



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Perforando convexos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
PABLO SOBERÓN BRAVO

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT

2010





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno Soberón Bravo Pablo 56 55 81 88 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 407003121
2. Datos del tutor Dr Luis Montejano Peimbert
3. Datos del sinodal 1 Dr Javier Bracho Carpizo
4. Datos del sinodal 2 Dr Jesús Jerónimo Castro
5. Datos del sinodal 3 Dr Ricardo Strausz Santiago
6. Datos del sinodal 4 Dr Déborah Oliveros Braniff
7. Datos del trabajo escrito Perforando convexos 34 p 2010

## **Dedicatoria**

A mi abuela Socorro, mi primo Adrián y a mi hermanito Emilio.

## Agradecimientos

El trabajo de esta tesis no hubiera sido posible de no haber sido por dos de mis maestros: Luis Montejano y Ricardo Strausz. Ellos fueron los primeros en enseñarme geometría discreta de manera formal. Tener dos profesores tan dispuestos a trabajar conmigo y a “jalarme” a esta área fue lo que realmente me motivó a adentrarme a este tema. Además, el tener sus dos enfoques a mi alcance (el topológico y el matroidal, respectivamente) me ha mostrado la diversidad y multidisciplinaridad de esta área. A cada uno lo considero un muy buen amigo y les agradezco enormemente su apoyo.

También le agradezco a mis otros maestros. Entre ellos, a Déborah, Roli, Chuy (quién fue realmente el primero en hablarme de geometría combinatoria), José Alfredo Amor y Angel Carrillo. En especial me gustaría mencionar a Mila y Ana. Ellas fueron las primeras que me motivaron a estudiar matemáticas cuando entré a la olimpiada y a quienes considero que, de cierta forma, me catapultaron hasta este punto.

No podría haber llegado hasta aquí de no ser por el apoyo constante de mi familia. En particular el apoyo de mis padres y mi abuelo es la mayor motivación que tengo y son mi mejor ejemplo a seguir. También le agradezco a mis tíos y a mis primos (a quienes considero mis hermanos). A mi hermanito Emilio, que seguro pensó que se me iba a olvidar mencionarlo. A mis amigos; y las repetidas excursiones a las copas y las truchas. Entre ellos, a Claudia, Thalía, Diego, Daniel, Lara, Maga y Miriana. Además, quisiera agradecerle a mi novia Carlita, por todo el apoyo que me ha dado.

Por último, quisiera agradecerle a ti, que estás leyendo este trabajo. Que este trabajo sea de interés para más personas que las directamente involucradas es lo que realmente justifica su existencia.

Si olvido a alguna persona, es por falta de memoria y no por falta de aprecio.

# Contenido

<b>Dedicatoria</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminares . . . . .	4
1.2 Teoremas tipo Helly . . . . .	9
1.3 Variaciones de Helly . . . . .	10
1.4 La propiedad $(p,q)$ . . . . .	12
<b>2 Gráficas de convexos</b>	<b>15</b>
<b>3 La propiedad <math>(p, q)_r</math></b>	<b>19</b>
3.1 Familias balanceadas . . . . .	19
3.2 Familias no balanceadas . . . . .	23
<b>4 Números de cubrimiento para otros teoremas</b>	<b>25</b>
4.1 Algunos ejemplos . . . . .	25
4.2 Para colinealidad . . . . .	28

# Capítulo 1

## Introducción

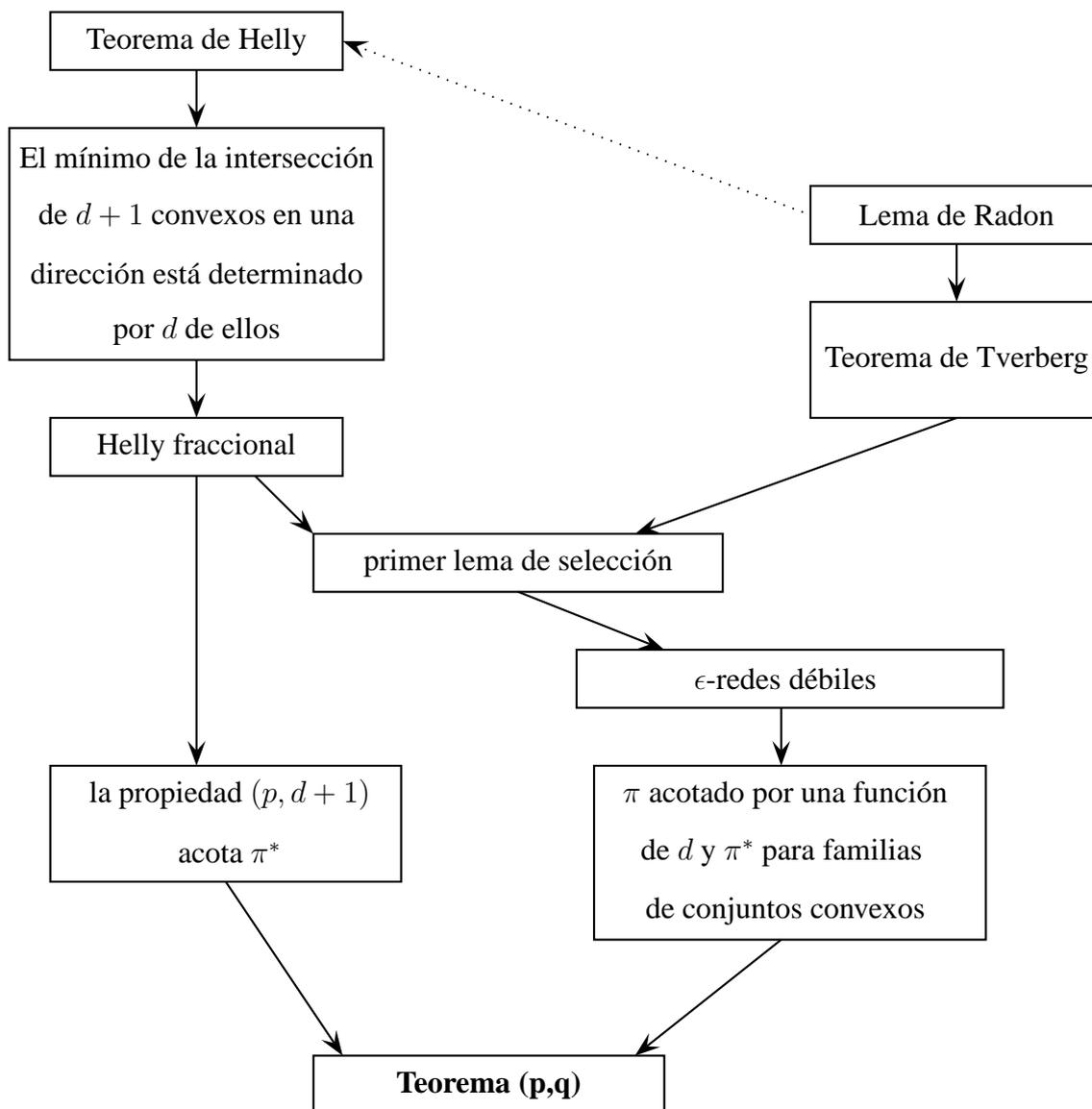
Nuestro interés principal en esta tesis es la *propiedad*  $(p, q)$  de Hadwiger-Debrunner.

**Definición 1** Diremos que una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos tiene la propiedad  $(p, q)$  si de cada  $p$  de ellos hay  $q$  que se intersectan.

Alon y Kleitman demostraron en 1992 [15] el siguiente teorema.

**Teorema  $(p, q)$  (1992)** *Dados enteros  $p \geq q \geq d + 1$ , existe un número  $c = c(p, q, d)$  tal que para cualquier familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)$ , hay un conjunto de  $c$  puntos que los intersecta a todos.*

Es decir, sin importar cuántos convexos tenga la familia, esta propiedad es suficiente para acotar el número de puntos necesarios para intersectar a todos los convexos y este número es finito. Este teorema le da una justificación muy fuerte al interés en la propiedad  $(p, q)$ . El problema de este teorema es que su demostración usa prácticamente todo bajo el sol y no da cotas buenas para el número de puntos necesarios para intersectar a toda la familia. Los teoremas necesarios para demostrar dicho teorema se pueden representar mediante el siguiente diagrama [9].



En este diagrama hay dos tipos de resultados. El primer tipo son resultados sobre familias de puntos en general, en las que nos se pide ninguna estructura a estas familias, pero su tamaño nos da ciertas propiedades. El segundo tipo son teoremas sobre familias de convexos. En este tipo de resultados, se pide que las subfamilias de cierto tamaño cumplan una propiedad para concluir que toda la familia cumple dicho teorema. A continuación enunciaremos los resultados, y en la siguiente sección se trabajarán con más detenimiento.

Comenzamos con los resultados del primer tipo.

Johann Radon prueba en 1921 [11] el teorema de Helly. En esta demostración, prueba el siguiente lema.

**Teorema de Radon (1921)** Dados  $d + 2$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , se pueden separar en dos conjuntos  $A, B$  de tal manera que las envolventes convexas de ambas partes se intersectan.

45 años después, Hedy Tverberg generaliza el resultado anterior en el siguiente teorema. Ahora en vez de querer partir el conjunto de puntos en dos partes, se busca partirlo en cualquier número de pedazos. Cabe destacar que cuando Tverberg intentó probar su teorema, fue porque había entendido mal un problema que le habían propuesto. Afortunadamente, gracias a ese malentendido, se pudo demostrar lo que ahora se conoce como el teorema de Tverberg.

**Teorema de Tverberg (1966)** Dados  $(k - 1)(d + 1) + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , se pueden separar en  $k$  conjuntos  $K_1, K_2, \dots, K_k$  de tal manera que las envolventes convexas de cada parte se intersectan.

Después, Imre Bárány demuestra [1] que si se tienen muchos puntos en  $\mathbb{R}^d$ , hay un punto en muchos de sus simplejos (envolventes convexas de  $d + 1$  puntos). Lo interesante de este resultado es que la cantidad de simplejos que contienen a dicho punto es proporcional a la cantidad de puntos en el conjunto original. A este resultado se le suele llamar el primer lema de selección porque en ese mismo artículo prueba más de un resultado de este estilo.

**Primer lema de selección (1982)** Dada una familia de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , siempre hay un punto en la envolvente convexa de al menos  $C_d \binom{n}{d+1}$  de sus  $(d + 1)$ -adas.  $C_d$  depende sólo de la dimensión.

A pesar de que el resultado anterior parece ser bastante inocente, es prácticamente la base para la demostración del siguiente resultado. El siguiente teorema nos habla sobre el número de puntos que se necesitan para intersectar a todos los convexos que contienen a al menos  $\epsilon n$  puntos de un conjunto original de  $n$  puntos. Sorprendentemente este número no depende de  $n$ .

**Teorema de las  $\epsilon$ -redes débiles (1992)** Para cada  $d \geq 1, \epsilon > 0$ , y  $X$  subconjunto finito de  $\mathbb{R}^d$ , hay una  $\epsilon$ -red débil para  $X$  de tamaño  $f(d, \epsilon)$ , que depende de  $d$  y  $\epsilon$  pero no depende del tamaño de  $X$ .

