



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Efecto de la dirección y magnitud del campo magnético
en la propagación de portadores en guías en forma de 'V'

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A

RICARDO JOSÉ OLVERA FLORES



TUTOR
DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres *Ricardo y Susana* por su paciencia y cariño incondicionales.

A mi hija *Camila*, la fuente de energía de mi vida.

Al *Dr. Marcelo del Castillo* por su inagotable disposición para analizar todos los ángulos durante el desarrollo de este trabajo.

A mi tutor *Gerardo Jorge Vázquez Fonseca* porque su puerta siempre ha estado abierta y por mostrar la ciencia en su estado natural: sencilla y fascinante; porque toda la Física puede aprenderse en los libros, pero su disfrute lo encontré en el aula.

<p>1. Datos del alumno Olvera Flores Ricardo José 56044431 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 0-9450345-8</p>
<p>2. Datos del tutor Dr Gerardo Jorge Vázquez Fonseca</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Dr Juan Carlos Alonso Huitrón</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Dr Luis Antonio Pérez López</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Dr Carlos Ignacio Mendoza Ruíz</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Fís Lucio Andrade Buendía</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Efecto del sentido del campo magnético en la propa- gación de portadores cargados en cavidades en forma de 'V' Sin subtítulo 53 p 2010</p>

TABLA DE CONTENIDO

Tabla de contenido	iii
Lista de Figuras	v
1 Resumen	1
2 Introducción	3
2.1 Cargas en movimiento	4
2.1.1 El electrón	4
2.1.2 La fuerza de Lorentz	4
2.1.3 Electrones en campos eléctricos	5
2.1.4 Electrones en campos magnéticos	7
2.1.5 Ecuaciones de movimiento	9
2.1.5.1 Campo eléctrico estático	10
2.1.5.2 Campo magnético estático	11
2.1.5.3 Confinamiento Magnético	15
2.1.5.4 Campos eléctricos y magnéticos estáticos	16
2.1.6 Radiación de una carga acelerada	18
2.1.7 Transmitancia	22

3 El problema - Modelo	23
4 Resultados	29
5 Conclusiones	35
Anexos	1
A Descripción del algoritmo	3
Referencias	7

LISTA DE FIGURAS

2.1	Campo eléctrico entre placas paralelas	6
2.2	Campo magnético	9
3.1	Campo magnético	24
3.2	Geometría del problema	25
3.3	Dos disparos en presencia de campo magnético	27
3.4	Dos disparos en ausencia de campo magnético	28
4.1	Todos los disparos	32
4.2	Transmitancia contra inverso del campo magnético	33
4.3	Muestra del confinamiento magnético	34
A.1	Esquema del cálculo de una colisión	5

1 RESUMEN

Se estudia el transporte en el vacío de portadores cargados en cavidades en forma de tubo doblado, es decir, cavidades en forma de 'V', en presencia de un campo magnético perpendicular al plano de la cavidad.

En este trabajo los portadores inciden en el sistema por un sólo extremo de la cavidad. Se calcula la diferencia de transmitancia entre los casos en que el campo magnético tiene sentidos diferentes respecto al plano en que se dibuja la cavidad, ya que el signo del campo podría actuar como un filtro para ciertas velocidades de los portadores que inciden en la cavidad. Dicho sistema no ha sido estudiado anteriormente, a pesar de su simplicidad y podría ser aplicado como regulador de la corriente eléctrica.

En nuestro modelo las partículas cargadas se inyectan por el extremo superior izquierdo a una velocidad constante a diferentes alturas, h . Las dimensiones de la estructura se escalan en relación con el campo magnético \vec{B} y la velocidad \vec{v} , por lo que tomamos el área transversal A igual a 1.

La estructura se expone a un campo magnético, \vec{B} uniforme en la dirección z . En este caso la única fuerza que actúa sobre los portadores es la parte magnética de la fuerza de Lorentz según el modelo de partículas no in-

teractuantes [Sim et al., 2001], [Masale, 2001], [Reijniers y Peeters, 2000] y por lo tanto la trayectoria que seguirán las partículas será circular. Para este trabajo las colisiones de las partículas con las paredes de la cavidad se consideran completamente elásticas.

2 INTRODUCCIÓN

El estudio del magnetismo se remonta al año 600 a.c. con los estudios de Tales de Mileto ([[Tagüeña y Martina, 1997](#)]) y supera su etapa precientífica en el siglo XVI cuando William Gilbert de Colchester escribe *De Magnete*. Su siguiente revolución está dada por los trabajos de Oersted quien estudia la interrelación entre la corriente eléctrica y la orientación de una aguja magnética. Esta etapa culminó con la descripción de Faraday, en 1831, de la inducción electromagnética. Finalmente es J. C. Maxwell quien en 1873 traduce todo el conocimiento sobre la electricidad y el magnetismo a un lenguaje matemático preciso.

Posteriormente la teoría clásica del magnetismo, dentro de la teoría atómica, queda escrita en la tesis doctoral de Niels Bohr en 1911. El desarrollo de la mecánica cuántica igualmente afecta las ideas construidas hasta ese momento sobre el magnetismo, descubriendo, por ejemplo, que el momento magnético es una magnitud cuantizada.

Desde aquel momento se han desarrollado paulatinamente explicaciones a los diversos fenómenos magnéticos. En la pasada década, las estructuras construidas en el laboratorio han sido ampliamente investigadas [[Butcher et al., 1993](#)]

desde el punto de vista de la física básica y las aplicaciones en filtros y reguladores.

2.1 Cargas en movimiento bajo campos magnético y eléctrico

2.1.1 El electrón

Fue Stoney en 1891 [[Stoney, 1894](#)] quien usó la palabra electrón en su sentido moderno (no griego). Se define como la cantidad elemental de carga eléctrica negativa.

Esta cantidad de carga eléctrica es $4.774 \cdot 10^{-10}$ statcoulomb [[Gasiorowicz, 1974](#)] con una masa en reposo (o una velocidad menor a un décimo de la velocidad de la luz) de $9.11 \cdot 10^{-28}$ gramos [[Gasiorowicz, 1974](#)]. Su radio clásico o de Compton es de $2.8179 \cdot 10^{-13} \text{cm}$ [[NIST, 2008](#)].

La relación de la carga del electrón e , respecto de su masa m fue medida por primera vez por J. J. Thomson al rededor de 1900. Fue Millikan entre 1908 y 1917 quien por primera vez midió directamente la carga del electrón.

2.1.2 La fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz está descrita por la ecuación 2.1 [[Albert, 1956](#)]. Ésta es la fuerza experimentada por una partícula de carga q que se mueve a una

velocidad \vec{v} bajo la influencia de un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{B} .

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

La fuerza sobre una carga eléctrica depende no solamente de donde se encuentra ésta, sino también de la velocidad con que se desplaza. Todo punto del espacio está caracterizado por dos cantidades vectoriales que determinan la fuerza sobre cada carga. La primera es la *fuerza eléctrica* que da una componente de la fuerza que es independiente del movimiento de la carga. La describimos por medio del campo eléctrico \vec{E} . La segunda es una componente adicional llamada *fuerza magnética* y que depende tanto de la velocidad de la carga como del campo magnético \vec{B} . La dirección y el módulo de la fuerza magnética es perpendicular al vector de velocidad de la carga y también perpendicular al vector de campo magnético \vec{B} .

