



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

Modelo Bidimensional de Fracturas en Rocas Basado en el Algoritmo de Crecimiento Laplaciano: Análisis de Escalamiento y Fractalidad

T E S I S

que como requisito parcial para obtener el grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

P R E S E N T A

M. C. Alejandra Aguilar Hernández

Jurado Examinador

Dr. Guillermo Ramírez Santiago (Director de tesis)
Dr. Agustín González Flores (Presidente)
Dr. Gustavo Tolson Jones (Vocal)
Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz (Suplente)
Dr. Jean Francois Parrot (Suplente)

Comité Tutorial

Dr. Guillermo Ramírez Santiago
Dr. Juan Manuel Espíndola Castro
Dr. Guillermo Pulos Cárdenas



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

* * * * *

Dedico esta tesis a la memoria de mi madre

que permanece viva en mi corazón y en mis pensamientos.

* * * * *

Deseo expresar mis más sinceras muestras de agradecimiento:

Al Dr. Guillermo Ramírez, por la ayuda que me brindó en un momento que me resultó realmente crítico.

A mi padre, hermanos y sobrinos por motivar, alentar y apoyar todas mis decisiones.

A mis amigos porque siempre atienden mis llamados.

A José Luis Sánchez Zavala, Rafael Torres de León y Consuelo Macías por compartir conmigo sus fotografías de fracturas en rocas, cuyos análisis fueron fundamentales para esta tesis.

Al Dr. Pulos y al Mtro. Ernesto Sánchez por acercarme a la dinámica de la fractura.

Al CONACyT por la beca que me otorgó.

Agradezco el financiamiento recibido a través de los proyectos, 43596-F e IN110103 de CONACyT y DGAPA-UNAM, respectivamente. A la DGSCA-UNAM por permitirme realizar muchos de los cálculos en la supercomputadora KanBalam.

Índice general

Resumen	4
1. Introducción	6
2. Modos básicos de propagación de fracturas	9
2.1. Modo III de propagación	11
3. Formación de patrones	13
3.1. Crecimiento Laplaciano	14
3.2. Modelo estocástico de crecimiento Laplaciano	16
4. Modelo de fracturas	19
4.1. Solución de la ecuación de Laplace	20
4.2. Transformaciones conformes	21
4.3. Componente tangencial del esfuerzo	23
4.4. Distribución de probabilidad de las direcciones de crecimiento	24
4.5. Formación de patrones mediante un proceso iterativo	25
5. Conceptos básicos de auto-similaridad y auto-afinidad	28
5.1. Auto-similaridad	29
5.2. Auto-afinidad	31
6. Fracturas en rocas	33
6.1. Descripción geológica	33
6.2. Estructura fractal de fracturas en rocas	36
7. Patrones de fracturas generados con el MECL	42
7.1. Propiedades de auto-similaridad	42
7.2. Propiedades de auto-afinidad	45
8. Conclusiones	53
Bibliografía	55

Resumen

En esta tesis se investigaron las propiedades de auto-similaridad de patrones bidimensionales obtenidos de imágenes binarias de contornos de fracturas en rocas de diferente origen geológico y diferentes escalas de longitud. También se estudiaron las propiedades de auto-similaridad y auto-afinidad de un Modelo Estocástico de Crecimiento Laplaciano (MECL) bidimensional que emula las propiedades estructurales de contornos de fracturas en rocas. El MECL se define en términos de un proceso de iteración de una transformación conforme, no lineal, de una solución elemental de la ecuación de Laplace. La transformación conforme, no lineal, (mapeo no lineal) depende explícitamente de dos parámetros, α y λ . El parámetro α , varía continuamente en el intervalo $(0, 1)$, y define la forma de una protuberancia que se añade en cada etapa de crecimiento del contorno, mientras que λ representa el área de la protuberancia. Después de realizar al menos 10^4 iteraciones el mapeo no lineal produce un patrón de fractura. La variación de α en el intervalo $(0, 1)$ genera familias de patrones bidimensionales de fracturas con diferentes propiedades estructurales. Esto permite emular fracturas en rocas de escalas de longitud y origen geológico diferentes. Para caracterizar las propiedades estructurales de los patrones de fracturas tanto en rocas como los obtenidas con el modelo se calcularon tres diferentes dimensiones fractales: (i) de capacidad, (ii) de información y (iii) de correlación. También se calculó el exponente de rugosidad asociado a los perfiles angulares de los patrones obtenidos con el MECL. De un análisis detallado de la estructura de estos patrones, se encontró que las dimensiones fractales de capacidad, información y correlación decrecen monótonicamente conforme α aumenta. Cuando α toma valores muy cercanos a la unidad los valores de estas tres dimensiones fractales tienden a converger a un mismo valor, sugiriendo un carácter auto-similar de los patrones. Además, de un análisis de las correcciones al escalamiento del exponente de rugosidad de los patrones obtenidos con el MECL se concluye que la familia de patrones con $\alpha = 0.9$ tiene propiedades auto-afines. Lo que es más importante, para este valor de α el valor del exponente de rugosidad está dentro del rango de valores reportados para fracturas en rocas. Un resultado notable de esta tesis son las propiedades de auto-similaridad de los contornos de fracturas en rocas en las escalas de milímetros y metros coinciden con las de los patrones del MECL con $\alpha = 0.15$ y 0.30 , respectivamente. Así también, las propiedades estructurales de fracturas en rocas en la escala de kilómetros coinciden con

las de los patrones del MECL con $\alpha = 0.90$. Esto indica que diferentes familias de patrones obtenidos con el MECL representan bien la estructura auto-similar de los contornos de fracturas en rocas en estas escalas de longitud.

Capítulo 1

Introducción

La corteza terrestre está compuesta por una gran variedad de rocas ígneas, sedimentarias y metamórficas, y está constantemente sometida a esfuerzos que la deforman. Cuando la deformación no se libera en eventos catastróficos sólo puede ser visible a través de la escala de tiempo geológico –millones de años–. Debido a lo anterior se puede considerar que la deformación de la corteza es un evento cuasi-estático que eventualmente produce fallas o fracturas. Las fracturas son las estructuras visibles más abundantes en la corteza de la Tierra y están presentes en la mayoría de las rocas en los afloramientos. En ciencias de la Tierra las fracturas se pueden definir como superficies de discontinuidad no sedimentaria –que no representa una ruptura en el registro estratigráfico– donde la roca ha perdido su cohesión como resultado de una falla mecánica y que puede estar rellena o no. Al analizar las características de las fracturas, se pueden obtener algunas huellas respecto del tipo de deformación que ha ocurrido en la roca, así como la dirección de movimiento de bloques de roca. El análisis de los rellenos de las fracturas y de las relaciones de corte entre diversos conjuntos de fracturas puede ayudar a determinar la secuencia cronológica de diferentes eventos geológicos. Por otro lado, las fracturas juegan un papel muy importante en el flujo y almacenamiento de fluidos a través de la corteza porque ellas aumentan la permeabilidad de la roca. A lo largo de las tres décadas pasadas, la comunidad geológica ha desarrollado modelos numéricos que simulan el flujo de fluidos a través de la corteza con la finalidad de entender el impacto de las zonas de falla en el flujo, entre varios otros aspectos. En la industria del petróleo los yacimientos pueden ser naturalmente fracturados y en este caso las fracturas tienen un impacto significativo en la producción de petróleo y sus derivados. No obstante, para entender el flujo de fluidos a través de las rocas es necesario conocer las correlaciones espaciales, la interconectividad, la apertura, longitud y orientación de las fracturas [Cravero et al, 2005], así como la topografía y características geométricas de las redes de fracturas. La caracterización tridimensional de una red de fracturas es extremadamente difícil debido a que éstas están inmersas en la masa rocosa. Hasta donde se sabe, no existe algún

artefacto o técnica que permita analizar las características de las redes de fracturas sin destruirlas. Debido a esto, el estudio de las fracturas usualmente se restringe a análisis bidimensionales de secciones sísmicas, láminas delgadas o en paredes de excavaciones. Éstos estudios se realizan en secciones con diferentes escalas de longitud.

El análisis de las fracturas en diferentes escalas de longitud sugiere la existencia de una estructura geométrica que se ve similar en cada nivel de observación indicando una estructura fractal. Con el descubrimiento de la geometría fractal, las propiedades de los fractales se han aplicado en la descripción de diferentes estructuras naturales y fenómenos físicos [Mandelbrot et al, 1984]. Después del trabajo de Mandelbrot en relación al carácter fractal de la superficies de fracturas en metales, se ha aplicado la geometría fractal en forma extensa para describir las propiedades estructurales de las fracturas. Se ha encontrado que la propagación de fracturas y el crecimiento de defectos en materiales sujetos a esfuerzos genera patrones complejos de fracturas con estructura fractal. La geometría fractal es una rama de las matemáticas que permite identificar y caracterizar cuantitativamente las propiedades estructurales de objetos y conjuntos cuya estructura es similar cuando se observan en diferentes escalas de longitud. El concepto de *estructura fractal* involucra el concepto abstracto de infinito en el tamaño de su estructura. No obstante, de manera estricta, en la naturaleza no hay fractales debido a que existen límites superior e inferior en sus escalas de longitud. El primero está relacionado con el tamaño finito del objeto mientras que el segundo se relaciona con la escala atómica. Por lo tanto, se puede decir que en la práctica sólo existen objetos que parecen fractales dentro de un rango de escalas de longitud. El objetivo principal de esta tesis, es relacionar las propiedades estructurales de contornos de fracturas en rocas, obtenidos a partir de un proceso de binarización de imágenes, con las propiedades estructurales de familias de patrones generadas con un modelo estocástico de crecimiento Laplaciano (MECL) en dos dimensiones. Se compararon los resultados de ambos análisis para determinar los valores de los parámetros del MECL que producen patrones con propiedades estructurales que son similares – dentro de un margen de error – a los de los contornos de fracturas en rocas. De este modo los contornos de fracturas en rocas quedaron asociados a estructuras con geometría no euclidiana que pueden ser reproducidas. Para este fin se usó el modelo introducido en las referencias [Barra, Hentschel, Levermann, Procaccia, 2002, Barra, Levermann, Procaccia, 2002] para la propagación de fracturas en modo III que, como se verá más adelante, tiene un campo de deformación determinado por la solución de la ecuación de Laplace.

En el capítulo 2 se presentará un breve repaso del modo III de propagación de fracturas. El capítulo 3 repasa el modelo de crecimiento Laplaciano. En el capítulo 4 se presenta en detalle el modelo de crecimiento de fracturas, mientras que en el 5 se incluye una revisión de los conceptos de auto-similitud, auto-afinidad y

escalamiento. En el capítulo 6 se presenta una breve descripción geológica de los afloramientos donde fueron tomadas las imágenes de fracturas y en el 7 se presentan los resultados obtenidos de los análisis tanto para los patrones generados con el MECL como para las imágenes binarias de fracturas en rocas. Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones de la investigación reportada en esta tesis.

Capítulo 2

Modos básicos de propagación de fracturas

En general cualquier desplazamiento $\vec{u}(x, y, z)$ de una fractura se puede considerar como la superposición de los tres modos básicos de propagación: modo I o de tensión, modo II o de cizalla y modo III o de tijera. Suponiendo un medio continuo, elástico, isotrópico y homogéneo, las componentes del tensor de esfuerzos, σ_{ij} , para cada modo deben satisfacer las siguientes relaciones en la frontera (∞):

modo I

$$\sigma_{zz}(\infty) = 0 ; \quad \sigma_{xx}(\infty) = \sigma_{\infty} ; \quad \sigma_{zx}(\infty) = 0 \quad (2.1)$$

modo II

$$\sigma_{zz}(\infty) = 0 ; \quad \sigma_{yy}(\infty) = 0 ; \quad \sigma_{yz}(\infty) = \sigma_{\infty} \quad (2.2)$$

modo III

$$\sigma_{yz}(z \rightarrow \pm \infty) = \sigma_{\infty} . \quad (2.3)$$

Una vez que se define el campo de esfuerzos para un elemento diferencial de volumen, es importante establecer técnicas que permitan su estimación en un sólido de geometría genérica sometido a fuerzas externas. En este sentido, y dentro del marco de la teoría de elasticidad, es posible definir, para los modos I y II de propagación de fractura una función $\psi(y, z)$ tal que las componentes del tensor de esfuerzos, σ_{ij} , puedan ser escritos como

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 yz}, \quad (2.4)$$

cuando se garantiza el cumplimiento de una condición de equilibrio mecánico. Esta función se denomina función de Airy [Barber,1992, pp 40]. Por otro lado, el campo de desplazamiento, $u_z(x, y)$, para el modo III de propagación de fractura es solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. De esto se tiene que las componentes de desplazamiento en modo III se expresan como

$$u_z = u_z(x, y), \quad u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0. \quad (2.5)$$

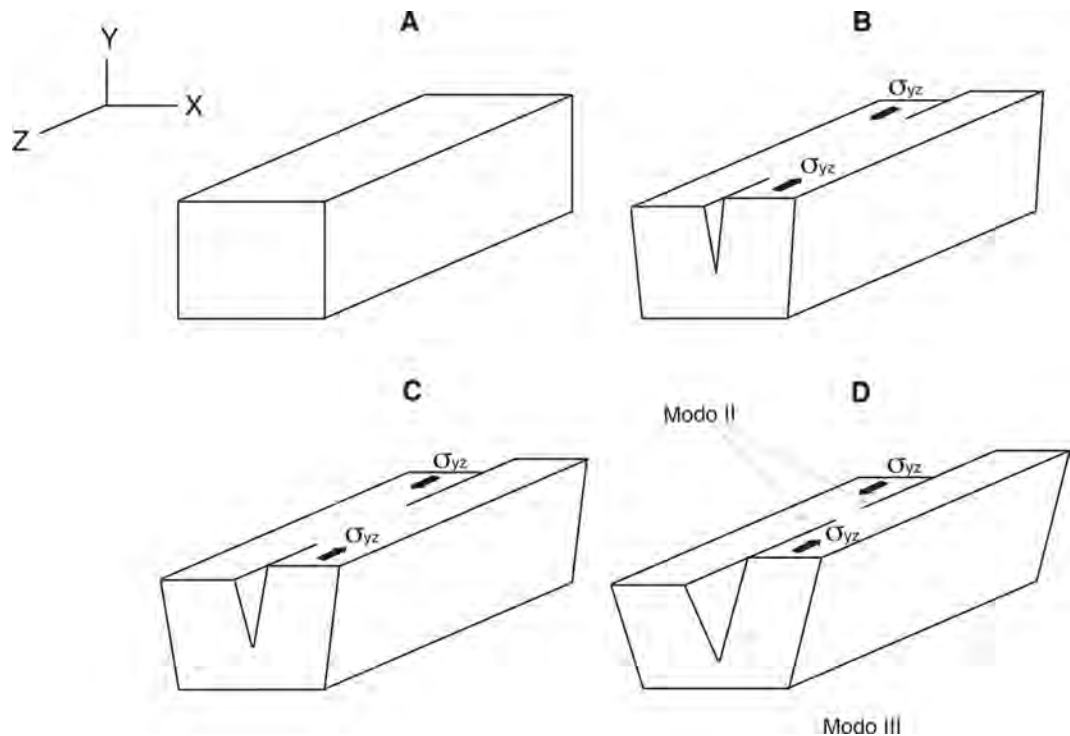


Figura 2.1: Esta figura ilustra cuatro eventos durante el proceso de propagación de fractura en modo II. La figura enfatiza el hecho de que siempre que ocurra una propagación en modo II habrá asociada una propagación simultánea en modo III, pero en un plano perpendicular.

En este punto es importante enfatizar que la aplicación de un esfuerzo de cizalla en dos lados opuestos de un bloque cuadrado produce simultáneamente un modo II y un modo III de propagación en los planos paralelo y perpendicular a la aplicación del esfuerzo, respectivamente. Este proceso se ilustra en la serie de diagramas de la figura 2.1. La figura 2.1A muestra un bloque no deformado. En la figura 2.1B se aplica un esfuerzo de cizalla a lo largo del eje z en dos lados opuestos del bloque y que son paralelos al plano xy . Este esfuerzo produce una deformación que eventualmente genera una fractura que se propaga en modo II en el plano xz como se ve en la figura 2.1C. Al mismo tiempo se observa que en el plano xy la misma fractura se propaga en modo III. Este proceso se observa en la figura 2.1D. Por lo tanto es suficiente seguir la propagación de la fractura en un sólo plano y aquí se escoge la del plano xy que es la propagación en modo III. Debido a que en las fracturas en rocas, su estudio está limitado a dos dimensiones (en secciones sísmicas, láminas delgadas o en paredes de excavaciones), es posible usar sólo un modo de propagación de fractura para simularlas.

Ahora se presentan el desarrollo que demuestra que el campo de desplazamiento para el modo III de propagación de fracturas está dado por la solución de la

ecuación de Laplace.

2.1. Modo III de propagación

En esta sección se demuestra que las componentes del desplazamiento se pueden obtener a partir de la solución de la ecuación de Laplace con la condición de frontera 2.3. Para resolver los problemas de elasticidad se requiere que las componentes del esfuerzo satisfagan las siguientes ecuaciones de equilibrio [Barber,1992, pp 41]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0, \quad (2.6)$$

donde f_j representan las componentes de la fuerza de bulto.

De acuerdo con la figura (2.1) la orientación de los ejes coordenados es tal que en el modo III de propagación, los esfuerzos aplicados forman el siguiente campo de desplazamientos

$$u_z = u_z(x, y), \quad u_x = u_y = 0. \quad (2.7)$$

donde u_i son los desplazamientos a lo largo de las direcciones x , y y z . El tensor de deformación en términos del desplazamiento u_i está dado por [Barber,1992, pp 16]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.8)$$

y tomando en cuenta (2.7) las componentes de deformación son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Suponiendo que el medio es elástico e isotrópico, las ecuaciones constitutivas

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad y \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (2.10)$$

donde E es el módulo de Young, ν es la razón de Poisson, ε_{ij} y σ_{ij} son los tensores de deformación y esfuerzo, respectivamente, δ_{ij} es la delta de Kronecker [Barber, 1992, pp 32] y los índices repetidos indican suma, escriben las componentes del tensor de deformación en términos de las componentes del tensor de esfuerzos y viceversa. Por lo tanto, usando (2.9) se pueden escribir las componentes del tensor de esfuerzos en términos del desplazamiento,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Las ecuaciones de equilibrio mecánico (2.6) a lo largo de las direcciones x , y y z son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -f_x \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -f_y \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -f_z \end{aligned} \quad (2.12)$$

y suponiendo que las fuerzas de bulto son cero, las dos primeras ecuaciones en (2.12) se satisfacen automáticamente porque todos los términos son cero. En la tercera ecuación se reemplaza el esfuerzo (2.11) para obtener

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.13)$$

De acuerdo a la geometría de la fractura, u_z es la única componente del desplazamiento que es diferente de cero, entonces se puede reescribir la ecuación (2.13), quitando los subíndices z , como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0, \quad (2.14)$$

que es la ecuación de Laplace y cuya solución representa el desplazamiento del modo III de propagación.

