



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

ONDAS SUPERFICIALES EN LÍQUIDOS  
CONDUCTORES BAJO CAMPOS MAGNÉTICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
ENERGÍA - SISTEMAS ENERGÉTICOS

P R E S E N T A:

GERARDO ALCALÁ PEREA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Jurado asignado:**

Presidente: Dr. Eduardo Ramos Mora.

Secretario: Dr. Sergio Cuevas García.

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Federico Vázquez Hurtado.

1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Jesús Antonio del Río Portilla

2<sup>o</sup> Suplente: Dr. Raúl Alejandro Ávalos Zúñiga.

Lugar donde se realizó la tesis:

Centro de Investigación en Energía de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM.)

Tutor de tesis:

---

**Dr. Sergio Cuevas García.**

A mis padres:  
Reyna Gerarda Perea Carmona y  
Guillermo Alcalá Esqueda

Lo esencial es invisible para los ojos

*El zorro*

La prueba que confirma que el principito existió es que era encantador, que reía y que quería un cordero. Querer un cordero es prueba de su existencia

*El piloto*

Conozco un planeta en el que vive un señor muy colorado. Nunca ha oído una flor. Nunca ha contemplado una estrella. Nunca ha amado a nadie. Nunca ha hecho otra cosa que sumar. Se pasa el día diciendo, como tú: “¡Soy un hombre serio! ¡Soy un hombre serio!”, lo que le hace hincharse de orgullo. Pero eso no es un hombre, ¡es un hongo!

*El principito*



## Agradecimientos

Para empezar agradezco a mi abuela **Rosa María Esqueda de Alcalá** con la que viví gran parte de mi licenciatura, y a donde siempre paso en mis viajes por Puebla. Siempre he recibido su cariño, apoyo y disposición para cualquier cosa que he necesitado. Agradezco especialmente al **Dr. Sergio Cuevas García** quien es mi asesor de tesis, quien ha dedicado largas horas apoyándome para que esta tesis estuviera lista. A todo el departamento de MHD del CIE, de quienes he aprendido mucho, y siempre he recibido su apoyo (hasta la fecha); son el **Dr. Eduardo Ramos Mora**, y mis compañeros de posgrado José, Michel, Alberto y Saúl. Agradezco también al **Dr. Jorge Andaverde** quien siempre tiene tiempo para los estudiantes, no olvido a mis compañeros de generación, ni a todos mis amigos que han estado cerca o lejos de mi. Agradezco al **CONACYT** por brindarme el financiamiento para realizar mis estudios de maestría, así como el apoyo obtenido a través del Proyecto 59977 (Flujos magnetohidrodinámicos en campos magnéticos inhomogéneos). Finalmente agradezco en general a la **UNAM** de la cual estoy orgulloso de pertenecer, y al **CIE** , un lugar en donde he podido dedicarme íntegramente a estudiar.

# Índice General

Resumen	3
<b>1 Antecedentes</b>	<b>5</b>
<b>2 Ecuaciones de la MHD</b>	<b>11</b>
2.1 Ecuaciones de la dinámica de fluidos . . . . .	11
2.1.1 Conservación de masa . . . . .	12
2.1.2 Balance de momentum . . . . .	13
2.2 Ecuaciones del electromagnetismo . . . . .	14
2.2.1 Ecuaciones de Maxwell . . . . .	14
2.2.2 La fuerza de Lorentz y la ley de Ohm . . . . .	16
2.2.3 Aproximación MHD . . . . .	16
2.3 Ecuaciones de la MHD . . . . .	17
2.4 Aproximación MHD para bajos números de Reynolds magnético . . . . .	19
<b>3 Amortiguamiento Magnético</b>	<b>21</b>
3.1 Aspectos generales de la fuerza de Lorentz . . . . .	21
3.2 Amortiguamiento magnético . . . . .	22
3.3 La conservación de carga y las ecuaciones de movimiento . . . . .	24
3.4 Amortiguamiento magnético en dos y tres dimensiones . . . . .	25
<b>4 Amortiguamiento de ondas de gravedad mediante campos magnéticos</b>	<b>29</b>
4.1 Amortiguamiento con campo magnético vertical . . . . .	29
4.2 Amortiguamiento con un campo magnético horizontal . . . . .	32
4.3 Amortiguamiento con campo magnético inclinado . . . . .	37
4.4 Resultados Analíticos . . . . .	43
4.5 Simulaciones Numéricas . . . . .	48
<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice</b>	<b>61</b>
<b>A Front Tracking</b>	<b>61</b>
A.1 Desarrollo numérico . . . . .	61
A.2 Advección de las propiedades materiales . . . . .	64

Bibliografía

70

---

# Resumen

---

En este trabajo se estudia el frenado de ondas de gravedad en fluidos eléctricamente conductores, por ejemplo, un metal líquido, debido a la acción de campos magnéticos externos. Primeramente, en el Capítulo 1 se expone la motivación de este estudio, que se encuentra fundamentalmente en que el amortiguamiento de metales líquidos, y en particular de flujos con superficie libre, tiene actualmente aplicaciones en la industria en beneficio de la calidad de los materiales procesados y del ahorro energético. En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones que describen el flujo de fluidos conductores bajo campos magnéticos, conocidos como las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. En el capítulo 3 se presentan los principios físicos básicos del amortiguamiento magnético en fluidos conductores, estableciendo los mecanismos esenciales de transformación de la energía electromagnética en energías mecánica y térmica. En el capítulo 4, se estudia el amortiguamiento magnético de ondas de gravedad en un metal líquido en una configuración bidimensional bajo un campo magnético vertical [1] y se calculan los tiempos de amortiguamiento para distintas profundidades. Posteriormente, se plantean dos configuraciones más a este problema; en la primera el campo magnético se orienta en forma horizontal, y en la segunda se considera un campo magnético inclinado a  $45^\circ$ . Los problemas se resuelven analíticamente, y se comparan las distintas configuraciones. Posteriormente, estos mismos problemas son resueltos numéricamente mediante el método de volumen finito, y se comparan con los resultados analíticos. Finalmente se plantean las conclusiones del trabajo. Se incluye también un apéndice en donde se comenta el método de *Front Tracking* (apéndice A) que sirvió para simular numéricamente ondas de gravedad en el fluido conductor.



---

# Antecedentes

---

Actualmente, existen muchas aplicaciones industriales que utilizan campos magnéticos para controlar procesos que involucran fluidos eléctricamente conductores, como los metales líquidos, las sales fundidas o los materiales semiconductores. Estas aplicaciones se enmarcan dentro de lo que se conoce como el procesamiento electromagnético de materiales el cual está directamente relacionado con la magnetohidrodinámica (MHD) que se ocupa del estudio de la dinámica de fluidos eléctricamente conductores en campos magnéticos.

La naturaleza no intrusiva de las fuerzas electromagnéticas ha permitido a la MHD tener distintas aplicaciones, como son en el control del crecimiento de cristales semiconductores, la levitación magnética, el moldeo de metales líquidos e incluso el confinamiento de plasmas.

En la industria metalúrgica es donde, en las últimas décadas, se ha tenido un mayor desarrollo, en la búsqueda de un mejor control al procesar los metales fundidos, así como mayores eficiencias en estos procesos energéticamente intensivos. De hecho las fuerzas electromagnéticas permiten el control de los metales líquidos de diversas formas, por ejemplo, através del bombeo, o mezclado del fluido, estabilizando las superficies libres, o bien amortiguando chorros de metal fundido.

Una área donde es común encontrar aplicaciones de la MHD es en producción de acero. Un ejemplo es el proceso de la colada continua para la fabricación de placas recubiertas de acero (o algún otro metal), en donde se utiliza un campo magnético que evita la mezcla de los dos metales fundidos que conforman la placa y el recubrimiento [2]. También podemos ver la utilización de campos magnéticos en moldes de fundición alimentados por boquillas sumergidas en el mismo metal líquido, lo que ocasiona chorros o vórtices que desestabilizan la superficie y acarrean contaminantes hacia el interior [3]. Aquí, el campo magnético permite amortiguar los flujos turbulentos y estabilizar la superficie. Otra aplicación en la colada continua es en el proceso de solidificación de los lingotes en el molde, en donde los elementos de la aleación se segregan, ocasionando inhomogeneidades en el lingote, así como otro tipo de problemas. Los defectos que surgen por este proceso pueden ser controlados agitando el metal líquido, lo que puede lograrse mediante campos magnéticos [3]. Una aplicación más en la colada continua es en la fabricación de tiras metálicas, en donde el metal fundido se mueve en una banda que se encuentra entre dos rodillos que son enfriados por agua, produciendo así láminas muy finas, cuyo estado final es una consecuencia del proceso de solidificación con las interacciones del flujo. Una de las maneras en las que se controla el flujo es mediante un campo magnético transversal, lo que permite lo que permite obtener tiras de buena calidad [4].

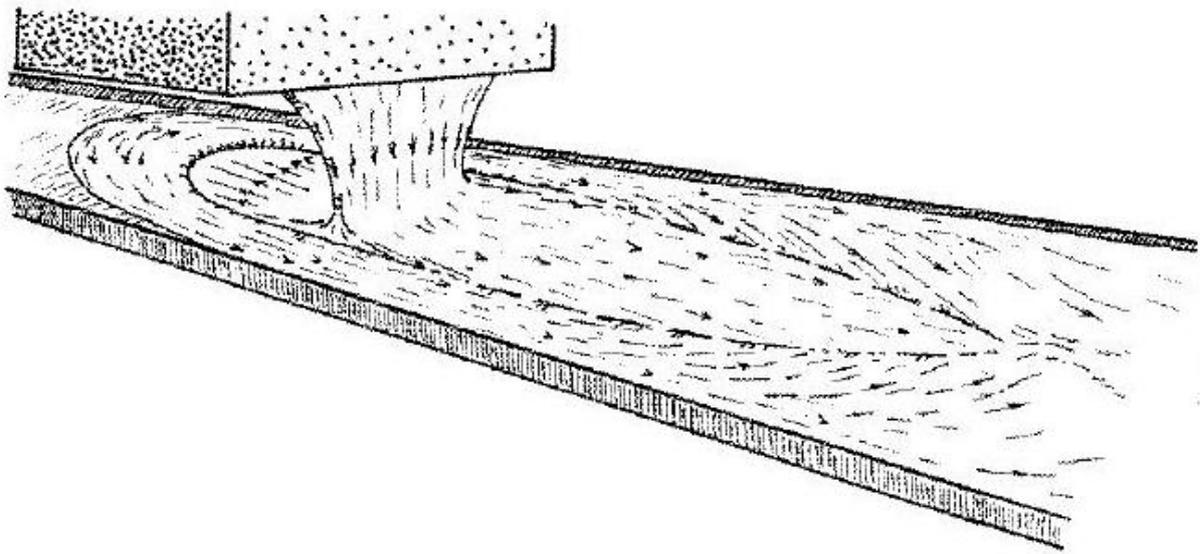


Fig. 1.1: Fabricación de láminas delgadas de aluminio mediante colada continua [4]

La industria del aluminio es una de las que demandan un mayor consumo de energía, solamente superada por la manufactura de algunos productos como el papel, gasolina, acero, etileno, y unos pocos más. Sin embargo, es la que requiere más energía por unidad de masa [5]. En el 2003 la industria del aluminio de E.U.A producía aproximadamente 27,000 millones de toneladas de aluminio primario,<sup>1</sup> (figura 1.5), consumiendo directamente  $45.7TW \cdot h$  (0.16 quad) (figura 1.2), que equivalen al 1.2% de la energía eléctrica empleada en los E.U.A. La energía total del proceso de fabricación del aluminio es  $183TW \cdot h$  (0.62 quad), teniendo un potencial teórico de  $149TW \cdot h$  (0.51 quad) (ver figuras 1.3 y 1.4).

La etapa más intensiva para su manufactura, es la reducción de la alúmina en aluminio; dicho proceso es realizado en las celdas Hall-Héroult en donde la alúmina se reduce en presencia de un electrolito, teniendo un requerimiento promedio en los E.U.A de  $15kW \cdot h$  para producir 1 kg. Se sabe que los campos magnéticos inducidos por las corrientes eléctricas utilizadas en el proceso de reducción pueden desestabilizar la interfase alúmina-electrolito en las celdas de reducción mediante ondas de gravedad, y para evitarlo el grosor de la capa de electrolito se mantiene por encima de cierto valor, lo que involucra costos mayores en la reducción. Se estima que cada milímetro del electrolito involucra un 1 millón de dólares por año en pérdidas de calor [3].

---

<sup>1</sup>Se le llama aluminio primario al que es producido directamente de la materia prima, y secundario al que proviene del reciclado.

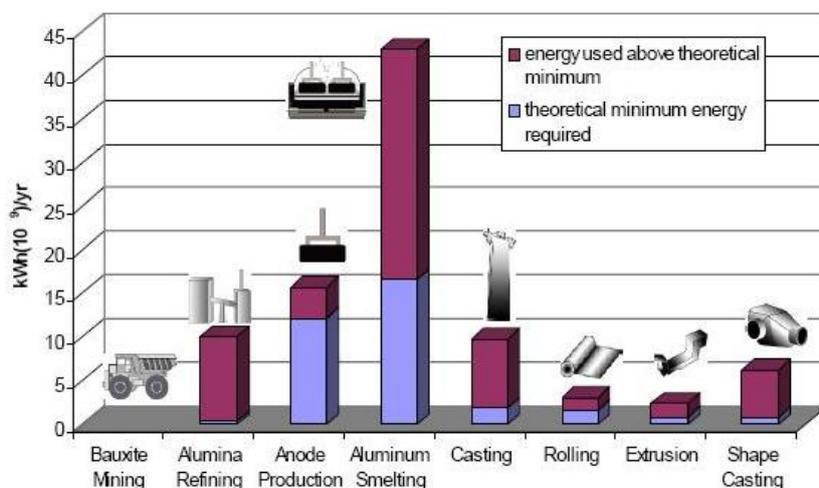


Fig. 1.2: El consumo en energía eléctrica en los E.U.A en el proceso de fabricación de aluminio representa el (1.2%) de la electricidad ocupada en este país, siendo la reducción de la alúmina la etapa más intensiva [5].

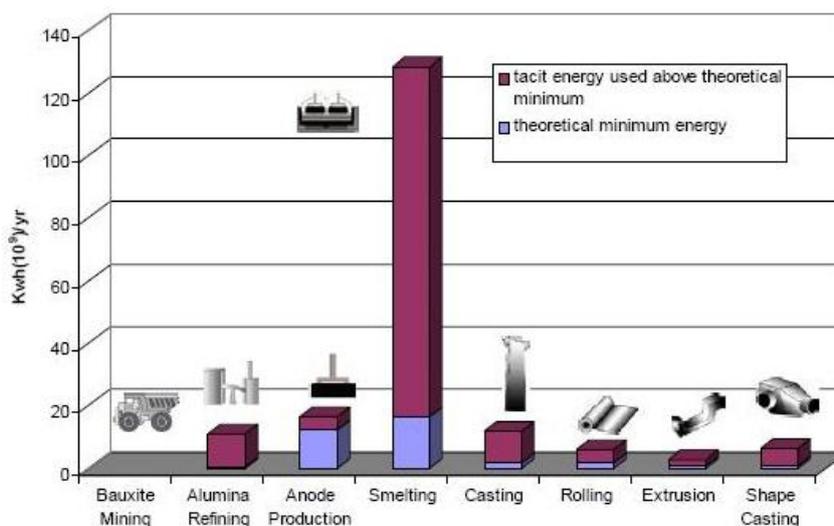


Fig. 1.3: El consumo total de energía (que considera el valor energético de la materia prima) alcanza cerca de los  $200Twh \cdot h$  [5].

El reciclado es una opción bastante viable, puesto que evita el proceso de reducción teniendo un ahorro de un 94%, aproximadamente, de la energía involucrada en el proceso completo (figura 1.6), así como grandes ahorros de agua, y de emisión de contaminantes. En el mundo un 25% del aluminio producido proviene del reciclado, alcanzando un 50% en los E.U.A. El ahorro de la energía en esta industria se debe al avance tecnológico, y al reciclado, contribuyendo entre ambos a un ahorro de un 22%, y un 39% respectivamente, dando a un ahorro energético de un 61% en los últimos 40 años.

	U.S. Annual Production 2003	Theoretical Minimum Energy Requirement	U.S. Process Energy Required	Potential Process U.S. Energy Savings	Total U.S. Gross Energy <sup>ff</sup> Required	Potential Gross U.S. Energy <sup>ff</sup> Savings
	<i>metric tons</i>	<i>kWh (10<sup>9</sup>)/yr (quad)</i>	<i>kWh (10<sup>9</sup>)/yr (quad)</i>	<i>kWh (10<sup>9</sup>)/yr (quad)</i>	<i>kWh (10<sup>9</sup>)/yr (quad)</i>	<i>kWh (10<sup>9</sup>)/yr (quad)</i>
Bauxite Mining						
Alumina Refining	2,661,500	0.37 (0.001)	10.02 (0.034)	9.65 (0.033)	10.89 (0.037)	10.52 (0.036)
Anode Production	1,230,000	12.12 (0.041)	15.75 (0.054)	3.63 (0.012)	16.45 (0.056)	4.33 (0.015)
Al Smelting	2,758,000	16.52 (0.056)	42.97 (0.147)	26.46 (0.090)	128.36 (0.438)	111.84 (0.382)
Primary Casting	2,704,000	0.90 (0.003)	2.73 (0.009)	1.83 (0.006)	3.94 (0.013)	3.04 (0.010)
Secondary Casting	2,820,000	0.94 (0.003)	7.05 (0.024)	6.11 (0.021)	7.93 (0.027)	6.99 (0.024)
Rolling	4,842,600	1.55 (0.005)	3.04 (0.010)	1.49 (0.005)	6.08 (0.021)	4.53 (0.015)
Extrusion	1,826,000	0.80 (0.003)	2.37 (0.008)	1.57 (0.005)	2.77 (0.009)	1.97 (0.007)
Shape Casting	2,413,000	0.80 (0.003)	6.17 (0.021)	5.36 (0.018)	6.37 (0.022)	5.56 (0.019)
<b>Total</b>		<b>34.00 (0.116)</b>	<b>90.10 (0.307)</b>	<b>56.10 (0.191)</b>	<b>182.77 (0.624)</b>	<b>148.78 (0.508)</b>

Fig. 1.4: Podemos ver el consumo energético en la fabricación del aluminio en cada una de sus etapas, teniendo un potencial de ahorro energético que va de 0.62 *quad* a 0.51 *quad* [5].

Es claro que en estas circunstancias, cualquier mejora tecnológica que permita reducir los costos de producción del aluminio, manteniendo o incrementando la calidad del producto, será un beneficio inmenso para esta industria y para la sociedad en general. En este contexto, la MHD ha jugado un papel relevante en el desarrollo de la industria del aluminio; al permitirnos conocer los principios físicos que ocurren en el proceso de reducción, y así proponer diseños que puedan mejorar el desempeño de estas celdas.

Year	U.S. Primary Aluminum	U.S. Secondary Aluminum	U.S. Aluminum Imports	U.S. Total Aluminum
1992	4,042	2,756	1,573	8,371
1993	3,695	2,944	2,327	8,966
1994	3,299	3,086	3,136	9,521
1995	3,375	3,188	2,701	9,264
1996	3,577	3,307	2,572	9,456
1997	3,603	3,547	2,804	9,954
1998	3,713	3,442	3,264	10,419
1999	3,779	3,695	3,680	11,154
2000	3,668	3,450	3,580	10,698
2001	2,637	2,970	3,487	9,094
2002	2,705	2,927	3,947	9,579
2003	2,704	2,820	4,068	9,592
Average Growth Rate 1993 through 2003				
	-2.5%	-0.4%	5.1%	0.6%
Percent of Total Supply (2003)				
	28%	29%	42%	100%

Fig. 1.5: Consumo total de aluminio en los E.U.A, dividido en aluminio primario, secundario, e importado. La mitad procede de material reciclado [5].

Energy Saved with Recycling	
(Tacit Energy Values)	
62.2 kWh/kg to produce Primary Metal Ingot	
2.8 kWh/kg to produce Secondary Metal Ingot	
4.5% Secondary to Primary Energy	
2,820,000 kg of Secondary Metal produced in 2003	
1.67E+11 kWh/yr Energy Saved in 2003	
0.57 Quads Saved per Year 2003	
19,100	<b>MW SAVED 2003</b>

Fig. 1.6: Esta figura nos muestra los ahorros energéticos en el procesamiento del aluminio debido al reciclaje. [5]

Podemos ver que los altos costos de producción de los metales, así como el desarrollo de nuevas aleaciones exigen conocer los procesos que ocurren en la manufactura de estos materiales para poder realizar diseños que aprovechen de manera eficiente la energía y permitan obtener productos de alta calidad en respuesta a las exigencias tecnológicas que nuestra sociedad demanda.