2.1.3 Electrones en campos eléctricos

Dadas las placas paralelas de la figura 2.1 que se encuentran en el vacío, se aplica un voltaje $V = |\vec{E}|d$ entre dichas placas donde d es la distancia más corta entre las placas y $|\vec{E}|$ es la magnitud del campo eléctrico. Se crean las líneas de campo que se ven en la figura cuya magnitud es \vec{E}

De la ecuación 2.1 se deduce que un electrón colocado en este campo experimentará una fuerza en sentido contrario al de las líneas de campo

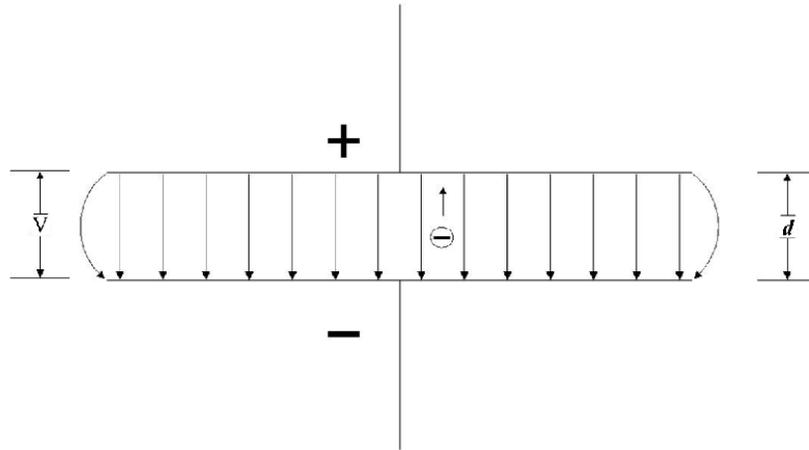


Figura 2.1: Campo eléctrico entre placas paralelas

eléctrico (dada su carga negativa) la cual es

$$\vec{F} = e\vec{E}$$

Si dicho electrón es libre de moverse, experimentará una aceleración

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{E}e}{m}$$

Cuando el electrón se mueve de una placa a otra, se desplazará una distancia d y se realizará un trabajo igual a

$$W = |\vec{F}|d = e|\vec{E}|d$$

generalmente medido en electron-volts que es la cantidad de energía ganada por un electrón al pasar de un punto a otro en que el potencial es $3.335641 * 10^{-3}$ statvolts y equivale a $1.592 * 10^{-12}$ ergios.

2.1.4 Electrones en campos magnéticos

Los electrones, u otras partículas cargadas, en movimiento forman una corriente eléctrica. Cuando la electricidad fluye a razón de un Coulomb por segundo, la corriente es de un Ampere, que equivale a $6.28 * 10^{18}$ electrones por segundo.

Un campo magnético no ejerce fuerza sobre electrones en reposo. Sin embargo, según la ecuación 2.1, cuando las partículas cargadas se encuentran en movimiento se ejerce sobre ellos una fuerza igual a

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

Si hay N partículas cargadas por unidad de volumen en un volumen de tamaño ΔV tenemos $N\Delta V$ cargas. La fuerza magnética total $\Delta\vec{F}$ sobre el volumen ΔV es la suma de las fuerzas sobre las cargas individuales, es decir

$$\Delta\vec{F} = (N\Delta Vq)(\vec{v} \times \vec{B})$$

Pero, Nqv es justamente la densidad de corriente, \vec{j} , de donde

$$\Delta\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}\Delta V$$

De la ecuación anterior se ve que la fuerza por unidad de volumen es $\vec{j} \times \vec{B}$. Por ejemplo, para un alambre se tiene que el elemento de volumen es un área A constante por una longitud ΔL , teniendo así $\Delta F = \vec{j} \times \vec{B} A \Delta L$. Sabiendo que el vector de corriente \vec{I} es igual a $\vec{j} A$ se puede obtener la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre.

$$\Delta \vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \Delta L \quad (2.3)$$

Del producto cruz de la ecuación de Lorentz (ecuación 2.1) se sabe que la fuerza experimentada por el electrón en cada momento apunta en ángulo recto a su velocidad y también a la dirección del campo magnético, lo que permite calcular la trayectoria de dicho electrón, que será como se muestra en la figura 2.2.

De la condición de perpendicularidad se deduce también que un campo magnético actuando sobre cargas en movimiento no puede ejercer trabajo, es decir, modifica su dirección, pero no su energía cinética [Ports, 1978].

Un uso que se da a los campos eléctrico y magnético es afectar el movimiento de partículas cargadas. Estos efectos son usados en el diseño de aparatos en los que se logran altas energías cinéticas en partículas cargadas con el fin de estudiar reacciones nucleares. Existen otras aplicaciones en Astrofísica, Geofísica y Física de plasmas en general, en Magnetohidrodinámica, el estudio de reacciones termonucleares y en la construcción de dispositivos usando haces de partículas cargadas.

2.1.5 Ecuaciones de movimiento

Asumiendo que la fuerza neta \vec{F} sobre una partícula cargada q en la posición r es la fuerza de Lorentz, $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ con $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ la velocidad de la partícula y una masa m_0 para casos no relativistas se tiene la ecuación de movimiento

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.4)$$

Las descripciones que se dan a continuación no toman en cuenta la interacción entre las partículas siendo este el modelo usado [Sim et al., 2001], [Masale, 2001], [Reijniers y Peeters, 2000], [Mello et al., 2009].

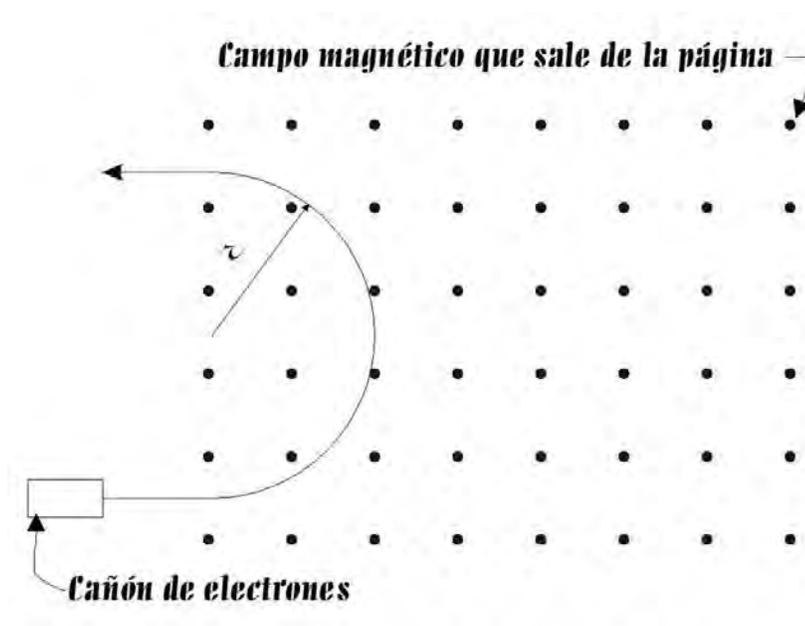


Figura 2.2: Campo magnético

2.1.5.1 Campo eléctrico estático

Con el campo eléctrico, \vec{E} , independiente del tiempo y campo magnético nulo, $\vec{B} = \vec{0}$, la ecuación 2.4 se reduce a

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

suponiendo además que \vec{E} es uniforme, es decir, no depende de la posición, se tiene que $\frac{d\vec{v}}{dt}$ es constante e integrando dos veces respecto del tiempo tenemos

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q}{m_0} \vec{E}t + \vec{v}_0$$

y

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{2m_0} \vec{E}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

En caso de que \vec{E} no sea uniforme la trayectoria de la partícula será tan complicada como lo sea la dependencia de \vec{E} con la posición.

