja como

$$X_1(\vec{r}) = \frac{1}{2} (A(\vec{r}) + A^*(\vec{r})) \quad (2.16)$$

$$X_2(\vec{r}) = \frac{1}{2i} (A(\vec{r}) - A^*(\vec{r})) \quad (2.17)$$

En términos de las cuales el campo eléctrico se puede expresar como

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = 2E_0 (X_1(\vec{r}) \sin(\omega t) + X_2(\vec{r}) \cos(\omega t)). \quad (2.18)$$

Notemos que  $X_1$  y  $X_2$  son las amplitudes real y coeficiente  $A$ . En términos de esta nueva notación la fase absoluta  $\theta$  está dada por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X_2}{X_1}. \quad (2.19)$$

Las cuadraturas de amplitud resultan muy cómodas para representar gráficamente fenómenos de interferencia en un punto del espacio con una gráfica de fasores<sup>4</sup>, que no es más que un diagrama bidimensional de los valores de  $X_1$  y  $X_2$ . Tal diagrama representa el campo en un punto y tiempo del espacio. Con un vector de longitud  $A_0$ , del origen al punto  $(X_1, X_2)$  se representa la onda

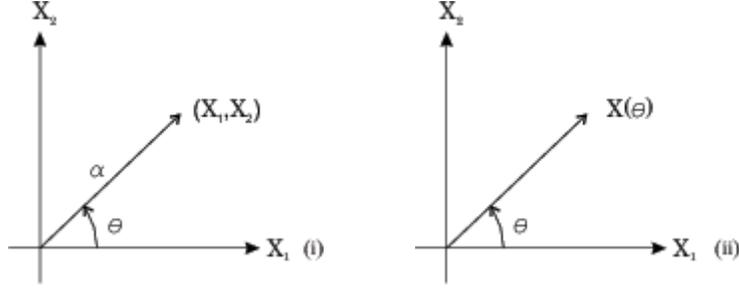


Figura 2.1: Gráfica de las cuadraturas. (i) Representación de una onda en el espacio de las cuadraturas con fase  $\theta$  y amplitud  $|A|$ . (ii) Una onda es representada por una función  $X(\theta)$  de su fase  $\theta$ .

descrita por  $A$ , el ángulo respecto al eje  $X_1$  es  $\theta$ . En la figura 2.1 (i) se representa una onda en un diagrama de fasores.

Si hay varias ondas con la misma frecuencia angular en un punto del espacio al mismo tiempo, van a interferir en otra onda con la misma frecuencia. Cada onda la podemos representar con un vector en un diagrama de fasores, donde la onda resultante está representada por la suma vectorial de las otras ondas en un diagrama de fasores. En la figura 2.2 se muestra la superposición de dos ondas [2] con una diferencia de fase de  $\pi/3$ , donde podemos ver que la onda resultante únicamente depende de la magnitud y de la diferencia de fase de las ondas que se superponen.

Dado que la fase absoluta de una onda es relativa a la fase de otra onda por ejemplo, siempre podemos asignar  $\theta = 0$  al representar una sólo onda en un diagrama de fasores, cambiado el camino óptico de un haz luminoso se puede variar la fase de una onda de luz. Este cambio de fase se puede representar en una gráfica de fasores con una función de  $\theta$ ,

$$X(\theta) = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2, \quad (2.20)$$

como se muestra en la figura 2.1 (ii). Sin embargo, las propiedades sensibles a la fase no se pueden distinguir a “simple vista”. Hay que emplear métodos interferométricos para tener la fase de otra onda como referencia. En el siguiente capítulo se formaliza la medición de las propiedades sensibles a la fase de una onda de luz.

A modo de ilustración consideremos nuevamente la onda plana monocromática propagando en la dirección  $z$ . Las cuadraturas de amplitud real y compleja serían

$$X_{1O.p.z} = A_0 \cos(kz), \quad (2.21)$$

$$X_{2O.p.z} = A_0 \sin(kz), \quad (2.22)$$

<sup>4</sup>Los fasores son vectores que representan ondas armónicas.

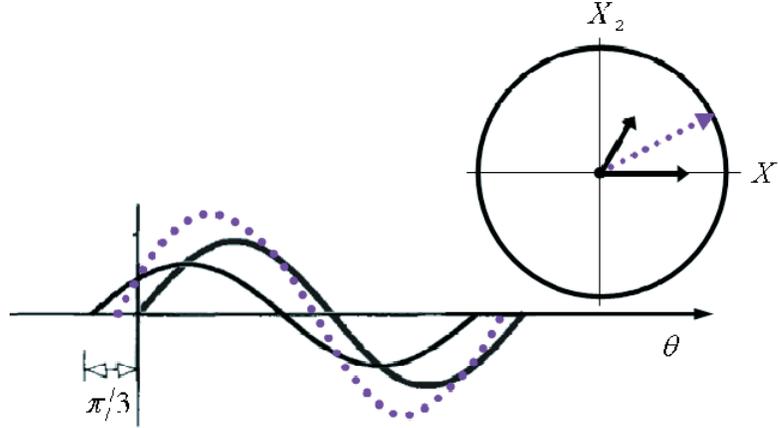


Figura 2.2: Superposición de dos ondas con una diferencia de caminos ópticos de  $\pi/3$  y amplitudes distintas en un diagrama de fasores. El vector punteado representa la onda resultante.

entonces, el cambio en la amplitud de la cuadratura  $X(\theta)$  estaría dado por

$$X(\theta)_{O.p.z} = A_0 \cos(\theta - kz). \quad (2.23)$$

En esta última ecuación vemos que para un valor de  $z$  dado, la cuadratura de amplitud oscila armónicamente como función del ángulo  $\theta$ , con amplitud  $A_0$ .

Las cuadraturas de amplitud nos proveen de una manera más de describir el campo electromagnético, pues en la ecuación (2.18) vemos que dentro de la teoría clásica siempre podemos escribir el campo eléctrico como una combinación de las cuadraturas del campo.

## 2.2. Modelo cuántico de la luz

Aún cuando el modelo clásico de la luz es muy exitoso al explicar una enorme cantidad de fenómenos ópticos, se requiere de un modelo cuántico para explicar fenómenos físicos tan cotidianos como la observación del ojo humano [2, 7], entre otros. El modelo cuántico de la luz se basa en la cuantización del campo electromagnético, introduciendo al fotón como el “paquete” mínimo de luz detectable. A continuación se desarrolla una muy simple cuantización del campo electromagnético para introducir los conceptos y las herramientas matemáticas que se emplearán en este trabajo.

En la sección 2.1 obtuvimos el Hamiltoniano del campo eléctrico, en términos de las variables  $P_{\vec{k}\alpha}$  y  $Q_{\vec{k}\alpha}$ . Haciendo las cuentas correspondientes, se puede mostrar que  $P$  y  $Q$  son variables canónicas conjugadas. De acuerdo con la cuantización canónica propuesta por Dirac, cambiando las variables  $P_{\vec{k}\alpha}$  y  $Q_{\vec{k}\alpha}$  por

operadores cuánticos y su paréntesis de Poisson por el conmutador igual a  $i\hbar$ , es decir

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \alpha} (\hat{P}_{\vec{k}, \alpha}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \hat{Q}_{\vec{k}, \alpha}^2) \quad (2.24)$$

$$[\hat{P}_{\vec{k}, \alpha}, \hat{P}_{\vec{k}', \alpha'}] = [\hat{Q}_{\vec{k}, \alpha}, \hat{Q}_{\vec{k}', \alpha'}] = 0 \quad (2.25)$$

$$[\hat{P}_{\vec{k}, \alpha}, \hat{Q}_{\vec{k}', \alpha'}] = i\hbar \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (2.26)$$

pasamos de un problema clásico a uno cuántico. Dado que el hamiltoniano es una suma de osciladores armónicos no interactuantes, la solución está dada por el producto tensorial de los vectores de cada uno de los modos del campo  $|\psi_{11}\rangle |\psi_{12}\rangle \dots |\psi_{21}\rangle \dots$  [8]. Dicho lo anterior, de ahora en adelante trabajaremos con un sólo modo del campo, por lo que no se escribirán los subíndices  $k, \alpha$  que denotan el vector de onda y la polarización respectivamente, es decir, nos quedamos con

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{P}^2 + \omega^2 \hat{Q}^2) \quad (2.27)$$

Suele ser conveniente resolver el oscilador armónico en términos de los operadores no hermitianos de creación  $\hat{a}$  y aniquilación  $\hat{a}^\dagger$ , los cuales están definidos como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{Q} + i\hat{P}) \quad (2.28)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{Q} - i\hat{P}) \quad (2.29)$$

El problema del oscilador armónico en términos de  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  nos queda como

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.30)$$

con la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.31)$$

Para encontrar el espectro de energías de  $\hat{H}$ , notemos que si  $|\psi\rangle$  es solución de  $\hat{H}$  con eigenvalor  $E$ , es decir  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ , entonces  $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$  también es solución y tiene un eigenvalor  $(E + \hbar\omega)$ , ya que

$$\begin{aligned} \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \hat{a}^\dagger |\psi\rangle &= \hbar\omega (\hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger) |\psi\rangle \\ &= \hbar\omega \hat{a}^\dagger ((1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \frac{1}{2}) |\psi\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger (\hat{H} + \hbar\omega) |\psi\rangle \\ &= (E + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |\psi\rangle \\ &= \hbar\omega (\epsilon + \frac{1}{2} + 1) \hat{a}^\dagger |\psi\rangle, \end{aligned} \quad (2.32)$$

y por lo tanto  $\hat{H}\hat{a}^\dagger|\psi\rangle = \hbar\omega(\epsilon + \frac{1}{2} + 1)\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ , donde  $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ . Análogamente se puede mostrar que  $\hat{H}\hat{a}|\psi\rangle = \hbar\omega(\epsilon + \frac{1}{2} - 1)\hat{a}|\psi\rangle$ . Con los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  hemos encontrado una forma de construir soluciones recurrentes de  $\hat{H}$  a partir de una solución  $|\psi\rangle$  [9].

Antes de continuar notemos que el potencial del oscilador armónico es una parábola, por lo tanto su solución es un conjunto de estados ligados con un espectro discreto de energías. A partir de la solución de  $\hat{H}$  en términos de la función de onda  $\psi$ , se puede mostrar que la aplicación recurrente de los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  genera todas las soluciones de  $\hat{H}$ . Por lo tanto además de que el espectro de  $\hat{H}$  es discreto, sus energías están equiespaciadas ya que al aplicar los operadores de creación y aniquilación aumentamos o disminuimos la energía en múltiplos enteros de  $\hbar\omega$ . La cuantización particular de las energías que exhibe este problema sugiere cambiar a una notación que resalte estas propiedades, así asignamos

$$|\psi\rangle \longrightarrow |n\rangle \quad \epsilon \longrightarrow n, \quad (2.33)$$

Traduciendo nuestro problema a la nueva notación

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \quad (2.34)$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = \hbar\omega(n - 1)\hat{a}|n\rangle \quad (2.35)$$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hbar\omega(n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (2.36)$$

Dado que el oscilador armónico no admite energías negativas, notemos que va a haber un estado de mínima energía para el cual definimos

$$\hat{a}|0\rangle = 0|0\rangle, \quad (2.37)$$

por lo tanto  $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\frac{1}{2}|0\rangle$ , la energía del estado base es distinta de cero.  $|0\rangle$  es conocido como el estado del vacío.

### 2.2.1. Estados de Fock

La notación introducida en (2.33) es muy usada en óptica cuántica. Los estados  $|n\rangle$  son llamados estados de Fock o estados de número y su correspondiente eigenvalor  $n$  representa el número de fotones con frecuencia angular  $\omega$ .

De (2.34) vemos que  $\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$ , de donde definimos al operador de número  $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ .  $\hat{n}$  es un operador hermitiano, de modo que sus autoestados forman una base completa y ortonormal  $\langle n|m\rangle = \delta_{mn}$ . A partir de la relación de ortonormalidad de los estados de Fock se puede mostrar que los operadores  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  actúan sobre los estados de número como

$$(i) \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (ii) \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.38)$$

Aplicar el operador  $\hat{a}^\dagger$  a un estado de número es equivalente a crear un fotón y por el contrario, aplicar  $\hat{a}$  corresponde a quitarle un fotón al sistema, de estas

propiedades es que los operadores  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  heredan el nombre de operadores de creación y aniquilación.

Como se comentó en la sección anterior, todos los estados de número pueden ser creados a partir del estado base aplicando sucesivamente el operador de ascenso [10]

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.39)$$

En la descripción clásica de la luz, una amplitud de cuadratura  $X(\theta)$  puede ser descrita como una función de un ángulo de fase  $\theta$ , de acuerdo con la ecuación (2.20). La forma cuántica de esta expresión se obtiene cambiando las variables de cuadratura por operadores cuánticos

$$\hat{X}_\theta = \cos(\theta)\hat{X}_1 + \sin(\theta)\hat{X}_2, \quad (2.40)$$

donde

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (2.41)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{i}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (2.42)$$

comparando estas últimas expresiones con las ecuaciones (2.7) y (2.8) vemos que  $\hat{X}_1$  y  $\hat{X}_2$  son unas versiones renormalizadas de los operadores  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ .

Con el operador de amplitud de cuadratura  $\hat{X}^\theta$  se puede calcular el valor de expectación de una amplitud de cuadratura en un estado de número particular  $|n\rangle$

$$\langle \hat{X}^\theta \rangle_n = 0, \quad (2.43)$$

debido a la ortogonalidad de los estados de número. Clásicamente teníamos que la amplitud de cuadratura oscilaba como función del ángulo de cuadratura,  $\theta$ , por el contrario, para un estado de número  $\langle \hat{X}^\theta \rangle_n$  siempre es cero, independientemente del ángulo  $\theta$ . Los estados de número representan unos estados exóticos de la luz, no a los que estamos acostumbrados de la teoría clásica [2].

### 2.2.2. Estados coherentes

Al comienzo de este capítulo se habló de la descripción clásica de la luz, donde se vio que el campo eléctrico está compuesto por ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz. Dado la teoría cuántica es más general que la teoría clásica, resulta natural preguntarse por aquellos estados que recuperan los resultados de la teoría clásica. A continuación se presentan los estados cuánticos que recuperan los resultados del modelo clásico de la luz.

