UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE SCHAUDER Y EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

A D O L F O A R R O Y O R A B A S A

DIRECTORA DE TESIS:
MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

2010

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE SCHAUDER Y EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

A D O L F O A R R O Y O R A B A S A

DIRECTORA DE TESIS:
MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

2010

A mis hermanas Laura y Luci,
a mis padres Laura y Adolfo.
a tí Dios.

Agradecimientos

Grande es el fruto de la paciencia, la cual agradezco a mis padres, luego de cuatros años de espera, de apoyo y de satisfacción pero también de duda y sufrimiento. A mi madre, quien siempre ha conllevado las dificultades a mi lado y me ha compartido el camino a la verdad. A mi padre, que cuanto ha podido me ha dado sin reserva alguna y siempre ha sido un ejemplo de trabajo y responsabilidad que espero poder imitar.

A ustedes, Luci y Lau, han sido el motivo más grande de vida. Simplemente no podría haber logrado tanto sin su apoyo, su delicadeza, su comprensión y su inagotable paciencia y amor para conmigo. De ningún modo habría sido posible este proceso sin ustedes que siempre se han brindado hasta para jugar cartas o ser molestadas hasta los días festivos jeje.

En especial a Eduardo, el mejor amigo que pudiera haberme dado Dios. Nuestros estudios nos separan, pero seguro estoy de que no nos alejarán un ápice. Dedicaría este trabajo a tu persona, pero ¿cómo puedo dedicar algo de lo que también has sido partícipe en su totalidad? Gracias por escuchar, gracias por ser mi amigo.

Cada fin de semana, cada reunión familiar me llovían comentarios: "¿Como va Adolfo?" "¿Ya va a terminar?" "¡Échale ganas nieto!" "Por favor que no se presione"... a todos ustedes Tata, abuelo Adolfo, abuelita Lucila, a todos mis tíos y primos les agradezco su interés y su apoyo, sus observaciones y consejos.

A mi asesora Mónica, no sólo fuiste mi asesora sino que estoy seguro de que eres la mejor que pude tener, desde el primer momento supiste por donde guiarme. Este trabajo definitivamente lleva tu cuidado en cada punto, en cada coma, te agradezco tanto cuidado y esmero. Te admiro como matemática y persona, te confieso que no puedo esperar mucho a trabajar junto a una matemática de tanto nivel, espero algún día. Gracias por tu paciencia y cuidado, gracias porque ahora no tengo una sóla duda sobre mi area.

A mi profesora Laura, supongo que a todos nos llega el momento de... "¿las matemáticas son realmente para mí?", bueno a mi sí, pero bastó y sobró un curso, Ecuaciones Diferenciales II, para convencerme de que sí lo eran. Te agradezco tu gran interés y atención como persona y profesional. Gracias por las horas de consejos, de matemáticas y de motivación.

A Nils, ¿que puedo decir?... todo un alemán y entiéndase bien que me refiero a todas las virtudes que puede uno como mexicano admirar del pueblo alemán. Te agradezco tu gran interés, tu paciencia para encaminarme en el area, tus sabias observaciones. Gracias por enseñarme a trabajar, por enseñarme a hacer matemáticas.

A Antonio, no se cuantas maneras hay de hacer las matemáticas tan divertidas pero suficientemente como para tomar muy en serio una clase de oyente, así las hiciste. Gracias por haberte tomado el tiempo para platicar, de darme contactos por aquí y por allá, de motivarme a salir de los cánones cuando era necesario.

A mis amigos Carlos, Paco, paCO, León, Juan, Emilio, Daniel, Marinie, Adrián y Julio, a todos mis amigos y personas increíbles que pude haber olvidado gracias por estar ahí.

A Dios, por darme una familia tan bella, amigos tan fieles y por darme la oportunidad de hacer lo que más me gusta. Por darme el perdón y la salvación.

Índice general

Introducción

El grado topológico es una aplicación de las ternas (f, Ω, z) tales que Ω es un conjunto abierto y acotado de un espacio de Banach E, $f : \overline{\Omega} \to E$ una función continua y un punto $z \in E \setminus f(\partial\Omega)$ a las cuales asigna un número entero, intuitivamente, una herramienta de "conteo algebraico" de los ceros de una función. Debido a sus propiedades, el grado es una herramienta muy útil en el estudio del análisis no lineal, en este trabajo daremos cuenta de su importancia en la rama de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre sus aplicaciones se encuentran teoremas de punto fijo y teoremas de geometría y topología de $\mathbb{R}^n$, sin embargo nuestro interés principal será su aplicación para la demostración del teorema de punto de fijo de Schauder.

El objetivo de esta tesis es utilizar el teorema del punto fijo de Schauder para dar una prueba detallada del artículo *On Schauder's fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscilations* [13], tratado por A. C. Lazer, el cual es considerado uno de los predecesores de la condición de Landesman-Lazer que marcara un nuevo proceder en las demostraciones tanto en ecuaciones diferenciales parciales como ordinarias.

En el año de 1968, A. C. Lazer trató el problema escalar para la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t), \tag{1}$$

donde c es cualquier constante y $k(t)$ es una función continua y T-periódica de promedio cero, esto es

$$\overline{k} := \frac{1}{T}\int_0^T k(t)\,dt = 0.$$

Lazer demostró la existencia de soluciones de soluciones T-periódicas de la ecuación (1) cuando la parte no lineal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y sub-lineal, es decir

$$\frac{g(x)}{x} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad |x| \to \infty, \tag{2}$$

y además satisface que

$$g(-x) \leq 0 \leq g(x) \tag{3}$$

para $x > 0$ suficientemente grande.

Para probar esto, Lazer aplicó de una manera sofisticada el teorema del punto fijo de Schauder a un subconjunto convexo de las funciones T-periódicas. Recordemos que este último teorema requiere tratar con operadores compactos continuos de un conjunto convexo en sí mismo para garantizar la existencia de un punto fijo, la construcción de tal operador depende directamente de las condiciones (2) y (3).

La tesis esta organizada como sigue: En el Capítulo 1 fijamos la notación principal y enunciamos, sin prueba, algunos resultados básicos que utilizaremos posteriormente en este trabajo. El Capítulo 2 está dedicado a la definición y propiedades del grado, comenzando con el grado de Brouwer y concluyendo con el grado de Leray-Schauder, que utilizamos para probar el teorema del punto fijo de Schauder. La prueba del resultado de Lazer es abordada en el Capítulo 3. Finalmente, se incluyen cuatro apéndices que tratan los principales resultados de Análisis y Topología que se utilizan en este trabajo.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo discutiremos resultados preliminares y notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

1.1. Continuidad

Comenzaremos con un esquema, sin pruebas, de topología en espacios métricos. Para consultar pruebas, puede consultar [17].

Sean X, Y espacios métricos, dada $r > 0$, denotaremos por:

- $U_r(x, X)$ la **bola abierta** con centro en $x \in X$ y radio r.
- $B_r(x, X)$ la **bola cerrada** con centro en $x \in X$ y radio r.
- $S_r(x, X)$ la **esfera** con centro en $x \in X$ y radio r.

Cuando no se preste a confusión, escribiremos simplemente $U_r(x), B_r(x)$ y $S_r(x)$; $U_r(0) = U_r$ y sus respectivas formas. En $\mathbb{R}^n$ también se notará $U_1 = \mathbb{U}^n$, $B_1 = \mathbb{B}^n$ y $S_1 = \mathbb{S}^{n-1}$.

Consideremos una función $f : X \to Y$, son equivalentes las siguientes nociones de continuidad

1. f es continua.
2. Para toda sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n \to x \in X$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.
3. Para todo $A \subseteq Y$ abierto (cerrado), $f^{-1}(A)$ es abierto (cerrado).

La compacidad, es un concepto sumamente importante en el desarrollo de este trabajo. A continuación listamos algunas nociones de compacidad. Para esto recordemos primero que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos abiertos de X es una *cubierta abierta* de K si

$$K \subset \bigcup_{\mathcal{A}} A.$$

Definición 1.1 *Sea K un subespacio de X.*

- *Decimos que $K \subseteq X$ es* **compacto** *si toda cubierta abierta $\mathcal{A}$ de K tiene una subcubierta finita.*
- *Decimos que $K \subseteq X$ es* **secuencialmente compacto** *si toda conjunto infinito de K tiene puntos de acumulación.*
- *Decimos que $K \subseteq X$ es* **relativamente compacto** *si $\overline{K}$ es compacto.*
- *Decimos que $K \subseteq X$ es* **precompacto** *si para todo $\varepsilon > 0$, toda cubierta $\mathcal{B}_\varepsilon := \{U_\varepsilon(x) : x \in K\}$ de K tiene una subcubierta finita.*

Nota 1.2 Para $f : X \to Y$, una función continua son equivalentes:

(a) K es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en X.

(b) Si K es relativamente compacto, entonces $f(K)$ es relativamente compacto.

(c) Si K es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.

(d) Si X es un espacio completo, entonces K es relativamente compacto si y sólo si K es precompacto.

(e) Si X es un espacio completo, K es secuencialmente compacto si y sólo si K es compacto.

$\diamond$

1.2. Espacios de Banach y espacios de funciones

Una sucesión $(x_k) \subset X$ es de **Cauchy** si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n \geq N$ se tiene

$$\mathrm{dist}_X(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Decimos que un espacio X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge en X.

Definición 1.3 *Un espacio vectorial normado E es un espacio de* **Banach** *si E es completo con la métrica inducida por la norma.*

Si E, F son espacios de Banach, entonces $E \times F$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\cdot\|_{E\times F} := \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F.$$

La propiedad de la cerradura en espacios de Banach garantiza la completitud, más formalmente:

Teorema 1.4 *Si $A \subset X$ es cerrado y X es completo, entonces A es completo. En particular, si F es un subespacio vectorial cerrado de E y E es de Banach, entonces F es de Banach.*

A lo largo de este trabajo utilizaremos E, F para denotar espacios de Banach. Se utilizará la siguiente notación para espacios de funciones.

Notación 1.5

$$C^0(X,E) := \{u : X \to E \,|\, u \text{ es continua}\},$$
$$C^0_B(X,E) := \{u : X \to E \,|\, u \text{ es continua y } u(X) \text{ es acotado}\}.$$

Si $E = \mathbb{R}$, escribiremos $C^0(X)$ y $C^0_B(X)$ en lugar de $C^0(X,\mathbb{R})$ y $C^0_B(X,\mathbb{R})$.

El espacio $C^0_B(X,E)$ con la norma

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{C^0_B(X,E)} := \sup_{x\in X} \|u(x)\|_E$$

es un espacio de Banach.

Denotamos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los número reales.

Nota 1.6 Si X es compacto, entonces $C^0(X,\mathbb{R}) = C^0_B(X,\mathbb{R})$. $\diamond$

Consideraremos D a un abierto en un espacio de Banach, en particular si $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Una función $f : D \to \mathbb{R}^m$ k-veces continuamente diferenciable es aquella que tiene derivadas parciales de orden k en cada función coordenada $f^i, i \in \{1, ..., m\}$, y éstas son continuas. Entendiendo $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ el conjunto de los números naturales y el 0, denotamos

Notación 1.7 *Para $k, m \in \mathbb{N}_0$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, denotaremos por*

$$C^k(D,\mathbb{R}^m) := \{u \in C^0(D,\mathbb{R}^m) \,|\, u \text{ es } k\text{-veces continuamente diferenciable en } D\},$$
$$C^\infty(D,\mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(D,\mathbb{R}^m).$$

Definición 1.8 *El* **soporte** *de una función continua $f : D \to \mathbb{R}^m$ es el conjunto*

$$\operatorname{sop}[\,f\,] = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \cap D$$

Para $k \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por

$$C_c^k(D) = \{f \in C^k(D) \mid \text{sop}[\, f\,] \text{ es compacto}\}$$
$$C_c^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(D)$$

Notación 1.9 *El espacio de las funciones lineales continuas (ó acotadas) será denotado por*

$$\mathcal{L}(E,F) = \{L : E \to F \mid L \text{ es lineal y continua}\},$$

escribiremos $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$ *y* $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$*, el espacio dual de* E*.*

Cuando estemos tratando funciones lineales constantemente escribiremos Lx ó $L[x]$ en vez de $L(x)$.

Éste espacio con la norma

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x \in S_1} \|Lx\|_F$$

también es un espacio de Banach. Además para toda $x \in E$ se cumple

$$\|Lx\|_F \leq \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E.$$

Nota 1.10 Una función $L \in \mathcal{L}(E,F)$ si y sólo si $\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$. ◇

1.3. El teorema de Arzelá-Ascoli

Uno de los teoremas de análisis funcional mas conocidos es el Teorema de Arzelá-Ascoli, es por esa razón que no daremos una demostración del teorema, los lectores interesados en una prueba pueden referirse a [7], [8] o [15].

Primero veamos dos importantes conceptos. Sean X, Y espacios vectoriales normados.

Definición 1.11 *Una familia* $\mathcal{F}$ *de funciones en* $C^0(X,Y)$ *se dice* **uniformemente acotada** *si existe* $M > 0$ *tal que*

$$\|f(x)\|_Y \leq M \qquad \textit{para todo } x \in X \textit{ y para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Es decir, si existe $M > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq M \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.12 *Un subconjunto* $\mathcal{H}$ *de* $C^0(X,Y)$ *es* **equicontinuo en el punto** $z_0 \in Y$ *si, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta := \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ *tal que, para toda* $f \in \mathcal{H}$*,*

$$\text{dist}_X(f(z), f(z_0)) < \varepsilon \qquad \textit{si } \text{dist}_Y(z, z_0) < \delta.$$

$\mathcal{H}$ *es* **equicontinuo** *si lo es en todo punto de* X*.*

Con estos dos conceptos en mente, enunciamos el conocido teorema.

1.13 Teorema de Arzelá-Ascoli. *Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y uniformemente acotado.*

1.4. Algunos teoremas sobre integrales

Listaremos algunos teoremas sobre la integral de Lebesgue utilizados en este trabajo, para consultar pruebas de ellos referimos al lector a [5] y [7].

Definición 1.14 *Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible es* **(Lebesgue)-integrable** *si la integral de Lebesgue cumple*

$$\int_\Omega |f| \, d\lambda < \infty.$$

Notaremos por $L^1(\Omega)$ al conjunto de funciones integrables en Ω.

Los siguientes, serán dos teoremas de uso común en el desarrollo de este trabajo.

1.15 Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. *Sea $(f_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$. Si*

$$|f_n(x)| \leq F(x) \text{ c.d. en } \Omega \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

para alguna $F \in L^1(\Omega)$ y además

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ c.d. en } \Omega,$$

entonces f es integrable en Ω y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\lambda = \int_\Omega f \, d\lambda.$$

1.16 Teorema del cambio de variable. *Sea $\varphi : \Omega \to \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 y $f \in C^0(\Omega')$. Entonces f es Lebesgue-integrable si y sólo si $(f \circ \varphi)\, |\det \mathrm{D}\varphi|$ lo es y, en tal caso, se cumple que*

$$\int_\Omega f(\varphi(x))\, |\det \mathrm{D}\varphi| \, dx = \int_{\Omega'} f(y) dy.$$

CAPÍTULO 2

El grado topológico

El grado topológico, al cual llamaremos por abreviación *el grado*, de una función es una herramienta clásica muy útil para resolver ecuaciones funcionales. Fue introducido por L. Brouwer para dimensión finita y después extendido por J. Leray y J. Schauder a dimensión infinita.

Primero daremos una vista un tanto axiomática del grado y de sus propiedades principales en la sección 2.1 para después abordar su construcción en la sección 2.2, finalmente y a partir de lo anterior, discutiremos el grado de Leray-Schauder en la sección 2.4. Este trabajo tiene como finalidad resaltar la importancia de este método topológico para resolver ecuaciones diferenciales. Una de las aplicaciones del grado, el teorema del punto fijo de Schauder es utilizado como herramienta en el capítulo siguiente.

Aunque constantemente recordaremos la notación utilizada en en este trabajo, gran parte de la notación y teoría para este capítulo es la definida en el Apéndice. Por lo que recomendamos una lectura rápida de los apéndices de Regularización y Lema de Sard del Apéndice para una mayor comprensión del material presentado.

2.1. El grado de Brouwer

Para este capítulo vamos a suponer:

(H.1) Ω es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$,

(H.2) f es una función continua de $\overline{\Omega}$ a $\mathbb{R}^n$; sus componentes serán denotadas por f^i,

(H.3) z es un punto en $\mathbb{R}^n$ tal que $z \notin f(\partial\Omega)$.

A cada terna (f, Ω, z) que cumple (H.1)-(H.3), podemos asociarle un entero $\deg(f, \Omega, z)$, llamado el *grado de f* respecto a Ω y a z, con las siguientes propiedades:

(P.1) Normalización: Si $I_{\mathbb{R}^n}$ denota la identidad en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\deg(I_{\mathbb{R}^n}, \Omega, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(P.2) Propiedad de solubilidad: Si $\deg(f, \Omega, z) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = z$.

(P.3) Traslación: $\deg(f, \Omega, z) = \deg(f - z, \Omega, 0)$.

(P.4) Descomposición: Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $z \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces

$$\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, z) = \deg(f, \Omega_1, z) + \deg(f, \Omega_2, z).$$

A continuación daremos un esquema del procedimiento normalmente utilizado para definir el grado, sin embargo, por ahora omitiremos tanto la consistencia de la definición como las pruebas de las propiedades (P.1)-(P.4). La construcción completa, será dada en la sección 2.2.

Primero, considera uno una función f de clase C^1 y un valor regular z. Recordemos que, z es un valor regular de f si el Jacobiano $J_f(x)$ es diferente de cero para cada $x \in f^{-1}(z)$. El Jacobiano es el determinante de la matriz $f'(x)$ con entradas

$$a_{ij} = \partial_j f^i(x).$$

Como se observa en la sección A.2 del Apéndice A, si z es un valor regular, entonces el conjunto $f^{-1}(z) \subset \Omega$ es finito y podemos entonces definir el grado de la siguiente manera

$$\deg(f, \Omega, z) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sgn}[J_f(x)], \tag{2.1}$$

donde, para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definimos

$$\operatorname{sgn}[\,a\,] = \begin{cases} 1 & \text{si a} > 0 \\ -1 & \text{si a} < 0. \end{cases}$$

Es decir, el grado cuenta el número de preimágenes de z bajo f en Ω con orientación, dada por el signo del Jacobiano. Se verifica inmediatamente que el grado definido cumple las propiedades (P.1)-(P.4).

Para extender la definición anterior a cualquier función continua f y cualquier punto z, se utilizan métodos de aproximación. Primero, para aproximar z por valores regulares z_k se utiliza el lema de Sard. El siguiente resultado se demuestra en el Apéndice B (ver Corolario B.6).

2.1 Densidad de los valores regulares. *Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, entonces el conjunto de valores regulares de f es denso en $\mathbb{R}^n$.*

Todo x tal que $f(x) = z$ es llamado una solución no singular de la ecuación $f = z$, siempre y cuando $x \notin K_f$, donde $K_f = \{x \in \Omega : J_f(x)) = 0\}$.

De acuerdo a la propiedad anterior, existe una sucesión $(z_k) \subset \mathbb{R}^n \setminus K_f$, tal que, $z_k \to z$ cuando $k \to \infty$. Ya que la distancia de z a $\partial\Omega$ es mayor a cero, para k suficientemente grande, z_k está suficientemente cerca de z y cumple (H.3). Tiene entonces sentido considerar $\deg(f, \Omega, z_k)$, dado por (2.1). Más aun, se puede probar que para $k \gg 1$, $\deg(f, \Omega, z_k)$ es una constante independiente de la sucesión que aproxima a z. Por lo tanto, podemos definir el grado para $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ en cualquier z poniendo

$$\deg(f, \Omega, z) = \lim_{k\to\infty} \deg(f, \Omega, z_k).$$

De un modo similar, usando la densidad de las funciones de clase C^∞ en las continuas sobre un compacto[1], dada $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, consideremos $(f_k)_{k=1}^\infty \subset C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ una sucesión tal que $f_k \to f$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $k \to \infty$. Si $k \gg 1$, entonces cualquier (f_k, Ω, z) satisface (H.1)-(H.3) y podemos considerar el grado $\deg(f_k, \Omega, z)$. Una vez más, se puede demostrar que en el límite $\deg(f_k, \Omega, z)$ es una constante que no depende de la elección de (f_k) y por lo tanto se puede definir el grado de f poniendo

$$\deg(f, \Omega, z) = \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, z).$$

Una propiedad importante del grado definido anteriormente es la siguiente.

(P.5) Invariancia homotópica: Si h es una homotopía *admisible*, entonces el grado $\deg(h(t, \cdot), \Omega, z)$ es constante con respecto a $t \in [0, 1]$. En particular, si $f(x) = h(0, x)$ y $g(x) = h(1, x)$ entonces $\deg(f, \Omega, z) = \deg(g, \Omega, z)$.

Donde, decimos que una homotopía h es admisible si $h \in C^0([0, 1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ es tal que $z \notin h(t, \partial\Omega)$ para toda $t \in [0, 1]$, es decir, una homotopía admisible es aquella para la cual $h(t, \cdot) \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ cumple (H.3) para toda $t \in [0, 1]$.

Teorema 2.2 (Dependencia de los valores frontera) *Sean $f, g \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tales que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \partial\Omega$ y sea $z \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$. Entonces* $\deg(f, \Omega, z) = \deg(g, \Omega, z)$.

Demostración. Consideremos la homotopía

$$h(t, x) = tg(x) + (1 - t)f(x).$$

Para todo $x \in \partial\Omega$ se tiene $f(x) = g(x)$ y por lo tanto $h(t, x) = f(x) \neq z$. Por lo tanto h es admisible y la invariancia bajo homotopías implica:

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(h(\cdot, 0), \Omega, z) = \deg(h(\cdot, 1), \Omega, z) = \deg(g, \Omega, z),$$

lo que prueba el resultado. ∎

Sabiendo esto, se derivan otras propiedades del grado. Permítanos listarlas (sin demostración).

[1] El teorema de aproximación de Weierstrass nos garantiza la densidad de las funciones de clase C^∞ en compactos de $\mathbb{R}^n$.

(P.6) Continuidad funcional: si $f_k \to f$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, entonces el grado $\deg(f_k, \Omega, z) \to \deg(f, \Omega, z)$.

(P.7) Continuidad puntual: el grado $\deg(f, \Omega, z)$ es continuo con respecto a z.

(P.8) Propiedad de excisión: $\deg(f, \Omega, z) = \deg(f, \Omega_0, z)$ para todo subconjunto abierto Ω_0 de Ω tal que $z \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_0)$.

