



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**EL PROBLEMA DE RAYLEIGH-BÉNARD EN UN  
CONTENEDOR CILÍNDRICO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**MARTÍN MOLINA FRUCTUOSO**



**DIRECTOR DE TESIS :**

**DR JORGE IZE LAMACHE**

**2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **El problema de Rayleigh-Bénard en un contenedor cilíndrico**

Martín Molina Fructuoso

19 de mayo de 2010

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno  
Molina  
Fructuoso  
Martín  
57 88 75 56  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
300262768
2. Datos del tutor  
Dr  
Jorge Andrés  
Ize  
Lamache
3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Arturo  
Olvera  
Chávez
4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Antonio  
Capella  
Kort
5. Datos del sinodal 3  
Dr  
Ramón Gabriel  
Plaza  
Villegas
6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Carlos  
Málaga  
Iguñiz
7. Datos del trabajo escrito  
El problema de Rayleigh-Bénard en un contenedor cilíndrico  
148 p  
2010

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por su apoyo incondicional en todos mis proyectos. Su ayuda ha sido invaluable para la realización exitosa de muchos de ellos. Agradezco la libertad e independencia que me han dado y también que siempre hayan creído en mí.

Me considero afortunado de haber realizado este trabajo bajo la dirección del Dr. Jorge Ize. Le agradezco inmensamente la paciencia que mostró conmigo durante la realización de esta tesis y su continuo apoyo. Admiro profundamente al Dr. Ize por su dedicación y también por su honestidad. Estoy realmente contento de haber tenido la posibilidad de trabajar con él y también de ser su alumno.

También quiero agradecer al Dr. Ramón Plaza por sus valiosos consejos y el apoyo que me ha brindado en cuestiones académicas. Doy gracias al Dr. Arturo Olvera por su dirección durante mi servicio social y la amable disposición que siempre ha mostrado para resolver mis inquietudes.

Agradezco también al Dr. Ramón Plaza, al Dr. Arturo Olvera, al Dr. Antonio Capella y al Dr. Carlos Málaga por haber leído esta tesis y por sus valiosos comentarios al respecto.

Finalmente quiero agradecer a mis amigos, tanto los recientes como los de años, pues me han contribuido grandemente a hacer de mi estancia en la universidad una experiencia que jamás olvidaré. En particular quiero agradecer a Oziel, que a ratos ha sido como mi hermano, por su ayuda en los ratos difíciles y por ser mi compañero de parranda.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>11</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>23</b>
2.1. Motivación . . . . .	23
2.2. Deducción de las ecuaciones para un medio continuo . . . . .	24
2.2.1. Descripción material y espacial . . . . .	24
2.2.2. Teorema de transporte de Reynolds . . . . .	26
2.2.3. Ecuación de continuidad . . . . .	29
2.2.4. El tensor de esfuerzos . . . . .	30
2.2.5. Ecuaciones de movimiento . . . . .	34
2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	37
2.4. Ecuación de energía . . . . .	41
2.5. Ecuaciones de Boussinesq . . . . .	46
2.6. Adimensionalización . . . . .	47
2.7. Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas . . . . .	49
2.8. Condiciones de frontera . . . . .	55

<b>3. Linealización</b>	<b>59</b>
3.1. Linealización del sistema de ecuaciones . . . . .	59
3.2. Núcleo del operador linealizado . . . . .	67
<b>4. Bifurcación</b>	<b>79</b>
4.1. Análisis de $\dim(KerA)$ . . . . .	79
4.2. La ecuación de bifurcación . . . . .	86
4.3. Bifurcaciones local y global . . . . .	97
4.4. Equivarianza del operador bajo la acción de $O(2)$ . . . . .	100
4.5. Análisis para $\dim(KerA) = 2$ . . . . .	105
4.5.1. Inexistencia de bifurcación vertical . . . . .	105
4.5.2. Parte cuadrática de la ecuación de bifurcación . . . . .	109
4.5.3. Bifurcación en el caso $m_2 = 2m_1, n_2 = 2n_1$ . . . . .	114
<b>5. Elementos del núcleo de la linealización</b>	<b>119</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>127</b>
<b>A. Completez de las funciones de Bessel</b>	<b>131</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>147</b>

# Introducción

En general, el tratamiento de problemas no lineales en ecuaciones diferenciales parciales es complicado y casi siempre eludido en las disciplinas en que éstos aparecen como mecánica de fluidos y elasticidad por mencionar algunos ejemplos. En esta tesis se estudia uno de estos problemas no lineales de la mecánica de fluidos, el célebre problema de Bénard. El objetivo es tratar el problema de manera integral y detallada, utilizando algunos resultados topológicos de la teoría de bifurcación.

La estructura y contenido de la tesis es como sigue:

- Capítulo 1. En él se dan los antecedentes para el problema de convección de Bénard. Se da un breve contexto histórico y científico y se presenta una imagen global de los resultados registrados en la literatura, sobre todo de investigaciones experimentales.
- Capítulo 2. En este capítulo se hace la preparación necesaria para llevar el problema al análisis matemático. Se comienza con deducir las ecuaciones que describen el movimiento de fluido (en términos generales) a partir de los principios fundamentales de conservación de masa, momento y energía. De aquí se derivan las ecuaciones que utilizaremos para estudiar nuestro problema, utilizando las condiciones físicas (que el fluido es newtoniano, que las propiedades serán independientes de la temperatura). Se hace la adimensionalización de las ecuaciones, y con objeto de explotar la geometría del contenedor se hace el cambio de las ecuaciones a coordenadas polares. Finalmente se definen las condiciones de frontera y se expresan matemáticamente.
- Capítulo 3. En esta parte se encuentra una solución estacionaria al sistema de ecuaciones y se hace la linealización alrededor de esta solución. Se llega de este modo a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no



lineales con condiciones de frontera homogéneas. Es este sistema el que se estudiará utilizando la teoría de la bifurcación. A partir de la linealización se define un operador lineal y se muestra que es autoadjunto con las condiciones de frontera utilizadas. Se encuentra explícitamente el núcleo de este operador, cuyos elementos corresponden a soluciones estacionarias de la linealización. Para ello se utilizan expansiones en términos de conjuntos completos de funciones para hallar  $w$  y  $T$ . La elección de estos conjuntos está motivada por la geometría del dominio. Las componentes restantes se obtienen a partir de una descomposición especial del campo, cuya prueba se incluye. Dado que las series de Bessel tienen una gran importancia para la determinación del núcleo y que la validez matemática de estas expansiones es difícil de encontrar en textos no especializados en estos temas, se ha incluido la prueba para justificar la expansión particular que nosotros utilizamos. La prueba que se da utiliza resultados de la teoría de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert y se incluye en el Apéndice A.

- Capítulo 4. En este capítulo se reformulan las ecuaciones independientes del tiempo y las condiciones de frontera para el problema de Bénard en términos de un operador entre dos espacios de Hilbert. Con la información obtenida en el capítulo 3, se encuentran algunos valores del parámetro  $R$  (que en nuestro problema es el número de Rayleigh) para los cuales podría tenerse una bifurcación. Se encuentra que para estos valores de  $R$  se pueden tener núcleos de dimensión uno o dos. Se hace la reducción de Lyapunov-Schmidt para el problema y se llega a la ecuación de bifurcación, también se incluye una breve justificación matemática del método basada en [13]. A partir de la ecuación de bifurcación es posible utilizar algunos resultados de la teoría topológica de la bifurcación, que se pueden hallar con detalle en la misma referencia, para decir en qué casos se tiene una solución al problema no lineal que no es la solución trivial. Finalmente se define una acción del grupo  $O(2)$  y se prueba que el operador es equivariante respecto a esta acción. Se da una descripción de los conjuntos invariantes bajo ciertos subgrupos de  $O(2)$ .
- Capítulo 5. En este último capítulo se hace la descripción completa y detallada de los elementos del núcleo del operador lineal. Se incluyen distintas gráficas que ayudan a saber cómo son estos elementos para los casos típicos.

Se ha tratado que la tesis sea lo más autocontenida posible. También se ha tratado de dar siempre ideas y justificaciones intuitivas así como de

mantener el problema lo más cercano a la realidad física, aunque el énfasis está en las matemáticas del problema.

Se ha escrito esta introducción de manera que funcione como un mapa global de la tesis. Se pueden encontrar más detalles del contenido en el análisis realizado en las conclusiones, que se encuentran al final de este trabajo.



# Capítulo 1

## Antecedentes

En esta sección se presentará en una breve investigación histórica del problema de Rayleigh-Bénard y de los últimos resultados obtenidos experimentalmente. La literatura que aborda este problema es extensa y diversa en el modo de hacerlo. Se pueden encontrar descripciones detalladas del experimento de Bénard y también de experimentos más recientes y elaborados. Hay un número considerable de resultados experimentales del fenómeno bajo diferentes condiciones que incluyen: variaciones en la geometría del recipiente, en la distribución de temperatura en la frontera, en las propiedades físicas del fluido, inclusión de fuerzas debidas a la rotación del recipiente, entre otras. Se puede encontrar también un gran número de artículos dedicados a estudiar este problema de convección desde el punto de vista numérico. En éstos se trata de estudiar el fenómeno con diferentes condiciones como las mencionadas anteriormente mediante el uso de diversas técnicas computacionales. Es interesante mencionar que la proporción de este tipo de artículos se ha ido incrementando al paso de los años y que actualmente es predominante. Finalmente, se tienen aquellos artículos y libros que abordan el problema de Rayleigh-Bénard desde un punto de vista más analítico. La proporción de éstos es bastante menor. De hecho, uno de los propósitos de la presente tesis es precisamente contribuir a esta categoría con un estudio matemático de las ecuaciones del problema de Rayleigh-Bénard para el caso de un recipiente cilíndrico.

Debido a la gran abundancia de material, escribir en esta sección un resumen detallado de todos los resultados concernientes al problema de Rayleigh-Bénard en todas sus variantes sería imposible. Hacerlo requeriría de varios libros, algunos de los cuales ya se han escrito. Nuestro objetivo será más modesto: poner dentro

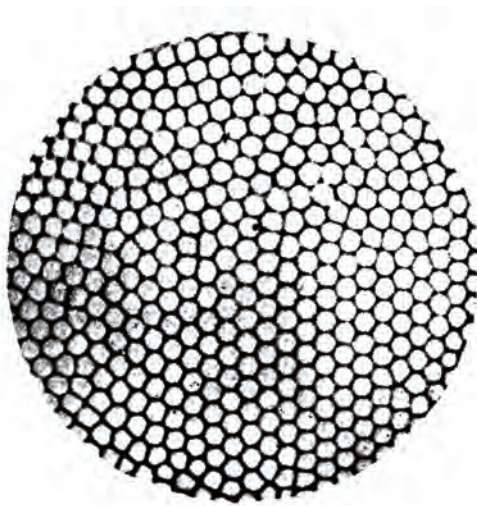


Figura 1.1: Una de las fotos de Bénard

de un contexto científico el problema que estudiaremos en la tesis y dar algo de información histórica también. Muchos temas interesantes han quedado fuera de esta introducción pero desafortunadamente hubo que hacer una selección rigurosa. Se ha tratado de incluir sobre todo la información que podría ser útil para desarrollar más la investigación matemática de este problema. En la bibliografía que está al final de la tesis se ha incluido una selección más bien reducida de referencias que el lector puede consultar si quiere profundizar más en los resultados experimentales o numéricos. La bibliografía en general ha tratado de mantenerse breve a propósito (no se ha incluido todo el material consultado), con la intención de hacerla más útil al dar sólo las referencias más importantes, que a su vez pueden llevar a profundizar tanto como se desee.

De acuerdo con la literatura, aunque tanto Rumford (1797) como James Thomson (1882) ya habían descubierto el fenómeno de convección térmica, fue Henri Bénard quien realizó alrededor de 1900 los primeros experimentos cuantitativos al respecto (ver [9]). Bénard utilizó cera que derritió sobre una placa de metal. Sus observaciones fueron que al principio no había ningún movimiento en la cera fundida, pero que al calentar después de cierto punto se observaba un patrón hexagonal como el que se muestra en la figura 1.1. A partir de este patrón, Bénard pudo deducir la existencia de celdas de convección. La figura que se muestra es de hecho una reproducción de las fotografías originales de Bénard.

En particular, el experimento de Bénard es un ejemplo de inestabilidad térmica, que resulta cuando un fluido se calienta por abajo. Al comenzar a calentar, como Bénard observó, el fluido permanece sin moverse. Calentar el recipiente desde abajo tiene como consecuencia que el fluido que está en la parte inferior se vuelva más ligero que el de la parte superior debido a la expansión térmica. Como consecuencia se esperaría que el fluido se reacomode para salir de este estado inestable. Sin embargo, el fluido que Bénard usó en sus experimentos no puede considerarse como un fluido ideal así que hay que considerar también los efectos de la viscosidad. Como ésta tiende a inhibir el movimiento en el fluido entonces lo que se espera es que la diferencia de temperatura entre la frontera superior del contenedor (que puede ser libre como en el experimento de Bénard) y la frontera inferior tenga que exceder cierto valor para que efectivamente se presente una inestabilidad y como consecuencia se tengan celdas de convección. Es importante decir que no es nuestra intención en este trabajo presentar una definición matemática rigurosa de estabilidad (que correspondería más bien a la estabilidad de una solución del sistema de ecuaciones que modelan el fenómeno). Hemos utilizado el término inestabilidad en el sentido intuitivo, para denotar a los flujos que no esperamos que sean observables si realizamos el experimento.

Inspirado en el trabajo experimental de Bénard, Rayleigh decidió atacar el fenómeno de convección de manera teórica (ver [9]). Específicamente, consideró un fluido que está confinado entre dos planos de extensión infinita y su método fue obtener los modos normales de la linealización del sistema de ecuaciones diferenciales parciales alrededor de la solución de conducción, es decir, cuando el fluido está en reposo. El resultado principal de Rayleigh fue que la estabilidad de la solución de conducción depende del parámetro adimensional conocido como número de Rayleigh:

$$R = \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu} \quad (1.1)$$

donde  $g$  es la aceleración debido a la gravedad,  $d$  es el espesor de la capa de fluido,  $\beta d$  es la diferencia de temperatura entre la frontera inferior y la superior, y  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$  son los coeficientes de dilatación, difusividad térmica y viscosidad dinámica respectivamente. Conviene hacer aquí una aclaración. El problema que Rayleigh estudió con su modelo es físicamente diferente al experimento que Bénard originalmente realizó. Mientras que en el experimento la tensión superficial juega un papel importante, en el tratamiento de Rayleigh no se toma en cuenta. Físicamente, el modelo de Rayleigh describe el experimento de Bénard si se tiene una tapa en el recipiente. Históricamente a ambos problemas (sin tapa

y con tapa) se les había dado el nombre de problema de Bénard. Actualmente, el problema sin tapa (como Bénard lo planteó originalmente) se conoce como convección de Bénard-Marangoni y el problema con tapa (como el modelo de Rayleigh) se conoce como convección de Rayleigh-Bénard. En lo sucesivo, cuando hablemos de convección de Bénard nos estaremos refiriendo a la convección de Rayleigh-Bénard.

Rayleigh encontró también que a partir de un cierto número de Rayleigh se tenían soluciones estacionarias que correspondían a las celdas de convección que Bénard había observado en sus experimentos. Si se utilizan las técnicas de Rayleigh como en [6], y se impone condiciones de periodicidad a las soluciones se obtienen patrones con celdas en forma de rollos, rectángulos o hexágonos. Por supuesto, la condición que impone Rayleigh de que la capa de fluido sea infinita no es realizable experimentalmente. Además, para obtener soluciones analíticas es necesario utilizar condiciones de frontera que no son precisamente físicas, como que la superficie del fluido no se deforme, pero sí permita el desplazamiento tangencial.

Después se probó, por Pearson y Block de manera independiente (ver [9]), que los movimientos observados por Bénard no estaban debidos a la inestabilidad térmica sino a la variación de la tensión superficial con la temperatura. Sin embargo, en otras condiciones experimentales, el modelo de Rayleigh sí es aplicable. Específicamente los resultados siguen siendo válidos para capas gruesas de fluido y para cuando se tiene una tapa rígida.

Como ya se había mencionado, la línea de investigación preferida para el problema de Bénard fue la experimental y recientemente la computacional. En los siguientes párrafos haremos un breve recuento de los resultados más recientes para este problema desde el punto de vista experimental, que podrían motivar más investigaciones analíticas. Nos restringiremos al caso en que el recipiente es cilíndrico, como se hace en el desarrollo de la tesis.

En los experimentos es común definir el número  $\epsilon$  como:

$$\epsilon = \frac{\Delta T}{\Delta T_c} - 1 \quad (1.2)$$

donde  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre las fronteras inferior y superior y  $\Delta T_c$  es el valor de  $\Delta T$  para el cual la solución de conducción pierde estabilidad.

También es común denotar como  $\Gamma$  a la razón entre  $L$ , la medida de longitud

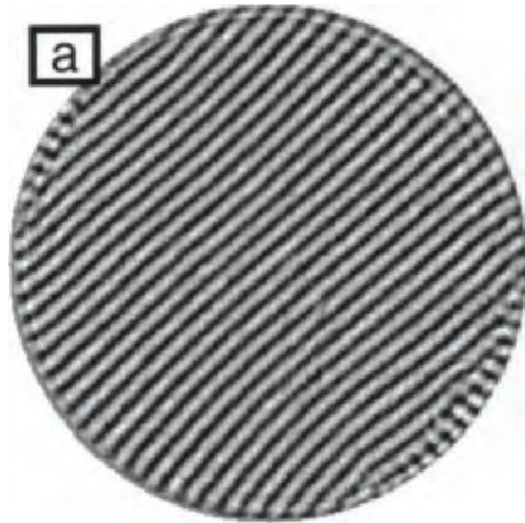


Figura 1.2: Rollos en un recipiente cilíndrico

característica en la dirección horizontal, y  $d$ , la altura del recipiente. En el caso de un contenedor cilíndrico se suele tomar  $L$  como el radio del contenedor.

El patrón más sencillo predicho por Rayleigh está formado por rollos alineados en cierta dirección. Para fluidos con propiedades bien conocidas se ha observado que el valor de  $R$  crítico  $R_c$ , calculado por Rayleigh es bastante cercano al valor crítico de  $R$  obtenido experimentalmente. También se ha observado que para valores de  $\epsilon$  muy cercanos a  $\epsilon = 0$  se obtienen rollos, como se muestra en la figura 1.2, y que su tamaño se acerca mucho al obtenido teóricamente por Rayleigh.

Para valores de  $\epsilon$  más grandes que 0.1 aproximadamente, los rollos empiezan a curvarse y empiezan a aparecer defectos en el patrón. Como se puede apreciar ya en la figura 1.2 se puede apreciar cierta tendencia de los rollos a terminar perpendicularmente a las paredes del recipiente. Una explicación que se ha dado para este fenómeno es que al alinearse de esta manera se minimiza la fricción debido a las paredes.

Al aumentar  $\epsilon$  se ha encontrado que el efecto de alineamiento se hace más pronunciado y a su vez hace que los rollos en el interior se doblen cada vez más como en la figura 1.3. Como se puede observar, también se forman singularidades en el patrón en las paredes del recipiente. Este nuevo patrón se conoce como PanAm, por su parecido con el dibujo representativo de la aerolínea. Experi-





Figura 1.3: Panam

mentalmente se ha encontrado que el número de singularidades en la frontera tiende a aumentar a medida que  $\Gamma$  aumenta.

Por otro lado, se ha observado que las paredes del recipiente pueden contribuir a la existencia de gradientes térmicos en la frontera. Se ha visto que estos gradientes tienen un gran impacto en la determinación del patrón que se obtiene y que tienden a generar flujos que tienen la simetría del contenedor como se observa en la figura 1.4. Por ejemplo, se puede tener forzamiento estático cuando la conductividad de las paredes laterales del recipiente es diferente de la del fluido y la conductividad de las tapas es grande. Veremos más adelante que cuando las paredes laterales no permiten el flujo de calor y las tapas tienen conductividad infinita se obtienen una serie de rollos anidados como solución de la linealización alrededor de la solución de conducción. En términos matemáticos, cuando para la temperatura se imponen condiciones de Neumann en las paredes laterales y de Dirichlet en las tapas, el núcleo de la linealización consiste de una serie de rollos que mantienen la geometría de las paredes del contenedor cilíndrico. Este resultado teórico es pues consistente con los experimentos aunque en la práctica la conductividad de las tapas es finita.

Los experimentos muestran el patrón que se obtiene al aumentar  $\epsilon$  más allá del rango de estabilidad para los rollos concéntricos depende del forzamiento en las paredes laterales,  $\Gamma$  y el número de Prandtl  $P$ . En algunos casos se ha encontrado que el centro del conjunto de rollos se desplaza hacia las paredes laterales. Otro comportamiento observado ha sido la emisión de rollos concéntricos

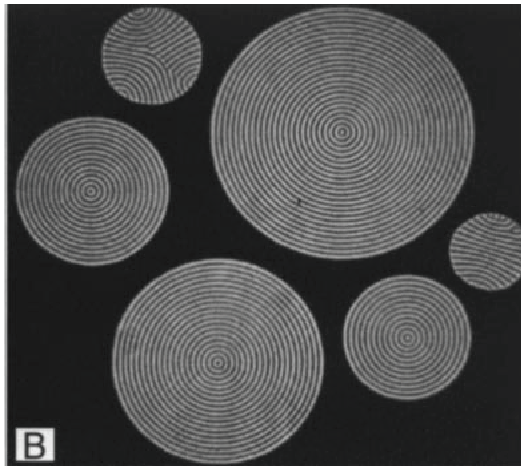


Figura 1.4: Rollos concéntricos

que viajan hacia afuera.

También se han observado espirales que rotan en experimentos con un número de Prandtl cercano a 1. Estas espirales fueron descubiertas por Bodenschatz y después estudiadas con detalle por Plapp (ver [5]). La formación de una de estas espirales a partir de un patrón de rollos concéntricos se muestra en la figura 1.5.

En la foto se observa que al aumentar muy lentamente  $\epsilon$  el número de rollos concéntricos aumenta y de esta forma se genera una espiral de un solo brazo. Se ha observado que al aumentar mucho más  $\epsilon$  la espiral se vuelve inestable y entonces se genera una espiral de varios brazos como la de la figura 1.6 o se llega a un comportamiento llamado SDC (Spiral-defect Chaos).

Los experimentos de convección de Bénard son generalmente diseñados de manera que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande y de esta forma pueda considerarse que las propiedades del fluido no dependen de la temperatura. Sin embargo se han hecho otros experimentos en recipientes con  $\Gamma$ s pequeños donde la diferencia de temperatura entre las tapas es demasiado grande como para considerar válida esta aproximación. Uno de los resultados más importantes fue que se obtuvo un patrón de hexágonos como el observado por Bénard cuando la variación de la tensión superficial con la temperatura era el efecto predominante.

Para  $\epsilon$  alrededor de 0.02 se obtuvo un patrón de hexágonos regulares como

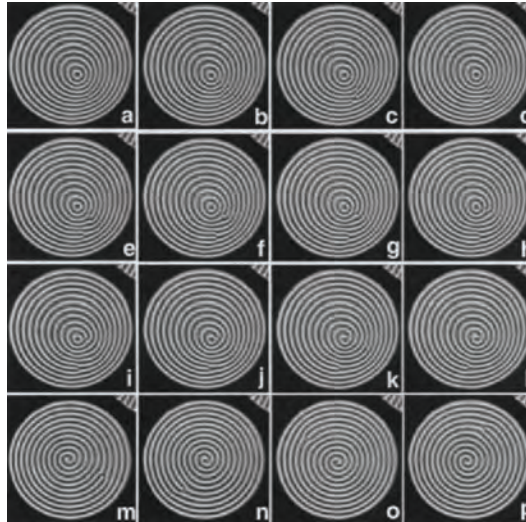


Figura 1.5: Formación de una espiral

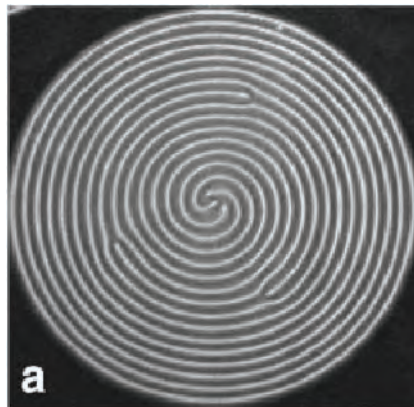


Figura 1.6: Espiral de varios brazos

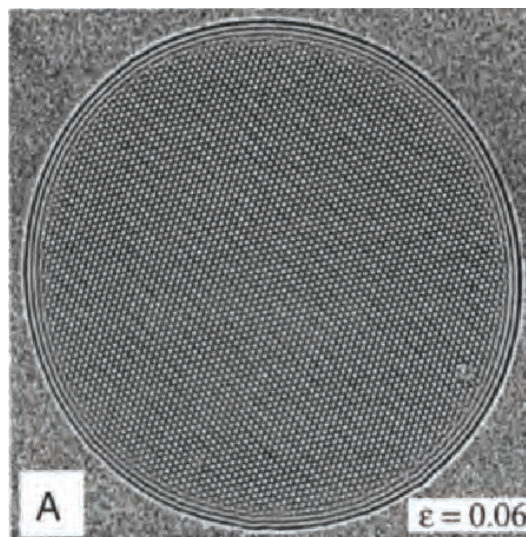


Figura 1.7: Patrón de hexágonos

los de la figura 1.7 en un experimento realizado por Bodenschatz. Después de aumentar  $\epsilon$  de manera muy controlada se obtuvieron patrones de una espiral con  $n$  brazos, con  $n$  entre 1 y 13. Después, se redujo de manera controlada  $\epsilon$  y se observó que los  $n$  brazos de la espiral iban disminuyendo de uno en uno hasta formar un patrón de rollos concéntricos. En la secuencia  $C$ ,  $B$ ,  $A$  de la figura 1.8 se puede observar cómo se pasa de una espiral de 2 brazos a los rollos concéntricos.

Después de cierto valor de  $\epsilon$  los hexágonos comienzan a aparecer de nuevo y se reporta que al disminuir más  $\epsilon$  se obtiene de nuevo un arreglo de celdas hexagonales.

Por último es interesante mencionar uno de los resultados experimentales más recientes para el problema de convección de Benard. Morris (1993) descubrió una dinámica compleja tanto temporalmente como espacialmente para un número de Prandtl aproximadamente igual a 1,  $\Gamma = 78$  y  $\epsilon$  arriba de 0.26. Se le dio el nombre de spiral-defect chaos (SDC) a este estado, que involucra una mezcla de espirales rotantes y rollos concéntricos. Según los experimentos realizados parece que la aparición de esta dinámica no está influida por las paredes laterales pues se ha observado tanto en recipientes cilíndricos como rectangulares cuya  $\Gamma$  no es pequeña. Una fotografía del experimento de Morris se puede observar en la figura 1.9. Esta dinámica es aún más impresionante si se observa en video como en (referencia: <http://www.flickr.com/photos/nonlin/3595528590/>).

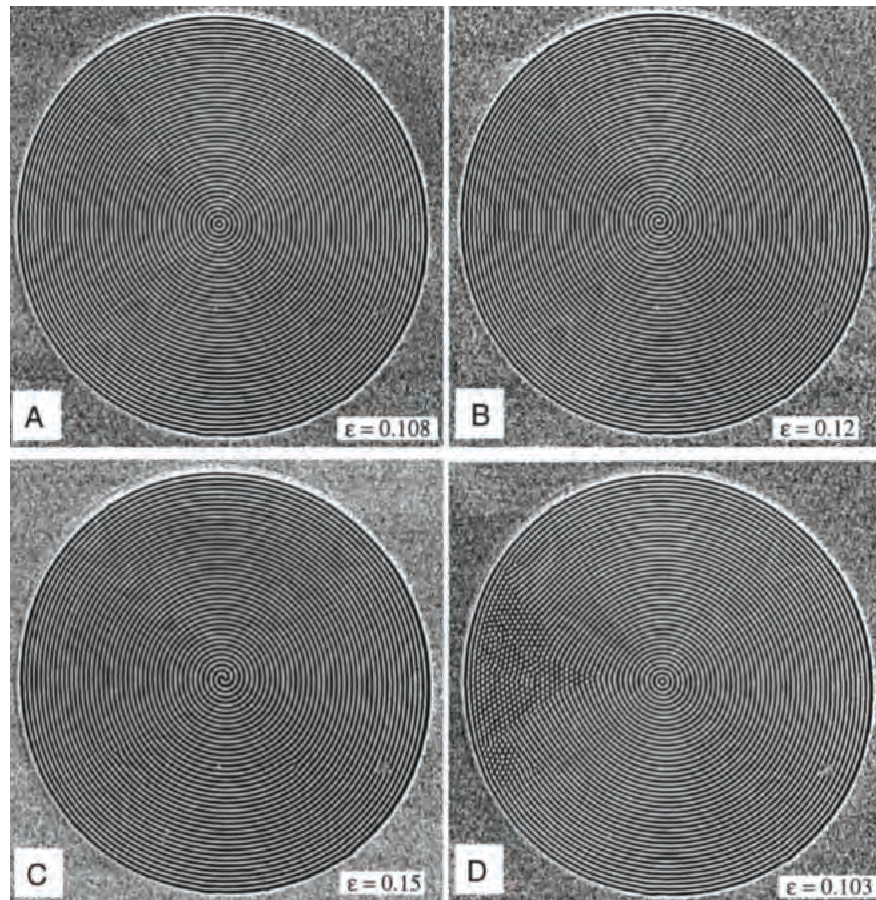


Figura 1.8: Transición de espirales a rollos concéntricos

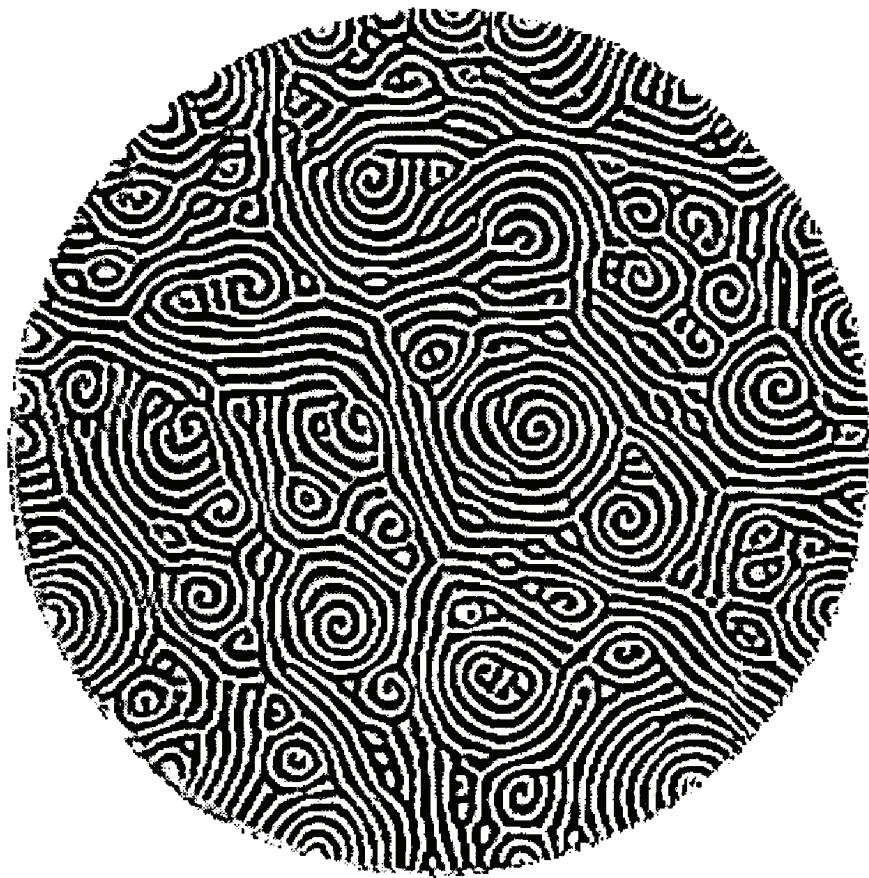


Figura 1.9: SDC

Esta reseña está basada en el artículo [5] y la mayoría de las imágenes también han sido tomadas de allí. La excesiva simplificación de la descripción de los experimentos fue intencional. En particular, no se hizo referencia a los enormes retos que presenta realizar el experimento para ciertos valores de los parámetros ni los métodos que se utilizan para hacerles frente (como utilizar diferentes tipos de fluidos).