En la sección 2.1.1 vimos que para una onda monocromática, la cuadratura de amplitud  $X(\theta)$  oscila armónicamente con amplitud  $A_0$  como función

del parámetro  $\theta$ . Podemos preguntarnos por los estados  $|\psi\rangle$ , para los cuales se obtiene el valor esperado que corresponde al clásico.

$$\langle \hat{X}^\theta \rangle_\psi = A_0 \cos(\theta - \phi) \quad (2.44)$$

donde  $\phi$  es una fase.  $\hat{X}^\theta$  está dado por la ecuación (2.40). Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación (2.44)

$$\langle \hat{X}^\theta \rangle_\psi = \langle \psi | \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \cos(\theta) + \frac{i}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \sin(\theta) | \psi \rangle \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle \psi | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle) \cos(\theta) + \frac{i}{2} (\langle \psi | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle) \sin(\theta) \quad (2.46)$$

Si  $|\psi\rangle$  es el autoestado de  $\hat{a}$  con autovalor complejo  $A = A_0 e^{i\theta}$ , es decir  $\hat{a}|\psi\rangle = \alpha_0 e^{i\theta} |\psi\rangle$  obtenemos el resultado de la ecuación (2.44). Los autoestados del operador de aniquilación se llaman estados coherentes y suelen representarse por  $|\alpha\rangle$ . Los estados coherentes se pueden definir como

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.47)$$

donde  $\alpha$  es un número complejo y no corresponde a ninguna observable, dado que  $\hat{a}$  no es un operador hermitiano. Sin embargo, el módulo al cuadrado de  $\alpha$  tiene una interpretación física inmediata: es el número medio de fotones en el estado  $\alpha$

$$\langle n \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.48)$$

Podemos escribir el estado coherente  $|\alpha\rangle$  a través de su expansión en estados de número  $|n\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle \quad (2.49)$$

Los coeficientes de la expansión son dados por

$$\langle n|\alpha\rangle = \langle 0 | \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}} | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle \quad (2.50)$$

donde en la última parte de la ecuación anterior, usamos (2.39). Por lo tanto

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.51)$$

El factor de normalización  $\langle 0|\alpha\rangle$ , es dado por

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \sum_m \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle \\ &= |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{|\alpha|^2} |\langle 0|\alpha\rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.52)$$

de modo que, salvo por una fase arbitraria

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (2.53)$$

y por lo tanto

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.54)$$

Otra forma de definir los estados coherentes es siendo aquellos estados que se obtienen de aplicar el operador de desplazamiento  $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha^* \hat{a} - \alpha \hat{a}^\dagger}$  al estado vacío de tal forma que

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (2.55)$$

Es fácil demostrar que esta definición es consistente con la ecuación (2.54). La probabilidad de encontrar  $n$  fotones en  $|\alpha\rangle$  es

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} = \frac{\langle n\rangle^n}{n!} e^{-\langle n\rangle} \quad (2.56)$$

que corresponde a una distribución de Poisson. De modo que la variancia del número medio de fotones es

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle. \quad (2.57)$$

Una consecuencia importante de la ecuación (2.54) es que, dados dos estados coherentes,  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$

$$|\langle \alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad (2.58)$$

Lo que significa que los estados coherentes no son ortogonales entre sí. Esto no es sorprendente, puesto que no son autoestados de un operador hermitiano, sin embargo, es posible expandir cualquier estado en términos de un estado coherente: los estados coherentes forman un conjunto “supercompleto” siendo posible expandir cualquier estado coherente en términos de los demás. Lo anterior puede ser demostrado usando la ecuación (2.54) para mostrar que

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{I} \quad (2.59)$$

y entonces

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|\psi\rangle. \quad (2.60)$$

Los estados coherentes son de enorme importancia dentro de la teoría cuántica. En la óptica cuántica se usan para describir la luz de un láser.



## Capítulo 3

# Medición de la fase del campo electromagnético

Para obtener información de las propiedades sensibles a la fase de la luz, es conveniente hacer uso de la detección homodina [11, 12]. Los dispositivos para la detección homodina están diseñados para medir una cuadratura del campo a investigar. La técnica consiste en mezclar en un divisor de haz (BS) el campo a medir con un campo coherente a la misma frecuencia, al que se le llama oscilador local (LO) y medir la fotocorriente a la salida del BS [13], en la figura 3.1 se muestra un esquema de la detección homodina.

A continuación se presenta la descripción de un BS en términos de la teoría cuántica y seguido de esto se explica la detección homodina.

La detección homodina tiene una enorme cantidad de aplicaciones en la medición de estados cuánticos de la luz, algunas de estas aplicaciones son la deducción de estadísticas de fotones, la medición directa de funciones de cuasi-probabilidad y la reconstrucción de matrices de densidad, entre otras [14].

### 3.1. Transformación de un BS

Un BS, como su nombre lo dice, es un dispositivo óptico que divide un rayo de luz en dos, tiene dos modos de entrada y dos modos de salida. Es un elemento esencial en la mayoría de los interferómetros. En esta sección vamos a analizar las propiedades del BS en términos de la teoría cuántica.

Los modos de entrada están descritos por los operadores de aniquilación  $\hat{a}$  para el campo señal y  $\hat{b}$  para el LO. Estos modos son combinados en un BS de reflexión  $R$  y transmisión  $T$ , suponiendo que el BS es ideal entonces  $R + T = 1$ . Denotando por  $\hat{c}$  y  $\hat{d}$  los modos a la salida del BS, en términos de los modos de entrada éstos están dados por la transformación

$$\hat{c} = \sqrt{T} \hat{a} + i\sqrt{1-T} \hat{b}, \quad (3.1)$$

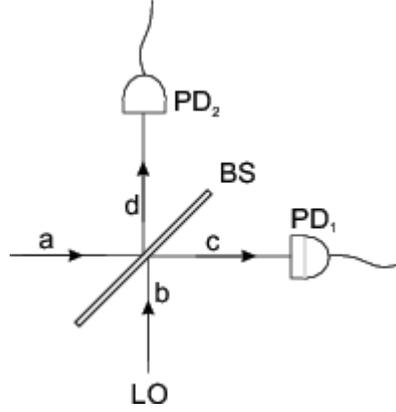


Figura 3.1: Detección homodina ordinaria

$$\hat{d} = i\sqrt{1-T}\hat{a} + \sqrt{T}\hat{b}. \quad (3.2)$$

La  $i$  en la primera expresión indica que hay una diferencia de fase de  $\pi/2$  entre los modos transmitido y reflejado. Si las señales son medidas por fotodetectores ideales a la salida del BS, la fotocorriente medida está dada por el valor esperado del operador de número, definido en la sección 2.2.1. Los operadores de número correspondientes a los detectores  $PD_1$  y  $PD_2$  respectivamente son

$$\hat{c}^\dagger \hat{c} = T \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1-T) \hat{b}^\dagger \hat{b} + i\sqrt{(T)(1-T)} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (3.3)$$

$$\hat{d}^\dagger \hat{d} = (1-T) \hat{a}^\dagger \hat{a} + T \hat{b}^\dagger \hat{b} - i\sqrt{(T)(1-T)} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (3.4)$$

Las frecuencias del LO y del modo de entrada son iguales, así no hay ninguna dependencia temporal en los operadores  $\hat{c}^\dagger \hat{c}$  y  $\hat{d}^\dagger \hat{d}$  [10].

La transformación del BS también puede ser representada en términos de una transformación unitaria, es decir  $\hat{c} = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}$  y  $\hat{d} = \hat{U}^\dagger \hat{b} \hat{U}$ , donde  $U = e^{i\eta(\hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{b})}$ , con  $R = \cos^2(\eta)$ . Esta relación se puede verificar usando el lema de Hausdorff-Baker  $e^{i\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-i\lambda \hat{A}} = \hat{B} + i\lambda [\hat{A}, \hat{B}] + (i\lambda)^2/2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$

## 3.2. Detección homodina

Ahora que sabemos la relación entre los modos de entrada y de salida de un BS estamos en posición de introducir la detección homodina, como técnica para medir una de las cuadraturas del campo.

Si a la entrada del BS tenemos un campo coherente  $|\beta\rangle$ , de modo que  $\hat{b}|\beta\rangle = |\beta|e^{i\theta_\beta}|\beta\rangle$  con una fase  $\theta_\beta$  bien definida y en la otra entrada tenemos una señal

arbitraria, entonces el valor esperado de la fotocorriente en la salida c del BS es

$$\begin{aligned}
\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle &= \langle T \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1-T) \hat{b}^\dagger \hat{b} + i\sqrt{(T)(1-T)} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \rangle \\
&= T \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + (1-T)|\beta|^2 + i\sqrt{(T)(1-T)} (\langle \hat{a}^\dagger \rangle |\beta| e^{i\theta_\beta} - |\beta| e^{-i\theta_\beta} \langle \hat{a} \rangle) \\
&= T \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + (1-T)|\beta|^2 + i\sqrt{(T)(1-T)} |\beta| \langle \hat{a}^\dagger e^{i\theta_\beta} - e^{-i\theta_\beta} \hat{a} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por otro lado, de la ecuación (2.40) tenemos que el operador de cuadratura es

$$\begin{aligned}
\hat{X}^\theta &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \cos(\theta) + i \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \sin(\theta) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

entonces

$$\hat{X}^{\theta+\pi/2} = \frac{i}{2} (\hat{a}^\dagger e^{i\theta} - \hat{a} e^{-i\theta}). \tag{3.7}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (3.5), la fotocorriente homodina en el detector  $PD_1$  queda

$$\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle = T \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + (1-T)|\beta|^2 + 2\sqrt{(T)(1-T)} |\beta| \langle \hat{X}^{\theta_\beta+\pi/2} \rangle. \tag{3.8}$$

La señal que llega a  $PD_1$  tiene una parte que corresponde al campo de entrada transmitido, otra al campo reflejado del LO y, la más importante, un término de interferencia entre el campo de entrada y el LO, donde hemos identificado el operador de cuadratura del campo señal en la ecuación (3.7), el cual depende de la fase del LO.

En el fotodetector  $PD_2$  se mide la fotocorriente

$$\langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle = (1-T) \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + T|\beta|^2 - 2\sqrt{(T)(1-T)} |\beta| \langle \hat{X}^{\theta_\beta+\pi/2} \rangle. \tag{3.9}$$

Un caso muy popular de la detección homodina es la detección homodina balanceada, que corresponde a la situación en que el coeficiente de transmisión es igual al coeficiente de reflexión del BS, i.e  $R = T$ . En este caso las fotocorrientes entre los detectores  $PD_1$  y  $PD_2$  sólo difieren por el signo del término de interferencia, de modo que si se restan estas fotocorrientes, se obtiene una señal proporcional al valor esperado de la cuadratura del campo a medir.

### 3.2.1. Detección homodina no balanceada

Cuando solo se mide la fotocorriente en una de las salidas del BS y no se tiene ninguna restricción sobre los coeficientes de transmisión y reflexión del BS, se tiene la detección homodina no balanceada. Esta situación se esquematiza en la figura 3.2.

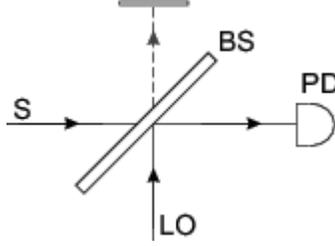


Figura 3.2: Esquema de la detección homodina balanceada. El campo señal  $S$  se mezcla con el de un LO en un BS, se mide la estadística a la salida con un fotodetector PD

$$\hat{n}_c = T \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1 - T) \hat{b}^\dagger \hat{b} + i\sqrt{(T)(1 - T)} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (3.10)$$

La estadística de fotones que llegan a  $PD$  va a depender del estado del oscilador local y del campo señal. Por ejemplo, si consideramos el caso en el que ambos son estados coherentes, caracterizados por  $\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|e^{i\theta_\alpha}|\alpha\rangle$  y  $\hat{b}|\beta\rangle = |\beta|e^{i\theta_\beta}|\beta\rangle$  se tendría

$$\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle = T|\alpha|^2 + (1 - T)|\beta|^2 + 2\sqrt{(T)(1 - T)}|\beta||\alpha|(e^{-i\Delta\theta} - e^{i\Delta\theta}), \quad (3.11)$$

donde  $\Delta\theta = \theta_\beta - \theta_\alpha$ , se recupera la interferencia de los estados clásicos, cuyo patrón de máximos y mínimos de intensidad sólo depende de la diferencia de fases, es decir de la diferencia de caminos ópticos entre los dos haces.

La detección homodina no balanceada se puede usar para recuperar la estadística de las cuadraturas del campo [15] y para la reconstrucción de estados cuánticos [16].

## Capítulo 4

# Tomografía de detector, motivación y antecedentes

*“Lo que observamos no es la naturaleza misma,  
sino la naturaleza expuesta a nuestro método de cuestionamiento”*  
Heisenberg

Desde los inicios de la mecánica cuántica, el proceso de medición dentro de la teoría ha sido tema de debate y origen de todas las “paradojas” e interpretaciones. La medición juega un papel crucial dentro de la teoría, ya que dependiendo de lo que se mida es como se va a comportar el sistema.

Entre las décadas de los 40’s y los 70’s los esfuerzos estaban dirigidos a la reconsideración de una teoría realista según [17]<sup>1</sup>. Más adelante, los avances tecnológicos permitieron hacer experimentos más finos que han probado estar de acuerdo con la mecánica cuántica y en desacuerdo con las teorías más intuitivas.

En la primera parte de este capítulo se presentan los fundamentos de la medición en mecánica cuántica en términos operacionales. Posteriormente se generalizan el proceso de medición en mecánica cuántica e introducen las ideas generales de la tomografía de detector. Se muestran algunos de los resultados de las tomografías hechas de los APD’s y PNR’s [18] (detectores con resolución de número de fotones) los cuales son detectores diagonales en la base de número, por lo cual no son sensibles a la fase del campo electromagnético, como se vió en la ecuación (2.43). Al final de este capítulo se presenta el objetivo del trabajo en esta tesis, que consiste en la primera parte de la tomografía de un detector con sensibilidad de fase y resolución de número de fotones.

---

<sup>1</sup>El criterio para que una teoría sea realista consiste en que, si es posible determinar el valor de una cantidad física con total certeza, entonces existe un elemento de la realidad física que corresponde a esta cantidad.

## 4.1. Postulados de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica puede ser formulada en términos de postulados. No existe tal cosa como “Los postulados de la mecánica cuántica”, cada autor adopta la estructura y número de postulados más conveniente para sus fines, pero en esencia todas las formulaciones tienen la misma información.

En esta sección se enuncian los postulados de la mecánica cuántica para posteriormente usarlos para plantear adecuadamente la tesis de este trabajo.

### 4.1.1. Sistema físico

**Postulado 1:** Asociado a cualquier sistema físico aislado hay un espacio vectorial complejo con producto interno  $\mathcal{H}$  (esto es, un espacio de Hilbert) conocido como el espacio del estado del sistema. A un tiempo dado  $t$ , el sistema está completamente descrito por su vector de estado  $|\psi(t)\rangle$ , el cual es un vector unitario en  $\mathcal{H}$ .

El estado cuántico también suele representarse en términos del operador de densidad del estado, definido a partir del ket  $|\psi(t)\rangle$  por

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|, \quad (4.1)$$

donde  $\langle\psi(t)|$  es el complejo conjugado de  $|\psi(t)\rangle$ . El operador de densidad, también llamado matriz de densidad es un operador hermitiano, con traza uno, que describe el estado estadístico de un sistema cuántico. Contiene la misma información que  $|\psi\rangle$ , pero permite la extensión a estados mixtos, estados que no se pueden representar con la forma  $|\psi\rangle$ , porque no se cuenta con la información completa del sistema.

### 4.1.2. Evolución de un sistema físico

**Postulado 2:** La evolución de un sistema cuántico cerrado está descrita por una transformación unitaria. Es decir, el estado  $|\psi(t_1)\rangle$  al tiempo  $t_1$  está relacionado al estado  $|\psi(t_2)\rangle$  al tiempo  $t_2$  por un operador unitario  $U$  el cual depende sólo de los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$|\psi(t_2)\rangle = U |\psi(t_1)\rangle. \quad (4.2)$$

La evolución de un sistema cuántico cerrado también se puede obtener a partir de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle, \quad (4.3)$$

con  $H$  el Hamiltoniano del sistema.

La conexión entre el postulado 2 y la ecuación de Schrödinger está dada por

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left(-i\frac{H(t_2-t_1)}{\hbar}\right)|\psi(t_1)\rangle = U|\psi(t_1)\rangle. \quad (4.4)$$

### 4.1.3. Mediciones en mecánica cuántica

**Postulado 3:** Cuando una cantidad física  $\mathcal{A}$  es medida en un sistema en un estado  $|\psi\rangle$ , la probabilidad  $P(a_n)$  de obtener el eigenvalor no degenerado  $a_n$  de la correspondiente observable  $\hat{A}$  es

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2, \quad (4.5)$$

donde  $|u_n\rangle$  es el eigenvector normalizado de  $\hat{A}$  asociado con el eigenvalor  $a_n$  [19].