Nota 2.3 Ha sido probado en [2] por S. Weiss y H. Amann que el grado topológico $\deg(f, \Omega, z) \in \mathbb{Z}$ está únicamente determinado por las propiedades (P.1), (P.4) y (P.5). Esto es, que la única función, del conjunto de funciones continuas que cumplen las propiedades (H.1)-(H.3) a $\mathbb{Z}$, es el grado. $\diamond$

2.1.1. El teorema del punto fijo de Brouwer

En esta subsección supondremos que el grado $\deg(f, \Omega, z)$ que cumple las propiedades (P.1)-(P.8) ya ha sido definido. Con esta herramienta en mano demostraremos el clásico teorema de punto de fijo de Brouwer.

2.4 Teorema del punto fijo de Brouwer. *Si f es una función continua de un conjunto compacto y convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ en sí mismo, entonces f tiene un punto fijo. Lo mismo se cumple si K es un conjunto homeomorfo a un conjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Primero supongamos $K = B_r$. Si $f(x) = x$ para alguna $x \in S_r$ ya acabamos, de lo contrario consideremos la homotopía de $I_{\mathbb{R}^n}$ a $I_{\mathbb{R}^n} - f$

$$h(t, x) = x - tf(x),$$

de donde para toda $x \in S_r$ se sigue que,

$$\begin{aligned} \|h(t,x)\| &= \|x - tf(x)\| \\ &\geq \|x\| - t\|f(x)\| \\ &\geq (1-t)r > 0 \end{aligned}$$

para toda $t \in [0, 1)$, como $x - f(x) \neq 0$ para toda $x \in S_r$ se tiene que $0 \notin h(1, S_r)$. Es claro, entonces que h es una homotopía admisible y la propiedad de *invariancia homotópica*, (P.5), implica

$$\deg(I_{\mathbb{R}^n} - f, U_r, 0) = \deg(I_{\mathbb{R}^n}, U_r, 0) = 1.$$

Usando la propiedad de *punto fijo*, (P.2), se concluye que existe $x \in U_r$ tal que $x - f(x) = 0$, esto es, $x = f(x)$ y por lo tanto x es un punto fijo de f. Si K es cualquier compacto y convexo, extendemos continuamente f a $\mathbb{R}^n$ como en la Proposición C.6 y la denotamos g, de modo que $g(\mathbb{R}^n) \subseteq K$.[2] Tomamos r suficientemente grande, tal que $K \subset B_r$, entonces $g(B_r) \subseteq K \subset B_r$. Por la primera

[2]El proceso de Tietze-Dugundji utiliza las combinaciones convexas en la imagen para la extensión de funciones continuas, mas detalles en el Apéndice C.

parte de la demostración, existe un punto fijo x de g en B_r, es decir en K. Como $g|_K = f$, x es punto fijo de f.

Sea K un espacio métrico homeomorfo a un subconjunto compacto y convexo A de $\mathbb{R}^n$ y $f : K \to K$ una función continua. Sea $\varphi : K \to A$ el homeomorfismo, entonces $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : A \to A$ es continua y por la parte anterior tiene un punto fijo x en A y en consecuencia

$$f(\varphi^{-1})(x) = (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi^{-1} \circ g)(x) = \varphi^{-1}(x),$$

por lo que $\varphi^{-1}(x)$ es un punto fijo de f. ■

Teorema 2.5 *La esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un 'retracto' de la bola cerrada $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Es decir, no existe un mapeo continuo $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $f(x) \equiv x$, para toda $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, a estos mapeos se les suele llamar 'retracciones'.*

Demostración. Suponiendo lo contrario, el Teorema 2.2, tomando $g = I_{\mathbb{R}^n}$, implica por (P.1) que

$$\deg(f, \mathbb{U}^n, 0) = \deg(I_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{U}^n, 0) = 1.$$

Usando la propiedad de *solubilidad*, (P.2), se concluye que existe $x \in \mathbb{U}^n$ tal que $f(x) = 0$ y esto es una contradicción con la suposición $f(\mathbb{U}^n) \subset \mathbb{S}^{n-1}$. ■

De hecho, aunque no será demostrado en este trabajo, cabe mencionar que los teoremas anteriores son equivalentes.

2.2. Una construcción analítica

En esta sección daremos una relación completa del grado topológico y de sus propiedades. No seguiremos el bosquejo de la prueba clásica presentada en la sección 2.1, pero utilizaremos una definición alterna del grado desde un enfoque más analítico debido a E. Heinz [12] que hace un poco mas sencillas las pruebas desde el punto de vista técnico.

2.2.1. El grado para funciones en C^2

Comenzaremos con el caso para funciones de clase C^2. Introducimos la siguiente notación para el conjunto de ternas *admisibles* en dimensión n:

$$\mathcal{A}_n = \{(f, \Omega, z) \,|\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto y acotado, } f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \text{ y } z \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}.$$

Queda siempre entendido que las condiciones (H.1)-(H.3) se satisfacen en la notación correspondiente, es decir siempre consideraremos que $(f, \Omega, z) \in \mathcal{A}_n$.

Sea $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, denotemos por $J_f(x)$ al Jacobiano de f y $K_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$ el conjunto de valores singulares de f. De la condición (H.3) se tiene que $\operatorname{dist}(z, f(\partial\Omega)) = \min\{|z - f(x)| : x \in \partial\Omega\} > 0$, pues $\{z\}$ es cerrado y $f(\partial\Omega)$ es compacto por la continuidad de f, definimos para el resto del capítulo

$$\rho = \operatorname{dist}(z, f(\partial\Omega)).$$

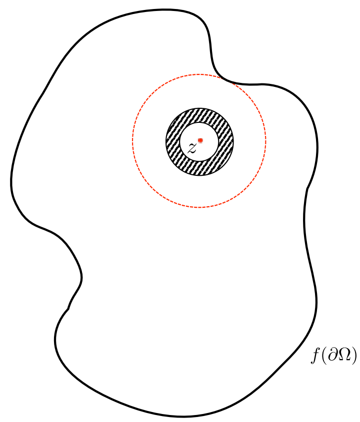

Figura 2.1: El soporte de $\varphi(|\cdot - z|)$, cuando se cumple (2.2).

Consideremos entonces las funciones que nos permitirán evaluar el grado, sea φ una función continua definida en $[0, \infty)$, con las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sop}[\,\varphi\,] \subset (0, \rho), \tag{2.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\, dx = 1. \tag{2.3}$$

Ahora si estamos listos, a continuación la definición del grado para funciones de clase C^2.

Definición 2.6 *Para $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definimos el grado*

$$\deg(f, \Omega, z) = \int_\Omega \varphi(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx.$$

Nota 2.7 Obviamente, como $z \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ se sigue que $0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{f(\partial\Omega) - z\}$, por lo que $(f - z, \Omega, 0) \in \mathcal{A}_n$ y tiene sentido entonces hablar de $\deg(f - z, \Omega, 0)$. El teorema de cambio de variable y el hecho de que $J_f(x) = J_{f-z}(x)$ implican que $\deg(f, \Omega, z) = \deg(f - z, \Omega, 0)$, a saber se cumple la propiedad **(P.3)**. $\diamond$

Todavía resta justificar que el grado está bien definido, mostrando que no depende de la elección de φ. Más precisamente, debemos mostrar que si φ_1, φ_2 satisfacen las propiedades (2.2) y (2.3), entonces

$$\int_\Omega \varphi_1(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx = \int_\Omega \varphi_2(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx. \tag{2.4}$$

Por la Nota 2.7, podemos tomar $z = 0$ sin perder generalidad, de modo que en esta ocasión $\rho = \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega))$. Poniendo $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$, demostrar (2.4) es lo mismo que demostrar

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|) J_f(x)\, dx = 0.$$

Para lo cual haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.8 *Consideremos una función continua* Φ *definida en* $[0,\infty)$ *con las siguientes propiedades:*

$$\operatorname{sop}[\,\Phi\,] \subset (0,\rho), \tag{2.5}$$

$$\int_0^\infty r^{n-1}\Phi(r)\,dr = 0. \tag{2.6}$$

Entonces (recordando que $\rho = \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega))$*, ya que supusimos* $z=0$*),*

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|)J_f(x)\,dx = 0.$$

Demostración. Definimos la función continua en $[0,\infty)$

$$\Psi(r) = \begin{cases} r^{-n}\int_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,ds & \text{si } r>0,\\ 0 & \text{si } r=0. \end{cases}$$

De (2.5) y (2.6) se sigue que, para $r \geq \rho$ se tiene

$$\Psi(r) = r^{-n}\int_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,ds = r^{-n}\int_0^\infty s^{n-1}\Phi(s)\,ds = 0.$$

Por tanto, $\operatorname{sop}[\,\Psi\,] \subset (0,\rho)$. Mas aún, Ψ es de clase C^1 en $[0,\infty)$ y

$$\begin{aligned}\Psi'(r) &= -nr^{-n-1}\int_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,ds + \frac{1}{r}\Phi(r)\\ &= \frac{-n}{r}\Psi(r) + \frac{1}{r}\Phi(r),\end{aligned}$$

si $r>0$, de modo que

$$\Phi(r) = r\Psi'(r) + n\Psi(r) \qquad \text{en } [0,\infty). \tag{2.7}$$

Sea $d_{ij}(x)$ el cofactor $\det_{ij}(\mathrm{D}f(x))$ dado en la Definición D.7, esto es, el cofactor de $\partial_j f^i$ en el Jacobiano J_f y consideremos el campo vectorial $V \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, con componentes

$$V^j(x) = \sum_{i=1}^n d_{ij}(x)\Psi(|f(x)|)f^i(x).$$

Debido a que $\operatorname{sop}[\,\Psi\,] \subset (0,\rho)$, existe $\varepsilon>0$ tal que $\operatorname{sop}[\,\Psi\,] \subset (\varepsilon,\rho-\varepsilon)$, entonces $\operatorname{sop}[\,\operatorname{div}(V)\,] \subset (|f|)^{-1}([\varepsilon,\rho-\varepsilon]) \subset \Omega$ por lo que en realidad $V \in C^1_c(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Tomamos $x\in\Omega$ tal que $\varepsilon \leq |f(x)| \leq \rho-\varepsilon$, denotamos $J_f(x) = J_f, V^j(x) = V^j, f(x) = f, \Psi(|f|) = \Psi(|f(x)|)$ y $d_{ij}(x) = d_{ij}$. Calculando,

$$\partial_j V^j = \sum_{i=1}^n \partial_j d_{ij}\Psi(|f|)f^i + \sum_{i=1}^n \partial_j f^i d_{ij}\Psi(|f|) + \frac{\Psi'(|f|)}{|f|}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \partial_j f^k d_{ij} f^i f^k. \tag{2.8}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de los cofactores para funciones f de clase C^2 demostrada en el Lema D.8, nos dice que

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j d_{ij} = 0,$$

sumando la primera parte de (2.8) sobre j, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_j d_{ij} \Psi(|f|) f^i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j d_{ij} \right) \Psi(|f|) f^i = 0. \tag{2.9}$$

Recordemos que por el desarrollo de $\mathrm{D}f(x)$ por cofactores se tiene

$$J_f = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f^i d_{ij} \qquad \text{para toda } j \in \{1, ..., n\},$$

de modo que al sumar la segunda parte de (2.8) sobre j, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_j f^i d_{ij} \right) \Psi(|f|) = \sum_{j=1}^{n} J_f \Psi(|f|) = n J_f \Psi(|f|). \tag{2.10}$$

Para $i = k$, por el desarrollo del determinante de $\mathrm{D}f(x)$ por el i-ésimo rengón, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j f^k d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f^i d_{ij} = J_f. \tag{2.11}$$

Para $i < k$ observamos que

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j f^k d_{ij} = \det \begin{pmatrix} \partial_1 f^k & \dots & \partial_n f^k \\ \partial_1 f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^{i-1} & \dots & \partial_n f^{i-1} \\ \partial_1 f^{i+1} & \dots & \partial_n f^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^k & \dots & \partial_n f^k \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \dots & \partial_n f^n \end{pmatrix}^T = 0. \tag{2.12}$$

De manera similar se demuestra que $\sum_{j=1}^{n} \partial_j f^k d_{ij} = 0$ si $i > k$. De modo que juntando (2.11) y (2.12) podemos dar la siguiente expresión

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j f^k d_{ij} = \delta_{ik} J_f \qquad \text{para toda } i, k \in \{1, ..., n\}. \tag{2.13}$$

Finalmente, sumando el tercer sumando de (2.8) sobre j, por (2.13) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Psi'(|f|)}{|f|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\partial_j f^k d_{ij} f^i f^k &= \frac{\Psi'(|f|)}{|f|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f^i f^k\left(\sum_{j=1}\partial_j f^k d_{ij}\right)\\ &= \frac{\Psi'(|f|)}{|f|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f^i f^k \delta_{ik} J_f\\ &= J_f\frac{\Psi'(|f|)}{|f|}\sum_{i=1}^{n}(f^i)^2\\ &= J_f\frac{\Psi'(|f|)}{|f|}|f|^2 = J_f\Psi'(|f|)\,|f|\,.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Juntando (2.9),(2.10) y (2.14), utilizando (2.7) y el hecho de que para $x\in\Omega$ tal que $|f(x)|<\varepsilon$ ó $|f(x)|>\rho-\varepsilon$ se tiene $\Phi(|f(x)|)=0=\|\mathrm{D}V(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$. Así, la divergencia de V en Ω está dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(V(x)) &= \sum_{j=1}^{n}\partial_j V^j\\ &= J_f(x)\left(|f(x)|\,\Psi'(|f(x)|)+n\Psi(|f(x)|)\right)=\Phi(|f(x)|)J_f(x)\end{aligned}$$

Integrando sobre Ω, la Observación D.5 y el hecho de que $V\in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ implican

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|)J_f(x)\,dx=\int_\Omega \operatorname{div}(V(x))\,dx=0,\tag{2.15}$$

Lo que prueba nuestro lema. ■

Se concluye observando que $\Phi=\varphi_1-\varphi_2$ cumple (2.5) y (2.6), por lo que el Lema 2.8 implica que

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|)J_f(x)\,dx=0.$$

Que era exactamente lo que queríamos probar para ver que el grado está bien definido. Terminamos esta subsección, evaluando el grado en algunos casos específicos.

Proposición 2.9 *Sea $f=A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con A invertible. Entonces*

$$\deg(A,\Omega,z)=\begin{cases}\operatorname{sgn}[\det(A)] & si\ z\in A(\Omega)\\ 0 & si\ z\notin \overline{A(\Omega)}.\end{cases}$$

Demostración. Por el teorema del cambio de variable, tenemos

$$\begin{aligned}\deg(A,\Omega,z) &= \int_\Omega \varphi(|Ax-z|)J_A(x)\,dx\\ &= \int_\Omega \varphi(|Ax-z|)\det(A)\,dx=\operatorname{sgn}[\det(A)]\int_{A(\Omega)}\varphi(|y-z|)\,dy.\end{aligned}$$

En este caso $\rho = \operatorname{dist}(z, A(\partial\Omega))$. Se sigue que si $z \in A(\Omega)$ entonces $B_\rho(z) \subset A(\Omega)$, de lo contrario $B_\rho(z) \cap A(\overline{\Omega}) = \emptyset$. Luego, (2.3) implica

$$\deg(A, \Omega, z) = \begin{cases} \operatorname{sgn}[\det(A)] & \text{si } z \in A(\Omega) \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{A(\Omega)}. \end{cases}$$

■

En particular, encontramos que

$$\deg(I_{\mathbb{R}^n}, \Omega, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

a saber **(P.1)** se cumple.

Una segunda proposición, muestra el caso en el que z es un valor regular de f una función de clase C^2.

Proposición 2.10 *Sea D un subconjunto abierto (no necesariamente acotado) de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ y $x_0 \in D$ tal que $z = f(x_0)$ es un valor regular de f. Entonces existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y φ como en la definición del grado con* $\operatorname{sop}[\,\varphi\,] \subset [0, \rho]$*, tal que*

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(|f(x) - z|) J_f(x) = \operatorname{sgn}[J_f(x_0)].$$

Demostración. Por ser z un valor regular se sigue que $J_f(x_0) \neq 0$, por el teorema de la función inversa sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que f induce un difeomorfismo entre la bola $B_\varepsilon(x_0)$ y $V_\varepsilon := f(B_\varepsilon(x_0))$ lo que entre otras propiedades implica que $\{x_0\} = f^{-1}(z) \cap B_\varepsilon(x_0)$ y que $\operatorname{sgn}[J_f(x)]$ es constante en $B_\varepsilon(x_0)$, por el teorema de cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx &= \operatorname{sgn}[J_f(x_0)] \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(|f(x) - z|)\, |J_f(x)|\, dx \\ &= \operatorname{sgn}[J_f(x_0)] \int_{V_\varepsilon} \varphi(|y - z|)\, dy. \end{aligned}$$

Como V_ε es abierto, existe $\alpha < \rho$ tal que $B_\alpha(z) \subset V_\varepsilon$. Podemos entonces suponer que $\operatorname{sop}[\varphi] \subset [0, \alpha]$, de donde

$$\int_{V_\varepsilon} \varphi(|y - z|)\, dy = \int_{B_\alpha(z)} \varphi(|y - z|)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|y - z|)\, dy = 1,$$

y por lo tanto

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx = \operatorname{sgn}[J_f(x_0)] \int_{V_\varepsilon} \varphi(|y - z|)\, dy = \operatorname{sgn}[J_f(x_0)].$$

■

La proposición anterior, muestra que cuando $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$, tenemos la siguiente fórmula para el grado y un valor regular $z = f(x_0)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$\deg(f, U_\varepsilon(x_0), z) = \operatorname{sgn}[J_f(x_0)].$$

En las dos proposiciones anteriores, está implícito que el grado es un entero. En general, mostraremos que el grado, como fue definido en la Definición 2.6, es siempre un entero. Por otra parte, al final de la sección recuperaremos la fórmula (2.1) para valores regulares y mapeos de clase C^1.

2.2.2. El grado para funciones continuas

Recordemos que f denota a una función que cumple las propiedades (H.1)-(H.3) para un subconjunto abierto y acotado Ω y un punto z de $\mathbb{R}^n$, donde

$$\rho = \operatorname{dist}(z, f(\partial\Omega)).$$

Vamos, entonces a definir el grado para funciones continuas que satisfacen las condiciones (H.1)-(H.3) establecidas al principio de la Sección 2.1. Para este propósito, haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.11 *Para $i = 1, 2$, sean $f_i \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tales que*

$$\|f_i(x) - z\| > \alpha, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega,$$

donde $\alpha \in (0, \rho)$. Dado $\varepsilon \in [0, \alpha/6]$, supongamos que

$$\|f_2 - f_1\|_\infty < \varepsilon.$$

Entonces tiene sentido hablar de $\deg(f_i, \Omega, z)$ *para $i = 1, 2$, y*

$$\deg(f_1, \Omega, z) = \deg(f_2, \Omega, z).$$

Demostración. De acuerdo a la Nota 2.7, podemos suponer $z = 0$. Sea[3] $\chi \in C^\infty((0, \infty))$ una función no decreciente tal que

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le r \le 2\varepsilon \\ 0 & \text{si } \; r \ge 3\varepsilon, \end{cases}$$

definimos $f_3 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ por

$$f_3(x) = (1 - \chi(|f_1(x)|))f_1(x) + \chi(|f_1(x)|)f_2(x).$$

De la definición de χ se sigue:

$$f_3(x) = f_1(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} : |f_1(x)| > 3\varepsilon, \tag{2.16}$$

$$f_3(x) = f_2(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} : |f_1(x)| < 2\varepsilon. \tag{2.17}$$

[3]La existencia de estas funciones puede deducirse con un poco de ingenio del capítulo de regularización del Apéndice, sin embargo I. Dundas da algunos ejemplo de ellas en [11], pág. 95.

En particular, como $|f_1(x)| > \alpha$ para todo $x \in \partial\Omega$ y $\alpha > 6\varepsilon$, entonces $|f_3(x)| = |f_1(x)| > \alpha$ para todo $x \in \partial\Omega$. Más aun, como para toda $x \in \overline{\Omega}$ se tiene

$$\begin{aligned} f_3(x) - f_1(x) &= \chi(|f_1(x)|) \cdot (f_2(x) - f_1(x)), \\ f_3(x) - f_2(x) &= (1 - \chi(|f_1(x)|)) \cdot (f_1(x) - f_2(x)), \end{aligned} \tag{2.18}$$

por tanto, para $i = 1, 2$

$$|f_3(x) - f_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.19}$$

Escogemos dos funciones $\varphi_i \in C^0((0,\infty))$ con las siguientes propiedades:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(|x|)\, dx = 1 \qquad (i = 1, 2)$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sop}[\,\varphi_1\,] &\subset (4\varepsilon, 5\varepsilon) \subset (0, \alpha), \\ \operatorname{sop}[\,\varphi_2\,] &\subset (0, \varepsilon) \subset (0, \alpha). \end{aligned}$$

De acuerdo a la Definición 2.6, las funciones φ_1, φ_2 pueden ser utilizadas para calcular el grado de f_i $(i = 1, 2, 3)$, ya que $\alpha \leq \operatorname{mín}_{x \in \partial\Omega}\{|f_i(x)|\}$ y $0 \notin f_i(\partial\Omega)$ para $i = 1, 2, 3$. En particular, se tiene

$$\begin{aligned} \deg(f_3, \Omega, 0) &= \int_\Omega \varphi_1(|f_3(x)|) J_{f_3}(x)\, dx, \\ \deg(f_1, \Omega, 0) &= \int_\Omega \varphi_1(|f_1(x)|) J_{f_1}(x)\, dx. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ahora, como $\operatorname{sop}[\,\varphi_1\,] \subset [4\varepsilon, 5\varepsilon]$ obtenemos que

$$\varphi_1(|f_3(x)|) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\varepsilon < |f_3(x)| < 5\varepsilon.$$

Usando (2.19), se deduce que $3\varepsilon < |f_1(x)| < 6\varepsilon$ siempre que $4\varepsilon < |f_3(x)| < 5\varepsilon$ y (2.16) implica que $f_3(x) = f_1(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ tal que $4\varepsilon < |f_3(x)| < 5\varepsilon$. De modo que

$$\varphi_1(|f_3(x)|) J_{f_3}(x) = \varphi_1(|f_1(x)|) J_{f_1}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

esto junto con (2.20), implican que $\deg(f_3, \Omega, 0) = \deg(f_1, \Omega, 0)$. Análogamente se prueba que

$$\varphi_2(|f_3(x)|) J_{f_3}(x) = \varphi_2(|f_2(x)|) J_{f_2}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

y se deduce que $\deg(f_3, \Omega, 0) = \deg(f_2, \Omega, 0)$. Se concluye que $\deg(f_1, \Omega, 0) = \deg(f_3, \Omega, 0) = \deg(f_2, \Omega, 0)$, lo que prueba el lema. ■

Entenderemos $U_\rho(f) := U_\rho(f, C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n))$, donde $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Recordando que para un espacio de Banach X

$$U_\rho(x, X) = \{y \in X : \|x - y\| < \rho\}.$$

Corolario 2.12 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua que satisface las condiciones (H.1)-(H.3). Entonces existe $\delta > 0$, tal que si $f_1, f_2 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $f_1, f_2 \in U_\delta(f)$, entonces*

$$\deg(f_1, \Omega, z) = \deg(f_2, \Omega, z).$$

Demostración. Sea $\beta \in (0,\rho)$, entonces $\rho - \beta = \alpha \in (0,\rho)$ y por lo tanto existe $\varepsilon \in (0, \alpha/6)$. Tomando $\delta = \varepsilon/2$ se sigue del lema anterior que $\deg(f_1, \Omega, z) = \deg(f_2, \Omega, z)$. ∎

Ahora, estamos listos para definir el grado para cualquier terna (f, Ω, z) que cumpla (H.1)-(H.3), a estas ternas las llamaremos *admisibles*. El corolario anterior nos dice que para vecindades suficientemente pequeñas de f el grado $\deg(\cdot, \Omega, z)$ está definido y es constante para funciones de clase C^2. Luego, la densidad de $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ en $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ implica que existe una sucesión de funciones $(f_k)_{k=1}^\infty$ que convergen uniformemente a f, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.13 (El grado para funciones continuas) *Sea (f, Ω, z) una terna admisible, definimos el grado por*

$$\deg(f, \Omega, z) = \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, z),$$

donde $\deg(f_k, \Omega, z)$ está dado por la Definición 2.6 y $(f_k)_{k=1}^\infty$ es cualquier sucesión en $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ que converge uniformemente a f.