Desde el punto de vista matemático puede ser interesante que los experimentos indican que el flujo resultante depende fuertemente de las condiciones de frontera en las paredes laterales. También es notable que considerar variaciones en las propiedades del fluido respecto a la temperatura permitió observar un patrón de hexágonos muy parecido al que vio Bénard en sus experimentos (recordemos que el modelo de Rayleigh describe un experimento distinto al que Bénard originalmente estudió).

Nosotros en la tesis consideraremos únicamente fluidos cuyas propiedades no cambian con la temperatura, dentro la aproximación de Boussinesq que describiremos en la sección correspondiente. También se abordará únicamente el estudio matemático de la bifurcación de la solución de conducción a rollos concéntricos, que en realidad es una consecuencia de las condiciones de frontera utilizadas. Ojalá que esta reseña sirva de inspiración para seguir el tratamiento analítico y extenderlo a otras clases de patrones, que si bien están minuciosamente estudiados desde el punto de vista experimental y computacional aún carecen de una detallada explicación matemática.

## Capítulo 2

# Planteamiento del problema

### 2.1. Motivación

Tanto en la ciencia como en la ingeniería los problemas de mecánica de fluidos son cosa común. La predicción metereológica, el estudio de las corrientes oceánicas, el diseño de válvulas cardiacas, el diseño de autos y aviones son sólo algunos de los campos en los que esta rama de la física tiene un papel fundamental.

Dentro de la misma mecánica de fluidos el fenómeno de convección es importante pues fue uno de los primeros ejemplos de inestabilidad que se observó. Por otro lado, el fenómeno ha sido propuesto como explicación a los patrones que a veces pueden verse en las nubes, como el causante del granulado en el sol y también se encuentra frecuentemente en procesos industriales.

Aunque el problema de Rayleigh-Bénard no parece tener ninguna aplicación directa como las mencionadas, la motivación para estudiarlo desde el punto de vista científico es fuerte. Debido precisamente a que el problema es fácil de plantear, puede ser un buen comienzo para entender más profundamente la convección desde la mecánica de fluidos.

Desde el punto de vista matemático los problemas no lineales de ecuaciones diferenciales parciales constituyen todavía un campo muy activo. La convección de Rayleigh-Bénard da muestra buena de la efectividad de los resultados topológicos de la teoría de la bifurcación para tratar estos problemas.



## 2.2. Deducción de las ecuaciones para un medio continuo

### 2.2.1. Descripción material y espacial

Se considerará que el movimiento de un medio continuo puede ser descrito por una transformación de puntos. Se supondrá que a cierto tiempo  $t_0$ , una partícula se encuentra en la posición  $\xi$  y la posición que ocupa la partícula un determinado tiempo después se denotará como  $\mathbf{x}$ . Se tiene pues la siguiente transformación que depende de la posición inicial de la partícula y del tiempo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t) \quad (2.1)$$

Se supondrá además que se puede asociar propiedades, como densidad o velocidad, que varían de manera continua a los puntos que ocupa el medio. Esta es la llamada hipótesis del continuo que utilizaremos como base para encontrar las ecuaciones que modelan un medio continuo. Aunque en la naturaleza la materia es de carácter discreto pues está formada por moléculas y cuando se consideran volúmenes muy pequeños las propiedades no están distribuidas uniformemente, la hipótesis del continuo ha sido utilizada desde los orígenes de la mecánica de medios continuos con resultados que se ajustan bien a la realidad. Una discusión más amplia acerca de estos dos enfoques y la conexión entre ellos se puede encontrar en el libro de Segel [19].

Se llamará coordenadas materiales a las coordenadas iniciales de la partícula  $\xi$  y coordenadas espaciales a la posición en el tiempo  $t$  de la partícula que en el tiempo  $t_0$  estaba en la posición  $\xi$ . Se supondrá que el movimiento se da de forma continua y que para un tiempo fijo  $t$  existe una función también continua que da la posición inicial de la partícula que en el tiempo  $t$  está en la posición  $\mathbf{x}$ . Es decir:

$$\xi = \xi(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Supondremos que tanto  $\mathbf{x}$  como  $\xi$  tienen tantas derivadas como sea necesario para que las manipulaciones que realicemos tengan sentido.

La ecuación (2.1) puede verse como la ecuación paramétrica de la curva en el espacio que describe la partícula que en el tiempo  $t_0$  está en la posición  $\xi$ .

## 2.2. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA UN MEDIO CONTINUO 25

Las propiedades del fluido se pueden seguir a lo largo de estas curvas, es decir se puede describir una propiedad del medio como si uno se moviera sobre la trayectoria que sigue una partícula de éste. Si  $\mathcal{F}$  es una propiedad del medio entonces esta descripción material se representará como  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ . También se puede pasar a la descripción espacial, es decir, observar el cambio de la propiedad como si se estuviera parado en un punto fijo, mediante la ecuación (2.2),

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t] \quad (2.3)$$

El paso de la descripción espacial a la material es posible mediante la ecuación (2.1).

Se considerarán dos derivadas respecto al tiempo. La primera se denota con el símbolo  $\frac{\partial}{\partial t}$  y se obtiene al derivar respecto al tiempo manteniendo  $\mathbf{x}$  constante. La segunda se obtiene al derivar respecto al tiempo manteniendo  $\boldsymbol{\xi}$  constante y se denota con el símbolo  $\frac{d}{dt}$ .

Si  $\mathcal{F}$  es una propiedad del fluido entonces la relación entre las dos derivadas está dada del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t] \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\boldsymbol{\xi}} + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

La derivada  $\frac{d}{dt}$  se conoce también como derivada material e indica cómo cambia la propiedad respecto al tiempo si se sigue una partícula. La derivada  $\frac{\partial}{\partial t}$  por otro lado indica la variación de una propiedad respecto al tiempo cuando se está fijo en algún punto del espacio. La derivada material también puede escribirse utilizando notación vectorial como:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathcal{F} \quad (2.5)$$

### 2.2.2. Teorema de transporte de Reynolds

Se sabe, utilizando el teorema de cambio de variable para integrales, que si las coordenadas se cambian de  $\xi$  a  $x$  el elemento de volumen cambia de la siguiente forma:

$$dV = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = J dV_0 \quad (2.6)$$

Ahora se verá cómo cambia  $J$  cuando se sigue el movimiento del medio, es decir se busca calcular la derivada material  $\frac{dJ}{dt}$ . Explícitamente se tiene que:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Por otro lado se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} \quad (2.8)$$

y como  $v$  es función de  $x_1, x_2$  y  $x_3$  también se tiene que:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (2.9)$$

El determinante  $J$  también puede escribirse del siguiente modo:

$$J = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \quad (2.10)$$

donde el símbolo  $\epsilon_{ijk}$  está definido así:

$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} 0 & \text{si algún índice está repetido} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 1, 2 \text{ y } 3 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } 1, 2 \text{ y } 3 \end{cases} \quad (2.11)$$

## 2.2. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA UN MEDIO CONTINUO 27

La derivada del Jacobiano es pues:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_k} \right) \quad (2.12)$$

por la regla para la derivación de un producto y por la ecuación (2.8). Ahora, si se utiliza la ecuación (2.9), para el término que contiene a  $v_1$  se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left( \sum_{p=1}^3 \frac{\partial v_1}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} &= \sum_{p=1}^3 \left( \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \right) \\ &= \sum_{p=1}^3 \frac{\partial v_1}{\partial x_p} \left( \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aquí podemos observar que cuando  $p = 2$  ó  $p = 3$  entonces

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} = 0 \quad (2.14)$$

pues la suma corresponde al determinante de una matriz con dos renglones iguales.

De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial v_1}{\partial x_p} \left( \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \right) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left( \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \right) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J \end{aligned} \quad (2.15)$$

De manera que:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} J \right) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) J \quad (2.16)$$

Esta fórmula se conoce como la fórmula de expansión de Euler y será utilizada para probar el teorema de transporte de Reynolds que es fundamental en la teoría de medios continuos.

Sean  $V_0$  un conjunto acotado de partículas del medio en el tiempo  $t_0$  y  $V_t$  su imagen bajo la transformación  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ . Es decir,  $V(t)$  es el volumen que ocupa  $V_0$  cuando se va moviendo con el medio continuo. Sea ahora  $\mathcal{F}$  una función definida en  $V(t)$ , donde  $\mathcal{F}$  puede ser escalar o vectorial. Nos interesa calcular la derivada material de:

$$F(t) = \iiint_{V(t)} \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.17)$$

Podríamos pensar, por ejemplo, que  $\mathcal{F}$  es la densidad y en ese caso estaríamos interesados en saber cómo cambia la masa del conjunto de partículas que originalmente se encontraba en  $V_0$ , cuando se va moviendo en el medio continuo. Mediante un cambio de variable podemos expresar  $F(t)$  como:

$$F(t) = \iiint_{V(t)} \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V_0} \mathcal{F}[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t] J dV_0 \quad (2.18)$$

La derivada material de  $F(t)$  queda entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \mathcal{F}[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t] J dV_0 \\ &= \iiint_{V_0} \left( \frac{d\mathcal{F}}{dt} J + \mathcal{F} \frac{dJ}{dt} \right) dV_0 \\ &= \iiint_{V_0} \left( \frac{d\mathcal{F}}{dt} + \mathcal{F}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) J dV_0 \\ &= \iiint_{V(t)} \left( \frac{d\mathcal{F}}{dt} + \mathcal{F}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV \end{aligned} \quad (2.19)$$

Este resultado se conoce como teorema de transporte de Reynolds.

### 2.2.3. Ecuación de continuidad

Ahora deduciremos la ecuación de continuidad para un medio continuo. Como hipótesis física tomaremos que la masa de una región acotada del medio no varía a medida que se mueve. En otras palabras, para un conjunto  $V_0 \subset \mathbb{R}^3$  acotado, arbitrario se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, \infty) \quad (2.20)$$

Ahora, por el teorema de transporte de Reynolds podemos escribir esta relación como:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV \quad (2.21)$$

y si utilizamos la expresión para la derivada material de la ecuación (2.5) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV \quad (2.22)$$

Hemos supuesto que la derivada de la masa vale cero y además tenemos que el integrando es continuo. Esto nos lleva a que el integrando debe ser idénticamente cero en cualquier punto que ocupe el medio. Si esto no ocurriera así, por continuidad podríamos encontrar una pequeña esfera donde el integrando fuera estrictamente positivo. La integral en esta esfera sería positiva mientras que por otro lado sabemos que debe valer cero.

El principio de conservación de masa queda entonces expresado en una ecuación diferencial como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.23)$$

### 2.2.4. El tensor de esfuerzos

Existen fuerzas que actúan en todo el volumen de un medio continuo como la fuerza de gravedad, las fuerzas electromagnéticas o las fuerzas ficticias que parecen actuar cuando el movimiento está referido a un sistema de ejes que acelera. Las fuerzas con esta propiedad se denominan externas, en comparación con las fuerzas superficiales que actúan en un elemento de volumen a través de su superficie.

Sean  $\mathbf{n}$  la normal unitaria en un punto  $\mathbf{x} \in S$  de la superficie de un elemento de volumen y  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  la fuerza por unidad de área ejercida en  $S$  conocida como esfuerzo y que supondremos continua. La fuerza superficial total que se ejerce en el elemento  $V$  a través de su superficie se obtiene mediante la integral de  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  sobre la superficie del elemento de volumen  $S$ :

$$\iint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} dS \quad (2.24)$$

Si  $\mathbf{f}$  es la fuerza externa por unidad de masa entonces la fuerza externa total en el elemento está dada por la siguiente integral:

$$\iiint_V \rho \mathbf{f} dV \quad (2.25)$$

Ahora aplicaremos la segunda ley de Newton al elemento de volumen. Es decir, se tiene que el cambio de momento lineal respecto al tiempo es igual a la suma de las fuerzas que actúan en el elemento. En una ecuación se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \iint_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS \quad (2.26)$$

Aunque el valor de  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  en algún punto  $x$  de la superficie depende de la normal a la superficie en ese punto, se verá ahora que basta conocer cómo son los esfuerzos en  $\mathbf{x}$  en superficies con normales  $i$ ,  $j$  y  $k$  para saber cómo es el esfuerzo en  $\mathbf{x}$  en una superficie con normal arbitraria. Se ha utilizado la notación  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  para los vectores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Considérese un elemento de superficie cuya normal está en la dirección  $\mathbf{e}_j$ . A la componente del esfuerzo en ese punto en la dirección  $\mathbf{e}_i$  se le denotará como  $T_{ij}$

## 2.2. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA UN MEDIO CONTINUO 31

y a la matriz formada por los elementos  $T_{ij}$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  se le llamará tensor de esfuerzos. Veremos que  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T\mathbf{n}$ .

Tómese un elemento de volumen de forma tetraédrica como el de la figura 2.1 con un vértice en  $\mathbf{x}$  y cuyos otros vértices están en los puntos  $\mathbf{x} + L_i \mathbf{e}_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$ . A la cara de mayor área, es decir, la que no contiene al punto  $\mathbf{x}$  se le denotará como  $A$ . A las caras con normales  $-\mathbf{e}_i$  se les denotará respectivamente como  $A_i$ .

Si  $F_i^j$  es la componente de la fuerza en la dirección  $\mathbf{e}_i$  que actúa en  $A_j$  entonces:

$$F_i^j = \iint_{A_j} -T_{ij}(\mathbf{x}) dA_j \quad (2.27)$$

que por el teorema del valor medio para integrales puede escribirse como:

$$F_i^j = -T_{ij}(\mathbf{x}^{(j)}) dA_j \quad \text{con } \mathbf{x}^{(j)} \in A_j \quad (2.28)$$

donde el área de  $A_j$  está representada por  $dA_j$ .

De manera análoga la componente de la fuerza en la dirección  $\mathbf{e}_i$  que actúa sobre la cara  $A$  se denotará por  $F_i$  y está dada por:

$$F_i = t_i(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{n}) \quad \text{con } \mathbf{x}^{(0)} \in A \quad (2.29)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  es el vector normal unitario a la cara  $A$ . Denotemos la región que ocupa el tetraedro como  $V$  y al volumen del mismo como  $dV$ . Si ahora aplicamos la ecuación (2.26) entonces tenemos que para la componente  $i$ :

$$\left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right)_{\mathbf{y}} dV = (\rho f_i)_{\mathbf{z}} dV + \sum_{j=1}^3 -T_{ij}(\mathbf{x}^{(j)}) dA_j + t_i(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{n}) dA \quad (2.30)$$

donde se ha utilizado nuevamente el valor medio para la integral, de manera que  $\mathbf{y} \in V$  y  $\mathbf{z} \in V$ . También se ha utilizado que por el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de continuidad se tiene que:



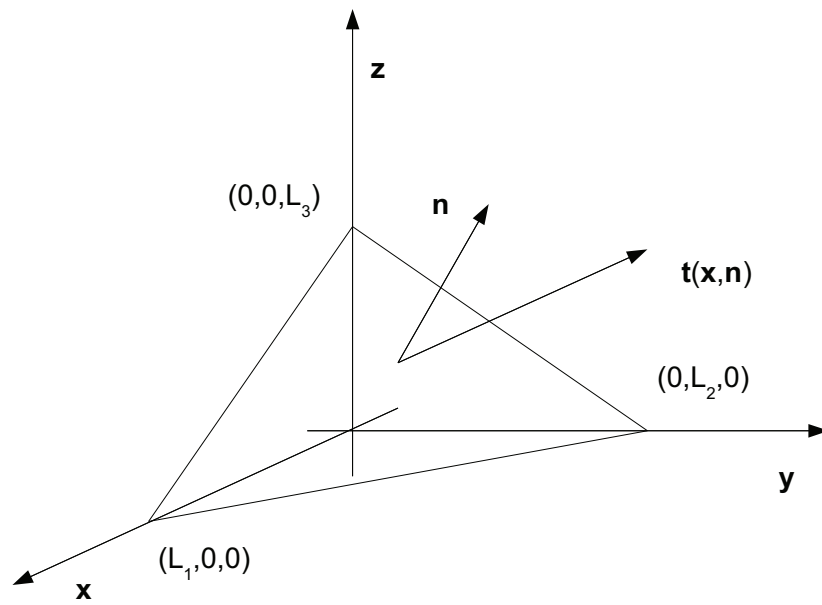


Figura 2.1: Esfuerzos en un elemento de volumen tetraédrico

2.2. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA UN MEDIO CONTINUO 33

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV &= \iiint_V \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\
 &= \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\
 &= \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV \\
 &= \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Ahora, tenemos que  $dA_i = \frac{1}{2} \prod_{k \neq i} L_k$  y  $dV = \frac{L_1 L_2 L_3}{6}$ . Podemos calcular  $\mathbf{n}$  en términos de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  del siguiente modo:

$$\mathbf{n} = \frac{(L_2 \mathbf{e}_2 - L_1 \mathbf{e}_1) \wedge (L_3 \mathbf{e}_3 - L_1 \mathbf{e}_1)}{\|(L_2 \mathbf{e}_2 - L_1 \mathbf{e}_1) \wedge (L_3 \mathbf{e}_3 - L_1 \mathbf{e}_1)\|} = \frac{(L_2 L_3, L_1 L_3, L_1 L_2)}{\sqrt{L_2^2 L_3^2 + L_1^2 L_3^2 + L_1^2 L_2^2}} \tag{2.32}$$

Por otro lado tenemos que:

$$dA = \frac{1}{2} \sqrt{L_2^2 L_3^2 + L_1^2 L_3^2 + L_1^2 L_2^2} \tag{2.33}$$

pues  $dA$  es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores  $L_2 \mathbf{e}_2 - L_1 \mathbf{e}_1$  y  $L_3 \mathbf{e}_3 - L_1 \mathbf{e}_1$ . De la ecuación (2.32) podemos ver que:

$$dA_i = n_i dA \tag{2.34}$$

Así que la ecuación (2.30) se puede reescribir como:

$$\frac{1}{6} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right)_{\mathbf{y}} L_1 L_2 L_3 = \frac{1}{6} (\rho f_i)_{\mathbf{z}} L_1 L_2 L_3 + \sum_{j=1}^3 -T_{ij}(\mathbf{x}^{(j)}) n_i dA + (t_i(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{n})) dA \tag{2.35}$$

Y entonces tenemos que:

$$\sum_{j=1}^3 -T_{ij}(\mathbf{x}^{(j)})n_i + (t_i(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{n})) = \frac{1}{6} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right)_{\mathbf{y}} \frac{L_1 L_2 L_3}{dA} - \frac{1}{6} (\rho f_i)_{\mathbf{z}} \frac{L_1 L_2 L_3}{dA} \quad (2.36)$$

Ahora tomaremos el límite cuando  $V$  tiende a cero pero las proporciones entre  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  se mantienen constantes. Equivalentemente, mantendremos el vector  $\mathbf{n}$  constante y haremos que  $L_1$  tienda a cero. Al utilizar (2.32), se puede escribir la ecuación (2.36) del siguiente modo:

$$\sum_{j=1}^3 -T_{ij}(\mathbf{x}^{(j)})n_i + (t_i(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{n})) = \frac{1}{3} L_1 n_1 \left( \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right)_{\mathbf{y}} - (\rho f_i)_{\mathbf{z}} \right) \quad (2.37)$$

Al hacer tender  $L_1$  a cero vemos que el lado derecho de la ecuación tiende a cero pues todas las funciones involucradas son continuas, y tanto  $\mathbf{y}$  como  $\mathbf{z}$  son puntos del conjunto compacto  $V$ . Por otro lado, la continuidad de las funciones también implica que  $\mathbf{x}^{(j)}$  y  $\mathbf{x}^{(0)}$  convergen a  $\mathbf{x}$ .

Entonces se tiene:

$$\sum_{j=i}^3 -T_{ij}(\mathbf{x})n_j + t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = 0 \quad (2.38)$$

es decir:

$$\mathbf{t} = T\mathbf{n} \quad (2.39)$$

como queríamos probar.

### 2.2.5. Ecuaciones de movimiento

Si ahora sustituimos (2.39) en (2.26) y luego utilizamos el teorema de Green tenemos:

2.2. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA UN MEDIO CONTINUO 35

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV &= \iiint_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \iiint_V \rho f_i dV + \iint_S \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j dS \\ &= \iiint_V \left( \rho f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (2.40) \end{aligned}$$

Como  $V$  es arbitrario y el integrando es continuo entonces se tiene necesariamente que:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.41)$$

Que se puede escribir en notación vectorial como:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.42)$$

Definiremos el **momento angular** de una partícula que está en el punto  $\mathbf{x}$  y que tiene velocidad  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{x} \wedge (m\mathbf{v})$ , donde  $m$  es la masa de la partícula.

Definiremos también la **torca** que produce una fuerza  $\mathbf{F}$  en el punto  $\mathbf{x}$  como  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$ .

Como ya se mencionó anteriormente, en la mecánica de medios continuos no se encuentran únicamente fuerzas externas (como la fuerza de gravedad) sino que también son importantes las fuerzas superficiales. Supondremos que la razón de cambio del momento angular es igual a la suma de las torcas producidas por las fuerzas externas y las producidas por los esfuerzos en la superficie. Para formular este supuesto de manera más precisa habrá que extender la definición de momento angular y torca del caso puntual al caso continuo. Sea  $V(t) \subset \mathbb{R}^3$ , postularemos que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) dV = \iiint_V \rho(\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}) dV + \iint_S (\mathbf{x} \wedge \mathbf{t}) dS \quad (2.43)$$

Probaremos ahora que a partir de este postulado es posible probar que el tensor de esfuerzos  $T$  es simétrico.

Si aplicamos el teorema de transporte al lado izquierdo de (2.43) y utilizamos el hecho de que  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$  tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) dV = \iiint_V \rho(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) dV \quad (2.44)$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia a la componente en la dirección  $\mathbf{e}_i$  de la segunda integral del lado derecho de (2.43) y utilizamos (2.39) llegamos a que:

$$\iint_S \sum_{j,k=1}^3 \left( \epsilon_{ijk} x_j \sum_{m=1}^3 (T_{km} n_m) \right) dS = \iiint_V \sum_{j,k=1}^3 \left( \epsilon_{ijk} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j T_{km}) \right) dV \quad (2.45)$$

Sin embargo, el integrando del lado derecho es la componente en la dirección  $\mathbf{e}_i$  de  $\mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{T}_S$ , donde  $\mathbf{T}_S$  es el vector cuya  $i$ -ésima componente es  $\epsilon_{ijk} T_{kj}$  pues:

$$\sum_{j,k=1}^3 \left( \epsilon_{ijk} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j T_{km}) \right) = \sum_{j,k=1}^3 \left( \epsilon_{ijk} x_j \sum_{m=1}^3 \frac{\partial T_{km}}{\partial x_m} \right) + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} T_{kj} \quad (2.46)$$

Si ahora utilizamos las ecuaciones (2.43) y (2.44) llegamos a que:

$$\iiint_V \mathbf{x} \wedge (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T}) dV = \iiint_V \mathbf{T}_S dV \quad (2.47)$$

Por la ecuación (2.41) tenemos que la integral del lado izquierdo es cero. Como el volumen es arbitrario entonces debemos tener que:

$$\mathbf{T}_S \equiv 0 \quad (2.48)$$

Y las componentes de este vector son  $T_{12} - T_{21}$ ,  $T_{31} - T_{13}$  y  $T_{23} - T_{32}$  así que como queríamos probar:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.49)$$

## 2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Definiremos como tensor de deformación  $D$  a la matriz formada por los elementos:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.50)$$

Para escribir las ecuaciones que modelan un fluido Newtoniano utilizaremos las siguientes hipótesis físicas:

1. El tensor de esfuerzos  $T$  es una función continua y polinomial de grado uno del tensor de deformación  $D$ .
2. El fluido es homogéneo, es decir  $T$  no depende de  $\mathbf{x}$ .
3. El fluido es isotrópico, no hay una dirección preferida. Esto quiere decir que si  $R$  es una matriz ortogonal entonces  $T(RDR^{-1}) = RT(D)R^{-1}$
4. Cuando  $D = 0$ ,  $T$  tiene la forma  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$

Recordemos que una matriz  $R$  es ortogonal si  $R^T = R^{-1}$  y que corresponde a una transformación lineal que preserva distancias. Si el lector está interesado en saber más de estas matrices puede consultar el libro de Artin [3].

A continuación enunciaremos algunas propiedades concernientes a matrices con coeficientes reales que serán útiles para llegar a las ecuaciones de Navier-Stokes.

**Definición.** Se dice que una matriz  $M$  es simétrica si  $M_{ij} = M_{ji}$ .

**Proposición.** Los vectores propios de una matriz simétrica son reales.

**Proposición.** Sea  $M$  una matriz simétrica. Entonces existe una matriz ortogonal  $P$  tal que  $PMP^{-1}$  es una matriz diagonal.

Tenemos que la matriz de deformación  $D$  es simétrica y por lo tanto podemos encontrar una matriz  $Q$  tal que  $QDQ^{-1} = \tilde{D}$  donde  $\tilde{D}$  es una matriz diagonal. Dicho de otro modo podemos hacer un cambio de base para que la transformación que corresponde a la matriz  $D$  se exprese como una matriz diagonal y además el cambio de base es una transformación rígida de los ejes coordenados.

Vamos a ver que el cambio de base dado por  $Q$  también diagonaliza la matriz  $T$ . Hagamos  $\tilde{T} = QTQ^{-1}$ .

**Proposición.**  $\tilde{T}$  es una matriz diagonal.

Para ello probaremos primero que  $\tilde{T}_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Sea  $S_k$  la matriz tal que  $s_{ij} = 1$  si  $i = j \neq k$ ,  $s_{ij} = -1$  si  $i = j = k$  y  $s_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Notamos que  $S_k$  es una matriz ortogonal, y que en consecuencia  $S_k Q$  también es ortogonal. Por el supuesto tres tenemos que:

$$S_k \tilde{T}(D) S_k^{-1} = S_k Q T(D) Q^{-1} S_k^{-1} = T(S_k Q D Q^{-1} S_k^{-1}) = T(\tilde{D}) \quad (2.51)$$

donde la última igualdad resulta del hecho de que tanto  $S_k$  como  $\tilde{D}$  son matrices diagonales y por lo tanto:

$$S_k \tilde{D} = \tilde{D} S_k \quad (2.52)$$

Y por otro lado como  $Q$  es ortogonal tenemos que:

$$\tilde{T}(D) = Q T(D) Q^{-1} = T(Q D Q^{-1}) = T(\tilde{D}) \quad (2.53)$$

por el tercer supuesto.

Así que:

$$S_k \tilde{T} S_k^{-1} = \tilde{T} \quad (2.54)$$

De aquí se tiene que  $-\tilde{T}_{ik} = \tilde{T}_{ik}$  si  $i \neq k$  y que por lo tanto  $\tilde{T}$  es diagonal.

**Definición.** A la matriz  $P = T + pI$  donde  $I$  es la matriz identidad le daremos el nombre de tensor de esfuerzos viscosos.

Tenemos que  $QPQ^{-1} = QTQ^{-1} + pI = \tilde{T} + pI$  y por lo tanto  $QPQ^{-1}$  es una matriz diagonal que denotaremos como  $\tilde{P}$ . Por otro lado, sabemos que  $\tilde{T}(D) = T(\tilde{D})$  de manera que las entradas de  $\tilde{P}$  son funciones de los elementos de  $\tilde{D}$  y posiblemente  $p$ . Denotaremos a los elementos de  $\tilde{D}$  como  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ .

Por el supuesto cuatro sabemos que  $\tilde{P}$  sólo depende de los elementos de  $\tilde{D}$ . Denotaremos a los elementos de  $\tilde{P}$  como  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ . Como sabemos que la dependencia de  $\tilde{P}$  de los elementos de  $\tilde{D}$  es lineal entonces:

$$\begin{aligned}
p_1 &= a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + a_{13}d_3 \\
p_2 &= a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + a_{23}d_3 \\
p_3 &= a_{31}d_1 + a_{32}d_2 + a_{33}d_3
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Hemos visto que  $QPQ^{-1} = T(\tilde{D}) + pI = T(QDQ^{-1}) + pI$  si  $Q$  es tal que  $QDQ^{-1}$  es diagonal. Si escogemos  $Q$  de manera que sea ortogonal y efectúe una permutación en los elementos de la diagonal de  $\tilde{D}$  entonces efectuaremos la misma permutación en los elementos de la diagonal de  $\tilde{P}$ .

Si ahora permutamos  $d_1, d_2, d_3$  a  $d_3, d_1, d_2$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
p_3 &= a_{12}d_1 + a_{13}d_2 + a_{11}d_3 \\
p_1 &= a_{22}d_1 + a_{23}d_2 + a_{21}d_3 \\
p_2 &= a_{32}d_1 + a_{33}d_2 + a_{31}d_3
\end{aligned} \tag{2.56}$$

de donde tenemos que  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = a_{23}$ ,  $a_{13} = a_{21}$  si igualamos las dos expresiones para  $p_1$ . Si hacemos lo mismo para  $p_2$  y  $p_3$  y repetimos el procedimiento para la permutación de  $d_1, d_2, d_3$  a  $d_2, d_3, d_1$  se tiene:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22} = a_{33} \\
a_{12} &= a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Sean  $\lambda + 2\mu$  el valor de  $a_{11}$  y  $\lambda$  el valor de  $a_{12}$ . Los números  $\lambda$  y  $\mu$  tienen por supuesto un significado físico importante pero desafortunadamente en este trabajo no podremos ahondar más en este tema. El lector interesado puede consultar [2] y una discusión extensa puede encontrarse en [4].

Entonces tenemos que  $p_i$  tiene la siguiente forma:

$$p_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_i = \lambda \text{Tr}(\tilde{D}) + 2\mu d_i \tag{2.58}$$

De manera que entonces:

$$\tilde{P} = QPQ^{-1} = \lambda \text{Tr}(\tilde{D})I + 2\mu\tilde{D} \tag{2.59}$$



Así que:

$$P = \lambda \text{Tr}(D)I + 2\mu D \quad (2.60)$$

y por la definición de  $P$  se tiene:

$$T = (-p + \lambda \text{Tr}(D))I + 2\mu D \quad (2.61)$$

Ahora obtendremos las ecuaciones de movimiento al sustituir esta expresión de  $T$  en la ecuación (2.41).

Veamos primero que:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \nabla^2 v_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.62)$$

Así que:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 v_i \quad (2.63)$$

donde se ha utilizado que:

$$\text{Tr}(D) = \sum_{j=1}^3 e_{jj} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.64)$$

Y si ahora sustituimos en (2.41) tenemos:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 v_i \quad (2.65)$$

Las ecuaciones de movimiento escritas en notación vectorial quedan entonces:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + (\lambda' + \nu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.66)$$

donde  $\lambda' = \lambda/\rho$  y  $\nu = \mu/\rho$ . Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes.

## 2.4. Ecuación de energía

Así como vimos que la ecuación de continuidad y las ecuaciones de movimiento son la formulación matemática de los principios de conservación de la masa y del momento lineal respectivamente, postularemos un principio de conservación de energía que nos servirá para obtener una tercera ecuación.