Podemos reescribir este resultado en términos de la matriz de densidad  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,

$$\begin{aligned} P(a_n) &= \langle u_n|\psi\rangle\langle\psi|u_n\rangle \\ &= \langle u_n|\hat{\rho}|u_n\rangle \\ &= \langle u_n|\hat{\rho}\sum_i|i\rangle\langle i|u_n\rangle \\ &= \sum_i\langle i|u_n\rangle\langle u_n|\hat{\rho}|i\rangle \\ &= \sum_i\langle i|\Pi_n\hat{\rho}|i\rangle \\ &= \text{Tr}(\Pi_n\hat{\rho}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $\hat{\Pi}_n = |u_n\rangle\langle u_n|$ , es un operador idempotente  $\hat{\Pi}_n^2 = \hat{\Pi}_n$ . Geométricamente  $\hat{\Pi}_n$  es un operador que proyecta ortogonalmente sobre el estado  $|u_n\rangle$ , por lo cual, los operadores que satisfacen la condición de eigenpotencia se llaman proyectores.

Los proyectores forman un conjunto completo, lo cual se expresa en la relación  $\sum_n\hat{\Pi}_n = \hat{1}$ . Ya que cualquier otro estado en el mismo espacio de Hilbert se puede expresar como una combinación lineal de los eigenestados  $|u_n\rangle$ , multiplicando el estado arbitrario  $|\psi\rangle$  por la identidad y reacomodando términos  $|\psi\rangle = \sum_n\langle u_n|\psi\rangle|u_n\rangle$ .

Otra propiedad importante de los proyectores es que son positivos semidefinidos, i. e.  $\langle\psi|\hat{\Pi}_n|\psi\rangle \geq 0$ , lo cual se denota por  $\hat{\Pi}_n \geq 0$ .

Si el postulado de medición no se aplica con cuidado se pueden obtener resultados erróneos. Este postulado asume de manera implícita que la medición es realizada sobre un sistema cerrado, sin embargo la de medición envuelve una especie de interacción que acopla el estado, la señal que se desea medir con el ambiente. De manera abstracta podemos representar este acoplamiento por  $\rho_s \otimes \rho_a$ . No tiene sentido aplicar el postulado de medición a  $\rho_s$  ya que el

sistema en que estamos interesados no está más representado por el operador de densidad  $\rho_s$ , sino que está acoplado con el operador de densidad del ambiente  $\rho_a$ . Resulta de sumo interés tener una descripción del proceso de medición en sistemas abiertos, en la siguiente sección se generaliza el proceso de medición para sistemas abiertos.

## 4.2. Generalización de mediciones en mecánica cuántica

Desde el punto de vista estándar, la mecánica cuántica nos dice que la estadística de toda medición está determinada por la proyección del estado en los eigenestados ortogonales de un conjunto de operadores autoadjuntos que representan la observable medida (ver postulado de medición en la sección 4.1.3). Este esquema asume que la medición se realiza en un sistema cerrado.

Pero el proceso de medición inevitablemente envuelve un tipo de interacción, que acopla al campo señal con los modos del campo externo. Una teoría más completa y realista

debe contemplar dicho acoplamiento [20]. A continuación se plantea un problema cuántico en el que se realiza una medición sobre un sistema acoplado al medio.

### 4.2.1. Caracterización de un proceso de medición arbitrario

Consideremos la situación mostrada en la figura 4.1. Un sistema  $S$  representa nuestro objeto de observación está descrito por el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_s$ , los alrededores  $A$ , son descritos por  $\mathcal{H}_a$ . El espacio de Hilbert total  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_a$  es cerrado por definición. Del postulado 2 (sección 4.1.2) sabemos que la interacción del sistema con el ambiente puede ser implementada por un operador unitario  $U$  actuando sobre  $\mathcal{H}$ . Suponiendo que el sistema se encuentra inicialmente en un estado  $\rho_s$ , en tanto que las variables externas se encuentran en un estado arbitrario  $\rho_a$  independiente de  $\rho_s$ . Después de la interacción, se mide un conjunto de observables compatibles entre los dos sistemas sobre el estado  $U\rho_s \otimes \rho_a U^\dagger$ . Del postulado de medición (sección 4.1.3) La estadística de la medición está dada por la proyección sobre un conjunto de estados ortogonales  $|k\rangle \in \mathcal{H}$  cuya extensión no tiene que coincidir con la de  $\mathcal{H}_s$

$$P(k) = Tr_{s,a}(|k\rangle \langle k| U\rho_s \otimes \rho_a U^\dagger), \quad (4.7)$$

donde  $P(k)$  es la probabilidad de medir la salida  $k$ . Esta es una medición ideal desde el punto de vista estándar de la mecánica cuántica porque  $\mathcal{H}$  es un sistema cerrado (ver ec. (4.5)). Dado que  $\rho_a$  no depende de  $\rho_s$ , la información obtenida por la medición se puede considerar como información del estado  $\rho_s$ . Esta interpretación se puede apreciar reacomodando los términos de la ecuación

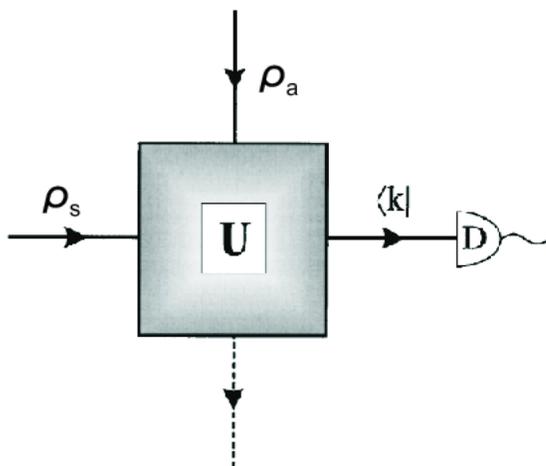


Figura 4.1: Esquema para la determinación del proceso de medición. Un estado de entrada  $\rho_s$  es acoplado con los grados de libertad del ambiente, representados por el estado  $\rho_a$ . Después de la interacción descrita por el operador de evolución  $U$  se realiza una medición cuya estadística está determinada por la proyección sobre los estados ortogonales  $|k\rangle$ . (Imagen obtenida de [20])

(4.7) <sup>2</sup>

$$P(k) = Tr_s(\pi(k)\rho_s) \quad (4.8)$$

donde

$$\pi(k) = \pi_k = Tr_a(U^\dagger |k\rangle \langle k| U \rho_a) \quad (4.9)$$

En la ecuación (4.8) hemos obtenido una expresión muy similar a la del postulado de medición en la ecuación (4.6), con la diferencia de que ahora hemos cambiado los operadores proyectivos  $\hat{\Pi}_n$  por los objetos  $\hat{\pi}_k$ . El conjunto de todos los  $\hat{\pi}_k$  que representan las posibles mediciones del sistema acoplado se conocen como las mediciones de operadores semidefinidos positivos (POVM), éstos al igual que los operadores proyectivos determinan la estadística de salida del aparato de medición, que puede ser un detector. La ecuación (4.8) establece una relación entre el sistema que se está estudiando  $S$  y las  $k$  salidas del sistema acoplado, “los clicks” del detector.

Para entender un poco mejor este problema, consideremos el siguiente ejemplo simplista. Nuestro sistema  $S$  será una fuente que lanza un fotón a la vez, el cual queremos medir mediante la excitación de dos átomos. Existen tres posibles resultados en la medición, es decir 3 posibles valores de  $k$  correspondientes a los siguientes casos 1) que el fotón excite al átomo 1  $|k_1\rangle = |\text{fotón absorbido, átomo 1 excitado, átomo 2 desexcitado}\rangle$ , 2) que el fotón excite al átomo 2  $|k_2\rangle = |\text{fotón absorbido, átomo 1 desexcitado, átomo 2 excitado}\rangle$  y 3) que el fotón no excite a ninguno de los dos átomos  $|k_3\rangle = |\text{fotón no absorbido, átomo 1 desexcitado, átomo 2 desexcitado}\rangle$ . Dado que el sistema que estamos estudiando es el fotón no nos interesa cuál de los dos átomos absorbió al fotón sino el solo estado del fotón fue absorbido o no. De modo que los casos 1) y 2) son equivalentes para nosotros como observador. Sin embargo, alguien que posee toda la información del sistema puede diferenciarlos perfectamente.

Normalmente, los experimentos en el laboratorio suelen ser más complicados, involucran muchas más variables en juego, en un detector de fotones por ejemplo, en vez de dos átomos se tienen del orden de  $10^{23}$  átomos en una red cristalina formando un semiconductor, sujeto a un potencial eléctrico, todo esto es controlado y monitoreado por una electrónica lejos de ser trivial. Los sistemas reales suelen ser más complicados que el ilustrado en el ejemplo de la excitación del par de átomos por un fotón, por lo que en general no intentaremos dar significado físico a priori al índice  $k$ . El objetivo de la tomografía de detector, como se verá más adelante será identificar el índice  $k$  con una situación física del sistema que deseamos medir. Antes de entrar de lleno en la tomografía de detector veamos cómo se definen los POVM junto con sus propiedades operacionales.

### 4.2.2. POVM

En la sección anterior se vio que cuando el sistema que queremos medir no está descrito por un espacio de Hilbert cerrado no podemos emplear el postulado

<sup>2</sup>Usando la propiedad cíclica de la traza  $Tr(AB)=Tr(BA)$

3 para describir la estadística de mediciones. Sin embargo, cuando el estado del sistema se encuentra inicialmente desacoplado del estado del medio es posible describir la estadística de medición del sistema, de manera similar a como se hace con la mediciones proyectivas del postulado 3; trazando sobre el producto del operador de densidad de sistema con el operador de medición, pero en vez de que la estadística esté determinada por operadores proyectivos, está determinada por un conjunto de conjunto de operadores positivos semidefinidos, a los que nos referimos por POVM. Así, el formalismo de los POVM surge del hecho de que una medición proyectiva en un sistema actuará en un subsistema en formas que no pueden ser descritas por una medición proyectiva en el subsistema sólo [21]. En la caja 4.1 se enuncia la definición matemática de los POVM.

#### Caja 4.1: POVM

Sea  $\{\pi_n\}$  el conjunto de operadores semidefinidos positivos (POVM) que caracterizan las mediciones de un sistema cuántico, donde cada elemento  $\pi_n$  representa una medición denotada por  $n$ .

Entonces, dado un estado de entrada  $\rho$ , la probabilidad  $p_{\rho,n}$  de obtener el resultado  $n$  está dada por

$$p_{\rho,n} = \text{Tr}(\rho \pi_n). \quad (4.10)$$

Los POVM son positivos semidefinidos

$$\pi_n \geq 0, \quad (4.11)$$

y la suma de todos ellos es la unidad

$$\sum_n \pi_n = \hat{1}. \quad (4.12)$$

Las propiedades (4.11) y (4.12) son sólo consecuencia de que cualquier probabilidad debe ser positiva y la suma de todas las probabilidades debe ser 1. Las propiedades de cualquier medición probabilística. La propiedad (4.11) garantiza que las probabilidades sean positivas.

Por su parte, la propiedad (4.12) garantiza que las probabilidades estén normalizadas a la unidad. Esto se puede ver fácilmente multiplicando la ecuación (4.12) por el operador de densidad de un estado arbitrario y trazando, con lo que se obtiene

$$\text{Tr}(\hat{1} \rho) = 1 \quad (4.13)$$

por un lado, y por el otro

$$\text{Tr}\left(\sum_n \pi_n \rho\right) = \sum_n \text{Tr}(\pi_n \rho) = \sum_n p_{\rho, n}, \quad (4.14)$$

por lo tanto la suma de las probabilidades de todas las posibles mediciones es 1.

Comparando las propiedades de los POVM con las propiedades de las mediciones proyectivas vemos que la única diferencia entre estos dos tipos de mediciones las representadas por POVM no son mediciones ortogonales, es decir no satisfacen  $\pi_n \pi_m \neq \delta_{nm}$ .

Es importante notar que los POVM representan un tipo de medición más general que la descrita en el postulado 3. En particular, cuando los POVM corresponden a una medición proyectiva, la ecuación (4.14) toma la forma

$$\pi_n = |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (4.15)$$

donde  $|\phi\rangle$  es el eigenvector de la observable medida, correspondiente al eigenvalor  $n$ . Recuperamos el postulado de medición, como era de esperarse.

Los POVM tienen diversas aplicaciones dentro del área de la información cuántica. La manera óptima para distinguir un conjunto de estados cuánticos envuelve mediciones generalizadas en vez de proyectivas [22].

### 4.3. Tomografía cuántica

En muchas situaciones prácticas no es posible determinar qué variables externas están envueltas o la forma en que afectan la medición, de alguna forma la medición experimental difiere del valor de expectación de manera impredecible. El objetivo de la **tomografía de detector** es determinar los POVM que gobiernan la estadística de los resultados de la medición [15].

La pregunta que sigue de la discusión anterior es ¿Cómo saber que los dispositivos en el laboratorio se comportan de acuerdo a nuestras predicciones? o dicho de otra forma, dado un instrumento de medición ¿cuál es la mejor forma de describir su efecto en el marco de la teoría cuántica?

De acuerdo con la ecuación (4.19), la estadística de medición de un detector sobre un sistema  $S$  está determinada por el operador de densidad de  $S$  y los POVM del detector. Determinar el operador de densidad del sistema concierne a la tomografía de estado cuántico, en tanto que determinar el conjunto de operadores del detector concierne a la tomografía de detector. Determinar la dinámica de un proceso cuántico concierne a la tomografía de proceso.

Las tecnologías cuánticas están basadas en la correcta caracterización del estado y del proceso dinámico cuántico, para lo cual se tienen la tomografía de estado y la tomografía de proceso respectivamente. Sin embargo esto supone una perfecta caracterización del instrumento de medición, lo cual no es cosa trivial considerando la creciente complejidad de los detectores que se tienen hoy en día. Para resolver este problema se tiene la tomografía de detector, la

cual fue propuesta recientemente [18] y ha sido probada experimentalmente para fotodetectores diodo de avalancha (APD) y detectores con resolución de número de fotones (PNR).

A continuación se explica en qué consiste la tomografía de estado, para a partir de ésta entender la tomografía de detector.

### 4.3.1. Tomografía de estado

La tomografía de estado consiste en realizar una secuencia de mediciones bien calibradas sobre una serie de estados idénticamente preparados. A modo de ilustración, a continuación se presenta esquema general de la tomografía para estados discretos.

Dado un operador de densidad de dimensión finita siempre lo podemos escribir como

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} r_{\alpha} \hat{\Gamma}_{\alpha} \quad (4.16)$$

donde  $r_{\alpha}$  son coeficientes reales, que indican la probabilidad de encontrar al sistema  $\hat{\rho}$  en el estado correspondiente al elemento  $\hat{\Gamma}_{\alpha}$ . El conjunto de  $\{\hat{\Gamma}_{\alpha}\}$  forman una base en el espacio de Hilbert de  $\hat{\rho}$ . El objetivo de la tomografía de estado es determinar los parámetros  $r_{\alpha}$ , ya que a partir de éstos, sabiendo la forma de los  $\hat{\Gamma}_{\alpha}$  podemos reconstruir el operador de densidad de acuerdo con la ecuación (4.16).