Claramente, por el Corolario 2.12, el grado topológico para funciones continuas está bien definido.

2.2.3. Propiedades del grado

En esta subsección probaremos que el grado satisface las propiedades **(P.1)**-**(P.7)**. Hemos ya probado que **(P.1)** y **(P.3)** se cumplen, esta última para funciones de clase C^2. De acuerdo a la Definición 2.13 y al Corolario 2.12, es suficiente trabajar las pruebas bajo la suposición adicional de que f es de clase C^2 (ya que las generalizaciones son pruebas triviales). Puntualicemos que, el hecho de que $z \notin f(\partial\Omega)$ implica que $z \notin f_k(\partial\Omega)$ para $k \gg 1$, así como $y \notin f(\partial\Omega)$ para y suficientemente cercano a z, por lo que tiene sentido considerar $\deg(f_k, \Omega, z)$ y $\deg(f, \Omega, y)$.

Para formalizar lo dicho, consideremos $f_k \in U_\rho(f)$, entonces para todo $x \in \partial\Omega$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|f_k(x) - z\| &= \|f(x) - z + f_k(x) - f(x)\| \\
&\geq \|f(x) - z\| - \|f_k(x) - f(x)\| \\
&> \rho - \rho = 0.
\end{aligned}$$

Lo que justifica que $z \notin f_k(\partial\Omega)$ para $k \gg 1$. Ahora, si $y \in U_\rho(z)$ entonces para todo $x \in \partial\Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|f(x) - y\| &= \|f(x) - z + z - y\| \\
&\geq \|f(x) - z\| - \|z - y\| \\
&> \rho - \rho = 0,
\end{aligned}$$

lo que nos dice que $y \notin f(\partial\Omega)$. Es decir que las ternas (f_k, Ω, z) y (f, Ω, y) son admisibles siempre que $f_k \in U_\rho(f)$ y $y \in U_\rho(z)$.

Proposición 2.14 *El grado cumple la propiedad* **(P.2)**, *es decir, si* $\deg(f,\Omega,z) \neq 0$ *entonces existe* $x \in \Omega$ *tal que* $f(x) = z$.

Demostración. Razonando por contradicción supongamos $f(x) \neq z$ para todo $x \in \Omega$, entonces como $z \notin f(\partial\Omega)$, $f(x) \neq z$ en todo el compacto $\overline{\Omega}$ y por lo tanto para $\delta \in (0,\rho)$ se tiene $\delta < \|f(x) - z\|$ para todo $x \in \Omega$. Escogemos φ tal que $\int_{\mathbb{R}}^{n} \varphi(|x|)\, dx = 1$ y $\mathrm{sop}[\varphi] \subset (0,\delta)$. Se sigue que $\varphi(|f(x)-z|) \equiv 0$ en Ω y en consecuencia

$$\deg(f,\Omega,z) = \int_{\Omega} \varphi(|f(x)-z|) J_f(x)\, dx = 0.$$

Lo que es una contradicción a nuestra suposición. ■

Proposición 2.15 *El grado cumple la propiedad* **(P.4)**, *es decir, si* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *y* $z \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, *entonces*

$$\deg(f,\Omega_1 \cup \Omega_2, z) = \deg(f,\Omega_1,z) + \deg(f,\Omega_2,z).$$

Demostración. Como $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \partial\Omega_i$ para $i = 1,2$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi(|f(x)-z|) J_f(x)\, dx = &\int_{\Omega_1} \varphi(|f(x)-z|) J_f(x)\, dx \\ &+ \int_{\Omega_2} \varphi(|f(x)-z|) J_f(x)\, dx,\end{aligned}$$

donde φ es una función para evaluar $\deg(f,\Omega_1 \cup \Omega_2, z)$. Así, (P.4) se sigue directamente de la Definición 2.6. ■

Proposición 2.16 *El grado cumple la propiedad* **(P.5)**, *es decir, si* h *es una homotopía admisible, entonces el grado* $\deg(h(t,\cdot),\Omega,z)$ *es constante con respecto a* $t \in [0,1]$. *En particular, si* $f(x) = h(0,x)$ *y* $g(x) = h(1,x)$ *entonces* $\deg(f,\Omega,z) = \deg(g,\Omega,z)$.

Demostración. Para $t \in [0,1]$, definimos

$$h_t(x) := h(t,x) \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n),$$

por ser h una homotopía admisible, se tiene $z \notin h_t(\partial\Omega)$ y entonces (h_t,Ω,z) es una terna admisible. Consecuentemente, el Corolario 2.12 implica que existe $\varepsilon_t > 0$ tal que $\deg(\cdot,\Omega,z)$ esta definido y es constante en $U_{\varepsilon_t}(h_t)$. Ahora, como $h \in C^0([0,1] \times \overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ y $[0,1] \times \overline{\Omega}$ es compacto, h es uniformemente continua allí, esto quiere decir que para todo $\varepsilon_t > 0$ podemos encontrar $\delta_t > 0$ tal que

$$\|h(t_1,x_1) - h(t_2,x_2)\| < \varepsilon_t \qquad \text{si} \qquad \|(t_1,x_1) - (t_2,x_2)\| < \delta_t \text{ en } [0,1] \times \overline{\Omega}.$$

Por tanto $\|h_{t_1} - h_{t_2}\|_\infty < \varepsilon_t$, siempre que $|t_1 - t_2| < \delta_t$. Podemos cubrir el intervalo $[0,1]$ con la cubierta de bolas $\{U_{\delta_t}(t) \mid t \in [0,1]\}$, por compacidad existen $\{t_1 < t_2 < ... < t_k\} = Y$, tales que

$$[0,1] \subset \bigcup_{Y} U_{\delta_t}(t). \tag{2.21}$$

Donde, por construcción $y(t) = \deg(h_t, \Omega, z)$ es constante en cada una de ellas. Por (2.21) para toda $i < k$ existe j con $i < j \leq k$ tal que $U_{\delta_{t_i}}(t_i) \cap U_{\delta_{t_j}}(t_j) \neq \emptyset$, de modo que $y(t_j) = y(t) = y(t_i)$. Así, en número finito de pasos obtenemos $y(t_1) = y(t_j) = ... = y(t_k)$, de nuevo por (2.21) se sigue que $y(t)$ es constante en $[0, 1]$. En particular,

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(h_0, \Omega, z) = y(0) = y(1) = \deg(h_1, \Omega, z) = \deg(g, \Omega, z).$$

Lo que prueba (P.5). ■

Proposición 2.17 *El grado cumple la propiedad* **(P.6)***, es decir, si* $f_k \to f$ *uniformemente en* $\overline{\Omega}$*, entonces el grado* $\deg(f_k, \Omega, z) \to \deg(f, \Omega, z)$.

Demostración. Como ya hemos visto, para $k \gg 1$, $\deg(f_k, \Omega, z)$ está bien definido. El resultado se sigue del Corolario 2.12. ■

Proposición 2.18 *El grado cumple la propiedad* **(P.7)***, es decir, el grado* $\deg(f, \Omega, z)$ *es continuo con respecto a* z.

Demostración. Sea $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $z_k \to z$ cuando $k \to \infty$. Consideremos las funciones $g = f - z$ y $g_k = f - z_k$. Por el corolario 2.12, existe $\delta > 0$ tal que $\deg(\cdot, \Omega, 0)$ es constante en $U_\delta(g)$, para $k \gg 1$ se tiene $\|g_k - g\|_\infty = \|z - z_k\| < \delta$. Se sigue que

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(g, \Omega, 0) = \lim_{k\to\infty} \deg(g_k, \Omega, 0) = \lim_{k\to\infty} \deg(f, \Omega, z_k).$$

Esto prueba la continuidad de $\deg(f, \Omega, \cdot)$. ■

Proposición 2.19 *El grado cumple la propiedad* **(P.8)***, es decir,* $\deg(f, \Omega, z) = \deg(f, \Omega_0, z)$ *para todo subconjunto abierto* Ω_0 *de* Ω *tal que* $z \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_0)$.

Demostración. Puesto que $f(x) \neq z$ para todo $x \in (\Omega \setminus \Omega_0) \cup \partial\Omega$, entonces $f(x) \neq z$ en el compacto $\overline{\Omega} \setminus \Omega_0$, y por lo tanto existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha < \operatorname{dist}(z, f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_0)) \leq \operatorname{dist}(z, f(\partial\Omega \cup \partial\Omega_0)) \leq \rho,$$

lo anterior ya que al $\Omega_0 \subset \Omega$, se tiene $\partial\Omega \subseteq \partial\Omega \cup \partial\Omega_0 \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Omega_0$. En la definición del grado 2.6, permítanos escoger φ de tal manera que $\operatorname{sop}[\varphi] \subset (0, \alpha)$. Entonces $\varphi(|f(x) - z|) \equiv 0$ en $\overline{\Omega} \setminus \Omega_0$ y esto implica

$$\int_\Omega \varphi(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx = \int_{\Omega_0} \varphi(|f(x) - z|) J_f(x)\, dx.$$

Por definición, la primera integral equivale a $\deg(f, \Omega, z)$ mientras que la segunda equivale a $\deg(f, \Omega_0, z)$, concluimos que $\deg(f, \Omega, z) = \deg(f, \Omega_0, z)$. ■

Adicionalmente probaremos que el grado cumple las siguientes propiedades.

(P.9) Si (f, Ω, z) es una terna admisible, entonces $\deg(\cdot, \Omega, z)$ es constante en $U_\rho(f)$.

(P.10) Si (f, Ω, z) es una terna admisible, entonces $\deg(f, \Omega, \cdot)$ es constante en $U_\rho(z)$.

Proposición 2.20 *El grado cumple la propiedad* **(P.9)***, es decir, si* (f, Ω, z) *es una terna admisible, entonces* $\deg(\cdot, \Omega, z)$ *es constante en* $U_\rho(f)$.

Demostración. Sea $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una función continua y tal que $g \in U_\rho(f)$, por lo visto al principio de esta subsección $\deg(g, \Omega, z)$ está definido. Consideremos la homotopía h de f a g dada por

$$h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Afirmamos que esta es una homotopía admisible, para todo $x \in \partial\Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|h(t, x) - z\| &= \|(1 - t)f(x) + tg(x) - z\| \\
&\geq \|f(x) - z\| - t\|f(x) - g(x)\| \\
&> \rho - \rho = 0,
\end{aligned}$$

de donde se infiere que $z \notin h(t, \partial\Omega)$ para toda $t \in [0, 1]$. De esta manera observamos que h es una homotopía admisible, concluimos por la propiedad (P.5) que

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(h(0, \cdot), \Omega, z) = \deg(h(1, \cdot), \Omega, z) = \deg(g, \Omega, z).$$

■

Proposición 2.21 *El grado cumple la propiedad* **(P.10)***, es decir, si* (f, Ω, z) *es una terna admisible, entonces* $\deg(f, \Omega, \cdot)$ *es constante en* $U_\rho(z)$.

Demostración. Sea $y \in U_\rho(z)$, por lo visto al principio de esta subsección (f, Ω, y) es una terna admisible. Ahora consideremos las funciones $f_1 = f - z$ y $f_2 = f - y$, la propiedad (P.3) nos dice que las ternas $(f_1, \Omega, 0)$ y $(f_2, \Omega, 0)$ son admisibles y además $\|f_1 - f_2\|_\infty = \|y - z\| < \rho$ y por tanto $f_2 \in U_\rho(f_1)$. La propiedad anterior nos dice que

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(f_1, \Omega, 0) = \deg(f_2, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, y).$$

■

De estas dos propiedades, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.22 *Si* $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *es una función continua, y se cumple que*

$$\|f - g\|_\infty \leq \frac{\rho}{3}, \tag{2.22}$$

$$\|z - y\| \leq \frac{\rho}{3}. \tag{2.23}$$

Entonces

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(g, \Omega, y).$$

Demostración. Observemos que, para todo $x \in \partial\Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}\|g(x)-z\| &= \|g(x)-f(x)+f(x)-z\| \\ &\geq \|f(x)-z\| - \|f-g\|_\infty \\ &\geq \rho - \frac{\rho}{3} = \frac{2\rho}{3},\end{aligned}$$

de donde $\frac{2\rho}{3} \leq \operatorname{dist}(z, g(\partial\Omega))$. Entonces, por la propiedad (P.10)

$$\deg(g,\Omega,z) = \deg(g,\Omega,y). \tag{2.24}$$

Más aun, la propiedad (P.9), nos dice que

$$\deg(f,\Omega,z) = \deg(g,\Omega,z) \tag{2.25}$$

Juntando(2.24) y (2.25),

$$\deg(f,\Omega,z) = \deg(g,\Omega,y).$$

■

A cerca de la invariancia homotópica, propiedad (P.5), el grado cumple aún un poco más de acuerdo a la siguiente proposición.

Proposición 2.23 *Si $h \in C^0([0,1]\times\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ y $z \in C^0([0,1],\mathbb{R}^n)$ son tales que $z(t) \in \mathbb{R}^n \setminus h(t,\partial\Omega)$ para toda $t \in [0,1]$ entonces el grado $\deg(h(t,\cdot),\Omega,z(t))$ es constante con respecto a $t \in [0,1]$.*

Demostración. Notamos $h_t := h(t,\cdot)$, $z_t := z(t)$ y $\rho_t := \operatorname{dist}(z_t, h_t(\partial\Omega))$, y definimos

$$\rho^* := \inf_{t\in[0,1]} \rho_t.$$

Afirmamos que $\rho^* > 0$. Supongamos por contradicción que $\rho^* = 0$, entonces existe una sucesión $(t_k, x_k) \in [0,1]\times\partial\Omega$ tal que

$$\operatorname{dist}(z_{t_k}, h_{t_k}(x_k)) \to 0.$$

Ahora, utilizando que $[0,1]\times\partial\Omega$ es compacto, podemos suponer sin perder generalidad que $t_k \to t_0 \in [0,1]$ y $x_k \to x_0 \in \partial\Omega$, lo que implica que

$$\operatorname{dist}(z_{t_0}, h_{t_0}(x_0)) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(z_{t_k}, h_{t_k}(x_k)) = 0$$

lo cual es una contradicción al hecho de que $\rho_t > 0$ para toda $t \in [0,1]$. Como h es uniformemente continua en $[0,1]\times\overline{\Omega}$ y z uniformemente continua en $[0,1]$ se observa que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|h_{t_1} - h_{t_2}\|_\infty < \frac{\rho^*}{3} \text{ y } \|z_{t_1} - z_{t_2}\| < \frac{\rho^*}{3} \quad \text{si} \qquad |t_1 - t_2| < \delta \text{ en } [0,1].$$

Se sigue de la Proposición 2.22 que $y(t) = \deg(h_t,\Omega,z_t)$ es constante en $U_\delta(t,[0,1])$, procediendo igual que en la demostración de la Proposición 2.16 se concluye que $y(t)$ no depende de t, es decir

$$\deg(h(t,\cdot),\Omega,z(t)) \text{ es constante en } [0,1].$$

■

2.2.4. El grado para los valores regulares de una función de clase C^1

Ahora, rescataremos la definición del grado para funciones de clase C^1 y valores regulares, dada en (2.1). Primero, demostraremos un lema que nos servirá como una herramienta para lograr nuestro objetivo.

Lema 2.24 *El grado está determinado por sus valores en ternas $(L, U_1(x), z)$, donde $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo, en particular para $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y z un valor regular de f se tiene*

$$\deg(f, \Omega, z) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \deg(\mathrm{D}f(x), U_1, 0).$$

Demostración. Como ya hemos visto, podemos suponer $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y z un valor regular de f. Si $f^{-1}(z) = \emptyset$, ya sabemos por la Propiedad (P.2) necesariamente que $\deg(f, \Omega, z) = 0$. Si $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, ya que Ω es acotado podemos suponer que $f^{-1}(z) = \{x_1, ..., x_k\}$ de modo que existe $r > 0$ tal que las bolas $B_r(x_i) \subset \Omega$ cumplen que $B_r(x_i) \cap B_r(x_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Una aplicación de (P.8) y posteriormente de (P.4) implica

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, z) &= \deg(f, \cup_{i=1}^k U_r(x_i), z) \\ &= \sum_{i=1}^k \deg(f, U_r(x_i), z). \end{aligned}$$

Así, podemos suponer sin perder generalidad que $\Omega = U_r(x_0)$ y $f^{-1}(z) = \{x_0\}$. De acuerdo, basta probar que

$$\deg(f, U_r(x_0), z) = \deg(\mathrm{D}f(x_0), U_1(0), 0).$$

Como z es un valor regular, entonces $L := \mathrm{D}f(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo y en consecuencia para $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\|Lx\| \geq \frac{\|x\|}{\|L^{-1}\|}, \quad \text{donde } \|L^{-1}\| = \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}. \tag{2.26}$$

Por otro lado, $f(x_0) = z$ implica que

$$\frac{\|f(x) - z - L[x - x_0]\|}{\|x - x_0\|} \to 0 \qquad \text{cuando } x \to x_0.$$

Supongamos $r > 0$ suficientemente pequeño de modo que

$$\|f(x) - y - L[x - x_0]\| \leq \frac{\|x - x_0\|}{2\|L^{-1}\|} \quad \text{para todo } x \in B_r(x_0). \tag{2.27}$$

Consideremos la homotopía

$$h = (1 - t)f(x) + tL[x - x_0]$$

y la aplicación $w \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ dada por $w(t) = (1-t)z$. Utilizando (2.26) y (2.27), calculamos para $t \in [0,1]$ y $x \in S_r(x_0)$

$$\begin{aligned}\|h(t,x) - w(t)\| &= \|(1-t)f(x) + tL[x-x_0] - (1-t)z\| \\ &\geq \|L[x-x_0]\| - (1-t)\|f(x) - z - L[x-x_0]\| \\ &\geq \frac{\|x-x_0\|}{2\|L^{-1}\|} = \frac{r}{2\|L^{-1}\|} > 0,\end{aligned}$$

de donde se concluye que $w(t) \notin h(t,\partial\Omega)$ para toda $t \in [0,1]$. Aplicando la Proposición 2.23, obtenemos

$$\deg(f, U_r(x_0), z) = \deg(L[\cdot - x_0], U_r(x_0), 0), \tag{2.28}$$

tomamos $R > 0$ suficientemente grande, de manera que $U_r(x_0) \subset U_R(0)$. Como L es un isomorfismo $L[x - x_0] = 0$ si y sólo si $x = x_0$, por lo que una aplicación de la propiedad (P.8) implica

$$\deg(L[\cdot - x_0], U_r(x_0), 0) = \deg(L[\cdot - x_0], U_R(0), 0). \tag{2.29}$$

La homotopía $H = (1-t)L[x - x_0] + tLx$ cumple para $t \in [0,1]$ y $x \in S_R(0)$ que

$$\|h(t,x)\| = \|L[x-(1-t)x_0]\| \geq \frac{\|x-(1-t)x_0\|}{\|L^{-1}\|} \geq \frac{\|x\| - \|x_0\|}{\|L^{-1}\|} \geq \frac{R-(R-r)}{\|L^{-1}\|} > 0.$$

En consecuencia, (P.5) implica

$$\deg(L[\cdot - x_0], U_R(0), 0) = \deg(L, U_R(0), 0). \tag{2.30}$$

Aplicando de nuevo (P.8),

$$\deg(L, U_R(0), 0) = \deg(L, U_1(0), 0). \tag{2.31}$$

Juntando (2.28)-(2.31) se concluye

$$\deg(f, U_r(x_0), z) = \deg(\mathrm{D}f(x_0), U_1(0), 0).$$

Como acordamos, esto demuestra el lema. ∎

Teorema 2.25 *Si z es un valor regular de $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\deg(f,\Omega,z) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sgn}[J_f(x)].$$

Demostración. Por el lema anterior, se tiene que

$$\deg(f,\Omega,z) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \deg(\mathrm{D}f(x), U_1, 0).$$

Es claro que $\mathrm{D}f(x) \in C^\infty(U_1(x),\mathbb{R}^n)$ y que su derivada es ella misma para toda $x \in f^{-1}(z)$, pues es un isomorfismo lineal, de este modo la Proposición 2.9 y el hecho de que $0 \in \mathrm{D}f(x)(U_1)$ para toda $x \in f^{-1}(z)$ implican que

$$\deg(f,\Omega,z) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sgn}[J_f(x)].$$

∎

Ejemplo 2.26 Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dada por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Observando que f puede ser considerada como $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto z^2$, el valor complejo que le corresponde a $(0, 1)^T$ es i de quien sabemos sus raíces son

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \text{ y } -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

por lo que

$$f^{-1}((0, 1)^T) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \right\} \subset U_2,$$

de donde se sigue que $(f, U_2, (0, 1)^T) \in \mathcal{A}_2$ y por lo tanto tiene sentido calcular su grado. Caclulando el Jacobiano de f obtenemos

$$J_f((x, y)) = 4x^2 + 4y^2,$$

el cual es mayor a 0 para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, esto nos dice que $(0, 1)^T$ es un valor regular y por el Teorema 2.25 se tiene

$$\deg(f, U_2, (0, 1)^T) = 2.$$

Notemos que en este ejemplo la cardinalidad de la imagen inversa coincide con el el valor absoluto del grado, esto es porque el signo del Jacobiano tiene el mismo signo para cada preimagen. Es claro, que siempre que se tenga esta propiedad se podrá verificar que

$$|\deg(f, \Omega, z)| = \#(f^{-1}(z)).$$

Terminamos esta sección, mostrando que el grado (f, Ω, z) de la Definición 2.13 es siempre un entero. Como siempre, es suficiente ahora considerar la funciones de clase C^1. Si z es un valor regular se sigue del teorema anterior que $\deg(f, \Omega, z)$ es un entero. Si z no es un valor regular, la densidad de los valores regulares nos garantiza que existe una sucesión de valores regulares z_k tales que $z_k \to z$. Como $\deg(f, \Omega, z_k)$ es un entero entonces, por la continuidad puntual del grado establecida en la propiedad (P.7), se infiere que $\deg(f, \Omega, z)$ también es un entero. Esto no dice mas que, el grado está determinado por sus valores en funciones de clase C^1 y valores regulares por la identidad antes presentada.