Capítulo 3

Formación de patrones

La formación de patrones en condiciones de no equilibrio ha sido un tema de interés científico y práctico durante las últimas tres décadas. De interés particular es la dinámica interfacial que se presenta en el análisis de muchos sistemas físicos fuera de equilibrio. Las estructuras características de los patrones desarrollados en estos procesos de crecimiento están relacionados con inestabilidades no lineales [Kessler, 1988] que a menudo dan lugar a la formación de estructuras ramificadas. Los ejemplos más comunes son las dendritas y los copos de nieve (Fig. 3.1). En general, los patrones producidos por inestabilidades presentan estructuras no triviales y dan lugar a la formación de “ramificaciones” en ciertas direcciones favorecidas por la anisotropía del medio o por las condiciones de frontera. Los detalles más sutiles de los patrones, particularmente sus inestabilidades, son muy sensibles tanto a la geometría del sistema como a las condiciones externas (la existencia de otros campos).

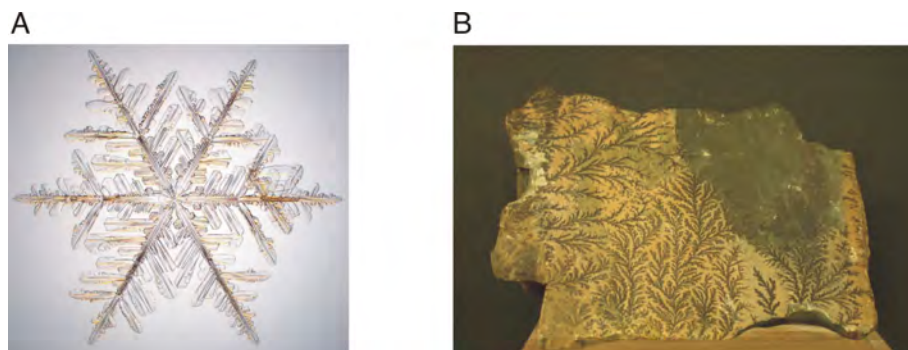


Figura 3.1: Ejemplos de la formación de patrones en la naturaleza. (A) Estructura cristalina de un copo de nieve. (B) Patrón dendrítico formado en una roca.

Las fracturas en rocas son otro ejemplo de crecimiento fuera del equilibrio. En la corteza de la Tierra, las fracturas se originan y crecen cuando los esfuerzos llegan

a ser iguales o mayores que la resistencia de la roca. Algunas fuentes posibles productoras de grandes esfuerzos en la corteza de la Tierra son: 1) presión litostática (cambio en el peso del material rocoso sobre un punto de observación debido a sepultamiento, levantamiento o erosión); 2) presión de fluido; 3) fuerzas asociadas con el desplazamiento de las placas tectónicas; 4) procesos termales (enfriamiento de rocas intrusivas y extrusivas, enfriamiento causado por el levantamiento o erosión de la corteza); 5) impacto de meteoritos; y 6) otros procesos geológicos tales como plegamiento, actividad volcánica o intrusión salina [National Research Council, 1996]. La formación de una fractura implica pérdida de cohesión. Esta pérdida de cohesión en las rocas se debe a ciertas condiciones externas que producen cambios en sus propiedades. Las imperfecciones de la roca constituyen puntos de debilidad donde los esfuerzos tienden a concentrarse. Esta concentración de esfuerzos favorece la iniciación, propagación y coalescencia de pequeñas fracturas –grietas–. La propagación de grietas está condicionada tanto al tipo de esfuerzo aplicado como a las propiedades del material, y se presenta cuando ocurre un desplazamiento de las fronteras de la grieta en alguna dirección. Cuando las velocidades de propagación son lo suficientemente altas dentro del medio se produce una inestabilidad que genera las discontinuidades adquieran una estructura ramificada que produce patrones que pueden ser muy complejos [Cross, Hohenberg, 1993, Gollub, Langer, 1999].

Una amplia variedad de los patrones que se observan en la naturaleza, y en particular el proceso de fractura, se puede describir en términos de una interfase que evoluciona debido a la acción de fuerzas externas así como a las propiedades de la interfase misma [McKane et al, 1995, Vicsek et al, 1989]. Muchos de estos ejemplos, pueden ser descritos por la acción de un campo escalar que es solución o la ecuación de difusión ($D\nabla^2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$) sujeta a condiciones de frontera bien definidas. Cuando la velocidad de crecimiento es muy lenta la derivada en tiempo de la ecuación de difusión se omite, de tal forma que el crecimiento se puede considerar estacionario y puede ser descrito por la ecuación de Laplace ($\nabla^2 u = 0$). Cuando esto último ocurre se tiene un proceso de *Crecimiento Laplaciano*.

3.1. Crecimiento Laplaciano

Cuando el movimiento de la interfase formada por la coexistencia de dos fases de bulto es lenta comparada con los procesos que ocurren en el bulto, el campo escalar que describe la evolución de la interfase es una función armónica. Debido a que las funciones armónicas son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones, se puede denotar la evolución de la interfase como *crecimiento Laplaciano*. El crecimiento Laplaciano se puede describir en forma determinista o estocástica. Se obtiene un proceso de crecimiento Laplaciano determinista cuando la rapidez de crecimiento de la frontera de un dominio bidimensional es proporcional a el

gradiente del campo, $U(x, y)$, que es solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones fuera del dominio. El campo $U(x, y)$, que es solución de la ecuación de Laplace, cumple con las siguientes condiciones de frontera: (i) $U(x, y) = 0$ en la frontera del dominio y (ii) $U(x, y) = (1/2\pi) \ln(r)$, en el límite cuando la coordenada radial r es muy grande –en infinito–. Por otra parte, el concepto de crecimiento Laplaciano estocástico (MECL) se introdujo en la década de los ochentas [Pietronero, Wiesmann, 1984, Sherwood, Nittmann, 1986]. No obstante, fue hasta la década de los noventas cuando Hastings y Levitov [Hastings, Levitov, 1998] mostraron cómo se implementa explícitamente por medio de un proceso iterativo de mapeos conformes no lineales. Ellos introdujeron una familia de funciones de dos parámetros que determinan la forma y tamaño de una protuberancia que se añade a la frontera del dominio en cada iteración. El modelo consiste en la iteración de una función conforme no lineal que mapea estocásticamente el exterior de un circunferencia unitaria en el plano complejo en otra región que es el complemento de un agregado – dominio – formado por n partículas en el plano físico. Específicamente, un paso – iteración – del modelo de crecimiento Laplaciano añade una nueva partícula – protuberancia – al agregado existente con una probabilidad determinada por la magnitud del gradiente del campo $U(x, y)$. Las propiedades del modelo de crecimiento Laplaciano han sido estudiadas por varios autores [Peterson, 1998, Davidovitch et al, 1999, 2000]. Se ha encontrado que dependiendo de cómo se realice el proceso de crecimiento – añadiendo partículas al agregado por crecimiento serial o en paralelo – los patrones resultantes adquieren diferentes dimensiones fractales, lo que sugiere que éstos procesos de crecimiento pertenecen a dos clases de universalidad diferentes [Barra, Davidovich, Levermann, Procaccia, 2001, Barra, Davidovich, Procaccia, 2002]. En la siguiente sección se presenta con más detalle el MECL.

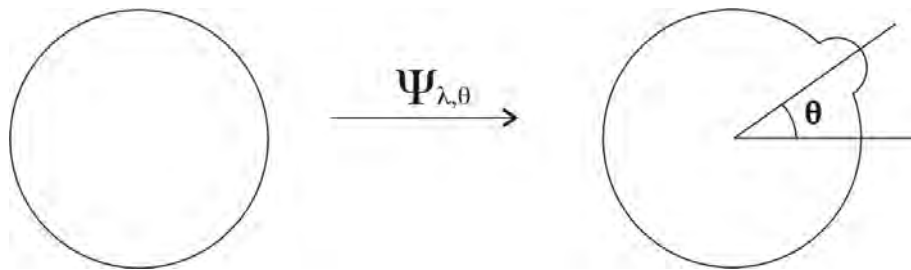


Figura 3.2: Esta figura ilustra cómo la función $\Psi_{\lambda, \theta}$ genera un protuberancia en una circunferencia unitaria a lo largo de la dirección θ .

3.2. Modelo estocástico de crecimiento Laplaciano

En la década de los noventa Hastings y Levitov [Hastings, Levitov, 1998] propusieron una secuencia aleatoria de transformaciones conformes no lineales para generar el proceso de crecimiento Laplaciano. Una transformación conforme o mapeo conforme es una función que preserva el ángulo de intersección entre dos curvas que se intersectan en un punto z_0 . La solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones es invariante cuando se aplica una transformación conforme, es decir, la función resultante sigue siendo una solución de la ecuación de Laplace que satisface las mismas condiciones de frontera. De aquí que el crecimiento Laplaciano de una frontera Γ puede formularse mediante la iteración de un mapeo conforme no lineal estocástico, $\Psi_{\lambda,\theta}(w)$ (3.2). El mapeo $\Psi_\lambda(w)$ de la ecuación 3.1 consiste en mapear una circunferencia unitaria –que es la frontera Γ – definida en el plano complejo en otra circunferencia unitaria que tiene una protuberancia –inestabilidad– orientada a lo largo del eje x . Este mapeo está determinado en función de dos parámetros, λ , el tamaño de la protuberancia, y α , la forma de la protuberancia. Estos parámetros tienen los siguientes rangos de variación: $0 < \alpha < 1$ y $0 < \lambda < \lambda_0$, con λ_0 un valor inicial. Después de que se realiza la transformación conforme, se rota aleatoriamente la protuberancia alrededor de su centro por un ángulo θ , tal como se indica en la ecuación (3.2). En la figura. 3.2 se muestra un diagrama esquemático de éste procedimiento. El ángulo de rotación θ se elige de función de probabilidad $P(\theta)$, consistente con el problema específico que se desea estudiar. En el caso de patrones de fracturas esta función de probabilidad se definirá en el siguiente capítulo. El proceso iterativo descrito anteriormente emula cada etapa de crecimiento de la frontera. Las funciones explícitas que realizan este proceso se escriben como [Hastings, Levitov, 1998]:

$$\Psi_\lambda(w) = w^{1-\alpha} \left\{ \frac{1+\lambda}{2w} (1+w) \left[1 + w + w \sqrt{1 + \frac{1}{w^2} - \frac{2}{w} \frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \right] - 1 \right\}^\alpha \quad (3.1)$$

$$\Psi_{\lambda,\theta}(w) = e^{i\theta} \Psi_\lambda(e^{-i\theta} w) . \quad (3.2)$$

En la figura 3.3, primer fila se muestra cómo cambia la forma de la protuberancia para diferentes valores de α manteniendo $\lambda = 0.30$, constante. Se observa que cuando α es muy pequeña, valores cercanos a cero, la protuberancia es casi imperceptible, figura 3.3A. Conforme aumenta el valor de α la protuberancia se hace cada vez más redonda y abultada, figura 3.3B. No obstante, cuando el valor de α es cercano a la unidad la protuberancia es muy puntiaguda como una espina, figura 3.3C. Por otra parte, para entender cómo cambia el tamaño de la protuberancia al variar el parámetro λ , en las figuras 3.3D-F se muestran tres protuberancias para diferentes valores de λ manteniendo el valor de $\alpha = 0.50$ constante. Se observa que conforme λ aumenta el tamaño de la protuberancia también aumenta. Finalmente,

en las figuras 3.3G-I se muestran las diferentes formas de la protuberancia cuando se varían simultáneamente los valores de λ y α .

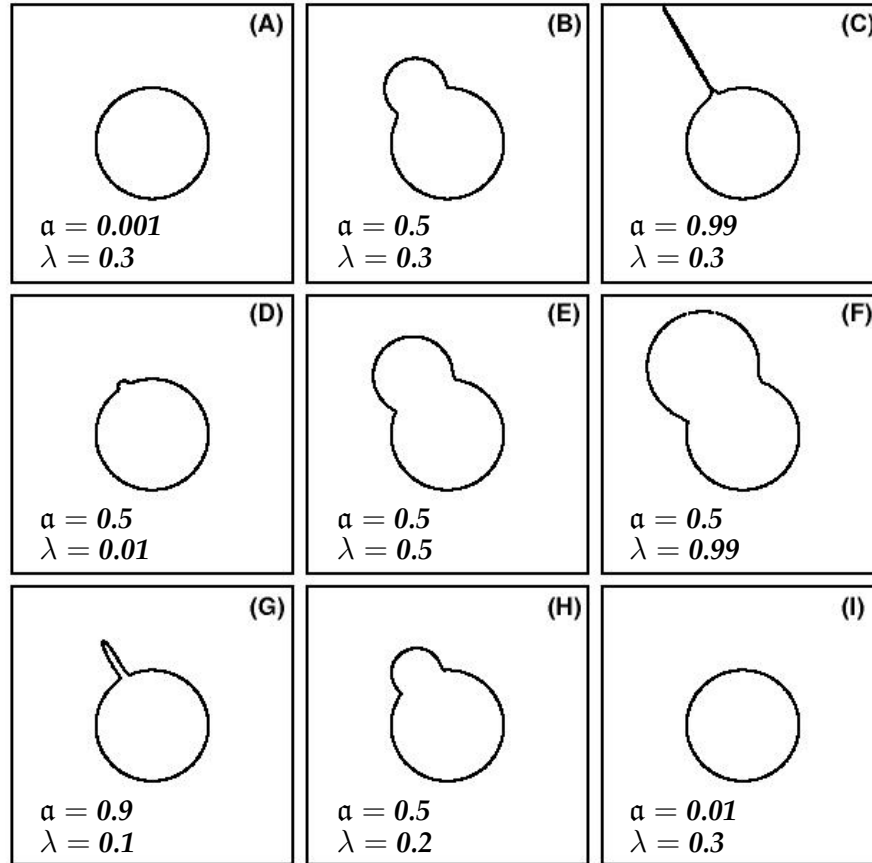


Figura 3.3: Formas en las que se transforma la circunferencia unitaria bajo la acción del mapeo conforme definido en la ecuación 3.2. En la primera fila, (A-C), se fija el valor de λ y se varía el de α . En la segunda, (D-F), se fija el valor de α y se varía el de λ . En la tercera fila, (G-I), se varían tanto los valores de α como los de λ .

Como se explicó en párrafos anteriores el crecimiento Laplaciano de una frontera se realiza con un proceso iterativo que consiste en efectuar la siguiente regla de composición:

$$\Phi_m = \Psi_{\lambda_1, \theta_1} \circ \Psi_{\lambda_2, \theta_2} \circ \dots \circ \Psi_{\lambda_m, \theta_m} . \quad (3.3)$$

Este proceso iterativo junto con una distribución de probabilidad $P(\theta)$, apropiada que define las rotaciones aleatorias, añade a la frontera en cada paso una protuberancia de tamaño λ_m que a través de varias iteraciones produce un contorno. En particular, el MECL se ha aplicado al estudio de características geométricas de fracturas cuasi-estáticas en medios frágiles. Como se verá en el siguiente capítulo, el

método descrito en esta sección construye una solución exacta de las ecuaciones de Lamé para el modo III de propagación de fracturas [Barra, Hentschel, Levermann, Procaccia, 2002].

Capítulo 4

Modelo de fracturas

En este capítulo se presenta el modelo introducido en la referencia [Barra, Hentschel, Levermann, Procaccia, 2002] que describe la propagación de fracturas en modo III. El modelo de propagación de fracturas se basa en el MECL descrito en la sección 3.2 aplicando condiciones de frontera específicas a las soluciones de la ecuación de Laplace e introduciendo una función de probabilidad $P(\theta)$ que define las direcciones de crecimiento, en función de los valores del esfuerzo tangencial resuelto sobre un plano. Eligiendo un conjunto de seis valores del parámetro α distribuidos uniformemente en el intervalo $(0, 1)$ se generaron seis patrones de fracturas con diferentes propiedades estructurales. Cada uno de ellos muestra algunas de las características más importantes de los patrones pertenecientes a cada una de las familias definidas para cada valor de α .

