



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de Grado y la Integral de
Kronecker

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Ivonne Callejas Arellano

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“Pero ser incompleto y saberlo es también señal del pensamiento, y
justamente es ese pensamiento por el que vale la pena morir”
Th. W. Adorno y M. Horkheimer, Dialéctica de la Ilustración*

*“Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen
sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was
den grössten Genuss gewährt.”
Carl Friedrich Gauss*

*A mis padres Bertha y Jesús.
A mis abuelos y a mis hermanos.*

Índice general

Introducción	IV
1. Índice y Grado	1
1.1. Índice en Variable Compleja	1
1.2. Espacios Cubrientes	6
1.3. Grado e Invarianza Homotópica	10
1.4. Índice y Grado	13
2. Grado en S^n	15
2.1. Grado para mapeos en la esfera	15
2.2. Mapeos entre esferas de distinta dimensión	23
2.3. Grado y Homotopía	25
3. El número de Arrollamiento	29
3.1. Variedades Diferenciales	29
3.2. Orientación	34
3.3. Grado y Número de Arrollamiento	35
3.4. Teorema de Hopf	36
4. Grado y Kronecker	41
4.1. Formas Diferenciales	41
4.2. Integración en Variedades	48
4.3. La forma de volumen en S^n	51
4.4. La integral de Kronecker	56
5. Algunos comentarios históricos	61
5.1. Teorema de Brouwer	61
5.2. Teorema del punto fijo de Lefschetz	63

5.3. Característica de Kronecker	64
5.4. Teorema fundamental del álgebra	67
5.5. El número de Gauss y la integral de Kronecker	70
5.6. La cadena de Sturm y la integral de Kronecker	71
5.7. Gauss-Bonet	72
Apéndice	75
Glosario	79
Bibliografía	

Introducción

La dimensión, derivado de nuestro entendimiento del espacio físico, es uno de los más interesantes conceptos matemáticos. Durante el siglo XIX y a principios del siglo XX, diversos matemáticos generalizaron el concepto y probaron su significado.

Sin embargo esto llevó al intento de resolver problemas más complejos. Surgieron preguntas como ¿En qué sentido era la dimensión un invariante geométrico? ¿Podría la dimensión de un espacio y la dimensión de su imagen ser diferente bajo algún mapeo?

Brouwer estaba fascinado por el problema de invarianza dimensional. ¿Era posible, para ello, que existiese una función continua uno a uno, de un dominio de dimensión m a un dominio de dimensión n , tal que $m \neq n$? Brouwer buscó la respuesta. En uno de sus artículos publicó una prueba general de la invarianza dimensional, usando dos novedosos conceptos: el de *mapeo entre variedades* y el *grado de un mapeo*. Brouwer inicialmente desarrolló el concepto de *grado de un mapeo* para una generalización n -dimensional del teorema de singularidad para campos vectoriales sobre esferas y el teorema del punto fijo para mapeos de esferas.

Sin embargo unos años antes en 1878, la publicación de Cantor “*Contribución a la teoría de variedades*” (“Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ”) había encontrado una a solución del problema, pero sólo para dimensiones bajas.

De igual forma se intentó generalizar el resultado a ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior. Esto se analizó con ayuda del trabajo analítico realizado por Kronecker, en 1869, acerca del índice de sistemas de

funciones de \mathbb{R}^n . Dicho trabajo tenía un sentido topológico, ya que la característica de Kronecker, como lo probó W.Dyck, podía ser expresada en términos puramente topológicos.

El presente trabajo se avoca al estudio comparativo de diferentes versiones de la idea de grado topológico en las categorías diferenciable y topológica.

En el primer capítulo llevamos el concepto de homotopía de curvas al Teorema de Deformación para definir el Índice y demostrar por medio de la variable compleja que es un número entero. Hecho lo anterior se definen espacios cubrientes y levantamientos de curvas para abandonar por completo la teoría de la variable compleja y definir el grado usando herramientas topológicas más que del análisis complejo.

El segundo capítulo toma su atención en generalizar el concepto de grado para mapeos entre esferas.