Con este fin, el presente trabajo tiene como objetivo profundizar en el entendimiento de un proceso físico que tiene aplicaciones industriales concretas, a saber, el amortiguamiento magnético de ondas de gravedad en líquidos eléctricamente conductores. Debido a la complejidad del problema, el estudio se enfoca en modelos bidimensionales, a partir de los cuales se encuentran resultados analíticos que son complementados con simulaciones numéricas. En el siguiente capítulo, se presentan las ecuaciones básicas de la MHD que permitirán establecer los modelos de ondas de gravedad bajo campos magnéticos.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nabla \cdot \Phi_{ijk} dS^l \quad (1.1)$$



---

# Ecuaciones de la MHD

---

Cuando un fluido eléctricamente conductor se mueve dentro de un campo magnético, se inducen corrientes eléctricas en el medio. Estas corrientes interactúan a su vez con el campo ocasionando fuerzas magnéticas que alteran el movimiento original del fluido.

Como se puede imaginar, cuando el medio se encuentra bajo la acción de un campo magnético, hay una estrecha relación entre el comportamiento dinámico, y las propiedades físicas de un fluido, tales como su viscosidad, y en particular su conductividad eléctrica. Por tanto, si queremos entender este tipo de fenómenos, hay que prestar también atención a las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, y no solamente a las ecuaciones de balance de los fluidos.

En este capítulo se empezará haciendo un repaso tanto de las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos, como de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. Finalmente, haciendo uso de aproximaciones adecuadas, se acoplarán para obtener las ecuaciones de la MHD, que describen el comportamiento de los fluidos conductores bajo campos magnéticos.

## 2.1 Ecuaciones de la dinámica de fluidos

De acuerdo a [6], el estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina dinámica de fluidos. Por otro lado [7] definimos a un fluido como un medio que se deforma continuamente, mientras exista un esfuerzo cortante, no importando qué tan pequeño sea.

Hay dos posibles maneras de obtener las ecuaciones de la mecánica de fluidos, la primera es a partir de un enfoque molecular que modela al fluido como un conjunto de moléculas bajo ciertas interacciones, en donde la fenomenología macroscópica se obtiene de un análisis estadístico de todas estas partículas. El problema de este enfoque es que la teoría solamente está desarrollada para gases poco densos. El estudio de los gases densos y de los líquidos se realiza comúnmente mediante la *hipótesis del continuo*.

El enfoque del continuo visualiza la materia como si fuera un continuo, en donde en cada punto y en cada instante podemos definir alguna variable de campo que caracterice el estado del fluido, tales como la velocidad, presión o temperatura. Una condición suficiente para poder aplicar el enfoque del continuo, es que la distancia libre media entre cada molécula sea mucho más pequeña que la longitud característica del problema a tratar. Una forma de establecer este principio es la siguiente [8]. Dado un volumen de control  $V$ , éste puede dividirse en pequeños elementos de volumen de tamaño  $\varepsilon$  con la siguiente restricción :

$$\frac{1}{n} \ll \varepsilon \ll L^3, \quad (2.1)$$

donde  $n$  es el número de moléculas por unidad de volumen, y  $L$  es la escala de longitud macroscópica más pequeña del flujo. Esta condición se cumple para la mayoría de los casos prácticos.

Finalmente usando el enfoque del continuo se mostrarán las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos desde un enfoque no relativista. Así se establecerá la ecuación de balance de momentum, y la de conservación de masa. No se hará mención de la ecuación de balance de energía ya ésta no se utiliza en los problemas tratados.

### 2.1.1 Conservación de masa

Si consideramos un elemento de fluido con volumen  $V$  que contiene una determinada masa  $M$ , y seguimos al elemento mientras fluye (enfoque lagrangiano), observaremos que el elemento cambia de tamaño y forma, pero la masa permanece constante. Si expresamos la masa  $M$  en la forma

$$M = \int_V \rho dV, \quad (2.2)$$

donde  $\rho(x, y, z, t)$  es la densidad de masa del fluido, ya que la masa se mantiene constante, debe cumplirse que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.3)$$

donde  $D/Dt = \partial/\partial t + (\vec{u} \cdot \nabla)$  es la derivada material. Si usamos el teorema de transporte de Reynolds [8], encontramos

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0. \quad (2.4)$$

Y ya que el volumen de integración es arbitrario tenemos que en todo punto se satisface la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (2.5)$$

que se conoce como la *ecuación de continuidad* o ecuación de conservación de masa. En el caso de fluidos incompresibles ( $\rho$  constante) tenemos

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Balance de momentum

Nuevamente consideramos al elemento lagrangiano. Es claro de la segunda ley de Newton que el cambio en el momentum de este elemento de volúmen, equivale a la fuerza neta que actúa sobre él.

Las fuerzas que actúan sobre los elementos de fluido pueden ser fuerzas de cuerpo (largo alcance), o fuerzas de contacto (corto alcance). Tenemos entonces que aplicando al elemento de volúmen la segunda ley de Newton se tiene

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_S \vec{P} ds + \int_V \rho \vec{f} dV, \quad (2.7)$$

donde  $\vec{P}$  es la fuerza de superficie y tiene unidades de  $N/m^2$ , y  $\rho \vec{f}$  es la densidad de fuerzade cuerpo  $N/m^3$ . La fuerza de contacto  $\vec{P}$  puede expresarse através del tensor de esfuerzos mecánicos  $\tilde{\sigma}$ , que es un tensor de segundo rango. Podemos entonces reescribir la ecuación de balance de momentum de la siguiente manera

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_S \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{f} dV. \quad (2.8)$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de conservación de masa (2.5) para el término de la izquierda, y el teorema de Gauss para el primer término de la derecha, la ecuación queda de la siguiente forma

$$\int_V \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] dV = \int_V \nabla \cdot \tilde{\sigma} dV + \int_V \rho \vec{f} dV. \quad (2.9)$$

Como esto ocurre para cualquier volumen de integración, tenemos que en todo punto se satisface

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \vec{f}, \quad (2.10)$$

que es la ecuación de balance de momentum. El tensor de esfuerzos  $\tilde{\sigma}$  puede descomponerse de la siguiente forma

$$\tilde{\sigma} = -p\mathbb{I} + \tilde{\tau}, \quad (2.11)$$

donde  $p$  representa la presión termodinámica,  $\mathbb{I}$  es el tensor identidad, y  $\tilde{\tau}$  es el tensor de esfuerzos viscosos. Los fluidos con los que vamos a trabajar son los Newtonianos. En particular, los metales líquidos y los electrolitos, que se encuentran entre los fluidos eléctricamente conductores más comunes son Newtonianos. En este tipo de fluidos, el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la rapidez de deformación.

#### Ecuación de Navier Stokes

En el caso de los fluidos Newtonianos incompresibles, el tensor de esfuerzos viscosos se puede escribir de la siguiente manera

$$\tilde{\tau} = \mu \dot{\epsilon}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.12)$$

donde  $\dot{\epsilon}$  es el tensor de rapidez de deformación, y  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica. Con esta consideración la ecuación de balance de momentum (2.10) toma la siguiente forma

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}. \quad (2.13)$$

El primer término de la izquierda representa la aceleración local. El segundo término de la izquierda representa la aceleración convectiva, y podemos ver que se trata de un término no lineal. El primer término de la derecha se refiere al gradiente de presiones, el siguiente nos habla del transporte de momentum debido a difusión (fuerzas viscosas), y el último representa las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen que actúan sobre los elementos de volumen.

## 2.2 Ecuaciones del electromagnetismo

Las ecuaciones del electromagnetismo que debemos considerar para obtener el sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido conductor en un campo magnético son las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm, y la fuerza de Lorentz. Estas ecuaciones incluyen efectos relativistas, y rigen toda la electrodinámica que se conoce hasta la fecha, por lo que haremos un repaso breve sobre cada una de ellas.

### 2.2.1 Ecuaciones de Maxwell

#### Ley de Gauss

La ley de Gauss nos dice que el flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de un volumen  $V$ , equivale a la carga eléctrica contenida en él, es decir,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e(\vec{x}) dV, \quad (2.14)$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío, y  $\rho_e$  es la densidad de carga eléctrica en el volumen. Aplicando el teorema de Gauss podemos reescribir esta ecuación en forma diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0. \quad (2.15)$$

#### Ley de Faraday

La ley de Faraday nos dice que la variación del flujo magnético a través de un circuito da lugar a una fuerza electromotriz que induce una corriente eléctrica en el mismo. En forma integral, tenemos que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (2.16)$$

donde  $\vec{B}$  es el vector de inducción magnética,  $S$  es la superficie que encierra al circuito, y  $C$  su contorno. Podemos transformar la ecuación anterior en una ecuación diferencial que tiene la forma

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.17)$$

### Ley de Gauss para el campo magnético

Retomando la forma diferencial de la ley de Faraday, y aplicándole el operador divergencia, podemos ver la propiedad solenoidal del campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.18)$$

Ésto nos dice que las líneas de campo magnético son circuitos cerrados, lo que implica la inexistencia de monopolos magnéticos.

### Ley de Ampère-Maxwell

Esta ley establece que los campos magnéticos pueden producirse a partir de corrientes eléctricas o mediante la variación temporal de los campos eléctricos. En su forma integral, puede expresarse de la siguiente manera

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2.19)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética. Vemos que hay una relación entre las líneas de campo magnético que abrazan el circuito  $C$ , y la corriente que pasa através de su superficie  $S$ . El último término del lado derecho, se le conoce como corriente de desplazamiento, y es necesario para que exista la conservación de carga. La forma diferencial es la siguiente,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (2.20)$$

Aplicando la divergencia, y utilizando la ley de Gauss se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}, \quad (2.21)$$

que es la ecuación de conservación de la carga eléctrica.

### 2.2.2 La fuerza de Lorentz y la ley de Ohm

#### Ley de Ohm

La ley de Ohm nos relaciona la densidad de corriente con el campo eléctrico. Cuando el medio se mueve respecto al sistema de laboratorio con una velocidad  $\vec{u}$ , tenemos que esta ley se expresa como

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) + \rho_e \vec{u}, \quad (2.22)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica, y el término  $\rho_e \vec{u}$  se conoce como la corriente de convección.

#### Fuerza de Lorentz

La densidad de fuerza de Lorentz (fuerza de cuerpo por unidad de volumen) se puede expresar como

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.23)$$

donde el primer término representa a la fuerza eléctrica y el segundo a la fuerza magnética.

### 2.2.3 Aproximación MHD

Al considerar el flujo de metales líquidos bajo campos magnéticos en problemas industriales o a escala de laboratorio, es posible simplificar las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos mediante la aproximación MHD que consiste básicamente en las siguientes suposiciones :

1. Efectos no relativistas.

Se considera que la velocidad característica  $U$  del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz de modo que  $U^2/c^2 \ll 1$ .

2. Fenómenos a bajas frecuencias

Se consideran fenómenos cuasi-estáticos que involucran bajas frecuencias, es decir campos que cambien lentamente con el tiempo.

3.  $\vec{E} \sim O(\vec{u} \times \vec{B})$

Se considera que los campos eléctricos involucrados son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz inducida (f.e.m)  $\vec{u} \times \vec{B}$ .

Las consideraciones anteriores nos llevan a reescribir las ecuaciones del campo electromagnético de la siguiente manera.

Ya que estamos considerando campos a bajas frecuencias, la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell es despreciable, y por tanto el término  $\partial \rho_e / \partial t$

también lo podemos omitir [9]. De esta forma, tenemos que recuperamos las ecuaciones pre-maxwellianas :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.24a)$$

La ley de inducción de Faraday y la ley de Gauss para el campo magnético no tienen ningún cambio, de modo que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.24b)$$

Por su parte, es posible mostrar que bajo la aproximación MHD la fuerza eléctrica  $\rho_e \vec{E}$  es despreciable comparada con la fuerza electromagnética [9]. A su vez, el término de la corriente de convección  $\rho_e \vec{u}$  en la ley de Ohm es despreciable comparado con el término de conducción  $\vec{J}$  [9]. De esta forma la fuerza de Lorentz y la ley de Ohm quedan

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}, \quad \vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right). \quad (2.24c)$$

Ya que en la MHD la densidad de carga  $\rho_e$  no juega un papel significativo, la ley de Gauss en la ecuación (2.15) no se considera en esta aproximación [10].

## 2.3 Ecuaciones de la MHD

Si combinamos las ecuaciones de Ohm, Faraday, y Ampère es posible obtener la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \vec{u} \times \vec{B} \right) + \lambda \nabla^2 \vec{B}, \quad \lambda = (\mu\sigma)^{-1}, \quad (2.25)$$

que se conoce como la ecuación de inducción, donde  $\lambda$  representa la difusividad magnética. El término de la izquierda nos habla de los cambios temporales en el campo magnético. El primer término de la derecha es el término de advección (transporte de campo magnético debido al movimiento del fluido), y el segundo término nos habla de transporte de campo magnético debido a la difusión.

Si consideramos la aproximación MHD y suponemos que el fluido es incompresible, tenemos entonces que las ecuaciones que gobiernan el flujo de un fluido conductor en un campo magnético se encuentran en la siguiente tabla :

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	$\nabla \cdot \vec{u} = 0$
ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES CON LA FUERZA DE LORENTZ INCLUIDA	$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla(p/\rho) + \nu\nabla^2\vec{u} + (\vec{J} \times \vec{B})/\rho$
ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE CAMPO MAGNÉTICO	$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda\nabla^2\vec{B}$
LEY DE AMPÈRE Y CONSERVACIÓN DE CARGA	$\nabla \times \vec{B} = \mu\vec{J}, \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$
LA LEY DE FARADAY Y LA LEY DE GAUSS DEL CAMPO MAGNÉTICO	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$
FUERZA DE LORENTZ Y LEY DE OHM	$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}, \quad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$

Tabla 2.1: Las ecuaciones de la MHD para fluidos Newtonianos incompresibles

Como se puede observar en las ecuaciones de la MHD que se encuentran en la tabla (2.1), éstas dependen de varios parámetros y por tanto es complicado comprender los efectos que dominan en la dinámica del fluido. Es muy útil adimensionalizar las ecuaciones para concentrar la información y poder determinar los órdenes de magnitud de los diversos términos en las ecuaciones.

VARIABLES	VARIABLE	COMENTARIO
VELOCIDAD	$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U}$	$U$ es una velocidad caracterísitca
PRESIÓN	$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$	
TIEMPO	$t^* = \frac{t}{L/U}$	$L$ es la longitud caracterísitca
POSICIÓN	$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L}$	
CAMPO MAGNÉTICO	$\vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_c}$	$B_c$ es un campo magnético caracterísitico
DENSIDAD DE CORRIENTE	$\vec{J}^* = \frac{\vec{J}}{\sigma U B_c}$	
CAMPO ELÉCTRICO	$\vec{E}^* = \frac{\vec{E}}{U B_c}$	

Tabla 2.2: Variables adimensionales

En la tabla (2.2) se muestra una posible adimensionalización de las variables de flujo, en donde el símbolo \* denota las variables adimensionales. Con esta adimensionalización, las ecuaciones toman la siguiente forma :

$$\nabla^* \cdot \vec{u}^* = 0, \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial\vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nu}{UL} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{Ha^2}{Re} (\vec{J}^* \times \vec{B}^*), \quad (2.26b)$$

$$\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t^*} = \nabla^* \times (\vec{u}^* \times \vec{B}^*) + \frac{1}{Rm} \nabla^{*2} \vec{B}^*, \quad (2.26c)$$

$$\nabla^* \times \vec{B}^* = Rm \vec{J}^*, \quad \nabla^* \cdot \vec{J}^* = 0, \quad (2.26d)$$

$$\nabla^* \times \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t^*}, \quad \nabla^* \cdot \vec{B}^* = 0 \quad (2.26e)$$

$$\vec{J}^* = \vec{E}^* + \vec{u}^* \times \vec{B}^*. \quad (2.26f)$$

Los parámetros adimensionales  $Re$ ,  $Ha$  y  $R_m$  denotan a los números de Reynolds, Hartmann y Reynolds magnético, respectivamente, cuya definición e interpretación se da en la tabla 2.3. En dicha tabla se muestra también el parámetro de interacción  $N$  que se relaciona con  $Re$  y  $Ha$ .

NÚMEROS		SÍMBOLO	DEFINICIÓN	SIGNIFICADO
NÚMERO DE REYNOLDS	DE	$Re$	$UL/\nu$	Razón de fuerzas inerciales y viscosas
NÚMERO DE REYNOLDS MAGNÉTICO	DE	$R_m$	$UL/\lambda$	Razón de campo magnético inducido y aplicado
NÚMERO DE HARTMAN	DE	$Ha$	$B_c L(\sigma/\rho\nu)$	Razón de fuerzas de Lorentz y viscosas
PARÁMETRO DE INTERACCIÓN	DE	$N = \frac{Ha^2}{Re}$	$\sigma B_c^2 L/\rho U$	Razón de fuerzas de Lorentz e inerciales

Tabla 2.3: Números adimensionales

## 2.4 Aproximación MHD para bajos números de Reynolds magnético

En la gran mayoría de los flujos MHD que tienen lugar en procesos industriales o en el laboratorio donde intervienen metales líquidos, sales fundidas o electrolitos, se encuentra que el número magnético de Reynolds es muy pequeño ( $R_m \ll 1$ ). Esto nos indica que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo magnético aplicado. Esto trae consigo ciertas simplificaciones en las ecuaciones MHD, ya que la ley de Ampère se reduce a  $\nabla \times \vec{B} = 0$ , de manera que el campo magnético satisface las condiciones magnetostáticas.

En estas condiciones el campo magnético puede considerarse imperturbado por el flujo  $\vec{B} = \vec{B}_0$ . Si el campo magnético aplicado no presenta variaciones temporales, de la ley de Faraday encontramos que  $\nabla \times \vec{E}$ , de modo que el campo  $\vec{E}$  es electrostático, es decir  $\vec{E} = -\nabla\phi$ . Así, la ley de Ohm queda

$$\vec{j} = -\nabla\phi + \vec{u} \times \vec{B}_0. \quad (2.27)$$

Si introducimos esta ecuación en la conservación de carga obtenemos la ecuación

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{B}_0), \quad (2.28)$$

el campo magnético debe cumplir las siguientes ecuaciones

$$\nabla \times \vec{B}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (2.29)$$

y las ecuaciones de la dinámica de fluido para fluidos conductores sometidos a campos magnéticos quedan

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla(p/\rho) + \nu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{J} \times \vec{B})/\rho, \quad (2.31)$$

obteniendo un sistema cerrado.

## Unidades

Aquí se muestran las unidades de algunas magnitudes físicas en el S.I. de medidas

PARÁMETRO	SÍMBOLO	UNIDADES
CALOR ESPECÍFICO	$c$	$J/(K \cdot kg)$
CAMPO DE DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	$\vec{J}$	$A/m^2$
CAMPO DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA	$\vec{B}$	$T = N/(A \cdot m)$
CAMPO DE VELOCIDADES	$\vec{u}$	$m/s$
CAMPO ELÉCTRICO	$\vec{E}$	$N/C$
CARGA ELÉCTRICA	$Q$	$C = A \cdot s$
CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA	$\sigma$	$A^2/(W \cdot m)$
CONDUCTIVIDAD TÉRMICA	$k$	$W/(m \cdot K)$
DENSIDAD DE MASA	$\rho$	$kg/m^3$
DENSIDAD ELÉCTRICA	$\rho_e$	$C/m^3$
DIFUSIVIDAD(VISCOSIDAD) DINÁMICA	$\mu$	$kg/(m \cdot s)$
DIFUSIVIDAD(VISCOSIDAD) CINEMÁTICA	$\nu = \mu/\rho$	$m^2/s$
DIFUSIVIDAD MAGNÉTICA	$\lambda = (\mu\sigma)^{-1}$	$m^2/s$
DISUSIVIDAD TÉRMICA	$\alpha = k/(c\rho)$	$m^2/s$
ENERGÍA INTERNA POR UNIDAD DE MASA	$e$	$J/kg$
TEMPERATURA	$T$	$K$
PERMITIVIDAD ELÉCTRICA	$\epsilon$	$C^2/(m^2 \cdot N)$
PERMEABILIDAD MAGNÉTICA	$\mu_m$	$H/m = N/A^2$
PRESIÓN	$p$	$Pa = N/m^2$

Tabla 2.4: Las unidades el S.I.

---

# Amortiguamiento Magnético

---

En este capítulo presentaremos una revisión general de los principios físicos básicos del amortiguamiento magnético de fluidos eléctricamente conductores. En particular, discutiremos las diferencias esenciales entre considerar un modelo bidimensional y uno tridimensional, haciendo énfasis en las distintas condiciones físicas y sus implicaciones en el amortiguamiento magnético.