Se considera que el medio en el cual ocurre la propagación de la fractura es homogéneo, isotrópico e infinito, y que la cinética del proceso de fractura es lo suficientemente lenta para ser considerada como un proceso cuasi-estático. Por simplicidad se considera la acción de un esfuerzo de cizalla finito con una sola de sus componentes distinta de cero, $\sigma_{yz} \neq 0$, aquella que se localiza en el plano yz . Las otras componentes del tensor de esfuerzos son cero, $\sigma_{ij} = 0$. La aplicación de un campo de esfuerzos con estas características genera el siguiente campo de desplazamientos,

$$u_z = u_z(x, y) \quad \text{y} \quad u_x = 0 \quad u_y = 0, \quad (4.1)$$

por lo anterior, tanto la deformación como los esfuerzos son bidimensionales. Si V_n y V_t denotan las componentes de la velocidad de propagación a lo largo de direcciones normal y tangencial a la interfase de la fractura, respectivamente, entonces se puede escribir

$$V_n(s) = \alpha(|\sigma_{zt}(s)| - \sigma_c), \quad (4.2)$$

donde σ_c representa el valor umbral del esfuerzo, es decir, cuando $|\sigma_{zt}(s)| > \sigma_c$ el medio se fractura, y s es la longitud de arco que parametriza el contorno de la fractura. Cuando el esfuerzo es ligeramente mayor que el valor de umbral, $\sigma_{zt}(s) \gtrsim$

σ_c , la propagación de la fractura ocurre lentamente. En esta situación el campo de desplazamientos está descrito por la solución de la ecuación bidimensional de Laplace, $\nabla^2 u(x, y) = 0$. Aquí se prescinde del subíndice z , pero se aclara que en esa dirección, la componente del campo de desplazamientos es la única que no es igual a cero. Aprovechando la invariancia de la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones bajo la aplicación de transformaciones conformes, se considera la continuación analítica del campo de desplazamiento al plano complejo [Barra, Hentschel, Levermann, Procaccia, 2002, Barra, Levermann, Procaccia, 2002],

$$\chi(z) = u(x, y) + i\xi(x, y) \quad (4.3)$$

donde $u(x, y)$ es la parte real de la función analítica compleja, $\chi(z)$ y $z = x + iy$ es la posición de un punto en la interfase de la fractura. La función $\chi(z)$ debe cumplir la condición de frontera, $\sigma_{yz} \rightarrow \sigma_\infty$. Entonces, el tensor de esfuerzos debe expresarse en términos del desplazamiento elástico, $u(x, y)$, para poder escribir una expresión apropiada para la condición de frontera. Usando las ecuaciones (2.11) y considerando que el modelo requiere que

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \implies \frac{\sigma_{yz}}{\mu} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.4)$$

se integra con respecto a y y se considera que $\sigma_{yz}(\pm\infty) = \sigma_\infty$ para que el desplazamiento $u(x, y)$ esté determinado de manera única como,

$$u(x, y) = y \left[\frac{\sigma_{zy}}{\mu} \right]_{y \rightarrow \pm \infty}$$

$$u(x, y) \approx y \left[\frac{\sigma_\infty}{\mu} \right], \quad (4.5)$$

donde $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E es el módulo de Young y ν es la razón de Poisson.

4.1. Solución de la ecuación de Laplace

Por lo anterior, lejos de la fractura, la función compleja $\chi(z)$ que cumple con la condición de frontera (4.5) debe ser lineal, esto es,

$$\chi(z) \rightarrow -i \frac{\sigma_\infty}{\mu} z \quad \text{como } |z| \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Por otro lado, la componente normal del esfuerzo, σ_{zn} , es cero en la interfase de la fractura, es decir, $\sigma_{zn} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ [Fineberg, Marder, 1999]. Debido a que las condiciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial \xi}{\partial t}$, tienen que satisfacerse, es necesario que la

parte imaginaria ξ de la función $\chi(z)$ sea constante en la interfase de la fractura. Las letras n y t advierten las direcciones normal y tangencial a la interfase de la fractura, respectivamente. Eligiendo $\xi = 0$ en la interfase de la fractura, la solución de la ecuación de Laplace, $\chi(z)$, es una función real en la interfase de la fractura. Por lo tanto,

$$\chi(z(s)) = \chi(z(s))^*, \quad (4.7)$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado. Debido a que las fracturas tienen una forma geométrica complicada, la determinación y parametrización del campo de deformación, $\chi(z)$, se torna un problema muy difícil. Para darle la vuelta a este problema se traslada la continuación analítica del campo de deformación, $\chi(z)$, al plano complejo Ω [Davidovitch et al, 1999]. En el plano complejo, la solución más simple de la ecuación de Laplace es una circunferencia de radio uno y representa una fractura con la forma geométrica más simple. El campo de desplazamientos de tal fractura es la parte real de la función

$$\chi_0(\omega) = -i \frac{\sigma_\infty}{\mu} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right), \quad (4.8)$$

con $\omega = e^{i\theta}$. Esta solución de la ecuación de Laplace satisface las condiciones de frontera establecidas en las ecuaciones (4.6), y (4.7).

4.2. Transformaciones conformes

Para obtener la estructura complicada de una fractura se aplica una sucesión de transformaciones conformes $z = \Phi_m(\omega)$. En cada iteración m la fractura crece al añadir a la circunferencia original una protuberancia de tamaño lineal, $\sqrt{\lambda_n}$, y cuya forma depende del valor que tome α . Esto se muestra en la figura 3.3 ya mencionada. La protuberancia añadida emula la *zona de proceso* de la fractura. De esta forma el proceso de iteración mapea la circunferencia unitaria en el contorno de una fractura de estructura complicada en el plano físico Z . En la figura 4.1 se muestra esquemáticamente este proceso de iteración el cual se completa con la aplicación del mapeo conforme definido en (3.1), y (3.2). En lo que sigue se expresarán las condiciones de frontera en términos de la transformación conforme $\Phi_m(\omega)$. Como la solución de la ecuación de Laplace, χ_m , debe ser lineal cuando $|z| \rightarrow \infty$, es decir, lejos de la interfase de la fractura, se requiere que en la m -ésima iteración $\Phi_m(\omega)$ también sea lineal cuando $|\omega| \rightarrow \infty$. En consecuencia, $\chi_m(z)$, se expresará como

$$\chi_m(z) = -i \left[\frac{F_{1_m} \sigma_\infty}{\mu} \right] \left[\Phi_m^{-1}(z) - \frac{1}{\Phi_m^{-1}(z)} \right], \quad (4.9)$$

donde F_{1_m} es el coeficiente de la potencia mayor del desarrollo de la serie de potencias para Φ_m , el cual está dado por [Davidovitch et al, 1999]

$$F_{1_m} = \prod_{k=1}^m \sqrt{(1 + \lambda_k)}, \quad (4.10)$$

aquí λ_k representa el área de cada protuberancia añadida. Esta área se calcula por medio de la relación

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0}{|\Phi'_{m-1}(e^{i\theta_m})|^2} \quad (4.11)$$

con θ_m la dirección de crecimiento en la m -ésima iteración y $|\Phi'_{m-1}(e^{i\theta_m})|$ representa el jacobiano de la transformación del plano complejo al plano físico.

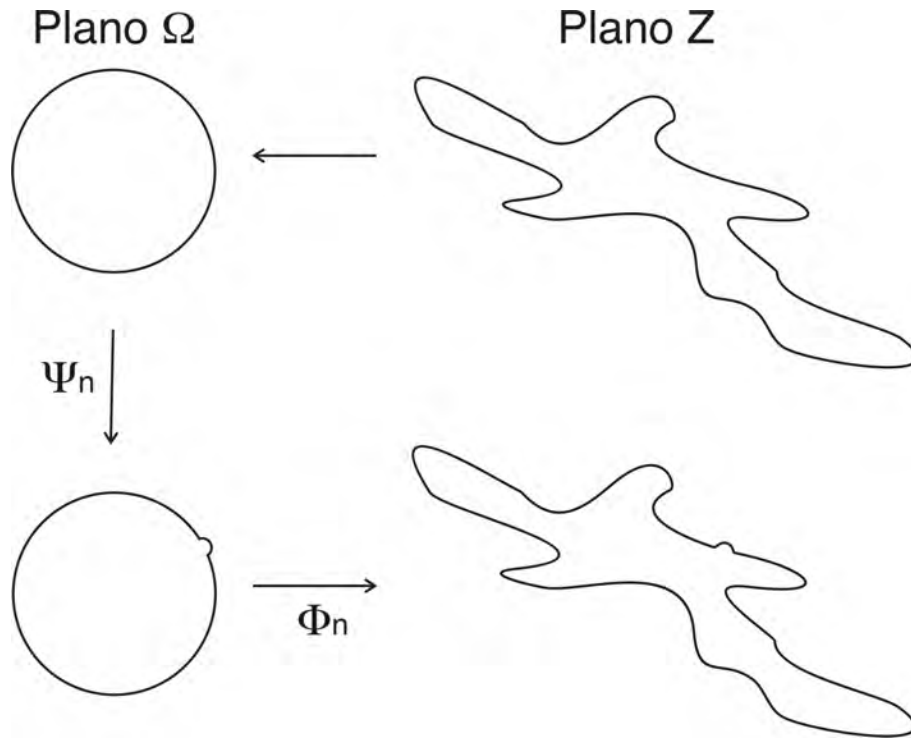


Figura 4.1: Diagrama esquemático que muestra una iteración del procedimiento que genera el contorno de la fractura. Aquí Ω representa el plano complejo donde se realiza la transformación conforme Ψ_n que deforma el círculo unitario. Z representa el plano físico donde bajo la función Φ_m se obtiene el contorno de la fractura.

4.3. Componente tangencial del esfuerzo

La propagación de la fractura ocurre cuando el esfuerzo aplicado es ligeramente mayor que el valor umbral. El valor umbral del esfuerzo se define como el esfuerzo máximo que soporta un sólido justo antes de fracturarse. Debido a que la interfase de la fractura es una superficie libre, ahí la componente normal del esfuerzo σ_z es cero [Fineberg, Marder, 1999], esto es $\sigma_{zn} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Por lo que la componente tangencial del esfuerzo es la que ocasiona la propagación de la fractura. Para obtener la forma explícita de esta componente tangencial en términos de la longitud de arco, s , que parametriza el contorno de la fractura en el plano físico, se usa la ecuación (2.11) y se escribe

$$\sigma_{zt}(s) = \mu \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (4.12)$$

donde u es la parte real de $\chi(z)$. Entonces se puede escribir

$$\sigma_{zt}(s) = \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial \text{Re}(\chi_m(z))}{\partial s} = \mu \text{Re} \left[\frac{\partial \chi_m(z)}{\partial s} \right], \quad (4.13)$$

con Re la parte real. Para conocer la forma del esfuerzo tangencial en el plano complejo es importante recordar que $z = \Phi_m(\omega)$ con $\omega = e^{i\theta}$ y θ el ángulo en coordenadas polares. Usando la regla de la cadena en la ecuación (4.13) se obtiene

$$\sigma_{zt}(s) = \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial \text{Re}(\chi_m(z))}{\partial s} = \mu \text{Re} \left[\frac{\partial \chi_m(z)}{\partial s} \right] = \mu \text{Re} \left[\frac{\partial \chi_m(\Phi_m(e^{i\theta}))}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \theta}{\partial s} \right| \right], \quad (4.14)$$

con $\left| \frac{\partial \theta}{\partial s} \right|$ el Jacobiano de la transformación de coordenadas que es el factor de corrección requerido cuando se lleva a cabo una transformación desde un espacio físico a un espacio complejo.

Al usar (4.8) se puede escribir $\chi_m(\Phi_m(e^{i\theta}))$ como

$$\chi_m(\Phi_m(e^{i\theta})) = -i \left[\frac{F_{1m} \sigma_\infty}{\mu} \right] \left[\Phi_m^{-1}(\Phi_m(e^{i\theta})) - \frac{1}{\Phi_m^{-1}(\Phi_m(e^{i\theta}))} \right] = -i \left[\frac{F_{1m} \sigma_\infty}{\mu} \right] (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (4.15)$$

Calculando la derivada con respecto de θ ,

$$\frac{\partial \chi_m(\Phi_m(e^{i\theta}))}{\partial \theta} = -i \left[\frac{F_{1m} \sigma_\infty}{\mu} \right] i (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \left[\frac{F_{1m} \sigma_\infty}{\mu} \right] (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2 \left[\frac{F_{1m} \sigma_\infty}{\mu} \right] \cos \theta, \quad (4.16)$$

y reemplazando (4.16) en (4.14) se obtiene una expresión para la componente tan-

gencial del esfuerzo en términos del ángulo polar,

$$\sigma_{zt}(\theta) = \frac{\mu Re \left(2 \left[\frac{F_{1m} \sigma_{\infty}}{\mu} \right] \cos \theta \right)}{|\Phi'_m(e^{i\theta})|} = \frac{2F_{1m} \sigma_{\infty} \cos \theta}{|\Phi'_m(e^{i\theta})|} \quad (4.17)$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$ y se substituyó la forma explícita del Jacobiano de la transformación.

4.4. Distribución de probabilidad de las direcciones de crecimiento

Las direcciones de crecimiento de la fractura se determinan por medio de una distribución de probabilidad. La probabilidad está en función de los valores del esfuerzo tangencial, pues es éste el que produce la propagación de la fractura. Cuando el valor del esfuerzo tangencial es ligeramente mayor que el esfuerzo umbral, σ_c , la fractura se propaga. Para representar este hecho en la distribución de probabilidad se ha introducido la función escalón unitario –función de Heaviside–, $\Theta(\Delta\sigma(\theta))$, que toma el valor de uno cuando el esfuerzo tangencial es mayor que valor de umbral y es igual con cero en el caso opuesto. En forma explícita esta función se define como

$$\Theta(\Delta\sigma(\theta)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta\sigma(\theta) > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta\sigma(\theta) \leq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

donde $\Delta\sigma(\theta) = \sigma_{zt} - \sigma_c$.

El esfuerzo tangencial σ_{zt} debe expresarse en términos del ángulo polar pues el dominio de la distribución de probabilidad está formado por las direcciones en las cuales el esfuerzo tangencial σ_{zt} es mayor que el esfuerzo umbral σ_c . De este modo la función de probabilidad esta determinada por $|\Phi'_n(e^{i\theta})| \Delta\sigma(\theta) \Theta(\Delta\sigma(\theta))$, donde $|\Phi'_n(e^{i\theta})|$ es el jacobiano de la transformación.

La distribución de probabilidad debe satisfacer que $\int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta = 1$. Para garantizar este resultado es necesario normalizar el término $|\Phi'_n(e^{i\theta})| \Delta\sigma(\theta) \Theta(\Delta\sigma(\theta))$. Así pues, la función de probabilidad adquiere la forma [Barra, Hentschel, Levermann, Procaccia, 2002]

$$P(\theta) d\theta = \frac{|\Phi'_m(e^{i\theta})| \Delta\sigma(\theta) \Theta(\Delta\sigma(\theta))}{\int_0^{2\pi} |\Phi'_m(e^{i\tilde{\theta}})| \Delta\sigma(\tilde{\theta}) \Theta(\Delta\sigma(\tilde{\theta})) d\tilde{\theta}} \cdot \quad (4.19)$$

Para generar el valor de la variable aleatoria θ con distribución de probabilidad $P(\theta = \theta_j) = p_j$ se procede de la siguiente manera: se genera un número aleatorio

R distribuido uniformemente en el intervalo $(0, 1)$ y se define la variable,

$$\theta = \begin{cases} \theta_0 & \text{si } R < p_0 \\ \theta_1 & \text{si } p_0 \leq R < p_0 + p_1 \\ \vdots & \\ \theta_j & \text{si } \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq R < \sum_{i=1}^j p_i \\ \vdots & \end{cases} \quad (4.20)$$

como $P(a \leq R < b) = b - a$ para $0 < a < b < 1$, se tiene

$$P(\theta = \theta_j) = \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq R < \sum_{i=1}^j p_i = p_j \quad (4.21)$$

y entonces θ tiene la distribución P .

Este procedimiento se realiza mediante el siguiente algoritmo:

1. Se genera una serie de ángulos θ_j en el intervalo $(0, 2\pi)$ ordenados de modo que $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$
2. Se obtiene una probabilidad p_j para cada uno de los valores generados en la serie, usando (4.19).
3. Se calcula F_k con $F_k = F(\theta_k) = \sum_{i=1}^k p_i$
4. Se genera un número aleatorio R distribuido uniformemente en el intervalo $(0, 1)$

θ será igual a θ_j si $F_{j-1} < R < F_j$, con $1 < j < k$.

Dicho de otra forma, después de generar un número aleatorio R se determina el valor de la variable aleatoria θ encontrando el intervalo (F_{j-1}, F_j) en el que se localiza R . Esto es equivalente a determinar la inversa de la distribución acumulada que es $F^{-1}(R) = \theta$.

4.5. Formación de patrones mediante un proceso iterativo

Con base en lo anterior, aquí se describe brevemente la estructura de los diferentes patrones obtenidos para seis valores del parámetro α distribuidos uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. El tamaño de la protuberancia, λ_m , que se añade al agregado en cada iteración m se calcula mediante la ecuación (4.11). La dirección de crecimiento del patrón, θ_m , en la m -ésima iteración, se elige de la distribución de

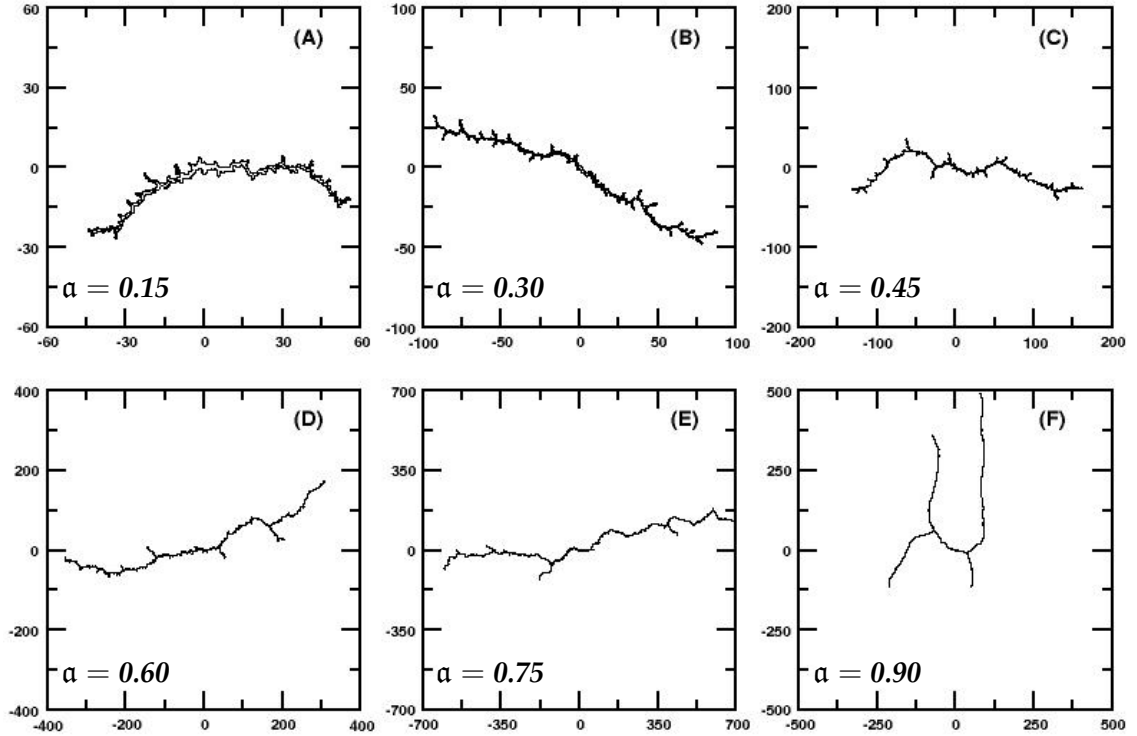


Figura 4.2: Estructuras representativas de los patrones que pertenecen a seis diferentes familias del MECL. Estos patrones son el resultado de 10^4 iteraciones de Ec. 4.22 con las mismas condiciones iniciales como son la semilla, valores de esfuerzo y valor inicial de λ_0 .

probabilidad (4.19). Con estos valores de λ_m y θ_m , se completa el modelo de crecimiento de fractura aplicando la fórmula recursiva

$$\Phi_m(\omega) = \Phi_{m-1}(\Psi_{\lambda_m, \theta_m}(\omega)), \quad (4.22)$$

con $\Psi_{\lambda_m, \theta_m}(\omega)$ dada por 3.2 y con la condición inicial, $\Phi_0(\omega) = \omega$.