En ocasiones resulta complicado medir en la base  $\{\hat{\Gamma}_{\alpha}\}$ . Suponiendo que en el laboratorio tenemos la posibilidad de medir un cierto conjunto de autovalores  $\{n\}$ , de acuerdo con el postulado 3, la probabilidad de medir el autovalor  $n$  es

$$P_n = Tr(\hat{\rho} \hat{\pi}_n). \quad (4.17)$$

Incertando en esta última ecuación el operador de densidad de la ecuación (4.16) obtenemos

$$P_n = \sum_{\alpha} B_{n\alpha} r_{\alpha} \quad (4.18)$$

donde  $B_{\alpha n} = Tr(\hat{\Gamma}_{\alpha} \hat{\Pi}_n)$ . Escribiendo la ecuación (4.18) en una forma vectorial

$$\vec{P} = \hat{B} \vec{r}, \quad (4.19)$$

donde  $\vec{P}$  es un vector cuyas componentes son las probabilidades  $P_n$ ,  $\hat{B}$  es una matriz con componentes dadas por  $B_{\alpha n} = Tr(\hat{\Gamma}_{\alpha} \hat{\pi}_n)$  y el vector  $\vec{r}$  tiene como componentes los coeficientes  $r_{\alpha}$ . Invertiendo la matriz  $\hat{B}$  podemos determinar los coeficientes  $r_{\alpha}$

$$\vec{r} = \hat{B}^{-1} \vec{P}, \quad (4.20)$$

consiguiendo con ésto el propósito de la tomografía de detector.

Dado que las componentes de  $\hat{B}$  dependen del operador  $\hat{\pi}_n$  que representa la medida realizada, la tomografía de estado asume que las mediciones realizadas están perfectamente calibradas, en otras palabras, que conocemos la medición  $\hat{\pi}_n$  fue efectuada sobre nuestro sistema.

Todo ésto es posible siempre que la matriz  $\hat{B}$  sea invertible, en ese caso diremos que nuestro conjunto de medidas  $\{\hat{\pi}_n\}$  forman un conjunto tomográfico i.e podremos usarlo para determinar la matriz de densidad del sistema. Para estados de dimensión infinita, la tomografía se complica un poco, pero la idea detrás es la misma; inferir el estado que mejor describe el sistema a partir de una serie de mediciones. Cuando se trabaja con espacios de Hilbert de dimensión infinita, la base empleada para realizar las mediciones suele truncarse y discretizarse para [23], para hacer la tomografía practicable.

Debido a que nuestro conjunto de medidas tiene una incertidumbre asociada e inevitables fluctuaciones estadísticas, la matriz de densidad reconstruida con el método aquí presentado, puede no ser exactamente positiva o tener traza 1 haciéndola una matriz no física. Por esta razón se procesan los datos que dan origen a la matriz densidad medida en búsqueda de la matriz densidad física más parecida a aquella que medimos.

En resumen, la tomografía de estado consiste en realizar una serie de mediciones bien calibradas  $\{\pi_k\}$  sobre un conjunto grande de estados preparados idénticamente. Usando técnicas de inversión de datos se obtiene el operador de densidad que mejor describe el sistema del laboratorio, sujeto a las condiciones físicamente aceptables (hermiticidad, normalización y semipositividad) [24].

Si el sistema a reconstruir se encuentra en un espacio de Hilbert de dimensión  $d$ , entonces se requieren de  $d^2 - 1$  parámetros reales para determinar completamente el estado. Consideremos el siguiente ejemplo para dejar la discusión anterior más clara.

El estado de polarización de un fotón, un qbit vive en un espacio de Hilbert de dimensión 2. De modo que lo podemos representar por una matriz de  $2 \times 2$ , 4 números complejos, 8 parámetros reales. Sin embargo, para que la matriz represente un operador de densidad la matriz debe ser hermitiana y los elementos de la diagonal deben ser reales y sumar 1. De modo que el estado está determinado por sólo tres números reales

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} A & Ce^{i\theta} \\ Ce^{-i\theta} & B \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

De esta forma la tomografía de un estado de polarización requiere de tres mediciones independientes, las cuales suelen ser  $\{\hat{H}, \hat{V}, \hat{R}\}$ , medición de polarización horizontal, vertical y circular derecha [25].

### 4.3.2. Tomografía de detector

La finalidad de la tomografía de detector es encontrar un procedimiento que nos permita conocer el conjunto de operadores  $\{\hat{\pi}_k\}$  que mejor representen las mediciones de un detector, sin necesidad de requerir un conocimiento previo

del estado de los agente externos  $\rho_a$  o del operador de evolución  $U$ , en otras palabras, sin necesidad de hacer suposiciones a priori del detector. La medición está caracterizada una vez que seamos capaces de predecir de manera exitosa la estadística  $P(k)$  para todo  $\rho_s$  [20], esto es determinar el conjunto POVM del detector.

Para la tomografía de detector, en vez de realizar una serie de mediciones calibradas sobre un conjunto de sistemas cuánticos idénticamente preparados, como se hace para la tomografía de estado, aquí se usa un conjunto de estados tomográficos  $\{\hat{\rho}\}$ , como “regla” para muestrear un detector [24].

Para el caso de los detectores ópticos, los láseres provén un estado de prueba tomográficamente ideal: el estado coherente  $|\alpha\rangle$ . Transformando la magnitud  $|\alpha|$  por atenuación y la fase  $\arg(\alpha)$  por un cambio en el camino óptico, podemos construir un espacio tomográficamente completo de estados de prueba  $\{|\alpha\rangle\langle\alpha|\}$  [26].

Veamos que si la señal a medir es un estado coherente  $\rho_s = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ , definido por  $\hat{\alpha}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , la probabilidad de medir un resultado  $|k\rangle$  es

$$P_{k\alpha} = \text{Tr}(\hat{\pi}_k \hat{\rho}_\alpha) = \sum_n \langle n | \hat{\pi}_k | \alpha \rangle \langle \alpha | | n \rangle = \langle \alpha | \hat{\pi}_k | \alpha \rangle. \quad (4.22)$$

Suponiendo que podemos variar el parámetro complejo  $\alpha$ , la estadística de la medición  $Q(k, \alpha)$  depende de las variables  $k$  y  $\alpha$ . Notemos que para un valor de  $k$  fijo  $Q(\alpha)_k$  es la función  $Q$  del operador  $\hat{\pi}_k$

$$Q(\alpha)_k = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\pi}_k | \alpha \rangle \quad (4.23)$$

La función  $Q$  tiene toda la información en el espacio fase de cualquier operador [20], ya que las predicciones de las probabilidades de detección para un estado arbitrario pueden ser calculadas directamente de la función  $Q$ . Por lo tanto, particularmente cuando se muestrea al detector con estados coherentes, la estadística misma  $P_k$ , es una representación completa del detector. Desafortunadamente, los errores experimentales y las fluctuaciones estadísticas pueden causar que la función  $Q$  se ajuste de manera errónea a un  $\hat{\pi}_k$  físicamente inaceptable. Por lo que es conveniente emplear técnicas de optimización convexa para determinar los POVM sujetos a las condiciones físicamente aceptables [18] expuestas en la sección 4.2.2.

### 4.3.3. Caracterizaciones previas

La tomografía de detector ha sido mostrada experimentalmente para APD’s y PNR. A continuación se exponen de manera breve las características de estos detectores, se describe la realización experimental de la tomografía de detector, así como algunos de los resultados más importantes.

Los APD’s son fotodetectores diodo de avalancha comerciales, usados en experimentos de óptica cuántica alrededor del mundo. Estos detectores pueden distinguir un fotón pero no pueden resolver cuántos fotones participaron en el

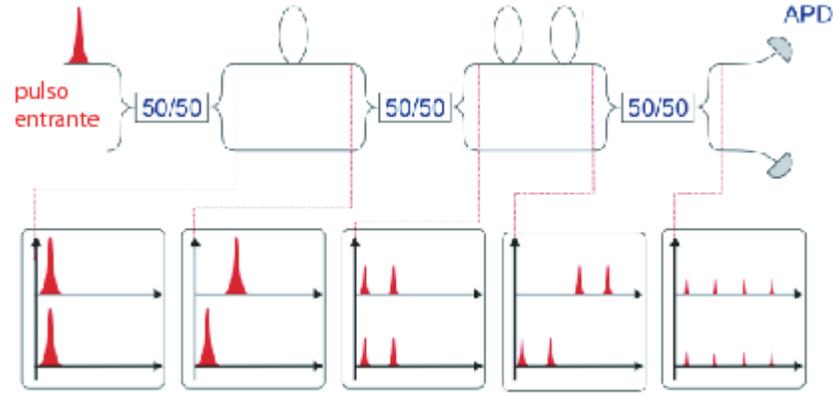


Figura 4.2: Esquema de la separación temporal de los modos de un PNR. *Imagen obtenida de [18].*

evento. De modo que sólo tienen dos posibles salidas, un pulso eléctrico (1 click) o no (0 clicks). 1 click es generalmente asociado con la llegada de uno o más fotones al detector, aún cuando cuentas negras<sup>3</sup> o “afterpulsing”<sup>4</sup> puedan ser las responsables de esta salida. 0 clicks se asocia con el estado del vacío o a un fotón perdido debido a la eficiencia diferente de 1 de los detectores.

Por su parte un PNR como el caracterizado en [18] pueden resolver hasta 8 fotones. Su funcionamiento está basado en el espaciamiento temporal de los modos, mediante la asistencia de fibra óptica y acopladores de fibra 50/50 [27]. La función del acoplador de fibra es análoga al de un BS, separa un pulso entrante en dos pulsos con cierta probabilidad. En la figura 4.2 se muestra un esquema del diseño de dichos detectores. El pulso de entrada es separado en el primer acoplador en 2 pulsos y uno de éstos es retrasado con respecto al otro, iterando este proceso con retrasos del doble de largo respecto a la situación anterior, se pueden separar temporalmente hasta en 8 pulsos con 3 acopladores de fibra 50/50, después, estos pulsos son dirigidos a un APD convencional, donde son transformados en pulsos eléctricos. Así este detector tiene 9 posibles salidas, desde 0 hasta 8 clicks. Para más detalles de estos detectores ver el apéndice A.

De acuerdo a lo dicho en la sección 4.2.1 ambos detectores son muestreados con la base de estados coherentes. En la figura 4.3 se muestra el arreglo experimental empleado para la tomografía de un detector desconocido, empleando el conjunto tomográfico de estados coherentes. Con una placa de media onda ( $\lambda/2$ ) y un polarizador P se varía la amplitud del estado coherente de prueba, después con un BS se transmite el 95% de la intensidad a un potenciómetro, donde se monitorea el estado coherente que es enviado al detector que se desea caracterizar. La señal reflejada es atenuada con filtros de densidad neutra (ND)

<sup>3</sup>Cuentas en ausencia de fotones

<sup>4</sup>Cuentas producidas por una segunda avalancha en el fotodiodo.

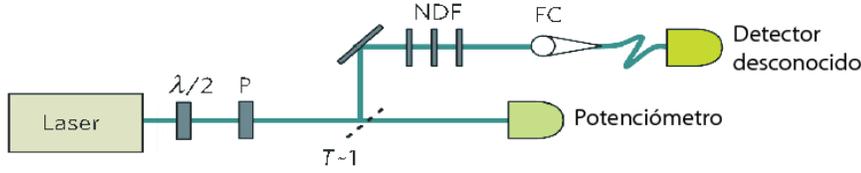


Figura 4.3: Arreglo experimental para la tomografía de detector desconocido. Imagen obtenida de [18].

y acoplada a una fibra óptica donde finalmente es enviada al detector desconocido.

Se usan técnicas de optimización convexa se determinan los POVM's de estos detectores. Para interpretar los resultados experimentales se calcula la función de Wigner para  $k = 1$  de ambos detectores y se encuentra que para considerar a los APD's como detectores de fotones individuales hay que hacer la suposición adicional de que la fuente no manda más de un fotón a la vez. Las funciones de Wigner de ambos detectores son negativas en el origen lo cual indica ambos son detectores cuánticos [18], es decir que tienen la posibilidad de detectar estados de un solo fotón los cuales no tienen análogo clásico y se les denomina como cuánticos.

#### 4.4. Tomografía de un detector con resolución de número de fotones y sensibilidad de fase, y propósito de este trabajo

Ni uno de los detectores caracterizados anteriormente es sensible a la fase del campo electromagnético, por lo que en este trabajo se propone hacer la tomografía de una nueva clase de PNR con sensibilidad de fase agregada. En esta tesis se presenta la primera parte de dicha tomografía de detector, que consiste en la realización del experimento. En la figura 4.4 se representa esquemáticamente el arreglo experimental para la tomografía de un PNR con sensibilidad de fase. La idea es la misma que en las tomografías anteriores, hay que muestrear el detector a caracterizar con la base de estados coherentes, cambiando la amplitud y la fase del haz de entrada.

En el capítulo anterior se vio que para medir propiedades sensibles a la fase es conveniente usar la detección homodina (HD), en la que el campo a analizar es mezclado en un BS con el campo de un LO que provee una fase de referencia  $\theta$ . El campo a la salida del BS es detectado con un PNR. La combinación de la HD con el PNR nos provee de un detector con resolución de número de fotones y sensibilidad de fase (PNRHD).

Para simplificar un poco el problema se emplea el esquema de detección

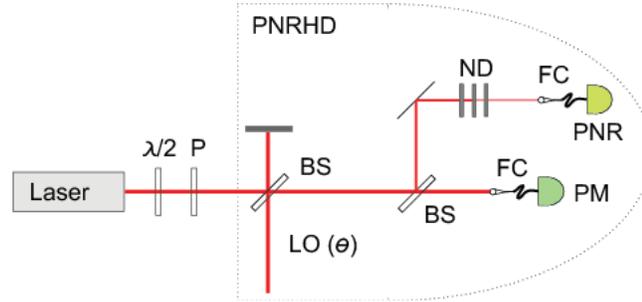


Figura 4.4: Esquema para la tomografía de un detector con sensibilidad de fase.

homodina no balanceado con PNR en el cual se tienen 9 posibles resultados, en vez de 81 para el caso balanceado ya que en ese último se tendrían 9 posibles resultados en cada salida del BS, de modo que, en general cada evento estaría caracterizado por 9 posibles resultados. Así el detector a caracterizar en este trabajo es un detector homodino no balanceado con un oscilador local débil, ya que la estadística se mide con un PNR máximamente distingue 8 fotones.

Al contrario de los detectores antes caracterizados, los POVM del PNRHD no son diagonales en la base de número, lo cual incrementa la complejidad de este problema tanto en la parte experimental como en el análisis de datos al invertir la estadística de clicks para obtener los POVM.

## 4.5. Aplicaciones de un PNRHD

Debido a la sensibilidad de fase del PNRHD, este detector se encuentra en una posición única para caracterizar estados no clásicos de la luz. Interferencia Hong-Ou-Mandel entre un estado de Fock, producido por conversión paramétrica descendente [28]. Un detector con sensibilidad de fase y resolución de número de fotones también puede ser empleado para hacer tomografía de estados de Fock, estados comprimidos y otros estados del campo de radiación.

Sintonizado la amplitud y la fase del LO podemos configurar los POVM del detector para que proyecten a una variedad de estados cuánticos, haciéndolos útiles no sólo para la detección sino también para la preparación de estados con dependencia de fase, dado que la acción de una medición no es sólo revelar algunas propiedades del estado del sistema, sino también proyectar al sistema en un estado acorde a la información medida. En principio todos los dispositivos de medición pueden ser usados como dispositivos de preparación de estados [29].

# Capítulo 5

## El experimento

En este capítulo se describe el arreglo experimental empleado para la tomografía de un detector homodino no balanceado con resolución de número de fotones (PNRHD), cuyo concepto fue planteado en la sección 4.4.

### 5.1. Diagrama del experimento

El arreglo experimental consta principalmente de cuatro partes: (1) la preparación del estado, (2) la preparación del oscilador local, (3) el monitoreo del estado coherente con que se prueba el detector y (4) la medición de las salidas del detector; la estadística de clicks  $P_k$ . En la figura 5.1 se muestra un diagrama del experimento.