## 3.1 Aspectos generales de la fuerza de Lorentz

Una de las diferencias básicas de los flujos MHD respecto a los flujos hidrodinámicos ordinarios es la anisotropía que introduce la existencia de un campo magnético aplicado. Como hemos mencionado en el capítulo 1, los efectos del campo magnético sobre el flujo del fluido conductor pueden ser muy variados y dar lugar a aplicaciones muy diversas. Uno de los principales efectos es la aparición de fuerzas magnéticas o fuerzas de Lorentz, capaces de modificar la dinámica del flujo. Así, bajo ciertas circunstancias, las fuerzas de Lorentz pueden producir movimientos en el fluido, como sucede en las bombas MHD [11], o bien en los agitadores electromagnéticos [12]. Una manera de producir movimiento es mediante la inyección de corrientes eléctricas en el fluido en presencia de un campo magnético estático. Otra manera es utilizando campos magnéticos viajeros dependientes del tiempo capaces de inducir corrientes en el fluido, que al interactuar con el mismo campo, originan una fuerza de Lorentz que agita al fluido. En estos casos la fuerza de Lorentz actúa como un *motor* que impulsa el fluido. Recordemos que la fuerza de Lorentz es una fuerza de cuerpo que actúa sobre el volumen del fluido.

Pero la fuerza de Lorentz también puede actuar para inhibir o amortiguar el movimiento. El mecanismo principal que da lugar a dicho efecto, puede comprenderse de una manera sencilla. Como sabemos, el movimiento de un fluido conductor dentro de un campo magnético induce corrientes eléctricas en el medio las cuales, dada la conductividad eléctrica finita del fluido, dan lugar a la disipación de energía por efecto de Joule.

El incremento en la energía térmica del fluido viene acompañado de una disminución de su energía cinética, lo que lleva a amortiguar el movimiento. Hay que notar que para que esto sea posible bajo campos magnéticos típicos de aplicaciones industriales o de laboratorio ( $B_0 \sim 0.1 - 1T$ ), las corrientes inducidas deben ser suficientemente intensas, lo que requiere que la conductividad del fluido sea alta, como en los metales líquidos. En fluidos de baja conductividad eléctrica, como los electrolitos de amortiguamiento magnético requiere campos magnéticos extremadamente intensos.

El amortiguamiento magnético descrito previamente se presenta bajo campos magnéticos

estáticos y como se mencionó en el capítulo 1, ha sido utilizado en diversas aplicaciones industriales con el fin de suprimir o reducir movimientos no deseados. En ocasiones, dichos movimientos se presentan en la forma de chorros de fluido, como cuando se alimentan los moldes en procesos de colada continua [3]. En otros casos se presentan en la forma de remolinos o vórtices [13]. Asimismo, en procesos de solidificación o de crecimiento de cristales semiconductores, se trata de suprimir la convección natural producida por los gradientes térmicos presentes en el proceso [3].

En experimentos de laboratorio, los campos magnéticos estáticos también han sido utilizados para retardar el inicio de la convección de Rayleigh-Bénard en un fluido calentado por abajo [14]. En otras aplicaciones metalúrgicas en las que se requiere estabilizar superficies libres de metal líquido, el campo magnético se utiliza para amortiguar las ondas de gravedad [1]. Este es precisamente el problema que nos interesa analizar en el presente trabajo. Nótese que en todas estas aplicaciones la fuerza de Lorentz actúa como un *freno* en el fluido.

Los principios físicos fundamentales del amortiguamiento han sido expuestos principalmente por Davidson [13] y a continuación presentaremos algunas de las ideas más importantes detrás de este fenómeno.

## 3.2 Amortiguamiento magnético

Consideremos un fluido conductor incompresible que atraviesa un campo magnético externo uniforme  $\vec{B}_0$ , que sin pérdida de generalidad se encuentra orientado en dirección  $z$ . Además, suponemos que el número de Reynolds magnético es pequeño,  $R_m \ll 1$ , de tal manera que podemos despreciar el campo magnético inducido. Ya que la densidad de corriente eléctrica está dada através de la ley de Ohm (ecuación 2.27),

$$\vec{J} = \sigma \left( -\nabla\phi + \vec{u} \times \vec{B}_0 \right) \quad (3.1)$$

podemos expresar la fuerza de Lorentz por unidad de volumen en la forma

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}_0 = \sigma \left( \vec{B}_0 \times \nabla\phi \right) - \sigma B_0^2 \vec{u}_\perp \quad (3.2)$$

donde  $\vec{u}_\perp$  representa las componentes del campo magnético de velocidad  $\vec{u}$  en el plano normal a  $\vec{B}_0$ , es decir,  $\vec{u}_\perp = (u_x, u_y, 0)$ .

Si calculamos la potencia mecánica de la fuerza de Lorentz, es decir, la tasa a la que esta fuerza hace trabajo sobre el fluido obtenemos

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{J} \times \vec{B}_0) = -\vec{J} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (3.3)$$

y utilizando la ley de Ohm 3.1, tenemos

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = -\vec{J} \cdot \left( \frac{\vec{J}}{\sigma} + \nabla\phi \right) = -\frac{\vec{J}^2}{\sigma} - \vec{J} \cdot (\nabla\phi) = -\frac{\vec{J}^2}{\sigma} - \nabla \cdot (\vec{J}\phi), \quad (3.4)$$

donde se ha utilizado el hecho de que  $\vec{J}$  es solenoidal,  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Si ahora integramos en un volumen  $V$ , encontramos

$$\int_V \vec{F} \cdot \vec{u} dV = - \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV - \int_V \nabla \cdot (\phi \vec{J}) dV. \quad (3.5)$$

Cuando no existen fuentes externas de corriente, la segunda integral del lado derecho de la ecuación (3.5) se anula, obteniendo entonces

$$\int_V \vec{F} \cdot \vec{u} dV = - \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) representa la conversión de energía mecánica en calor a una tasa determinada por la disipación Óhmica. Dicho en otras palabras, la energía mecánica acarreada por el movimiento del fluido, se convierte primero en energía eléctrica (corrientes inducidas) mediante la interacción con el campo magnético aplicado y finalmente se transforma en calor a través de la disipación Óhmica.

El resultado anterior puede obtenerse también a partir del teorema de Poynting, que establece la conservación de la energía electromagnética [10]. En el caso de la MHD, utilizando las leyes de Faraday y Ampère, se encuentra que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \right) \quad (3.7)$$

La interpretación de esta ecuación es más fácil cuando se integra en un volumen de control  $V$ , es decir

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{B}^2}{2\mu} dV = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV - \oint_S \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{S} \quad (3.8)$$

donde en la segunda integral del lado derecho se ha utilizado el teorema de la divergencia. El término del lado derecho de la ecuación (3.8) representa la razón de cambio temporal de la energía magnética contenida en el volumen; el primer término del lado derecho denota la potencia eléctrica total suministrada al volumen  $V$ , mientras que el segundo término del lado derecho representa el flujo de energía, ya sea en forma de trabajo o calor, a través de la superficie del volumen de control. El vector

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \quad (3.9)$$

se conoce como el vector de Poynting. Cuando existe flujo de Poynting a través de la superficie, tenemos que el volumen de control está intercambiando energía electromagnética con sus alrededores. Si utilizamos la ley de Ohm recordando que  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , tenemos que

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV + \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV \quad (3.10)$$

y sustituyendo en la ecuación (3.8) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{B}}{2\mu} dV = - \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV - \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (3.11)$$

donde el primer término del lado izquierdo representa la disipación óhmica o de Joule y el segundo denota la tasa de disminución de energía magnética debido a la tasa de trabajo de la fuerza de Lorentz sobre el medio. Ya que en nuestro caso tenemos que el campo magnético es constante,  $\vec{B} = \vec{B}_0$ , y suponiendo que el volumen  $V$  se extiende a todo el espacio de modo que no hay flujo de energía electromagnética, la primera integral del lado izquierdo, y la última del lado derecho en la ecuación (3.11) son cero, de donde encontramos el resultado establecido en la ecuación 3.6

$$\int_V (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV = - \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV \quad (3.12)$$

### 3.3 La conservación de carga y las ecuaciones de movimiento

Como establecimos en el capítulo anterior, la conservación de la carga en la aproximación MHD se toma de la forma  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Sustituyendo la ley de Ohm, encontramos que el potencial eléctrico satisface la ecuación

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{B}_0), \quad (3.13)$$

y dado que  $\vec{B}_0$  es constante tenemos

$$\nabla^2 \phi = \vec{B}_0 \cdot \nabla \times \vec{u} = \vec{B}_0 \cdot \vec{\omega} \quad (3.14)$$

donde  $\omega = \nabla \times \vec{u}$  es el vector vorticidad. Por otro lado, las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\nabla \cdot \vec{u} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\sigma}{\rho} (\vec{B}_0 \times \nabla \phi) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \vec{u}_\perp, \quad (3.16)$$

donde hemos escrito la fuerza de Lorentz de manera explícita de acuerdo a la ecuación (3.3). En general, la solución de las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.16) con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera es bastante difícil, de manera que utilizaremos varias aproximaciones para simplificar el problema.

Una aproximación muy común que se justifica al considerar ondas de gravedad, es el despreciar las fuerzas viscosas, lo que haremos en el análisis subsecuente. Por otra parte, el problema se simplifica de manera significativa si consideramos que el movimiento es bidimensional, tal como una onda plana, y suponemos que el campo magnético  $\vec{B}_0$  está en el plano de movimiento. En tal caso, los vectores  $\omega$  y  $\vec{B}_0$  son ortogonales de manera que la ecuación (3.14) se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (3.17)$$

En principio, la distribución espacial de  $\phi$  determina la manera en que las corrientes eléctricas inducidas completan sus trayectorias dentro del fluido o a través de las paredes que confinan al mismo. Si suponemos que el fluido no está confinado o bien que está confinado por paredes perfectamente conductoras que proveen una trayectoria de retorno sin resistencia para la corriente inducida, puede considerarse que  $\phi = 0$  [13]. Bajo estas condiciones, la ley de Ohm y la fuerza de Lorentz se reducen a

$$\vec{J} = \sigma(\vec{u} \times \vec{B}_0), \quad (3.18)$$

$$\vec{F} = -\sigma B_0^2 \vec{u}_\perp, \quad (3.19)$$

de modo que las ecuaciones de movimiento (Navier-Stokes) toman la forma

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\vec{u}_\perp}{\tau}, \quad (3.20)$$

donde  $\tau = \rho/\sigma B_0^2$  aparece naturalmente como una escala de tiempo característica del amortiguamiento magnético. De hecho observamos que la fuerza de Lorentz en la ecuación (3.20) aparece como una fuerza de frenado o bien como una *fricción magnética*. El tiempo  $\tau$  está relacionado en la disipación de Joule por lo que también se conoce como tiempo de Joule.

### 3.4 Amortiguamiento magnético en dos y tres dimensiones

Hasta este punto, hemos establecido que un campo magnético constante puede suprimir el movimiento de un fluido eléctricamente conductor. Como se ha visto, el movimiento del fluido a través de las líneas de campo magnético, induce corrientes eléctricas que disipan la energía mecánica ocasionando un aumento de la energía térmica, en detrimento de la energía cinética, de manera que la fuerza de Lorentz actúa como una fuerza de fricción.

El resultado final del análisis teórico del amortiguamiento está determinado por la dimensionalidad del modelo, es decir, por la modelación en dos o tres dimensiones. Físicamente, lo que está en juego es la manera en que se modelan las trayectorias de la corriente inducida, las que a su vez están determinadas por la distribución espacial del potencial eléctrico  $\phi$ . En la sección anterior establecimos que en este trabajo utilizaremos un modelo simplificado en dos dimensiones en donde el potencial eléctrico puede considerarse cero en todos lados. Es importante entonces comprender claramente las implicaciones físicas de tal aproximación y por tanto, las limitaciones del modelo.

Como mencionamos previamente, en el caso bidimensional donde el campo yace en el mismo plane del movimiento, la corriente inducida está dada por  $\vec{J} = \sigma(\vec{u} \times \vec{B})$ , siempre y cuando  $\phi = 0$ . Esto nos indica que la corriente inducida apunta en la dirección normal

al plano de movimiento. En tal caso no es necesario, desde el punto de vista matemático especificar la trayectoria de retorno para las corrientes inducidas cuando el potencial electrostático es nulo las componentes  $x$  y  $y$  del momentum lineal experimentan una fuerza de frenado  $-\vec{u}_\perp/\tau$ . Esto trae como consecuencia que la fuerza de Lorentz destruye completamente el momentum del flujo [13]. Un ejemplo de lo anterior es el caso de un chorro laminar sumergido bidimensional bajo un campo magnético uniforme, transversal al flujo [14]. La solución muestra que la fuerza de Lorentz destruye el momentum del chorro y le aniquila completamente a una cierta distancia a partir de su fuente. Otro ejemplo de amortiguamiento magnético en dos dimensiones es el frenado de vórtices estacionarios (*steady streaming*) en un flujo oscilatorio bajo un campo magnético transversal, donde para un campo suficientemente intenso los vórtices desaparecen completamente [15].

La diferencia entre los problemas bidimensionales y los tridimensionales es que en éstos últimos es necesario considerar cómo, a través de la distribución espacial de potencial eléctrico, las corrientes inducidas recirculan dentro del fluido [13]. Es decir, en flujos tridimensionales el potencial eléctrico es distinto de cero. El considerar trayectorias cerradas para la corriente inducida tiene una influencia profunda en el comportamiento del flujo. Davidson mostró [13] que en tal caso ya no es posible destruir el momentum del flujo sino que la fuerza de Lorentz redistribuye el momentum lineal de tal forma que reduce la energía cinética del flujo. De hecho, el momentum lineal se conserva y a diferencia del caso bidimensional, el flujo, por ejemplo, el chorro de fluido, no puede ser frenado completamente por el campo magnético. Esto puede mostrarse de manera sencilla si notamos que

$$\int_V J_i dV = \int_V \nabla \cdot (x_i \vec{J}) dV = \int_S x_i \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.21)$$

ya que en el espacio tridimensional la corriente recircula dentro del volumen  $V$ . De modo que si integramos la fuerza de Lorentz en todo el volumen, tenemos

$$\int_V \vec{F} dV = -\frac{\vec{B}_0}{\rho} \times \int_V \vec{J} dV = 0, \quad (3.22)$$

es decir, el momentum lineal se conserva [13]. Esto se debe a que para cada elemento de fluido que es frenado por la fuerza  $\vec{F}$ , existe otro elemento correspondiente que recibe una aceleración igual pero en sentido opuesto.

En el caso del amortiguamiento magnético de vórtices ocurre un proceso análogo. El que las trayectorias de las corrientes inducidas se cierran garantiza que al menos una componente del momentum angular se conserva. Por lo tanto, la fuerza de Lorentz actúa para redistribuir el momento angular de tal forma que se reduce la energía cinética del vórtice. Sin embargo, la conservación del momentum angular impone un límite inferior en la energía cinética global del flujo y, al igual que el chorro, el vórtice no puede ser destruido por el amortiguamiento magnético [13].

Lo anterior puede mostrarse si calculamos la torca magnética  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ , es decir,

$$\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \times \vec{J}) \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) \vec{J} - (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{B}_0. \quad (3.23)$$

Ya que estamos interesados en la componente de  $\vec{T}$  que es paralela a  $\vec{B}_0$ , calculamos

$$\vec{T} \cdot \vec{B}_0 = \vec{B}_0 \cdot \left( (\vec{B}_0 \times \vec{J}) \times \vec{r} \right) = (\vec{B}_0 \times \vec{J}) \cdot (\vec{r} \times \vec{B}_0) = -B_0^2 (\vec{r}_\perp \cdot \vec{J}_\perp) = -\frac{B_0^2}{2} \nabla \cdot (\vec{r}_\perp^2 \vec{J}) \quad (3.24)$$

e integrando en el volumen  $V$  tenemos

$$\int_V \vec{T} \cdot \vec{B}_0 dV = -\frac{B_0^2}{2} \int_S \vec{r}_\perp^2 \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.25)$$

ya que la corriente recircula dentro del volumen (no hay corrientes que atraviesen la superficie  $S$ ). Este resultado nos dice que no existe torca en la dirección del campo magnético y por tanto la componente del momentum angular en esta dirección se conserva. En otras palabras, la fuerza de Lorentz no puede crear o destruir esta componente del momentum angular.

Tenemos entonces por un lado, que la fuerza de Lorentz disipa la energía cinética del fluido, pero por otro lado el momentum lineal se conserva, al igual que la componente del momentum angular en la dirección del campo magnético. En su explicación, Davidson comenta [13] que la disipación de Joule global  $D$ , al igual que la energía cinética,  $E$ , dependen cuadráticamente de la velocidad, de tal manera que cuando la energía disminuye, la disipación también. Sin embargo, el cambio de la disipación relativa  $D/E$  es negativo, lo que indica que la disipación Óhmica declina más rápido que la energía cinética. La declinación en la disipación relativa,  $D/E$  se logra propagando momentum lineal o angular a lo largo de las líneas de campo magnético. Lo que ocurre es que la fuerza de Lorentz redirecciona el flujo de tal forma que hay un decaimiento en la disipación, cosa que siempre ocurre cuando el momentum lineal o angular se conserva. Un estimado de esta disipación es

$$D \sim \frac{E}{\tau} \left( \frac{\delta}{l} \right), \quad (3.26)$$

en donde  $\delta$  es una escala característica del flujo, y  $l$  es una escala característica en la dirección  $B_0$ . La ecuación (3.26) da una estimación de la deformación del flujo, puesto que si queremos que se conserve el momentum, la disipación debe decaer de tal forma que  $(\delta/l)$  tienda a cero lo que ocasiona que el chorro, en este caso particular, se elongue en dirección del campo magnético como se puede ver en la figura (3.1)

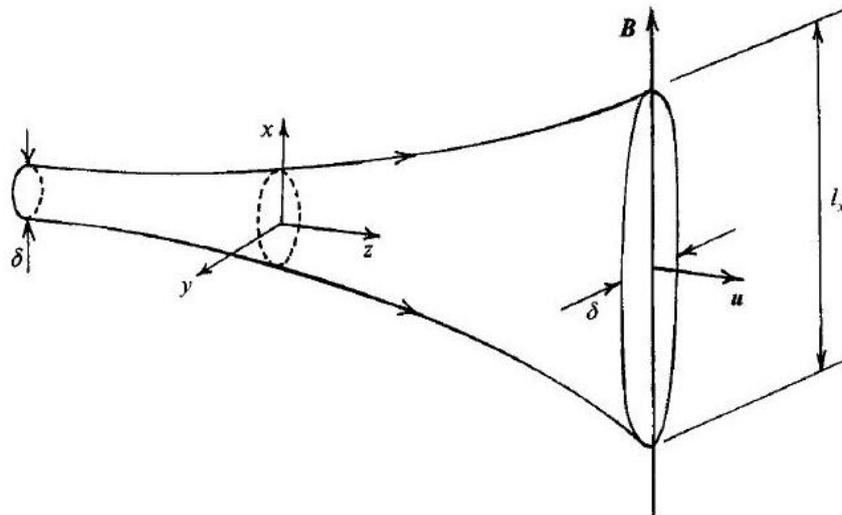


Fig. 3.1: Para minimizar la disipación global  $D$  el chorro se redirecciona en sentido de las líneas del campo magnético [13]

En síntesis, podemos decir que en el amortiguamiento magnético tridimensional, la fuerza de Lorentz no altera el momentum global del fluido (lineal o angular) aunque sí destruye a la energía cinética del flujo. La fuerza de Lorentz ocasiona que el flujo evolucione de tal manera que minimice su disipación de Joule global, lo que se logra propagando momentum y vorticidad a lo largo de las líneas de campo magnético [13].

El análisis tridimensional del amortiguamiento magnético, en particular de las ondas de gravedad puede resultar bastante complejo y va más allá del alcance del presente trabajo. No obstante sus limitaciones, el análisis bidimensional puede aportar resultados interesantes y puede considerarse como un primer acercamiento al problema que en un futuro se espera atacar de manera más completa.

# Amortiguamiento de ondas de gravedad mediante campos magnéticos

En este capítulo vamos a estudiar el amortiguamiento de ondas de gravedad sometidas a campos magnéticos. Comenzaremos repasando brevemente el problema bidimensional de ondas de gravedad bajo un campo magnético que atraviesa verticalmente al fluido conductor [1]. Posteriormente, se considerará un campo magnético orientado en forma longitudinal al flujo, y un tercer caso donde el campo magnético tiene ambas componentes vertical y longitudinal, de la misma magnitud (campo magnético a  $45^\circ$ ). El efecto fundamental de las distintas orientaciones del campo magnético se da en la dirección de las fuerzas que actúan sobre el fluido conductor.