Si la partícula se mueve de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 , el trabajo hecho por el campo sobre la partícula será

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 2} &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
&= q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\
&= -q\Delta\phi \\
&= -q [\phi(r_2) - \phi(r_1)]
\end{aligned}$$

donde $\Delta\phi$ es el cambio en el potencial escalar. Sabiendo que el trabajo hecho por la fuerza neta es igual al cambio en la energía cinética tenemos

$$T = \frac{1}{2}m_0|\vec{v}|^2$$

$$T + q\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2}m_0|\vec{v}|^2 + q\phi(\vec{r}) = \text{const.}$$

debido a la conservación de energía.

2.1.5.2 Campo magnético estático

Asumiendo $\vec{B} \neq \vec{0}$ e independiente del tiempo y $\vec{E} = \vec{0}$ de la ecuación 2.4 se tiene

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

dado que \vec{F} y \vec{v} son siempre perpendiculares $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ y la inducción magnética no hace trabajo sobre la partícula. De esto se deduce que la energía cinética permanecerá constante.

Siendo un producto cruz sólomente contribuye a la fuerza la componente perpendicular a \vec{B} de la velocidad, $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$, de donde

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} &= \frac{q}{m_0} \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}\end{aligned}$$

Asumiendo ahora que \vec{B} es independiente de la posición, tenemos así una inducción magnética uniforme. Como $|\vec{v}_{\parallel}| = \text{const.}$ la partícula se mueve con rapidez uniforme. De esta forma $d\vec{v}_{\perp}/dt$ es siempre perpendicular a \vec{B} y a \vec{v}_{\perp} , esta última con magnitud constante. La magnitud de $d\vec{v}_{\perp}/dt$ es

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{q}{m_0} |\vec{v}_{\perp}| |\vec{B}| \quad (2.5)$$

Recordando que una aceleración constante perpendicular a la velocidad produce una trayectoria circular, podemos buscar el radio r_C igualando $d\vec{v}/dt$ de la ecuación 2.5 con la aceleración centrípeta $|\vec{v}_{\perp}|^2/r_C$, teniendo

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{q}{m_0} |\vec{v}_{\perp}| |\vec{B}| = |\vec{v}_{\perp}|^2 / r_C \quad (2.6)$$

$$r_C = \frac{m_0 |\vec{v}_{\perp}|}{q |\vec{B}|} \quad (2.7)$$

sabiendo que para $|\vec{v}_{\perp}|$ constante se cumple $|\vec{v}_{\perp}| = d/\tau$, es decir, la partícula recorre una distancia de $2\pi r_C$ en un periodo τ

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{d}{|\vec{v}_\perp|} \\
&= \frac{2\pi r_C}{|\vec{v}_\perp|} \\
&= \frac{2\pi m_0 |\vec{v}_\perp|}{q|\vec{B}||\vec{v}_\perp|} \\
&= \frac{2\pi m_0}{q|\vec{B}|}
\end{aligned}$$

donde la frecuencia angular, $\omega = 2\pi/\tau$, es igual a

$$\omega = \frac{q|\vec{B}|}{m_0}$$

siendo ésta la que recibe el nombre de frecuencia sincrotrónica.

En el caso en que $\vec{v}_\parallel \neq 0$, el movimiento de la partícula puede ser descrito con una velocidad constante \vec{v}_\parallel en la dirección de \vec{B} , a la que se mueve el centro del círculo resultando el movimiento compuesto en una hélice.

Dada la conservación de la energía y sabiendo que la magnitud de la velocidad es constante tenemos

$$\begin{aligned}
T_\parallel &= \frac{1}{2}m_0\vec{v}_\parallel^2 = \text{const.} \\
T_\perp &= \frac{1}{2}m_0\vec{v}_\perp^2 = \text{const.}
\end{aligned}$$

Una carga puntual que se mueve en dicho círculo es equivalente a un elemento de corriente $I d\vec{l} = q\vec{v}_\perp$ de donde tendremos un dipolo magnético

\vec{m} , igual a $I\vec{S} = I\pi r_C^2 \hat{n}$, donde \vec{S} es el área de la superficie plana del círculo y \hat{n} es el vector normal a dicha área. Sabiendo el período en que una carga realiza un giro completo se tiene $I = q/\tau = \omega q/2\pi$ de donde

$$\begin{aligned} \vec{m} &= I\pi r_C^2 \hat{n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{q} \right) \frac{m_0 |\vec{v}_\perp|^2}{|\vec{B}|^2} \omega \hat{n} \\ &= \frac{m_0 |\vec{v}_\perp|^2}{2|\vec{B}|} \hat{n} \\ &= \frac{T_\perp}{|\vec{B}|} \hat{n} \end{aligned}$$

y tomando en cuenta la dirección del dipolo

$$\vec{m} = \left(\frac{m_0}{q} \right) \frac{T_\perp}{|\vec{B}|^2} \omega \hat{n}$$

$$\vec{m} = -\frac{T_\perp}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \quad (2.8)$$

siendo la magnitud del flujo magnético encerrado por la órbita circular, Φ ,

$$\Phi = |\vec{B}| \pi r_C^2$$

tomando el valor de r_C de la ecuación 2.7 tenemos

$$\begin{aligned}\Phi &= |\vec{B}|\pi \left(\frac{m_0|v_\perp^2|}{q|\vec{B}|} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}m_0v_\perp^2 \right) \left(\frac{2\pi m_0}{q^2|\vec{B}|} \right) \\ &= T_\perp \left(\frac{2\pi m_0}{q^2|\vec{B}|} \right)\end{aligned}$$

y usando la ecuación 2.8 para la magnitud del dipolo magnético,

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{T_\perp}{|\vec{B}|} \left(\frac{2\pi m_0}{q^2} \right) \\ &= |\vec{m}| \left(\frac{2\pi m_0}{q^2} \right)\end{aligned}$$

tenemos que la magnitud del flujo magnético es una constante.

2.1.5.3 Confinamiento Magnético

Dado que la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad del portador de carga

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

una partícula cargada será forzada a moverse en una trayectoria circular debido a la componente del campo magnético que es perpendicular a la velocidad. Cualquier componente de la velocidad paralela al campo magnético

no será afectada por este, así que el movimiento más general corresponde a una trayectoria *helicoidal*. Si el campo \vec{B} es perpendicular a la velocidad \vec{v} , entonces $q|\vec{v}||\vec{B}|$ será la fuerza centrípeta en una trayectoria circular, cuyo radio será

$$q|\vec{v}||\vec{B}| = \frac{m|\vec{v}|^2}{r} \quad (2.9)$$

$$r = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|} \quad (2.10)$$

Sucede que se puede confinar a la carga en una región localizada del espacio donde puede no interactuar con las paredes. Esto es muy útil para trabajar con los plasmas calientes usados en la fusión nuclear.

Para efectos de este estudio se asocia signo al campo magnético para referirse al sentido de la inducción magnética presentada a la cavidad. Los campos magnéticos negativos serán los entrantes en la página y producen trayectorias circulares de sentido levógiro sobre partículas de carga positiva. Los campos magnéticos positivos serán los que salen de la página y producen trayectorias circulares de sentido dextrógiro.