Como ya se explicó, el exponente α en el mapeo no lineal del MECL define la estructura del patrón del contorno de la fractura, al añadir en cada iteración una protuberancia que puede ser redondeada o alargada. La figura 4.2 muestra cómo cambia la estructura de los patrones después de diez mil iteraciones para diferentes valores de α entre 0 y 1. Los patrones obtenidos son curvas cerradas simples cuyas longitudes crecen conforme aumenta el valor de α . Cuando $3/20 \leq \alpha \leq 3/4$ cada patrón desarrolla una rama principal orientada con algunas ramificaciones secun-

darias. Sin embargo, conforme $\alpha^- \rightarrow 1/2$, la cantidad de ramificaciones aumenta. Si $1/2 < \alpha$ las ramificaciones tienden a disminuir desapareciendo eventualmente. Cuando $9/10 \leq \alpha < 1$ los patrones carecen de una rama principal bien definida con una orientación preferencial. En el siguiente capítulo se definirán las tres clases de dimensión fractal que se calcularon para caracterizar los patrones de fracturas. También se presentará una breve explicación de su interpretación geométrica.

Capítulo 5

Conceptos básicos de auto-similaridad y auto-afinidad

En este capítulo se introducen los conceptos básicos de auto-similaridad y auto-afinidad así como las cantidades asociadas, dimensiones fractales y exponente de rugosidad, que se calcularon para cuantificar estas propiedades. El patrón de crecimiento o estructura básica a la que se refiere este capítulo lo constituyen las fracturas en rocas, que es el objeto de análisis de esta tesis. Como se muestra en la figura 5.1, cuando las fracturas se analizan en diferentes escalas de observación se encuentran características que son “similares” en diferentes escalas de longitud. Lo anterior sugiere que las fracturas presentan la propiedad de auto-similaridad, es decir, que tienen una estructura fractal. Los objetos fractales muestran estructuras geométricas parecidas o similares que se pueden pensar como pequeñas copias, en diferentes escalas de observación, del objeto completo. La característica más importante de un objeto fractal es la propiedad de “invarianza de escala”. Por otra parte, se dice que un objeto fractal tiene una estructura auto-afín cuando alguna de sus propiedades estructurales observada en diferentes escalas de longitud a lo largo de una dirección definida por un vector unitario se comporta de acuerdo a una ley de potencias. En particular, cuando el escalamiento ocurre en la misma proporción a lo largo de las direcciones X y Y se dice que el objeto es auto-similar. Para descubrir si un objeto tiene las propiedades de auto-similaridad o de auto-afinidad se procede a aplicar una transformación de escala isotrópica o anisotrópica, respectivamente. Se sabe que las fracturas en rocas pueden tener estructuras auto-afines o auto-similares [Korvin, 1992, Cravero et al, 2006]. La morfología de las fracturas depende tanto de factores tales como la heterogeneidad del medio, así como las fuerzas macroscópicas y microscópicas que se equilibran en el instante en el que la fractura deja de crecer.

Cuando se hace un acercamiento a una fractura se observa una estructura rugosa que parece conservarse en varias escalas de longitud (Fig. 5.1A-B), lo que podría sugerir la existencia de una estructura auto-similar. Conforme se continua rees-

calando la fractura aparece una escala de longitud a partir de la cual la fractura empieza a mostrar una estructura más suave que abarca diferentes escalas de longitud (Fig. 5.1C-D). Lo anterior podría apuntar a la existencia de una estructura auto-afín. Por lo tanto, las fracturas pueden presentar estructuras que sean tanto auto-afines como auto-similares en un cierto rango de escalas de longitud. Estas dos propiedades se harán evidentes cuando se analicen las estructuras fractales de la familia de patrones del MECL con $\alpha = 0.90$, que como se verá más adelante, corresponden a las propiedades autosimilares de fracturas en rocas en la escala de kilómetros.

5.1. Auto-similaridad

Para analizar de manera completa las propiedades auto-similares de objetos fractales que se generan a través de un proceso iterativo no lineal usualmente se calculan tres tipos de dimensión fractal, a saber: (i) de capacidad, D_{cap} , (ii) de información, D_{inf} , y (iii) de correlación, D_{cor} . La dimensión fractal de capacidad es una cantidad estadística que mide cómo el objeto ocupa o llena el espacio. Esta dimensión fractal se calcula usando el algoritmo de *conteo de cajas* [Liebovitch, Tóth, 1989]. En este algoritmo se procede a cubrir el objeto S con un número $N(\epsilon)$ de cajas de lado ϵ y se cuantifica cómo cambia $N(\epsilon)$ cuando decrece ϵ . Específicamente se calcula la siguiente cantidad,

$$D_{cap}(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}. \quad (5.1)$$

La dimensión fractal de información está relacionada con el concepto de entropía de la teoría de la información, y es una medida de la probabilidad de encontrar un punto en el objeto fractal con una precisión ϵ [Balatoni et al, 1982]. Sea p_i la probabilidad de que un punto se localice en la i -ésima caja de lado ϵ , entonces, la entropía de información se define como,

$$S(\epsilon) = - \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i \ln(p_i), \quad (5.2)$$

con $M(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_{cap}}$, el número de cajas que contienen una pieza del objeto fractal. En el caso de una cobertura uniforme, $p_i = 1/(M(\epsilon))$, la entropía está dada por $S^0(\epsilon) = \ln(M(\epsilon)) = Constante - D_{cap} \ln(\epsilon)$ e introduciendo el *Ansatz*¹ que relacio-

¹Es un sustantivo de origen alemán con algunas acepciones en el lenguaje inglés. Generalmente se usa en física y matemáticas como una conjetura con fundamentos que se verifica posteriormente por sus resultados. Un *ansatz* es el establecimiento de las primeras ecuaciones con las que se describe un problema matemático o físico. Estas ecuaciones pueden tomar en cuenta condiciones de frontera. Después de que se establece el *ansatz*, se resuelven las ecuaciones para la función general de interés. La formulación de un problema comienza con el establecimiento de un *ansatz* y los refinamientos subsiguientes conducen a la solución del problema.

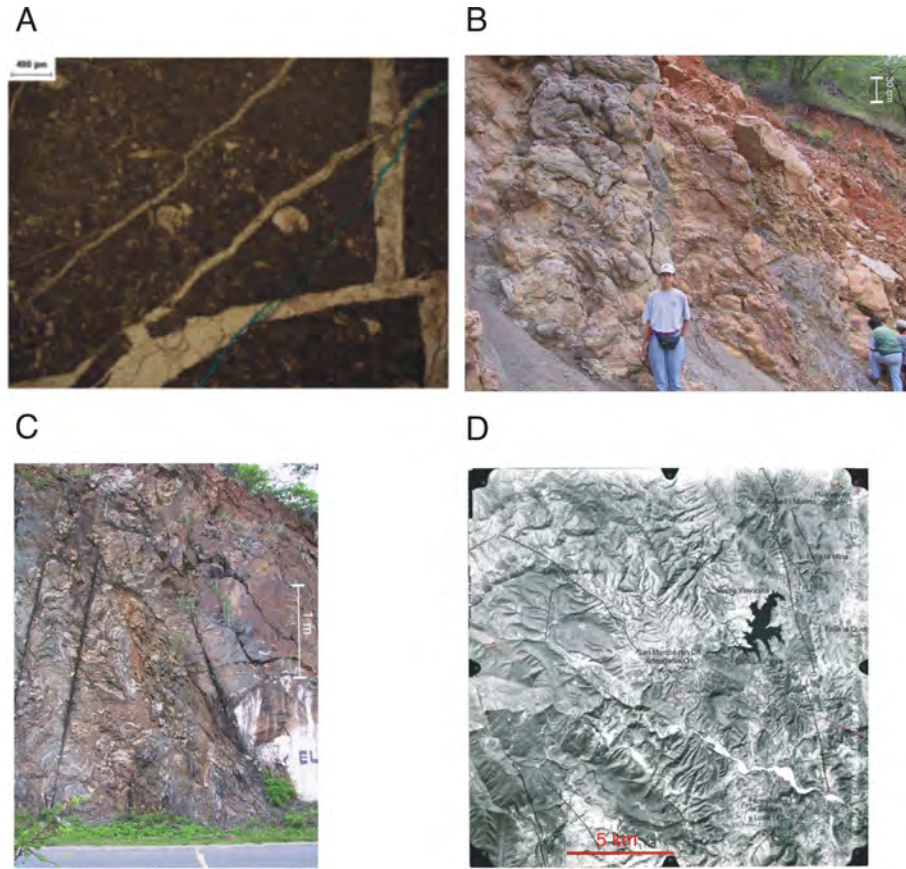


Figura 5.1: Fracturas en diferentes tipos de roca y en diferentes escalas de longitud: (A) milímetros, (B) centímetros, (C) metros y (D) kilómetros.

na la entropía de información con las dimensiones de las cajas –en el algoritmo de conteo de cajas– y la dimensión fractal de información, D_{inf} [Grassberger, Procaccia, 1983], se tiene que

$$S(\epsilon) = S^0(\epsilon) - D_{inf} \ln(\epsilon), \quad (5.3)$$

donde, en general $S^0(\epsilon) > S(\epsilon)$ y D_{inf} se evalúa con la siguiente expresión [Grassberger, 1988],

$$D_{inf}(S) = \lim_{\frac{k}{M} \rightarrow 0} \frac{\log \frac{k}{M}}{\log \epsilon \frac{k}{M}}. \quad (5.4)$$

Por otra parte, la dimensión fractal de correlación, D_{cor} , cuantifica la manera en que la función de correlación entre dos puntos, $C(r)$, escala con la distancia r que los separa, es decir, $C(r) \sim r^{D_{cor}}$ [Grassberger, Procaccia, 1983, Sauer, Yorke, 1993]. La función de correlación se define como

$$C(r) = \langle \| x(i) - x(j) \| \rangle_{r_{ij} < r}, \quad (5.5)$$

donde $\langle \rangle$ indica promedio sobre diferentes conjuntos de puntos.

Se encuentra que estas tres dimensiones fractales satisfacen la siguiente desigualdad: $D_{cor} \leq D_{inf} \leq D_{cap}$. Si cada elemento del objeto fractal tiene la misma probabilidad de ser accesado, entonces $D_{cap} = D_{inf}$. Sin embargo, para objetos auto-similares se debe cumplir que $D_{cap} = D_{inf} = D_{cor}$ [Korvin, 1992]. Para fracturas bidimensionales los valores típicos de D_{cap} , D_{inf} y D_{cor} están en el rango $1 < D_{cap}, D_{inf}, D_{cor} < 2$.

5.2. Auto-afinidad

La rugosidad es una medida de las propiedades de auto-afinidad de una superficie [Mandelbrot, 1985, Krug, Spohn, 1992, Bouchaud, 1997] y se define como una función auto-afín univaluada, $h(x)$, que por definición cumple con la relación, $h(x) \sim \kappa^{-\zeta} h(\kappa x)$, donde κ es un parámetro y ζ representa el exponente de Hurst o exponente de rugosidad. En la práctica, la rugosidad se evalúa calculando la función de correlación de la diferencia entre alturas en un perfil de la superficie. El perfil se obtiene intersectando la superficie con un plano vertical (Fig. 5.2). La función de correlación de la diferencia de alturas en el perfil se calcula con la siguiente fórmula [Barabási, 1983]

$$Z(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |h(r_i) - h(r_i + r)|, \quad (5.6)$$

donde $|h(r_i) - h(r_i + r)| > 0$ y N es un número suficientemente grande. Cuando las diferencias son grandes se dice que la superficie es rugosa, por el contrario, si las diferencias son pequeñas, se dice que la superficie es suave. La función de correlación $Z(r)$ escala con la distancia r como, $Z(r) \propto r^\zeta$, con ζ el exponente de rugosidad. El valor de ζ depende de la topografía de la superficie y típicamente está asociada con longitudes de onda corta de las variaciones de las alturas en el perfil de la superficie. Como las irregularidades de la superficie pueden formar zonas de coalescencia, en el caso de corrosión o grietas, la rugosidad puede ayudar a predecir las propiedades mecánicas de la superficie. En fracturas en rocas, los valores típicos de ζ están en el rango, $0.7 \leq \zeta \leq 0.98$ [Deng et al, 1999]. En la sección 7.2 se introducirá una versión "angular" de la Ec.(5.6) para investigar las propiedades de rugosidad de los patrones de fracturas obtenidos con el MECL.

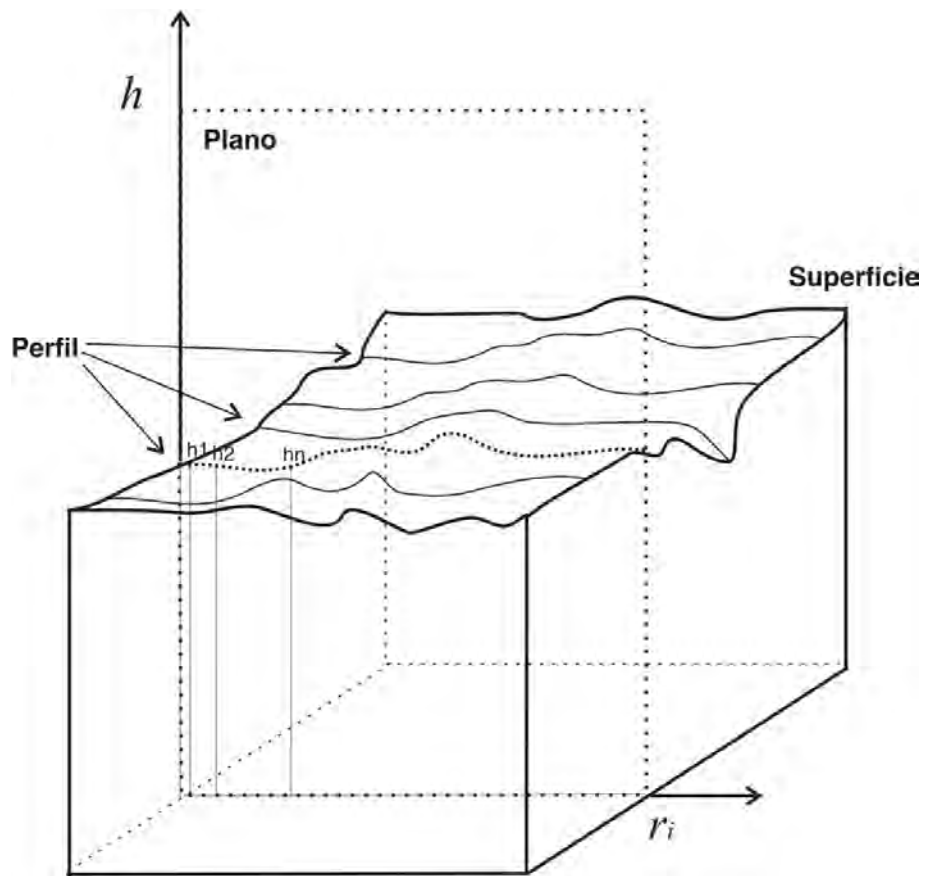


Figura 5.2: Aquí se ilustra como se obtiene usualmente un perfil de una superficie en un espacio tridimensional.

Capítulo 6

Fracturas en rocas

Con la finalidad de investigar una relación directa entre la estructura de los patrones de fracturas generadas con el MECL y los patrones de fracturas obtenidos de imágenes en rocas, en este capítulo se presenta el análisis fractal de mapas binarios de fracturas en rocas de diferentes escalas de longitud y diferente origen geológico. Las escalas de longitud de las fracturas cuyas imágenes se analizan varían en el rango de algunos milímetros hasta unos cuantos kilómetros. Para obtener los mapas binarios primero se obtuvo el contorno del patrón de cada fractura y de éste el correspondiente mapa binario. Para ello se usó un algoritmo de segmentación de imágenes médicas de Matlab. En este punto es importante enfatizar que la resolución de la imagen original –fotografía– no tiene efecto alguno en el proceso de “binarización”. Lo anterior es porque el algoritmo de segmentación de imágenes médicas primero hace una copia de la imagen de interés con una resolución fija de 72 píxeles por pulgada y lo exporta en formato PNG. De esta última imagen el algoritmo resalta el contorno de la fractura a partir de la cual se extrae el correspondiente mapa binario.

Las figuras a las que se hace referencia en éste capítulo consisten de tres recuadros. El recuadro (A) muestra la imagen original de la fractura previa a su procesamiento; el recuadro (B) presenta la imagen procesada con la resolución fija de 72 píxeles por pulgada, en la que el contorno de la fractura se encuentra resaltado; mientras que el recuadro (C) muestra la imagen binarizada o mapa binario, correspondiente al contorno de la fractura. En la siguiente sección se presenta una breve descripción geológica de las rocas que contienen las fracturas cuya estructura fractal se analiza.

6.1. Descripción geológica

En la figura 6.1 se muestran diferentes fracturas cuya escala de longitud es de milímetros. Esta muestra se obtuvo de la cortina de la presa Chicoasén en Chia-

pas. Es parte de una falla formada en el Pleistoceno y es el resultado de repetida actividad sísmica. La presa Chicoasén se encuentra al occidente de la Provincia de Fallas de Transcurrencia de la Sierra de Chiapas. Esta provincia se caracteriza por estructuras orientadas Noroeste (NO)-Sureste (SE) que son disectadas por fallas laterales de orientación, NO-SE hacia el este y Este (E)-Oeste (O) hacia el oeste. La caracterización litológica de los afloramientos en esta provincia está constituida de rocas calizas, calizas parcialmente dolomitizadas y dolomías.