## 4.1 Amortiguamiento con campo magnético vertical

Consideremos una capa infinita de un fluido eléctricamente conductor, por ejemplo un metal líquido de profundidad  $h$ , limitada en la parte inferior por una pared rígida y en la superior por una superficie libre, en contacto con un medio no conductor. Nuestro sistema de referencia se encuentra en la interfase de la superficie libre no perturbada, en donde  $\eta$  son los desplazamientos verticales del fluido respecto a esta superficie de equilibrio, como lo muestra la figura (4.1). La capa de fluido se encuentra expuesta a un campo magnético constante que apunta en la dirección vertical, es decir,  $\vec{B} = B_0 \hat{e}_y$ , y nos interesa estudiar el amortiguamiento magnético de ondas de gravedad que se propagan en la superficie del fluido conductor. Vamos a considerar que el flujo del fluido conductor es bidimensional teniendo lugar en el plano  $(x, y)$ , en donde  $x$  crece en la dirección horizontal, y  $y$  en la dirección vertical, de tal forma que la velocidad se expresa como  $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$ . Además supondremos que el fluido es inviscido, incompresible, y de conductividad eléctrica constante. Por otra parte, ya que trabajaremos con metales líquidos a escala de laboratorio, el número de Reynolds magnético es muy pequeño de tal manera que es posible despreciar efectos del campo magnético inducido.

Supondremos que las perturbaciones a la velocidad y a la presión son de amplitud pequeña, de tal manera que el problema pueda ser linealizado.

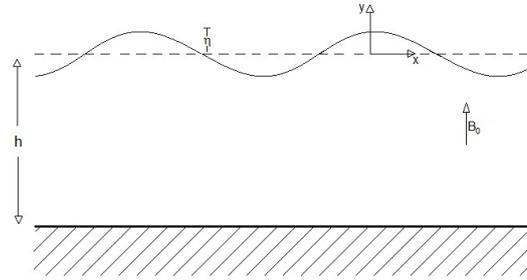


Fig. 4.1: El campo magnético apunta en la dirección  $y$

Finalmente, ya que el movimiento de la onda plana es bidimensional y el campo magnético  $\vec{B}_0$  se encuentra en el plano del movimiento, la corriente inducida será perpendicular al plano de movimiento. De acuerdo a la discusión del capítulo 3, supondremos que el potencial eléctrico es cero ( $\phi = 0$ ), de manera que la fuerza e Lorentz y la ley de Ohm se pueden escribir en la forma

$$\vec{J} = \sigma (\vec{u} \times \vec{B}_0), \quad (4.1)$$

$$\vec{F} = -\sigma \vec{B}_0^2 \vec{u}_\perp. \quad (4.2)$$

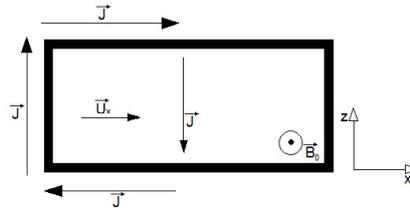


Fig. 4.2: Las corrientes en dirección  $z$  cierran a través de paredes conductoras

Las componentes de la velocidad satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (4.3)$$

mientras que la ecuación de balance de momentum linealizada tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p'}{\rho} \right) - \frac{u_x \hat{e}_x}{\tau}. \quad (4.4)$$

en donde  $\tau = \rho/\sigma B_0^2$ , como ya se vio en el capítulo anterior es el tiempo característico del proceso de amortiguamiento magnético. Nótese que en este caso la fuerza de Lorentz apunta en dirección  $x$ . En la ecuación (4.4)  $p'$  es la perturbación de la presión sobre la distribución hidrostática de equilibrio. Como se mencionó en el capítulo anterior, supondremos que las fuerzas viscosas son despreciables. Las condiciones de frontera se denominan como cinemática, dinámica y de no penetración. La primera relaciona los desplazamientos verticales de la superficie libre  $\eta$  con la velocidad vertical en esos puntos, y nos indica que la superficie libre nunca se desprende, la segunda establece un balance de fuerzas en la interfase a partir de la ecuación de Bernoulli, y la última dice que el fluido no penetra la pared del fondo [16]. Estas condiciones se expresan, respectivamente, como

$$u_y(y=0) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (4.5a)$$

$$p(y=0) = \rho g \eta, \quad (4.5b)$$

$$u_y(y=-h) = 0, \quad (4.5c)$$

en donde como ya se mencionó,  $\eta(x, t)$  es el desplazamiento vertical de la superficie libre. Se proponen soluciones en forma de ondas viajeras que se mueven en la dirección  $x$ , es decir,

$$\eta = \eta_0 \exp i(kx + \omega t), \quad (4.6a)$$

$$u_y = H(y) \exp i(kx + \omega t), \quad (4.6b)$$

$$p = \rho \Pi(y) \exp i(kx + \omega t), \quad (4.6c)$$

en donde  $k$  y  $\omega$  son el número de onda y la frecuencia angular de las ondas. Al resolver la ecuación de balance (4.4) con las condiciones de frontera (4.5) y las suposiciones (4.6), se obtiene que la relación de dispersión que caracteriza a la onda amortiguada es [1]

$$\omega^2 = \alpha g \tanh(\alpha h), \quad (4.7a)$$

$$N = \frac{1}{\omega \tau} = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \omega}, \quad (4.7b)$$

$$\alpha^2 = k^2 \frac{i}{N + i}, \quad (4.7c)$$

donde  $N$  es el parámetro de interacción que compara las fuerzas electromagnéticas con respecto a las fuerzas inerciales. Nótese que el parámetro  $N$  puede interpretarse como el cociente del tiempo característico ( $1/\omega$ ) y el tiempo de frenado magnético  $\tau$ . Se puede ver que  $\omega$  es en general complejo, donde la parte imaginaria está relacionada con la amortiguación de las oscilaciones, y la parte real con su desfase. Podemos analizar

dos casos especiales, en el primer caso consideramos el límite  $N = 0$  y obtenemos ondas de gravedad no amortiguadas [16]. En dicho límite tenemos [16],

$$\omega_0^2 = kg \tanh(kh). \quad (4.8)$$

El otro caso especial es para aguas poco profundas (aguas someras) donde  $kh \ll 1$ , indica que la profundidad es mucho menor que la longitud de onda  $\lambda$ . En este caso se encuentra [1]:

$$\omega = \frac{i}{2\tau} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)}. \quad (4.9)$$

Podemos ver de esta última expresión que la oscilación se amortigua en un tiempo de orden  $t = 2\tau$ , y es críticamente amortiguada cuando  $\omega_0 = \frac{1}{2\tau}$ , ya que en este caso  $\omega$  solamente será imaginario (no hay fase), y la onda será frenada directamente sin permitirle oscilar.

El comportamiento de  $\omega$  puede verse en las gráficas (4.3a) y (4.3b) en donde se evalúa la parte real  $\omega_r$ , y la parte imaginaria  $\omega_i$ , normalizadas por  $\omega_0$ , contra el parámetro de interacción  $N_0$ , es decir, el parámetro  $N$  evaluado en  $\omega_0$ , que representa la intensidad de la fuerza de frenado. Se puede observar que a medida que aumenta el parámetro de interacción, la oscilación representada por  $\omega_r$  se desfaza hacia frecuencias más pequeñas, y los tiempos de amortiguamiento representados por el inverso de  $\omega_i$  disminuyen hasta llegar a un punto crítico.

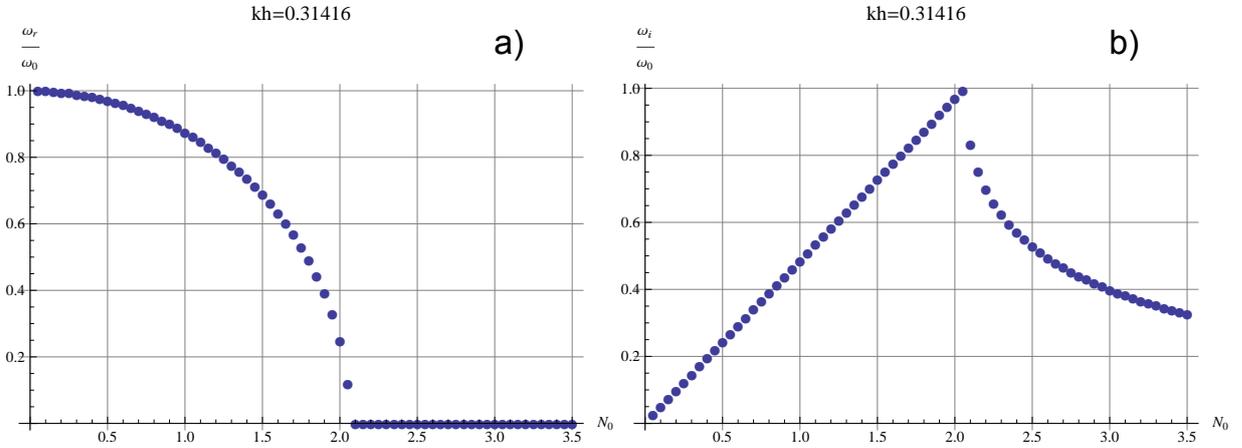
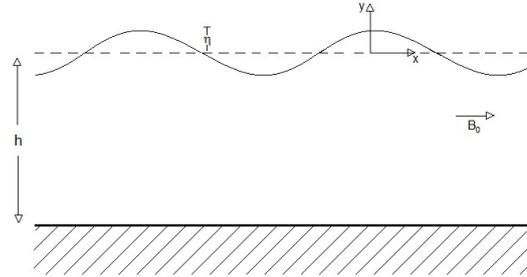
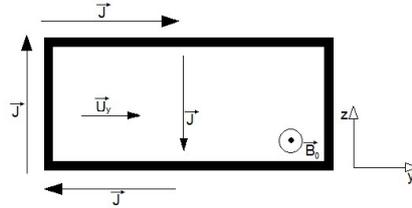


Fig. 4.3: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$ , para el caso  $B_y$ , cuando  $kh = 0.31416$

## 4.2 Amortiguamiento con un campo magnético horizontal

En esta sección se va a considerar el caso en que el campo magnético está orientado en la dirección horizontal  $x$ ,  $\vec{B} = B_0 \hat{e}_x = \vec{B}_x$ . Ya que este caso no ha sido analizado en la literatura, haremos el tratamiento con más detalle.

Fig. 4.4: El campo magnético apunta en la dirección  $x$ Fig. 4.5: Las corrientes en dirección  $z$  cierran através de paredes conductoras

Dado que el fluido se mueve en el plano  $x - y$  y que el campo magnético es horizontal, la fuerza de Lorentz apunta en dirección vertical, de manera que la ecuación de balance de momentum linealizada puede escribirse como

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p'}{\rho} \right) - \frac{u_y}{\tau} \hat{e}_y. \quad (4.10)$$

Si aplicamos el rotacional a la ecuación (4.10) obtenemos

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\frac{\partial u_y}{\partial x} \hat{e}_k \quad (4.11)$$

lo que muestra que el flujo no es irrotacional, por lo que es posible suponer que el flujo es potencial. Entonces la ecuación de balance de momentum a resolver es la ecuación (4.10) con las mismas condiciones de frontera que en el caso anterior, excepto por que ahora debe considerar la fuerza de Lorentz en la dirección vertical. De esta forma, tenemos

$$u_y(y = -h) = 0, \quad (4.12)$$

$$u_y(y = 0) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (4.13)$$

$$p(y=0) = \rho g \eta_0 + \frac{u_y(0)}{\tau} \eta_0 \rho. \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) nos indica que la diferencia de presión en la superficie involucra tanto a la fuerza de gravedad como a la componente vertical de la fuerza de Lorentz, excluyendo los efectos de tensión superficial.

Resolvemos el problema proponiendo soluciones en forma de onda, es decir,

$$\eta = \eta_0 \exp i(kx + \omega t), \quad (4.15a)$$

$$u_y = H(y) \exp i(kx + \omega t), \quad (4.15b)$$

$$u_x = M(y) \exp i(kx + \omega t), \quad (4.15c)$$

$$p = \rho \Pi(y) \exp i(kx + \omega t). \quad (4.15d)$$

Ahora, buscamos obtener una ecuación diferencial para una sola función. Para esto aplicamos la divergencia a la ecuación de balance (4.10) y se obtiene que

$$\Pi''(y) - k^2 \Pi(y) = -\frac{H'}{\tau}. \quad (4.16)$$

Ahora para eliminar  $H'$  nos fijamos en la componente  $x$  de la ecuación de balance, que nos dice que

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.17)$$

Derivando con respecto a  $x$  y utilizando la ecuación de continuidad (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (4.18)$$

Utilizando (4.15) se encuentra que

$$H'(y) = i \frac{k^2 \Pi(y)}{\omega} \quad (4.19)$$

y sustituyendo en la ecuación (4.16) se obtiene finalmente

$$\Pi'' - k^2 \Pi = -\frac{ik^2 \Pi}{\tau \omega}, \quad (4.20)$$

lo que podemos expresar como

$$\Pi'' - \alpha^2 \Pi = 0 \quad (4.21)$$

donde

$$\alpha^2 = k^2 \left( \frac{\omega\tau - i}{\omega\tau} \right) \dots \quad (4.22)$$

La solución para la ecuación (4.21) es de la forma

$$\Pi(y) = A \cosh(\alpha y) + B \sinh(\alpha y). \quad (4.23)$$

La condición dinámica se puede escribir de la siguiente manera

$$\rho\Pi(0) = \rho g\eta_0 + \rho\eta_0 \frac{H(0)}{\tau}, \quad (4.24)$$

de donde se obtiene, la constante  $A$

$$A = g\eta_0 + \frac{i\omega\eta_0^2}{\tau}. \quad (4.25)$$

La constante  $B$  se puede obtener a partir de la condición cinemática, que puede expresarse como

$$H(0) = i\omega\eta_0. \quad (4.26)$$

Para poderla aplicar debemos entonces escribir  $\Pi$  en términos de  $H$ ; para esto, nos fijamos en la componente vertical  $y$  de la ecuación de balance de momento

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{u_y}{\tau} \quad (4.27)$$

de donde, al sustituir (4.15) se obtiene

$$u_y \left( i\omega + \frac{1}{\tau} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.28)$$

de modo que

$$H(y) = -\Pi'(y) \left( \frac{\tau}{i\omega\tau + 1} \right). \quad (4.29)$$

Aplicando finalmente la ecuación de frontera cinemática en  $y = 0$ , se obtiene

$$H(0) = i\omega\eta_0 = -\Pi'(0) \left( \frac{\tau}{i\omega\tau + 1} \right) \quad (4.30)$$

en donde podemos ver que

$$\Pi' = \alpha (A \sinh(\alpha y) + B \cosh(\alpha y)) \quad (4.31)$$

$$\Pi'(0) = \alpha B \quad (4.32)$$

y por lo tanto

$$B = \frac{\omega\eta_0(\omega\tau - i)}{\alpha\tau}. \quad (4.33)$$

Por último de la condición de no penetración se obtiene la relación de dispersión

$$H(-h) = \Pi'(-h) \left( \frac{\tau}{i\omega\tau + 1} \right) = 0, \quad (4.34)$$

esto es

$$\alpha (A \sinh(-\alpha h) + B \cosh(-\alpha h)) = 0. \quad (4.35)$$

Finalmente obtenemos

$$\tanh(\alpha h) = \frac{B}{A}, \quad (4.36)$$

que es justamente la relación de dispersión donde los valores de  $A$  y  $B$  están definidos en las ecuaciones (4.25) y (4.33) respectivamente.

### Límite de aguas poco profundas

Explícitamente la relación de dispersión puede escribirse como

$$\tanh(\alpha h) = \frac{\frac{\omega\eta_0(\omega\tau - i)}{\alpha\tau}}{g\eta_0 + \frac{i\omega\eta_0^2}{\tau}}, \quad (4.37)$$

de manera simplificada tenemos

$$\tanh(\alpha h) = \frac{\omega^2\tau - i\omega}{\alpha\tau \left( g + \frac{i\omega\eta_0}{\tau} \right)}. \quad (4.38)$$

Si suponemos que las perturbaciones son mucho menores que la longitud de onda, tal que  $\eta_0 \ll \lambda$ , incluso mucho menor respecto a la profundidad  $\eta_0 \ll h$ , podemos entonces despreciar estas contribuciones de la expresión anterior. Además en el caso de aguas poco profundas  $\alpha h \gg 1$ , por lo que  $\tanh(\alpha h) \approx \alpha h$ , de tal forma que podemos escribir

$$\alpha h = \frac{\omega^2\tau - i\omega}{\alpha\tau g}. \quad (4.39)$$

Ahora sustituimos el valor de  $\alpha$  de la ecuación (4.22) para obtener

$$hk^2 \left( \frac{\omega\tau - i}{\omega\tau} \right) = \frac{\omega^2\tau - i\omega}{\tau g} \quad (4.40)$$

ésto se cumple cuando  $\omega$  es real

$$\omega^2 = gk^2h \quad (4.41)$$

es decir que los efectos de amortiguamiento no juegan un papel importante a medida que la profundidad decrece, teniendo así meramente ondas de gravedad, a diferencia al

ejemplo anterior en el que en aguas poco profundas tenemos un tiempo de decaimiento que involucra al tiempo  $\tau$ , ésto lo podemos ver claramente en las siguientes gráficas en donde para parámetros de interacción no muy grandes,  $\omega_r$  permanece cercano a  $\omega_0$  y  $\omega_i$  permanece cercano a cero.

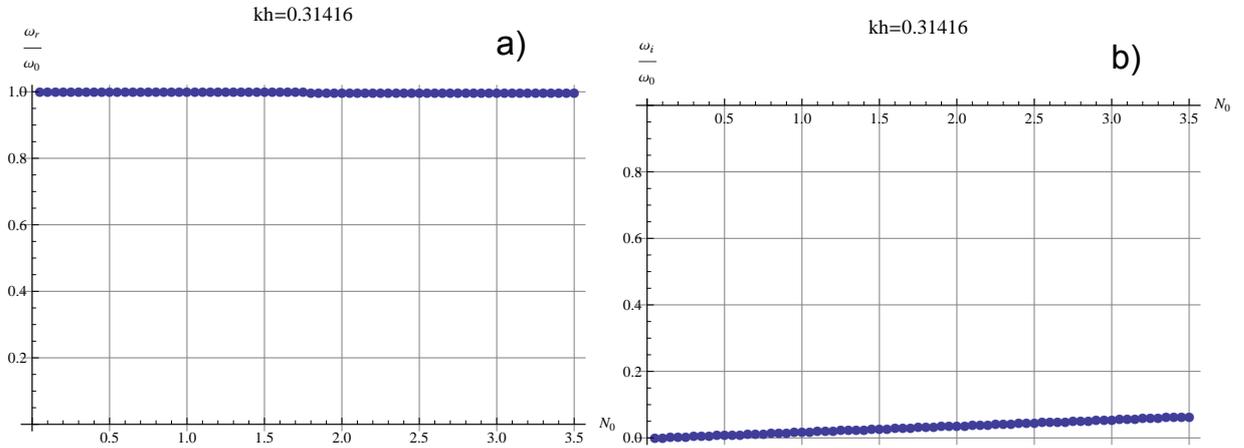


Fig. 4.6: La parte imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$ , para el caso de un campo magnético vertical, cuando  $kh = 0.31416$

### 4.3 Amortiguamiento con campo magnético inclinado

En esta sección analizaremos una combinación de los dos casos anteriores. Consideraremos la superposición de un campo magnético de magnitud  $B_0$  que apunta en la dirección vertical  $y$ , y otro campo de la misma magnitud orientado en la dirección horizontal  $x$ , de tal forma que vamos a tener un campo magnético inclinado a  $45^\circ$ , es decir,  $\vec{B} = B_0\hat{e}_x + B_0\hat{e}_y$ . Del análisis de los casos anteriores, el comportamiento que es esperado es que en aguas poco profundas el campo magnético vertical sea el dominante, y a medida que la profundidad aumente la otra componente del campo magnético juegue un papel más importante.