De acuerdo con el esquema de la detección homodina, para que el estado y el oscilador local (LO) interfieran, deben tener la misma frecuencia por lo que éstos son preparados a partir de la misma fuente. El estado y el LO se preparan al dividir los pulsos de un láser de Titanio-Safiro de 90 fs, centrado en 784 nm y con una razón de repetición de 250 kHz, elegida así para detectar hasta 4 modos separados temporalmente en cada APD, ver anexo A. El modo del láser de entrada es separado en dos caminos ópticos H y V con un cubo divisor de haz polarizante PBS1 y una placa de media onda HWP1, usada para cambiar la polarización del haz de entrada a  $45^\circ$ , que originalmente tiene polarización horizontal ( $0^\circ$ ). Así, el estado y LO tienen polarizaciones ortogonales V y H respectivamente, esto permite controlar de manera independiente las intensidades de los haces con una placa de media onda seguida de dos cubos PBS en cada uno de los caminos ópticos. Se emplean dos cubos PBS en cada brazo para optimizar la variación de la intensidad debida al cambio de la polarización con el giro de la placa de media onda.

La longitud de coherencia del láser es de 1 mm, entonces para que los haces interfieran, los caminos ópticos del LO y del estado deben ser iguales, al menos hasta orden de décimas de milímetros. Los espejos MV(1,2,3) y MH(1,2,3) se colocan de forma que los caminos ópticos del estado y del LO tengan la misma

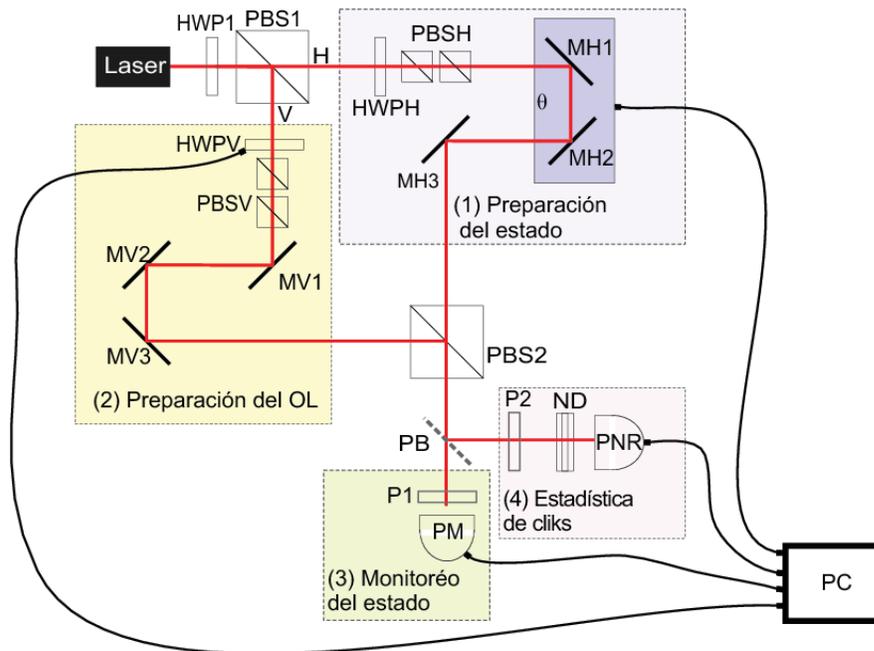


Figura 5.1: Arreglo experimental de la tomografía del detector homodino con resolución de número de fotones. Con un cubo divisor de haz polarizante PBS1 se divide el haz de un láser para preparar el estado (1) con polarización H y el LO (2) con polarización V. Los haces son recombinados en PBS2. El 90% del haz es enviado a un potenciómetro PM para monitorear el estado con que se prueba el detector (3) y el 10% restante es atenuado y medido con un PNR (4).

longitud, esto se hace primeramente de manera burda tomando como referencia los agujeros de la mesa óptica. Además, los espejos MH(2,3) se montan sobre una estación de traslación controlada por un motor micrométrico, con lo cual se puede hacer un traslape más fino de las dos señales en el PBS2. A su vez, la estación de traslación puede ser controlada nanométricamente con un piezo-eléctrico, con el que es posible variar de manera controlada la fase relativa ( $\theta$ ) entre el estado y el LO.

Las señales son recombinadas espacialmente en un polarizador PBS2 y de ahí enviadas a un divisor de haz (BS) con 0.8% de reflectividad para la polarización H que corresponde al estado y 8.4% para la polarización V correspondiente al LO. La señal transmitida es empleada para monitorear el estado  $\rho$  y la reflejada para medir la estadística de clicks del detector  $P_{\rho k}$ . El estado coherente está caracterizado por dos números: fase  $\theta$  y amplitud  $|\alpha|$ . El monitoreo del estado con que se prueba el detector consiste en la medición de la amplitud del estado  $|\alpha|$  y el monitoreo de la fase durante la medición. Para el monitoreo de la fase, el estado y el LO son proyectados sobre un polarizador P1 a  $45^\circ$  para que interfieran. Con un potenciómetro (PM) coherent FieldMaxII se mide la potencia del campo, a partir de la cual se puede calcular  $|\alpha|$ . Análogamente, para la PNRHD se coloca un polarizador P2 a  $45^\circ$ , luego la señal es atenuada con un conjunto de filtros de densidad neutra (DN) y finalmente enviada a un PNR.

### 5.1.1. Alineación del interferómetro

Para que los haces interfieran se requiere que las señales del LO y el campo incidente se traslapen temporal y espacialmente en el BS2, es decir, que los campos de ambas señales se encuentren al mismo tiempo en el BS2 y que a la salida de éste los haces viajen colineales. A continuación se describen los pasos seguidos para la correcta alineación del interferómetro.

Como se mencionó anteriormente los espejos MV(1,2,3) y MH(1,2,3) fueron colocados cuidando que los caminos ópticos H y V fueran los más parecidos, sin embargo, esto no garantiza el traslape de las señales en el BS2. Primero se ajusta el traslape espacial, para esto se fija el camino óptico del LO con un par de iris y los espejos MH1 y MH3. Una vez fijado el camino óptico del LO, se deja éste fijo y se empata la señal del estado ajustando el campo cercano y el campo lejano con los espejos MV1 y MV3 respectivamente. Una vez que las señales del LO y del estado viajan colineales se optimiza el traslape temporal trasladando la estación con los espejos MH2 y MH3 con un motor micrométrico. Se observará interferencia únicamente cuando las señales estén traslapadas y la visibilidad será mejor en tanto mejor estén empatadas, de esta forma nos basamos en la visibilidad del patrón de interferencia para optimizar el traslape temporal. Dicho patrón es monitoreado colocando un fotodiodo después del polarizador P2. Con las placas de media onda HWPH y HWPV se ajustan las intensidades del estado y del LO para que éstas sean iguales, condición a la cual se tiene máxima visibilidad. Finalmente se mueve la estación de los espejos MH1 y MH3, y en un osciloscopio se observa la variación de la señal que llega al

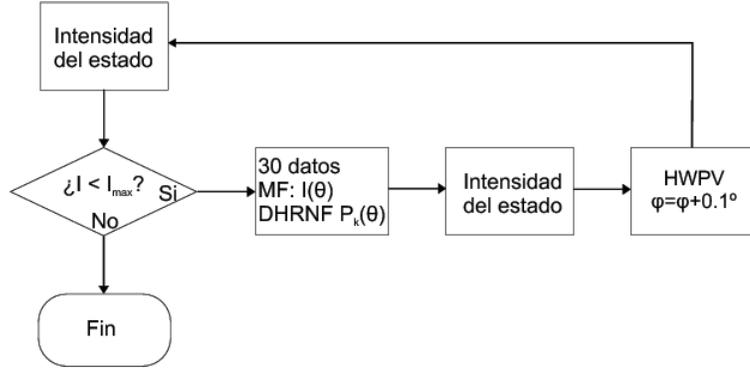


Figura 5.2: Diagrama de flujo para la adquisición de datos.

fotodiodo a medida que se perturba la fase con pequeños golpecitos a la mesa. Se desplaza la estación con el motor micrométrico hasta encontrar la máxima variación de la intensidad, que es donde se tiene la máxima visibilidad y así, el mejor traslape temporal.

## 5.2. Adquisición de los datos

Una vez que el interferómetro está alineado se está listo para realizar las mediciones. A continuación se describen los pasos seguidos para la tomografía del DHRNF

En la figura 5.2 se muestra el diagrama de flujo de la adquisición de datos. Se comienza midiendo la intensidad del estado con el PM, para lo cual se bloquea el LO con una cartulina negra controlada por un motorcito y un software en LabView<sup>®</sup>. Se desbloquea el LO y se mide la potencia con el PM y la estadística de clicks con el PNRHD como función de  $\theta$ . La fase se varía de manera controlada con un actuador piezoeléctrico un intervalo mayor a una longitud de onda. En este intervalo se toman 30 mediciones con el PM y con el PNRHD. Se vuelve a medir la intensidad del estado con el PM y por último se rota la HWPV  $\varphi = 0.1^\circ$  para pasar a un estado coherente más intenso o, en términos de fotones, un estado coherente con un número promedio de fotones  $\langle n \rangle$  más grande. Se repiten los pasos anteriores hasta que la intensidad del estado coherente alcance el valor de saturación del detector, que corresponde a la intensidad  $I_{max}$ . Este proceso de medición y almacenamiento de datos está controlado por un programa en LabView<sup>®</sup>.

### Parámetros de ejecución del programa

El proceso de medición está determinado por el tamaño de los pasos en la HWPV, el tamaño y el número de pasos al variar la fase  $\theta$  en el piezoeléctrico

y la intensidad de saturación  $I_{max}$  del detector. En la figura 5.3 se muestra la ventana del programa con que se controlaron los parámetros de la medición. La HWP1 se rota con un motor controlado por un programa en LabView<sup>®</sup> al que hay que especificarle los grados de giro entre cada paso, éstos se eligen de  $0.1^\circ$ . La placa girará hasta llegar a  $45^\circ$  donde el estado alcanza la intensidad máxima  $I_{max}$  a la cual se termina la medición y el PNR se satura. Para no quemar los APD del PNR se ajusta la intensidad de la señal colocando suficientes filtros de densidad neutra (DN) para que el número promedio de fotones cuando el estado interfiere constructivamente con el LO esté alrededor de 7 donde se alcanza la saturación del detector.

Para mapear las fases  $\theta$  entre el LO y el estado, el piezoeléctrico se mueve 30 pasos de 0.02 unidades del piezo, que corresponde a una variación en la fase un poco mayor a  $2\pi$ . En cada paso, se mide la estadística de fotones y la intensidad del campo durante un tiempo de 0.5s, que corresponde a 125000 pulsos del láser.

### 5.3. Calibración de la señal

Los instrumentos ópticos no son perfectos ya que absorben parte de la luz. Para determinar  $|\alpha|$  a partir de las mediciones con el PM hay que calcular el coeficiente de transmisión T de todos los elementos ópticos entre el PM y el PNR. Con un potenciómetro coherent FieldMaxII se mide la potencia del campo antes y después de las señales del BS2, del polarizador P1 y de los ND. T es el cociente entre la potencia de salida y la de entrada al elemento óptico. Se encuentra que los coeficientes de transmisión del BS2  $T_{BS2}$  y del P1  $T_{P1}$  dependen de la polarización de la luz por lo que se calculan los T's para cada una de las polarizaciones del estado y del LO.

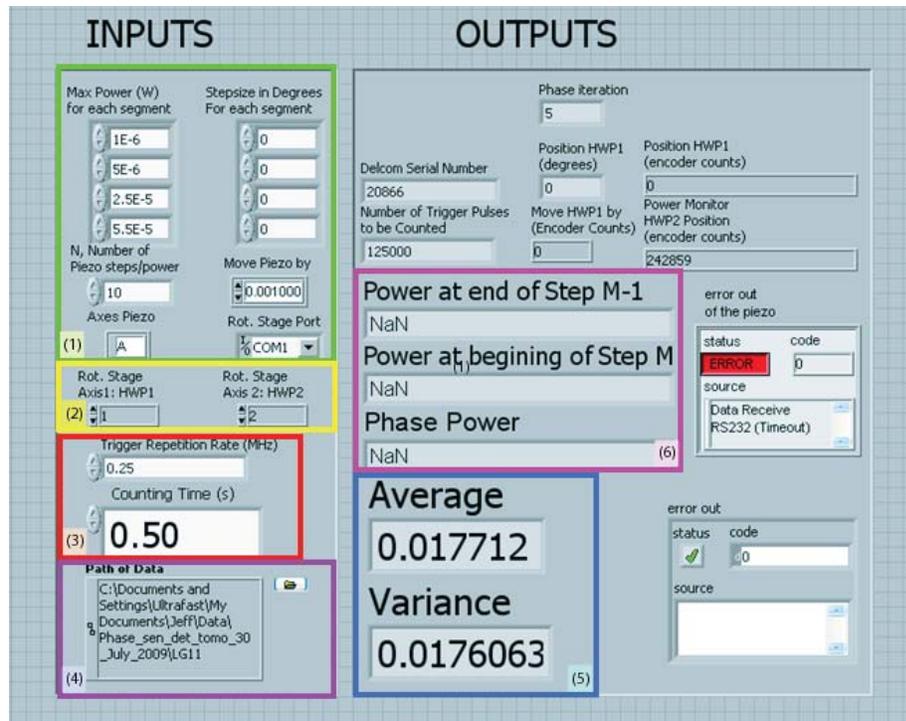


Figura 5.3: Software en LabView<sup>®</sup> empleado para monitorear y especificar las condiciones de la tomografía del detector. En (1) se asigna el tamaño de los pasos del cambio de la fase con el actuador piezoeléctrico y se indica el puerto de la PC que controla este dispositivo. En (2) le dice al programa qué placas de media onda mover. En (3) se indica la razón de repetición del láser y el tiempo de medición para cada estado. En (4) especificamos la trayectoria del archivo de salida. En (5) se tiene el promedio de los clicks del PNR y por último en (6) se tienen los resultados medidos con el PM del estado con que se prueba el detector.

## Capítulo 6

# Resultados y discusión

En este capítulo se presentan y se discuten los resultados experimentales. Primeramente se analizan las gráficas del número promedio de clicks ( $\langle \text{clicks} \rangle$ ) del PNRHD, donde se observa la sensibilidad de fase de estos detectores en la oscilación de  $\langle \text{clicks} \rangle$ . En la segunda sección se determina la base tomográfica de estados coherentes  $\{|\alpha\rangle\}$  con que se mapeó el detector a partir del monitoreo realizado con el potenciómetro (PM). Por último en la sección 3 se presenta la distribución de probabilidad de los clicks ( $P_k$ ) para cada una de las 9 salidas del detector.

### 6.1. Resultados experimentales

En la figura 6.1 se muestran los resultados experimentales, la gráfica (a) corresponde a la estadística de clicks obtenida con un LO de  $4.5 \times 10^{-6} W$  y la (b) a un LO de  $2.0 \times 10^{-6} W$ , esto se puede observar en los mínimos de ambas gráficas. La gráfica (b) alcanza clicks promedios de 0.25 en tanto que la (a) no baja de 0.96. En el eje x de estas gráficas se indica un índice que numera cada medición de acuerdo a la toma de datos expuesta en el capítulo anterior. Cada gráfica representa un detector distinto, ya que cada uno tiene una estadística de clicks distinta y por lo tanto POVM's diferentes. De aquí en adelante nos referiremos al detector correspondiente a la gráfica (a) como el detector a y detector b al de la gráfica (b).