Primero definiremos el **trabajo** que un campo vectorial  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  hace sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria  $\phi : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  como la integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\phi(\tau), \tau) \cdot \frac{d\phi}{dt}(\tau) d\tau \quad (2.67)$$

De esta forma tenemos que si la trayectoria de una partícula de fluido está dada como  $\mathbf{x} = \tilde{\phi}(t)$  entonces el trabajo que el campo  $\mathbf{F}$  realiza desde el tiempo  $t_0$  está dado por:

$$A(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tilde{\phi}(\tau), \tau) \cdot \frac{d\tilde{\phi}}{dt}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tilde{\phi}(\tau), \tau) \cdot \mathbf{v}(\tilde{\phi}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.68)$$

Definiremos la **potencia**  $W(t)$  como

$$W(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \mathbf{F}(\tilde{\phi}(t), t) \cdot \mathbf{v}(\tilde{\phi}(t), t) \quad (2.69)$$

De esta forma la potencia de la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre la partícula que pasa por el punto  $\mathbf{x}$  en el tiempo  $t$  es:

$$W(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.70)$$

El postulado de conservación de energía que utilizaremos es que el cambio de la energía total en un elemento de volumen es igual a la suma de las potencias de las fuerzas externas y las fuerzas superficiales, y de la cantidad de calor que se

transfiere al elemento. Por supuesto, no hemos definido lo que significa energía total y no pretenderemos hacerlo en el sentido termodinámico. Tomaremos que la **densidad de energía**  $\mathcal{E}$  tiene la siguiente definición:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 + E \quad (2.71)$$

Aquí  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  y el término está asociado a la energía cinética, y  $E$  es la energía interna y cuya existencia está asegurada por la termodinámica. La intención en este trabajo no es profundizar en una formulación matemática de la termodinámica así que supondremos que  $\mathcal{E}$  es una función  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\Omega$  es el dominio en que estamos trabajando (la porción del espacio que ocupa el fluido). También hemos supuesto para fines prácticos que la función  $\mathcal{E}$  está definida para cualquier tiempo (hemos tomado  $t \in \mathbb{R}$ ).

Sea  $V(t) \subset \mathbb{R}^3$ , definiremos la **energía total** de las partículas que ocupan  $V(t)$  como la siguiente integral:

$$\iiint_V \rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.72)$$

Por otro lado, supondremos que existe una función  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que la cantidad de calor que se transfiere al elemento de volumen en el tiempo  $t$  está dada por:

$$- \iint_S \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.73)$$

Podemos escribir ahora el principio de conservación de energía en términos matemáticos como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathcal{E} dV &= \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( \frac{1}{2}v^2 + E \right) dV \\ &= \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} dS - \iint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación (2.41) por  $v_i$  e integramos en  $V(t)$  tenemos:

$$\iiint_V \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV = \iiint_V \rho v_i f_i + v_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (2.75)$$

o equivalentemente al integrar por partes:

$$\iiint_V \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV = \iiint_V \left( \rho v_i f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i T_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} T_{ij} \right) dV \quad (2.76)$$

Si hacemos lo mismo para cada componente y sumamos tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV = \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV - \iiint_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + \iint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.77)$$

donde hemos usado la relación (2.39) y el teorema de la divergencia.

De la ecuación (2.74) y (2.77) llegamos a que:

$$\iiint_V \left( \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV = 0 \quad (2.78)$$

Y dado que el integrando es continuo y que  $V(t)$  es arbitrario entonces:

$$\rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2.79)$$

Ahora, como sabemos que  $T$  es simétrica entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} e_{ij} \end{aligned} \quad (2.80)$$

De manera que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [(-p + \lambda \text{Tr}(D)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}] e_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^3 (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) e_{ii} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2\mu e_{ij}^2 \\
&= -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij}^2 \quad (2.81)
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij} e_{ji} \quad (2.82)$$

Pero  $D$  por definición es una matriz simétrica así que:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \text{Tr}(D^2) \quad (2.83)$$

Definiremos a  $\Phi$  como:

$$\Phi = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \text{Tr}(D^2) \quad (2.84)$$

La ecuación de la energía queda entonces:

$$\rho \frac{dE}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi \quad (2.85)$$

Cabe señalar que se puede dar una interpretación física al término  $\Phi$ . En la ecuación (2.77) se tiene que el cambio respecto al tiempo de la energía cinética de las partículas contenidas en el elemento de volumen es igual a la suma de tres términos. Todos ellos corresponden a la razón instantánea en que las fuerzas realizan trabajo en las partículas del elemento de volumen. El primer término se debe a las fuerzas externas que actúan en el elemento mientras que el tercero corresponde a las fuerzas superficiales.

El segundo término está asociado al trabajo debido a los esfuerzos internos y según obtuvimos en (2.81) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij}^2 = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi \quad (2.86)$$

Aquí la integral de volumen de  $-p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  representa el incremento de la energía debido a la compresión del fluido. El término  $\Phi$  es la razón instantánea a la que la energía se disipa debido a la viscosidad. Como se ve en (2.81),  $\Phi \geq 0$ , y de esta forma siempre representa una disminución al cambio respecto al tiempo de la energía cinética.

Las ecuaciones que hemos deducido son por una parte muy generales y por otra muy particulares. Primero, no se ha especificado cómo es la función  $\mathbf{q}$  y lo único que se ha supuesto es que el fluido es newtoniano o en otras palabras, que la matriz de esfuerzos  $T$  satisface las propiedades enunciadas en la sección 2.3. Por otro lado, son muy particulares pues la matriz de esfuerzos no siempre tiene la forma señalada. Existe una gran cantidad de fluidos comunes en los que no ocurre así, entre los cuales están la pintura y la salsa cátsup. Sin embargo la falta de generalidad de las ecuaciones no es tan grave, pues las ecuaciones de movimiento para una matriz de esfuerzos  $T$  arbitraria fueron deducidas antes (aunque no se puede ir más lejos sin saber la forma específica de  $T$ ). De hecho ni siquiera se pidió que la matriz fuera simétrica, como en el caso que desarrollamos con detalle.

No se ha tratado de encontrar cuáles son las mínimas condiciones, desde el punto de vista matemático, que conservan la validez de la deducción hecha aquí. El objetivo principal fue tener un desarrollo que fuera lo más intuitivo posible, tanto desde el punto matemático como del físico; pero que no dejara de ser matemáticamente correcto. Aunque es fácil de enunciar, esta tarea no es tan sencilla de cumplirse y se espera que se halla logrado satisfactoriamente. En particular los libros [2], [4] y [19] fueron de gran ayuda, y una lista más larga puede encontrarse en la bibliografía.

## 2.5. Ecuaciones de Boussinesq

Como ya se ha mencionado, las ecuaciones que hemos deducido son bastante más generales de lo que necesitamos. Por ejemplo, no hemos definido cómo la densidad del fluido en cuestión depende de las demás variables termodinámicas o lo que en termodinámica se conoce como ecuación de estado.

Justificar matemáticamente de manera rigurosa las ecuaciones que estudiaremos, únicamente utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes, sinceramente no será posible en esta tesis. De hecho el autor no ha encontrado tal justificación. Sin embargo se mencionarán referencias donde se puede encontrar interpretaciones físicas que hacen que los supuestos utilizados para derivar las llamadas ecuaciones de Boussinesq parezcan bastante razonables. Si bien se ha tratado de dar un enfoque intuitivo también desde el punto de vista físico en las primeras partes de la tesis, se ha optado por no incluir justificaciones empíricas de las ecuaciones de Boussinesq pues se considera que éstas no están acordes con el espíritu de este trabajo en el sentido en que no se pueden justificar matemáticamente. Nosotros tomaremos un cierto número de supuestos y a partir de ellos formularemos el problema en términos matemáticos.

Tomaremos como punto de partida los siguientes supuestos:

1. La función de densidad  $\rho$  se considerará constante excepto en el término correspondiente a la fuerza externa.
2. Para la fuerza externa se considerará que  $\rho$  es una función sólo de la variable  $T$  y que la relación está explícitamente dada de la siguiente forma:  $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$  con  $\rho_0, T_0 \in \mathbb{R}$ . Otra manera de ver esta ecuación es expandir  $\rho$  como una serie de Taylor alrededor de  $T_0$  y conservar únicamente la parte lineal.
3.  $\Phi = 0$ . O en términos físicos se supone que no se pierde energía debido a las fuerzas viscosas.
4.  $\mathbf{q} = -k\nabla T$ . Esta relación se conoce como ley de Fourier para la conducción de calor.
5.  $\nu, k \in \mathbb{R}$ . Supondremos que las constantes físicas no cambian en el tiempo, la posición o debido a cambios de temperatura en el fluido
6.  $E = c_V T$ , donde  $c_V$  es una constante.

Como se mencionó al principio se pueden dar explicaciones empíricas de esta aproximación. Explicaciones de este tipo pueden encontrarse en [6] y [9].

Llegamos así al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(1 - \alpha(T - T_0))g\mathbf{e}_3 - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \quad (2.89)$$

La ecuación (2.87) resulta de tomar a la densidad como una constante en la ecuación de continuidad. La ecuación (2.88) se obtiene al sustituir la dependencia de  $\rho$  respecto a  $T$ . Hay que notar que después se ha sustituido  $\rho_0$  por  $\rho$ . Por último la tercera ecuación (2.89) resulta de utilizar los supuestos tercero y cuarto en la ecuación (2.85) y definir  $\kappa = \frac{k}{\rho c_V}$ . El término  $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  se anula según obtuvimos en (2.87).

## 2.6. Adimensionalización

Ahora haremos un cambio de variables con el propósito de reducir tanto como sea posible el número de parámetros. Concretamente el cambio que haremos será:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x} \frac{1}{d} & t^* &= t \frac{\kappa}{d^2} & \mathbf{v}^* &= \mathbf{v} \frac{d}{\kappa} \\ T^* &= T \frac{1}{\beta d} & p^* &= p \frac{d^2}{\rho \kappa^2} \end{aligned} \quad (2.90)$$

La interpretación física es tomar a  $d$  como la unidad de longitud, a  $\frac{d^2}{\kappa}$  como la de tiempo, a  $\rho d^3$  como la de masa y a  $T_I - T_S$  como la de temperatura (hemos definido a  $\beta$  como el número tal que  $\beta d = T_I - T_S$ ). Aquí  $d$  es la distancia entre las tapas del contenedor,  $T_S$  es la temperatura en la tapa superior y  $T_I$  es la temperatura en la tapa inferior.

Tenemos para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  por la regla de la cadena que:



$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial v_i^*} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial x_j} = \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \quad (2.91)$$

La ecuación (2.87) queda:

$$\frac{\kappa}{d^2} \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.92)$$

También se tiene que para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial v_i^*} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left( \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right) \frac{\partial x_j^*}{\partial x_j} = \frac{\kappa}{d^3} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial x_j} = \frac{\kappa^2 \rho}{d^3} \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \quad (2.95)$$

Así que la componente  $i$  de (2.88) es:

$$\frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \frac{\kappa^2}{d^3} \sum_{j=1}^3 v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = - \left( g - \alpha \beta d g \left( T^* - \frac{T_S}{\beta d} \right) \right) \delta_{i3} - \frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \nu \frac{\kappa}{d^3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (2.96)$$

que se reescribe así:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \sum_{j=1}^3 v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = - \left( g \frac{d^3}{\kappa^2} - \frac{\alpha \beta d^4 g}{\kappa^2} \left( T^* - \frac{T_S}{\beta d} \right) \right) \delta_{i3} - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{\kappa} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (2.97)$$

En el caso de la variable  $T$  se tiene haciendo lo mismo que para  $v_i$  que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\beta \kappa}{d} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \frac{\partial T}{\partial x_j} = \beta \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} = \frac{\beta}{d} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (2.98)$$

La ecuación (2.89) queda entonces:

$$\frac{\beta\kappa}{d} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\beta\kappa}{d} \sum_{j=1}^3 v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \kappa \frac{\beta}{d} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (2.99)$$

Si hacemos que  $R = g\alpha\beta d^4/\kappa\nu$  y  $P = \nu/\kappa$  las ecuaciones (2.92), (2.97) y (2.99) quedan:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \left( \frac{gd^3}{\kappa^2} - PR \left( T - \frac{T_S}{\beta d} \right) \right) \mathbf{e}_3 - \nabla p + P \Delta \mathbf{v} \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \Delta T \quad (2.102)$$

Hemos dejado de utilizar caracteres con asterisco por facilidad.

## 2.7. Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas

Como queremos estudiar lo que ocurre en un recipiente de geometría cilíndrica lo más sensato es utilizar coordenadas cilíndricas. Es decir, ubicaremos un punto en el espacio con coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  mediante una terna de números  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  que están relacionados con  $x_1, x_2$  y  $x_3$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cos \xi_2 \\ x_2 &= \xi_1 \operatorname{sen} \xi_2 \\ x_3 &= \xi_3 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Como se menciona en [8], otra manera de interpretar este cambio de coordenadas es como una transformación de una región del espacio a otra. La condición para que una transformación defina un sistema de coordenadas es que el jacobiano no se anule.

Definiremos los siguientes vectores unitarios con  $i \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\mathbf{e}_{\xi_i} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \right|} \quad (2.104)$$

Explícitamente se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\xi_1} &= (\cos \xi_2, \sin \xi_2, 0) \\ \mathbf{e}_{\xi_2} &= (-\sin \xi_2, \cos \xi_2, 0) \\ \mathbf{e}_{\xi_3} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (2.105)$$

Tenemos que

$$\mathbf{e}_{\xi_i} \cdot \mathbf{e}_{\xi_j} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (2.106)$$

de manera que tenemos un conjunto de vectores que son ortogonales entre sí y además ninguno de los vectores es el vector cero. Podemos entonces expresar un vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  como:

$$\mathbf{u} = u_{\xi_1} \mathbf{e}_{\xi_1} + u_{\xi_2} \mathbf{e}_{\xi_2} + u_{\xi_3} \mathbf{e}_{\xi_3} \quad (2.107)$$

Sean  $\phi$  una función que va de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}$  y  $\mathbf{v}$  una función que va de  $D \subset \mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ . Nuestro objetivo será encontrar expresiones para  $\nabla \phi$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  y  $\nabla^2 \phi$  en coordenadas cilíndricas.

Sabemos que  $\nabla \phi$  puede escribirse como:

$$\nabla \phi = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z \quad (2.108)$$

donde se ha utilizado la notación habitual  $\xi_1 = r$ ,  $\xi_2 = \theta$  y  $\xi_3 = z$ .

Dado que  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  forman una base ortogonal se tiene:

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{e}_r = u_r |\mathbf{e}_r|^2 = u_r \quad (2.109)$$

así que:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.110)$$

De manera análoga se tiene que:

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.111)$$

Entonces la expresión para el gradiente de  $\phi$  en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (2.112)$$

Ahora vamos a encontrar la expresión para  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ . Partiremos del hecho de que existen funciones  $v_r$ ,  $v_\theta$  y  $v_z$  tales que:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (2.113)$$

Para encontrar  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  consideraremos el siguiente elemento de volumen:

$$V = \{(r, \theta, z) | r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\} \quad (2.114)$$

Por el teorema de la divergencia se tiene que:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.115)$$

Sean

$$\begin{aligned} S_{r_i} &= \partial V \cap \{(r, \theta, z) | r = r_i\} \\ S_{\theta_i} &= \partial V \cap \{(r, \theta, z) | \theta = \theta_i\} \\ S_{z_i} &= \partial V \cap \{(r, \theta, z) | z = z_i\} \end{aligned} \quad (2.116)$$

con  $i \in \{1, 2\}$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \iint_{S_{r_i}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 v_r(r_2, \theta, z) d\theta dz - \int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 v_r(r_1, \theta, z) d\theta dz \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) d\theta dz dr \end{aligned} \quad (2.117)$$

donde se ha utilizado que  $dS = rd\theta dz$  en este caso y que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , la componente perpendicular en las caras  $S_{r_i}$ , es simplemente  $v_r$ .

De manera análoga se tiene:

$$\sum_{i=1}^2 \iint_{S_{\theta_i}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) dV \quad (2.118)$$

$$\sum_{i=1}^2 \iint_{S_{z_i}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) dV$$

Aquí  $dS = dr dz$  para las integrales sobre  $S_{\theta_i}$  y  $dS = r d\theta dr$  para las integrales sobre  $S_{z_i}$ .

Por otro lado

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \iiint_V r \nabla \cdot \mathbf{v} dr d\theta dz \quad (2.119)$$

así que:

$$\iiint_V \left[ (\nabla \cdot \mathbf{v})r - \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) \right] dr d\theta dz = 0 \quad (2.120)$$

El elemento de volumen  $V$  puede elegirse arbitrariamente y supondremos que el integrando es continuo. Tenemos pues que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.121)$$

Por otro lado como

$$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi \quad (2.122)$$

llegamos a la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas para el operador laplaciano aplicado a la función  $\phi$ :

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.123)$$

Es interesante notar que el método utilizado para encontrar expresiones para  $\nabla\phi$ ,  $\nabla\mathbf{v}$  y  $\Delta\phi$  puede utilizarse del mismo modo para encontrar expresiones en cualquier sistema de coordenadas ortogonal, pues el hecho de que las superficies de nivel sean ortogonales a los vectores unitarios permite calcular fácilmente las integrales de superficie que hicimos. He preferido hacer el caso particular pues he considerado que de este modo el método resulta más claro, aunque la extensión a un sistema general de coordenadas ortogonales sigue exactamente el mismo esquema.

Podemos reescribir las ecuaciones para nuestro problema en coordenadas cilíndricas al utilizar los resultados obtenidos y al considerar que:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos \theta, \sin \theta, 0) = \mathbf{e}_\theta \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) = -\mathbf{e}_r \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} = 0 \quad (2.126)$$

A diferencia de lo que ocurre con los vectores canónicos  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ , los vectores  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  sí dependen del punto en el espacio que se esté considerando. Una consecuencia de este hecho será que habrá términos adicionales en las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones del problema resultan:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + P \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + P \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_z &= -\left( \frac{gd^3}{\kappa^2} - PR \left( T - \frac{T_S}{\beta d} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + P \Delta v_z \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.129)$$

Como se había mencionado anteriormente, se ve que en las ecuaciones de movimiento (2.128) tenemos algunos términos extras (en comparación con las ecuaciones de movimiento expresadas en coordenadas cartesianas). Por ejemplo, tenemos que la componente  $r$  de  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \quad (2.130)$$

y no simplemente  $\mathbf{v} \cdot \nabla v_r$  como ocurriría en el caso de las coordenadas cartesianas. Sin embargo la simplicidad sacrificada en las ecuaciones debido al uso de coordenadas cilíndricas se compensa por la sencillez con la que se puede expresar las condiciones de frontera del problema, pues la frontera del dominio cilíndrico en el que trabajaremos está formada por superficies coordenadas en el sistema cilíndrico.

Con el objetivo de no dejar ningún punto confuso se ahondará un poco más en los cálculos que llevan a la ecuación (2.128). Tenemos que:

$$\Delta \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \quad (2.131)$$

Sabemos que ninguno de los vectores  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  depende de  $r$  o  $z$ . Por otro lado,  $\mathbf{e}_z$  no depende de  $\theta$  pues es constante. De este modo, la parte interesante en el cálculo es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + v_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - v_\theta \mathbf{e}_r \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \mathbf{e}_\theta + \left( -v_r - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + \left( 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (2.132)$$

De este modo quedan explicados los términos

$$-\frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

y

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}$$

en el lado derecho de las componentes  $r$  y  $\theta$  respectivamente. Por otro lado,

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \mathbf{e}_r$$

y

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \mathbf{e}_\theta$$

son términos de  $\Delta v_r$  y  $\Delta v_\theta$ .

De manera análoga se tiene que:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left[ v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right] (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \quad (2.133)$$

Y de aquí la única parte que contribuye con algo nuevo es:

$$v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + v_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - v_\theta \mathbf{e}_r \right) \quad (2.134)$$

Y de esta forma se explican los términos adicionales del lado izquierdo de las componentes  $r$  y  $\theta$  de las ecuaciones de movimiento.

Por último, como  $\mathbf{e}_z$  es un vector constante la componente  $z$  de las ecuaciones de movimiento se ve exactamente igual que en el caso de las coordenadas cartesianas.

## 2.8. Condiciones de frontera

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  el conjunto de puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen:

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1/d, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\} \quad (2.135)$$

El conjunto  $\Omega$  corresponde a un cilindro de radio  $\frac{1}{d}$  y altura 1. Nuestro objetivo será estudiar el sistema de ecuaciones formado por (2.127), (2.128) y (2.129) en  $\Omega$ .

Las condiciones de frontera que sería deseable utilizar son que el fluido no se mueva en ninguna parte de la frontera, en otras palabras queremos estudiar



un fluido viscoso que está contenido en una caja cilíndrica que tiene tapas y además ocupa totalmente el contenedor. Sin embargo, con el interés de tratar el problema en las tres dimensiones tanto como sea posible, relajaremos un poco las condiciones impuestas en la frontera. Supondremos que si bien la velocidad del fluido en  $\partial\Omega$  puede ser diferente de cero, los esfuerzos tangenciales se anulan en todo punto de  $\partial\Omega$ . Es decir, las condiciones que pedimos son algo más fuertes que las que se tendrían en el caso no viscoso (únicamente que el fluido no atravesase el contenedor) pero más débiles que pedir que el fluido se adhiera a las paredes.

Si bien es cierto que estas no son las condiciones físicas, los experimentos no parecen contradecir resultados teóricos que las utilizan (ver el artículo [18]). La situación es análoga al caso del problema de Taylor, donde se tienen dos cilindros que giran a diferentes velocidades y hay un fluido viscoso que llena el espacio entre ellos. La condición que se utiliza en los extremos de los cilindros es que las soluciones son periódicas en la variable cuyo eje es paralelo al eje de rotación. Aunque esta condición corresponde al caso físico en que se tienen cilindros infinitos, los resultados que se obtienen son muy parecidos a los obtenidos utilizando cilindros (¡por supuesto!) finitos. Si el lector desea saber más del problema de Taylor puede consultar [16].

Definiremos los siguientes conjuntos que forman  $\partial\Omega$ :

$$\begin{aligned}\partial\Omega_I &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega | z = 0\} \\ \partial\Omega_S &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega | z = 1\} \\ \partial\Omega_L &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega | r = 1/d\}\end{aligned}\tag{2.136}$$

Las condiciones de frontera que imponemos para la temperatura serán que:

$$T|_{\partial\Omega_I} = T_I/(\beta d) \quad T|_{\partial\Omega_S} = T_S/(\beta d) \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{\partial\Omega_L} = 0\tag{2.137}$$

Es decir, las tapas del contenedor se mantienen a temperatura constante mientras que en las paredes no hay flujo de calor.

En las tapas pediremos que los esfuerzos en la dirección  $\mathbf{e}_r$  y en la dirección  $\mathbf{e}_\theta$  se anulen. También  $v_z$  se considerará cero en las tapas. Es decir, para aquellos puntos  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S$  se tiene:

$$\begin{aligned}\tau_{zr} &= -\mu \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] = 0 \\ \tau_{z\theta} &= -\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = 0\end{aligned}\tag{2.138}$$

Dado que en esos puntos  $v_z = 0$  las condiciones se reducen a que:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0\tag{2.139}$$

Por otro lado para los puntos  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_L$  requeriremos que las componentes tangenciales de  $\nabla \wedge \mathbf{v}$  se anulen. Además pediremos que el valor de  $v_r$  sea cero, condición que refleja el hecho de que el fluido no atraviesa las paredes.

Las componentes de  $\nabla \wedge \mathbf{v}$  son:

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}(rv_\theta) \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z\tag{2.140}$$

Como  $v_r$  se anula entonces llegamos a que en  $\partial\Omega_L$ :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) = 0 \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0\tag{2.141}$$

## Capítulo 3

# Linealización

### 3.1. Linealización del sistema de ecuaciones

Sea  $(\mathbf{v}, \mathcal{P}, \mathcal{T})$  una solución conocida del problema. Si  $(\mathbf{v}_*, p_*, T_*)$  es otra solución entonces definimos las perturbaciones  $(\mathbf{v}, p, T)$  como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_* - \mathbf{v} \\ p_* - \mathcal{P} \\ T_* - \mathcal{T} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dado que  $(\mathbf{v}, \mathcal{P}, \mathcal{T})$  y  $(\mathbf{v}_*, p_*, T_*)$  son soluciones se tiene que  $(\mathbf{v}, p, T)$  satisface:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = PRT \mathbf{e}_3 - \nabla p + P \Delta \mathbf{v} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + \mathbf{v} \cdot \nabla T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \Delta T \quad (3.4)$$

y las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = v_z = T = 0 \quad \text{para} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_T \quad (3.5)$$

$$v_r = \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{para} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_L \quad (3.6)$$

donde  $\partial\Omega_T = \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S$ .

Si tomamos solamente la parte lineal entonces las ecuaciones que  $(\mathbf{v}, p, T)$  satisfacen son:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = PRTe_3 - \nabla p + P\Delta \mathbf{v} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \Delta T \quad (3.9)$$

Consideraremos la linealización de las ecuaciones utilizando una solución en la que el fluido está en reposo.

Supongamos que  $(\mathbf{v}, \mathcal{T})$  es una de esas soluciones. Si hacemos que  $\mathbf{v} = 0$  en las ecuaciones (2.128) y (2.129) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \quad (3.10)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \quad (3.11)$$

$$0 = -\left(\frac{gd^3}{\kappa^2} - PR\left(\mathcal{T} - \frac{T_S}{\beta d}\right)\right) - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \quad (3.12)$$

$$0 = \Delta \mathcal{T} \quad (3.13)$$

Por inspección se tiene que:

$$\mathcal{T}(z) = a + bz \quad (3.14)$$

es una solución de la ecuación (3.13) si podemos hacer que se satisfagan las condiciones de frontera para  $\mathcal{T}$ .

Sabemos que la temperatura en  $z = 0$  es  $T_I/(\beta d)$  y que la temperatura en  $z = 1$  es  $T_S/(\beta d)$  así que:

$$\mathcal{T}(z) = \frac{T_I}{\beta d} - \frac{T_I - T_S}{\beta d} z = \frac{T_I}{\beta d} - z \quad (3.15)$$

satisface las condiciones de frontera en  $\partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S$ .

Las condiciones de frontera en  $\partial\Omega_L$  quedan automáticamente satisfechas pues la función  $\mathcal{T}$  únicamente depende de  $z$  y por lo tanto la derivada normal en  $\partial\Omega_L$  se anula.

Supongamos que existe otra solución  $\mathcal{T}_2$  a la ecuación (3.13). Entonces la diferencia de las dos soluciones,  $\tau = \mathcal{T} - \mathcal{T}_2$  satisfará la ecuación (3.13) con las condiciones de frontera:

$$\tau|_{\partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\tau}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_L} = 0 \quad (3.16)$$

Si tenemos dos funciones  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$  entonces la primera identidad de Green dice que

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u dV = - \iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV + \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (3.17)$$

En particular si tomamos  $u = v = \tau$  se tiene que:

$$\iiint_{\Omega} \tau \Delta \tau dV = - \iiint_{\Omega} \|\nabla \tau\|^2 dV + \iint_{\partial\Omega} \tau \frac{\partial \tau}{\partial n} dS \quad (3.18)$$

Como  $\tau$  satisface (3.13) en  $\Omega$  entonces:

$$\iiint_{\Omega} \|\nabla \tau\|^2 = \iint_{\partial\Omega} \tau \frac{\partial \tau}{\partial n} dS \quad (3.19)$$

Por las condiciones de frontera que  $\tau$  satisface en  $\partial\Omega$  tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \|\nabla \tau\|^2 = 0 \quad (3.20)$$

$\|\nabla\tau\|^2$  es una función continua y mayor o igual que cero así que  $\tau$  debe ser constante. En particular  $\tau$  es cero en  $\partial\Omega_I$  así que  $\tau$  es idénticamente cero. De esta forma vemos que  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$  y por lo tanto la solución  $\mathcal{T}$  que propusimos es de hecho la solución que corresponde a  $\mathcal{V}$ .

Veremos ahora cómo encontrar la  $\mathcal{P}$  correspondiente al par  $(\mathcal{V}, \mathcal{T})$ . De la ecuación (2.128) se tiene que:

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z} = -\left(\frac{gd^3}{\kappa^2} - PR\left(\mathcal{T} - \frac{T_S}{\beta d}\right)\right) \quad (3.21)$$

Si sustituimos la expresión de  $z$  que ya tenemos se llega a que:

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z} = -\left(\frac{gd^3}{\kappa^2} - PR(1-z)\right) \quad (3.22)$$

La dependencia de  $\mathcal{P}$  respecto a  $z$  está dada del siguiente modo:

$$\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z_0) = \int_{z_0}^z -PRz + PR - \frac{gd^3}{\kappa^2} dz \quad \text{con } z_0 \in [0, 1] \quad (3.23)$$

Aunque no utilizaremos en lo sucesivo esta expresión es interesante notar que la presión del fluido quede determinada solamente cuando se especifica la presión en un punto del contenedor con  $z = z_0$ .

Explícitamente tenemos la siguiente solución a nuestro problema si suponemos que la velocidad del fluido es cero y que la solución en coordenadas espaciales no depende del tiempo:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{P}(z) \\ T_I/(\beta d) - z \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

La linealización del sistema formado por (3.2), (3.3) y (3.4) queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = PRTe_z - \nabla p + P\Delta\mathbf{v} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - v_z = \Delta T \quad (3.27)$$

donde se satisfacen las condiciones de frontera (3.5) y (3.6).

Nosotros consideraremos soluciones al sistema que son independientes del tiempo, es decir que satisfacen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ PRTe_z - \nabla p + P\Delta \mathbf{v} &= 0 \\ \Delta T + v_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

y las ya mencionadas condiciones de frontera.

Sea  $D$  el siguiente conjunto de  $[L^2(\bar{\Omega})]^5$ :

$$D = \left\{ (\mathbf{v}, T, p) \in [C^2(\bar{\Omega})]^4 \times C^1(\bar{\Omega}) \mid \begin{aligned} &\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega, \\ &\frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_T} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_T} = 0, \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) \Big|_{\partial\Omega_L} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_L} = 0, T|_{\partial\Omega_T} = \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_L} = 0, \\ &\iiint_V p dV = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Definiremos en  $D$  un operador  $A$  del siguiente modo:

$$A(\mathbf{v}, T, p) = (RPTe_z - \nabla p + P\Delta \mathbf{v}, RP\Delta T + RPv_z, \nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3.30)$$

Probaremos que el operador  $A$  es simétrico en  $D$  con el producto interno de  $[L^2(\bar{\Omega})]^5$ , es decir, si  $(\mathbf{v}_1, T_1, p_1), (\mathbf{v}_2, T_2, p_2) \in D$  entonces

$$(A(\mathbf{v}_1, T_1, p_1), (\mathbf{v}_2, T_2, p_2)) = ((\mathbf{v}_1, T_1, p_1), A(\mathbf{v}_2, T_2, p_2)) \quad (3.31)$$

De hecho probar que es simétrico implica que es autoadjunto pues  $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^5 \subset D$  y sabemos que  $\overline{[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^5} = [L^2(\bar{\Omega})]^5$ , así que  $D$  es denso en  $[L^2(\bar{\Omega})]^5$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (A(\mathbf{v}_1, T_1, p_1), (\mathbf{v}_2, T_2, p_2)) - ((\mathbf{v}_1, T_1, p_1), A(\mathbf{v}_2, T_2, p_2)) = \\
& \iint_{\Omega} [(-\nabla p_1 + RPT_1 \mathbf{e}_z + P\Delta \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + (RP\Delta T_1 + RPw_1)T_2] \\
& - [(-\nabla p_2 + RPT_2 \mathbf{e}_z + P\Delta \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1 + (RP\Delta T_2 + RPw_2)T_1] dV
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde  $w_i$  es la tercera componente de la velocidad, que tanto en coordenadas cartesianas como en cilíndricas es la misma. Si rearrreglamos los términos del lado derecho de (3.32) tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (A(\mathbf{v}_1, T_1, p_1), (\mathbf{v}_2, T_2, p_2)) - ((\mathbf{v}_1, T_1, p_1), A(\mathbf{v}_2, T_2, p_2)) = \\
& \iint_{\Omega} [(-\nabla p_1 + P\Delta \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + RPT_2 \Delta T_1] \\
& - [(-\nabla p_2 + P\Delta \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1 + RPT_1 \Delta T_2] dV
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora, tenemos que

$$\nabla \cdot (p_1 \mathbf{v}_2) = \nabla p_1 \cdot \mathbf{v}_2 + p_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_2 \tag{3.34}$$

de manera que

$$\iiint_{\Omega} \nabla p_1 \cdot \mathbf{v}_2 dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (p_1 \mathbf{v}_2) - p_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_2 dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (p_1 \mathbf{v}_2) dV \tag{3.35}$$

así que por el teorema de la divergencia:

$$\iiint_{\Omega} \nabla p_1 \cdot \mathbf{v}_2 dV = \iiint_{\partial\Omega} p_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dS = 0 \tag{3.36}$$

Por otro lado



$$\iiint_{\Omega} T_2 \Delta T_1 - T_1 \Delta T_2 dV = \iint_{\partial\Omega} T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} - T_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} dS = 0 \quad (3.37)$$

por la segunda identidad de Green y por las condiciones de frontera en  $\partial\Omega$ .

