



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la probabilidad de alcanzar una barrera superior en un modelo de riesgo con montos y tiempos interarribo Erlang

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
CARLOS GEOVANNI REYES RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:
LUIS ANTONIO RINCÓN SOLIS



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Reyes
Ramirez
Carlos Geovanni
55191036
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
301778864

2. Datos del tutor

Dr.
Luis Antonio
Rincón
Solis

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Ana
Meda
Guardiola

4. Datos del sinodal 2

Dra.
María Cristina
Gutiérrez
Delgado

5. Datos del sinodal 3

Dra.
María Asunción
Begoña
Fernández Fernández

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Ruth Selene
Fuentes
García

7. Datos del trabajo escrito

Sobre la probabilidad de alcanzar una barrera superior en un modelo de riesgo con montos y tiempos interarribo Erlang.
66p
2010

Sobre la probabilidad de alcanzar una barrera superior en un modelo de riesgo con montos y tiempos interarribo Erlang

Carlos Geovanni Reyes Ramírez

Facultad de Ciencias, UNAM

2 de junio de 2010

*A mis padres,
Pablo, Blanca y Maria.
A mis hermanas,
Cecilia y Magaly.
A la mujer que se ha vuelto mi vida,
Daniela.
A mi familia y amigos.*

Agradecimientos

A mi padres.

Pablo, que sin más me entregaste tu cariño, tiempo y experiencias, fuiste todo lo que podía pedir.

María, llenaste de amor y cuidados mis días, me enseñaste a trabajar y a sonreír con el ejemplo, me enseñaste a vivir dignamente.

Blanca, mi más grande ejemplo de vida, que has puesto cada fuerza que tenías en darnos lo mejor, que has sido el apoyo más fuerte e incondicional en mi vida, mi heroína, te amo madre.

A mis hermanas, que me han dado lecciones importantes de vida aún sin darse cuenta, me han amado y llenado de felicidad.

A Daniela, de quien podría intentar describir todo lo que ha sido para mí aunque seguramente no estaría siquiera cerca, gracias amor.

A mi tío Jesús, que ha sido una referencia para pensar diferente y me ha llenado de buenos deseos.

A mi familia en general.

A mis amigos, en especial a Alejandro, Hugo, Sergio, Martha y Uriel por brindarme su amistad y compartir momentos importantes de mi vida.

Al Dr. Luis Antonio Rincón Solís por la dedicación, paciencia, enseñanza y compromiso que me brindó a lo largo de la realización de este trabajo.

A mis sinodales, Dra. María Cristina Gutierrez Delgado, Dra. Ana Meda Guardiola, Dra. Maria Asunción Begoña Fernández Fernández y a la Dra. Ruth Fuentes García por su tiempo y comentarios para mejorar este trabajo.

A la UNAM.

Gracias.

Índice general

Prólogo	III
1. Teoría clásica del riesgo	1
1.1. Introducción	1
1.2. El proceso de riesgo	2
1.3. Probabilidad de ruina	5
1.3.1. Definiciones	5
1.3.2. Coeficiente de ajuste	9
1.3.3. Desigualdad de Lundberg	12
1.3.4. Una posible solución	14
2. La probabilidad de alcanzar una barrera superior	17
2.1. Descripción del modelo	17
2.2. La probabilidad $\chi(u, b)$ con tiempos de interarribo $\exp(\lambda)$	19
2.3. La probabilidad $\chi(u, b)$ con tiempos de interarribo Erlang($2, \beta$)	21
2.4. Montos individuales Erlang(n, γ)	25
2.4.1. Para montos individuales Erlang($2, 2$)	32
2.4.2. Para montos individuales $\exp(1)$	35
2.5. Análisis de sensibilidad	36
Conclusiones	43
A. Algunos conceptos utilizados	47
A.1. Distribución de probabilidad Erlang	47
A.2. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes	49

A.3. Un teorema de diferenciabilidad	51
A.4. Fórmula de Leibniz	52
B. Códigos de programas	53
B.1. Códigos en R	53
B.2. Códigos en Scilab	58
Bibliografía	64

Prólogo

En el mundo actual, una de las principales preocupaciones de los individuos y naciones es la economía. Cada vez es más necesario contar con estrategias y métodos para el eficiente manejo de nuestros recursos. En este sentido se han desarrollado herramientas para ayudar a reducir pérdidas económicas que puedan dañar sustancialmente la economía de los individuos, empresas o países. La teoría de riesgo se ha enfocado particularmente a la economía de un sector empresarial dado que, se preocupa por atender la vital actividad del manejo de reservas de una compañía aseguradora. La importancia del manejo de dichas reservas es proporcional al potencial de crecimiento de dicho sector, ya que es un mercado en constante y sostenido crecimiento; de la misma manera crece la importancia de desarrollar métodos para la correcta administración de los crecientes recursos. Mucho camino queda por recorrer en esta tarea, cada nuevo riesgo representa muy probablemente el desarrollo de una nueva forma de administrarlo y de un nuevo método para eficientar el manejo de los recursos. Por otro lado, las economías evolucionan y las necesidades con ellas, por ende nuevos modelos seguirán surgiendo. Claramente queda mucho por realizar, estamos contribuyendo a dicha tarea con este trabajo en el que tratamos de presentar de manera más clara lo realizado por M.M. Claramunt, M. Mármol y R. Lacayo en su artículo “*On the probability of reaching a barrier in an Erlang(2) risk process*”, en el que presentan una variante de modelo de riesgo; un modelo con barrera superior. Trataremos de desarrollar más clara y detalladamente los conceptos e ideas abordados en este artículo. El principal eje de estudio de este trabajo está dado por la probabilidad de que un proceso de riesgo alcance un cierto nivel, dado por nosotros, antes de que el momento de ruina llegue, lo cual denotaremos por $\chi(u, b)$.

En el primer capítulo de esta tesis abordaremos a manera de introducción los

principales conceptos de la teoría de riesgo clásica, trataremos de presentar una visión muy particular, intentando dejar muy clara cada idea presentada.

Comenzaremos el segundo capítulo hablando en general sobre modelos con barrera superior, trataremos de explicar cómo surgió la idea de este tipo de modelos y en qué sentido son útiles, para después hablar en particular de un modelo en el que la distribución del número de siniestros está dada por un proceso de renovación cuyos tiempos interarribo resultantes tienen distribución Erlang($2, \beta$) y cuyos montos de reclamación individuales se distribuyen Erlang(n, γ), el cual es el caso más general abordado en este trabajo. En la última parte del segundo capítulo, realizaremos un análisis de sensibilidad de la probabilidad $\chi(u, b)$ variando los parámetros de la distribución de los montos individuales de reclamación, obteniendo valores específicos de probabilidades $\chi(u, b)$, lo cual puede ser de interés práctico.

Finalmente, anexamos apéndices con los conceptos externos utilizados, los programas de cómputo desarrollados y sus respectivos comentarios, necesarios para realizar los procedimientos y obtener los resultados numéricos presentados en las diferentes secciones de este trabajo.

Capítulo 1

Teoría clásica del riesgo

1.1. Introducción

Las necesidades actuales de las empresas y en general de las personas en cuanto a reducción de pérdidas económicas, mejor administración de sus recursos, mejor distribución de sus riesgos, etcétera, nos llevan a la necesidad de saber el mayor número de pasos o movimientos que da nuestro capital creciendo y decreciendo a través del tiempo con el fin de saber si podemos solventar nuestros gastos. Es decir, no “arruinarnos”, entendiendo esto por ahora con el significado coloquial que conocemos, y en qué momento seremos incapaces de hacerlo. Así, se vuelve interesante para cualquier compañía desarrollar maneras para representar el flujo de sus recursos principalmente hacia el futuro, en nuestro caso hablaremos en particular de las compañías aseguradoras.

La teoría clásica del riesgo tiene sus orígenes en el año de 1903 cuando el actuario sueco Ernest Filip Oskar Lundberg a través de su tesis doctoral titulada “*Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks*”, presenta el proceso Poisson compuesto además de la teoría del reaseguro de riesgos colectivos contribuyendo así con las bases para el desarrollo de lo que hoy conocemos formalmente como teoría de riesgo.

1.2. El proceso de riesgo

Modelaremos el flujo de efectivo tomando en cuenta tres aspectos fundamentalmente: el capital con que contamos en el tiempo cero, el ingreso de la compañía correspondiente a las primas que pagan sus asegurados y el monto total de los siniestros o reclamaciones a los que la compañía deba hacer frente. De los puntos anteriores cabe mencionar que el único de carácter aleatorio es el pago que debe realizar la compañía por concepto de siniestros ya que no podemos conocer ni el número ni el monto de los mismos.

Comenzaremos a definir de mejor manera dichos conceptos:

- El capital de la compañía al momento cero, *capital inicial*.
- La proporción de dinero que entra por unidad de tiempo, al periodo t será ct , donde c se conoce como la tasa de ingreso ó el *ingreso vía prima*.
- El monto total de las reclamaciones ocurridas al tiempo t , denominado el *proceso del agregado de siniestros*.

Una observación importante es que al decir *capital inicial* de la compañía no debemos entenderlo literalmente, es decir, debemos verlo como una observación del proceso de riesgo al momento cero, algo como el superávit actual en el momento cero.

Como dijimos, el *proceso del agregado de siniestros* tiene un carácter aleatorio, así que lo analizaremos con mayor detenimiento. Tomemos en cuenta lo siguiente.

- Una variable aleatoria N que nos ayude a contar los siniestros ocurridos al tiempo t , $N = \{N(t) : t > 0\}$ con $N(0) = 0$.
 - Una sucesión de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas X_1, X_2, X_3, \dots con distribución F , media y varianza conocidas μ y σ^2 , respectivamente, que nos ayudarán a modelar los montos de siniestros ocurridos.
-

Utilizando lo anterior podemos introducir la notación para el *proceso de siniestros* o *proceso del agregado de siniestros* como:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Observemos que $S(t) = 0$ si y sólo si $N(t) = 0$, ya que las variables $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ son positivas. Un proceso así construido es lo que se conoce como *proceso compuesto*, ya que la suma de variables aleatorias X_i tiene un número $N(t)$ desconocido de sumandos, que es otra variable aleatoria. Tal construcción da origen a la idea de modelar el tiempo que transcurre entre una reclamación y otra, así, la variable aleatoria T_i denotará los tiempos de interarribo de reclamaciones sucesivas, lo que resulta en una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Nótese que el tamaño de las reclamaciones y el número de ellas son variables aleatorias independientes, esto es intuitivamente claro ya que el costo de un siniestro no tiene qué ver con que sea el primero, segundo, tercero o trigésimo siniestro. Nótese también, al pedir que las variables X_i que modelan el monto de siniestros sean idénticamente distribuidas estamos suponiendo que la cartera de riesgos es homogénea, es decir, los riesgos son muy parecidos en frecuencia y severidad por lo tanto se pueden modelar con la misma función de distribución.

Definición 1 *El proceso de riesgo o proceso de superávit de una compañía aseguradora se define como:*

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

donde u es el capital inicial de la compañía aseguradora al inicio del periodo y c es la tasa de ingreso vía prima.

Supondremos que el ingreso por concepto de primas es de forma constante. Algunas de las suposiciones más importantes que estamos haciendo son: que los siniestros son pagados completamente en el momento en que suceden, no existen incrementos de capital por concepto de inversiones del mismo y no existen disminuciones al capital por concepto de gastos en los que la compañía aseguradora pueda incurrir.

En el caso particular en el que se supone que el número de siniestros se distribuye Poisson con parámetro λ llamaremos al proceso de riesgo *modelo de riesgo clásico de Cramér-Lundberg*, cuyos tiempos interarribo tienen distribución exponencial y esperanza finita, $E[T_i] = 1/\lambda$.

Definición 2 *El proceso de riesgo $U(t)$ con N una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ , es llamado Modelo de Riesgo Clásico de Cramér-Lundberg o Modelo Poisson Compuesto.*

Algunas propiedades son:

1. La esperanza está dada por

$$E[U(t)] = u + ct - \lambda\mu t.$$

2. La varianza está dada por

$$Var[U(t)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2).$$

3. La función generadora está dada por

$$M_{U(t)}(z) = e^{z(u+ct)} M_{S(t)}(-z).$$

Lo anterior es fácilmente demostrable si suponemos que $N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con media y varianza λt , así, el proceso de siniestros $S(t)$ tiene como media $\mu\lambda t$, varianza $\lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$ y función generadora dada por $M_{S(t)}(z) = e^{\lambda t(M_{X_i}(z)-1)}$, para más detalles ver Dickson [4] y Kaas [7].