En la gráfica (a) se selecciona un pequeño rectángulo de los resultados del detector y se amplía para ver las oscilaciones de la estadística de clicks. En el recuadro cada curva de color tiene 30 puntos que corresponden a la variación de la fase  $\theta$  del LO y cada color corresponde a una amplitud distinta  $|\alpha|$ . Las oscilaciones en las estadística de clicks son evidencia de la sensibilidad de fase del detector. La amplitud de la oscilación está determinada por el traslape de los modos del campo señal y del LO cuyas visibilidades máximas fueron de 42 % para el detector a y 63 % para el b. En estas gráficas también se observan dos mínimos de amplitud que corresponden a regiones donde la oscilación del número de clicks

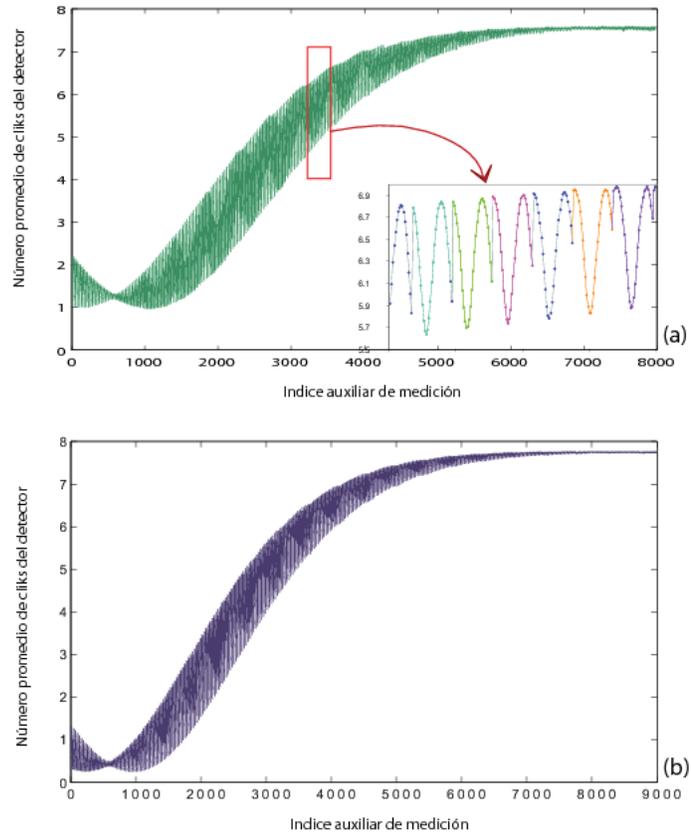


Figura 6.1: Resultados experimentales,  $\langle \text{clicks} \rangle$  contra el índice auxiliar de la medición. La gráfica (a) corresponde a un detector con un LO de  $4.5 \times 10^{-6} W$  y la (b) a un LO de  $2.0 \times 10^{-6} W$ . En la gráfica (a) se hace un acercamiento para ver las oscilaciones de la estadística de clicks, evidencia de la sensibilidad de fase del detector.

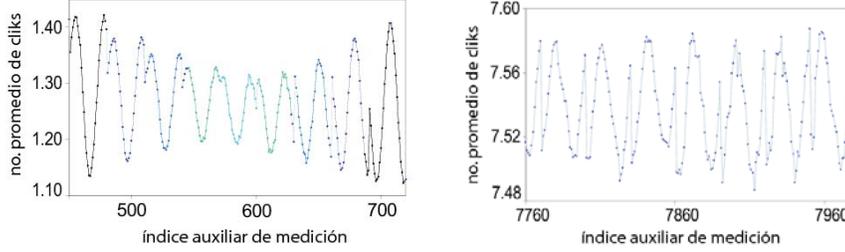


Figura 6.2: Oscilación de la estadística de clics para las secciones de mínima amplitud del detector a. La Gráfica (i) corresponde al primer mínimo y la (ii) al segundo mínimo de saturación del detector.

como función de la fase es muy pequeña, estos mínimos representan los límites de resolución del detector, es decir, el estado más tenue (el primer mínimo) y el más intenso (al final de la estadística) que puede medir cada uno de los detectores aquí presentados. Pero antes de dar conclusiones apresuradas notemos que dado que la estadística se mide con resolución de número de fotones y no hay energía detectable menor que la de un fotón, siempre que se varíe la fase del LO, se va a producir una interferencia detectable por los PNR, de lo contrario no tendrían resolución de número de fotones. Claro, conforme el número promedio de fotones de la señal a medir más se aleje del número promedio de fotones del LO, menor será la sensibilidad a la fase del detector. Ésto se puede observar en las gráficas de la figura 6.2, que son un acercamiento de los mínimos de amplitud en la oscilación de la estadística de clics del detector a. En la gráfica (ii) se observa que la curva no es suave como se había visto en los casos anteriores, figuras 6.2 (i) y 6.1 (a). Esto se debe a que los detectores se encuentran cerca de su punto de saturación, por lo que es más difícil distinguir cambios de unos pocos fotones debidos a la interferencia entre dos estados con amplitudes muy distintas.

Dado que los resultados de las siguientes secciones son análogos únicamente se presentarán las gráficas del detector a.

## 6.2. Determinación del conjunto de estados coherentes con que se mapeó el detector

El eigenvalor de los estados coherentes es complejo, de modo que para caracterizar un estado coherente  $|\alpha\rangle$  hay que determinar dos parámetros: fase  $\theta$  y amplitud  $|\alpha|$ . A continuación se describe el proceso de asignación de  $(\theta)$ , seguido del cálculo de  $|\alpha|$  para los estados coherentes con que se mapeó el detector. Tanto  $\theta$  como  $|\alpha|$  se obtienen a partir de los datos monitoreados con el PM.

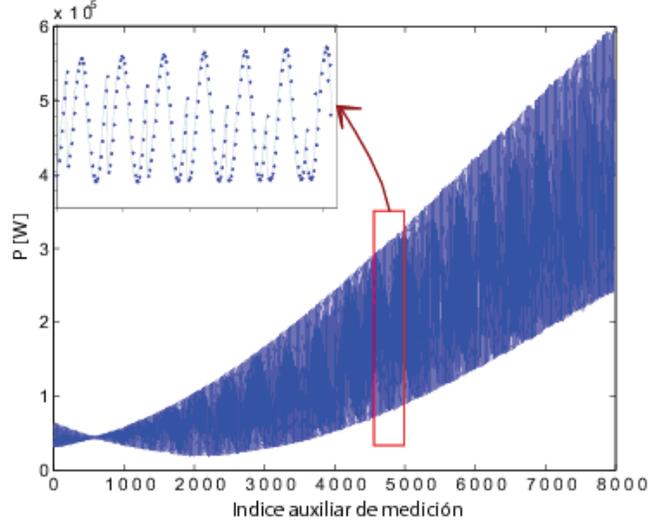


Figura 6.3: Monitoreo de la fase del estado coherente de prueba, mediante su interferencia con el LO. Datos medidos con el PM. En el eje y se tiene la potencia en watts y en el eje x el índice auxiliar de medición

### 6.2.1. Asignación de la fase

Con el PM se registró la potencia del patrón de interferencia clásico entre el campo señal y el LO como función de la posición del piezo, la cual tiene una relación directa con la fase del LO. En la figura 6.3 se muestran las potencias medidas con el PM, podemos ver que el patrón es semejante al de la estadística de clicks, en figuras 6.1 (i) y (ii), en ambos casos hay un mínimo de amplitud donde el estado alcanza el menor número promedio de fotones. A diferencia del PNR, el PM claramente no alcanza la saturación, al contrario, la amplitud de las oscilaciones van creciendo conforme aumenta la intensidad del estado.

En el recuadro ampliado de la gráfica 6.3 se muestran las oscilaciones de la intensidad como función de la posición del piezo, así, la asignación de la fase consiste en ajustar cada conjunto de 30 datos a una función sinusoidal  $f(x)$  sujeta a los cuatro coeficientes  $\{a, b, c, x_0\}$ .

$$f(x; a, b, c, x_0) = a (1 + b \cos(cx + x_0)) \quad (6.1)$$

El coeficiente  $a$  se encarga de trasladar la función ajustada en el eje de la potencia  $P$ , esto es importante porque cada conjunto de 30 datos oscila entre diferentes valores de la potencia, por lo tanto le pedimos que  $a \in [\min(P), \max(P)]$ , y lo inicializamos con  $a = \langle P \rangle$ . La amplitud de la curva ajustada está determinada por el producto  $ab$ ,  $a$  ya localiza a la gráfica dentro del intervalo de oscilación de la potencia, por lo tanto  $b \in [0, 1]$ . El coeficiente  $c$  nos dice qué tan rápido

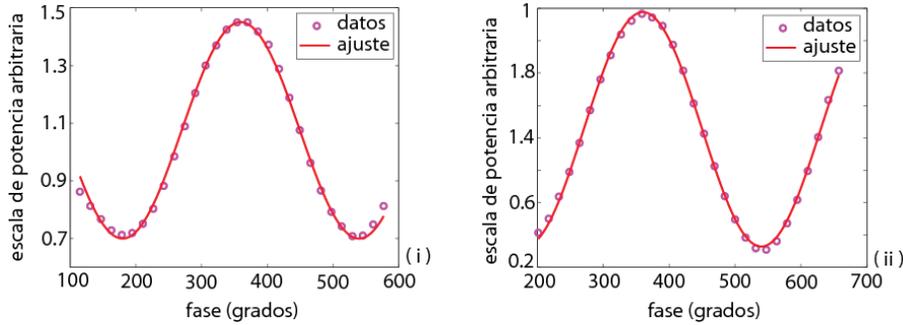


Figura 6.4: Gráficas de dos conjuntos de 30 puntos que muestran la variación de la potencia como función de la fase. Con bolitas moradas se representan los datos experimentales y con la curva roja se representa la correspondiente función sinusoidal ajustada.

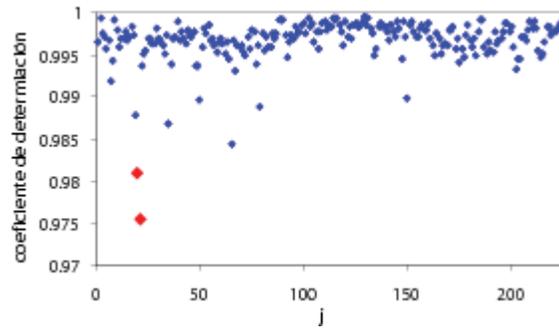


Figura 6.5: Gráfica del coeficiente de determinación de los ajustes, contra el índice auxiliar del ajuste.

avanza la fase, es una especie de frecuencia angular, entonces no puede ser negativa  $c \in [0, \infty]$  y la inicializamos  $c = 14$ . Por último,  $x_0$  traslada al ajuste en el eje de las fases  $x_0 \in [0, 2\pi]$  y lo inicializamos con  $x = \pi/2$ .

La fase del estado está dada por el argumento  $(cx + x_0)$  módulo  $2\pi$ . En la figura 6.4 se muestran dos gráficas al azar de los puntos experimentales indicados con las bolitas, ajustados por sus correspondientes funciones sinusoidales, representadas por la curva. En el eje  $x$  se indica la fase en grados y en el  $y$  se muestra una intensidad arbitraria pues en el ajuste fue normalizada.

Para saber si todos los ajustes son tan buenos como los que se observan en la figura 6.4, cuantificamos su calidad calculando el coeficiente de determinación  $r^2$ . En la figura 6.5 se grafica el coeficiente de determinación como función del conjunto ajustado, denotado por el índice  $j$ . Se puede observar que en general las curvas se ajustan bien a los puntos experimentales, ya que todos los ajustes tienen un  $r^2$  mayor a 0.975.

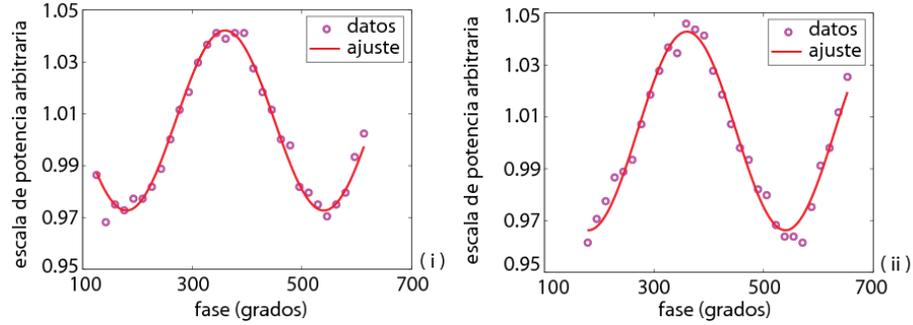


Figura 6.6: Gráficas de los dos conjuntos de puntos con los peores ajustes

En la figura 6.5 se observan señalados 2 puntos rojos que se alejan más del resto, lo cual indica que éstos tienen los peores ajustes. Para visualizar lo que ocurre con estos conjuntos de puntos que no tuvieron un ajuste tan bueno como los otros, graficamos los puntos experimentales en la figura 6.6, donde se observa que los puntos experimentales no describen una curva suave, lo cual se puede deber a fluctuaciones del láser por el encendido del aire acondicionado del laboratorio.

Los puntos experimentales que se muestran en las gráficas anteriores se obtuvieron, cada uno, de promediar 250,000 mediciones. En la figura 6.7 se muestra la variancia del número medio de click como función del índice auxiliar en la medición. En esta gráfica se observa cómo la variancia presenta un comienzo similar al de la gráfica de la figura 6.1, la amplitud de la oscilación decrece hasta llegar a un mínimo y vuelve a crecer. Esto es de esperarse ya que como se vio en la sección 2.2.2, la variancia de los estados coherentes es igual al número medio de fotones del estado. En esta gráfica también se observa que conforme se avanza en la medición la variancia decrece, lo cual indica la saturación del detector, puesto que éste puede detectar 8 fotones como máximo. En la figura 6.7 (ii) se muestra la variancia del número medio de clicks como función del número medio de clicks.

### 6.2.2. Cálculo del número promedio de fotones

Ahora que le hemos asignado una fase a cada uno de los estados coherentes con los que fue probado el detector sólo falta determinar la magnitud del estado  $|\alpha|$  para que estén completamente caracterizados. Para esto hay que calcular el número promedio de fotones que llegan al PM, y el coeficiente de transmisión de cada uno de los elementos ópticos y con esto calcular el número promedio de fotones que llegan al PNR.

Queremos saber cuántos fotones llegan en promedio al PNR, es decir  $\langle n \rangle$ . El PNR mide clicks 250000 veces por segundo (la razón de repetición del láser), en tanto que el PM mide potencia  $P$  en Watts, es decir, la energía en Joules en un

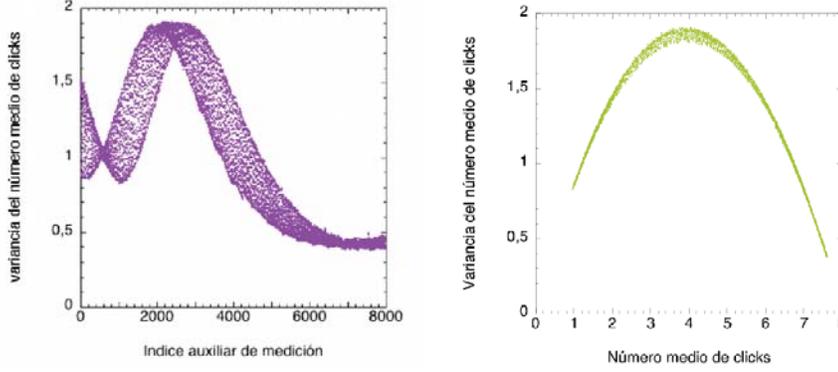


Figura 6.7: (i) Variancia del número medio de clics contra el índice auxiliar en la medición. (ii) Variancia del número medio de clics contra el número medio de clics.

segundo. Entonces la energía en un segundo, entre el número de veces que mide el PNR en un segundo, nos da la energía que llega al PNR en cada medición y ésta última entre la energía de un fotón nos dice cuántos fotones llegan al detector. Sin tanto trabalenguas, la energía de un fotón es  $\epsilon = h\nu$ , la energía en una medición es  $E = P/250KHz$  por lo tanto  $\langle n \rangle = E/\epsilon$ . Dado que en el experimento se midió la potencia al principio  $P_i$  y al final  $P_f$  de la medición, entonces  $P = (P_i + P_f)/2$ .