De manera que lo único que falta probar para que el operador sea simétrico es que

$$\iiint_{\Omega} \Delta \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 dV = 0 \quad (3.38)$$

Para ello utilizaremos coordenadas cilíndricas y utilizaremos la notación  $u = v_r$ ,  $v = v_\theta$  y  $w = v_z$ . En coordenadas cilíndricas tenemos que:

$$\Delta \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = u_2 \left( \Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) + v_2 \left( \Delta v_1 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{v_1}{r^2} \right) + w_2 \Delta w_1 \quad (3.39)$$

y

$$\iiint_{\Omega'} \Delta \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 dV' = \iiint_{\Omega'} u_2 \Delta u_1 + v_2 \Delta v_1 + w_2 \Delta w_1 dV' \quad (3.40)$$

$$+ \iiint_{\Omega'} -\frac{u_1 u_2}{r^2} - \frac{2}{r^2} u_2 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} v_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{v_2 v_1}{r^2} dV' \quad (3.41)$$

donde  $dV'$  denota el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas  $r dr d\theta dz$ .

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega'} \Delta \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 dV = \\
& \iiint_{\Omega'} (u_2 \Delta u_1 - u_1 \Delta u_2) + (v_2 \Delta v_1 - v_1 \Delta v_2) + (w_2 \Delta w_1 - w_1 \Delta w_2) dV \quad (3.42) \\
& + \iiint_{\Omega'} -\frac{2}{r^2} u_2 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} u_1 \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} v_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} dV'
\end{aligned}$$

Sin embargo la segunda integral del lado derecho puede escribirse como:

$$\iiint_{\Omega'} -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 v_1) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_1 v_2) dV' \quad (3.43)$$

y el valor de esta integral es cero pues la continuidad de las funciones involucradas implica que son periódicas en  $\theta$ .

Ahora, tanto

$$\iiint_{\Omega} (u_2 \Delta u_1 - u_1 \Delta u_2) dV = \iint_{\partial \Omega} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) dS \quad (3.44)$$

como

$$\iiint_{\Omega} (w_2 \Delta w_1 - w_1 \Delta w_2) dV = \iint_{\partial \Omega} \left( w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} - w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} \right) dS \quad (3.45)$$

se anulan debido a las condiciones de frontera.

Por último, podemos separar la integral

$$\iiint_{\Omega} (v_2 \Delta v_1 - v_1 \Delta v_2) dV = \iint_{\partial \Omega} \left( v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) dS \quad (3.46)$$

en una integral en  $\partial \Omega_T$  y otra en  $\partial \Omega_L$ .

Para la integral de superficie en  $\partial \Omega_T$  se tiene que:

$$\iint_{\partial\Omega_T} \left( v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) = 0 \quad (3.47)$$

por las condiciones de frontera.

Mientras que la integral

$$\iint_{\partial\Omega_L} \left( v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) = 0 \quad (3.48)$$

puede expresarse como:

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega'_L} \left[ \frac{\partial}{\partial n}(rv_2) - r \frac{\partial v_2}{\partial n} \right] \frac{\partial v_1}{\partial n} - \left[ \frac{\partial}{\partial n}(rv_1) - r \frac{\partial v_1}{\partial n} \right] \frac{\partial v_2}{\partial n} dS' \\ &= \iint_{\partial\Omega_L} \frac{\partial}{\partial n}(rv_2) \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}(rv_1) \frac{\partial v_2}{\partial n} dS' \end{aligned} \quad (3.49)$$

que vale cero pues  $\frac{\partial}{\partial n}(rv) = \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0$  en  $\partial\Omega_L$  por las condiciones de frontera.

Entonces efectivamente

$$\iiint_{\Omega} \Delta \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 dV = 0 \quad (3.50)$$

y por lo tanto el operador es autoadjunto.

## 3.2. Núcleo del operador linealizado

Estaremos interesados en el núcleo del operador (3.30). Específicamente queremos ver cómo depende el núcleo de dicho operador del parámetro  $R$ , pues por otro lado sabemos que  $P$  es constante y depende únicamente de las propiedades del fluido. Buscamos aquellos valores de  $R$  para los que el operador deja de ser uno a uno.

Primero eliminaremos la presión de la ecuación de movimiento de (3.28) aplicando el operador rotacional. Se llega a:

$$\nabla \wedge (RT\mathbf{e}_z) + \Delta(\nabla \wedge \mathbf{v}) = 0 \quad (3.51)$$

Ahora apliquemos nuevamente el rotacional y utilicemos la identidad  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$ . Sólo usaremos la componente  $z$  de esta ecuación para calcular soluciones del problema en forma de series. Es decir:

$$R\Delta_1 T + \Delta^2 w = 0 \quad (3.52)$$

La definición de  $\Delta_1$  en coordenadas cilíndricas es:

$$\Delta_1 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.53)$$

En general, dada una función  $\mathbf{v} \in C^2(\bar{\Omega})$  en un dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  se define la vorticidad de  $\mathbf{v}$  como  $\nabla \wedge \mathbf{v}$  y se denota con el símbolo  $\boldsymbol{\omega}$ . En términos de  $\boldsymbol{\omega}$ , la ecuación (3.51) se escribe del siguiente modo:

$$\nabla \wedge (RT\mathbf{e}_z) + \Delta\boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.54)$$

Denotemos a las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  en coordenadas cilíndricas como  $\omega_r$ ,  $\omega_\theta$  y  $\omega_z$ . No profundizaremos más en las propiedades de la función  $\omega$  pues por el momento no será necesario. El lector interesado puede consultar [1] o [4].

Utilizaremos las componentes  $z$  de las ecuaciones (3.52) y (3.54) para encontrar funciones en el núcleo del operador  $A$ . Explícitamente tenemos el sistema:

$$P\Delta\omega_z = 0 \quad (3.55)$$

$$R\Delta_1 T + \Delta^2 w = 0 \quad (3.56)$$

$$\Delta T + w = 0 \quad (3.57)$$

Las ecuaciones están todas definidas en  $\Omega$  y las condiciones de frontera son

$$\omega_z|_{\partial\Omega_L} = \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\Big|_{\partial\Omega_T} = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{\partial\Omega_L} = w|_{\partial\Omega_T} = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_L} = T|_{\partial\Omega_T} = 0 \quad (3.60)$$

Las condiciones de frontera son consecuencia de las condiciones que impusimos al operador  $A$ .

Consideraremos expresiones para  $w$ ,  $T$  y  $\omega_z$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m,l \in \mathbb{N}} W_{ml}(z) J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \\ T &= \sum_{m,l \in \mathbb{N}} \Theta_{ml}(z) J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \\ \omega_z &= \sum_{m,l \in \mathbb{N}} \zeta_{ml}(z) J'_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Cabe hacer algunas aclaraciones.  $J_m$  es la función de Bessel de orden  $m$  y  $\lambda_l$  son los ceros de la derivada de dicha función. Probaremos más adelante que  $\{J_m(\lambda_l x)\}_{l \in \mathbb{N}}$  es un conjunto ortogonal completo en  $L^2[0, 1]$ . A partir de este conjunto podemos construir un conjunto que sea ortonormal y completo en  $L^2[0, 1]$  usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, sin embargo en este caso no será necesario. Originalmente el dominio era un cilindro de radio 1 y altura  $d$ . Después de adimensionalizar al tomar a  $d$  como la unidad de longitud tenemos un cilindro de radio  $1/d$  y altura 1. Esto explica el factor  $d$  en  $J_m(\lambda_l dr)$ .

Hemos expandido en términos de  $\cos(m\theta)_{m \in \mathbb{N}}$  pues buscaremos en un principio soluciones que tengan cierta simetría. La simetría que las soluciones tendrán dependerá directamente de haber considerado únicamente los cosenos en la expansión de Fourier, en lugar de considerar los senos y cosenos, que como se sabe permiten expresar cualquier función periódica. En los capítulos posteriores se hace la definición de la acción del grupo  $O(2)$  sobre los elementos del espacio de trabajo (también definido más adelante), que formaliza el concepto de simetría

para las soluciones de nuestro problema. Baste decir por ahora que como escogemos el conjunto  $\cos(m\theta)_{m \in \mathbb{N}}$  para expandir  $w$  y  $T$ , tendremos según los cálculos de esta sección, que  $u$ ,  $w$  y  $T$  serán pares en  $\theta$  y que  $v$  será impar en  $\theta$ . Después veremos que geoméricamente esto quiere decir que los elementos del núcleo son simétricos bajo la reflexión respecto al plano  $x$ - $z$ .

Si bien este modo de plantear soluciones no presenta ninguna falla matemática y se usa extensivamente (ver por ejemplo [7] y [20]) puede parecer de entrada poco intuitivo. Una manera de justificar las expresiones es a partir del hecho de que  $J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta)$  es una función propia del operador  $\Delta$  en un dominio  $S \in \mathbb{R}^2$  de forma circular con condiciones de frontera de Neumann. En concreto se tiene que:

$$\Delta(J_m(\lambda_l dr) \cos m\theta) = -(\lambda_l d)^2 J_m(\lambda_l dr) \cos m\theta \quad \text{en } S \quad (3.62)$$

Si sustituimos  $w$ ,  $T$  y  $\omega_z$  en las ecuaciones (3.56) y (3.57) obtenemos respectivamente que:

$$\sum_{m,l \in \mathbb{N}} \left[ -R(\lambda_l d)^2 \Theta_{ml}(z) + \left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right)^2 W_{ml}(z) \right] J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) = 0 \quad (3.63)$$

y

$$\sum_{m,l \in \mathbb{N}} \left[ -(\lambda_l d)^2 \Theta_{ml}(z) + \Theta'_{ml}(z) + W_{ml}(z) \right] J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) = 0 \quad (3.64)$$

Si usamos la ortogonalidad de los elementos de los conjuntos  $\{J_m(\lambda_l x)\}_{l \in \mathbb{N}}$  y  $\{\cos(m\theta)_{m \in \mathbb{N}}\}$  en  $L^2[0, 1/d]$  y  $L^2[0, 2\pi]$  respectivamente llegamos a que:

$$\left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \Theta_{ml} + W_{ml} = 0 \quad (3.65)$$

y

$$-R(\lambda_l d)^2 \Theta_{ml} + \left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right)^2 W_{ml} = 0 \quad (3.66)$$

Veamos que condiciones adicionales deben satisfacer  $W_{ml}$  y  $\Theta_{ml}$ , además claro de que  $W_{ml} = \Theta_{ml} = 0$  en  $z = 0, 1$ .

De la ecuación de continuidad y de que, como mencionamos anteriormente,  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$  en  $\partial\Omega_T$ , tenemos que para  $z = 0, 1$ :

$$\frac{d^2 W_{ml}}{dz^2} = 0 \quad (3.67)$$

Entonces tenemos utilizando (3.65) que en  $z = 0, 1$ :

$$\frac{d^2 \Theta_{ml}}{dz^2} = 0 \quad (3.68)$$

Y si derivamos (3.65) también en  $z = 0, 1$ :

$$\frac{d^4 \Theta_{ml}}{dz^4} = 0 \quad (3.69)$$

Si utilizamos la ecuación (3.66) y utilizamos las condiciones anteriores tenemos que:

$$\frac{d^4 W_{ml}}{dz^4} = 0 \quad (3.70)$$

De las ecuaciones (3.65) y (3.66) se obtiene que las ecuaciones satisfechas por  $W_{ml}$  y  $\Theta_{ml}$  son:

$$\begin{aligned} \left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right)^3 W_{ml} &= -R(\lambda_l d)^2 W_{ml} \\ \left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right)^3 \Theta_{ml} &= -R(\lambda_l d)^2 \Theta_{ml} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dadas las condiciones de frontera se tienen soluciones diferentes de 0 únicamente si

$$R = \frac{[(n\pi)^2 + (\lambda_l d)^2]^3}{(\lambda_l d)^2} \quad (3.72)$$

y en ese caso están dadas por:

$$\begin{aligned} W_{ml} &= K_{mln} \sin(n\pi z) \\ \Theta_{ml} &= C_{mln} \sin(n\pi z) \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde  $K_{mln} \in \mathbb{R}$  puede elegirse arbitrariamente y  $C_{mln}$  puede determinarse de (3.65) ó (3.66).

De (3.65) se tiene que:

$$C_{mln} = \frac{K_{mln}}{[(\lambda_l d)^2 + (n\pi)^2]} \quad (3.74)$$

Tenemos entonces que:

$$w = \sum_{m,l,n \in \mathbb{N}} K_{mln} \sin(n\pi z) J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \quad (3.75)$$

y

$$T = \sum_{m,l,n \in \mathbb{N}} \frac{K_{mln}}{[(\lambda_l d)^2 + (n\pi)^2]} \sin(n\pi z) J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \quad (3.76)$$

Consideremos ahora lo que pasa con  $\omega_z$ . Tenemos que:

$$\sum_{m,l \in \mathbb{N}} \left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \zeta_{ml}(z) J'_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) = 0 \quad (3.77)$$

Entonces por la ortogonalidad ocurre que:

$$\left( -(\lambda_l d)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \zeta_{ml} = 0 \quad (3.78)$$

Por otro lado,  $\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0$  en  $z = 0, 1$  pues para esos valores  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$  y  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ .

Se tiene entonces que:



$$\zeta_{ml}(z) = ae^{\lambda z} + be^{-\lambda z} \quad (3.79)$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  y además  $\zeta_{ml} = 0$  en  $z = 0, 1$ . La única forma de que esto se satisfaga es que  $\zeta_{ml} = 0$  y por lo tanto  $\omega_z = 0$ .

También pudimos haber utilizado el hecho de que  $\omega_z$  satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta\omega_z = 0 \quad (3.80)$$

en  $\Omega$  con las condiciones de frontera

$$\omega_z|_{\partial\Omega_L} = \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\Big|_{\partial\Omega_T} = 0$$

Sea  $\omega_z^* = \omega_{1z} - \omega_{2z}$  la diferencia de dos soluciones de la ecuación de Laplace con esas condiciones de frontera. Si buscamos soluciones que estén en  $C^2(\bar{\Omega})$  entonces por la primera identidad de Green se tiene que:

$$\iiint_{\Omega} \omega_z^* \Delta\omega_z^* dV = - \iiint_{\Omega} \|\nabla\omega_z^*\|^2 dV + \iint_{\partial\Omega} \omega_z^* \frac{\partial\omega_z^*}{\partial n} dS \quad (3.81)$$

Tenemos entonces que:

$$\iiint_{\Omega} \|\nabla\omega_z^*\|^2 dV = 0 \quad (3.82)$$

pues  $\omega_z^*$  satisface la ecuación de Laplace y las mismas condiciones de frontera (las condiciones de frontera son homogéneas).

Entonces tenemos que  $\omega_z^*$  es una constante y es de hecho la constante cero pues sabemos que  $\omega_z^*|_{\partial\Omega_L} = 0$ . Dicho de otro modo, la solución al problema es única.

Tenemos que  $\omega_z = 0$  es una solución y como vimos es la única solución.

Veremos ahora cómo obtener expresiones para  $u$  y  $v$ .

Primero probaremos el siguiente teorema.

**Teorema.** Sea  $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$  con  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  un dominio abierto, simplemente conexo y acotado. Pediremos también que  $\Omega_z \subset \mathbb{R}^3$  sea simplemente conexo, donde  $\Omega_z$  es el conjunto que resulta de la intersección de  $\Omega$  y el plano formado por los puntos cuya tercera coordenada es  $z$ . Si  $\mathbf{u}$  satisface que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$  entonces existen  $\psi, \xi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tales que:

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z) + \nabla \wedge \nabla \wedge (\xi \mathbf{e}_z) \quad (3.83)$$

**Prueba.** Como  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$ , entonces podemos expresar a  $\mathbf{u}$  como  $\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{B}$ . (La demostración de este hecho se encuentra en [2]).

Consideremos el siguiente problema de Neumann:

$$\begin{aligned} \Delta_h f &= -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} && \text{en } \Omega_z \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} && \text{en } \partial\Omega_z \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde  $B_x$  y  $B_y$  son las componentes de  $x$  y  $y$  de  $\mathbf{B}$ .

Sabemos que el problema:

$$\begin{aligned} \Delta g &= \beta && \text{en } \Omega' \\ \frac{\partial g}{\partial n} &= \gamma && \text{en } \partial\Omega' \end{aligned} \quad (3.85)$$

tiene solución que es única salvo por constantes (véase [14]) si se satisface la relación:

$$\iint_{\Omega'} \beta dV = \iint_{\partial\Omega'} \gamma dS \quad (3.86)$$

En el caso que nos interesa tenemos que

$$\iint_{\Omega_z} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} dV = \int_{\partial\Omega_z} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.87)$$

por el teorema de la divergencia, así que podemos asegurar la existencia de una solución  $f$ . La elección de la constante, como se verá en la construcción, no es importante.

Como  $f$  es una solución del problema (3.84), entonces la función  $F : \Omega_z \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como:

$$F(\mathbf{x}) = \left(-B_y - \frac{\partial f}{\partial y}, B_x + \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (3.88)$$

proviene de un potencial  $\xi : \Omega_z \rightarrow \mathbb{R}$  pues

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-B_y - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(B_x + \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (3.89)$$

y además por hipótesis  $\Omega_z$  es simplemente conexo.

Tenemos que

$$\nabla \wedge (\xi \mathbf{e}_z) = \mathbf{B} + \nabla f - \psi \mathbf{e}_z \quad (3.90)$$

donde  $\psi = B_z + \frac{\partial f}{\partial z}$ .

De esta forma tenemos que  $\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla \wedge \nabla \wedge (\xi \mathbf{e}_z) + \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z)$ , como asegurábamos.

■

Utilizando este teorema tenemos que  $\mathbf{v}$  puede expresarse como:

$$\mathbf{v} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z) + \nabla \wedge \nabla \wedge (\xi \mathbf{e}_z) \quad (3.91)$$

Si hacemos uso de la identidad  $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}$  tenemos que:

$$\mathbf{v} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z) + \nabla(\nabla \cdot (\xi \mathbf{e}_z)) - \Delta(\xi \mathbf{e}_z) \quad (3.92)$$

Denotaremos a  $\frac{\partial \xi}{\partial z}$  como  $\phi$  así que tenemos que:

$$\mathbf{v} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z) + \nabla \phi - (\Delta \xi) \mathbf{e}_z \quad (3.93)$$

Como  $\nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z)$  no tiene componente en la dirección  $z$  se puede ver que la componente  $z$  de  $\mathbf{v}$  es:

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Delta \xi \quad (3.94)$$

y que por lo tanto:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \Delta \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = -\Delta_1 \phi \quad (3.95)$$

Por otro lado tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{v} &= \nabla \wedge \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z) - \nabla \wedge ((\Delta \xi) \mathbf{e}_z) \\ &= \nabla (\nabla \cdot (\psi \mathbf{e}_z)) - \Delta (\psi \mathbf{e}_z) - \nabla \wedge ((\Delta \xi) \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (3.96)$$

cuya componente  $z$  es:

$$\omega_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \Delta \psi = -\Delta_1 \psi \quad (3.97)$$

pues la componente en  $z$  de  $\nabla \wedge ((\Delta \xi) \mathbf{e}_z)$  es 0.

De (3.93) se ve que:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.98)$$

y

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.99)$$

Escribiremos también a  $\psi$  y  $\phi$  como series del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{m,l \in \mathbb{N}} \Psi_{ml}(z) J_m(\lambda_l r) \cos(m\theta) \\ \phi &= \sum_{m,l \in \mathbb{N}} \Phi_{ml}(z) J_m(\lambda_l r) \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Usando la ecuación (3.95) tenemos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{m,l,n \in \mathbb{N}} K_{mln}(n\pi) \cos(n\pi z) J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \\ &= (\lambda_l d)^2 \sum_{m,l \in \mathbb{N}} \Phi_{ml}(z) J_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (3.101)$$

y por la ortogonalidad de  $\{J_m(\lambda_l x)\}_{l \in \mathbb{N}}$  y  $\{\cos(m\theta)\}_{m \in \mathbb{N}}$  se tiene que:

$$K_{m,l,n}(n\pi) \cos(n\pi z) = (\lambda_l d)^2 \Phi_{ml}(z) \quad (3.102)$$

Así que los coeficientes  $\Phi_{ml}(z)$  tienen la forma:

$$\Phi_{ml}(z) = \frac{K_{mln}(n\pi) \cos(n\pi z)}{(\lambda_l d)^2} \quad (3.103)$$

Mientras que por otro lado  $\Psi_{ml} = 0, \forall m, l \in \mathbb{N}$  pues como vimos  $\omega_z = 0$ .

Entonces de (3.98) y (3.99) tenemos que:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m,l,m \in \mathbb{N}} \frac{K_{mln}(n\pi) \cos(n\pi z)}{(\lambda_l d)} J'_m(\lambda_l dr) \cos(m\theta) \\ v &= \sum_{m,l,n \in \mathbb{N}} -\frac{K_{mln}(n\pi) \cos(n\pi z) m}{(\lambda_l d)^2 r} J_m(\lambda_l dr) \sin(m\theta) \end{aligned} \quad (3.104)$$



## Capítulo 4

# Bifurcación

### 4.1. Análisis de $\dim(Ker A)$

Las perturbaciones  $(\mathbf{v}, T)$  respecto a la solución que corresponde al estado de conducción satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = PRTe_z - \nabla p + P\Delta \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (4.1)$$

$$R\frac{\partial T}{\partial t} = R\Delta T + R\omega - R\mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (4.2)$$

Esto resulta de escribir las ecuaciones para las perturbaciones a la solución de conducción utilizando las ecuaciones no lineales del problema, que es análogo a lo que hicimos en la sección anterior para obtener la linealización.

Comenzaremos estudiando las bifurcaciones que se dan a partir del estado estacionario o estado de conducción que calculamos anteriormente.

El primer paso será definir espacios de trabajo convenientes y replantear el problema en términos de un operador entre estos espacios.

Definiremos el espacio  $B$  como:

$$\begin{aligned}
B = \{ & (\mathbf{v}, T, p) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0, v_z = 0 \text{ en } \partial\Omega_T; \\
& \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) = 0, \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, v_r = 0 \text{ en } \partial\Omega_L; T = 0 \text{ en } \partial\Omega_T, \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ en } \partial\Omega_L; \\
& \iiint_{\Omega} p dV = 0 \} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{H}^2(\Omega) = [H^2(\Omega)]^4 \times H^1(\Omega) \tag{4.4}$$

$H^2$  y  $H^1$  son los espacios de Sobolev  $W^{2,2}(\Omega)$  y  $W^{1,2}(\Omega)$  respectivamente.

Definiremos otro espacio  $E$  como  $E = \mathbf{L}^2(\Omega)$  donde  $\mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^5$ .

Por último, definiremos un operador  $F : \mathbb{R} \times B \rightarrow E$  del siguiente modo:

$$F(R, \mathbf{v}, T) = (PRT\mathbf{e}_z - \nabla p + P\Delta\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, PR\Delta T + PRw - PR\mathbf{v} \cdot \nabla T, \nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{4.5}$$

Notemos que tanto  $B$  como  $E$  son espacios de Banach, pues por las condiciones de frontera ambos son espacios lineales y la norma está dada por el producto interno de  $\mathbf{H}^2(\Omega)$  y  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  respectivamente. De hecho tenemos que  $B$  y  $E$  son espacios de Hilbert.

Queremos estudiar el comportamiento de las soluciones a partir de la solución trivial, que en términos de las perturbaciones corresponde a  $(\mathbf{0}, 0)$ . Podemos escribir a  $F$  como:

$$F(R, \mathbf{x}) = F(R, \mathbf{0}) + D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})\mathbf{x} - g(R, \mathbf{x}) \tag{4.6}$$

donde  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  es la derivada de Fréchet en el punto  $(R, \mathbf{0})$ , y se ha hecho  $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, T, p)$  y  $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, 0, 0)$  para unificar la notación con la de la literatura.

Resolver el sistema de ecuaciones para las perturbaciones es equivalente al problema:

$$F(R, \mathbf{x}) = \mathbf{0} = F(R, \mathbf{0}) + D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})\mathbf{x} - g(R, \mathbf{x}) \tag{4.7}$$



pero aquí tenemos que  $F(R, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , así que el problema se reduce a:

$$D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})\mathbf{x} - g(R, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

En términos de  $(\mathbf{v}, T, p)$  tenemos que:

$$\begin{pmatrix} PRTe_z - \nabla p + P\Delta\mathbf{v} \\ PR\Delta T + PRw \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \\ PR\mathbf{v} \cdot \nabla T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Si el operador  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  tiene un inverso continuo entonces sabemos por el teorema de la función implícita que podemos expresar de manera única a  $\mathbf{x}$  como función de  $R$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(R)$ . Dado que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es una solución entonces la existencia del inverso implica que sólo se tiene la solución trivial.

Si queremos hallar puntos en los que a partir de la solución trivial haya bifurcación entonces una condición necesaria será que  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  no tenga inverso. Analizaremos pues los valores de  $R$  que hacen que el operador  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  deje de ser uno a uno, o dicho de otro modo que hacen que  $\text{Ker}D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0}) \neq \{\mathbf{0}\}$

En el capítulo anterior encontramos que en los espacios que estamos trabajando el operador  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$ , que entonces llamamos linealización alrededor de la solución de conducción, tiene un núcleo diferente del trivial únicamente si:

$$R = \frac{[(n\pi)^2 + (\lambda_{ml}d)^2]^3}{(\lambda_{ml}d)^2} \quad (4.10)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda_{ml}$  es la  $l$ -ésima raíz de la ecuación  $J'_m(x) = 0$ . Es importante recordar también que  $d$  es la razón entre la altura y el radio del recipiente cilíndrico.

Si tomamos un  $R \in \mathbb{R}$ , que hace que la linealización tenga un núcleo no trivial, y definimos

$$M_R = \left\{ (m, l, n) \in \mathbb{N}^3 \mid \frac{[(n\pi)^2 + (\lambda_{ml}d)^2]^3}{(\lambda_{ml}d)^2} = R \right\} \quad (4.11)$$

entonces, como se probó en la sección anterior, se tiene que los elementos del núcleo del operador  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  tienen la forma:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{(m,l,n) \in M_R} K_{mln} \frac{n\pi}{\lambda_{ml}d} \cos(m\theta) J'_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z) \\
v &= \sum_{(m,l,n) \in M_R} -K_{mln} \frac{mn\pi}{(\lambda_{ml}d)^2 r} \sin(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z) \\
w &= \sum_{(m,l,n) \in M_R} K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \sin(n\pi z) \\
T &= \sum_{(m,l,n) \in M_R} C_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \sin(n\pi z) \\
p &= \sum_{(m,l,n) \in M_R} -P \frac{(n\pi)^4 + (n\pi)^2 (\lambda_{ml}d)^2}{n\pi (\lambda_{ml}d)^2} K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde  $K_{mln} \in \mathbb{R}$  y

$$C_{mln} = \frac{K_{mln}}{(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2} \tag{4.13}$$

La presión se ha obtenido directamente de la tercera componente del operador  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  igualado a cero. Explícitamente se tiene que:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + P\Delta w + PRT = 0 \tag{4.14}$$

Al sustituir la expresión para  $w$  y  $T$ , que sí conocíamos, e integrar respecto a  $z$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{(m,l,n) \in M_R} -P \frac{(n\pi)^4 + (n\pi)^2 (\lambda_{ml}d)^2}{n\pi (\lambda_{ml}d)^2} K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z) \\
&\quad + \tilde{p}(r, \theta)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Sabemos que se puede expandir a  $p$  en la dirección  $z$  mediante sumas de senos y cosenos. Para que se tenga que  $\tilde{p}(r, \theta) \neq 0$  se debe tener entonces que el término  $\cos(0\pi z)$  está incluido en la suma. Esto quiere decir que existe un  $(\tilde{m}, \tilde{l}, \tilde{n}) \in M_R$  con  $\tilde{n} = 0$ . Por la forma de los elementos del núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  esto implica que  $(0, 0, 0, 0, \tilde{p})$  está en el núcleo. Por la definición de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  se tiene entonces que  $\nabla \tilde{p} = 0$ , es decir,  $\tilde{p}$  es una constante. Además sabemos que la integral de  $\tilde{p}$  sobre el dominio  $\Omega$  debe ser cero, así que  $\tilde{p}$  es en realidad idénticamente cero.

Como ya se mencionó en la sección correspondiente, nos hemos restringido a los elementos de  $B$  que son simétricos respecto al ángulo  $\theta$ . Como veremos a continuación, esto tendrá como consecuencia que el núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  en los valores de  $R$  de interés para existencia de bifurcaciones sólo pueda tener dimensión 1 o 2.

Variaremos primero  $d$  y en términos de  $d$  investigaremos cuál es la dimensión del núcleo que corresponde al valor propio más pequeño  $R$ . Por la forma que tienen los valores propios del problema, según la fórmula (4.10), si  $\lambda_{ml}$  y  $d$  están fijos entonces el valor propio más pequeño debe tener  $n = 1$ . Se puede ver esto pues si dejamos todos los demás parámetros fijos, las curvas están anidadas respecto a  $n$ . Es decir, la curva correspondiente a  $n = 2$  está estrictamente por encima de la correspondiente a  $n = 1$ , la curva correspondiente a  $n = 3$  está por arriba de la correspondiente a  $n = 2$  y así sucesivamente. Esto facilitará bastante la determinación de las dimensiones del núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$ , para el valor más pequeño de  $R$  dependiendo de  $d$ .

Definiremos una función  $R$  de  $\lambda$  y  $d$  del siguiente modo:

$$R(\lambda, d) = \frac{[\pi^2 + (\lambda d)^2]^3}{(\lambda d)^2} \quad (4.16)$$

donde  $\lambda, d \geq 0$  y veremos qué forma tiene la curva  $R(\lambda)$  para un  $d$  arbitrario.