Con base en la esperanza del proceso de riesgo se define la *condición de ganancia neta o recargo de seguridad* del modelo clásico como:

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0.$$

Esta condición es necesaria para asegurar la solvencia de la compañía ya que si no se cumpliera, es decir, si $\rho < 0$ significa que $c < \lambda\mu$, entonces se demuestra usando la ley de los grandes números que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = c - \lambda\mu < 0,$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) - ct}{t} = \lambda\mu - c > 0,$$

casi seguramente, por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) - ct = \infty$, es decir, la diferencia entre los pagos por siniestros y el ingreso vía prima no puede ser cubierta, lo que significa que la ruina no se puede contrarrestar, entendida de manera coloquial, y habría insolvencia por parte de la compañía aseguradora. Ahora bien, si $\rho > 0$ entonces $\rho t > 0$, es decir, $ct > \lambda\mu t$, como vimos antes $E[S(t)] = \lambda\mu t$ por lo que concluimos que la prima recibida debe ser mayor que el monto esperado de los siniestros para asegurar la solvencia de la compañía y por lo tanto el pago de dichos siniestros.

1.3. Probabilidad de ruina

Diremos que una compañía aseguradora está en ruina o que el estado de ruina ha llegado cuando el nivel del proceso de riesgo $U(t)$ se encuentre por debajo de cero. Así, la ruina es un estado al que toda compañía aseguradora puede acceder. Cabe mencionar que aunque el hecho de que el estado de ruina haya llegado no significa que la compañía vaya a quebrar. Es importante entender que este estado se utiliza para fijar un límite inferior en los fondos de la compañía que en un momento dado nos ayudará a tomar medidas contra pérdidas excesivas de recursos. Claramente resulta de interés saber en qué momento sucederá dicho estado, si siempre es igualmente posible acceder a él o cuándo es más probable.

1.3.1. Definiciones

Definición 3 *El tiempo en que una compañía aseguradora llega al estado de ruina se define como*

$$\tau = \inf\{s \geq 0 : U(s) < 0\},$$

donde $\inf \emptyset = \infty$ por convención.

En la Figura 1.1 se observa una trayectoria del proceso del agregado de siniestros a tiempo discreto con periodos de observación de tamaño h .

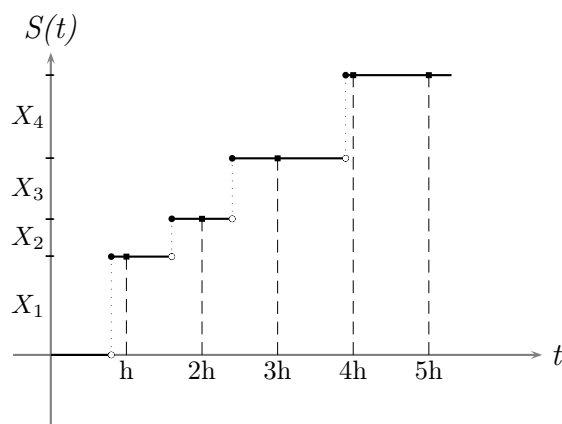


Figura 1.1 : Una trayectoria del proceso del agregado de siniestros a tiempo discreto

Comenzando en cero, el proceso se mantiene constante hasta el momento del primer siniestro y da un salto del tamaño de la primera reclamación, nuevamente se mantiene constante hasta que el segundo siniestro ocurre y da un salto del tamaño de la segunda reclamación, por lo tanto los intervalos en que la función es constante son del tamaño de los tiempos de interarribo mientras que los saltos son del tamaño de las reclamaciones. Podemos suponer que los periodos en que se maneja la compañía son mensuales, bimestrales, etcétera, lo importante aquí es ver que puede pasar mucho tiempo desde que sucede el siniestro hasta el momento en que se registra, lo cual no es bueno para la compañía o al menos no es lo ideal ya que de alguna manera se acumulan las obligaciones y esto puede ocasionar la incapacidad de la compañía para hacerles frente al no tener planeación para dichas responsabilidades. Aunque no es posible tener un monitoreo estrictamente continuo del proceso de riesgo debe quedarnos claro que mientras más pequeño sea el periodo de observación mejor estará preparada una compañía para planear y enfrentar sus obligaciones.

La probabilidad de ruina en horizonte infinito a tiempo discreto también conocida como probabilidad de ruina eventual a tiempo discreto se define como sigue:

Definición 4 Sea $h > 0$, la probabilidad de ruina en horizonte infinito a tiempo discreto o probabilidad de ruina eventual a tiempo discreto está dada por

$$\psi_h(u) = P(U(s) \leq 0, \text{ para alguna } s = h, 2h, 3h, \dots),$$

con u el capital inicial de la compañía aseguradora.

Definiendo así la probabilidad de ruina, tal estado solo puede llegar en uno de los tiempos $s = h, 2h, 3h, \dots$, esto implica que si la ruina llega bajo esta definición lo hará también bajo la definición a tiempo continuo que daremos más adelante.

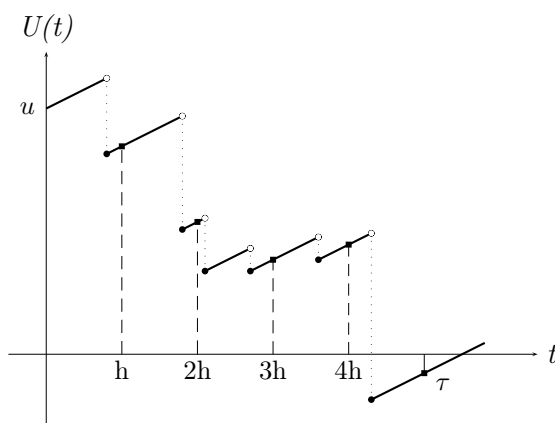


Figura 1.2 : Una trayectoria del proceso de riesgo a tiempo discreto

Definición 5 La probabilidad de ruina en horizonte infinito a tiempo continuo o probabilidad de ruina eventual a tiempo continuo se define como

$$\psi(u) = P(U(t) < 0, \text{ para algún } t > 0),$$

con u el capital inicial de la compañía aseguradora.

Como dijimos antes, el hecho de que la ruina ocurra bajo la definición de probabilidad de ruina a tiempo discreto implica que ocurrirá también bajo la definición a tiempo continuo, no así el recíproco. Una forma de ver esto claramente es que el espacio temporal bajo la definición de probabilidad de ruina a tiempo discreto está contenido en el espacio temporal bajo la definición de

probabilidad de ruina a tiempo continuo, así, si la ruina sucede en algún tiempo discreto este será también un tiempo continuo mientras que al revés no sucede, en otras palabras la probabilidad de ruina en tiempo discreto siempre es menor o igual a la probabilidad de ruina en tiempo continuo, $\psi_d(u) < \psi(u)$.

No siempre están disponibles soluciones explícitas para la probabilidad de ruina, esta depende del proceso de riesgo, específicamente de las distribuciones escogidas para modelar los montos de las reclamaciones y el número de siniestros.

Podemos definir también probabilidades de ruina con horizonte finito de la siguiente forma.

Definición 6 *La probabilidad de ruina en horizonte finito a tiempo discreto está dada por*

$$\psi(u, t) = P(U(s) < 0, \quad \text{para alguna } s, \quad s = r, 2r, 3r, \dots, t),$$

donde t es un entero múltiplo de r y u el capital inicial de la compañía aseguradora.

De la misma manera definimos la probabilidad de ruina en horizonte finito a tiempo continuo.

Definición 7 *La probabilidad de ruina en horizonte finito a tiempo continuo está dada por*

$$\psi(u, t) = P(U(s) < 0, \quad \text{para alguna } s, \quad 0 < s \leq t)$$

con u el capital inicial de la compañía aseguradora.

Nótese que al reducir el tamaño de h en alguna de las definiciones de probabilidad de ruina a tiempo discreto aproximamos a la correspondiente probabilidad de ruina en tiempo continuo.

1.3.2. Coeficiente de ajuste

Supongamos ahora que la condición de ganancia neta vista en la sección anterior se cumple, es decir, $c > \lambda\mu$, lo cual indica que la prima recibida es mayor que el monto esperado de los siniestros asegurando así la solvencia de la compañía como ya se vio anteriormente. Introduciremos ahora algunos conceptos acerca de las distribuciones de cola ligera, necesarios para definir el coeficiente de ajuste.

Definición 8 Si X es una variable aleatoria no negativa con distribución de probabilidad F y $F^*(x) = 1 - F(x)$, entonces F^* es llamada la cola de la distribución F .

Definición 9 Se dice que F está acotada exponencialmente, si existen $a, b > 0$ tales que $F^*(x) \leq ae^{-bx}$, para todo $x \geq 0$. Cuando esto ocurre se dice que F es de cola ligera.

En la literatura actuarial existen diferentes definiciones equivalentes para el coeficiente de ajuste, una de ellas es:

Definición 10 Suponga que la función generadora de momentos de la variable aleatoria $Z_k = X_k - cY_k$ existe en alguna vecindad del origen. Si existe R tal que es la única raíz positiva de la ecuación

$$M_Z(R) = M_{Z_k}(R) = E[e^{R(X_k - cY_k)}] = 1 \quad (1.1)$$

entonces esta es llamada coeficiente de ajuste o coeficiente de Crámer-Lundberg.

El coeficiente de ajuste R , da una medida del riesgo que posee un portafolio como el de las compañías de seguros. Aunque dicho coeficiente no siempre existe, sabemos que este hecho depende directamente de la distribución usada para modelar el tamaño de las reclamaciones, así, para asegurar la existencia de este coeficiente, la distribución de los montos de reclamación deberá ser de cola ligera, tal como la distribución exponencial, gama, Weibull, etcétera. Para más detalles acerca de las distribuciones de cola ligera véase Mikosch [8].

Ahora, obtenemos $M_Z(s)$

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= E[e^{sZ_k}] \\ &= E[e^{sX_k}]E[e^{-csY_k}] \\ &= M_{X_k}(s)M_{Y_k}(-cs) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + cs}\right)M_X(s), \end{aligned} \quad (1.2)$$

la ultima igualdad se da por que las variables aleatorias Y_k son i.i.d. con distribución exponencial. Por otro lado sabemos que $M_Z(s) = 1$ solo para $s = 0$ y para $s = R$, por tanto

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + cR}\right) M_X(R) = 1$$

y el coeficiente de ajuste queda

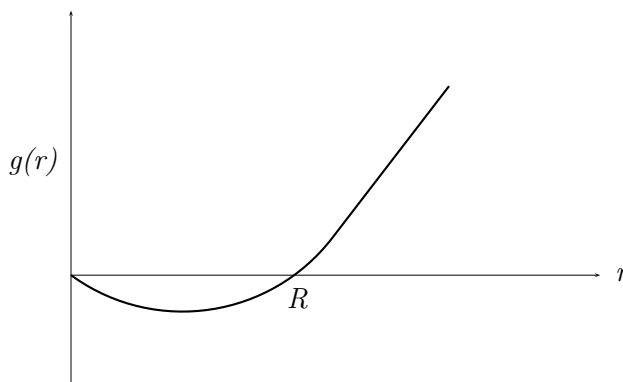
$$\lambda + cR = \lambda M_X(R), \quad (1.3)$$

escribiendo $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ vemos que R es independiente del parámetro Poisson, ya que $R = M_X(R)/(\lambda + cR)$ que no depende de λ .

Podemos reescribir la ecuación definida en (1.3) como función de r , a saber,

$$g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$$

y probar ahora que existe solo una raíz positiva para la ecuación que define al coeficiente de ajuste, para esto mostraremos que tiene la siguiente forma.



La gráfica anterior nos da una idea de como se ve la función g basados en lo siguiente:

1. La función g evaluada en 0 es cero, $g(0) = 0$.
2. La derivada de la función g es λ veces la derivada de la función generadora de los montos individuales menos la tasa de ingreso vía prima,

$$\frac{d}{dr}g(r) = \lambda \frac{d}{dr}M_X(r) - c,$$

asi que

$$\left. \frac{d}{dr} g(r) \right|_{r=0} = \lambda\mu - c,$$

lo cual nos dice que g es decreciente en cero ya que supusimos que $c > \lambda\mu$.

3. La segunda derivada de g es λ veces la segunda derivada de la función generadora

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{rx} f(x) dx,$$

asi que g tiene solo un punto de inflexión, entonces la función alcanza su mínimo en ese punto.

4. Por último, suponiendo que existe $\gamma, 0 < \gamma < \infty$ tal que $M_X(r)$ es finita para todo $r < \gamma$ y

$$\lim_{r \rightarrow \gamma^-} M_X(r) = \infty,$$

tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \gamma^-} g(r) = \infty.$$

En resumen, la función decrece después de cero hasta su único punto de inflexión, por tanto, existe una única raíz positiva R tal que $g(R) = 0$.

1.3.3. Desigualdad de Lundberg

La desigualdad de Lundberg para el modelo de riesgo clásico está dada por

$$\psi(u) \leq e^{-Ru},$$

donde R es el coeficiente de ajuste definido en la sección anterior.