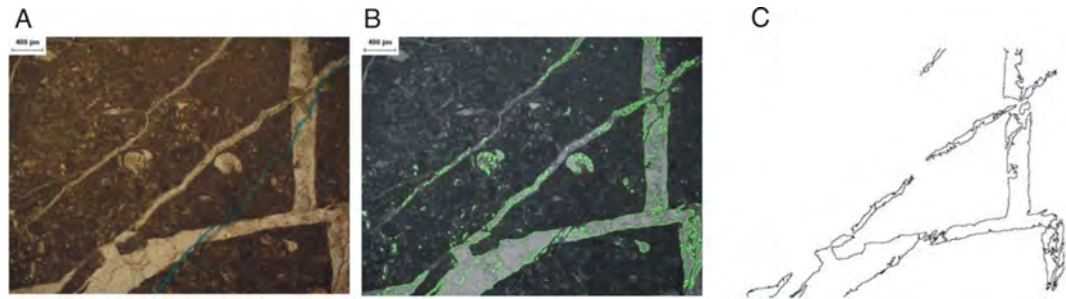


Figura 6.1: Esta imagen muestra una fractura, del orden de $3mm$ de longitud, en una roca caliza parcialmente dolomitizada. Se ilustran los tres pasos principales que se siguieron para obtener los mapas binarios de los contornos de las fracturas. (A) Imagen original, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

La figura 6.2 muestra una cuarcita que es una roca constituida por cuarzo y clorita. El cuarzo está presente en granos cuyos tamaños varían de $0.3mm$ a $1.5mm$ con forma angulosa-subredondeada. Tiene una textura clástica relictas con foliación incipiente definida por una ligera orientación preferida de los granos. Presenta dos familias de fracturas rellenas de cuarzo, una con fracturas rectas de apertura aproximada de $0.5mm$ que están dispuestas de manera oblicua a la foliación, y otra de fracturas rectas con apertura de $0.1mm$ subparalelas a la tendencia de la foliación.

En la figura 6.3 se muestra una fractura en escala de milímetros obtenida de una muestra del anticlinal Caimba que se encuentra al norte de la Sierra de Chiapas en la Provincia de Simojovel. Esta provincia está formada por un cinturón plegado y se identifican estructuras abiertas del cretácico. La litología de este anticlinal está formada por *packstone-grainstone* de intraclastos, gris oscuro, con estratificación delgada. Se observan tres sistemas de fracturas con relleno calcítico así como nódulos y bandas de pedernal negro. Estratificación en boudinaje, intercalado con pedernal negro.

La figura 6.4 muestra una zona de falla en rocas volcánicas del Cenozoico. Las fallas son normales y oblicuas subverticales con desplazamientos entre 15 y 20 centímetros y aperturas de 25 centímetros aproximadamente. En el plano de falla se observan cataclasitas cohesivas. La zona de falla, rocas piroclásticas en contacto

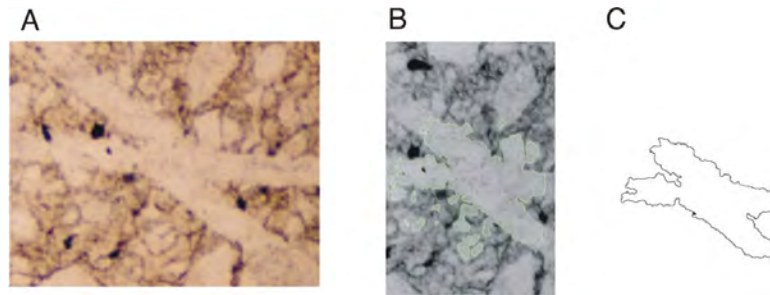


Figura 6.2: Esta imagen muestra fracturas en cuarcita con tamaño lineal del orden de milímetros. Como en la figura anterior se tiene: (A) Imagen original, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

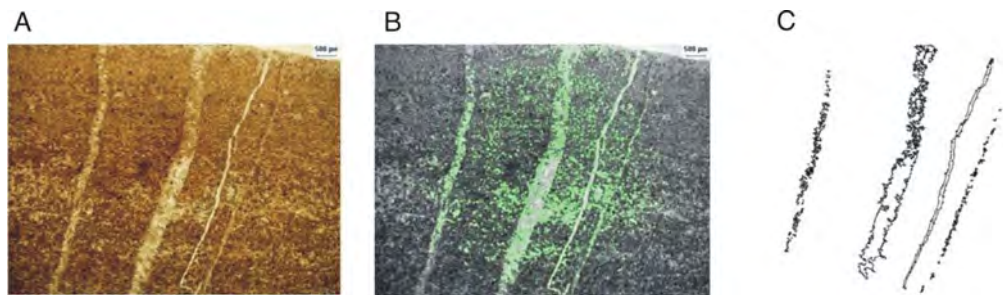


Figura 6.3: Fractura en *packstone-grainstone* cretácicas de longitud del orden de 4mm. Como en las figuras previas se ilustran los tres pasos principales para obtener los mapas binarios de los contornos de las fracturas. (A) Imagen original, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

con los depósitos del lahar miocénico, se encuentra ubicada en la carretera Lechería-Chamapa, en la desviación a Atizapán en el Estado de México.

La figura 6.5 muestra un arreglo de fracturas rellenas de cuarzo dispuestas en forma escalonada. Este afloramiento se encuentra en una antiforma constituida por roca metasedimentaria de la Formación Cosoltepec que presenta tres variedades de litología: secuencia rítmica de filitas y cuarcitas, cuarcitas y metareniscas verdes, y tobas caolinizadas. La secuencia rítmica forma la mayor parte de la estructura.

La figura 6.6 muestra una secuencia sedimentaria terrígena del Cretácico Inferior en al región Mixteca en Huamuxtitlán, en el estado de Oaxaca, México. La secuencia consiste en areniscas alternada con limonitas con estructuras de coladas y está cortada por fallas normales con desplazamientos pequeños y aperturas de 5 a 15 centímetros. En el plano de falla se observan estrías que sugieren un desplazamiento normal de las fallas.

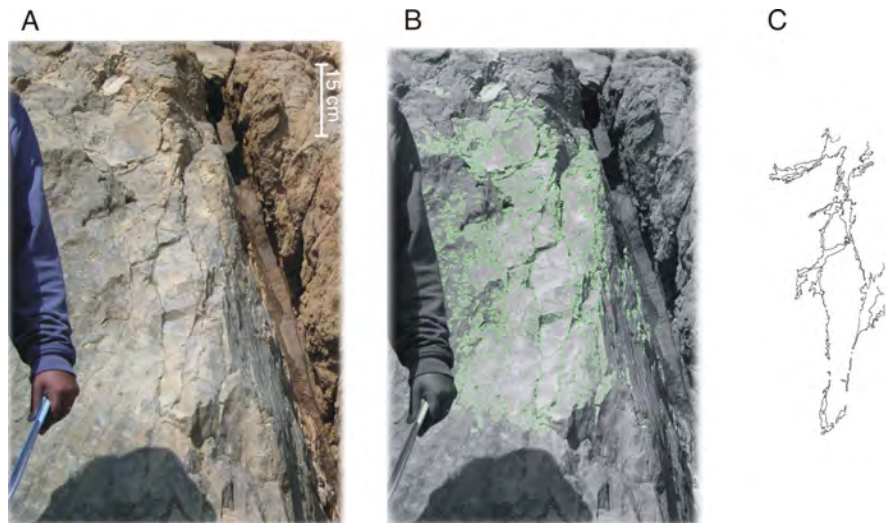


Figura 6.4: En esta imagen se muestran fracturas con tamaño lineal del orden de 60 *cm*, en una zona de falla en roca volcánica de la época terciaria. (A) Imagen original muestra una fractura, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

En la figura 6.7 se muestra una filita y cuarcita de la Formación Cosoltepec en el Complejo Acatlán en la carretera entre Acatlán de Osorio y Xayacatlan de Bravo, Puebla. Presenta abundantes vetas de cuarzo que definen una deformación penetrativa que afecta esta unidad. Esta roca está cortada por fracturas en inclinaciones de 60° formando bloques. Las aperturas de las fracturas están en un rango de 0.5 milímetros a 15 centímetros.

Finalmente, la figura 6.8 muestra una fotografía aérea de la parte Norte del Estado de Oaxaca en escala 1 : 80,000. En esta región afloran rocas metamórficas del Paleozoico y rocas sedimentarias mezozoicas. Las rocas sedimentarias varían de arenisca-lutita a caliza-lutita. Esta región se caracteriza por la presencia de fallas que limitan algunos de los cuerpos de rocas que allí afloran. Los nombres de las fallas fueron asignados por el Servicio Geológico Mexicano (2009). La falla principal es la Falla Salada y limita a las rocas metamórficas de las areniscas-lutitas. La Falla El Muerto limita a las areniscas-lutitas de las calizas-lutitas. El resto de las fallas afectan una sola unidad; la Falla La Quebrada y la Falla La Mina sólo afectan a la arenisca-lutita, mientras que la Falla La Presa afecta a las rocas metamórficas.

6.2. Estructura fractal de fracturas en rocas

Como ya se indicó en la introducción del presente capítulo, uno de los objetivos principales es estudiar las propiedades de auto-similaridad de fracturas en rocas,

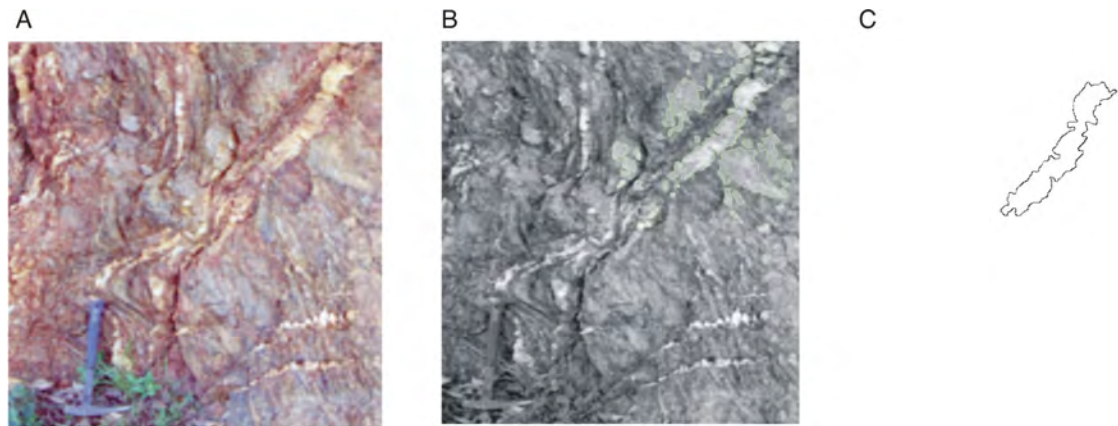


Figura 6.5: Esta imagen muestra fracturas en roca metamórficas con tamaño lineal del orden de centímetros. (A) Imagen original, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

de diferentes escalas de longitud y diferente origen geológico. Para ello se construyeron los correspondientes mapas binarios que se muestran en los recuadros (C) las figuras 6.1-6.8. Específicamente, se calcularon las tres dimensiones fractales que se introdujeron y definieron en el capítulo 5. Para ello se usó el código *FD3* desarrollado por Sarraille [Sarraille, 1998] que aplica las expresiones matemáticas explicadas en la sección 5.1. La tabla 1 muestra algunos resultados representativos para las dimensiones fractales de capacidad, de información y de correlación de los mapas binarios de correspondientes las imágenes de fracturas.

<i>Tipo de roca</i>	<i>metros</i>	<i>Figura</i>	D_{cap}	D_{inf}	D_{cor}
Metamórficas del Paleozoico	10^3	6.8	1.03637	1.03800	1.02801
Filita y cuartzita	10^1	6.7	1.33914	1.40036	1.38686
Secuencia sedimentaria terrígena	10^{-2}	6.6	1.336319	1.48063	1.51198
Metamórfica	10^{-2}	6.5	1.19455	1.20139	1.21094
Lahar miocénico	10^{-2}	6.4	1.33929	1.33324	1.32655
Caliza	10^{-3}	6.3	1.39964	1.41051	1.41869
Cuarcita	10^{-3}	6.2	1.23720	1.23749	1.23604
<i>packstone-grainstone</i>	10^{-3}	6.1	1.32553	1.35269	1.35474

Tabla 1. Valores de las dimensiones fractales de capacidad, información y correlación para las imágenes de fracturas en rocas analizadas.

Para tratar de entender intuitivamente el comportamiento de estas dimensiones fractales como función de la escala lineal de las fracturas, se graficaron estos resultados en la figura 6.9. En esta gráfica se observa que para las fracturas en es-

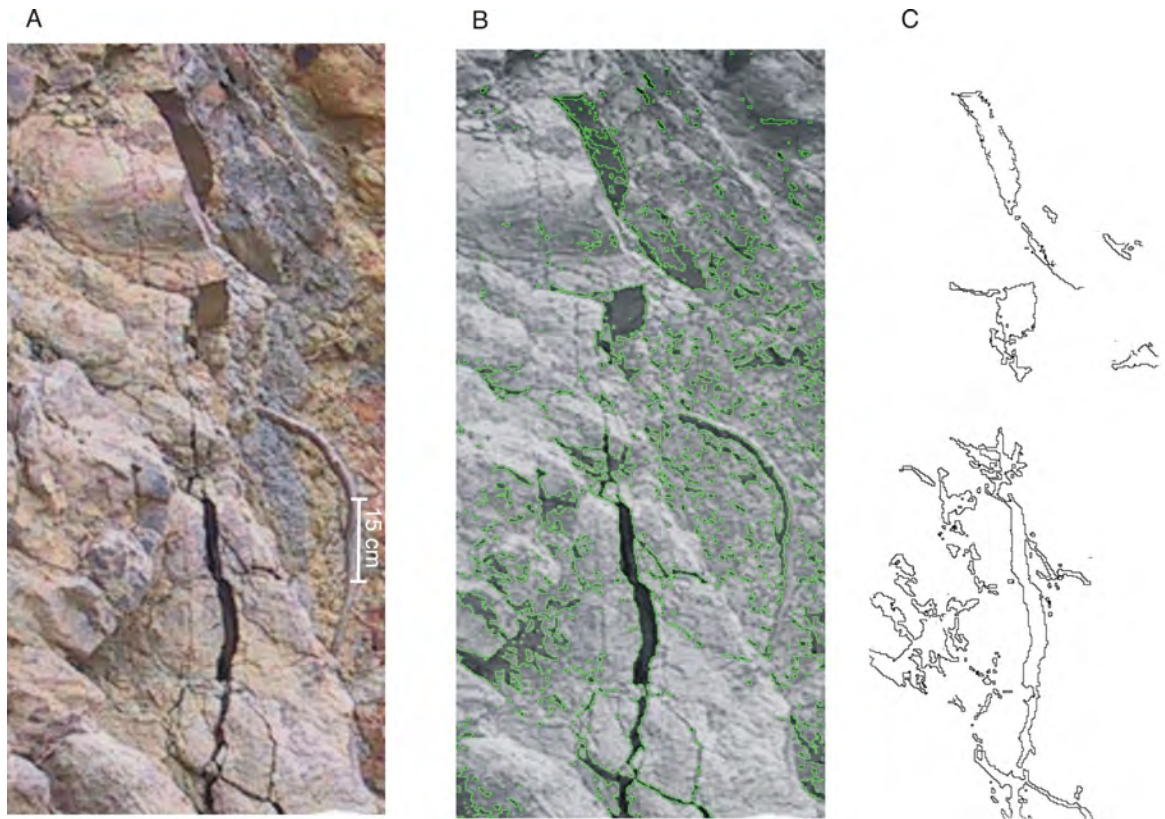


Figura 6.6: Fractura en secuencia sedimentaria terrígena de la época del Cretácico Inferior, con tamaño lineal del orden de algunos centímetros. (A) Imagen original muestra una fractura, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

cala de milímetros a centímetros la dimensión fractal de capacidad (●) permanece casi constante mientras que las dimensiones fractales de información (■) y correlación (▲) decrecen ligeramente. Para escalas mayores, de centímetros a metros, la dimensión fractal de capacidad (●) permanece casi constante. No obstante, las dimensiones fractales de información y correlación aumentan. Conforme el tamaño lineal de las fracturas aumenta –escala de metros a kilómetros– se observa una importante disminución de las tres dimensiones fractales, las tres convergiendo al valor aproximado de 1.05. Es importante notar que este comportamiento cualitativo de las dimensiones fractales parece ser independiente del carácter geológico de las rocas. Es decir, el comportamiento de las dimensiones fractales parece estar relacionado con la escala de longitud de la fractura más que su origen geológico. Por otra parte, la diferencia de comportamiento entre la dimensión fractal de capacidad y las otras dos puede atribuirse a la diferente compactación de las rocas. Es decir, la dimensión fractal de capacidad mide la compactación de las rocas, mien-

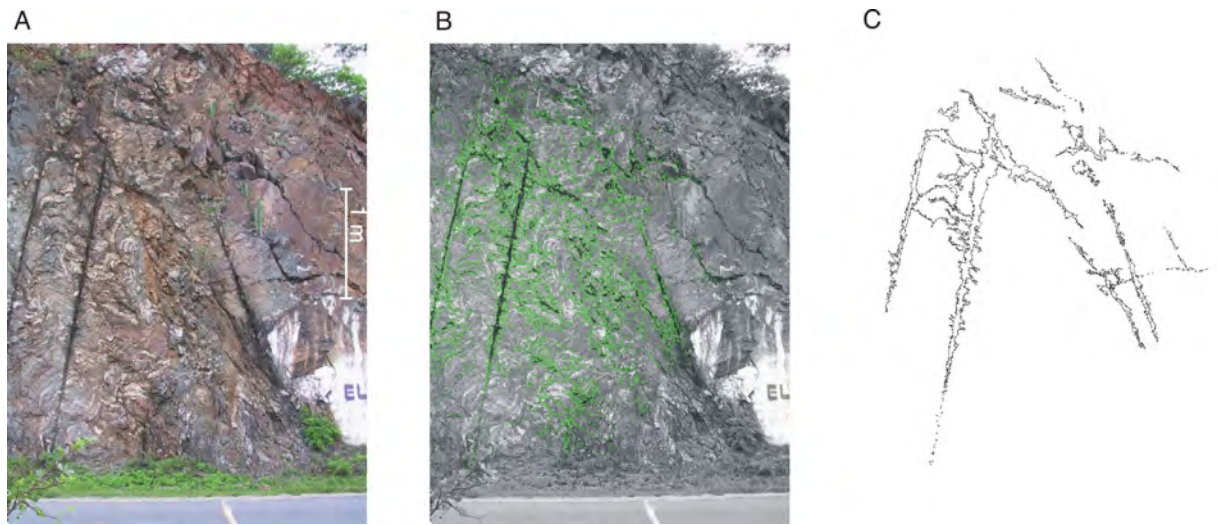


Figura 6.7: Aquí se muestra fracturas en filita y cuarcita de la Formación Cosoltepec. (A) Imagen original muestra una fractura con tamaño lineal del orden de algunos metros, (B) contorno de la fractura resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la fractura.