2.3. Variando el espacio

Ya hemos definido el grado en $\mathbb{R}^n$, quisiéramos poder extenderlo a espacios de Banach, primeramente lo haremos para los de dimensión finita y posteriormente infinita, con el grado de Leray-Schauder en el siguiente capítulo. El siguiente paso, es dar una definición que extienda la definición ya conocida para las ternas admisibles, ahora en espacios de Banach de dimensión finita. En esta sección denotaremos por E a un espacio de Banach de dimensión finita n.

Para E, consideramos el conjunto de ternas admisibles

$$\mathcal{A}_E = \{(f, \Omega, z) \mid \Omega \subset E \text{ abierto y acotado}, f \in C^0(\overline{\Omega}, E) \text{ y } z \notin f(\partial\Omega)\}.$$

Como habrá notado el lector, simplemente hemos extendido las propiedades (H.1)-(H.3), de modo que ahora Ω es un subconjunto abierto y acotado de E. Queda entendido que (f, Ω, z) denotará a una terna admisible, comprendiendo ahora de este manera las propiedades (H.1)-(H.3) o la noción de ternas admisibles.

Observación 2.27 Esta definición extiende a la ya conocida para $\mathcal{A}_n$. $\diamond$

Sin embargo, hemos utilizado muchas propiedades de los espacios $\mathbb{R}^n$, tales como la densidad de funciones de clase C^∞ en compactos, herramienta no restringida a $\mathbb{R}^n$ por el teorema de aproximación de Weierstrass, pero hemos utilizado más, convergencia en las derivadas, propiedad que hemos tomado del capítulo Regularización del Apéndice el cual fué desarrollado sólo para $\mathbb{R}^n$. Esto, aunado a la definición de valor regular, que es cierto, podríamos definir en torno a la derivada de Frechet en espacios de Banach. Más no es necesario, pues lo que haremos es *continuar* trabajando en $\mathbb{R}^n$ de cierto modo:

Proposición 2.28 *Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ el isomorfismo canónico entre E y $\mathbb{R}^n$ respecto a alguna base de E, entonces*

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(\Omega), \varphi(z)) \in \mathcal{A}_n.$$

Demostración. Recordando las propiedades topológicas de los homeomorfismos, sabemos que φ es una función abierta (cerrada), con lo que queda claro que $\varphi(\Omega)$ es abierto, por otro lado un isomorfismo canónico es claramente lineal, por lo que además es Lipschitz continuo, esto garantiza que $\varphi(\Omega)$ es acotado. Esto demuestra que $\varphi(\Omega)$ satisface (H.1).

Denotamos $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, de nuevo utilizando que φ es un homeomorfismo sabemos que $h \in C^0(\varphi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$ y

$$\varphi(\overline{\Omega}) = \varphi(\partial\Omega \cup \Omega) = \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\Omega) = \partial\varphi(\Omega) \cup \varphi(\Omega) = \overline{\varphi(\Omega)}$$

por lo que $h \in C^0(\overline{\varphi(\Omega)}, \mathbb{R}^n)$. Esto prueba que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisface la propiedad (H.2).

Para verificar (H.3), queremos ver que

$$\varphi(z) \notin h(\partial\varphi(\Omega)).$$

Utilizando la propiedad uno a uno de φ, $z \in f(\partial\Omega)$ si y sólo si $\varphi(z) \in (\varphi \circ f)(\partial\Omega)$, pero $\partial\Omega = \varphi^{-1}(\partial\varphi(\Omega))$. Esto implica, $z \notin f(\partial\Omega)$ si y sólo si $\varphi(z) \notin h(\partial\varphi(\Omega))$, verificando que $\varphi(z)$ cumple (H.3). ∎

Ahora es claro, que a (f, Ω, z) podemos asociarle una terna en $\mathcal{A}_n$ y por lo tanto aplicar todas las propiedades antes mencionadas. Con esto en mente, enunciamos la siguiente definición.

Definición 2.29 *Si $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo canónico entre E y $\mathbb{R}^n$ respecto a alguna base de E, definimos el grado en E, como*

$$\deg_E(f,\Omega,z) = \deg(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(\Omega), \varphi(z)).$$

La Proposición 2.28 le da sentido a la definición anterior. Sin embargo, queda ver que $\deg_E$ está bien definido, es necesario que la definición no dependa de la base elegida. Para esto tomemos $\Lambda := \{x_1, ..., x_n\}$ y $\Gamma := \{y_1, ..., y_n\}$ dos bases de E y φ_1, φ_2 los isomorfismos canónicos de E a $\mathbb{R}^n$ de las bases Λ y Γ respectivamente. Definimos,

$$\begin{gathered} A = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ \Omega_1 = \varphi_1(\Omega) \\ \Omega_2 = \varphi_2(\Omega) = A(\Omega_1) \end{gathered}$$

Por la densidad de $C^\infty(\Omega_1, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega_1}, \mathbb{R}^n)$ en $C^0(\overline{\Omega_1}, \mathbb{R}^n)$ podemos encontrar $g_1 \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega_1}, \mathbb{R}^n)$ y un valor regular z_1 de g_1 tal que si $g_2 := A \circ g_1 \circ A^{-1}$ y $z_2 = Az_1 = \varphi_2(z)$, entonces

$$\|\varphi_i \circ f \circ \varphi_i - g_i\|_\infty \leq \frac{\operatorname{dist}(\varphi_i(z), \Omega_i)}{3} \tag{2.32}$$

$$\|\varphi_i(z) - z_i\| \leq \frac{\operatorname{dist}(\varphi_i(z), \Omega_i)}{3} \tag{2.33}$$

para $i = 1, 2$. Veamos porque podemos hacerlo:

$$\begin{aligned} \|\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} - g_2\| &= \|A(\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} - g_1)A^{-1}\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} - g_1\| \cdot \|A^{-1}\| \\ &= \|\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} - g_1\| \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \end{aligned} \tag{2.34}$$

Además,

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(z) - z_2\| &= \|A\varphi_1(z) - Az_1\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|\varphi_1(z) - z_1\|. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Así, basta encontrar g_1 tal que

$$\|\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} - g_1\|_\infty \leq \text{mín}\left\{\frac{\operatorname{dist}(\varphi_1(z), \Omega_i)}{3}, \frac{\operatorname{dist}(\varphi_2(z), \Omega_i)}{3\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}\right\}$$

y posteriormente por el Lema de Sard, tomar z_1 valor regular de g_1 de forma que

$$\|\varphi_1(z) - z_1\| \leq \text{mín}\left\{\frac{\operatorname{dist}(\varphi_1(z), \Omega_1)}{3}, \frac{\operatorname{dist}(\varphi_2(z), \Omega_2)}{3\|A\|}\right\}.$$

Entonces (2.34) y (2.35) implican (2.32) y (2.33).

El Corolario 2.22, (2.32) y (2.33) implican, para $i = 1, 2$, que

$$\deg(\varphi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}, \varphi_i(\Omega), \varphi_i(z)) = \deg(g_i, \Omega_i, z_i). \tag{2.36}$$

Por otro lado como A es un homeomorfismo lineal,

$$\begin{aligned} g_2^{-1}(z_2) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_2(x) = z_2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A \circ g_1 \circ A^{-1})(x) = Az_1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (g_1 \circ A^{-1})(x) = z_1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{-1}(x) \in g_1^{-1}(z_1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in A(g_1^{-1}(z_1))\} = A(g_1^{-1}(z_1)). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Se concluye, que para todo $x \in A(g_1^{-1}(z_1))$,

$$\operatorname{sgn}[J_{g_2}(Ax)] = \operatorname{sgn}[\det(\mathrm{D}g_2(Ax))] = \operatorname{sgn}[\det(A\mathrm{D}g_1(A^{-1}(Ax))A^{-1})] = \operatorname{sgn}[J_{g_1}(x)],$$

por lo que (2.37) nos dice que $\operatorname{sgn}[J_{g_2}(y)] = \operatorname{sgn}[J_{g_1}(x)] \neq 0$ para toda $y \in g_2^{-1}(z_2)$. Así, z_2 es valor regular de g_2. Con esto en mente, calculamos

$$\begin{aligned} \deg(g_2, \Omega_2, z_2) &= \sum_{x \in g_2^{-1}(z_2)} \operatorname{sgn}[J_{g_2}(x)] \\ &= \sum_{x \in A(g_1^{-1}(z_1))} \operatorname{sgn}[J_{g_2}(x)] \\ &= \sum_{y \in g_1^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn}[J_{g_2}(Ay)] \\ &= \sum_{y \in g_1^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn}[J_{g_1}(y)] \\ &= \deg(g_1, \Omega_1, z_1). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Juntando las ecuaciones (2.36) y (2.38) obtenemos que

$$\deg(\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1(\Omega), \varphi_1(z)) = \deg(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}, \varphi_2(\Omega), \varphi_2(z)).$$

Esto dice, que en efecto $\deg_E$ está bien definido. Como ya hemos visto, $\deg_E$ extiende al grado usual en $\mathbb{R}^n$, por lo que denotaremos $\deg_E = \deg$.

Nota 2.30 Por construcción, $\deg_E$ cumple las propiedades (P.1)-(P.10), con sus respectivas modificaciones, $E = \mathbb{R}^n$. $\diamond$

2.4. El Grado de Leray-Schauder

En esta sección vamos a definir el grado de Leray-Schauder, a saber el grado para mapeos $f \in C^0(X, X)$, donde X es una espacio de Banach y f es una perturbación compacta de la identidad, concepto que definiremos mas adelante. Esta extensión del grado es particularmente importante en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

2.4.1. Motivación

Es cierto que ya hemos definido un grado topológico para espacios de Banach de dimensión finita. La pregunta es ¿porque razón estamos motivados a definir un grado en dimensión infinita? Bueno, consideremos el siguiente problema:

Sabemos que la ecuación diferencial ordinaria dada por

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), \qquad u(0) = u_0 \tag{2.39}$$

si $f \in C^0(\mathbb{R})$ es acotada y f es Lipschitz continua, entonces el teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf [4] nos dice que localmente existe una única solución a la ecuación.

Pero podemos debilitar las hipótesis de existencia un poco mas, pidamos solamente $f \in C^0(\mathbb{R})$ acotada. Sin suponer continuidad de Lipschitz de f, todavía se cumple para $u \in X = C^0([0,a], \mathbb{R})$ que u es solución de (2.39) si y sólo si u es solución de

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))\, ds. \tag{2.40}$$

Ahora consideremos el operador $P : X \to X$ dado por

$$P(u)(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))\, ds. \tag{2.41}$$

El lector debe ya haber asociado (2.40) a (2.41), descubriendo que u es solución de (2.39) si y sólo si u es un punto de fijo del operador P. Aquí es donde entra la teoría del grado, pero ¿porqué no podemos utilizar el grado que ya hemos construido? Desafortunadamente X, aunque claramente es un espacio de Banach no tiene dimensión finita. Suponiendo que tenemos un cierto grado de dimensión infinita para espacios de Banach, veamos como pudiera esto dar una solución a (2.39).

Es claro que, u es punto fijo de P si y sólo si u es un cero de $I_X - P$. Puesto que f es acotada consideremos $M = \|f\|_X$. Si suponemos $P(u) = u$ a priori, entonces necesariamente para toda $t \in [0,a]$ se tiene que

$$|u(t)| \leq |u_0| + Ma. \tag{2.42}$$

Esto nos dice que de existir la solución de (2.39) en $[0,a]$, entonces $\|u\|_X \leq r = |u_0| + Ma$, por tanto todos los puntos fijos de u están en $B_r(0,X)$. Por las propiedades ya conocidas del grado, quisieramos un grado en dimensión infinita con las mismas propiedades. Pues veamos que es equivalente que u sea solución de (2.39) en X a pedir que para alguna $h > 0$ se cumpla

$$\deg(I - P, U_{r+h}(0,X), 0) \neq 0,$$

pues esto aseguraría que P tiene puntos fijos. Esto, por lo tanto nos lleva a querer definir un grado en dimensión infinita para espacios de Banach, al menos para

[4] Para una demostración, puede consultar [4] p. 105

operadores de la forma $I_X - P$, donde veremos P cumple con tener una imagen "delgada" para entonces aplicar la idea que veremos en la Proposición 2.31.

Cabe mencionar que como normalmente ocurre, el debilitar las hipótesis también deblita el teorema. Dejamos al lector reflexionar sobre la unicidad de la solución.

2.4.2. El grado de perturbaciones finito-dimensionales de la identidad

Sean X un espacio de Banach y D un subconjunto abierto y acotado de X. Sea $g : \overline{D} \to X$ una función de la forma

$$g(x) = x - \phi(x)$$

donde $\phi \in C^0(\overline{D}, F)$ y F es un subespacio de dimensión finita de X, a estas funciones $I_X - \phi$ las llamaremos **perturbaciones finito-dimensionales de la identidad**.

Si E es un subespacio de X que contiene a F denotaremos por g_F a la función

$$g_F : \overline{\Omega} \cap F \to F, \qquad g_F(x) := g(x).$$

Proposición 2.31 *Si $z \in F \setminus g(\partial D)$ entonces para cualquier subespacio E de dimensión finita de X que contiene a F se cumple que*

$$\deg(g_E, D \cap E, z) = \deg(g_F, D \cap F, z).$$

Demostración. Denotaremos $\Omega = D \cap E$ y ∂_F, ∂_E la frontera respecto a los espacios F, E respectivamente. Utilizando que

$$\partial_F(\Omega \cap F) \subseteq \partial_E \Omega \cap F \subset \partial D \cap F, \tag{2.43}$$

se tiene que $z \notin g_F(\partial_F(\Omega \cap F))$ de donde se sigue que $(g_F, \Omega \cap F, z) \in \mathcal{A}_F$, análogamente para E. Por lo visto en la Proposición 2.28, podemos suponer $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{m-n}$, $m \leq n$; seguiremos notando g_E y g_F a las respectivas restricciones de g.

Sea $x \in \Omega$ tal que $g_E(x) = z$. Esto quiere decir que $x = \phi(x) + z$, por lo tanto $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$ y en consecuencia $g_E(x) = g_F(x)$. Esto muestra que $g_E^{-1}(z) \subseteq g_F^{-1}(z)$ y como la otra contención es trivial, se tiene

$$g_E^{-1}(z) = g_F^{-1}(z). \tag{2.44}$$

Podemos suponer $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$, de otro modo, $g_F^{-1}(z) = \emptyset$ y por (2.44), $g_E^{-1}(z) = \emptyset$. Como siempre, podemos suponer ϕ de clase C^1 y supongamos adicionalmente que z es un valor regular de g_F. Para $x \in g_E^{-1}(z)$, la representación matricial de $\mathrm{D}g_E(x)$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} g'_F(x) & C \\ 0 & I_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}$$

donde,

$$g'_F = (\partial_j g_E^i)_{i,j\in\{1,\dots,m\}} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$
$$C = (\partial_j g_E^i)_{j\in\{M+1,\dots,n\},i\in\{1,\dots,m\}} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}.$$

Así,

$$J_{g_E}(x) = \det(\mathrm{D}g_F(x)\cdot I_{\mathbb{R}^{n-m}}) = J_{g_F}(x), \tag{2.45}$$

lo que nos dice que x es también un valor regular de g_E. Utilizando la definición del grado para valores regulares y funciones de clase C^1, la propiedad (2.44) implica

$$\deg(g_E,\Omega,z) = \sum_{x\in g_E^{-1}(z)} \operatorname{sgn}[J_{g_E}(x)] = \sum_{x\in g_F^{-1}(z)} \operatorname{sgn}[J_{g_F}(x)] = \deg(g_F,\Omega\cap\mathbb{R}^m,z),$$

que prueba el resultado cuando z es valor regular de g_F. En el caso en que z no es un valor regular de g_F, podemos usar el lema de Sard para construir una sucesión $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ de valores regulares de g_F, y por (2.45) también de g_E, y utilizar la propiedad de continuidad puntual del grado de modo que

$$\begin{aligned}\deg(g_E,\Omega,z) &= \lim_{k\to\infty}\deg(g_E,\Omega,z_k)\\ &= \lim_{k\to\infty}\deg(g_F,\Omega\cap\mathbb{R}^m,z_k)\\ &= \deg(g_F,\Omega\cap\mathbb{R}^m,z).\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\deg(g_E,D\cap\mathbb{R}^n,z) = \deg(g_F,D\cap\mathbb{R}^m,z).$$

■

Corolario 2.32 *Si $z\in F\setminus g(\partial D)$ y E_1, E_2 subespacios de Banach de dimensión finita de X que contienen a F y z, se tiene*

$$\deg(g_{E_1},D\cap E_1,z) = \deg(g_{E_2},D\cap E_2,z). \tag{2.46}$$

Demostración. Se tiene $F\subset E_1\cap E_2$ y $z\in E_1\cap E_2$. Aplicando la Proposición 2.31,

$$\deg(g_{E_i},D\cap E_1,z) = \deg(g_{E_1\cap E_2},D\cap E_1\cap E_2,z) \qquad i=1,2.$$

Se concluye que,

$$\deg(g_{E_1},D\cap E_1,z) = \deg(g_{E_2},D\cap E_2,z).$$

■

El corolario anterior nos garantiza que la siguiente es una buena definición del grado para una perturbación finito-dimensional de la identidad en un espacio de Banach X.

Definición 2.33 (Perturbaciones finito-dimensionales) *Si $z \in X \setminus g(\partial D)$ definimos el grado de g como*

$$\deg(g, D, z) = \deg(g_E, D \cap E, z),$$

donde E es cualquier subespacio de dimensión finita de X que contiene a F y a z.

Observación 2.34 Esta definición extiende a la ya conocida para espacios de Banach, pues $f - I_X$ es una función con imagen de dimensión finita en un espacio X de Banach de dimensión finita. $\diamond$

2.4.3. Definiendo el grado de Leray-Schauder

Sean D un subespacio abierto y acotado de una espacio de Banach X, no es necesariamente de dimensión finita y $S : \overline{D} \to X$ un operador de la forma

$$S = I - T$$

donde $I := I_X$ es la identidad en X y T es un operador compacto, a estos operadores los llamaremos **perturbaciones compactas de la identidad** y denotaremos por $\mathcal{PK}(\overline{D}, X)$ al conjunto de perturbaciones compactas de la unidad que van de $\overline{D}$ a X. En esta subsección se utilizan definiciones y resultados demostrados en el Apéndice D.3, por lo que se recomienda una lectura previa de éste si no se está familiarizado con la teoría de operadores compactos.

Sea $z \notin S(\partial D)$. Un operador continuo de la forma $S = I - T$ con dominio cerrado y acotado es una aplicación cerrada, cuando T es un operador compacto. De este modo, es fácil ver que $S(\partial D)$ es cerrado y por lo tanto

$$r = \operatorname{dist}(z, S(\partial D)) > 0.$$

Por otro lado, es sabido que existe una sucesión $(T_k)_{k=1}^{\infty} \in C_B^0(D, X)$, tal que $T_k \to T$ uniformemente en $\overline{D}$ y

$$T_k(\overline{D}) \subset E_k \subset X, \qquad \text{donde} \quad \dim(E_k) < \infty, \tag{2.47}$$

(ver Lema D.11). Vamos a definir el grado de $I - T$ como el límite de los grados $I - T_k$ que ya hemos definido en la sección anterior.

Sea $T_k \to T$ cumpliendo (2.47) y sea $S_k = I - T_k$. Si tomamos k tal que

$$\sup_{x \in \overline{D}} \|T(x) - T_k(x)\| < r, \tag{2.48}$$

se infiere que $z \notin S_k(\partial D)$ y por lo tanto tiene sentido considerar $\deg(I - T_k, D, z)$ con la definición anterior. Observando que para un espacio de dimensión finita E, el generado como espacio de Banach de E y $\{z\}$, $< E, z >$, sigue siendo de dimensión finita, motivamos la definición de Leray-Schauder. Pero primero, como ya es costumbre, extendemos de manera definitiva la definición de las ternas admisibles para espacios de Banach en general.

Definición 2.35 *Sea X un espacio de Banach. Denotamos,*

$$\mathcal{A}_X := \{(S, D, z) \,|\, D \subset X \textit{ abierto y acotado}, S \in \mathcal{PK}(\overline{D}, E) \textit{ y } z \notin S(\partial D)\},$$

el conjunto de ternas admisibles en X.

Observación 2.36 Esta definición extiende a la ya conocida para espacios de Banach X de dimensión finita, ya que, $I_X - f$ es un operador compacto. $\diamond$

Definición 2.37 (Grado de Leray-Schauder) *Si $z \notin S(\partial D)$ definimos el grado de Leray-Schauder de S como*

$$\deg(S, D, z) = \deg(I - T_k, D, z),$$

para cualquier T_k que satsiface (2.47) y (2.48).

Observación 2.38 El grado de Leray-Schauder extiende al grado para espacios de Banach de dimensión finita. Además cumple (P.1)-(P.10) con sus respectivas modificaciones, para (P.5) con homotopías $h \in \mathcal{PK}(\overline{D}, X)$, es decir perturbaciones compactas de la identidad. $\diamond$

Sólo queda checar que esta definición no depende de la aproximación de T_k. Sean T_i tales que cumplen (2.47) y (2.48) y sean E_i subespacios de dimension finita de X que contenien a z tales que $T_i(\overline{D}) \subseteq E_i$, $i = 1, 2$. Sea $E = E_1 + E_2$, usamos la Definición 2.33 para obtener

$$\deg(S_i, D, z) = \deg((S_i)_E, D \cap E, z) \tag{2.49}$$

para $i = 1, 2$. Como $\partial(D \cap E) \subset \partial D \cap E$, se tiene que $\operatorname{dist}(z, S(\partial(D \cap E))) \geq r$. Consideremos la homotopía

$$h(t, x) = (1 - t)S_1(x) + tS_2(x),$$

entonces para $x \in \partial(D \cap E)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|h(t, x) - z\| &= \|(1 - t)S_1(x) + tS_2(x) - z\| \\
&= \|(1 - t)(S_1(x) - S(x)) + t(S_2(x) - S(x)) + S(x) - z\| \\
&\geq \|S(x) - z\| - ((1 - t)\|(S_1(x) - S(x))\| + t\|(S_2(x) - S(x))\|) \\
&= \|S(x) - z\| - ((1 - t)\|(T_1(x) - T(x))\| + t\|(T_2(x) - T(x))\|) \\
&> r - r = 0.
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $z \notin h(t, \partial(D \cap E))$ para toda $t \in [0, 1]$, por lo que h es una homotopía admisible y por (P.5) tenemos

$$\deg((S_1)_E, D \cap E, z) = \deg((S_2)E, D \cap E, z), \tag{2.50}$$

por (2.49) esto prueba que

$$\deg(I - T_1, D, z) = \deg(I - T_2, D, z), \tag{2.51}$$

y por lo tanto $\deg(S, D, z)$ no depende de T_k ni de E_k, es decir no depende de las aproximaciones ni de los subespacios de dimensión finita que contengan la imágen de las mismas.