Demostración: Vamos a probar el resultado anterior por inducción, definiendo una función alternativa para la probabilidad de ruina que dependerá de n . Sea $\psi_n(u)$ la probabilidad de ruina antes o en el momento en que suceda la n -ésima reclamación. Basta entonces probar que

$$\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ ya que

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$$

Entonces, suponemos que existe un n para el cual se cumple que $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ con $n \geq 1$. El siguiente paso es probarlo para el $n+1$, utilizando el análisis de primer paso suponemos que la primera reclamación ocurre al tiempo $t > 0$ y que el monto causado por dicha reclamación es x . Dicho lo anterior podemos entonces afirmar que:

- Si el estado de ruina ocurre en el momento t , entonces el monto habrá sido $x > u + ct$, con t el momento de la primera reclamación.
- Si el estado de ruina llega después de la primera reclamación entonces $x \leq u + ct$ y la ruina deberá llegar en los n momentos posteriores a partir del nuevo nivel de reserva $u + ct - x$.

Recordemos que en el modelo clásico los tiempos de interarribo se distribuyen exponencial con parámetro λ . Ahora, para encontrar la probabilidad de ruina es claro que debemos encontrar dos integrales de los casos descritos anteriormente, es decir, para montos en $(0, u + ct)$ y montos en $(u + ct, \infty)$, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) = & \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\ & + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) \psi_n(u + ct - x) dx dt \end{aligned}$$

Podemos ver que la primera integral representa el caso en que la ruina sucede en el momento de la primera reclamación dado que el monto de la reclamación es mayor que el capital inicial más el ingreso vía prima hasta el momento de la reclamación lo que significa que la ruina ocurre. La segunda integral representa la probabilidad de que la ruina no suceda en la primera reclamación pero que suceda en las siguientes n reclamaciones, ya que en el integrando se encuentra la densidad de los montos de reclamación y nuevamente la probabilidad de ruina, ahora, antes o en el momento de la n -ésima reclamación, por lo que al menos en la primera reclamación no puede haber ruina, cada vez partiendo de un nuevo capital dado por $u + ct - x$.

Aplicando nuestra hipótesis de inducción tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) \leq & \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\ & + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt. \end{aligned}$$

Nótese que $\exp[-R(u + ct - x)] \geq 1$ para $x \geq u + ct$, por lo tanto

$$\int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \leq \int_{u+ct}^\infty f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt,$$

usando lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) & \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\ & = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty f(x) e^{Rx} dx dt \\ & = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda M_X(R) e^{-(\lambda+cR)t} dt. \end{aligned}$$

De (1.3) tenemos que $\lambda + cR = \lambda M_X(R)$, por lo que

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}.$$

Por último, debemos mostrarlo para $n = 1$. Análogamente tenemos

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\ &= e^{-Ru}\end{aligned}$$

■

1.3.4. Una posible solución

Hemos tocado ya los temas principales de la teoría clásica del riesgo, para finalizar con este primer capítulo encontraremos una expresión para la probabilidad de ruina, la cual, en el caso en el que los tiempos de interarribo son exponenciales, tiene solución.

Proposición 1 *Sea $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ la función de probabilidad de sobrevivencia. Entonces se tiene que*

$$\begin{aligned}a) \quad \delta'(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y) dF(y) \right]. \\ b) \quad \psi(0) &= \frac{\lambda u}{c}. \\ c) \quad \psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_u^\infty (1 - F(y)) dy + \int_0^u \psi(u-y)(1 - F(y)) dy \right].\end{aligned}$$

en donde F es la distribución del monto de siniestros.

Demostración: Sea el evento A de que no haya ruina en $[0, \infty)$ partiendo de un capital inicial u , Y_1 el tamaño de la primera reclamación y T_1 el tiempo

que tarda en ocurrir dicha reclamación, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 \delta(u) &= P(A) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(A | T_1 = t, Y_1 = y) f_{T_1}(t) f_{Y_1}(y) dy dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} P(A | T_1 = t, Y_1 = y) f_{T_1}(t) f_{Y_1}(y) dy dt \\
 &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P(A | T_1 = t, Y_1 = y) f_{Y_1}(y) dy dt \\
 &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \delta(u + ct - y) f_{Y_1}(y) dy dt.
 \end{aligned}$$

Sea $s(t) = u + ct$. Entonces, haciendo el cambio $dF(y) = f_{Y_1}(y) dy$, tenemos

$$\delta(s - ct) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda(s-u)/c} \int_0^s \delta(s - y) dF(y) ds. \quad (1.4)$$

Derivando esto según la sección A.3 del Apéndice A y reescribiendo en términos de u obtenemos a).

Integrando (1.4) entre 0 y u se obtiene

$$\begin{aligned}
 \delta(u) - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u \delta(x) dx - \int_0^u \int_0^x \delta(x - y) dF(y) dx \right] \\
 &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u \delta(x) dx - \int_0^u \int_y^u \delta(x - y) dx dF(y) \right] \\
 &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u \delta(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-y} \delta(x) dx dF(y) \right] \\
 &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u \delta(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-x} \delta(x - y) dF(y) dx \right] \quad (1.5) \\
 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(x) (1 - F(u - x)) dx \\
 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u - x) (1 - F(x)) dx \\
 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \delta(u - x) (1 - F(x)) 1_{[0, u]}(x) dx.
 \end{aligned}$$

Ahora calculamos el límite cuando u tiende a infinito,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) - \delta(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \delta(u - x) (1 - F(x)) 1_{[0, u]}(x) dx.$$

Por un lado tenemos que $\delta(u)$ tiende a uno mientras que por el otro estamos integrando una función monótona creciente en u cuyo límite es la función $(1 - F(x))$. Entonces por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$\begin{aligned} 1 - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u - x)(1 - F(x))1_{[0,u]}(x)dx. \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \frac{\lambda u}{c}. \end{aligned}$$

De donde

$$\psi(0) = \frac{\lambda u}{c}. \quad (1.6)$$

Finalmente de (1.5) y (1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[\mu - \int_0^u (1 - \psi(u - x))(1 - F(x))dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_u^\infty (1 - F(x))dx + \int_0^u \psi(u - x)(1 - F(x))dx \right]. \end{aligned}$$

■

La última expresión corresponde a una ecuación recursiva para encontrar la probabilidad de ruina, la cual como ya se mencionó, cuando las reclamaciones tienen distribución exponencial, tiene solución. Así se obtiene una posible solución para la probabilidad de ruina en el caso exponencial.

Capítulo 2

La probabilidad de alcanzar una barrera superior

Ahora presentaremos una variante del modelo clásico del riesgo, un modelo con una barrera superior. Trataremos con una probabilidad que resulta de interés, la probabilidad de alcanzar una barrera superior antes de la ruina partiendo de un cierto capital inicial, $\chi(u, b)$, a la cual daremos algunas soluciones particulares. Conocer esta probabilidad por sí mismo es útil, ya que podemos plantear diferentes barreras que nos servirían para diferentes propósitos, el más común, una barrera que podemos llamar de *dividendos*, que sirva para que al llegar a dicha barrera se repartan dividendos a los accionistas de la empresa o una que podemos llamar de *crecimiento mínimo*, la cual podemos usar para establecer un margen mínimo de crecimiento del capital de la compañía, asegurando este nivel con al menos un 98 % de seguridad por ejemplo, podemos asegurar que la empresa siga funcionando por sí misma sin necesidad de inyecciones de capital, además de que podemos relacionarla con la probabilidad de ruina. Estos cálculos están basados principalmente en el artículo de Claramunt, Mármol y Lacayo [1].

2.1. Descripción del modelo

El problema de un modelo con barrera superior surgió inicialmente como un modelo de “barreras superiores” representadas por una función del tiempo, $b(t)$, es decir, el modelo cambiaba el nivel de su barrera a través del tiempo ajustándose a nuevas necesidades que se pudieran presentar. En el año de

1970, Buhlmann modifica este modelo con la introducción de una barrera superior constante, es decir, $b(t) = b$ para toda t con $0 < u \leq b$ el cual es nuestro tema de estudio. En este proceso, una vez alcanzada la barrera, los ingresos por primas se reparten en forma de dividendos durante el periodo en que sucede la siguiente reclamación. Ahora, si pensamos en el ingreso vía prima de la compañía como una función del tiempo, podemos definir una función de reparto de dividendos de la siguiente manera

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(t) < b, \\ c & \text{si } R(t) = b, \end{cases}$$

y acumulando sobre el periodo en que sucede la siguiente reclamación tenemos

$$AD(t) = \int_0^t D(s)ds,$$

en nuestro caso, dado que el ingreso vía prima es constante tenemos

$$AD(t) = ct.$$

Lo anterior modifica nuestro modelo de la siguiente manera

$$R(t) = u + ct - S(t) - AD(t).$$

Buhlmann plantea el cálculo de la esperanza del valor presente de los dividendos repartidos hasta el momento de ruina τ , es decir, el valor actual de lo que en promedio recibirá un inversionista como dividendos antes de la ruina del portafolio, tal esperanza se define como sigue.

Definición 11 *La esperanza del valor presente de los dividendos generados al momento de ruina está dada por*

$$W(u, b) = E \left[\int_0^\tau D(s)e^{-\delta s} ds \right],$$

donde u es el capital inicial del proceso de riesgo, b es una barrera superior constante y δ es la tasa de inversión de los dividendos.

Como sabemos, es útil para accionistas e inversionistas conocer las variables de las que depende su negocio y en qué medida influyen en él, así, realizando

un análisis de $W(u, b)$ es posible calcular el valor que maximiza dicha esperanza y mediante análisis de sensibilidad proponer combinaciones de las variables de control que conduzcan a resultados económicamente óptimos, incluso se pueden definir nuevas medidas relacionadas que nos ayuden a tomar decisiones más acertadas.

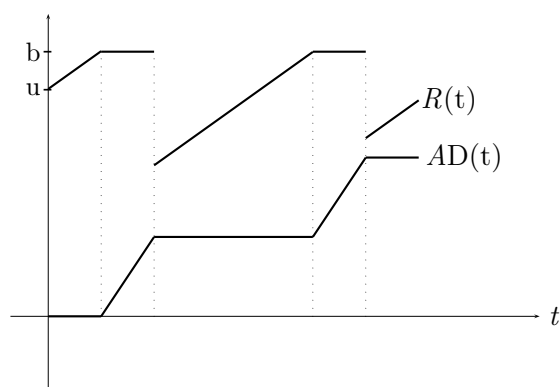


Figura 2.1: Una trayectoria del acumulado de los dividendos

En la Figura 2.1 se muestran en un mismo plano ambas trayectorias, tanto el acumulado de los dividendos como el proceso de riesgo. Como se puede observar los periodos en los que la gráfica de los dividendos es constante son los periodos en los que el proceso de riesgo no ha alcanzado la barrera b , cuando dicho proceso alcanza la barrera entonces comienza el crecimiento de los dividendos con intensidad c hasta el momento de la siguiente reclamación donde permanece constante hasta que el proceso de riesgo nuevamente alcance la barrera.

2.2. La probabilidad $\chi(u, b)$ con tiempos de interarribo $\exp(\lambda)$

Regresemos al eje principal de nuestro trabajo, la probabilidad $\chi(u, b)$. Sea $b > u$. Denotaremos por $\chi(u, b)$ a la probabilidad de que el proceso de riesgo

alcance el nivel b antes de que la ruina ocurra.

El primer caso que abordaremos es el del modelo clásico del riesgo, es decir, un proceso que genera tiempos de interarribo exponenciales. Recordemos que, según la sección 1.3.4 del capítulo anterior, podemos obtener la probabilidad de ruina en el modelo clásico mediante

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\int_u^\infty (1 - F(y)) dy + \int_0^u \psi(u - y)(1 - F(y)) dy \right],$$

donde F es la distribución de los montos individuales de reclamación. Por otro lado, en 1984 Dickson probó la siguiente igualdad

$$\delta(u) = \chi(u, b)\delta(b), \quad (2.1)$$

de donde

$$\chi(u, b) = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)}.$$

La ecuación dada en (2.1), nos da una idea importante ya que relaciona la probabilidad de sobrevivencia con la probabilidad $\chi(u, b)$. Esta ecuación nos dice que la probabilidad de que nuestra cartera no se arruine es igual a la probabilidad de que el proceso que representa el flujo de nuestras reservas alcance el nivel de la barrera y que nuevamente el proceso sobreviva ahora con un capital inicial b . Cabe mencionar que dicha ecuación solo es válida en el caso en el que la distribución de los tiempos de interarribo es exponencial. En Dickson y Gray [5] existe una discusión acerca de esto y se basa principalmente en el hecho de que la distribución exponencial es la única con la propiedad de pérdida de memoria.