Las ecuaciones anteriores no han tomado en cuenta las pérdidas de intensidad debidas a los elementos ópticos, a continuación se presentan los resultados de las calibraciones de los dispositivos ópticos y con esto la energía que llega al PNR en cada medición.

En la tabla 6.1 se muestran los coeficientes de transmisión  $T$  medidos para cada instrumento óptico.  $T_1$  es el coeficiente de transmisión del polarizador P1 junto con la parte transmitida del PBS2,  $T_2$  es el coeficiente de transmisión para el haz reflejado por el PBS2 y finalmente  $T_3$  es el coeficiente de los 3 filtros de densidad neutra ND. Dado que  $|\alpha\rangle$  y el LO tienen diferentes polarizaciones  $T_1$  y  $T_2$  son distintos para cada una de estas polarizaciones.

$T$	$ \alpha\rangle$	LO
$T_1(P1 * BST)$	0.48	0.17
$T_2(BSR)$	0.0839	0.007622
$T_3(ND)$	0.0000023	0.0000023

Cuadro 6.1: Calibraciones

Ahora que se tienen los coeficientes de transmisión podemos calcular la po-

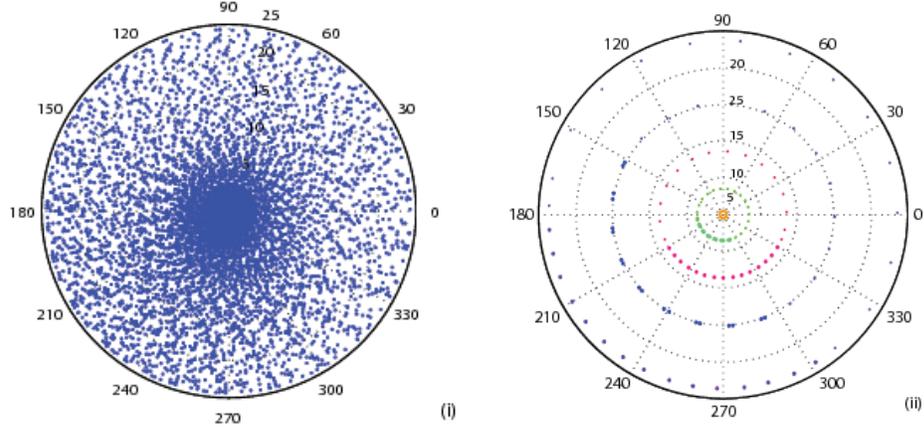


Figura 6.8: Gráficas de la distribución de estados coherentes con que fue probado el detector. (i) Se muestran todos los estados coherentes con los que fue probado el detector. (ii) Se grafican los estados coherentes de 5 intensidades diferentes para apreciar mejor la distribución de fases.

tencia que llega al PNR

$$P_{PNR} = \frac{T_2 T_3}{T_1} P_{PM}. \quad (6.2)$$

Se calcula la  $P_{PNR}$  para todos los estados  $|\alpha\rangle$  con que se probó el detector. En la figura 6.8 (i) se muestra los estados coherentes con los que fue mapeado el detector en una gráfica de fasores, la distancia al origen representa la magnitud del estado, en este caso el número promedio de fotones del estado coherente, y en ángulo la fase relativa al LO. En la figura 6.8 (ii) se muestran 5 estados coherentes donde se pueden apreciar mejor los 30 puntos de cada conjunto.

La región de puntos grandes en la gráfica 6.8 (b) indica el exceso de fases que se midieron con el LO para asegurar barrer todas las fases. El estado más intenso con que se probó el detector tiene  $\langle n \rangle = 24.18$  fotones y el más tenue  $\langle n \rangle = 0.22$

### 6.3. Estadística de clicks

En la sección anterior determinamos la base de estados coherentes con que se mapeó el detector, de modo que estamos en posición de representar las distribuciones de probabilidad de cada una de las salidas del detector: de 0-clicks a 8-clicks. En las figuras 6.9, 6.10 y 6.11 se muestran las gráficas de las densidades de probabilidad de cada uno de los resultados del detector en el espacio de las cuadraturas del campo  $X_1$  y  $X_2$ . A la izquierda se muestran las  $P_k$  en una gráfica tridimensional en el espacio fase de los estados coherentes. A la derecha se muestra esta misma gráfica pero vista desde arriba. De acuerdo con la ecuación

(2.40) la distancia al origen representa el número promedio de fotones  $|\alpha|$  y el ángulo azimutal la fase de los estados coherentes  $\theta = \arg(\alpha)$  respecto a la fase del LO. En el eje  $z$  se indica la probabilidad  $P_k$  de detección de cada uno de los clicks  $k = 0, 1, \dots, 8..$  Estas gráficas representan la función  $Q$  de cada uno de los POVM,  $P_k = \text{Tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha| \Pi_k)$ . Sin embargo las pequeñas fluctuaciones puede resultar en POVM's físicamente inaceptables. Para dar por concluida la tomografía de estos detectores habría que usar técnicas de optimización convexa para obtener los POVM, sujetos las condiciones de completéz y semipositividad.

En las gráficas de las estadísticas de clicks se observa que conforme aumenta  $|\alpha|$  aumenta la probabilidad de detectar clicks mayores como es de esperarse. También se aprecia que las distribuciones de probabilidad de los  $k$ -clicks no están centradas en el origen, esto se debe a la sensibilidad de fase del detector.

Es importante señalar que una vez caracterizado el detector no es necesario el PM, esto nos permitirá emplear este detector para medir cualquier clase de estados cuánticos, sin necesidad de que sean reconocidos por el PM.

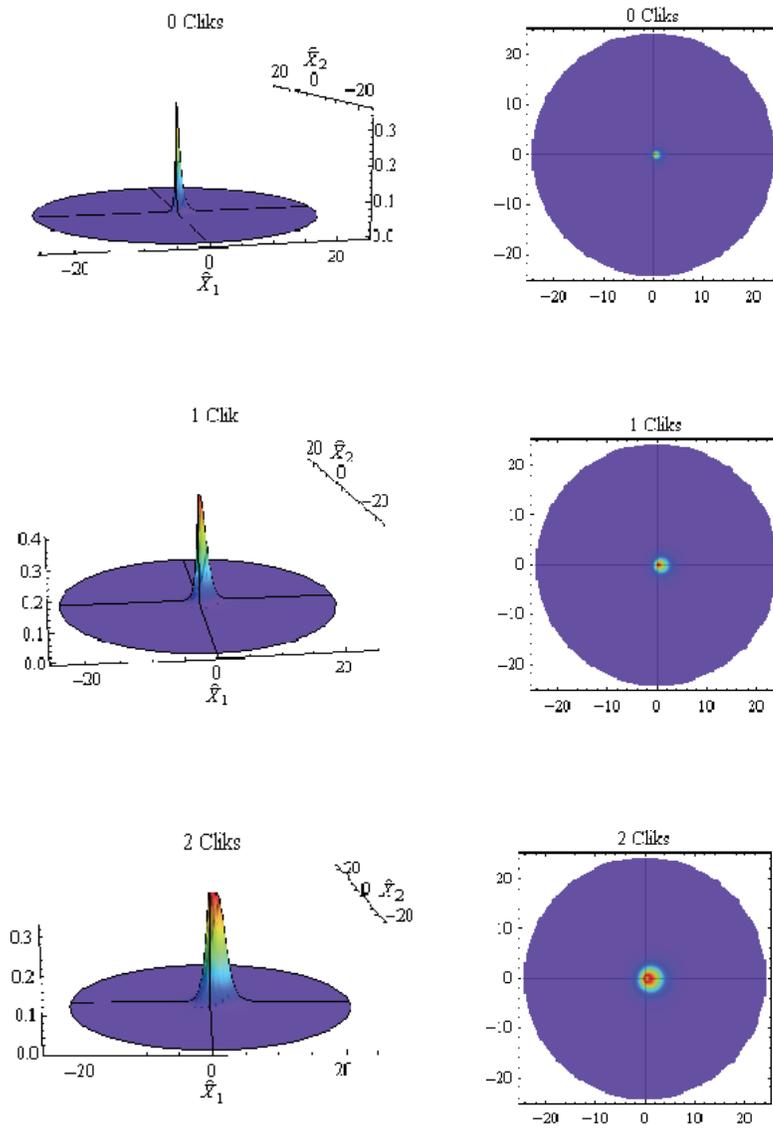


Figura 6.9: Gráficas en el espacio de las cuadraturas del campo de las densidades de probabilidad de los resultados 0 clicks, 1 click y 2 clicks. A la izquierda se muestra la densidad de probabilidad en una gráfica tridimensional, y a la derecha se muestra la distribución de probabilidad vista desde arriba en una gráfica de contornos de la densidad.

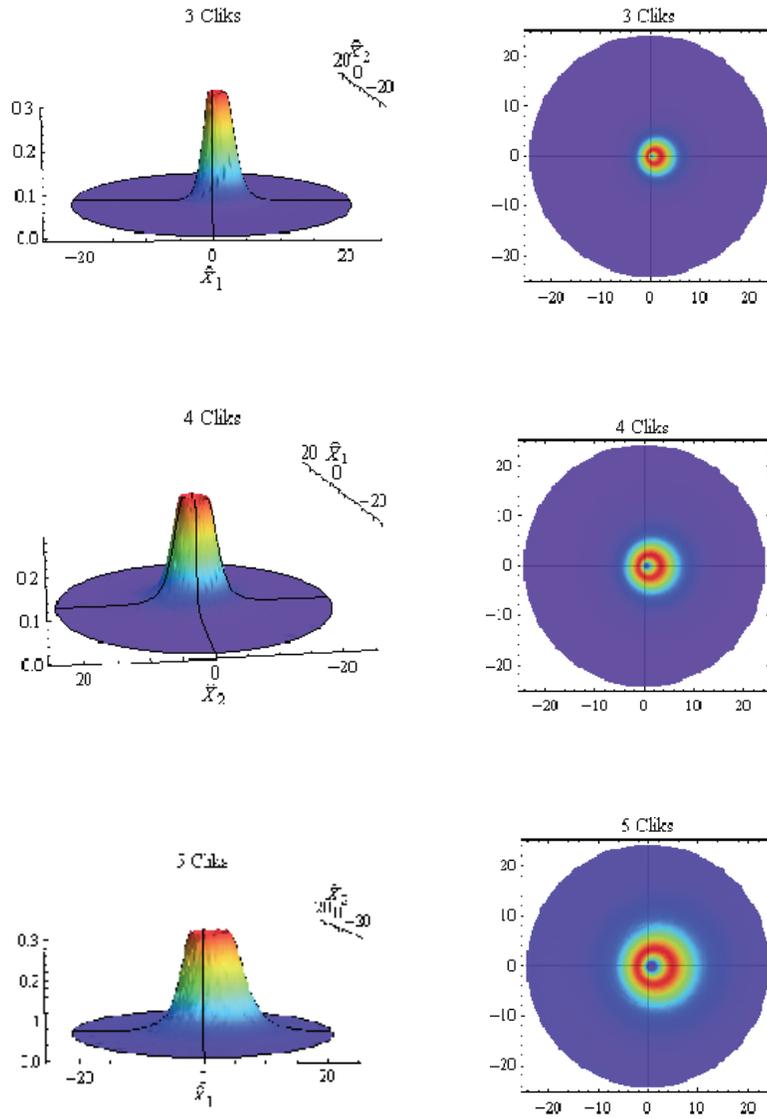


Figura 6.10: Gráficas en el espacio de las cuadraturas del campo de las densidades de probabilidad de los resultados 3 clicks, 4 clicks y 5 clicks. A la izquierda se muestra la densidad de probabilidad en una gráfica tridimensional, y a la derecha se muestra la distribución de probabilidad vista desde arriba en una gráfica de contornos de la densidad.

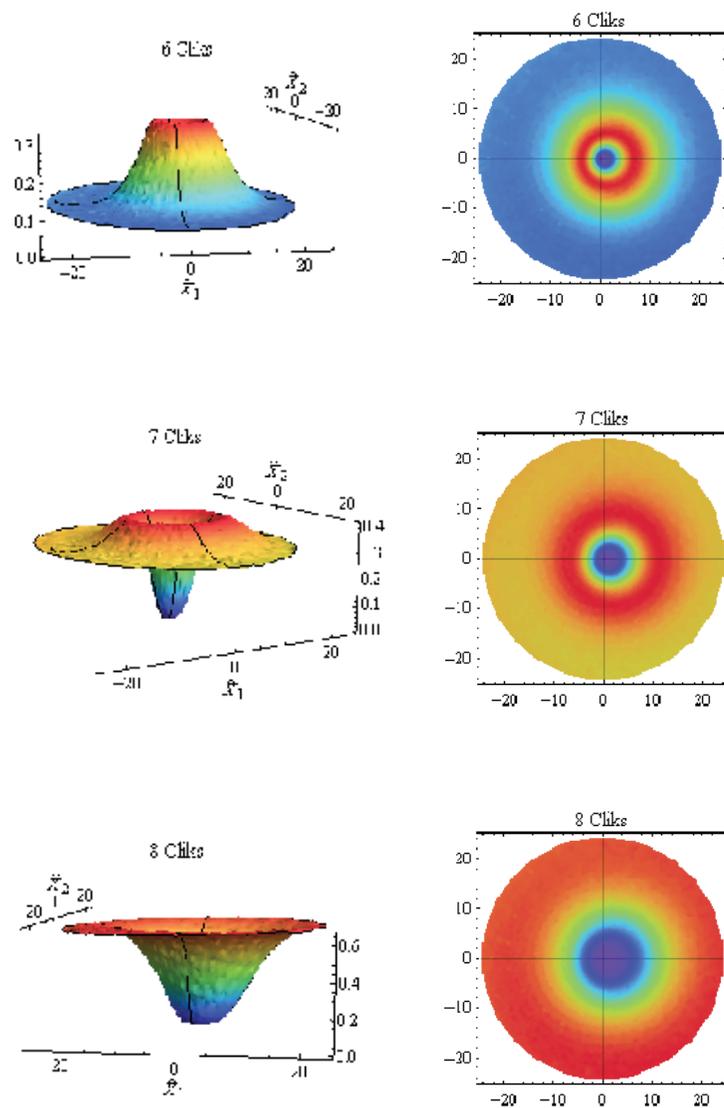


Figura 6.11: Gráficas en el espacio de las cuadraturas del campo de las densidades probabilidad de los resultados 6 clicks, 7 clicks y 8 clicks. A la izquierda se muestra la densidad de probabilidad en una gráfica tridimensional, y a la derecha se muestra la distribución de probabilidad vista desde arriba en una gráfica de contornos de la densidad.

## Capítulo 7

# Conclusiones

Las interesantes propiedades de los sistemas cuánticos han dado pie a una nueva generación de tecnologías de la información. Estas tecnologías cuánticas asumen por un lado la correcta caracterización del proceso de medición cuántico y, por otro, detectores cada vez son más sofisticados. Esto sugiere el modelo de una caja negra como el más adecuado para caracterizar los operadores que representan una medición y es aquí donde surge la necesidad de una técnica que nos permita determinar el operador cuántico que mejor describa la medición de un instrumento en el laboratorio sin hacer suposiciones previas del detector; esta es la propuesta de la tomografía de detector [26].