Lo anterior, aunado a la definición del grado de Leray-Schauder y la Nota 2.3 nos permite definir el grado en un espacio de Banach X como la única aplicación continua $G : \mathcal{A}_X \to \mathbb{Z}$, que cumple las propiedades (P.1), (P.4) y (P.5).

2.4.4. El teorema del punto fijo de Schauder

Lema 2.39 *Si X es un espacio de Banach y $A \subset X$ es relativamente compacto entonces* $\operatorname{conv}(A)$ *es relativamente compacto.*

Demostración. Sea (z_i) una sucesión en $\operatorname{conv}(A)$, es decir de la forma

$$z_n = (1 - t_i)a_i + tb_i$$

donde $a_n, b_n \in A$ y $t_n \in [0, 1]$. Por ser A relativamente compacto y $[0, 1]$ un compacto existen subsucesiones (a_{i_k}) de (a_i), (b_{i_k}) de (b_i) y (t_{i_k}) de (t_i) y puntos $x, y \in X$, $t \in [0, 1]$ tales que $a_{i_k} \to x, b_{i_k} \to y$ en X y $t_{i_k} \to t$ en $[0, 1]$. Por tanto,

$$z_{i_k} \to (1 - t)x + ty \quad \text{en } X.$$

Esto prueba que $\operatorname{conv}(A)$ es relativamente compacto. ∎

2.40 Teorema del Punto Fijo de Schauder. *Sea X un espacio de Banach, $K \subseteq X$ no vacío, cerrado, acotado y convexo u homeomorfo a un conjunto con estas propiedades. Si $T : K \to K$ es un operador compacto, entonces T tiene puntos fijos.*

Demostración. Por el teorema de Tietze-Dugundji, existe una extensión continua $G : X \to X$ de T tal que

$$G(X) \subseteq \operatorname{conv}(T(K)) \subseteq K,$$

ya que $\operatorname{conv}(T(K)) \subseteq \operatorname{conv}(K) = K$.

Como K es acotado, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset U_r$ y por lo tanto $G(x) \notin S_r$ para todo $x \in X$. De lo anterior, deducimos que $G(x) \neq x$ para todo $x \in S_r$ y de esto, que $0 \notin (I - G)(\partial U_r)$.

Veamos que la restricción de G a B_r es un operador compacto. Sabemos que $T(K)$ es relativamente compacto y por el lema anterior $\operatorname{conv}(A)$ es relativamente compacto. Como

$$G(B_r) \subseteq G(X) \subseteq \operatorname{conv}(T(K)),$$

se sigue que $G(B_r)$ es relativamente compacto, ya que, la propiedad de ser relativamente compacto se hereda a subconjuntos. Así, la restricción de G a B_r es un operador compacto. Por la Definición del grado de Leray-Schauder, podemos considerar $\deg(I - G, U_r, 0)$.

Escribimos $G = G|_{B_r}$ y definimos la homotopía $h \in \mathcal{PK}([0,1] \times B_r, X)$ dada por:

$$h(t,x) := (I - G)(x) + tG(x),$$

Observemos que para toda $x \in S_r$, $t \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} \|h(t,x)\| &= \|(I - G)(x) + tG(x)\| \\ &\geq \|I(x)\| - (1-t)\|G(x)\| \\ &> r - r = 0, \end{aligned}$$

pues $G(B_r) \subseteq K \subset U_r$. Es claro entonces que $0 \notin h(t, S_r)$ para toda $t \in [0,1]$. Esto implica que h es admisible y por (P.5) se tiene que

$$\deg(I - G, U_r, 0) = \deg(I, U_r, 0) = 1.$$

Concluimos la prueba observando que (P.2) nos dice que $I - G$ tiene puntos fijos en U_r, pero cualquier punto fijo $x \in U_r$ de $I - G$ cumple $x = G(x) \in K$ y por lo tanto $x = T(x)$, es decir T tiene puntos fijos.

Usando que los homemorfismos son operadores compactos y composición de operadores compactos es compacto, al igual que en el teorema del punto fijo de Brouwer se demuestra para conjuntos homeomorfos a conjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos. ■

CAPÍTULO 3

Oscilaciones forzadas de segundo orden

3.1. Introducción y enunciado del teorema

El resultado principal del artículo *On Schauder's Fixed Point Theorem and Forced Second-Order Nonlinear Oscillations* publicado por A. C. Lazer en el año de 1968, significó un nuevo método para establecer la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales no lineales aplicando el teorema del punto fijo de Schauder. Comenzaremos dando algunas definiciones necesarias para enunciar el resultado principal.

Sea $T > 0$.

Definición 3.1 *Una función $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama* T**-periódica** *si $k(T + t) = k(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Denotaremos por*

$$P_T = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(t + T) = f(t) \text{ para toda } t \in \mathbb{R}\}$$

al espacio de las funciones continuas y T-periódicas.

Proposición 3.2 *P_T con la norma*

$$\|f\|_{P_T} := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Primero veamos que con esta norma podemos identificar P_T con el subespacio $\mathcal{H}$ de $C^0([0, T])$, donde:

$$\mathcal{H} = \{f \in C^0([0, T]) \mid f(0) = f(T)\},$$

el cual es cerrado en $C^0([0,T])$, esto es claro pues para toda sucesión convergente $(f_k) \subset \mathcal{H}$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} f_k(0) = \lim_{k\to\infty} f_k(T)$$

y por lo tanto es un espacio de Banach. Claramente, $i : P_T \to \mathcal{H}$ dada por

$$i(f) = f|_{[0,T]}$$

es una función inyectiva tal que $\|i(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$. Veamos que la imágen de i es todo $\mathcal{H}$. Sea $w \in \mathcal{H}$. Definimos,

$$W(t) = w(t - \lfloor t/T \rfloor T) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Puesto que w es continua en $[0,T]$ y $W(0) = W(nT)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, entonces $W \in C(\mathbb{R})$ y por construcción $W \in P_T$, además es claro que $w = i(W)$. Esto prueba que i es una isometría de espacios de Banach entre P_T y $\mathcal{H}$. ∎

Recordemos que el teorema de Arzelá-Ascoli, se limita a familias de funciones sobre espacios compactos por lo que no es posible aplicarlo a P_T, sin embargo el resultado anterior nos permitirá dar una versión del teorema para P_T.

Lema 3.3 *Si $X \subset P_T$ es equicontinuo y uniformemente acotado, entonces X es relativamente compacto.*

Demostración. Recordemos de la proposición anterior que

$$P_T \overset{i}{\cong} \mathcal{H}.$$

Sea $X \subseteq P_T$, consideremos:

$$X \xrightarrow{i} i(X) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow C^0([0,T])$$

y supongamos que X es una familia equicontinua y uniformemente acotada.

Existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $f \in X$ se tiene que

$$\|i(f)\|_\infty = \|f\|_\infty \leq M,$$

por tanto $i(X)$ es uniformemente acotado. Sea $z_0 \in [0,T]$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, por equicontinuidad de X, existe δ tal que para toda $f \in X$

$$|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |z_0 - z| < \delta.$$

En particular,

$$|i(f)(z_0) - i(f)(z)| = |f(z_0) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |z_0 - z| < \delta \;\text{ y }\; z \in [0,T],$$

como $z_0 \in [0,T]$ arbitrario, esto implica que $i(X)$ es una familia equicontinua de $\mathcal{H}$.

Puesto que $[0,T]$ es compacto e $i(X) \subseteq C^0([0,T])$, podemos aplicar el teorema de Arzelá-Ascoli a $i(X)$. Concluimos que $i(X)$ es relativamente compacto y, por la Nota 1.2 (b), se cumple que $X = i^{-1}(i(X))$ es relativamente compacto. ∎

Notación 3.4 *Durante este capítulo escribiremos*

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty.$$

Definición 3.5 *El* **promedio** *de una función continua y T-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como*

$$\overline{f} = (1/T)\int_0^T f(s)\,ds \in \mathbb{R},$$

denotaremos por

$$Q_T = \{f \in P_T \mid \overline{f} = 0\}$$

al conjunto de las funciones continuas y T-periódicas con promedio cero.

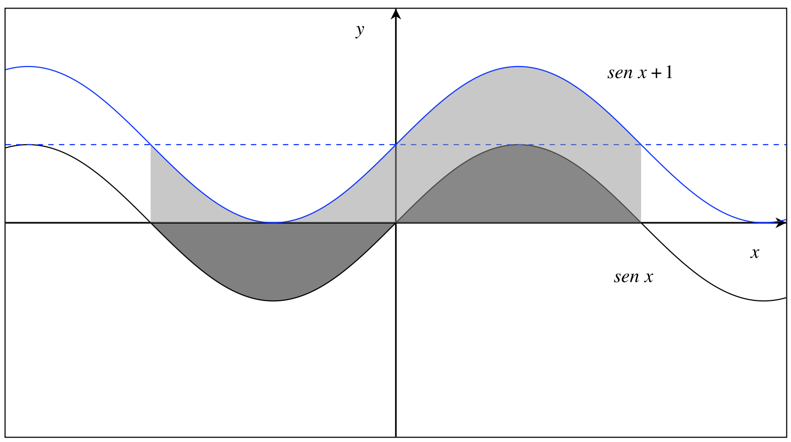

Figura 3.1: Ejemplos de funciones en P_T y Q_T.

El objetivo de este trabajo es investigar la existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t) \tag{3.1}$$

donde,

(a) $c \in \mathbb{R}$,

(b) $k \in Q_T$,

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $xg(x) \geq 0$ para $|x|$ suficientemente grande,

(d) $g(x)/x \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.

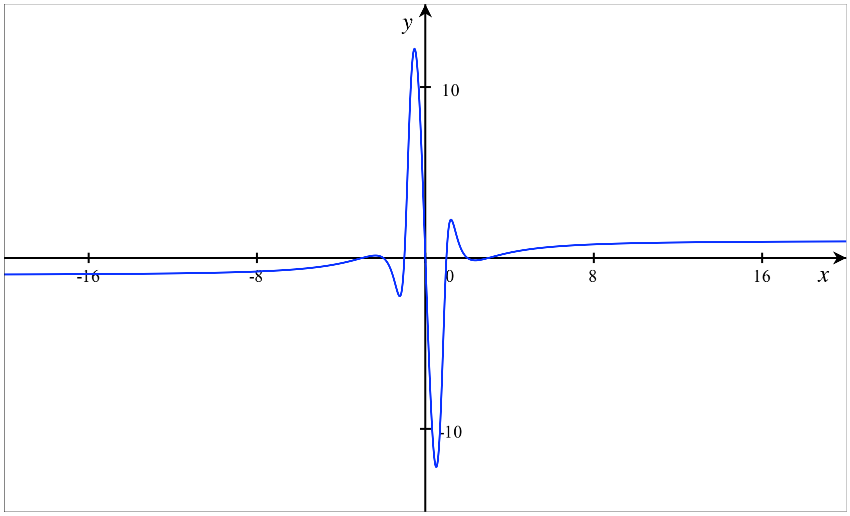

Figura 3.2: Una función racional que cumple (c) y (d).

Note que otra manera de caracterizar la propiedad (c) cuando la desigualdad es estricta es pedir que exista $R \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\deg(g, B_r(0), 0) = 1,$$

para toda $r > R$, lo que nos dice que la función g puede hacer prácticamente lo que sea en un cierto rango acotado pero debe tener signos distintos fuera del mismo, como observamos en la Fig. 3.1.

Veamos pues, un ejemplo del tipo de funciones g y k en la ecuación (3.1), de la cual, este trabajo garantiza la existencia de una solución T-periódica.

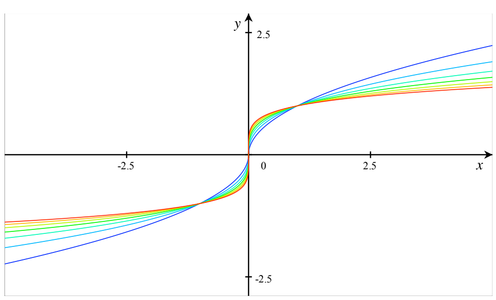

Figura 3.3: $g_\alpha(x)$

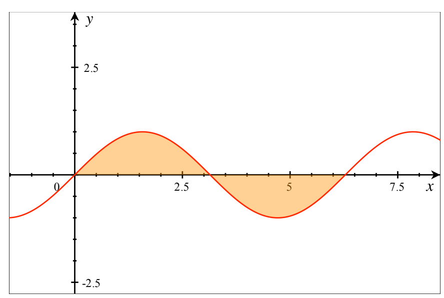

Figura 3.4: $k(t)$

Ejemplo 3.6 Consideremos las funciones k, g_α dadas por

$$k(t) = \text{sen}(t),$$

$$g_\alpha(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^\alpha \qquad \alpha \in (0,1).$$

Para cada α, estas funciones satisfacen las condiciones (b)-(d) con $T = 2\pi$.

3.2. Enunciado y demostración del teorema

Demostraremos el siguiente resultado debido a A. C. Lazer [13].

Teorema 3.7 (A.C. Lazer) *Sea $k \in Q_T$. Si g es continua, y*

$$g(x)/x \to 0 \quad \textit{cuando} \quad |x| \to \infty, \tag{3.2}$$

y además existe un número b tal que

$$xg(x) \geq 0 \quad \textit{para} \quad |x| \geq b, \tag{3.3}$$

entonces para todo número c la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t)$$

tiene al menos una solución T-periódica.

Primero vamos a reducir la ecuación (3.1) a dos casos esenciales, cuando $c = 0$ ó $c = 1$. A partir de esto, buscaremos expresar la solución de la ecuación como un problema de punto fijo, según el caso, para lo cual vamos a construir un subconjunto convexo de un espacio Banach apropiado y un operador compacto, esto nos permitirá utilizar el teorema de punto fijo de Schauder y así garantizar la existencia de soluciones T-periódicas y de promedio cero de la ecuación (3.1).

Sean $k \in Q_T$ y $g \in C^0(\mathbb{R})$ funciones que satisfacen las hipótesis del teorema y b como en (3.3).

3.2.1. Versión funcional del problema para $c = 0$ y $c = 1$

Demostraremos algunos lemas técnicos que facilitarán la construcción de la versión funcional de nuestro problema para los casos antes mencionados.

Lema 3.8 *Si $x \in C^1(\mathbb{R}) \cap P_T$ satisface*

$$\dot{x} + cx = \int_0^t f$$

para $f \in C^0(\mathbb{R})$, entonces $x \in C^2(\mathbb{R}) \cap P_T$ y satisface

$$\ddot{x} + c\dot{x} = f(t).$$

Demostración. Si $x \in C^1(\mathbb{R})$ y

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f\,ds - cx(t),$$

entonces $\dot{x}$ es derivable en todo punto. Derivando, obtenemos

$$\ddot{x}(t) = f(t) - c\dot{x}(t).$$

De manera que $x \in C^1(\mathbb{R})$ y $f \in C^0(\mathbb{R})$ implican que $x \in C^2(\mathbb{R})$ y cumple:

$$\ddot{x} + c\dot{x} = f(t).$$

■

Lema 3.9 *Si $f \in Q_T$ y*

$$I(f)(t) := \int_0^t f(s)\,ds,$$

entonces $I(f) \in P_T$ y $\|I(f)\| \leq (T/2)\,\|f\|$.

Demostración. Observemos que, con el cambio de variable $u = s - T$,

$$\int_T^{t+T} f(s)\,ds = \int_T^{t+T} f(s-T)\,ds = \int_0^t f(u)\,du.$$

Como $f \in Q_T$, se tiene

$$I(f)(T+t) = \int_0^{t+T} f(s)\,ds = \int_0^T f(s)\,ds + \int_T^{t+T} f(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,ds = I(f)(t),$$

esto prueba que $I(f) \in P_T$.

Se tiene que

$$|I(f)(t)| \leq \int_0^t |f(s)|\,ds \leq t\|f\| \leq \frac{T}{2}\|f\| \qquad \forall t \in [0, T/2].$$

Por otra parte, como $f \in Q_T$,

$$I(f)(t) + \int_t^T f = 0 \qquad \forall t \in [0, T]$$

y, en consecuencia,

$$|I(f)(t)| = \left|\int_t^T f\right| \leq (T-t)\|f\| \leq \frac{T}{2}\|f\| \qquad \forall t \in [T/2, T].$$

Concluimos que

$$\|I(f)\| = \max_{t\in[0,T]} |I(f)(t)| \leq \frac{T}{2}\|f\|.$$

■

El Lema anterior asegura que el operador lineal $I : Q_T \to P_T$ está bien definido. Claramente, la desigualdad anterior muestra que I es continuo.

Lema 3.10 *Si $F \in P_T$ y*

$$G(F)(t) := [e^T - 1]^{-1} \int_t^{T+t} e^{s-t} F(s)\, ds,$$

entonces $G(F) \in P_T$, $\|G(F)\| \leq \|F\|$ y $G(F)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} + x = F(t).$$

Demostración. Usando que $F(s) = F(s - T)$ y el cambio de variable $u = s - T$, tenemos

$$\begin{aligned} G(F)(t+T) &= [e^T - 1]^{-1} \int_{T+t}^{2T+t} e^{s-t-T} F(s-T)\, ds \\ &= [e^T - 1]^{-1} \int_t^{T+t} e^{u-t} F(u)\, du = G(F)(t), \end{aligned}$$

y por lo tanto $G(F) \in P_T$.

Para ver que $\|G(F)\| \leq \|F\|$, observemos que para toda $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| [e^T - 1]^{-1} \int_t^{T+t} e^{s-t} F(s)\, ds \right| &\leq [e^T - 1]^{-1} \int_t^{T+t} e^{s-t} \|F\|\, ds \\ &= \frac{[e^T - 1]}{[e^T - 1]} \|F\| = \|F\|. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|G(F)\| = \max_{t \in [0,T]} |G(F)(t)| \leq \|F\|.$$

Consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (t, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto [e^T - 1]^{-1} \int_u^{T+u} e^{s-v} F(s)\, ds. \end{aligned}$$

Entonces $G(F)'(t) = \nabla \psi(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, de modo que

$$\begin{aligned} G(F)'(t) &= [e^T - 1]^{-1} \left(e^T F(t+T) - F(t), - \int_t^{T+t} e^{s-t} F(s)\, ds \right) \cdot (1, 1) \\ &= [e^T - 1]^{-1} \left(e^T F(t) - F(t), - \int_t^{T+t} e^{s-t} F(s)\, ds \right) \cdot (1, 1) \\ &= [e^T - 1]^{-1} \left([e^T - 1] F(t), - \int_t^{T+t} e^{s-t} F(s)\, ds \right) \cdot (1, 1) \\ &= F(t) - G(F)(t) \end{aligned}$$

y por lo tanto $G(F)' + G(F) = F(t)$, lo que nos dice que $G(F)$ es solución de

$$\dot{x} + x = F(t).$$

∎

Lema 3.11 *Si $f \in Q_T$ y $H(f) = G(I(f))$, entonces $H(f) \in P_T$ y*

$$\|H(f)\| \leq \|I(f)\| \leq T/2\,\|f\|\,.$$

Además $H(f)$ es de clase C^2 y es solución de la ecuación

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t).$$

Demostración. Por los Lemas 3.9 y 3.10 se tiene que:

$$f \in Q_T \Rightarrow I(f) \in P_T \Rightarrow H(f) = G(I(f)) \in P_T,$$
$$\|G(I(f))\| \leq \|I(f)\| \leq T/2\,\|f\|\,.$$

La desigualdad anterior implica que $H : Q_T \to P_T$ es continua. Además, por el lema anterior, $x = H(f) \in P_T \cap C^1(\mathbb{R})$ y es solución de la ecuación

$$\dot{x} + x = I(f)(t) = \int_0^t f.$$

El Lema 3.8 nos dice que $x \in P_T \cap C^2(\mathbb{R})$ y es solución de la ecuación

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t).$$

∎

El siguiente resultado relaciona al operador H con el problema que nos interesa cuando $c = 1$.

Corolario 3.12 *Si $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ son tales que $k - g(x) \in Q_T$ y*

$$x = H(k - g(x)) + a,$$

entonces x es de clase C^2 y satisface

$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = k(t).$$

Demostración. Consideremos la función $\chi := x - a = H(k - g(x))$. Como $k - g(x) \in Q_T$ el Lema 3.11 implica que χ es de clase C^2 y

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = \ddot{\chi}(t) + \dot{\chi}(t) = k - g(x).$$

Por tanto x es de clase C^2 y satisface la ecuación

$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = k(t).$$

∎

Si $f \in P_T$, denotamos

$$\tilde{I}(f) := I(f) - \frac{1}{T}\int_0^T I(f).$$

Lema 3.13 *Si $f \in Q_T$ y $S(f) = I(\tilde{I}(f))$, entonces $S(f) \in P_T$ y*

$$\|S(f)\| \leq \frac{T^2}{2}\|f\|.$$

Además, $S(f)$ de clase C^2 y solución de la ecuación

$$\ddot{x} = f(t).$$

Demostración. Por el Lema 3.9,

$$I(f) \in P_T \Rightarrow \tilde{I}(f) \in Q_T \Rightarrow S(f) = I(\tilde{I}(f)) \in P_T,$$

$$\|S(f)\| = \|I(\tilde{I}(f))\| \leq (T/2)\|\tilde{I}(f)\| \leq T\|I(f)\| \leq (T^2/2)\|f\|.$$

Observemos que $x = S(f) \in P_T \cap C^1(\mathbb{R})$ cumple

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \tilde{I}(f)\right) = \int_0^t f - \overline{I(f)}.$$

El Lema 3.8 implica que $x \in P_T \cap C^2(\mathbb{R})$ y cumple la ecuación

$$\ddot{x} = f(t).$$

■

Corolario 3.14 *Si $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ cumplen que $k - g(x) \in Q_T$ y*

$$x = a + S(k - g(x)),$$

entonces x es de clase C^2 y satisface la ecuación

$$\ddot{x} + g(x) = k(t).$$

Demostración. Consideremos la función $\phi = x - a = S(k - g(x))$. Como $k - g(x) \in Q_T$ el Lema 3.13 implica que ϕ de clase C^2 es tal que

$$\ddot{\phi} = k(t) - g(x).$$

Pero

$$\ddot{x} = \ddot{\phi},$$

por lo que

$$\ddot{x} + g(x) = k(t).$$

Se sigue que $x = \phi + a$ es una solución T-periódica de clase C^2 de la ecuación (3.1) para el caso $c = 0$. ■

Para resolver los casos $c = 0, 1$ de la ecuación (3.1), todo se reduce a encontrar $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ como en los Corolarios 3.12 y 3.14. Esto, como veremos en la siguiente sección, nos garantiza la solución para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Reducción de la ecuación (3.1) a los casos $c = 0, 1$

La ecuación
$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t)$$
tiene esencialmente 2 casos: cuando $c = 1$ y cuando $c = 0$.

