UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASES PROPIAS INDUCIDAS POR LAS TEORIAS DE TORSION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A

JAEL TERCERO ZAMORA

DIRECTOR DE TESIS: DR FRANCISCO FEDERICO RAGGI CARDENAS

2010

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Agradecimientos

Me es muy difícil incluir a todas aquellas personas que han llenado mi vida de alegrías e ilusiones, pues algunas de ellas han sido como estrellas fugaces y aunque su estela aún acaricia mi memoria, su brillo ha desaparecido con su ausencia. Así pues, quiero agradecer a aquellas personas que continúan brillando en mi corazón para guiarme en mi camino.

Quiero agradecer especialmente a Francisco Raggi, Rodolfo San Agustín y a José Ríos, la oportunidad que me brindaron de aprender de su calidad humana y por compartir conmigo sus extensos conocimientos. A Francisco por todo su apoyo y su ayuda en este largo camino, por todas sus enseñanzas, por las tardes en su cubículo y su compañía. A Rodolfo por escucharme y apoyarme, por su confianza, por estar a mi lado y por compartir conmigo momentos invaluables. A José por sus valiosos comentarios y su paciencia.

A mi mamá y a mis hermanos Mirza, Aixa, Roger y Elías por todo su apoyo, cariño, comprensión y por todas aquellas tardes de sobremesa llenas de consejos y experiencias de vida. A mi papá y a mi cuñado José Luis. A Ulises por todos sus chistes y a Giomara por ser tan tierna. A mis sobrinitos Rodrigo y Alonso, que despiertan mi alegría con cada sonrisa.

A mis abuelitos Epigmenio y Josefa por su cariño. A mis tías Josefina, Guadalupe y Esperanza y a mis tíos Armando, Antonio y Raúl. A Karín por compartirme su espacio y su alegría, a Omar por las lejanas conversaciones en casa de mi abuelita, a mis primos Armando, Carlos, Antonio y Tania.

A mi director de tesis y mis sinodales: Francisco Raggi, José Ríos, Hugo Rincón, Juan Morales y Juan Orendain, por revisar esta tesis y darme sus comentarios.

A Elizabeth, Yadira, Blanca, Mariana, Lily, Erika y Ana por su valiosa amistad, por escucharme y por acompañarme a lo largo de estos años.

A Flor y a Mauricio Villanueva por toda su confianza y por compartir su maravilloso mundo conmigo.

A Fer y Elena por su nobleza, por apoyarme y escucharme, por su intensa amistad y su cariño. A Miriam, Elihú, Eliút, Vero, Erika y Manuel por su amistad, por su agradable compañía en la facultad y por compartir sus risas conmigo.

Al dr. Alfredo Islas y a la dra. Beatriz Monroy por sus consejos, su paciencia y su generoso corazón.

A Alan Loza por su gran amistad, por brindarme la oportunidad de conocer otros mundos y por todo su cariño.

A Omar Ángeles y Raúl González gracias por estar conmigo en todos los momentos difíciles y darme fuerza para seguir adelante, por su grandiosa amistad y por los gratos momentos que han compartido conmigo.

A Gabriel H. Alva y Juan José Alba por seguir conmigo a pesar de los obstáculos.

A Jesús Torres por todas las desveladas al teléfono, por continuar a mi lado y por sus mensajes que siempre llegan en el momento correcto.

A Josefina Alonso por todos sus consejos, por haberme cuidado y apoyado.

Sobre todo, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, por todos estos años en estas maravillosas instalaciones, donde he aprendido las lecciones más valiosas de mi vida y conocido a muchas de las personas que habitan en mi corazón.

Clases Propias Inducidas por las Teorías de Torsión

Jael Tercero Zamora

2010

Índice general

Introducción

Dentro de la década de los sesenta del siglo XX, S. E. Dickson desarrolló un importante concepto matemático que permitió dar un giro muy original al estudio de las categorías de módulos sobre un anillo: el concepto de *Teorías de Torsión.* El impulso logrado por esta novedad se centró principalmente en las teorías de torsión hereditarias a las que varios matemáticos de calidad reconocida dedicaron una gran cantidad de trabajos.

La presente tesis tiene como tema central el estudio del artículo *"Clases Propias Asociadas a Teorías de Torsión"* publicado en 1987 por los investigadores Dr. Francisco Raggi y Dr. José Ríos.

La primera parte es una discusión de las teorías de torsión a partir de la definición de Dickson. Se discuten en este capítulo las formas equivalentes de definir las teorías de torsión, así como algunas teorías asociadas del concepto (prerradicales, prerradicales idempotentes, prerradicales exactos izquierdos, radicales exactos izquierdos y teorías de torsión de Jans).

En el segundo capítulo se introduce el concepto de clase propia y se discuten algunas de sus propiedades. También se desarrollan los conceptos de inyectividad relativa, clases propias inyectivamente saturadas y finalmente clases propias con suficientes inyectivos o suficientes proyectivos.

En el último capítulo, se estudia la manera en que las teorías de torsión hereditarias inducen clases propias que resultan en general clases propias con suficientes inyectivos y se termina con un ejemplo de una teoría de torsión hereditaria, cuya clase de torsión no tiene suficientes proyectivos.

1

Teorías de Torsión

Teorías de Torsión y Prerradicales

1.1 Definición

Una *Teoria de Torsión* $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es un par de clases no vacías de R-módulos tales que:

1. $Hom(T,F)=0$ para toda $T\in\mathcal{T}$ y para toda $F\in\mathcal{F}$
2. Si M pertenece a R-mod es tal que $Hom(M,F)=0$ para toda $F\in\mathcal{F}$ entonces $M\in\mathcal{T}$.
3. Si N pertenece a $R-Mod$ es tal que $Hom(T,N)=0$ para toda $T\in\mathcal{T}$ entonces $N\in\mathcal{F}$.

Si $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión, $\mathcal{T}$ es la *clase de Torsión* y $\mathcal{F}$ la clase *Libre de Torsión*.

1.2 Definición

Un prerradical en R es un funtor $\tau:R-Mod\to R-Mod$ tal que:

1. $\tau(M)\leq M$ para todo $M\in R-Mod$.
2. Para cada $f:M\to N$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tau(M) & \hookrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow_f \\ \tau(N) & \hookrightarrow & N \end{array}$$

1.3 Definición

- Un prerradical τ es idempotente si $\tau\cdot\tau(M)=\tau(\tau(M))=\tau(M)$.
- Un prerradical τ es radical si $(\tau:\tau)=\tau$ es decir para toda M $(\tau:\tau)(M)=\tau(M)$.
- Un prerradical τ es exacto izquierdo si para toda sucesión exacta:

$$0\to N'\to M\to N''\to 0$$

la sucesión $0\to\tau(N')\to\tau(M)\to\tau(N'')$ es exacta.

Todo prerradical τ tiene la propiedad $\tau(\oplus M_i)\cong\oplus(\tau M_i)$

1.4 Proposición

Sea $\mathcal{C}$ una clase en $R-Mod$. $\mathcal{C}$ es una *clase de Torsión* para una teoría de torsión si y sólo si, $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.

Demostración.

$\Longrightarrow \rfloor$

Sea $\mathcal{F} \subset R-Mod$ tal que $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ es teoría de torsión.

a) Sea $\{M_i\} \subset \mathcal{C}$. Demostraremos que $\underset{I}{\oplus} M_i \in \mathcal{C}$.

Sea $F \in \mathcal{F}$

$$Hom\left(\underset{I}{\oplus} M_i, F\right) \cong \prod_I Hom\left(M_i, F\right) = 0$$

Por lo que $\underset{I}{\oplus} M_i \in \mathcal{C}$.

b) Sean $M \in R-Mod$ y $N \subset M$ tal que $M \in \mathcal{C}$. Por demostrar que $M/N \in \mathcal{C}$.