En este trabajo se vio que la medición más general en mecánica cuántica no está descrita por el postulado de Von Newman como se suele mencionar en la interpretación estándar de la mecánica cuántica, sino por un conjunto de operadores positivos semidefinidos POVM [20], los cuales contienen a los operadores proyectivos y satisfacen las mismas condiciones excepto la ortogonalidad.

La tomografía de detector consiste en determinar los POVM's que describen la medición que realiza un dispositivo sobre un estado conocido. Para ello se mide la probabilidad de cada uno de los posibles resultados del detector en cada uno de los estados de la base tomográfica elegida. Empleando técnicas de optimización convexa se obtienen los POVM's que determinan la estadística de las salidas del detector. La tomografía de detector permite el uso de detectores no lineales, con pérdidas, ruidosos u operando fuera del rango estipulado siempre que se hayan determinado los POVM [26].

Esta técnica ha sido empleada exitosamente en la caracterización de fotodetectores diodo de avalancha y detectores con resolución de número de fotones [18]. Ni uno de los anteriores es sensible a la fase del campo electromagnético.

En este trabajo se realizó la parte experimental de la tomografía de dos detectores homodinos con resolución de número de fotones, uno con un LO de  $4.5 \times 10^{-6}W$  y otro con  $2.0 \times 10^{-6}W$ . Los detectores fueron probados con la base tomográfica de estados coherentes  $|\alpha\rangle$ , la cual fue producida variando la intensidad del haz de un láser para la amplitud  $|\alpha|$  y el camino óptico para la fase  $arg(\alpha)$ . Se obtuvo la distribución de probabilidad de cada una de las salidas

del detector en el espacio de cuadraturas, donde se observó la dependencia en la fase de la distribución de probabilidad, lo que es evidencia de la sensibilidad de fase del detector. El detector presentado es este trabajo en una aplicación más de los detectores con resolución de número de fotones por la técnica de separación temporal de modos. Con esto se une la brecha entre las técnicas de detección homodina tenue, en las que normalmente se miden intensidades, y las de detección de número de fotones, los cuales no tienen una fase bien definida por sí solos.

Queda como trabajo a futuro determinar los POVM del detector, empleando métodos de optimización convexa para invertir las distribuciones de probabilidad de las salidas del detector, sujetas a las condiciones de completitud y semi-positividad de los POVM con lo que concluiría la tomografía de los detectores [29].

Con este trabajo se extiende la reciente propuesta de la tomografía de detectores cuánticos [18] a una nueva generación de detectores con sensibilidad de fase y resolución de número de fotones. Ello abre una línea para el estudio de los sistemas fotónicos, permitiendo hacer preguntas más precisas sobre la preparación de estados.

La tomografía de detector completa la triada experimental de tomografía; de estado, de proceso y de detector, que caracterizan un problema cuántico en el laboratorio [24]. Es importante resaltar la sencillez del experimento sin menospreciar la importancia que éste tiene dentro de la teoría de la medición en mecánica cuántica. La mayor sutileza del experimento está en el PNR, el cual se puede fabricar a partir de fibra óptica y acopladores 50/50 [27]. Sin embargo la técnica de tomografía de detector no se limita a detectores con resolución de número de fotones. En principio, la tomografía de detector puede ser aplicada a cualquier detector que se quiera describir dentro de la teoría cuántica. En particular se podría emplear para la caracterización de un detector de fotones en la base de polarización, construido con PBS's, placas de media y un cuarto de onda y APD's convencionales como los que se tienen en el laboratorio de óptica cuántica de la facultad de ciencias (LOCFC). Tomando como salidas del detector las diferentes coincidencias según el estado de entrada, como se suele hacer en los experimentos con APD's en las prácticas del laboratorio de óptica cuántica del LOCFC.

# Bibliografía

- [1] M. Born and E. Wolf *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7th edition, 1997
- [2] Hans-A. Bachor and Timothy C. Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Wiley-VCH, 2003.
- [3] R.J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Physical Review Letters* 130(2529) 1963.
- [4] H. J. Kimble, M Dagenais, L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Physical Review Letters* 130(2529) 1963.
- [5] Luiz Davidovich, *Notas do Curso de óptica Quántica*.
- [6] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc and Gilbert Grynberg. *Introduction to Quantum Electrodynamics* JOHN WILEY & SONS, INC., 1993.
- [7] Pavel Sekatski, Nicolas Brunner, Cyril Branciard, Nicolas Gisin, and Christoph Simon. Towards Quantum Experiments with Human Eyes as Detectors Based on Cloning via Stimulated Emission. *Physical Review Letters*, 103 (113601) September 2009.
- [8] Christopher Gerry and Peter Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [9] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1995.
- [10] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [11] J.H. Shapiro, H.P. Yuen, J.A. Machado-Mata, Optical Communication with Two-Photon Coherent States - Part II: Photoemissive Detection and Structured Receiver Performance. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, IT-25, NO. 2. Marzo 1979.
- [12] H.P. Yuen, J.H. Shapiro, Optical Communication with Two-Photon Coherent States- Part III: Quantum Measurements Realizable with Photoemissive Detectors. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, IT-26, NO. 1. Enero 1980.

- [13] L. Mandel. Squeezed States and Sub-Poissonian Photon Statistics. *Physical Review Letters*, 49 (136) 1982.
- [14] A. Cives-Escop, A. Luis, L. L. Sánchez Soto. Unbalanced homodyne detection with a weak local oscillator. *Optics Communications* 175(153) Febrero 2000.
- [15] Alessandro Ferraro, Stefano Olivares, Matteo G. A. Paris. *Gaussian states in continuous variable quantum information*. ISBN 88-7088-483-X (Bilibio-polis, Napoli, 2005).
- [16] T. Opatrný and D.-G. Welsch. Density-matrix reconstruction by unbalanced homodyning, *Physical Review A* 55 (1462) 1997.
- [17] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Physical Review* 47 (777) 1935.
- [18] J. S. Lundeen, A. Feito, H. Coldenstrodt-Ronge, K. L. Pregnell, Ch. Silberhorn, T. C. Ralph, J. Eisert, M. B. Plenio and I. A. Walmsley. Tomography of quantum detectors. *Nature Physics* (5)10.1038, Enero (2009).
- [19] Claude Cohen-Tanoudji, Bernard Diu and Franck Laloë. *Quantum Mechanics, vol I*. John Wiley & Sons, 1997.
- [20] A. Luis, and L. L. Sanchez-Soto. Complete Characterization of Arbitrary Quantum Measurement Processes. *Physical Review Letters*, 83(3573) Noviembre 1999.
- [21] David McMahon. *Quantum Computing Explained*. Wiley - Interscience, 2007.
- [22] Nielsen Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*.
- [23] A. I. Lvovsky, M.G. Raymer. *Continuous-variable Optical State Tomography*. arXiv:quant-ph/0511044v2 3 Mar 2008.
- [24] Markus Aspelmeyer. Quantum Tomography, Measured Measurement. *News & Views* January, 2009.
- [25] J. B. Altepeter, D. F. V. James and P. g. Kwiat. *Quantum State Tomography*.
- [26] A. Feito, J. S. Lundeen, H. Coldenstrodt-Ronge, J. Eisert, M. B. Plenio, and I. A. Walmsley. *Measuring Measurement: Theory and Practice*. arXiv:0906.3440v1 [quant-ph] 18 Junio 2009.
- [27] Daryl Achilles, Christine Silberhorn, Cezary Śliwa, Konrad Banaszek, and Ian A. Walmsley. Fiber-assisted detection with photon number resolution. *Optics Letters* 28(232387), Diciembre 2003.

- [28] Hendrik Coldenstrodt-Ronge. *Photon Number Resolved Characterisation of Quantum States*, Diploma Thesis. Integrated Quantum Optics Group. Max Planck Junior Research Group at the Max Planck Research Group, Institute of Optics, Information and Photonics. University Erlangen-Nuremberg, March 2006.
- [29] Graciana Puentes, Jeff S. Lundeen, Matthijs P. A. Branderhorst, Hendrik B. Coldenstrodt-Ronge, Brian J. Smith, and Ian A. Walmsley. Bridging Particle and Wave Sensitivity in a Configurable Detector of Positive Operator-Valued Measures. *Physical Review Letters*, 102(080404), Febrero 2009.
- [30] Daryl Achilles, Christine Silberhorn, Cezary Sliwa, Konrad Banaszek, and Ian A. Walmsley. Photon number resolving detection using time-multiplexing. *arXiv:quant-ph/0310183v1*
- [31] Christine Silberhorn. Detecting quantum light. *Contemporary Physics*. Vol. 48, No. 3, June 2007.
- [32] Andrew P. Worsley. *Measurement of the joint statistics of a single photon source generating pure quantum states*. M.Phys. Project Report, 2008.

## Apéndice A

# Detector con Resolución de Número de Fotones

Existen varios métodos para construir detectores con resolución de número de fotones, entre los cuales destacan los dispositivos criogénicos. Sin embargo la mayoría de éstos tienen eficiencias cuánticas por debajo del fotodiodo de avalancha (APD), excepto por el fotocontador de luz visible (VLPC) que tiene una eficiencia cuántica de 90 % [30].

Desafortunadamente los APD no tienen la habilidad de distinguir entre estados con diferente número de fotones. Una alternativa consiste en emplear la técnica de separación temporal de modos (TMD) y emplear detectores binarios APD para la detección [31]. En este capítulo se explica brevemente el funcionamiento de un APD seguido de su empleo para la detección con resolución de número de fotones por la técnica de TMD.

La mayor parte de la teoría del esquema de detección por la separación de modos ha sido desarrollada en el Clarendon Laboratory de la Universidad de Oxford, a cargo del Dr. Ian Walmsley.

### A.1. Fotodiodo de Avalancha

El fotodiodo de avalancha (APD) es el detector de fotones individuales más usado por su alta eficiencia cuántica (de 50 % a 60 %) y bajo índice de cuentas negras<sup>1</sup>.

El diodo está construido por dos semiconductores tipo n y p, cuyo ancho de banda determina la longitud de onda detectable. Cuando un fotón incide sobre el fotodiodo se crea un par electrón-agujero y un voltaje grande causa la generación de pares secundarios. Para la detección de fotones individuales se tiene que operar el APD en el modo Geiger, donde el voltaje de operación está ligeramente encima del voltaje de ruptura. Dado que el voltaje de avalancha

---

<sup>1</sup>Cuando se mide una señal (un click), en ausencia de fotones.

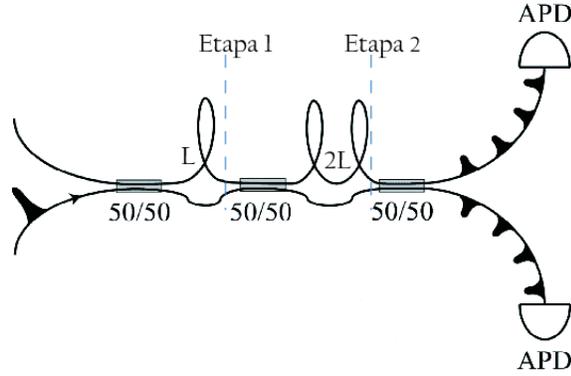


Figura A.1: Esquema de un TMD. Un pulso de entrada es separado en 8 modos. En la primera fase se tiene un retraso de  $L$ , en tanto que en la segunda fase el retraso es del doble.

es independiente del número de fotones que llegan al detector, los APD's no sirven para resolver el número de fotones. Para lidiar con este problema se emplea la técnica de separación de modos, la cual consiste en dividir un pulso incidente en un número de modos mayor al número promedio de fotones del pulso original, el propósito es tener menos de 1 fotón en promedio en cada modo para así detectarlos de manera individual con un APD. Los modos pueden ser separados espacialmente y ser detectados por tantos APD's como modos separados, o pueden ser separados en el dominio del tiempo por un solo APD. A continuación se describe en qué consiste la técnica de detección de modos temporalmente espaciados, que fue la empleada en este trabajo.

## A.2. Detección de modos temporalmente espaciados

En la figura A.1 se muestra un esquema de la separación de los modos mediante la asistencia de acopladores de fibra 50/50 y fibra óptica de distintas longitudes. En el primer acoplador 50/50 el pulso de entrada es dividido en dos pulsos que son conducidos a dos fibras con distintas longitudes, con lo que uno de los pulsos es retrasado respecto al otro. Cada uno de estos pulsos es dividido nuevamente en un segundo acoplador 50/50. Iterando este procedimiento con retrasos del doble de longitud se puede separar un pulso en 8 pulsos y éstos ser medidos por dos APD's .

En la tabla A.1 se enlistan los posibles retrasos de los modos según los caminos: largos o cortos en cada una de las etapas mostradas en la figura A.1 [32]. El tiempo  $t$  está determinado por el tiempo muerto de los APD's y el efecto

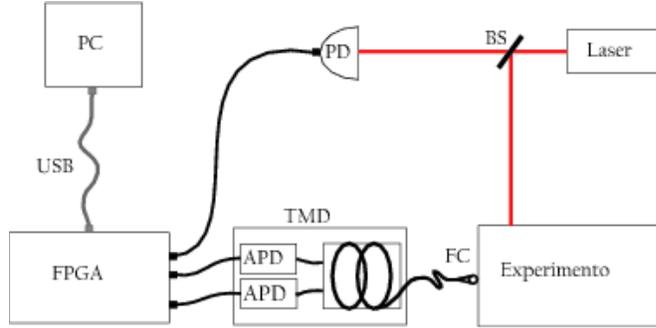


Figura A.2: Diagrama experimental para la adquisición de datos con un TMD. Con un BS se separa el haz de un láser. Una parte empleada en un experimento y mediante una fibra óptica (FC) enviada a un TMD. La otra parte del haz es monitoreada por un fotodiodo (PD) y junto con un circuito FPGA es empleada para triguerear los modos temporalmente espaciados del TMD.

de pulsos posteriores <sup>2</sup>.

Etapa 1	Etapa 2	Tiempo
Corto	Corto	0
Largo	Corto	$t$
Corto	Largo	$2t$
Largo	Largo	$3t$

Cuadro A.1: Retraso temporal de los modos como resultado del camino tomado en cada etapa.

### A.3. Detalles experimentales

El tiempo muerto de los APD's es de  $60ns$  y la probabilidad del efecto de pulsos posteriores disminuye con el tiempo. Se eligió una longitud  $L$  para que  $t \sim 100ns$ , de forma que la separación máxima entre el primer y último modo de un pulso detectado por un APD es de  $0.4\mu s$ . El láser empleado tiene una frecuencia de repetición de  $250kHz$ , entonces, entre cada pulso hay  $4\mu s$ , y por lo tanto los modos de un pulso no se traslapan con los modos del pulso anterior.

Para reducir las cuentas negras, las cuentas debidas a la luz de fondo y el efecto de pulsado posterior, se selecciona una ventana de tiempo para contar los clicks del APD, durante la cual se espera medir los pulsos.

En la figura A.2 se muestra el arreglo experimental para la detección con un TMD. Con un BS se separa el haz de un láser, una parte es enviada a un

<sup>2</sup>El efecto de pulsos posteriores ocurre cuando se genera una segunda avalancha, que no corresponde a ningún fotón y que resulta en un click.

experimento en el cual se mide la estadística de fotones con un TMD y la otra será empleada para disparar el conteo de fotones. Esta última es monitoreada con un fotodiodo (PD) con el que se genera una señal que dispara un Arreglo de Compuerta Programable del Campo (FPGA), programado para que junto con los tiempos del TMD calcule cuando se esperan los fotones. Con este arreglo se mide la señal de salida de los APD's a través de cuatro ventanas de 4ns, de modo que todo pulso que ocurra fuera de dichas ventanas de tiempo no será contado.

Los datos fueron tomados usando un circuito electrónico FPGA Altera Cyclone en comunicación con software Labview 8.0 en una PC.