En el capítulo cuarto, nos referiremos a las formas diferenciales y la integración en variedades para dar la forma de volumen de la esfera y así relacionar la fórmula de grado a través de la integral de Kronecker. De este modo llegamos a la comparación del grado con el índice y así homologar los primeros capítulos con algunos comentarios histórico, que abarcaremos en el último capítulo, a la luz de las ideas de Kronecker.

Capítulo 1

Índice y Grado

Contar el número de veces que una función enrolla su dominio sobre su contradominio, ha sido de interés no sólo para la topología. Disciplinas como la variable compleja y el problema general de solución de ecuaciones también han hecho un delicado análisis al respecto. Existe una fórmula útil que nos dice cuántas veces gira una curva cerrada γ alrededor de un punto dado z_0 . A este número le llamaremos *índice* y se definirá a la luz de la variable compleja vía una integral. Veremos como dicho índice es un invariante homotópico y vía levantamientos dejaremos las integrales para definir topológicamente el índice como un caso particular de la noción *grado*.

1.1. Índice en Variable Compleja

1.1.1 Definición. Sean X y Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ y sea $I = [0, 1]$. Decimos que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$, tales que $f(x) = g(x) \forall x \in A$ son *homotópicas relativas a A* si existe una función continua:

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que,

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, t) = f(x) \quad \forall x \in A, \forall t \in I$$

Entonces H es una *homotopía de f a g relativa al conjunto A* . Denotamos esto como $f \simeq g(\text{rel } A)$.

En el caso $A = \emptyset$ diremos que H es una homotopía libre y denotamos esto como $f \simeq g$.

Diremos que $\{H_t\}_{t \in I}$ es una *familia de funciones de X en Y* parametrizada por t , tal que $H_t : X \rightarrow Y$ donde $H_t(x) = H(x, t)$ $t \in I$.

Nos referiremos al campo complejo como \mathbb{C} y llamaremos región a cualquier conjunto abierto y conexo de $G \subseteq \mathbb{C}$, y a las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{C} las llamaremos *curvas*.

Sean $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow G$ y $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ dos curvas continuas de z_0 a z_1 en G . Decimos que γ_0 es *homotópica con extremos fijos* a γ_1 en G , tal que $\gamma_0 \simeq \gamma_1(\text{rel}\{0, 1\})$.

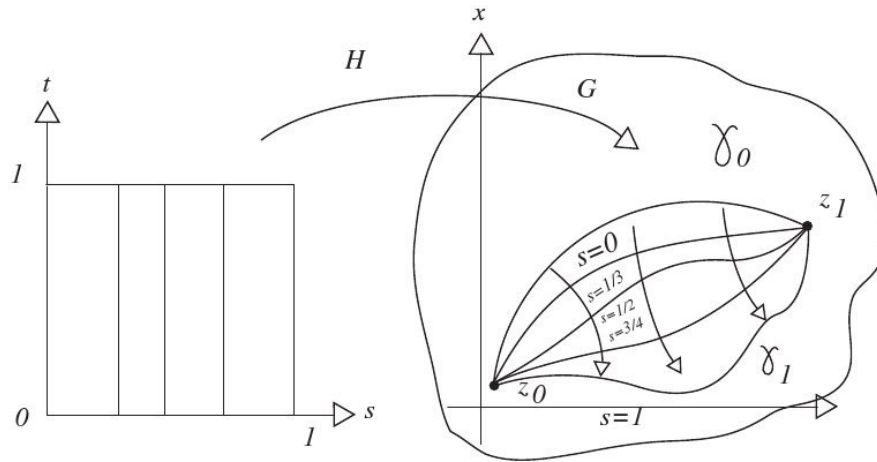


Figura 1.1: Homotopía con extremos fijos

Las curvas pueden variar, torcerse o cruzarse sobre sí mismas o con respecto de la otra. Consideremos $\gamma_s(t) = H(s, t)$, donde cada γ_s es una curva continua de z_0 a z_1 en A . La curva inicial es γ_0 y corresponde al lado izquierdo del cuadrado unitario. La curva final es γ_1 y corresponde al lado derecho del cuadrado. Todo el lado inferior va a z_0 , así como el lado superior va a z_1 . Las curvas γ_s son una familia de curvas intermedias que cambian continuamente.