El resultado que veremos a continuación garantiza que si sabemos resolver las ecuaciones de la forma
$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = k(t)$$
que cumplan las hipótesis del Teorema 3.7 para cualquier $T > 0$, entonces podemos resolver el problema para toda $0 \neq c \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.15 *Si para toda $T > 0$, y para k, g como en el Teorema 3.7 la ecuación*
$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = k(t)$$
tiene una solución T-periódica, entonces para toda $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $T > 0$ y para k, g como en el Teorema 3.7 la ecuación
$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t)$$
tiene una solución T-periódica.

Demostración. Dada una función $x \in C^2(\mathbb{R})$ y $c \neq 0$, definimos
$$y(s) = x(sc^{-1}).$$
Entonces $y \in C^2(\mathbb{R})$ cumple
$$\dot{y}(s) = \frac{1}{c}\dot{x}(sc^{-1}) \quad \text{y} \quad \ddot{y}(s) = \frac{1}{c^2}\ddot{x}(sc^{-1}).$$
En consecuencia,
$$\ddot{y}(s) + \dot{y}(s) = \frac{1}{c^2}(\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t)).$$
Sean $\hat{g} := \dfrac{g}{c^2}$ y $\hat{k}(s) := \dfrac{k(sc^{-1})}{c^2}$. Entonces
$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t)$$
si y sólo si
$$\ddot{y} + \dot{y} + \hat{g}(y) = \hat{k}(s).$$
Si $\hat{T} := |c|\,T$, entonces
$$y(s + \hat{T}) = x(sc^{-1} \pm T) = x(sc^{-1}) = y(s),$$
es decir, $y \in P_{\hat{T}}$ si y sólo si $x \in P_T$. Usando el teorema del cambio de variable para $t = sc^{-1}$, se tiene
$$\int_0^{\hat{T}} y(s)\,ds = \int_0^{\hat{T}} x(sc^{-1})\,ds = c\int_0^{\hat{T}/c} x(t)\,dt = c\int_0^T x(t)\,dt.$$

Por tanto, se tiene $y \in Q_{\hat{T}}$ si y sólo si $x \in Q_T$. En particular, $\hat{k} \in Q_{\hat{T}}$ si y sólo si $k \in Q_T$. Claramente, $\hat{g}$ satisface (3.2) y (3.3) si y sólo si g satisface dichas condiciones. Esto prueba la proposición. ■

De este modo hemos reducido la solución de la ecuación (3.1) a los casos $c = 1$ y $c = 0$.

3.2.3. Algunas estimaciones

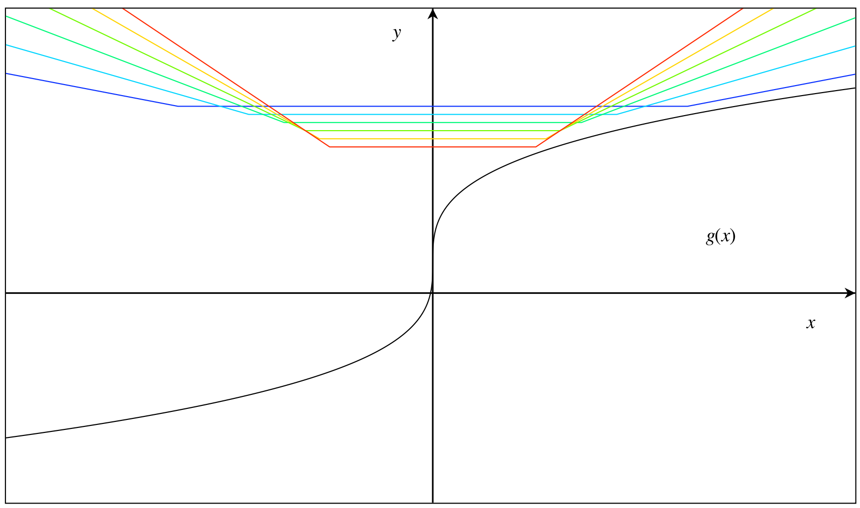

Figura 3.5: Una función g que cumple (3.2).

Lema 3.16 *Si $g \in C^0(\mathbb{R})$ es tal que*

$$\frac{g(x)}{x} \to 0 \qquad \textit{cuando } |x| \to \infty$$

entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $R_1(\varepsilon)$ tal que

$$|g(x)| \leq \varepsilon D \quad \textit{si} \quad D \geq R_1(\varepsilon) \;\; \textit{y} \;\; |x| \leq D. \tag{3.4}$$

Demostración. Si $r(\varepsilon)$ es tal que $|g(x)/x| \leq \varepsilon$ para $|x| \geq r(\varepsilon)$, entonces aprovechando que g es continua y $B_{r(\varepsilon)}$ compacto tomamos

$$M = \max\{|g(x)| : |x| \leq r(\varepsilon)\}$$

y definimos

$$R_1(\varepsilon) := \max\{r(\varepsilon), M/\varepsilon\}.$$

Hay dos casos, $|x| \leq r(\varepsilon)$ ó $|x| > r(\varepsilon)$. Si $|x| \leq r(\varepsilon)$, entonces $|g(x)| \leq M = \varepsilon(M/\varepsilon) \leq \varepsilon R_1(\varepsilon) \leq \varepsilon D$. Si $|x| > r(\varepsilon)$, entonces $|g(x)/x| \leq \varepsilon$ lo que implica que $|g(x)| \leq \varepsilon\,|x| \leq \varepsilon D$. ■

Lema 3.17 *Si $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < 1$ entonces existe $R_2(\beta,\alpha) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\beta + t\alpha \leq t \qquad \forall\, t \geq R_2(\beta,\alpha).$$

Demostración. Sea $f(t) = (1-\alpha)t - \beta$. Entonces $f'(t) = 1 - \alpha > 0$ para todo t, y $f(\frac{\beta}{1-\alpha}) = 0$. Por tanto,

$$f(t) \geq 0 \qquad \forall\, t \geq \frac{\beta}{1-\alpha} =: R_2(\beta,\alpha).$$

■

Definición 3.18 *Para $C > 0$, tomamos $\delta = \delta(C)$ tal que $0 < \delta < \min\{1/3, 1/(3C)\}$ y definimos*

$$D := D(C) = \max\left\{\frac{b}{1-3\delta}, \frac{b + (3C/2)\|k\|}{1-3C\delta}, R_1(\delta)\right\} \tag{3.5}$$

Con R_1 como en el Lema 3.16; b y k como en las hipótesis del Teorema 3.7.

Lema 3.19 *El número real D tiene la siguientes propiedades:*

(a) $|g(x)| \leq \delta D$ *si* $|x| \leq D$,

(b) $b + 3m \leq D$, *donde*

$$m := m(C) = \max\left\{\delta D, \frac{C}{2}\|k\| + C\delta D\right\}. \tag{3.6}$$

Demostración. Observemos que $3\delta, 3C\delta < 1$. Así

$$R_2(b, 3\delta) = \frac{b}{1-3\delta} \qquad y \qquad R_2\left(b + \frac{3C}{2}\|k\|, 3C\delta\right) = \frac{b + (3C/2)\|k\|}{1-3C\delta}.$$

Se sigue que las propiedades (a) y (b) son consecuencia inmediata de las definiciones de R_1 y R_2. ■

De ahora en adelante, dada $C > 0$, supondremos δ, D y m como en (3.5) y (3.6) respectivamente.

3.2.4. El problema de punto fijo

Sea $N : P_T \to \mathbb{R}$ a la función dada por

$$N(\theta) = \overline{g \circ \theta} = \frac{1}{T}\int_0^T (g \circ \theta).$$

Notaremos

$$\tilde{g}(\theta) := g \circ \theta - N(\theta) \in Q_T.$$

Lema 3.20 *La función $N : P_T \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset P_T$ una sucesión de funciones tal que $f_n \to f^* \in P_T$ cuando $n \to \infty$. Así, existe $M > 0$ tal que $(f_n) \subset B_M(0, P_T)$. Por otro lado g es continua en $\mathbb{R}$ y entonces $K := \max_{x \in B_M(0,\mathbb{R})} |g(x)| < \infty$. De lo anterior se sigue que

$$\|g(f_n)\| \leq K < \infty \qquad \forall\, n,$$

lo que implica que $K \in L^1([0,T])$ domina a la sucesión $(g(f_n)) \subset L^1([0,T])$ que por continuidad de g converge a $g(f^*)$ allí. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n) = \frac{1}{T} \lim_{n\to\infty} \int_0^T (g \circ f_n) = \frac{1}{T} \int_0^T \lim_{n\to\infty} (g \circ f_n) = \frac{1}{T} \int_0^T (g \circ f^*) = N(f^*).$$

Esto prueba que $N : P_T \to \mathbb{R}$ es contiua. ■

Observación 3.21 El Lema 3.19 implica que, para todo $\theta \in P_T$ con $\|\theta\| \ \leq D$, se tienen las siguientes cotas

$$\|g \circ \theta\| \leq \delta D,$$
$$|N(\theta)| \ \leq \delta D,$$
$$\|\tilde{g}(\theta)\| \ \leq 2\delta D.$$

◇

Sea $L : Q_T \to P_T \cap C^1(\mathbb{R})$ un operador tal que existen $C_1, C_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\|L(f)\| \leq \frac{C_1}{2} \|f\| \qquad \forall\, f \in Q_T, \tag{3.7}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} L(f) \right\| \leq C_2 \|f\| \qquad \forall\, f \in Q_T. \tag{3.8}$$

En el problema que nos intersa los operadores H y S jugarán el papel de L.

Lema 3.22 *El conjunto $Y := \{L(k - \tilde{g}(\theta)) \,|\, \theta \in P_T, \|\theta\| \leq D\}$ con $D := D(C_1)$ es relativamente compacto en P_T.*

Demostración. Por el Lema 3.3, basta probar que Y es equicontinuo y uniformemente acotado.

Consideremos $D := D(C_1), \delta := \delta(C_1)$ y $m := m(C_1)$ como en la Definición 3.18 y el Lema 3.19.

Sea $(v_n) = (L(k - \tilde{g}(\theta_n)) \subset Y$ una sucesión, de modo que $(\theta_n) \subseteq P_T$ son tales que $\|\theta_n\| \leq D$. Entonces $(k - \tilde{g}(\theta_n)) \subset Q_T$ y por (3.6), (3.7) y la Observación 3.21 se cumple que

$$\|v_n\| = \|L(k - \tilde{g}(\theta_n))\| \leq \frac{C_1}{2} \|k - \tilde{g}(\theta_n)\| \leq \frac{C_1}{2} (\|k\| + 2\delta D) \leq m$$

por lo que v_n es uniformemente acotada. Por (3.8)

$$\left\|\frac{d}{dt}v_n\right\| = \left\|\frac{d}{dt}L(k-\tilde{g}(\theta_n))\right\| \leq C_2\|k-\tilde{g}(\theta_n)\| \leq C_2(\|k\|+2\delta D) \leq \frac{C_2 2m}{C_1} =: C_3,$$

Por el teorema del valor medio para derivadas, para cada $x < y$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\xi_n \in (x,y)$ tal que $|v_n(y)-v_n(x)| = |(dv_n/dt)(\xi_n)|\,|y-x|$. Por lo tanto para todos $x < y \in \mathbb{R}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|v_n(y)-v_n(x)| \leq C_3\,|y-x|$. Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos $\delta = \varepsilon/2C_3$. Si $|y-x| \leq \delta$ entonces $|v_n(y)-v_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ lo que nos dice que (v_n) es una familia equicontinua en P_T. ■

El espacio $X := P_T \times \mathbb{R}$ con las operaciones y la norma usual para el producto de espacios de Banach, es decir si $(\theta,a),(\theta_1,a_1),(\theta_2,a_2) \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda(\theta_1,a_1)+(\theta_2,a_2) &= (\lambda\theta_1+\theta_2, \lambda a_1+a_2),\\ \|(\theta,a)\|_X &= \|\theta\|+|a|\end{aligned}$$

resulta ser un $\mathbb{R}$-espacio de Banach ya que P_T y $\mathbb{R}$ lo son.

Definición 3.23 *Para $C > 0$ definimos el conjunto*

$$E := E(C) = \{(\theta,a) \in X \mid \|\theta\| \leq D(C), |a| \leq b+2m(C)\}.$$

El conjunto E definido es el producto de la bola con centro en 0 y radio $D = D(C)$ en P_T con el intervalo $[-(b+2m), b+2m]$. En consecuencia, E es cerrado, acotado y convexo. Además $(0,0) \in E(C)$ para toda $C > 0$, por lo que $E \neq \emptyset$.

Definición 3.24 *Definimos el mapeo $A : X \to X$ como $A[(\theta,a)] = (\theta^*, a^*)$, donde*

$$\begin{aligned}\theta^* &= a + L(k-\tilde{g}(\theta))\\ a^* &= a - N(\theta^*)\end{aligned} \tag{3.9}$$

Por la definición de L, $L(k-\tilde{g}(\theta)) \in P_T$ y por ser a constante, $a+L(k-\tilde{g}(\theta)) = \theta^* \in P_T$. Ahora, puesto que $\theta^* \in P_T, \theta^*$ es continua y por tanto $N(\theta^*) < \infty$, de manera que $a - N(\theta^*) = a^* \in \mathbb{R}$. Por lo anterior, $(\theta^*,a^*) \in X$ y por tanto A está bien definido.

Proposición 3.25 *Para $E := E(C_1)$, donde C_1 como en (3.7) se cumplen:*

(I) $A(E) \subset E$

(II) $A(E)$ *es relativamente compacto*

Es decir, $A : E \to E$ es un operador compacto.

Demostración.

(I) Consideremos $(\theta,a) \in E$. Por la Definición 3.23, la propiedad (3.7), el Lema 3.19 y la Observación 3.21 se sigue que para $D := D(C_1), \delta := \delta(C_1)$ y

$m := m(C_1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\theta^*\| &\leq |a| + \|L(k - \tilde{g}(\theta))\| \\ &\leq (b + 2m) + (C_1/2)\|k - \tilde{g}(\theta)\| \\ &\leq (b + 2m) + (C_1/2)\|k\| + C_1\delta D \leq b + 3m \leq D. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como

$$D \geq R_1(\delta) \quad y \quad \|\theta^*\| \leq D,$$

la Observación 3.21 implica

$$|N(\theta^*)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T g(\theta^*(s))\, ds \right| \leq \delta D \leq m. \tag{3.11}$$

Si $|a| \leq b + m$, entonces (3.11) implica que $|a - N(\theta^*)| \leq b + 2m$, y por lo tanto

$$a \in [-(b + m), (b + m)] \Rightarrow a^* \in [-(b + 2m), (b + 2m)]. \tag{3.12}$$

Por la forma de A dada en (3.9),

$$\|\theta^* - a\| = \|L(k - \tilde{g}(\theta))\| \leq \frac{C_1}{2}(\|k\| + 2\delta D) \leq m,$$

lo anterior nos dice que para toda $t \in \mathbb{R}$

$$a - m \leq \theta^*(t) \leq a + m$$

por lo que

$$\begin{aligned} a \geq b + m \quad &\Rightarrow \quad \theta^*(t) \geq a - m \geq b + m - m = b \\ a \leq -(b + m) \quad &\Rightarrow \quad \theta^*(t) \leq a + m \leq -(b + m) + m = -b. \end{aligned}$$

Recordemos la propiedad (3.3), que dice

$$xg(x) \geq 0 \quad para \quad |x| \geq b.$$

Entonces para toda $t \in \mathbb{R}$, $a \geq b + m$ implica $\theta^*(t) \geq b$ y por (3.3) se tiene $g(\theta^*(t)) \geq 0$, $a \leq -(b + m)$ implica $\theta^*(t) \leq -b$ y por (3.3) se tiene $g(\theta^*(t)) \leq 0$. Así, por (3.11) se sigue que

$$b + m \leq a \leq b + 2m \Rightarrow b \leq a - N(\theta^*) \leq a \leq b + 2m,$$

$$-(b + 2m) \leq a \leq -(b + m) \Rightarrow -(b + 2m) \leq a \leq a - N(\theta^*) \leq -b.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a \in [b + m, b + 2m] \quad &\text{implica} \quad a^* \in [b, b + 2m] \\ a \in [-(b + 2m), -(b + m)] \quad &\text{implica} \quad a^* \in [-(b + 2m), -b] \end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.10)-(3.13) implican que $(\theta^*, a^*) \in E$. Esto demuestra $A(E) \subset E$.

(II) Basta probar que para toda sucesión $((\theta_n^*, a_n^*)) \subset A(E)$ existe una subsucesión $((\theta_{n_k}^*, a_{n_k}^*))$ convergente en X. Sea entonces $(A[(\theta_n, a_n)]) = ((\theta_n^*, a_n^*))$ una sucesión en E. Como $|a_n| \leq b + 2m$ para todo n, existe una subsucesión (a_{n_k}) tal que $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$ cuando $k \to \infty$. Como $\|\theta_{n_k}\| \leq D$ el Lema 3.22 implica que existe una subsucesión de (θ_{n_k}), a la que para no complicar más la notación continuaremos denotando por (θ_{n_k}), tal que

$$L(k - \tilde{g}(\theta_{n_k})) \to \varphi \qquad \text{en } P_T.$$

Por tanto,

$$\theta_{n_k}^* = a_{n_k} + L(k - \tilde{g}(\theta_{n_k})) \to a + \varphi =: \hat{\theta} \in P_T$$

respecto a la norma definida en P_T. Como N es continua, se tiene que

$$a_{n_k}^* = a_{n_k} - N(\theta_{n_k}^*) \to a + N(\hat{\theta}) =: \hat{a} \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que $(\hat{\theta}, \hat{\alpha}) \in X$, y

$$\lim_{n_k \to \infty} \|(\theta_{n_k}^*, a_{n_k}^*) - (\hat{\theta}, \hat{\alpha})\|_X = \lim_{n_k \to \infty} (\|\theta_{n_k}^* - \hat{\theta}\|_{P_T} + \left|a_{n_k}^* - \hat{\alpha}\right|) = 0.$$

Por lo tanto $((\theta_n^*, a_n^*))$ tiene una subsucesión convergente en X. Como supusimos $((\theta_n^*, a_n^*))$ arbitraria, esto prueba que $A(E)$ es relativamente compacto.

■

Estamos listos para probar el resultado principal de esta subsección.

Teorema 3.26 *Sea $L : Q_T \to P_T \cap C^1(\mathbb{R})$ un operador que satisface (3.7) y (3.8). Entonces existen $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que*

$$g \circ x = \tilde{g}(x) \in Q_T,$$
$$a + L(k - g \circ x) = x.$$

Demostración. $E := E(C_1)$ es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo del espacio de Banach X. Por la Proposición 3.25, $A : E \to E$ está bien definido y es un operador compacto. Por el teorema del punto fijo de Schauder existe al menos un punto fijo de A, es decir, existen $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^* = a + L(k - \tilde{g}(x)) = x,$$
$$a^* = a - N(x^*) = a.$$

De estas igualdades se sigue que $N(x) = N(x^*) = 0$. Por tanto,

$$g \circ x = \tilde{g}(x) \in Q_T$$

y entonces

$$a + L(k - g \circ x) = x,$$

como afrima el enunciado. ■

3.2.5. Demostración del teorema principal

Consideremos la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t),$$

donde los datos cumplen las hipótesis del teorema 3.7. Tomemos en consideración los tres casos posibles:

Caso 1 ($c = 1$). Recordemos el operador H definido en el Lema 3.11,

$H : Q_T \to P_T \cap C^2(\mathbb{R})$ satisface

$$\|H(f)\| \leq \frac{T}{2}\|f\|,$$

$$\left\|\frac{d}{dt}H(f)\right\| \leq \|I(f) - H(f)\| \leq \|I(f)\| + \|H(f)\| \leq T\|f\|.$$

Por lo que H cumple (3.7) y (3.8) para $C_1 = T, C_2 = T$. De modo que por el Teorema 3.26 existen $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$g \circ x = \tilde{g}(x) \in Q_T,$$
$$a + H(k - g \circ x) = x.$$

El Corolario 3.12 implica que $x \in P_T \cap C^2(\mathbb{R})$ tal que es solución de la ecuación

$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = k(t).$$

Esto resuelve el caso $c = 1$.

Caso 2 ($c = 0$). El operador definido en el Lema 3.13,

$S : Q_T \to P_T \cap C^2(\mathbb{R})$ satisface

$$\|S(f)\| \leq \frac{T^2}{2}\|f\|$$

$$\left\|\frac{d}{dt}S(f)\right\| \leq \|\tilde{I}(f)\| \leq 2\|I(f)\| \leq T\|f\|.$$

Por lo que S cumple (3.7) y (3.8) para $C_1 = T^2, C_2 = T$. De modo que por el Teorema 3.26 existen $x \in P_T$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$g \circ x = \tilde{g}(x) \in Q_T,$$
$$a + H(k - g \circ x) = x.$$

El Corolario 3.14 implica que $x \in P_T \cap C^2(\mathbb{R})$ tal que es solución de la ecuación

$$\ddot{x} + g(x) = k(t).$$

Esto resuelve el caso $c = 0$.

Caso 3 ($c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Como a lo largo de este capítulo hemos considerado g, k arbitrarias, el Caso 1 y la proposición 3.15 garantizan que existe $x \in C^2(\mathbb{R})$ solución de la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = k(t),$$

para toda $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hemos concluído la prueba del teorema principal del artículo tratado por A. C. Lazer en 1968, hemos demostrado la existencia de soluciones periódicas para oscilaciones forzadas de segundo orden. El siguiente corolario ofrece condiciones para una generalización de este resultado.