Sea $F \in \mathcal{F}$ considere la sucesión

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

la cual induce la siguiente sucesión exacta.

$$0 \to Hom(M/N, F) \to Hom\left(M, F\right) \to Hom\left(N, F\right)$$

Como $M \in \mathcal{C}$ entonces $Hom\left(M, F\right) = 0$ por lo que $Hom\left(M/N, F\right) = 0$ y por tanto $M/N \in \mathcal{C}$.

c) Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exacta con $M', M'' \in \mathcal{C}$. Sea $F \in \mathcal{F}$ que induce la sucesión exacta

$$0 \to Hom(M'', F) \xrightarrow{g_*} Hom\left(M, F\right) \xrightarrow{f_*} Hom\left(M', F\right)$$

$\operatorname{Im} f_* \subset Hom\left(M', F\right) = 0$ puesto que $M' \in \mathcal{C}$. Entonces $Nuc\, f_* = Hom\left(M, F\right) \Longrightarrow Nuc\, f_* = \operatorname{Im} g_* = 0$

Por lo tanto, $Hom\left(M, F\right) = 0$

$\Leftarrow \rfloor$

Sea $\mathcal{F} = \{N \in R-Mod | Hom\left(C, N\right) = 0\ \forall C \in \mathcal{C}\}$

Afirmamos que $(\mathcal{C}$,$\mathcal{F})$ es una teoría de torsión.

a) $Hom\left(C, F\right) = 0\ \forall C \in \mathcal{C}, F \in \mathcal{F}$

b) Sea $N \in R-Mod$ tal que $Hom\left(C, N\right)\ \forall\, C \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{F}$

c) Sea M tal que $Hom\,(M, F) = 0 \; \forall \; F \in \mathcal{F}$. Por demostrar que $M \in \mathcal{C}$.

Sea $K = \Sigma\,\{N \subset M | N \in \mathcal{C}\}$. Notamos que $K \in \mathcal{C}$.

Por demostrar que $M/K \in \mathcal{F}$.

Si $C \in \mathcal{C}$ y $f \in Hom(C, M/K)$ entonces $\operatorname{Im} f = H/K \in \mathcal{C}$. Consideremos la siguiente sucesión:

$$0 \to K \to H \to H/K \to 0$$

Como C es cerrado bajo extensiones tenemos que $H \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $H \subseteq K$. Por lo que $0 = H/K = \operatorname{Im} f$. Por tanto $f = 0$, lo cual implica que $Hom\,(M, M/K) = 0$ entonces $M/K = 0$ entonces $M = K \in \mathcal{C}$.

■

1.5 Proposición

Sea $\mathcal{C}$ una clase en $R - Mod$. $\mathcal{C}$ es una clase *Libre de Torsión* para una teoría de torsión si y sólo si, $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos, productos y extensiones.

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$

Sea $\mathcal{T} \subset R - Mod$ tal que $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ es una teoría de torsión.

a) Sean $\{N_i\} \subseteq \mathcal{C}$ y $T \in \mathcal{T}$

$$Hom\left(T, \prod_I Ni\right) \cong \prod_I Hom\,(T, Ni) = 0$$

Por lo que $\prod_I Ni \in \mathcal{C}$.

b) Sean $N \in \mathcal{C}$ y $H \subseteq N$. Si $T \in \mathcal{T}$ la inclusión $H \subseteq N$ induce

$$0 \to Hom\,(T, H) \to Hom\,(T, N) \text{ exacta.}$$

Dado que $N \in \mathcal{C}$ entonces $Hom\,(T, N) = 0$, de aquí $Hom\,(T, H) = 0$ por lo que $H \in \mathcal{C}$.

c) Sea $0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ exacta y $N', N'' \in \mathcal{C}$.

Tomemos $T \in \mathcal{T}$ entonces la sucesión

$$0 \to Hom\,(T, N') \xrightarrow{f^*} Hom\,(T, N) \xrightarrow{g^*} Hom\,(T, N'') \text{ es exacta.}$$

Como $Hom\,(T, N') = 0 = Hom\,(T, N'')$ tenemos que $Hom\,(T, N) = 0$, por lo que $N \in \mathcal{C}$.

$\Leftarrow]$

Sea $\mathcal{T} = \{M \in R - Mod | Hom(M, C) = 0 \; \forall C \in \mathcal{C}\}$

Afirmamos que $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ es una teoría de torsión.

a) $Hom(T, C) = 0 \; \forall T \in \mathcal{T}$ y $\forall C \in \mathcal{C}$.

b) Si $M \in R - Mod$ es tal que $Hom(M, C) = 0 \; \forall C \in \mathcal{C}$ entonces $M \in \mathcal{T}$.

c) Sea $N \in R - Mod$ tal que $Hom(T, N) = 0 \; \forall T \in \mathcal{T}$. Por demostrar que $N \in \mathcal{C}$.

Sea $K = \cap \{N' \subseteq N | N/N' \in \mathcal{C}\}$. $K \neq \emptyset$ pues $0 \in \mathcal{C} \Rightarrow N \in K$. Por demostrar que $K \in \mathcal{T}$.

Consideremos $C \in \mathcal{C}$ y $f : K \to C$ un morfismo tal que $\operatorname{Im} f \in \mathcal{C}$ y sea $W = Nuc\, f$. Entonces $\operatorname{Im} f \cong K/Nuc\, f \cong K/W$.

$$0 \to K/W \to N/W \to N/K \to 0$$

$K/W \in \mathcal{C}$ y $N/K \in \mathcal{C}$ pues $N/K \hookrightarrow \prod N/N'$. Por lo que $N/Nuc\, f \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $W \subseteq K$ y $K \subseteq W$ entonces $K = W$. De aquí $f = 0$ y $K \in \mathcal{T}$. Dado que $Hom(K, N) = 0$ y como $K \subseteq N$ y como $K \subset N$ entonces $K = 0$ y $N \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ es una teoría de torsión.

■

1.6 Lema

Sea τ un radical, $M \in R - Mod$ y $N \leq M$, si $N \leq \tau M$ entonces $(\tau M)/N = \tau(M/N)$.

Demostración.

$\subseteq]$ Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc} 0 \to & N \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} M/N & \to 0 \\ & \uparrow 1_N & \uparrow i & i \uparrow & \\ & N \to & \tau M & \underset{\tau h}{\to} \tau(M/N) & \end{array}$$

como $Nuc\, \tau h = N$ entonces $(\tau M)/N \subset \tau(M/N)$. Notemos que esto es cierto para todo prerradical.

$\supseteq]$ Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc} 0 \to & (\tau M)/N \to & M/N & \xrightarrow{f} & M/(\tau M) & \to & 0 \\ & & i \uparrow & & \uparrow i & & \\ & & \tau(M/N) & \underset{\tau f}{\to} & \tau(M/\tau M) = 0 & & \end{array}$$

como $fi = i\tau f = 0$ entonces $\tau(M/N) \subseteq Nuc\, f = (\tau M)/N$.

■

1.7 Proposición

Sea τ un radical y definimos $\mathcal{T}_\tau = \{M|\tau M = M\}$. Entonces $\mathcal{T}_\tau$ es una clase de torsión.

Demostración.

a) $\mathcal{T}_\tau$ es cerrado bajo cocientes.

Sean $M \in \mathcal{T}_\tau$ y N un submódulo de M. Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M & \overset{g}{\to} & M/N & \to 0 \\ \uparrow i_M & & \uparrow i_{M/N} & \\ M = \tau M & \underset{\tau_g}{\to} & \tau(M/N) & \end{array}$$

gi_M es epimorfismo, así que $\tau(M/N) = M/N$.

b) $\mathcal{T}_\tau$ es cerrado bajo sumas directas.

Sea $\{M_i\}$ tal que $M_i \in \mathcal{T}_\tau$ $\forall i$. Entonces:

$$\tau(\oplus M_i) \cong \oplus\tau(M_i) \cong \oplus M_i$$

por lo tanto $\oplus M_i \in \mathcal{T}_\tau$.

c) $\mathcal{T}_\tau$ es cerrado bajo extensiones.

Sean $N, M/N \in \mathcal{T}_\tau$. Entonces $N = \tau N \subset \tau M$ y $M/N = \tau(M/N) = \tau(M)/N$ (por el lema 1.6). Por lo tanto $\tau(M) = M$.

Por a), b) y c) $\mathcal{T}_\tau$ es una clase de torsión. ■

1.8 Proposición

Sea τ un prerradical idempotente y definimos $\mathcal{F}_\tau = \{N|\tau N = 0\}$. $\mathcal{F}_\tau$ es una clase libre de torsión, i.e. es cerrado bajo submódulos, productos directos y extensiones.

Demostración.

a) $\mathcal{F}_\tau$ es cerrado bajo submódulos. Sea $M \in \mathcal{F}_\tau$ y M' un submódulo de M. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & M' & \to & M & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \tau M' & \to & \tau M & = 0 \end{array}$$

como $\tau M' \subseteq \tau M = 0$, entonces $\tau M' = 0$.

b) $\mathcal{F}_\tau$ es cerrado bajo producto directo. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ tal que $\tau M_i = \{0\}$ para toda i.

$$\prod_{i\in I} M_i \overset{p_j}{\to} M_j$$

y consideramos $\tau\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \overset{p_j}{\to} \tau M_j$. Sea $x_i \in \tau\left(\prod_{i\in I} M_i\right)$ entonces $\tau p_j(x_i) = x_j \in \tau M_j = 0$.

c) $\mathcal{F}_\tau$ es cerrado bajo extensiones.

