Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ÁLGEBRAS HEREDITARIAS DE ENDOMORFISMOS DE MÓDULOS SOBRE EL ÁLGEBRA TRIANGULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JOSÉ EDUARDO SIMENTAL RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Michael Barot Schlatter

2010

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ÁLGEBRAS HEREDITARIAS DE ENDOMORFISMOS DE MÓDULOS SOBRE EL ÁLGEBRA TRIANGULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

J O S É E D U A R D O S I M E N T A L R O D R Í G U E Z

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Michael Barot Schlatter

2010

1. Datos del alumno Simental Rodríguez José Eduardo 56 73 56 97 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 407028665
2. Datos del tutor Dr. Michael Barot Schlatter
3. Datos del sinodal 1 Dr. Christof Geiss Hahn
4. Datos del sinodal 2 Dr. Octavio Mendoza Hernández
5. Datos del sinodal 3 Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas
6. Datos del sinodal 4 Dr. José Ríos Montes
7. Datos del trabajo escrito Álgebras Hereditarias de Endomorfismos de Módulos sobre el Álgebra Triangular 103pp. 2010

Índice general

Introducción

Siguiendo a D. Simson ([7] y [8]) definimos el concepto de *álgebra endo-salvaje*: se dice que una k-álgebra de dimensión finita A es endo-salvaje si toda k-álgebra de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de la forma $\mathrm{End}_A(X)$, con X un A-módulo finitamente generado. Por ejemplo ([8]), para $m > 2$ el álgebra $\Gamma_m(k) = \begin{bmatrix} k & k^m \\ 0 & k \end{bmatrix}$ es endo-salvaje. Podemos entonces decir que, de alguna manera, las álgebras endo-salvajes son aquellas para las que es *muy* difícil clasificar a las álgebras que son isomorfas a $\mathrm{End}_A(X)$, con X un A-módulo finitamente generado. ¿Qué tan difícil es, entonces, lograr esta clasificación para las álgebras que no son endo-salvajes?

En [8] se hace la sencilla observación que toda álgebra endo-salvaje es de tipo de representación infinita, es decir, el número de clases de isomorfismo de A-módulos inescindibles y finitamente generados no es finito. Se sigue entonces que, para un $n \in \mathbb{N}_{>0}$ fijo, el álgebra de matrices triangulares inferiores de $n \times n$, Δ_n, no es endo-salvaje, pues el número de clases de isomorfismo de Δ_n-módulos finitamente generados e inescindibles es $\frac{n(n+1)}{2}$. En este trabajo se intenta dar una clasificación de las álgebras básicas y hereditarias de la forma $\mathrm{End}_{\Delta_n}(M)$, donde M es un Δ_n-módulo finitamente generado. Dado que si k es un campo algebraicamente cerrado entonces las k-álgebras de dimensión finitan básicas y hereditarias son justamente las álgebras de caminos de carcajes sin ciclos dirigidos, esto se reduce a clasificar a los carcajes cuya álgebra de caminos es de la forma $\mathrm{End}_{\Delta_n}(M)$. Se demuestra, en particular, que para n fija esta clasificación consiste en un número finito de clases de isomorfismo, pues los carcajes a considerar no tienen más de $\frac{n(n+1)}{2}$ vértices, y la hipótesis de que el álgebra sea hereditaria nos restringe a no tener más de una flecha entre cualesquiera dos vértices. Sin embargo, a medida que n crece, esta clasificación se hace cada vez más compleja.

Como se trató que este trabajo fuera totalmente autocontenido, se inicia con nociones básicas de Teoría de Categorías y Teoría General de Anillos y Módulos:

sólo se supone que el lector está familiarizado con las nociones más básicas, tales como anillo, módulo, submódulo, morfismo, kernel, imagen, suma y producto directos de módulos. En este capítulo se introduce sólo lo necesario para comprender la teoría desarrollada en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se define la noción de carcaj, o gráfica dirigida, y de k-representación de un carcaj. Se demuestra que, con un campo k fijo, las representaciones de un carcaj forman una categoría, se definen los conceptos de suma directa de representaciones y de representaciones inescindibles, y se hace una clasificación de las representaciones inescindibles de $\mathcal{L}_n$, el carcaj lineal de n vértices. Posteriormente, en el capítulo 3, se define el álgebra de caminos de un carcaj, lo que conecta las nociones de los primeros dos capítulos, se demuestra que la categoría de representaciones de un carcaj es equivalente a la categoría de módulos finitamente generados sobre su respectiva álgebra de caminos, y que el álgebra de caminos de un carcaj sin ciclos dirigidos es hereditaria. En el cuarto capítulo se introducen las álgebras básicas, así como el carcaj de un álgebra, y se demuestra que las álgebras básicas y hereditarias son justamente las álgebras de caminos de un carcaj sin ciclos dirigidos. Este capítulo finaliza con un pequeño análisis de cómo es el carcaj del álgebra de endomorfismos de un módulo sobre Δ_n, y cuándo sucede que esta álgebra es hereditaria.

Es hasta el capítulo 5 que entramos al problema que da origen a este trabajo: la clasificación de aquellas k-álgebras básicas y hereditarias para las que existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ y un $\Delta_n(k)$-módulo M, finitamente generado, tal que $A \cong \mathrm{End}_{\Delta_n(k)}(M)$. Esto se reduce a clasificar a los carcajes Q para los que se cumple que el álgebra de caminos kQ es de la forma $\mathrm{End}_{\Delta_n(k)}(M)$. Para esto, introducimos la noción de *realización* de un carcaj, que no es más que una función que a cada vértice de Q le asocia un intervalo compacto de números reales. Asociado a una realización de un carcaj tenemos un orden parcial en Q_0, el conjunto de vértices de Q, que nos ayudará bastante a la hora de decir para qué carcajes existe una realización, es decir, qué carcajes son realizables. Se demuestran algunas propiedades básicas de este orden parcial y ciertas propiedades de "extensión" de realizaciones, que nos permiten demostrar, por ejemplo, que todo árbol es realizable. Después se analizan los bloques, es decir aquellos carcajes cuya gráfica subyacente es 2-conexa, que son realizables.

Por último, se incluye un pequeño apéndice con la definición y propiedades del *pushout* de dos morfismos f y g en una categoría. Se pone especial énfasis en la construcción del pushout en la categoría de conjuntos, pues esto nos brinda una manera de obtener un carcaj a partir de otros dos carcajes.

CAPÍTULO 1

Anillos y Módulos

El propósito de esta sección es dar un repaso razonablemente compacto a los temas concernientes a la Teoría General de Anillos y Módulos necesarios para leer este trabajo. El lector interesado en ahondar más en estos temas puede consultar [1] y [9].

1.1. Categorías y Funtores

Definición 1.1 *Una* **categoría** $\mathcal{C}$ *consiste de una clase de objetos, a la que denotaremos por* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *y, para cada dos objetos* $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *un conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$*, llamado el conjunto de morfismos de* A *a* B*. Además, si* $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *tenemos una función*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

que cumple los siguientes axiomas,

1. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$*,* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ *y* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ *entonces* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

2. *Para cada objeto* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *existe* $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ *tal que, si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ *entonces* $f \circ 1_A = f$ *y, si* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ *entonces* $1_A \circ g = g$*.*

Ejemplos de categorías son:

1. La categoría **Sets** que tiene como objetos a los conjuntos y como morfismos a las funciones, donde la operación $\circ$ es simplemente la composición de funciones.

2. La categoría **Top** de espacios topológicos, donde los morfismos son las funciones continuas.

3. La categoría **Grp** de grupos, donde los morfismos son los homomorfismos de grupos.

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Diremos que A y B son* **isomorfos** *si existen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tales que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Escribiremos $A \cong B$ para decir que los objetos A y B son isomorfos. Además, diremos que f y g son* **isomorfismos***.*

Definición 1.3 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Diremos que $\mathcal{D}$ es una* **subcategoría** *de $\mathcal{C}$ si $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para cualesquiera dos objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ y la función $\circ$ en $\mathcal{D}$ es simplemente la restricción de la función $\circ$ en $\mathcal{C}$. Si además se cumple que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para cualesquiera dos objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, diremos que $\mathcal{D}$ es una* **subcategoría plena** *de $\mathcal{C}$.*

Ejemplo 1.4 *La categoría* **Ab** *de grupos abelianos es una subcategoría plena de la categoría* **Grp***.*

En las categorías **Top** y **Grp**, los morfismos nos sirven para “comparar” objetos. ¿Cómo comparamos categorías? Para eso necesitamos introducir la noción de funtor.

Definición 1.5 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un* **funtor covariante** *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ tal que para cada dos objetos, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existe una función, a la que por abuso de notación también denotaremos por F,*

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$$

tal que:

1. *$F(1_A) = 1_{FA}$ para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*
2. *Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

Diremos solamente que F es un funtor para decir que es un funtor covariante.

Ejemplo 1.6 *Para cada categoría $\mathcal{C}$ tenemos el funtor $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, que a cada objeto lo manda a él mismo y a cada morfismo también.*

Ejemplo 1.7 *Tenemos el funtor u :* **Grp** *$\to$* **Sets***, que olvida la estructura de grupo, es decir, manda a cada grupo en su conjunto subyacente. En general, este funtor aparece siempre que los objetos de la categoría sean conjuntos estructurados. Así, por ejemplo, también podemos definir un funtor olvido u :* **Top** *$\to$* **Sets***.*

Definición 1.8 *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Diremos que F es:*
Fiel *si $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FB)$ es inyectiva para cada $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;*
Pleno *si $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FB)$ es suprayectiva para cada $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;*
Denso *si para cada $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ existe $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $D \cong FC$.*

Ejemplo 1.9 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Entonces el funtor $1_{\mathcal{C}}$ es fiel, pleno y denso. El funtor u :* **Top** *$\to$* **Sets** *es fiel y denso, pero no es pleno.*

1.1.1. Transformaciones naturales

Definición 1.10 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Una* **transformación natural** *entre funtores es una familia de morfismos $\{\varphi_C : FC \to GC\}_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ tal que, si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & FB \arrow[d, "\varphi_B"] \\ GA \arrow[r, "Gf"] & GB \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\varphi_B \circ Ff = Gf \circ \varphi_A$. Escribiremos $\varphi : F \to G$ para decir que $\varphi = \{\varphi_C\}_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ es una transformación natural de F a G.

Definición 1.11 *Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores y $\varphi : F \to G$ una transformación natural. Diremos que φ es un* **isomorfismo natural** *si φ_C es un isomorfismo para todo $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*

Notemos que los funtores también se pueden componer. Es decir, si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ son funtores, entonces $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{F}$ es tal que, en un objeto C se calcula como GFC y en un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se calcula como GFf. Con esta observación, estamos listos para decir cuando dos categorías son "básicamente la misma categoría".

Definición 1.12 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Diremos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son* **equivalentes** *si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales $\eta : GF \to 1_{\mathcal{C}}$, $\theta : FG \to 1_{\mathcal{D}}$. Diremos, además, que los funtores F y G son equivalencias de categorías.*

Sin embargo, esta no es la única manera en la que podemos definir una equivalencia de categorías. Muestra de ello es el siguiente resultado.

Teorema 1.13 *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Son equivalentes:*

(1) *F es una equivalencia de categorías.*

(2) *F es un funtor fiel, pleno y representativo.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2). Veamos primero que el mapeo $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$ es biyectivo. Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que existe un isomorfismo natural $\varphi : GF \overset{\cong}{\to} 1_{\mathcal{C}}$. Tenemos entonces que la función

$$\lambda : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFC_1, GFC_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$$

definida por

$$\lambda(f) = \varphi_{C_2}^{-1} f \varphi_{C_1}$$

es biyectiva. Con el funtor G también tenemos definida una función

$$G : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFC_1, GFC_2).$$

Veamos que F y λG son inversas. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, Entonces

$$\lambda GF(g) = \lambda(GFg) = \varphi_{C_2}^{-1} GFg\varphi_{C_1} = g.$$

Sea $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$, entonces

$$F\lambda G(h) = F\lambda(Gh) = F(\varphi_{C_2}^{-1} Gh\varphi_{C_1}) = h.$$

Por lo tanto F y λG son inversas y F es biyectiva. El resultado ahora se sigue observando que, para cada objeto $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $D \cong FGD$, con $GD \in \mathcal{C}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Veamos antes que, si F es un funtor que cumple 2), entonces C_1 y C_2 son isomorfos en $\mathcal{C}$ si y sólo si FC_1 y FC_2 son isomorfos en $\mathcal{D}$. Sean C_1 y C_2 objetos isomorfos en $\mathcal{C}$, es decir, existen $g : C_1 \to C_2$, $h : C_2 \to C_1$ tal que $gh = 1_{C_2}$, $hg = 1_{C_1}$. Entonces $Fg : FC_1 \to FC_2$ y $Fh : FC_2 \to FC_1$ cumplen $FgFh = Fgh = F1_{C_2} = 1_{FC_2}$ y $FhFg = Fhg = F1_{C_1} = 1_{FC_1}$. Por lo tanto, Fg define un isomorfismo entre FC_1 y FC_2. Ahora bien, si C_1 y C_2 son tales que $FC_1 \cong FC_2$, entonces existen morfismos $g : FC_1 \to FC_2$ y $h : FC_2 \to FC_1$ tales que $gh = 1_{FC_2}$ y $hg = 1_{FC_1}$. Como F es biyectiva, existen un único elemento $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ tal que $Fm = g$ y un único elemento $n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_1)$ tal que $Fn = h$. Entonces $Fnm = FnFm = 1_{FC_2}$. Como la $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$ es biyectiva, $nm = 1_{C_2}$. De la misma manera se prueba que $mn = 1_{C_1}$. Por lo tanto, $C_1 \cong C_2$.

Necesitamos construir un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Sea D un objeto en $\mathcal{D}$. Existe un objeto C en $\mathcal{C}$ con un isomorfismo $\gamma_D : FC \to D$. Definimos $GD = C$. Ahora bien, si tenemos un morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$, tenemos un morfismo

$$\bar{g} = \gamma_{D_2}^{-1} g\gamma_{D_1} : FGD_1 \to FGD_2.$$

Entonces existe un único morfismo $GD_1 \to GD_2$, al que llamaremos $G(g)$ tal que $FG(g) = g$. Veamos ahora que esto define un funtor. Tenemos que, para todo objeto $D \in \mathcal{D}$, $G1_D$ es el único morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD)$ tal que $FG(1_D) = 1_D$. Claramente 1_{GD} cumple esto y por lo tanto se tiene que $G1_D = 1_{GD}$. Sean D_1, D_2, D_3 objetos de $\mathcal{D}$, $g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$ y $g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_2, D_3)$. Tenemos que $G(g_2 g_1)$ es el único morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD_1, GD_3)$ tal que $FG(g_2 g_1) = \gamma_{D_3}^{-1}(g_2 g_1)\gamma_{D_1}$. Como F es un funtor:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\mathrm{Gg}_2 Gg_1) &= \mathrm{F}(\mathrm{Gg}_2) F(Gg_1) \\ &= (\gamma_{D_3}^{-1} g_2 \gamma_{D_2})(\gamma_{D_2}^{-1} g_1 \gamma_{D_1}) \\ &= \gamma_{D_3}^{-1}(g_2 g_1)\gamma_{D_1}. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que $G(g_2 g_1) = G(g_2)G(g_1)$ y por lo tanto G es un funtor. Además, por construcción, $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$.

Veamos ahora que $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$. Del isomorfismo natural $\delta : FG \overset{\cong}{\to} 1_{\mathcal{D}}$, para cada C objeto en $\mathcal{C}$ obtenemos un isomorfismo $\delta_{FA} : FGFA \to FA$ en $\mathcal{D}$. Este morfismo viene de un único isomorfismo $\alpha_A : GFA \to A$ en $\mathcal{C}$. Veamos que $\alpha : GF \to 1_{\mathcal{C}}$

es un isomorfismo natural. Sean A y B objetos de $\mathcal{C}$, y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Tenemos los diagramas

$$\begin{tikzcd} FGF(A) \arrow[r, "FGF(f)"] \arrow[d, "F(\alpha_A)"] & FGF(B) \arrow[d, "F(\alpha_B)"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "GF(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"] & GF(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

El diagrama de la izquierda conmuta, pues $F(\alpha_A) = \gamma_A$. Se sigue entonces, puesto que F es biyectiva, que el diagrama de la derecha también conmuta. Por lo tanto $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ y F es una equivalencia de categorías. □

1.2. Anillos y Módulos

En esta sección supondremos, por brevedad, que el lector ya está familiarizado con conceptos tales como el de anillo, módulo, kernel, imagen, submódulo, morfismo, epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo, suma y producto directos de R-módulos. Por anillo entenderemos un anillo asociativo con 1. Sea pues R un anillo. Denotaremos por R-Mod a la categoría de R-módulos unitarios izquierdos. Denotaremos por R-mod a la subcategoría plena de R-Mod generada por los R-módulos izquierdos que cuentan con un número finito de generadores.

1.2.1. Sucesiones exactas cortas

Definición 1.14 *Sean M, $N \in R$-Mod. Diremos que la sucesión*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

es **exacta** *si* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. *Así, una sucesión de la forma*

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M$$

es exacta si y sólo si f es un monomorfismo, y una sucesión de la forma

$$M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es exacta si y sólo si f es un epimorfismo. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es llamada una **sucesión exacta corta***.*

Notemos que en la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

donde ι_1 denota a la inclusión canónica y π_2 a la proyección canónica, existen morfismos $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \to M_1$ y $\iota_2 : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ tales que $\pi_1\iota_1 = 1_{M_1}$ y $\pi_2\iota_2 = 1_{M_2}$. Veremos a continuación que este caso es esencialmente el único en el que existen estos morfismos.

Lema 1.15 *Sean $f : M \to N$ y $f' : N \to M$ morfismos tales que*

$$ff' = 1_N.$$

Entonces f es un epimorfismo, f' es un monomorfismo y

$$M = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f').$$

Demostración. Como f tiene inversa derecha, es suprayectiva y por lo tanto es un epimorfismo. Como f' tiene inversa izquierda, es inyectiva y por lo tanto es un monomorfismo. Sea $x \in M$. Entonces $f(x - f'(f(x))) = f(x) - f(x) = 0$, por lo que $x - f'(f(x)) \in \mathrm{Ker}(f)$. Además, $x = (x - f'(f(x))) + f'(f(x))$, de donde obtenemos que $x \in \mathrm{Im}(f') + \mathrm{Ker}(f)$, y por lo tanto $M = \mathrm{Im}(f') + \mathrm{Ker}(f)$. Para ver que la suma es directa, sea $y = f'(z) \in \mathrm{Im}(f') \cap \mathrm{Ker}(f)$. Entonces $0 = f(y) = f(f'(z)) = z$, por lo que $y = f'(z) = f'(0) = 0$. $\square$

Corolario 1.16 *Consideremos la sucesión exacta corta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1).- *Existe $f' : M \to M'$ tal que $f'f = 1_{M'}$.*

(2).- *Existe $g' : M'' \to M$ tal que $gg' = 1_{M''}$.*

(3).- *$M \cong M' \oplus M''$.*

Demostración. (3) $\Longrightarrow$ (2) y (3) $\Longrightarrow$ (1) son claros. (1) $\Longrightarrow$ (3) y (2) $\Longrightarrow$ (3) son por el Lema 1.15. $\square$

Definición 1.17 *Consideremos la sucesión exacta corta de R-módulos*

$$\eta : \qquad 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Diremos que la sucesión exacta corta η se **escinde** *si sucede cualquiera de las* 3 *condiciones equivalentes del Corolario 1.16.*

1.2.2. Módulos Proyectivos

Definición 1.18 *Sea $P \in R$*-Mod. *Diremos que P es* **proyectivo** *si cada que se tenga un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con el renglón de abajo exacto, existe un morfismo $\bar{f} : P \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.19 *Sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos y sea $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$. Entonces, P es proyectivo si y sólo si cada P_i es proyectivo.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que P es proyectivo. Sea $j \in I$. Supongamos que tenemos un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd} & P_j \arrow[d, "f_j"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

El morfismo f_j nos induce un morfismo $f : P \to M''$, $f((p_i)_{i\in I}) = f_j(p_j)$. Como P es proyectivo, existe $\bar{f} : P \to M$ tal que $f = g\bar{f}$. Sea $\bar{f}_j = \bar{f}\iota_j : P_j \to M$. Claramente tenemos que $f_j = g\bar{f}_j$. Por lo tanto P_j es proyectivo.

$\Longleftarrow$] Supongamos que cada P_i es proyectivo. Supongamos que tenemos un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definimos, para cada $i \in I$, $f_i = f\iota_i : P_i \to M''$. Como P_i es proyectivo, existe $\bar{f}_i : P_i \to M$ tal que $f_i = g\bar{f}_i$. Sea $\bar{f} = \bigoplus_{i\in I} \bar{f}_i$. Claramente se tiene que $f = g\bar{f}$. Por lo tanto P es proyectivo. $\square$

Definición 1.20 *Sea $M \in R$-Mod. Diremos que M es* **libre** *si existe un conjunto I tal que*

$$M \cong R^{(I)}$$

es decir, si M es isomorfo a la suma directa de I copias del anillo R.

Observación 1.21 *Para todo R-módulo M distinto de 0 existen un R-módulo libre L y un epimorfismo $\pi : L \to M$. En efecto, sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un conjunto de generadores de M. Entonces el morfismo*

$$\pi : R^{(I)} \to M$$

que se calcula por $\pi((r_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} r_i x_i$ es un epimorfismo.

Es claro que todo módulo libre es proyectivo, pues para dar un morfismo que salga de un módulo libre sólo tenemos que decir quiénes son las imágenes de los elementos de la base. No todo módulo proyectivo es libre, sin embargo, tenemos la siguiente proposición que caracteriza de distintas maneras a los módulos proyectivos.

Proposición 1.22 *Sea $P \in R$-Mod. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *P es proyectivo.*

(2) *Existe un R-módulo libre A tal que $A \cong P \oplus P'$.*

(3) *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \to M' \to M \to P \to 0$$

se escinde.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que tenemos una sucesión exacta corta

$$\eta: \quad 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0.$$

Tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "1_P"] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Al ser P proyectivo, existe $\bar{g}: P \to M$ tal que $g\bar{g} = 1_P$. Entonces la sucesión η se escinde.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ciertamente podemos encontrar un R-módulo libre A y un epimorfismo $g: A \to P$. Sea $P' = \mathrm{Ker}(g)$. Por hipótesis la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P' \hookrightarrow A \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

se escinde. Por lo tanto $A \cong P \oplus P'$.

2) $\Rightarrow$ 1) Todo módulo libre es proyectivo. El resultado entonces se sigue de la Proposición 1.19. □

1.2.3. Módulos Hereditarios

Definición 1.23 *Sea P un R-módulo proyectivo. Diremos que P es* **hereditario** *si todo submódulo de P es proyectivo.*

Los módulos hereditarios forman una subclase importante de la clase de los módulos proyectivos. De la definición se sigue que todo submódulo de un módulo hereditario es también hereditario, es decir, la clase de los módulos hereditarios es cerrada bajo submódulos, algo que, en general, no sucede con la clase de módulos proyectivos. Al igual que la clase de los módulos proyectivos, la clase de los módulos hereditarios es cerrada bajo sumas directas. Sin embargo, esto no es tan fácil de demostrar. Para hacerlo, necesitamos primero el siguiente resultado.

Lema 1.24 *Sean $M \in R$-Mod y $(I, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Supongamos que $\{M(\alpha) | \alpha \in I\}$ es una colección de submódulos de M tal que $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$ si $\alpha < \beta$ y que cumple que $\bigcup_{\alpha \in I} M(\alpha) = M$. Para cada $\alpha \in I$, sea*

$$\bar{M}(\alpha) := \bigcup_{\beta < \alpha} M(\beta).$$

Si $\widehat{M}(\alpha) := M(\alpha)/\bar{M}(\alpha)$ es proyectivo para toda α, entonces $M \cong \bigoplus_{\alpha \in I} \widehat{M}(\alpha)$.

Demostración. Como $\widehat{M}(\alpha)$ es proyectivo, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \bar{M}(\alpha) \hookrightarrow M(\alpha) \longrightarrow \widehat{M}(\alpha) \longrightarrow 0$$

se escinde, y por lo tanto $M(\alpha) = \bar{M}(\alpha) \oplus M_\alpha$, con $M_\alpha \cong \widehat{M}(\alpha)$. Veamos que

$$M \cong \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha.$$

Sea $T = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha$. Supongamos que $T \neq M$. Como $\bigcup_{\alpha \in I} M(\alpha) = M$ e I está bien ordenado, existe $\gamma \in I$ mínima tal que $M(\gamma) \not\subset T$. Como para todo $\beta < \gamma$ tenemos que $M(\beta) \subseteq T$, entonces $\widehat{M}(\gamma) \subseteq T$. Además, claramente $M_\gamma \subseteq T$. Por lo tanto, $M(\gamma) = \widehat{M}(\gamma) \oplus M_\gamma \subseteq T$, una contradicción. Se sigue entonces que $M = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha$.

Falta ver que la suma es directa. Supongamos que $m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_n} = 0$, con $m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. Entonces $m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_{n-1}} \in \bigcup_{i=1}^{n-1} M_{\alpha_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} M(\alpha_i) \subseteq \widehat{M}_{\alpha_n}$. Por lo tanto

$$m_{\alpha_n} = -(m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_{n-1}}) \in M_{\alpha_n} \cap \bar{M}(\alpha_n) = 0$$

Se sigue que $m_{\alpha_i} = 0$ para toda i. Por lo tanto,

$$M = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \cong \bigoplus_{\alpha \in I} \widehat{M}(\alpha).$$

□

Lema 1.25 *Sean $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de módulos hereditarios, y $P = \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$. Si M es un submódulo de P, entonces para cada $\alpha \in I$ existe un submódulo M_α de P_α tal que:*

$$M \cong \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha.$$

Y, por lo tanto, P es hereditario.

Demostración. Sea $M \subseteq P$ un submódulo. Para cada $\alpha \in I$, sea $\pi_\alpha : P \to P_\alpha$ la proyección natural. Por el axioma de elección, damos un buen orden al conjunto I y, para cada $p \in P$, $p \neq 0$, sea $d(p) := \max\{\alpha \in I \mid \pi_\alpha(p) \neq 0\}$. Dicho máximo siempre existe, pues el conjunto $\{\alpha \in I \mid \pi_\alpha(p) \neq 0\}$ es finito. Definimos, además, $d(0) = x$, con la propiedad $x < i$ para todo $i \in I$.

Para cada $\alpha \in I$, sea $M(\alpha) = \{p \in M \mid d(p) \leq \alpha\}$. Son consecuencias directas de la definición que: para todo $\alpha \in I$, $M(\alpha)$ es un submódulo de M; que $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$ si $\alpha < \beta$; y que $\bigcup_{\alpha \in I} M(\alpha) = M$. Utilizando la notación del lema anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \bar{M}(\alpha) \hookrightarrow M(\alpha) \xrightarrow{\pi_\alpha} \pi_\alpha(M(\alpha)) \longrightarrow 0.$$

Como $\pi_\alpha(M(\alpha)) \subseteq P_\alpha$, $\pi_\alpha(M(\alpha))$ es proyectivo. Podemos entonces aplicar el Lema 1.24. Por lo tanto

$$M \cong \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha(M(\alpha))$$

Se sigue que M es proyectivo. Entonces, P es hereditario. $\square$

Corolario 1.26 *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *R es hereditario como R-módulo izquierdo.*

(2) *Todo módulo proyectivo es hereditario.*

Demostración. (2) $\Longrightarrow$ (1) es claro. Para (1) $\Longrightarrow$ (2), observamos que por el Lema 1.25 todo R-módulo libre es hereditario. Sea P un módulo proyectivo, y sea $P' \subseteq P$ un submódulo. Existe P'' tal que $P \oplus P'' \cong M$, con M un módulo libre y, por lo tanto, hereditario. Podemos entonces considerar a P' como un submódulo de M, de donde se sigue que P' es proyectivo y por lo tanto P es hereditario. $\square$

1.3. Anillos de Endomorfismos

Sea M un R-módulo izquierdo. $\mathrm{End}_R(M)$ tiene una estructura de anillo asociativo con 1, donde la multiplicación está dada por la composición de morfismos. En esta sección, veremos la conexión que existe entre la estructura de M y la de $\mathrm{End}_R(M)$.

Definición 1.27 *Sea R un anillo y sea $e \in R$. Diremos que e es* **idempotente** *si $e^2 = e$.*

Lema 1.28 *Sea e un idempotente en $\mathrm{End}_R(M)$. Entonces $1_M - e$ también es idempotente, y se cumple además que*

$$\mathrm{Ker}(e) = \mathrm{Im}(1_M - e), \quad \mathrm{Ker}(1_M - e) = \mathrm{Im}(e)$$

y $M = e(M) \oplus (1_M - e)(M)$.

Demostración. Es claro que $1_M - e$ es idempotente. Además, como $e(1_M - e) = (1_M - e)e = 0$, tenemos que

$$\mathrm{Im}(e) \subseteq \mathrm{Ker}(1_M - e) \text{ y que } \mathrm{Im}(1_M - e) \subseteq \mathrm{Ker}(e).$$

Pero como, para todo $x \in M$ se tiene que $x = e(x) + (1_M - e)(x)$, obtenemos las inclusiones que nos faltan y además que $M = e(M) + (1_M - e)(M)$. Falta ver que la suma es directa. Sea $y \in e(M) \cap (1_M - e)(M)$. Entonces $y = e(z) = (1_M - e)(w)$. Luego $e(z) = e^2(z) = e((1_M - e)(w)) = 0$. Por lo tanto $y = 0$ y $M = e(M) \oplus (1_M - e)(M)$. □

Lema 1.29 *Supongamos que $M = M_1 \oplus M_2$. Entonces, existe un idempotente $e_1 \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $M_1 = e_1(M)$ y $M_2 = (1_M - e_1)(M)$.*

Demostración. Tenemos que a todo elemento de M lo podemos ver de la forma $m = (m_1, m_2)$, con $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$. Sea $e_1((m_1, m_2)) = (m_1, 0)$. Es fácil ver que e_1 cumple lo deseado. □

Corolario 1.30 *Sea M un R-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo. Entonces, N es un sumando directo de M si y sólo si existe un idempotente $e \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $e(M) = N$.*

Demostración. La necesidad se sigue de 1.28 y la suficiencia de 1.29 □

Definición 1.31 *Sea e un idempotente en un anillo R. Diremos que e es* **primitivo** *si $e \neq 0$ y, si e_1 y e_2 son idempotentes tales que $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ y $e_1+e_2 = e$, entonces $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$.*

Definición 1.32 *Sea M un R-módulo izquierdo. Diremos que M es* **inescindible** *si $M \neq 0$ y, si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$.*

Proposición 1.33 *Sea M un R-módulo izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *M es inescindible.*

(2) *$M \neq 0$, y 0 y 1_M son los únicos idempotentes en $\mathrm{End}_R(M)$.*

(3) *1_M es un idempotente primitivo en $\mathrm{End}_R(M)$.*

Demostración. (2) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que M no es inescindible, es decir, que $M = M_1 \oplus M_2$ con $M_1, M_2 \neq 0$. Por el Lema 1.29 existe $e \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotente tal que $M_1 = e(M)$. Entonces e es un idempotente distinto de 0 y 1_M.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supongamos que existe $e \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotente distinto de 0 y 1_M. Entonces, por el Lema 1.28 tenemos que $M = e(M) \oplus (1_M - e)(M)$. Como $e \neq 0$, se tiene que $e(M) \neq 0$. Como $e \neq 1$, obtenemos que $(1_M - e)(M) \neq 0$. Por lo tanto M no es inescindible.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Esto es claro.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Si M no es inescindible, entonces $M = M_1 \oplus M_2$, con $M_1 \neq 0$ y $M_2 \neq 0$. Por el Lema 1.29 existe $e \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $M_1 = e(M)$, $M_2 = (1_M - e)(M)$. Pero entonces $1_M = e + (1_M - e)$ y $e(1_M - e) = (1_M - e)e = 0$, es decir, 1_M no es un idempotente primitivo. □

Corolario 1.34 *Sea e un idempotente en el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_R(M)$. Entonces $e(M)$ es un sumando directo inescindible de M si y sólo si e es un idempotente primitivo en $\mathrm{End}_R(M)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Si e no es primitivo, entonces $e = e_1 + e_2$ con $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ y $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Luego $e(M) = e_1(M) \oplus e_2(M)$, por lo que $e(M)$ no es inescindible.

$\Longleftarrow$] Se sigue de la Proposición 1.33 aplicada al anillo $\mathrm{End}_R(e(M))$. □

Ahora bien, si recordamos que existe un isomorfismo natural $R \cong \mathrm{End}_R(R)^{\mathrm{op}}$, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.35 *Sea R un anillo. Entonces un ideal izquierdo I es un sumando directo de R como R-módulo izquierdo si y sólo si $I = Re$, con $e \in R$ idempotente. Más aún, I es inescindible si y sólo si e es primitivo.*

1.4. Módulos Semisimples

Definición 1.36 *Sea S un R-módulo izquierdo distinto de 0. Diremos que S es* **simple** *si sus únicos submódulos son 0 y S.*

Denotaremos por R-Simp al conjunto completo de clases de isomorfismo de R-módulos simples.

Definición 1.37 *Sea M un R-módulo izquierdo. Diremos que M es* **semisimple** *si existe una colección $\{S_i\}_{i\in I}$ de submódulos simples de M tal que*

$$M = \sum_{i\in I} S_i.$$

Lema 1.38 *Sea M un módulo semisimple, es decir, existe una colección $\{S_i\}_{i\in I}$ de submódulos simples de M tal que*

$$M = \sum_{i\in I} S_i.$$

Entonces, para cada submódulo K de M existe $J \subseteq I$ tal que

$$M = K \oplus (\bigoplus_{j\in J} S_j).$$

Demostración. Sea K un submódulo de M. Usando el Lema de Zorn se puede probar que existe un subconjunto $J \subseteq I$ máximo con la propiedad que $\sum_{j\in J} S_j = \bigoplus_{j\in J} S_j$ y $K \cap (\sum_{j\in J} S_j) = 0$. Sea

$$N = K \oplus (\bigoplus_{j\in J} S_j).$$

Veremos que $N = M$. Sea $i \in I$. Como S_i es simple, se tiene que $S_i \cap N = S_i$ ó $S_i \cap N = 0$. Si $S_i \cap N = 0$ entonces $J \cup \{i\}$ es un conjunto estrictamente mayor que J que también cumple la propiedad con la que J era máximo, una contradicción. Por lo tanto $S_i \subseteq N$ para todo $i \in I$, lo que nos dice que $N = M$. $\square$

Corolario 1.39 *Sea M un R-módulo. Entonces, M es semisimple si y sólo si existe una familia $\{S_i\}_{i\in I}$ de R-módulos simples tal que $M \cong \bigoplus_{i\in I} S_i$.*

Demostración. $\Rightarrow$]Hacemos $K = 0$ en el lema anterior.