Si se denota como  $R'$  a la derivada de  $R$  respecto a  $\lambda$  entonces:

$$R' = \frac{2d[\pi^2 + (\lambda d)^2]^2(2\lambda^2 d^2 - \pi^2)}{(\lambda d)^3} \quad (4.17)$$

De esta forma tenemos un único valor de  $\lambda$  que hace  $R' = 0$ , que es:

$$\lambda_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}d} \quad (4.18)$$

Por otro lado, la segunda derivada de  $R$  respecto a  $\lambda$  es:

$$R'' = \frac{[\pi^2 + (\lambda d)^2](12\lambda^4 d^4 - 6\lambda^2 d^2 \pi^2 + 6\pi^4)}{\lambda^4 d^2} \quad (4.19)$$

si consideramos a  $(12\lambda^4 d^4 - 6\lambda^2 d^2 \pi^2 + 6\pi^4)$  como una ecuación cuadrática de  $\lambda^2$  entonces se tiene que el discriminante es:

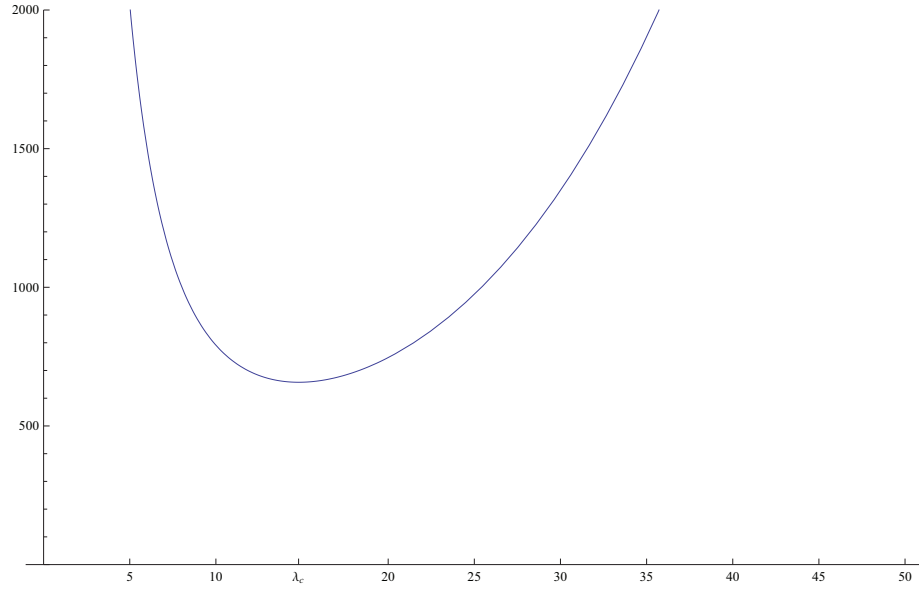


Figura 4.1: Gráfica de  $R(\lambda)$  con  $d = 0.15$

$$6\sqrt{d^4\pi^4 - 8d^4\pi^4} \quad (4.20)$$

así que la ecuación sólo tiene raíces complejas. Como  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  entonces esto muestra que  $R'' \neq 0$  y que entonces  $R'' > 0$  para cualquier  $\lambda$ . La figura 4.1 muestra la forma típica de la curva  $R(\lambda)$ .

Fijemos  $d$  y tomemos el intervalo  $[0, \lambda_1]$  que contenga a  $\lambda_c$ . Por propiedades de las funciones de Bessel tenemos que existe un número finito de  $\lambda_{ml}$  que están en el intervalo, así que existe por lo menos un  $\lambda_{ml}$  que está más cerca de  $\lambda_c$ . Si existe solamente uno, entonces para esa  $d$  fija el primer valor propio  $R$  será simple. Si existen dos con el mismo valor de  $R$ , entonces habrá dos vectores propios que corresponden a ese primer valor propio. Y como ya probamos que  $R'' > 0$  entonces esas son las únicas posibilidades.

Si los elementos de  $\{\lambda_{ml}\}_{m,l \in \mathbb{N}}$  se ordenan de menor a mayor se obtiene la sucesión:

$$\lambda_1 = \lambda_{11}, \lambda_2 = \lambda_{21}, \lambda_3 = \lambda_{01}, \lambda_4 = \lambda_{31}, \lambda_5 = \lambda_{41}, \lambda_6 = \lambda_{12}, \lambda_7 = \lambda_{51}, \dots \quad (4.21)$$

Vamos a ver que para cada uno de los elementos de una sucesión existe un  $d$  tal que  $R(\lambda_{ml}, d)$  es el valor propio más pequeño de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  y que además el núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  tiene dimensión uno. Por otro lado, si  $\lambda_n, \lambda_{n+1}$  son consecutivos entonces existe un  $d$  tal que  $R(\lambda_1, d) = R(\lambda_2, d)$  y por lo tanto el núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  tiene dimensión 2.

Habíamos visto que el mínimo de  $R(\lambda)$  se da en  $\lambda_c = \pi/(\sqrt{2}d)$  así que al variar  $d$  siempre se puede hacer que  $R(\lambda_{ml})$  sea el mínimo valor de  $R(\lambda)$ .

Si tenemos  $\lambda_n$  y  $\lambda_{n+1}$  consecutivos entonces podemos tomar  $d_1, d_2$  tales que  $R(\lambda_n, d_1) - R(\lambda_{n+1}, d_1) > 0$ ,  $R(\lambda_n, d_2) - R(\lambda_{n+1}, d_2) < 0$ . Por la continuidad de  $R$  existe un valor  $d$  tal que  $R(\lambda_n, d) = R(\lambda_{n+1}, d)$ , que hace que el núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  tenga dimensión 2. El valor de  $d$  puede encontrarse resolviendo la ecuación:

$$\frac{[\pi^2 + (\lambda_n d)^2]^3}{(\lambda_n d)^2} = \frac{[\pi^2 + (\lambda_{n+1} d)^2]^3}{(\lambda_{n+1} d)^2} \quad (4.22)$$

Como  $d \neq 0$  entonces es equivalente a resolver:

$$[\pi^2 + (\lambda_n d)^2]^3 \lambda_{n+1}^2 = [\pi^2 + (\lambda_{n+1} d)^2]^3 \lambda_n^2 \quad (4.23)$$

Si denotamos como  $d_{n,n+1}$  al valor de  $d$  que hace que  $R(\lambda_n, d) = R(\lambda_{n+1}, d)$  entonces tenemos que

$$d_{1,2} > d_{2,3} > d_{3,4} > \dots \quad (4.24)$$

Por la continuidad de  $R(\lambda, d)$  tenemos que en el intervalo  $(d_{1,2}, \infty)$ , el valor propio más pequeño de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  es  $R(\lambda_1, d)$ , en  $(d_{2,3}, d_{1,2})$  es  $R(\lambda_2, d)$  y así sucesivamente. Por otro lado, para el punto  $d_{n,n+1}$  el valor propio más pequeño tiene dos funciones propias correspondientes a  $\lambda_n$  y  $\lambda_{n+1}$ .

En la gráfica 4.2 se ve el comportamiento de  $R$  como función de  $d$  para los valores de  $(m, l, n)$  correspondientes a los primeros  $\lambda_n$ .

Aunque sería deseable tener una manera de ordenar los ceros de las derivadas de las funciones de Bessel  $\{\lambda_{ml}\}_{m,l \in \mathbb{N}}$ , no parece haber una forma fácil de hacerlo.

Es importante decir que el hecho de restringir la búsqueda a elementos del núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  que son simétricos respecto al ángulo  $\theta$  es lo que redujo

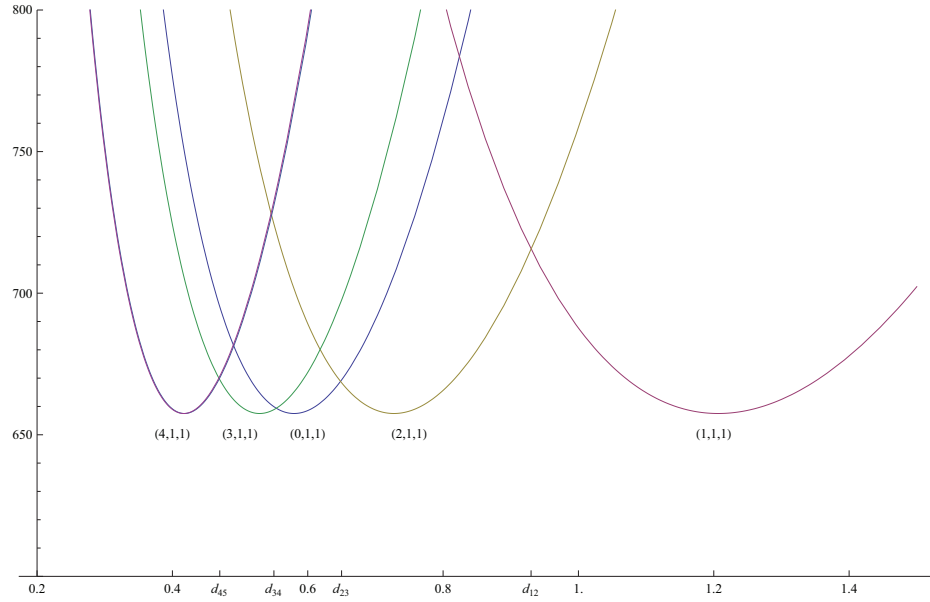


Figura 4.2: Gráfica de  $R(d)$  para algunos valores de  $(m, l, n)$

la dimensión de dicho núcleo. Expresar los elementos del núcleo completo en términos de series de Fourier no representa gran problema pues sólo hay que añadir los términos de los senos. Sin embargo, al utilizar las series completas la dimensión del núcleo de  $D_{\mathbf{x}}F(R, \mathbf{0})$  se duplica.

## 4.2. La ecuación de bifurcación

En la sección anterior expresamos nuestro problema como un problema de la forma:

$$F(\lambda, \mathbf{x}) = F(\lambda, \mathbf{0}) + D_{\mathbf{x}}F(\lambda, \mathbf{0})\mathbf{x} - g(\lambda, \mathbf{x}) \quad (4.25)$$

donde  $F : \mathbb{R} \times B \rightarrow E$ , y tanto  $B$  como  $E$  son espacios de Banach (en el problema particular que tratamos son también espacios de Hilbert).

Hemos puesto la letra  $\lambda$  en lugar de  $R$  como el parámetro de nuestro problema no lineal para seguir la nomenclatura usual de la bibliografía.

Comenzaremos viendo en general cómo es posible reducir el sistema de ecua-

ciones para un problema no lineal, que originalmente está en un espacio de dimensión infinita, a un sistema de ecuaciones en dimensión finita. Para ello será necesario que la parte lineal del problema satisfaga ciertas condiciones como veremos a continuación.

Supongamos que tenemos el problema:

$$F(\lambda, \mathbf{x}) = A\mathbf{x} - T(\lambda)\mathbf{x} - g(\lambda, \mathbf{x}) \quad (4.26)$$

donde  $F : B \rightarrow E$ , con  $B$  y  $E$  espacios de Banach.  $A$  y  $T(\lambda)$  son operadores lineales con  $T(0) = \mathbf{0}$ .  $A$  es un operador de Fredholm, es decir  $KerA$  es de dimensión finita  $d$  y  $RangeA$  tiene codimensión finita  $d^*$ .

Supondremos que existen las siguientes proyecciones:

$$\begin{aligned} P : B &\rightarrow KerA \\ Q : E &\rightarrow RangeA \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tenemos entonces las siguientes descomposiciones:

$$B = KerA \oplus B_2 \quad (4.28)$$

$$E = E_2 \oplus RangeA \quad (4.29)$$

De esta forma un elemento  $\mathbf{x} \in B$  puede verse como  $\mathbf{x} = x_1 + x_2$  con  $x_1 \in KerA$  y  $x_2 \in B_2$ . La idea de la reducción a la ecuación de bifurcación (o reducción de Lyapunov-Schmidt) es proyectar la ecuación  $F(\lambda, \mathbf{x})$  sobre  $RangeA$  y garantizar que se puede resolver  $x_2$  de manera única como  $x_2 = x_2(\lambda, x_1)$ . Al sustituir  $x_2(\lambda, x_1)$  en la proyección de  $F(\lambda, \mathbf{x})$  sobre  $E_2$  se tendrá un sistema de  $d^*$  ecuaciones con  $d$  variables, reduciendo así el problema de dimensiones infinitas a un sistema finito.

Comenzaremos pues con proyectar la ecuación  $F(\lambda, \mathbf{x})$  sobre  $RangeA$  y sobre  $E_2$ . La proyección sobre  $RangeA$  queda:

$$QA\mathbf{x} - QT(\lambda)\mathbf{x} - Qg(\lambda, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.30)$$

mientras que la proyección sobre  $E_2$  resulta:

$$-(I - Q)T(\lambda)\mathbf{x} - (I - Q)g(\lambda, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.31)$$

Si usamos que  $\mathbf{x} = x_1 \oplus x_2$  con  $x_1 \in \text{Ker}A$  y  $x_2 \in B_2$  entonces se tiene que las proyecciones sobre  $\text{Range}A$  y  $E_2$  se ven así:

$$Ax_2 - QT(\lambda)(x_1 + x_2) - Qg(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \quad (4.32)$$

$$-(I - Q)T(\lambda)(x_1 + x_2) - (I - Q)g(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \quad (4.33)$$

Tenemos que  $A$  restringido a  $B_2$  es uno a uno y sobre, y entonces existe un operador  $K$  lineal y continuo,  $K : \text{Range}A \rightarrow B_2$ , que es el inverso de  $A$  restringido a  $B_2$ . Si aplicamos el operador  $K$  a (4.32) tenemos que:

$$x_2 - KQT(\lambda)(x_1 + x_2) - KQg(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \quad (4.34)$$

Así que tenemos:

$$[I - KQT(\lambda)]x_2 = KQT(\lambda)x_1 + KQg(\lambda, x_1 + x_2) \quad (4.35)$$

Para  $\lambda$  pequeño el operador  $[I - KQT(\lambda)]$  es invertible (puede verse como una perturbación de la identidad) y su inverso está dado por la serie:

$$[I - KQT(\lambda)]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (KQT(\lambda))^i \quad (4.36)$$

La ecuación (4.32) queda:

$$x_2 = [I - KQT(\lambda)]^{-1}KQ(T(\lambda)x_1 + g(\lambda, x_1 + x_2)) \quad (4.37)$$

Si hacemos  $N(\lambda, x_1, x_2) = [I - KQT(\lambda)]^{-1}KQ(T(\lambda)x_1 + g(\lambda, x_1 + x_2))$  y suponemos que  $g(\lambda, \mathbf{x})$  es  $C^1$  y que  $\|T(\lambda)\| \leq C\|\lambda\|$  entonces tenemos que:

$$\|N(\lambda, x_1, x_2) - N(\lambda, x_1, x'_2)\| \leq \epsilon\|x_2 - x'_2\| \quad (4.38)$$

por un argumento de contracción de Banach tenemos entonces que se puede resolver para  $x_2$  en términos de  $\lambda$  y  $x_1$  de manera única,  $x_2 = x_2(\lambda, x_1)$ .



Si sustituimos  $x_2$  en (4.33) se tiene:

$$\begin{aligned} & -(I - Q)T(\lambda)[x_1 + [I - KQT(\lambda)]^{-1}KQ(T(\lambda)x_1 + g(\lambda, x_1 + x_2))] \\ & -(I - Q)g(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Si reordenamos se tiene que:

$$\begin{aligned} & [-(I - Q)T(\lambda) - (I - Q)T(\lambda)[I - KQT(\lambda)]^{-1}KQT(\lambda)]x_1 \\ & -(I - Q)T(\lambda)[I - KQT(\lambda)]^{-1}KQg(\lambda, x_1 + x_2) - (I - Q)g(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

que se factoriza como:

$$\begin{aligned} & -(I - Q)T(\lambda)[I + [I - KQT(\lambda)]^{-1}KQT(\lambda)]x_1 \\ & -(I - Q)[T(\lambda)[I - KQT(\lambda)]^{-1}KQ + I]g(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Expresando a  $[I + [I - KQT(\lambda)]^{-1}]$  como una serie tenemos que:

$$[I + [I - KQT(\lambda)]^{-1}KQT(\lambda)] = [I - KQT(\lambda)]^{-1} \quad (4.42)$$

y también que:

$$[T(\lambda)[I - KQT(\lambda)]^{-1}KQ + I] = [I - T(\lambda)KQ]^{-1} \quad (4.43)$$

La ecuación (4.33) queda:

$$\begin{aligned} & -(I - Q)T(\lambda)[I - KQT(\lambda)]^{-1}x_1 \\ & -(I - Q)[I - T(\lambda)KQ]^{-1}g(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Si definimos  $\mathcal{B}(\lambda)$  y  $G(\lambda, \mathbf{x})$ , como en [13]:

$$\mathcal{B}(\lambda) = -(I - Q)T(\lambda)[I - KQT(\lambda)]^{-1}P \quad (4.45)$$

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = -(I - Q)[I - T(\lambda)KQ]^{-1}g(\lambda, \mathbf{x}) \quad (4.46)$$

(4.33) se puede escribir así:

$$\mathcal{B}(\lambda)x_1 + G(\lambda, x_1 + x_2(\lambda, x_1)) = 0 \quad (4.47)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de bifurcación. De la definición de  $\mathcal{B}(\lambda)$  tenemos que es un operador lineal. Como supusimos que  $\text{Ker}A$  era de dimensión finita  $d$  y el complemento de  $\text{Range}A$  de dimensión  $d^*$  entonces  $\mathcal{B}(\lambda)$  es una matriz de  $d^* \times d$  que depende de la base que se tome para  $\text{Ker}A$ .

Como habíamos dicho, la ventaja de hacer la reducción es pasar de un sistema definido a un espacio de dimensiones infinitas a un sistema definido en espacios de dimension finita.

Escribiremos pues nuestro problema en la forma

$$A\mathbf{x} - T(R)\mathbf{x} - g(R, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.48)$$

Utilizando la expresión que encontramos en una sección anterior para las ecuaciones en coordenadas cilíndricas tenemos que:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial r} + P \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + P \left( \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + P \Delta w + PR_c T \\ PR_c \Delta T + PR_c w \\ 0 \end{bmatrix} - P(R_c - R) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \\ \Delta T + w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$- \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla v + \frac{r}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w \\ PR\mathbf{v} \cdot \nabla T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que para todo  $\mathbf{x} \in B$  se tiene que:

$$\mathbf{x} = x_1 + x_2 \quad (4.50)$$

con  $x_1 \in KerA$  y  $x_2 \in (KerA)^\perp$ , pues como vimos en otra sección  $A$  es autoadjunto.

Consideraremos el caso en que  $KerA(R_c)$  es de dimensión 2, pues el caso en que es de dimensión 1 es un caso particular de éste.

Supondremos pues que  $KerA$  está generado por dos elementos  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Tenemos entonces que:

$$\mathbf{x} = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2 \quad (4.51)$$

Como  $A$  es autoadjunto entonces  $E - ImA = KerA$ , de manera que para obtener la reducción de Lyapunov-Schmidt proyectaremos sobre  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

Antes de proyectar tenemos que:

$$A(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2) - T(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2) - g(R, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.52)$$

donde por claridad se ha dejado de escribir el parámetro  $R$  en la parte lineal.

Usando que  $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in KerA$  se tiene que:

$$Ax_2 - T(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2) - g(R, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.53)$$

Las proyecciones quedan pues:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, Ax_2 \rangle - \langle \phi_1, T(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2) \rangle - \langle \phi_1, g(R, \mathbf{x}) \rangle &= 0 \\ \langle \phi_2, Ax_2 \rangle - \langle \phi_2, T(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2) \rangle - \langle \phi_2, g(R, \mathbf{x}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Como  $A$  es autoadjunto entonces  $\langle \phi_i, Ax_2 \rangle = \langle A\phi_i, x_2 \rangle = 0$  para  $i = 1, 2$ .

Por otro lado,  $\langle \phi_i, T\phi_j \rangle$  puede calcularse fácilmente como veremos a continuación.

Convendremos que para  $\phi_1$ ,  $(m, l, n) = (m, l, n)$  y que para  $\phi_2$ ,  $(m, l, n) = (m', l', n')$ .

Tendremos entonces que:

$$T\phi_1 = P(R_c - R) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]} K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \sin(n\pi z) \\ \frac{(n\pi)^2}{[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]} K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \sin(n\pi z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

así que  $\langle \phi_2, T\phi_1 \rangle = 0$ , pues para que  $\phi_1, \phi_2$  sean linealmente independientes se requiere que  $(m, l, n)$  y  $(m', l', n')$  difieran en por lo menos una entrada.

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, T\phi_1 \rangle &= P(R - R_c) \frac{K_{mln}^2}{[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]} \left( \frac{1}{[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]} + (n\pi)^2 \right) \\ &\quad \iiint_{\Omega} \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda_{ml}dr) \sin^2(n\pi z) r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (4.56)$$

y tenemos un resultado análogo para  $\langle \phi_1, T\phi_2 \rangle$  y  $\langle \phi_2, T\phi_2 \rangle$ .

Tenemos pues que:

$$\begin{aligned} \alpha \langle \phi_1, T\phi_1 \rangle + \langle \phi_1, Tx_2 \rangle + \langle \phi_1, g(R, \mathbf{x}) \rangle &= 0 \\ \beta \langle \phi_2, T\phi_2 \rangle + \langle \phi_2, Tx_2 \rangle + \langle \phi_2, g(R, \mathbf{x}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Podemos expandir a  $x_2$  en series como:

$$\begin{aligned}
u_2 &= \sum_{M,L,N \in \mathbb{N}} U_{MLN} \cos(M\theta) J'_M(\lambda_{ML} dr) \cos(N\pi z) \\
v_2 &= \sum_{M,L,N \in \mathbb{N}} V_{MLN} \sin(M\theta) J_M(\lambda_{ML} dr) \cos(N\pi z) \\
w_2 &= \sum_{M,L,N \in \mathbb{N}} W_{MLN} \cos(M\theta) J_M(\lambda_{ML} dr) \sin(N\pi z) \\
T_2 &= \sum_{M,L,N \in \mathbb{N}} \Theta_{MLN} \cos(M\theta) J_M(\lambda_{ML} dr) \sin(N\pi z) \\
p_2 &= \sum_{M,L,N \in \mathbb{N}} P_{MLN} \cos(M\theta) J_M(\lambda_{ML} dr) \cos(N\pi z) \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$Tx_2 = P(R_c - R) \sum_{M,L,N \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{MLN} \cos(M\theta) J_M(\lambda_{ML} dr) \sin(N\pi z) \\ [-(\lambda_{ML} d)^2 \Theta_{MLN} + W_{MLN}] \cos(M\theta) J_M(\lambda_{ML} dr) \sin(N\pi z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

De manera que:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1, Tx_2 \rangle &= P(R_c - R) \frac{K_{mln}}{[(\lambda_{ml} d)^2 + (n\pi)^2]} [(n\pi)^2 \Theta_{mln} + W_{mln}] \\
&\quad \iiint_{\Omega} \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda_{ml} dr) \sin^2(n\pi z) r dr d\theta dz \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Sin embargo el método directo de desarrollar en series no será de mucha ayuda en este caso para calcular  $\langle \phi_1, Tx_2 \rangle$  con mayor detalle, debido a que los elementos del núcleo no pueden expresarse como sumas finitas en términos de las bases que escogimos. Recordemos que hay un factor  $\frac{1}{r}$  en la expresión para  $v$ .

Lo que convendrá será utilizar un método indirecto para obtener información de  $\mathcal{B}(R)$ . Recordemos que del método de Lyapunov-Schmidt tenemos que  $x_2$  es de orden cuadrático en  $x_1$  y  $R - R_c$ . De hecho los términos principales de  $x_2$  son del orden  $(R - R_c)^2$ ,  $(R - R_c)|x_1|$  y  $|x_1|^2$ . Es claro que los únicos términos

que podrían contribuir a la parte lineal de la ecuación de bifurcación son los de orden  $(R - R_c)|x_1|$ .

No es difícil ver que  $T$  es autoadjunto así que se tiene que:

$$\langle \phi_1, Tx_2 \rangle = \langle T\phi_1, x_2 \rangle \quad (4.61)$$

De esta forma, el único término que puede contribuir a la parte lineal de la ecuación de bifurcación es de la forma:

$$P(R - R_c)^2 K \quad (4.62)$$

donde  $K$  puede o no contener términos lineales en  $\alpha$  y  $\beta$ .

Así que en la base  $\{\phi_1, \phi_2\}$  de  $\text{Ker}A$  se tiene que:

$$\mathcal{B}(R) = \begin{pmatrix} \langle \phi_1, T\phi_1 \rangle + P(R - R_c)^2 K_1 & P(R - R_c)^2 K_2 \\ P(R - R_c)^2 K_3 & \langle \phi_2, T\phi_2 \rangle + P(R - R_c)^2 K_4 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Encontraremos ahora una expresión explícita para  $\langle \phi_1, T\phi_1 \rangle$ . Comenzaremos evaluando la integral

$$\iiint_{\Omega} \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda_{ml} r) \sin^2(n\pi z) r dr d\theta dz \quad (4.64)$$

Para ello usaremos el siguiente resultado:

Si  $\mu > 0$ ,  $b > 0$  y  $\nu \geq 0$  entonces:

$$\int_0^b J_\nu^2(\mu x) x dx = \frac{b^2}{2} [J'_\nu(\mu b)]^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \nu^2}{2\mu^2} J_\nu^2(\mu b) \quad (4.65)$$

**Prueba.**

Sea  $f(x) = J_\nu(\mu x)$ . La ecuación diferencial que  $f$  satisface es:

$$x f'' + x f' + (\mu^2 x^2 - \nu^2) f = 0 \quad (4.66)$$

También puede escribirse como:

$$x(xf')' = (\nu^2 - \mu^2x^2)f \quad (4.67)$$

Si se multiplica por  $2f'$  se obtiene:

$$[(xf')^2]' = (xf')(2xf') = (\nu^2 - \mu^2x^2)2ff' \quad (4.68)$$

Al integrar de 0 a  $b$  y evaluar la integral del lado derecho por partes se tiene:

$$(xf')^2|_0^b = (\nu^2 - \mu^2x^2)f^2|_0^b + \int_0^b 2\mu^2xf^2dx \quad (4.69)$$

Así que:

$$[bf'(b)]^2 = (\nu^2 - \mu^2b^2)[f(b)]^2 + 2\mu^2 \int_0^b xf^2dx \quad (4.70)$$

Entonces se tiene que:

$$\int_0^b J_\nu^2(\mu x)xdx = \frac{b^2}{2}[J'_\nu(\mu b)]^2 + \frac{\mu^2b^2 - \nu^2}{2\mu^2}J_\nu^2(\mu b) \quad (4.71)$$

como queríamos probar. ■

Se ha seguido la demostración de [10].

Según el resultado anterior tenemos que:

$$\int_0^{\frac{1}{d}} J_m^2(\lambda_{ml}dr)rdr = \frac{1}{2d^2}[J'_m(\lambda_{ml})]^2 + \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{2(\lambda_{ml}d)^2}J_m^2(\lambda_{ml}) \quad (4.72)$$

Y entonces:

$$\int_0^{\frac{1}{d}} J_m^2(\lambda_{ml}dr)rdr = \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{2(\lambda_{ml}d)^2}J_m^2(\lambda_{ml}) \quad (4.73)$$

De esta manera tenemos que si  $m \neq 0$ :

$$\iiint_{\Omega} \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda_{ml} dr) \sin^2(n\pi z) r dr d\theta dz = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{2(\lambda_{ml}d)^2} J_m^2(\lambda_{ml}) \quad (4.74)$$

Mientras que si  $m = 0$  se tiene que:

$$\iiint_{\Omega} \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda_{ml} dr) \sin^2(n\pi z) r dr d\theta dz = \pi \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{2(\lambda_{ml}d)^2} J_m^2(\lambda_{ml}) \quad (4.75)$$

De aquí en adelante supondremos que  $m \neq 0$  y  $m' \neq 0$  a menos de que se mencione lo contrario. Se tiene pues que:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, T\phi_1 \rangle &= P(R - R_c) \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{2(\lambda_{ml}d)^2} J_m^2(\lambda_{ml}) \frac{K_{mln}^2}{[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]} \\ &\quad \left( \frac{1}{[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]} + (n\pi)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para simplificar utilizaremos el hecho de que  $K_{mln}$  es una constante arbitraria y haremos  $K_{mln} = [(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]$ .

Tenemos entonces que:

$$\langle \phi_1, T\phi_1 \rangle = P(R - R_c) \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{2(\lambda_{ml}d)^2} J_m^2(\lambda_{ml}) (1 + (n\pi)^2 [(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]) \quad (4.77)$$

Definiremos  $D(m, l, n)$  del siguiente modo:

$$D(m, l, n) = \frac{\lambda_{ml}^2 - m^2}{(\lambda_{ml}d)^2} J_m^2(\lambda_{ml}) (1 + (n\pi)^2 [(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2]) \quad (4.78)$$

Entonces podemos escribir a  $\mathcal{B}(R)$  como:

$$\mathcal{B}(R) = P(R_c - R) \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} D(m, l, n) + (R - R_c) K_1 & (R - R_c) K_2 \\ (R - R_c) K_3 & \frac{\pi}{4} D(m', l', n') + (R - R_c) K_4 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$



### 4.3. Bifurcaciones local y global

Ahora veremos que el hecho de restringir el espacio de funciones del dominio tendrá una consecuencia agradable. Tenemos que para los valores mínimos de  $R_c$ , el núcleo puede ser de una o dos dimensiones. El resultado interesante es que en el caso de que el núcleo sea de una dimensión, podremos asegurar la existencia de la bifurcación utilizando el siguiente resultado:

**Teorema.** *Supóngase que  $\mathcal{B}(\lambda)$  es invertible para  $\lambda \neq \lambda_n$  pero singular para  $\lambda = \lambda_n$ . Si se cumple que  $\det \mathcal{B}(R)$  cambia de signo cuando  $\lambda$  pasa por  $\lambda_n$  entonces  $(x_n, \lambda_n)$  es un punto de bifurcación.*

Para el caso en que el núcleo tiene dimensión uno, se tiene que  $\mathcal{B}$  tiene la forma:

$$\mathcal{B}(R) = P(R_c - R) \frac{\pi}{4} D(m, l, n) + P(R - R_c)^2 K_1 \quad (4.80)$$

Es claro que el primer término cambia de signo al pasar  $R$  por  $R_c$ . Y además, si se toma  $R$  lo suficientemente pequeño (dado que el segundo término es cuadrático en  $R$ ) entonces se tiene que  $\mathcal{B}(R)$  cambia de signo en  $R_c$ . Utilizando el teorema se puede afirmar que existe la bifurcación en el punto  $(R_c, \mathbf{0})$ .

Por otro lado se tiene que para la ecuación de bifurcación:

$$\frac{\partial}{\partial R} \mathcal{B}(R_c, 0) + \frac{\partial}{\partial R} \frac{G(R, \alpha)}{\alpha} \Big|_{(R_c, 0)} \neq 0 \quad (4.81)$$

pues la derivada de

$$\frac{G(R, \alpha)}{\alpha} \quad (4.82)$$

con respecto a  $R$  es de orden uno o mayor en  $\alpha$ , y por lo tanto vale cero en  $(R_c, 0)$ .

Hemos considerado que  $G$  es función sólo de  $R$  y  $\alpha$  pues como vimos en su momento  $x_2$  está en términos de  $x_1$ .

Por otro lado,  $(R_c, 0)$  es claramente solución de la ecuación de bifurcación, así que si invocamos el teorema de la función implícita se obtiene que en una vecindad alrededor de  $\alpha = 0$  se puede resolver  $R$  como función de  $\alpha$ .

De este modo, la solución al problema no lineal cerca de  $(R_c, 0)$  tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2] \frac{n\pi}{\lambda_{ml}d} \cos(m\theta) J'_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z) + U(\alpha, R(\alpha)) \\ -\alpha[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2] \frac{\lambda_{ml}d}{m n \pi} \sin(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z) + V(\alpha, R(\alpha)) \\ \alpha[(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2] \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \sin(n\pi z) + W(\alpha, R(\alpha)) \\ \alpha \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \sin(n\pi z) + \Theta(\alpha, R(\alpha)) \\ -P\alpha \frac{(n\pi)^4 + (n\pi)^2(\lambda_{ml}d)^2}{n\pi(\lambda_{ml}d)^2} K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml}dr) \cos(n\pi z) + \Pi(\alpha, R(\alpha)) \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

Hemos obtenido pues, un resultado de bifurcación local, a saber que tenemos una solución distinta de la trivial para valores cercanos a ciertos  $R$ . A partir de esa información local, veremos que es posible decir bastante (información global) acerca de las soluciones no triviales que salen del punto de bifurcación.