Los resultados del segundo tipo son:

**Teorema de Helly (1923)** Para cualquier familia finita  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$ , los convexos de  $\mathcal{F}$  tienen un punto de intersección si y sólo si cada  $d + 1$  de ellos tienen un punto de intersección.

El teorema de Helly fue demostrado anteriormente por Radon, pero Edward Helly publica su prueba dos años más tarde [5]. Se le llama teorema de Helly porque Helly se lo comunicó en una carta a Radon, y por ello él publica su demostración antes. El teorema de Helly va a ser la base de toda una familia de generalizaciones, entre ellas el teorema  $(p, q)$ . Lo que nos dice es que basta checar las intersecciones de las  $(d + 1)$ -adas de convexos para saber si la familia total se interseca. Si uno debilita la condición y sólo pide que cierta proporción de las  $(d + 1)$ -adas de convexos se intersecten, entonces también se obtienen resultados interesantes, como el siguiente teorema.

**Teorema de Helly Fraccional (1979)** Sea  $d$  un entero positivo. Para cada  $\alpha \in (0, 1)$  existe un  $\beta = \beta(\alpha, d) \in (0, 1)$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para toda familia  $\mathcal{F}$  de  $n$  convexos en  $\mathbb{R}^d$ , si al menos  $\alpha \binom{n}{d+1}$  de las  $(d + 1)$ -adas tienen intersección no vacía, entonces hay al menos  $\beta n$  de los convexos con intersección no vacía.

En el último par de resultados del diagrama,  $\pi$  es el número que buscamos, es decir, el menor número de puntos que se necesita para intersectar a todos los convexos de una familia.  $\pi^*$  es una generalización de éste número con funciones, que nos permite trabajarlo más fácilmente, a pesar de que en este caso no sea necesariamente entero.

En esta tesis trabajaremos con una propiedad semejante a la  $(p, q)$ , a la cual llamaremos la propiedad  $(p, q)_r$ . Vamos a considerar las familias de convexos tales que para cualesquiera  $p$  de ellos, hay  $r$   $q$ -adas que se intersectan. Con esta notación, la propiedad  $(p, q)$  usual sería la propiedad  $(p, q)_1$ . Nos va a interesar encontrar  $r$  suficientemente grandes para que podamos intersectar a la familia con pocos puntos.

## 1.1 Preliminares

En el presente trabajo suponemos que estamos siempre en el espacio euclidiano  $d$ -dimensional  $\mathbb{R}^d$ . Dados dos puntos  $a, b$  de  $\mathbb{R}^d$  consideraremos el segmento  $[a, b]$  como el conjunto  $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$ . Se trabajará sobre la estructura familias de conjuntos *convexos*, es decir

**Definición 2** Diremos que  $A \subset \mathbb{R}^d$  es convexo si para todo  $a, b \in A$ , se tiene que el segmento  $[a, b]$  está contenido en  $A$ .

**Proposición 1** Si  $\mathcal{F}$  es una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  entonces  $\cap \mathcal{F}$  es convexo.

**Demostración**

Si  $a, b \in \cap \mathcal{F}$ , entonces para todo  $K \in \mathcal{F}$  se tiene que  $a, b \in K$ . Con esto  $[a, b] \subset K$ . Es decir,  $[a, b] \subset \cap \mathcal{F}$ .  $\square$

Teniendo en cuenta ésto, dado un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^d$  podemos definir su envolvente convexa, es decir, el convexo más pequeño que lo contiene. En otras palabras,

**Definición 3** Dado  $S \subset \mathbb{R}^d$  definimos  $\langle S \rangle = \cap \{K \mid S \subset K, K \text{ es convexo}\}$ .

También se le suele llamar a  $\langle S \rangle$  el casco convexo de  $S$ . Con la proposición anterior queda claro que  $\langle S \rangle$  es convexo y contiene a  $S$ . Además, para cada  $S \subset \mathbb{R}^d$  se tienen las siguientes 3 propiedades:

- $S \subset \langle S \rangle$ .
- Si  $S \subset T$ , entonces  $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$ .
- $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$ .

**Definición 4** Dado un conjunto  $S$  de puntos en el plano, diremos que  $S$  está en posición convexa si para todo  $x \in S$  se tiene que  $x \notin \langle S \setminus \{x\} \rangle$ .

**Proposición 2** Dado un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\langle S \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in S, \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1\}$

**Demostración**

Sea  $B = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in S, \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1\}$ . Dados  $a, b \in B$ , tenemos que  $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$  para algunos  $a_i \in S$  y algunos reales no negativos  $\alpha_i$  tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ . De manera semejante  $b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_m b_m$ . Todo punto  $c \in [a, b]$  es de la forma  $sa + tb$  con  $s + t = 1$  y  $s, t \geq 0$ .

Si consideramos  $\gamma_1 = s\alpha_1, \gamma_2 = s\alpha_2, \dots, \gamma_n = s\alpha_n, \gamma_{n+1} = t\beta_1, \gamma_{n+2} = t\beta_2, \dots, \gamma_{n+m} = t\beta_m$  y  $c_1 = a_1, c_2 = a_2, \dots, c_n = a_n, c_{n+1} = b_1, c_{n+2} = b_2, \dots, c_{n+m} = b_m$  tenemos que  $c = sa + tb = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_{n+m} c_m$  y que  $\gamma_i \geq 0$ . Además tenemos que  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n+m} = s(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + t(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) = s + t = 1$ . Por lo tanto  $c \in B$  y con eso  $B$  es convexo.

Es claro que  $S \subset B$  por lo que tenemos  $\langle S \rangle \subset B$ . Ahora vamos a probar por

inducción sobre  $n$  que todos los puntos de la forma  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$  van a estar en  $\langle S \rangle$ . Si  $n = 1$ , son los puntos de  $S$  por lo que sí están en  $\langle S \rangle$ . Si es cierto hasta cierto  $n$ , consideremos  $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n+1} a_{n+1}$ . Si  $\alpha_{n+1} = 1$ , entonces todos los demás  $\alpha_i$  son 0 y  $a = a_{n+1} \in \langle S \rangle$ . Si  $\alpha_{n+1} < 1$ , entonces consideremos  $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Con esto tenemos que  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{1 - \alpha_{n+1}} = \frac{1 - \alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} = 1$ . Entonces si  $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$  tenemos que  $b \in \langle S \rangle$ . Pero  $a = (1 - \alpha_{n+1})b + \alpha_{n+1} a_{n+1}$ . Como  $0 \leq \alpha_{n+1} < 1$ , tenemos que  $a$  es un punto del segmento  $[b, a_{n+1}]$ , y por la convexidad de  $\langle S \rangle$  tenemos que  $a \in \langle S \rangle$ . Entonces,  $B \subset \langle S \rangle$ , es decir,  $B = \langle S \rangle$ .  $\square$

Si  $c = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$  con  $\alpha_i \geq 0$  para todo  $i$  y  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  diremos que  $c$  es combinación convexa de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Teniendo esto en cuenta, es posible demostrar el primer teorema importante de la geometría convexa.

**Lema de Radon (1921)** Si  $S \subset \mathbb{R}^d$  y  $|S| \geq d + 2$  entonces hay dos conjuntos  $A$  y  $B$  tales que  $A \cup B = S$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \emptyset$ .

### Demostración

Consideremos el caso en que  $|S| = d + 2$  y sean  $v_0, v_1, \dots, v_{d+1}$  los puntos de  $S$ . Los vectores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_{d+1} - v_0$  no pueden ser linealmente independientes, por lo que existen reales  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d+1}$ , no todos iguales a 0, tales que  $\alpha_1(v_1 - v_0) + \alpha_2(v_2 - v_0) + \dots + \alpha_{d+1}(v_{d+1} - v_0) = 0$ . Si definimos  $\alpha_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{d+1})$ , obtenemos que  $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{d+1} v_{d+1} = 0$  y que  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{d+1} = 0$  (sin ser todos 0).

Sean  $X = \{i \mid \alpha_i \geq 0\}$  y  $Y = \{i \mid \alpha_i < 0\}$ . Si  $\beta_i = -\alpha_i$  para cada  $i$ , tenemos que  $\sum_{i \in X} \alpha_i = \sum_{i \in Y} \beta_i > 0$ . Además,

$$\sum_{i \in X} \alpha_i v_i = \sum_{i \in Y} \beta_i v_i.$$

Dividiendo ambas partes por  $\sum_{i \in X} \alpha_i$  obtenemos un punto en  $\langle A \rangle$  y en  $\langle B \rangle$  donde  $A = \{v_i \mid i \in X\}$  y  $B = \{v_i \mid i \in Y\}$ .  $\square$

A la pareja  $A, B$  se le llama una partición de Radon de  $S$ . El lema de Radon forma practicamente la base de la geometría combinatoria, ya que además de ser sencillo tiene una gran cantidad de equivalencias. Radon lo publica en 1921 cuando demuestra el teorema de Helly [11]. A Radon le parece tan sencillo que ni siquiera le pone nombre, lo hace sobre la marcha de la demostración principal. Las equivalencias más importantes de este lema son los teoremas de Carathéodory, Helly y Kirchberger. A continuación se muestra la demostración de éstos usando

el lema de Radon.

**Teorema de Caratheódory (1907)** Dado  $C \subset \mathbb{R}^d$  y  $x \in \langle C \rangle$  existe un conjunto  $C' \subset C$  tal que  $x \in \langle C' \rangle$  y  $|C'| \leq d + 1$ .

### Demostración

Como  $x \in \langle C \rangle$ , entonces  $x$  es combinación convexa de algunos elementos de  $C$ . Es decir,  $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$  con  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Si  $n \leq d + 1$  ya acabamos. Si algún  $\alpha_i = 0$ , podemos quitar ese elemento y tenemos a  $x$  como combinación convexa de menos elementos. Entonces podemos suponer  $\alpha_i > 0$  para todo  $i$ .

Si  $n \geq d + 2$  entonces por el lema de Radon existen subconjuntos  $H$  y  $J$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tales que si  $A = \{a_i \mid i \in H\}$  y  $B = \{a_i \mid i \in J\}$ ,  $A$  y  $B$  forman una partición de Radon de  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Entonces existen escalares no negativos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  tales que  $\sum_{i \in H} \gamma_i = \sum_{i \in J} \gamma_i = 1$  y hay un punto  $p$  tal que  $p = \sum_{i \in H} \gamma_i a_i = \sum_{i \in J} \gamma_i a_i$ .  
Sea  $\lambda = \min\{\frac{\alpha_i}{\gamma_i} \mid i \in H, \gamma_i > 0\}$ .

$$\begin{aligned} x &= x - \lambda p + \lambda p = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right) - \lambda \left( \sum_{i \in H} \gamma_i a_i \right) + \lambda \left( \sum_{i \in J} \gamma_i a_i \right) = \\ &= \sum_{i \in H} (\alpha_i - \lambda \gamma_i) a_i + \sum_{i \in J} (\alpha_i + \lambda \gamma_i) a_i \end{aligned}$$

Notemos que ahora los coeficientes siguen sumando 1, ya que  $\sum_{i \in H} \gamma_i = \sum_{i \in J} \gamma_i$  y que por la minimalidad de  $\lambda$ , los coeficientes en  $H$  siguen siendo no negativos. Sin embargo, debe haber un índice  $i_0$  tal que  $\alpha_{i_0} - \lambda \gamma_{i_0} = 0$ , con lo que ahora  $a_{i_0}$  tiene coeficiente 0. Con esto tenemos que  $x$  puede escribirse como combinación convexa de menos elementos de  $C$ . Seguimos haciendo ésto hasta que quedan a lo más  $d + 1$  elementos en la combinación.  $\square$

Cabe notar que lo que estamos haciendo es la demostración de este teorema usando el lema de Radon. La prueba original es de 1907 en un artículo sobre análisis armónico [2]. La prueba original del teorema de Caratheódory consta de 22 páginas, bastante más que lo que se hace en la prueba anterior.