$\Leftarrow$] Es claro. $\square$

Proposición 1.40 *Sea M un R-módulo semisimple, es decir $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$ con S_i simple para todo i. Si*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces la sucesión se escinde y existe un subconjunto $B \subseteq I$ tal que

$$N \cong \bigoplus_{\beta\in B} S_\beta \quad y \quad K \cong \bigoplus_{j\in I\setminus B} S_j.$$

De donde se sigue que N y K son semisimples.

Demostración. Como $\operatorname{Im} f$ es un submódulo de M, por el Lema 1.38 existe un subconjunto $B \subseteq I$ tal que

$$M = \operatorname{Im} f \oplus \bigoplus_{\beta\in B} S_\beta$$

De donde se sigue que la sucesión se escinde y que $N \cong M/\operatorname{Im} f \cong \bigoplus_{\beta\in B} S_\beta$. Además tenemos que $M = (\bigoplus_{\beta\in B} S_\beta) \oplus (\bigoplus_{j\in I\setminus B} S_j)$, de donde concluímos que $K \cong \operatorname{Im} f \cong \bigoplus_{j\in I\setminus B} S_j$. $\square$

El Lema 1.38 nos dice que todo submódulo de un módulo semisimple es sumando directo. De hecho, esta propiedad caracteriza a los módulos semisimples.

Proposición 1.41 *Sea M un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *M es semisimple.*

(2) *Para todo submódulo $N \subseteq M$, se tiene que N es un sumando directo de M.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) es por el Lema 1.38. Veamos (2) $\Longrightarrow$ (1). Demostremos primero que todo submódulo no cero de M tiene un submódulo simple. Sea pues $P \subseteq M$ un submódulo distinto de 0. Sea $p \in P$. Entonces $Rp \subseteq P \subseteq M$ es un submódulo. Por el Lema de Zorn, existe I un submódulo maximal de Rp. Por hipótesis, I es un sumando directo de M y por lo tanto de Rp, por lo que $Rp \cong I \oplus Rp/I$. Como I es maximal, Rp/I es simple, de donde obtenemos que Rp tiene submódulos simples y por lo tanto P tiene submódulos simples.

Sea $\{S_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ la familia de todos los submódulos simples de M. Sea $N = \sum_{i\in\mathcal{I}} S_i$. Entonces N es un submódulo de M y por lo tanto existe N' tal que $M = N \oplus N'$. Pero por la definición de N, N' no puede contener submódulos simples, por lo que llegamos a la conclusión que $N' = 0$ y $M = N$. Por lo tanto M es semisimple. □

Definición 1.42 *Sea R un anillo. Diremos que R es* **semisimple izquierdo** *si R es semisimple como módulo izquierdo sobre él mismo.*

Lema 1.43 *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

(1) *R es semisimple izquierdo.*

(2) *Todo R-módulo izquierdo es semisimple.*

Demostración. (2) $\Longrightarrow$ (1) es claro. La prueba de (1) $\Longrightarrow$ (2) se sigue, observando que sumas directas de módulos semisimples son semisimples y de la Proposición 1.40. □

1.5. Radical de Jacobson

Definición 1.44 *El* **radical de Jacobson** *de un anillo R es la intersección de todos los ideales izquierdos maximales de R. Denotaremos por* $\mathrm{rad}(R)$ *al radical de Jacobson de R. De manera similar, definimos el radical de Jacobson de un R-módulo M como la intersección de todos los submódulos maximales de M. Si M no tiene submódulos maximales, entonces definimos su radical de Jacobson como M. Denotaremos por* $\mathrm{rad}(M)$ *al radical de Jacobson de M.*

Observación 1.45 *Un anillo R distinto de 0 siempre tiene ideales izquierdos maximales. En efecto, sea $x \in R$ tal que x no tiene inverso izquierdo. Entonces $Rx \subsetneq R$, y por lo tanto el conjunto $\mathcal{S} := \{I \subsetneq R \mid I \text{ es un ideal izquierdo y } x \in I\}$ es no vacío. Es fácil ver que este conjunto satisface las hipótesis del lema de Zorn, por lo que tiene elementos maximales, y un elemento maximal en $\mathcal{S}$ será un ideal maximal de R. De hecho, acabamos de demostrar que todo elemento de R que no tiene inverso izquierdo está contenido en un ideal izquierdo maximal de R. Por otro lado, no siempre es cierto que un R-módulo M tenga submódulos maximales (un ejemplo es el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$). En este caso, se tiene que* $\mathrm{rad}(M) = M$. *De hecho, de la definición se sigue que* $\mathrm{rad}(M) = M$ *si y sólo si M no tiene submódulos maximales.*

Veamos primero ciertas caracterizaciones del radical de Jacobson de un anillo R.

Lema 1.46 *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $a \in \operatorname{rad}(R)$.

(1') *a está en la intersección de todos los ideales maximales derechos de R.*

(2) *Para todo $b \in R$, el elemento $1 - ba$ es invertible.*

(2') *Para todo $b \in R$, el elemento $1 - ba$ tiene inverso izquierdo.*

(3) *Para todo $b \in R$, el elemento $1 - ab$ es invertible.*

(3') *Para todo $b \in R$, el elemento $1 - ab$ tiene inverso derecho.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2′) Supongamos que el elemento $1 - ba$ no tiene inverso izquierdo. Entonces existe un ideal izquierdo maximal I tal que $1 - ba \in I$. Por otro lado, como $a \in \operatorname{rad}(R)$ y $\operatorname{rad}(R)$ es un ideal izquierdo de R, entonces $ba \in \operatorname{rad}(R) \subseteq I$. Por lo tanto, $1 \in I$, una contradicción.

(1′) $\Longrightarrow$ (3′) Es similar al anterior.

(2′) $\Longrightarrow$ (1) Supongamos que $a \notin \operatorname{rad}(R)$. Entonces, existe un ideal maximal izquierdo I de R tal que $a \notin I$. Por lo tanto, $R = I + Ra$. Se sigue que existen $x \in I$ y $b \in R$ tal que $1 = x + ba$. Pero entonces $1 - ba = x \in I$, de donde se sigue que $1 - ba$ no tiene inverso izquierdo, una contradicción.

(3′) $\Longrightarrow$ (1′) Similar al anterior.

(3) $\Longleftrightarrow$ (2) Se sigue de las dos siguientes observaciones:

1. Si $(1 - ab)x = 1$, entonces $(1 - ba)(1 + bxa) = 1 + bxa - ba - babxa = 1 + b(xa - a - abxa) = 1 + b(x - 1 - abx)a = 1$, pues $x - abx = 1$.
2. Si $y(1 - ab) = 1$, entonces $(1 + bya)(1 - ba) = 1 + bya - ba - byaba = 1 + b(ya - a - yaba) = 1 + b(y - 1 - yab) = 1$, pues $y - yab = 1$.

(3′) $\Longrightarrow$ (3) Por (3′), existe $x \in R$ tal que $(1 - ab)x = 1$. Entonces $x = 1 - a(-bx)$ y, por c'), existe $d \in R$ tal que $1 = xd = d + abxd = d + ab$. Entonces $d = 1 - ab$ y por lo tanto x es inverso izquierdo de $(1 - ab)$. Por lo tanto, x es inverso de $1 - ab$.

(2′) $\Longrightarrow$ (2) Similar al anterior.

(2) $\Longrightarrow$ (2′) y (3) $\Longrightarrow$ (3′) son triviales. La prueba está completa. □

De (1) y (1′) del Lema 1.46 tenemos que $\operatorname{rad}(R)$ es un ideal bilateral de R. Además tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.47 *Sea I un ideal bilateral nilpotente de R (es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$). Entonces $I \subseteq \operatorname{rad}(R)$.*

Demostración. Sea $a \in I$. Como I es nilpotente, para todo $x \in R$ tenemos que $(xa)^n = 0$. Se tiene que $(1 - xa)(1 + (xa) + (xa)^2 + \dots) = 1$. Por lo tanto, $a \in \operatorname{rad}(R)$. □

Lema 1.48 *Sea $M \in R$-Mod. Entonces*

$$\operatorname{rad}(M) = \bigcap\{\operatorname{Ker}(f) \mid f \in \operatorname{Hom}_R(M, S), S \in R\text{-}\operatorname{Simp}\}$$

Demostración. Sea S un R-módulo simple. Entonces, para todo $f \in \operatorname{Hom}_R(M, S)$ se tiene que $\operatorname{Im}(f) = 0$ ó $\operatorname{Im}(f)$ es simple. Esto muestra que $\operatorname{Ker}(f)$ es M ó un submódulo maximal de M. El resultado se sigue de notar que, si M' es un submódulo maximal de M, entonces M/M' es simple. □

Corolario 1.49 *Sea $M \in R$-Mod. Entonces $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M)) = 0$.*

Demostración. Sea $x+\operatorname{rad}(M) \in \operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M))$. Entonces, $f(x+\operatorname{rad}(M)) = 0$ para toda $f : M/\operatorname{rad}(M) \to S$, con $S \in R$-Simp. Sea $g : M \to S$. Como $\operatorname{rad}(M) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$, podemos factorizar a g a través de $M/\operatorname{rad}(M)$. Por lo tanto $g(x) = 0$ y $x + \operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(M) = 0_{M/\operatorname{rad}(M)}$. □

Corolario 1.50 *Sean $M, N \in R$-Mod, $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$. Entonces $f(\operatorname{rad}(M)) \subseteq \operatorname{rad}(N)$.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{rad}(M)$ y supongamos que $f(x) \notin \operatorname{rad}(N)$. Por el Lema 1.48, existe $g : N \to S$, con S simple, tal que $f(x) \notin \operatorname{Ker}(g)$. Entonces $x \notin \operatorname{Ker}(gf)$, una contradicción. □

Corolario 1.51 *Sean $M, N \in R$-Mod. Entonces $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad}(M) \oplus \operatorname{rad}(N)$.*

Demostración. Por el Corolario 1.50,

$$\iota_M(\operatorname{rad}(M)) \subseteq \operatorname{rad}(M \oplus N) \quad \text{e} \quad \iota_N(\operatorname{rad}(N)) \subseteq \operatorname{rad}(M \oplus N),$$

donde ι denota la inclusión. Notando que $\iota_M(\operatorname{rad}(M)) = \operatorname{rad}(M) \oplus 0$ y que $\iota_N(\operatorname{rad}(N)) = 0 \oplus \operatorname{rad}(N)$ tenemos que $\operatorname{rad}(M) \oplus \operatorname{rad}(N) \subseteq \operatorname{rad}(M \oplus N)$. Por otro lado, $\pi_M(\operatorname{rad}(M \oplus N)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$ y $\pi_N(\operatorname{rad}(N)) \subseteq \operatorname{rad}(N)$, donde π denota a la proyección. Entonces $\operatorname{rad}(M \oplus N) \subseteq \operatorname{rad}(M) \oplus \operatorname{rad}(N)$. Por lo tanto, $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad}(M) \oplus \operatorname{rad}(N)$.□

Lema 1.52 (Nakayama) *Sea M un R-módulo finitamente generado. Si $\operatorname{rad}(R)M = M$, entonces $M = 0$.*

Demostración. Sea M un R-módulo finitamente generado tal que $\operatorname{rad}(R)M = 0$, y supongamos que $M \neq 0$. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de generadores de M de tamaño mínimo. Como $\operatorname{rad}(R)M = M$, se tiene que existen $r_1, \dots, r_n \in \operatorname{rad}(R)$ tal que

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i.$$

Pero entonces tenemos que

$$(1 - r_n)x_n = -\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i x_i\right).$$

Por el Lema 1.46, existe $a \in R$ tal que $a(1 - r_n) = 1$, entonces

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a r_i x_i.$$

Lo que contradice el hecho de que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es de tamaño mínimo. Por lo tanto $M = 0$. $\square$

Tenemos otra caracterización, del radical de Jacobson de un módulo, que nos será muy útil más adelante. Para esta caracterización, primero tenemos que dar la siguiente definición.

Definición 1.53 *Sea M un R-módulo y $0 \neq N \subseteq M$ un submódulo. Diremos que N es* **superfluo** *en M si $N + L = M$ implica que $L = M$. Escribiremos $N \ll M$ para decir que N es superfluo en M.*

Proposición 1.54 *Sea M un R-módulo. Entonces,*

$$\mathrm{rad}(M) = \sum\{N \mid N \ll M\}.$$

Demostración. Sea $N \ll M$. Si K es un submódulo maximal de M y $N \nsubseteq K$ entonces $N + K = M$, una contradicción. Por lo tanto

$$\sum\{N \mid N \ll M\} \subseteq \mathrm{rad}(M).$$

Ahora, sea $x \in \mathrm{rad}(M)$. Si existe $L \subset M$ un submódulo propio de M tal que $Rx + L = M$, entonces la familia $\{I \subsetneq M \mid L \subseteq I \,\mathrm{y}\, x \notin I\}$ es no vacía y, por el Lema de Zorn, tiene elementos maximales. Entonces existe un submódulo maximal de M que no contiene a x, una contradicción. Entonces $Rx \ll M$, y obtenemos la contención que nos faltaba. $\square$

Corolario 1.55 *Sea M un R-módulo semisimple. Entonces* $\mathrm{rad}(M) = 0$.

Demostración. Como todo submódulo distinto de 0 es sumando directo de M, entonces M no tiene submódulos superfluos distintos de 0. $\square$

1.6. Condiciones de Cadena

1.6.1. Módulos Artinianos

Definición 1.56 *Sea $M \in R$-*Mod*. Diremos que M es* **artiniano** *si satisface la condición descendente de cadena, es decir, si para toda cadena $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$ de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_{n+t}$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Diremos que un anillo R es* **artiniano izquierdo** *si es artiniano como módulo izquierdo sobre él mismo.*

Proposición 1.57 *Sea $M \in R$-Mod y $N \subseteq M$ un submódulo. Entonces M es artiniano si y sólo si N y M/N son artinianos.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que M es artiniano. Sea $N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ una cadena de submódulos de N. Esta es también una cadena de submódulos de M y por lo tanto se detiene. Entonces N es artiniano. Ahora, toda cadena descendente de submódulos de M/N corresponde a una cadena descendente de submódulos de M que contienen a N, por lo que debe ser estacionaria. Por lo tanto M/N es artiniano.

$\Longleftarrow$] Supongamos que N y M/N son artinianos. Sea $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ una cadena de submódulos de M. Consideremos las cadenas $M_0 \cap N \supseteq M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \dots$ de N y $(M_0+N)/N \supseteq (M_1+N)/N \supseteq (M_2+N)/N \supseteq \dots$ de M/N. Como N es artiniano, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{n_1} \cap N = M_{n_1+i} \cap N$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como M/N es artiniano, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $(M_{n_2} + N)/N = (M_{n_2+i} + N)/N$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $n := \max\{n_1, n_2\}$. Entonces, para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $M_n \cap N = M_{n+1} \cap N$ y $M_n + N = M_{n+i} + N$. Ahora bien, se tiene que para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M_n &= M_n \cap (M_n + N) \\ &= M_n \cap (M_{n+i} + N) \\ &= M_{n+i} + (M_n \cap N) \\ &= M_{n+i} + (M_{n+i} \cap N) \\ &= M_{n+i}. \end{aligned}$$

de donde obtenemos que M es artiniano. $\square$

Corolario 1.58 *Sea $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$. Entonces, M es artiniano si y sólo si M_i es artiniano para todo $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Aplicamos el lema anterior a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

e inducción. $\square$

Corolario 1.59 *Sea R un anillo artiniano izquierdo. Entonces todo R-módulo finitamente generado es artiniano.*

Demostración. Se sigue directamente de la Proposición 1.57 y el Corolario 1.58. $\square$

Tenemos una conexión entre módulos artinianos y módulos semisimples mediante el radical de Jacobson.

Proposición 1.60 *Sea M un R-módulo. Son equivalentes:*

(1) *M es artiniano y* $\mathrm{rad}(M) = 0$.

(2) *M es una suma directa finita de módulos simples.*

Demostración. (2) $\Longrightarrow$ (1) se sigue de los Corolarios 1.58 y 1.51.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Como $\operatorname{rad}(M) = \bigcap\{\operatorname{Ker}(f) \mid f : M \to S, S\,\text{simple}\} = 0$, existe un conjunto $\{S_i\}_{i\in I}$ de módulos simples y un monomorfismo

$$f = (f_i)_{i\in I} : M \to \prod_{i\in I} S_i.$$

Ahora bien, sea $\mathcal{S} := \{\bigcap_{j\in J} \operatorname{Ker}(f_j) \mid J \subset I\,\text{es finito}\}$. Como M es artiniano, toda cadena descendente en $\mathcal{S}$ se estaciona y, por el Lema de Zorn, $\mathcal{S}$ tiene elementos mínimos. Existe entonces $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{j\in J} \operatorname{Ker}(f_j) = 0$. Ponemos $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ y por lo tanto tenemos un monomorfismo

$$M \to \prod_{k=1}^{n} S_{i_k} = \bigoplus_{k=1}^{n} S_{i_k}.$$

El resultado ahora se sigue de la Proposición 1.40. $\square$

Corolario 1.61 *Sea M un módulo artiniano. Entonces $M/\operatorname{rad}(M)$ es una suma directa finita de módulos simples.*

Demostración. Por la Proposición 1.57, $M/\operatorname{rad}(M)$ es artiniano. Por el Corolario 1.49, $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M)) = 0$. El resultado entonces se sigue de la Proposición 1.60. $\square$

Otro corolario más de la Proposición 1.60 es que, si R es un anillo artiniano, para conocer el radical de Jacobson de todo R-módulo M, sólo hace falta conocer el radical de Jacobson de R.

Corolario 1.62 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Entonces $\operatorname{rad}(R)M \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Si además R es artiniano, entonces $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(R)M$.*

Demostración. Sea $m \in M$. Definimos el morfismo $f : R \to M$ por $r \mapsto rm$. Por el Corolario 1.50, se tiene que $f(\operatorname{rad}(R)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$, es decir, que $\operatorname{rad}(R)m \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Por lo tanto $\operatorname{rad}(R)M \subseteq \operatorname{rad}(M)$.

Si R es artiniano, por la Proposición 1.60, $\bar{R} = R/\operatorname{rad}(R)$ es un R-módulo semisimple y por lo tanto es un $\bar{R}$-módulo semisimple, es decir, es un anillo semisimple. Sea $\bar{M} = M/\operatorname{rad}(R)M$. Como $\operatorname{rad}(R)\bar{M} = 0$, podemos considerar a $\bar{M}$ como un $\bar{R}$-módulo, que será semisimple por el Lema 1.43. Entonces $\operatorname{rad}_{\bar{R}}(\bar{M}) = 0$, donde $\operatorname{rad}_{\bar{R}}$ denota al radical de M cuando es visto como $\bar{R}$-módulo. Esto implica, por el Lema 1.48, que para todo $x \in \bar{M}$, $x \neq 0$, existe un morfismo de $\bar{R}$-módulos $f : \bar{M} \to S$, con S simple, tal que $f(x) \neq 0$. Este morfismo es también un morfismo de R-módulos pues $\operatorname{rad}(R)S \subseteq \operatorname{rad}(S) = 0$. Si hacemos la composición

$$M \xrightarrow{\pi} \bar{M} \xrightarrow{f} S$$

tenemos que $f\pi(x) \neq 0$, por lo que $x \notin \operatorname{rad}(M)$. Por lo tanto $\operatorname{rad}(M) \subseteq \operatorname{rad}(R)M$. $\square$

Corolario 1.63 *Sea R un anillo artiniano izquierdo. Entonces* $\mathrm{rad}(R)$ *es el mayor ideal nilpotente de R.*

Demostración. Primero observamos que, por el Lema de Nakayama y el Corolario 1.62, si M es un R-módulo finitamente generado y distinto de 0, entonces $\mathrm{rad}(M) = \mathrm{rad}(R)M \subsetneq M$, por lo que M tiene submódulos maximales.

Ahora, en vista del Corolario 1.47, bastará probar que $\mathrm{rad}(R)$ es nilpotente. Como R es artiniano izquierdo la cadena de ideales

$$\mathrm{rad}(R) \supseteq \mathrm{rad}(R)^2 \supseteq \mathrm{rad}(R)^3 \supseteq \dots$$

se estaciona, digamos en $\mathrm{rad}(R)^n$. Supongamos que $\mathrm{rad}(R)^n \neq 0$. Entonces la colección $\mathcal{S} := \{I \subseteq R \mid I \text{ es un ideal izquierdo de } R \text{ y } \mathrm{rad}(R)^n I \neq 0\}$ es no vacía, pues en particular $\mathrm{rad}(R) \in \mathcal{S}$. Utilizando el hecho de que R es artiniano izquierdo y el Lema de Zorn, existe $I \in \mathcal{S}$ minimal. Sea $x \in I$ tal que $\mathrm{rad}(R)^n x \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{rad}(R)^n(\mathrm{rad}(R)x) = \mathrm{rad}(R)^{n+1}x = \mathrm{rad}(R)^n x \neq 0$$

Como I es minimal en $\mathcal{S}$ se tiene que $\mathrm{rad}(R)x = Rx = I$. Entonces $Rx = \mathrm{rad}(R)x = \mathrm{rad}(R)Rx$, lo que contradice al Lema de Nakayama. Por lo tanto $\mathrm{rad}(R)^n = 0$. □

1.6.2. Módulos Noetherianos

Definición 1.64 *Sea $M \in R$-*Mod*. Diremos que M es* **noetheriano** *si satisface la condición ascendente de cadena, es decir, si para toda cadena $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_{n+t}$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Diremos que un anillo R es* **noetheriano izquierdo** *si es noetheriano como módulo izquierdo sobre él mismo.*

Análogamente a la Proposición 1.57 tenemos el siguiente resultado, el cual enunciaremos sin demostración, pues esta es muy parecida a la de la Proposición mencionada.

Proposición 1.65 *Sea M un R-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo. Entonces, M es noetheriano si y sólo si M y N/M son noetherianos.*

Corolario 1.66 *Sea $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Entonces, M es noetheriano si y sólo si M_i es noetheriano para todo $i = 1, \dots, n$.*

Corolario 1.67 *Sea R noetheriano izquierdo. Entonces todo módulo finitamente generado es noetheriano.*

Tenemos la siguiente caracterización de los módulos noetherianos, que nos será muy útil en un futuro.

Proposición 1.68 *Sea M un R-módulo. Son equivalentes:*

(1) *M es noetheriano.*

(2) *Todo submódulo de M es finitamente generado.*

(3) *Toda colección no vacía de submódulos de M tiene elementos máximos.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (3). Sea $\mathcal{S}$ una colección no vacía de submódulos de M. Como M es noetheriano, toda cadena $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ de elementos de $\mathcal{S}$ se estaciona, por lo que toda cadena de elementos de $\mathcal{S}$ tiene supremo en $\mathcal{S}$. El resultado se sigue de aplicar el Lema de Zorn.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Sea $N \subseteq M$ un submódulo. Sea

$$\mathcal{S} := \{N' \subseteq N \mid N' \text{ es finitamente generado}\}.$$

Claramente $\mathcal{S}$ es no vacía y por (3) $\mathcal{S}$ tiene elementos máximos. Sea K un máximo en $\mathcal{S}$. Tenemos que $K = N$ pues de lo contrario se contradice la maximalidad de K. Por lo tanto N es finitamente generado.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ una cadena de submódulos de M. Por hipótesis, $N := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ es finitamente generado, digamos por $\{x_1, \dots, x_m\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq M_n$. Entonces la cadena se detiene en n. $\square$

Corolario 1.69 *Sea M un módulo noetheriano. Entonces* $\operatorname{rad}(M) \ll M$.

Demostración. Como M es noetheriano, $\operatorname{rad}(M)$ es finitamente generado. Además, sabemos que $\operatorname{rad}(M) = \sum\{N \mid N \ll M\}$. Al ser $\operatorname{rad}(M)$ finitamente generado, es la suma de un número finito de submódulos superfluos de M, y por lo tanto es superfluo en M. $\square$

Quizá la propiedad más importante, respecto a módulos artinianos y/o noetherianos, que vamos a utilizar en este trabajo es el siguiente resultado.

Teorema 1.70 *Sea M un módulo artiniano o noetheriano. Entonces M se puede descomponer como suma directa de un número finito de sumandos directos inescindibles.*

Demostración. Sea M un módulo que no tiene una descomposición en un número finito de sumandos directos inescindibles, elegimos una descomposición

$$M = N \oplus M'$$

donde M' no tiene una descomposición en un número finito de sumandos directos inescindibles. Esto es posible pues como M no tiene descomposición en un número finito de sumandos directos inescindibles, entonces M no es inescindible y no podemos tener que N y M' tengan ambos descomposiciones en un número finito de sumandos directos inescindibles. De la misma manera descomponemos M' en

$$M' = N'' \oplus M''$$

donde M'' no tiene una descomposición en un número finito de sumandos directos inescindibles. Continuamos este proceso y entonces tenemos cadenas

$$N' \subset N' \oplus N'' \subset N' \oplus N'' \oplus N''' \subset \dots$$

$$M \supset M' \supset M'' \supset M''' \supset \dots$$

las cuales no se estabilizan, de donde obtenemos que M no es artiniano ni noetheriano. $\square$

Corolario 1.71 *Sea R un anillo artiniano izquierdo ó noetheriano izquierdo. Entonces, existe un conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ de ídempotentes ortogonales primitivos tales que $1 = e_1 + \cdots + e_n$.*

Veamos la conexión que existe entre una descomposición $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ en sumandos directos inescindibles y los anillos de endomorfismos de los sumandos M_i.

Definición 1.72 *Sea R un anillo. Diremos que R es* **local** *si R no es 0 y el conjunto de sus elementos no invertibles es cerrado bajo sumas.*

Lema 1.73 *Supongamos que $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ con cada M_i inescindible y $\operatorname{End}_R(M_i)$ local para todo i. Si además tenemos que $M \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$, con cada N_j inescindible y $\operatorname{End}_R(N_j)$ local para todo j, entonces $m = n$ y existe $\sigma \in S_n$ (el grupo de permutaciones de n elementos) tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para todo i.*

Demostración. Consideremos los siguientes morfismos:

$$\alpha_i : N_i \xrightarrow{\iota_{N_i}} M \xrightarrow{\pi_{M_1}} M_1,$$

$$\beta_i : M_1 \xrightarrow{\iota_{M_1}} M \xrightarrow{\pi_{N_i}} N_i;$$

donde ι y π denotan a las inclusiones y a las proyecciones, respectivamente. Tenemos que $1_{M_1} = \sum \alpha_i \beta_i$. Como $\operatorname{End}_R(M_1)$ es local, algún $\alpha_i \beta_i$ debe ser invertible. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1 \beta_1$ es invertible. Como M_1 y N_1 son inescindibles, debemos tener que α_1 y β_1 son invertibles. Ahora, sea $\mu = 1_M - \theta$, donde θ es la composíción de morfismos

$$\theta : M \xrightarrow{\pi_{M_1}} M_1 \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} N_1 \xrightarrow{\iota_{N_1}} M \xrightarrow{\pi_{\bigoplus_{i=2}^{n} M_i}} \bigoplus_{i=2}^{m} M_i \xrightarrow{\iota_{\bigoplus_{i=2}^{n} M_i}} M.$$

Se tiene que $\mu(N_1) = M_1$ y que $\mu(\bigoplus_{i=2}^{n} M_i) = \bigoplus_{i=2}^{m} M_i$, por lo que μ es sobre. Si $\mu(x) = 0$ entonces $x = \theta(x)$, por lo que $x \in \bigoplus_{i=2}^{n} M_i$. Pero θ aquí es inyectiva, por lo que $x = 0$. Tenemos entonces que μ es un automorfismo de M con $\mu(N_1) = M_1$ y por lo tanto

$$\bigoplus_{i=2}^{n} M_i \cong M/M_1 \cong M/N_1 \cong \bigoplus_{j=2}^{m} N_j.$$

El resultado ahora se sigue por inducción. □

Para poder utilizar el lema anterior, veamos un caso especial en el que $\mathrm{End}_R(M)$ es local. Para esto primero necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1.74 (Fitting) *Sea M un módulo artiniano y noetheriano. Entonces, para todo $f \in \mathrm{End}_R(M)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \mathrm{Im}(f^n) \oplus \mathrm{Ker}(f^n)$.*

Demostración. Como M es artiniano y noetheriano, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+i})$ y $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+i})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $x \in M$. Como $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{2n})$, existe $y \in M$ tal que $f^n(x) = f^{2n}(y)$. Entonces $x = f^n(y) + (x - f^n(y) \in \mathrm{Im}(f^n) + \mathrm{Ker}(f^n)$. Falta ver que la suma es directa. Sea $x \in \mathrm{Im}(f^n) \cap \mathrm{Ker}(f^n)$. Entonces $x = f^n(y)$ para algún y, y $f^n(x) = f^{2n}(y) = 0$. Por lo tanto $y \in \mathrm{Ker}(f^{2n}) = \mathrm{Ker}(f^n)$, lo que nos dice que $x = 0$. □

Corolario 1.75 *Sea M un módulo inescindible, artiniano y noetheriano. Entonces $\mathrm{End}_R(M)$ es local.*

Demostración. El Lema de Fitting nos dice que todo morfismo en $\mathrm{End}_R(M)$ es nilpotente ó invertible. Sea I un ideal maximal izquierdo de $\mathrm{End}_R(M)$ y elegimos $\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $\alpha \notin I$. Se sigue que $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{End}_R(M)\alpha + I$. Escribimos a $1_M = \lambda\alpha + \mu$, con $\mu \in I$. Como μ no es invertible, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^n = 0$. Entonces $(1_M + \mu + \cdots + \mu^{n-1})(\lambda\alpha) = (1_M + \cdots + \mu^{n-1})(1_M - \mu) = 1_M$. Esto nos dice que α no es nilpotente y por lo tanto es invertible. Se sigue entonces que I consiste en todos los elementos no invertibles de $\mathrm{End}_R(M)$ y, por lo tanto, que $\mathrm{End}_R(M)$ es local. □

Corolario 1.76 (Krull-Schmidt) *Sea R un anillo artiniano izquierdo y noetheriano izquierdo [1]. Sea M un R-módulo no nulo y finitamente generado. Entonces M tiene una descomposición, única salvo orden e isomorfismo, en sumandos directos inescindibles.*

Demostración. Se sigue del Lema 1.73 y el Corolario 1.75 □

1.7. Álgebras

Recordemos que, si k es un campo, entonces una k-álgebra es un k-espacio vectorial A junto con una multiplicación entre elementos de A que hace a A anillo y tal que es compatible con la multiplicación por elementos de k. Es decir, si $\kappa \in k$, $a_1, a_2 \in A$ se tiene

$$\kappa(a_1a_2) = (\kappa a_1)a_2$$

Se sigue que, si A es una k-álgebra con 1, tenemos un mapeo inyectivo de k a A dado por $\kappa \mapsto \kappa 1$. Diremos que A es de dimensión finita si A es de k-dimensión

[1] De hecho, sólo hace falta suponer que R es artiniano izquierdo. Un famoso teorema, que no demostramos aquí pues no nos es necesario, nos dice que todo anillo artiniano izquierdo es también noetheriano izquierdo. Una demostración de este teorema se puede encontrar en [1], Teorema 15.20

finita como espacio vectorial. Muchos de los resultados que hemos obtenido para anillos pueden extenderse para el caso en que tenemos una k-álgebra. Cuando no haya confusión sobre el campo, diremos simplemente álgebra en lugar de k-álgebra.

Lema 1.77 *Sea A una k-álgebra de dimensión finita. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *A es hereditaria.*

(2) *Para todo módulo P proyectivo inescindible y finitamente generado, todo submódulo maximal es proyectivo.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) En vista del Corolario 1.26, esto es claro.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea P un A-módulo proyectivo y finitamente generado. Sea $M \subseteq P$ un submódulo de P. Por inducción en $d = \dim_k(P)$, probaremos que M es proyectivo. Por el Corolario 1.26, esto bastará. Si $d = 1$, entonces $M = 0$ ó $M = P$, de donde se sigue que M es proyectivo. Ahora, supongamos que para todo módulo proyectivo P con $\dim_k(P) < n$ todo submódulo es proyectivo. Sea P proyectivo tal que $\dim_k(P) = n$. Escribimos a P como $P_1 \oplus P_2$, donde P_1 es inescindible y P_2 puede ser 0. Sea $\pi : P \to P_1$ la proyección canónica, y $\iota : M \to P$ la inyección canónica. Si $\pi(M) = P_1$, entonces $\pi\iota : M \to P_1$ es un epimorfismo y, como P_1 es proyectivo, existe M' tal que $M \cong P_1 \oplus M'$, con $M' \cong M \cap P_2 \subseteq P_2$. Como $dim_k(P_2) < n$, M' es proyectivo y por lo tanto M es proyectivo. Si $\pi(M) \neq P_1$, entonces $M \subseteq P_1' \oplus P_2$, donde P_1' es un submódulo maximal de P_1. Pero entonces $\dim_k(P_1' \oplus P_2) < n$ y por lo tanto M es proyectivo. $\square$

En un álgebra tenemos una caracterización más del radical de Jacobson.

Lema 1.78 *Sea I un ideal bilateral nilpotente de la k-álgebra A. Si A/I es isomorfa a $k \times k \times \cdots \times k$, un producto directo de copias de k, entonces se tiene que $I = \mathrm{rad}(A)$.*

Demostración. Del Corolario 1.47, sabemos que $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$. Como $A/I \cong k \times k \times \cdots \times k$, el Corolario 1.51 nos asegura que $\mathrm{rad}(A/I) = 0$. Por el Corolario 1.50, si $\pi : A \to A/I$ es la proyección canónica, entonces $\pi(\mathrm{rad}(A)) = 0$. Luego $\mathrm{rad}(A) \subseteq I$. $\square$

Y, si el campo k es algebraicamente cerrado tenemos una importante propiedad de los módulos simples.