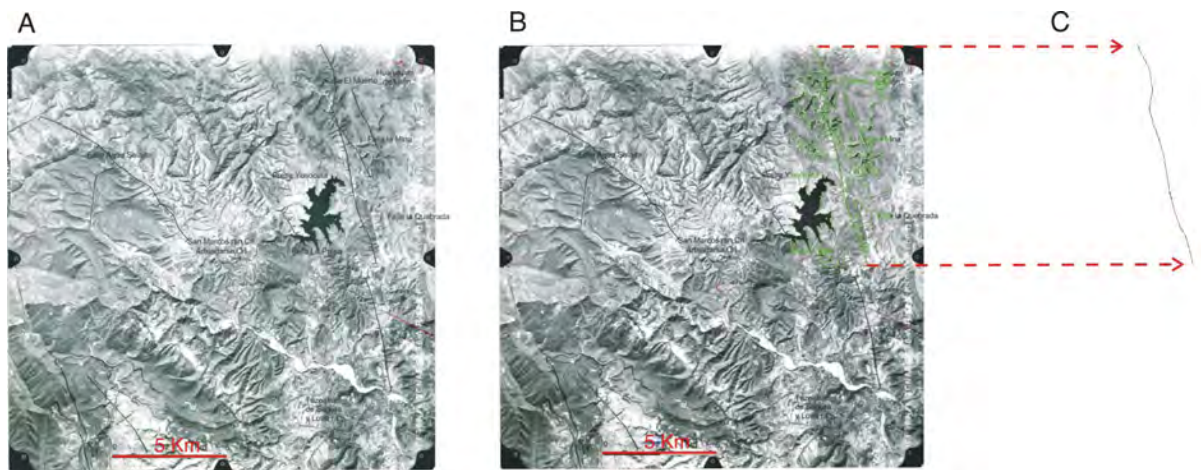


Figura 6.8: Esta imagen muestra fallas y fracturas en roca metamórficas y sedimentarias con tamaño lineal del orden de algunos kilómetros. (A) Imagen original, (B) contorno de la falla resaltado en tono verde y (C) mapa binario del contorno de la falla.

tras que las dimensiones de información y correlación están relacionadas con las características topológicas de la fracturas. Estos resultados serán comparados con los obtenidos para las propiedades estructurales de los patrones generados con el MECL. Con la finalidad de determinar si las dimensiones fractales de una fractura

dependen sensiblemente de la longitud de la fracturas en el mismo tipo de roca se consideraron dos fracturas en metacuarcita, figuras 6.2, 6.5: la primera esta en una escala de milímetros mientras que la segunda en una escala de centímetros. En el primer caso se obtuvo: $D_c = 1.23$, $D_{inf} = 1.23$ y $D_{cor} = 1.23$, mientras que que en el segundo se obtuvo, $D_c = 1.19$, $D_{inf} = 1.20$ y $D_{cor} = 1.21$. Estos resultados se muestran en la figura 6.9, con D_c (\circ), D_{inf} (\square) y D_{cor} (\triangle). Es de notar que los valores de las tres dimensiones son diferentes de los obtenidos de las fracturas de tamaño similar pero en diferentes tipos de rocas (símbolos rellenos de negro); sin embargo, el comportamiento de los valores de estas dimensiones fractales, al pasar de la escala de milímetros a la de centímetros, es muy parecido.

En el siguiente capítulo 7, se presentan las propiedades de autosimilitud de seis familias de patrones de fracturas generados con el MECL. En particular, en esta tesis se enfatiza que las propiedades de auto-similaridad de las fracturas en rocas se pueden simular con diferentes familias de patrones obtenidos con el MECL. Es decir, los valores de las dimensiones fractales de fracturas en rocas de diferentes escalas de longitud son parecidos, dentro de las barras de error estadístico, a las dimensiones fractales de ciertas familias de patrones obtenidos con diferentes valores de α .

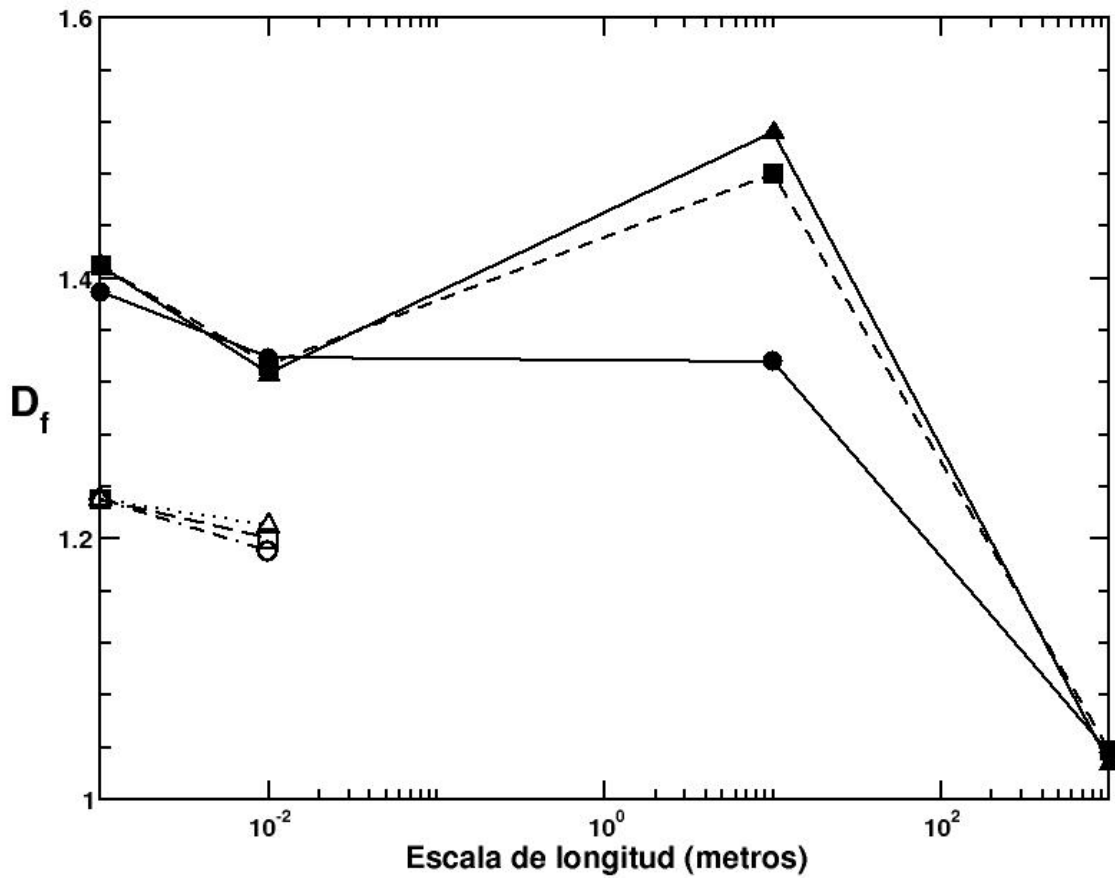


Figura 6.9: Aquí se muestra el comportamiento de la dimensión fractal de capacidad (●), información (■) y correlación (▲), como una función de la escala de longitud de la fractura (en metros). Estas dimensiones fractales se obtuvieron de los mapas binarios correspondiente a cada fractura. El tamaño lineal de las fracturas va de unos cuantos milímetros hasta fracturas en la escala de kilómetros. También se muestra el comportamiento de las tres dimensiones fractales de capacidad (○), información (□) y correlación (△), para dos fracturas en metacuarcita en las escalas de milímetros y centímetros.

Capítulo 7

Patrones de fracturas generados con el MECL

En este capítulo se presenta el análisis de las propiedades de auto-similaridad y de auto-afinidad de seis familias de patrones obtenidos con el MECL. Estas familias corresponden a los seis valores del parámetro $\alpha = 0.15, 0.30, 0.45, 0.60, 0.75$ y 0.90 que define la forma de las partículas que se adicionan al agregado en el proceso de crecimiento Laplaciano. Para ello se generaron para cada valor de α 30 patrones estadísticamente independientes. Para cada uno de los patrones se calcularon las tres diferentes dimensiones fractales definidas en el capítulo 5. Con la finalidad de estudiar el comportamiento estadístico de las dimensiones fractales como función del tamaño de la muestra se formaron muestras con 5, 10, 15, 20, 25 y 30 patrones independientes para cada valor de α . Una vez que se estimó, de manera visual, el tamaño mínimo de la muestra que produce resultados estadísticos que son representativos de la población, se obtuvieron los valores promedio de las dimensiones fractales con sus correspondientes fluctuaciones. Estos resultados se comparan con los obtenidos en el capítulo anterior para las propiedades de auto-similaridad de fracturas en rocas de diferentes escalas de longitud y diferente origen geológico.

7.1. Propiedades de auto-similaridad

En la figura 7.1 se grafica el comportamiento de las dimensiones fractales de capacidad (●), información (■) y correlación (▲) como función del tamaño de la muestra para los seis valores de α indicados en la sección anterior. Como se observa en estas gráficas, los valores promedio de las dimensiones fractales son esencialmente los mismos, dentro de las barras de error debidas a fluctuaciones estadísticas, cuando la muestra tiene al menos diez patrones. Esto sugiere que para obtener resultados de las dimensiones fractales con significado estadístico, se deben considerar muestras con al menos diez patrones. No obstante este resultado, y con

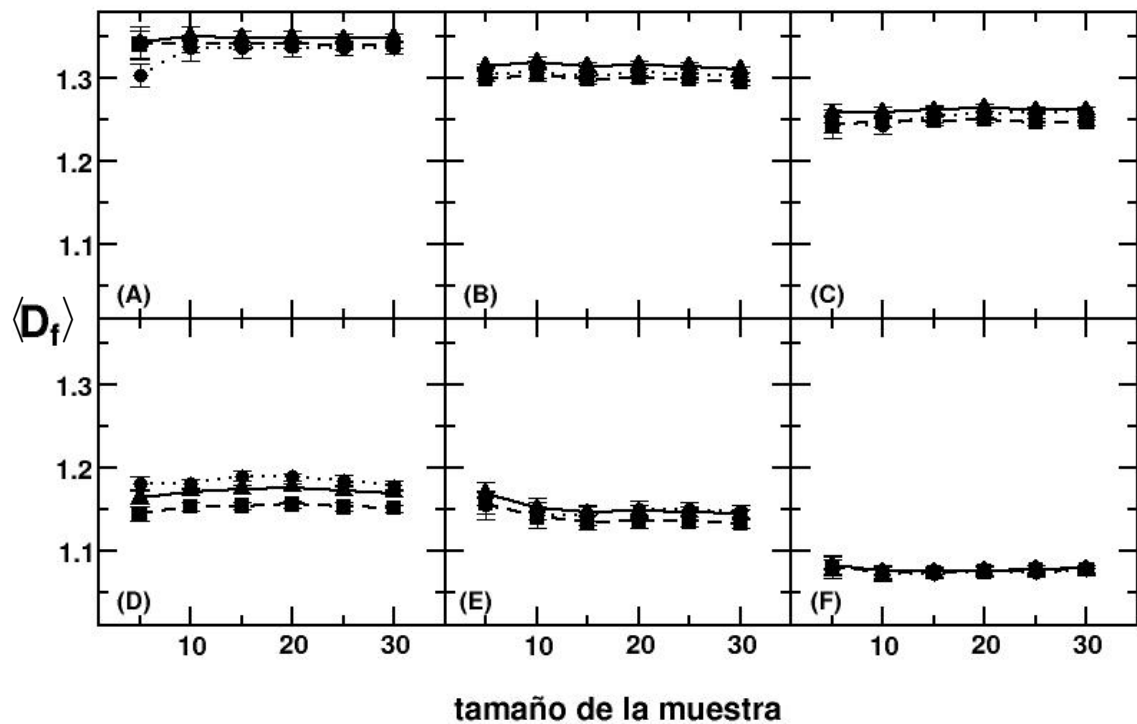


Figura 7.1: Comportamiento de los valores promedio de las dimensiones fractales de capacidad (●), de información (■) y de correlación (▲), como función del número de patrones en cada muestra, y para diferentes familias de patrones del MECL. (A) $\alpha = 0.15$, (B) $\alpha = 0.30$, (C) $\alpha = 0.45$, (D) $\alpha = 0.60$, (E) $\alpha = 0.75$ y (F) $\alpha = 0.90$.

la finalidad de minimizar los errores estadísticos, las dimensiones fractales de capacidad, información y correlación para cada familia de patrones del MECL se obtuvieron con muestras de treinta patrones diferentes.

En la figura 7.2 se muestra el comportamiento del promedio de las dimensiones fractales de capacidad (●), información (■) y correlación (▲) como función del parámetro α . El promedio de cada dimensión fractal se obtuvo de una muestra con treinta patrones. Se observa que las dimensiones fractales decrecen monótonamente como función de α . No obstante, alrededor de $\alpha = 0.60$ se presenta un “hombro” que parece indicar una disminución en la razón de decrecimiento de las dimensiones fractales. Este comportamiento es más marcado en la dimensión fractal de correlación. También se observa que la dimensión fractal de correlación (▲) es sistemáticamente más pequeña que los valores de las otras dos dimensiones fractales

en el intervalo $0.15 \leq \alpha \leq 0.75$, mientras que el valor de las dimensiones fractales de capacidad e información son similares, dentro de los errores estadísticos, en el mismo intervalo. Lo que es más importante, se observa que los valores de las tres dimensiones fractales convergen a un mismo valor cuando $\alpha = 0.9$. Esto es una indicación de la auto-similaridad de los patrones que pertenecen a esta familia del MECL. En la tabla 2 se presenta un resumen cuantitativo de las dimensiones fractales para cada familia del MECL.

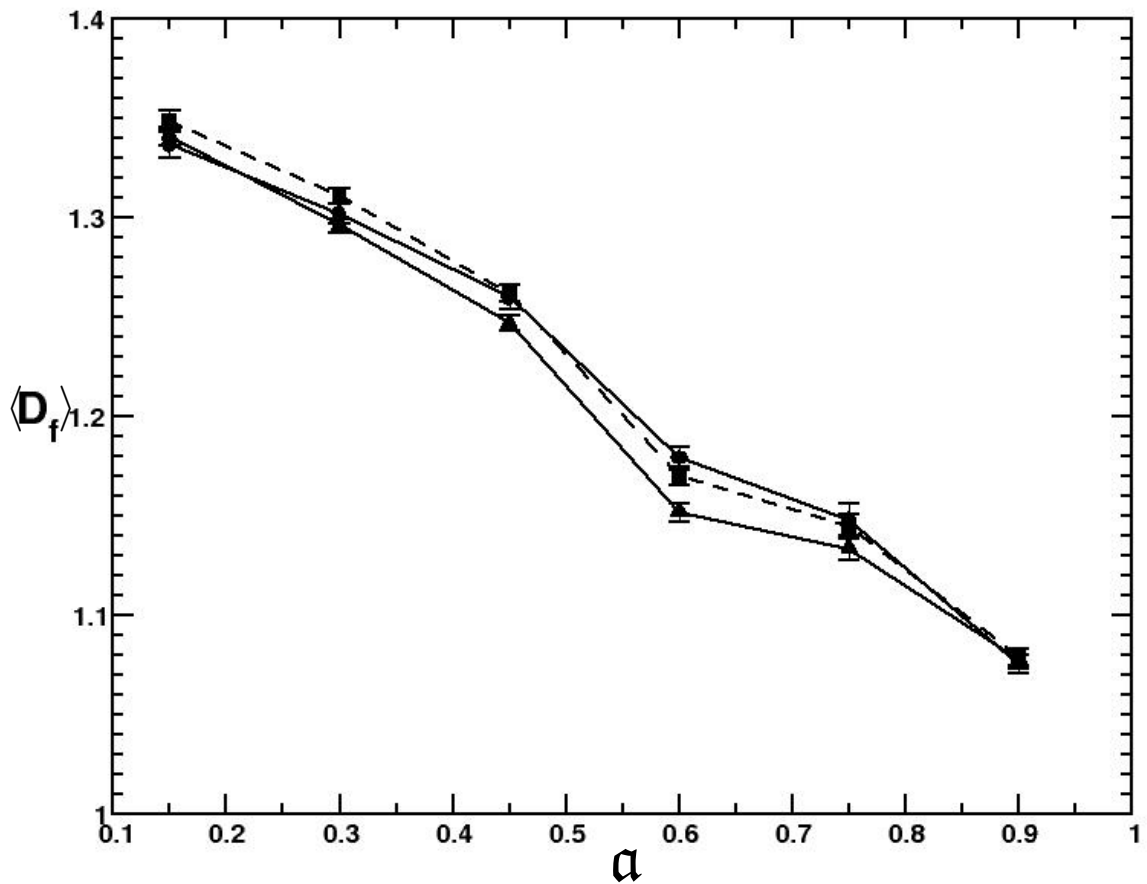


Figura 7.2: Resultado para los valores promedio de la dimensión fractal de capacidad (\bullet), de información (\blacksquare) y correlación (\blacktriangle) como función de α . Los promedios se calcularon sobre 30 realizaciones diferentes del MECL.