Ahora, si suponemos que los montos individuales tienen distribución exponencial con parámetro α y con base en la sección 1.3.4, obtenemos la siguiente expresión para la probabilidad de ruina

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \lambda/c)u}.$$

Por tanto, la probabilidad $\chi(u, b)$ queda completamente determinada por

$$\chi(u, b) = \frac{\alpha c - \lambda e^{-(\alpha - \lambda/c)u}}{\alpha c - \lambda e^{-(\alpha - \lambda/c)b}}.$$

2.3. La probabilidad $\chi(u, b)$ con tiempos de interarribo Erlang(2, β)

Partiendo de la idea del modelo clásico, procedemos a cambiar el proceso Poisson que genera tiempos de interarribo con distribución exponencial por uno más general, es decir, un proceso de renovación que genere tiempos de interarribo con distribución Erlang, más específicamente Erlang(2, β) cuya función de densidad está dada por:

$$k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}, \quad t > 0$$

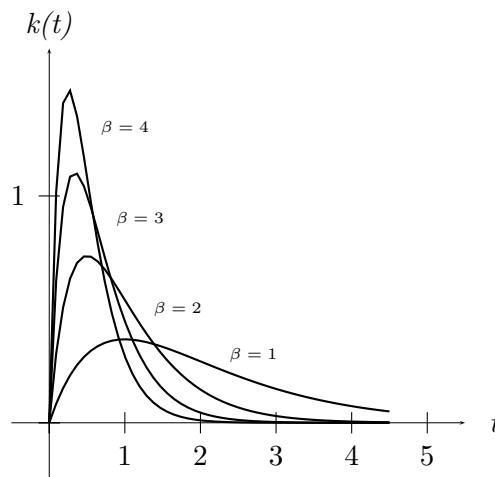


Figura 2.2: Gráfica de densidades Erlang, suponiendo $n = 2$ y $\beta = 1, 2, 3, 4$
 A la probabilidad $\chi(u, b)$ la podemos escribir de la siguiente manera.

Proposición 2 La probabilidad $\chi(u, b)$ de que el proceso de superávit alcance el nivel b antes del tiempo de ruina está dada por

$$\chi(u, b) = \int_0^{t_0} k(t) \int_0^{u+ct} \chi(u + ct - x, b) f(x) dx dt + \int_{t_0}^{\infty} k(t) dt \quad (2.2)$$

con $u + ct_0 = b$ en donde $f(x)$ es la densidad del monto de siniestros y $k(t)$ es la densidad de los tiempos de interarribo.

Demostración: Sea el evento A alcanzar el nivel b antes de la ruina en $(0, \infty)$ partiendo de un capital inicial u y T_1 el tiempo que tarda en ocurrir la primera reclamación, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\chi(u, b) &= P(A) \\
&= \int_0^\infty P(A | T_1 = t) f_{T_1}(t) dt \\
&= \int_0^{t_0} P(A | T_1 = t) f_{T_1}(t) dt + \int_{t_0}^\infty P(A | T_1 = t) f_{T_1}(t) dt \\
&= \int_0^{t_0} \int_0^\infty P(A | T_1 = t, Y_1 = y) f_{Y_1}(y) f_{T_1}(t) dy dt + \int_{t_0}^\infty \chi(u + ct, b) f_{T_1}(t) dt \\
&= \int_0^{t_0} \int_0^{u+ct} \chi(u + ct - y, b) f_{Y_1}(y) f_{T_1}(t) dy dt + \int_{t_0}^\infty f_{T_1}(t) dt \\
&= \int_0^{t_0} f_{T_1}(t) \int_0^{u+ct} \chi(u + ct - y, b) f_{Y_1}(y) dy dt + \int_{t_0}^\infty f_{T_1}(t) dt
\end{aligned}$$

■

Siguiendo con el cálculo de $\chi(u, b)$ construimos ahora una ecuación integro-diferencial la cual podemos escribir de la siguiente manera.

Proposición 3 *La probabilidad $\chi(u, b)$ satisface la siguiente ecuación íntegro-diferencial*

$$c^2 \chi''(u, b) - 2\beta c \chi'(u, b) + \beta^2 \chi(u, b) = \beta^2 \int_0^u \chi(u - x, b) f(x) dx, \quad (2.3)$$

en donde $f(x)$ es la densidad de los montos individuales de las reclamaciones, b es el nivel de la barrera y la distribución de los tiempos de interocurrencia es Erlang(2, β).

Demostración: Si hacemos el cambio de variable $s = u + ct$ en (2.2) tenemos que $t = \frac{s-u}{c}$ y $dt = \frac{ds}{c}$ por lo tanto

$$\chi(s - ct, b) = \frac{1}{c} \left[\int_u^b k\left(\frac{s-u}{c}\right) \int_0^s \chi(s-x, b) f(x) dx ds + \int_b^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) ds \right].$$

Ahora, según la sección A.3 del Apéndice A, derivando respecto de u tenemos

$$\begin{aligned} \chi'(s-ct, b) = & -\frac{1}{c} \left[-k(0) \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx \right. \\ & \left. - \int_u^b \frac{1}{c} k' \left(\frac{s-u}{c} \right) \int_0^s \chi(s-x, b) f(x) dx ds - \int_b^\infty \frac{1}{c} k' \left(\frac{s-u}{c} \right) ds \right], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\chi'(s-ct, b) = \frac{1}{c^2} \left[\int_u^b k' \left(\frac{s-u}{c} \right) \int_0^s \chi(s-x, b) f(x) dx ds + \int_b^\infty k' \left(\frac{s-u}{c} \right) ds \right].$$

De la misma manera obtenemos la segunda derivada

$$\begin{aligned} \chi''(s-ct, b) = & \frac{1}{c^3} \left[\int_u^b k'' \left(\frac{s-u}{c} \right) \int_0^s \chi(s-x, b) f(x) dx ds + \int_b^\infty k'' \left(\frac{s-u}{c} \right) ds \right] \\ & + \frac{1}{c^2} \beta^2 \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx. \end{aligned}$$

Ahora, si sustituimos los valores encontrados en el lado izquierdo de (2.3) y factorizamos tenemos

$$\begin{aligned} & c^2 \chi''(s-ct, b) - 2\beta c \chi'(s-ct, b) + \beta^2 \chi(s-ct, b) \\ = & \frac{1}{c} \left[\int_u^b \left(k'' \left(\frac{s-u}{c} \right) + 2\beta k' \left(\frac{s-u}{c} \right) + \beta^2 k \left(\frac{s-u}{c} \right) \right) \int_0^s \chi(s-x, b) f(x) dx ds \right] \\ & + \frac{1}{c} \int_b^\infty \left(k'' \left(\frac{s-u}{c} \right) + 2\beta k' \left(\frac{s-u}{c} \right) + \beta^2 k \left(\frac{s-u}{c} \right) \right) ds \\ & + \beta^2 \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx. \end{aligned}$$

De manera abreviada tenemos que

$$\begin{aligned} c^2 \chi'' - 2\beta c \chi' + \beta^2 \chi = & \frac{1}{c} \left[\int_u^b (k'' + 2\beta k' + \beta^2 k) \int_0^s \chi(s-x, b) f(x) dx ds \right] \\ & + \frac{1}{c} \int_b^\infty (k'' + 2\beta k' + \beta^2 k) ds \\ & + \beta^2 \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Recordemos ahora que la distribución de los tiempos de interarribo $k(t)$ es Erlang(2, β), de ahí que

$$\begin{aligned}k(t) &= \beta^2 t e^{-\beta t}, \\k'(t) &= \beta^2 e^{-\beta t} - \beta k(t), \\k''(t) &= -2\beta^3 e^{-\beta t} + \beta^2 k(t),\end{aligned}$$

por lo tanto realizando las operaciones correspondientes tenemos

$$k'' + 2\beta k' + \beta^2 k = 0,$$

de modo que el primer y segundo sumandos del lado derecho de (2.4) se anulan y de esta forma se obtiene (2.3).

■

2.4. Montos individuales Erlang(n, γ)

No hemos resuelto aún nuestro problema inicial, hasta ahora sólo obtuvimos una ecuación de renovación para la probabilidad de alcanzar una barrera superior constante, la cual es nuestro objetivo principal, ya desarrollamos una ecuación integro-diferencial para un modelo con una barrera constante utilizando el supuesto de una distribución Erlang($2, \beta$) para los tiempos de interarribo. Ahora utilizaremos el supuesto de una distribución Erlang(n, γ) para los montos individuales de las reclamaciones para así redondear nuestro objetivo de calcular $\chi(u, b)$. Tal distribución está dada por:

$$f(x) = \frac{\gamma^n x^{n-1} e^{-\gamma x}}{(n-1)!}. \quad (2.5)$$

Observemos un poco la ecuación dada en (2.3), de acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales resulta más sencillo dar solución a una ecuación homogénea que a una ecuación no homogénea como la ya mencionada, así que nos ayudaremos de algunas manipulaciones para lograr este objetivo. Tomando el lado derecho de (2.3), podemos definir la siguiente función

$$h(u) = \beta^2 \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $y = u - x$, tenemos que $x = u - y$ y $dy = -dx$, por lo tanto

$$h(u) = \beta^2 \int_0^u \chi(y, b) f(u-y) dy. \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.6) tenemos

$$h(u) = \frac{\beta^2 \gamma^n e^{-\gamma u}}{(n-1)!} \int_0^u \chi(x, b) (u-x)^{n-1} e^{\gamma x} dx.$$

Necesitaremos una expresión para la n -ésima derivada de la función h en términos de sus derivadas de orden menor, con este fin demostraremos el siguiente lema.

Lema 1 *La n -ésima derivada de la función $h(u)$ está dada por*

$$h^{(n)}(u) = - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} h^{(i)}(u) \gamma^{n-i} + \beta^2 \gamma^n \chi(u, b). \quad (2.7)$$

Demostración: La función $h(u)$ depende explícitamente de n , así que podemos verla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h_n(u) &= \frac{\beta^2 \gamma^n e^{-\gamma u}}{(n-1)!} \int_0^u \chi(x, b) (u-x)^{n-1} e^{\gamma x} dx \\ &= A_n e^{-\gamma u} \int_0^u (u-x)^{n-1} B dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

en donde

$$A_n = \frac{\beta^2 \gamma^n}{(n-1)!} \quad \text{y} \quad B = \chi(x, b) e^{\gamma x}.$$

Nótese que B no está en función de x , es decir, es una cantidad fija. Si hacemos $n = 1$ tenemos

$$h_1(u) = \beta^2 \gamma e^{-\gamma u} \int_0^u \chi(x, b) e^{\gamma x} dx.$$

En el Apéndice A se encuentra la regla de derivación de Leibniz para el producto de dos funciones, que utilizaremos para derivar la función anterior (ver pág. 52), después sustituimos h_1 y tenemos

$$\begin{aligned} h_1'(u) &= \beta^2 \gamma \left[e^{-\gamma u} \chi(u, b) e^{\gamma u} + \left(-\gamma e^{-\gamma u} \int_0^u \chi(x, b) e^{\gamma x} dx \right) \right] \\ &= \beta^2 \gamma \chi(u, b) - \beta^2 \gamma^2 e^{-\gamma u} \int_0^u \chi(x, b) e^{\gamma x} dx \\ &= -\gamma h_1(u) + \beta^2 \gamma \chi(u, b). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nótese que la expresión a la que queremos llegar está dada en términos de las derivadas de h , usaremos esta idea para continuar. Para $n > 1$ diferenciamos (2.8) y tenemos

$$\begin{aligned}
h'_n(u) &= A_n \left[e^{-\gamma u} \left((u-u)^{n-1} B + \int_0^u (n-1)(u-x)^{n-2} B dx \right) \right] \\
&\quad + A_n \left[-\gamma e^{-\gamma u} \int_0^u (u-x)^{n-1} B dx \right] \\
&= A_n \left[e^{-\gamma u} \int_0^u (n-1) B (u-x)^{n-2} dx - \gamma e^{-\gamma u} \int_0^u B (u-x)^{n-1} dx \right] \\
&= (n-1) A_n e^{-\gamma u} \int_0^u B (u-x)^{n-2} dx - \gamma e^{-\gamma u} A_n \int_0^u B (u-x)^{n-1} dx \\
&= \gamma A_{n-1} e^{-\gamma u} \int_0^u B (u-x)^{n-2} dx - \gamma A_n e^{-\gamma u} \int_0^u B (u-x)^{n-1} dx \\
&= -\gamma h_n(u) + \gamma h_{n-1}(u).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Diferenciando y usando (2.10) tenemos

$$\begin{aligned}
h''_n &= -\gamma h'_n + \gamma h'_{n-1} \\
&= -\gamma h'_n + \gamma [-\gamma (-h_{n-2} + h_{n-1})] \\
&= -\gamma h'_n - \gamma(\gamma h_{n-1}) + \gamma^2 h_{n-2} \\
&= -\gamma h'_n - \gamma(h'_n + \gamma h_n) + \gamma^2 h_{n-2} \\
&= -2\gamma h'_n - \gamma^2 h_n + \gamma^2 h_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'''_n &= -2\gamma h''_n - \gamma^2 h'_n + \gamma^2 h'_{n-2} \\
&= -2\gamma h''_n - \gamma^2 h'_n + \gamma^2 [-\gamma(h_{n-2} - h_{n-3})] \\
&= -2\gamma h''_n - \gamma^2 h'_n - \gamma(\gamma^2 h_{n-2}) + \gamma^3 h_{n-3} \\
&= -3\gamma h''_n - 3\gamma^2 h'_n - \gamma^3 h_n + \gamma^3 h_{n-3}
\end{aligned}$$

procediendo de la misma manera se llega a

$$h_n^{(IV)} = -4\gamma h_n''' - 6\gamma^2 h_n'' - 4\gamma^3 h_n' - \gamma^3 h_n + \gamma^4 h_{n-4}.$$