Proposición 1.79 *Sea A una k-álgebra de dimensión finita, con k algebraicamente cerrado. Sea $S \in A$-Simp. Entonces $\mathrm{End}_A(S) \cong k$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{End}_A(S)$. Como S no tiene A-submódulos propios no triviales, si $\varphi \neq 0$ entonces $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = S$, por lo que φ es invertible. Ahora bien, como S es simple, está generado por cualquiera de sus elementos distintos de 0 y por lo tanto es finitamente generado como A-módulo. Como $\dim_k(A)$

es finita, $\dim_k(S)$ también lo es. Entonces $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$ son linealmente dependientes sobre k, por lo que existe un polinomio mónico irreducible $f(t) \in k[t]$ tal que $f(\varphi) = 0$. Como k es algebraicamente cerrado, $\deg(f) = 1$, es decir $f(t) = t + \lambda_\varphi$. Como $f(\varphi) = 0$, entonces $\varphi = \lambda_\varphi 1_S$. De aquí es claro que k y $\mathrm{End}_A(S)$ son isomorfos como k-álgebras. □

Por último, veamos que toda álgebra de dimensión finita es artiniana y noetheriana.

Lema 1.80 *Sea A un álgebra de dimensión finita. Entonces A es artiniana izquierda y noetheriana izquierda.*

Demostración. Como tenemos una función inyectiva $k \to A$, $\kappa \mapsto \kappa 1$, entonces todo ideal izquierdo de A es también un subespacio vectorial de A. Como A es de dimensión finita, toda cadena, ascendente o descendene, de ideales izquierdos de A, debe ser estacionaria. □

CAPÍTULO 2

Representaciones de Carcajes

2.1. Carcajes

Un carcaj es un objeto matemático muy sencillo. Básicamente, es una gráfica dirigida, a la que más de una vez consideraremos como una categoría donde los objetos son los vértices y los morfismos los caminos entre ellos.

Definición 2.1 *Un* **carcaj** *es una cuarteta $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donde Q_0 y Q_1 son conjuntos, y $s, t : Q_1 \to Q_0$ son funciones.*

A Q_0 le llamaremos el *conjunto de vértices* de Q y a Q_1 el *conjunto de flechas* de Q. Las funciones s y t nos indican los vértices inicial y final, respectivamente, de cada flecha. Denotaremos $\alpha : i \to j$ ó $i \xrightarrow{\alpha} j$ para decir que $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha) = i, t(\alpha) = j$. Si los conjunto Q_0 y Q_1 son finitos, diremos que el carcaj es finito.

Un *camino* en Q de longitud n es una concatenación de flechas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Para tener esto, necesitamos que $s(\alpha_m) = t(\alpha_{m-1})$ si $m = 2, \ldots, n$. Denotaremos por:

$$(j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$$

al camino en Q que va de i a j. Notemos que $s(\alpha_1) = i$ y que $t(\alpha_n) = j$.

Definición 2.2 *Para $i \in Q_0$, definimos los siguientes subconjuntos de Q_0:*

$$\mathbb{S}_i := \{j \in Q_0 \mid \exists n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ y un camino } (j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)\},$$

$$\mathbb{P}_i := \{j \in Q_0 \mid \exists n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ y un camino } (i|\beta_n, \ldots, \beta_1|j)\}.$$

Es decir, $\mathbb{S}_i$ son los sucesores de i y $\mathbb{P}_i$ son los predecesores de i. Similarmente, si $X \subseteq Q_0$ definimos:

$$\mathbb{S}(X) = \bigcup_{i \in X} \mathbb{S}_i,$$

$$\mathbb{P}(X) = \bigcup_{i \in X} \mathbb{P}_i.$$

A un carcaj Q también lo podemos considerar como una categoría, con objetos los vértices de Q y morfismos los caminos en Q, agregando, para cada vértice i, un morfismo identidad 1_i, que no tiene camino asociado. Así, $\mathbb{S}_i$ son los vértices en Q_0 para los cuales existen morfismos desde i distintos de 1_i, y $\mathbb{P}_i$ son los vértices en Q_0 que tienen morfismos hacia i distintos de 1_i.

Ejemplo 2.3 *Si* $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $s(\alpha_i) = 1, t(\alpha_i) = 2$ *para* $i \in \{1, 2, 3\}$*, entonces el carcaj es*

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[r, bend right, "\alpha_3"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}$$

A este carcaj, se le conoce como el 3-carcaj de Kronecker. Como categoría, tenemos que $\mathrm{Ob}(Q) = \{1, 2\}$, $\mathrm{Hom}_Q(1, 1) = \{1_1\}$, $\mathrm{Hom}_Q(2, 2) = \{1_2\}$, $\mathrm{Hom}_Q(1, 2) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *y* $\mathrm{Hom}_Q(2, 1) = \emptyset$.

Ejemplo 2.4 *Sean* $Q_0 = \{\bullet\}$ *y* $Q_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$*, flechas que necesariamente inician y terminan en* $\bullet$*. A este carcaj se le conoce como el* n*-Loop. Por ejemplo, el* 1*-Loop es:*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Como categoría, el 1*-Loop sólo tiene un objeto, a saber* $\bullet$*, y los morfismos de* $\bullet$ *a* $\bullet$ *son* $1_\bullet, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$.

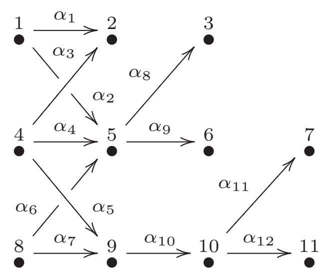
Definición 2.5 *Definimos el* **carcaj lineal de** n **puntos***,* $\mathcal{L}_n$*, que tiene como conjunto de vértices a* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *y como conjunto de flechas a* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$*, donde el vértice inicial de* α_i *es* i*, y su vértice final es* $i + 1$.

$$\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_1} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \overset{n-1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \overset{n}{\bullet}$$

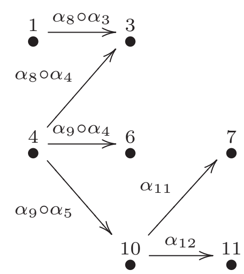
Recordemos que si tenemos una categoría $\mathcal{C}$ y un subconjunto $A \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ entonces la categoría plena generada por A, $\mathcal{C}_A$, es tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_A) = A$ y, si $A_1, A_2 \in A$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(A_1, A_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$.

Definición 2.6 *Dados un carcaj* Q *y un subconjunto* $X \subset Q_0$ *definimos el carcaj* $Q(X)$ *que, viendo a* Q *como categoría, es la subcategoría plena de* Q *generada por* X.

Ejemplo 2.7 *Sea Q el carcaj*



Si $X = \{1, 3, 4, 6, 7, 10, 11\}$ el carcaj $Q(X)$ es:



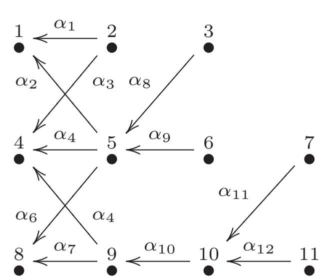
Otra manera de conseguir un carcaj, a partir de otro, es la noción de . Básicamente, uno obtiene el dual de un carcaj dado cambiando de dirección a las flechas del carcaj. Una definición más formal es,

Definición 2.8 *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. Denotaremos por*

$$Q^* = (Q_0^*, Q_1^*, s^*, t^*)$$

al **carcaj dual** *de Q. Es decir, Q^* es tal que $Q_0^* = Q_0$, $Q_1^* = Q_1$, $s^* = t$, $t^* = s$. Dicho de otra manera, el carcaj Q^* se obtiene de Q invirtiendo la dirección de las flechas.*

Ejemplo 2.9 *Sea Q el carcaj del Ejemplo 2.7. Entonces Q^* es*



2.2. Representaciones de Carcajes

A lo largo de esta sección, denotaremos por k a un campo fijo. Denotaremos por k-vect a la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita.

2.2.1. Definiciones básicas y ejemplos

Definición 2.10 *Sea Q un carcaj. Una* **k-representación** *de Q es un funtor $V : Q \to k$-vect. Cuando no haya confusión sobre el campo k, sólo diremos que V es una representación de Q.*

Como los morfismos en Q son los caminos, una representación V de Q no es más que una asignación $(V(i)_{i\in Q_0}, V(\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ donde, si $\alpha : i \to j$ entonces $V(\alpha) : V(i) \to V(j)$ es una transformación lineal.

Ejemplo 2.11 *Para todo carcaj Q existe la representación $\bar{0}$, que a cada vértice le asocia el espacio vectorial 0 y, por lo tanto, a cada flecha el morfismo 0.*

Ejemplo 2.12 *Sea Q el 1-Loop. Entonces, una representación de Q no es más que un espacio vectorial V y una transformación lineal $f \in \mathrm{End}_k(V)$.*

Definición 2.13 *Sea Q un carcaj finito y V una representación de Q. Definimos la* **dimensión total** *de V, $\dim_k(V)$,*

$$\dim_k(V) = \textstyle\sum_{i\in Q_0} \dim_k(V(i)).$$

Ejemplo 2.14 *Si Q es el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & \overset{2}{\bullet} \arrow[dl, "\gamma"] \\
\overset{3}{\bullet} &
\end{tikzcd}$$

entonces una $\mathbb{C}$-representación de Q, V, es

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[dd, "\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3i \end{bmatrix}"'] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix}"] & \\
 & \mathbb{C}^2 \arrow[dl, "\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"] \\
\mathbb{C}^2 &
\end{tikzcd}$$

Se tiene además que $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 6$.

Dos representaciones, V y W, son **isomorfas** si definen los mismos espacios vectoriales y transformaciones lineales salvo cambios de base. O bien, dos representaciones son isomorfas si existe un **isomorfismo** entre ellas, noción que definimos a continuación:

Definición 2.15 *Sean V y W representaciones del carcaj Q. Un* **isomorfismo** *$\phi : V \to W$ es una colección de isomorfismos $(\phi(i) : V(i) \to W(i))_{i \in Q_0}$ tal que para cada flecha $\alpha : i \to j$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "\phi(i)"'] & V(j) \arrow[d, "\phi(j)"] \\ W(i) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(j) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si $\phi : V \to W$ es un isomorfismo, escribiremos $\phi : V \xrightarrow{\sim} W$. Escribiremos $V \cong W$ si existe un isomorfismo $\phi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Vemos que, al ser todos los $\phi(i)$ isomorfismos, la condición de la conmutatividad del diagrama es equivalente a que, si $\alpha : i \to j$, entonces $W(\alpha) = \phi(j)V(\alpha)\phi(i)^{-1}$. Sin embargo, preferimos dar la definición así puesto que, viendo a Q como categoría, podemos reformular la definición diciendo que V y W son isomorfas si existe un isomorfismo natural entre funtores $\phi : V \to W$. Así, la siguiente definición resulta más natural.

Definición 2.16 *Sean V y W representaciones del carcaj Q. Un* **morfismo** *$\varphi : V \to W$ es una transformación natural entre funtores. Es decir, φ es una familia de funciones lineales $(\varphi(i) : V(i) \to W(i))_{i \in Q_0}$ tal que, para cada flecha $\alpha : i \to j$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi(i)"'] & V(j) \arrow[d, "\varphi(j)"] \\ W(i) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(j) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.17 *Sean V y S representaciones del carcaj Q. Diremos que S es una* **subrepresentación** *de V si $S(i) \subseteq V(i)$ $\forall i \in Q_0$ y si las inclusiones definen un morfismo de representaciones. Escribiremos $S \leq W$ para decir que S es una subrepresentación de W.*

Denotaremos por $\mathrm{Hom}_Q(V, W)$ al conjunto de morfismos de V a W. Denotaremos por $\mathrm{End}_Q(V)$ a $\mathrm{Hom}_Q(V, V)$.

Ejemplo 2.18 *Si V es una representación de Q tenemos el morfismo* **identidad** *$1_V : V \to V$, definido por $1_V = (1_{V(i)})_{i \in Q_0}$*

Proposición 2.19 *Los conjuntos $\mathrm{Hom}_Q(V, W)$ son k-espacios vectoriales. Más aún, $\mathrm{End}_Q(V)$ es una k-álgebra.*

Demostración. Si $\psi, \varphi \in \mathrm{Hom}_Q(V, W)$ y $a \in k$, entonces definimos $\psi + \varphi := (\psi(i) + \varphi(i))_{i \in Q_0}$ y $a\varphi := (a\varphi(i))_{i \in Q_0}$. De aquí ya es evidente la primera parte de la proposición. Ahora bien, si $\phi : V \to W$, $\varphi : W \to U$, podemos definir la composición $\varphi\phi = (\varphi(i)\phi(i))_{i \in Q_0}$. Es sencillo ver que esta composición es bilineal, es decir, si $\phi, \phi' : V \to W$, $\varphi, \varphi' : W \to U$, $a, a', b, b' \in k$ entonces:

$$(a\varphi + a'\varphi')\phi = a\varphi\phi + a'\varphi'\phi,$$
$$\varphi(b\phi + b'\phi') = b\varphi\phi + b'\varphi\phi'.$$

De aquí, y el Ejemplo 2.18 también es fácil ver que $\mathrm{End}_Q(V)$ es una k-álgebra con unidad 1_V. $\square$

A $\mathrm{End}_Q(V)$ le llamaremos el *álgebra de endomorfismos* de la representación V y sus elementos serán llamados, por supuesto, endomorfismos de V.

Podemos reformular los puntos anteriores diciendo que las representaciones de un carcaj dado Q con base en un campo k, y los morfismos entre ellas, forman una categoría, a la que denotaremos por $(Q, k\text{-vect})$. Esta categoría es aditiva y, como veremos a continuación, posee sumas directas finitas.

2.2.2. Suma Directa de Representaciones

Definición 2.20 *Sean V_1 y V_2 representaciones del carcaj Q. Definimos su* **suma directa**, *$V_1 \oplus V_2$ como sigue: $(V_1 \oplus V_2)(i) := V_1(i) \oplus V_2(i)$ para todo $i \in Q_0$ (la suma directa de espacios vectoriales); y $(V_1 \oplus V_2)(\alpha) = V_1(\alpha) \oplus V_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in Q_1$ (la suma directa de funciones lineales).*

Es claro que $\iota_1 : V_1 \to V_1 \oplus V_2$ que se calcula como $\iota_1(j) : V_1(j) \to V_1(j) \oplus V_2(j), j \in Q_0$ (la inclusión natural) es un morfismo de representaciones. A este morfismo le llamaremos la *inclusión* de V_1 en $V_1 \oplus V_2$. Podemo entonces caracterizar a la suma directa de representaciones mediante la siguiente propiedad universal.

Teorema 2.21 (Propiedad Universal de la Suma Directa) *Sean $V_1, \ldots, V_n$ representaciones del carcaj Q, y $\varphi_j : V_j \to W$ morfismos de representaciones. Entonces, existe un único morfismo $\varphi : \bigoplus_{i=1}^n V_i \to W$ tal que, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^n V_i \arrow[dr, "\varphi"] & \\ V_j \arrow[ur, "\iota_j"] \arrow[rr, "\varphi_j"] & & W \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, todo morfismo $\bigoplus_{i=1}^n V_i \to W$ está dado de esta manera.

Demostración. De la Propiedad Universal de la Suma Directa de Espacios Vectoriales, tenemos que para todo $m \in Q_0$ existe un único morfismo $\varphi(m)$ tal que, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^n V_i(m) \arrow[dr, "\varphi(m)"] & \\ V_j(m) \arrow[ur, "\iota_j(m)"] \arrow[rr, "\varphi_j(m)"] & & W(m) \end{tikzcd}$$

conmuta, y que este morfismo $\varphi(m)$ se calcula de la siguiente manera:

$$\varphi(m)(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a_i).$$

Definimos entonces $\varphi : \bigoplus_{i=1}^n V_i \to W$ por $\varphi = (\varphi(m))_{m \in Q_0}$. Veamos que φ así definido es un morfismo de representaciones. Sean $j, m \in Q_0$, $\alpha : i \to j$. Como para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_i(j) \arrow[r, "V_i(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi_i(j)"'] & V_i(m) \arrow[d, "\varphi_i(m)"] \\ W(j) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(m) \end{tikzcd}$$

conmuta, se sigue que, si $(a_1, \ldots, a_n) \in \bigoplus_{i=1}^n V_i(j)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(m)(V_i(\alpha)(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} W(\alpha)(\varphi_i(j)(a_i))$$

o, equivalentemente, que $W(\alpha)\varphi(j) = \bigoplus_{i=1}^n (\varphi_i(\alpha))\varphi(m)$, de donde se sigue que φ efectivamente es un morfismo de representaciones.

Si $\phi : \bigoplus_{j=1}^n V_j \to W$ es un morfismo de representaciones, entonces, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $\phi\iota_j$ es un morfismo $V_j \to W$. Luego ϕ es un morfismo como el de la construcción anterior, utilizando los $\phi\iota_j$. $\square$

Una consecuencia del teorema anterior es que todo morfismo $\bigoplus_{i=1}^n V_i \to W$ se puede dar como una matriz (A_{ml}) de $1 \times n$ donde en la entrada A_{1l} tenemos un morfismo $V_l \to W$.

Ahora bien, es fácil ver que las *proyecciones* $\pi_j : \bigoplus_{i=1}^n V_i \to V_j$, las cuales son inducidas por las proyecciones canónicas $\pi_j(m) : \bigoplus_{i=1}^n V_i(m) \to V_j(m)$, son morfismos de representaciones. Tenemos el dual del teorema anterior.

Teorema 2.22 *Sean $\varphi_j : W \to V_j$ morfismos de representaciones. Entonces existe un morfismo $\varphi : W :\to \bigoplus_{i=1}^n V_i$ tal que, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^n V_i \arrow[dl, "\pi_j"'] & \\ V_j & & W \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ll, "\varphi_j"] \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, todo morfismo $W \to \bigoplus_{i=1}^n V_i$ está dado de esta manera.

Demostración. Del respectivo teorema para espacios vectoriales, tenemos que si $m \in Q_0$ entonces existe un morfismo $\varphi(m)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^n V_i(m) \arrow[dl, "\pi_j(m)"'] & \\ V_j(m) & & W \arrow[ul, "\varphi(m)"'] \arrow[ll, "\varphi_j(m)"] \end{tikzcd}$$

conmuta. Este morfismo está dado por $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Definimos $\varphi = (\varphi(m))_{m \in Q_0}$. Es claro que es un morfismo de representaciones.

Ahora bien, si tenemos un morfismo $\phi : W \to \bigoplus_{i=1}^n V_i$ definimos $\phi_j : W \to V_j$ por $\phi_j = \pi_j \phi$. Entonces, utilizando los ϕ_j, ϕ es un morfismo como el de la construcción anterior. $\square$

Una consecuencia de este teorema es que, si tenemos un morfismo $W \to \bigoplus_{i=1}^n V_i$, este morfismo se puede escribir como una matriz (A_{ml}) de $n \times 1$, donde en la entrada A_{i1} está un morfismo $W \to V_i$. Juntando las dos últimas proposiciones, tenemos que un morfismo $\bigoplus_{i=1}^n V_i \to \bigoplus_{j=1}^m W_j$ se puede escribir como una matriz (A_{pq}) de $m \times n$, donde en la entrada A_{ji} tenemos un morfismo $V_i \to W_j$. Esto nos dice que, para conocer todos los morfismos $\bigoplus_{i=1}^n V_i \to \bigoplus_{j=1}^m W_j$ basta conocer a los morfismos $V_i \to W_j$ $(i = 1, \ldots, n\ j = 1, \ldots, m)$. Ahora bien, ¿cuáles son las representaciones que se pueden descomponer como suma directa de representaciones? Con eso lidia la siguiente sub-sección.

2.2.3. Representaciones Inescindibles

Definición 2.23 *Sea V una representación del carcaj Q, distinta de la representación $\bar{0}$. Diremos que V es* **inescindible** *si $V \cong V_1 \oplus V_2$ implica que $V_1 = \bar{0}$ ó $V_2 = \bar{0}$.*

De la definición de suma directa, se sigue rápidamente que si $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ entonces $\dim_k(V) = \sum_{i=1}^n \dim_k V_i$. Por lo tanto, toda representación de dimensión 1 es inescindible.

Ejemplo 2.24 *Tenemos la representación $k \overset{V(\alpha)}{\to} k$ de $\mathcal{L}_2$. Si $V(\alpha) = 0$, entonces podemos poner a V como $V_1 \oplus V_2$, donde V_1 es $k \to 0$ y V_2 es $0 \to k$. Si $V(\alpha) \neq 0$, entonces V es inescindible; razonando por contradicción, supongamos que $V \cong V_1 \oplus V_2$, con $V_1 \neq \bar{0}$, $V_2 \neq \bar{0}$. Entonces, $dim_k(V_1) = 1$, $dim_k(V_2) = 1$, de donde podemos suponer que V_1 es $0 \to k$ y V_2 es $k \to 0$. Entonces, $V_1 \oplus V_2$ es $k \overset{0}{\to} k$, de donde $V_1 \oplus V_2 \ncong V$, una contradicción.*

Ya vimos que toda representación con dimensión 1 es inescindible. Dicho de otra manera, a toda representación de dimensión 1 la podemos poner como suma directa de representaciones inescindibles (de hecho, la suma directa de una sola representación inescindible). Supongamos ahora que toda representación con dimensión menor que n se puede descomponer como suma directa de representaciones inescindibles. Sea V una representación con dimensión n. Si V es inescindible, entonces es suma directa de una sóla representación inescindible. Si no, existen V_1 y

V_2 representaciones distintas de $\bar{0}$ con $V \cong V_1 \oplus V_2$. Se tiene que $dim_k(V_1) < n$, $dim_k(V_2) < n$. Por hipótesis, V_1 y V_2 se pueden descomponer como suma directa de representaciones inescindibles, de donde se tiene que V es suma directa de representaciones inescindibles. Acabamos de utilizar el principio de inducción matemática para demostrar la primera parte del siguiente, y muy importante, resultado.

Teorema 2.25 (Krull-Remak-Schmidt) *Sea Q un carcaj. Entonces, toda representación de dimensión finita de Q es isomorfa a la suma directa de un número finito de representaciones inescindibles. Más aún, si $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_t$ son representaciones inescindibles tales que $V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ y $V \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$ entonces $t = n$ y existe $\sigma \in S_n$ (el grupo de permutaciones de n elementos) tal que $V_i \cong W_{\sigma(i)}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Antes de demostrar este teorema, veamos una proposición que nos ayudará en dicha prueba. La siguiente proposición es muy útil, debido a que caracteriza a las representaciones inescindibles en términos de sus álgebras de endomorfismos.

Proposición 2.26 *Sea Q un carcaj y V una k-representación de dimensión finita de Q. Entonces, V es inescindible si y sólo si $\mathrm{End}_Q(V)$ es local. Si k es algebraicamente cerrado, esto sucede si y sólo si todo endomorfismo puede ser escrito como suma de un endomorfismo nilpotente y un múltiplo de la identidad.*

Demostración. Sea V una k-representación de Q de dimensión finita e inescindible. Sea $\phi \in \mathrm{E}nd_Q(V)$. Como cada $V(i)$ es de dimensión finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^n(V) = \phi^{n+1}(V)$. Sea $\varphi = \phi^n$. Afirmamos que $V \cong \varphi(V) \oplus W$, donde $W(i) = \varphi(i)^{-1}(0)$ para $i \in Q_0$ y $W(\alpha) = V(\alpha)|_{W(i)}$ para $\alpha \in Q_1$ con $s(\alpha) = i$. En efecto, como φ es un morfismo de representaciones, entonces para $\alpha : i \to j$, $V(\alpha)\varphi(V(i)) \subseteq \varphi(V(j))$ y $V(\alpha)\varphi(i)^{-1}(0) \subseteq \varphi(j)^{-1}(0)$. Como para todo i $V(i)$ es de dimensión finita y $\varphi = \phi^n$, se tiene que $V(i) = \mathrm{I}m\varphi(i) \oplus \mathrm{K}er\varphi(i)$, es decir, $V(i) = \varphi(i)(V(i)) \oplus W(i)$.
Como V es inescindible, entonces $\varphi(V) = 0$ ó $W = 0$. Si $\varphi(V) = 0$ entonces ϕ es nilpotente. Si $W = 0$ entonces $\varphi(i)$, y por lo tanto $\phi(i)$, es invertible para todo i, por lo que ϕ es invertible. Entonces, todo endomorfismo de V es nilpotente ó invertible.
Ahora bien, al ser V de dimensión finita, la composición de cualquier endomorfismo con un endomorfismo nilpotente no es invertible, y por lo tanto es nilpotente. Además, si ψ es nilpotente entonces $1_V - \psi$ es invertible, siendo $1_V + \psi + \psi^2 + \psi^3 + \ldots$ su inverso. Tomemos dos endomorfismos no invertibles, ψ y ψ'. Si $\psi + \psi'$ es invertible, entonces existe η tal que $1_V = \eta(\psi + \psi') = \eta\psi + \eta\psi'$. Pero entonces $1_v - \eta\psi = \eta\psi'$ es al mismo tiempo nilpotente e invertible, una contradicción. Entonces $\mathrm{End}_Q(V)$ es local.

Supongamos que V se escinde mediante $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V_1 \oplus V_2$. Sean

$$e_1 = \varphi^{-1} \begin{bmatrix} 1_{V_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \varphi \quad \text{y} \quad e_2 = \varphi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{V_2} \end{bmatrix} \varphi.$$

Los morfismos de representaciones e_1 y e_2 no son invertibles, pero $e_1 + e_2 = 1_V$, con lo que $\mathrm{End}_Q(V)$ no es local.

Si k es algebraicamente cerrado y V es inescindible, entonces para todo $\varphi \in \mathrm{End}_Q(V)$ existe $a \in k$ tal que $\varphi - a1_V$ no es invertible (para esto simplemente elegimos una i en Q_0 y una raíz del polinomio característico de $\varphi(i)$) y por lo tanto es nilpotente. Entonces $\varphi = a1_V + (\varphi - a1_V)$. Si V no es inescindible, entonces los endomorfimos e_1 y e_2 descritos anteriormente no se pueden expresar de esta manera. $\square$

Ahora ya estamos listos para completar la prueba del Teorema 2.25. Sea $\varphi : V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \to W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$ un isomorfismo de representaciones. Entonces φ puede escribirse como una matriz $(\varphi_{ji})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{t}$ donde $\varphi_{ji} : V_i \to W_j$. De la misma manera escribimos $\psi = \varphi^{-1}$ como una matriz $(\psi_{ij})_{j=1}^{t}{}_{i=1}^{n}$ donde $\psi_{ij} : W_j \to V_i$. Entonces $1_{V_1} = (\psi\varphi)_{11} = \sum_{l=1}^{t} \psi_{1l}\varphi_{l1}$. Como $\mathrm{End}_Q(V_1)$ es local, algún sumando debe ser invertible. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\psi_{11}\varphi_{11}$ es invertible. Como ambas representaciones son inescindibles ψ_{11} y φ_{11} son invertibles. Ahora bien, sea

$$\varphi' = \alpha\varphi\beta$$

donde $\alpha : W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \to W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$ y $\beta : V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \to V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ están dados por

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1_{W_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_{21}\varphi_{11}^{-1} & 1_{W_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{t1}\varphi_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 1_{W_t} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1_{V_1} & -\varphi_{11}^{-1}\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{11}^{-1}\varphi_{1n} \\ 0 & 1_{V_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_{V_n} \end{bmatrix}$$

Observamos que φ' es biyectiva, y además $\varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$, donde $\Phi : V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \to W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$. Como φ' es biyectiva, Φ también lo es, de donde se sigue que Φ es un isomorfismo. El resultado ahora se sigue al aplicar inducción matemática.

2.2.4. Representaciones Inescindibles de $\mathcal{L}_n$

Una consecuencia de los resultados de la sección anterior es que, para conocer todas las representaciones de dimensión finita de un carcaj Q, nos basta con conocer las representaciones inescindibles. En esta sección, clasificaremos todas las representaciones inescindibles del carcaj lineal, de n puntos, $\mathcal{L}_n$ y veremos los morfismos que existen entre ellas. Sea pues V una representación inescindible de $\mathcal{L}_n$.

Afirmación 1 *Si $V(\alpha_i)$ no es inyectiva entonces $V(j) = 0$ para toda $j > i$.* En efecto, supongamos que $V(\alpha_i)$ no es inyectiva y que $V(\alpha_1), \ldots, V(\alpha_{i-1})$ son todas inyectivas. Sea $W(i) = \mathrm{Ker}(V(\alpha_i))$ e, inductivamente, definimos $W(j) = V(\alpha_j)^{-1}(V(j+1))$ para $j = 1, \ldots, i-1$. Sea $U(j)$ un complemento de $W(j)$ en $V(j)$

(es decir, $U(j) \oplus W(j) = V(j)$) para $j = 1, \ldots, i$ tal que $V(\alpha_j)(U(j)) \subseteq U(j+1)$. Esto es posible debido a que $V(\alpha_1), \ldots, V(\alpha_{i-1})$ son todas inyectivas y por lo tanto $V(\alpha_j)(W(j)) \cap V(\alpha_j)(U(j)) = 0$ para $j = 1, \ldots, i-1$. Tenemos entonces una descomposición de V de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= U(1) \to U(2) \to \cdots \to U(i-1) \to U(i) \to V(i+1) \to \cdots \to V(n), \\ W &= W(1) \to W(2) \to \cdots \to W(i-1) \to W(i) \to 0 \to \cdots \to 0. \end{aligned}$$

donde los morfismos que corresponden a cada flecha son las respectivas restricciones de $V(\alpha_m)$. Como V es inescindible, U ó W debe ser la representación 0. Como $V(\alpha_i)$ no es inyectiva, $W(i) \neq 0$, de donde tenemos que $W \neq 0$. Por lo tanto, $U = 0$ y $V(i+1), \ldots, V(n)$ son todos 0.

Afirmación 2 *Si $V(\alpha_i)$ no es suprayectiva entonces $V(j) = 0$ para toda $j \leq i$.* De manera similar a la afirmación anterior, supongamos que $V(\alpha_i)$ no es suprayectiva y que $V(\alpha_{i+1}), \ldots, V(\alpha_{n-1})$ sí lo son. Sea $U(i+1) = \mathrm{Im}(V(\alpha_i))$ y, de manera inductiva, sea $U(j) = V(\alpha_{j-1})(U(j-1))$ para $j = i+1, \ldots, n$. Sea $W(j)$ un complemento de $U(j)$ en $V(j)$ de manera que $V(\alpha_j)^{-1}(W(j+1)) \subseteq W(j)$ para $j = i+1, \ldots, n$. Tenemos entonces una descomposición de V de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= V(1) \to V(2) \to \cdots \to V(i-1) \to V(i) \to U(i+1) \to \cdots \to U(n), \\ W &= 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to 0 \to W(i+1) \to \cdots \to W(n). \end{aligned}$$

donde los morfismos que corresponden a cada flecha son las respectivas restricciones. Como V es inescindible, U ó W debe ser la representación $\bar{0}$. Como $U(i+1) \subsetneq V(i+1)$, $W(i+1) \neq 0$. Entonces $U = 0$ y por lo tanto $V(1), \ldots, V(i)$ son todos 0.

Afirmación 3 *La representación V es isomorfa a*

$$[i,j] := 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow k \xrightarrow{1_k} k \xrightarrow{1_k} \cdots \xrightarrow{1_k} k \to 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0$$

donde la primer aparición de k es en el lugar i y la última aparición en el lugar j.

Sean $A := \{m \in \{1, \ldots, n-1\} \mid V(\alpha_m)\text{no es inyectiva}\}$, $B := \{m \in \{1, \ldots, n-1\} \mid V(\alpha_m)\text{no es suprayectiva}\}$. Si $A = \emptyset$, sea $j = n$. Si no, sea $j := \min A$. Si $B = \emptyset$, sea $i = 1$. Si no, sea $i = \max B$. Por la afirmación 1, $V(m) = 0$ si $m < i$. Por la afirmación 2, $V(m) = 0$ si $m > j$. Si $i \leq m < j$, entonces $V(\alpha_m)$ es biyectiva. Entonces, nuestra representación es isomorfa a:

$$0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow k^d \xrightarrow{1_{k^d}} k^d \xrightarrow{1_{k^d}} \cdots \xrightarrow{1_{k^d}} k^d \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0$$

como V es inescindible, tenemos que debe ser $V \cong [i,j]$.

Entonces, todas las representaciones inescindibles de V son de la forma $[i,j]$, con $1 \leq i \leq j \leq n$. Claramente $[i,j] \ncong [i',j']$ si $i \neq i'$ ó $j \neq j'$ (pues si, por ejemplo, $i < i'$, entonces $\dim_k[i,j](i) = 1$ y $\dim_k[i',j'](i) = 0$). Más adelante veremos que todas las representaciones $[i,j]$ son inescindibles, pero antes estudiemos los morfismos entre estos tipos de representaciones.

Observación 1 *Si* $i' < i$, *entonces* $\mathrm{Hom}([i,j],[i',j']) = 0$. Si $j' < i$ esto es claro. Si no, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}([i,j],[i',j'])$. Observemos el lugar i':

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1_k"] \arrow[d, "\varphi(i'-1)"'] & k \arrow[d, "\varphi(i')"] \\ 0 \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama nos obliga a que $\varphi(i') = 0$. Inductivamente, podemos demostrar que $\varphi(m) = 0$ para todo m.

Observación 2 *Si* $j < j'$ *entonces* $\mathrm{Hom}([i,j],[i',j']) = 0$. De nuevo si $j < i'$ esto es claro. Si no, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}([i,j],[i',j'])$. Observemos el lugar j:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(j)"'] & 0 \arrow[d, "\varphi(j+1)"] \\ k \arrow[r, "1_k"] & k \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama nos obliga a que $\varphi(j) = 0$. Inductivamente demostramos que $\varphi(m) = 0$ para todo m.