2.1.5.4 Campos eléctricos y magnéticos estáticos

Supongamos ahora que \vec{E} y \vec{B} son diferentes de cero e independientes del tiempo. Analizando la ecuación de movimiento por partes se toman las componentes de \vec{v} y de \vec{E} que son paralelos entre sí y perpendiculares a la inducción magnética.

$$m_0 \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} + m_0 \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q \left(\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \right)$$

dato que $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$ tenemos dos ecuaciones

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} &= q \vec{E}_{\parallel} \\ m_0 \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} &= q \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

separamos \vec{v}_{\perp} en $\vec{v}_D + \vec{v}'$. Para tener

$$m_0 \frac{d(\vec{v}' + \vec{v}_D)}{dt} = q \left(\vec{E}_{\perp} + (\vec{v}' + \vec{v}_D) \times \vec{B} \right) \quad (2.11)$$

Ahora buscamos \vec{v}_D que cumpla

$$\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_D \times \vec{B} = 0$$

resolviendo para \vec{v}_D se obtiene

$$\vec{v}_D = -\frac{\vec{B} \times \vec{E}_{\perp}}{|\vec{B}|^2} = \frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \text{const.}$$

Ya visto que \vec{v}_D es constante la ecuación 2.11 se reduce a

$$m_0 \frac{d\vec{v}'}{dt} = q \vec{v}' \times \vec{B} \quad (2.12)$$

de la que ya se ha calculado su solución y forma una trayectoria circular uniforme.

De esta forma sabemos que el movimiento general en presencia de \vec{E} y \vec{B} uniformes es la superposición de tres formas de movimientos.

1. Hay una aceleración constante en la dirección de \vec{B} producida por $|\vec{E}_{\parallel}|$.
2. Hay una velocidad constante en dirección de $\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}$ y por tanto perpendicular a \vec{B} .
3. Finalmente está el movimiento circular al rededor del eje de \vec{B} con el radio y la frecuencia antes vistos en que \vec{v}' se sustituye por \vec{v}_{\perp} . La velocidad \vec{v}_D es conocida como velocidad de deriva y su magnitud es igual $|\vec{E}_{\perp}|/|\vec{B}|$ que es independiente de la masa y de la carga de la partícula.

Analizando la combinación del movimiento de deriva y el movimiento circular que sucede en el plano perpendicular a \vec{B} donde se encuentran \vec{E}_{\perp} y \vec{v}_D . El movimiento circular asociado a \vec{v}' tiene un radio $r_C = m_0|\vec{v}'|/q|\vec{B}|$ que hará una rotación completa en $\tau = 2\pi m_0/q|\vec{B}|$. Durante este tiempo el centro de la circunferencia se moverá una distancia $d = |\vec{v}_D|\tau = 2\pi m_0|\vec{E}_{\perp}|/qB^2$. Esto define paramétricamente una cicloide, pudiendo ser la cicloide ordinaria o una trocloide alargada o acortada ([[WolframMathWorld, 2010](#)]).

2.1.6 Radiación de una carga acelerada

Las ecuaciones de Maxwell implican que toda radiación electromagnética clásica es, en última instancia, generada por cargas eléctricas aceleradas.

Dada una partícula con carga q en reposo, la ley de Coulomb nos dice que sus líneas de campo eléctrico son radiales: $\vec{E} = \vec{E}_r$. Supóngase que esta carga se acelera ($\Delta\vec{v} \ll c$) durante un tiempo Δt . En el tiempo t habrá una componente perpendicular del campo eléctrico

$$\frac{|\vec{E}_\perp|}{|\vec{E}_r|} = \frac{|\Delta\vec{v}t \sin\theta|}{|c\Delta t|},$$

donde θ es el ángulo entre el vector de aceleración y la línea que va de la carga al observador.

La ley de Coulomb para la componente radial \vec{E}_r del campo eléctrico a una distancia r desde la carga q es

$$|\vec{E}_r| = \frac{q}{|\vec{r}^2|}$$

En el sistema Gaussiano substituyendo $t = r/c$ el campo perpendicular es

$$\begin{aligned} |E_\perp| &= \frac{q}{|\vec{r}^2|} \left(\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \right) \frac{|\vec{r}| \sin\theta}{c^2} \\ &= \frac{q|\dot{v}| \sin\theta}{|\vec{r}|c^2} \end{aligned}$$

El campo transversal \vec{E}_\perp refleja de manera instantánea la aceleración aplicada.

Lejos de la partícula cargada ($|\vec{r}|$ grande), sólo \vec{E}_\perp contribuye de manera significativa al campo radiado. Desde el punto de vista del observador, sólo la aceleración perpendicular a su línea de visión contribuye al campo eléctrico radiado.

En el vacío, la potencia por unidad de área es

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

En el sistema cgs $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ entonces

$$\begin{aligned} |\vec{S}| &= \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \\ &= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q|\dot{v}| \sin \theta}{|\vec{r}|c^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{q^2 |\dot{v}|^2 \sin^2 \theta}{c^3 |\vec{r}|^2} \end{aligned}$$

La potencia total emitida se obtiene integrando en todas las direcciones.

$$\begin{aligned} P &= \int_{\text{esfera}} |\vec{S}| dA \\ &= \frac{q^2 |\dot{v}|^2}{4\pi c^3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{|\vec{r}|^2} |\vec{r}| \sin \theta d\theta |\vec{r}| d\phi \\ &= \frac{q^2 |\dot{v}|^2}{2c^3} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

Al evaluar esta integral obtenemos

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 4/3$$

así la potencia total emitida es

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 |\dot{v}|^2}{c^3}$$

que es conocida como la ecuación de Larmor [[Longair, 1992](#)].

En el sistema MKS la fórmula de Larmor es

$$P = \frac{e^2 |\vec{a}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (2.13)$$

donde \vec{a} es la aceleración de la partícula de carga e ; c es la velocidad de la luz y ϵ_0 la permitividad del vacío.

Vemos ahora para el modelo de este trabajo si la radiación de las partículas tiene una magnitud tal que deba tomarse en cuenta en los cálculos.

Compararemos la energía inicial de la partícula que ingresa a la cavidad E_k con la energía radiada E_r , llamando a este cociente E_p . La energía inicial de la partícula es únicamente su energía cinética.

$$E_p = \frac{E_r}{E_k}$$

Teniendo la energía cinética $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ y usando las ecuaciones de la aceleración centrípeta $|\vec{v}|^2/r$ y del radio sincrotrónico $r = m|\vec{v}|/e|\vec{B}|$ obtenemos

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{\frac{e^2 |\vec{a}|^2 t}{6\pi\epsilon_0 c^3}}{\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2} \\ &= \frac{2e^2 t |\vec{v}|^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 |\vec{r}|^2 m |\vec{v}|^2} \\ &= \frac{2e^4 t |\vec{v}|^2 |\vec{B}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^3 |\vec{v}|^2} \\ &= \frac{e^4 t |\vec{B}|^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^3} \end{aligned}$$

Tomamos algunos valores para saber el orden de magnitud de este último

resultado. $e = 1.6x10^{-19}$ C, $c = 3x10^8$ m/s, $m_e = 9.1x10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8.8x10^{-12} \frac{F}{m}$, $B = 1$ T y tiempos t del orden de 10^{-3} segundos¹.

Con estos valores se obtiene que la proporción de energía perdida, E_p , es igual a $3.88*10^{-4}$, con lo que se puede ver que dicha radiación es despreciable.

2.1.7 Transmitancia

Para este estudio definimos la transmitancia T (ec. 2.14) normalizándola respecto a la cantidad de partículas cargadas que alcanzan el extremo de salida en ausencia de campo magnético, T_0 y T_t es el número de partículas transmitidas en presencia del campo magnético. Esto se hace para observar con claridad el efecto del campo sobre el número de partículas que alcanzan el extremo de salida de la estructura.

$$T = \frac{T_t}{T_0} \quad (2.14)$$

¹Resnik. Una partícula confinada en un sincrotrón hace una circunferencia en 10^{-11} segundos

3 EL PROBLEMA - MODELO

Se estudia el transporte de portadores cargados (electrones o huecos) en cavidades en forma de tubo doblado, es decir, cavidades en forma de 'V', en presencia de un campo magnético perpendicular al plano de la cavidad.