El término de más a la derecha podemos escribirlo como

$$\gamma^4 h_{n-4} = \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} \gamma^j h_n^{(4-j)}.$$

En general para la k -ésima derivada y usando la formula de Leibniz tenemos:

$$\gamma^k h_{n-k} = (\gamma h_n)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \gamma^j h_n^{(k-j)}.$$

En particular para $k = n - 1$

$$\gamma^{n-1} h_1 = (\gamma h_n)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \gamma^j h_n^{(n-1-j)}. \quad (2.11)$$

Ahora, si diferenciamos (2.11) tenemos

$$\gamma^{n-1} h'_1 = (\gamma h_n)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \gamma^j h_n^{(n-j)}$$

y usando (2.9)

$$\begin{aligned} \gamma^{n-1} h'_1 &= \gamma^{n-1}(-\gamma h_1 + \beta^2 \gamma \chi(u, b)) \\ &= -\gamma^n h_1 + \beta^2 \gamma^n \chi(u, b), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \beta^2 \gamma^n \chi(u, b) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \gamma^j h_n^{(n-j)} + \gamma^n h_1 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \gamma^j h_n^{(n-j)} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \gamma^{j+1} h_n^{(n-1-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \gamma^j h_n^{(n-j)} + \binom{n-1}{n} \gamma^n h_n^{(n-n)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} \gamma^j h_n^{(n-1-(j-1))} + \binom{n-1}{-1} \gamma^{-1} h_n^{(n-1-(-1))} \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right] \gamma^j h_n^{(n-j)} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma^j h_n^{(n-j)}. \end{aligned}$$

Por último, obtenemos el primer término de la suma y despejamos

$$h_n^{(n)} = - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \gamma^j h_n^{(n-j)} + \beta^2 \gamma^n \chi(u, b).$$

Desarrollando la suma es fácil ver que la expresión anterior término a término es igual a la dada en (2.7), con lo que se concluye la demostración. ■

Siguiendo con el cálculo de $\chi(u, b)$, reescribimos (2.3) de la siguiente forma:

$$c^2 \chi''(u, b) - 2\beta c \chi'(u, b) + \beta^2 \chi(u, b) = h(u).$$

Diferenciando tanto i como n veces, obtenemos

$$c^2 \chi^{(i+2)}(u, b) - 2\beta c \chi^{(i+1)}(u, b) + \beta^2 \chi^{(i)}(u, b) = h^{(i)}(u) \quad (2.12)$$

y

$$c^2 \chi^{(n+2)}(u, b) - 2\beta c \chi^{(n+1)}(u, b) + \beta^2 \chi^{(n)}(u, b) = h^{(n)}(u). \quad (2.13)$$

Vamos a sustituir en (2.13) el valor de $h^{(n)}(u)$ encontrado en (2.7) y el valor de $h^{(i)}(u)$ encontrado en (2.12) para obtener una ecuación diferencial ordinaria de orden $(n + 2)$ para $\chi(u, b)$ con la bondad de ser homogénea

$$\begin{aligned}
& c^2 \chi^{(n+2)} - 2\beta c \chi^{(n+1)} + \beta^2 \chi^{(n)} \\
&= - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} h^{(i)} \gamma^{n-i} + \beta^2 \gamma^n \chi \\
&= - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} [c^2 \chi^{(i+2)} - 2\beta c \chi^{(i+1)} + \beta^2 \chi^{(i)}] \gamma^{n-i} + \beta^2 \gamma^n \chi \\
&= - \sum_{i=0}^{n-1} c^2 \binom{n}{i} \gamma^{n-i} \chi^{(i+2)} + 2\beta c \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \gamma^{n-i} \chi^{(i+1)} \\
&\quad - \beta^2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \gamma^{n-i} \chi^{(i)} + \beta^2 \gamma^n \chi \\
&= -c^2 n \gamma \chi^{(n+1)} - c^2 \binom{n}{n-2} \gamma^2 \chi^{(n)} + 2\beta c n \gamma \chi^{(n)} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left(-c^2 \binom{n}{j-2} \gamma^{n-j+2} + 2\beta c \binom{n}{j-1} \gamma^{n-j+1} - \binom{n}{j} \gamma^{n-j} \beta^2 \right) \chi^{(j)}.
\end{aligned}$$

Iguualamos a cero y agrupamos términos comunes

$$\begin{aligned}
& c^2 \chi^{(n+2)} + (c^2 \gamma n - 2\beta c) \chi^{(n+1)} + \left(\beta^2 - 2\beta c \gamma n + \binom{n}{n-2} c^2 \gamma^2 \right) \chi^{(n)} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \left(-c^2 \binom{n}{j-2} \gamma^{n-j+2} + 2\beta c \binom{n}{j-1} \gamma^{n-j+1} - \binom{n}{j} \gamma^{n-j} \beta^2 \right) \chi^{(j)} = 0.
\end{aligned}$$

Entonces la ecuación diferencial homogénea queda

$$a_{n+2} \chi^{(n+2)} + a_{n+1} \chi^{(n+1)} + a_n \chi^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_n \chi^{(j)} = 0, \quad (2.14)$$

en donde los valores de los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= c^2 \\
 a_{n+1} &= c^2\gamma n - 2\beta c \\
 a_n &= \beta^2 - 2\beta c\gamma n + \binom{n}{n-2} c^2\gamma^2 \\
 a_j &= -c^2 \binom{n}{j-2} \gamma^{n-j+2} + 2\beta c \binom{n}{j-1} \gamma^{n-j+1} - \binom{n}{j} \gamma^{n-j} \beta^2.
 \end{aligned}$$

Cabe mencionar que puede no ser fácil resolver la ecuación anterior, puede resultar con un grado muy alto para el cual no sea trivial hallar una solución. Ahora, según la sección A.2 del Apéndice A, si todas las raíces de la ecuación característica de (2.14), que denotaremos por $\{r_i\}_{i=0}^{n+1}$, son diferentes, puede escribirse la solución de dicha ecuación de la siguiente manera (ver pág. 49):

$$\chi(u, b) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e^{r_i u}, \tag{2.15}$$

donde las raíces $\{r_i\}_{i=0}^{n+1}$ están en función de γ, β y c , mientras que las constantes $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n+1}$ dependen además de b .

Tenemos tantos coeficientes α como sumandos en (2.15) por lo que necesitamos $(n+2)$ ecuaciones para poder hallarlos.

La primera de ellas se obtiene de la condición límite $\chi(b, b) = 1$. Entonces,

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e^{r_i b} = 1. \tag{2.16}$$

De (2.15) obtenemos $\chi'(u, b)$ y $\chi''(u, b)$ y sustituyendo en (2.3), reordenamos términos para obtener las siguientes n ecuaciones,

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{(r_i + \gamma)^s} = 0, \quad s = 1, \dots, n. \tag{2.17}$$

Diferenciando (2.2) respecto de u , considerando de (2.15) su primera y segunda derivada, obtenemos la última ecuación que necesitamos,

$$1 = \alpha_0 + \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (\beta - cr_i) e^{r_i b}. \tag{2.18}$$

Ahora podemos combinar (2.16), (2.17) y (2.18), para obtener el conjunto necesario de $(n+2)$ ecuaciones con las cuales calcularemos los coeficientes $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n+1}$. Las cuales son

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e^{r_i b} &= 1 \\ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{(r_i + \gamma)^s} &= 0, \quad s = 1, \dots, n \\ \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (\beta - cr_i) e^{r_i b} &= 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.4.1. La probabilidad $\chi(u, b)$ para montos individuales Erlang(2, 2) y tiempos interarribo Erlang(2, 2)

Estudiaremos ahora el caso $n = 2$. Comencemos obteniendo de (2.14) la ecuación diferencial ordinaria dada por:

$$\begin{aligned} c^2 \chi''''(u, b) + (2\gamma c^2 - 2\beta c) \chi'''(u, b) + \\ (\beta^2 - 4\gamma\beta c + \gamma^2 c^2) \chi''(u, b) + (2\gamma\beta^2 - 2\gamma^2\beta c) \chi'(u, b) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

En 1998 Dickson [3] obtuvo esta misma ecuación para el caso $c = 1.1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 2$ por lo tanto lo anterior es una generalización.

Resolviendo (2.20) con los valores utilizados por Dickson tenemos la siguiente ecuación de cuarto grado

$$1.21r^4 + 0.44r^3 - 8.76r^2 - 1.6r = 0,$$

cuyas raíces son $r_0 = -2.78924$, $r_1 = -0.1818$, $r_2 = 2.6074$, $r_3 = 0$, por lo tanto

$$\chi(u, b) = \alpha_0 e^{r_0 u} + \alpha_1 e^{r_1 u} + \alpha_2 e^{r_2 u} + \alpha_3 e^{r_3 u},$$

solo depende ahora de $\{\alpha_i\}_{i=0}^3$. Ahora, de (2.19), el sistema de ecuaciones que

nos ayudará a encontrarlas queda

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^3 \alpha_i e^{r_i b} &= 1 \\
 \sum_{i=0}^3 \frac{\alpha_i}{(r_i + \gamma)} &= 0 \\
 \sum_{i=0}^3 \frac{\alpha_i}{(r_i + \gamma)^2} &= 0 \\
 \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^3 \alpha_i (\beta - cr_i) e^{r_i b} &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

en donde los coeficientes α_i son funciones de b .

En el Cuadro 2.1 se muestran algunos valores de $\{\alpha_i\}_{i=0}^3$ para distintos niveles de b obtenidos con la ayuda del programa “Cálculo de $\chi(u, b)$ para montos individuales con distribución Erlang(2, β)” desarrollado para el software estadístico R, ver Apéndice B.

α_i/b	0	1	2	3	4	5
α_0	0.1019	0.0502	0.0316	2.4028e-02	1.9996e-02	1.7542e-02
α_1	-9.5466	-4.1271	-2.5795	-1.9565e+00	-1.6282e+00	-1.4283e+00
α_2	-0.5565	-0.0174	-0.0006	-3.1684e-05	-1.6209e-06	-8.7410e-08
α_3	11.0011	4.6746	2.9180	2.2131e+00	1.8417e+00	1.6156e+00

Cuadro 2.1. $\alpha_i(b)$ para distintos niveles de u .

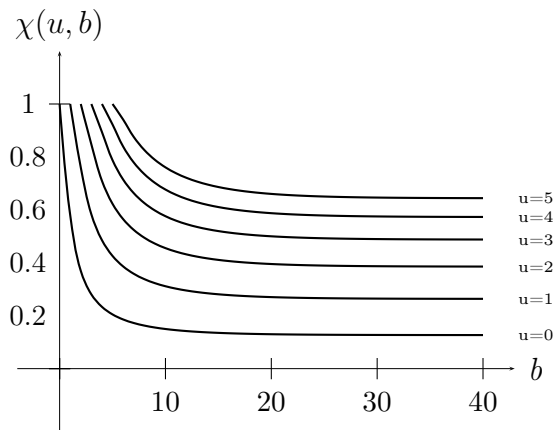
En resumen, haciendo $\gamma = 2, \beta = 2$ y $c = 1.1$ encontramos las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial dada en (2.20), las cuales nos sirvieron para encontrar una serie de incógnitas dependientes de b , formando el sistema dado en (2.21) para cada b , obteniendo así cuatro incógnitas también para cada b . En el Cuadro 2.2 se muestran los valores de $\chi(u, b)$ para diferentes niveles de u y b .

En la Figura 2.3 se presenta una gráfica de $\chi(u, b)$, en un intento por explicar cómo cambia tal probabilidad al incrementar b para diferentes valores de la

u/b	0	1	2	3	4	5
0	1	0.5802	0.3694	0.2805	0.2335	0.2049
1		1	0.7600	0.5828	0.4854	0.4258
2			1	0.8472	0.7096	0.6228
3				1	0.8939	0.7875
4					1	0.9224
5						1

Cuadro 2.2. Valores de $\chi(u, b)$ para el caso $n = 2$.

reserva inicial $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Podemos observar cómo al fijar un valor b , la probabilidad de alcanzar tal barrera crece como el valor de la reserva inicial u crece, lo que intuitivamente es muy claro ya que si tenemos más recursos para el pago de los siniestros será menos probable ser incapaz de pagarlos y por lo tanto menos probable el estado de ruina. Ahora, si fijamos el valor de la reserva inicial u vemos que la probabilidad de alcanzar la barrera b se hace mas pequeña conforme el nivel de dicha barrera aumenta y cuando b es grande tiende a su valor límite para cada u lo que también resulta intuitivamente claro ya que al elevar cada vez la barrera estamos alargando el proceso al ser más difícil llegar a dicha barrera por lo tanto se vuelve menos probable alcanzarla.

Figura 2.3: $\chi(u, b)$ para $u=1,2,3,4,5$

En el Cuadro 2.3 se muestran los valores límite para la probabilidad $\chi(u, b)$ con diferentes niveles de capital inicial.

u	0	1	2	3	4	5
$\lim_{b \rightarrow \infty} \chi(u, b)$	0.1268	0.2636	0.3855	0.4876	0.5727	0.6438

Cuadro 2.3. Valores límite para la probabilidad $\chi(u, b)$.