**Teorema de Helly (1923)** Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Si cada  $d + 1$  convexos de la familia tienen intersección no vacía, entonces toda la familia tiene intersección no vacía.

**Demostración**

Vamos a probar el teorema por inducción sobre  $n = |\mathcal{F}|$ . Si  $n = d + 1$ , por hipótesis la familia tiene intersección no vacía. Supongamos ahora que es cierto para  $n - 1$  y vamos a probarlo para  $n$  ( $n \geq d + 2$ ). Numeremos los convexos  $K_1, K_2, \dots, K_n$  de  $\mathcal{F}$  y consideremos  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} \setminus K_i$ . Notemos que  $|\mathcal{F}_i| = n - 1$ , y que  $\mathcal{F}_i$  cumple la condición del teorema. Entonces hay un punto  $p_i \in \cap \mathcal{F}_i$ . Como  $n \geq d + 2$ , hay una partición de Radon  $A, B$  de  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Consideremos  $p \in \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ . Dado un convexo  $K_i$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $p_i \in B$ . Con esto, todos los  $p_j$  de  $A$  están en  $K_i$ , es decir  $A \subset K_i$ . Usando la convexidad de  $K_i$  tenemos que  $p \in \langle A \rangle \subset K_i$ . Con esto  $p \in \cap \mathcal{F}$ , que es lo que queríamos.  $\square$

Cabe notar que se puede demostrar el lema de Radon usando el teorema de Helly. El teorema de Helly fue descubierto y demostrado por Edward Helly en 1913, y se lo comunica a Radon (quien publica una prueba en 1921 [11]). Sin embargo, ponemos como año 1923 ya que es cuando aparece publicada la demostración de Helly [5].

Notemos que el teorema de Helly no es verdadero si la familia es infinita. Para ver esto, dado un vector  $v$  con norma 1 en  $\mathbb{R}^d$  podemos definir  $H_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot v > k\}$ . Como los semiespacios son convexos, esta es una familia en la que cada  $d + 1$  convexos tienen intersección no vacía pero la familia total tiene intersección vacía. Si se quiere trabajar con una familia infinita, se le pide a los convexos que sean compactos. En este caso tenemos una familia con la propiedad de intersección finita (por aplicar el teorema de Helly a cualquier subfamilia finita) y por la compacidad de los convexos, obtenemos una intersección de toda la familia.

El lema de Radon también se puede generalizar a particiones con más pedazos.

**Teorema de Tverberg (1966)** *Si  $S$  es un conjunto de al menos  $(k - 1)(d + 1) + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  entonces  $S$  se puede separar en  $k$  pedazos disjuntos  $K_1, K_2, \dots, K_k$  de tal manera que*

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k} \langle K_i \rangle \neq \emptyset$$

A una partición de este estilo se le llama una partición de Tverberg. El lema de Radon es un caso particular de este teorema cuando  $k = 2$ . La prueba original de este teorema [13] consiste en ver que dado un conjunto  $S$  con  $(k - 1)(d + 1) + 1$  puntos y una partición de Tverberg, si se empieza a mover uno de sus puntos hasta que se rompe la partición, entonces se puede modificar dicha partición para que

siga cumpliendo la propiedad deseada. Esta prueba es bastante larga y complicada, pero se obtiene la minimalidad del número  $(k - 1)(d + 1) + 1$ .

También se puede dar una prueba del teorema de Tverberg con la versión coloreada del teorema de Caratheódory [1] (la prueba del teorema de Tverberg usando Caratheódory coloreado es de K. S. Zarkaria y fue hecha en 1992 [12]).

## 1.2 Teoremas tipo Helly

Es importante notar en el teorema de Helly que la estructura de intersección de la familia puede revisarse localmente. Es decir, sólo hay que revisar la intersección de cada  $d + 1$  convexos para saber si la familia total se interseca. Suena bastante inocente pero este teorema ha dado lugar a toda una gama de problemas en geometría combinatoria, todos buscando propiedades que se puedan checar en la subfamilias de cierto tamaño.

Con un teorema tipo Helly nos referimos a algún teorema donde haya una propiedad hereditaria  $\psi$  y un número  $\lambda$  que diga “si cada  $\lambda$  objetos de una familia  $\mathcal{F}$  tienen la propiedad  $\psi$ , entonces  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $\psi$ ”. El teorema de Helly es justamente cuando la propiedad  $\psi$  es: “tener intersección no vacía”. En este caso el número  $\lambda$  es igual a  $d + 1$ . En el último capítulo se verán algunas generalizaciones de teoremas de este estilo, veamos algunos ejemplos:

**Proposición 3** *Dado un conjunto  $S$  de puntos en  $\mathbb{R}^d$ , cualesquiera 3 de ellos son colineales si y sólo si todos son colineales.*

**Proposición 4** *Dado un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^d$ ,  $S$  está en posición convexa si y sólo si cada  $d + 2$  de sus puntos están en posición convexa.*

### Demostración

Si hay un punto  $x$  tal que  $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$ , entonces por el Teorema de Caratheódory hay un conjunto  $S' \subset S \setminus \{x\}$  tal que  $x \in \langle S' \rangle$ , donde  $S'$  tiene a lo más  $d + 1$  puntos. Entonces,  $S' \cup \{x\}$  es un conjunto de a lo más  $d + 2$  puntos de  $S$  que no está en posición convexa.  $\square$

Otro ejemplo sería el teorema de Kirchberger, que dice que la separación de convexos es una propiedad tipo Helly,

**Teorema de Kirchberger (1903)** *Dado dos conjuntos finitos  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^d$ , si para todo  $S \subset A \cup B$  con  $|S| \leq d + 2$  se tiene que  $\langle A \cap S \rangle \cap \langle B \cap S \rangle = \emptyset$  entonces  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \emptyset$ .*

### Demostración

Se sabe que dados  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \emptyset$  si y sólo si hay un hiperplano que separa a  $A$  y a  $B$ . Es decir, existen  $n \in \mathbb{R}^d$  y  $c \in \mathbb{R}$  tales que  $A \subset \{x \mid x \cdot n < c\}$  y  $B \subset \{x \mid x \cdot n > c\}$ . Notemos que para que esto se cumpla está implícito que  $n$  no sea el vector 0. Para cada  $a \in A$  consideremos  $X_a$  las parejas  $(n, c)$  tales que  $a \cdot n > c$  y para cada  $b \in B$  consideremos  $Y_b$  las parejas  $(n, c)$  tales que  $b \cdot n < c$ . La condición del teorema nos dice que cada  $d + 2$  de esos conjuntos tienen intersección no vacía. Sin embargo, una pareja  $(n, c)$  con  $n \in \mathbb{R}^d$  y  $c \in \mathbb{R}$  es un punto en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . En este espacio es claro que  $X_a$  y  $Y_b$  son convexos para todo  $a \in A$  y para todo  $b \in B$ . Entonces por el teorema de Helly tenemos que todos los  $X_a$  y  $Y_b$  tienen un punto en común, lo cuál define un hiperplano que separa a  $A$  y  $B$ .  $\square$

Realmente lo que dice el teorema es que basta checar las  $(d + 2)$ -adas de puntos para ver si las envolventes convexas se separan. Es curioso que este teorema implica fácilmente el teorema de Carathéodory a pesar de ser anterior a él [8]. Para ver esto, basta considerar  $B$  como un conjunto de un punto.

### 1.3 Variaciones de Helly

De las cuatro equivalencias del lema de Radon, el teorema de Helly es la más noble en el sentido en que se puede generalizar o modificar de más maneras. Veamos por ejemplo el teorema de Helly coloreado.

**Teorema de Helly Coloreado (1982)** Sean  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{d+1}$  familias finitas de convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que cada vez que consideramos  $d + 1$  convexos  $K_1 \in \mathcal{F}_1, K_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, K_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$  se sabe que  $\bigcap_{1 \leq i \leq d+1} K_i \neq \emptyset$ . Entonces hay una familia  $\mathcal{F}_i$  tal que  $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ .

#### Demostración

Consideremos  $A$  el conjunto de intersecciones de  $d$  convexos de familias distintas. Sabemos que existe una dirección  $v$  tal que cada uno de esas intersecciones alcanza su punto mínimo en la dirección  $v$  en un sólo punto [4]. Supongamos que  $K_1, K_2, \dots, K_d$  son aquellos convexos tales que el punto mínimo  $p_{d+1}$  en la dirección  $v$  de su intersección es maximal y que  $K_1 \in \mathcal{F}_1, K_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, K_d \in \mathcal{F}_d$ . Vamos a demostrar que cualquier  $K_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$  contiene a  $p_{d+1}$ .

Sabemos que  $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_d \cap K_{d+1} \neq \emptyset$ , como esos puntos están en la intersección de los  $K_i$  con  $1 \leq i \leq d$ , su parte  $v$ -direccional es mayor o igual a la de  $p_{d+1}$ . Sin embargo, si consideramos  $q_j$  el punto mínimo de  $\bigcap_{i \neq j} K_i$  tenemos que  $q_j$  debe tener su parte  $v$ -direccional menor o igual a la de  $p_{d+1}$ . Entonces debe haber un punto  $p_j$  en  $\bigcap_{i \neq j} K_i$  tal que  $p_j \cdot v = p_{d+1} \cdot v$ . Con esto tenemos  $d + 1$  puntos en el hiperplano ortogonal a  $v$  que pasa por  $p_{d+1}$ . Como ese hiperplano

tiene dimensión  $d - 1$ , podemos aplicar el Lema de Radon, de manera análoga a cuando se probó el teorema de Helly, para obtener un punto  $p_0$  en ese hiperplano en  $\bigcap_{1 \leq i \leq d+1} K_i$ . Por la unicidad de  $p_{d+1}$  en la dirección  $v$  tenemos que  $p_0 = p_{d+1}$ , es decir,  $p_{d+1} \in K_{d+1}$ .  $\square$

El teorema se llama coloreado ya que si pensamos a las familias como pintadas de  $d + 1$  colores, si cada  $(d + 1)$ -ada heterocromática se intersecta, hay un color para el cual todos los convexos de ese color se intersectan. Este teorema tiene como caso particular al teorema de Helly si consideramos las  $d + 1$  familias como iguales. Sin embargo, el teorema de Helly se puede probar sin usar la métrica de  $\mathbb{R}^d$ , pero para el teorema de Helly coloreado todavía no se ha encontrado una prueba de ese tipo. Notemos que si hacemos esta prueba para el teorema de Helly (la versión normal), obtenemos que el punto  $p_{d+1}$  está en la intersección de todos, por lo que termina siendo el mínimo en la dirección  $v$  de toda la familia. Este mínimo está determinado por  $d$  convexos, que era uno de los elementos que se necesitaba en el diagrama original. En la prueba se usa que las  $d$ -intersecciones en general sí tienen puntos mínimos en cada dirección, lo cual posiblemente no es cierto. Sin embargo el teorema es equivalente a su versión para convexos compactos, por lo que no hay problemas con ese argumento. Cabe notar que el teorema de Caratheódory también se puede colorear, pero su versión coloreada no es equivalente a la versión coloreada del teorema de Helly.