Para ello, introduciremos primero las propiedades mínimas que esperamos de una teoría de grado. Supongamos que  $F(\lambda, \mathbf{x})$  es tal que  $F(\lambda, 0) = 0$  y  $F^{-1}(0)$  es compacto cuando se interseca con conjuntos acotados y cerrados. Entonces un grado para funciones  $G(\lambda, \mathbf{x}) = (f_0(\lambda, \mathbf{x}), F(\lambda, \mathbf{x}))$  de conjuntos acotados de  $\mathbb{R} \times B$  en  $\mathbb{R} \times E$  debe tener las siguientes propiedades:

- $deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega)$  está definido si  $G(\lambda, \mathbf{x}) \neq 0$  en  $\partial\Omega$ .
- Si  $deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega) \neq 0$  entonces  $G(\lambda, \mathbf{y}) = 0$  para algún  $\mathbf{y} \in \Omega$ .
- Si se puede deformar  $G(\lambda, \mathbf{x})$  a  $H(\lambda, \mathbf{x})$  de manera continua de manera que el grado esté definido en todo momento entonces  $deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega) = deg(H(\lambda, \mathbf{x}), \Omega)$ .
- Si  $G(\lambda, \mathbf{x}) \neq 0$  en  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$  entonces  $deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega) = deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ , o bien:
- Si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  con  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  y  $deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega_i)$  está definido para  $i = 1, 2$  entonces  $deg(G(\lambda, \mathbf{x}); \Omega)$  es la suma de los grados respecto a  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

En nuestro caso, únicamente utilizaremos el grado de Brouwer pues estaremos trabajando en dimensión finita.

Tenemos entonces el siguiente teorema de bifurcación global (cuya demostración se sigue de [13]):

**Teorema.** *Sea  $S = \{(\lambda, \mathbf{x}) | F(\lambda, \mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \neq 0\}$  y sea  $(C)$  la componente conexa de  $(0, 0)$  en  $\bar{S} \cup (0, 0)$ . Si  $\deg(\|\mathbf{x}\|^2 - \epsilon^2, F(\lambda, \mathbf{x}); B) \neq 0$  entonces, si la teoría de grado satisface las propiedades antes señaladas,  $C$  es no acotada o regresa a un punto de bifurcación diferente de  $(0, 0)$ .  $B$  es el conjunto  $B = \{(\lambda, \mathbf{x}) | |\lambda| < \rho, \|\mathbf{x}\| < 2\epsilon\}$ , con  $\epsilon \approx 0$ .*

**Prueba.** Si  $C$  está acotada y no regresa a otro punto de bifurcación entonces podemos construir una vecindad (lema de Whyburn)  $\Omega$  alrededor de  $C$  tal que  $S \cap \partial\Omega = \emptyset$  y tal que intersecte al eje  $(\lambda, 0)$  únicamente cerca de  $(0, 0)$ .

Entonces  $\deg(\|\mathbf{x}\|^2 - r^2, F(\lambda, \mathbf{x}); \Omega)$  está bien definido. También es válido considerar a  $r$  como un parámetro de deformación pues el grado está bien definido siempre. Para  $r$  grandes tenemos que  $\|\mathbf{x}\| - r^2 < 0$  así que el grado es cero. Por otro lado, para  $r = \epsilon \approx 0$  tenemos por la tercera propiedad que el grado es simplemente  $\deg(\|\mathbf{x}\|^2 - \epsilon^2, F(\lambda, \mathbf{x}); B)$ . Esto contradice la suposición de que  $\deg(\|\mathbf{x}\|^2 - \epsilon^2, F(\lambda, \mathbf{x}); B)$  no es trivial y prueba la afirmación. ■

Para poder utilizar este resultado en nuestro caso particular hay que ver entonces que  $\deg(\|\mathbf{x}\|^2 - \epsilon^2, F(\lambda, \mathbf{x}); B)$  es diferente de cero. Para ello dividimos  $B$  en dos conjuntos y veremos cuál es el grado en cada uno de ellos, después, utilizando la tercera propiedad obtendremos el grado en todo  $B$ . Lo importante en realidad, como se verá, es que  $\mathcal{B}$  cambia de signo en  $\lambda = 0$ . Definamos  $B_+ = B \cap \{(\lambda, \mathbf{x}) | x_1 > 0\}$ ,  $B_- = B \cap \{(\lambda, \mathbf{x}) | x_1 < 0\}$  y  $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C} \cap \{(\lambda, \mathbf{x}) | x_1 > 0\}$ ,  $\mathcal{C}_- = \mathcal{C} \cap \{(\lambda, \mathbf{x}) | x_1 < 0\}$ . Se puede probar que

$$\begin{aligned} \deg(\|\mathbf{x}\|^2 - \epsilon^2, F(\lambda, \mathbf{x}); B_+) &= \deg(|x_1|^2 - \epsilon^2, \mathcal{B}(\lambda)x_1 - G(\lambda, x_1); B_+) \\ &= \deg(|x_1|^2 - \epsilon^2, \mathcal{B}(\lambda)x_1; B_+) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Tenemos que

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 \\ \mathcal{B}'(\lambda)x_1 & \mathcal{B}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

y que  $(|x_1|^2 - \epsilon^2, \mathcal{B}(\lambda)x_1)$  tiene su único cero en  $(0, \epsilon)$ , así que:

$$\deg(|x_1|^2 - \epsilon^2, \mathcal{B}(\lambda)x_1; B_+) = -\frac{\mathcal{B}'(0)}{|\mathcal{B}'(0)|} \quad (4.86)$$

Por otro lado también se tiene que  $\deg(|x_1|^2 - \epsilon^2, \mathcal{B}(\lambda)x_1; B_-) = -\text{sgn}(\mathcal{B}'(0))$ , pues de hecho el grado ni siquiera depende de  $x_1$ . Entonces tenemos que  $\deg(|x_1|^2 - \epsilon^2, \mathcal{B}(\lambda)x_1; B) = -2\text{sgn}(\mathcal{B}'(0))$ , así que si  $\mathcal{B}(\lambda)$  cambia de signo como en nuestro caso, se puede aplicar el teorema.

#### 4.4. Equivarianza del operador bajo la acción de $O(2)$

Probaremos ahora que el operador  $F$  es equivariante bajo la acción del grupo  $O(2)$ , el significado de la palabra equivariante será dado en las siguientes líneas.

Dadas las condiciones de frontera (que son idénticas en cada punto de las caras laterales) y la simetría del dominio  $\Omega$  esperamos que si hay un campo que satisface las ecuaciones entonces el mismo campo rotado seguirá siendo solución del sistema. Por otro lado, si tenemos una solución esperamos que el campo de velocidades reflejado en un espejo también sea físicamente posible.

La tarea será formalizar estos conceptos y ver que las soluciones del sistema efectivamente tienen esas propiedades. Para ello utilizaremos algunas definiciones.

**Definición.** Sean  $\Gamma$  un grupo de Lie y  $B$  un espacio de Banach. Se dice que un homomorfismo continuo  $\rho : \Gamma \rightarrow GL(B)$  es una acción de  $\Gamma$  sobre  $B$ . Se dice que  $\Gamma$  actúa linealmente sobre  $B$  mediante la acción  $\rho(\gamma)x$ , que tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \rho(\gamma\gamma') &= \rho(\gamma)\rho(\gamma') \\ \rho(e) &= I \end{aligned}$$

De aquí en adelante se escribirá por simplicidad  $\rho(\gamma)x = \gamma x$ .

Esta definición permite formalizar la idea que tenemos de rotar o reflejar un campo de velocidades. Tendremos que definir una manera de aplicar el grupo  $O(2)$  (de rotaciones y reflexiones en  $\mathbb{R}^2$ ) a un campo vectorial dado en  $\Omega$ , de

manera que los resultados coincidan con nuestra idea intuitiva. En otras palabras queremos definir una acción de  $O(2)$  en  $B$ .

Por las propiedades de una acción señaladas en la definición bastará con definirla para  $SO(2)$  y para  $\kappa$ , donde  $\kappa$  es el elemento de  $O(2)$  que corresponde a la reflexión respecto al eje  $x$ .

Definiremos una acción de  $SO(2)$  en  $B$  del siguiente modo. Si  $\gamma \in SO(2)$  entonces:

$$\gamma \begin{pmatrix} u(r, \theta, z) \\ v(r, \theta, z) \\ w(r, \theta, z) \\ T(r, \theta, z) \\ p(r, \theta, z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u(r, \theta - \gamma, z) \\ v(r, \theta - \gamma, z) \\ w(r, \theta - \gamma, z) \\ T(r, \theta - \gamma, z) \\ p(r, \theta - \gamma, z) \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Y para el elemento  $\kappa \in O(2)$  definiremos la acción como:

$$\kappa \begin{pmatrix} u(r, \theta, z) \\ v(r, \theta, z) \\ w(r, \theta, z) \\ T(r, \theta, z) \\ p(r, \theta, z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u(r, -\theta, z) \\ -v(r, -\theta, z) \\ w(r, -\theta, z) \\ T(r, -\theta, z) \\ p(r, -\theta, z) \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

De esta forma hemos definido una acción de  $O(2)$  en  $B$ .

La razón para definir la acción de este modo puede comprenderse mejor observando la figura 4.3. En ésta se muestra el efecto de un elemento  $\gamma \in SO(2)$  sobre los vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$ . Como se observa el resultado es rotar los vectores un ángulo  $\gamma$ . Por otro lado, el efecto de  $\kappa$  sobre los vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$  es mandarlos al punto reflejado respecto al eje  $x$ . La orientación del vector  $\mathbf{e}_\theta$  permanece sin embargo sin cambio (en contra del sentido de las manecillas del reloj). Este hecho explica el signo negativo en la componente  $v$  de la acción que definimos.

Ahora formalizaremos la idea de que si tenemos una solución, entonces el campo rotado o reflejado también es solución. Tenemos la siguiente definición:

**Definición.** Sean  $B$  y  $E$  espacios de Banach donde se tienen acciones del grupo  $\Gamma$ . Se dice que una función  $F : B \rightarrow E$  es  $\Gamma$ -equivariante si se satisface que:

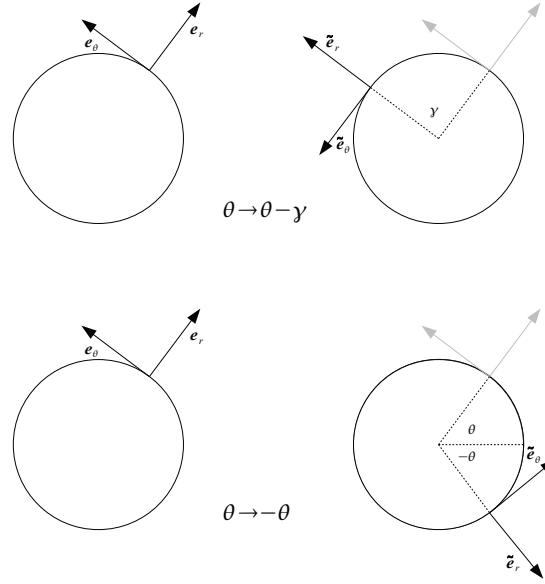


Figura 4.3: Efectos de  $\gamma$  y  $\kappa$  sobre los vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$

$$F(\gamma\mathbf{x}) = \tilde{\gamma}F(\mathbf{x}) \quad (4.89)$$

Nos gustaría probar que  $F$  es  $\Gamma$ -equivariante bajo la acción de  $SO(2)$  que definimos, pues en ese caso si  $\mathbf{y} \in B$  es tal que  $F(\mathbf{y}) = (0)$  y  $\gamma \in O(2)$  entonces  $F(\gamma\mathbf{y}) = \gamma F(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ . Es decir, la reflexión o rotación (o combinación de éstas) de un campo que es solución del sistema de ecuaciones estacionario es también solución del problema estacionario.

Probaremos que  $F$  es equivariante bajo la acción de  $O(2)$  que definimos. Veremos primero que si  $\gamma \in SO(2)$  entonces  $F(\gamma\mathbf{x}) = \gamma F(\mathbf{x})$ . Tomaremos por ejemplo la segunda entrada de  $F(\gamma\mathbf{x})$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\gamma v) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} (\theta - \gamma) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} (\theta - \gamma) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} (\theta - \gamma) \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} (\theta - \gamma) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial (\theta - \gamma)^2} (\theta - \gamma) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} (\theta - \gamma) \\
 &= \gamma \Delta v
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

así que como esperábamos,  $\Delta$  es equivariante bajo  $SO(2)$ .

En general tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} (\theta - \gamma) = \frac{\partial \phi}{\partial (\theta - \gamma)} (\theta - \gamma) \tag{4.91}$$

así que:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} (\theta - \gamma) + P \left( \Delta(\gamma v) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} (\theta - \gamma) - \frac{v^2}{r} (\theta - \gamma) \right) \\
 & - (u(\theta - \gamma), v(\theta - \gamma), w(\theta - \gamma)) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial r} (\theta - \gamma), \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} (\theta - \gamma), \frac{\partial v}{\partial z} (\theta - \gamma) \right) \\
 & \quad \frac{u(\theta - \gamma)v(\theta - \gamma)}{r} \\
 = & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial (\theta - \gamma)} (\theta - \gamma) + P \left( \gamma \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial (\theta - \gamma)} (\theta - \gamma) - \frac{v^2}{r} (\theta - \gamma) \right) \\
 & - (u(\theta - \gamma), v(\theta - \gamma), w(\theta - \gamma)) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial r} (\theta - \gamma), \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial (\theta - \gamma)} (\theta - \gamma), \frac{\partial v}{\partial z} (\theta - \gamma) \right) \\
 & \quad \frac{u(\theta - \gamma)v(\theta - \gamma)}{r}
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Y si hacemos lo mismo con las demás componentes llegamos a que:

$$F(\gamma \mathbf{x}) = \gamma F(\mathbf{x}) \tag{4.93}$$

Veamos ahora lo que sucede con  $\kappa \in O(2)$ .

Tenemos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial (-\theta)} = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{4.94}$$

así que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial(-\theta)^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (4.95)$$

No hay que preocuparse por lo que pasa con las derivadas respecto a  $r$  o  $z$ . Veremos qué pasa con la segunda componente de  $F(\kappa \mathbf{x})$ , para las demás los cálculos no son esencialmente diferentes.

Para  $\Delta v$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta(\kappa v) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r}(-\theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(-\theta) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(-\theta) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r}(-\theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial(-\theta)^2}(-\theta) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(-\theta) \\ &= \kappa \Delta v \end{aligned} \quad (4.96)$$

Por otro lado, para  $\mathbf{v} \cdot \nabla v$  tenemos que:

$$\begin{aligned} (\kappa \mathbf{v}) \cdot \nabla(\kappa v) &= (u(-\theta), -v(-\theta), w(-\theta)) \cdot \left( -\frac{\partial v}{\partial r}(-\theta), -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}(-\theta), -\frac{\partial v}{\partial z}(-\theta) \right) \\ &= (u(-\theta), v(-\theta), w(-\theta)) \cdot \left( -\frac{\partial v}{\partial r}(-\theta), -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial(-\theta)}(-\theta), -\frac{\partial v}{\partial z}(-\theta) \right) \\ &= \kappa(\mathbf{v} \cdot \nabla v) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Hay que notar que se ha hecho un pequeño abuso de notación al denotar con el mismo símbolo a la acción sobre  $B$  y a la acción sobre la segunda componente.

Para la segunda componente tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}(-\theta) + P \left( \Delta(\kappa v) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}(-\theta) + \frac{v}{r^2}(-\theta) \right) \\ &-(\kappa \mathbf{v}) \cdot (\nabla(\gamma v)) - \frac{u(-\theta)v(-\theta)}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial(-\theta)}(-\theta) + P \left( \kappa \Delta v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial(-\theta)}(-\theta) + \frac{v}{r^2}(-\theta) \right) \\ &+\kappa(\mathbf{v} \cdot \nabla v) - \frac{u(-\theta)v(-\theta)}{r} \end{aligned} \quad (4.98)$$



Entonces obtenemos que  $F(\kappa\mathbf{x}) = \kappa F(\mathbf{x})$  al hacer lo mismo para las demás componentes.

Hemos probado así que  $F$  es equivariante bajo  $O(2)$ .

La equivarianza de  $F$  implica que si  $H$  es un subgrupo de  $O(2)$  y  $E^H = \{\mathbf{x} = (u, v, w, T, p) | \gamma\mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \gamma \in H\}$  entonces tenemos que:

$$F : E^H \cap [H^2(\Omega)]^4 \times H^1(\Omega) \rightarrow E^H \cap [L^2(\Omega)]^5 \quad (4.99)$$

pues si  $\gamma \in H$  y  $\mathbf{x} \in E^H$  entonces:

$$\gamma F(\mathbf{x}) = F(\gamma\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \quad (4.100)$$

En particular, si  $H \cong \mathbb{Z}_2$  entonces  $E^H$  consta de las funciones con  $(u, w, T, p)$  pares en  $\theta$  y  $v$  impar en  $\theta$ , considerando que la acción en  $E$  está definida por  $\kappa \in O(2)$ . Como se puede comprobar a partir de la definición de la acción, habernos restringido a utilizar expansiones sólo en términos de cosenos para  $w$  y  $T$  de los elementos del núcleo de la linealización tiene como consecuencia que  $KerA \subset E^H$ . En la parte final de la tesis, cuando se estudia la forma de los elementos de  $KerA$ , se da una explicación más detallada.

Por otro lado si  $H \cong \mathbb{Z}_m$  entonces  $E^H$  consta de las funciones expresables como suma de modos que son múltiplos de  $m$ . Otro caso interesante se da cuando  $H \cong SO(2)$ , entonces se necesita que  $\mathbf{x}$  no se vea alterado por rotaciones ni reflexiones. En este caso,  $E^H$  está formado por los elementos que son independientes del ángulo y que tienen  $v = 0$ . De la definición de la acción se ve que el campo no puede depender de  $\theta$ , y además  $v(\theta) = -v(\theta)$  obliga a que  $v = 0$ .

## 4.5. Análisis para $\dim(KerA) = 2$

### 4.5.1. Inexistencia de bifurcación vertical

**Definición.** Decimos que no existe bifurcación vertical si en la ecuación de bifurcación  $G(0, x_1) = 0$  con  $\|x_1\| < \epsilon$  implica que  $x_1 = 0$ .

Probaremos primero que no existe bifurcación vertical para  $R = R_c$ , independientemente de  $\dim KerA(R_c)$ . Como veremos más adelante, esto nos ayudará a

probar que existe la bifurcación para ciertos valores de  $R_c$  con  $\dim \text{Ker} A(R_c) = 2$ . Recordemos que cuando  $\dim \text{Ker} A(R_c) = 2$ ,  $\det \mathcal{B}(\lambda)$  no cambia de signo y por el momento no se puede decir mucho más.

Habíamos visto que podíamos escribir a  $F(R, \mathbf{x})$  como:

$$F(R, \mathbf{x}) = A(R_c)\mathbf{x} - T(R)\mathbf{x} - g(R, \mathbf{x}) \quad (4.101)$$

Comenzaremos por probar que si  $\mathbf{x} \in B$  entonces

$$(g(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0 \quad (4.102)$$

Si  $\mathbf{x} = (u, v, w, T, p) \in B$  tenemos que:

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x}), \mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla v + \frac{v^2}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w \\ PR\mathbf{v} \cdot \nabla T \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \\ p \end{pmatrix} \\ &= \iiint_{\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \nabla u)u + (\mathbf{v} \cdot \nabla v)v + (\mathbf{v} \cdot \nabla w)w + PR(\mathbf{v} \cdot \nabla T)T] dV \end{aligned} \quad (4.103)$$

Veremos que en efecto la integral sobre todo el dominio  $\Omega$  es cero. Bastará con que consideremos lo que ocurre para alguna de las variables  $u, v, w$  ó  $T$ . Veremos qué pasa con  $u$ . Tenemos que:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla u)u = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot (\nabla u^2) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (u^2 \mathbf{v}) - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{v}) u^2 = \frac{1}{2} \nabla \cdot (u^2 \mathbf{v}) \quad (4.104)$$

Entonces se tiene que:

$$\iiint_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u)u dV = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (u^2 \mathbf{v}) dV = \frac{1}{2} \iint_{\partial \Omega} u^2 \mathbf{v} dS \quad (4.105)$$

La integral de superficie es cero pues el fluido no atraviesa la frontera. El mismo cálculo se utiliza para  $v$ ,  $w$  y  $T$  y así se tiene que efectivamente  $(g(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$

De este modo, si tenemos la ecuación

$$A(R_c)\mathbf{x} - T(R)\mathbf{x} - g(R, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.106)$$

y proyectamos sobre  $\mathbf{x}$  se obtiene que:

$$(A(R)\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 = \sum \lambda_i x_i^2 \quad (4.107)$$

donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $A$ .

Recordemos que  $A$  es autoadjunto y por lo tanto tiene todos sus valores propios reales. Además, de la definición de  $T$  se tiene que:

$$A(R_c) - T(R) = A(R) \quad (4.108)$$

Si  $R < \min\{R_c\}$  entonces  $\lambda_i > 0$  implica que  $x_i = 0, \forall i$ . Mientras que si  $R = \min\{R_c\}$  entonces  $\mathbf{x} \in Ker A(R_c)$  implica que  $g(\mathbf{x}) = 0$  si hay bifurcación.

Veremos qué pasa cuando  $dim Ker A(R_c) = 1$ . Podemos en este caso calcular con facilidad la tercera entrada de  $g(R, \mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla w &= n\pi d \cos^2(m\theta) J_m'^2(\lambda dr) \cos(n\pi z) \sin(n\pi z) \\ &\quad + \frac{m^2 n \pi}{\lambda^2 d^2 r^2} \sin^2(m\theta) J_m^2(\lambda dr) \cos(n\pi z) \sin(n\pi z) \\ &\quad + n\pi \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda dr) \sin(n\pi z) \cos(n\pi z) \\ &= \cos(n\pi z) \sin(n\pi z) S(r, \theta) \end{aligned} \quad (4.109)$$

donde  $S(r, \theta) \geq 0$  en  $\Omega$ .

De este modo, la única forma de tener  $g(R, \mathbf{x}) = 0$  es si  $n = 0$  que implica que  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ . Así que no hay bifurcación vertical.

Veremos ahora qué sucede si  $dim Ker A = 2$ . En este caso ya vimos que  $Ker A$  está generado por dos elementos  $\phi_{mln}$  y  $\phi_{\bar{m}\bar{l}\bar{n}}$  con la forma ya descrita. También probamos anteriormente que:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{mln}, T(\phi_{mln}) \rangle &= P(R - R_c) \frac{K_{mln}^2}{(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2} \left( \frac{1}{(\lambda_{ml}d)^2 + (n\pi)^2} + (n\pi)^2 \right) \\ &\quad \left[ \iiint_{\Omega} \cos^2(m\theta) J_m^2(\lambda_{ml}dr) \sin^2(n\pi z) dV \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

Mientras que:

$$\langle \phi_{\tilde{m}\tilde{l}\tilde{n}}, T(\phi_{mln}) \rangle = 0 \quad (4.111)$$

Podemos construir entonces  $\varphi_{mln}$  y  $\varphi_{\tilde{m}\tilde{l}\tilde{n}}$  tales que:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{mln}, T(\varphi_{mln}) \rangle &= P(R - R_c) \\ \langle \varphi_{\tilde{m}\tilde{l}\tilde{n}}, T(\varphi_{mln}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.112)$$

Sea pues  $x_1 \in Ker A$ . Como probamos al principio,  $(g(x_1), x_1) = 0$ , así que la proyección de  $A(R_c)x_1 - T(R)x_1 - g(R, x_1) = 0$  sobre  $x_1$  es:

$$(A(R_c)x_1, x_1) - (T(R)x_1, x_1) = 0 \quad (4.113)$$

Entonces tenemos que:

$$(Tx_1, x_1) = 0 \quad (4.114)$$

Como  $x_1 \in Ker A$  entonces tiene la forma  $x_1 = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ . De este modo tenemos que  $(Tx_1, x_1) = 0$  implica que:

$$\begin{aligned} (T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= \alpha(T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \varphi_1) + \beta(T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \varphi_2) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)P(R - R_c) = 0 \end{aligned} \quad (4.115)$$

Así que tenemos que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  ó  $P(R - R_c) = 0$ . Como veremos ambas opciones implican que  $x_1 \equiv 0$ . Si  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  entonces claramente  $x_1 \equiv 0$ .

Por otro lado, si  $R - R_c = 0$ , entonces se tiene que  $g(x_1) = 0$ . Para la primera componente tenemos que:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u = \frac{v^2}{r} \quad (4.116)$$

Sabemos que:

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = \nabla u \cdot \mathbf{v} + u \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla u \cdot \mathbf{v} \quad (4.117)$$

Así que:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla u dV &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (u\mathbf{v}) dV = \iint_{\partial\Omega} u\mathbf{v} dS = 0 \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{v^2}{r} dV \end{aligned} \quad (4.118)$$

y de aquí se obtiene que  $v \equiv 0$ . De la forma de los elementos del núcleo obtenemos que en este caso también  $x_1 \equiv 0$  y por lo tanto no se tiene bifurcación vertical.

Hemos probado entonces que no se tiene bifurcación vertical ni cuando  $\dim Ker A = 1$  ni cuando  $\dim Ker A = 2$ .

#### 4.5.2. Parte cuadrática de la ecuación de bifurcación

Queremos ver qué pasa con la parte no lineal,  $\langle \phi_i, g(R, \mathbf{x}) \rangle$ , de la ecuación de bifurcación. En particular analizaremos lo que ocurre cuando estudiamos la parte cuadrática de la ecuación de bifurcación.

Teníamos que:

$$g(R, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla v + \frac{v^2}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w \\ PR\mathbf{v} \cdot \nabla T \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

donde

$$\mathbf{x} = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + x_2 \quad (4.120)$$

con  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Ker } A$ .

Utilizaremos la notación:

$$\phi_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ T_i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta \end{pmatrix} \quad (4.121)$$

y

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (4.122)$$

Hemos convenido que  $\mathbf{v} = (u, v, w, T)$ . Comenzaremos con la segunda componente de  $g(R, \mathbf{x})$ . Por un lado

$$\mathbf{v} \cdot \nabla v = (\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \mathbf{V}) \cdot \nabla(\alpha v_1 + \beta v_2 + V) \quad (4.123)$$

Y por otro

$$\frac{uv}{r} = \frac{1}{r}(\alpha u_1 + \beta u_2 + U)(\alpha v_1 + \beta v_2 + V) \quad (4.124)$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla v + \frac{uv}{r} &= \alpha^2(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla v_1) + \alpha\beta(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla v_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla v_1) + \beta^2(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla v_2) \\ &\quad + \mathbf{V} \cdot \nabla v + \alpha\mathbf{v}_1 \cdot \nabla V + \beta\mathbf{v}_2 \cdot \nabla V \\ &\quad + \frac{1}{r}[\alpha^2 u_1 v_1 + \alpha\beta(u_1 v_2 + u_2 v_1) + \beta^2 u_2 v_2] \\ &\quad + \frac{1}{r}[Uv + \alpha u_1 V + \beta u_2 V] \end{aligned} \quad (4.125)$$

Para las demás componentes tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \alpha^2(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla T_1) + \alpha\beta(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla T_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla T_1) + \beta^2(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla T_2) \\ &\quad + \mathbf{V} \cdot \nabla T + \alpha\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \Theta + \beta\mathbf{v}_2 \cdot \nabla \Theta \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} &= \alpha^2(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) + \alpha\beta(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_1) + \beta^2(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_2) \\ &\quad \mathbf{V} \cdot \nabla u + \alpha\mathbf{v}_1 \cdot \nabla U + \beta\mathbf{v}_2 \cdot \nabla U \\ &\quad - \frac{1}{r}[\alpha^2 v_1^2 + 2\alpha\beta(v_1 v_2) + \beta^2 v_2^2] \\ &\quad \frac{1}{r}[Vv + \alpha v_1 V + \beta v_2 V] \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla w &= \alpha^2(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla w_1) + \alpha\beta(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla w_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla w_1) + \beta^2(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla w_2) \\ &\quad \mathbf{V} \cdot \nabla w + \alpha\mathbf{v}_1 \cdot \nabla W + \beta\mathbf{v}_2 \cdot \nabla W \end{aligned} \quad (4.128)$$

Así que la parte no lineal de la ecuación de bifurcación queda:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_i, g(R, \mathbf{x}) \rangle &= \alpha^2 \left[ \iiint_{\Omega} (u_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1 - \frac{1}{r} u_i v_1^2 + v_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla v_1 + \frac{1}{r} v_i u_1 v_1 \right. \\
&\quad \left. w_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla w_1 + PRT_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla T_1) dV \right] \\
&\quad \alpha \beta \left[ \iiint_{\Omega} (u_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_2 + u_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_1 - \frac{2}{r} u_i v_1 v_2 \right. \\
&\quad \left. + v_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla v_2 + v_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla v_1 + \frac{1}{r} v_i u_1 v_2 + \frac{1}{r} v_i u_2 v_1 \right. \\
&\quad \left. + w_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla w_2 + w_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla w_1 + PRT_i \mathbf{v}_1 \cdot \nabla T_2 + PRT_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla T_1) dV \right] \\
&\quad + \beta^2 \left[ \iiint_{\Omega} (u_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_2 - \frac{1}{r} u_i v_2^2 + v_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla v_2 + \frac{1}{r} v_i u_2 v_2 \right. \\
&\quad \left. + w_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla w_2 + PRT_i \mathbf{v}_2 \cdot \nabla T_2) dV \right] \\
&\quad + \iiint_{\Omega} [u_i (\mathbf{V} \cdot \nabla u + \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \nabla U + \beta \mathbf{v}_2 \cdot \nabla U - \frac{1}{r} V v - \frac{1}{r} \alpha v_1 V - \frac{1}{r} \beta v_2 V) \\
&\quad + v_i (\mathbf{V} \cdot \nabla v + \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \nabla V + \beta \mathbf{v}_2 \cdot \nabla V + \frac{1}{r} U v + \frac{1}{r} \alpha u_1 V + \frac{1}{r} \beta u_2 V) \\
&\quad + w_i (\mathbf{V} \cdot \nabla w + \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \nabla W + \beta \mathbf{v}_2 \cdot \nabla W) \\
&\quad + T_i (\mathbf{V} \cdot \nabla T + \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \Theta + \beta \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \Theta)] \tag{4.129}
\end{aligned}$$

Si usamos el resultado de ortogonalidad de la sección anterior y reordenamos tenemos en particular que para la parte cuadrática:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1, g(R, \mathbf{x}) \rangle &= \alpha^2 [0] + \alpha \beta \left[ \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_1 \cdot (u_1 \nabla u_2 + v_1 \nabla v_2) - \frac{1}{r} u_1 v_1 v_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} u_2 v_1^2 + \mathbf{v}_1 \cdot (w_1 \nabla w_2 + PRT_1 \nabla T_2) dV \right] \\
&\quad + \beta^2 \left[ \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_2 \cdot (u_1 \nabla u_2 + v_1 \nabla v_2 + w_1 \nabla w_2 + PRT_1 \nabla T_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} v_2 (v_1 u_2 - u_1 v_2) dV \right] + O_1 \\
&= \alpha \beta a + \beta^2 b + O_1 \tag{4.130}
\end{aligned}$$

donde  $O_1$  son términos de orden superior. Y de manera análoga se tiene:



$$\langle \phi_2, g(R, \mathbf{x}) \rangle = \alpha\beta c + \alpha^2 d + O_2 \quad (4.131)$$

Tenemos pues que:

$$\begin{aligned} b &= \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_2 \cdot (u_1 \nabla u_2 + v_1 \nabla v_2 + w_1 \nabla w_2 + PRT_1 \nabla T_2) \\ &\quad + \frac{1}{r} v_2 (v_1 u_2 - u_1 v_2) \\ c &= \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_2 \cdot (u_2 \nabla u_1 + v_2 \nabla v_1 + w_2 \nabla w_1 + PRT_2 \nabla T_1) \\ &\quad + \frac{1}{r} v_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned} \quad (4.132)$$

Si utilizamos el hecho de que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 \cdot (u_1 \nabla u_2 + v_1 \nabla v_2 + w_1 \nabla w_2) &= \operatorname{div}((u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) \mathbf{v}_2) \\ &\quad - \mathbf{v}_2 \cdot (u_2 \nabla u_1 + v_2 \nabla v_1 + w_2 \nabla w_1) \end{aligned} \quad (4.133)$$

y que:

$$\mathbf{v}_2 \cdot (T_1 \nabla T_2) = \operatorname{div}(T_1 T_2 \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2 \cdot (T_2 \nabla T_1) \quad (4.134)$$

se obtiene que  $c = -b$  y de forma análoga se puede ver que  $d = -a$ . De esta forma tenemos que los coeficientes de los términos cuadráticos son simplemente  $a$  o  $b$ .