La gráfica anterior también nos da la idea de que dicha probabilidad llega a un valor límite sin importar que tanto elevemos la barrera

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \chi(u, b) = \delta(u), \tag{2.22}$$

aunque esto no resulta muy útil en la práctica ya que para alcanzar tales niveles de seguridad sería necesario tener reservas demasiado altas lo que en la mayoría de los casos no es posible. En otras palabras, al hacer b tender a infinito estamos incluyendo solo las trayectorias de los procesos de reservas que no conducen a la ruina, es decir, las probabilidades de sobrevivencia correspondientes a cada reserva inicial en el modelo sin barrera (este razonamiento se puede encontrar en la sección de discusión escrita por De Vylder y Goovaerts en Dickson [3]).

2.4.2. La probabilidad $\chi(u, b)$ para montos individuales $\exp(1)$ y tiempos interarribo Erlang(2, 2)

Ahora estudiaremos el caso $n = 1$. Análogamente a lo hecho en la sección anterior obtenemos de (2.14) la correspondiente ecuación diferencial ordinaria

$$c^2 \chi'''(u, b) + (\gamma c^2 - 2\beta c) \chi''(u, b) + (\beta^2 - 2\beta\gamma c) \chi'(u, b) = 0,$$

con solución dada por

$$\chi(u, b) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{r_i u},$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de

$$c^2 r^2 + (\gamma c^2 - 2\beta c) r + (\beta^2 - 2\beta\gamma c) = 0.$$

Para obtener $\{\alpha_i\}_{i=0}^2$, hacemos $n = 1$ en (2.19) y obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \alpha_i e^{r_i b} &= 1 \\ \sum_{i=0}^2 \frac{\alpha_i}{(r_i + \gamma)} &= 0 \\ \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^2 (\beta - cr_i) \alpha_i e^{r_i b} &= 1\end{aligned}$$

Para $\gamma = 1$, $\beta = 2$ y $c = 1.1$, obtenemos los resultados del Cuadro 2.4 para $\chi(u, b)$.

u/b	0	1	2	3	4	5	...	∞
0	1	0.6363	0.4318	0.3339	0.2779	0.2419	...	0.1199
1		1	0.7838	0.6106	0.5083	0.4425	...	0.2194
2			1	0.8518	0.7125	0.6204	...	0.3076
3				1	0.8906	0.7781	...	0.3858
4					1	0.9155	...	0.4552
5						1	...	0.5168

Cuadro 2.4. Valores de $\chi(u, b)$ para el caso $n = 1$.

Podemos observar que en este caso $\chi(u, b)$ tiene el mismo comportamiento a la probabilidad obtenida en la sección anterior donde se supuso una distribución Erlang(2, γ).

2.5. Análisis de sensibilidad

En esta sección trataremos de observar cómo y en qué medida se afecta la probabilidad $\chi(u, b)$ al variar los parámetros de la distribución del monto de las reclamaciones. Claramente es más difícil comparar resultados basados en distribuciones que dependan de dos parámetros, por lo tanto, en un intento por lograr una variación similar y más controlada entre las distribuciones usadas para calcular la probabilidad haremos el siguiente ajuste. Llamaremos a la densidad Erlang(n) al resultado de hacer $n = \gamma$ en una densidad

Erlang(n, γ) y entonces, haciendo $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 obtendremos valores específicos para la probabilidad $\chi(u, b)$ y gráficas para distintos niveles de capital inicial.

En la Figura 2.4 proveemos las gráficas de la función de densidad de probabilidad Erlang(n) con media 1 y varianza $\frac{1}{n}$, también para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 . Nótese que con el ajuste hecho anteriormente logramos que la distribución resultante tenga media n/γ igual a 1. Además, es claro que al incrementar n estamos reduciendo la varianza y la asimetría de la función de densidad de probabilidad y concentrándola cada vez más alrededor de su media 1, ver sección A.1 del Apéndice A.

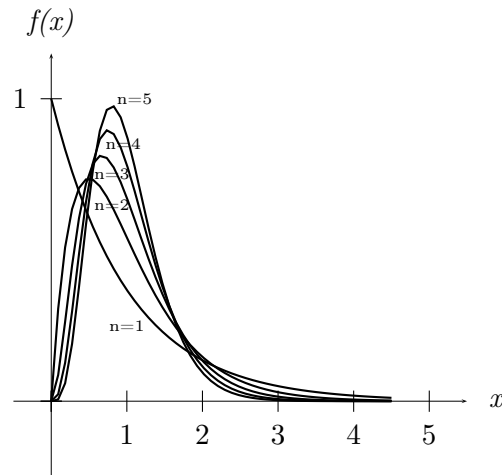


Figura 2.4: *Función de densidad de probabilidad Erlang(n), suponiendo $n=1, 2, 3, 4, 5$*

Dada la distribución de los montos individuales de reclamación, las dos cantidades que controlan por completo el efecto de dicha distribución en $\chi(u, b)$ son: el nivel de la reserva inicial u y el nivel de la barrera b .

Ya hemos visto el comportamiento de $\chi(u, b)$ para $n = 1$ y $n = 2$ en donde dicha probabilidad toma el valor 1 cuando $u = b$ y cuando se fija u la probabilidad decrece a su valor límite cuando b crece.

Con la ayuda del programa Scilab hemos obtenido valores numéricos para la probabilidad $\chi(u, b)$. Obtuvimos también ecuaciones íntegro-diferenciales de quinto, sexto y séptimo grado con sus respectivos sistemas de ecuaciones para encontrar los coeficientes de las combinaciones lineales que nos darían las probabilidades $\chi(u, b)$, según lo visto en la sección 2.4. Cabe mencionar que las ecuaciones íntegro-diferenciales obtenidas en base a la ecuación diferencial (2.14) de dicha sección, no siempre tienen soluciones reales por lo tanto los sistemas creados a partir de esas soluciones a menudo resultarán sistemas con coeficientes complejos y con soluciones dadas por números igualmente complejos. En los casos manejados en este trabajo resulta que la parte imaginaria de las soluciones del sistema planteado en (2.19) es muy pequeña, por tanto despreciable, es decir, tomaremos solo la parte real de las soluciones para construir la combinación lineal que nos da la probabilidad $\chi(u, b)$. Los resultados obtenidos con el software Scilab nos proporcionan las herramientas necesarias para construir gráficas que nos ayudarán a observar el comportamiento de nuestra probabilidad en estudio. En dichas gráficas se muestran trayectorias de $\chi(u, b)$ como función de b para niveles iniciales de la reserva $u = 0$, $u = 1$ y $u = 2$, respectivamente. Una vez fijo u , podemos utilizar los programas de Scilab para obtener los puntos que forman cada gráfica, en ellas se muestra la dependencia de $\chi(u, b)$ sobre el parámetro n al mover b . Cabe resaltar que los valores escogidos son únicamente ilustrativos y no tienen ningún significado específico.

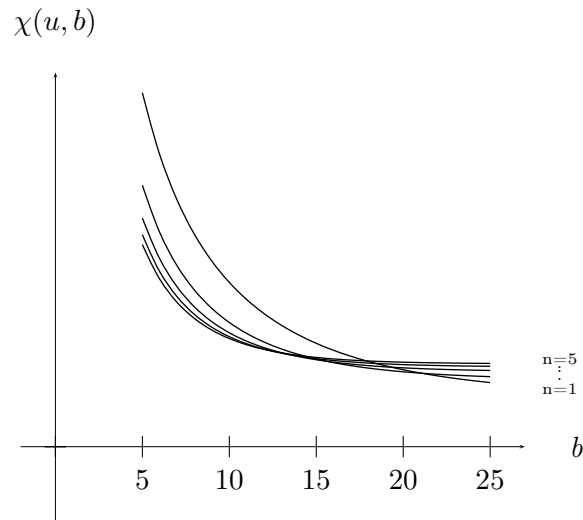


Figura 2.5: $\chi(u, b)$ para $u=0$ suponiendo $n=1,2,3,4,5$

La Figura 2.5 muestra diferentes gráficas para la probabilidad de alcanzar una barrera b antes del tiempo de ruina para un capital inicial 0 y densidades Erlang(n). Aunque en la gráfica no se alcanza a observar, para valores de b menores a 5 la probabilidad crece muy rápido hasta llegar a 0.6362659, 0.5802424 0.5538496 0.5380908 0.5274866 para $b = 1$, es decir, crece cuando n decrece. Por otro lado para valores grandes de b la probabilidad se invierte alcanzando aproximadamente para b mayor a 30 valores límite 0.1331, 0.1319, 0.13, 0.1268 y 0.1199 para n decreciendo de 5 a 1.

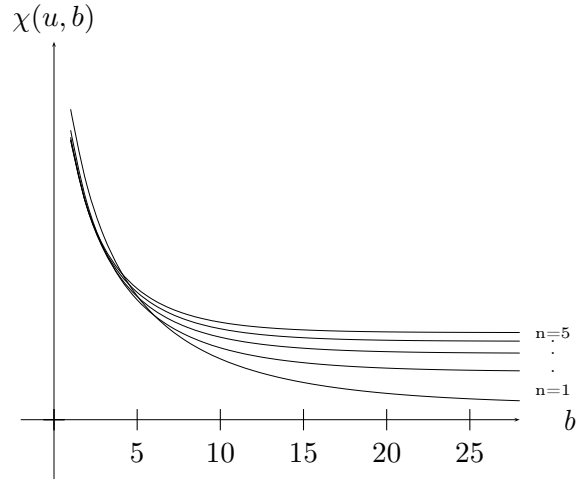


Figura 2.6: $\chi(u, b)$ para $u=1$ suponiendo $n=1, 2, 3, 4, 5$

La Figura 2.6 igualmente muestra diferentes gráficas para la probabilidad de alcanzar una barrera b antes del tiempo de ruina para un capital inicial 1 y densidades Erlang(n). En este caso la escala no nos deja apreciar por completo la ubicación de las gráficas una con respecto de la otra, pero si analizamos las cantidades obtenidas vemos que el comportamiento se sigue manteniendo aunque la separación entre las gráficas para b pequeña sea menor que en la gráfica anterior. Por el contrario para b grande las gráficas se separan cada vez más aunque cada vez más despacio igualmente manteniendo el comportamiento mostrado en la gráfica anterior tendiendo a sus valores límite mostrados en el Cuadro 2.5.

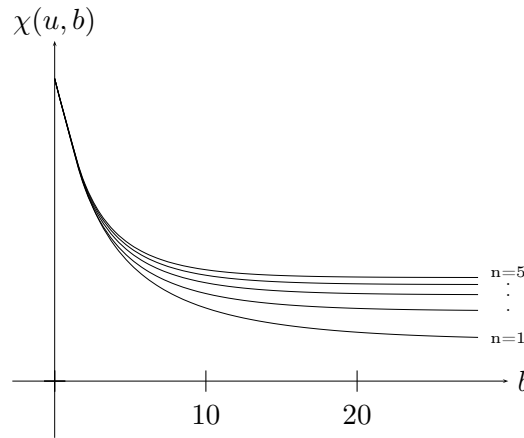


Figura 2.7: $\chi(u, b)$ para $u=2$ suponiendo $n=1, 2, 3, 4, 5$

En conclusión, podemos observar que al aumentar el capital inicial las probabilidades se acercan mucho para b pequeña, decreciendo cuando n crece y son cada vez más lejanas para b grande, creciendo cuando n crece. En otras palabras, podemos observar que para valores de u cercanos a cero y b pequeña, $\chi(u, b)$ decrece como n crece y que este comportamiento se invierte cuando b crece.

En la Figura 2.4 podemos encontrar una explicación al comportamiento descrito anteriormente. Podemos ver que para n pequeña la probabilidad de ocurrencia de reclamaciones muy pequeñas y muy grandes es mayor que su correspondiente para n grande, es decir, la probabilidad de valores extremos decrece con n . Como consecuencia, para valores de u cercanos a cero y b pequeña (valores extremos), la probabilidad de alcanzar b antes de la ruina es mayor para n pequeña. Mientras que para b grande, reclamaciones grandes toman preponderancia en alcanzar el estado de ruina y son más probables para n pequeña, entonces $\chi(u, b)$ es más pequeña para n pequeña.

En el Cuadro 2.5, se presentan valores para probabilidades de supervivencia para todos los casos $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 (recordemos la expresión (2.22)) ya estudiados en este trabajo además de los casos $u = 3, u = 4$ y $u = 5$. Note que los valores presentados en esta tabla son equivalentes a los que se obtendrían en un modelo sin barrera. En la tabla podemos observar que, $\chi(u, b)$ en el

límite crece con el incremento de n , lo cual confirma lo antes mencionado.