Corolario 3.27 *Si g, como en el Teorema 3.7, tiene límites*

$$g(\pm\infty) := \lim_{t \to \pm\infty} g(t)$$

y $f \in P_T$, entonces la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = f(t),$$

tiene al menos una solución T-periódica siempre que

$$g(-\infty) < \overline{f} < g(\infty).$$

Demostración. Ponemos $\tilde{f} := f - \overline{f} \in Q_T$ y $G := g(x) - \overline{f}$. Se sigue que G cumple las condiciones del Teorema 3.7 y por lo tanto existe una solución T-periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + G(x) = \tilde{f}(t)$$

que es equivalente a la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = f(t).$$

■

APÉNDICE A

Teoría de regularización

La existencia de funciones suaves juega un papel muy importante en teoría del análisis no lineal. En esta sección daremos la construcción de funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto y tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\, dx = 1.$$

A estas funciones las llamaremos funciones *regularizadoras*, en la Capítulo 2 las utilizaremos para dar una defininción del grado topológico así como para construir aproximaciones locales de funciones continuas en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ de clase C^∞, lo que mas formalmente quiere decir que probaremos que $C^\infty(V, \mathbb{R}^n)$

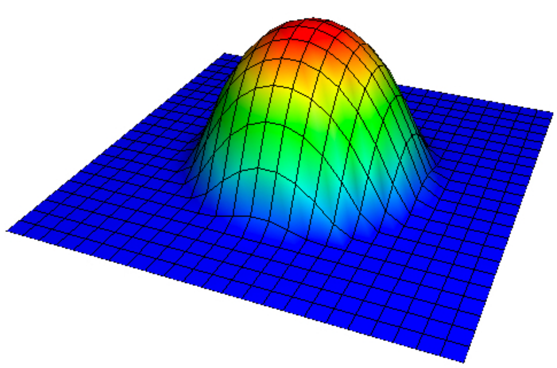

Figura A.1: Regularizador estándar en dimensión 2.

es denso en $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ donde V es un compacto de $\mathbb{R}^n$. Primero, veamos un teorema de integración que será una herramienta útil para la construcción de estás funciones.

A.1. Integración por partes

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema A.1 (Integración por partes) *Si* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

(a)

$$\int_\Omega \partial_i \varphi = 0 \quad \forall i = 1, ..., n.$$

(b) *Si* $f \in C^1(\Omega)$ *y* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega (\partial_i \varphi) f = -\int_\Omega (\partial_i f)\varphi \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Demostración.

(a) Sea $\tilde{\varphi}$ la extensión de φ a $\mathbb{R}^n$ que vale 0 fuera de Ω, entonces $\tilde{\varphi} \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Tomamos $c > 0$ suficientemente grande tal que $\mathrm{sop}[\,\varphi\,] \subset [-c, c]^n$. Sin perder generalidad supongamos $i = 1$ y denotemos $(t, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\int_{-c}^{c} \partial_1 \tilde{\varphi}(t, y)\, dt = \tilde{\varphi}(c, y) - \tilde{\varphi}(-c, y) = 0 \quad \forall y \in R^{n-1}.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega \partial_1 \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 \tilde{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 \tilde{\varphi}(t, y)\, dt\, dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-c}^{c} \partial_1 \tilde{\varphi}(t, y)\, dt\, dy = 0.$$

La demostración para $i \neq 1$ se sigue de manera similar.

(b) Sea $i \in \{1, ..., n\}$. Observando que $f\varphi \in C_c^1(\Omega)$ y aplicando el teorema anterior a $f\varphi$, obtenemos

$$0 = \int_\Omega \partial_i (f\varphi) = \int_\Omega (\partial_i f)\varphi + \int_\Omega (\partial_i \varphi) f.$$

Se sigue que

$$\int_\Omega (\partial_i \varphi) f = -\int_\Omega (\partial_i f)\varphi \quad \forall i = 1, ..., n.$$

∎

A.2. Regularización

Consideremos la fiunción $\varphi : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$\varphi(r) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) & \text{si } r < 1, \\ 0 & \text{si } r \geq 1, \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y ademas que $\mathrm{sop}[\,\varphi\,] = [0,1]$, esto nos dice en particular que la composición $\varphi(|\cdot|)$ es continua en $\mathbb{R}^n$ y tiene soporte compacto $\mathbb{B}^n$. Por lo tanto, tiene sentido considerar

$$0 < C = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\, dx < \infty. \tag{A.1}$$

Estamos listos para dar la definición del regularizador estándar.

Definición A.2 *Definimos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, el* **regularizador estándar** *por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C^{-1}\varphi(|x|) & si\, |x| < 1, \\ 0 & si\, |x| \geq 1, \end{cases}$$

Se sigue de (A.1) que η cumple las siguientes propiedades.

$$\mathrm{sop}[\,\eta\,] = \mathbb{B}^n, \tag{A.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\, dx = 1. \tag{A.3}$$

Para $\delta \in \mathbb{R}^+$ y en base a la definición de regularizador estándar, definimos la función con soporte compacto B_δ,

$$\eta_\delta = \frac{1}{\delta^n}\eta\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

De la definición de η y el teorema del cambio de variable se sigue la propiedad (A.3) para η_δ. Es claro que la traslación $\eta_\delta(x - \cdot)$ tiene soporte $B_\delta(x)$ y cumple (A.2).

Hemos construido ya funciones *suaves* en $\mathbb{R}^n$ con dominios compactos aptos a nuestro control, para continuar la construcción de nuestros regularizadores, debemos dotarlos de un dominio *apropiado*, para esto definimos

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Esto garantiza que el soporte de $\eta_\delta(x - \cdot)$ está contenido en Ω para toda $x \in \Omega_\delta$. Observemos para la siguiente definición que η es una función par.

Definición A.3 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable, definimos su* **δ-regularizador**

$$f^{\delta} = \eta_{\delta} * f \qquad en \ \Omega_{\delta}.$$

Esto es,

$$f^{\delta}(x) = \int_{\Omega} \eta_{\delta}(x-y) f(y)\, dy = \int_{\Omega} \eta_{\delta}(y-x) f(y)\, dy = \int_{B_{\delta}(0)} \eta_{\delta}(y) f(x-y)\, dy$$

para $x \in \Omega_{\delta}$.

El teorema de Fubini aplicado a funciones localmente integrables, la fórmula de la convolución y el hecho que para toda $x \in \Omega_{\delta}$ se tiene que $B_{\delta}(x) \subset \Omega$ le dan sentido a las igualdades de la definición anterior. Si quisiéramos ilustrar gráficamente lo que estamos haciendo, podríamos interpretarlo como *levantar suavemente* nuestra función f en una vecindad de radio δ del punto x. Estamos listos para aproximar cualquier función localmente integrable por funciones de clase C^{∞} como veremos en la siguiente proposición.

Proposición A.4 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable, entonces*

(I) $f^{\delta} \in C^{\infty}(\Omega_{\delta})$.

(II) *Si $f \in C^{0}(\Omega)$, entonces $f^{\delta} \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω cuando $\delta \to 0$.*

(III) *Si $f \in C^{1}(\Omega)$, entonces $\partial_i f^{\delta} \to \partial_i f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω cuando $\delta \to 0$, para todo $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Utilizaremos que $\mathrm{sop}[\,\partial_i u\,] \subseteq \mathrm{sop}[\,u\,]$ para toda función $u \in C^{1}(\Omega)$.

(I) Fijemos $x \in \Omega_{\delta}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Como Ω_{δ} es abierto, existe $0 < t_0 < \delta$ tal que $U_{t_0}(x) \subset \Omega_{\delta}$, es claro entonces para toda $t \in [0, t_0]$ que,

$$V_t := B_{\delta}(x) \cup B_{\delta}(x + t e_i) \subset \Omega. \tag{A.4}$$

Observemos que

$$\partial_i \eta_{\delta}(x-y) \neq 0 \qquad \text{implica} \qquad y \in B_{\delta}(x) \subset V_t,$$

$$\eta_{\delta}(x-y) - \eta_{\delta}(x + t e_i - y) \neq 0 \qquad \text{implica} \qquad y \in B_{\delta}(x + t e_i) \subset V_t.$$

Si definimos el conjunto convexo

$$V := \overline{\bigcup_{t \in [0, t_0]} V_t} \subset \Omega,$$

entonces

$$\int_{\Omega} \partial_i \eta_{\delta}(x-y) f(y)\, dy = \int_{V} \partial_i \eta_{\delta}(x-y) f(y)\, dy \tag{A.5}$$

y

$$\int_{\Omega}\Big(\eta_\delta(x-y)-\eta_\delta(x+te_i-y)\Big)\,dy=\int_V\Big(\eta_\delta(x-y)-\eta_\delta(x+te_i-y)\,dy\Big),\quad (A.6)$$

para toda $t \in U_{t_0}$. Además, como V es compacto y $\eta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se tiene $\|\partial_i\eta_\delta\|_{C^0(V)} < \infty$. Por la convexidad de V y el teorema del valor medio para funciones derivables en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\left|\frac{\eta_\delta(x+te_i-y)-\eta_\delta(x-y)}{t}\right| \leq \|\partial_i\eta_\delta\|_{C^0(V)},$$

entonces para toda $t \in [0,t_0]$ se tiene

$$\left|\left(\frac{\eta_\delta(x+te_i-y)-\eta_\delta(x-y)}{t}-\partial_i\eta_\delta(x-y)\right)f(y)\right| \leq 2\|\partial_i\eta_\delta\|_{C^0(V)}\,|f(y)|\,. \quad (A.7)$$

Como $f \in L^1(V)$, ya que es localmente integrable, la parte derecha de la ecuación (A.7) claramente es una función en $L^1(V)$. Así, por (A.4)-(A.6)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}&\frac{f^\delta(x+te_i)-f^\delta(x)}{t}-\int_\Omega \partial_i\eta_\delta(x-y)f(y)\,dy\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{f^\delta(x+te_i)-f^\delta(x)}{t}-\int_V \partial_i\eta_\delta(x-y)f(y)\,dy \qquad (A.8)\\ &=\lim_{t\to 0}\int_V\left(\frac{\eta_\delta(x+te_i-y)-\eta_\delta(x-y)}{t}-\partial_i\eta_\delta(x-y)\right)f(y)\,dy.\end{aligned}$$

Finalmente por (A.7) podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue a (A.8), de manera que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}&\frac{f^\delta(x+te_i)-f^\delta(x)}{t}-\int_\Omega \partial_i\eta_\delta(x-y)f(y)\,dy\\ &=\int_V\lim_{t\to 0}\left(\frac{\eta_\delta(x+te_i-y)-\eta_\delta(x-y)}{t}-\partial_i\eta_\delta(x-y)\right)f(y)\,dy=0,\end{aligned}$$

lo que hasta ahora demuestra que $\partial_i f^\delta$ existe y además

$$\partial_i f^\delta = \partial_i\eta_\delta * f \quad (x\in\Omega_\delta),$$

para toda $i \in \{1,...,n\}$. Notando que $\partial_i\eta$ comparte las propiedades de η utilizadas en la prueba, inductivamente podemos probar que $D^\alpha f^\delta$ existe y

$$D^\alpha f^\delta = D^\alpha\eta_\delta * f \quad (x\in\Omega_\delta),$$

para todo multi-índice α. Esto prueba (I).

(II) Sea $K \subseteq \Omega$ compacto, de manera que en realidad $K\cap\partial\Omega=\emptyset$ y por lo tanto $\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)>0$, pues $\partial\Omega$ es cerrado. Entonces, existe $\delta_0>0$ tal que $B_{\delta_0}(K) := \{x\in\mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x,K)\leq\delta_0\}\subset\Omega$. Como f es continua en Ω y

$B_{\delta_0}(K)$ es compacto, f es uniformemente continua en $B_{\delta_0}(K)$. Sea $\varepsilon > 0$, elegimos entonces $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall\, x, y \in B_{\delta_0}(K) \text{ tales que } \|x - y\| \leq \delta_1 \tag{A.9}$$

Utilizando la propiedad (A.3) se sigue que, para $\delta \in (0, \delta_1]$ y $x \in K$,

$$\begin{aligned}
\left|f^\delta(x) - f(x)\right| &= \left|\int_\Omega \eta_\delta(x-y) f(y)\, dy - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y) f(y)\, dy - \left(\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)\, dy\right) f(x)\right| \\
&= \left|\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)(f(y) - f(x))\, dy\right| \leq \left|\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y) \varepsilon\, dy\right| \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|f^\delta - f\|_{C^0(K)} \leq \varepsilon \quad \forall \delta \in (0, \delta_1]$. Esto implica (II).

(III) Tomamos de nuevo $\delta_0 > 0$ tal que $B_{\delta_0}(K) \subset \Omega$, para $\delta \in (0, \delta_0]$ y $x \in K$ se tiene $h(y) = \eta_\delta(x-y) \in C^0_c(B_{\delta_0}(K))$. Entonces, por el teorema de integración por partes, para toda $x \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\partial_i f^\delta(x) - \partial_i f(x)\right| &= \left|\int_\Omega \partial_i \eta_\delta(x-y) f(y)\, dy - \partial_i f(x)\right| \\
&= \left|\int_{B_\delta(x)} \partial_i \eta_\delta(x-y) f(y)\, dy - \left(\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)\, dy\right) \partial_i f(x)\right| \\
&= \left|\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y) \partial_i f(y)\, dy - \left(\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)\, dy\right) \partial_i f(x)\right| \\
&= \left|\int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)(\partial_i f(y) - \partial_i f(x))\, dy\right|.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Utilizando que $\partial_i f \in C^0(\Omega)$ y (A.3) podemos probar (III) imitando la demostración de (II).

■

Nota A.5 Si $f = (f^1, ..., f^n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente integrable, podemos aproximar localmente cada función coordenada f^i por funciones de clase C^∞ utilizando el procedimiento anterior, esto nos dice que que podemos aproximar localmente a f por $((f^1)^\delta, ..., (f^n)^\delta) \in C^\infty(\Omega_\delta)$ cuando $\delta \to 0$. ◇

APÉNDICE B

Lema de Sard

B.1. El lema de Sard

Supongamos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado.

Para una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable llamemos

$$J_f(x) := \det(\mathrm{D}f(x))$$

al Jacobiano de f, y denotemos

$$K_f(\Omega) := \{x \in \Omega \,|\, J_f = 0\} \qquad\qquad (K_f \text{ si no se presta a confusión}).$$

Definición B.1 *Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, decimos que $y \in \mathbb{R}^n$ es un* **valor regular** *de f si $f^{-1}(y) \cap K_f = \emptyset$ y caso contrario lo llamamos un* **valor singular***.*

Lema B.2 *Sea f como en la definición anterior, entonces $f^{-1}(y)$ es finito para todo valor regular y de f.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos $f^{-1}(y)$ es infinito. Como el dominio de f es acotado y $f^{-1}(y)$ es cerrado, pues f es continua, $f^{-1}(y)$ es compacto y por lo tanto secuencialmente compacto. De manera que $f^{-1}(y)$ tiene al menos un punto de acumulación, llamémosle x. Por otro lado el teorema de la función inversa nos garantiza que existen vecindades U, V de x y y respectivamente tales que f es una biyección allí, pues $J_f(x) \neq 0$, es decir que $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$. Esto contradice el hecho de que x sea punto de acumulación de $f^{-1}(y)$. ■

Notación B.3 *Denotaremos por* $|\cdot|$ *a la medida de Lebesgue de un conjunto en* $\mathbb{R}^n$.

Lema B.4 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *tal que* $|A| = 0$, *entonces* $\mathbb{R}^n \backslash A$ *es denso en* $\mathbb{R}^n$

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que $\mathbb{R}^n \backslash A$ no es denso en $\mathbb{R}^n$. Es decir que existen $z \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(z) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)^c = A$. De manera que $0 < |B_\varepsilon(z)| \leq |A|$, lo cual es una contradicción pues $|A| = 0$. ■

B.5 Lema de Sard. *Si* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *entonces* $|f(K_f)| = 0$.

Demostración. Sea

$$\mathcal{R} := \left\{ \prod_{k=1}^{n} [x^k - \frac{1}{2m}, x^k + \frac{1}{2m}] \,|\, m \in \mathbb{N}, mx \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

donde x^k es la k-ésima coordenada de x. Esta es una familia numerable de cubos cubriendo $\mathbb{R}^n$, ponemos

$$\mathcal{O} := \{R \in \mathcal{R} \,|\, R \subseteq \Omega\},$$

la cual es una cubierta numerable de Ω, ya que $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}$ y Ω abierto.

Ahora, probaremos que $|f(K_f \cap R)| = 0$ para todo $R \in \mathcal{O}$. Sea $R \in \mathcal{O}$ con diagonal (diámetro) de tamaño $r > 0$, como f es continuamente diferenciable en una vecindad de R podemos definir $M_1 := \text{máx}_{x \in R} \|\mathrm{D}f(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}$. Sea $\varepsilon \in (0, 1]$, como R es compacto y $\mathrm{D}f$ continua allí, entonces $\mathrm{D}f$ es uniformemente continua en R. Dada ε, existe entonces $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $\delta(\varepsilon) := \sqrt{n}r/m(\varepsilon)$, se cumple que:

$$\|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \quad \forall\, x, y \in R \text{ tales que } \|x - y\| \leq \delta(\varepsilon) \tag{B.1}$$

Consecuentemente y observando que la derivada respecto de t de la función $f((1-t)y + tx)$ es $\mathrm{D}f((1-t)y + tx)[x - y]$, tenemos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y) - \mathrm{D}f(y)[x - y]\| &= \left| \int_0^1 \mathrm{D}f((1-t)y + tx)[x - y]\, dt - \mathrm{D}f(y)[x - y] \right| \\ &= \left| \int_0^1 (\mathrm{D}f((1-t)y + tx) - \mathrm{D}f(y))[x - y]\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\mathrm{D}f((1-t)y + tx) - \mathrm{D}f(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} \|x - y\|\, dt \\ &\leq \varepsilon\delta(\varepsilon) \end{aligned} \tag{B.2}$$

para todo x, y como en (B.1) ya que, para todo $x \in B_{\delta(\varepsilon)}(y)$, la convexidad de la bola implica que, si $t \in [0, 1]$, entonces $(1-t)y + tx \in B_{\delta(\varepsilon)}(y)$.

Podemos cubrir a R con cubos de lado $\delta(\varepsilon)/\sqrt{n} = r/m(\varepsilon)$, de manera exacta $m(\varepsilon)$ cubitos por lado, es decir cubrimos a R con $m(\varepsilon)^n$ cubitos, llamémosle a éstos

$R_1, ..., R_k, ..., R_{m(\varepsilon)^n}$. Observemos que la diagonal de cualquier R_k es de tamaño $\delta(\varepsilon)$. Por ende si $x, y \in R_k$ entonces $\|x - y\| \leq \delta(\varepsilon)$.

Sea $k \in \{1, ..., m(\varepsilon)^n\}$. Si $K_f \cap R_k = \emptyset$ es claro que $|f(K_f \cap R_k)| = 0$. Supongamos entonces que $K_f \cap R_k \neq \emptyset$, es decir existe $z \in R_k$ tal que $J_f(z) = 0$. Denotando $\widetilde{R_k} := R_k - z$ definimos $g : \widetilde{R_k} \to \mathbb{R}^n$ por $g(x) = f(z + x) - f(z)$. Así (B.2) implica

$$\|g(x) - \mathrm{D}f(z)[x]\| = \|f(z + x) - f(z) - \mathrm{D}f(z)[x]\| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon) \tag{B.3}$$

pues $\widetilde{R_k} \subseteq B_{\delta(\varepsilon)}(0)$.

Hasta ahora no hemos utilizado el hecho de que $J_f(z) = 0$, esto nos dice que el rango de $\mathrm{D}f(z)$ es necesariamente menor a n, es decir que $\mathrm{D}f(z)$ no es isomorfismo. Por lo cual podemos garantizar que $\mathrm{D}f(z)(R_k) \subseteq L$ subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - 1$. Por lo cual podemos encontrar $b_1 \in \mathbb{S}^{n-1} \cap L^\perp$ y luego extender $\{b_1\}$ a una base ortonormal $\{b_1, ..., b_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. En consecuencia, con las siguientes propiedades:

$$|g(x) \cdot b_1| = |(g(x) - \mathrm{D}f(z)[x]) \cdot b_1| \leq \|g(x) - \mathrm{D}f(z)[x]\| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon)$$

y para b_i con $i \neq 1$,

$$\begin{aligned} |g(x) \cdot b_i| &\leq |(g(x) - \mathrm{D}f(z)[x]) \cdot b_i| + |\mathrm{D}f(z)[x] \cdot b_i| \\ &\leq \|g(x) - \mathrm{D}f(z)[x]\| + \|\mathrm{D}f(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}\|x\| \\ &\leq \varepsilon\delta(\varepsilon) + M_1\delta(\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon)(1 + M_1) \end{aligned}$$

para todo $x \in \widetilde{R_k}$. Lo que nos dice que $g(\widetilde{R_k})$ esta contenido en el rectángulo rotado de $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los b_i (pues el producto punto da la proyecciones a éstos), cuyo volumen es

$$2\varepsilon\delta(\varepsilon) \prod_{i\neq 1} 2\delta(\varepsilon)(1 + M_1) = (2\delta(\varepsilon))^n(1 + M_1)^{n-1}\varepsilon. \tag{B.5}$$

Puesto que la medida de Lebesgue se preserva bajo isometría y dado que $f(R_k) = g(\widetilde{R_k}) + f(z)$, por (B.5) para toda k tal que $K_f \cap R_k \neq \emptyset$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(K_f \cap R_k)| \leq |f(R_k)| &= \left|g(\widetilde{R_k}) + f(z)\right| = \left|g(\widetilde{R_k})\right| \\ &\leq (2\delta(\varepsilon))^n(1 + M_1)^{n-1}\varepsilon. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Por (B.6) y utilizando resultados básicos de teoría de la medida tenemos que

$$\begin{aligned} |f(K_f \cap R)| &\leq \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)^n} |f(K_f \cap R_k)| \leq \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)^n} (2\delta(\varepsilon))^n(1 + M_1)^{n-1}\varepsilon \\ &= m(\varepsilon)^n(2\delta(\varepsilon))^n(1 + M_1)^{n-1}\varepsilon = (2n^{1/2}r)^n(1 + M_1)^{n-1}\varepsilon \\ &= M_2\varepsilon, \end{aligned} \tag{B.7}$$

donde M_2 no depende de ε, de manera que $|f(K_f \cap R)| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Lo que prueba que $|f(K_f \cap R)| = 0$ para todo $R \in \mathcal{O}$.

Por último como $\mathcal{O}$ es numerable y la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, concluimos que $|f(K_f \cap \Omega)| = |f(K_f \cap A)| = 0$, donde A es la unión de los rectángulos en $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{O}$. Lo que prueba que $|f(K_f)| = 0$. ∎

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior y el Lema B.4.