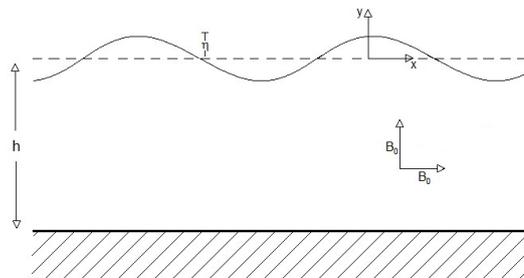


Fig. 4.7: El campo magnético tiene componentes  $x$  y  $y$  de la misma magnitud

Al igual que en los casos anteriores, las corrientes viajarán en la dirección perpendicular al plano de movimiento, y consideraremos que el fluido no está limitado o bien que las corrientes cerrarán através de las paredes perfectamente conductoras. En este caso la fuerza de Lorentz por unidad de masa,  $\vec{F}/\rho$  de la siguiente manera

$$\frac{\vec{F}}{\rho} = -\frac{1}{\tau} (u_x - u_y) \hat{e}_x - \frac{1}{\tau} (-u_x + u_y) \hat{e}_y \quad (4.42)$$

Al igual que en los casos anteriores, la fuerza de Lorentz resulta irrotacional, no pudiendo así aplicarse la teoría de flujo potencial. La ecuación de balance de momentum es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\tau} (u_x - u_y) \hat{e}_x - \frac{1}{\tau} (-u_x + u_y) \hat{e}_y. \quad (4.43)$$

y las condiciones de frontera son

1. Condición de no penetración:

$$u_y(y = -h) = 0. \quad (4.44)$$

2. Condición cinemática linealizada:

$$u_y(0) = \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (4.45)$$

3. Condición dinámica linealizada:

$$p(y = 0) = \rho g \eta + \frac{1}{\tau} (-u_x(0) + u_y(0)), \quad (4.46)$$

donde el cambio en la presión se debe a un balance de las fuerzas verticales en la superficie.

De la misma manera que en los casos anteriores, proponemos soluciones en forma de onda, es decir,

$$\eta = \eta_0 \exp i(kx + \omega t), \quad (4.47a)$$

$$u_y = H(y) \exp i(kx + \omega t), \quad (4.47b)$$

$$u_x = M(y) \exp i(kx + \omega t), \quad (4.47c)$$

$$p = \rho \Pi(y) \exp i(kx + \omega t). \quad (4.47d)$$

El procedimiento de solución es semejante, a los casos anteriores. Primeramente nos fijamos en la componente horizontal  $x$  de la ecuación (4.43):

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\tau} u_x + \frac{1}{\tau} u_y. \quad (4.48)$$

Derivando con respecto a  $x$ , y utilizando la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (4.49)$$

y sustituyendo las ecuaciones (4.47) llegamos a

$$\Pi = \frac{H'}{k^2} \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right) - \frac{i}{k\tau} H. \quad (4.50)$$

Derivando con respecto a  $y$

$$\Pi' = \frac{H''}{k^2} \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right) - \frac{i}{k\tau} H', \quad (4.51)$$

ya que nos interesa dejar todo en función de  $H$ , nos fijamos en la componente vertical de la ecuación de balance

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\tau} (-u_x + u_y). \quad (4.52)$$

Derivando con respecto a  $x$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (4.53)$$

y sustituyendo (4.47) se obtiene

$$i\omega(ik)H = -(ik)\Pi' - \frac{1}{\tau} H' - \frac{ik}{\tau} H. \quad (4.54)$$

Sustituimos  $\Pi'$  de (4.51) y encontramos

$$i\omega(ik)H = -(ik) \left( \frac{H''}{k^2} \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right) - \frac{i}{k\tau} H' \right) - \frac{1}{\tau} H' - \frac{ik}{\tau} H. \quad (4.55)$$

Reordenando llegamos a la siguiente ecuación diferencial

$$H'' + \frac{2k}{\omega\tau - i} H' - k^2 H = 0, \quad (4.56)$$

cuya solución es de la forma

$$H(y) = A \exp(\beta y) \cosh(\alpha y) + B \exp(\beta y) \sinh(\alpha y), \quad (4.57)$$

donde

$$\alpha^2 = k^2 \left( 1 + \frac{1}{(\omega\tau - i)^2} \right), \quad \beta = -k \frac{\omega\tau + i}{(\omega\tau)^2 + 1}. \quad (4.58)$$

Para obtener la constante A, aplicamos la condición cinemática que puede escribirse como

$$H(0) = \frac{\partial \eta}{\partial t} = i\omega\eta_0, \quad (4.59)$$

obteniendo

$$A = i\omega\eta_0. \quad (4.60)$$

Para obtener la constante B, utilizamos la condición dinámica, es decir

$$p(y=0) = \rho g\eta_0 + \left(\frac{u_y}{\tau} - \frac{u_x}{\tau}\right) \rho\eta_0, \quad y=0. \quad (4.61)$$

Ya que necesitamos una expresión para  $u_x$ , consideramos la componente horizontal de la ecuación de balance de momentum

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} - \frac{u_x}{\tau} + \frac{u_y}{\tau}. \quad (4.62)$$

Utilizando las ecuaciones (4.47), encontramos

$$i\omega u_x + \frac{u_x}{\tau} = -(ik)\frac{p}{\rho} + \frac{u_y}{\tau}, \quad (4.63)$$

y despejando  $u_x$ , obtenemos

$$u_x = \left(-i\frac{kp}{\rho} + \frac{u_y}{\tau}\right) \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)^{-1}. \quad (4.64)$$

Al sustituir en la ecuación (4.61) llegamos a

$$p(y=0) = \rho g\eta_0 + \frac{u_y}{\tau} \rho\eta_0 - \frac{\rho\eta_0}{\tau} \left(-i\frac{kp}{\rho} + \frac{u_y}{\tau}\right) \left(\frac{\tau}{i\omega\tau + 1}\right), \quad y=0 \quad (4.65)$$

y utilizando las ecuaciones (4.47), podemos escribir

$$\rho\Pi(0) = \rho g\eta_0 + \frac{H(0)}{\tau} \rho\eta_0 + i\frac{k\eta_0}{\tau} \rho\Pi(0) \left(\frac{\tau}{i\omega\tau + 1}\right) - \frac{\rho\eta_0}{\tau^2} H(0) \left(\frac{\tau}{i\omega\tau + 1}\right), \quad (4.66)$$

de donde

$$\Pi(0) \left(\frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{(i\omega\tau + 1)}\right) = g + H(0) \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau + 1)}\right). \quad (4.67)$$

De la ecuación (4.50) podemos escribir  $\Pi(y)$  en función de  $H(y)$  y  $H'(y)$ , obteniendo

$$\left(\frac{H'(0)}{k^2} \left(-i\omega - \frac{1}{\tau}\right) - \frac{i}{k\tau} H(0)\right) \left(\frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{i\omega\tau + 1}\right) = g + H(0) \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau + 1)}\right). \quad (4.68)$$

Para evaluar en  $y=0$  recordamos que

$$H(y) = A \exp(\beta y) \cosh(\alpha y) + B \exp(\beta y) \sinh(\alpha y), \quad (4.69a)$$

$$H(0) = A, \quad (4.69b)$$

$$H'(0) = \beta H(y) + A \exp(\beta y) \alpha \sinh(\alpha y) + B \exp(\beta y) \alpha \cosh \alpha y, \quad (4.69c)$$

$$H'(0) = \beta A + B \alpha. \quad (4.69d)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.68) obtenemos

$$\left( \frac{(\beta A + \alpha B)}{k^2} \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right) - \frac{i}{k\tau} A \right) \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{(i\omega\tau + 1)} \right) = g + A \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau + 1)} \right) \quad (4.70)$$

y haciendo un poco de álgebra

$$B = k^2 \frac{\left( g + A \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau + 1)} \right) \right) \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{i\omega\tau + 1} \right)^{-1} + \frac{i}{k\tau} A - \frac{\beta A}{\alpha}}{\alpha \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right)}. \quad (4.71)$$

Finalmente aplicando la condición de no deslizamiento obtenemos la relación de dispersión

$$H(-h) = 0, \quad (4.72)$$

esto es

$$A \cosh(\alpha h) = B \sinh(\alpha h) \quad (4.73)$$

de donde

$$\tanh \alpha h = \frac{A}{B}, \quad (4.74)$$

estando  $A$  y  $B$  dadas por las ecuaciones (4.60) y (4.71), respectivamente.

### Límite de aguas poco profundas

Previamente encontramos que en el límite de aguas poco profundas el campo magnético horizontal no ejerce ningún efecto de frenado. En el presente caso, esperamos que este límite tenga un comportamiento dominado meramente por la componente vertical del campo y lleguemos al primer caso de campo magnético vertical.

Tenemos que

$$\frac{B}{A} = \frac{k^2 \left( g + A \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau + 1)} \right) \right) \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{i\omega\tau + 1} \right)^{-1} + \frac{i}{k\tau} A - \frac{\beta A}{\alpha}}{A}, \quad (4.75)$$

o bien

$$\frac{B}{A} = k^2 \frac{\left( \frac{g}{A} + \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau+1)} \right) \right) \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{i\omega\tau+1} \right)^{-1} + \frac{i}{k\tau}}{\alpha \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right)} - \frac{\beta A}{\alpha}. \quad (4.76)$$

Sustituyendo el valor de  $A$  encontramos

$$\frac{B}{A} = k^2 \frac{\left( \frac{g}{i\omega\eta_0} + \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(i\omega\tau+1)} \right) \right) \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{ik}{i\omega\tau+1} \right)^{-1} + \frac{i}{k\tau}}{\alpha \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right)} - \frac{\beta i\omega\eta_0}{\alpha}. \quad (4.77)$$

Ya que estamos considerando perturbaciones muy pequeñas, es decir que  $\eta_0$  es despreciable en comparación a la profundidad  $h$  y a la longitud de onda  $\lambda$ , podemos simplificar de la forma

$$\frac{B}{A} = k^2 \frac{\frac{g}{i\omega\eta_0} \left( \frac{1}{\eta_0} \right)^{-1}}{\alpha \left( -i\omega - \frac{1}{\tau} \right)}, \quad (4.78)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k^2 g}{-\alpha(i\omega) \left( i\omega + \frac{1}{\tau} \right)}, \quad (4.79)$$

de modo que la relación de dispersión queda

$$\tanh(\alpha h) = -\alpha \frac{-\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}{k^2 g}. \quad (4.80)$$

Pero en el caso de aguas poco profundas  $\tanh(\alpha h) \simeq \alpha h$ , por tanto la ecuación se puede reescribir

$$\alpha h = -\alpha \frac{-\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}{k^2 g}. \quad (4.81)$$

Si denominamos  $\omega_r$  y  $\omega_i$  a la parte real e imaginaria de  $\omega$ , respectivamente, resolvemos la ecuación anterior, encontramos

$$\omega_i = \frac{1}{2\tau}, \quad (4.82)$$

$$\omega_r = \sqrt{k^2 g h + \left( \frac{1}{2\tau} \right)}. \quad (4.83)$$

Podemos ver que en este límite, el amortiguamiento (representado por la parte imaginaria) coincide exactamente con el primer caso donde el campo magnético es vertical, con tiempos de amortiguamiento de orden  $2\tau$ . Además, la fase también coincide ya que para aguas poco profundas las ondas de gravedad cumplen que  $\omega_0^2 = k^2 g h$ . Esto lo podemos verificar en las siguientes gráficas, donde observamos un comportamiento similar al caso  $B_y$ , en donde  $\omega_r$  tiende a cero conforme  $N_0$  crece, y  $\omega_i$  crece hasta un punto crítico.

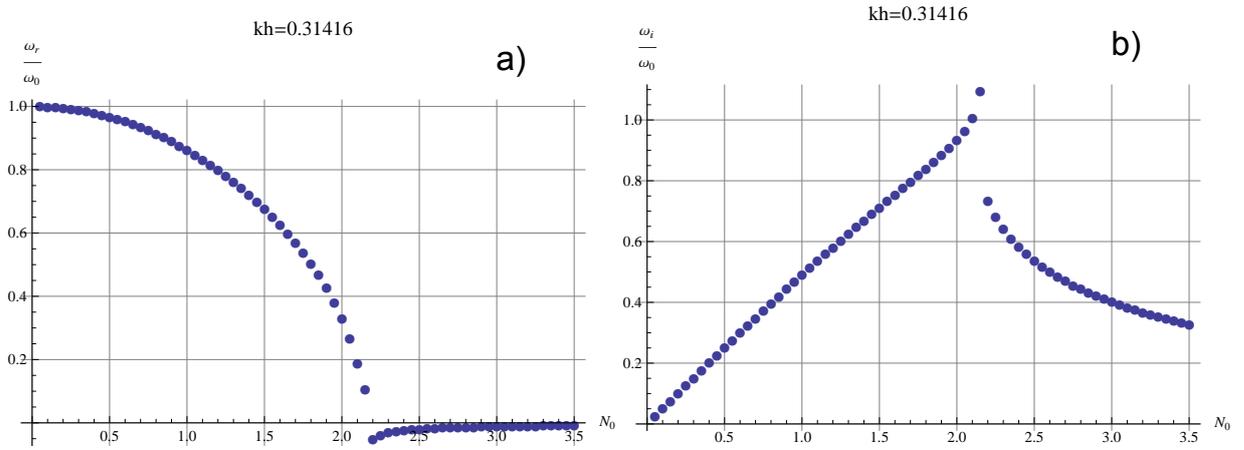


Fig. 4.8: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$ , para el caso  $B_{xy}$ , cuando  $kh = 0.31416$

## 4.4 Resultados Analíticos

Ahora analizaremos los tres casos obtenidos en las secciones anteriores. Como se ha hecho anteriormente, vamos a graficar la parte real e imaginaria de  $\omega$  normalizada con respecto a  $\omega_0$  que es la frecuencia angular de ondas de gravedad no amortiguada, donde la parte real  $\omega_r$  representa la fase de la oscilación, y  $\omega_i$  es la relacionada con la amortiguación.

Empezaremos analizando casos de aguas poco profundas  $kh \ll 1$  en donde variaremos la intensidad del campo magnético expresado a través del parámetro de interacción  $N_0$ . Lo que se podrá ver en estas gráficas, es que a medida que se aumenta el campo magnético la componente de amortiguamiento  $\omega_i$  crece, y la componente  $\omega_r$  decrece, lo que indica que estamos amortiguando la oscilación al alargar sus periodos, y disminuir la amplitud. Si el campo magnético sigue creciendo, la onda llegará a amortiguarse críticamente. Posteriormente, se considerarán casos a profundidades mayores, para analizar la manera en que el amortiguamiento se ve afectado.

Vamos a graficar las tres relaciones de dispersión que se han obtenido, donde  $B_y$  representará el caso donde se tiene únicamente el campo magnético vertical,  $B_x$  el caso donde se tiene el campo magnético horizontal, y  $B_{xy}$  el caso del campo inclinado. Las relaciones de dispersión para los casos anteriores serán comparadas con la relación de dispersión a aguas poco profundas que viene dada en la ecuación (4.9), y que vamos a denotar como  $B_L$ . Se ha elegido esta última expresión como referencia, puesto que ninguna de las tres configuraciones alcanza tiempos de amortiguamiento menores a los que presenta este caso. Primero analizamos un caso de aguas someras en donde  $kh = 0.31416$ . En la misma gráfica aparecerán los casos  $B_L$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_{xy}$ , y con el fin de visualizar el comportamiento de  $\omega_r$  y  $\omega_i$  tanto a valores pequeños de  $N_0$  ( $0 \leq N_0 \leq 3.5$ ) como a valores grandes ( $3.5 < N_0 \leq 25$ ), se presentarán dos pares de gráficas para cada uno de los rangos de  $N_0$ . En la gráfica (4.9a) observamos que para el caso  $B_x$  (campo horizontal),  $\omega_r/\omega_0$  es prácticamente igual a 1, y únicamente para valores grandes de  $N_0$  (fig 4.9c) se observa una desviación de este valor. Por su parte,  $\omega_i/\omega_0$  crece linealmente con  $N_0$  a una

tasa mucho menor que la correspondiente a los otros casos. De hecho, no se alcanza a observar para qué valor de ( $N_0 > 25$ ) se presenta el amortiguamiento crítico. Esto nos dice que el campo horizontal afecta el movimiento sólo para  $N_0$  suficientemente grande. Por otro lado, los casos  $B_y$  y  $B_{xy}$  vemos que se comportan de manera similar al caso  $B_L$ , para  $N_0$  pequeños y grandes. Recordemos que en el límite dado por el caso  $B_L$  ( ecuación (4.9)), el amortiguamiento es crítico cuando  $N_0 = 2$ ; esto se observa para las gráficas de  $\omega_r/\omega_0$ , puesto que para valores  $N_0 > 2$  se tiene que  $\omega_r = 0$ , lo que significa que la onda deja de oscilar, mientras que en las gráficas de  $\omega_i/\omega_0$  se puede ver que para  $N_0 = 2$  el amortiguamiento es máximo y empieza a decaer. Hay que mencionar que los valores negativos que se observan en las gráficas (4.9a) y (4.9c), así como los valores encima de 1 en la gráfica (4.9b) son errores numéricos.

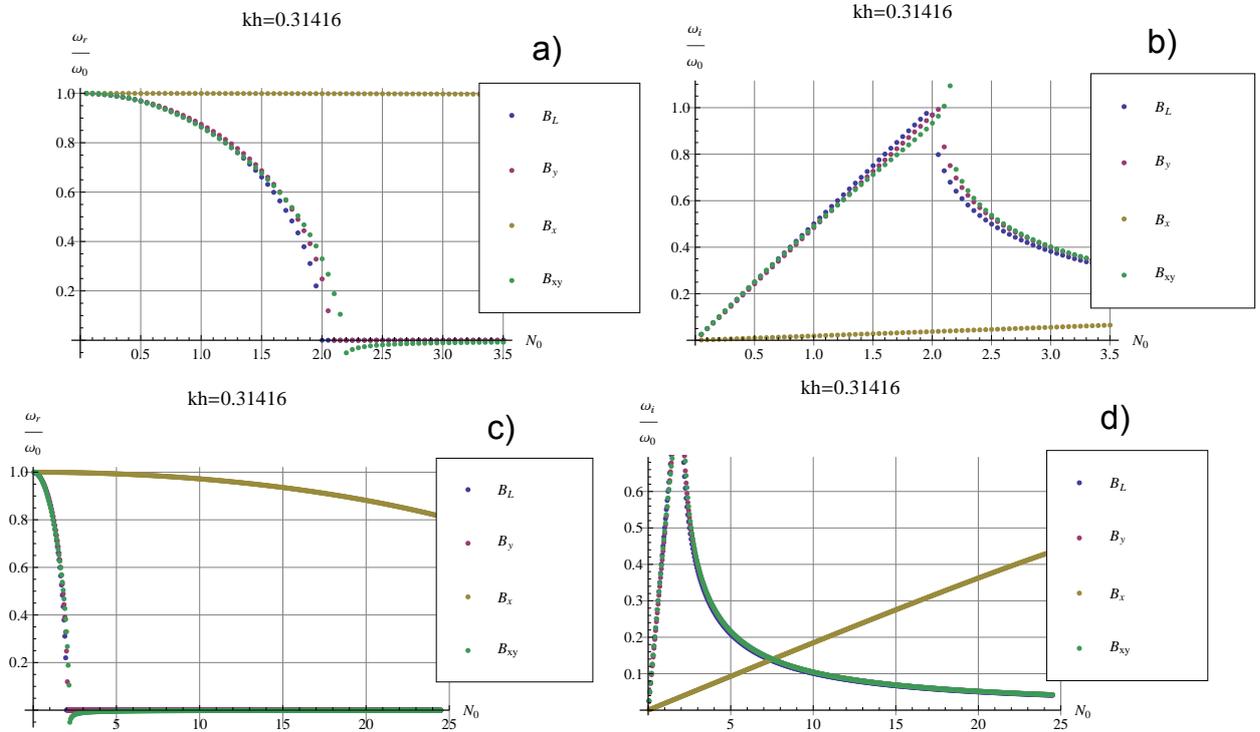


Fig. 4.9: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 0.31416$

En el siguiente caso incrementamos ligeramente la profundidad, es decir,  $kh = 0.62832$ . En la gráfica (4.10b) podemos ver como en el caso  $B_x$  la tasa de crecimiento de  $\omega_i/\omega_0$  es ligeramente mayor que en el caso de  $kh = 0.31416$ ; esto significa que el campo magnético horizontal empieza a manifestarse en los efectos de frenado. De hecho, si nos fijamos en la gráfica (4.10d) para  $N_0$  grandes, estos efectos son muy importantes, teniendo un máximo de amortiguamiento alrededor de  $N_0 \simeq 10$ . Nótese que este máximo no amortigua críticamente a la oscilación, puesto que si nos fijamos en la gráfica (4.10c) se observa que  $\omega_r/\omega_0$  no se hace cero. Para los casos  $B_y$  y  $B_{xy}$  se puede observar que su comportamiento empieza a diferir ligeramente respecto al caso  $B_L$ . Tenemos que los valores críticos de amortiguación de estos dos casos empiezan a alejarse de  $N = 2$ . También se tiene que el caso  $B_y$  alcanza el amortiguamiento crítico a  $N_0$  menores que el caso  $B_{xy}$ ,

como se observa en las gráficas (4.10a) y (4.10b). Esto puede interpretarse como si la componente horizontal de campo magnético de la configuración  $B_{xy}$ , actúa en detrimento del amortiguamiento para ( $N_0 > 1$ ). Obsérvese sin embargo, que para  $N_0$  pequeños, por ejemplo  $N_0 < 0.5$  los casos  $B_y$  y  $B_{xy}$  se comportan muy similares al caso límite  $B_L$ .