Observación 3 *Si* $i' \leq i \leq j' \leq j$ *entonces* $\mathrm{Hom}([i,j],[i',j']) \cong k$. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}([i,j],[i',j'])$. Fijémonos en el lugar i:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1_k"] \arrow[d, "\varphi(i)"'] & k \arrow[d, "\varphi(i+1)"] \\ k \arrow[r, "1_k"] & k \end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad del diagrama, $\varphi(i) = \varphi(i+1)$. Inductivamente demostramos que $\varphi(m) = \varphi(i)$ para todo $i \leq m \leq j'$. Entonces podemos dar un isomorfismo $\mathrm{Hom}([i,j],[i',j']) \cong \mathrm{End}_k(k) \cong k$.

Llamaremos $\gamma_{i,j}^{i',j'}$ al morfismo de $[i,j]$ a $[i',j']$ tal que $\gamma_{i,j}^{i',j'}(l) = 1_k$ para $i \leq l \leq j'$. Podemos reformular las últimas tres observaciones en el siguiente

Lema 2.27 $\mathrm{Hom}([i,j],[i',j']) \neq 0$ *si y sólo si* $i' \leq i \leq j' \leq j$. *En este caso,* $\mathrm{Hom}([i,j],[i',j']) \cong k$.

Corolario 2.28 *Las representaciones* $[i,j]$ *son inescindibles.*

Demostración. $\mathrm{End}([i,j]) = \mathrm{Hom}([i,j],[i,j]) \cong k$, claramente es un álgebra local. $\square$

Las similitudes entre los teoremas de Krull-Schmidt (1.76) y de Krull-Remak-Schmidt (2.25), así como entre el Corolario 1.75 y la Proposición 2.26 nos hacen pensar que la categoría $(Q, k\text{-vect})$ se parece mucho a una categoría de módulos. En el siguiente capítulo veremos que, de hecho, podemos considerar a $(Q, k\text{-vect})$ como una subcategoría plena de una categoría de módulos.

CAPÍTULO 3

Álgebras de Caminos

3.1. Idempotentes

Fijemos un campo k y un carcaj Q.

Recordemos que un camino en Q, de longitud n, que inicia en i y termina en j, es una concatenación de flechas:

$$(j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$$

donde $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_n) = j$ y $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Observemos que los caminos se pueden multiplicar por concatenación, es decir:

$$(j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)(i|\beta_m, \ldots, \beta_1|h) = (j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1, \beta_m, \ldots, \beta_1|h).$$

Definición 3.1 *Denotaremos por e_i a $(i||i)$, es decir, el camino de longitud 0 que inicia y termina en i. Si ω es un camino que inicia (termina) en i, definimos $\omega e_i = \omega$ ($e_i\omega = \omega$, respectivamente).*

Definición 3.2 *Al espacio vectorial con base los caminos en Q y con multiplicación que extiende bilinealmente a la multiplicación de caminos (donde definimos $\omega\theta = 0$ si el vértice final de θ no coincide con el vértice inicial de ω), le llamaremos el* **álgebra de caminos** *de Q, y la denotaremos por kQ.*

Afirmación 3.3 *kQ es un álgebra con 1 si y sólo si Q_0 es finito. Además, kQ es de dimensión finita si y sólo si Q es finito y no tiene ciclos.*

Demostración. Supongamos que Q_0 es finito. Entonces claramente $\sum_{i\in Q_0} e_i$ es 1 de kQ. Supongamos ahora que Q_0 no es finito. Sea $x \in kQ$. Entonces $x = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n$, con $k_i \in k$, ω_i camino en Q. Sea $h \in Q_0$ tal que h no es el punto inicial de ω_i para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $xe_h = 0$, de donde x no es unitario.

Para la segunda parte de la afirmación, si Q es finito y no tiene ciclos, es claro que sólo hay un número finito de caminos en Q. Si Q no es finito, claramente el número de caminos en Q es infinito. Por último, si Q posee ciclos, sea ω un ciclo, entonces $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots$ es un número infinito de caminos en Q, todos ellos distintos (pues su longitud es distinta). $\square$

Ejemplo 3.4 *Si Q es el 1-Loop, entonces $kQ \cong k[x]$, el anillo de polinomios con coeficientes en k. En general, si Q es el n-Loop, entonces $kQ \cong k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, el álgebra libre generada por n elementos que no conmutan entre sí.*

Ejemplo 3.5 *Si $Q = \mathcal{L}_n$, entonces $kQ \cong \Delta_n$, el álgebra de matrices triangulares superiores de $n \times n$ con coeficientes en k. Veamos esto. Denotemos por X al conjunto de caminos en Q. Existe un (único) camino de i a j si y sólo si $i \leq j$. Entonces, podemos decir que $X = \{\omega_{ij}\}_{i \leq j \leq n}$, donde ω_{ij} es el camino que va de i a j ($e_i = \omega_{ii}$). Sea $A_{ij} \in$ la matriz $(a_{ml})_{m,l=1}^n$ tal que $a_{ij} = 1$ y $a_{ml} = 0$ si $m \neq i$ ó $l \neq j$. $\{A_{ij}\}_{i \leq j \leq n}$ es una base de Δ_n.*

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \{A_{ij}\}_{i \leq j \leq n} \\ \omega_{ij} &\mapsto A_{ij} \end{aligned}$$

define una biyección entre las bases de kQ y Δ_n. Es sencillo comprobar que esta biyección respeta la multiplicación. Entonces $kQ \cong \Delta_n$.

De ahora en adelante, supongamos a Q finito. Echemos un vistazo a los elementos $\{e_i\}_{i \in Q_0}$. Estos elementos son ídempotentes, es decir, $e_ie_i = e_i$ para todo $i \in Q_0$. Además, $e_ie_j = e_je_i = 0$ si $i \neq j$. Es claro que kQe_i (e_ikQ) tiene como base a todos los caminos que inician (terminan) en i. De aquí que, como kQ-módulos, $kQ \cong \bigoplus_{i \in Q_0} kQe_i$. Por la Proposición 1.19, kQe_i es un kQ-módulo izquierdo proyectivo.

Proposición 3.6 *Sea M un kQ-módulo izquierdo. Entonces* $\mathrm{Hom}_{kQ}(kQe_i, M) \cong e_iM$.

Demostración. Mostraremos algo más general. Sean R un anillo, $e \in R$ ídempotente y $M \in R$-Mod. Mostraremos que $\mathrm{Hom}_R(Re, M) \cong eM$. Sea $f : eM \to \mathrm{Hom}_R(Re, M)$, definida por:

$$\begin{aligned} f(em) : Re &\to M \\ re &\mapsto rem \end{aligned}$$

es fácil ver que f es un morfismo de R-módulos. Ahora definimos $g : \mathrm{Hom}_R(Re, M) \to eM$ por $g(\lambda) = \lambda(e)$. Esta función está bien definida, pues, como e es idempotente, $\lambda(e) = \lambda(ee) = e\lambda(e) \in eM$. También es fácil ver que g es un morfismo de R-módulos. Por último, veamos que g y f son morfismos inversos. Sea $em \in eM$, entonces $gf(em) = f(em)(e) = em$. Por lo tanto $gf = 1_{eM}$. Si $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(Re, M)$ entonces $fg(\lambda)(re) = re\lambda(e) = r\lambda(ee) = \lambda(ree) = \lambda(re)$. Entonces $fg(\lambda) = \lambda$, es decir, $fg = 1_{\mathrm{Hom}_R(Re,M)}$. Concluímos que $\mathrm{Hom}_R(Re, M) \cong eM$. $\square$

Proposición 3.7 *Sea $i \in Q_0$. Entonces e_i es un idempotente primitivo, es decir, kQe_i es un kQ-módulo inescindible.*

Demostración. Primero observemos que si $0 \neq x \in kQe_i$ y $0 \neq y \in e_i kQ$ entonces $xy \neq 0$, puesto que si ω es el camino más largo que se encuentra como sumando en x y θ es el camino más largo que se encuentra como sumando en y, entonces el coeficiente de $\omega\theta$ en xy no es 0.

Ahora, si $f \in \mathrm{End}_{kQ}(kQe_i)$ es un idempotente distinto de 0 y de la identidad, entonces $f^2 = f = f1_{kQe_i}$, por lo que $f(1_{kQe_i} - f) = 0$. Sin embargo, de la Proposición 3.6 tenemos que $\mathrm{End}_{kQ}(kQe_i) \cong e_i kQe_i$. Por la observación que hicimos al principio de la demostración, tenemos una contradicción. Por lo tanto, utilizando 1.33, kQe_i es un kQ-módulo inescindible. $\square$

Proposición 3.8 *Si $i \neq j$, entonces, como kQ-módulos, $kQe_i \ncong kQe_j$.*

Demostración. Primero observamos que si $e_j \in kQe_i kQ$ entonces $i = j$, ya que $kQe_i kQ$ tiene como base a todos los caminos que pasan por i. Ahora bien, si existen morfismos $f : kQe_i \to kQe_j$, $g : kQe_i \to kQe_j$ tales que $fg = 1_{kQe_j}$, $gf = 1_{kQe_i}$, por la Proposición 3.6 tenemos elementos $x \in e_i kQe_j$, $y \in e_j kQe_i$ tales que $xy = e_i$, $yx = e_j$ (esto se logra utilizando el isomorfismo dado en la Proposición 3.6). Sin embargo, $e_i = xy \in e_i kQe_j e_j kQe_i = e_i kQe_j kQe_i \subseteq kQe_j kQ$, una contradicción con la observación que hicimos al inicio de la prueba. $\square$

Con lo que hemos demostrado hasta ahora, podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 3.9 *Sea Q un carcaj finito sin ciclos orientados. Entonces $\{kQe_i\}_{i\in Q_0}$ es una colección completa e irredundante (es decir, sus objetos no son isomorfos dos a dos) de clases de isomorfismo de kQ-módulos proyectivos inescindibles finitamente generados. Se sigue que, si P es un kQ-módulo proyectivo finitamente generado entonces existe $\{m_i\}_{i\in Q_0} \subset \mathbb{N}$ tal que:*

$$P \cong \bigoplus_{i\in Q_0} kQe_i^{m_i}$$

Demostración. kQe_i es proyectivo e inescindible para todo $i \in Q_0$. Además, ya vimos que si $i \neq j$ entonces $kQe_i \ncong kQe_j$. Por último, si P es un módulo proyectivo finitamente generado, sea P' tal que $P \oplus P'$ es un módulo libre. Por lo tanto:

$$P \oplus P' \cong \bigoplus_{i\in Q_0} kQe_i^n$$

Como Q es finito y sin ciclos dirigidos, kQ es de dimensión finita, por lo que es artiniana y neteriana. Podemos entonces aplicar el teorema de Krull-Schmidt (1.76), se sigue que existen $\{n_i\}_{i\in Q_0} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$P \cong \bigoplus_{i\in Q_0} kQe_i^{n_i}$$

□

Corolario 3.10 *Sea Q un carcaj finito sin ciclos orientados. Entonces el álgebra de caminos kQ es hereditaria.*

Demostración. Por el Teorema 3.9, $\{kQe_i\}_{i\in Q_0}$ es una colección completa e irredundante de clases de isomorfismo de kQ-módulos proyectivos finitamente generados. El único submódulo maximal de kQe_i es el generado por las flechas que salen de i, pero este submódulo es isomorfo a $\bigoplus\{kQe_{t(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1, s(\alpha) = i\}$, por lo que es proyectivo. El resultado entonces se sigue del Lema 1.77. □

Terminamos esta sección con una importante propiedad de las álgebras de caminos.

Teorema 3.11 *Sea Q un carcaj finito y A una k-álgebra. Para cada par de funciones $\varphi_0 : Q_0 \to A$ y $\varphi_1 : Q_1 \to A$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $1 = \sum_{i\in Q_0} \varphi_0(i)$, $\varphi_0(i)^2 = \varphi_0(i)$ *para todo* $i \in Q_0$ *y* $\varphi_0(i)\varphi_0(j) = 0$ *si* $i \neq j$.

(2) *Si* $\alpha : i \to j$ *entonces* $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(j)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(i)$.

existe un único morfismo de k-álgebras $\varphi : kQ \to A$ tal que $\varphi(e_i) = \varphi_0(i)$ para todo $i \in Q_0$ y $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ para todo $\alpha \in Q_1$.

Demostración. Si $\omega = (j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$ es un camino en Q, definimos:

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(j)\varphi_1(\alpha_n)\ldots\varphi_1(\alpha_1)\varphi_0(i)$$

Y extendemos a φ bilinealmente. Tenemos entonces un morfismo de k-espacios vectoriales que respeta la multiplicación, y observando que

$$\varphi(1) = \varphi(\textstyle\sum_{i\in Q_0} e_i) = \sum_{i\in Q_0} \varphi_(e_i) = \sum_{i\in Q_0} \varphi_0(i) = 1$$

tenemos que φ es un morfismo de k-álgebras. Ahora veamos la unicidad. Supongamos que existe un morfismo de k-álgebras ϕ que extiende a φ_1 y a φ_0. Entonces, si $\omega = (j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$ es un camino en Q,

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \phi(j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i) \\ &= \phi(e_j\alpha_n \ldots \alpha_1 e_i) \\ &= \phi(e_j)\phi(\alpha_n)\ldots\phi(\alpha_1)\phi(e_i) \\ &= \varphi_0(j)\varphi_1(\alpha_n)\ldots\varphi_1(\alpha_1)\varphi_0(j) \\ &= \varphi(\omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el morfismo es único y la prueba del teorema está completa. □

3.2. El radical de Jacobson de un álgebra de caminos

Definición 3.12 *Sea Q un carcaj finito. El ideal de kQ generado por todos las flechas en Q es llamado el* **ideal flecha** *de kQ. Denotaremos por R_Q a este ideal.*

Proposición 3.13 *Sea Q un carcaj finito y sin ciclos dirigidos, y supongamos que k es algebraicamente cerrado. Entonces $R_Q = \mathrm{rad}(kQ)$, esto es, el ideal flecha de kQ coincide con el radical de Jacobson de kQ.*

Demostración. Como Q es finito y no tiene ciclos dirigidos, entonces R_Q es nilpotente, siendo su índice de nilpotencia $l+1$, donde l es la longitud del camino más largo en Q. Ahora bien, como R_Q contiene a todos los caminos de longitud mayor ó igual que 1, entonces kQ/R_Q está generado por $\{e_i + R_Q \mid i \in Q_0\}$. Más aún

$$kQ/R_Q \cong \bigoplus_{i\in Q_0} (e_i + R_Q)(kQ/R_Q)(e_i + R_Q).$$

Como Q no tiene ciclos dirigidos, $(e_i + R_Q)(kQ/R_Q)(e_i + R_Q) \cong k$ para todo i. Entonces, $kQ/R_Q \cong k \times \cdots \times k$, el producto de $|Q_0|$ copias de k. Por el Lema 1.78 $R_Q = rad(kQ)$. $\square$

Hacemos notar que, si Q tiene ciclos dirigidos, entonces la Proposición 3.13 no es necesariamente cierta. Como un ejemplo, sea Q el 1-*Loop*. Como ya vimos, $kQ \cong k[x]$. Si suponemos que k es algebraicamente cerrado entonces la colección de ideales maximales de $k[x]$ es $\langle\{x - \lambda \mid \lambda \in k\}\rangle$, por lo que $\mathrm{rad}(k[x]) = 0$, es decir, $\mathrm{rad}(kQ) = 0$.

3.3. La categoría kQ-mod

En esta sección notaremos el vínculo que existe entre las álgebras de caminos y las representaciones de carcajes.

Teorema 3.14 *Sea Q un carcaj finito y sin ciclos orientados. Entonces las categorías kQ-mod y $(Q, k\text{-vect})$ son equivalentes.*

Demostración. Como esta prueba es muy larga, la dividiremos en cuatro partes.

Parte 1: Construcción de un funtor $F : (Q, k\text{-vect}) \to kQ\text{-mod}$

Sea V una representación de Q. Definimos:

$$FV = \bigoplus_{i\in Q_0} V(i).$$

Falta ver que FV tiene estructura de kQ módulo. Sea $\omega = (j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$ un camino en Q y $(v_h)_{h\in Q_0} \in FV$. Entonces $\omega(v_h)_{h\in Q_0}$ se define por coordenadas,

$$(\omega(v_h)_{h\in Q_0})_l := \begin{cases} V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)(v_i) & \text{si } l=j \\ 0 & \text{si } l\neq j \end{cases}$$

Extendemos la multiplicación de manera lineal. Veamos que de esta manera FV es un kQ-módulo finitamente generado. Dado que la multiplicación la extendimos de manera lineal, sólo hace falta ver lo siguiente:

1. *Si* $(v_h)_{h\in Q_0} \in FV$ *entonces* $1(v_h)_{h\in Q_0} = (v_h)_{h\in Q_0}$.
Sea $(v_h)_{h\in Q_0} \in FV$. Recordemos que el elemento unitario de kQ es $1 = \sum_{i\in Q_0} e_i$. La multiplicación $e_i(v_h)_{h\in Q_0}$ tiene al elemento v_i en la i-ésima coordenada y a 0 en todas las demás. Entonces,

$$\begin{aligned} 1(v_h)_{h\in Q_0} &= (\textstyle\sum_{i\in Q_0} e_i)(v_h)_{h\in Q_0} \\ &= \textstyle\sum_{i\in Q_0} e_i(v_h)_{h\in Q_0} \\ &= (v_h)_{h\in Q_0}. \end{aligned}$$

2. *Si* ω, τ *son caminos en* Q *y* $(v_h)_{h\in Q_0} \in FV$, *entonces* $\omega\tau(v_h)_{h\in Q_0} = \omega(\tau(v_h)_{h\in Q_0})$.
Sean $\omega = (j|\alpha_n,\dots,\alpha_1|i)$, $\tau = (p|\beta_m,\dots,\beta_1|l)$ caminos en Q, y $(v_h)_{h\in Q_0} \in FV$. Si $p\neq i$ entonces $\omega\tau = 0$, por lo que $(\omega\tau)(v_h)_{h\in Q_0} = 0$. Ahora, $\tau(v_h)_{h\in Q_0}$ tiene a 0 en su i-ésima coordenada, por lo que $\omega(\tau(v_h)_{h\in Q_0})$ tiene a $V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)(0) = 0$ en su j-ésima coordenada y a 0 en todas las demás. Dicho en otras palabras, $\omega(\tau(v_h)_{h\in Q_0}) = 0$.
Si $i = p$, entonces $\omega\tau = (j|\alpha_n,\dots,\alpha_1,\beta_m,\dots,\beta_1|l)$. Se sigue que $\omega\tau(v_h)_{h\in Q_0}$ tiene a $V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)V(\beta_m)\dots V(\beta_1)(v_l)$ en su j-ésima coordenada y 0 en todas las demás. Ahora bien, $\tau(v_h)_{h\in Q_0}$ tiene a $V(\beta_m)\dots V(\beta_1)(v_l)$ en su i-ésima coordenada y 0 en todas las demás. Entonces

$$(\omega(\tau(v_h)_{h\in Q_0}))_l = \begin{cases} V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)V(\beta_m)\dots V(\beta_1)(v_l) & \text{si } l=j \\ 0 & \text{si } l\neq j \end{cases}$$

Por lo tanto $\omega\tau(v_h)_{h\in Q_0} = \omega(\tau(v_h)_{h\in Q_0})$.

3. *Si* $(v_h)_{h\in Q_0}, (w_h)_{h\in Q_0} \in FV$ *y* ω *es un camino en* Q, *entonces* $\omega(v_h+w_h)_{h\in Q_0} = \omega(v_h)_{h\in Q_0} + \omega(w_h)_{h\in Q_0}$.
Sean $(v_h)_{h\in Q_0}, (w_h)_{h\in Q_0} \in FV$, $\omega = (j|\alpha_1,\dots,\alpha_n|i)$ un camino en Q. Tenemos que $\omega((v_h)_{h\in Q_0} + (w_h)_{h\in Q_0})$ tiene en su j-ésima coordenada a

$$V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)((v_i)+(w_i)) = V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)(v_i) + V(\alpha_n)\dots V(\alpha_1)(w_i)$$

precisamente la j-ésima coordenada de $\omega(v_h)_{h\in Q_0} + \omega(w_h)_{h\in Q_0}$. Tanto $\omega((v_h)_{h\in Q_0} + (w_h)_{h\in Q_0})$ como $\omega(v_h)_{h\in Q_0} + \omega(w_h)_{h\in Q_0}$ tienen 0 en todas las demás coordenadas.

De 1,2 y 3 se sigue que $FV \in kQ$-Mod. Como $V(h)$ es de k-dimensión finita para todo $h\in Q_0$, FV es de k-dimensión finita. Por lo tanto $FV \in kQ$-mod.

Ahora, si $\varphi : V \to W$ es un morfismo de representaciones, definimos $F\varphi : FV \to FW$ por

$$F\varphi = \bigoplus_{i\in Q_0} \varphi_i : \bigoplus_{i\in Q_0} V(i) \to \bigoplus_{i\in Q_0} W(i).$$

Veamos que $F\varphi$ es un morfismo de kQ-módulos. Al ser un morfismo de k-espacios vectoriales, queda claro que abre sumas. Entonces sólo hace falta ver que si $\omega = (j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$ es un camino en Q y $(v_h)_{h\in Q_0} \in FV$ entonces $F\varphi(\omega(v_h)_{h\in Q_0}) = \omega F\varphi((v_h)_{h\in Q_0})$. Tenemos que $F\varphi(\omega(v_h)_{h\in Q_0}) \in FW$ tiene 0 en todas sus coordenadas excepto en la j-ésima, en la cual tiene a $\varphi_j(V(\alpha_n)\ldots V(\alpha_1)(v_i))$. Como $(\varphi_h)_{h\in Q_0}$ es un morfismo de representaciones,

$$\varphi_j(V(\alpha_n)\ldots V(\alpha_1)(v_i)) = W(\alpha_n)\ldots W(\alpha_1)(\varphi_i(v_i)).$$

Esta última expresión es la j-ésima coordenada de $\omega F\varphi((v_h)_{h\in Q_0})$. Se sigue entonces la igualdad deseada.

Vimos ya que si V es una representación de Q entonces $FV \in kQ$-mod y si $\varphi : V \to W$ es un morfismo de representaciones entonces $F\varphi : FV \to FW$ es un morfismo de kQ-módulos. Falta ver que F efectivamente es un funtor. Es fácil ver que $F(1_V) = 1_{FV}$ para toda representación V de Q. Ahora, sean U, V, W representaciones de Q y $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ morfismos de representaciones. Si $(u_h)_{h\in Q_0} \in FU$ entonces:

$$\begin{aligned} F\psi\varphi((u_h)_{h\in Q_0}) &= (\psi_h\varphi_h(u_h)_{h\in Q_0}) \\ &= F\psi((\varphi_h(u_h))_{h\in Q_0}) \\ &= F\psi(F\varphi((u_h)_{h\in Q_0})). \end{aligned}$$

Entonces $F\psi\varphi = F\psi F\varphi$. Por lo tanto, $F : (Q, k\text{-vect}) \to kQ$-mod es un funtor.

Parte 2: Construcción de un funtor $G : kQ\text{-mod} \to (Q, k\text{-vect})$

Sea M un kQ-módulo finitamente generado. Como $kQ \cong \bigoplus_{i\in Q_0} kQe_i$ entonces $M \cong \bigoplus_{i\in Q_0} e_iM$. Definimos $M(i) = e_iM$. Como M es un k-espacio vectorial de dimensión finita, e_iM también lo es. Ahora bien, si $\alpha : i \to j$ entonces definimos $M(\alpha) : e_iM \to e_jM$ por $M(\alpha)(e_im) = (j|\alpha|i)(e_im)$. Veamos que $M(\alpha)$ es una función k-lineal.

Sean e_im_1, $e_im_2 \in M(i)$. Entonces

$$\begin{aligned} M(\alpha)(e_im_1 + e_im_2) &= (j|\alpha|i)(e_im_1 + e_im_2) \\ &= (j|\alpha|i)e_im_1 + (j|\alpha|i)e_im_2 \\ &= M(\alpha)(e_im_1) + M(\alpha)(e_im_2). \end{aligned}$$

Si $\kappa \in k$ entonces

$$\begin{aligned} M(\alpha)(\kappa e_im) &= (j|\alpha|i)(\kappa e_im) \\ &= (j|\alpha|i)\kappa(e_im) \\ &= \kappa(j|\alpha|i)(e_im) \\ &= \kappa M(\alpha)(e_im). \end{aligned}$$

Por lo tanto $M(\alpha)$ es un morfismo de k-espacios vectoriales. Definimos entonces $GM = ((M(i))_{i\in Q_0}, (M(\alpha))_{\alpha\in Q_1})$. GM claramente es una representación de Q.

Sean $M, N \in kQ$-mod y $f : M \to N$ un morfismo de kQ-módulos. Sea $f_i : M(i) \to N(i)$ definida por $f_i = f|_{M(i)}$. La función f_i está bien definida pues $f(e_i m) = e_i f(m) \in e_i N$. Definimos $Gf = (f_i)_{i\in Q_0}$. Veamos que $Gf : GM \to GN$ es un morfismo de representaciones. Si $\alpha : i \to j$ y $e_i m \in M(i)$ entonces

$$\begin{aligned} N(\alpha)f_i(e_i m) &= (j|\alpha|i)f(e_i m) \\ &= f((j|\alpha|i)e_i m) \\ &= f(e_j(j|\alpha|i)m) \\ &= f_j(e_j(j|\alpha|i)m) \\ &= f_j M(\alpha)(e_i m). \end{aligned}$$

Por lo tanto $N(\alpha)f_i = f_j M(\alpha)$ y Gf es un morfismo de representaciones. Ver que $G1_M = 1_{GM}$ y que $Gfh = GfGh$ es fácil.

Parte 3: Construir un isomorfismo natural $\eta : FG \to 1_{kQ-\text{mod}}$

Sean $M, N \in kQ$-mod, $f \in \operatorname{Hom}_{kQ}(M, N)$. Entonces $FGM = \bigoplus_{i\in Q_0} e_i M \cong M$, $FGN = \bigoplus i \in Q_0 e_i N \cong N$ y $FGf = \bigoplus_{i\in Q_0} f_i$. Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[d, "\cong"] \\ \bigoplus_{i\in Q_0} e_i M \arrow[r, "\oplus_{i\in Q_0} f_i"] & \bigoplus_{i\in Q_0} e_i N \end{tikzcd}$$

donde los isomorfismos $M \cong \bigoplus_{i\in Q_0} e_i M$, $N \cong \bigoplus_{i\in Q_0} e_i N$ son los usuales. Claramente el diagrama conmuta y por lo tanto $FG \cong 1_{kQ-}$

.

Parte 4: Construír un isomorfismo natural $\psi : GF \to 1_{(Q,k-\text{vect})}$

Sean $V = ((V(i))_{i\in Q_0}, V(\alpha)_{\alpha\in Q_1})$, $W = ((W(i)_{i\in Q_0}, W(\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ representaciones de Q y $f : V \to W$ un morfismo de representaciones. $GV = \bigoplus_{i\in Q_0} V(i)$, $GW = \bigoplus_{i\in Q_0} W(i)$, $Gf = \bigoplus_{i\in Q_0} f_i$. Claramente $V(j) = e_j \left[\bigoplus_{i\in Q_0} V(i)\right]$ para todo $j \in Q_0$, y por lo tanto $Gf|_{e_j[\bigoplus_{i\in Q_0} V(i)]} = f$. Entonces $GF = 1_{(Q,k-\text{vect})}$.

Por lo tanto, $(Q, k\text{-vect})$ y kQ-mod son categorías equivalentes. $\square$

CAPÍTULO 4

El Carcaj de un Álgebra

4.1. Álgebras Básicas

En el capítulo anterior vimos que, para todo carcaj Q, existe un álgebra kQ tal que las categorías $(Q, k\text{-vect})$ y kQ-mod son equivalentes. No es cierto que toda álgebra sea isomorfa a un álgebra de caminos.

Ejemplo 4.1 *Sea $A = k[x, y]$, el anillo de polinomios en dos variables con coeficientes en k. Supongamos que existe un carcaj Q tal que $k[x, y] \cong kQ$. Como $k[x, y]$ tiene sólo un idempotente primitivo (a saber, el 1), tenemos que en Q sólo habrá un vértice. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que Q es el n-Loop. Pero ya vimos que en este caso $kQ \cong k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, y $k[x, y]$ no es de esta forma.*

Sin embargo, en esta sección veremos que toda álgebra básica de dimensión finita, noción que definiremos a continuación, es isomorfa a un cociente de un álgebra de caminos.

Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un campo k, al que supondremos algebraicamente cerrado. Sea $1 = e_1 + \cdots + e_n$ una descomposición de la unidad en idempotentes primitivos ortogonales (la cual es posible por 1.76, pues A es artiniana y neteriana). Entonces $A \cong Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$, donde cada A-módulo Ae_i es proyectivo e inescindible.

Definición 4.2 *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre k, y $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ una descomposición de A en inescindibles. Diremos que A es un* **álgebra básica** *si $i \neq j$ implica $Ae_i \not\cong Ae_j$.*

Ejemplo 4.3 *Sea Q un carcaj finito sin ciclos orientados. Entonces kQ es un álgebra básica.*

Lo que veremos ahora es que, si sólo nos interesa la categoría de módulos, entonces podemos enfocarnos solamente en las álgebras básicas.

Recordemos que dos anillos R y S son *Morita equivalentes* si sus categorías de módulos, R-Mod y S-Mod, son equivalentes.

Teorema 4.4 *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre el campo k. Entonces existe un álgebra básica A' tal que A y A' son Morita equivalentes.*

Demostración. Sea A una k-álgebra de dimensión finita. Supongamos que $A \cong \bigoplus_{j=1}^{n} Ae_j$ es una descomposición de A en inescindibles. Supongamos que A no es básica, pues de otra manera el resultado se seguiría trivialmente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Ae_1 \cong Ae_2$.

Sea $e = e_2 + \cdots + e_n = 1 - e_1$. Sea

$$B = eAe = \{eae \mid a \in A\}.$$

B tiene una estructura de k-álgebra, pues es cerrado bajo suma y multiplicación. Además, como e es idempotente (pues $\{e_2, \ldots, e_n\}$ son idempotentes ortogonales) se tiene que el elemento unitario de B es e y, por lo tanto, que una descomposición de B en módulos inescindibles es

$$Be_2 \oplus \cdots \oplus Be_n.$$

Mostraremos que B y A son Morita equivalentes.

Definamos un funtor $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$. Si $M \in A$-mod, definimos

$$FM = eM = \{em \mid m \in M\}$$

FM es un B-módulo, pues, si $b = eae \in B$, y $em \in eM$ entonces $b(em) = (eae)(em) = ea(em) \in eM$. Ahora, si $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, definimos

$$Ff = f\mid_{FM}$$

La imagen de Ff efectivamente está en FN, pues si $em \in FM$ entonces $Ff(em) = f(em) = ef(m) \in eN = FN$. Como $B \subseteq A$ y f es un morfismo de A-módulos, entonces Ff es un morfismo de B-módulos. Como las imágenes de las funciones son las restricciones, F es un funtor.

Sea $\varphi : Ae_1 \to Ae_2$ un isomorfismo. Por la Proposición 3.6, $\mathrm{Hom}_A(Ae_1, Ae_2) = e_1Ae_2$, así que podemos decir que este isomorfismo corresponde a un elemento $a_{12} = e_1a_{12}e_2$ y que su inverso φ^{-1} corresponde a un elemento $a_{21} = e_2a_{21}e_1$. Como φ y φ^{-1} son inversas, se tiene que $a_{12}a_{21}e_1 = e_1$ y que $a_{21}a_{12}e_2 = e_2$.

Ahora bien, como $Ae_1 \cong Ae_2$, entonces $e_1M \cong \mathrm{Hom}_A(Ae_1, M) \cong \mathrm{Hom}_A(Ae_2, M) \cong e_2M$ para todo $M \in A$-Mod. Ahora bien, si $\mu_i : A \times e_iM \to M$ son las multiplicaciones por elementos de A, se tiene lo siguiente:

$$\mu_1(a, e_1m) = \mu_2(aa_{12}, e_2a_{21}e_1m).$$

Esto porque

$$\begin{aligned} \mu_1(a, e_1m) &= a(e_1m) \\ &= aa_{12}a_{21}e_1m \\ &= aa_{12}(e_2a_{21}e_1e_1m) \\ &= aa_{12}(e_2a_{21}e_1m) \\ &= \mu_2(aa_{12}, e_2a_{21}e_1m). \end{aligned}$$

Sea entonces $M \in B$-Mod y, como el unitario de B es e, tenemos que $eM = M$. Sea $M' = e_2M \oplus eM$. Por la observación anterior, podemos definir una multiplicación $A \times M' \to M'$ de manera que $e_2M \cong e_1M$ como A-módulos (simplemente definimos $e_1m = 0$ si $m \in eM$ y $e_1m = a_{12}(e_2a_{21}e_1m)$ si $m \in e_2M$). Entonces, $FM' \cong M$ y, por lo tanto, F es un funtor denso.

Ahora bien, sea $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, f induce morfismos $f_i : e_iM \to e_iN$ (f_i es simplemente la restricción de f a e_iM.) Ahora bien,

$$\begin{aligned} f_1(e_1m) &= f(e_1m) \\ &= f(a_{12}e_2a_{21}e_1m) \\ &= a_{12}f(e_2a_{21}e_1m) \\ &= a_{12}f_2(e_2a_{21}e_1m). \end{aligned}$$

Con esta observación probaremos que la función

$$F : \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(FM, FN)$$

es biyectiva. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tales que $Ff = Fg$. Entonces $f|_{eM} = g|_{eN}$. Como $e_2M \subseteq eM$, tenemos que $f_2 = g_2$ y, por lo tanto, $f_1 = g_1$. Por lo tanto $f = f_1 \oplus Ff = g_1 \oplus Fg = g$. Entonces F es inyectiva y el funtor es fiel. Ahora, sea $f \in \mathrm{Hom}_B(FM, FN) = \mathrm{Hom}_B(eM, eN)$. Extendemos f a $f' : e_1M \oplus eM \to e_1N \oplus eN$ por $f'(e_1m) = a_{12}f(e_2a_{21}e_1m)$. Es sencillo observar que $f' \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ y que $Ff' = f$. Por lo tanto la aplicación es suprayectiva y el funtor es pleno. Por 1.13, F es una equivalencia de categorías y por lo tanto A y B son Morita equivalentes. El resultado ahora se sigue por inducción. □

Del resultado anterior se sigue que, si sólo estamos interesados en la categoría de módulos, basta estudiar a las álgebras básicas.