**Teorema de Caratheódory coloreado (1982)** Sean  $C_1, C_2, \dots, C_{d+1}$  familias de puntos en  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que  $p \in \mathbb{R}^d$  cumple que para cualesquiera  $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, \dots, c_{d+1} \in C_{d+1}$  se tiene que  $p \notin \langle c_1, c_2, \dots, c_{d+1} \rangle$ . Entonces hay una familia  $C_i$  tal que  $p \notin \langle C_i \rangle$ .

El teorema de Helly coloreado lo probó originalmente László Lovász, y el teorema de Caratheódory coloreado lo probó originalmente Imre Bárány. De la misma manera que el Teorema de Helly es una consecuencia de su versión coloreada, el Teorema de Caratheódory es consecuencia de su versión coloreada. [1]

El teorema de Helly también tiene una versión fraccional. El teorema original nos dice que si cada  $(d + 1)$ -ada de los convexos tiene intersección no vacía, entonces todos los convexos tienen un punto en común. Sin embargo, resulta que uno todavía puede concluir que cierta proporción de los convexos tiene un punto en común si alguna proporción de las  $(d + 1)$ -adas tiene intersección no vacía.

**Teorema de Helly fraccional (1979)** Sea  $d$  un entero positivo. Para cada  $\alpha \in (0, 1)$  existe un  $\beta = \beta(\alpha, d) \in (0, 1)$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para toda familia  $\mathcal{F}$  de  $n$  convexos en  $\mathbb{R}^d$ , si al menos  $\alpha \binom{n}{d+1}$  de las  $(d + 1)$ -adas tienen intersección

*no vacía, entonces hay al menos  $\beta n$  de los convexos con intersección no vacía.*

La primer demostración de este teorema es de Katchalski y Liu en 1979 [14]. Este teorema se puede probar haciendo uso del teorema de Tverberg y del teorema de Carathéodory coloreado, sin embargo la cota obtenida con ese método es  $\beta \geq \frac{\alpha}{d+1}$ . Mediante un argumento semejante al de la prueba de Helly coloreado (usando los puntos mínimos de las intersecciones de  $d$  convexos en una dirección) se puede obtener que si  $\alpha$  tiende a 1, entonces  $\beta$  tiende también a 1 [7].

Usando el Teorema de Helly fraccional, o usando los teoremas de Tverber y Carathéodory coloreado, se puede probar un lema bastante bonito sobre las intersecciones de las envolventes convexas de conjuntos pequeños de una familia de puntos [1].

**Lema de selección (1982)** Dados  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , existe un punto que está contenido en al menos  $c_d \binom{n}{d+1}$  de sus simplejos, donde  $c_d$  es una constante que depende únicamente de la dimensión.

Este es otro de los peldaños que necesitábamos para atacar el problema de la propiedad  $(p, q)$ .

## 1.4 La propiedad $(p, q)$

Cuando se debilita la condición de Helly ya no se obtiene como resultado un punto en la intersección de toda la familia. Sin embargo, condiciones semejantes pueden decir bastante sobre la estructura de separación de la familia. Éste fue el caso de las variaciones del teorema de Helly antes vistas. Siguiendo este tipo de ideas es natural pensar con cuántos puntos se puede intersectar a todos los puntos de una familia dada.

**Definición 5** Dada una familia  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$ , diremos que  $\pi(\mathcal{F})$  es el mínimo número de puntos necesarios para intersectar a todos los conjuntos de  $\mathcal{F}$ . A  $\pi(\mathcal{F})$  se le llama el número de perforación de  $\mathcal{F}$ .

Otra manera de acercarse a esta propiedad es usando el “número de perforación fraccional”, que dice lo siguiente

**Definición 6** Dada una familia  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$ , diremos que  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  es una función de perforación de  $\mathcal{F}$  si para todo  $K \in \mathcal{F}$  se tiene  $\sum_{x \in K} f(x) \geq 1$ . Le llamaremos  $\pi^*(\mathcal{F})$  al ínfimo de los números de la forma  $\sum_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$  donde  $f$  es una función de perforación de  $\mathcal{F}$ . A  $\pi^*(\mathcal{F})$  se le denomina el número de perforación fraccional.

Es claro que  $\pi^*(\mathcal{F}) \leq \pi(\mathcal{F})$  ya que si podemos encontrar  $r$  puntos que intersecten a todos los convexos de la familia, se cumple que la función  $f$  que vale 1 en esos puntos y 0 en lo demás es una función de perforación de la familia.

Resulta que se puede dar una desigualdad al revés, es decir, que existe una función  $g$  tal que  $\pi(\mathcal{F}) \leq g(\pi^*(\mathcal{F}), d)$ , donde  $d$  es la dimensión en la que vive la familia de convexos. Para probar esto, se usa una herramienta llamada una  $\epsilon$ -red débil.

**Definición 7** *Dado un conjunto finito  $X$  de puntos en  $\mathbb{R}^d$  y  $\epsilon > 0$ , diremos que un conjunto  $N \subset \mathbb{R}^d$  es una  $\epsilon$ -red débil con respecto a  $X$  si cada convexo que contiene al menos  $\epsilon|X|$  puntos de  $X$ , contiene al menos un punto de  $N$ .*

Las  $\epsilon$ -redes débiles se empezaron a trabajar en 1987 [16]. Cabe notar que esta técnica tiene una generalización natural en espacios de medidas de probabilidad, y en este caso la medida que se usa es la medida que cuenta en el conjunto  $X$ . Las  $\epsilon$ -redes débiles tienen un teorema asociado, parecido al lema de selección (que de hecho se usa en su demostración).

**Teorema de existencia de  $\epsilon$ -redes débiles (1992)** *Para cada  $d \geq 1$ ,  $\epsilon > 0$  y un conjunto finito  $X \subset \mathbb{R}^d$ , existe una  $\epsilon$ -red para  $X$  de tamaño a lo más  $f(d, \epsilon)$ .  $f(d, \epsilon)$  depende únicamente de  $d$  y  $\epsilon$ , pero no del tamaño de  $X$ .*

Para la demostración de este teorema, se usa el lema de selección para ir construyendo la  $\epsilon$ -red poco a poco [10]. Para obtener mejores cotas para la función  $f$  se usa un segundo lema de selección, pero no es necesario para probar la existencia de estas redes. Usando este teorema se puede probar que  $\pi$  está acotado por una función de  $\pi^*$  y  $d$ , a saber  $\pi(\mathcal{F}) \leq f(d, \frac{1}{\pi^*(\mathcal{F})})$  donde  $f$  es como en el teorema anterior. Para ver esto primero uno puede suponer que tiene una función de perforación que tiene valores positivos en sólo una cantidad finita de puntos y esos valores tienen una suma tan cercana a  $\pi^*$  como se quiere. También se puede suponer que todos los puntos tienen un valor racional. Usando esto, los puntos donde la función vale distinto de cero se usan para generar una  $\epsilon$ -red débil. Los puntos de esa epsilon red perforan a la familia de convexos.

Para acotar el número de perforación de una familia, condiciones como la de Helly fraccional no ayudan, ya que el número de perforación puede ser tan grande como uno quiera, sin importar el valor de  $\alpha$ . Por eso, para buscar cotas para  $\pi(\mathcal{F})$  podemos pedir una condición que implique que muchas  $(d + 1)$ -adas de convexos se intersecten, pero que también lo hagan bien repartidas.

**Definición 8** *Dada una familia  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$ , decimos que  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $(p, q)$  si de cada  $p$  convexos de  $\mathcal{F}$  hay  $q$  de ellos que se intersectan.*

En  $\mathbb{R}^d$  sólo nos van a interesar las propiedades  $(p, q)$  tales que  $p \geq q \geq d + 1$ . Con esto en mente, el teorema de Helly puede describirse de la siguiente manera: si  $\mathcal{F}$  es una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(d + 1, d + 1)$ , entonces  $\pi(\mathcal{F}) = 1$ .

Resulta que toda propiedad  $(p, q)$  implica una cota superior al número de perforación de la familia, es decir

**Teorema  $(p, q)$  (1992)** *Sean  $p, q, d$  enteros positivos con  $p \geq q \geq d + 1$ . Entonces existe un entero positivo  $c = c(p, q, d)$  de tal manera que toda familia  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)$  cumple  $\pi(\mathcal{F}) \leq c$ .*

Este teorema fue una conjetura de Hadwiger y Debrunner en 1957 [17], y fue probada hasta 1992 por Alon y Kleitman [15]. A pesar de que la conjetura suena bastante natural, como hemos visto la prueba usa todo bajo el sol para atacar y resolver el problema.

La desventaja del problema de existencia para el número de perforación para familias con estas propiedades es que las cotas que da son astronómicas. Por ejemplo, para la propiedad  $(4, 3)$  en el plano el número de perforación que da es superior a 200. Este es el primer caso no trivial y la conjetura actual es que 3 puntos son suficientes para intersectar a toda la familia.

Cabe notar que para este problema en específico lo mejor que se ha podido probar es que 13 puntos son suficientes [3]. De hecho, en general resulta muy difícil obtener cotas buenas para el número de perforación de familias con este tipo de propiedades. Cuando las familias son de algún tipo especial de convexos (por ejemplo cajas, copias homotéticas de un triángulo, etc. . .) sí hay avances de este estilo [6].

Todos los casos no triviales siguen siendo problemas abiertos. En los siguientes capítulos se va a desarrollar teoría para sacar cotas para números de perforación de familias con una propiedad semejante a la propiedad  $(p, q)$ .

# Capítulo 2

## Gráficas de convexos

Debido al teorema de Helly, para ver las propiedades de intersección de una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  basta checar las  $(d + 1)$ -adas de convexos. Debido a esto es natural definir las siguientes hipergráficas:

**Definición 9** Dada una familia  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$  definimos la hipergráfica  $G^{d+1}(\mathcal{F})$  asociada a  $\mathcal{F}$  como una hipergráfica con un vértice por cada convexo de  $\mathcal{F}$  y tal que los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{d+1}$  forman una arista si y sólo si sus convexos correspondientes  $K_1, K_2, \dots, K_{d+1}$  tienen intersección vacía.