En este punto es importante comparar los resultados de las tres dimensiones fractales obtenidas de los patrones generados con el MECL con aquéllas obtenidas de los mapas binarios de las fracturas en rocas. Las conclusiones que se obtienen de la comparación son: (i) las dimensiones fractales obtenidas de los mapas binarios

α	$\langle D_{cap} \rangle$	$\langle D_{inf} \rangle$	$\langle D_{cor} \rangle$
0.15	1.336 ± 0.006	1.348 ± 0.005	1.340 ± 0.004
0.30	1.301 ± 0.005	1.310 ± 0.004	1.295 ± 0.003
0.45	1.259 ± 0.006	1.261 ± 0.003	1.246 ± 0.003
0.60	1.178 ± 0.005	1.169 ± 0.004	1.151 ± 0.004
0.75	1.147 ± 0.008	1.144 ± 0.006	1.133 ± 0.005
0.90	1.075 ± 0.004	1.078 ± 0.004	1.077 ± 0.004

Tabla 2. Valores promedio de las dimensiones fractales de capacidad, información y correlación para las seis familias de patrones de fracturas generados con el MECL.

que representan fracturas en escala de milímetros y metros son similares, dentro de los errores estadísticos, a las dimensiones fractales de los patrones de fracturas del MECL pertenecientes a las familias con $\alpha = 0.15$ y 0.30 , respectivamente. (ii) las dimensiones fractales de los mapas binarios que representan fracturas en escala de kilómetros son semejantes, dentro de las barras de error estadístico, a las dimensiones fractales de los patrones del MECL pertenecientes a la familia con $\alpha = 0.9$. Por lo anterior, estos resultados parecen sugerir que los patrones de fracturas del MECL pertenecientes a familias con valores apropiados del parámetro α , pueden reproducir razonablemente bien las propiedades fractales de los mapas binarios de fracturas en rocas en diferentes escalas de longitud y diferente origen geológico.

7.2. Propiedades de auto-afinidad

Como se mencionó en la sección 5.2 las propiedades de auto-afinidad de una superficie se analizan evaluando la función de correlación, $Z(r)$ de la diferencia entre alturas en un perfil de una superficie. Si la superficie es auto-afin, $Z(r)$, escala como una ley de potencias, $Z(r) \propto r^\zeta$, donde ζ es el exponente de rugosidad. No obstante, los patrones generados con el MECL son bidimensionales por lo que no es posible extraer de ellos un perfil de superficie. Para resolver esta dificultad se evaluaron, para cada uno de los patrones, “perfiles angulares”. Considerando la forma en que se obtienen los “perfiles de una superficie” se procedió a medir las “alturas”, r_θ , en una dirección θ , de cada punto sobre la circunferencia unitaria a su correspondiente imagen en el patrón obtenido con el MECL. La figura 7.3 muestra un diagrama esquemático los tres pasos principales de este procedimiento.

La figura 7.3A representa el mapeo no-lineal, Φ_n , de cada punto en la circunferencia unitaria que da lugar al patrón de fractura. En la figura 7.3B se muestra la forma en que se construye el “perfil angular”, uniendo cada punto de la circunferencia unitaria con su correspondiente imagen en el patrón. La figura 7.3C se muestra un “perfil angular”, típico que resulta de graficar la distancia r_θ como una función

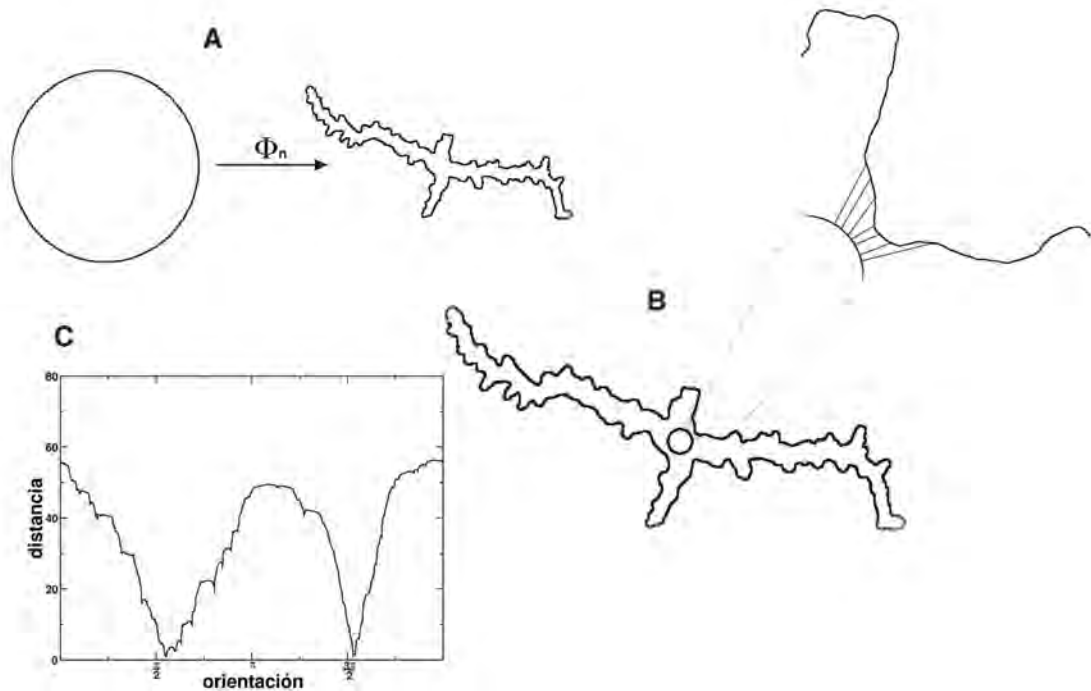


Figura 7.3: Diagrama esquemático que ilustra la definición de los “perfiles angulares”. (A) Mapeo de la circunferencia unitaria en el patrón aplicando la función Φ_n . (B) Definición de los “perfiles angulares” midiendo la distancia de cada punto en la circunferencia unitaria a su correspondiente imagen en el patrón. (C) Resultados representativos de un “perfil angular” como una función de θ .

del ángulo θ . La función de correlación de los perfiles angulares se calcula con la siguiente fórmula,

$$Z(r_\theta) = \left\langle \max\{r(\theta')\} - \min\{r(\theta')\} \right\rangle_{\phi < \theta' < \phi + \theta}. \quad (7.1)$$

El comportamiento de esta función de correlación da información relacionada con la “topografía angular” de los patrones obtenidos con el MECL que emulan las fracturas en rocas. Para las estructuras auto-afines se espera que la función de correlación sea una función auto-afín y escale como una ley de potencias, $Z(r_\theta) \sim r_\theta^\zeta$, con ζ el exponente de rugosidad. Por lo anterior, al graficar la función de correlación en escala log-log, esto es, $\log(Z(r_\theta))$ versus $\log(r_\theta)$, ζ corresponde a la pendiente de la regresión lineal.

En la Fig. 7.5, se muestran algunos resultados representativos de la regresión lineal (\circ), para seis diferentes valores de α , y corresponden a un sólo patrón obtenido con el MECL. La línea discontinua corresponde a los resultados de la regresión lineal

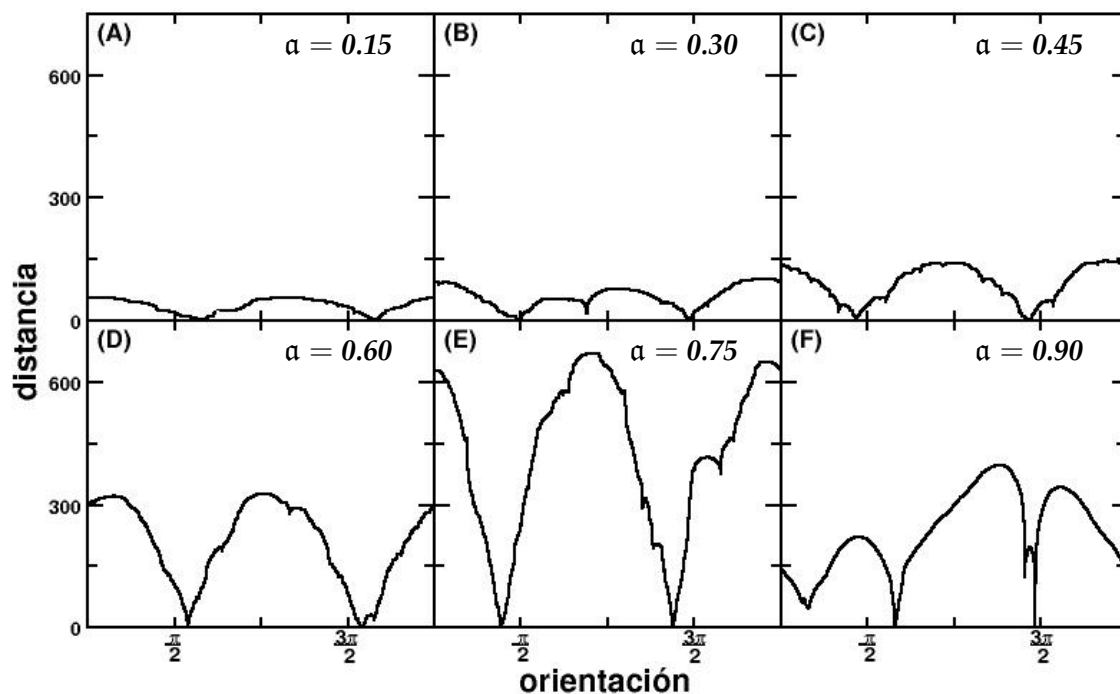


Figura 7.4: “Perfiles angulares” obtenidos con el MECL que corresponden a los patrones para los siguientes valores del parámetro α . Los patrones se ilustran en la figura 4.2.. El máximo en el perfil angular corresponde a la dirección de crecimiento de las ramas en el patrón correspondiente.

de la cual se obtienen los valores del parámetro A y del exponente ζ . En la tabla 3 se muestra un resumen de los resultados de las regresiones lineales de dos parámetros. Los resultados corresponden promedios de A y η , con sus correspondientes fluctuaciones estadísticas, realizados en muestras con 30 patrones diferentes.

Para analizar en forma completa las propiedades de escalamiento de la función de correlación, y con ello las propiedades de auto-afinidad de los perfiles angulares, es importante investigar la existencia de correcciones de escalamiento a la ley de potencias, $Z(r_\theta) \sim Ar_\theta^\zeta$. Para ello resulta natural aplicar el *ansatz* que se usa para estudiar las correcciones al escalamiento del radio de giro, R_g , de agregados de partículas – el MECL esta inspirado en el fenómeno de agregación de partículas–. El radio de giro mide las propiedades conformacionales de los agregados y escala con el número de partículas, N , como, $R_g \sim N^{1/D}$ con D la dimensión fractal del

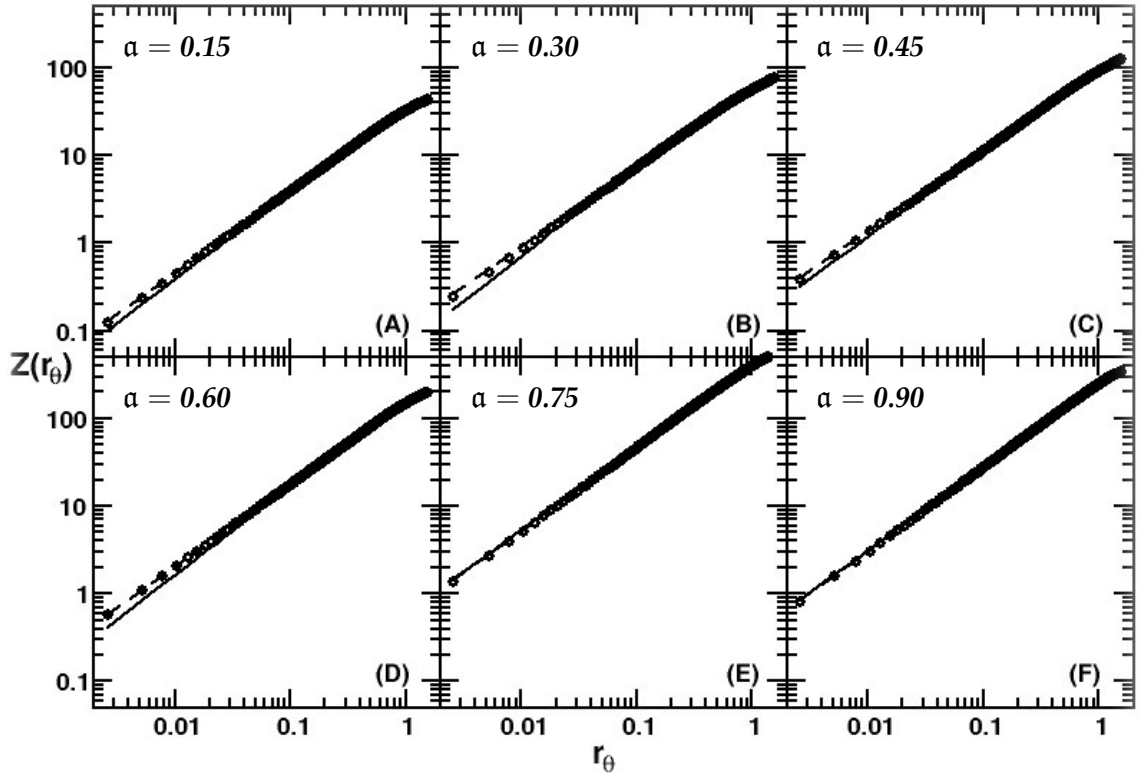


Figura 7.5: Resultados representativos del ajuste lineal (línea discontinua) y ajuste no lineal (línea sólida) a la función de correlación de los datos de los “perfiles angulares” (\circ), para el patrón obtenido de una realización de MECL. Cada recuadro corresponde a un valor diferente de α .

agregado. Las correcciones de escalamiento a esta ley de potencias usualmente se analizan usando la relación [Aharony, Fisher, 1983, Lam, 1990],

$$R_g(N) \sim AN^{1/D}(1 + mN^\delta + nN^{-\eta}), \quad (7.2)$$

donde los valores de los parámetros, A, m, n, D, δ , y η se calculan realizando regresiones no-lineales a los datos de R_g y N . Las correcciones al escalamiento de la ley de potencias son insignificantes si los términos, mN^δ y $nN^{-\eta}$, son despreciables comparados con la unidad.

Traduciendo la Ec. 7.2 a la notación de la función de correlación de los “perfiles angulares”, $Z(r_\theta)$, se tiene el siguiente “ansatz”,

$$Z_{nl}(r_\theta) = Ar_\theta^\zeta(1 + mr_\theta^\delta + nr_\theta^{-\eta}), \quad (7.3)$$

Los valores de los parámetros, A, m, n, ζ, δ y η se obtienen, en principio, realizando regresiones no-lineales de seis parámetros a la función de correlación de ca-

da uno de los patrones de fracturas obtenidos con el MECL. Sin embargo, se encontró que los ajustes no-lineales de seis parámetros no son lo suficientemente confiables debido a que la función $\chi^2(A, m, n, \zeta, \delta, \eta)$ presenta muchos mínimos relativos. Para simplificar el problema de minimización se redujo la dimensión del espacio de parámetros asignando a A y ζ , los valores obtenidos en las regresiones lineales. Así pues, para cada uno de los patrones de fractura se realizaron regresiones no-lineales de cuatro parámetros con un 99% de índice de confiabilidad. En la figura 7.5 se muestran resultados representativos de las regresiones lineal – dos parámetros–, a $Z(r_\theta)$, y no-lineal –cuatro parámetros–, a $Z_{nl}(r_\theta)$, para el perfil angular que corresponde a un patrón de fractura obtenido para cada uno de los seis valores diferentes de α que se consideran en esta tesis. Los resultados para la regresión lineal están representados con las líneas discontinuas, mientras que los que corresponden a la regresión no-lineal están representados por las líneas sólidas. Estos resultados sugieren que cuando $\alpha < 0,75$ y distancias, r_θ , relativamente pequeñas hay una diferencia entre el ajuste lineal y no lineal. Sin embargo, para distancias mayores, r_θ , los ajustes lineal y no lineal están muy cercanos entre sí. Lo que es más importante, cuando $0.75 < \alpha$ las regresiones lineal y no-lineal conducen básicamente al mismo resultado. Es decir, para los valores del parámetro $\alpha = 0.75$ y 0.90 las correcciones a la ley de escalamiento original son despreciables, sugiriendo que los datos de la función de correlación se ajustan mejor a la ley de potencias. Por lo tanto, para éstos dos valores de α , los patrones de fracturas obtenidos con el MECL son auto-afines. Para estudiar el significado estadístico de estos resultados, se promediaron los valores del exponente ζ para muestras de 5, 10 15, 20 25 y 30 perfiles independientes, tanto para el ajuste lineal como el no lineal. En la figura 7.6 se muestran los resultados de este análisis para los seis valores diferentes del parámetro α . Los símbolos (\circ) y (\bullet) corresponden a las regresiones lineal y no-lineal, respectivamente.

Se encontró que cuando $\alpha = 0.15$, los promedios del exponente de rugosidad obtenido de la regresión lineal, presenta fluctuaciones importantes como función del tamaño de la muestra. No obstante, cuando $\alpha = 0.30, 0.60, \text{ y } 0.75$ los resultados

α	$\langle \zeta \rangle$	$\langle A \rangle$
0.15	0.928 ± 0.001	32.644 ± 0.221
0.30	0.916 ± 0.002	60.060 ± 0.544
0.45	0.909 ± 0.003	90.627 ± 1.307
0.60	0.933 ± 0.002	18.022 ± 4.775
0.75	0.929 ± 0.003	27.472 ± 1.421
0.90	0.89 ± 0.01	28.53 ± 2.277

Tabla 3. Resultados para los valores promedio del exponente de rugosidad, ζ , calculado sobre 30 realizaciones independientes del MECL.