4.2. El Carcaj de un Álgebra Básica

Definición 4.5 *Sean Q un carcaj finito e $I \subseteq kQ$ un ideal bilateral de kQ. Diremos que I es* **admisible** *si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$.*

Lema 4.6 *Sea Q un carcaj finito e I un ideal admisible de kQ. Entonces $\{\bar{e}_i = e_i + I\}_{i \in Q_0}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales del álgebra kQ/I.*

Demostración. Como $\bar{e}_i$ es la imagen de e_i bajo el epimorfismo de k-álgebras canónico $kQ \to kQ/I$, entonces $\{\bar{e}_i\}$ es un conjunto completo de ortogonales idempotentes de kQ/I. Sólo falta ver que $\bar{e}_i$ es primitivo para cada $i \in Q_0$ o, lo que es lo mismo, que $\mathrm{End}_{kQ/I}((kQ/I)\bar{e}_i) \cong \bar{e}_i(kQ/I)\bar{e}_i$ no tiene idempotentes distintos de 0 y $\bar{e}_i$. Sea $\bar{e}$ un idempotente de $\bar{e}_i(kQ/I)\bar{e}_i$. Entonces $\bar{e} = \lambda e_i + \omega + I$, donde $\lambda \in k$ y ω es una combinación lineal de ciclos que pasan por i de longitud mayor ó igual que 1. Como $\bar{e}$ es idempotente,

$$\begin{aligned} \bar{e}\bar{e} = \bar{e} \quad &\Rightarrow (\lambda e_i + \omega + I)(\lambda e_i + \omega + I) = (\lambda e_i + \omega + I) \\ &\Rightarrow \lambda^2 e_i + 2\lambda\omega + \omega^2 + I = \lambda e_i + \omega + I \\ &\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)e_i + (2\lambda - 1)\omega + \omega^2 \in I \end{aligned}$$

Como $I \subseteq R_Q^2$, todos los elementos de I son combinaciones lineales de caminos de longitud al menos 2, y por lo tanto $\lambda^2 - \lambda = 0$. Entonces $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$. Si $\lambda = 0$, entonces $\bar{e} = \omega + I$. Como existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $R_Q^m \subseteq I$, entonces $\omega^m \in I$, y por lo tanto $\bar{e} = \bar{e}^m = \omega^m + I = I$, de donde se sigue que $\bar{e} = 0$. Si $\lambda = 1$, entonces $\bar{e} = \bar{e}_i + \omega + I$, y por lo tanto $\bar{e} - \bar{e}_i = \omega + I$. Como antes, ω es nilpotente módulo I (es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\omega^m \in I$) y, por lo tanto $\bar{e} = \bar{e}_i$. Se sigue que $\bar{e}_i$ es primitivo. $\square$

Lema 4.7 *Sean Q un carcaj finito y sin ciclos dirigidos, e I un ideal admisible de kQ. Entonces*

$$\mathrm{rad}(kQ/I) = R_Q/I$$

Demostración. Como I es un ideal admisible, existe $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m$ tal que $R_Q^m \subseteq I$. Entonces, $(R_Q/I)^m = 0$, lo que muestra que R_Q/I es un ideal nilpotente de kQ/I. Por el Tercer Teorema de Isomorfismo,

$$(kQ/I)/(R_Q/I) \cong kQ/R_Q$$

de donde se sigue, por el Lema 3.13, que

$$(kQ/I)/(R_Q/I) \cong k \times \cdots \times k$$

y concluimos por el Lema 1.78. $\square$

Corolario 4.8 *Sea Q un carcaj finito y sin ciclos dirigidos e I un ideal admisible de Q. Entonces, para cada $l \geq 1$, se tiene que* $\mathrm{rad}^l(kQ/I) = (R_Q/I)^l$.

Demostración. Procederemos por inducción. La base de la inducción fue justamente el lema anterior. Ahora bien, supongamos que $\mathrm{rad}^{l-1}(kQ/I) = (R_Q/I)^{l-1}$. Fácilmente vemos que $(R_Q/I)^l$ es un ideal bilateral y nilpotente de $(R_Q/I)^{l-1}$ y, por el Tercer Teorema de Isomorfismo,

$$(R_Q/I)^{l-1}/(R_Q/I)^l \cong (R_Q)^{l-1}/(R_Q)^l \cong k \times \cdots \times k$$

y concluimos. $\square$

Observación 4.9 *Se sigue del Lema 4.7 y del Corolario 4.8 que, si Q es finito y sin ciclos dirigidos e I es un ideal admisible de kQ entonces*

$$\operatorname{rad}(kQ/I)/\operatorname{rad}^2(kQ/I) \cong R_Q/R_Q^2$$

que admite como base el conjunto $\{\alpha + \operatorname{rad}^2(kQ/I) \mid \alpha \in Q_1\}$.

Definición 4.10 *Sea A un k-álgebra básica de k-dimensión finita. Definimos el carcaj de A, Q_A como sigue:*

(1) *Si $1 = e_1 + \cdots + e_n$ es una descomposición de la unidad en idempotentes primitivos y ortogonales, entonces el conjunto de vértices de Q_A es $\{1, \ldots, n\}$.*

(2) *Dados dos vértices $e_a, e_b \in (Q_A)_0$, el conjunto de flechas que van de e_a a e_b está en correspondencia biyectiva con una base del k-espacio vectorial $e_b(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_a$, donde $\operatorname{rad}^2(A)$ denota a $\operatorname{rad}(\operatorname{rad}(A))$.*

Nota 4.11 *Como A es de dimensión finita, se tiene que A es artiniana, y, por lo tanto, del Lema 1.62 concluimos que* $\operatorname{rad}^2(A) = \operatorname{rad}(\operatorname{rad}(A)) = \operatorname{rad}(A)\operatorname{rad}(A)$.

Observación 4.12 *Como A es de k-dimensión finita, entonces para todo $a, b \in (Q_A)_0$ el k-espacio vectorial $e_b(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2 A)e_a$ también es de k-dimensión finita y, por lo tanto, Q_A es un carcaj finito.*

Ejemplo 4.13 *Sea k un campo algebraicamente cerrado y sea*

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix}$$

el álgebra de matrices triangulares inferiores de 3×3, $[\lambda_{ij}]$ tales que $\lambda_{32} = 0$. Sea

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que $\operatorname{rad}(A) = I$ *pues $I^2 = 0$ y $A/I \cong k \times k \times k$. Ahora bien,*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales. Tenemos que $e_1(\operatorname{rad}(A))e_3, e_1(\operatorname{rad}(A))e_2 \cong k$ y que $e_i(\operatorname{rad}(A))e_j = 0$ en todos los demás casos. Por lo tanto Q_A es

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\bullet} & \\ \overset{2}{\bullet} \arrow[ur] & & \overset{3}{\bullet} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Lema 4.14 *Sea A un álgebra básica de k-dimensión finita. Entonces:*

(1) *El carcaj Q_A no depende de la elección del conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{e_1, \ldots, e_n\}$.*

(2) *Para cada par e_a, e_b de idempotentes primitivos y ortogonales en A, la función $\psi : e_b(\mathrm{rad}(A))e_a/e_b(\mathrm{rad}^2(A))e_a \to e_b(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_a$ definida por $e_b x e_a + e_b(\mathrm{rad}^2(A))e_a \mapsto e_b(x + \mathrm{rad}^2(A))e_a$ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales.*

Demostración. (1) Por el Teorema de Krull-Schmidt (1.76), el número de vértices en Q_A no depende de la elección del conjunto completo de ortogonales idempotentes. Ahora bien, si tenemos dos conjuntos completos de ortogonales idempotentes, digamos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, por el mismo teorema podemos suponer que $Ae_i \cong Ae'_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. El morfismo de A-módulos $\varphi : (\mathrm{rad}(A))e_a \to (\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_a$ dado por $xe_a \mapsto (x + \mathrm{rad}^2(A))e_a$ claramente tiene como kernel a $(\mathrm{rad}^2(A))e_a$ y, por lo tanto,

$$(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_a \cong (\mathrm{rad}(A))e_a/(\mathrm{rad}^2(A))e_a \cong \mathrm{rad}(Ae_a)/\mathrm{rad}^2(Ae_a).$$

Tenemos entonces los isomorfismos de k-espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} e_b(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_a &\cong e_b(\mathrm{rad}(Ae_a)/\mathrm{rad}^2(Ae_a)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(Ae_b, \mathrm{rad}(Ae_a)/\mathrm{rad}^2(Ae_a)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(Ae'_b, \mathrm{rad}(Ae'_a)/\mathrm{rad}^2(Ae'_a)) \\ &\cong e'_b(\mathrm{rad}(Ae'_a)/\mathrm{rad}^2(Ae'_a)) \\ &\cong e'_b(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e'_a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dim_k(e_b(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_a) = \dim_k(e'_b(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e'_a)$. Se sigue que Q_A no depende de la elección del conjunto completo de primitivos ortogonales.

(2) Tenemos el morfismo k-lineal $e_b(\mathrm{rad}(A))e_a \to e_b(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_a$ definido por $e_b x e_a \mapsto e_b(x + \mathrm{rad}^2(A))e_a$. Este morfismo tiene como kernel a $e_b(\mathrm{rad}^2(A))e_a$, y concluimos. $\square$

Lema 4.15 *Sea A una k-álgebra básica de dimensión finita. Para cada flecha $\alpha : i \to j$ en $(Q_A)_1$ sea $x_\alpha \in e_j(\mathrm{rad}(A))e_i$ tal que el conjunto $\{x_\alpha + \mathrm{rad}^2(A) \mid \alpha : i \to j\}$ es una base de $e_j(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A))e_i$. Entonces:*

(1) *Si $i, j \in (Q_A)_0$, todo elemento $x \in e_j(\mathrm{rad}(A))e_i$ se puede escribir de la forma:*

$$x = \sum \lambda_{\alpha_n, \ldots, \alpha_1} x_{\alpha_n} x_{\alpha_{n-1}} \ldots x_{\alpha_1}$$

donde la suma es tomada sobre todos los caminos $(j|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$ que van de i a j.

(2) *Cada flecha $\alpha : i \to j$ determina de manera única un morfismo $\hat{x}_\alpha \in \mathrm{Hom}_A(Ae_j, Ae_i)$ tal que $\hat{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$, $\mathrm{Im}(\hat{x}_\alpha) \subseteq (\mathrm{rad}(A))e_i$ e $\mathrm{Im}(\hat{x}_\alpha) \not\subseteq (\mathrm{rad}^2(A))e_i$.*

Demostración.

(1) Como k-espacios vectoriales, tenemos que

$$\operatorname{rad}(A) \cong (\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A)) \oplus \operatorname{rad}^2(A)$$

por lo que, como k-espacios vectoriales,

$$e_j(\operatorname{rad}(A))e_i \cong e_j(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_i \oplus e_j(\operatorname{rad}^2(A))e_i.$$

Por lo tanto, si $x \in e_j(\operatorname{rad}(A))e_i$, podemos escribir a x de la forma

$$x = \sum_{\alpha: e_i \to e_j} \lambda_\alpha x_\alpha + x'$$

donde $x' \in e_j(\operatorname{rad}^2(A))e_i$. Entonces,

$$x' = x - \sum_{\alpha: i \to j} \lambda_\alpha x_\alpha \in e_j(\operatorname{rad}^2(A))e_i.$$

Como $\operatorname{rad}(A) = \bigoplus_{a,b} e_a(\operatorname{rad}(A))e_b$ y $\operatorname{rad}^2(A) = \operatorname{rad}(A)\operatorname{rad}(A)$ tenemos:

$$e_j(\operatorname{rad}^2(A))e_i = \sum_{e_h \in (Q_A)_0} (e_j(\operatorname{rad}(A))e_h)(e_h(\operatorname{rad}(A))e_i).$$

Entonces, $x' = \sum_{e_h \in (Q_A)_0} x'_h y'_h$, donde $x'_h \in e_j(\operatorname{rad}(A))e_h$ y $y'_h \in e_h(\operatorname{rad}(A))e_i$. Repitiendo el procedimiento, tenemos que

$$x'_h = \sum_{\beta: h \to j} \lambda_\beta x_\beta + x''_h,\ y'_h = \sum_{\gamma: i \to h} \lambda_\gamma y_\gamma + y''_h,$$

donde $x''_h \in e_j(\operatorname{rad}^2(A))e_h$ y $y''_h \in e_h(\operatorname{rad}^2(A))e_i$. Por lo tanto

$$x = \sum_{\alpha: i \to j} \lambda_\alpha x_\alpha + \sum_{\gamma: i \to h} \sum_{\beta: h \to j} \lambda_\beta \lambda_\gamma x_\beta x_\gamma + x'''.$$

Donde $x''' \in e_j(\operatorname{rad}^3(A))e_i$. Al ser A artiniana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{rad}^m(A) = 0$. El resultado se sigue aplicando inducción.

(2) Tenemos el isomorfismo canónico $e_j(\operatorname{rad}(A))e_i \overset{\cong}{\to} \operatorname{Hom}_A(Ae_j, \operatorname{rad}(A)e_i)$. Sea $\hat{x}_\alpha$ la imagen de x_α bajo este isomorfismo. Se tiene entonces que $\operatorname{Im}(\hat{x}_\alpha) \subseteq \operatorname{rad}(A)e_i$. Además, como la imagen de x_α bajo el epimorfismo canónico $e_j(\operatorname{rad}(A))e_i \to e_j(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_i$ no es 0, se tiene que $\operatorname{Im}(\hat{x}_\alpha) \not\subseteq \operatorname{rad}^2(A)x_i$. $\square$

Lema 4.16 *Sea Q un carcaj finito, I un ideal admisible de kQ y $A = kQ/I$. Entonces $Q_A = Q$.*

Demostración. Sabemos que $\{\bar{e}_i\}_{i \in Q_0}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de A. Entonces los vértices de Q_A están en correspondencia biyectiva con los vértices de Q. Además, por el Lema 4.14 (2) las flechas que van de i a j en Q están en correspondencia biyectiva con una base de $e_j(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_i$. $\square$

Teorema 4.17 (Gabriel) *Sea A una k-álgebra básica de dimensión finita, con k algebraicamente cerrado. Entonces existe un ideal admisible I de kQ_A tal que $A \cong kQ_A/I$.*

Demostración. Construiremos un morfismo de álgebras $kQ_A \to A$, veremos que este morfismo es suprayectivo y que su kernel es un ideal admisible de kQ_A.

Para cada flecha $\alpha : e_i \to e_j$ en $(Q_A)_1$, elegimos $x_\alpha \in \operatorname{rad}(A)$ tal que $\{x_\alpha + \operatorname{rad}^2(A) \mid \alpha : e_i \to e_j\}$ forma una base de $e_j(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_i$. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi_0 : (Q_A)_0 &\to A \\ i &\mapsto e_i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (Q_A)_1 &\to A \\ \alpha &\mapsto x_\alpha \end{aligned}$$

Entonces, los elementos $\varphi_0(i)$ forman un conjunto completo de ortogonales idempotentes en A, y si $\alpha : i \to j$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_0(j)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(i) \quad &= e_j x_\alpha e_i = x_\alpha \\ &= \varphi_1(\alpha). \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.11 existe un único morfismo de k-álgebras $\varphi : kQ_A \to A$ que extiende a φ_0 y a φ_1.

Procedemos a observar que φ es sobre. Como k-espacios vectoriales, tenemos que $A \cong A/\operatorname{rad}(A) \oplus \operatorname{rad}(A)$. Entonces, basta demostrar que $A/\operatorname{rad}(A), \operatorname{rad}(A) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi)$. Que $\operatorname{rad}(A) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi)$ se sigue del Lema 4.15. Ahora bien, como $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad}(A)) = 0$ y $A/\operatorname{rad}(A)$ es un álgebra artiniana, tenemos que $A/\operatorname{rad}(A)$ es semisimple. Como además tenemos que

$$A/\operatorname{rad}(A) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} (A/\operatorname{rad}(A))\bar{e}_i$$

es una descomposición de $A/\operatorname{rad}(A)$ en inescindibles, tenemos que $(A/\operatorname{rad}(A))\bar{e}_i$ es un $A/\operatorname{rad}(A)$-módulo simple para todo $i \in Q_0$. Además, como k-álgebras:

$$A/\operatorname{rad}(A) \cong (\operatorname{End}_{A/\operatorname{rad}(A)}(A/\operatorname{rad}(A)))^{\mathrm{op}}.$$

Si $B_i := \operatorname{End}_{A/\operatorname{rad}(A)}((A/\operatorname{rad}(A))\bar{e}_i)$ tenemos que $\operatorname{End}_{A/\operatorname{rad}(A)}(A/\operatorname{rad}(A))$ es

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{bmatrix}.$$

Como k es algebraicamente cerrado, por la Proposición 1.79 $B_i = k\bar{e}_i$ para todo $i \in Q_0$. Esto nos dice que $B_i \subseteq \operatorname{Im}(\varphi)$ para todo i y, por lo tanto, $A/\operatorname{rad}(A) \subseteq$

$\mathrm{Im}(\varphi)$ de donde se sigue que φ es suprayectiva.

Por último, veamos que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un ideal admisible de kQ_A. Sea $R = R_{Q_A}$. Por definición tenemos que $\varphi(R) \subseteq \mathrm{rad}(A)$ y, por lo tanto $\varphi(R^l) \subseteq \mathrm{rad}(A)^l$ para todo l. Como A es de dimensión finita, $\mathrm{rad}(A)$ es nilpotente y por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(R^m) \subseteq \mathrm{rad}(A)^m = 0$, por lo que $R^m \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) = I$. Sea $x \in I$, entonces

$$x = \sum_{i\in(Q_A)_0} \lambda_i e_i + \sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha \alpha + y$$

donde $\lambda_i, \mu_i \in k$, $y \in R^2$. Como $x \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$,

$$0 = \sum_{i\in(Q_A)_0} \lambda_i e_i + \sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha + \varphi(y).$$

Como $\sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha \alpha \in R$ y $y \in R^2$, se tiene que

$$\sum_{i\in(Q_A)_0} \lambda_i e_i = -\left(\sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha + \varphi(y) \right) \in \mathrm{rad}(A).$$

Al ser $\mathrm{rad}(A)$ nilpotente y $\{e_i\}_{i\in(Q_A)_0}$ un conjunto de idempotentes ortogonales, tenemos que $\lambda_i = 0$ para todo i. Como $y \in R^2$,

$$\sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha = -\varphi(y) \in \mathrm{rad}(A)^2 = \mathrm{rad}^2(A).$$

Por lo tanto

$$\sum_{\alpha\in(Q_A)_1} (\mu_\alpha x_\alpha + \mathrm{rad}^2(A)) = 0 \text{ en el cociente } \mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A).$$

Pero, por construcción, $\{x_\alpha + \mathrm{rad}^2(A) \mid \alpha \in (Q_A)_1\}$ es una base de $\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A)$. Por lo tanto $\mu_\alpha = 0$ para toda α, y se sigue que $x = y \in R^2$. Concluimos que $R^m \subseteq I \subseteq R^2$, es decir, I es un ideal admisible de kQ_A. $\square$

4.3. Álgebras Hereditarias

En esta sección aplicaremos los resultados de las dos secciones anteriores cuando A es un álgebra hereditaria de dimensión finita. Si sólo estamos interesados en la categoría de módulos de A, basta considerar el caso cuando además A es un álgebra básica.

Proposición 4.18 *Sea A un álgebra hereditaria. Si P_i y P_j son A-módulos proyectivos e inescindibles, entonces todo morfismo no nulo, $f : P_i \to P_j$ es un monomorfismo.*

Demostración. Sea $f : P_i \to P_j$ un morfismo no nulo. Consideramos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \hookrightarrow P_i \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0.$$

Como A es hereditaria, $\mathrm{Im}(f)$ es proyectivo, por lo que $P_i \cong \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Dado que P_i es inescindible e $\mathrm{Im}(f) \neq 0$, tenemos que $\mathrm{Ker}(f) = 0$ y por lo tanto f es un monomorfismo. $\square$

Proposición 4.19 *Sea A un álgebra básica y hereditaria, de dimensión finita. Entonces el carcaj Q_A no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración. Sabemos ya que $A \cong kQ_A/I$, donde I es un ideal admisible de A. Para cada flecha $\alpha : e_i \to e_j$ en Q_A, el morfismo $\alpha_* : (kQ_A/I)e_j \to (kQ_A/I)e_i$, que a cada camino ω lo manda a la clase de $\omega\alpha$, es inyectivo, pues es un morfismo no 0 entre dos (kQ_A/I)-módulos proyectivos inescindibles. Como $I \subseteq R_Q$, tenemos que $\mathrm{Im}(\alpha_*) \subseteq \mathrm{rad}((kQ_A/I)e_i)$.

Razonando por contradicción, supongamos que Q_A tiene ciclos dirigidos y sea $(i|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|i)$ un ciclo en Q_A. El morfismo $f = \alpha_{n*} \ldots \alpha_{1*}$ es un monomorfismo pues es composición de monomorfismos, y $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}((kQ_A/I)e_i) \subsetneq Ae_i$. Pero entonces:

$$\dim_k(Ae_i) = \dim_k \mathrm{Im}(f) \leq \dim_k(\mathrm{rad}(Ae_i)) < \dim_k(Ae_i)$$

una contradicción. Por lo tanto, Q_A no tiene ciclos dirigidos. $\square$

Proposición 4.20 *Sea A una k-álgebra básica, hereditaria y de dimensión finita, con k algebraicamente cerrado. Entonces $A \cong kQ_A$.*

La prueba de la Proposición 4.20 es una consecuencia directa del siguiente resultado.

Proposición 4.21 *Sea A una k-álgebra de dimensión finita e $I \subsetneq A$ un ideal bilateral de A tal que $I \subseteq \mathrm{rad}^2(A)$. Si A/I es hereditaria, entonces $I = 0$.*

Demostración. Al ser A un álgebra noetheriana, I es finitamente generado como A-módulo izquierdo. El Lema de Nakayama (1.52) nos asegura que si $\mathrm{rad}(A)I = I$ entonces $I = 0$. Podemos entonces trabajar módulo $\mathrm{rad}(A)I$, por lo que suponemos que $\mathrm{rad}(A)I = 0$. Sea $\Gamma = A/I$. Como $\mathrm{rad}(A)I = 0$, podemos ver a $\mathrm{rad}(A)$ como un Γ-módulo derecho. Ahora bien, $\mathrm{rad}(\Gamma) = \mathrm{rad}(A)/I$, de donde tenemos que el epimorfismo de Γ-módulos

$$\mathrm{rad}(A) \to \mathrm{rad}(A)/I = \mathrm{rad}(\Gamma)$$

se escinde, pues $\mathrm{rad}(\Gamma)$ es proyectivo. Se sigue entonces que, como Γ-módulos, $\mathrm{rad}(A) \cong \mathrm{rad}(A)/I \oplus I$ lo que nos dice que como A-módulos, $\mathrm{rad}(A) \cong \mathrm{rad}(A)/I \oplus I$. Pero, como $I \subseteq \mathrm{rad}(\mathrm{rad}(A))$, y A es noetheriana, entonces $I \ll \mathrm{rad}(A)$ (Corolario 1.69), por lo que no puede ser sumando directo de $\mathrm{rad}(A)$. Tenemos pues una contradicción, y concluimos que $I = 0$. $\square$

Probemos ahora la Proposición 4.20. Como A es una k-álgebra básica y de dimensión finita, entonces $A \cong kQ_A/I$, con $I \subseteq R^2_{Q_A} = \mathrm{rad}^2(kQ_A)$. Por la Proposición 4.19, kQ_A es de generación finita, y, como kQ_A/I es hereditaria, la proposición anterior nos asegura que $I = 0$. Entonces $A \cong kQ_A$.

Ahora bien, sea V una representación del carcaj lineal $\mathcal{L}_n$. Entonces $V \cong \bigoplus_{l=1}^m V_l$, donde $V_l \cong [i_l, j_l]$. Consideremos la k-álgebra $A = \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V)$. Podemos ver a esta álgebra como la siguiente álgebra de matrices

$$\begin{bmatrix} \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V_1) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_1, V_2) & \dots & \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_1, V_m) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_2, V_1) & \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V_2) & \dots & \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_2, V_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_m, V_1) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_m, V_2) & \dots & \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V_m) \end{bmatrix}$$

Un conjunto completo de ortogonales idempotentes de A es:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1_{V_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_{V_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ \dots,\ e_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_{V_m} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, si $V_a \cong V_b$, entonces $Ae_a \cong Ae_b$. Si suponemos que A es básica se sigue que, si $a \neq b$, entonces $V_a \ncong V_b$. Podemos entonces suponer que nuestras representaciones están ordenadas de manera que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$, y, si $i_p = i_{p+1}$ entonces $j_p < j_{p+1}$. Sabemos que existen morfismos no 0 de V_a a V_b si y sólo si $i_b \leq i_a \leq j_b \leq j_a$ y que, en este caso, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_a, V_b) \cong k$. El orden que estamos dando a nuestras representaciones nos dice que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_a, V_b) = 0$ si $a < b$. Podemos entonces considerar a A como una subálgebra de las matrices triangulares inferiores de $m \times m$ con coeficientes en k, donde la entrada $a_{\lambda\mu} = 0$ si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_\lambda, V_\mu) = 0$. Bajo esta correspondencia, tenemos que

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ \dots\ e_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sea

$$B_{\lambda\mu} = \begin{cases} k & \text{si } \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_\lambda, V_\mu) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_\lambda, V_\mu) = 0. \end{cases}$$

Tenemos que, si

$$R := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{(m-1)1} & B_{(m-1)2} & \dots & 0 & 0 \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{m(m-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

entonces $R = \operatorname{rad}(A)$ pues R es nilpotente y $A/R \cong k^m$. Entonces, $e_b(\operatorname{rad}(A))e_a$ es 0 si $B_{ab} = 0$, o, si $B_{ab} = k$, $e_b(\operatorname{rad}(A))e_a$ es el k-subespacio vectorial de A que tiene 0 en todas sus entradas excepto en la entrada ab, en donde tiene a una copia de k. Ahora bien, $e_b(\operatorname{rad}^2(A))e_a = \sum_{c\in\{1,\dots,m\}}(e_b(\operatorname{rad}(A))e_c)(e_c(\operatorname{rad}(A))e_a)$. Por lo tanto, para aquellas parejas $(a,b) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,m\}$ que cumplen que $e_b(\operatorname{rad}(A))e_a \neq 0$:

$$e_b(\operatorname{rad}^2(A))e_a = \begin{cases} B_{ab} & \text{si existe } c \in \{1,\dots,m\} \text{ tal que } B_{ac} = k,\ B_{cb} = k \\ 0 & \text{si para toda } c \in \{1,\dots,m\},\ B_{ac} = 0 \text{ ó } B_{cb} = 0 \end{cases}$$

En el caso en el que $e_b(\operatorname{rad}^2(A))e_a = B_{ab}$ tendremos que $e_b(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_a \cong e_b(\operatorname{rad}(A))e_a/e_b(\operatorname{rad}^2(A))e_a = 0$. En otro caso, tenemos que $e_b(\operatorname{rad}(A))e_a/e_b(\operatorname{rad}^2(A)e_a \cong k$. Entonces, el número de flechas que van de e_a a e_b en Q_A es

$$\begin{cases} 1 & \text{si } B_{ab} = k \text{ y no existe } c \text{ tal que } B_{ac} = k,\ B_{cb} = k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 4.22 *Sean $n = 10$ y $V_1 = [1,3], V_2 = [2,7], V_3 = [4,9], V_4 = [5,8], V_5 = [6,10]$ representaciones de $\mathcal{L}_{10}$. Sea $V = \bigoplus_{i=1}^5 V_i$. Tenemos que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{L}_{10}}(V_i,V_j) = 0$ si $i < j$, $B_{21} = k$, $B_{31} = 0$, $B_{41} = 0$, $B_{51} = 0$, $B_{32} = k$, $B_{42} = k$, $B_{52} = k$, $B_{43} = 0$ $B_{53} = k$ y $B_{54} = k$. Entonces, si $A = \operatorname{End}_{\mathcal{L}_{10}}(V)$, el carcaj Q_A es:*

$$\begin{tikzcd} \overset{5}{\bullet} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r] & \overset{1}{\bullet} \\ & \overset{4}{\bullet} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

En el ejemplo anterior tenemos que $\dim_k(e_1kQ_Ae_5) = 2$ y $\dim_k(e_1Ae_5) = 0$. Además, $\dim_k(e_2kQ_Ae_5) = 2$ y $\dim_k(e_2Ae_5) = 1$. Entonces, $A \ncong kQ_A$ y, por lo tanto, A no es hereditaria. ¿Qué es lo que falla? Tratemos de contestar esta pregunta.

Lema 4.23 *Sea $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ una representación de $\mathcal{L}_n$, donde las representaciones V_i son inescindibles y no isomorfas dos a dos. Sea $A := \operatorname{End}_{\mathcal{L}_n}(V)$. Si $B_{ij} \neq 0$ entonces existe un camino de i a j en Q_A.*

Demostración. Supongamos que $B_{ij} \neq 0$. Si no existe $c \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i,j\}$ tal que $B_{ic} \neq 0, B_{cj} \neq 0$ entonces existe una flecha de e_i a e_j. Supongamos entonces que existe $c \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i,j\}$ tal que $B_{ic} \neq 0$, $B_{cj} \neq 0$. Si no existen c_1, c_2 tales que $B_{ic_1} \neq 0, B_{c_1c} \neq 0, B_{cc_2} \neq 0$ y $B_{c_2j} \neq 0$ entonces existen flechas de e_i a e_c y de e_c a e_j, de donde se sigue que existe un camino de e_i a e_j. Supongamos entonces que existe c_1 tal que $B_{ic_1} \neq 0$, $B_{c_1c} \neq 0$ y hacemos el mismo procedimiento. Como $(Q_A)_0$ es finito, el procedimiento ha de terminar y de aquí obtenemos un camino de i a j. $\square$

Lema 4.24 *Con la notación del Lema 4.23, si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces* $\dim_k(e_jAe_i) \leq 1$.

Demostración. Tenemos que $e_jAe_i = 1_{V_j}A1_{V_i} = 1_{V_j}(\mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(\bigoplus_{l=1}^m V_l))1_{V_i} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_i, V_j)$, donde el isomorfismo es como k-espacios vectoriales. Sabemos ya que estos espacios vectoriales son de dimensión 1 o 0, de donde se sigue la proposición. $\square$

Del Lema 4.23 tenemos que, si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_i, V_j) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_j, V_l) \neq 0$ entonces, en Q_A, existe un camino de e_i a e_l. Entonces, si queremos que $A \cong kQ_A$, necesitamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_i, V_l) \neq 0$. Del Lema 4.24, tenemos que, dados $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ entonces, en Q_A, existe a lo más un camino de i a j. Juntando estas observaciones, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.25 *Sea $V = \bigoplus_{l=1}^m V_i$ una representación de $\mathcal{L}_n$, donde las representaciones V_i son inescindibles y no isomorfas dos a dos. Sea $A := \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V)$. Una condición necesaria y suficiente para que $A \cong kQ_A$ es que, dados $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, existe un único camino de i a j en Q_A si y sólo si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_i, V_j) \neq 0$.

Demostración. $\Longrightarrow$] Se sigue de los lemas 4.23 y 4.24.

$\Longleftarrow$] Mostraremos que el epimorfismo $\varphi : kQ_A \to A$ es en realidad un isomorfismo. Sea $I = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Sabemos que $R_{Q_A}^l \subseteq I \subseteq R_{Q_A}^2$ para algún $l \in \mathbb{N}$. Sea $\omega = (b|\alpha_p, \ldots, \alpha_1|a)$ un camino en Q_A. Entonces $\varphi(\omega)$ es el endomorfismo de V que al verlo como matriz tiene a 0 en todas sus entradas excepto en la entrada ab, donde tiene a $\gamma_{i_a,j_a}^{i_b,j_b}$, por lo que $\varphi(\omega) \neq 0$. Ahora bien, sea $x = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_1\omega_q \in kQ_A$, donde el conjunto de caminos $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q\}$ es linealmente independiente y $k_1, k_2, \ldots, k_q \neq 0$. Como entre los caminos $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q\}$ no hay dos que unan a los mismos puntos, se tiene que $\varphi(x) \neq 0$. De aquí tenemos que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ y, por lo tanto, φ es un isomorfismo. $\square$

CAPÍTULO 5

Carcajes Realizables

A lo largo de este capítulo, todos los carcajes serán finitos, sin ciclos dirigidos y sin más de un camino entre dos vértices.

Según vimos al final del capítulo anterior, si $V = \bigoplus_{l=1}^{m} V_l$ es una representación de $\mathcal{L}_n$, donde V_i es una representación inescindible para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $V_i \ncong V_j$ si $i \neq j$; y $A := \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V)$, entonces $A \cong kQ_A$ si y sólo si dados $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ existe un único camino de e_i a e_j en Q_A si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}(V_i, V_j) \neq 0$. La pregunta ahora es, ¿para qué carcajes, sin ciclos dirigidos, Q, se cumple que existe una representación V de $\mathcal{L}_n$ tal que $\mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V) \cong kQ$?. En vista de la Proposición 4.20, podemos reformular la pregunta de la siguiente manera: ¿para qué álgebras básicas, hereditarias y de dimensión finita A se cumple que existe una representación V de $\mathcal{L}_n$ tal que $A \cong \mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V)$?. En este capítulo trataremos de dar una respuesta a dicha pregunta.

Definición 5.1 *Sea Q un carcaj. Diremos que Q es* (End)*-realizable en $\mathcal{L}_n$ si existe una representación V de $\mathcal{L}_n$ tal que $\mathrm{End}_{\mathcal{L}_n}(V) \cong kQ$ o, equivalentemente, si existe un Δ_n-módulo finitamente generado M tal que $kQ \cong \mathrm{End}_{\Delta_n}(M)$. Diremos que Q es realizable si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que Q es* (End)*-realizable en $\mathcal{L}_n$.*

Con la Definición 5.1, reformulamos la pregunta con la que iniciamos este capítulo: ¿cuáles son los carcajes realizables? Por nuestras observaciones al final del capítulo anterior, podemos decir que son aquellos para los que a cada vértice i de Q le podemos asociar una representación inescindible $[\imath_i, \jmath_i]$ de $\mathcal{L}_n$ de manera que la desigualdad

$$\imath_i < \imath_j < \jmath_i < \jmath_j$$

es cierta si y sólo si existe un camino de j a i.