Explícitamente tenemos que:

$$\begin{aligned}
a &= \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_1 \cdot (u_1 \nabla u_2 + v_1 \nabla v_2 + w_1 \nabla w_2 + PRT_1 \nabla T_2) \\
&\quad + \frac{v_1}{r} (v_1 u_2 - u_1 v_2) dV \\
b &= \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_2 \cdot (u_1 \nabla u_2 + v_1 \nabla v_2 + w_1 \nabla w_2 + PRT_1 \nabla T_2) \\
&\quad + \frac{v_2}{r} (v_1 u_2 - u_1 v_2) dV
\end{aligned} \tag{4.135}$$

Como se puede ver con facilidad, los factores en función de  $\theta$  en los términos de  $a$  son de la forma:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} \cos(m_1 \theta) \cos(m_1 \theta) \cos(m_2 \theta) dV \\
&\iiint_{\Omega} \sin(m_1 \theta) \cos(m_1 \theta) \sin(m_2 \theta) dV \\
&\iiint_{\Omega} \sin(m_1 \theta) \sin(m_1 \theta) \cos(m_2 \theta) dV
\end{aligned} \tag{4.136}$$

Las otras integrales (con un número impar de senos) integran a cero pues son la integral de una función impar. De hecho ni siquiera aparecen al desarrollar  $a$ . Las integrales se pueden escribir también como:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \left( \frac{1 + \cos(2m_1 \theta)}{2} \right) \cos(m_2 \theta) d\theta &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \cos(2m_1 \theta) \cos(m_2 \theta) d\theta \\
\iiint_{\Omega} \frac{\sin(2m_1 \theta)}{2} \sin(m_2 \theta) d\theta &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sin(2m_1 \theta) \sin(m_2 \theta) d\theta \\
\iiint_{\Omega} \frac{1 - \cos(2m_1 \theta)}{2} \cos(m_2 \theta) d\theta &= - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \cos(2m_1 \theta) \cos(m_2 \theta) d\theta
\end{aligned} \tag{4.137}$$

De aquí vemos que una condición necesaria para que  $a \neq 0$  es que  $m_2 = 2m_1$ . De manera análoga se puede ver que se requiere que  $n_2 = 2n_1$  para que  $a \neq 0$  pues las integrales en términos de  $z$  son del mismo estilo. Podemos ver también que al tomar  $m_2 = 2m_1$  y  $n_2 = 2n_1$ , el coeficiente  $b$  se hace cero.

Si quisiéramos asegurar que  $b \neq 0$  entonces habría que tomar  $m_1 = 2m_2$  y  $n_1 = 2n_2$ , y en ese caso se tendría que  $a = 0$ . Ahora, si  $m_1, m_2$  y  $n_1, n_2$  no satisfacen ninguna de estas relaciones, entonces tanto  $a$  como  $b$  son cero y en ese caso se tiene que recurrir a los términos de orden superior (tercer orden o más alto) para analizar la existencia de la bifurcación.

Es importante decir también que los valores de  $m_1, m_2, n_1$  y  $n_2$  para los que se tiene que  $a$  ó  $b$  es distinto de cero, no corresponden al mínimo valor de  $R_c$  para ningún  $d$ . Por ejemplo, para  $m_2 = 2m_1$  y  $n_2 = 2n_1$  tenemos que  $R_c(m_2, l_2, n_2) > R_c(m_2, l_2, n_1)$  y por lo tanto  $R_c(m_2, l_2, n_2) = R_c(m_1, l_1, n_1)$  no puede ser el mínimo. Entonces para analizar lo que pasa cuando se tiene un  $R_c$  mínimo con  $\dim(KerA(R_c)) = 2$ , siempre es necesario recurrir a términos de orden mayor a 2 en la ecuación de bifurcación.

### 4.5.3. Bifurcación en el caso $m_2 = 2m_1, n_2 = 2n_1$

Analizaremos el caso en que  $m_2 = 2m_1$  y  $n_2 = 2n_1$ .

Tenemos el siguiente resultado de bifurcación cuando no hay bifurcación vertical (como ya vimos que ocurre en nuestro problema), original de [13]:

**Teorema.** *Supóngase que  $\mathcal{B}(\lambda) = \lambda I$  y  $G(\lambda, \mathbf{x}) = N(\mathbf{x}) + R(\lambda, \mathbf{x})$  con  $N(t\mathbf{x}) = t^s N(\mathbf{x})$  para  $t > 0$ ,  $\|R(\lambda, \mathbf{x})\| \leq c|\lambda|\|\mathbf{x}\|^s + o(\|\mathbf{x}\|^s)$ . Entonces se tendrá bifurcación en la dirección del rayo característico  $U_0$  (es decir,  $N(U_0) = \mu U_0$ ) si  $\text{Indice}(-PN(U); U_0) \neq 0$ , donde  $\|U\| = 1$ .*

Si  $U_0$  es un rayo característico entonces la curva  $(t^{s-1}\mu, tU_0)$ ,  $t \geq 0$  es solución de  $\lambda\mathbf{x} - N\mathbf{x} = 0$ . La idea de la prueba del resultado es construir una vecindad alrededor de esta curva que facilite el cálculo del grado de cierta función y que asegure que la bifurcación se da en la dirección esperada.

Podemos construir una vecindad cónica alrededor de la curva del siguiente modo. Se toma una vecindad de  $(\mu, U_0)$  en la esfera  $|\lambda|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 = \mu^2 + 1$ . Se construyen curvas que unan cada punto de esta vecindad con el origen que tienen la forma  $\lambda = t^{s-1}\tilde{\lambda}$ ,  $\mathbf{x} = t\tilde{u}$ , con  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$  en la vecindad de  $(\mu, U_0)$ , y se toma la unión de todas estas curvas como la vecindad cónica que queremos construir.

Podemos reducir esta vecindad a una vecindad cónica de  $U$  de manera que se tenga que:

$$\deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N(\mathbf{x}) - R(\lambda, \mathbf{x})) = \deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N(\mathbf{x})) \quad (4.138)$$

La manera de hacerlo es restringir la vecindad cónica original a los puntos  $(\lambda, \mathbf{x})$  que satisfacen  $|\lambda|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 \leq \rho^2 + R^2$ , con  $\rho, R$  lo suficientemente pequeños.

Para probar entonces que hay bifurcación habrá que ver que:

$$\deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N\mathbf{x}) \neq 0 \quad (4.139)$$

Tenemos que

$$\deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N(\mathbf{x})) = \deg\left(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, P\left(-N\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right)\|\mathbf{x}\|^s \oplus \|\mathbf{x}\|\left(\lambda - N\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\|\mathbf{x}\|^{s-1}\right)\right) \quad (4.140)$$

donde  $P$  es la proyección sobre el plano tangente a  $S^{d-1}$  en  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ .

Como

$$P\left(-N\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right)\|\mathbf{x}\|^s \oplus \|\mathbf{x}\|\left(\lambda - N\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\|\mathbf{x}\|^{s-1}\right) \quad (4.141)$$

se puede deformar a

$$-P(N(v)) \oplus \lambda - \mu\|\mathbf{x}\|^{s-1} \quad (4.142)$$

con  $v \in U$  vecindad de  $U_0$ ,

$$\deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N\mathbf{x}) = \deg(-PN(v), U)\deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda - \mu\|\mathbf{x}\|^{s-1}; \|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 < \rho^2 + R^2) \quad (4.143)$$

Como

$$D(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda - \mu\|\mathbf{x}\|^{s-1}) = \begin{pmatrix} 2\|\mathbf{x}\| & 2\lambda \\ -\mu\|\mathbf{x}\|^{s-2}(s-1) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.144)$$

tenemos que:

$$\det D(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda - \mu\|\mathbf{x}\|^{s-1}) = 2\|\mathbf{x}\| + \mu\lambda\|\mathbf{x}\|^{s-2}(s-1) \quad (4.145)$$

De este modo, sabemos que:

$$\deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda - \mu\|\mathbf{x}\|^{s-1}; \|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 < \rho^2 + R^2) \neq 0 \quad (4.146)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N(\mathbf{x}) - R(\lambda, \mathbf{x})) = \\ \deg(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} - N(\mathbf{x})) \neq 0 \end{aligned} \quad (4.147)$$

solo si  $\text{Indice}(-P(N(v)), U_0) \neq 0$ , con  $v \in S^{d-1}$ .

■

En nuestro caso particular, si bien no tenemos que

$$\mathcal{B}(R)x_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.148)$$

sino que

$$\mathcal{B}(R)x_1 = P \begin{pmatrix} (R - R_c) + K_1(R - R_c)^2 & 0 \\ 0 & (R - R_c) + K_4(R - R_c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.149)$$

dados los órdenes de las perturbaciones  $K_1(R - R_c)^2\alpha, K_2(R - R_c)^2\beta$ , podremos deformar  $(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \mathcal{B}(\lambda)\mathbf{x} - N\mathbf{x} - h(\lambda, \mathbf{x}))$  a  $(\|\mathbf{x}\|^2 + |\lambda|^2 - R^2, \lambda\mathbf{x} -$

$N\mathbf{x} - h(\lambda, \mathbf{x})$ ) en alguna vecindad cónica pequeña de manera que ningún cero se meta en la frontera. De esta forma el resultado anterior sigue siendo aplicable.

Como se calculó, la parte cuadrática de la reducción de Lyapunov-Schmidt tiene la forma:

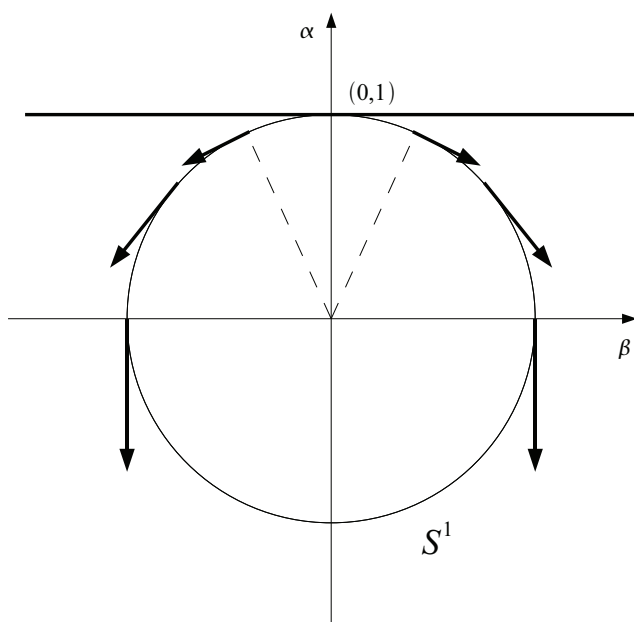
$$N(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta(a\alpha + b\beta) \\ -\alpha(a\alpha + b\beta) \end{pmatrix} \quad (4.150)$$

En particular vimos que una condición necesaria para que  $a \neq 0$  es que  $m_2 = 2m_1$  y que  $n_2 = 2n_1$ . También se vio que en este caso se tiene  $b = 0$ . Si podemos asegurar que  $a \neq 0$  entonces se tiene que:

$$N(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} a\alpha\beta \\ -a\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (4.151)$$

Es fácil ver que  $U_0 = (0, 1)$  es un rayo característico, con  $\mu = 0$ . También se puede ver sin problema que  $\text{Indice}(-P(N(v)), U_0) \neq 0$ . De este modo tenemos una bifurcación en la dirección  $(0, 1)$  para  $\alpha \approx 0$ . Ver la figura 4.4.

Como habíamos visto también, la condición  $m_1 = 2m_2$  y  $n_1 = 2n_2$  es necesaria para que  $b \neq 0$ . Si en este caso se tiene que  $b \neq 0$ , la demostración de que hay una bifurcación en la dirección  $(1, 0)$  es enteramente análoga. Si no se está en ninguno de estos casos, es decir  $a = 0$  y  $b = 0$  entonces es necesario recurrir a los términos de orden más grande para investigar la existencia de la bifurcación.

Figura 4.4: Vecindad cónica para  $a \neq 0, b = 0$





## Capítulo 5

# Elementos del núcleo de la linealización

Haremos en esta sección un estudio de los elementos del núcleo de la linealización del operador. Esto es importante ya que como vimos en el caso en que el núcleo tiene dimensión uno, si existe la bifurcación para algún  $R_c$  entonces la solución al problema se parecerá (en un sentido antes precisado) al elemento generador del núcleo de la linealización para ese  $R_c$ .

Analizaremos cómo se ve el campo:

$$\begin{aligned} u &= K_{mln} \frac{n\pi}{\lambda_{ml}} \cos(m\theta) J'_m(\lambda_{ml} dr) \cos(n\pi z) \\ v &= -K_{mln} \frac{mn\pi}{(\lambda_{ml} d)^2 r} \sin(m\theta) J_m(\lambda_{ml} dr) \cos(n\pi z) \\ w &= K_{mln} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml} dr) \sin(n\pi z) \\ T &= \frac{K_{mln}}{(\lambda_{ml} d)^2 + (n\pi)^2} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml} dr) \sin(n\pi z) \end{aligned} \quad (5.1)$$

para una terna de números  $(m, l, n) \in \mathbb{N}^3$  dada. Haremos que  $K_{mln} = 1$  para simplificar.

Cuando el núcleo del operador lineal es de dimensión uno entonces  $(u, v, w, T)$  genera todo el núcleo. Si el núcleo del operador lineal es de dimensión dos entonces basta con encontrar dos elementos linealmente independientes para poder

expresar todo el núcleo. Se pueden encontrar dos elementos con la forma de arriba con respectivos  $(m, l, n), (m', l', n') \in \mathbb{N}^3$  y en teoría es posible saber cómo se ve el campo para cualquier elemento del núcleo de dimensión dos haciendo combinaciones lineales de los campos correspondientes a los dos elementos linealmente independientes. Aunque el campo está totalmente descrito por estas combinaciones lineales, en general tiene un aspecto bastante complicado que no puede anticiparse. Sin embargo sí puede decirse que está en  $Fix(\{\kappa\})$ . Podemos afirmar esto pues en un principio nos restringimos al conjunto completo  $\{\cos m\theta\}_{m \in \mathbb{N}}$  para encontrar las componentes  $w$  y  $T$  del núcleo de la linealización. Los elementos de  $\{\cos m\theta\}_{m \in \mathbb{N}}$  tienen la propiedad de ser pares de manera que  $w$  y  $T$  también lo son. Además, la componente  $v$  resultó expresable en términos del conjunto completo  $\{\sin m\theta\}_{m \in \mathbb{N}}$  cuyos elementos tienen la propiedad de ser impares. De este modo se tiene que si  $\mathbf{x} \in Ker A$  entonces  $\mathbf{x} \in Fix(\{\kappa\})$ .

Después de la breve discusión anterior basta pues con analizar (5.1) para una  $(m, l, n)$  dada. Es importante recordar que el caso interesante por ahora es el de un núcleo con dimensión uno, pues en este caso la solución al problema lineal nos dice cómo será la solución al problema no lineal.

Comenzaremos con el caso más sencillo en que  $m = 0, n = 1$ .

Se tiene que  $(u, v, w, T)$  tienen la forma:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\pi}{\lambda_l} J'_0(\lambda_l dr) \cos(\pi z) \\ v &= 0 \\ w &= J_0(\lambda_l dr) \sin(\pi z) \\ T &= \frac{1}{(\lambda_l d)^2 + \pi^2} J_0(\lambda_l dr) \sin(\pi z) \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde  $\lambda_l$  es el  $l$ -ésimo cero de  $J'_0$ .

Podemos ver que no existe dependencia respecto a  $\theta$  y que  $v = 0$ , así que sólo analizaremos lo que ocurre en una región del plano  $r$ - $z$  y la forma del campo se obtendrá rotando alrededor del eje  $z$ . Para esa región del espacio tenemos las gráficas que se muestran en la figura 5.1, para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Las gráficas superiores muestran una aproximación a las líneas de flujo, mientras que las inferiores muestran las curvas de nivel para la temperatura. Un color más claro en las curvas de nivel de  $T$  indica un valor más grande de  $T$ .

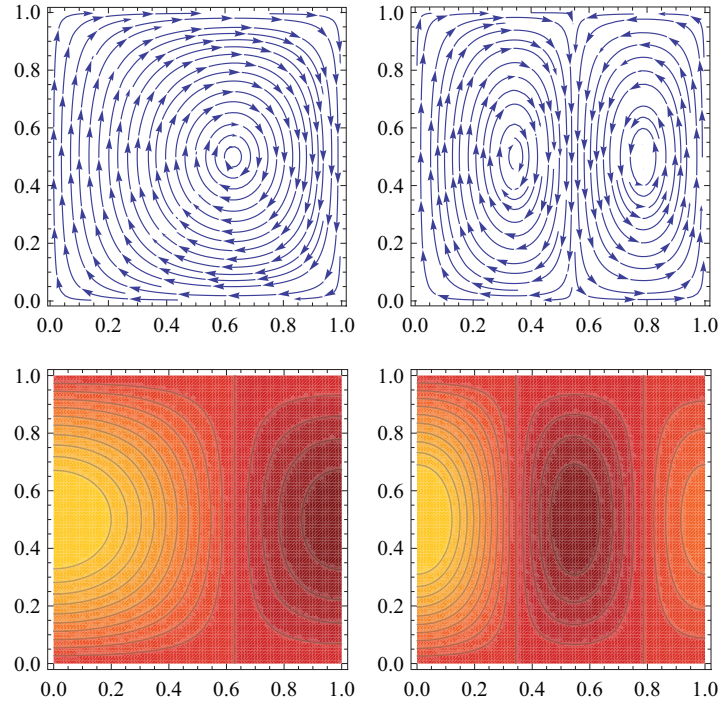


Figura 5.1: campos  $u-w$  para  $(0, 1, 1)$  y  $(0, 2, 1)$ , y respectivas curvas de nivel de  $T$

Vemos que en este caso se tienen rollos concéntricos. El número de rollos que se tienen está determinado por  $\lambda_l$ , en general se tendrán  $l$  rollos. Sabemos que la sucesión de los ceros de la derivada de la función de Bessel tienden a infinito y que tienden a estar uniformemente espaciados a medida que crecen, así que para una  $l$  grande podemos tener una idea bastante buena de cómo será un elemento del núcleo de  $A$ . De hecho lo que se espera tener es algo muy parecido a las fotos experimentales de los rollos en un recipiente cilíndrico del principio de la tesis. Nosotros hemos elegido  $d = 1$  para facilitar los cálculos y  $\lambda_1, \lambda_2$  para una mejor apreciación del campo en las gráficas, pero como vimos en el capítulo anterior, la terna  $(m, l, n) \in \mathbb{N}^3$  que esperamos en el punto de bifurcación depende de  $d$ .

El siguiente caso a analizar será cuando  $m \neq 0$  y  $n = 1$ . En este caso un elemento del núcleo de la linealización tiene la forma:

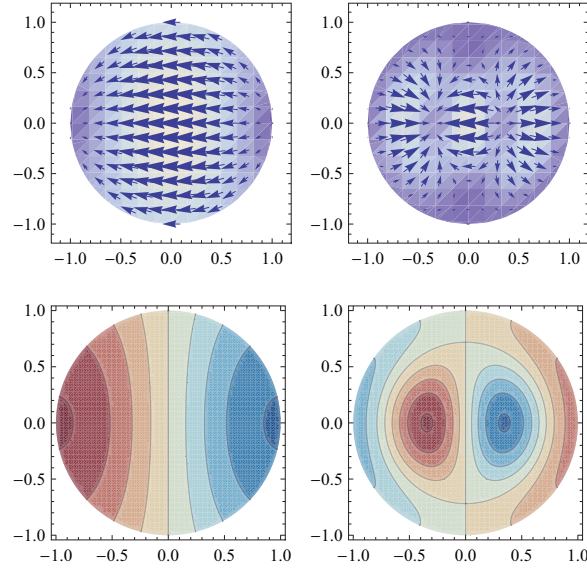


Figura 5.2: campos  $u-v$  para  $(1, 1, 1)$  y  $(1, 2, 1)$ , y respectivas curvas de nivel de  $w$  cuando  $z = 0.75$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\pi}{\lambda_{ml}} \cos(m\theta) J'_m(\lambda_{ml} dr) \cos(\pi z) \\
 v &= -\frac{m\pi}{(\lambda_{ml} d)^2 r} \sin(m\theta) J_m(\lambda_{ml} dr) \cos(\pi z) \\
 w &= \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml} dr) \sin(\pi z) \\
 T &= \frac{1}{(\lambda_{ml} d)^2 + (\pi)^2} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{ml} dr) \sin(\pi z)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Las gráficas del campo de velocidades  $u-v$  y las curvas de nivel para  $w$  para algunos valores de  $z$  se presentan en las figuras 5.2 y 5.3. La coloración que está de fondo en el campo de velocidades depende del tamaño del vector en el punto, las zonas más claras indican donde los vectores son de magnitud más grande. Para las curvas de nivel de  $w$ , el color azul representa valores positivos mientras que el rojo representa valores negativos. Un color más oscuro indica un valor de  $|w|$  más grande.

De las expresiones para  $u$  y  $v$  dadas en (5.3) vemos que basta con ver qué pasa para algún valor de  $z$  donde  $\cos(\pi z)$  sea positivo y para algún valor de  $z$  que haga  $\cos(\pi z)$  negativo para saber completamente cómo es el campo  $u-v$ . Después de

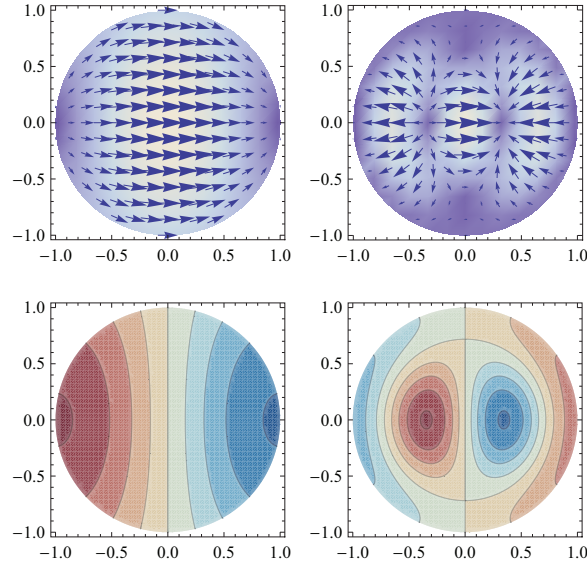


Figura 5.3: campos  $u-v$  para  $(1, 1, 1)$  y  $(1, 2, 1)$ , y respectivas curvas de nivel de  $w$  cuando  $z = 0.25$

todo el único efecto que tiene  $\cos(\pi z)$  es multiplicar por una constante positiva o negativa y el cambio de signo se da una sola vez cuando  $z = 0.5$ . De este modo, si la dependencia de  $w$  de  $z$  es lo suficientemente sencilla (como en efecto veremos que lo es) podemos saber exactamente cómo es el campo de velocidades.

En las gráficas 5.2 y 5.3 podemos ver que el signo de  $w$  no depende de  $z$ . Esto se puede comprobar por supuesto viendo la expresión analítica para  $w$ . De hecho las curvas de nivel para  $w$  son cualitativamente iguales para cualquier valor de  $z$ , excepto para  $z = 0$  o  $z = 1$  donde el fluido no atraviesa la frontera. Se tiene pues que el disco se divide en regiones donde el fluido siempre sube ( $w > 0$ ) o baja ( $w < 0$ ). Con esta información y la forma del campo para  $u-v$  es posible saber perfectamente cómo son las celdas de convección.

De la forma que  $w$  y  $T$  tienen sabemos que cualitativamente las curvas de nivel son las mismas para ambas componentes. La única diferencia es la multiplicación por un factor positivo.

En general, a partir de las curvas de nivel para  $w$ , que son fáciles de construir para cualesquiera  $m, \lambda_{ml}$ , se puede tener la descripción de las celdas de convección. Sólo hay que saber cómo es  $u-v$  para algún  $z > 0.5$  y para algún  $z < 0.5$ . En la figura 5.4 se muestra un ejemplo cuando  $m = 2$ .

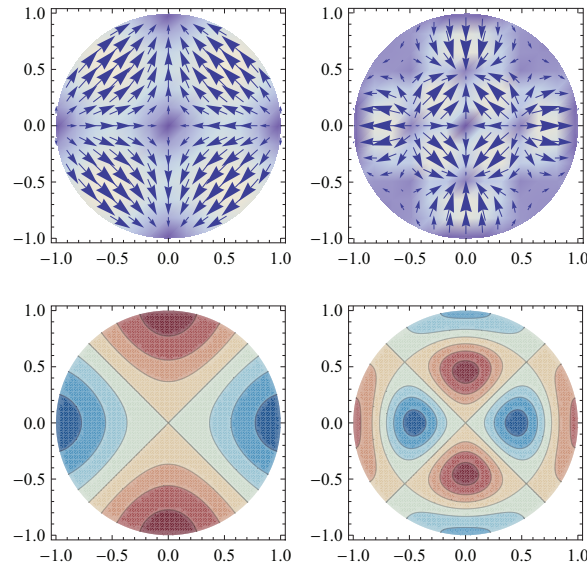


Figura 5.4: campos  $u$ - $v$  para  $(2, 1, 1)$  y  $(2, 2, 1)$ , y respectivas curvas de nivel de  $w$  cuando  $z = 0.75$

El último caso a considerar será cuando  $n \neq 1$ . Este caso se reduce en realidad al caso anterior. Debido a la dependencia de  $z$  del elemento del núcleo tendremos  $n$  copias del flujo para  $n = 1$ , acomodadas a lo largo del eje  $z$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Por la manera en que la variable  $z$  está incluida tenemos que dos de estas copias se juntan como si se reflejaran en un espejo. En concreto tenemos que la división entre dos de estos flujos está en los ceros de  $\sin(n\pi z)$  (donde  $w$  se anula), o sea  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$ . Por un lado tenemos que  $\cos(n\pi(x + \frac{i}{n}))$  es una función par, y por otro que  $\sin(n\pi(x + \frac{i}{n}))$  es impar. De esta forma si  $x = z - \frac{i}{n}$  se tiene que  $\cos(n\pi z) = \cos(n\pi(-z + \frac{2i}{n}))$  y que  $\sin(n\pi z) = -\sin(n\pi(-z + \frac{2i}{n}))$ . Así que  $u(z) = u(-z + \frac{2i}{n})$  y  $v(z) = v(-z + \frac{2i}{n})$ , mientras que  $w(z) = -w(-z + \frac{2i}{n})$  y por lo tanto en cada plano  $z = \frac{i}{n}$  el flujo se refleja.

En la figura 5.5 se muestra las gráficas para los campos de velocidades en la región  $\{(r, \theta, z) \in \Omega \mid \cos \theta \geq 0\}$  cuando  $n = 2, m = 0, 1$  y para los primeros ceros de  $J_0$  y  $J_1$  respectivamente. Se ha tomado solamente la región  $\Omega \cap \{(r, \theta, z) \mid \cos \theta \geq 0\}$  para apreciar las gráficas con más claridad. Como vimos antes,  $(m, l, n) = (0, 1, 1)$  corresponde a un solo rollo. En la primer gráfica podemos ver cómo el flujo es como este rollo desplazado a  $\Omega \cap \{(r, \theta, z) \mid z \geq 0\}$  y su reflexión respecto al plano  $z = 0.5$ . Por otro lado, la segunda gráfica, correspondiente a  $(m, l, n) = (1, 1, 2)$  muestra la misma simetría respecto al plano  $z = 0.5$

y por otro lado muestra gráficamente cómo es el flujo para  $(m, l, n) = (1, 1, 1)$  que ya habíamos descrito en el segundo caso.

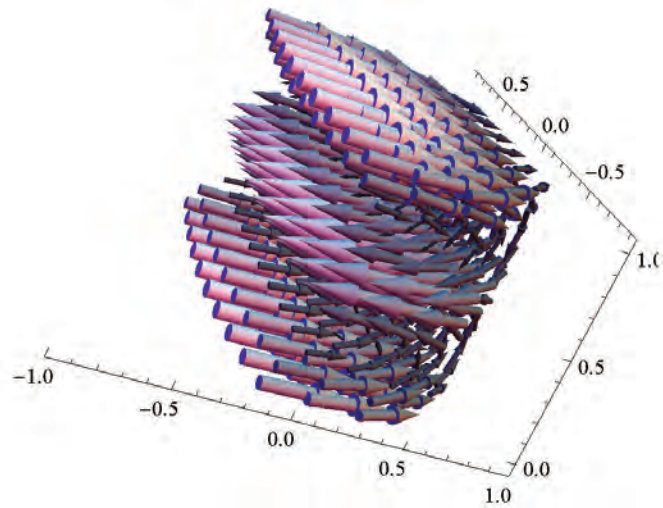
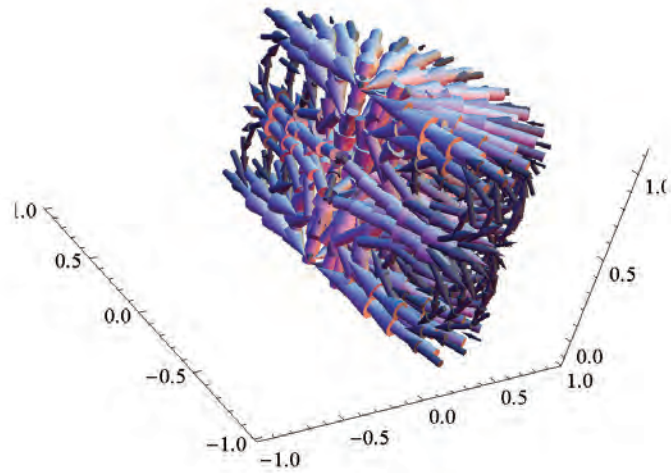


Figura 5.5: campo de velocidades para  $(0, 1, 2)$  y  $(1, 1, 2)$



# Conclusiones

Las aportaciones del trabajo son principalmente las siguientes:

- En el capítulo 1, se ha creado un breve contexto histórico y científico del problema de Bénard. Esta sección es importante pues permite sugerir nuevas direcciones en que este problema se puede abordar de forma matemática.
- En el segundo capítulo se da una deducción completa de las ecuaciones que modelan el problema a partir de los principios básicos de conservación de masa, momento y energía. Este capítulo se ha escrito después de consultar y leer con cierto detalle varios libros de mecánica de fluidos, que van desde libros de ingeniería hasta textos matemáticos. Finalmente se optó por hacer la deducción lo más intuitiva y física posible sin que dejara de ser matemáticamente correcta. También se presenta en este capítulo el cambio de las ecuaciones a coordenadas cilíndricas. La forma en que se hizo funciona igual de bien para cualquier conjunto de coordenadas ortogonales (en particular esféricas), pero se optó por hacer el caso concreto por claridad.
- En el capítulo 3 se hace la linealización de las ecuaciones con detalle. Más adelante, en el siguiente capítulo, se hace la conexión entre esta linealización (en el sentido de los libros de mecánica de fluidos) y la derivada de Fréchet en un punto (una solución del sistema de ecuaciones). También se presenta la demostración de una descomposición para campos con divergencia cero, conocida también como poloidal-toroidal (referida, pero no probada en [6] y [15]).
- En el capítulo 4 se escribe el problema como un operador entre dos espacios de Hilbert, que permite utilizar los resultados de teoría de la bifurcación de [13]. Se encuentra que para los primeros valores del parámetro en que el

operador correspondiente a la linealización deja de ser no invertible sólo se pueden tener núcleos de una o dos dimensiones. En el caso en que el núcleo es de una dimensión se puede asegurar la existencia de la bifurcación, y también cómo son las soluciones del problema no lineal pues de hecho se tienen expresiones explícitas para el núcleo. Además, se define el grupo de simetrías de las ecuaciones y se da la descripción de los elementos invariantes bajo diversos subgrupos. Resulta notable que se haya podido asegurar la existencia de la bifurcación cuando la dimensión del núcleo de la linealización es dos y la parte cuadrática no es cero, utilizando un resultado original de [13]. La existencia de bifurcación cuando el núcleo es de dimensión dos no se menciona en ningún lugar de la bibliografía consultada.