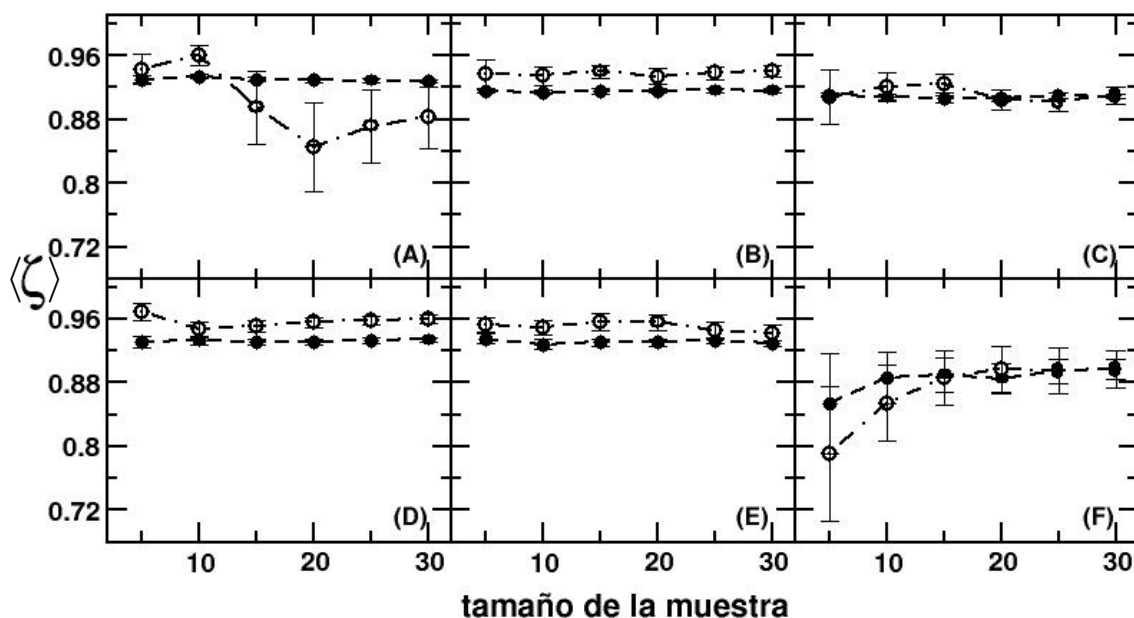


Figura 7.6: Valores promedio del exponente de rugosidad ζ , obtenido de las regresiones lineales, como función del tamaño de la muestra para seis valores diferentes de α . (A) 0.15, (B) 0.30, (C) 0.45, (D) 0.60, (E) 0.75 y (F) 0.90.

son estables pero ligeramente mayores que los valores obtenidos de la regresión no-lineal. Sin embargo, cuando $\alpha = 0.45$ y muestras con veinte o más perfiles los resultados de ambas regresiones coinciden, dentro de las barras de error. Se obtiene el mismo comportamiento cuando $\alpha = 0.90$. De lo anterior se concluye que los valores promedio del exponente de rugosidad convergen a un valor fijo cuando el tamaño de las muestras es de veinte perfiles independientes. Así pues, para obtener resultados estadísticos representativos para los otros parámetros de la Ec. 7.3, este análisis se realizó con seis muestras de 30 perfiles angulares. Cada muestra corresponde a cada uno de los seis valores de α definidos anteriormente. Los resultados de la estadística son consistentes con el comportamiento de la función de correlación que se muestra en la Fig. 7.5.

Subsecuentemente se estudió el comportamiento del promedio del exponente de rugosidad, ζ , sobre 30 perfiles independientes como función del parámetro α . Un

resumen de los resultados de las regresiones no-lineales de los cuatro parámetros de muestra en la tabla 4.

α	$\langle \delta \rangle$	$\langle m \rangle$	$\langle \eta \rangle$	$\langle n \rangle$
0.15	1.369 ± 0.217	-0.884 ± 1.531	1.905 ± 0.226	0.823 ± 1.530
0.30	1.913 ± 0.196	-0.002 ± 1.033	1.592 ± 0.196	-0.011 ± 1.033
0.45	1.516 ± 0.177	0.291 ± 0.315	1.857 ± 0.173	-0.306 ± 0.314
0.60	4.188 ± 0.165	0.288 ± 0.269	4.089 ± 0.217	-0.306 ± 0.270
0.75	2.180 ± 0.250	-1.166 ± 0.506	-0.958 ± 0.193	1.138 ± 0.506
0.90	1.678 ± 0.233	-7.812 ± 2.117	-1.348 ± 0.253	7.789 ± 2.116

Tabla 4. Resultados de las regresiones no-lineales de cuatro parámetros a la función de correlación, $Z_{nl}(r_\theta)$. Los promedios se calcularon con poblaciones de 30 patrones independientes obtenidos con el MECL.

En la figura 7.7, se muestra el comportamiento del valor promedio exponente de rugosidad, η , junto con sus barras de error, como función del parámetro α . Los símbolos (\circ) y (\bullet) representan los valores de ζ obtenidos de las regresiones lineal y no-lineal, respectivamente. Se encontró que cuando $\alpha = 0.45$ y 0.90 los resultados de ambos ajustes son consistentes dentro de las barras de error. Sin embargo, de los resultados de la regresión no-lineal indican que el mejor ajuste a la ley de potencias ocurre cuando $\alpha = 0.90$. Este resultado indica que la familia de patrones obtenidos con $\alpha = 0.90$, en el MECL son los únicos que presentan una estructura auto-afín. Lo que es más importante, el valor del exponente de rugosidad obtenido para esta familia de patrones se encuentra en el rango de valores del exponente de rugosidad obtenido para fracturas en rocas [Deng et al, 1999]. Además, en este punto es crucial hacer notar que los valores numéricos de las tres dimensiones fractales: de capacidad, de información y de correlación, así como del exponente de rugosidad, obtenidos para la familia de patrones con $\alpha = 0.90$, satisfacen razonablemente bien, dentro de la barra de error, la relación, $\zeta = 2 - D$, es decir, $0.89 \approx 2 - 1.08$ [Barabási, Stanley, 1995, pp 36, Lung et al, 1999, Voss, 1988]. Por otra parte, es claro que este tipo de análisis no se puede realizar con los mapas binarios obtenidos de las imágenes de fracturas en rocas debido a que éstos son multivaluados.

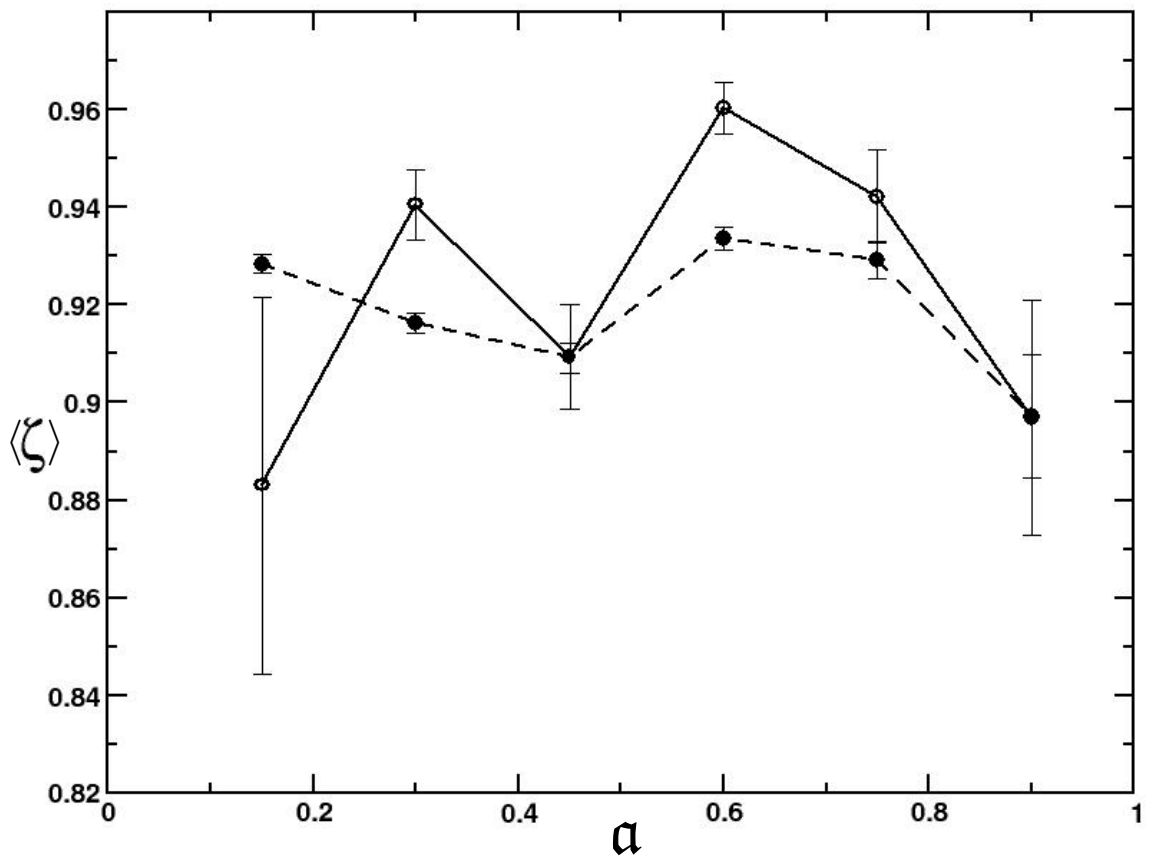


Figura 7.7: Resultados para los valores promedio del exponente de rugosidad ζ como función de a . Los promedios se calcularon sobre 30 patrones diferentes del MECL.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis se analizaron las propiedades de auto-similaridad de mapas binarios de fracturas en rocas de distinto origen geológico. El tamaño lineal de las fracturas varía de unos cuantos milímetros hasta unos cuantos kilómetros; definiendo seis ordenes de magnitud. Se encontró que la dimensión fractal de capacidad decrece ligeramente para fracturas de tamaño lineal de milímetros a centímetros y permanece casi constante en la escala lineal de centímetros a metros. No obstante, cuando el tamaño de la fractura va de escala de metros a kilómetros, esta dimensión fractal decrece significativamente. Por otra parte, los valores de las dimensiones fractales de información y correlación decrecen ligeramente en la escala de milímetros a centímetros mientras en la escala de centímetros a metros aumentan significativamente para después disminuir conforme aumenta el tamaño de la fractura de metros a kilómetros. Para mapas binarios de fracturas en la escala de kilómetros los valores de las tres dimensiones fractales convergen a un solo valor sugiriendo una estructura auto-similar.

De la misma forma, se realizó un análisis exhaustivo de la estructura de familias – valores diferentes del parámetro α – de patrones bidimensionales de fracturas generados con un MECL. Para caracterizar la estructura de estos patrones se calcularon las dimensiones fractales de capacidad, de información y de correlación. Los resultados indican que los valores de estas dimensiones fractales decrecen monotónicamente conforme α aumenta. Sin embargo, cuando $\alpha = 0.90$ las tres dimensiones tienden a converger a un valor indicando un comportamiento auto-similar de esta familia de patrones [Korvin, 1992]. Al estudiar las propiedades auto-afines de los patrones generados con el MECL se encontró que las correcciones a la ley de escalamiento son despreciables cuando $\alpha = 0.90$, sugiriendo una estructura auto-afín para esta familia de patrones. Lo que es más importante, el valor del correspondiente exponente de rugosidad, ζ , está en el rango de valores (de 0.7 a 0.98) para fracturas en rocas [Deng et al, 1999].

De lo anterior se concluye que la familia de patrones del MECL con $\alpha = 0.90$ tienen una estructura auto-similar como las fracturas en rocas en la escala de kilómetros.

De hecho, los valores de las tres dimensiones fractales tanto en fracturas en rocas como en patrones obtenidos con el MECL son consistentes entre sí dentro del error estadístico. Además se encontró que los valores de la dimensión fractal de los mapas binarios en escala de milímetros a metros concuerdan razonablemente bien con los obtenidos para las familias de patrones del MECL con $\alpha = 0.15$ y $\alpha = 0.30$. Así también se encontró que la familia de patrones del MECL con $\alpha = 0.90$ representa bien las propiedades auto-similares de mapas binarios de imágenes de fracturas en rocas en escala de kilómetros. Desafortunadamente, como se explicó en la sección 7.2 no se analizaron las propiedades de auto-afinidad de los mapas binarios de fracturas debido a que no fue posible extraer perfiles univaluados.

Es importante enfatizar que en ésta tesis se demuestra explícitamente la posibilidad de emular los patrones de fracturas en rocas en la escala de kilómetros mediante estructuras fractales que tienen la propiedad de ser auto-similares y auto-afines. Este es un resultado relevante debido a que es muy común, en la comunidad de Geología, representar o emular las fracturas en rocas con líneas rectas, que son objetos Euclidianos.

Bibliografía

- [1] Aharony A., Fisher M. E., 1983, *Nonlinear scaling fields and corrections to scaling near criticality*, Phys. Rev. B **27**, 4394.
- [2] Balatoni J., Renyi A., 1956, *On the notion of entropy*, Publ. Math. Inst.Hung. Acad. Sci. **1**, 9; English translation: Selected papers of Alfred Rényi, 1976, vol. I, pp. 558-584, Akademiát Kiado, Budapest.
- [3] Barabási A. L., Stanley H. E., 1995, *Fractal concepts in surface growth*, Cambridge University Press.
- [4] Barabási A. L., Vicsek T., 1983, *Multifractality of self-affine fractals*, Phys. Rev. A **44**, 2730.
- [5] Barber J. R., 1992, *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [6] Barra F., Davidovich B., Levermann A., Procaccia I., 2001, *Laplacian Growth-hand Diffusion Limited Aggregation: Different Universality Classes*, Phys. Rev. Lett. **87**, 134501.
- [7] Barra F., Davidovich B. Procaccia I., 2002, *Iterated conformal dynamics and Laplacian growth*, Phys. Rev. E **65**, 046144.
- [8] Barra F., Hentschel H.G.E., Levermann A. Procaccia I., 2002, *Quasistatic fractures in brittle media and iterated conformal maps*, Phys. Rev. E **65**, 045101(R).
- [9] Barra F., Levermann A. Procaccia I., 2002, *Quasi-Static Brittle Fracture in Inhomogeneous Media and Iterated Conformal Maps: Modes I, II and III*, Phys. Rev. E **66**, 066122.
- [10] Bouchaud E., 1997, *Scaling properties of cracks*, Jour. Phys. Condens. Matter **9**, 4319.
- [11] Cravero M., Piana F., Ponti S., Tallone S., Balestro G., Morelli M., 2006, *Analysis of fracture patterns constrained by suitable geological model*, American Rock Mechanics Association, Paper 06–1147.

- [12] Cross M. C., Hohenberg P. C., 1993, *Pattern formation outside of equilibrium*, Reviews of Modern Physics, Vol. 65, No. 3 p. 851.
- [13] Davidovitch B., Hentschel H.G.E., Olami Z. , Procaccia I., Sander L.M., Somfai E., 1999, *Diffusion limited aggregation and iterated conformal maps*, Phys. Rev. E **59**, 1368.
- [14] Davidovich B., Feigenbaum M.J., Hentshel H.G.E., Procaccia I., 2000, *Conformal dynamics of fractal growth patterns without randomness*, Phys. Rev. E **62**, 1706.
- [15] Deng J., He Y. F., Ye F., Long Q. Y., Lung C. W., J., 1999, *Accurate assessment of the roughness exponent of a fracture surface via scanning tunnelling microscopy*, Phys. D: Appl. Phys., 32 L45.
- [16] Fineberg J., Marder M., 1999, *Instability in dynamic fracture*, Physics Reports 313 1-108.
- [17] Gollub J. P., Langer J. S., 1999, *Pattern formation in nonequilibrium physics*, Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 2 p. S396.
- [18] Grassberger P., Procaccia I., 1983, *Characterization of Strange Attractors*, Phys. Rev. Lett. **50**, 346.
- [19] Grassberger P., 1988, *Finite sample corrections to entropy and dimension estimates*, Phys. Lett. A 128, 369.
- [20] Hastings M. B., Levitov L.S., 1998, *Laplacian growth as one-dimensional turbulence*, Physica D **116**, 244.
- [21] Kessler D., Koplik J., Levine H., 1988, *Pattern selection in fingered growth phenomena*, Adv. Phys., Vol. 37, No. 3, 255.
- [22] Korvin G., 1992, *Fractals Models in the Earth Sciences*. Elsevier, The Netherlands.
- [23] Krug J., Spohn H., 1992, *in Solids Far From Equilibrium*, edited by C. Godreche, Cambridge Univ. Press, New York.
- [24] Lam P. M., 1990, *Correction-to-scaling exponent for self-avoiding walks*, Phys. Rev. B **42** 4447.
- [25] Liebovitch L.S., Tóth T., 1989, *A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting*, Phys. Lett. A **141**, 386.
- [26] Lung C. W., Jiang J., Tian K., Zhang C. H., 1999, *Relation between fractal dimension and roughness index for fractal surfaces*, Physical Review E Vol. 60, Number 5.

- [27] Mandelbrot B., Passoja D. E., Paullay A. J., 1984, *Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals*, *Nature* **308**, 721.
- [28] Mandelbrot B. B., 1985, *Self-Affine Fractals and Fractal Dimension*, *Phys. Scr.* **32**, 257.
- [29] McKane A., Droz M., Vannimenus J., Wolf D., 1995, *Scale Invariance, Interfaces, and Non-equilibrium Dynamics*, NATO Science Series: B, Vol. 344.
- [30] National Research Council, 1996, *Rock Fractures and Fluid Flow*, National Academy Press, Washington, D. C.
- [31] Peterson M. A., 1998, *Singular Laplacian growth*, *Phys. Rev. E* **57**, 3221.
- [32] Pietronero L., Wiesmann H. J., 1984, *Stochastic model for dielectric breakdown*, *Jour Statist Phys* **36** 5–6 ,909–916.
- [33] Sarraïlle J., 1998, <http://yahi.csustan.edu/john/Homepages.Old/jsHomepage.html>
- [34] Sauer T., Yorke J., 1993, *How many delay coordinates do you need?*, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3**, 737.
- [35] Sherwood J.D., Nittmann J., 1986, *Gradient governed growth : the effect of viscosity ratio on stochastic simulations of the Saffman-Taylor instability*, *Journal de Physique* **47**, 15.
- [36] Vicsek T., 1989, *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapore.
- [37] Voss R. F., 1988, *Fractals in nature: From characterization to simulation*, pp 21–69 in *The Science of Fractal Images*, edited by Herz-Otto Peitgen and Dietmar Saupe Springer-Verlag, Berlin.