Este tipo de cavidades son construidas en los laboratorios con técnicas de litografía submicrónica de precisión [Reed y Kirk, 1989]. Los materiales en que la longitud de la coherencia de fase y el camino libre medio exceden las dimensiones del sistema [Baranger y Mello, 1996], [Marcus et al., 1992] permiten el estudio del transporte electrónico en el régimen balístico.

Nos interesa calcular la variación de la transmitancia entre los casos en que el campo magnético tiene sentidos y magnitudes diferentes con igual dirección. A pesar de su sencillez, esta estructura no ha sido estudiada y para el área del estado sólido es importante ampliar el repertorio de estudios sobre cavidades y barreras.

En nuestro modelo (fig. 3.2), se inyectan por el extremo superior izquierdo portadores de carga a una velocidad constante a diferentes alturas, h . La altura A , es igual a uno sin pérdida de generalidad. Se escogieron valores para d , θ y L arbitrarios ya que este tipo de estructura no ha sido estudiada para

cualquier valor de dichos parámetros. Para esta simulación no se colocará campo eléctrico, solamente campo magnético. Según se vió en la sección 2.1.5.3, la trayectoria de las partículas será circular, como se ve en la figura 3.1.

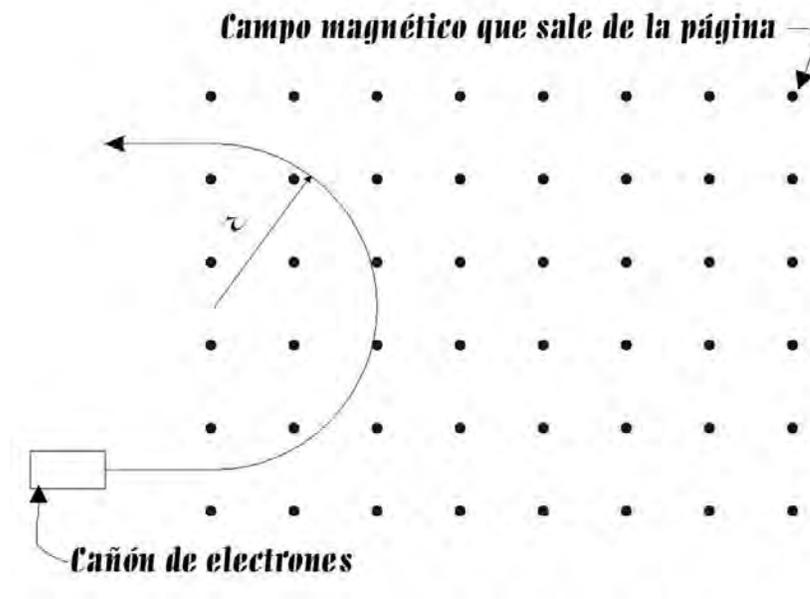


Figura 3.1: Campo magnético

Tomando como constantes la masa m , la magnitud de la velocidad \vec{v} y la carga q de la ecuación 2.10 tenemos que el radio de la trayectoria será inversamente proporcional a la intensidad de la componente perpendicular a la velocidad del campo magnético.

Si el radio es suficientemente pequeño, la partícula saldrá de la estructura tras recorrer medio círculo (ver figura 3.1). Si antes de recorrer medio círculo

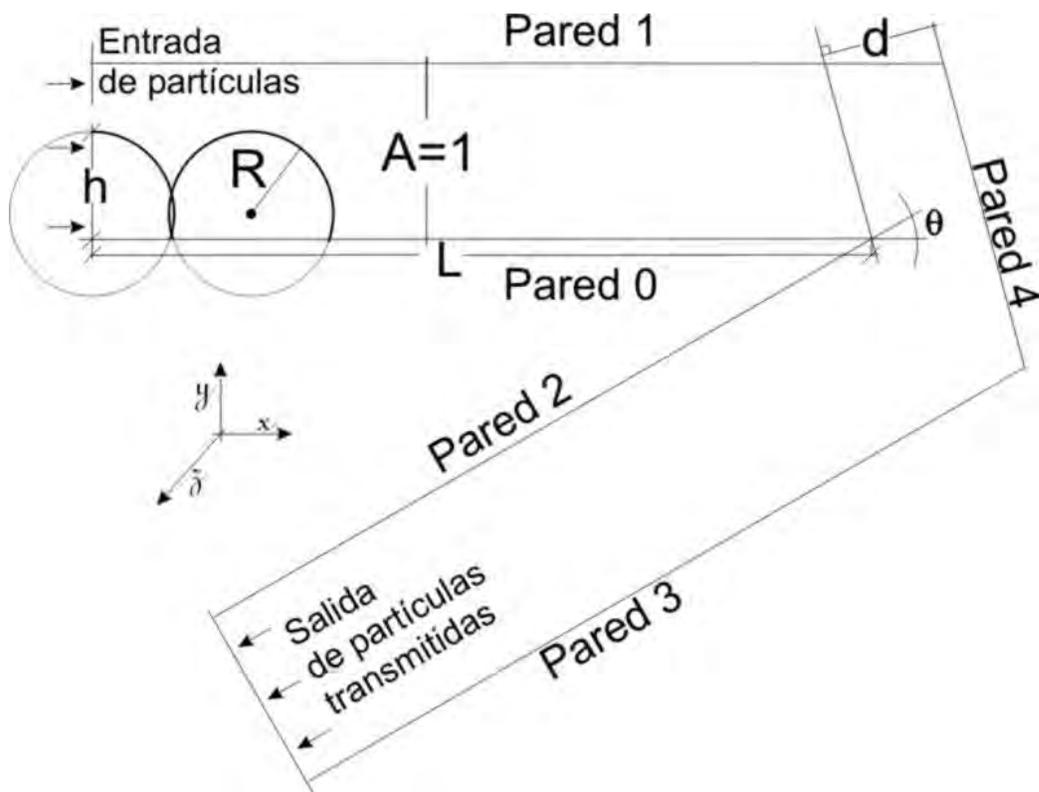


Figura 3.2: Geometría del problema

encuentra en su camino alguna de las paredes de la estructura, entonces se tomará dicha colisión como una completamente elástica, es decir, la partícula rebotará especularmente y no perderá energía en el choque. Al no perder energía en las colisiones el radio de su trayectoria será constante.

La simulación consiste en fijar un campo magnético \vec{B} de dirección perpendicular al plano donde yace la estructura y lanzar partículas en la dirección x positiva por la “*Entrada de partículas*” (fig. 3.2) a diferentes alturas h contabilizando si la partícula abandonó la estructura por la “*Entrada de partículas*” o por la “*Salida de partículas transmitidas*”. Si la partícula abandona la estructura por la “*Salida de partículas transmitidas*”, el disparo se suma a la transmitancia, es decir, se aporta a la corriente I_B en situación de flujo estable.

En la figura 3.3 se ilustra la apariencia de dos disparos que salen de la estructura por extremos diferentes.

La transmitancia de referencia T_0 es la cantidad de disparos que abandonan la estructura por la “*Salida de partículas transmitidas*” en ausencia de campo magnético. Se hace un barrido de disparos a todas las alturas y se contabilizan las transmitidas. En la figura 3.4 se ven ejemplos de dos disparos sin campo magnético que salen por diferentes extremos.