- En el último capítulo se hace la descripción completa de los elementos del núcleo.

A partir de los resultados obtenidos, y con inspiración en la historia experimental resumida en el primer capítulo, se puede pensar en variaciones de este problema. En particular sería interesante estudiar la bifurcación para otro tipo de patrones, como las espirales por ejemplo. Los resultados experimentales parecen sugerir que cambiar las condiciones de frontera para la temperatura modifica radicalmente el tipo de patrones que se obtiene. También por otro lado se sabe que al utilizar condiciones de Neumann en problemas de reacción-difusión se obtienen espirales como soluciones del operador lineal (ver [11]). Se podría ir más allá y utilizar condiciones de frontera para la temperatura que no fueran iguales en cualquier dirección del ángulo  $\theta$  o hacer que el calentamiento en la base inferior no fuera uniforme. Por otro lado, encontrar la teselación de celdas hexagonales que vio Bénard parece algo más complicado. Si bien hemos estado utilizando un modelo que no toma en cuenta los efectos de la tensión superficial y por lo tanto puede cuestionarse la capacidad para llegar a este resultado, parece difícil meter la geometría de los hexágonos en la de nuestro contenedor. Algo que quizá pueda investigarse en esta dirección es porqué en los experimentos los patrones parecen llegar perpendicularmente a la frontera. Finalmente queda el problema de describir matemáticamente de algún modo el comportamiento caótico que se ha observado para fluidos con ciertas propiedades. Como se ve, hay muchas preguntas abiertas que están esperando un tratamiento matemático.

Hay muy pocas referencias matemáticas del problema de Bénard. Una de ellas es el artículo [17]. A pesar de que en la tesis se ha seguido un camino algo distinto, hay algunos comentarios que se pueden hacer respecto a él.

Primero, el resultado de Ma y Wang es el mismo que nosotros obtuvimos, es decir, que cuando el núcleo es de dimensión uno se tiene bifurcación y de hecho se sabe cómo son las soluciones al problema no lineal cerca del punto de bifurcación. Por otro lado, en [17] no se menciona el caso en que el núcleo es de dimensión dos. En [17] se dice que se estudiará el problema en un dominio abierto arbitrario  $\Omega$  y con una serie de condiciones de frontera. Curiosamente, se abandona abruptamente este objetivo para estudiarlo con condiciones de frontera periódicas en una malla de rectángulos con la explicación (jamás probada) de que el tratamiento es válido para todas las demás condiciones de frontera. La existencia de las funciones propias y sus propiedades para el operador también se supone. En nuestro caso, hemos encontrado de manera explícita las funciones pertenecientes al núcleo del operador. Estas funciones ya se habían presentado en [18], pero sin ningún tipo de explicación. Resulta destacable que se pueda hacer el tratamiento del problema en las tres dimensiones, pues en general es bastante difícil saber tanto de un problema tridimensional en mecánica de fluidos. Originalmente se pensó en utilizar la función de corriente y restringirse a las funciones que no dependen del ángulo, para así reducir el problema a dos dimensiones.

Quizá el principal mérito de este trabajo sea el tratamiento de un problema íntegramente y con detalle. No se intentó poner demasiado énfasis en las definiciones y los teoremas, sino que más bien se ha tratado de dar razones para cada uno de los pasos que se han seguido. Se ha tratado pues de decir cómo se hicieron las cosas pero también porqué, sin dejar de cuidar que todo fuera correcto matemáticamente hablando.

Se considera que el objetivo de realizar un trabajo en el que se desarrollara un problema extensivamente con conocimientos matemáticos que se pueden adquirir durante los cursos de licenciatura se ha cumplido. Por otro lado, se ha ilustrado también mediante este problema cómo se pueden utilizar los resultados topológicos de la teoría de la bifurcación en un problema no lineal en particular. A pesar de que el autor está apenas empezando a aprender estas técnicas, es posible apreciar su gran alcance y este trabajo es una confirmación más de su versatilidad para atacar un conjunto increíblemente diverso de problemas no lineales. Es importante decir que los problemas no lineales han sido evitados por cientos de años (y son aún un terrible dolor de cabeza en ingeniería), y que la teoría topológica de la bifurcación permite obtener resultados interesantes y profundos de manera analítica sin usar demasiadas aproximaciones. El lector interesado en estas técnicas deberá sin falta consultar [13], un extensivo

tratado en la materia.

Aunque la aportación de esta tesis pueda ser modesta, el autor está particularmente contento por lo mucho que ha aprendido durante su realización.

## Apéndice A

# Completez de las funciones de Bessel

Hemos visto en la sección 3.2 que es posible encontrar el espectro del operador utilizando series y un requerimiento necesario para este procedimiento es que el conjunto de funciones respecto al cual hagamos la expansión sea completo en el espacio de trabajo.

Como manera de justificar la expansión utilizada en la sección 3.2 probaremos aquí que el conjunto de funciones de Bessel, que denotamos como  $\{J_\nu(\lambda x)\}$ , donde  $J_\nu$  es la función de Bessel de orden  $\nu$  con  $\nu \geq 1$  y  $\lambda$  son los ceros de  $J'(x)$ , es completo en  $L_2([0, 1], x)$ .

**Definición.** Un operador integral de la forma

$$K(f) = \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (\text{A.1})$$

con

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 dx d\xi < \infty \quad (\text{A.2})$$

se conoce como **operador de Hilbert-Schmidt**. Se dice además que  $k(x, \xi)$  es un núcleo de Hilbert-Schmidt.

**Definición.** Un operador integral de la forma

$$S(f) = \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (\text{A.3})$$

donde

$$k(x, \xi) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \bar{q}_i(\xi) \quad (\text{A.4})$$

y

$$\int_a^b |p_i(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_a^b |q_i(x)|^2 dx < \infty \quad (\text{A.5})$$

se conoce como **operador integral separable** y un núcleo  $k(x, \xi)$  de la forma mencionada se denomina **núcleo separable**.

**Definición.** Sea  $K$  un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert  $H$ . Sea  $\{f_n\}$  una sucesión infinita en  $H$  que es uniformemente acotada, es decir, para alguna  $M$  se tiene que  $\|f_n\| \leq M$  para toda  $n$ . Se dice que  $K$  es compacto si de la sucesión  $\{Kf_n\}$  se puede obtener una subsucesión  $\{Kf_{n_k}\}$  de Cauchy. La sucesión  $\{Kf_{n_k}\}$  converge pues  $H$  es un espacio de Hilbert.

**Teorema.** Un operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

**Demostración.** Veremos primero que un operador separable es compacto.

Sea  $S$  un operador integral separable y tomemos  $f \in L_2(a, b)$ .

Tenemos que:

$$S(f) = \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i(x) \bar{q}_i(\xi) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n c_i p_i(x) \quad (\text{A.6})$$

Se observa que el rango de  $S$  es de dimensión finita (está generado por  $p_i(x) \in L_2(a, b)$ ) y además el operador es acotado pues:

$$\begin{aligned}
|S(f)|^2 &= \left| \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i(x) \bar{q}_i(\xi) f(\xi) d\xi \right|^2 \leq \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n p_i(x) \bar{q}_i(\xi) \right|^2 d\xi \int_a^b |f(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi \|f\|^2
\end{aligned} \tag{A.7}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Entonces se tiene que:

$$\|S(f)\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi dx \|f\|^2 \tag{A.8}$$

Por otro lado,

$$|k(x, \xi)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |p_i(x) \bar{q}_i(\xi) p_j(x) \bar{q}_j(\xi)| \tag{A.9}$$

Así que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi dx \leq \int_a^b \int_a^b \sum_{i,j=1}^n |p_i(x) \bar{q}_i(\xi) p_j(x) \bar{q}_j(\xi)| d\xi dx \tag{A.10}$$

Además

$$\int_a^b \int_a^b |p_i(x) \bar{q}_i(\xi) p_j(x) \bar{q}_j(\xi)| d\xi dx < \infty \text{ si } i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{A.11}$$

de manera que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi dx < \infty \tag{A.12}$$

y por lo tanto el operador es acotado.

Ahora, sabemos que cualquier conjunto acotado en un espacio de dimensión finita es relativamente compacto. En particular un subconjunto del rango de  $S$  es relativamente compacto así que el operador es compacto.

Probaremos ahora que un operador de Hilbert-Schmidt es compacto. Sea  $k(x, \xi)$  un núcleo de Hilbert-Schmidt, y  $K$  el correspondiente operador integral. Tomemos una base ortonormal  $\{\phi_i(x)\}$  de  $L_2(a, b)$ .

Entonces podemos escribir a  $k(x, \xi)$  como

$$k(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij} \phi_i(x) \bar{\phi}_j(\xi) \quad (\text{A.13})$$

donde

$$k_{ij} = \int_a^b \int_a^b k(x, \xi) \phi_i(x) \bar{\phi}_j(\xi) d\xi dx \quad (\text{A.14})$$

pues  $\{\phi_i(x) \bar{\phi}_j(\xi)\}$  son una base de  $L_2(D)$  donde  $D$  es el rectángulo  $a \leq x, \xi \leq b$ .

Tenemos por la identidad de Parseval que

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |k_{ij}|^2 = \int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 dx d\xi \quad (\text{A.15})$$

y por lo tanto

$$\sum_{i,j=k+1}^{\infty} |k_{ij}|^2 = \int_a^b \int_a^b \left| k(x, \xi) - \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \phi_i(x) \bar{\phi}_j(\xi) \right|^2 dx d\xi \quad (\text{A.16})$$

Como sabemos que

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |k_{ij}|^2 < \infty \quad (\text{A.17})$$

entonces para  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{i,j=N+1}^{\infty} |k_{ij}|^2 < \epsilon \quad (\text{A.18})$$



Sea  $s_\epsilon(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^N k_{ij} \phi_i(x) \bar{\phi}_j(\xi)$ .

$s_\epsilon(x, \xi)$  es un núcleo separable y por lo tanto  $k(x, \xi) - s_\epsilon(x, \xi)$  es de Hilbert-Schmidt (cualquier núcleo separable es de Hilbert-Schmidt).

Si  $K$  y  $S_\epsilon$  son los operadores integrales correspondientes a  $k(x, \xi)$  y  $s_\epsilon(x, \xi)$  respectivamente entonces

$$\|K - S_\epsilon\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |k(x, \xi) - s_\epsilon(x, \xi)|^2 dx d\xi < \epsilon \quad (\text{A.19})$$

pues tenemos que si

$$K(f) = \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) dx d\xi \quad (\text{A.20})$$

es de Hilbert-Schmidt entonces

$$\|K\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 dx d\xi \quad (\text{A.21})$$

Podemos ver que este hecho es cierto pues si  $f \in L_2(a, b)$  entonces

$$\begin{aligned} |K(f)|^2 &= \left| \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi \right|^2 \leq \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi \int_a^b |f(x)|^2 dx \\ &= \|f\|^2 \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

de manera que:

$$\|K(f)\|^2 \leq \|f\|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x, \xi)|^2 d\xi dx \quad (\text{A.23})$$

Sabiendo esto podemos formar una sucesión de operadores compactos  $\{S_{\epsilon_n}\}$  tal que  $\|K - S_{\epsilon_n}\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por ejemplo, podemos definir a  $S_{\epsilon_n}$  como

$$\sum_{i,j=1}^N k_{ij} \phi_i(x) \bar{\phi}_j(\xi) \quad (\text{A.24})$$

donde  $N$  es tal que

$$\sum_{i,j=N+1}^{\infty} |k_{ij}|^2 < \frac{1}{n} \quad (\text{A.25})$$

Como  $S_\epsilon$  converge en norma a  $K$  entonces tenemos que  $K$  es compacto.

**Definición.** Sea  $K$  un operador lineal y acotado en  $H$ . El operador adjunto de  $K$ , denotado como  $K^*$ , está definido mediante la siguiente relación:

$$(Kx, y) = (x, K^*y) \quad (\text{A.26})$$

para todas  $x, y \in H$ .

**Definición.** Se dice que un operador es autoadjunto si  $K = K^*$ .

Probaremos ahora que

**Lema.** Un operador de Hilbert-Schmidt es autoadjunto si y sólo si  $k(x, \xi) = \overline{k(\xi, x)}$ .

Como  $K$  es acotado basta probar que es simétrico, es decir  $(Kf, g) = (f, Kg)$  para todas  $f, g \in L_2(a, b)$ . Sean  $f, g \in L_2(a, b)$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned} (K(f), g) - (K(g), f) &= \int_a^b \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi \overline{g(x)} dx - \int_a^b f(x) \int_a^b \overline{k(x, \xi) g(\xi)} d\xi dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [k(x, \xi) f(\xi) \overline{g(x)} - f(x) \overline{k(x, \xi) g(\xi)}] d\xi dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [k(x, \xi) f(\xi) \overline{g(x)} - f(\xi) \overline{k(\xi, x) g(x)}] d\xi dx \\ &= \int_a^b \int_a^b f(\xi) \overline{g(x)} [k(x, \xi) - \overline{k(\xi, x)}] d\xi dx \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Si  $K$  es simétrico entonces

$$\int_a^b \int_a^b f(\xi) g(x) [k(x, \xi) - \overline{k(\xi, x)}] d\xi dx \quad (\text{A.28})$$

para cualesquiera  $f, g \in L_2(a, b)$ , así que  $k(x, \xi) - \overline{k(\xi, x)} = 0$ .

Por otro lado, si  $k(x, \xi) = \overline{k(\xi, x)}$  entonces

$$\int_a^b \int_a^b f(\xi)g(x)[k(x, \xi) - \overline{k(\xi, x)}]d\xi dx = 0 \quad (\text{A.29})$$

y por lo tanto  $K$  es simétrico. De este modo hemos probado que un operador integral  $K$  de Hilbert-Schmidt es autoadjunto si y sólo si  $k(x, \xi) = \overline{k(\xi, x)}$

Una vez teniendo este resultado podemos probar el siguiente

**Teorema.** El conjunto  $\{J_\nu(\lambda x)\}$ , donde  $J_\nu$  es la función de Bessel de orden  $\nu$  ( $\nu \geq 1$ ) y  $\lambda$  son los ceros de  $\{J'(x)\}$ , es completo en el espacio  $L_2([0, 1], x)$ .

Definiremos el espacio de trabajo  $L_2([0, 1], x)$  como el conjunto de funciones de  $L_2[0, 1]$  tales que

$$\int_0^1 x|f|^2 dx < \infty \quad (\text{A.30})$$

El producto interno que definiremos en el espacio será el siguiente, si  $f, g \in L_2([0, 1], x)$  entonces:

$$(f, g)_x = \int_0^1 x f(x) \overline{g(x)} dx \quad (\text{A.31})$$

Notemos que  $L_2[0, 1] \subset L_2([0, 1], x)$  propiamente pues por ejemplo la función  $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$  está en  $L_2([0, 1], x)$  pero no está en  $L_2[0, 1]$ .

Tenemos que la solución general de la ecuación

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0 \quad (\text{A.32})$$

donde  $x \in (0, 1)$ , está dada por  $u = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 Y_\nu(\lambda x)$ .

Si insistimos en que  $u \in L_2[0, 1]$  entonces tenemos que  $u = c_1 J_\nu(\lambda x)$ . Nosotros estaremos interesados en las soluciones del problema definido por la ecuación (A.32) y la condición de frontera  $u'(1) = 0$ .

Podemos escribir la ecuación (A.32) con la condición de frontera como el siguiente problema de valores propios:

$$Lu = \lambda^2 u \quad (\text{A.33})$$

donde el operador  $L$  está definido como

$$Lu = -u'' - \frac{1}{x}u' + \frac{\nu^2}{x^2}u \quad (\text{A.34})$$

y donde  $\lambda$  debe satisfacer que  $J'_\nu(\lambda) = 0$ . Es decir, los valores propios son los ceros de la función  $J'_\nu(x)$ .

La estrategia será construir un operador tal que

$$LKf = f \quad (\text{A.35})$$

para  $f \in L_2([0, 1], x)$ .

Si logramos esto, entonces tendremos que las funciones propias de  $K$  son soluciones del problema de valores propios (A.33). Dicho de otro modo, las funciones propias de  $K$  son de la forma  $J_\nu(\lambda x)$ , donde  $\lambda$  son los ceros de  $J'_\nu(x)$ . Se probará después que  $K$  es un operador compacto y autoadjunto en  $L_2([0, 1], x)$  y se utilizará el siguiente teorema:

**Teorema.** Sean  $K$  un operador compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$  y  $\{\phi_i\}_i$  el conjunto de las funciones propias ortogonales que corresponden a los valores propios diferentes de cero. Sea  $f \in H$ , entonces  $f$  puede escribirse como

$$f = \sum_i (f, \phi_i) \phi_i + f_0 \quad (\text{A.36})$$

con  $f_0 \in \text{Ker}K$ .

La prueba de este teorema puede encontrarse en [12].

El operador  $K$  tendrá la siguiente forma:

$$Kf = \int_0^1 yk(x, y)f(y)dy \quad (\text{A.37})$$

Buscaremos  $k(x, y)$  que tenga las propiedades:

1.  $k_x(y_+, x) - k_x(y_-, x) = -\frac{1}{y}$
2.  $-(xk_x(x, y))_x + \frac{\nu^2}{x}k(x, y) = 0$  en  $0 < x < y$  y  $y < x < 1$
3.  $k(x, y)$  es continua en  $x = y$
4. se cumple la condición de frontera  $k_x(1, y) = 0$

y veremos que efectivamente  $K$  es el operador buscado. Aquí  $k_x(y_+, x)$  y  $k_x(y_-, x)$  denotan a las derivadas respecto a  $x$  por la derecha y por la izquierda respectivamente.

La solución general de la segunda ecuación es:

$$k(x, y) = \begin{cases} c_1x^\nu + c_2x^{-\nu} & 0 < x < y \\ c_3x^\nu + c_4x^{-\nu} & y < x < 1 \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

pues la ecuación es de Euler.

Como  $x^{-\nu} \notin L_2([0, 1], x)$  entonces  $c_2 = 0$ .

Por otro lado la condición de frontera implica que  $c_3\nu - c_4\nu = 0$  así que  $c_3 = c_4$ .

La primera condición implica que

$$c_3(\nu y^{\nu-1} - \nu y^{-\nu-1}) - c_1\nu y^{\nu-1} = -\frac{1}{y} \quad (\text{A.39})$$

y la tercera que

$$c_1y^\nu = c_3(y^\nu + y^{-\nu}) \quad (\text{A.40})$$

de donde se tiene que

$$c_1 = \frac{1}{2\nu}(y^\nu + y^{-\nu}) \quad (\text{A.41})$$

y

$$c_3 = \frac{1}{2\nu}y^\nu \quad (\text{A.42})$$

de manera que

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu} x^\nu (y^\nu + y^{-\nu}) & 0 < x < y \\ \frac{1}{2\nu} y^\nu (x^\nu + x^{-\nu}) & y < x < 1 \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

Si  $f \in C^0[0, 1]$  entonces

$$\begin{aligned} (Kf)' &= \int_0^1 y k_x(x, y) f(y) dy + x_+ k(x, x_+) f(x_+) - x_- k(x, x_-) f(x_-) \\ &= \int_0^1 y K_x(x, y) f(y) dy \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

por la continuidad de  $x$  y  $f$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} (Kf)'' &= \int_0^1 y K_{xx}(x, y) f(y) dy + x_+ k_+(x, x_-) f(x_+) - x_- k_x(x, x_+) f(x_-) \\ &= \int_0^1 y k_{xx}(x, y) f(y) dy - f(x) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

De manera que

$$\begin{aligned} LKf &= \frac{1}{x} \left[ - \int_0^1 y k_x(x, y) f(y) dy - \int_0^1 x y k_{xx}(x, y) f(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu^2}{x} \int_0^1 y k(x, y) f(y) dy + x f(x) \right] = f(x) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Si  $f \notin C^0[0, 1]$  entonces las relaciones se cumplen sólo casi en todos los puntos.

Veremos que el operador  $K$  es autoadjunto pues

$$\begin{aligned}
(Kf, g)_x &= \int_0^1 xg(x) \int_0^1 yk(x, y)f(y)dydx \\
&= \int_0^1 yf(y) \int_0^1 xk(x, y)g(x)dx dy = (f, Kg)_x \quad (\text{A.47})
\end{aligned}$$

pues  $k(x, y) = k(y, x)$ . Y también veremos que  $K$  es compacto.

Definamos el operador  $\tilde{K}g$  como

$$\tilde{K}g = \int_0^1 \sqrt{xy}K(x, y)g(y)dy \quad (\text{A.48})$$

en  $L_2[0, 1]$ .

Tenemos que  $\int_0^1 \int_0^1 xy|k(x, y)|^2 dx dy < \infty$  según la función que construimos antes.

De hecho únicamente hay que tener cuidado con lo que ocurre cerca del cero.

Sólo por claridad veamos qué pasa con  $\int_0^1 xy|k(x, y)|^2 dx$ :

$$\begin{aligned}
4\nu^2 \int_0^1 xy|k(x, y)|^2 dx &= y \left[ \int_0^y x^{2\nu+1}(y^\nu + y^{-\nu})^2 + \int_y^1 xy^{2\nu}(x^\nu + x^{-\nu})^2 dx \right] \\
&= y \left[ (y^\nu + y^{-\nu})^2 \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \Big|_0^y + y^{2\nu} \int_y^1 (x^{2\nu+1} + 2x + x^{-2\nu+1}) dx \right] \\
&= y \left[ (y^\nu + y^{-\nu})^2 \frac{y^{2\nu+2}}{2\nu+2} + y^{2\nu} \left( \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} + x^2 + \frac{x^{-2\nu+2}}{-2\nu+2} \right) \Big|_y^1 \right] \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

y de aquí vemos que todas las potencias de  $y$  son positivas así que:

$$\int_0^1 \int_0^1 xy|k(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (\text{A.50})$$

De esta forma  $\tilde{K}$  es un operador integral de Hilbert-Schmidt. Ya habíamos probado que un operador de Hilbert-Schmidt es compacto si

$$\int_0^1 \int_0^1 |G(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (\text{A.51})$$

donde  $G(x, y)$  es el núcleo del operador integral. En el caso de  $\tilde{K}$ ,  $G = \sqrt{xy}k(x, y)$ .

Probemos finalmente que  $K$  es compacto. Tomemos una sucesión  $\{f_n\} \subset L_2([0, 1], x)$  acotada. Tenemos inmediatamente que  $\sqrt{y}f_n(y)$  es acotada en  $L_2[0, 1]$  por la definición del producto interno en  $L_2([0, 1], x)$ .

Como  $\tilde{K}$  es compacto, podemos encontrar una subsucesión de  $\{\tilde{K}\sqrt{x}f_m(x)\}$  tal que:

$$\|\tilde{K}\sqrt{x}f_n(x) - \tilde{K}\sqrt{x}f_m(x)\| < \epsilon \quad (\text{A.52})$$

si  $n, m > N(\epsilon)$  para algún  $N$  que depende de  $\epsilon$ .

Por otro lado tenemos que

$$\|Kf\|_x = \|\tilde{K}\sqrt{x}f(x)\| \quad (\text{A.53})$$

pues

$$\begin{aligned} \|Kf\|_x &= \left[ \int_0^1 x \left| \int_0^1 yk(x, y)f(y)dy \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \int_0^1 \left| \int_0^1 \sqrt{xy}k(x, y)\sqrt{y}f(y)dy \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Así pues

$$\|Kf_n - Kf_m\|_x = \|\tilde{K}\sqrt{x}f_n(x) - \tilde{K}\sqrt{x}f_m(x)\| < \epsilon \quad (\text{A.55})$$

y entonces  $\{Kf_n\}$  es una subsucesión de Cauchy de la sucesión de imágenes de  $\{f_n\}$ .  $\{Kf_n\}$  es de Cauchy en  $L_2(0, 1)$  y por lo tanto es convergente. Entonces  $K$  es compacto en  $L_2([0, 1], x)$  y sus vectores propios son un sistema completo en  $\text{Rango}K$ .



Probaremos ahora que los valores propios de  $K$  son positivos.

Supongamos que  $\mu$  es un valor propio de  $K$ , entonces tenemos que:

$$\mu Lu = u \quad (\text{A.56})$$

por la definición de  $K$ .

Tenemos pues que  $\mu$  es valor propio de  $K$  si y sólo si  $\frac{1}{\mu}$  es un valor propio de  $L$ . Entonces probar que los valores propios de  $K$  son positivos es equivalente a probar que los de  $L$  son positivos.

Tomemos  $u$  en el dominio de  $L$ .

Tenemos que

$$(Lu, u)_x = \int_0^1 \left[ -(xu')' + \frac{\nu^2}{x} u \right] u dx \quad (\text{A.57})$$

Si integramos por partes el primer término obtenemos:

$$(Lu, u)_x = -xu'u|_0^1 + \int_0^1 x|u'|^2 + \frac{\nu^2}{x} u^2 dx \quad (\text{A.58})$$

Como  $u'(1) = 0$  entonces tenemos que:

$$(Lu, u)_x = \int_0^1 x|u'|^2 + \frac{\nu^2}{x} u^2 dx \geq 0 \quad (\text{A.59})$$

Si suponemos que  $\lambda$  es un valor propio de  $L$ , con una función propia  $u$  entonces:

$$0 \leq (Lu, u)_x = (\lambda u, u)_x = \lambda(u, u)_x \quad (\text{A.60})$$

Obtenemos así que  $\lambda$  es positivo pues la opción de que  $\lambda$  sea cero está descartada.

$\lambda$  no puede ser cero porque en ese caso se tendría que:

$$-(xu')' + \frac{\nu^2}{x} u = 0 \quad \text{con} \quad u'(1) = 0 \quad (\text{A.61})$$

tiene una solución diferente a la trivial.

Como habíamos visto, la solución general de

$$-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = 0 \quad (\text{A.62})$$

es

$$u = c_1x^\nu + c_2x^{-\nu} \quad (\text{A.63})$$

Por un lado,  $u$  debe estar en  $L^2([0, 1], x)$  así que  $c_2$  debe ser cero. Por otro,  $u'(1) = 0$  así que  $c_2$  también debe ser cero. Entonces forzosamente  $u = 0$ .

Probaremos ahora también que el operador  $K$  también es inverso de  $L$  por la izquierda, es decir  $KLu = u$ . Tomaremos para ello una función  $u$  que sea  $C^2$ .

Tenemos de las definiciones de  $K$  y  $L$  que:

$$\begin{aligned} KLu &= \int_0^1 yk(x, y)\frac{1}{y} \left[ -(yu')' + \frac{\nu^2}{y}u \right] dy \\ &= \int_0^x k(y, x) \left[ -(yu')' + \frac{\nu^2}{y}u \right] dy + \int_x^1 k(x, y) \left[ -(yu')' + \frac{\nu^2}{y}u \right] dy \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Dado que  $k$  es simétrica (i.e.  $k(x, y) = k(y, x)$ ) tenemos que:

$$KLu = \int_0^x k(y, x) \left[ -(yu')' + \frac{\nu^2}{y}u \right] dy + \int_x^1 k(y, x) \left[ -(yu')' + \frac{\nu^2}{y}u \right] dy \quad (\text{A.65})$$

Si integramos por partes se tiene que:

$$\begin{aligned} KLu &= -k(y, x)yu'|_0^x + \int_0^x k_y(y, x)(yu') + k(y, x)\frac{\nu^2}{y}udy \\ &\quad -k(y, x)yu'|_x^1 + \int_x^1 k_y(y, x)(yu') + k(y, x)\frac{\nu^2}{y}udy \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

tenemos que

$$-k(y, x)yu'|_0^x - k(y, x)yu'|_x^1 = 0 \quad (\text{A.67})$$

pues tanto  $k$  como  $u'$  son continuas y  $u'(1) = 0$ .

Al integrar por partes nuevamente se tiene que:

$$\begin{aligned} KLu &= k_y(y, x)yu|_0^x + \int_0^x -(k_y(y, x)y)'u + k(y, x)\frac{\nu^2}{y}udy \\ &\quad + k_y(y, x)yu|_x^1 + \int_x^1 -(k_y(y, x)y)'u + k(y, x)\frac{\nu^2}{y}udy \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Hemos agrupado del siguiente modo:

$$\int_a^b k_y(y, x)(yu')dy = \int_a^b (k_y(y, x)y)u'dy = k_y(y, x)yu|_a^b - \int_a^b (k_y(y, x)y)'udy \quad (\text{A.69})$$

Por la segunda propiedad de  $k(y, x)$  se tiene que:

$$KLu = k_y(y, x)yu|_0^x + k_y(y, x)yu|_x^1 \quad (\text{A.70})$$

Si usamos que  $k_y(1, x) = 0$  se tiene que:

$$KLu = xu(x)[k_y(x_-, x) - k_y(x_+, x)] = u(x) \quad (\text{A.71})$$

por la primera propiedad. También hemos usado que  $u$  es continua.

Así pues se tiene que  $KLu = u$  como queríamos ver.



# Bibliografía

- [1] David J. Acheson *Elementary Fluid Dynamics* Oxford University Press, 1990.
- [2] Rutherford Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, New York, 1989.
- [3] Michael Artin, *Algebra*. Prentice Hall, New Jersey 1991.
- [4] G.K. Batchelor, *Introduction to fluid dynamics* Cambridge University Press, New York 2002.
- [5] E. Bodenschatz, W. Pesch, G. Ahlers. 2000. *Recent developments in Rayleigh-Bénard convection* Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 32, pp. 709-778.
- [6] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* Oxford at Clarendon Press, 1961.
- [7] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik I* Springer-Verlag, 1967.
- [8] Richard Courant, Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis Vol.II* Springer-Verlag, New York 1989.
- [9] P.G. Drazin, W.H. Reid, *Hydrodynamic Stability* Cambridge University Press, Cambridge 2004.
- [10] Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications* Wadsworth & Brooks, 1992.
- [11] Martin Golubitsky, Ian Stewart, *The Symmetry Perspective* Birkhäuser Verlag, 2002.
- [12] Harry Hochstadt, *Integral Equations* A Wiley-Interscience publication. 1973.

- [13] Jorge Ize, Topological Bifurcation, en *Topological Nonlinear Analysis* (M. Matzeu y A. Vignoli, Ed.). Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 15 Birkhäuser, Boston, E.U.A. 1994.
- [14] Fritz John, *Partial Differential Equations* Springer-Verlag, New York 1982.
- [15] D.D. Joseph, *Stability of Fluid Motions* Springer-Verlag, 1976.
- [16] Mauricio Labadie Martínez. 2004. *Formación de patrones y bifurcación en fluidos. El problema de Couette-Taylor* Tesis de licenciatura, Matemático. Facultad de ciencias. UNAM.
- [17] T. Ma, S. Wang Structure of bifurcated solutions of 2D Rayleigh-Benard conduction, en *Bifurcation Theory and Applications* (Tian Ma y Shouhong Wang). World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. Vol. 53. World Scientific Publishing, 2005.
- [18] S. Rosenblat. 1982. *Thermal convection in a vertical circular cylinder* J. Fluid Mech, vol. 122, pp. 395-410.
- [19] L.A. Segel, C. C. Lin, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences* SIAM, 1988.
- [20] S.L. Sobolev *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* Dover Publications, 1989.
- [21] Roger Temam *Navier-Stokes equations* AMS Chelsea Publishing, 1984.