Consideremos la sucesión $0 \to M' \overset{i}{\to} M \overset{p}{\to} M'' \to 0$ y supongamos que $\tau M' = 0$ y $\tau M'' = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \to 0 \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & \tau M & \underset{\tau p}{\to} & \tau M'' & \end{array}$$

como $\tau M'' = 0$ entonces $\tau p = 0$ por lo que $\tau M \subset Nuc\, p = M' \Longrightarrow \tau M \subset M'$. Como $\tau M = \tau\tau M \subset \tau M' = \{0\}$. Entonces es cerrado bajo extensiones.

■

1.9 Proposición

Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión y definimos $\tau M = \sum \{K \leq M : K \in \mathcal{T}\}$. Entonces τ es un radical idempotente.

Demostración.

Sean $M, N \in R - Mod$

i) Sea $M \xrightarrow{f} N$. Por demostrar que $f(\tau M) \subseteq \tau N$.

$$f(\tau M) = f\left(\sum \{K \leq M : K \in \mathcal{T}\}\right) \leq \sum f(K)$$

$f(K) \in \mathcal{T}$ pues $\mathcal{T}$ es cerrado bajo cocientes. Por lo que $f(\tau M) = \sum f(K) \subseteq \tau N$.

Observación:

Si $K \leq M, K \in \mathcal{T} \Rightarrow K \leq \tau M$.

ii)

$$\tau(M/\tau M) = \sum \{K/\tau M : (K/\tau M) \in \mathcal{T}, K \leq M\} = 0$$

por lo que τ es radical.

iii)

$$\tau(\tau M) = \tau\left(\sum \{K \leq \tau M : K \in \mathcal{T}\}\right)$$

como $\tau M \in \mathcal{T}$ entonces $\tau(\tau M) = \tau M$.

■

1.10 Proposición

Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión y definimos $\tau M = \cap \{N \leq M : M/N \in \mathcal{F}\}$. Entonces τ es un radical idempotente.

Demostración.

Sean $M, N \in R - Mod$.

i) Sea $N \xrightarrow{f} M$. Por demostrar que $f(\tau N) \subseteq \tau M$

$$f(\tau N) = f(\cap \{K \leq N : N/K \in \mathcal{F}\}) = \cap f(\{K \leq N : N/K \in \mathcal{F}\}) \subseteq \tau M$$

pues $\mathcal{F}$ es cerrado bajo submódulos.

ii) τ es idempotente pues

$$\tau(\tau M) = \cap(\{K \leq \tau M : (\tau M)/K \in \mathcal{F}\}) = \tau M$$

iii) τ es radical ya que

$$\tau\left(M/\tau M\right) = \cap\left\{K \leq M/\tau M : \left(M/\tau M\right)/K \in \mathcal{F}\right\} = 0$$

■

1.11 Proposición

Sea $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ una teoría de torsión en $R - Mod$. Sean σ y τ los radicales idempotentes asociados a $\mathcal{T}_\tau$ y a $\mathcal{F}_\tau$ respectivamente, entonces $\sigma = \tau$.

Demostración.

$\subseteq\rfloor$ Sabemos que para todo M en $R - Mod$

$\sigma(M) = \sum\{N \leq M : N \in \mathcal{T}_\tau\}$ y $\tau(M) = \cap\{N \leq M : M/N \in \mathcal{F}_\tau\}$

Sea N un submódulo de M tal que $M/N \in \mathcal{F}_\tau$ y consideremos el epimorfismo

$$M \xrightarrow{p} M/N \rightarrow 0$$

Como σ es idempotente entonces $\sigma(M)$ está en $\mathcal{T}_\tau$. $p(\sigma(M)) = 0$. Entonces $\sigma(M) \subseteq Nuc\, p(M) = N \subseteq \tau(M)$. Por lo que $\sigma(M) \subseteq \tau(M)$ y por tanto $\sigma \leq \tau$.

$\supseteq\rfloor$ Sea $F \in \mathcal{F}_\tau$ y $g : \tau(M) \rightarrow F$ un morfismo.

$$\operatorname{Im} g = \tau(M)/Nuc\, g \subseteq F \in \mathcal{F}_\tau.$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \tau(M)/Nuc\, g \rightarrow M/Nuc\, g \rightarrow M/\tau(M) \rightarrow 0$$

como $\tau(M/\tau M) = 0$ ya que τ es radical, entonces $M/\tau(M) \in \mathcal{F}_\tau$. $\tau(M/Nuc\ g) = 0$ pues $M/Nuc\ g$ está en $\mathcal{F}_\tau$. Por el lema 1.6 $\tau(M/Nuc\ g) \subseteq \tau(M)/Nuc\, g = 0$ entonces $\tau M = Nuc\, g$. Por lo que $g = 0$ y $\tau(M) \in T$, así $\tau M \subseteq \sigma M$.

Por lo tanto $\tau = \sigma$. ■

1.12 Lema

Sea τ un prerradical. Entonces τ es exacto izquierdo si y sólo sí $\forall N \leq M$ tenemos que $\tau N = N \cap \tau M$.

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Consideremos el siguiente diagrama con la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M/N & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow_\iota & & \uparrow_\iota & & \uparrow_\iota & & \\
0 & \rightarrow & \tau N & \xrightarrow{\overline{f}} & \tau M & \xrightarrow{\overline{g}} & \tau\left(M/N\right) & &
\end{array}$$

como $\tau N \subseteq N \cap \tau M$, basta demostrar que $N \cap \tau M \subseteq \tau N$.

Sea $x \in N \cap \tau M$, entonces $g\iota x = 0$, como el diagrama conmuta tenemos que $i\overline{g}x = gix = 0$ entonces

$x \in Nuc\,\overline{g} = \operatorname{Im}\overline{f} = \tau N$. Por lo que $N \cap \tau M \subseteq \tau N$.

$\Leftarrow\rfloor$ Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M/N & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow_i & & \uparrow_i & & \uparrow_i & & \\ 0 & \rightarrow & \tau N & \xrightarrow{\overline{f}} & \tau M & \xrightarrow{\overline{g}} & \tau(M/N) & & \end{array}$$

tenemos que $i\overline{g}\overline{f} = 0$ lo cual implica que $\overline{g}\overline{f} = 0$. Sea $x \in \tau M$ tal que $x \in Nuc\,\overline{g}$. Entonces $i\overline{g}(x) = gix = 0$ por lo que $ix \in Nuc\,g = \operatorname{Im} f$. Entonces, existe $y \in N$ tal que $f(y) = ix$ por lo que $x \in N \cap \tau M = \tau N$. Por lo tanto τ es exacto izquierdo.

■

1.13 Definición

Si N es un submódulo de M y si τ es una teoría de torsión entonces:

1. N es $\tau - denso$ *en* M si $M/N \in \mathcal{T}_\tau$.
2. N es $\tau - puro$ en M si $M/N \in \mathcal{F}_\tau$.

Módulos τ-$inyectivos$ y $\tau - proyectivos$

1.14 Definición

Un $R - módulo$ E es $\tau - inyectivo$ si para cualquier submódulo $\tau - denso$ M' de cualquier $R - módulo$ izquierdo M y cualquier homomorfismo f de M' en E, f puede ser extendido a un homomorfismo de M en E, es decir:

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & {}_f\uparrow & & \\ 0 & \longmapsto & M' & \longrightarrow & M \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & {}_f\uparrow & \nwarrow & \\ 0 & \longmapsto & M' & \longrightarrow & M \end{array}$$

$\boldsymbol{I}_\tau$ denotará la clase de los módulos $\tau - inyectivos$.

Si $M \in R - Mod$, entonces la cápsula inyectiva de M en $R - Mod$ será denotada por EM.

1.15 Observación

Para cada teoría de torsión τ y para cada $M \in R - Mod$, tenemos una cápsula inyectiva relativa de M respecto a τ, denotada por $E_\tau M$ que está dada por el submódulo de EM tal que

$$E_\tau M/M \cong \tau(EM/M)$$

$E_\tau M$ es la cápsula $\tau - inyectiva$ de M.