**Definición 10** Diremos que una  $(d + 1)$ -hipergráfica  $G$  es de convexos si existe una familia  $\mathcal{F}$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$  tal que  $G^{d+1}(\mathcal{F})$  es isomorfa a  $G$ .

A primera vista parece más natural definir las hiperaristas para  $(d + 1)$ -adas que se intersectan. El considerar el complemento de estas hipergráficas se hace debido a que los trabajos de Lovász con la gráficas de Knesser mostraron que este tipo de ideas funcionaban mejor. Con la siguiente proposición será evidente por qué trabajar con estas hipergráficas es conveniente.

Notemos que ser una gráfica de convexos es una propiedad hereditaria. El teorema de Helly puede entonces reescribirse de la siguiente manera: una familia finita de convexos  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{R}^d$  tiene intersección no vacía si y sólo si su hipergráfica de convexos no tiene aristas. Con esto ya se puede dar una interpretación combinatoria del número de perforación de una familia, es decir

**Proposición 5** Si  $\mathcal{F}$  es una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  entonces

$$\pi(\mathcal{F}) = \chi(G^{d+1}(\mathcal{F}))$$

Donde  $\chi(G^{d+1}(\mathcal{F}))$  denota el número cromático de la hipergráfica.

Esto sucede ya que el número cromático de la hipergráfica es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear los vértices de la gráfica de tal manera que los vértices de cualquier color sean independientes. Esto se traduce por el teorema de Helly en tener un punto en común, por lo que nos queda el número de perforación de la familia.

Esto nos permite separar el problema de encontrar el número de perforación en dos partes. La geométrica, que consiste en ver en qué significan las condiciones de  $\mathcal{F}$  al traducirlas a su hipergráfica de convexos. Y la combinatoria, que consiste en encontrar el número cromático de la hipergráfica correspondiente.

Con esto en mente, hay que analizar cuales son las propiedades que definen una hipergráfica de convexos. Cuando  $d = 1$ , la gráfica está asociada a una familia de intervalos.

**Proposición 6 (Caracterización para  $d = 1$ )** *Una gráfica finita  $G$  es de convexos si y sólo si hay una numeración de sus vértices  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  de tal manera que si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes y  $i < j$  entonces  $v_k$  y  $v_j$  son adyacentes para todo  $1 \leq k \leq i$ .*

### Demostración

Supongamos que  $G$  es gráficas de convexos. Sea  $\mathcal{F}$  su familia de convexos en la línea. Vamos a ordenar los convexos  $K_1, K_2, \dots, K_n$  según su punto que se encuentra más a la izquierda empezando con el que lo tiene más a la derecha. Notemos que si  $K_i \cap K_j = \emptyset$  y  $j > i$  eso quiere decir que el punto de la derecha de  $K_j$  está a la izquierda del punto a la izquierda de  $K_i$ . Entonces sucede lo mismo con cada  $K_k$  tal que  $k \leq i$ .

Si  $G$  cumple la condición, para cada  $j$  consideremos  $\lambda(j) = \min\{i \leq j \mid v_i \text{ no es adyacente a } v_j\}$ . Ahora a cada  $j$  asignémosle el intervalo  $[-j, -\lambda(j)]$ . Estos intervalos claramente tienen una gráfica de convexos isomorfa a  $G$ .  $\square$

En trabajos anteriores se ha trabajado con la gráfica de intersección para intervalos, la cual es el complemento de la que aquí mencionamos. Estas gráficas también tienen una caracterización clásica, la cuál no es la que acabamos de presentar.

Usando esta caracterización, se puede ver que el número de perforación de familias de intervalos se puede calcular de manera mucho más sencilla, a saber

**Proposición 7** *Dada una gráfica  $G$  de convexos, sea  $k(G)$  el número de vértices de su subgráfica completa más grande. Entonces se cumple que*

$$k(G) = \chi(G)$$

*Más aún, la gráfica es perfecta.*

**Demostración**

Es claro que  $k(G) \leq \chi(G)$ , vamos a probar por inducción sobre  $k(G)$  que  $k(G) \geq \chi(G)$ . Si  $k(G) = 1$ , entonces la gráfica no tiene aristas, por lo que  $\chi(G) = 1$ . Supongamos ahora que sabemos la desigualdad para todas las gráficas de convexos  $H$  con  $k(H) \leq n$  y sea  $G$  una gráfica de convexos tal que  $k(G) = n + 1$ . Consideremos la numeración  $v_1, v_2, \dots, v_t$  de los vértices de  $G$  como en la proposición 6. Sea  $A$  el conjunto de vértices adyacentes a  $v_1$  y  $B$  el conjunto de vértices no adyacentes a  $v_1$  (consideremos que  $v_1$  está en  $B$  y no en  $A$ ). Con esto tenemos que  $A$  y  $B$  son gráficas de convexos y que  $k(A) \leq n$ . Además, por la caracterización, entre los vértices de  $B$  no puede haber aristas, o tendríamos vértices adyacentes a  $v_1$ . Por lo tanto tenemos que  $\chi(G) = \chi(A \cup B) \leq \chi(A) + \chi(B) \leq k(A) + 1 \leq k(G)$ , que es lo que queríamos.

Notemos que como ser una gráfica de convexos es una propiedad hereditaria, esto se cumple para todas las subgráficas inducidas de  $G$ , que es la definición de que  $G$  sea perfecta.  $\square$

**Corolario 1** Si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $p$  convexos en la línea con la propiedad  $(p, q)$ , entonces  $\pi(\mathcal{F}) \leq p - q + 1$ .

**Demostración**

Si nos fijamos en  $G$  la gráfica de convexos de  $\mathcal{F}$ , entonces la condición  $(p, q)$  dice que de cada  $p$  vértices hay un conjunto de  $q$  de ellos que es independiente. Debido a esto, no puede haber una subgráfica completa de  $p - q + 2$  vértices. Entonces

$$p - q + 1 \geq k(G) = \chi(G) = \pi(\mathcal{F})$$

$\square$

Al trabajar con familias de convexos en  $\mathbb{R}^d$  es de mucha ayuda saber si hay  $d$ -adas de ellos que tienen intersección vacía. Este tipo de información se pierde en las hipergráficas de convexos, ya que sólo nos da información sobre las  $(d + 1)$ -adas. Sin embargo, se le puede dar la vuelta al problema para poder suponer que hay  $d$ -adas de convexos que no se intersectan.

El siguiente lema va a ser muy útil en la demostración de los resultados principales de la siguiente sección.

**Lema 1 (Separación de  $d$  convexos)** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Existe una familia  $\mathcal{F}'$  de convexos en  $\mathbb{R}^d$  tal que

- $G^{d+1}(\mathcal{F}')$  es una subgráfica inducida de  $G^{d+1}(\mathcal{F})$ ,
- $\pi(\mathcal{F}) \leq \pi(\mathcal{F}') + 1$
- En  $\mathcal{F}'$  hay  $d$  convexos que no se intersectan.

**Demostración**

Sabemos que existe una dirección  $v$  en donde todas las  $d$ -intersecciones tienen un único punto mínimo [4]. Sean  $K_1, K_2, \dots, K_d$  aquellos convexos tales que su intersección es mínima y sea  $p$  su punto  $v$ -direccionalmente mínimo. Sea  $H = \{x \mid v \cdot x < v \cdot p\}$ . De la misma manera que en la prueba de Helly coloreado, si hay un convexo  $K_{d+1}$  tal que  $K_1, K_2, \dots, K_{d+1}$  tienen intersección no vacía entonces  $p$  está en  $K_{d+1}$ . Se sabe que para cualesquiera  $d + 1$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  que se intersectan, su mínimo  $v$ -direccional es el mínimo de la intersección de algunos  $d$  de ellos. Ahora consideremos  $\mathcal{F}' = \{T \cap H \mid T \in \mathcal{F}, p \text{ no está en } T\} \cup \{K_i \cap H \mid 1 \leq i \leq d\}$ . Por lo anterior, si  $d + 1$  de los convexos de  $\mathcal{F}$  que usamos para construir  $\mathcal{F}'$  se intersectaban, el punto  $v$ -direccionalmente mínimo de su intersección no puede ser  $p$ , por lo que está en  $H$ . Entonces en  $\mathcal{F}'$  se intersectan. Si  $d + 1$  de los convexos de  $\mathcal{F}'$  se intersectan, entonces los que les corresponden en  $\mathcal{F}$  también se intersectan. Con esto  $G^{d+1}(\mathcal{F}')$  es una subgráfica inducida de  $G^{d+1}(\mathcal{F})$ . Notemos que en  $\mathcal{F}'$  los convexos  $K_i \cap H$  con  $1 \leq i \leq d$  no se intersectan. Si a los  $\pi(\mathcal{F}')$  puntos necesarios para perforar a todos los convexos de  $\mathcal{F}'$  le agregamos  $p$  entonces hemos perforado a todos los convexos de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Notemos que en la prueba anterior para cubrir a los convexos de  $\mathcal{F}$  sólo es necesario intersectar a todos los convexos de  $\{T \cap H \mid T \in \mathcal{F}, p \text{ no está en } T\}$  y agregar  $p$ , por lo que en  $\mathcal{F}'$  ya no nos interesa intersectar a los  $d$  convexos que separamos. Como las propiedades que hemos tratado se traducen directamente a las gráficas de convexos, entonces si  $\mathcal{F}$  cumple alguna de estas (como una propiedad  $(p, q)$ ), entonces  $\mathcal{F}'$  también la tiene. Esto será esencial en la siguiente sección.

# Capítulo 3

## La propiedad $(p, q)_r$

**Definición 11** Diremos que una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  tiene la propiedad  $(p, q)_r$  si para cada  $p$  convexos de ellos hay  $r$   $q$ -adas que se intersectan.

### 3.1 Familias balanceadas

Con la definición anterior, lo que conocíamos como la propiedad  $(p, q)$  ahora va a ser la propiedad  $(p, q)_1$ . Como ya sabemos que la propiedad  $(p, q)_1$  implica una cota superior en el número de perforación de la familia, ahora queremos usar esta propiedad para encontrar buenas cotas en el número de perforación. Primero veamos qué sucede si la familia tiene una propiedad  $(p, q)_r$  un poco más ordenada.

**Definición 12** Diremos que una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  tiene la propiedad  $(p, q)_r$  que es  $s$ -balanceada si para cada  $p$  convexos de ellos hay  $r$   $q$ -adas que se intersectan y cada convexo está en al menos  $s$  de las  $q$ -adas.

Otra manera de pensar en esta condición es que para cada  $p$  convexos de la familia se pueden encontrar  $r$  puntos tales que cada punto está en al menos  $q$  convexos y cada convexo contiene al menos  $s$  de los puntos. Resulta que este tipo de propiedades nos da mucha información sobre la estructura de separación de los convexos.

**Proposición 8** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de al menos  $p$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)_d$  que es  $(d - 1)$ -balanceada. Entonces cualesquiera  $d - 1$  convexos de  $\mathcal{F}$  se intersectan.