$\delta(u)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\delta(0)$	0.1199	0.1268	0.1300	0.1319	0.1332
$\delta(1)$	0.2194	0.2636	0.2882	0.3041	0.3153
$\delta(2)$	0.3076	0.3855	0.4282	0.4552	0.4738
$\delta(3)$	0.3858	0.4876	0.5409	0.5736	0.5956
$\delta(4)$	0.4552	0.5727	0.6314	0.6663	0.6892
$\delta(5)$	0.5168	0.6438	0.7041	0.7388	0.7612

Cuadro 2.5. Valores de $\delta(u)$ para los casos $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Haciendo algunas modificaciones podemos utilizar los programas desarrollados para Scilab, para observar que cuando u crece, la inversión del proceso con el incremento de b desaparece rápidamente. De hecho las gráficas se intersectan muy cerca de la abscisa inicial b . Este hecho puede ser tomado en cuenta para decir que para reservas iniciales de magnitud substancial, la probabilidad más grande de reclamaciones pequeñas para n pequeña pierde relevancia.

Conclusiones

En esta tesis hemos seguido el trabajo de Claramunt, Mármol y Lacayo (2005) sobre el problema de encontrar la probabilidad de alcanzar una barrera superior en un modelo de riesgo con montos y tiempos de interarribo Erlang. Como hemos podido observar, en general no resulta sencillo desarrollar métodos para encontrar probabilidades referentes a modelos de riesgo, en particular cada paso realizado en el procedimiento mostrado en el presente trabajo depende muy específicamente de las distribuciones utilizadas para modelar los tiempos de interarribo y los montos individuales de reclamación, así, a lo largo de este desarrollo resulta difícil poder distinguir expresiones que permitan una generalización útil para otros modelos, da la impresión de que para cada cambio en los supuestos utilizados habrá que obtener una nueva forma para encontrar dichas probabilidades.

A manera de resumen sobre lo desarrollado en el presente trabajo, tenemos lo siguiente:

En el Capítulo 2 se presentaron los modelos de riesgo con barrera superior, se trató de explicar cómo surgió la idea de este tipo de modelos y en qué sentido son útiles. Se construyó una expresión para obtener la probabilidad de alcanzar una barrera superior en un modelo de riesgo con tiempos interarribo distribuidos $\text{Erlang}(2, \beta)$ y montos de reclamación distribuidos $\text{Erlang}(n, \gamma)$.

A grandes rasgos se hizo lo siguiente:

1. Se probó la ecuación recursiva

$$\chi(u, b) = \int_0^{t_0} k(t) \int_0^{u+ct} \chi(u + ct - x, b) f(x) dx dt + \int_{t_0}^{\infty} k(t) dt \quad (2.23)$$

para la probabilidad $\chi(u, b)$ de que el proceso de riesgo alcance el nivel

b antes del tiempo de ruina partiendo de un capital inicial u , dada en términos de las densidades tanto de los montos de reclamación como del número de siniestros. Introducimos ahora el supuesto de una distribución Erlang($2, \beta$) para los tiempos interarribo y se construyó la siguiente ecuación íntegro-diferencial,

$$c^2 \chi''(u, b) - 2\beta c \chi'(u, b) + \beta^2 \chi(u, b) = \beta^2 \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx. \quad (2.24)$$

2. Partiendo de la ecuación anterior se incorporó el supuesto de una distribución Erlang(n, γ) para los montos de reclamación y se realizaron manipulaciones algebraicas para obtener la siguiente ecuación homogénea,

$$a_{n+2} \chi^{(n+2)} + a_{n+1} \chi^{(n+1)} + a_n \chi^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_n \chi^{(j)} = 0, \quad (2.25)$$

con los coeficientes $\{a_i\}_{i=1}^{n+2}$ completamente determinados por los parámetros de las distribuciones de los montos de reclamación y los tiempos interarribo.

3. Se resolvió la ecuación característica asociada. Con las raíces obtenidas se construyó y resolvió el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e^{r_i b} &= 1, \\ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{(r_i + \gamma)^s} &= 0, \quad s = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (\beta - cr_i) e^{r_i b} &= 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

que como podemos observar es dependiente de b . Cabe mencionar que al resolver el sistema anterior, las soluciones $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n+1}$ además de ser dependientes de b , resultaron con la particularidad de ser números imaginarios, en este caso particular resultó que esa parte era muy pequeña y por lo tanto despreciable aunque es algo que deberá considerarse en cada caso trabajado.

4. Al encontrar una solución a la ecuación homogénea (2.25) podemos expresar la probabilidad $\chi(u, b)$ de la siguiente manera

$$\chi(u, b) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e^{r_i u}, \quad (2.27)$$

la cual es una expresión completamente determinada dependiente únicamente de b .

5. Por último se realizó un análisis numérico mediante un ajuste que nos permitió hacer los resultados comparables además de hacer mucho más manejable la distribución resultante. Se observó el comportamiento a largo plazo de la probabilidad de ruina para este tipo de modelos, con base en las gráficas obtenidas y en la observación del comportamiento de la distribución utilizada se pudo comprender y distinguir un comportamiento consistente de la probabilidad $\chi(u, b)$.
-

Apéndice A

Algunos conceptos utilizados

A.1. Distribución de probabilidad Erlang

“¡Hey, es simple aritmética! Recibimos 3200 llamadas en un día. Eso es 400 llamadas en 1 hora. Una llamada cada 3 minutos, así que cada persona puede atender 20 llamadas en 1 hora. Por lo tanto necesitamos 20 líneas y 20 personas para contestar los teléfonos”.



Figura A.1. Agner Krarup Erlang 1878-1929

Anteriormente éste era el razonamiento que se seguía para determinar cuántos circuitos eran necesarios para proveer un servicio telefónico, no sólo es simple y claro, es absolutamente equivocado. Este problema tiene dos soluciones extremas:

- Proporcionar las 3200 líneas telefónicas necesarias para cubrir la demanda completa (3200 llamadas) así como las personas para contestarlas, lo cual aunque nos asegurará que todas las llamadas serán contestadas, ya que no existirá tiempo de espera y no se perderá ningún cliente potencial, resulta no solo costoso sino poco viable y funcional.
- Proporcionar solo una línea telefónica y una persona que conteste todas las llamadas, lo cual resulta en un pésimo servicio ya que el tiempo de espera para que un cliente sea atendido será muy grande aunque con la ventaja de costos de operación prácticamente inexistentes.

Esto fue lo que llevó al matemático, estadístico e ingeniero danés *Agner Krarup Erlang* a desarrollar la teoría hoy conocida como *Ingeniería de Tráfico*, como parte de su trabajo para la Copenhague Telephone Company (CTC). A Erlang se le presentó el problema clásico de la determinación de cuántos circuitos eran necesarios para proveer un servicio aceptable, en el caso particular de la compañía telefónica él entendió que ese razonamiento era equivocado por la sencilla razón de que las llamadas no ingresan uniformemente a lo largo del tiempo sino que siguen un cierto comportamiento, en sus propias palabras, *se acumulan*, a diferentes horas y por diferentes circunstancias.

Algunas de sus publicaciones fueron: "Teoría de las probabilidades y las conversaciones telefónicas", 1909. y "Solución de algunos problemas en teoría de probabilidades de importancia en centrales telefónicas automáticas", 1917. Del trabajo de Erlang se desprende la distribución base de esta tesis, la distribución Erlang que detallaremos a continuación.

La distribución Erlang es una distribución continua, positiva y esta completamente determinada por los parámetros k (de forma) y λ (en algunos textos llamado de escala). El parámetro k debe ser un entero no negativo y la escala o tasa λ un número no negativo. Su función de densidad esta dada por

$$f(x; k, \lambda) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, \quad x, \lambda \geq 0,$$

y su función de distribución

$$F(x; k, \lambda) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda x} (\lambda x)^n / n!$$

Se puede demostrar que

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{k}{\lambda} \\ \text{Var}[X] &= \frac{k}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= (1 - t/\lambda)^{-k}, \quad t < \lambda. \end{aligned}$$

Podemos obtener algunas otras distribuciones conocidas partiendo de la distribución Erlang:

1. La distribución exponencial se obtiene cuando el parámetro de forma k es uno.
2. La distribución ji-cuadrada se obtiene cuando el inverso del parámetro tasa es igual a dos, entonces toma la forma de una distribución ji-cuadrada con $2k$ grados de libertad, así, podemos considerarla como una generalización de dicha distribución.

La distribución Erlang es un caso particular de la distribución gama, ya que la distribución gama tiene la misma densidad de probabilidad solo que no esta restringida a que el parámetro de forma k sea un entero.

A.2. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

De acuerdo con la teoría general de ecuaciones diferenciales presentada, por ejemplo, en Edwards, C.H. [6] y Verdiguier, C. [12], la forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de grado n es

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

en donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes reales con $a_n \neq 0$. Una solución general de este tipo de ecuaciones es una combinación lineal de n soluciones particulares linealmente independientes, las cuales pueden ser encontradas mediante la ecuación característica.

La ecuación característica. La ecuación característica asociada a una ecuación diferencial de la forma (A.1) es la siguiente

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Primero buscamos una solución sencilla a la ecuación (A.1), y empezamos con la observación

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^k e^{rx},$$

así que cualquier derivada de e^{rx} es un múltiplo constante de e^{rx} . Por lo tanto sustituyendo $y = e^{rx}$ en la ecuación (A.1), cada término sería un múltiplo constante de e^{rx} con los coeficientes constantes dependiendo de r y de los coeficientes a_i . Esto sugiere que tratemos de determinar r de modo que todos estos múltiplos de e^{rx} tengan suma cero, en cuyo caso $y = e^{rx}$ será una solución de la ecuación (A.1), a saber,

$$\begin{aligned} L(e^{rx}) &= e^{rx}(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) \\ &= e^{rx} Z(r), \end{aligned}$$

para toda r . Para aquellos valores de r para los que $Z(r) = 0$, se concluye que $L[e^{rx}] = 0$ y que $y = e^{rx}$ es una solución de (A.1). Tenemos 3 casos para obtener la solución de dicha ecuación:

Caso 1.- Si $\{r_i\}_{i=0}^{n+1}$ son todas diferentes y reales, la solución esta dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}.$$

Caso 2.- Si $\{r_i\}_{i=0}^k$ son k raíces repetidas y las restantes son distintas

$$y(x) = e^{r_1 x}(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \dots + c_n e^{r_n x}.$$

Caso 3.- Si $\{r_i\}_{i=0}^k$ son $\frac{k}{2}$ pares de raíces conjugadas complejas $a + bi$ y las restantes son raíces reales distintas

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{ax}(d_1 + d_2 x + \dots + d_{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}) \cos bx + \\ &\quad + (d_1 + d_2 x + \dots + d_{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}) \operatorname{sen} bx + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \dots + c_n e^{r_n x}, \end{aligned}$$

con los coeficientes c_i y d_i completamente determinados por las condiciones iniciales del problema.

A.3. Un teorema de diferenciabilidad

Proposición 4 *Sea $g(x, y)$ diferenciable e integrable en x, y sea f dada por*

$$f(x) = \int_0^x g(x, y) dy,$$

entonces la derivada de la función f esta dada por

$$f'(x) = g(x, x) + \int_0^x \frac{d}{dx} g(x, y) dy.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x+h} g(x+h, y) dy - \int_0^x g(x, y) dy}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(x+h, y) dy + \int_x^{x+h} g(x+h, y) dy - \int_0^x g(x, y) dy}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} g(x+h, y) dy + \int_0^x (g(x+h, y) - g(x, y)) dy}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} g(x+h, y) dy}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (g(x+h, y) - g(x, y)) dy}{h} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio e intercambiando el límite y la integral,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x, x) + \int_0^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} dy \\ &= g(x, x) + \int_0^x \frac{d}{dx} g(x, y) dy \end{aligned}$$

■

A.4. Fórmula de Leibniz

Proposición 5 Sean f y g dos funciones n veces diferenciables. Defina

$$p(x) = f(x)g(x).$$

Entonces la n -ésima derivada de p esta dada por

$$p^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

Apéndice B

Códigos de programas

B.1. Códigos en R

En las secciones 2.4.1 y 2.4.2 se proveen gráficas y tablas con resultados referentes a la probabilidad de ruina, para poder realizar esto se utilizaron los siguientes programas.