1.16 Definición

Un $R-módulo$ P es $\tau-proyectivo$ si para cualquier epimorfismo $g : M \to M''$, donde $M'' \in \mathcal{T}_\tau$ y cualquier homomorfismo f de M'' en P, existe un homomorfismo de M en P, es decir:

$$\begin{array}{ccccc} M & \stackrel{g}{\longmapsto} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow_f & & \\ & & P & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} M & \stackrel{g}{\longmapsto} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow & {}_f\uparrow & & \\ & & P & & \end{array}$$

1.17 Lema

Sea τ radical idempotente entonces τ es exacto izquierdo sí y sólo sí para todo $M \in R-Mod$ tenemos que $\tau M = M \cap \tau EM$.

Demostración.

$\Longrightarrow\rfloor$ Es claro del lema 1.12.

$\Longleftarrow\rfloor$ Sea $N \leq M$. Como $N \leq EN$, $M \leq EM, \tau M = M \cap \tau EM, \tau N = N \cap \tau EN$ y $EN \leq EM$ tenemos que $EM \cong EN \oplus E' \Longrightarrow \tau EM \cong \tau EN \oplus \tau E'$.

Notemos que $N \cap \tau M = N \cap (M \cap \tau EM) \cong N \cap (\tau EN \oplus \tau E') \leq (N \cap \tau EN) \oplus (N \cap \tau E') = \tau N$ pues $N \cap \tau E' = 0$.

$\blacksquare$

Teorías de Torsión Hereditarias

1.18 Definición

Sea $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ una teoría de torsión. Se dice que $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ es una *teoría de torsión hereditaria* si $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos.

1.19 Proposición

Sea $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ una teoría de torsión. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ es *hereditaria*

2) $\mathcal{F}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas

3) τ es exacto izquierdo.

Demostración.

$2) \Rightarrow 1)\rfloor$ Sean $M \in \mathcal{T}_\tau$, $N \leq M$ y $f : N \to K$, $K \in \mathcal{F}_\tau$. Por demostrar que $f = 0$.

Como EK es inyectivo, existe $\overline{f} : M \to EK$ que extiende a f. Por 2), $EK \in \mathcal{F}_\tau$ por lo que $\overline{f} = 0$, de este modo $f = 0$ y por lo tanto $N \in \mathcal{T}_\tau$.

$1) \Rightarrow 3)\rfloor$ Sea $M \in R - Mod$. $\tau M \leq M \cap \tau EM$.

Ya que $M \cap \tau EM \leq \tau EM \in \mathcal{T}_\tau$ por 1) se tiene que $M \cap \tau EM \subset \mathcal{T}_\tau$. De donde $M \cap \tau EM \subset \tau M$.

Por tanto $\tau M = M \cap \tau EM$.

$3) \Rightarrow 2)\rfloor$ Sea $N \in \mathcal{F}_\tau$.Entonces $0 = \tau N = N \cap \tau EN$. Como $N \underset{e}{\subseteq} EN$ tenemos que $\tau EN = 0$.

■

1.20 Proposición

Dadas dos Teorías de Torsión $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$, $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ y τ, σ sus radicales idempotentes asociados respectivamete, las siguientes tres condiciones son equivalentes:

i) $\mathcal{T}_\tau \leq \mathcal{T}_\sigma$.

ii) $\mathcal{F}_\sigma \leq \mathcal{F}_\tau$.

iii) $\tau \leq \sigma$.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii)$\rfloor$ Sea $N \in \mathcal{F}_\sigma$, entonces, para todo $M \in \mathcal{T}_\sigma$ tenemos que $Hom\,(M, N) = 0$.
En particular, para todo $M \in \mathcal{T}_\tau$ tenemos que $Hom\,(M, N) = 0$ pues $\mathcal{T}_\tau \leq \mathcal{T}_\sigma$ por lo que $N \in \mathcal{F}_\tau$ y $\mathcal{F}_\sigma \leq \mathcal{F}_\tau$.

ii) $\Rightarrow$ iii)$\rfloor$ Tenemos que $\tau M = \cap\{N \leq M : M/N \in \mathcal{F}_\tau\}$ y $\sigma M = \cap\{N \leq M : M/N \in \mathcal{F}_\sigma\}$ como $M/N \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow M/N \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $\tau M \leq \sigma M$, por lo que $\tau \leq \sigma$.

iii) $\Rightarrow$ i)$\rfloor$ Sean $\mathcal{T}_\tau = \{M : \tau M = M\}$ y $\mathcal{T}_\sigma = \{M : \sigma M = M\}$. Sea $M \in \mathcal{T}_\tau$. Como $\tau M \leq \sigma M$ y $\tau M = M$ entonces $M \leq \sigma M$. Dado que $\sigma M \leq M$, se tiene que $\sigma M = M$ por lo que $M \in \mathcal{T}_\sigma$. Por lo que $\mathcal{T}_\tau \leq \mathcal{T}_\sigma$.

■

1.21 Definición

Dadas dos Teorías de Torsión $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$, $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ y τ, σ sus radicales idempotentes asociados, diremos que $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau) \leq (\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ si se cumplen las condiciones equivalentes anteriores.

En adelante se identificará a cada radical exacto izquierdo τ con la teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$.

1.22 Definición

Un filtro de Gabriel L de un anillo R es una colección no vacía de ideales izquierdos tal que:

i) Si $I \in L$ y $r \in R$, entonces $(I : r) \in L$

ii) Si $I \in L$ y J es un ideal izquierdo tal que $(J : r) \in L$ para todo $r \in I$, entonces $J \in L$.

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoria de torsión hereditaria, la colección de ideales izquierdos $\{I : R/I \in \mathcal{T}\}$ es un filtro de Gabriel.

$R - tors$ denotará la retícula completa de todas las teorías de torsión hereditarias en la categoría $R - Mod$.

Sea τ un radical exacto izquierdo, denotaremos con $\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau, L_\tau$ la clase de torsión, la clase libre de torsión y el filtro de Gabriel asociados a τ, respectivamente. El menor elemento $\xi \in R - tors$ corresponde a $\mathcal{T}_\xi = \{0\}$, el mayor elemento χ de $R - tors$ será caracterizado por $\mathcal{F}_\chi = \{0\}$.

Si $\mathcal{C}$ es una clase de $R - módulos$ izquierdos, entonces, $\chi(\mathcal{C})$ denotará el mayor elemento de $R - tors$ respecto del cual todos los módulos de $\mathcal{C}$ son libres de torsión y $\xi(\mathcal{C})$ denotará el menor elemento de $R - tors$ relativo al cual todos los módulos de $\mathcal{C}$ son de torsión.

Un elemento $\tau \in R - tors$ se dice que es **TTF** si la clase $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo productos directos.

2

Clases Propias

Módulos $\mathcal{E}-inyectivos$ y módulos $\mathcal{E}-proyectivos$

2.1 Definición

Una clase propia sobre $R-Mod$ es una familia $\mathcal{E}$ de sucesiones exactas cortas de $R-módulos$ izquierdos, tales que si denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ los monomorfismos de las sucesiones de $\mathcal{E}$ y por $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ los epimorfismos de las sucesiones de $\mathcal{E}$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todas las sucesiones exactas que se escinden están en $\mathcal{E}$.
2. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y $f_2 f_1$ está definida, entonces $f_2 f_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
3. Si f_1, f_2 son monomorfismos tales que $f_2 f_1$ está definida y $f_2 f_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, entonces $f_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
4. Si $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ y $g_2 g_1$ está definida; entonces $g_2 g_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$.
5. Si g_1, g_2 son epimorfismos tales que $g_2 g_1$ está definida y $g_2 g_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, entonces $g_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$.

2.2 Definición

Sea $\mathcal{E}$ una clase propia sobre $R-Mod$, un $R-módulo$ izquierdo es:

- $\mathcal{E}-inyectivo$ si es un inyectivo relativo respecto a las sucesiones de $\mathcal{E}$.
- $\mathcal{E}-proyectivo$ si es un proyectivo relativo respecto a las sucesiones de $\mathcal{E}$.

2.3 Definición

Si $\mathcal{E}$ es una clase propia, $\mathcal{E}$ tiene suficientes proyectivos si para todo $R-módulo$ izquierdo M, existe un miembro de $\mathcal{E}$,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde P es un módulo $\mathcal{E}-proyectivo$.

Análogamente, $\mathcal{E}$ tiene suficientes inyectivos si para cada $R-módulo$ izquierdo M, existe un miembro de $\mathcal{E}$,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tal que E es un módulo $\mathcal{E}-inyectivo$.

Sea τ un elemento de $R - tors$ y sea $\mathcal{E}_\tau$ la familia de todas las sucesiones exactas cortas $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de $R - módulos$ izquierdos, tales que para todo módulo E $\tau - inyectivo$, cualquier homomorfismo de M' en E, puede ser extendido a un homomorfismo de M en E.