5.1. Las técnicas que utilizaremos

El propósito de esta sección es dar a conocer las técnicas que se utilizarán para tratar de clasificar a los carcajes realizables. Por lo que vimos en la Proposición 4.25, un carcaj es realizable si existen $n \in \mathbb{N}$ y una asignación

$$\begin{aligned} r : Q_0 &\to \{\text{Representaciones inescindibles de } \mathcal{L}_n\} \\ i &\mapsto [r_i', r_i''] \end{aligned}$$

tal que $[r_i', r_i''] \ncong [r_j', r_j'']$ si $i \neq j$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_n}([r_i', r_i''], [r_j', r_j'']) \neq 0$ si y sólo si existen caminos de i a j en Q.

Definición 5.2 *Sea Q un carcaj. Sea C el conjunto de los intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Una* **realización** *de Q es una función*

$$\begin{aligned} r : Q_0 &\to C \\ i &\mapsto [r_i', r_i''] \end{aligned}$$

tal que $r_j' < r_i' < r_j'' < r_i''$ si y sólo si existe un camino de i a j en Q.

Es claro que un carcaj Q es realizable si y sólo si existe una realización de Q. De la definición se siguen algunos resultados básicos.

Proposición 5.3 *Sea Q un carcaj realizable. Entonces, para todo $X \subseteq Q_0$, el subcarcaj pleno generado por X, $Q(X)$, es realizable.*

Demostración. Sea r una realización de Q. Entonces la restricción de r a X es una realización de $Q(X)$. □

Proposición 5.4 *Sea Q un carcaj. Entonces, Q es realizable si y sólo si su carcaj dual Q^* es realizable.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Sea $r : i \mapsto [r_i', r_i'']$ una realización de Q. Entonces $-r : i \mapsto [-r_i'', -r_i']$ es una realización de Q^*.

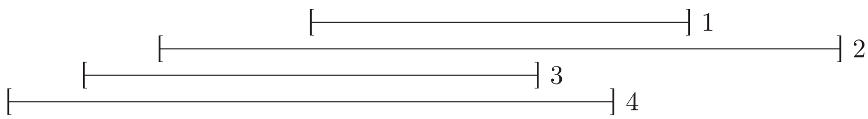
$\Longleftarrow$] Se sigue de $\Longrightarrow$], pues $(Q^*)^* = Q$. □

A lo largo de este capítulo, en lugar de dar explícitamente a las realizaciones las veremos gráficamente, lo que nos permitirá facilitar las pruebas de muchas proposiciones.

Ejemplo 5.5 *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{3}{\bullet} \\ \overset{2}{\bullet} \arrow[r] \arrow[ur] & \overset{4}{\bullet} \end{tikzcd}$$

una realización de Q es:

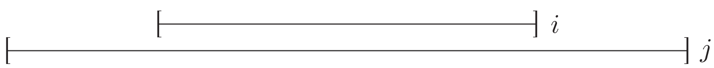


donde, el número que está a la derecha del intervalo nos dice de qué vértice en Q es la imagen.

Definición 5.6 *Sea Q un carcaj realizable y $r : i \mapsto [r'_i, r''_i]$ una realización de Q. Definimos el orden parcial $\prec_r$ en Q_0 por*

$$i \prec_r j \qquad si \qquad r'_j < r'_i < r''_i < r''_j$$

Gráficamente, $i \prec_r j$ si en la realización r se tiene:

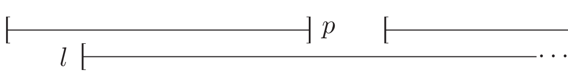


El orden parcial $\prec_r$ será una de nuestras herramientas principales. Veamos algunas propiedades de este orden, para esto recordemos (Definición 2.2) que, si $x \in Q_0$, entonces $\mathbb{P}_x$ es el conjunto de predecesores de x, y $\mathbb{S}_x$ es el conjunto de sucesores de x.

Lema 5.7 *Sean Q un carcaj realizable y $p, q \in Q_0$. Supongamos que no existen caminos dirigidos entre p y q y que existe un vértice $l \in Q_0$ tal que $p, q \in \mathbb{S}_l$. Entonces para toda realización r de Q se tiene que $p \prec_r q$ ó $q \prec_r p$.*

Demostración. Sea $r : i \mapsto [r'_i, r''_i]$ una realización de Q. Razonando por contradicción, supongamos que p y q no son comparables bajo $\prec_r$. Como no existen caminos dirigidos entre p y q, podemos suponer sin pérdida de generalidad que se tiene $r'_p < r''_p < r'_q < r''_q$.

Sea $l \in Q_0$ tal que l tiene un camino hacia p. Debemos tener $r'_p < r'_l < r''_p$



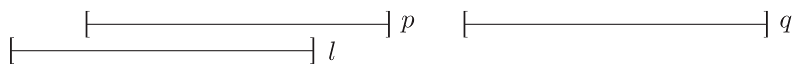
Pero entonces $r'_l < r'_q$, por lo que no podemos tener caminos hacia q. Una contradicción. □

Tenemos el dual al lema anterior.

Lema 5.8 *Sean Q un carcaj realizable y $p, q \in Q_0$. Supongamos que no existen caminos entre p y q y que existe $l \in Q_0$ con tal que $l \in \mathbb{S}_p \cap \mathbb{S}_q$. Entonces para toda realización r de Q se tiene que $p \prec_r q$ ó $q \prec_r p$.*

Demostración. Sea r una realización de Q. Razonando por contradicción, supongamos que p y q no son comparables bajo $\prec_r$. Como no existen caminos entre p y q, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r'_p < r''_p < r'_q < r''_q$

Sea $l \in Q_0$ tal que existe un camino de p a l. Entonces debemos tener $r'_l < r'_p < r''_l < r''_p$.

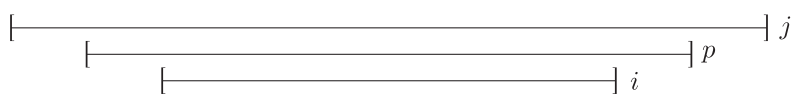


Entonces no podemos tener un camino de q a l, una contradicción. □

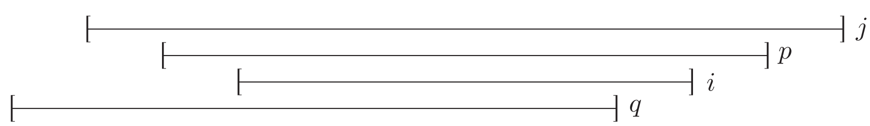
Otra aplicación de este orden parcial es el siguiente resultado.

Lema 5.9 *Sea Q un carcaj realizable. Sean $i, j \in Q_0$ tales que existe una realización r con $i \prec_r j$. Sea $p \in Q_0$ tal que $i \prec_r p \prec_r j$. Entonces, para todo $q \in \mathbb{S}_i \cap \mathbb{S}_j$, existe un camino de p a q.*

Demostración. Tenemos que la realización es de la siguiente manera



Sea q tal que existe un camino de i a q y un camino de j a q, tenemos que la realización tiene la forma

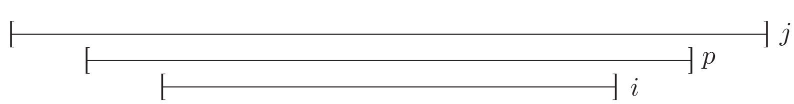


De donde se sigue que existe un camino de p a q. □

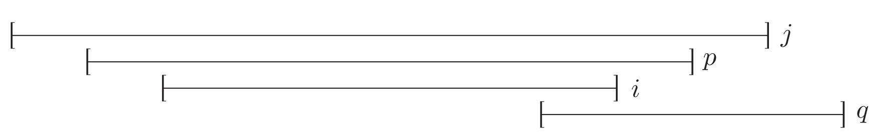
Tenemos el dual del lema anterior.

Lema 5.10 *Sea Q un carcaj realizable. Sean $i, j \in Q_0$ tales que existe una realización r con $i \prec_r j$. Sea $p \in Q_0$ tal que $i \prec_r p \prec_r j$. Entonces, para todo $q \in \mathbb{P}_i \cap \mathbb{P}_j$, existe un camino de q a p.*

Demostración. La realización es



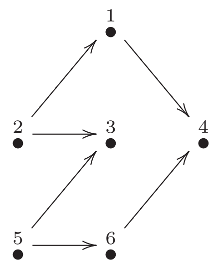
Sea q tal que existe un camino de q a i y un camino de q a j. Entonces la realización es



Por lo que q también tiene un camino a p. $\square$

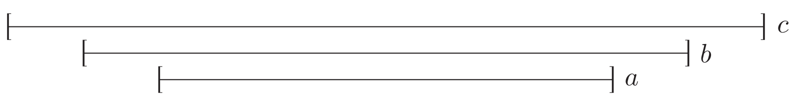
Como una aplicación de los lemas 5.7, 5.8 5.9 y 5.10 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.11 *El carcaj*



no es realizable.

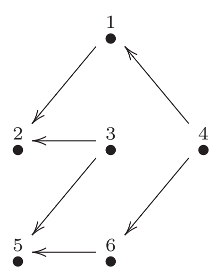
Demostración. Supongamos, por el contrario, que el carcaj es realizable. Sea r una realización. Por el Lema 5.7 los vértices 1 y 6 son comparables bajo $\prec_r$. Por el mismo lema los vértices 3 y 6 también son comparables. Por el Lema 5.8 los vértices 3 y 1 son comparables. Entonces los vértices 1, 3 y 6 forman una cadena $a \prec_r b \prec_r c$.



1. Si $b = 1$ entonces, por el Lema 5.10, todo vértice que tenga caminos a 2 y a 6 también tendrá caminos a 1. 5 es un vértice que contradice esta afirmación.
2. Si $b = 2$ entonces, por el Lema 5.9, todo vértice que tenga caminos desde 1 y 6 también tendrá caminos desde 3. 4 es un vértice que contradice esta afirmación.
3. Si $b = 6$ entonces, por el Lema 5.10, todo vértice que tenga caminos a 1 y a 3 también tendrá caminos a 6. 2 es un vértice que contradice esta afirmación.

En cualquiera de los casos llegamos a una contradicción, con lo que concluimos que el carcaj no es realizable. $\square$

Corolario 5.12 *El carcaj*



no es realizable.

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.4 y del Corolario 5.11, pues el carcaj en cuestión es el dual del carcaj en el Corolario 5.11. □

5.2. Extensiones de Realizaciones

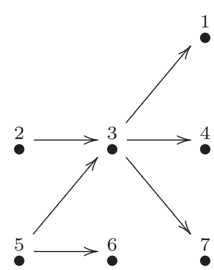
5.2.1. Árboles

Definición 5.13 *Sea* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *un carcaj, sean* $x \in Q_0$*,* $y \notin Q_0$*. Definimos el carcaj* $Q_{x\to} := ((Q_{x\to})_0, (Q_{x\to})_1, s_{x\to}, t_{x\to})$ *de la siguiente manera*

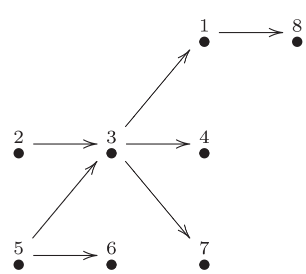
$$\begin{gathered}(Q_{x\to})_0 = Q_0 \cup \{y\}\\ (Q_{x\to})_1 = Q_1 \cup \{\alpha\}\\ s_{x\to}|_{Q_1} = s,\ s_{x\to}(\alpha) = x\\ t_{x\to}|_{Q_1} = t,\ t_{x\to}(\alpha) = y\end{gathered}$$

En otras palabras, $Q_{x\to}$ no es más que "pegar" el vértice y al carcaj Q mediante una flecha que va de x a y.

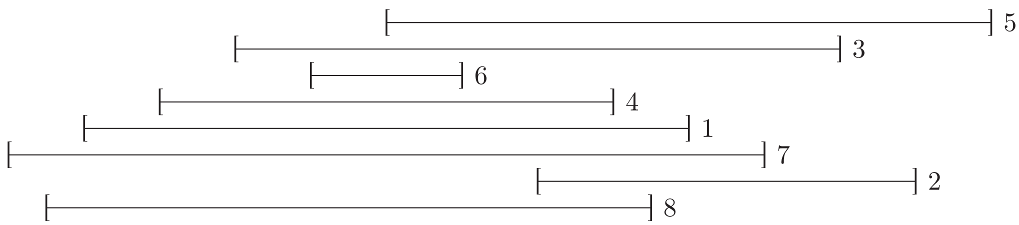
Ejemplo 5.14 *Sea* Q *el carcaj*



Sean $x = 1$*,* $y = 8$*. Entonces el carcaj* $Q_{x\to}$ *es*



Este carcaj es realizable:



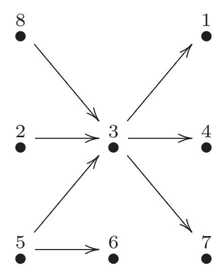
Análogamente a la Definición 5.13, tenemos la siguiente definición.

Definición 5.15 *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj, y sea $x \in Q_0$. Sean y, α tales que $y \notin Q_0$, $\alpha \notin Q_1$. Definimos el carcaj $Q_{x\leftarrow}$ como,*

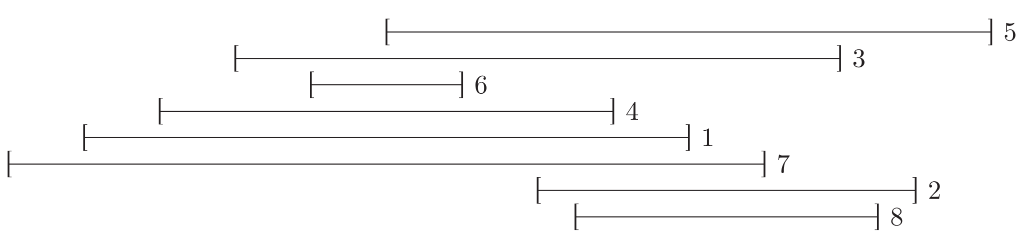
$$Q_{x\leftarrow} = ((Q^*)_{x\rightarrow})^*$$

El carcaj $Q_{x\leftarrow}$ no es nada más que "pegar" el vértice y al carcaj Q mediante una flecha α que va de y a $x \in Q_0$.

Ejemplo 5.16 *Sea Q el carcaj del ejemplo 5.20. Si $x = 3, y = 8$ el carcaj $Q_{x\leftarrow}$ es*



Este carcaj también es realizable:



En los ejemplos 5.14 y 5.16 vimos ejemplos en los que, si Q es un carcaj realizable, entonces $Q_{x\rightarrow}$ y $Q_{x\leftarrow}$ también son realizables. Para ciertos carcajes, podemos demostrar que para todo $x \in Q_0$ los carcajes $Q_{x\rightarrow}$ y $Q_{x\leftarrow}$ son realizables.

Proposición 5.17 *Sea Q un carcaj realizable. Sea $x \in Q_0$ tal que no existe $X \subseteq Q_0$, con $x \in X$ y el carcaj $Q(X)$ de la siguiente manera:*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \overset{x}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \\ \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[ur] \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Entonces $Q_{x\to}$ es realizable.

Demostración. Sea $r : i \mapsto [r'_i, r''_i]$ una realización de Q. Extenderemos r a una realización de $Q_{x\to}$. Haremos esto por casos.

Caso 1.- $\mathbb{S}_x \neq \emptyset$ y $\mathbb{P}_x \neq \emptyset$

Sea

$$M_1 := \text{máx}(\{r'_j \mid j \in Q_0, r'_j < r'_x\} \cup \{r''_l \mid l \in Q_0, r''_l < r'_x\}).$$

Elegimos r'_y de manera que $M_1 < r'_y < r'_x$. Sean

$$N_1 := \text{máx}\{r'_i \mid i \in \mathbb{P}_x\}$$

y

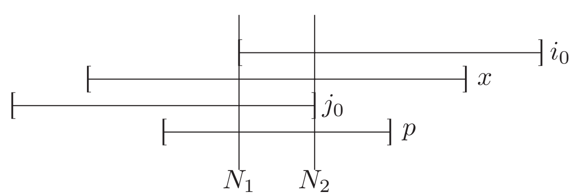
$$N_2 := \text{mín}\{r''_j \mid j \in \mathbb{S}_x\}$$

Notamos que $N_1 < N_2$, pues $\mathbb{S}_x \subseteq \mathbb{S}_i$ para todo $i \in \mathbb{P}_x$. Sean $i_0 \in \mathbb{P}_x$, $j_0 \in \mathbb{S}_x$ tales que $N_2 = r''_{j_0}$, $N_1 = r'_{i_0}$.

Afirmamos que no existe un vértice $p \in Q_0$ tal que

1. $p \prec_r x$
2. $r'_p < N_1 < N_2 < r''_p$

Veamos esto. Supongamos, por el contrario, que sí existe tal p, se tiene entonces que la realización es,



Y por lo tanto el subcarcaj generado por $\{x, j_0, i_0, p\}$ tiene que tener la forma:

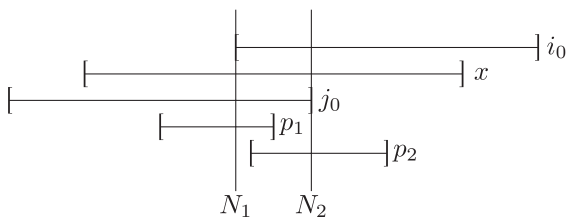
$$\begin{tikzcd} \overset{i_0}{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{p}{\bullet} \arrow[d] \\ \overset{x}{\bullet} \arrow[r] & \overset{j_0}{\bullet} \end{tikzcd}$$

Cosa que no es posible pues no hay más de un camino dirigido entre cualesquiera dos vértices de Q.

Ahora afirmamos que no existen vértices p_1, p_2 tales que

1. $p_1, p_2 \prec_r x$,
2. $r'_{p_1} < N_1 < r''_{p_1} < N_2$,
3. $N_1 < r'_{p_2} < N_2 < r''_{p_2}$,
4. $r''_{p_1} < r''_{p_2}$.

Para ver esto, supongamos que sí existen tales vértices. Entonces la realización es:



Luego, el carcaj generado por $\{x, i_0, j_0, p_1, p_2\}$ es:

$$\begin{tikzcd} i_0 \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[r] & j_0 \\ p_1 & p_2 \arrow[l] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Este carcaj tiene justamente la forma del carcaj (5.1). Por nuestra suposición, no podemos tener subcarcajes de esta forma.

Definimos los conjuntos

$$A_1 := \{b \in Q_0 \mid r'_b < N_1 < r''_b < N_2\}$$

y

$$A_2 := \{a \in Q_0 \mid N_1 < r'_a < N_2 < r''_a\}.$$

Sean,

$$B_1 := \begin{cases} \text{máx}_{b \in \mathbb{P}(A_1)}\{r''_b\} & \text{si } A_1 \neq \emptyset, \\ N_2 & \text{si } A_1 = \emptyset; \end{cases}$$

y

$$B_2 := \begin{cases} \text{mín}_{a \in \mathbb{S}(A_2)}\{r'_a\} & \text{si } A_2 \neq \emptyset, \\ N_1 & \text{si } A_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Se tiene que $B_1 < B_2$. Sea r''_y en el intervalo abierto (B_1, B_2). Veamos que si definimos $r(y) = [r'_y, r''_y]$ tenemos una realización de $Q_{x\to}$. Es claro que $r'_y < r'_x < r''_y < r''_x$. Además, como para todo vértice i en $\mathbb{P}_x$ se tiene que $r'_i < N_1 < B_1 < r''_y$, tenemos que $r'_y < r'_i < r''_y < r''_i$. Ahora, si p es un vértice tal que $x \prec_r p$, por construcción también se tendrá $y \prec_r p$. Por construcción se tiene que $y \prec_r j$ para todo $j \in \mathbb{S}_x$. Si se tiene que el intervalo $[r'_p, r''_p]$ es ajeno al intervalo $[r'_x, r''_x]$ entonces también será ajeno a $[r'_y, r''_y]$. Falta ver los vértices p para los que se cumple que $p \prec_r x$. Podemos separar a estos vértices en:

$$X_1 := \{p \prec_r x \mid [r'_p, r''_p] \subseteq [r'_x, B_1]\} \text{ y } X_2 := \{p \prec_r x \mid [r'_p, r''_p] \subseteq [B_2, r''_x]\}$$

entonces se tendrá que $p \prec_r y$ para todo $p \in X_1$ y que, como intervalos de números reales, $[r'_y, r''_y] \cap [r'_p, r''_p] = \emptyset$ para todo $p \in X_2$. Se sigue entonces que r es una realización de $Q_{x\to}$ y, por lo tanto, que $Q_{x\to}$ es realizable.

Caso 2.- $\mathbb{S}_x = \emptyset$.

Este caso es fácil. Sólo definimos M_1 igual que en el caso 1, y elegimos r'_y en el intervalo abierto (M_1, r'_x). Sea

$$M_2 := \text{máx}(\{r'_i \mid r'_i < r''_x\} \cup \{r''_j \mid r''_j < r''_x\}.$$

Elegimos r''_y de manera que $M_2 < r''_y < r''_x$. Es fácil verificar que si hacemos $r(y) = [r'_y, r''_y]$ entonces r es una realización de $Q_{x\to}$.

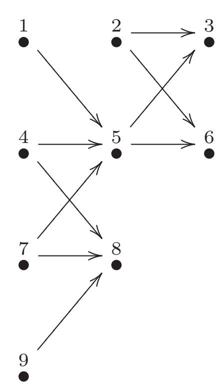
Caso 3.- $\mathbb{P}_x = \emptyset$.

Este caso también es fácil. Elegimos r'_y como en el caso anterior. Sea

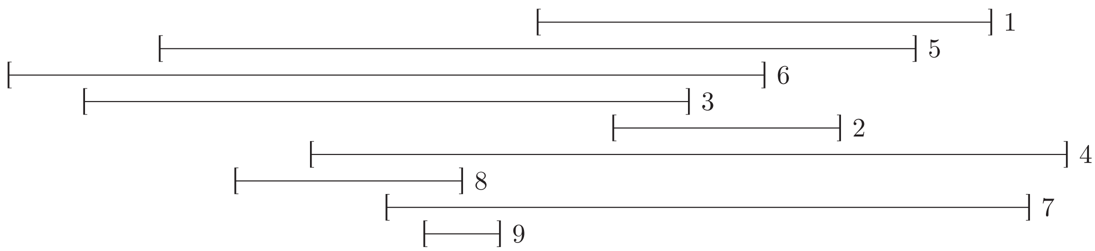
$$M_3 := \text{mín}(\{r'_i \mid r'_x < r'_i\} \cup \{r''_j \mid r'_x < r''_j\});$$

y elegimos r''_y en el intervalo abierto (r'_x, M_3). Si hacemos $r(y) = [r'_y, r''_y]$ tendremos que r es una realización de $Q_{\to}x$. Hemos cubierto todos los casos. □

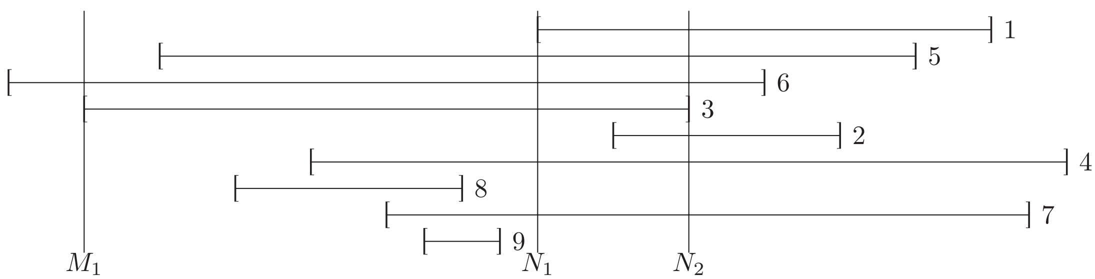
Como la prueba anterior es un tanto complicada, haremos un ejemplo para ver cuál fue el razonamiento en ella. Sea Q el carcaj



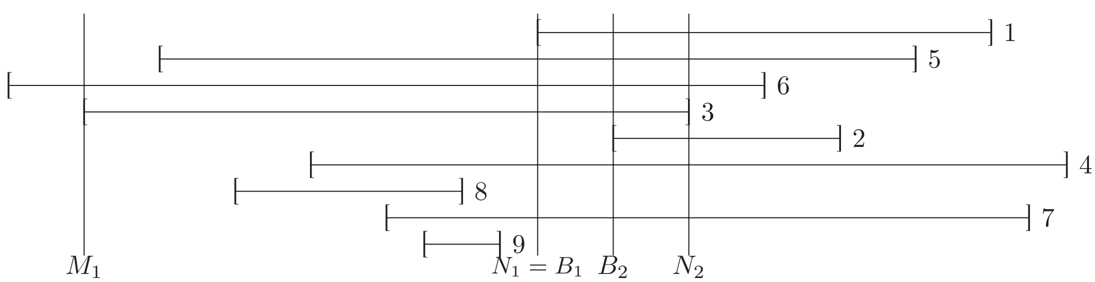
Hagamos una construcción del carcaj $Q_{5\rightarrow}$. Q cumple las hipótesis del lema, una realización de Q es:



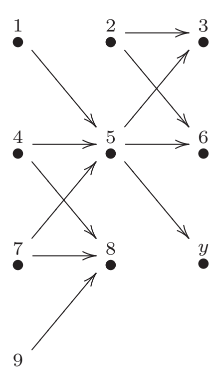
Ubiquemos a M_1, N_1 y N_2 en la realización anterior:



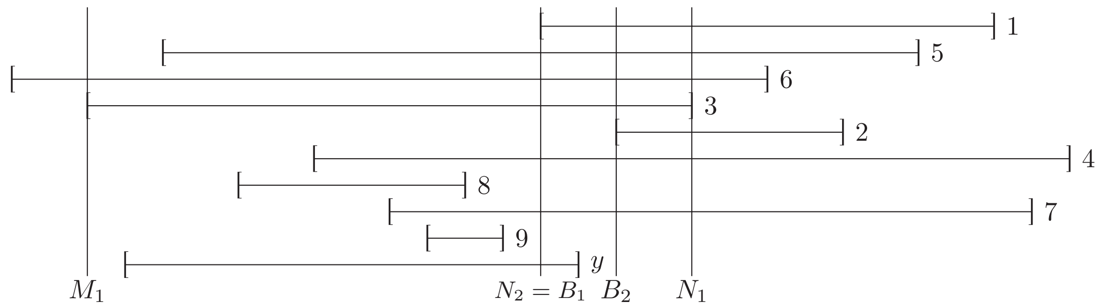
Tenemos que $A_1 = \emptyset$ y que $A_2 = \{2\}$. Ubicamos entonces a B_1 y a B_2



Por lo que una realización del carcaj $Q_{5\rightarrow}$



es



Como corolario a la Proposición 5.17 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.18 *Sea Q un carcaj realizable. Sea $x \in Q_0$ tal que no existe $X \subseteq Q_0$, con $x \in X$ y el carcaj $Q(X)$ de la siguiente manera:*

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \overset{x}{\bullet} \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[dl] \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet &
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Entonces el carcaj $Q_{x\leftarrow}$ es realizable.

Demostración. Por el Lema 5.4 el carcaj Q^* es realizable. Como Q no tiene subcarcajes plenos de la forma (5.2), entonces Q^* no tiene subcarcajes plenos de la forma

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \overset{x}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \\
\bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

por lo que podemos aplicar la Proposición 5.17 al carcaj Q^*. Entonces $(Q^*)_{x\rightarrow}$ es realizable y por lo tanto $((Q^*)_{x\rightarrow})^*$ es realizable, pero este carcaj es $Q_{x\leftarrow}$, con lo que queda demostrado el resultado. □

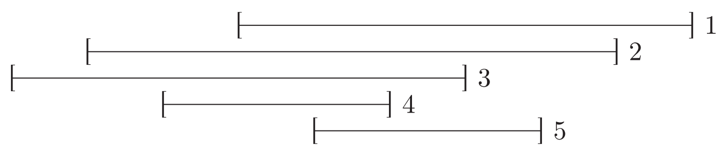
Notemos que en la Proposición 5.17 el hecho de que no exista $X \subseteq Q_0$ con el carcaj $Q(X)$ de la forma

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \overset{x}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \\
\bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

es una condición suficiente mas no necesaria. Para ver esto, tomemos el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] & 3 \\ 4 & 5 \arrow[l] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

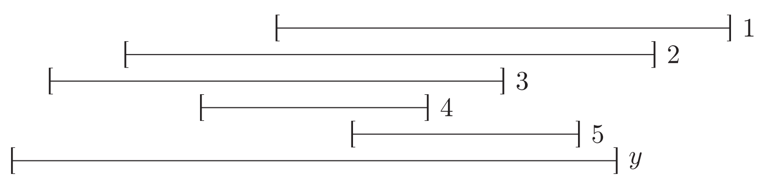
Este carcaj es realizable,



Y esta realización se puede extender a una realización del carcaj $Q_{2\to}$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \\ 4 & 5 \arrow[l] \arrow[ur] & y \end{tikzcd}$$

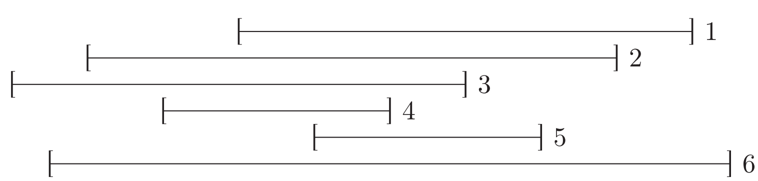
A saber,



Sin embargo, si tomamos el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] & 3 & 6 \arrow[l] \\ 4 & 5 \arrow[l] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

con la realización

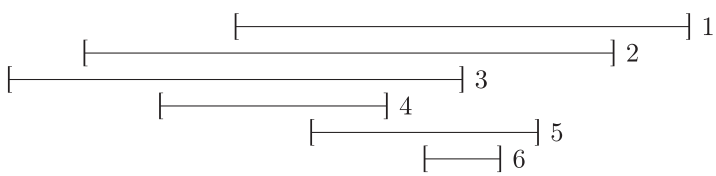


Entonces no podemos extender dicha realización a una realización del carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 & 6 \arrow[l] \\ 4 & 5 \arrow[l] \arrow[ur] & y & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

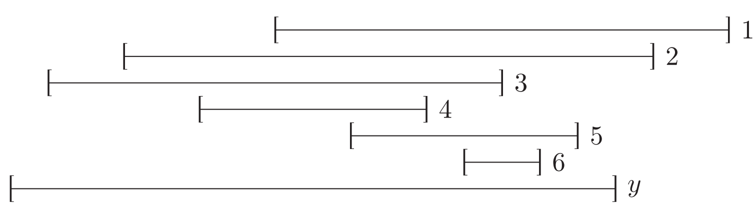
Para ver esto, supongamos por el contrario que sí podemos extender la realización a una realización, llamémosle r, del carcaj (5.3). Entonces, por el lema 5.7 se tiene que $3 \prec_r y$ ó $y \prec_r 3$. Si $3 \prec_r y$, entonces $r'_y < r'_3 < r'_6$ y $r'_6 < r''_2 < r''_y < r''_2 < r''_6$, con lo que tendríamos $r'_y < r'_6 < r''_y < r''_6$, una contradicción pues en el carcaj (5.3) no existen caminos de 6 a y. Si $y \prec_r 3$, tenemos que $r'_3 < r'_y < r'_4 < r'_1 < r''_y$. Si $r''_y < r''_4$ llegamos a una contradicción, pues tendríamos $r'_y < r'_4 < r''_y < r''_4$ y en el carcaj (5.3) no existen caminos de 4 a y. Si $r''_y > r''_4$ también llegamos a una contradicción, pues en este caso tendríamos $r'_y < r'_5 < r''_y < r''_5$ y no existen caminos de 5 a y. Concluímos entonces que no podemos extender la realización.

El hecho de que no podamos extender una realización en particular no significa que no podamos extender cualquier realización. Tomemos el mismo carcaj de ejemplo, pero ahora con la realización



(5.4)

La realicación (5.4) sí es extendible a una realización del carcaj (5.3), a saber de la siguiente manera,



Lo que nos dice que el hecho de que exista o no una extensión de cierta realización es independiente del hecho de que el carcaj ${}_yQ_x$ sea realizable.

Definición 5.19 *Sea Q un carcaj. Diremos que Q es un* **árbol** *si su gráfica subyacente (es decir, la gráfica que se obtiene al olvidar la dirección de las flechas de Q) es un árbol.*

Ejemplo 5.20 *El carcaj del Ejemplo 5.13 es un árbol. Además, en el Ejemplo 5.13 también vimos que el carcaj es realizable.*

El hecho de que el carcaj en el ejemplo anterior sea realizable no es casualidad. De hecho, de la Proposición 5.17 y su corolario, podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema 5.21 *Sea Q un árbol. Entonces Q es realizable.*

Demostración. Se sigue directamente de la Proposición 5.17 y su corolario, pues todo árbol lo podemos obtener empezando con un vértice y pegando vértices iniciales o finales. □

5.2.2. 2-Coronas

Definición 5.22 *Sean X y Y conjuntos, y sea $Z \subseteq X \cap Y$. Sean ι_1, ι_2 las inclusiones de Z en X y Y, respectivamente. Al pushout en la categoría* **Sets** *(ver apéndice) de ι_1 y ι_2 lo denotaremos por*

$$X \coprod_Z Y$$

Este conjunto no es más que la unión ajena de X y Y bajo la relación de equivalencia que identifica a los elementos de Z.