Ahora definamos la densidad de corriente eléctrica,

$$\vec{J} = Nq\vec{v} \quad (3.1)$$

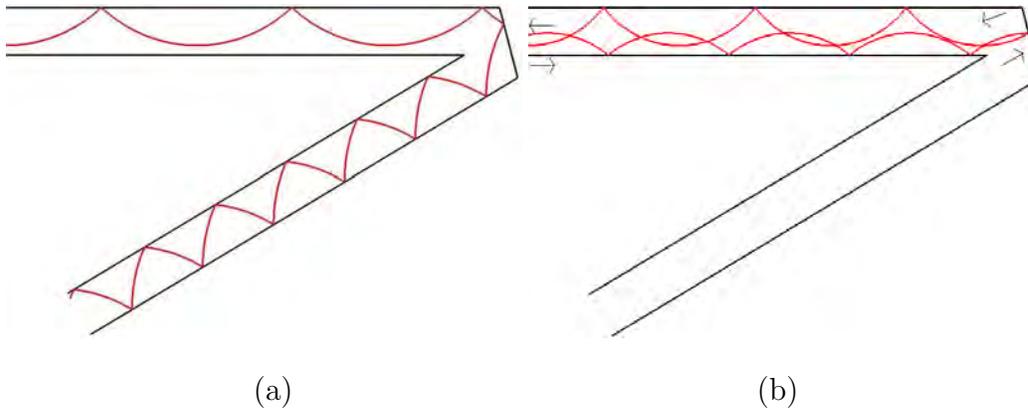


Figura 3.3: Ejemplos de disparos que en presencia de campo magnético se transmite (a) y no se transmite (b).

con N la cantidad de partículas de carga q y \vec{v} la velocidad de los portadores de corriente que atraviesan una unidad de área.

En la simulación realizaremos 498 disparos en la unidad de tiempo y tomamos q igual a $1.6021892 \times 10^{-19} C$. Dado que \vec{v} es constante, la densidad de corriente depende solamente de N , que es la cantidad de partículas que cruzan la “*Salida de partículas transmitidas*” de la estructura.

Se simulan una serie de disparos a diferentes alturas en ausencia de campo magnético y otra serie usando las mismas alturas en presencia de campo magnético contabilizando en ambos casos el total de partículas transmitidas.

Podemos comparar la magnitud de la densidad de corriente eléctrica en ausencia de campo magnético, $|\vec{J}_0|$, con la misma en presencia de éste, $|\vec{J}_B|$. Con $|\vec{J}_B/\vec{J}_0|$ tenemos que, valores mayores a 1 indican que en presencia del campo magnético la densidad de corriente aumenta comparativamente a la

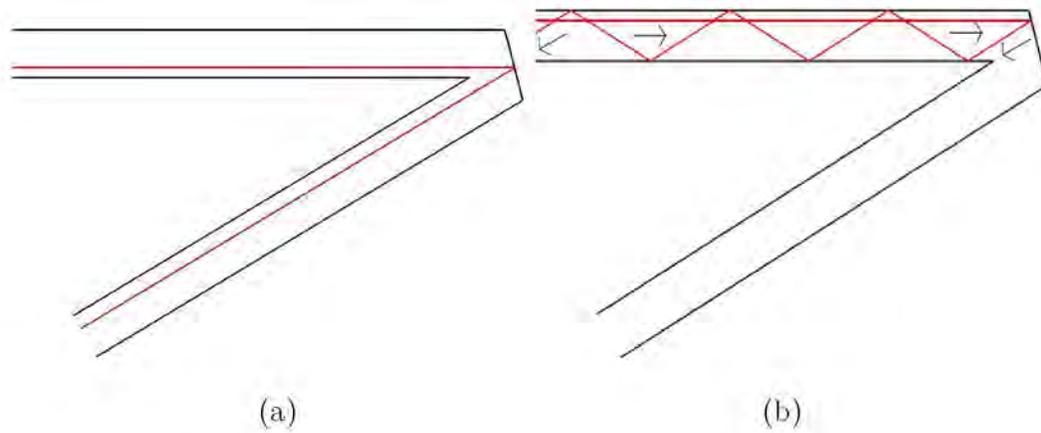


Figura 3.4: Ejemplos de disparos que en ausencia del campo magnético se transmiten (a) y no se transmiten (b).

situación sin campo. Para valores menores a 1 la densidad de corriente habrá disminuido.

4 RESULTADOS

Se presentan los resultados representativos de una serie de simulaciones realizadas en este trabajo.

Los parámetros de la simulación resumidos en la tabla 4.1 se explican como sigue. Se realizaron disparos para cada campo magnético con incrementos de 0.5 desde 50 negativo¹ hasta 50 positivo para $1/B$ y para alturas desde 0.005 hasta 1.0 aumentando la altura en 0.002 en cada disparo.

Tras simular disparos para un valor de $1/B$ a todas las alturas se incrementa $1/B$ en 0.5 hasta llegar a cero. Continuamos con $1/B$ igual a 0.5 positivo que es un campo magnético en el sentido positivo de z (saliente del plano en que yace la estructura) y aumenta a cada paso en 0.5 hasta llegar a 50.

La gráfica 4.1 muestra de manera exhaustiva todos los disparos realizados para las diferentes alturas y magnitudes del campo magnético ($1/B$). Los puntos negros representan disparos que no fueron transmitidos (abandonaron la estructura por la *Entrada de partículas* de la figura 3.2) y los blancos aquellos que sí lo fueron (abandonaron la estructura por la *Salida de partículas*

¹Hicimos la convención de que $1/B$ negativo es un campo en la dirección $-z$ (entrante en la página) y que causa un giro levógiro actuando sobre partículas cargadas positivamente.

Parámetro	Valor
$(\frac{1}{B})_o$	-50.0
$(\frac{1}{B})_f$	50.0
$\Delta(\frac{1}{B})$	0.5
h_o	0.005
h_f	1.0
Δh	0.002
Θ	$\frac{\pi}{6}$
A	1.0
L	100.0

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en la simulación

transmitidas de la figura 3.2).

En la figura 4.1 se ven los tiros transmitidos y no transmitidos de la simulación según los parámetros de la tabla 4.1. El número de tiros para cada valor de $1/B$ fue de 498. Dos valores en las ordenadas de $\pm 1/B$ representan la aplicación de un campo magnético de igual magnitud y dirección con sentido contrario. Simplemente se representan con valores negativos de $1/B$ los disparos simulados ante campo magnético en la dirección negativa de z para mostrar el gráfico con continuidad.

Con base en esta serie de disparos y sabiendo que en ausencia de campo magnético se transmiten 257 de 498 (T_0) se grafica la transmitancia (ecuación 2.14) para cada valor de $1/B$ (figura 4.2).

En dicha figura (4.2) se puede ver que en el intervalo (10, 35) de $1/B$ la transmitancia adquiere valores del 30% al 50% mayores que la transmitancia en ausencia del campo magnético, T_0 .

La figura 4.3 muestra un acercamiento a la región donde $1/B$ se hace nulo. La transmitancia decae monótonamente hasta llegar a cero, ya que poco a poco un mayor número de disparos tienen radios tan pequeños que su trayectoria es un semicírculo y salen de la estructura antes de colisionar con cualquiera de las paredes. Alcanzar la región de decaimiento monótono depende de las condiciones experimentales.

En esta misma figura se observan dos máximos al rededor de $1/|B| \approx 0.5$. Dado que:

1. En dichos valores de $1/|B|$ el diámetro de la trayectoria de las partículas es cercano a 1,
2. Las distancias A y d de la estructura (fig. 3.2) son 1 y
3. La región en que se presentan las colisiones que definen si una partícula será o no transmitida es la del doblez de la cavidad.