Entonces, todas las sucesiones exactas $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ tales que $M'' \in \mathcal{T}_\tau$ están en $\mathcal{E}\tau$.

2.4 Proposición

$\mathcal{E}\tau$ es una clase propia.

Demostración

1. Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta que se escinde. Sea E $\tau - inyectivo$ y $h : M' \to E$ un homomorfismo, como la sucesión se escinde, existe $f' : M \to M'$. Sea $k : M \to E$ donde $k = h \circ f'$ el homomorfismo buscado.

2. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$ y supongamos que $f_2 f_1$ está definida, sea E $\tau - inyectivo$ y $h_1 : M' \to E$, como $f_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$ entonces se puede extender a un morfismo $h_2 : M \to E$, puesto que $f_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$, h_2 puede ser extendido a un morfismo $h : K \to E$, por lo que $f_2 f_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

3. Sean $f_1 : M' \to M$, $f_2 : M \to K$ monomorfismos tales que $f_2 f_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, sea E $\tau - inyectivo$ y $h_1 : M' \to E$, como $f_1 f_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$ puede ser extendido a $h_2 : K \to E$, como $M \leq K$ entonces podemos tomar $h = h_2|_M : M \to E$.

4. Sean $0 \to K_1 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2 \to 0 ...(1)$ y $0 \to K_2 \xrightarrow{j} M_2 \xrightarrow{k} M_3 \to 0 ...(2)$ en $\mathcal{E}_\tau$ que inducen el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & K_2 & & \\
 & & & & & & \downarrow_j & & \\
0 & \to & K_1 & \xrightarrow{f} & M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow l & & \| & & \downarrow_k & & \\
 & & K_3 & \overset{h}{\hookrightarrow} & M_1 & \xrightarrow{i} & M_3 & & \\
 & & \downarrow_m & \searrow^n & \downarrow_p & \swarrow_s & \downarrow & & \\
M_2 & \underset{j}{\leftarrow} & K_2 & \underset{r}{\rightarrow} & E & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

como $nl : K_1 \to E$ y $(1) \in \mathcal{E}_\tau$ entonces existe $p : M_1 \to E$ y como $(*)$ conmuta, se tiene que $pf = nl$ y que $hl = f$, de este modo $phl = nl \Longrightarrow (ph - n)\, l = 0$, por lo que existe $s : M_3 \to E$, dado que $(*)$ es conmutativo tenemos que $skjm = ph - n ... (3)$

Sea $r : K_2 \to E$, (la cual existe porque $(2) \in \mathcal{E}_\tau$).

Notemos que $rm = ph - n ...(4)$ pues
$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & K_1 & \xrightarrow{l} & K_3 & \xrightarrow{m} & K_2 & \to & 0 \\
 & & & {\scriptstyle ph-n} & \downarrow & \swarrow_r & & & \\
 & & & & E & & & &
\end{array}
$$
conmuta y notemos también que $gh = jm$ pues $gh : K_3 \to M_2$, $jm : K_3 \to M_2$ y $(*)$ es conmutativo.

De (3) y (4) se tiene que $rm = skjm$ como m es epimorfismo, se puede cancelar por la derecha y tenemos que $r = skj$.

Tenemos que $skg : M_1 \to E$ y $p : M_1 \to E$ por lo que $p - sg : M_1 \to E$.

De aquí, $(p - skg)\, h = ph - sgh = ph - skjm = ph - rm = ph - (ph - n) = n$.

5. Consideremos el diagrama $(*)$.

Sean $r : K_2 \to E$ y $rm : K_3 \to E$, entonces existe $p : M_1 \to E$ tal que $ph = rm.$ Por lo que $pf = phl = rml = 0.$ Entonces existe $u : M_2 \to E$ tal que $ug = p$. De aquí $jm = gh \Rightarrow ujm = ugh = ph = rm$. Por lo tanto $uj = r$.

■

Observación

Los módulos $\tau - inyectivos$ coinciden con los módulos $\mathcal{E}\tau - inyectivos$ ya que por definición, todo $\tau - inyectivo$ es $\mathcal{E}\tau - inyectivo$. Recíprocamente, si E es un módulo $\mathcal{E}\tau - inyectivo$, entonces E es $\tau - inyectivo$ para todas las sucesiones exactas cortas de $\mathcal{E}\tau$, en particular para aquellas donde $M'' \in \mathcal{T}_\tau$´por lo que E es $\tau - inyectivo$.

3

Clases Propias Inducidas por las Teorías de Torsión.

Cápsulas $\mathcal{E}-inyectivas$

3.1 Definición

Sea $\mathcal{E}$ una clase propia de $R-Mod$ y sea M un $R-módulo$ izquierdo. Una cápsula $\mathcal{E}-inyectiva$ para M es un par $(\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M, f)$ tal que:

1. $\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$ es un $R-módulo$ izquierdo $\mathcal{E}-inyectivo$ y $f : M \to \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$ es un monomorfismo esencial que pertenece a $\mathcal{M}(\mathcal{E})$;
2. Si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M \\ \searrow & & \nearrow_{g} \\ & K & \end{array}$$

y g es un monomorfismo, entonces g pertenece a $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Si M tiene una cápsula $\mathcal{E}-inyectiva$, ésta es única salvo isomorfismo.

3.2 Teorema

Sea $\mathcal{E}$ una clase propia en $R-Mod$, son equivalentes:

1) Existe $\tau \in R-tors$ tal que $\mathcal{E}_{\tau} = \mathcal{E}$.

2)

a. Todo $M \in R-Mod$, tiene una cápsula $\mathcal{E}-inyectiva$.

b. Si $M \in R-Mod$, $\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$ es su cápsula $\mathcal{E}-inyectiva$, entonces todas las sucesiones exactas $0 \to N' \to N \to \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M \to 0$ pertenecen a $\mathcal{E}$.

Demostración

1) $\Longrightarrow$ 2) Dado $\tau \in R-tors$ tenemos una cápsula inyectiva relativa de M respecto a τ, sea $E_{\tau}M$ como se señaló en la observación 1.15.

2) $\Longrightarrow$ 1) Consideremos las siguientes teorías de torsión

$$\begin{array}{rcl} \sigma & = & \chi\{EM/\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M | M \in R-Mod\} \text{ y} \\ \rho & = & \xi\{\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M | M \in R-Mod\} \end{array}$$

donde $\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$ es la cápsula $\mathcal{E}-inyectiva$ de M.

Si $M \in R-Mod$ es $\mathcal{E}-inyectivo$ entonces, $EM/M \in \mathcal{F}_{\sigma}$ y así $M \in \boldsymbol{I}_{\sigma}$. Por otro lado, si $M \in \boldsymbol{I}_{\rho}$, tenemos que la siguiente sucesión se escinde:

$$0 \to M \to \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M \to \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M \to 0$$

ya que $\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M \in \mathcal{T}_\rho$ y como $M \underset{e}{\subseteq} \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$ se tiene que $M = \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$ y así M es $\mathcal{E}-inyectivo$.

Si llamamos $\boldsymbol{I}_{\mathcal{E}}$ a la clase de los módulos $\mathcal{E}$-$inyectivos$, entonces

$$\boldsymbol{I}_\rho \subset \boldsymbol{I}_{\mathcal{E}} \subset \boldsymbol{I}_\sigma$$

por lo que

$$\mathcal{E}_\sigma \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_\rho$$

Probemos ahora que $\mathcal{E}_\rho \subseteq \mathcal{E}_\sigma$.

Sean $N, M \in R - Mod$ y $f \in Hom_R\left(\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M, \mathrm{E}N/E_{\mathcal{E}}N\right)$.

Suponemos $f \neq 0$. Por la definición de cápsula $\mathcal{E} - inyectiva$ podemos suponer que f es un monomorfismo, puesto que si $Nuc\ f = K/M$, donde $M \hookrightarrow K \hookrightarrow \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M$, entonces f induce el monomorfismo $\overline{f} : \left(\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M\right) / \left(K/M\right) \to \mathrm{E}N/E_{\mathcal{E}}N$ y por el tercer teorema de isomorfismo $\left(\mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M\right) / \left(K/M\right) \cong \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/K = \mathrm{E}_{\mathcal{E}}K/K$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{E}_{\mathcal{E}}N & \to & P & \to & \mathrm{E}_{\mathcal{E}}M/M & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow_h & & \downarrow_f & & \\
0 & \to & \mathrm{E}_{\mathcal{E}}N & \to & \mathrm{E}N & \underset{g}{\to} & \mathrm{E}N/\mathrm{E}_{\mathcal{E}}N & \to & 0
\end{array}$$

Donde g es la proyección canónica y P es el producto fibrado de f y g.