#### Demostración

Consideremos cualesquiera  $d - 1$  convexos  $K_1, K_2, \dots, K_{d-1}$  y agreguemos suficientes convexos de  $\mathcal{F}$  para tener  $p$ . Como  $\mathcal{F}$  tiene una propiedad  $(p, q)_d$  que

es  $(d - 1)$ -balanceada, cada uno de los  $K_i$  está en al menos  $d - 1$  de las  $q$ -adas. Con esto cada uno de los  $K_i$  no está en a lo más una de las  $q$ -adas. Como hay  $d$   $q$ -adas, debe haber al menos una de ellas que contenga a todos los  $K_i$ , por lo que se intersectan.  $\square$

Ya con esto tenemos casi toda la información que necesitamos para obtener cotas para números de perforación, pero hace falta un resultado cuya demostración es topológica. Los detalles de la demostración exceden los objetivos de esta tesis, pero mostramos un esbozo de dicha demostración.

**Proposición 9** *Si se tienen convexos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_\lambda$  en  $\mathbb{R}^d$  con  $1 \leq \lambda \leq d$  que no se intersectan, hay un espacio afín  $\Pi$  de dimensión  $d - \lambda$  tal que para todo convexo  $K$  que tal que todas las  $\lambda$ -adas formadas por  $K$  y  $\lambda - 1$  de los  $A_i$  tienen un punto de intersección, se cumple que  $K$  intersecta a  $\Pi$ .*

### Demostración

Podemos suponer que para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, \lambda$   $\bigcap_{j \neq i} A_j$  no es vacío, ya que si esto no es cierto, por vacuidad para  $K$ , cualquier  $\Pi$  de la dimensión adecuada funciona. Vamos a probar por inducción sobre  $\lambda$  que  $\bigcup_0^\lambda A_j$  tiene la homología de  $\mathbb{S}^{\lambda-1}$ , la esfera de dimensión  $\lambda - 1$ . Si  $\lambda = 1$  entonces  $\{A_0, A_1\}$  son dos conjuntos convexos disjuntos y por lo tanto  $A_0 \cup A_1$  tiene la homología de  $\mathbb{S}^0$ . Supongamos que la afirmación es verdadera hasta  $\lambda - 1$  y probémosla para  $\lambda$ . El espacio  $A = \bigcup_1^\lambda A_j$  es estrellado ya que cada  $A_j$  es convexo y  $\bigcap_1^\lambda A_j$  no es vacío. Entonces  $\bigcup_0^\lambda A_j$  es la unión de dos espacios contraíbles,  $A$  y  $A_0$  cuya intersección es  $\bigcup_1^\lambda B_j$  donde  $B_j = A_j \cap A_0$ . Notemos que los  $B_j$  cumplen la condición para  $\lambda - 1$  por lo que su unión tiene el tipo de homología de  $\mathbb{S}^{\lambda-2}$ . Entonces, por la sucesión de Mayer-Vietories, el tipo de homología de  $\bigcup_0^\lambda A_j$  se puede calcular a partir de los tipos de homología de  $A$ ,  $A_0$  y  $A \cap A_0$ , que es lo mismo que si en una  $\lambda - 1$ -esfera tomamos dos hemisferios y su intersección.

Ahora podemos probar la proposición para cuando  $\lambda = d$ . Como  $\bigcup_0^d A_j$  tiene el tipo de homología de  $\mathbb{S}^d$  tenemos que  $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_0^d A_j$  tiene exactamente dos componentes, una de ellas acotada. Sea  $\Pi = \{v_0\}$  donde  $v_0$  es cualquier punto en la componente acotada de  $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_0^d A_j$ . Para cada  $i = 0, 1, \dots, d$  tomemos  $a_i$  en  $\bigcap_{j \neq i} A_j \cap K$ . Notemos que  $\{a_0, \dots, a_d\}$  están en posición general, ya que si no, por el lema de Radón, todos los  $A_j$  se intersectan.

Sea  $\Lambda$  la envolvente convexa de los  $a_j$  y notemos que la frontera  $\partial\Lambda \subset \bigcup_0^d A_j$ . Sean  $C_i = A_i \cap \Lambda$ . Entonces  $\bigcap_{j \neq i} C_j$  no es vacío pero  $\bigcap_0^d C_j$  sí lo es. Con esto  $\bigcup_0^d C_j$  también tiene el tipo de homología de  $\mathbb{S}^{d-1}$  y está contenido en  $\bigcup_0^d A_j$ . Con esto la componente acotada de  $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_0^d A_j$  está contenida en el interior de  $\Lambda$ , por

lo que  $v_0$  está en  $K$ , que es lo que queríamos.

Para terminar de probar el lema ahora supongamos que  $\lambda < d$ . Sabemos que hay un subespacio lineal  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^d$  de dimensión  $\lambda$  con la propiedad que si  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \Gamma$  es la proyección ortogonal entonces  $\cap_0^\lambda \pi(A_j)$  sigue siendo vacía [18]. Entonces, para  $\Gamma$  podemos hacer lo mismo que en el párrafo anterior. Con esto, hay un punto  $v_0$  en  $\Gamma$  como pide la proposición. Como hay al menos un punto de  $K$  en cada  $\cap_{j \neq i} A_j$  entonces hay un punto de  $\pi(K)$  en cada  $\cap_{j \neq i} \pi(A_j)$ . Entonces  $v_0$  está en  $\pi(K)$ . Si consideramos  $\Pi = \pi^{-1}(v_0)$ , obtenemos lo que queríamos.  $\square$

Para el caso en que  $\lambda = d - 1$  tenemos que  $\Pi$  es una línea y nos vamos a referir a ella como  $\ell$ .

Con estas dos proposiciones podemos probar el siguiente lema:

**Lema 2** Sean  $p, q, d$  enteros positivos tales que  $p > q > d$  y  $qd > p(d - 1) + 1$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de al menos  $p$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)_d$  que es  $(d - 1)$ -balanceada y hay  $d$  convexos  $K_1, K_2, \dots, K_d$  en  $\mathcal{F}$  que no se intersectan, entonces

$$\pi(\mathcal{F} \setminus \{K_1, K_2, \dots, K_d\}) \leq d(p - q - 1) + 1$$

### Demostración

Para empezar, podemos trazar una línea  $\ell$  como en la proposición 9. Si consideramos  $K_1, K_2, \dots, K_d$  y cualesquiera otros  $p - d$  convexos, hay  $d$   $q$ -adas de ellos que tienen intersección no vacía. Notemos que cada  $K_i$  está en al menos  $d - 1$  de las  $q$ -adas, pero como los  $K_i$  no se intersectan, entonces por cada uno de ellos hay exactamente una de las  $q$ -adas que no lo contiene. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_d$  puntos en cada una de las  $q$ -adas ordenados de tal manera que para cada  $i$ ,  $x_i$  está en todos los  $K_j$  excepto  $K_i$ .

Notemos que hay al menos  $qd$  parejas  $(K, x_j)$  donde  $K$  es alguno de los convexos y  $x_j$  está en  $K$ . Cada  $K$  puede tener a  $d - 1$  de las  $x_j$  o tenerlas a todas. Entonces tenemos que hay al menos  $qd - p(d - 1)$  de ellos que deben tener a todas las  $x_j$ . Ninguno de los  $K_i$  puede ser alguno de los convexos que cumplan esto. Todos estos convexos comparten  $\langle x_1, x_2, \dots, x_d \rangle$ , el cual por la proposición 9 tiene un punto en común con  $\ell$ .

Entonces los convexos de  $\mathcal{F}$  distintos de los  $K_i$  al intersectarse con  $\ell$  tienen la propiedad  $(p - d, qd - p(d - 1))$ . Como  $qd - p(d - 1) \geq 2$ , pueden ser perforados por a lo más  $(p - d) - (qd - p(d - 1)) + 1 = d(p - q - 1) + 1$  puntos.  $\square$

El lema anterior puede extenderse a un teorema general.

**Teorema 1** Sean  $p, q, d$  enteros positivos tales que  $p > q > d$  y  $qd > p(d-1) + 1$ . Si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $p$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con una propiedad  $(p, q)_d$  que es  $(d-1)$ -balanceada, entonces

$$\pi(\mathcal{F}) \leq d(p - q - 1) + 2$$

### Demostración

Como la familia tiene al menos  $p$  convexos, el conjunto de las  $d$ -adas que se intersectan no es vacío. Por lo tanto podemos separar  $d$  convexos como en el lema 1 y obtener una familia  $\mathcal{F}'$  con la propiedad  $(p, q)_d$  que es  $(d-1)$ -balanceada. Entonces tenemos dos casos:

- En  $\mathcal{F}'$  hay al menos  $p$  convexos.
- En  $\mathcal{F}'$  hay menos de  $p$  convexos.

En el primer caso, usando el lema anterior  $\pi(\mathcal{F}') \leq d(p - q - 1) + 1$ , al agregarle el punto de la separación obtenemos que  $\pi(\mathcal{F}) \leq d(p - q - 1) + 2$ .

En el segundo caso, consideremos  $p$  convexos de  $\mathcal{F}$  que contengan a todos los convexos que se usaron para formar  $\mathcal{F}'$ . Entre ellos hay al menos una  $q$ -ada que se intersecta. Si esa  $q$ -ada contiene a los convexos que en  $\mathcal{F}$  formaban a  $K_1, K_2, \dots, K_d$ , entonces no puede contener a ningún otro convexo de los que formaban parte de  $\mathcal{F}'$ . Con esto hay a lo más  $p - q$  de estos convexos, y como los demás tenían un punto en común, toda la familia puede cubrirse con a lo más  $p - q + 1 \leq d(p - q - 1) + 2$  puntos. Si a la  $q$ -ada le falta al menos uno de los convexos que se convertían en los  $K_i$  de  $\mathcal{F}'$ , entonces de los convexos de  $\mathcal{F}'$  que no eran los  $K_i$  le faltan a lo más  $p - q - 1$ . Si ponemos un punto por cada uno de éstos, el punto de intersección de la  $q$ -ada y el punto que se necesitaba para la reducción, obtenemos de nuevo que  $\mathcal{F}$  puede perforarse toda usando a lo más  $p - q + 1 \leq d(p - q - 1) + 2$  puntos.  $\square$

Notemos que si  $d = 1$ , este teorema se convierte en la cota que se conocía para la propiedad  $(p, q)$  en la línea. Notemos también que la hipótesis  $qd > p(d-1) + 1$  no es tan fuerte. Esto es porque, si consideramos cualquier familia con una propiedad  $(p, q)_d$  que es  $(d-1)$ -balanceada, se tiene que  $qd \geq p(d-1)$ . Para ver esto, dados  $p$  convexos, basta contar las parejas  $(k, H)$ , donde  $H$  es una de las  $q$ -adas y  $k$  es un convexo de  $H$ . Por la condición, hay  $qd$  parejas en total, pero por ser  $(d-1)$ -balanceada, hay al menos  $p(d-1)$  parejas.