Definición 5.23 *Sean P y Q carcajes. Sea $X \subseteq P_0 \cap Q_0$. Definimos el* **pushout** *de P y Q respecto a X*

$$P \coprod_X Q$$

como

$$(P \coprod_X Q)_0 = P_0 \coprod_X Q_0$$

$$(P \coprod_X Q)_1 = P_1 \coprod Q_1$$

Donde el vértice inicial y final de cada flecha están dados por sus vértices iniciales en P y Q, respectivamente. Es decir, si $\alpha \in Q_1$ entonces $s(\alpha)$ y $t(\alpha)$ están dadas por las composiciones

$$Q_1 \overset{s,t}{\to} Q_0 \to P_0 \coprod_X Q_0$$

Ejemplo 5.24 *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{2}{\bullet} \\
\overset{3}{\bullet} \arrow[r] & \overset{4}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

Y sea P el carcaj

$$\begin{tikzcd}
\overset{2}{\bullet} \arrow[dr] & \\
\overset{4}{\bullet} \arrow[r] & \overset{1}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

Si $X = \{2, 4\}$ entonces $Q \coprod_X P$ es

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 1' \end{tikzcd}$$

Definición 5.25 *Al carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \\ 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

lo llamaremos **2-corona**.

Veamos que, en el sentido de extensión de carcajes, las 2-coronas se comportan de manera similar a los vértices.

Proposición 5.26 *Sea Q un carcaj realizable. sea $x \in Q_0$ tal que no existe $X \subseteq Q_0$ con $Q(X)$ de la forma*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \overset{x}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \\ \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Y sea P la siguiente 2*-corona,*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & b \\ x \arrow[r] \arrow[ur] & c \end{tikzcd}$$

Entonces $Q \coprod_{\{x\}} P$ es realizable.

Demostración. Como no existe $X \subseteq Q_0$ con $Q(X)$ de la forma (5.6), por la Proposición 5.17 se tiene que el carcaj ${}_cQ_x$ es realizable. Más aún, tendremos también que el carcaj ${}_b({}_cQ_x)_x$ es realizable. Además, de la prueba de la Proposición 5.17 se tiene que, en la realización r de ${}_b({}_cQ_x)_x$,

$$b \prec_r c \prec_r y \quad \text{para todo } c, b \neq y \in \mathbb{S}_x.$$

Sólo falta definir $r(a)$. Definimos el conjunto

$$B := \{z \in Q_0 \mid z \prec_r b\}.$$

Sea

$$A_1 := \begin{cases} \text{máx}\{r''_z \mid z \prec_r b\} & \text{si} B \neq \emptyset \\ r'_b & \text{si} B = \emptyset \end{cases}$$

Y elegimos $r'_a \in (A_1, r''_b)$. Ahora sea

$$A_2 := \text{mín}(\{r'_z \mid r''_c < r'_z\} \cup \{r''_w \mid r''_c < r''_w\})$$

y elegimos $r''_a \in (r''_c, A_2)$. De la defininición de de $r(a)$ queda claro que

$$r'_c < r'_b < r'_a < r''_b < r''_c < r''_a.$$

Y, si z es cualquier otro vértice en Q_0 tenemos varios casos. El primero es aquel en el que $r''_z < r''_b$, de donde se sigue que $r''_z < r''_a$. El segundo caso es en el que $r''_c < r'_z$, de donde se sigue que $r''_c < r''_a < A_2 \leq r'_z$. Si $z \prec_r b$ tenemos $r''_z \leq A_1 < r'_a$. Por último, si z tiene caminos a x también tendrá caminos a b y c y por lo tanto tendremos $r'_z \prec_r A_1 < r'_a < r''_c < r''_a < A_2 \leq r''_z$. Se sigue entonces que tenemos una realización de Q'. $\square$

Como corolario a la Proposición 5.26 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.27 *Sea Q un carcaj realizable, y sea $x \in Q_0$ tal que no existe $X \subseteq Q_0$ con $Q(X)$ de la forma*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \overset{x}{\bullet} \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[dl] \\ \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet & \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

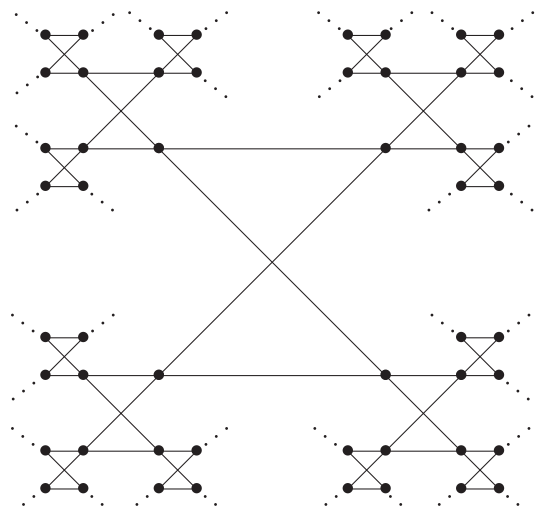
Sea P' la siguiente 2-corona,

$$\begin{tikzcd} \overset{a}{\bullet} & \overset{b}{\bullet} \arrow[l] \arrow[dl] \\ \overset{x}{\bullet} & \overset{c}{\bullet} \arrow[l] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

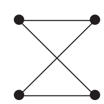
Entonces $Q \coprod_{\{x\}} P'$ es realizable.

Demostración. Como Q no tiene subcarcajes plenos de la forma (5.7) entonces Q^* no tiene subcarcajes plenos de la forma (5.6). Entonces, por la proposición anterior tenemos que el carcaj $Q^* \coprod_{\{x\}} P'^*$ es realizable. Por lo tanto $(Q^* \coprod_{\{x\}} P'^*)^*$ es realizable, y este carcaj es justamente $Q \coprod_{\{x\}} P'$. $\square$

Corolario 5.28 *Todos los carcajes de la forma*



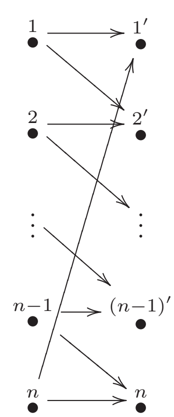
donde el hecho de que las aristas no tienen dirección significa que la dirección puede ser cualquiera siempre que 4 vértices acomodados de la forma



formen una 2-corona, son realizables.

5.3. Bloques

Definición 5.29 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la n*-**corona** *como el siguiente carcaj,*

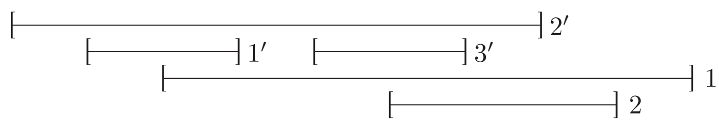


Proposición 5.30 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 3$, entonces la n-corona no es realizable.*

Demostración. Veamos que si una n-corona es realizable, entonces para toda realización r los vértices $\{1', 2', \dots, n'\}$ están ordenados de manera lineal bajo $\prec_r$. Para esto, vamos a ver que cualesquiera dos vértices son comparables.

Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i > j$. Sea $\eta = i - j$. Mostraremos que i' y j' son comparables por inducción sobre η. Supongamos entonces que $\eta = 1$, entonces $i = j + 1$ y por lo tanto el vértice j tiene flechas a i' y j', de donde se sigue que i' y j' son comparables.

Si $\eta = 2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $j = 1$, $i = 3$. Supongamos que $1'$ y $3'$ no son comparables. Como $2'$ es comparable tanto con $1'$ como con $3'$ debemos tener que la realización se ve



Ahora bien, $4'$ es comparable con $3'$. Debemos tener que $4' \prec_r 3'$, pues de otra manera se podrían dar dos casos: tendríamos caminos de 1 o de 2 hacia $4'$; o que $2' \prec_r 4'$, lo que no es posible pues 3 tiene caminos a $3'$ y $4'$ pero no a $2'$. Inductivamente tenemos que $3' \succ_r 4' \succ_r \cdots \succ_r n'$, una contradicción, pues $1'$ y n' son comparables.

Supongamos ahora que, si $i - j \leq \eta$, entonces i' y j' son comparables. Sean $\imath, \jmath \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\imath > \jmath$ y $\imath - \jmath = \eta + 1$. Supongamos que $\imath'$ y $\jmath'$ no son comparables bajo $\prec_r$. Por hipótesis de inducción, se tiene que todos los vértices que estén en $\{\jmath + 1, \dots, \imath - 1\}$ con comparables entre sí y son comparables con $\imath$ y $\jmath$. Sea $x' = \text{mín}_{\prec_r}(\{\jmath + 1, \dots, \imath - 1\}$. Entonces existen vértices a y b con flechas $a \to \imath$, $a \to x'$, $b \to \jmath'$, $b \to x'$. Por lo tanto $x' = \imath + 1, \jmath = \imath + 2$ y regresamos al caso anterior. Se sigue entonces que los vértices $\{1', 2', \dots, n'\}$ están ordenados de manera lineal.

Existe entonces $\sigma \in S_n$ tal que el orden en $\{1', 2', \dots, n'\}$ es

$$\sigma(1)' \prec_r \sigma(2)' \prec_r \cdots \prec_r \sigma(n)'$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\sigma(1) = 1$. Entonces nuestro orden parcial es

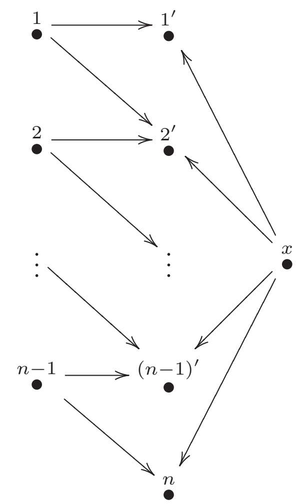
$$1' \prec_r 2' \prec_r 3' \prec_r \cdots \prec_r n'$$

ó

$$1' \prec_r n' \prec_r (n-1)' \prec_r \cdots \prec_r 2'$$

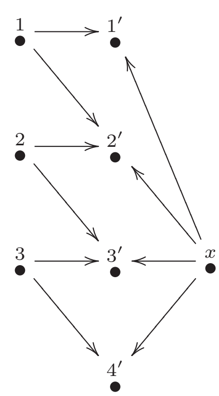
Si $n \geq 3$, en cualquier caso llegamos a una contradicción, pues hay vértices con flechas a 1 y a 2 que no tienen flecha a n (y vértices con flechas a 1 y n que no tienen flecha a 2. Concluímos entonces que la n-corona no es realizable. $\square$

Proposición 5.31 *Sea $n \geq 4$. Entonces el carcaj*

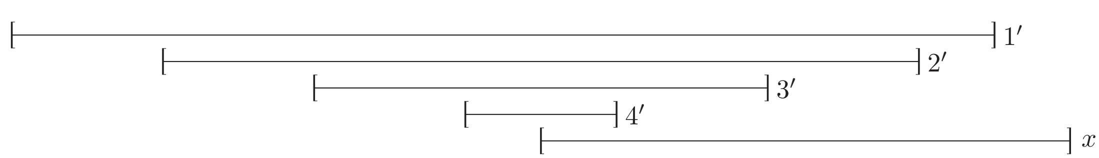


no es realizable.

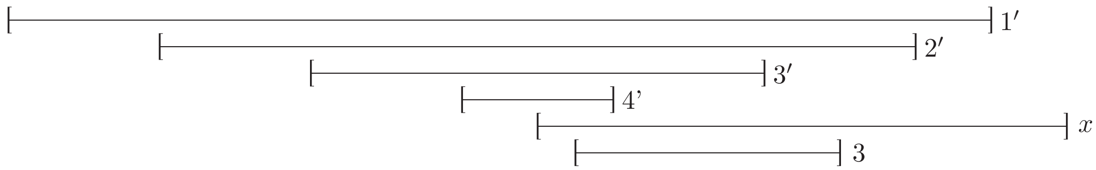
Demostración. Veamos que para $n = 4$ el carcaj no es realizable.



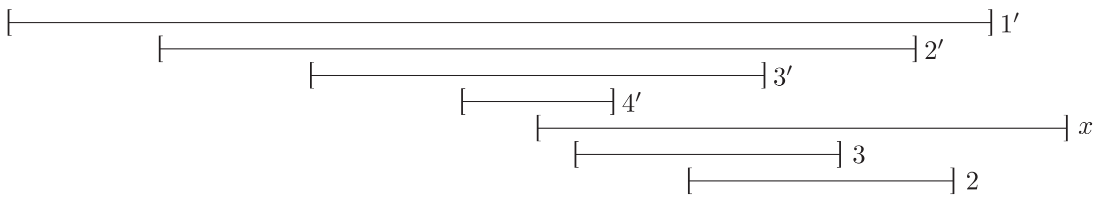
Supongamos que existe una realización r del carcaj. Como x tiene flechas a $1', 2', 3'$ y $4'$, entonces los vértices $1', 2', 3', 4'$ están linealmente ordenados bajo $\prec_r$. En este orden, los vértices $2'$ y $3'$ deben tener 2 vértices vecinos, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que nuestra realización se ve de la forma



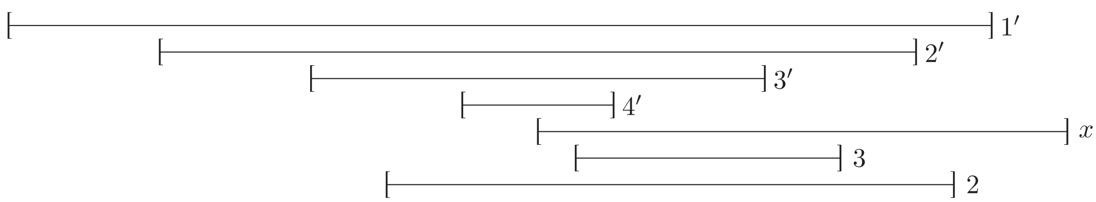
Entonces el vértice 3, que tiene caminos a $3'$ y $4'$, debe estar de la siguiente manera



Pero entonces no podemos definir $r(2)$, puesto que en las dos maneras posibles de definirlo obtenemos contradicciones. Una de ellas es

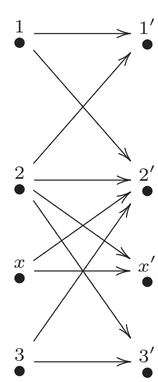


Y aquí obtenemos un camino de 2 a 3, una contradicción. La otra manera es



Con esta realización tenemos que tener un camino de x a 2, una contradicción. Se sigue entonces que el carcaj no es realizable. El resultado se sigue de observar que, para $n > 4$, todos los carcajes de este tipo contienen a un subcarcaj pleno con la forma del carcaj de 4 vértices. $\square$

Proposición 5.32 *El carcaj*



no es realizable.

Demostración. Supongamos que el carcaj sí es realizable y sea r una realización. Se tiene que $1, 2$ y 3 forman una cadena bajo $\prec_r$ y, que como 2 tiene que tener dos vecinos, la cadena es de la forma

$$i \prec_r 2 \prec_r j$$

Ahora bien, 2 y x también son comparables bajo $\prec_r$. No se puede tener $2 \prec_r x$, pues de lo contrario tendríamos una de las dos siguientes posibilidades

$$2 \prec_r x \prec_r j \quad \text{ó} \quad 2 \prec_r j \prec_r x$$

no podemos tener ninguna de las dos posibilidades pues existen vértices que tienen caminos desde j y 2 pero no desde x, así como existen vértices que tienen caminos desde x y 2 pero no desde j. Se debe tener entonces que $x \prec_r 2$. Pero, como x tiene una flecha a $2'$, entonces x también es comparable con i. Tenemos una de las dos opciones

$$i \prec_r x \prec_r 2 \quad \text{ó} \quad x \prec_r i \prec_r 2$$

Ninguna de las dos es posible. Concluímos entonces que el carcaj no es realizable. □

Proposición 5.33 *El carcaj*

$$\begin{tikzcd}
1' \arrow[r] \arrow[drr] & 2' & 3' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dr] & 4' \\
1 \arrow[ur] \arrow[r] & 2 \arrow[urr] \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4
\end{tikzcd} \tag{5.8}$$

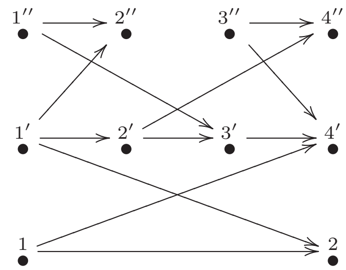
no es realizable.

Demostración. Sea $X = \{1', 2', 3', 4', 2, 3\}$. Entonces $Q(X)$ es

$$\begin{tikzcd}
1' \arrow[r] \arrow[ddr] & 2' \\
3' \arrow[ur] \arrow[r] & 4' \\
2 \arrow[ur] \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

que es una 3-corona. Como la 3-corona no es realizable, se sigue que el carcaj (5.8) tampoco lo es. □

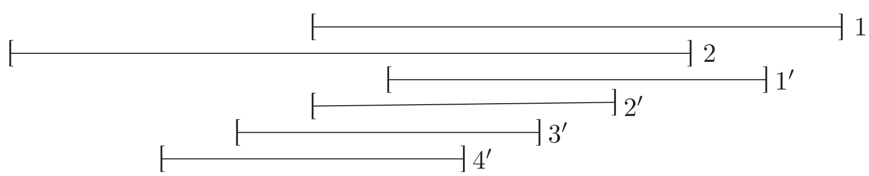
Proposición 5.34 *El carcaj*



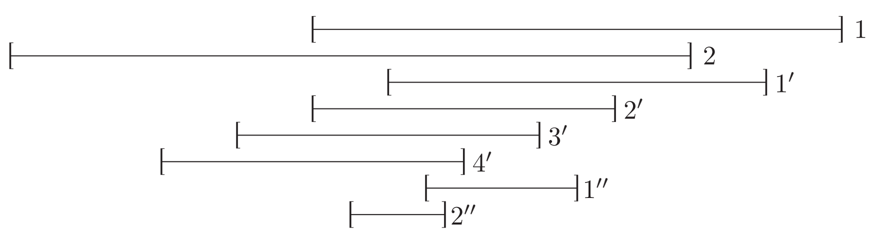
(5.9)

no es realizable.

Demostración. Tratemos de construir una realización. Para toda realización, se tiene que 1 y $1'$ son comparables bajo $\prec_r$. Supongamos primero que $1' \prec_r 1$. Entonces la realización tiene ir,

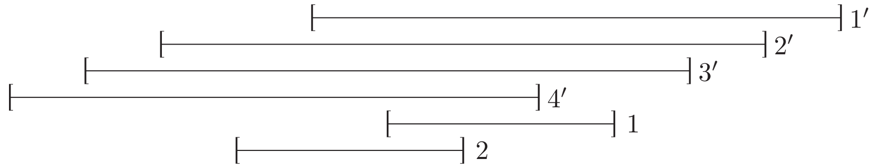


Los vértices $1''$ y $1'$ son comparables bajo $\prec_r$. No podemos tener $1' \prec_r 1''$ pues, como $1''$ tiene una flecha a $3'$, tendríamos que tener caminos de $1''$ a 2. Entonces la realización tiene que ir,

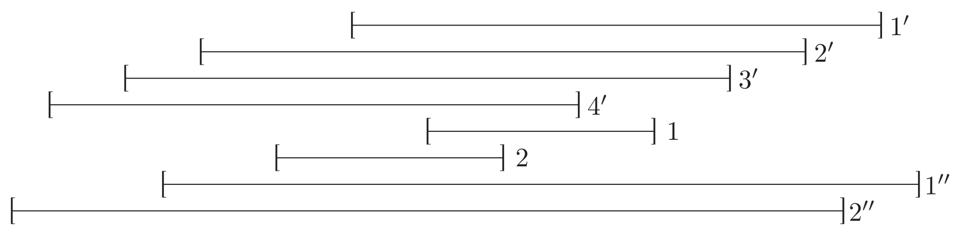


Ahora bien, $3''$ y $2'$ son comparables bajo $\prec_r$. No se puede tener $3'' \prec_r 2'$ pues entonces tendríamos un camino de $1''$ a $4''$ ó de $3''$ a $2''$. Tampoco podemos tener $2' \prec_r 3''$ pues, como $3''$ tiene una flecha a $4'$ pero no a $1'$, $2'$ ó $3'$, entonces tendríamos un camino de $1'$ a $3''$ ó de $3''$ a 2. Se sigue entonces que no se puede tener una realización del carcaj (5.9) con $1' \prec_r 1$.

Ahora supongamos que $1 \prec_r 1'$. La realización debe ir,



Los vértices $1'$ y $1''$ deben ser comparables bajo $\prec_r$. No podemos tener $1'' \prec_r 1'$, pues, como $1''$ tiene caminos a $3'$, tendríamos caminos de $1''$ a 1 ó a 2. Por lo tanto la realización debe ir

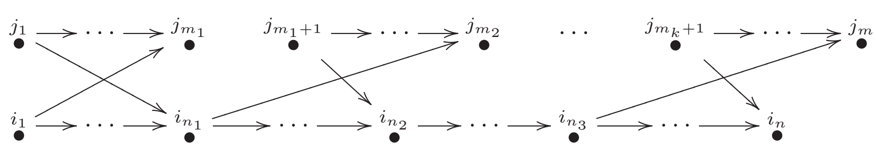


Ahora bien, los vértices $2'$ y $3''$ deben ser comparables bajo $\prec_r$, pues ambos tienen una flecha a $4''$. No se puede tener $2' \prec_r 3''$ pues, como $3''$ tiene caminos a $4'$ pero no a $1'$, $2'$ y $3'$, tendríamos caminos de $1''$ a $3''$ ó de $3''$ a $2''$. Tampoco se puede tener $3'' \prec_r 2'$, pues entonces tendríamos un camino de 1 a $4''$ ó de 2 a $4''$. Se sigue que no existe una realización de (5.9) con $1 \prec_r 1'$. Por lo tanto, el carcaj no es realizable. $\square$

Los carcajes de las cinco proposiciones anteriores cumplen una propiedad importante. Son conexos (es decir, entre cualesquiera dos vértices existe un camino no necesariamente dirigido) y, si eliminamos un vértice cualquiera y las flechas que entran y salen de él sigue siendo conexo. A este tipo de gráficas se les llama 2-conexas. En este trabajo, a los carcajes cuya gráfica subyacente es 2-conexa los llamaremos **bloques**. Las 2-coronas serán de importancia a la hora de estudiar los bloques realizables. Una 2-corona es un bloque, y necesariamente nos encontraremos con una 2-corona a la hora de estudiar bloques; supongamos que Q es un bloque y que la siguiente cadena lineal ya no se puede extender en Q,

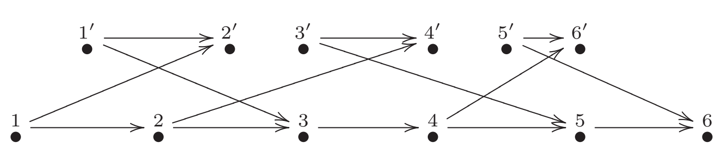
$$\overset{i_1}{\bullet} \longrightarrow \overset{i_2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{i_{n-1}}{\bullet} \longrightarrow \overset{i_n}{\bullet}$$

Como Q es un bloque, debemos tener un subcarcaj de la siguiente manera



Coloquialmente hablando, llegamos de i_1 a i_n “concatenando 2-coronas”.

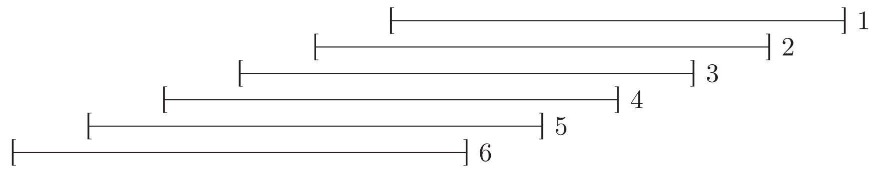
Lema 5.35 *El carcaj*



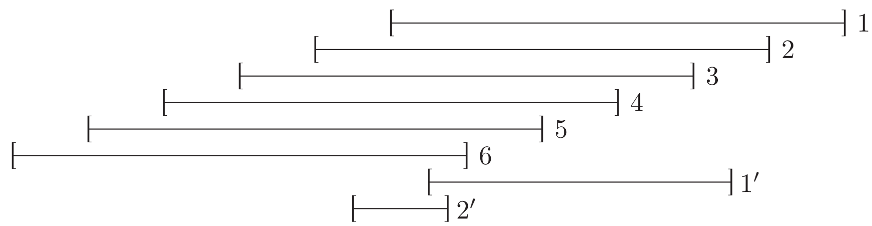
(5.10)

es realizable

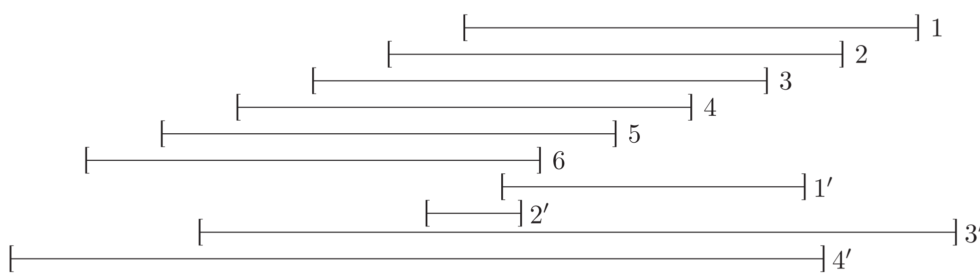
Demostración. Construyamos una realización r. Se debe de tener



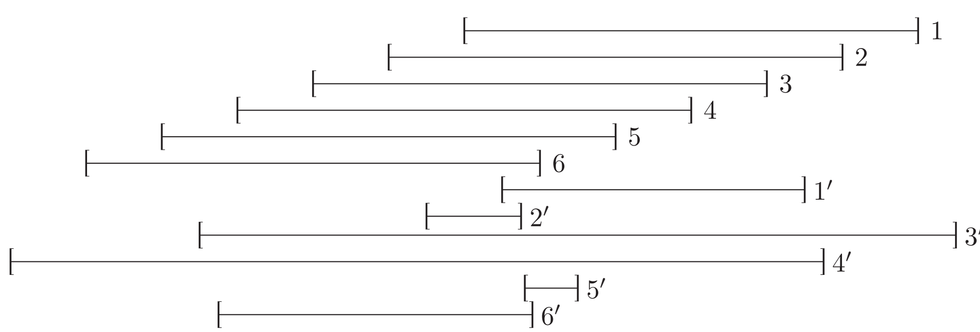
Se tiene que 1 y $1'$ son comparables bajo $\prec_r$. Supongamos que $1' \prec_r 1$. Como $1'$ tiene caminos a $3, 4, 5$ y 6 pero no a 1 y a 2 debemos tener lo siguiente



Ahora bien, 1 y 2 tienen caminos a $4'$, pero $3, 4, 5$ y 6 no. 2 y $3'$ son comparables bajo $\prec_r$. Se debe tener que $2 \prec_r 3'$ pues de lo contrario tendríamos caminos de $1'$ a $3'$. Entonces tenemos



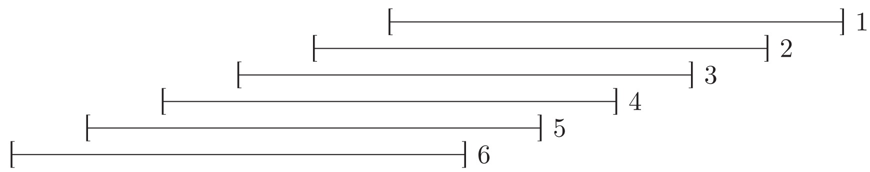
Entonces tenemos que una realización es



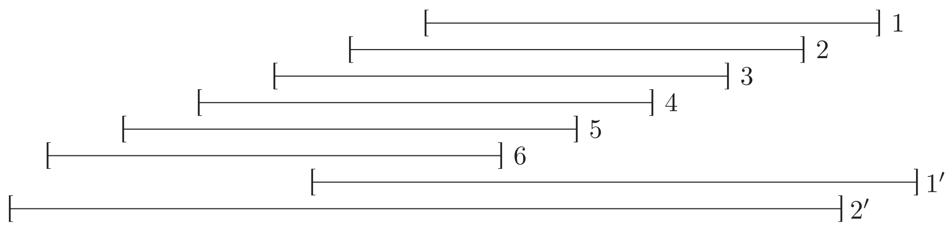
□

Observación 5.36 *Intentemos dar una realización del carcaj (5.10) alterna a la dada en el Lema 5.35, ahora con* $1 \prec_r 1'$*:*

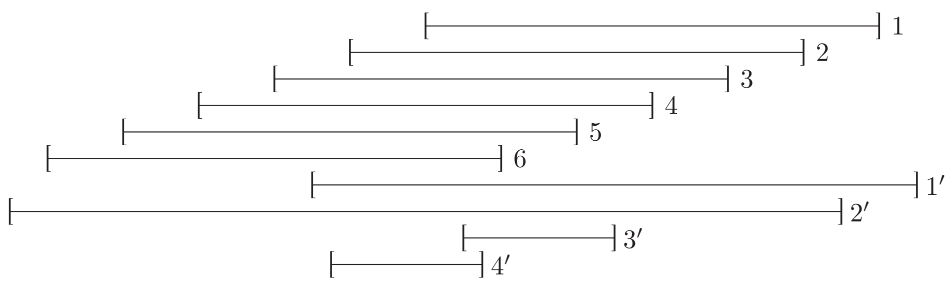
Teníamos



Y entonces, si $1 \prec_r 1'$ debemos de tener

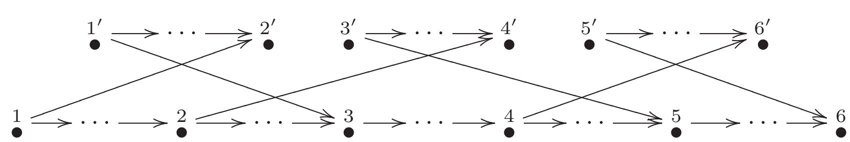


Ahora bien, $3'$ y 2 son comparables bajo $\prec_r$, puesto que ambos tienen flecha a $4'$. No podemos tener $2 \prec_r 3'$ pues, como $3'$ tiene caminos a 5 y 6, tendríamos caminos de $1'$ a $3'$ ó de $3'$ a $2'$. Debemos entonces tener



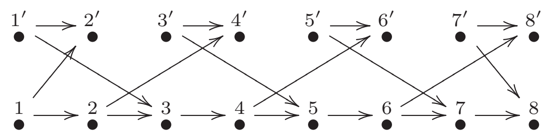
Por último, 4 y $5'$ son comparables, pues ambos tienen una flecha a $6'$. Si $5' \prec_r 4$, entonces debemos tener $5' \prec_r 3' \prec_r 4$, pues de lo contrario tendríamos un camino de $5'$ a $4'$. Pero esto no puede ser, pues $3'$ no tiene caminos a $6'$. Si $4 \prec_r 5'$ entonces se debe tener $r'_6 < r'_{5'} < r'_5$. , y $r''_4 < r''_5$. Pero entonces tendríamos un camino de $1'$ a $5'$ ó de $5'$ a $2'$, una contradicción. Se sigue entonces que cualquier realización del carcaj (5.10) tiene que tener $1' \prec_r 1$.

Se sigue de la realización del carcaj (5.10) que los bloques de la forma



son realizables. Sin embargo, esto es lo más que nos podemos extender con 2-coronas.

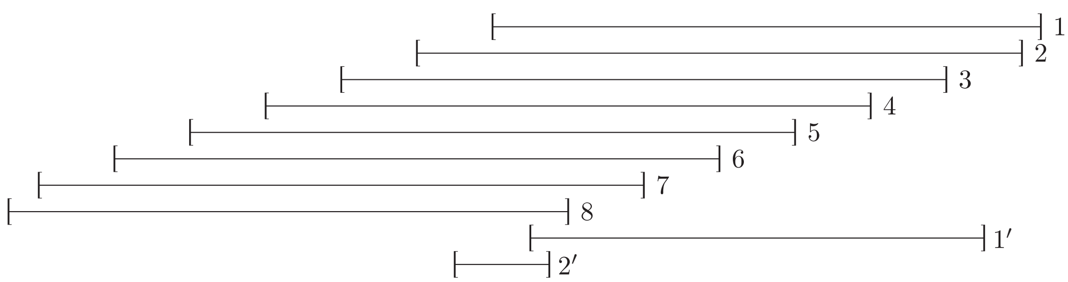
Proposición 5.37 *El carcaj*



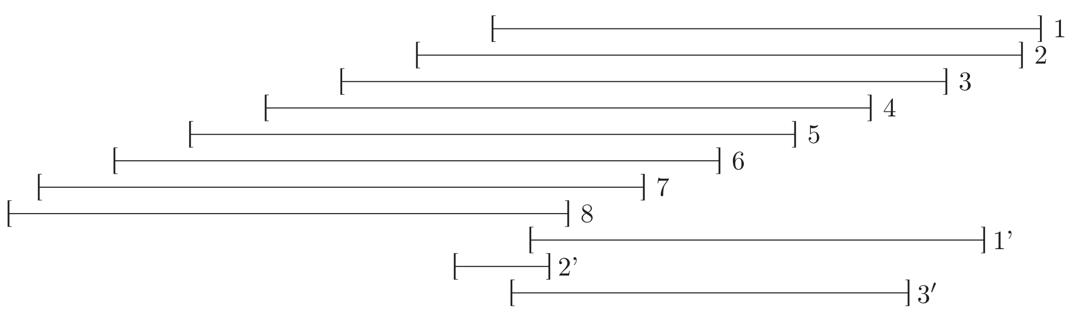
(5.11)

no es realizable.