Ya que h es monomorfismo se tiene que $\mathrm{E}_{\mathcal{E}}N$ es escencial en P.

Por hipótesis tenemos que $0 \longrightarrow \mathrm{E}_{\mathcal{E}}N \longrightarrow P \to E_{\mathcal{E}}M/M \to 0$ pertenece a $\mathcal{E}$; por lo que la sucesión se escinde y dado que $\mathrm{E}_{\mathcal{E}}N \underset{e}{\subset} P$ entonces $P = \mathrm{E}_{\mathcal{E}}N$ y $E_{\mathcal{E}}M/M = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\rho \leq \sigma$; i.e. $\mathcal{E}_\rho \subseteq \mathcal{E}_\sigma$.

Por lo que $\mathcal{E}_\rho = \mathcal{E} = \mathcal{E}_\sigma$ que es lo que queríamos demostrar.

■

3.3 Definición

Sea $\tau \in R - tors$, $\tau^\perp$ es el pseudocomplemento de τ si:

1. $\tau \cap \tau^\perp = \xi$.
2. Si $\tau^\perp \leq \sigma$ y $\sigma \cap \tau = \xi$ entonces $\tau^\perp = \sigma$.

Como en $R - tors$ $\tau \cap \left(\cup \{\sigma_i\}_I\right) = \underset{I}{\cup} \{\tau \cap \sigma_i\}$, el pseudocomplemento es único y $\tau^\perp$ satisface:

Si $\tau \cap \sigma = \xi$ entonces $\sigma \leq \tau^\perp$.

3.4 Afirmación

$\tau^\perp = \chi \{S \in R - Simp : \tau S = S\}$

Demostración

Sea $\sigma = \chi\{S \in R - Simp : \tau S = S\}$.

1) Sea $S \in R - \mathrm{Si}\,mp$, entonces $\tau S = \{^S_0$

Si $\tau S = 0$, entonces $S \in \mathcal{T}_\sigma$ por lo que $S \notin \mathcal{T}_\tau \cap \sigma$.

Si $\tau S = S$, entonces $S \notin \mathcal{T}_\sigma$ por lo que $S \notin \mathcal{T}_\tau \cap \sigma$.

Tenemos entonces que $\tau \cap \sigma = \xi$

2) Supongamos que $\tau \cap \rho = \xi$, sea S tal que $\tau S = S$ entonces $(\tau \cap \rho) S = 0$, si $\rho S = S$ tendríamos que $(\tau \cap \rho) S = S$, lo cual es una contradicción por lo que $\rho S = 0$, de este modo $\rho \leq \sigma$

De 1) y 2) se tiene que $\sigma = \tau^\perp$. ■

Módulos $\tau - co\,(libres\ de\ torsión)$

3.5 Definición

Sea τ en $R - tors$ y sea M en $R - Mod$, M es un módulo $\tau - co(libre\ de\ torsión)$ si $Hom_R(M, N) = 0$ para todo $N \in \mathcal{T}_\tau$.

La clase de módulos $\tau - co(libres\ de\ torsión)$ es cerrada bajo cocientes, extensiones y sumas directas arbitrarias.

Sea $M \in R - Mod$ denotaremos con $C_\tau(M)$ al mayor submódulo de M $\tau - co(libre\ de\ torsión)$. Entonces $C_\tau(M)$ está contenido en todo submódulo $\tau - denso$ de M y si τ es una teoría de torsión **TTF**, entonces $C_\tau(M)$ es $\tau - denso$ en M y $C_\tau(M) = \cap\{M' \subseteq M : M'$ es $\tau - denso$ en $M\}$

$C_\tau(-)$ es un radical idempotente, pero no necesariamente es exacto izquierdo. Cuando $\mathcal{T}_\tau$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas, entonces $C_\tau(-)$ es el radical de torsión asociado a $\tau^\perp$.

Para cada sucesión exacta corta

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

podemos considerar el diagrama (*):

$$\begin{array}{cccl} 0 & \to & M' \xrightarrow{j} P \xrightarrow{h} C_\tau(M'') \to 0 & (1) \\ & & \downarrow 1_{M'} \quad \downarrow k \quad \downarrow i & \\ 0 & \to & M' \underset{f}{\to} M \underset{g}{\to} M'' \to 0 & (2) \end{array}$$

donde i es la inclusión natural y P es el producto fibrado de i y g.

3.6 Proposición

Si la sucesión (2) pertenece a $\mathcal{E}_\tau$, entonces la sucesión (1) se escinde.

Demostración.

Como k es un monomorfismo, tenemos que $kj \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$. Entonces (1) está en $\mathcal{E}_\tau$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccl} 0 & \rightarrow & M' \xrightarrow{j} P \xrightarrow{h} C_\tau\left(M''\right) \rightarrow 0 \\ & & \| \qquad \downarrow i \qquad \searrow^{k} \\ 0 & \rightarrow & M' \underset{f}{\rightarrow} E_\tau\ M' \underset{g}{\rightarrow} E_\tau M'/M' \rightarrow 0 \end{array}$$

el morfismo i existe porque (1) está en $\mathcal{E}_\tau$ y $E_{\tau M'}$ es un módulo $\tau - inyectivo.$ Así obtenemos un morfismo k tal que el diagrama conmuta.

Como $C_\tau\left(M''\right)$ es $\tau - co(libre\ de\ torsión)$ y $E'_\tau M/M'$ es de $\tau - torsión$ entonces $k = 0$ y $\operatorname{Im} i \subset M'$.

Por lo que (1) se escinde. ■

3.7 Teorema

En el diagrama (*) los siguientes enunciados son equivalentes.

a) Si (1) se escinde, entonces (2) pertenece a $\mathcal{E}_\tau$.

b) Para toda $N \in R - Mod$ tal que $C_\tau\left(N\right) = 0$, cada sucesión exacta $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0$ pertenece a $\mathcal{E}_\tau$.

Demostración.

$a) \Longrightarrow b)$

Sea $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $C_\tau\left(N\right) = 0$. Para esta sucesión la sucesión (1) correspondiente es $0 \rightarrow K \rightarrow K \rightarrow 0 \rightarrow 0$ la cual se escinde. Por (a), la sucesión $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0$ pertenece a $\mathcal{E}_\tau$.

$b) \Longrightarrow a)$

Consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ su sucesión correspondiente, se escinde.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & M' & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{h} & C_\tau\left(M''\right) & \rightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow_k & & \downarrow_i & & \\ 0 & \rightarrow & M' & \underset{f}{\rightarrow} & M & \underset{g}{\rightarrow} & M'' & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & M/k\left(P\right) & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Como $M/k(P) \cong M''/C_\tau(M'')$, debemos tener que $C_\tau(M/k(P)) = 0$, por lo que $k \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$ y $kj \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$ pues (1) se escinde. De este modo $f = kj \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_\tau)$, lo cual implica que (2) $\in \mathcal{E}_\tau$.

■

3.8 Proposición

Sea $\tau \in R - tors$ y sea N un R-módulo izquierdo $\tau - co(libre\ de\ torsión)$. Entonces N es $\tau - proyectivo$.

Demostración.

Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ un miembro de $\mathcal{E}_\tau$ y sea $t : N \to M''$ un morfismo. Como N es $\tau - co(libre\ de\ torsión)$, tenemos $\operatorname{Im} t \underset{i'}{\hookrightarrow} C_\tau(M'')$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & N & \xrightarrow{t} & \operatorname{Im} t & & \\
 & & & & & {}_t\searrow & \downarrow_{i'} & & \\
0 & \to & M' & \xrightarrow{j} & P & \underset{g'}{\overset{h}{\rightleftarrows}} & C_\tau(M'') & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow_k & & \downarrow_i & & \\
0 & \to & M' & \underset{f}{\to} & M & \underset{g}{\to} & M'' & \to & 0
\end{array}$$

Por la proposición 3.6, tenemos que hay un morfismo $g' : C_\tau(M'') \to P$ tal que $hg' = 1_{C_\tau(M'')}$; entonces $kg't$ es el morfismo que necesitamos. ■

Clases propias con suficientes proyectivos

3.9 Lema

Sea $\tau \in R - tors$ y sea $\{P_x\}_X \subset R - Mod$. Entonces $\underset{X}{\oplus} P_x$ es $\tau - proyectivo$ si y sólo si, P_a es $\tau - proyectivo\ \forall x \in X$.