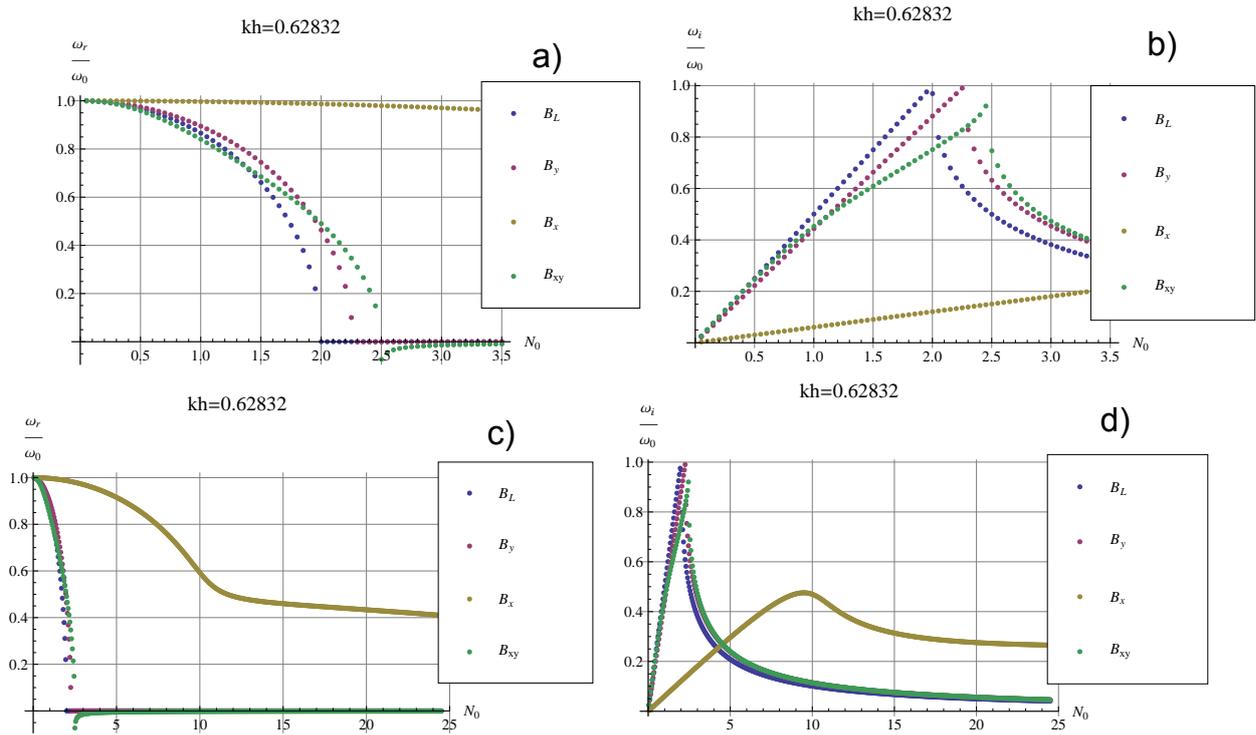


Fig. 4.10: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 0.62832$

Incrementando un poco más la profundidad, es decir,  $kh = 1.25664$ , podemos ver de la gráfica (4.11b) que en el caso  $B_x$   $\omega_i/\omega_0$  toma valores significativos, es decir, comparables con las otras dos configuraciones, inclusive para  $N_0$  pequeños. Sin embargo, su amortiguamiento máximo alrededor de  $N_0 \simeq 4$ , no amortigua críticamente la oscilación (ver gráficas (4.11c) y (4.11d)). Por otro, lado podemos ver que el caso  $B_{xy}$  se comporta muy similar al límite  $B_L$  para  $N_0$  pequeños, y empieza a diferir respecto a este a medida que el campo magnético se hace más intenso, por ejemplo para  $N_0 > 0.5$ , como lo muestra la gráfica (4.11b) . Para el caso  $B_y$ , se tiene que su comportamiento empieza a alejarse del límite  $B_L$  teniendo  $\omega_i/\omega_0$  un crecimiento más lento, pues como se esperaba a mayor profundidad el amortiguamiento es menor. Y al igual que en el caso pasado,  $B_{xy}$  amortigua mejor que  $B_y$  para  $N_0$  pequeños, pero no para  $N_0$  grandes, llegando así más rápidamente al amortiguamiento crítico, como se ve en las gráficas (4.11c) y (4.11d).

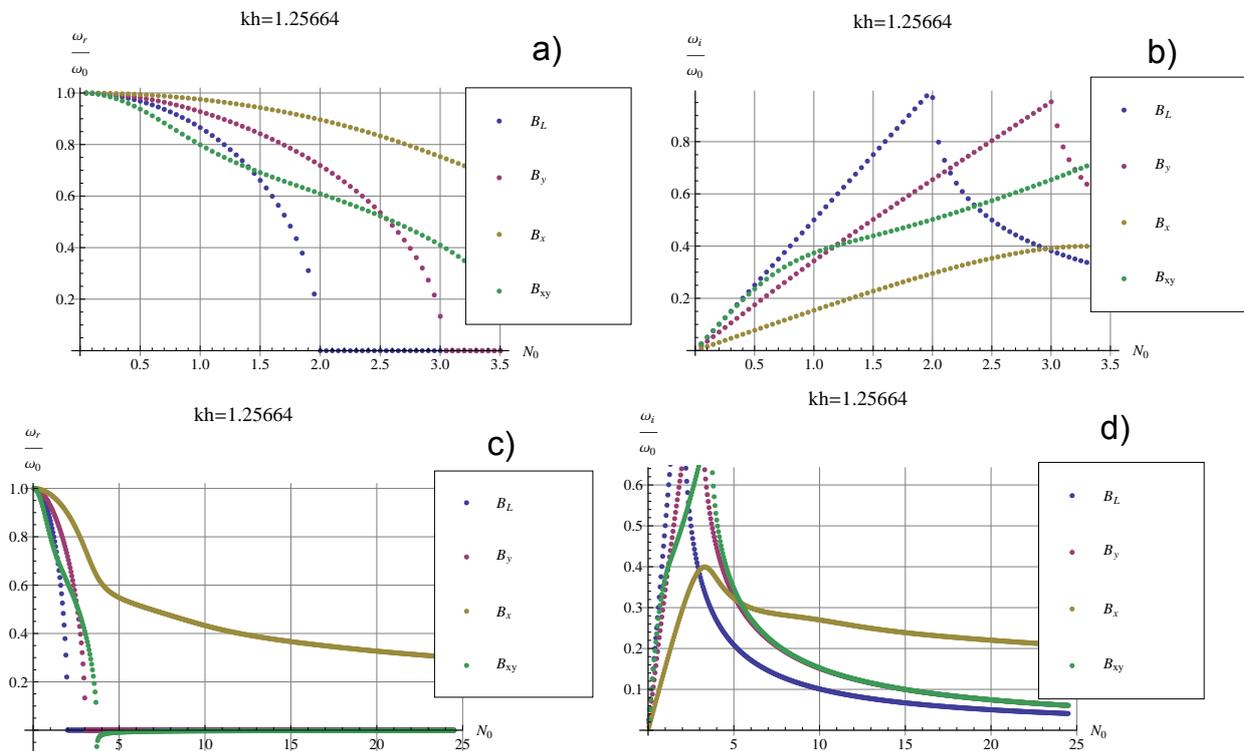
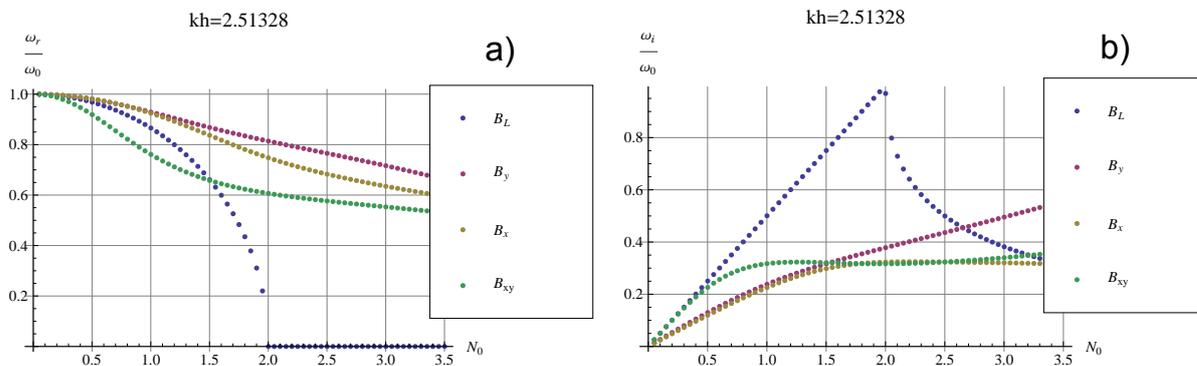


Fig. 4.11: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 1.25664$

Ahora analizaremos  $kh = 2.51328$ , que puede considerarse como una condición de aguas profundas. Para  $N_0$  pequeños podemos ver en las gráficas (4.12a) y (4.12b) que los casos  $B_y$  y  $B_x$  ya presentan comportamientos similares, mientras que el caso  $B_{xy}$  coincide al caso  $B_L$  en este rango ( $N_0 < 1.5$ ). El comportamiento para  $N_0$  grandes puede verse en las gráficas (4.12c) y (4.12d), donde encontramos que los casos  $B_x$  y  $B_y$  empiezan a diferir; puesto que el máximo valor de  $\omega_i/\omega_0$  para el caso  $B_x$ , es menor respecto al máximo que se obtiene en el caso  $B_y$ ; más aún, este último sí amortigua críticamente la oscilación y el otro no. En el caso  $B_{xy}$  para  $N_0$  grandes vemos que su comportamiento empieza a asemejarse al caso  $B_y$ , aunque su valor crítico para  $\omega_i/\omega_0$  lo alcanza en  $N_0 \simeq 8$ , mientras que el otro en  $N_0 \simeq 6$ , como se ve en la gráfica (4.12c).



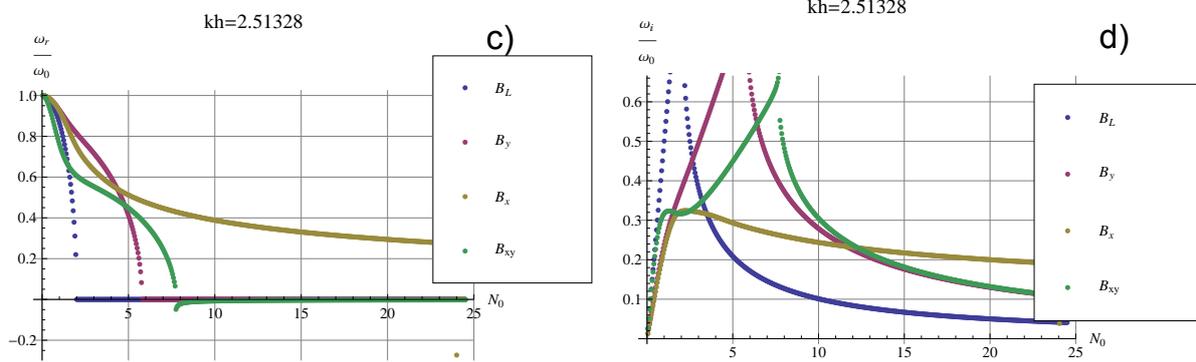


Fig. 4.12: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 2.51328$

Si seguimos incrementando la profundidad, en este caso,  $kh = 5.02656$ , (figuras (4.13a)-(4.13d)) tenemos un resultado parecido al caso anterior en el que para  $N_0$  pequeños las configuraciones  $B_x$  y  $B_y$  tienen un comportamiento similar, aunque alejados del límite  $B_L$ . En el caso  $B_{xy}$ ,  $\omega_i/\omega_0$  coincide con el caso  $B_L$  para  $N_0 < 0.5$  (ver gráfica (4.13a)) mientras que  $\omega_r/\omega_0$  toma valores por debajo del límite  $B_L$  (fig. (4.13b)). Para  $N_0$  más grandes el caso  $B_{xy}$ , empieza a comportarse como el caso  $B_y$  en los cual se puede ver el amortiguamiento crítico para valores  $N_0 = 20$  y  $N_0 = 14$ , respectivamente (ver gráfica 4.13c). El caso  $B_x$  como ha venido ocurriendo, alcanza el amortiguamiento máximo y para  $N_0 \sim 2.5$  toma el valor  $\omega_i/\omega_0 \sim 0.35$ , siendo incapaz de amortiguar críticamente la oscilación.

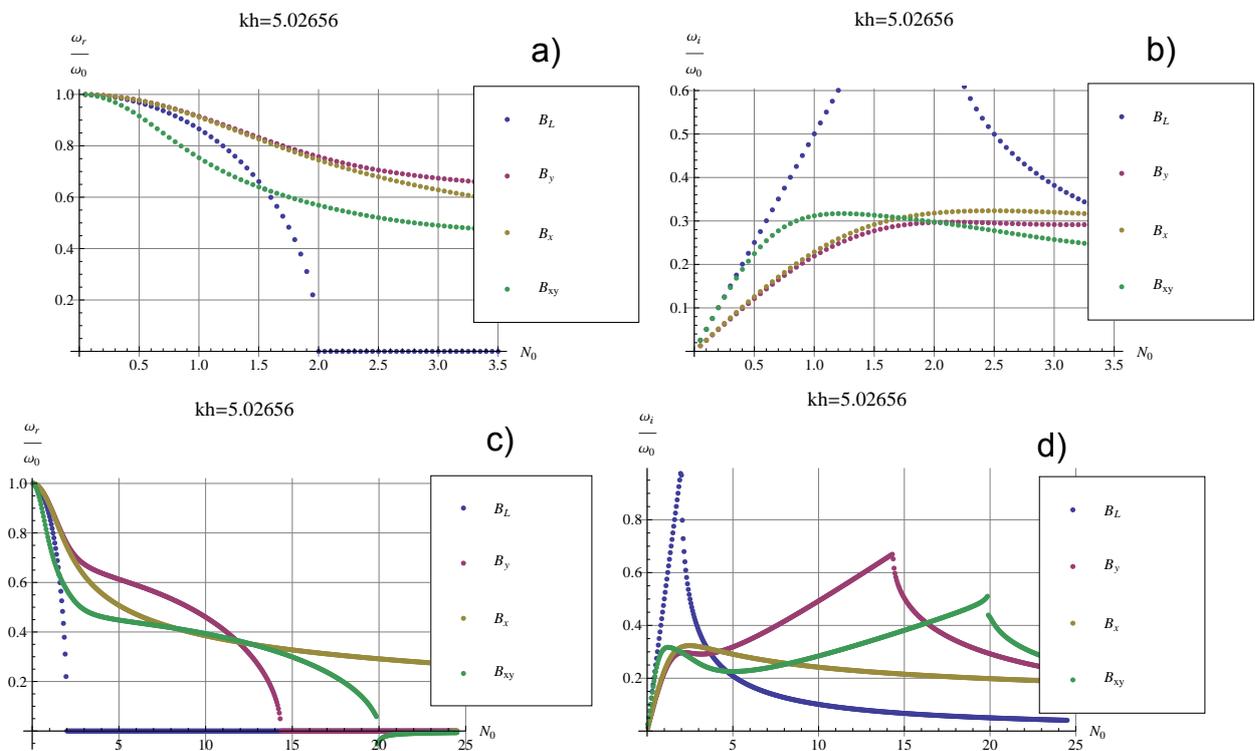


Fig. 4.13: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 5.02656$

Por último, consideramos el caso de aguas muy profundas,  $kh \gg 1$ , por ejemplo,  $kh = 62.832$ , (figs (4.14a) y (4.14b)). Se puede observar que los casos  $B_x$  y  $B_y$  son muy similares (aunque no idénticos), en los que ninguna de estas configuraciones es capaz de amortiguar críticamente la oscilación. Lo mismo ocurre para el caso  $B_{xy}$ , el cual llega a su máximo para  $N_0$  menores que los otros casos (ver gráfica 4.14). Se observa que los amortiguamientos máximos tienen un valor  $\omega_i/\omega_0 < 0.35$ . Las gráficas (4.15a) y (4.15b) muestran que este comportamiento no cambia para aguas más profundas, en donde  $kh = 628.32$ .

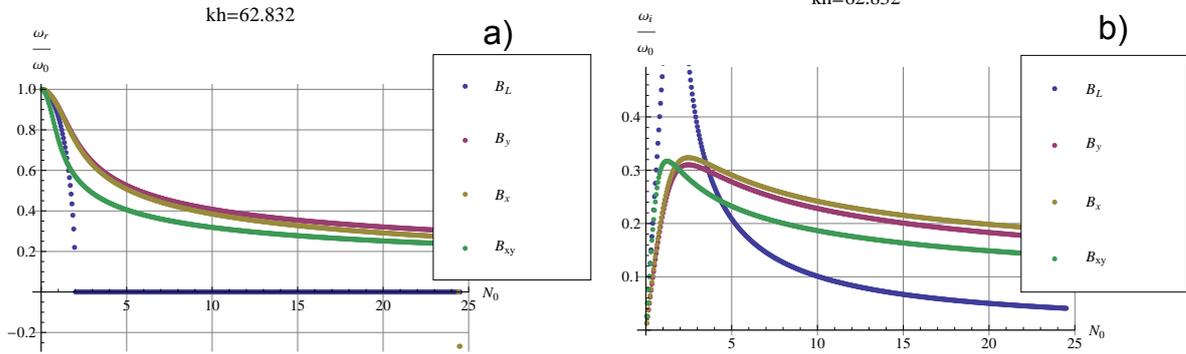


Fig. 4.14: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 62.832$

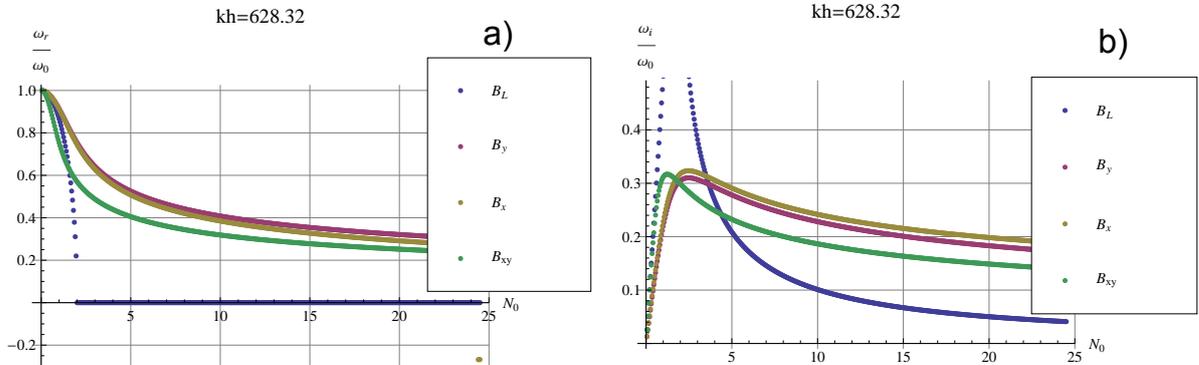


Fig. 4.15: La parte real e imaginaria de  $\omega/\omega_0$  como función de  $N_0$  para  $kh = 628.32$

## 4.5 Simulaciones Numéricas

Adicionalmente a los cálculos analíticos, se realizaron simulaciones numéricas de amortiguamiento de ondas superficiales mediante campos magnéticos. Las ecuaciones de Navier-Stokes se discretizaron mediante el método de Volumen Finito [17], y la ecuación de la presión se desacopló mediante el método de proyección [18], y fue resuelta mediante el método de sobre relajación SOR. La superficie libre fue tratada mediante el método de Front Tracking [19] que consiste en crear una curva mediante puntos que sirven de

interfase entre dos fluidos de distintas densidades, y/o algunas otras propiedades físicas como es en este caso la conductividad eléctrica. Los valores de velocidad obtenidos de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes son interpolados a la interfase para que ésta se desplace junto con el fluido. Una explicación más detallada del método de Fron Tracking se dará en el apéndice (A).

En las simulaciones se consideró un sistema cartesiano  $(x, y)$ , en donde se utilizaron dos fluidos de distintas densidades separados por una interfase. El fluido de abajo tenía una conductividad  $\sigma$ , y el superior no era conductor. La relación de densidades entre los fluidos era de  $10 - 1$  para el fluido conductor. Debido a que se trabajaban con  $Re_m \ll 1$ , el campo inducido era despreciable comparado con el impuesto, y no hubo necesidad de resolver la ecuación de transporte de campo magnético, pudiendo considerar la fuerza de Lorentz simplemente como una fuerza de frenado que se añadía en las ecuaciones de balance de momento.