Demostración. Intentemos construir una realización de (5.11) y veamos que no es posible. Como 1 y $1'$ tienen caminos a $2'$, para toda realización r se debe tener que $1 \prec_r 1'$ ó $1' \prec_r 1$. Supongamos que existe una realización con $1' \prec_r 1$. Tenemos entonces

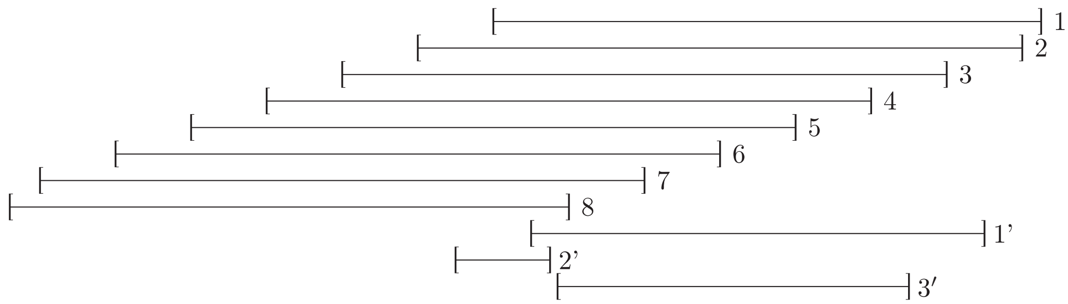


Ahora bien, 2 y $3'$ tienen caminos a $4'$, por lo que son comparables bajo $\prec_r$. No podemos tener $3' \prec_r 2$ pues, como $3'$ tiene una flecha a 5 las opciones posibles son



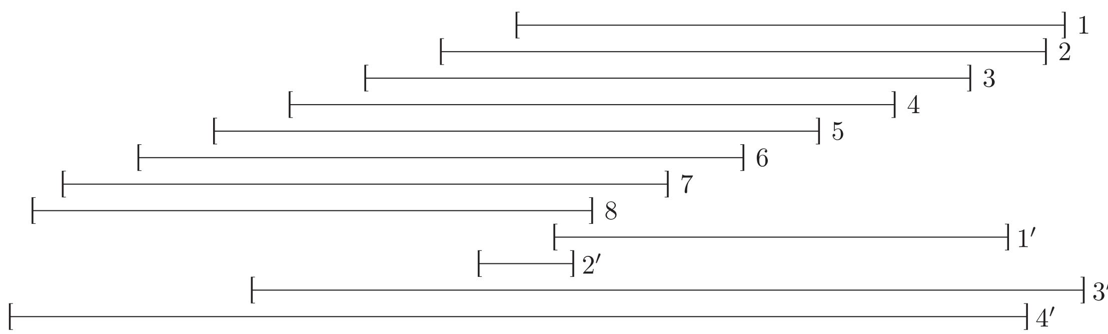
(5.12)

y

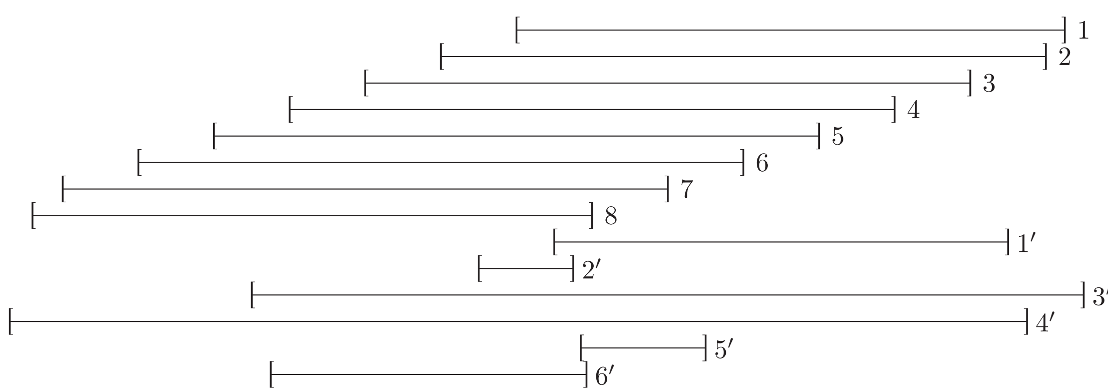


(5.13)

Descartamos la opción (5.12) pues $3'$ no tiene caminos a $2'$. Nos queda entonces la opción (5.13). Sin embargo en esta opción tenemos $3' \prec_r 1' \prec_r 2$, y $4'$ es un vértice que tiene caminos desde $3'$ y 2 pero no desde $1'$, por lo que tenemos que descartar también esta opción. Se sigue entonces que la realización tiene que ser



Como $5'$ y 4 tienen caminos a $6'$, son comparables bajo $\prec_r$. $5'$ tiene caminos hacia 7 y 8, pero no hacia 1, 2, 3, 4, 5 y 6, de donde se sigue que no podemos tener $4 \prec_r 5'$, pues de lo contrario tendríamos que tener caminos de 5 a $4'$. Se sigue entonces que debemos tener $5' \prec_r 4$ y la realización es



Ahora, como $7'$ y 6 tienen caminos a $8'$, son comparables. Supongamos que $7' \prec_r 6$. Debemos tener $7' \prec_r 5'$, pues si no tendríamos caminos de $7'$ a $6'$. Pero entonces tenemos $7' \prec_r 5' \prec_r 6$, y $5'$ no tiene camino a $8'$, una contradicción. Supongamos ahora que $6 \prec_r 7'$. Tendríamos que tener $r'_8 < r'_{7'} < r'_7$, y $r''_8 < r''_{7'}$. Esto no es posible pues esto nos crearía caminos desde $1'$ o $3'$ a $7'$, o de $7'$ a $4'$. Concluimos entonces que no existe una realización del carcaj con $1' \prec_r 1$. Tampoco existe una realización con $1 \prec_r 1'$, pues entonces existiría una realización del carcaj (5.10) con $1 \prec_r 1'$, una contradicción con la observación 5.36. $\square$

Veamos ahora qué tanto podemos continuar "subiendo" en un bloque.

Proposición 5.38 *El carcaj*

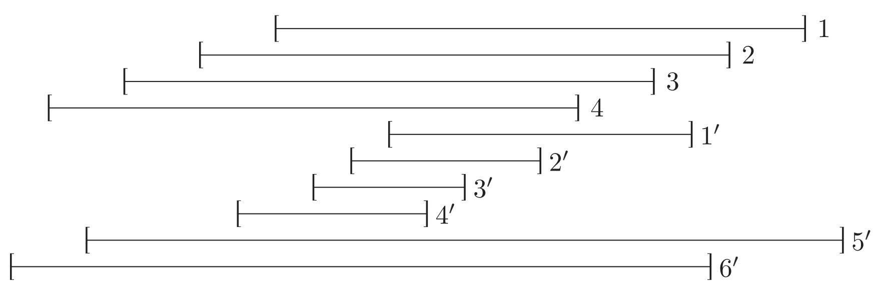
$$\begin{tikzcd}
\overset{1''}{\bullet} \arrow[r] \arrow[drr] & \overset{2''}{\bullet} & \overset{3''}{\bullet} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{4''}{\bullet} & & \\
\overset{1'}{\bullet} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[drrr] & \overset{2'}{\bullet} \arrow[r] \arrow[urr] & \overset{3'}{\bullet} \arrow[r] & \overset{4'}{\bullet} & \overset{5'}{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{6'}{\bullet} \\
& \overset{1}{\bullet} \arrow[r] \arrow[urr] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r] \arrow[urrr] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r] & \overset{4}{\bullet} &
\end{tikzcd} \tag{5.14}$$

no es realizable.

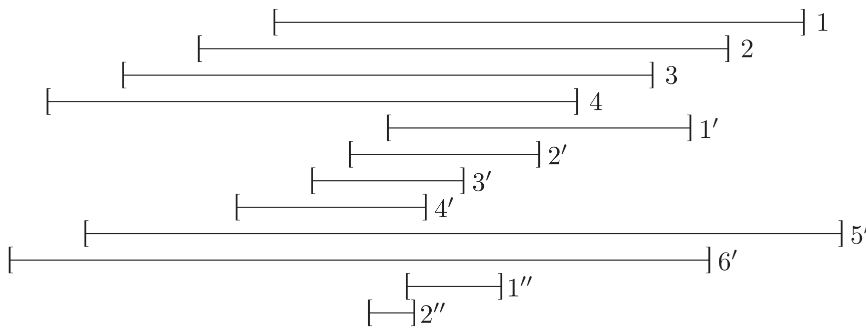
Demostración. Supongamos que el carcaj (5.14) sí es realizable. Cualquier realización debe extender a una realización del carcaj

$$\begin{tikzcd}
\overset{1'}{\bullet} \arrow[r] \arrow[drrr] & \overset{2'}{\bullet} \arrow[r] & \overset{3'}{\bullet} \arrow[r] & \overset{4'}{\bullet} & \overset{5'}{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{6'}{\bullet} \\
& \overset{1}{\bullet} \arrow[r] \arrow[urr] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r] \arrow[urrr] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r] & \overset{4}{\bullet} &
\end{tikzcd} \tag{5.15}$$

Y sabemos que tenemos básicamente dos realizaciones de este carcaj. Una con $1' \prec_r 1$ y la otra con $1 \prec_r 1'$. Empecemos con la realización $1' \prec_r 1$,

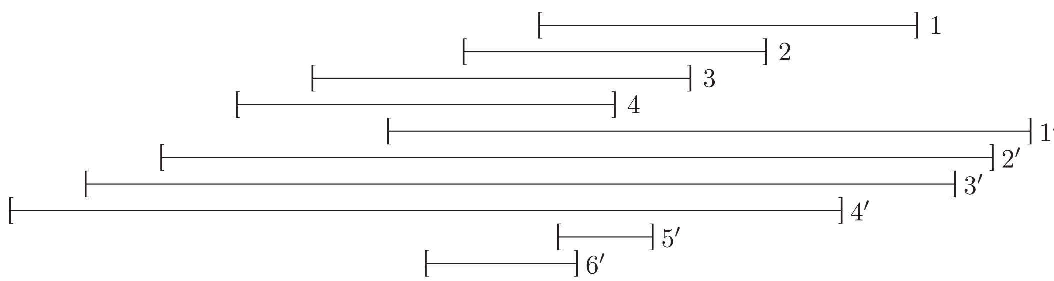


Extendamos pues a una realización del carcaj (5.14). $1'$ y $1''$ son comparables bajo $\prec_r$, pues ambos tienen flechas a $2''$. Como $1''$ tiene una flecha a $3'$, no podemos tener $1' \prec_r 1''$, pues entonces deberíamos tener una flecha de $1''$ a $6'$. Nuestra realización entonces es,

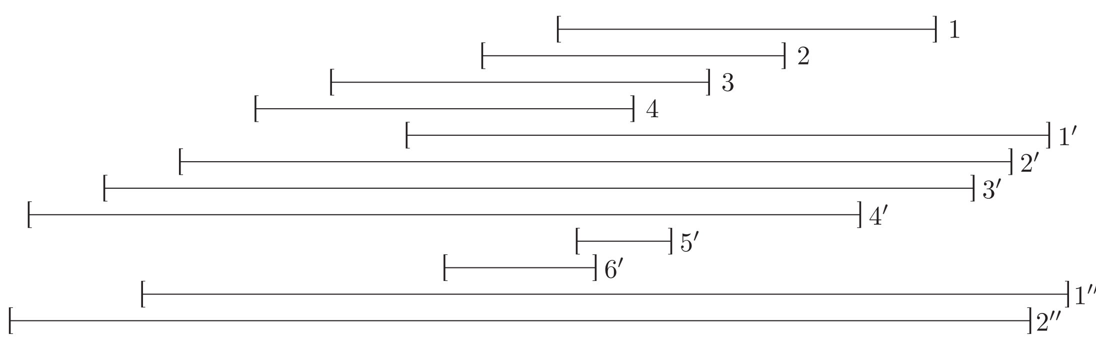


Ahora bien, $2'$ y $3''$ son comparables pues ambos tienen caminos hacia $4''$. No podemos tener $3'' \prec_r 2'$ pues entonces tendríamos un camino de $3''$ a $2''$ ó de $1''$ a $3''$. Tampoco podemos tener $2' \prec_r 3''$, pues entonces tendríamos un camino de $1'$ a $3''$ ó de $3''$ a 4. Se sigue entonces que la realización de (5.15) con $1' \prec_r 1$ no se puede extender a una realización de (5.14).

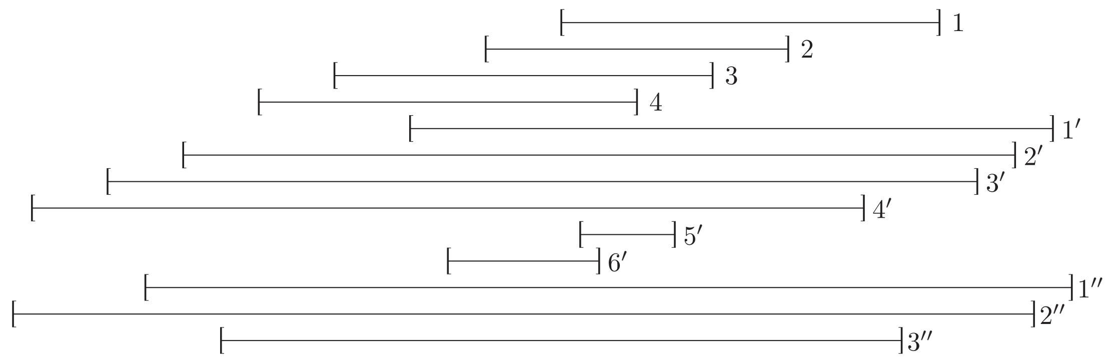
Intentemos ahora con la realización de (5.15) que tiene $1 \prec_r 1'$. Esta es



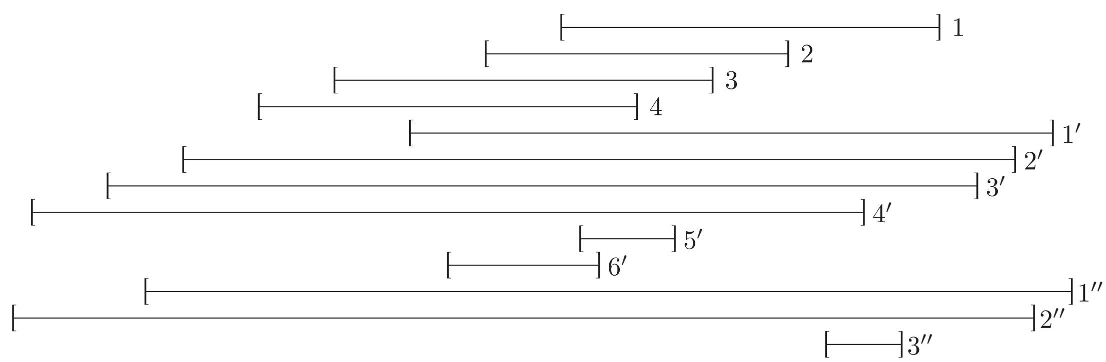
En cualquier extensión a una realización del carcaj (5.14) se debe tener que $1'$ y $1''$ son comparables, pues ambos tienen una flecha a $2''$. Como $1''$ tiene caminos a $3'$, no podemos tener $1'' \prec_r 1'$, pues entonces tendríamos un camino de $1''$ a 1. Nuestra realización entonces debe ser,



Ahora, $3''$ y $2'$ deben ser comparables, pues ambos tienen una flecha a $4''$. No podemos tener $2' \prec_r 3''$, porque entonces $3''$ tendría caminos a $2''$. Debemos tener entonces que $3'' \prec_r 2''$. Tenemos dos opciones para esto,

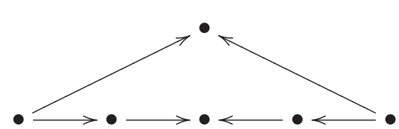


y

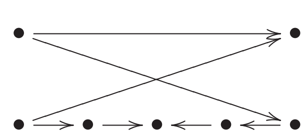


En la primera opción tendríamos caminos de 1, 2, 3 ó 4 a $4''$, por lo que no es posible. En la segunda opción tendríamos un camino de 1 a $4''$. Se sigue entonces que no existe la realización de (5.15) con $1 \prec_r 1'$ no se puede extender a una realización de (5.14). Por lo tanto, el carcaj (5.14) no es realizable. $\square$

Ahora bien, vimos en el Corolario 5.11 que el carcaj



no es realizable. Del mismo ejemplo vemos que el carcaj



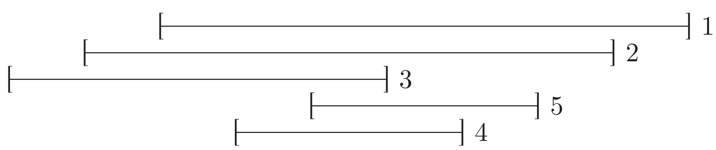
tampoco es realizable. Junto con estas observaciones, una consecuencia de la siguiente proposición es que, en un bloque realizable, un vértice no puede ser pozo de dos caminos distintos de longitud mayor que 1.

Proposición 5.39 *El carcaj*

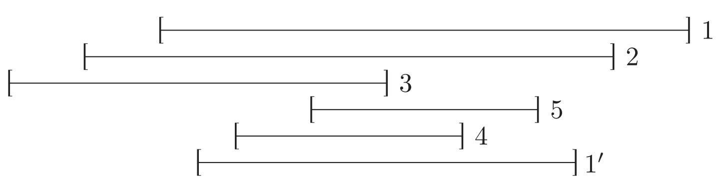
$$\begin{tikzcd}
1' \arrow[r] \arrow[drr] & 2' & & 3' & 4' \arrow[l] \arrow[dll] \\
1 \arrow[r] \arrow[ur] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 & 4 \arrow[l] \arrow[dl] & 5 \arrow[l] \arrow[ul] \\
& & 1'' & &
\end{tikzcd} \tag{5.16}$$

no es realizable.

Demostración. Intentemos construir una realización de (5.16). Sabemos que, si r es una realización, entonces 1 y 5 tienen que ser comparables bajo $\prec_r$. Como el carcaj es totalmente simétrico, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $5 \prec_r 1$.

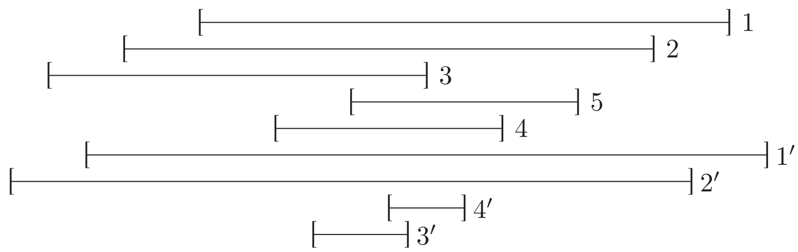


Ahora bien, 1 y $1'$ también son comparables. Supongamos que $1' \prec_r 1$. Además, $1'$ y 5 también son comparables, pues ambos tienen caminos a 3. Debemos entonces tener $5 \prec_r 1'$, pues de lo contrario tendríamos $1' \prec_r 5 \prec_r 1$, por lo que todo vértice con caminos desde 1 y $1'$ debería tener caminos desde 5, y $2'$ contradice este hecho. Tenemos entonces



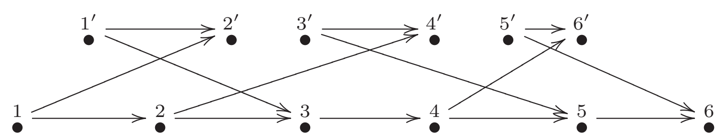
Pero entonces se tiene $4 \prec_r 1' \prec_r 2$, lo que no es posible puesto que 2 y 4 tienen flecha a $1''$, pero $1'$ no.

Los vértices $4'$ y 5 también son comparables bajo $\prec_r$. No se puede tener, sin embargo, que $5 \prec_r 4'$: el vértice $4'$ también es comparable con 1. Si se tiene que $4' \prec_r 1$, entonces tendríamos $5 \prec_r 4' \prec_r 1$, lo que no es posible pues 1 y 5 tienen caminos a $1''$ pero $4'$ no. Si se tiene que $1 \prec_r 4'$ entonces tendríamos $5 \prec_r 1 \prec_r 4'$, lo que tampoco es posible puesto que 5 y $4'$ tienen caminos a $3'$, pero 1 no. Entonces nuestra realización debe tener $1 \prec_r 1'$ y $4' \prec_r 5$,

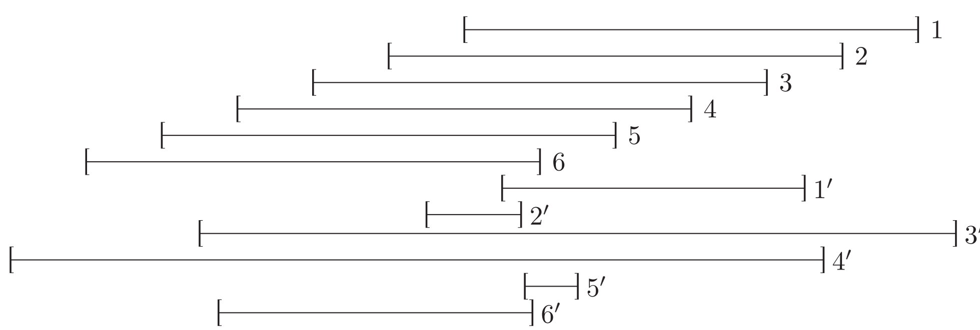


Ahora, procedemos a observar a $1''$. Este vértice tiene que se comparable con 3. Si $3 \prec_r 1''$ entonces tendríamos que tener caminos de $1'$ a $1''$. Si $1'' \prec_r 3$, tendríamos que tener caminos de $3'$ a $1''$ ó de $4'$ a $1''$. En cualquier de los dos casos llegamos a una contradicción, con lo que concluimos que el carcaj no es realizable. $\square$

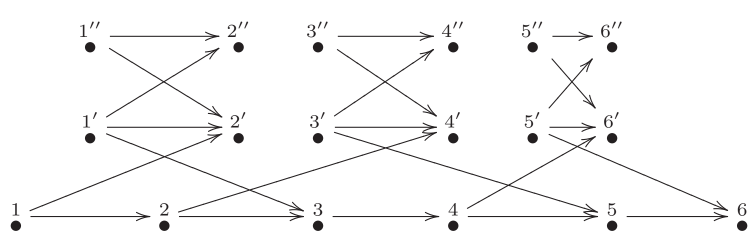
Se sigue entonces que en un bloque realizable no se puede tener que un vértice sea pozo de dos caminos distintos con longitud mayor que 1. Por dualidad, tampoco se puede tener que un vértice sea fuente de dos caminos distintos con longitud mayor que 1. Ahora regresemos al carcaj (5.10)



y su realización



Veamos que esta realización se puede extender a una realización de

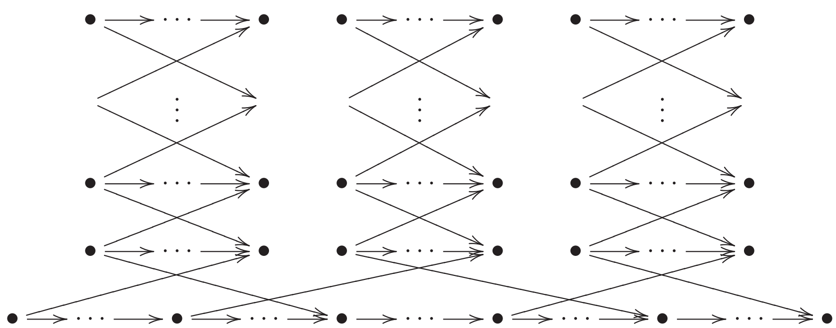


(5.17)

de la siguiente manera: elegimos $r(2'')$ de manera que $2'' \prec_r 2'$, y después elegimos $r(1'')$ de manera que $r''_{1''} < r'_5$ y $1'' \prec_r 1'$. Ahora elegimos $r(6'')$ de manera que

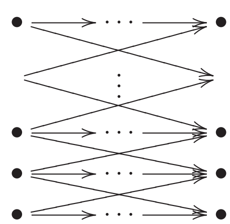
$6'' \prec_r 6'$, y elegimos $r(5'')$ de manera que $r''_{5''} < r'_6$ y $5'' \prec_r 5'$. Por último, hacemos $r(4'')$ de manera que $4' \prec_r 4''$ y elegimos $r(3'')$ de manera que $3' \prec_r 3''$. Este procedimiento se puede aplicar varias veces y obtenemos el siguiente resultado.

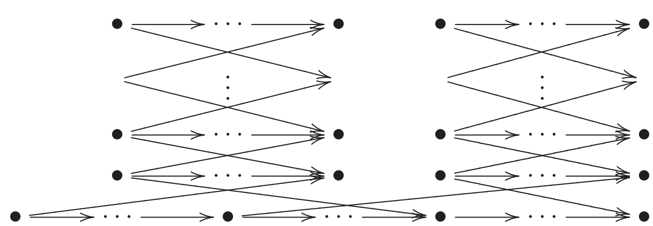
Proposición 5.40 *Los bloques de la forma*

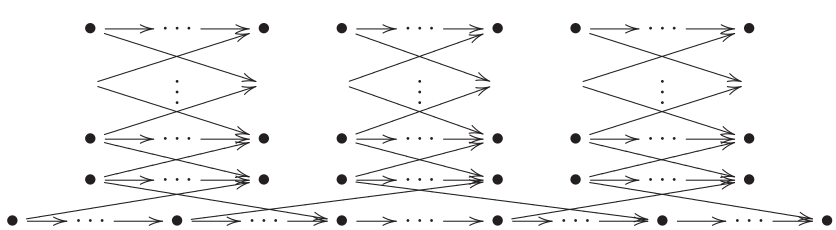


son realizables.

Si juntamos el resultado anterior con los resultados de las proposiciones 5.30, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34, 5.37, 5.38 y 5.39 obtenemos una caracterización completa de aquellos bloques realizables en donde ningún vértice es fuente o pozo de más de dos caminos de longitud 1. Son justamente los siguientes tipos de carcajes,

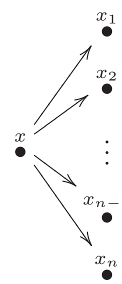






¿Qué sucede con los bloques donde hay vértices que son fuente de más de dos caminos de longitud 1? Veamos el siguiente resultado, que funciona como una generalización de 5.31.

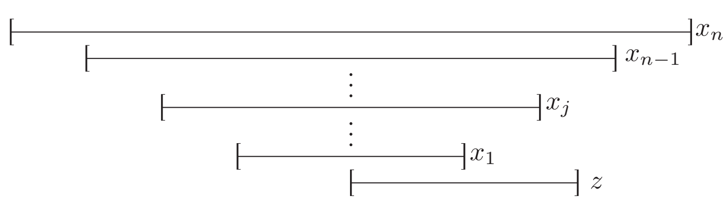
Proposición 5.41 *Sea Q un carcaj y sea $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq Q_0$ tal que $\mathbb{S}_i \cap \mathbb{S}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Sea P el siguiente carcaj*



Si el carcaj $Q \coprod_X P$ es realizable, entonces existe un orden total en X, digamos $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(n)}$, tal que:

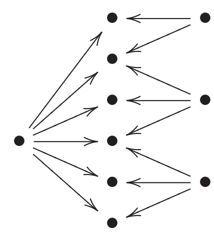
1. *Si $y \in \mathbb{P}_{x_{\sigma(i)}} \cap \mathbb{P}_{x_{\sigma(j)}}$ entonces $y \in \mathbb{P}_{x_{\sigma(l)}}$ para toda $i \leq l \leq j$.*
2. *Supongamos que existe un vértice z tal que $x_{\sigma(1)} \in \mathbb{S}_z$ pero $x_{\sigma(n)} \notin \mathbb{S}_z$. Entonces, para todo vértice w tal que $x_{\sigma(n)} \notin \mathbb{S}_w$ se cumple una de las tres siguientes posibilidades: $(\mathbb{S}_z \cap X) \cap (\mathbb{S}_w \cap X) = \emptyset$; $\mathbb{S}_z \cap X \subseteq \mathbb{S}_w \cap X$; ó $\mathbb{S}_w \cap X \subseteq \mathbb{S}_z \cap X$.*

Demostración. Sea r una realización de $Q \coprod_X P$. Por el Lema 5.7, la restricción de $\prec_r$ a X es un orden total en X. Por el Lema 5.9 se cumple la propiedad *1.* Demostremos ahora la propiedad *2.* Supongamos, por simplicidad, que σ es la identidad en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Sea $j = \text{máx}(\mathbb{S}_z \cap X)$. Se tiene que la realización de $Q \coprod_X P$ es de la siguiente manera

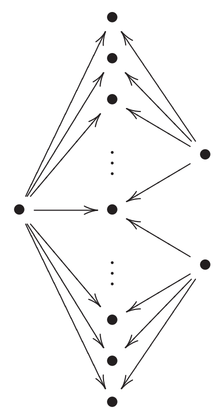


Supongamos que no se cumplen ninguna de las tres posibilidades de *2.* Entonces, por 5.9, $x_1 \notin \mathbb{S}_w$, existe $i \leq j$ tal que $x_i \in \mathbb{S}_w$ y existe $t > j$ tal que $x_t \in \mathbb{S}_w$. Como $x_1 \notin \mathbb{S}_w$ entonces $x_1 \prec_r w$ ó los intervalos $[r'_{x_1}, r''_{x_1}]$ y $[r'_w, r''_w]$ son ajenos. No puede pasar lo segundo, pues como $(\mathbb{S}_z \cap (X)) \cap (\mathbb{S}_w \cap X) \neq \emptyset$, se tiene que z y w son comparables bajo $\prec_r$, y como existe $t > j$ tal que w tiene caminos a x_t, se tiene que $z \prec_r w$. Se tiene entonces que $x_1 \prec_r w$. Como w no tiene caminos a x_n, se tiene que $w \prec_r x_n$. Pero entonces x, como tiene caminos a x_1 y a x_n, debe tener un camino a w, una contradicción. $\square$

Se tiene entonces que el siguiente bloque no es realizable



Y que, si tenemos un vértice que tenga caminos de longitud 1 a n vértices, entonces sin pérdida de generalidad debemos tener



APÉNDICE A

Pushout

Definición A.1 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sean $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ morfismos. El* **pushout** *de f y g (si existe) es un triplete (P, f', g') donde $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P), g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, P)$ son tales que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "g'"] & P \end{tikzcd}$$

conmuta, y deben cumplir la siguiente propiedad universal: si Q, f'', g'' son tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f''"] \\ Y \arrow[r, "g''"] & Q \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único morfismo $u : P \to Q$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\ Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & P \arrow[dr, dotted, "u"] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

Aunque el pushout de f y g no tiene por qué existir, veamos que, en caso de existir, es esencialmente único.

Proposición A.2 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ morfismos tales que el pushout de f y g existe. Supongamos que (P, f', g') y (Q, f'', g'') son pushouts de f y g. Entonces $P \cong Q$.*

Demostración. De la propiedad universal de (P, f', g') existe un único morfismo u tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\
Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "g''"] & P \arrow[dr, dotted, "u"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}$$

conmuta, y de la propiedad universal de (Q, f'', g'') existe un único morfismo u' tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f''"] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
Y \arrow[r, "g''"'] \arrow[drr, bend right, "g'"] & Q \arrow[dr, dotted, "u'"] & \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

conmuta. Consideremos la composición $u'u : P \to P$. Esta composición hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "g'"] & P \arrow[dr, dotted, "u'u"] & \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

De donde se sigue que $u'u = 1_P$. Análogamente se prueba que $uu' = 1_Q$ y por lo tanto P y Q son isomorfos. $\square$

El siguiente ejemplo de pushout es importante a lo largo del texto: en la categoría **Sets** consideremos a los conjuntos X y Y. Sea $Z \subseteq X \cap Y$. Tomemos las funciones de inclusión $\iota_1 : Z \to X$, $\iota_2 : Z \to Y$, que se calculan como $\iota_i(z) = z (i = 1, 2)$. Hagamos el pushout de ι_1 e ι_2. Consideremos la unión ajena de X y Y,

$$X\coprod Y := \{(x,1)\mid x\in X\}\cup\{(y,2)\mid y\in Y\},$$

y hagamos en $X\coprod Y$ la relación de equivalencia definida por

$$(\iota_1(z),1)\sim(\iota_2(z),2).$$

Es decir, hacemos la unión ajena de X y Y e identificamos como iguales aquellos elementos de Z que coinciden en la primera entrada. Tenemos funciones canónicas $X, Y \to (X\coprod Y)/\sim$. Veamos que, con estas funciones, $(X\coprod Y)/\sim$ es el pushout de ι_1 y ι_2. Es claro que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & (X\coprod Y)/\sim \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, sea E un conjunto y sean $f : X \to E$, $g : Y \to E$ funciones tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$$

conmuta. Definimos $u : (X\coprod Y)/\sim$ de la siguiente manera: si $x\in X\setminus Z$, entonces $u([(x,1)]_\sim) = f(x)$. Si $y\in Y\setminus Z$ entonces $u([y,2]_\sim) = g(y)$. Si $z\in Z$ entonces $u([z,1]_\sim) = f(z) = g(z)$. Esta función está bien definida, pues, si $x\in X\setminus Z$ entonces $[(x,1)]_\sim = \{(x,1)\}$, si $y\in Y\setminus Z$ entonces $[(y,2)]_\sim = \{(y,2)\}$ y, si $z\in Z$ entonces $[(z,1)]_\sim = \{(z,1),(z,2)\}$. Se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g"'] & (X\coprod Y)/\sim \arrow[dr, "u"] & \\ & & E \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, si se quiere que este diagrama conmute entonces u está obligada a ser de esta manera. Se tiene entonces que el pushout de ι_1 y ι_2 es $(X\coprod Y)/\sim$. Ahora bien, este pushout depende solamente de Z, por lo tanto definimos,

$$X\coprod_Z Y = (X\coprod Y)/\sim .$$

Nota A.3 *El origen de la notación es que, para el conjunto vacío,*

$$X\coprod_\emptyset Y = X\coprod Y,$$

y, además

$$X \coprod_{X \cap Y} Y = X \cup Y.$$

Bibliografía

[1] Anderson, F. y Fuller, K. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics 13. Springer-Verlag. 2ª edición. 1992.

[2] Assem, I., Simson, D., y Skowroński, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol. 1: Techniques of Representation Theory* London Mathematical Society Student Texts 65. Cambridge University Press. Cambridge. 2006.

[3] Barot, M. *Representations of Quivers* Notes from the ICTP Conference. 2006.

[4] Benson, D.J. *Representations and Cohomology. Vol. I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30. 1991

[5] Crawley-Boevey, W. *Lectures on Representations of Quivers*. 1992.

[6] Drozd, Yu. y Kirichenko, V.V. *Finite Dimentional Algebras*. Springer-Verlag, 1994.

[7] Simson, D. *An endomorphism algebra realization problem and Kronecker embeddings for algebras of infinite representation type*. Journal of Pure and Applied Algebra 172 (2002), pp 293-303.

[8] Simson, D. *On Corner type Endo-Wild algebras*. Journal of Pure and Applied Algebra 202 (2005), pp. 118-132.

[9] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory: A handbook for study and research*. Gordon and Breach Science Publishers. 1991.