**Corolario 2** Sean  $p > d + 1$  enteros positivos. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de al menos  $p$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, p-1)_d$ . Entonces  $\pi(\mathcal{F}) \leq 2$ .

**Demostración**

Dados cualesquiera  $p$  convexos, a cada  $(p - 1)$ -ada le hace falta exactamente un convexo. Por lo tanto cada convexo está en al menos  $d - 1$  de las  $(p - 1)$ -adas. Además, como  $p > d + 1$ , tenemos que  $(p - 1)d > p(d - 1) + 1$ . Con esto tenemos las hipótesis del Teorema 1, por lo que  $\pi(\mathcal{F}) \leq 2$ .  $\square$

En el corolario que acabamos de probar, si usamos  $d = 2$  y  $p = 4$ , obtenemos que una familia en el plano con la propiedad  $(4, 3)_2$  se puede perforar con a lo más 2 puntos, un punto menos que en la conjetura para las familias en el plano con la propiedad  $(4, 3)_1$ .

**3.2 Familias no balanceadas**

Usando la misma idea puede demostrarse un teorema no balanceado, semejante al teorema 1. Como aquí no vamos a tener la condición de balance, lo que se va a usar para demostrar el teorema es la condición de que  $r$  sea suficientemente grande.

De la misma manera que con el teorema 1, primero buscamos un lema con  $d$  convexos que no se intersectan.

**Lema 3** Sean  $p, q, r, d, k$  enteros positivos tales que  $p > q > d$  y  $2 \leq k \leq q + 1 - d$ . Supongamos que:

$$r > \frac{\binom{p-d-k}{q+1-d-k}}{\binom{q+1-d}{k}}(d-1) \binom{p-d}{k} - d \binom{p-d}{q+1-d} - \binom{p-d}{q-d} + \binom{p}{q}$$

Si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $p$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)_r$  y hay un conjunto  $A$  de  $d$  convexos de  $\mathcal{F}$  que no se intersectan, entonces

$$\pi(\mathcal{F} \setminus A) \leq p - d - k + 1$$

**Demostración**

Consideremos  $B$  cualquier conjunto de  $p - d$  convexos de  $\mathcal{F} \setminus A$ . Consideremos también las parejas  $(R, S)$  tales que  $R \subset A$ ,  $S \subset B$ ,  $R$  tiene  $d - 1$  elementos y  $S$  tiene  $k$  elementos. Vamos a probar que hay un  $S$  tal que todas las parejas en las que está forman  $k + d - 1$  convexos que se intersectan.

Si eso no sucede, entonces hay al menos  $\binom{p-d}{k}$  de esas parejas que tienen intersección vacía. Sabemos que cualquier  $q$ -ada de  $\mathcal{F}$  que contenga a todo  $A$  no tiene punto de intersección. Por lo tanto las  $r$  que sí tienen son parte de las otras

$\binom{p}{q} - \binom{p-d}{q-d}$  posibles.

Nos interesan las  $q$ -adas que tienen exactamente  $d - 1$  elementos de  $A$  y tienen un punto en común. De las primera hay  $d \binom{p-d}{q+1-d}$  y de las segundas hay  $r$ , por lo que de las que nos interesan hay al menos:

$$r + d \binom{p-d}{q+1-d} - \left[ \binom{p}{q} - \binom{p-d}{q-d} \right]$$

Cada una de estas genera  $\binom{q+1-d}{k}$  de las parejas  $(R, S)$  que tienen un punto en común, pero las estamos contando a lo más  $\binom{p-d-k}{q+1-d-k}$  veces.

Entonces el número de parejas posible es al menos:

$$\left[ r + d \binom{p-d}{q+1-d} + \binom{p-d}{q-d} - \binom{p}{q} \right] \frac{\binom{q+1-d}{k}}{\binom{p-d-k}{q+1-d-k}} + \binom{p-d}{k}$$

Como sabemos que el número de parejas posibles es  $d \binom{p-d}{k}$ , al escribir la desigualdad y despejar  $r$  obtenemos que la condición contradice la hipótesis original.

Por lo tanto hay un  $S_0$  como queríamos originalmente. Podemos trazar una recta  $\ell$  como en la proposición 9 respecto a los convexos de  $A$ . Entonces,  $\cap S_0$  cumple que tiene un punto en  $\ell$ . Con esto tenemos que  $\mathcal{F} \setminus A$  tiene la propiedad  $(p-d, k)$  en  $\ell$ , por lo que tiene número de perforación a lo más  $p-d-k+1$ .  $\square$

Usando este lema obtenemos también un teorema general.

**Teorema 2** Sean  $p, q, r, d, k$  enteros positivos tales que  $p > q > d$  y  $2 \leq k \leq q+1-d$ . Supongamos que

$$r > \frac{\binom{p-d-k}{q+1-d-k}}{\binom{q+1-d}{k}} (d-1) \binom{p-d}{k} - d \binom{p-d}{q+1-d} - \binom{p-d}{q-d} + \binom{p}{q}$$

Si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $p$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)_r$  entonces

$$\pi(\mathcal{F}) \leq p - d - k + 2.$$

### Demostración

La demostración es análoga a la del teorema 1, pero usando el lema 3 en vez del lema 2.  $\square$

Cuando  $k = q+1-d$ , obtenemos un corolario muy elegante.

**Corolario 3** Sean  $p, q, d, r$  enteros positivos tales que  $p > q > d$  y  $r > \binom{p}{q} - \binom{p+1-d}{q+1-d}$ . Si  $\mathcal{F}$  es una familia de convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)_r$  entonces

$$\pi(\mathcal{F}) \leq p - q + 1.$$

# Capítulo 4

## Números de cubrimiento para otros teoremas

### 4.1 Algunos ejemplos

Las ideas de número de perforación y de propiedad  $(p, q)$  tienen sentido para cualquier teorema tipo Helly. Cuando hablamos del número de perforación de una familia  $\mathcal{F}$  de convexos, nos referimos al mínimo número de conjuntos en que podemos partir a  $\mathcal{F}$  de tal manera que los convexos de cada parte tengan intersección no vacía. En la propiedad  $(p, q)$  nos referimos a que de cada  $p$  convexos hay  $q$  que tienen intersección no vacía. Esto es porque “tener intersección no vacía” es una propiedad que tiene un teorema tipo Helly (justamente el teorema de Helly).

**Definición 13** *Dada una propiedad  $\psi$  que tenga un teorema de Helly y una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos, diremos que el número de cubrimiento de  $\mathcal{F}$  respecto a la propiedad  $\psi$  es el mínimo número  $n$  tal que  $\mathcal{F}$  se puede partir en  $n$  conjuntos que cumplan cada uno la propiedad  $\psi$ . Nos referiremos a este número como  $\pi_\psi(\mathcal{F})$ .*

**Definición 14** *Dada una propiedad  $\psi$  que tenga un teorema de Helly, denotaremos por  $H(\psi)$  al número involucrado en la hipótesis de su teorema.*

**Definición 15** *Dada una propiedad  $\psi$  que tenga un teorema de Helly y una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos, diremos que  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $(p, q)$  respecto a la propiedad  $\psi$  si de cada  $p$  conjuntos de  $\mathcal{F}$  hay al menos una  $q$ -ada que tenga la propiedad  $\psi$ .*

Con esto surge naturalmente querer generalizar la conjetura de Hardwiger y Debrunner. Dada una propiedad  $\psi$  con un teorema tipo Helly tal que  $H(\psi) = \lambda$ ,

¿será cierto que toda propiedad  $(p, q)$  respecto a  $\psi$  con  $p \geq q \geq \lambda$  implica una cota superior en el número de cubrimiento respecto a  $\psi$ ?

Resulta que ésto es falso, ya que en una  $\lambda$ -hipergráfica podemos considerar  $\Psi_\lambda$  como “ser un conjunto independiente de vértices”. En este caso el número de perforación respecto a  $\Psi_\lambda$  resulta ser el número cromático de la gráfica en cuestión. Como una cota sobre el tamaño del clan más grande de una hipergráfica no implica una cota sobre su número cromático, este contraejemplo funciona.

**Definición 16** *Dada una propiedad  $\psi$  con teorema de Helly y  $p, q$  enteros tales que  $p \geq q \geq H(\psi)$ , diremos que  $c(\psi, p, q)$  es el mínimo entero tal que la propiedad  $(p, q)$  respecto a  $\psi$  en una familia  $\mathcal{F}$  implica que  $\pi_\psi(\mathcal{F}) \leq c(\psi, p, q)$ . Si no hay una cota finita, definimos  $c(\psi, p, q)$  como  $\infty$ .*

Nos interesa encontrar las ternas  $(\psi, p, q)$  tales que  $c(\psi, p, q) < \infty$ . Se pueden encontrar muchas si usamos la propiedad  $\Psi_\lambda$  como en el contraejemplo anterior.

**Proposición 10** *Sea  $\lambda$  un entero positivo. Para cualquier propiedad  $\psi$  tal que  $H(\psi) = \lambda$ , se tiene que  $c(\psi, p, q) \leq c(\Psi_\lambda, p, q)$ .*

### Demostración

Supongamos primero que  $c(\Psi_\lambda, p, q) < \infty$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos con la propiedad  $(p, q)$  respecto a  $\psi$ . Consideremos una  $\lambda$ -hipergráfica  $G_\psi(\mathcal{F})$  con un vértice por cada conjunto de  $\mathcal{F}$ . Dados  $\lambda$  vértices de  $G_\psi(\mathcal{F})$  diremos que forman una hiperarista si y sólo si sus conjuntos correspondientes no cumplen la propiedad  $\psi$ . Por el teorema tipo Helly, sabemos que  $\mathcal{F}$  tiene número de cubrimiento respecto a  $\psi$  menor o igual a  $n$  si y solo si  $\chi(G_\psi(\mathcal{F})) \leq n$ . Pero la propiedad  $(p, q)$  respecto a  $\psi$  en  $\mathcal{F}$  se traduce a que para cualesquiera  $p$  vértices de  $G_\psi(\mathcal{F})$  hay  $q$  de ellos que forman un conjunto independiente. Por la hipótesis tenemos que  $\chi(G_\psi(\mathcal{F})) \leq c(\Psi_\lambda, p, q)$ , que es lo que queríamos.  $\square$

Notemos que si  $\psi$  es “tener intersección no vacía”, entonces la hipergráfica que usamos en la demostración es justamente la hipergráfica convexa de la familia  $\mathcal{F}$ . Como con esa propiedad sí es cierta la conjetura de Hardwiger-Debrunner, lo que podemos deducir es que la hipergráfica convexas sí son bastante particulares. Con la última proposición en mente, basta encontrar una pareja de enteros positivos  $(p, q)$  tal que  $c(\Psi_\lambda, p, q) < \infty$  para obtener toda una serie de teoremas de ese estilo.