Ya que consideramos el problema bidimensional, el potencial eléctrico fue considerado nulo, como se expió previamente.

Las condiciones de frontera se tomaron periódicas en las fronteras verticales, y de no deslizamiento en la pared horizontal (fondo). Además, se manejaron tensiones superficiales pequeñas aunque para longitudes de onda grande éstas no afectan. Asimismo, se utilizaron viscosidades muy pequeñas de tal forma que el fluido puede considerarse inviscido.

Se simularon los 3 casos anteriores para campo magnético horizontal, vertical e inclinado, para un dominio  $10 \times 10$ , y una amplitud de onda de 0.03, en donde se fue cambiando la profundidad del fluido para comparar estos resultados con los analíticos. El criterio de amortiguamiento de la perturbación se eligió como el tiempo en que la amplitud de la perturbación decayó por un factor de  $e^{-1}$ .

En la figura (4.16) se muestra el desplazamiento vertical de la superficie libre como función del tiempo, para los distintos casos  $B_y$ ,  $B_x$  y  $B_{xy}$ , y considerando una profundidad pequeña (aguas someras), es decir,  $kh = 0.31416$ . Las líneas horizontales marcadas arriba y abajo del desplazamiento 0.5, denotan los valores del desplazamiento donde la perturbación ha decaído por un factor  $e^{-1}$ . Observamos que el caso  $B_x$  no ejerce ninguna fuerza de amortiguamiento, mientras que  $B_y$ , y  $B_{xy}$  se comportan de forma similar, amortiguando el primero en un tiempo 9.2s, y el segundo 8.8s; en ambos casos el límite para aguas someras me indica que el tiempo de amortiguamiento es en  $2\tau$ , que en este caso serían 8s.

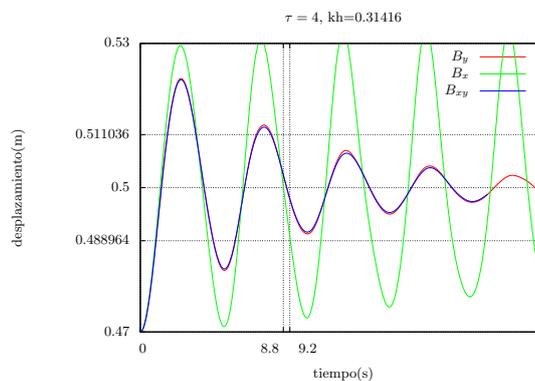


Fig. 4.16: Desplazamiento vertical de la superficie libre como función del tiempo, para los casos  $B_y$ ,  $B_x$  y  $B_{xy} \cdot N_0 = 0.182567$ ,  $kh = 0.31416$

Al incrementar la profundidad 4 veces, es decir,  $kh = 1.25664$ , podemos observar que  $B_x$  tiene un efecto considerable en el amortiguamiento, mientras que el efecto de  $B_y$  se atenúa con la profundidad, y el caso  $B_{xy}$  varía muy poco.

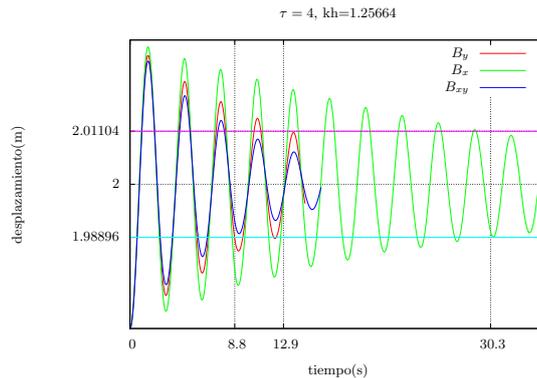


Fig. 4.17: Desplazamiento vertical de la superficie libre como función del tiempo, para los casos  $B_y$ ,  $B_x$  y  $B_{xy} \cdot N_0 = 0.109212$ ,  $kh = 1.25664$

Si incrementamos la profundidad, 8 veces con respecto al primer caso ( $kh = 2.51328$ ), se observa que para el caso  $B_{xy}$  no hay grandes cambios, amortiguando en un tiempo de 9s, mientras que los casos  $B_y$  y  $B_x$  amortiguan en tiempos similares de 17.3s y 18.6s, respectivamente.

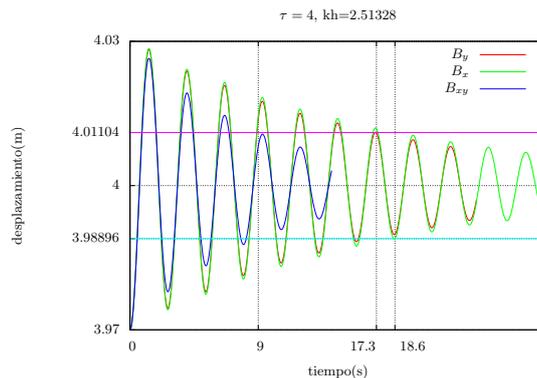


Fig. 4.18: Desplazamiento vertical de la superficie libre como función del tiempo, para los casos  $B_y$ ,  $B_x$  y  $B_{xy} \cdot N_0 = 0.10136$ ,  $kh = 2.51328$

Por último, se comprobó que en aguas muy profundas (16 veces la profundidad original  $kh = 5.02656$ ), el tiempo de amortiguamiento para el caso  $B_{xy}$  sigue siendo el mismo, mientras que los casos  $B_x$  y  $B_y$  tienen un comportamiento parecido, amortiguando en 17s y 19.1s respectivamente (ver figura 4.19).

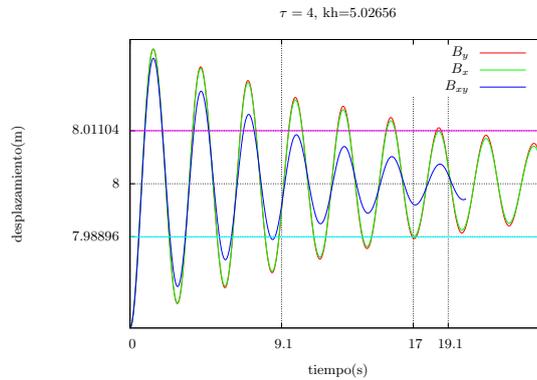


Fig. 4.19: Desplazamiento vertical de la superficie libre como función del tiempo, para los casos  $B_y$ ,  $B_x$  y  $B_{xy}$ .  $N_0 = 0.100701$ ,  $kh = 5.02656$

### Tiempo de Amortiguamiento contra profundidad

A continuación, vamos a comparar los tiempos amortiguamiento calculados numéricamente contra los resultados analíticos, para distintas profundidades en los tres casos analizados, es decir,  $B_y$ ,  $B_x$  y  $B_{xy}$ .

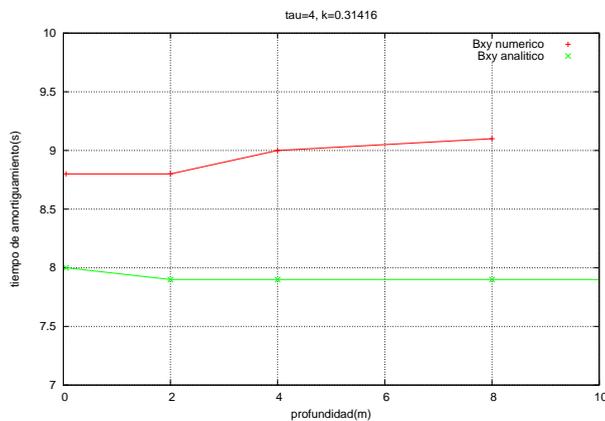


Fig. 4.20: Tiempo de amortiguamiento como función de la profundidad para el caso  $B_{xy}$ , comparando los resultados analíticos y numéricos.  $\tau = 4$ ,  $k = 0.31416$

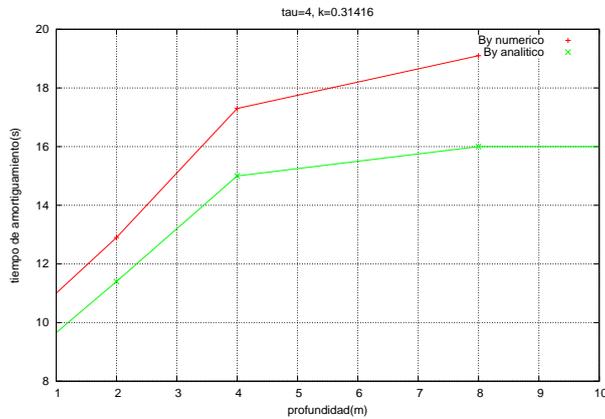


Fig. 4.21: Tiempo de amortiguamiento como función de la profundidad para el caso  $B_y$ , comparando los resultados analíticos y numéricos.  $\tau = 4$ ,  $k = 0.31416$

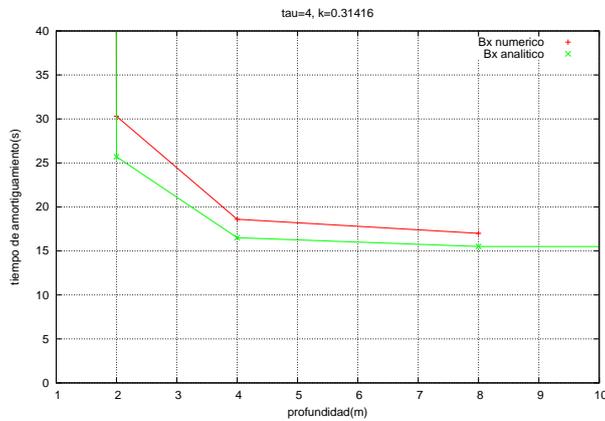


Fig. 4.22: Tiempo de amortiguamiento como función de la profundidad para el caso  $B_x$ , comparando los resultados analíticos y numéricos.  $\tau = 4$ ,  $k = 0.31416$

Podemos observar que en general los resultados numéricos predicen tiempos de amortiguamiento ligeramente mayores que los resultados analíticos. En las siguientes dos gráficas se resumen los resultados; en la gráfica (4.23) se muestran los resultados analíticos de los tres casos a distintas profundidades, mientras que en la gráfica (4.24) se muestran los resultados numéricos, observando así la semejanza de ambas gráficas.

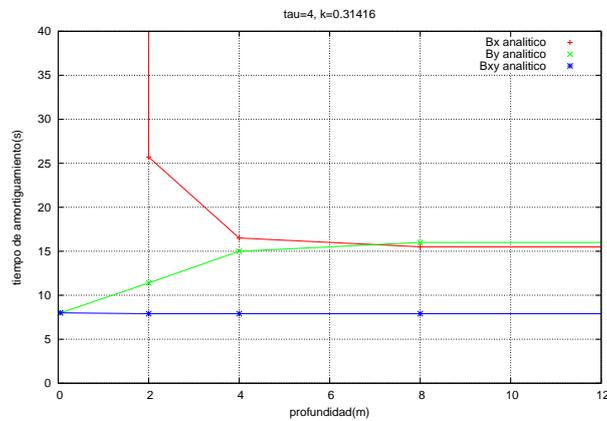


Fig. 4.23: Comparamos los tiempos de amortiguamiento analíticos a diferentes profundidades para las distintas configuraciones

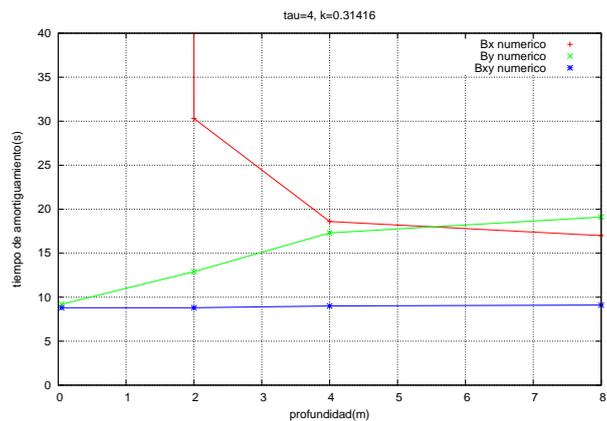


Fig. 4.24: Comparamos los tiempos de amortiguamiento numéricos a diferentes profundidades para las distintas configuraciones

### Frenado crítico

Ahora analizaremos el comportamiento del amortiguamiento crítico como función del tiempo para distintos valores de  $N_0$ . Esto permite identificar el valor de  $N_0$  para el cual el desplazamiento vertical se amortigua sin oscilaciones. La figura (4.25) muestra el desplazamiento vertical como función del tiempo para el caso  $B_{xy}$  y tomando  $kh = 5.02656$ , considerando distintos valores del parámetro  $N_0$ . Podemos observar que cuando  $N_0$  alcanza el valor de 20 el amortiguamiento se alcanza sin que aparezca un máximo en el desplazamiento, por lo que se amortigua críticamente.

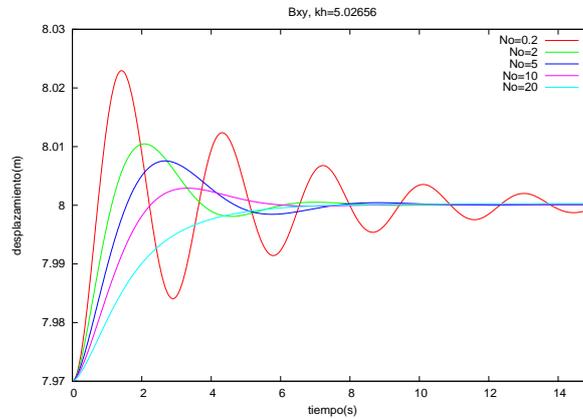


Fig. 4.25: Desplazamiento vertical como función del tiempo en el caso  $B_{xy}$  para distintos valores de  $N_0$ .  $kh = 5.02656$

Para el  $B_y$  a esta misma profundidad, podemos observar que el valor de  $N_0$  para el cual se amortigua críticamente la oscilación es  $N_0 = 14$ ; un valor menor que en el caso  $B_{xy}$  como predecían los resultados analíticos.

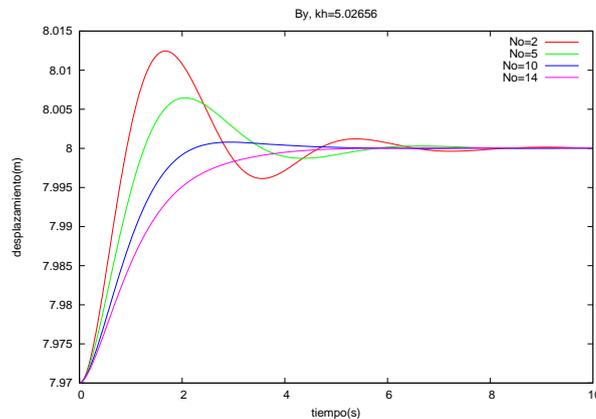


Fig. 4.26: Desplazamiento vertical como función del tiempo en el caso  $B_y$  para distintos valores de  $N_0$ .  $kh = 5.02656$

En el caso de  $B_{xy}$  se observa que para  $N_0$  grandes, como en este caso es  $N_0 = 20$  la oscilación no se amortigua críticamente. sólo hay un máximo alrededor de  $N_0 = 2$ , sin embargo este punto no amortigua la oscilación, podemos ver que para parámetros de interacción muy grandes como la onda está muy desfazada, pero no amortiguada totalmente como en  $N_0 = 20$ .

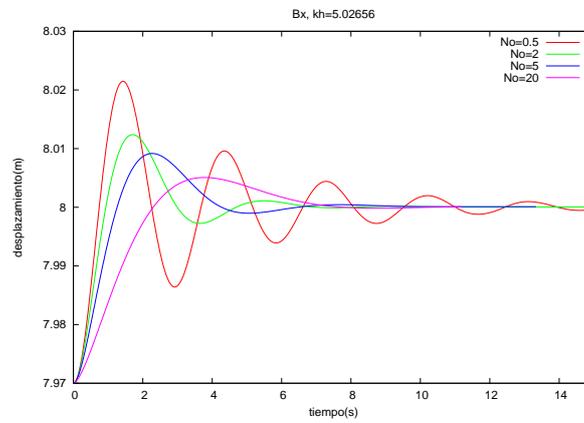


Fig. 4.27: Desplazamiento vertical como función del tiempo en el caso  $B_x$  para distintos valores de  $N_0$ .  $kh = 5.02656$



---

# Conclusiones

---

En este trabajo se estudió el amortiguamiento de ondas de gravedad en fluidos conductores (metales líquidos) sometidos a campos magnéticos, con el fin de comprender sus mecanismos físicos y encontrar soluciones analíticas y numéricas para problemas bidimensionales.

Después de establecer la motivación del trabajo, y las ecuaciones fundamentales de la MHD, se discutieron los fundamentos físicos del fenómeno de amortiguamiento debido a campos magnéticos externos. Básicamente, tenemos que el movimiento del fluido dentro del campo magnético induce corrientes eléctricas que dan lugar a una disipación Óhmica en el medio, lo que incrementa la energía térmica en detrimento de la energía cinética del fluido. La escala de tiempo característica del amortiguamiento magnético es  $\tau = \rho/\sigma B_0^2$ . Se discutieron las características fundamentales del amortiguamiento en dos y tres dimensiones, haciendo notar que en este último caso, al permitir que las corrientes eléctricas cierren sus trayectorias dentro del fluido, el momentum lineal y angular se conservan a pesar de la disipación de la energía cinética. Sin embargo, debido a la complejidad del problema MHD en tres dimensiones, en este trabajo se consideró únicamente se considera el caso bidimensional, que permite realizar un primer acercamiento al problema. Dicha aproximación es válida cuando se considera un dominio infinito, de forma que las corrientes no cierran, o bien cuando las paredes son perfectamente conductoras, de tal forma que las corrientes cierran a través de ellas sin resistencia alguna.

El sistema que se resolvió consiste de una capa infinita de un fluido eléctricamente conductor de profundidad  $h$ , limitada en la parte inferior por una pared y en la superior por una superficie libre. Se analizó el amortiguamiento del flujo debido a la acción de un campo magnético externo, en tres orientaciones distintas, que son la vertical, horizontal e inclinada a  $45^\circ$ . Las ecuaciones se resolvieron analítica y numéricamente obteniéndose tiempos de amortiguamiento de las oscilaciones de la superficie libre para distintas profundidades,  $h$ , y distintos parámetros de interacción,  $N_0$ .

Se encontró que para aguas poco profundas el campo magnético horizontal prácticamente no influye en el amortiguamiento del flujo, obteniendo para esta configuración tiempos de amortiguamiento muy grandes; sin embargo, para las otras configuraciones (vertical e inclinada), el amortiguamiento, de acuerdo al criterio establecido, se da en un tiempo  $2\tau$ . Si consideramos  $N_0$  pequeños, por ejemplo,  $N_0 < 1$ , se puede observar que a medida que la profundidad se incrementa, el campo magnético horizontal empieza a tomar un papel más importante en el amortiguamiento, mientras que el vertical uno ligeramente menor, hasta llegar al punto en que estas dos configuraciones tienen una influencia muy parecida sobre el flujo. Por otro lado, el campo inclinado mantiene los tiempos de amortiguamiento invariantes en  $2\tau$ . Considerando  $N_0$  grandes  $N_0 > 10$ , se encontró que los valores críticos de amortiguamiento son menores para el campo magnético vertical que el inclinado, lo

cual no es evidente, y nos indica que en ciertos regímenes la componente horizontal de este influye en detrimento y no en beneficio del amortiguamiento. También se encontró que el campo horizontal nunca amortigua críticamente la oscilación, en otras palabras, la fase de la oscilación nunca es cero. Finalmente, se pudo observar que a partir de cierto límite, el amortiguamiento deja de depender de la profundidad, teniendo los campos horizontales y verticales un comportamiento muy similar (aunque no idéntico).

Las soluciones analíticas se compararon cualitativa y cuantitativamente con los resultados numéricos, encontrando una comparación razonable entre las soluciones aunque existen diferencias debidas posiblemente a el método numérico de solución.

Se concluye que el tiempo mínimo de amortiguamiento para nuestro sistema, es  $2\tau$  además que para  $N_0$  pequeños, y  $h$  moderadas, que es el caso de procesos industriales y experimentos de laboratorio, el campo magnético vertical es la configuración que mejor amortigua, ya que arroja siempre tiempos de amortiguamiento muy cercanos a este mínimo. Por su parte, una configuración de campo inclinado a  $45^\circ$  nos ofrece una forma de poder controlar el tiempo de amortiguamiento, ya que independientemente de la profundidad, siempre amortigua las oscilaciones en  $2\tau$ .