Estas condiciones son la causa de que mayor número de partículas sean transmitidas en este rango de magnitud del campo magnético porque una partícula ante campo magnético positivo no colisiona con la Pared 4, lo que derivaría en que la partícula no se transmitiera y una partícula ante campo magnético negativo no colisiona con la Pared 0.

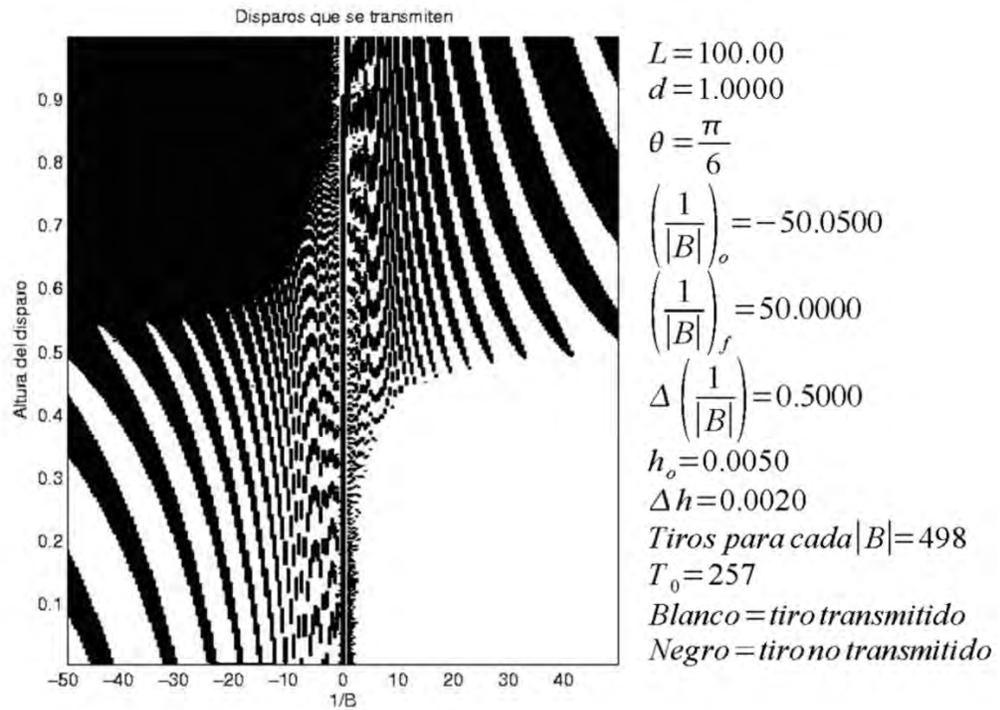


Figura 4.1: Todos los disparos

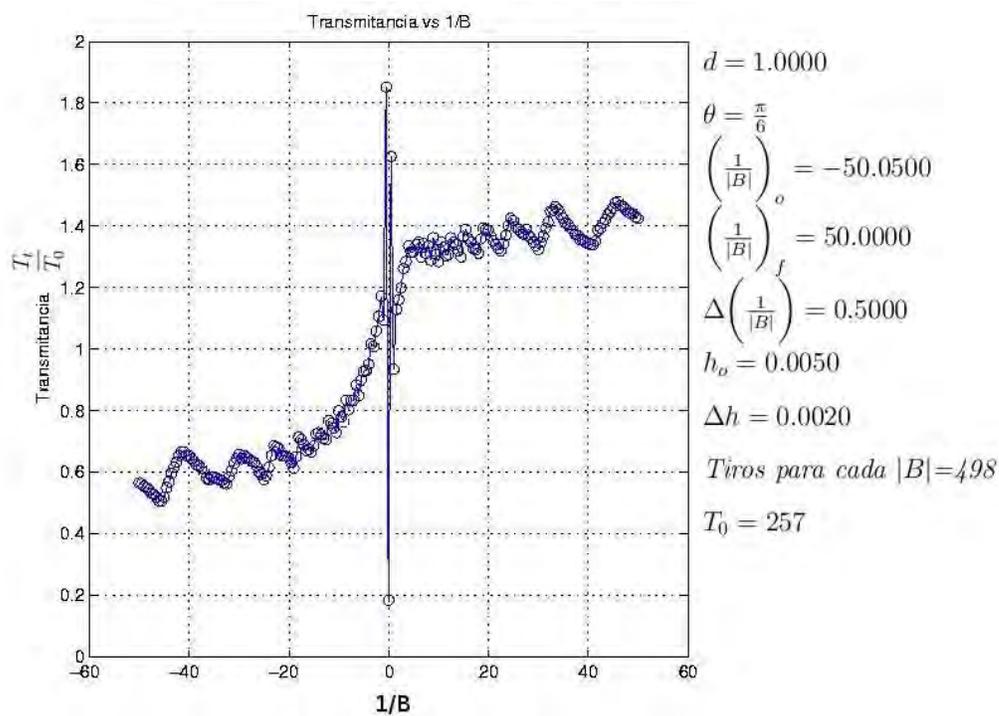


Figura 4.2: Transmitancia contra inverso del campo magnético

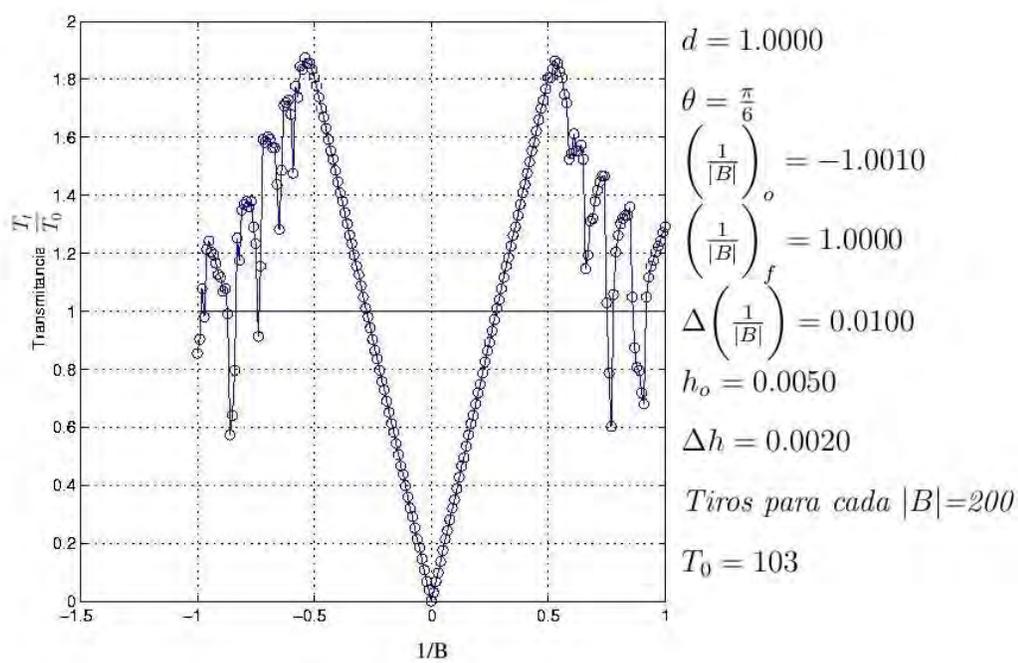


Figura 4.3: Muestra del confinamiento magnético

5 CONCLUSIONES

Se estudió el transporte balístico de partículas cargadas en cavidades en forma de 'V' y se comprobó la posibilidad de utilizar el campo magnético como un regulador de la transmitancia y por lo tanto de la corriente eléctrica. La gráfica 4.2 muestra cómo para campos magnéticos entrantes a la página (para partículas con carga positiva) la transmitancia es menor que 1, es decir, se transmiten menos disparos que en ausencia del mismo.