**Proposición 11** *Sea  $G$  una  $\lambda$ -hipergráfica con al menos  $2\lambda$  vértices. Si de cada  $2\lambda$  vértices de  $G$  hay  $2\lambda - 1$  de ellos que forman un conjunto independiente, entonces hay  $\lambda$  vértices de  $G$  tales que al quitarlos nos queda una hipergráfica independiente y  $\chi(G) \leq 3$ .*

**Demostración**

Si no hay aristas en  $G$  ya acabamos. Si hay al menos una arista sea  $A$  el conjunto de vértices que la forman. Consideremos  $B$  cualquier conjunto de  $\lambda$  vértices distintos a los de  $A$ . En  $A \cup B$  hay un vértice tal que al quitarlo, los demás forman un conjunto independiente. Como  $A$  forma una arista, ese vértice debe estar en  $A$ . En particular,  $B$  no forma arista, por lo que  $G \setminus A$  es una gráfica independiente. Además, al menos  $\lambda - 1$  vértices de  $A$  están contenidos en un conjunto de  $\lambda$  vértices que no forman arista. Si para cualquier elección de  $B$  son los mismo  $\lambda - 1$ , entonces  $\chi(G) \leq 2$ . Si no, entonces hay dos no-aristas que cubren todos los vértices de  $A$ , con lo que  $\chi(G) \leq 3$ .

De este teorema se deduce una serie de corolarios para todos los teoremas tipo Helly que hemos mencionado

**Corolario 4 (Con Helly)** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $2d + 2$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(2d + 2, 2d + 1)$ , entonces  $\pi(\mathcal{F}) \leq 3$  y con la excepción de  $d + 1$  convexos todos se intersectan*

En este caso, si  $\psi$  es “tener intersección no vacía”, tenemos que  $H(\psi) = d + 1$ , con lo que obtenemos lo que queríamos.

**Corolario 5 (Con Caratheodory)** *Sean  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $2d + 2$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ . Si de cada  $2d + 2$  puntos de  $\mathcal{F}$  hay  $2d + 1$  de ellos tales que  $x$  no está en su envolvente convexa, entonces  $\mathcal{F}$  se puede partir en 3 conjuntos  $A_1, A_2, A_3$  tal que  $x \notin \langle A_1 \rangle \cup \langle A_2 \rangle \cup \langle A_3 \rangle$  y hay  $d + 1$  puntos tales  $x$  no está en la envolvente convexa del resto*

En este caso, si  $\psi$  es “contener a  $x$  en la envolvente convexa”, tenemos que  $H(\psi) = d + 1$ , con lo que obtenemos lo que queríamos.

**Corolario 6 (Con posición convexa)** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $2d + 2$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  tal que para cualesquiera  $2d + 4$  puntos hay  $2d + 3$  de ellos que están en posición convexa. Entonces con la excepción de  $d + 2$  puntos todos están en posición convexa y se puede partir  $\mathcal{F}$  en 3 conjuntos tal que cada uno está en posición convexa.*

En este caso, si  $\psi$  es “estar en posición convexa”, sabemos que  $H(\psi) = d + 2$ , con lo que obtenemos lo que queríamos.

**Corolario 7 (Con Krirchberger)** *Sea  $\mathcal{F}$  un conjunto de al menos  $2d + 4$  puntos rojos y azules en  $\mathbb{R}^d$ . Si de cada  $2d + 4$  puntos de  $\mathcal{F}$  hay uno tal que de los otros  $2d + 3$  los puntos rojos se pueden separar de los puntos azules por un hiperplano,*

entonces con la excepción de  $d + 2$  puntos se pueden separar los puntos rojos de los puntos azules por medio de un hiperplano y  $\mathcal{F}$  se puede separar en 3 conjuntos tales que en cada uno los puntos rojos se pueden separar de los puntos azules por medio de un hiperplano.

En este caso si  $\psi$  es “los puntos rojos y los puntos azules se separan”, sabemos que  $H(\psi) = d + 2$ , con lo que obtenemos lo que queríamos.

## 4.2 Para colinealidad

En el resto de la sección una propiedad  $(n, k)$  para un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^d$  quiere decir que para cualesquiera  $n$  de ellos hay  $k$  que son colineales. Primero veamos que con colinealidad, la propiedad  $(n, k)$  implica una cota al número de cubrimiento.

**Proposición 12** Sean  $\mathcal{F}$  una familia de puntos en  $\mathbb{R}^d$  y  $n \geq k \geq 3$  enteros. Si  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $(n, k)$ , entonces hay  $\binom{n-k+2}{2}$  líneas que cubren a  $\mathcal{F}$ .

### Demostración

Notemos que la propiedad  $(n, k)$  implica una propiedad  $(n - k + 3, 3)$ . Si no hay  $n - k + 2$  puntos en posición general, tenemos una propiedad  $(n - k + 2, 3)$ , por lo que por un argumento inductivo hemos acabado (ya que con  $(3, 3)$  todos son colineales). Si tenemos  $n - k + 2$  puntos en posición general, cualquier otro debe estar en alguna de las  $\binom{n-k+2}{2}$  líneas que definen esos  $n - k + 2$  puntos, que es lo que queríamos.

Usando esto, es posible dar un teorema fuerte sobre el número de cubrimiento para esta propiedad

**Teorema 3** Para cualesquiera  $n, k$  enteros positivos con  $n \geq k \geq 3$  existen enteros  $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k}$  tales que si  $\mathcal{F}$  es una familia de al menos  $\beta_{n,k}$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(n, k)$ , entonces podemos quitar a lo más  $\alpha_{n,k}$  puntos de  $\mathcal{F}$  de tal manera que hay  $\lceil \frac{n}{k-1} \rceil - 1$  líneas cubriendo al resto.

**Demostración** Vamos a probar que  $\beta_{n,k} = \max\left\{\binom{n-k+2}{2} \left[\binom{n-k+1}{2} + k - 2\right] + 1, n\right\}$  y  $\alpha_{n,k} = \beta_{n-k+1,k} - 1$  funcionan. Vamos a dejar fijo  $k$  y probar el teorema por inducción sobre  $n$ . Si  $n < k$ , como no se puede dar la propiedad  $(n, k)$  si hay suficientes puntos, el teorema es cierto. Si  $n = k$  todos los puntos son colineales, por lo que el teorema también es cierto. Supongamos que es cierto hasta  $n - 1$ . Como tenemos la propiedad  $(n, k)$  entonces los puntos de  $\mathcal{F}$  se pueden cubrir con  $\binom{n-k+2}{2}$  líneas. Como tenemos  $\beta_{n,k}$  puntos, hay al menos  $\binom{n-k+1}{2} + k - 1$  en

#### CAPÍTULO 4. NÚMEROS DE CUBRIMIENTO PARA OTROS TEOREMAS 29

alguna de estas líneas. Llamémosle  $l$  a esa línea. Si fuera de  $l$  hay menos de  $\beta_{n-k+1,k}$  puntos, quitando esos hemos acabado. Si no, consideremos cualesquiera  $n - k + 1$  puntos fuera de  $l$ . Esos puntos definen  $\binom{n-k+1}{2}$  líneas, por lo que podemos encontrar al menos  $k - 1$  puntos de  $\mathcal{F}$  en  $l$  que no estén en ninguna de esas líneas. Agregando esos  $k - 1$  puntos a los que teníamos, tenemos  $n$  puntos. Como no hay dos puntos de los originales colineales con los puntos que agregamos de  $l$ , entre los  $n - k + 1$  puntos fuera de  $l$ , hay  $k$  que son colineales. Es decir, los puntos de  $\mathcal{F}$  que no están en  $l$  tienen una propiedad  $(n - k + 1, k)$ . Como fuera de  $l$  había al menos  $\beta_{n-k+1,k}$  puntos, por inducción podemos quitar a lo más  $\alpha_{n-k+1,k}$  puntos y lo demás está cubierto por  $\lceil \frac{n-(k-1)}{k-1} \rceil - 1 = \lceil \frac{n}{k-1} \rceil - 2$  líneas. Agregando  $l$  y notando que  $\alpha_{n-k+1,k} \leq \alpha_{n,k}$  obtenemos lo que queríamos.

Una aplicación directa de polos y polares da un teorema análogo para números de perforación para conjuntos de rectas.

**Corolario 8** *Dados enteros positivos  $p \geq q \geq 3$  existen enteros  $\beta_{p,q}, \alpha_{p,q}$  tales que si  $\mathcal{L}$  es una familia de al menos  $\beta_{p,q}$  rectas en  $\mathbb{R}^d$  con la propiedad  $(p, q)$ , entonces con la excepción de  $\alpha_{p,q}$  rectas,  $\pi(\mathcal{L}) \leq \lceil \frac{p}{q-1} \rceil - 1$ .*

# Bibliografía

- [1] I. Bárány. A generalization of caratheodory's theorem. *discrete math.*, 40(2-3):141–152, 1982.
- [2] C. Caratheódory. über den variabilitätsbereich de koeffizienten von potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen. *Math. Ann.*, 64(1):95–115, 1907.
- [3] A. Gyárfás y G. Tóth D. J. Kleitman. Convex sets in the plane with three of every four meeting. *Combinatorica*, 21(2):221–232, 2001.
- [4] C.A. Rogers G. Ewald, D.G. Larman. The directions of the line segments and the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in euclidian space. *Mathematika*, 17:1–20, 1970.
- [5] E. Helly. über mengen konvexer körper mit gemeinschaftlichen punkten. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 32:175–176, 1923.
- [6] M. Tancer J. Kynčl. The maximum piercing number for some classes of convex sets with the  $(4, 3)$ -property. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15:1–16, 2008.
- [7] G. Kalai. Intersection patterns of convex sets. *Israel J. Math.*, 48:161–174, 1984.
- [8] P. Kirchberger. über tchebychefsche annäherungsmethoden. *Math. Ann.*, 57(4):509–540, 1903.
- [9] J. Matoušek. *Lecture on Discrete Geometry*. Graduate text in mathematics. Springer, 2002.
- [10] Z. Füredi y D. Kleitman N. Alon, I. Bárány. Points selections and weak  $\epsilon$ -nets for convex hulls. *Combin., Probab. Comput.*, 1(3):189–200, 1992.
- [11] J. Radon. Mengen konvexer körper die einen gemeinsamen punkt enthalten. *Math. Ann.*, 83:113–115, 1921.

- [12] K. S. Sarkaria. Tverberg's theorem via number fields. *Israel J. Math.*, 79:317–320, 1992.
- [13] H. Tverberg. A generalization of radon's theorem. *J. London. Math. Soc.*, 41:123–128, 1966.
- [14] M. Katchalski y A. Liu. A problem of geometry in  $r^n$ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 75:284–288, 1979.
- [15] N. Alon y D.J. Kleitman. Piercing convex sets and the hadwiger-debrunner (p,q)-problem. *Adv. in Math.*, 96:103–112, 1992.
- [16] D. Haussler y E. Welzl. Epsilon-nets and simplex range queries. *Discrete Comput. Geom.*, 2:127–151, 1987.
- [17] H. Hadwiger y H. Debrunner. über eine variante zum hellyschen satz (alemán). *Arch. Math.*, 8:309–313, 1957.
- [18] J. Bracho y L. Montejano. Helly type theorems on the homology of the space of transversals. *Journal of Discrete and Computational Geometry*, 27(3):387–393, 2002.