Corolario B.6 (Densidad de los valores regulares) *Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, entonces el conjunto de valores regulares de f es denso en $\mathbb{R}^n$.*

APÉNDICE C

Extensión de Tietze-Dugundji

C.1. El teorema de Tietze-Dugundji

El teorema de Tietze-Dugundji es sumamente importante, pues para cualquier espacio métrico nos va a permitir extender continuamente funciones continuas de cualquier subespacio cerrado al espacio mismo. Para esto utilizaremos, sin ver la demostración, el siguiente teorema demostrado en el año de 1948 por H. A. Stone [16].

Definición C.1 *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice* **localmente finita**, *si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que U intersecta solamente a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$.*

C.2 Teorema de Stone. *Toda cubierta abierta de un espacio métrico tiene un refinamiento localmente finito.*

Definición C.3 *Sea X un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos como* **conv(A)** *a las combinaciones lineales convexas de A, es decir*

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_I a_i x_i \,\middle|\, a_i \in [0,1],\ \sum_I a_i = 1\, \mathrm{y}\, x_i \in A\, \text{para toda}\, i \in I \text{ índice finito} \right\}.$$

Observación C.4 conv(A) es un conjunto convexo, además tiene la propiedad de ser el convexo mas chico que contiene a A. Es decir, para todo convexo K tal que $A \subseteq K$ se tiene $\operatorname{conv}(A) \subseteq K$. $\diamond$

Nota C.5 De la observación anterior se sigue que

$$\operatorname{conv}(A) = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in A \text{ y } t \in [0,1]\}.$$

$\diamond$

C.6 Teorema de Tietze-Dugundji. *Sea X un espacio métrico, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado, E un espacio normado y $f : A \to E$ continua. Entonces existe $g : E \to E$ continua que extiende a f y tal que $g(E) \subseteq \operatorname{conv}(f(A))$.*

Demostración. $X \setminus A$ es abierto y hereda la métrica de X, consideramos entonces la cubierta abierta de $X \setminus A$ dada por:

$$\mathcal{A} := \{U_{\operatorname{dist}(x,A)/2}(x) \mid x \in X \setminus A\}.$$

Por el Teorema C.2 de Stone existe un refinamiento localmente finito

$$\mathcal{A}' := \{V_i\}_I$$

de $\mathcal{A}$. Es decir $\mathcal{A}'$ es tal que para todo $i \in I$ existe $x_i \in X \setminus A$ tal que

$$V_i \subseteq U_{\operatorname{dist}(x_i,A)/2}(x_i).$$

Definimos, para $x \in X$,

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin V_i \\ \operatorname{dist}(x, \partial V_i) & \text{si } \ x \in V_i \end{cases} \tag{C.1}$$

y

$$\psi_i(x) := \frac{\varphi_i(x)}{\sum_{k\in I} \varphi_k(x)}.$$

ψ_i está bien definida ya que para toda $x \in X \setminus A$, $\varphi_k(x) \neq 0$ sólo para un número finito de k's en I y $\sum_{k\in I} \varphi_k(x) > 0$, pues $\mathcal{A}'$ es una cubierta abierta de $X \setminus A$.

Claramente $\varphi_i(x)$ es continua en $X \setminus A$ (pues de hecho la distancia es Lipschitz continua). Luego, ψ_i es continua. Además, para toda $x \in X$ se tienen las siguientes propiedades.

$$0 \leq \psi_i(x) \leq 1, \tag{C.2}$$

$$\sum_{k\in I} \psi_k(x) = 1. \tag{C.3}$$

Para cada $i \in I$, elegimos $a_i \in A \cap B_{2\operatorname{dist}(x_i,A)}(x_i)$. Definimos para $x \in X$ la extensión de f dada por

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{k\in I} \psi_i(x) f(a_i) & \text{si } \ x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Veamos que $g : E \to E$ es una función continua. Observemos que g es continua en A, pues f lo es, y que g es continua en $X \setminus A$, pues es una suma finita de funciones continuas. Resta probar que, para toda sucesión $(x_n) \subset X \setminus A$ tal que $x_n \to x \in A$, se tiene que $g(x_n) \to g(x)$.

Sea $(x_n) \subset X \setminus A$ tal que $x_n \to x \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(z)\| \leq \varepsilon \tag{C.4}$$

para todo $z \in A \cap B_\delta(x)$. Sea $y \in (X \setminus A) \cap B_{\delta/6}(x)$. Entonces, para todo $i \in I$ tal que $y \in V_i$, como $\operatorname{dist}(y, x_i) \leq \operatorname{dist}(x_i, A)/2$ se cumple:

$$2 \operatorname{dist}(y, x_i) \leq \operatorname{dist}(x_i, A) \leq \operatorname{dist}(x_i, x) \leq \operatorname{dist}(y, x_i) + \operatorname{dist}(y, x).$$

En consecuencia,

$$\operatorname{dist}(y, x_i) \leq \operatorname{dist}(y, x). \tag{C.5}$$

Además por lo anterior $\operatorname{dist}(x_i, A) \leq 2 \operatorname{dist}(y, x)$, entonces

$$\operatorname{dist}(x_i, a_i) \leq 2 \operatorname{dist}(x_i, A) = 4 \frac{\operatorname{dist}(x_i, A)}{2} \leq 4 \operatorname{dist}(y, x). \tag{C.6}$$

De (C.5) y (C.6), concluimos que

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, a_i) &\leq \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, x_i) + \operatorname{dist}(x_i, a_i) \\ &\leq 2 \operatorname{dist}(x, y) + 4 \operatorname{dist}(x, y) \leq 6 \operatorname{dist}(x, y) \leq \delta, \end{aligned}$$

lo que por (C.4) implica que $\|f(x) - f(a_i)\| \leq \varepsilon$. Así, utilizando (C.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &= \|f(x) - \sum_{k \in I} \psi_i(y) f(a_i)\| \\ &= \|\sum_{k \in I} \psi_i(y)(f(x) - f(a_i))\| \leq \sum_{k \in I} \psi_i(y) \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $x_n \to x$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ se tiene que $x_n \in X \setminus A \cap B_{\delta/6}(x)$, de este modo garantizamos que

$$\|g(x) - g(x_n)\| \leq \varepsilon$$

para toda $n > N$. Como ε arbitrario, esto implica que $g(x_n) \to g(x)$. Esto prueba que g es continua. Además por (C.2), (C.3) y el hecho de que $\varphi_k(x) \neq 0$ sólo para un número finito de k's en I implica que $g(E) \subseteq \operatorname{conv}(f(A))$. ∎

APÉNDICE D

Algunas funciones

D.1. Formas lineales

Definición D.1 *Sea X un $\mathbb{R}$-espacio de Banach de dimensión finita. Una aplicación $B : X^n \to \mathbb{R}$ es una* **forma n-lineal** *si*

(a) $B[x_1, ..., \lambda x_i, ..., x_n] = \lambda B[x_1, ..., x_n]$
(b) $B[x_1, ..., x_i + y_i, ..., x_n] = B[x_1, ..., x_i, ..., x_n] + B[x_1, ..., y_i, ..., x_n]$

para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $y_i, x_i \in X$, $i \in \{1, ..., n\}$. Lo anterior utilizando la notación para los elementos de la siguiente manera

$$x = (x_1, ..., x_n) \text{ para todo } x \in X^n,$$

donde

$$x_i = (x_i^1, ..., x_i^M) \in X \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\} \text{ donde } M \text{ es la dimensión de } X.$$

Proposición D.2 *Toda forma n-lineal $B : X^n \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Escribiremos $J := \{1, ..., M\}$ durante la prueba. Primero, demostremos que para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ fijo se tiene la siguiente identidad

$$B[x] = \sum_{j \in J^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{i_k} B[e_{i_1}, ..., e_{i_n}] \right) \tag{D.1}$$

donde $j := (i_1, ..., i_n) \in J^n$ y $e_{i_k} \in X$ es el i_k-ésimo básico de la base canónica de X. Probaremos esta identidad por inducción sobre la dimensión n.

Para $n = 1$, sea $x \in X$.

$$B[x] = B[x^1 e_1 + ... + x^M e_M] = \sum_{i=1}^{M} x^i B[e_i]$$

que es justamente la identidad (D.1) para dimensión 1, pues $J^n = J = \{1, ..., M\}$ en este caso.

Paso de inducción, supongamos la identidad (D.1) cierta para $k = n - 1$ y demostremos para $k = n$. Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$. Definimos la función $\widetilde{B} : X^{n-1} \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{B}[y_1, ..., y_{n-1}] := B[y_1, ..., y_{n-1}, x_n].$$

Claramente $\widetilde{B}$ es una forma $(n-1)$-lineal, pues B es una forma n-lineal. Entonces por hipótesis de inducción podemos aplicar la identidad (D.1) a $\widetilde{B}$:

$$\begin{aligned}
B[x_1, ..., x_n] &= \widetilde{B}[x_1, ...x_{n-1}] \\
&= \sum_{j \in J^{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{i_k} \widetilde{B}[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}] \right) \\
&= \sum_{j \in J^{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{i_k} B[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, x_n] \right) \\
&= \sum_{j \in J^{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{i_k} B[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, x_n^1 e_1 + ... + x_n^M e_M] \right) \\
&= \sum_{j \in J^{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{i_k} \left(\sum_{m=1}^{M} x_n^m B[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, e_m] \right) \right) \qquad \text{(D.2)} \\
&= \sum_{j \in J^{n-1}} \left(\sum_{m=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{i_k} x_n^m B[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, e_m] \right) \right) \\
&= \sum_{(j,m) \in J^{n-1} \times J} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{i_k} x_n^m B[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, e_m] \right) \\
&= \sum_{j \in J^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{i_k} B[e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, e_{i_n}] \right).
\end{aligned}$$

Lo que prueba la identidad. Siempre que $y := (y_1, ..., y_n) \to x := (x_1, ..., x_n) \in X^n$ con respecto a la norma producto, esto quiere decir que $y_i^j \to x_i^j$ para todo $i =$

$1,...,n$ y todo $j \in J$. Entonces utilizando la identidad (D.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x} B[y] &= \lim_{y\to x} \sum_{j\in J^N} \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{i_k} B[e_{i_1},...,e_{i_n}] \right) \\
&= \sum_{j\in J^n} \left(\prod_{i=1}^{n} \lim_{y\to x} y_i^{i_k} B[e_{i_1},...,e_{i_n}] \right) \\
&= \sum_{j\in J^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{i_k} B[e_{i_1},...,e_{i_n}] \right) = B[x].
\end{aligned}$$

Por la equivalencia topológica de continuidad con respecto a límites concluimos que B es continua. ■

Proposición D.3 *Sean $f := (f_1,...,f_n) \in C^1(\mathbb{R}, X^n)$ y B una forma n-lineal. Consideremos la función $h := B \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces h es derivable y el cálculo de su derivada para un tiempo t es*

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{n} B[f_1(t),...,f_k'(t),...,f_n(t)].$$

Demostración. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Por la Proposición D.1, B es continua y abre límites, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
h'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{B[f_1(t_0),...,f_n(t_0)] - B[f_1(t),...,f_n(t)]}{t_0 - t} \\
&= \lim_{t\to t_0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{B[f_1(t),...,f_{k-1}(t), f_k(t_0),...,f_n(t_0)]}{t_0 - t} \right.\\
&\left. - \frac{B[f_1(t),...,f_k(t), f_{k+1}(t_0),...,f_n(t_0)]}{t_0 - t} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} B[f_1(t_0),...,f_{k-1}(t_0), \lim_{t\to t_0} \frac{f_k(t_0) - f_k(t)}{t_0 - t}, f_{k+1}(t_0)...,f_n(t_0)] \\
&= \sum_{k=1}^{n} B[f_1(t_0),...,f_k'(t_0),...,f_n(t_0)].
\end{aligned} \tag{D.3}$$

■

D.2. Divergencia y cofactores

Denotaremos por D a un abierto en $\mathbb{R}^n$.

Definición D.4 *Sea $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La* **divergencia** *de u,* $\operatorname{div} u \in C^0(D)$ *se define como*

$$\operatorname{div} u(x) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i u^i(x).$$

Observación D.5 Si $u \in C_c^1(D, \mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_D \text{div } u = 0.$$

Para ver esto, notemos que $u^i \in C_c^1(D, \mathbb{R})$. Aplicando el Teorema A.1 a u^i se tiene que $\int_D \partial_i u^i = 0$ y el resultado se sigue pues la integral es lineal. $\diamond$

Definición D.6 *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz. El* **cofactor-*ij*** *de A,*

$$det_{ij}(A)$$

es $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz de A quitando la i-ésima línea y la j-ésima columna:

$$\det_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2.j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notación D.7 *Para una función $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ utilizaremos la siguiente notación con respecto a sus cofactores*

$$d_{ij} := \det_{ij}(\mathrm{D}f(x)).$$

Además escribiremos $\widehat{f}$ para denotar la ausencia del objeto f.

Lema D.8 *Si $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\sum_{j=1}^n \partial_j d_{ij}(x) = 0 \qquad \textit{para todo } i = 1, ..., n \textit{ y } x \in D.$$

Demostración. Utilizando la Notación D.7 fijemos $i \in \{1, ..., n\}$ y denotemos

$$g_k := \partial_k (f^1, ..., \widehat{f^i}, ..., f^n)^T = (\partial_k f^1, ..., \partial_k \widehat{f^i}, ..., \partial_k f^n)^T.$$

Con esta notación es claro que

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(g_1, ..., \widehat{g_j}, ..., g_n).$$

Recordando la Definición D.1 de una forma n-lineal, es claro que por las propiedades del determinante, éste es una forma n-lineal con respecto a los vectores g_k. Sea $x \in D$, entonces definimos $h : V \to (\mathbb{R}^n)^n$ de la siguiente manera

$$h(t) := (g_1(x + te_j), ..., \widehat{g_j}, ..., g_N(x + te_j)),$$

donde e_j es el j-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}$ es un abierto tal que $x + te_j \in D$ para toda $t \in V$. Como $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$, entonces $h \in C^1(V)$, así por la Proposición D.3 $\det(h)$ es diferenciable en el $0 \in V$ y además

$$(\det h)'(0) = \sum_{k \neq j} \det(g_1, ..., \widehat{g_j}, ..., \partial_j g_k, ..., g_n)(x).$$

Pero es claro que $(-1)^{i+j}(\det h)'(0)$ es justamente la definición de $\partial_j d_{ij}$, entonces

$$\partial_j d_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \sum_{k \neq j} \det(g_1, ..., \widehat{g_j}, ..., \partial_j g_k, ..., g_n)(x). \tag{D.4}$$

Si escribimos

$$c_{kj} := \det(\partial_j g_k, g_1, ..., \widehat{g_j}, ..., \widehat{g_k}, ..., g_n)(x)$$

entonces $c_{kj} = c_{jk}$, ya que f es de clase C^2, implica $\partial_j g_k = \partial_k g_j$. Intercambiar dos columnas vecinas en un determinante sólo cambia el signo del determinante. Por lo tanto

$$\det \det(g_1, ..., \widehat{g_j}, ..., \partial_j g_k, ..., g_n)(x) = \begin{cases} (-1)^{k-1} c_{kj} & k < j \\ (-1)^{k-2} c_{kj} & k > j \end{cases}. \tag{D.5}$$

Definimos $\sigma_{kj} = -1$ para $k > j$, $\sigma_{kj} = 1$ para $k < j$ y $\sigma_{jj} = 0$. Con esta notación (D.4) y (D.5) implican que

$$(-1)^{i+j} \partial_j d_{ij}(x) = \sum_{k<j} (-1)^{k-1} c_{kj} + \sum_{k<j} (-1)^{k-2} c_{kj} = (-1)^{k-1} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{kj} c_{kj}.$$

Todo lo anterior es válido para $j = 1, ..., n$. Formando la suma respecto a j obtenemos

$$\begin{aligned} (-1)^i \sum_{j=1}^{n} \partial_j d_{ij} &= \sum_{k,j=1}^{n} (-1)^{k-1+j} \sigma_{kj} c_{kj} \\ &= \sum_{k,j=1}^{n} (-1)^{j-1+k} \sigma_{jk} c_{jk} && \text{(cambio de índice)}, \\ &= -\sum_{k,j=1}^{n} (-1)^{k-1+j} \sigma_{kj} c_{kj} && (c_{kj} = c_{jk}, \sigma_{kj} = \sigma_{jk}). \end{aligned}$$

El único valor real con parte positiva igual a su parte negativa es el 0, esto implica que la suma es 0. ■

D.3. Operadores en espacios de Banach

Sean E, F espacios de Banach.

Definición D.9 *Sea $A \subseteq E$ y $f : A \to F$ una función continua. Decimos que f es un* **operador compacto** *si $f(A)$ es relativamente compacto en F. Denotamos por $\mathcal{K}(A, F)$ a la familia de operadores compactos de A en F.*

Definición D.10 *Sea $A \subseteq E$ y $f : A \to F$. Decimos que f es un operador de* **dimensión finita** *si existe un subespacio de dimensión finita en F que contiene a $f(A)$. Denotaremos por $\mathcal{F}(A, F)$ a la familia de funciones de dimensión finita entre A y F.*

Lema D.11 *$\mathcal{F}(A, F)$ es denso en $\mathcal{K}(A, F)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{K}(A, F)$, como $f(A)$ es relativamente compacto, entonces $f(A)$ es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $Y \subseteq E$ finito tal que $f(A) \subseteq Y + U_\varepsilon$. Definimos para $y \in Y$, $z \in f(A)$

$$\varphi_y(z) := \text{máx}\{0, \varepsilon - |z - y|\}, \tag{D.6}$$

$$\psi_y(z) := \frac{\varphi_y(z)}{\sum_{x \in Y} \varphi_x(z)}. \tag{D.7}$$

Es claro que para cada $y \in Y$, φ_y es continua. Además como $Y + U_\varepsilon$ cubre a $f(A)$ se tiene que $\varphi_y(z) \in [0, 1]$ y $\sum_{y \in Y} \varphi_y(z) > 0$ para toda $z \in f(A)$ y como esta suma es finita, aseguramos entonces que ψ_y esta bien definida, es continua y además $\sum_{y \in Y} \psi_y(z) = 1$ para toda $z \in f(A)$.

Ahora definimos $g : A \to F$ por

$$g(x) := \sum_{y \in Y} \psi_y(f(x))y. \tag{D.8}$$

Por lo anterior y puesto que f es continua, g es continua y su imágen esta contenida en el espacio de dimensión finita $< Y >$, por esto $g \in \mathcal{F}(A, F)$. Sea $x \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &= \|\sum_{y \in Y} \varphi_y(f(x))(y - f(x))\| \\ &\leq \sum_{y \in Y} \varphi_y(f(x))\|y - f(x)\| \leq \sum_{y \in Y} \varphi_y(f(x)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto indica que $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Como ε fue elegido arbitrariamente se obtiene la densidad deseada. ∎

Definición D.12 *Sea $A \subseteq E$ y $f : A \to F$. Llamamos a f es un operador* **completamente continuo** *si f es continua y $f(B)$ es relativamente compacto para todo B subespacio acotado de A. Denotamos por $\mathcal{Z}(A, F)$ a la familia de operadores completamente continuos de A en F.*

Definición D.13 *Sea $A \subseteq E$ cerrado y acotado, $f : A \to E$. Decimos que f es* **propio** *si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subset F$ compacto.*

Proposición D.14 *Si $f \in \mathcal{K}(A, E)$ entonces $I - f$ es propio.*

Demostración. Sea $K \subseteq E$ compacto. Sea $(x_k) \subset (I-f)^{-1}(K)$ una sucesión, queremos demostrar que (x_k) tiene una subsucesión convergente en $(I-f)f^{-1}(K)$. Denotemos $y_k := x_k - f(x_k)$, como $y_k \in K$ y K es compacto podemos suponer sin perder generalidad pasando a subsucesiones que $y_k \to y \in K$. Ahora como $f(x_k) \in f(A)$ y $f(A)$ es relativamente compacto, entonces de igual forma podemos suponer pasando a subsucesiones que $f(x_k) \to z \in E$. Por lo tanto $x_k = y_k + f(x_k) \to y + z \in E$, pero como $(I-f)$ es continuo entonces $(I-f)^{-1}(K)$ es cerrado y por lo tanto $x_k = y_k + f(x_k) \to y + z \in (I-f)^{-1}(K)$. Lo que prueba que $(I-f)^{-1}(K)$ es compacto. Como K fue un compacto arbitrario concluimos que $(I-f)$ propio. ∎

Lema D.15 *Sea $A \subseteq E$ cerrado y acotado, $f : A \to F$ operador continuo y propio. Entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sea $B \subseteq A$ cerrado. Sea $(y_k) \subseteq f(B)$ una sucesión tal que $y_k \to y$ en F, queremos demostrar que $y \in f(B)$. Consideremos $(x_k) \subset A$ tal que $f(x_k) = y_k$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{y\}$ es secuencialmente compacto en F y F es completo, entonces $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{y\}$ es compacto. Ahora usando que f es propio, se tiene que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$ es relativamente compacto, por lo tanto existe una subsucesión $(x_{k_i}) \subset B$ tal que $x_{k_i} \to x \in B$, ya que B es cerrado, por continuidad de f se tiene $y_{k_i} = f(x_{k_i}) \to f(x)$ y esto prueba que $y = f(x)$ y por lo tanto $y \in f(B)$. ∎

Índice alfabético

Bibliografía

[1] N. Ackermann, *El Grado Topológico y sus Aplicaciones en Análisis No Lineal*, Notas del Curso Seminario de Análisis Matemático B, UNAM, 2009.

[2] H. Amann and S. Weiss, *On the uniqueness of the topological degree*, Math. Z. 130 (1973), 39-54.

[3] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 328 pp., 2007.

[4] H. Amman, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*, Walter De Gruyter, 458 pp., 1990.

[5] J. C. Burkill, *The Lebesgue Integral*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 40 (1951).

[6] K.-C. Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, 442 pp., 2005.

[7] M. Clapp, *Análisis*, Notas del Curso de Análisis I y Análisis II, UNAM, 2008-2009.

[8] J. Dieudonne, *Foundations Of Modern Analysis*, Academic Press, 361 pp., 1960.

[9] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. of Math. 1 (1951), 353-367.

[10] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, 690 pp., 2003.

[11] B. I. Dundas, *Differential Topology*, Bjørn Ian Dundas, Free License, 183 pp., 2002.

[12] E. Heinz, *On the uniqueness of the topological degree*, J. Math. Mech. 8 (1959), 231-247.

[13] A. LAZER, *On Schauder's fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscilations*, J. Math. Anal. Appl. 21 (1968), 421-425.

[14] J. W. MILNOR, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, 64 pp., 1997.

[15] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Science/Engeneering/Math, 325 pp., 1976.

[16] A. H. STONE, *Paracompactness and Product Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977-982.

[17] S. WILLARD, *General Topology*, Addison-Wesley, 369 pp., 1970.