Ambas situaciones son evidentes también en la figura 4.1 donde se observa que la región superior izquierda es totalmente negra, es decir, no hay transmisión alguna, y la región inferior derecha es totalmente blanca, es decir, todas las partículas inyectadas con parámetros de esa región son transmitidas.

En el caso de que se haga trabajo experimental con esta estructura la simetría observada en la figura 4.1¹ permite trabajar solamente con uno de los sentidos del campo magnético; en sentido z positivo o negativo.

En contraste, para valores de $1/B$ en los intervalos $(-0.75, -0.5)$ y $(0.5, 0.75)$ la transmitancia rebasa a la transmitancia en ausencia de campo magnético en más de un 50%.

¹Parece ser una inversión de la transmitancia tras una rotación de π radianes.

A DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Se usó la librería glut¹ para graficar y así facilitar la depuración del algoritmo ante errores.

Dados los parámetros iniciales se traza un círculo hasta encontrar una pared con qué colisionar a partir de donde se calcula un nuevo centro para el círculo y a partir del punto de colisión se traza el siguiente círculo para iterativamente seguir el proceso. La condición de paro es que exista intersección con la *Entrada de partículas* o la *Salida de partículas transmitidas* (ver fig. 3.2, pag. 25)

La mayor parte del código sirve para calcular las intersecciones con las paredes ya que siendo 5 paredes rectas más dos simuladas como la *Entrada* y la *Salida* cada círculo interseca real o imaginariamente con todas las paredes en cada paso. La forma de discriminar es:

1. Ver que el valor de la intersección sea real.
2. Ver que dicha intersección se encuentre en la parte de la recta que realmente representa a la pared y no su lugar geométrico que es infinito.

¹GLUT - The OpenGL Utility Toolkit: <http://www.opengl.org/resources/libraries/glut/>

3. Ver que la intersección no sea la misma con la que se acaba de intersectar en el paso anterior.

La otra parte importante del código sirve para calcular el centro del siguiente círculo. Con más detalle, según la figura A.1, una vez encontrada la colisión del punto p_0 se tienen:

- Pared con que colisionó. En particular su inclinación (β).
- Coordenadas del último centro del círculo, c_0 .
- Coordenadas del punto de la última colisión, p_0 .

Se calcula entonces el centro del siguiente círculo. Éste es el punto sobre la recta que pasa por el centro anterior y es paralela a la pared de choque, estando además a una distancia igual al diámetro. Esto genera dos centros posibles, c_a y c_b , en la figura A.1. Para decidir si es c_a o c_b el centro correcto se trazan ambos círculos posibles y será el correcto el que pase por p_0 .

Igualmente esta función encuentra θ_c

Una vez definido que c_a es el centro del siguiente círculo, se encuentra el siguiente punto que en el caso de la figura es p_1 . Cada disparo finaliza cuando hay intersección con las paredes de entrada o salida. Cuando sale por el lugar por el que ingresó a la estructura no se aumenta la transmitancia, en caso contrario la transmitancia se aumenta en uno.

Tras haber realizado los disparos en presencia de campo magnético realiza tantos disparos rectos como hubo de cada radio. Esto sirve para poder graficar la relación de la transmitancia en presencia de campo entre la transmitancia sin campo T_B/T_0 , contra el radio de los círculos, que es inversamente

proporcional a la magnitud del campo magnético.

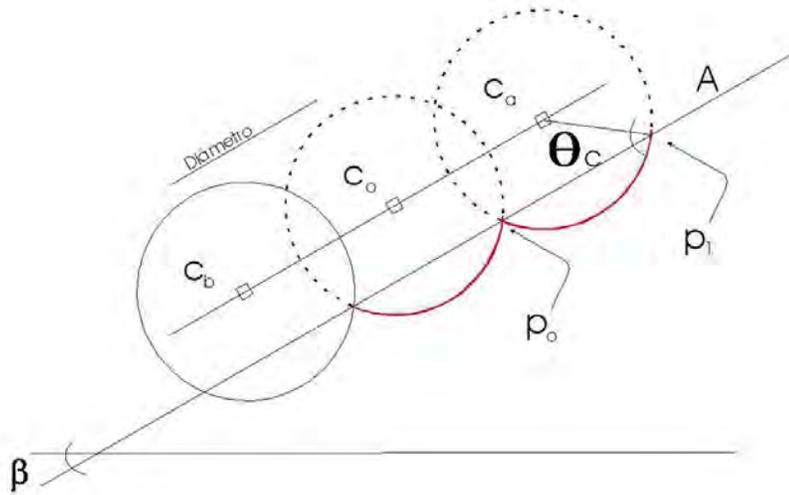


Figura A.1: Esquema del cálculo de una colisión

REFERENCIAS

- [Albert, 1956] Albert, A. L. (1956). *Electronics and electron devices*. The MacMillan Company, 3th. edition.
- [Baranger y Mello, 1996] Baranger, H. U. y Mello, P. A. (1996). Short paths and information theory in quantum chaotic scattering: transport through quantum dots. *Europhysics letters*, 33(6):465–470.
- [Butcher et al., 1993] Butcher, P., March, N. H., y Tosi, M. P., editors (1993). *Physics of Low-Dimensional Semiconductor Structures*. Plenum.
- [Gasiorowicz, 1974] Gasiorowicz, S. (1974). *Quantum Physics*. John Wiley & Sons.
- [Longair, 1992] Longair, M. S. (1992). *High Energy Astrophysics*, volume 1. Cambridge University Press, Springer Netherlands, 2nd edition.
- [Marcus et al., 1992] Marcus, C. M., Rimberg, A. J., Westervelt, R. M., Hopkins, P. F., y Gossard, A. C. (1992). Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures. *Physical Review Letters*, 69(3).

- [Masale, 2001] Masale, M. (2001). Semi-classical dynamics of an electron in a wide pill-box; non-uniform azimuthal magnetic field. *Physica Scripta*, 64:512–517.
- [Mello et al., 2009] Mello, P. A., Gopar, V. A., y Mendez-Bermudez, J. A. (2009). Quantum scattering and transport in classically chaotic cavities: An overview of past and new results. In *Conference Proceedings: Chaos 2009, Chania, Crete, Grece*. note details.jsp.
- [NIST, 2008] NIST (2008). National institute of standards and technology, classical electron radius. <http://physics.nist.gov>.
- [Ports, 1978] Ports, A. M. (1978). *Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons.
- [Reed y Kirk, 1989] Reed, M. y Kirk, W., editors (1989). *Nanostructure Physics and Fabrication: Proceedings of the International Symposium*. Academic Press.
- [Reijniers y Peeters, 2000] Reijniers, J. y Peeters, F. M. (2000). Snake orbits and related magnetic edges states. *J. Phys.: Condens. Matters*, 12:9771–9786.
- [Sim et al., 2001] Sim, H. S., Chang, K. J., Kim, N., y Ihm, G. (2001). Electron and composite-fermion edges states in nonuniform magnetic fields. *Physical Review B*, 63(125329).

- [Stoney, 1894] Stoney, G. J. (1894). Of the "electron" or atom electricity. *Philosophical Magazine*, 38(5):418–420.
- [Tagüeña y Martina, 1997] Tagüeña, J. y Martina, E. (1997). *De la brújula al espín: el magnetismo*. La Ciencia desde México.
- [WolframMathWorld, 2010] WolframMathWorld (2010). Prolate cycloid. <http://mathworld.wolfram.com/ProlateCycloid.html>.