Demostración.

$\Longrightarrow\rfloor$ Sean $P = \underset{X}{\oplus} P_x$, $f : P_x \to M''$ y $g : M \to M''$ un epimorfismo, donde M'' es de $\tau - torsión$. Como P es $\tau - proyectivo$, existe $h : P \to M$ tal que $f \circ p_x = g \circ h$

$$\begin{array}{ccc}
P & \underset{i_x}{\overset{p_x}{\rightleftarrows}} & P_x \\
{}_h\downarrow & & \downarrow_f \\
M & \underset{g}{\to} & M''
\end{array}$$

Consideremos $g \circ h \circ i_x = f \circ p_x \circ i_x = f$. De donde P_x es proyectivo.

$\Longleftarrow\rfloor$ Sea $g : M \to M''$ un epimorfismo

$$\begin{array}{ccc} P_x & \underset{i_x}{\overset{p_x}{\leftrightarrows}} & P \\ f_x \downarrow & & \downarrow_f \\ M & \underset{g}{\to} & M'' \end{array}$$

Como P_x es $\tau - proyectivo$, existe $f_x : P_x \to M$ tal que $f \circ i_x = g \circ f_x$. Existe $h : P \to M$ tal que $h \circ i_x = f_x \ \forall x \in X$ por la propiedad universal de la suma directa. Tenemos que $g \circ h \circ i_x = g \circ f_x = f \circ i_x$, entonces $gh = f$, por lo que P es $\tau - proyectivo$.

■

3.10 Teorema

Sea $\tau \in R - tors$ tal que cualquier sucesión exacta $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ con $C_\tau(N'') = 0$ está en $\mathcal{E}_\tau$.

Entonces los siguientes enunciados se cumplen:

1. $\mathcal{E}_\tau$ tiene suficientes proyectivos.
2. Si $P \in R - Mod$ es $\tau - proyectivo$ y $C\tau(P) = 0$, entonces P es proyectivo.

Demostración:

1) Sea $M \in R - Mod$ y consideramos la sucesión exacta $0 \to K \to P_0 \to M/C_\tau(M) \to 0$ con P_0 un $R - módulo$ proyectivo izquierdo, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & L & & K & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & C_\tau(M) \overset{i'}{\to} & C_\tau(M) \oplus P_0 & \overset{u}{\to} & P_0 & \to 0 \\ & \downarrow & \downarrow_f & {}^{h}\swarrow & \downarrow_r & \\ 0 \to & C_\tau(M) \underset{i}{\to} & M & \underset{g}{\to} & M/C_\tau(M) & \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Donde h está dada por el hecho de que P_0 es proyectivo y f es el morfismo inducido por i y h. $C_\tau(M) \oplus P_0$ es un módulo $\tau - proyectivo$ por la proposición 3.8 y el lema 3.9, por lo que sólo tenemos que probar que $0 \to L \to C_\tau(M) \oplus P_0 \to M \to 0$ pertenece a $\mathcal{E}_\tau$. Para esto usaremos el teorema 3.7.

Consideremos el diagrama correspondiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \overset{j}{\to} & P & \overset{p}{\to} & C_\tau(M) & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow_k & \swarrow_{i'} & \downarrow_i & & \\ 0 & \to & L & \to & C_\tau(M) \oplus P_0 & \underset{f}{\to} & M & \to & 0 \end{array}$$

Sea $i' : C_\tau(M) \to C_\tau(M) \oplus P_0$ la inclusión natural. Entonces $fi' = i$. Hay un morfismo $q : C_\tau(M) \to P$ tal que $pq = 1_{C_\tau(M)}$ puesto que P es el producto fibrado. Esto significa que $0 \to L \to P \to C_\tau(M) \to 0$ se escinde, por lo que tenemos que $0 \rightarrow L \rightarrow C_\tau(M) \oplus P_0 \underset{f}{\rightarrow} M \rightarrow 0$ pertenece a $\mathcal{E}_\tau$.

2) Sea P un $R-módulo$ izquierdo $\tau-proyectivo$ con $C_\tau(P)=0$. Entonces, por hipótesis, todas las sucesiones exactas $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ pertenecen a $\mathcal{E}_\tau$. Como P es $\tau-proyectivo$, estas sucesiones se escinden. Tomamos una de estas sucesiones con N proyectivo para obtener P proyectivo.

$\blacksquare$

3.11 Teorema

Sea $\tau \in R-tors$ y sea $[\tau]=\{\sigma \in R-tors | \mathbf{I}_\tau = \mathbf{I}_\sigma\}$. Sea $\sigma \in [\tau]$ tal que σ es **TTF.** Entonces $\mathcal{E}_\tau$ tiene suficientes proyectivos.

Demostración:

Como $\mathbf{I}_\tau = \mathbf{I}_\sigma$, supongamos que existe $\sigma \in [\tau]$ tal que σ es **TTF**. Puesto que $C_\sigma(M)$ es el menor submódulo $\sigma-denso$ de M; entonces $C_\sigma(M)=0$ si y sólo si $M \in \mathcal{T}_\sigma$. Por 1) del teorema 3.10 $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\tau$ y tiene suficientes proyectivos.

3.12 Lema

Sea $\tau \in R-tors$ y $P \in R-Mod$. Entonces P es $\tau-proyectivo$ si y sólo si para todo diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow_f & & \\ Q & \underset{g}{\rightarrow} & Q'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

con $g \in P(\mathcal{E}_\tau)$ exacta y Q un módulo $\tau-inyectivo$, hay un morfismo $h: P \rightarrow Q$ tal que $gh=f$.

Demostración:

$\Longrightarrow]$

Si P es $\tau-proyectivo$ entonces existe $h: P \rightarrow Q$ tal que $gh=f$.

$\Longleftarrow]$

Sean $g: M \rightarrow M'' \in P(\mathcal{E}_\tau)$, $K = Nuc\, g$ y $E_\tau M$ la cápsula $\tau-inyectiva$ de M. Entonces podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & P & & & \\ & & & & | & \searrow^f & & \\ 0 \rightarrow & K & \xrightarrow{i} & M & - & \xrightarrow{g} & M'' & \rightarrow 0 \\ & \| & & \downarrow_l & \downarrow & & \downarrow_k & \\ 0 \rightarrow & K & \underset{j}{\rightarrow} & E_\tau\, M & & \underset{g'}{\rightarrow} & E_\tau M/K & \rightarrow 0 \end{array}$$

Sea $f: P \rightarrow M''$ y sea $x \in P$. Suponemos que $f(x)=t \in M''$, ent $k(f(x))=k(t)=z \in E_\tau M/K$. Como g' es epimorfismo, entonces existe $y \in E_\tau M$ tal que $g'(y)=z$ por lo que $y=l(y)$. Por otro lado, por hipótesis existe $h: P \rightarrow E_\tau M$ tal que $hg'=kf$; por lo que $g'h(x)=k(f(x))=z$ de aquí, hay un elemento $u \in E_\tau M$ tal que $g'(u)=z$, así $u=l(u)$. Consideremos $y-u \Longrightarrow g'l(y-u)=g'(y-u)=0$. Por lo tanto, $(y-u) \in Nuc\, g' = K = Nuc\, g$ Entonces $y-u=0 \Longrightarrow y=u$. Por lo tanto existe $\overline{f}: P \rightarrow M$ tal que $\overline{f}\, g = f$.

$\blacksquare$

3.13 Criterio de Baer

Q es inyectivo si y sólo si para todo ideal izquierdo I de R, $f : I \to Q$, existe $g : R \to Q$ tal que $g|_I = f$.

3.14 Proposición (Criterio de Baer Relativo)

Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Q es $\tau - inyectivo$.

ii) Para todo $f : I \to Q$, con $I \in L_\tau$, existe $g : R \to Q$ tal que $g|_I = f$.

Demostración:

i)⇒ii)⌋ Si $I \in L_\tau$ entonces la sucesión

$$0 \to I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{j} R/I \to 0 \ \in \mathcal{E}_\tau$$

por lo tanto se cumple ii).

ii)⇒i)⌋ Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & {}_f\downarrow & & & & & & \\ & & Q & & & & & & \end{array}$$

Sea $\mathfrak{F} = \{(N, g) : M' \subseteq N \subseteq M$ y $g : N \to Q$ tal que $g|_{M'} = f\}$

$\mathfrak{F} \neq \phi$ pues $(M', f) \in \mathfrak{F}$. Definimos $(N, g) \leq (N', g')$ si $N \subseteq N'$ y $g'|_N = g$.