Montos individuales Erlang(2, 2) y tiempos interarribo Erlang(2, 2).

```
##### Condiciones iniciales #####
gama=2
beta=2
c1=1.1

##### Ecuación característica #####
w=c1^2
x=2*gama*c1^2-2*beta*c1
y=beta^2-4*gama*beta*c1+gama^2*c1^2
z=2*gama*beta^2-2*gama^2*beta*c1

##### Solución por Newton #####
for(r in -3:3){
  for(i in 1:20){
    r=r-((w*r^4+x*r^3+y*r^2+z*r)/(4*w*r^3+3*x*r^2+2*y*r+z))
    print(r)
  }
}
```



```
print("raíz")
}

##### Raices de la ecuación característica #####
r_0=-2.78924
r_1=-0.1818
r_2=2.6074
r_3=0

##### Sistema de ecuaciones #####
e=1/(r_0+gama)
f=1/(r_1+gama)
g=1/(r_2+gama)
h=1/(r_3+gama)
e2=e^2
f2=f^2
g2=g^2
h2=h^2
i=beta-(c1*r_0)
j=beta-(c1*r_1)
k=beta-(c1*r_2)
l=beta-(c1*r_3)

##### Solución sistema #####
alpha<-matrix(1:52,ncol=13,byrow=TRUE,
dimnames=list(c("alpha0","alpha1","alpha2","alpha3"),
c("b=0", "b=1", "b=2", "b=3", "b=4", "b=5", "b=6",
  "b=7", "b=8", "b=9", "b=10", "b=11", "b=12")))
m1<-matrix(1:16,ncol=4,byrow=TRUE)
m2<-matrix(1:16,ncol=4,byrow=TRUE)
s<-matrix(1:4,ncol=1,byrow=TRUE)

for(b1 in 0:12){
a=exp(r_0*b1)
b=exp(r_1*b1)
c=exp(r_2*b1)
d=exp(r_3*b1)
m1<-matrix(c(a,b,c,d,e,f,g,h,e2,f2,g2,h2,i*a,j*b,k*c,l*d),
```

```
ncol=4,byrow=TRUE)
m2<-matrix(c(1,0,0,beta),ncol=1,byrow=TRUE)
s<-solve(m1, m2, LAPACK = TRUE)
b1=b1+1
alpha[,b1]<-s
}

##### Cálculo chi(u,b) #####
chi<-matrix(1:78,ncol=13,byrow=TRUE,dimnames = list(c("u=0",
"u=1","u=2","u=3","u=4","u=5"),c("b=0", "b=1", "b=2", "b=3",
"b=4", "b=5",
"b=6", "b=7", "b=8", "b=9", "b=10", "b=11", "b=12")))

for(b in 0:12){
for(u in 0:5){
U<-matrix(c(exp(r_0*u),exp(r_1*u),exp(r_2*u),exp(r_3*u)),
ncol=4,byrow=TRUE)
chi[u+1,b+1]<-U%%alpha[,b+1]
}
}

for(i in 1:6){
for(j in 1:6){
if(chi[i,j]<0){
chi[i,j]=0
}
}
}
chi
```

Montos individuales $\exp(\gamma)$ y tiempos interarribo Erlang(2, 2).

```
##### Condiciones iniciales #####
gama=1
beta=2
c1=1.1

##### Ecuación característica #####
w=c1^2
x=gama*c1^2-2*beta*c1
y=beta^2-2*beta*gama*c1

##### Solución por fórmula general #####
r_0=0
r_1=(-x+sqrt((x^2)-(4*w*y)))/(2*w)
r_2=(-x-sqrt((x^2)-(4*w*y)))/(2*w)

##### Comprobación #####
w*r_0^3+x*r_0^2+y*r_0
w*r_1^3+x*r_1^2+y*r_1
w*r_2^3+x*r_2^2+y*r_2

##### Raices de la ecuación característica #####
r_0=0
r_1=2.756299
r_2=-0.1199356

##### Sistema de ecuaciones #####
e=1/(r_0+gama)
f=1/(r_1+gama)
g=1/(r_2+gama)
i=beta-(c1*r_0)
j=beta-(c1*r_1)
k=beta-(c1*r_2)

##### Solución sistema #####
alpha<-matrix(1:36,ncol=12,byrow=TRUE,
dimnames=list(c("alpha0","alpha1","alpha2"),
```

```

c("b=0", "b=1", "b=2", "b=3", "b=4", "b=5",
  "b=6", "b=7", "b=8", "b=9", "b=10", "b=11"))
m1<-matrix(1:9,ncol=3,byrow=TRUE)
m2<-matrix(1:3,ncol=1,byrow=TRUE)
s<-matrix(1:3,ncol=1,byrow=TRUE)

for(b1 in 0:11){
a=exp(r_0*b1)
b=exp(r_1*b1)
c=exp(r_2*b1)
m1<-matrix(c(a,b,c,e,f,g,i*a,j*b,k*c),ncol=3,byrow=TRUE)
m2<-matrix(c(1,0,beta),ncol=1,byrow=TRUE)
s<-solve(m1, m2, LAPACK = TRUE)
b1=b1+1
alpha[,b1]<-s
print(m1%%alpha[,b1])
}

##### Comprobación Sistema #####
for(b1 in 0:11){
a=exp(r_0*b1)
b=exp(r_1*b1)
c=exp(r_2*b1)
m1<-matrix(c(a,b,c,e,f,g,i*a,j*b,k*c),ncol=3,byrow=TRUE)
print(m1%%alpha[,b1+1])
}

##### chi(u,b) #####
chi<-matrix(1:72,ncol=12,byrow=TRUE,
dimnames = list(c("u=0", "u=1", "u=2", "u=3", "u=4", "u=5"),
c("b=0", "b=1", "b=2", "b=3", "b=4", "b=5", "b=6",
  "b=7", "b=8", "b=9", "b=10", "b=11")))

for(b in 0:11){
for(u in 0:5){
U<-matrix(c(exp(r_0*u),exp(r_1*u),exp(r_2*u)),
ncol=3,byrow=TRUE)
chi[u+1,b+1]<-U%%alpha[,b+1]

```

```

}
}

for(i in 1:6){
for(j in 1:6){
if(chi[i,j]<0){
chi[i,j]=0
}
}
}
chi

```

B.2. Códigos en Scilab

En la sección 2.5, se presentan tablas con valores específicos de la probabilidad $\chi(u, b)$ para los casos $n = \gamma = 5, 4, 3, 2, 1$ (los últimos dos ya obtenidos anteriormente), en esta ocasión nos apoyamos en el software matemático Scilab para obtener las soluciones de las ecuaciones, las soluciones del sistema y por último los valores para $\chi(u, b)$. Se anexa el código necesario para el caso $u = 0$, para obtener los demás resultados es necesario solo cambiar el capital inicial y correr de nuevo el programa.

```

/// Condiciones iniciales ///

c=1.1;
B=2;

/// Variando u=0,1,2 ///

u=0;

////////// n=5 //////////

p7=[1.21 25.85 196.5 512.5 -718.75 -4968.75 -1250 0];
roots(p7);
r_7=ans;

```

```

gama=5;

alphas=zeros(7,40);
chi=zeros(1,40);
R=zeros(7,7);
U=zeros(7,1);
d=[1;0;0;0;0;0;B];

for(j=1:40)
b=j;
for i=1:7,R(1,i)=%e^(r_7(i)*b);end
for i=1:7,R(2,i)=(r_7(i)+gama)^-1;end
for i=1:7,R(3,i)=(r_7(i)+gama)^-2;end
for i=1:7,R(4,i)=(r_7(i)+gama)^-3;end
for i=1:7,R(5,i)=(r_7(i)+gama)^-4;end
for i=1:7,R(6,i)=(r_7(i)+gama)^-5;end
for i=1:7,R(7,i)=(B-c*r_7(i))*%e^(r_7(i)*b);end
alphas(:,j)=inv(R)*d;
for i=1:7,U(i,1)=%e^(r_7(i)*u);end
chi(1,j)=alphas(:,j) '*U;
;end
ptosn5=zeros(40,2);
for p=1:40,ptosn5(p,1)=p;ptosn5(p,2)=real(chi(1,p));end
ptosn5

////////// n=4 //////////

p6=[1.21 14.96 49.76 -48.64 -432.64 -102.4 0];
roots(p6);
r_6=ans;

gama=4;

alphas=zeros(6,40);
chi=zeros(1,40);
R=zeros(6,6);
U=zeros(6,1);
d=[1;0;0;0;0;B];

```

```

for(j=1:40)
b=j;
for i=1:6,R(1,i)=%e^(r_6(i)*b);end
for i=1:6,R(2,i)=(r_6(i)+gama)^-1;end
for i=1:6,R(3,i)=(r_6(i)+gama)^-2;end
for i=1:6,R(4,i)=(r_6(i)+gama)^-3;end
for i=1:6,R(5,i)=(r_6(i)+gama)^-4;end
for i=1:6,R(6,i)=(B-c*r_6(i))*%e^(r_6(i)*b);end
alphas(:,j)=inv(R)*d;
for i=1:6,U(i,1)=%e^(r_6(i)*u);end
chi(1,j)=alphas(:,j) '*U;
;end
ptosn4=zeros(40,2);
for p=1:40,ptosn4(p,1)=p;ptosn4(p,2)=real(chi(1,p));end
ptosn4

////////// n=3 //////////

p5=[1.21 6.49 -2.93 -50.13 -10.8 0];
roots(p5);
r_5=ans;

gama=3;

alphas=zeros(5,40);
chi=zeros(1,40);
R=zeros(5,5);
U=zeros(5,1);
d=[1;0;0;0;B];

for(j=1:40)
b=j;
for i=1:5,R(1,i)=%e^(r_5(i)*b);end
for i=1:5,R(2,i)=(r_5(i)+gama)^-1;end
for i=1:5,R(3,i)=(r_5(i)+gama)^-2;end
for i=1:5,R(4,i)=(r_5(i)+gama)^-3;end
for i=1:5,R(5,i)=(B-c*r_5(i))*%e^(r_5(i)*b);end

```

```
alphas(:,j)=inv(R)*d;
for i=1:5,U(i,1)=%e^(r_5(i)*u);end
chi(1,j)=alphas(:,j) '*U;
;end
ptosn3=zeros(40,2);
for p=1:40,ptosn3(p,1)=p;ptosn3(p,2)=real(chi(1,p));end
ptosn3

////////// n=2 //////////

p4=[1.21 0.44 -8.76 -1.6 0];
roots(p4);
r_4=ans;

gama=2;

alphas=zeros(4,40);
chi=zeros(1,40);
R=zeros(4,4);
U=zeros(4,1);
d=[1;0;0;B];

for(j=1:40)
b=j;
for i=1:4,R(1,i)=%e^(r_4(i)*b);end
for i=1:4,R(2,i)=(r_4(i)+gama)^-1;end
for i=1:4,R(3,i)=(r_4(i)+gama)^-2;end
for i=1:4,R(4,i)=(B-c*r_4(i))*%e^(r_4(i)*b);end
alphas(:,j)=inv(R)*d;
for i=1:4,U(i,1)=%e^(r_4(i)*u);end
chi(1,j)=alphas(:,j) '*U;
;end
ptosn2=zeros(40,2);
for p=1:40,ptosn2(p,1)=p;ptosn2(p,2)=real(chi(1,p));end
ptosn2
```

```
////////// n=1 ////////////

p3=[1.21 -3.19 -0.4 0];
roots(p3);
r_3=ans;

gama=1;

alphas=zeros(3,40);
chi=zeros(1,40);
R=zeros(3,3);
U=zeros(3,1);
d=[1;0;B];

for(j=1:40)
b=j;
for i=1:3,R(1,i)=%e^(r_3(i)*b);end
for i=1:3,R(2,i)=(r_3(i)+gama)^-1;end
for i=1:3,R(3,i)=(B-c*r_3(i))*%e^(r_3(i)*b);end
alphas(:,j)=inv(R)*d;
for i=1:3,U(i,1)=%e^(r_3(i)*u);end
chi(1,j)=alphas(:,j) '*U;
;end
ptosn1=zeros(40,2);
for p=1:40,ptosn1(p,1)=p;ptosn1(p,2)=real(chi(1,p));end
ptosn1
```

Bibliografía

- [1] Claramunt, M.M., Mármol, M. y Lacayo, R. (2005). *On the probability of reaching a barrier in an Erlang (2) risk process*. Statistics and Operations Research Transactions (SORT). Volumen 29, nº2.
- [2] Mármol, M., Claramunt, M.M. y Alegre, A. (2003). *Reparto de dividendos en una cartera de seguros no vida. Obtención de la barrera constante óptima bajo criterios económico-actuariales*. Documents de treball (Universitat de Barcelona. Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales); E03/99.
- [3] Dickson, D.C.M. (1998). *Ruin probabilities for Erlang (2) risk process*. Insurance: Mathematics and Economics, 29,333-344.
- [4] Dickson, D.C.M. (1959). *Insurance risk and ruin*. Cambridge University Press.
- [5] Dickson, D.C.M., Gray, J.R. (1984). *Approximations to ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier*. Scandinavian Actuarial Journal, 105-115.
- [6] Edwards, C.H., Penney, D.E. (2001). *Ecuaciones diferenciales*. Pearson Education, México.
- [7] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y Denuit, M. (2001). *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers.
- [8] Mikosch T. (2004). *An introduction with stochastic processes*. Non-life insurance mathematics. Springer.
- [9] Rincón, L. (2007). *Notas de clase: Introducción a la Teoría de Riesgo*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Distrito Federal, México.

- [10] Murillo, A. (2007). Notas de clase: *Introducción a la Teoría de Riesgo: Modelo Clásico de Riesgo*. Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., Guanajuato, México.
- [11] Rotar', V.V. (2007). *Actuarial Models: the mathematics of insurance*. Taylor and Francis Group.
- [12] Verdiguier, C. (1994). *Álgebra y Ecuaciones Diferenciales*. Escuela Politécnica de Valencia, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial, Departamento de Matemática Aplicada, Valencia.
-