Como tarea a futuro se contempla el estudio del amortiguamiento magnético en tres dimensiones, tanto desde el enfoque analítico como utilizando simulaciones numéricas. Por supuesto, la realización de experimentos de laboratorio será de gran utilidad para profundizar en el entendimiento de este fenómeno.

# Apéndice



# Front Tracking

---

Existen distintos métodos para describir flujos multifásicos o multifluidos, en los cuales se resuelven distintos tipos de problemas. Principalmente se estudian flujos de burbujas ascendentes en 2 o 3 dimensiones, la colisión y ruptura de gotas, modelado de células biológicas representadas por gotas deformadas debido a fuerzas electrostáticas, cambios de fase como la solidificación de materiales puros, o la evaporación de estos, entre otros. Algunas técnicas de flujos multifásicos son el (MAC) *mark and cell method*, (VOF) *volume of fluid method*, en donde el flujo multifásico se calcula directamente de una malla regular y estacionaria, o los métodos Lagrangianos en donde la malla regular fluye junto con el fluido, entre otros [20]. Otro método es el de *front tracking*, en donde una interfase identificada por puntos se encuentra inmersa en una malla fija, que es la que vamos a describir a continuación.

El método de *front tracking*, desarrollado principalmente por Glimm *et al* [21], consiste en escribir un conjunto de ecuaciones las cuales describan el comportamiento del dominio computacional. Los diferentes tipos o fases del fluido se distinguen considerando las propiedades materiales, como son la densidad de masa  $\rho$ , la viscosidad  $\nu$  o la conductividad eléctrica  $\sigma$ , variables respecto a las coordenadas espaciales. Los términos interfaciales, como lo es la tensión superficial se toman en cuenta considerando estas fuentes por funciones *delta*  $\delta$  en la frontera entre las fases. En este caso las ecuaciones que describen el flujo de fluidos eléctricamente conductores, son las ecuaciones de la MHD, y pueden resueltas mediante métodos como volumen, diferencias, o elemento finito. Por otro lado, la interface o *front* es identificada por un conjunto de puntos que se encuentran inmersos en la malla. La tensión superficial se calcula a partir de estos puntos, y los valores son transferidos a los nodos. Finalmente las propiedades físicas del fluido son transportadas por advección debido al movimiento del *front*.

## A.1 Desarrollo numérico

Consideremos un dominio dividido por una malla regular, en el cual se encuentra una interface definida por un conjunto de puntos como se muestra en la figura (A.1). Como en este trabajo las ecuaciones de movimiento se resolvieron mediante el método de volumen finito, escribimos las ecuaciones de balance de momentum en la forma que se muestra a continuación

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}^2) = -\nabla p + \nabla \cdot (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) + \rho \vec{f} + \int_S \Gamma \kappa' \vec{n}' (\vec{r} - \vec{r}') dS', \quad (\text{A.1})$$

en donde  $\nabla \vec{u} = \partial u_i / \partial x_j$  y  $\nabla^T \vec{u} = \partial u_j / \partial x_i$ . Cabe mencionar que  $\rho$ ,  $\nu$  y  $\sigma$  no son constantes en el espacio ya que tenemos distintos fluidos o fases en el dominio, y que  $f$  es una fuerza de cuerpo que en nuestro caso es  $\vec{J} \times \vec{B}_0$ . Por otro lado  $\delta^\beta$  es una función *delta* en donde  $\beta$  representa la dimensión,  $\kappa$  la curvatura de la interface,  $\Gamma$  la tensión superficial entre dos fluidos,  $\vec{n}$  es el vector unitario normal al *front*,  $\vec{r}$  es el punto en el que la ecuación es evaluado, y  $\vec{x}'$  es un punto en el *front*.

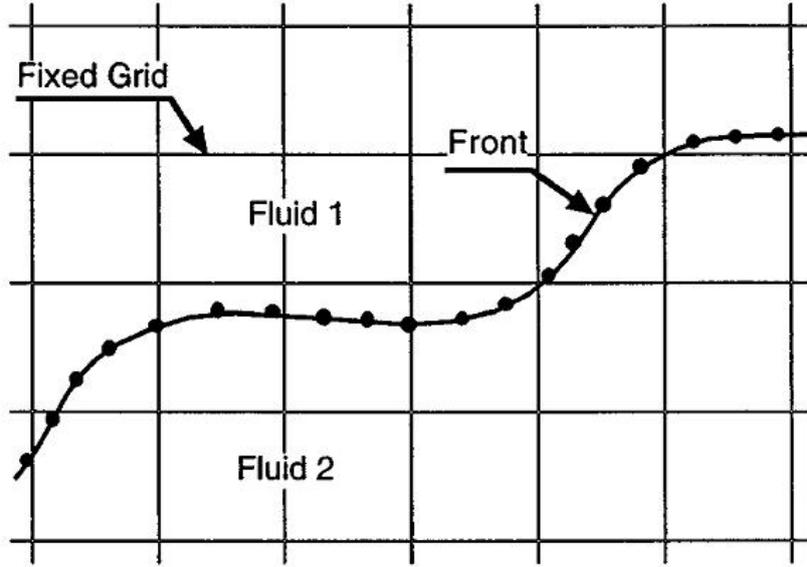


Fig. A.1: El *front* se encuentra inmerso en una malla fija [22].

Aunque hemos dicho que la densidad no es constante en el espacio, para fluidos incompresibles la densidad de una partícula de fluido permanece constante, por lo que podemos escribir la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (\text{A.2})$$

El primer paso para resolver las ecuaciones es actualizar la densidad de manera explícita con alguna función

$$\rho^{n+1} = f(\rho^n, \vec{u}^n, \Delta t). \quad (\text{A.3})$$

La densidad debe actualizarse siempre, ya que después de que el *front* se mueve, el campo de densidades debe construirse a partir de este. Con esto podemos resolver las ecuaciones de Navier-Stokes por el método que queramos. El método de proyección nos permite resolver únicamente un sistema de ecuaciones para la presión; para esto escribimos las ecuaciones de balance de momentum mediante un paso predictor en el cual encontramos una velocidad  $\vec{u}^*$

$$\frac{\rho^{n+1} \vec{u}^* - \rho^n \vec{u}^n}{\Delta t} = \nabla_h \cdot \rho^n \vec{u}^n \vec{u}^n + \nabla_h \cdot \mu^n (\nabla_h \vec{u}^n + \nabla_h^T \vec{u}^n) + \vec{F}_\Gamma, \quad (\text{A.4})$$

en donde  $\vec{F}_\Gamma$  representa las fuerzas de cuerpo y la tensión superficial, y el subíndice  $h$  hace referencia a aproximaciones numéricas. Ahora implementamos un paso corrector en donde se incluye el término de la presión de tal manera que tengamos

$$\frac{\rho^{n+1}\vec{u}^{n+1} - \rho^{n+1}\vec{u}^*}{\Delta t} = -\nabla_h p, \quad (\text{A.5})$$

de donde para determinar la presión, proyectamos la velocidad en el espacio de divergencia cero  $\vec{u}^{n+1}$ , de tal manera que satisfaga la ecuación de continuidad

$$\nabla_h \cdot \vec{u}^{n+1} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando divergencia a la ecuación (A.5) obtenemos una ecuación de Poisson para la presión que debe ser resuelta con condiciones de frontera tipo Neumann, como se muestra a continuación

$$\nabla_h \frac{1}{\rho^{n+1}} \cdot \nabla_h p = \frac{1}{\Delta t} \nabla_h \cdot \vec{u}^*, \quad (\text{A.7})$$

y dado que la densidad no es constante, debemos aplicar métodos iterativos para resolverla, como es en este caso el método de sobre relajación (SOR).

Las ecuaciones de N-S se resuelven en los nodos de la malla fija, mientras que la tensión superficial se calcula en los elementos del *front*, por lo que es necesario tener una función que transporte los valores de la interfase a la malla y viceversa. Tenemos que para transportar un valor de un elemento del *front* *front*, representado por  $\Phi_f$ , expresado en unidades por área, a un punto de la malla representado por  $\Phi_g$ , y expresado en unidades por volumen, de tal forma que para que el valor total de la superficie  $S$  del *front* se conserve en el volumen  $\Delta V$  requerimos que

$$\int_{\Delta S} \Phi_f(s) dS = \int_{\Delta V} \Phi_g(\vec{r}) dV, \quad (\text{A.8})$$

para esto necesitamos que

$$\Phi_{ijk} = \sum_l \Phi_l \omega_{ijk}^l \frac{\Delta S_l}{h^3}, \quad (\text{A.9})$$

en donde  $\Phi_l$  es una aproximación discreta del valor del *front*  $\Phi_f$ , y  $\Phi_{ijk}$  una aproximación al valor del nodo  $\Phi_g$ ,  $\Delta S_l$  es el área del elemento  $l$  y  $\omega_{ijk}^l$  es la función de peso del punto  $(ijk)$  respecto al elemento  $l$  en donde la función de peso debe cumplir que

$$\sum_{ijk} \omega_{ijk}^l = 1, \quad (\text{A.10})$$

lo que me dice que el valor de un elemento del *front* debe conservarse cuando se lleve a la malla. Las funciones de peso pueden escribirse como el producto de funciones unidimensionales. Dado un punto en la interface  $\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$  su función de peso respectiva se puede escribir como

$$\omega_{ijk}(\vec{r}_p) = d(x_p - ih)d(y_p - jh)d(z_p - kh). \quad (\text{A.11})$$

Un tipo de interpolación para  $d(r)$  es la volumétrica, en donde  $r$  representa la distancia de una coordenada al nodo más cercano en esa dirección, dada por la expresión

$$d(r) = \begin{cases} (h - |r|)/h & \text{if } |r| < h \\ 0 & \text{if } |r| \geq h \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

de donde podemos ver que se necesitan 2 puntos en cada dirección, teniendo para una malla en tres dimensiones  $2^3$  puntos para los cuales los efectos de un elemento del *front* son percibidos. En el código se utiliza una interpolación de la forma

$$d(r) = \begin{cases} (1/4h)(1 + \cos \pi r/2h) & \text{if } |r| < 2h \\ 0 & \text{if } |r| \geq 2h \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

lo que nos dice que se ocupan 4 coordenadas en cada dirección, siendo  $4^3$  para un caso tridimensional.

## A.2 Advección de las propiedades materiales

Las propiedades físicas como son la conductividad eléctrica o la densidad de masa, no perciben los efectos de advección directamente, sino que es la interfase la que se desplaza; a partir de esta, las propiedades del fluido se actualizan.

### Front

La estructura del *front* consiste en puntos conectados por elementos almacenados en listas que indican el objeto anterior y posterior a este. En los puntos se almacenan las coordenadas de estos, y en los elementos se almacena casi toda la información del sistema como son los puntos que la conforman, los elementos conectados a los mismos puntos, la tensión superficial, el salto de densidad através del elemento, y cualquier otra cantidad necesitada para la simulación. Dado que la malla es regular y estructurada es fácil encontrar el punto más cercano del *front* a la malla, por lo que es más sencillo transferir información en esta dirección, y no tanto de la malla al *front*.

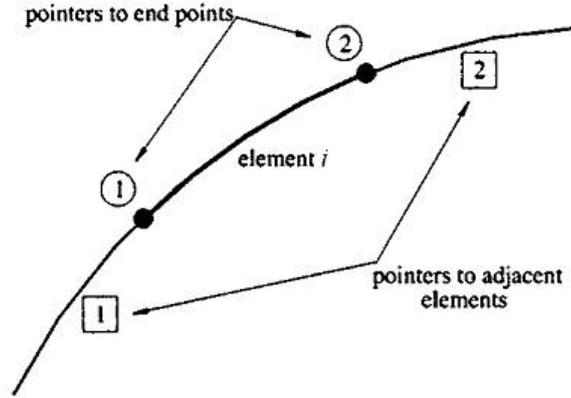


Fig. A.2: Los puntos del *front* se conectan por elementos [22].

Debido a la advección la interface se deforma, lo que hace que los elementos del *front* se alarguen o se acorten. Para mantener la precisión es necesario agregar elementos cuando la separación de los puntos sea muy grande, y eliminarlos cuando sea muy pequeña. Para agregar elementos en dos dimensiones, es suficiente con agregar un punto mediante interpolación lineal, o alguna de mayor orden cuando la tensión superficial es muy alta y los efectos de la curvatura son muy notorios. Para eliminar elementos basta con borrar puntos. Para determinar cuando es necesario añadir o borrar un elementos definimos una longitud y mínima y máxima con respecto a la separación entre los nodos. Un buen criterio es tomar de 2 a 4 elementos de *front* por nodo.

## Tensión superficial

Como tenemos los elementos y puntos del *front* explícitamente, podemos calcular la tensión superficial directamente. La fuerza en un elemento se expresa como

$$\delta \vec{F}_\Gamma = \int_{\Delta S} \Gamma \kappa \vec{n} dS, \quad (\text{A.14})$$

y la curvatura en una línea bidimensional de la siguiente manera

$$\kappa \vec{n} = \partial \vec{S} / \partial S, \quad (\text{A.15})$$

reescribiendo así la ecuación (A.14) como

$$\delta \vec{F}_\Gamma = \Gamma \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{S}}{\partial S} dS = \Gamma (\vec{S}_2 - \vec{S}_1) \quad (\text{A.16})$$

por lo que para encontrar la curvatura, es necesario encontrar las tangentes en los extremos, garantizándonos así que la fuerza sobre una superficie cerrada sea cero. La precisión y eficiencia de los cálculos de la tensión superficial, dependen en la manera de encontrar los vectores tangentes. La tangente a una curva viene dada por

$$\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{u}} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{u}} \right\| \quad (\text{A.17})$$

## Desplazando el front

Una vez obtenido el campo de velocidades, debemos interpolar estas de la malla al *front* para poder desplazar la interfase. Para esto identificamos el nodo más cercano al *front* e interpolamos las velocidades

$$\Phi_f = \sum_{ijk} \omega_{ijk} \Phi_{ijk}. \quad (\text{A.18})$$

Ya que tenemos las velocidades en el *front*, integramos en el tiempo con un integrador del orden que queramos, por ejemplo Euler

$$\vec{r}_f^{n+1} = \vec{r}_f^n + \vec{u}_f^n \Delta t \quad (\text{A.19})$$

## Densidad y propiedades físicas

Una vez desplazado el *front*, basta con constriuir el campo de densidades para obtener el resto de propiedades, y para esto debemos fijarnos en el gradiente de densidades que puede expresarse como

$$\nabla \rho = \int_S \Delta \rho \vec{n} \delta(\vec{r} - \vec{r}_f) dS \quad (\text{A.20})$$

en donde  $\Delta \rho$  es el salto de densidades entre los fluidos. Discretizando esta ecuación obtengo

$$\nabla_h \rho_{ijk} = \sum_l \Delta \rho \omega_{ijk}^l \vec{n}_l \Delta S_l. \quad (\text{A.21})$$

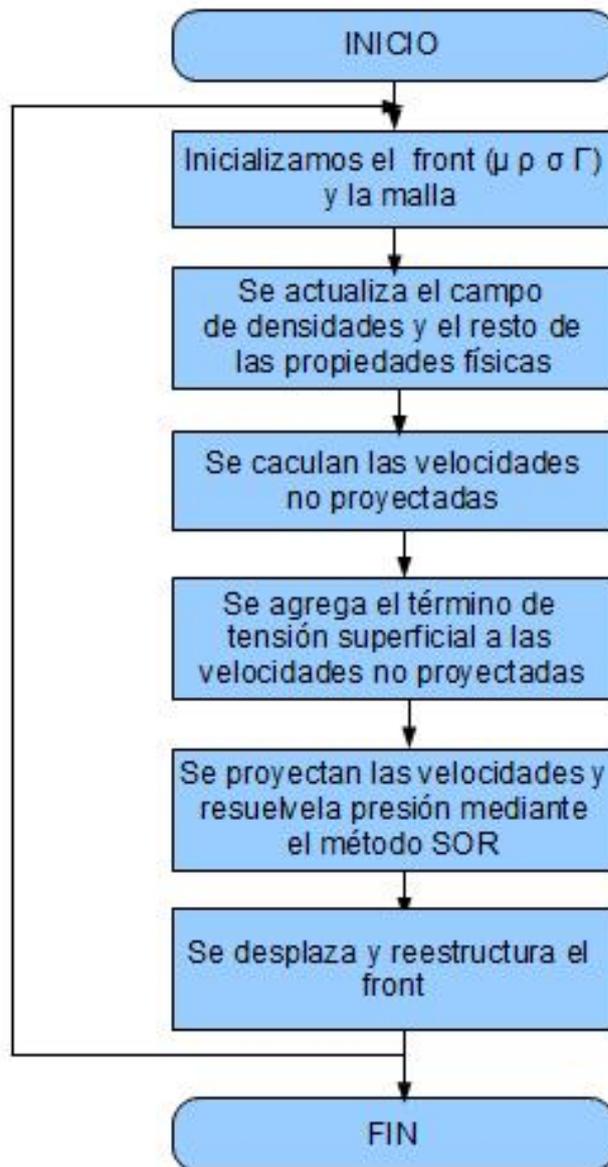
Una vez construido el campo de gradiente de densidades podemos recuperar la densidad aplicando la divergencia a la ecuación (A.21), de tal manera que obtenemos una ecuación de Poisson que resolvemos con las condiciones de frontera correspondientes

$$\nabla^2 \rho = \nabla_h \cdot \nabla_h \rho_{ijk}. \quad (\text{A.22})$$

Ya que la frontera se desplaza distancias menores que la longitud entre nodos, no es necesario resolver muy lejos del *front*, de esta manera evitamos que la densidad lejos de esta varíe y aparezcan errores.

## Algoritmo

Finalmente mostramos el algoritmo que sigue el método de *front tracking* para resolver un sistema multifásico





---

---

# Bibliografía

---

- [1] P.A. Davidson. On the control of surface waves by a vertical magnetic field. *Physics of Fluids*, 17:117101–1 – 117101–8, 2005.
- [2] Hiroshi Harada and Eiichi Takeuchi. Mhd analysis in hydromagnetic casting process of clad steel slabs. *Applied mathematical modelling*, 22:873–882, 1998.
- [3] P.A. Davidson. Magnetohydrodynamics in materials processing. *Annu. Rev. Fluid Mech*, 31:273–300, 1999.
- [4] Hans B. Lofgren and Hans O. Akerstedt. Damping mechanisms of perturbations in electromagnetically braked horizontal film flows. *Fluid Dynamics Research*, 26:53–68, 2000.
- [5] Unknown Author. U.S. ENERGY REQUIREMENTS FOR ALUMINIUM PRODUCTION. Technical report, 2007.
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *MECANICA DE FLUIDOS*. Reverte, 1986.
- [7] Irving H. Shames. *MECHANICS OF FLUIDS*. McGraw-Hill, third edition, 1992.
- [8] I.G. Currie. *FUNDAMENTAL MECHANICS OF FLUIDS*. McGraww-Hill, second edition, 1993.
- [9] J.A. Shercliff. *A TEXTBOOK OF MAGNETOHYDRODYNAMICS*. ROBERT MAXWELL, M.C., M.P., 1965.
- [10] P.A. Davidson. *An introduction to magnetohydrodynamics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2006.
- [11] Michel Alejandro Rivero Corona. Análisis de dispositivos magnetohidrodinámicos de bombeo. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [12] Aldo Figueroa Lara. Generación de vorticidad en campos magnéticos no homogéneos. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.
- [13] P.A. Davidson. Magnetic damping of jets and vortices. *Journal Fluid Mechanics*, 299:153–186, 1995.
- [14] R. Moreau. Jet libre plan, laminaire, d’un fluide incompressible en presence d’un champ magnetique transversal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 256:4849–4853, 1963.

- 
- [15] S. Cuevas and E Ramos. Steady streaming in oscillatory. *Physics of fluids*, 9(5):1430–1434, 1997.
- [16] D.J. Acheson. *ELEMENTARY FLUID DYNAMICS*. Oxford University Press, 1990.
- [17] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *AN INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS. THE FINITE VOLUME METHOD*. Longman Scientific and Technical, 1995.
- [18] Thomas Dornseifer Michael Griebel and Tilman Neunhoeffler. *NUMERICAL SIMULATION IN FLUID DYNAMICS*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [19] Salih Ozen Unverdi and Grétar Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100:25–37, 1992.
- [20] Andrea Prosperetti and Grétar Tryggvason. *Computational Methods for Multiphase Flow*. Cambridge University Press, 2007.
- [21] J. Glimm *et al.* A critical analysis of rayleigh-taylor growth rates. *J. Comput. Phys*, 169:652, 2001.
- [22] G. Tryggvason *et al.* A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, 169:708–759, 2001.