$\mathfrak{F}$ es parcialmente ordenado y satisface las hipótesis del lema de Zorn. Por lo que $\mathfrak{F}$ tiene máximos. Sea (S, g) un máximo de $\mathfrak{F}$, tenemos que $M' \subseteq S \subseteq M$ y $g : S \to Q$ tal que $g|_{M'} = f$.

Afirmamos que $S = M$.

Suponemos que $S \neq M$. Sea $m \in M \setminus S$ entonces $S \subsetneq S + Rm$

Sea $I = (S : m)$ como $M/M' \cong M'' \in \mathcal{T}_\tau$ entonces $M/S \in \mathcal{T}_\tau$ ya que M/S es cociente de M/M', por lo tanto $I = (S : M) \in L_\tau$.

Sea $r \in I$, definimos $h : I \to Q$ como $h(r) = g(rm)$. h es mofismo.

Por ii) existe $\overline{h} : R \to Q$ tal que $\overline{h}|_I = h$.

Sea $\overline{g} : S + Rm \to Q$ el morfismo definido como $\overline{g}(s + am) = g(s) + \overline{h}(a)$.

Mostremos ahora que $\overline{g}$ está bien definido. Sea $s + am = s' + a'm \in S + Rm$ entonces $s - s' = (a' - a) m \in S$ por lo que $(a' - a) \in I$ entonces $g(s - s') = g((a' - a) m) = h(a' - a) = \overline{h}(a' - a) = \overline{h}(a') - \overline{h}(a)$

de donde $g(s) + \overline{h}(a) = g(s') + \overline{h}(a')$.

Por lo que $\overline{g}$ está bien definido y extiende a g. Por lo tanto $\overline{g}$ extiende a f.

Es decir $(S + Rm, \overline{g}) \in \mathfrak{F}$ y $(S, g) < (S + Rm, \overline{g})$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $S = M$ y Q es $\tau - proyectivo$.

■

3.15 Lema

Sea $\tau \in R - tors$ tal que L_τ tiene solamente ideales proyectivos izquierdos, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1. La clase $\boldsymbol{I}_\tau$ es cerrada bajo epimorfismos.
2. La clase de módulos $\tau - proyectivos$ es cerrada bajo submódulos $\tau - densos.$

Demostración:

1. Sea $I \in L_\tau$ y sean $k : Q \to Q''$ un epimorfismo y $h : I \to Q''$ morfismo. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & I & \overset{i}{\hookrightarrow} & R \\ & & h\downarrow & \searrow f & \downarrow_g \\ 0 & \leftarrow & Q'' & \underset{k}{\leftarrow} & Q \end{array}$$

donde $i : I \to R$ es la inclusión natural y $f : I \to Q$ existe por ser $I - proyectivo.$ Por el criterio de Baer existe $g : R \to Q$ tal que $g|_I = f$. Por lo que $kgi = h$. Por lo tanto Q'' es $\tau - inyectivo.$

2. Sea P un módulo $\tau - proyectivo$ y sea P' un submódulo de P tal que $P/P' \in \mathcal{T}_\tau$; consideremos un epimorfismo $k : Q \to Q''$ y sea $f : P' \to Q''$. Por 1) si Q es $\tau - inyectivo$ entonces Q''es $\tau - inyectivo$ y como P es $\tau - proyectivo$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & P' & \overset{i}{\hookrightarrow} & P \\ & & {}_f\downarrow & {}^h\swarrow & \downarrow_g \\ 0 & \leftarrow & Q'' & \underset{k}{\leftarrow} & Q \end{array}$$

Por el lema 3.12 existe $h : P \to Q''$ tal que $kg = h$, por lo que $f = hi$. Por lo tanto P' es $\tau - proyectivo.$ ■

Ejemplo

Ahora daremos un ejemplo de una teoría de torsión τ tal que $\mathcal{E}_\tau$ no tiene suficientes proyectivos.

Sea $\tau = \chi(\mathbb{Z}_p)$ en $\mathbb{Z} - mod$. Supongamos que hay una sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} \mathbb{Q} \to 0$$

que pertenece a $\mathcal{E}_\tau$ con P $\tau - proyectivo$.

Existe $h : P \to E_\tau K$ tal que $hf = i : K \to E_\tau K$.

Sean $N = Nuc\, h$ y $k : E_\tau K \to E_\tau K/K$ la proyección.

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & P \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "h"'] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\
 & E_\tau K \arrow[r, "k"'] & E_\tau K/K & &
\end{tikzcd}$$

Entonces $N \cap f(K) = 0$ y $N \oplus f(K) = Nuc\, kh$. De este modo, $P/(N \oplus f(K))$ es isomorfo a un submódulo de $E_\tau K/K \in \mathcal{T}_\tau$. Por lo que $N \oplus f(K)$ es $\tau - denso$ en P. Por los lemas 3.15 y 3.9 tenemos que N es $\tau - proyectivo$. Notemos que $N \neq 0$, de otro modo $\mathbb{Q} \cong P/f(K) \in \mathcal{T}_\tau$.

Como $N \cap f(K) = 0$, entonces hay un monomorfismo $j = g|_N : N \to \mathbb{Q}$. Sea $C = \mathbb{Q}/\operatorname{Im} j$. Como N es $\tau - proyectivo$, entonces $C \neq 0$. El morfismo $g : P \to \mathbb{Q}$ induce $g' : P/N \to C$ y como $g(f(K)) = 0$, tenemos que $g'((N \oplus f(K))/N) = 0$. Así tenemos un epimorfismo $g'' : P/(N \oplus f(K)) \to C$, lo que muestra que $C \in \mathcal{T}_\tau$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & N \arrow[dl] \arrow[dr, "j"] & & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & P \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\
 & & & C & & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $N \neq 0$ y hay un morfismo $j : N \to \mathbb{Q}$, entonces tenemos un cociente $0 \neq N/L \in \mathcal{T}_\tau$.

Considere un epimorfismo $\mathbb{Z}^{(X)} \xrightarrow{u} N/L$, el cual debe estar en $P(\mathcal{E}_\tau)$. Como N es $\tau - proyectivo,$ hay un morfismo $0 \neq \bar{u} : N \to \mathbb{Z}^{(X)}$ tal que $u\bar{u} = p : N \to N/L$ es la proyección canónica.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & N \\
 & \bar{u} \swarrow & \\
\mathbb{Z}^{(X)} & \xrightarrow{u} & N/L
\end{array}
$$

Notemos que $\operatorname{Im}\bar{u} \cong \mathbb{Z}^{(Y)}$ para algún conjunto Y; por lo que el epimorfismo $N \to \operatorname{Im}\bar{u}$ se escinde, por lo que N contiene un sumando directo libre. El hecho de haya un monomorfismo $j : N \to \mathbb{Q}$ implica $N \cong \mathbb{Z}$. Por lo que

$$C = \tau C = \tau(\mathbb{Q}/\operatorname{Im} j) \neq \mathbb{Q}/\operatorname{Im} j$$

lo cual es una contradicción.

Por lo que $\mathcal{E}\tau$ no tiene suficientes proyectivos. ■

Biblografía

Azumaya G., Some properties of TTF-Classes, in " Proceedings of the conference on orders, group rings, and related topics", Lecture notes in mathematics 353, Springer Verlag, Berlín 1973.

Colavita L., **Raggi** F., **Ríos** J., Sobre Filtros estables de Gabriel V. Anales del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M. 17 no. 1 (1977) p. 1-16.

Eilemberg S., Algebra homológica. Anales del Instituto de Matemáticas. U.N.A.M. 1 (1961) p. 117-145

Golan J., Colocalization at idempotents ideals, in ring theory, Proceedings of the 1978 Antwerp conference. Marcel Dekker New York, 1979.

Golan J., Localization of nonconmutative rings., Marcel Dekker New York, 1979.

Golan J., On being cotorsion free, Anales del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

Golan J. and **Miller** R., Cotorsion free modules and colocalizations. Communications in Algebra 6 (1978) p. 1217-1230.

Jans J., Some aspects of torsion, Pacific J. Math. 15 (1965) p. 1249-1259.

Mac Lane S., Homology. Berlin Gottingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1963.

Raggi F. and **Ríos** J., Sublatices of $R-tors$ associated to proper classes. Communications in Algebra 15 (1987) p. 555-573.

Raggi F. and **Ríos** J., Proper classes asociated to torsion theories. Communications in Algebra (1987) p. 575-587.

Stenstrom Bo., Rings of Quotients. New York-Berlín, Springer-Verlag 1975.