1.1.2 Definición. Sean $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow G$ y $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ dos curvas cerradas continuas en G . Decimos que γ_0 y γ_1 son *homotópicas como curvas cerradas* en G si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ de γ_0 a γ_1 , tal que $H(0, t) = \gamma_0(t)$ y $H(1, t) = \gamma_1(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

Si consideramos $\gamma_s(t) = H(s, t)$, entonces cada γ_s es una curva continua en $[0, 1]$.

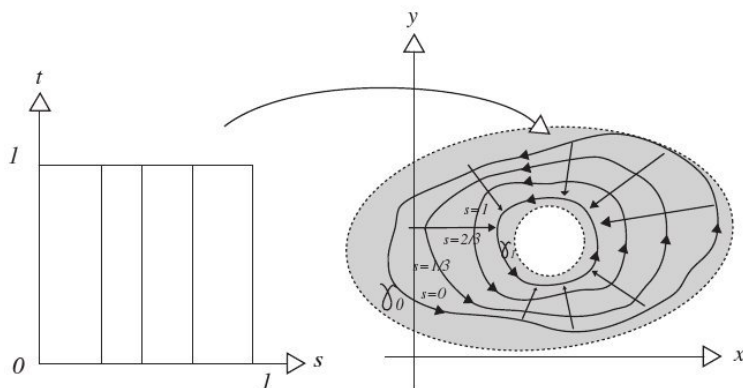


Figura 1.2: Homotopía de curvas cerradas

Podemos parametrizar, a modo de ejemplo, el círculo unitario como $\gamma_0(t) = \cos t + i \sen t$ y la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ como $\gamma_1(t) = 2 \cos t + i \sen t$. Estas curvas son homotópicas como curvas cerradas en el anillo $A = \{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 3\}$.

Es posible considerar la homotopía $H(s, t) = (1 + s) \cos t + i \sin t$.

1.1.3 Definición. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ una curva y $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ una partición finita de $[a, b]$. Decimos que γ es una curva *suave por tramos* en G si $\gamma'(t)$ existe en cada subintervalo abierto (a_i, a_{i+1}) y es continua en (a_i, a_{i+1}) .

1.1.4 Definición. Sean $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ una curva suave por tramos. Definimos la *integral de f* a lo largo de γ como:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

1.1.5 Teorema. Teorema de Deformación *Sea f una función analítica en un conjunto abierto G , y γ_0 y γ_1 curvas cerradas suaves por tramos en G . Véase [6, p.152]*

- Si $\gamma_0 \simeq \gamma_1(\text{rel}\{0, 1\})$. Entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

- Si $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. Entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

1.1.6 Corolario. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus z_0$ y $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ un homeomorfismo creciente, es decir φ es diferenciable, tal que $\varphi' \geq 0$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, entonces $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma \circ \varphi} f$.*

1.1.7 Definición. Sea γ una curva cerrada en G y $z_0 \in G$ un punto que no está en γ . Entonces definimos el *índice* de γ con respecto de z_0 , como:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Por el corolario anterior, podemos inferir que el *índice* es un invariante bajo parametrización.

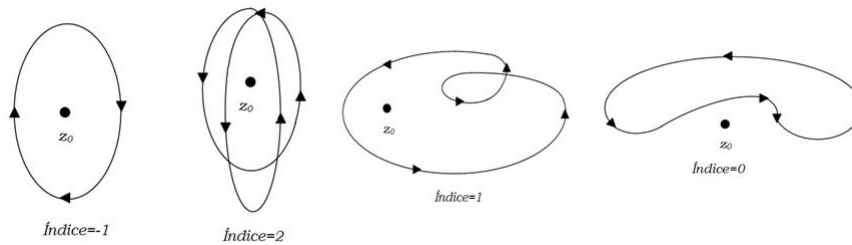


Figura 1.3: Ejemplos de Índice de una curva alrededor de un punto

1.1.8 Ejemplo. Sea γ el círculo de radio r , con centro en $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $n \geq 0$. Entonces

$$(z - z_0)^n = \frac{d}{dz} \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

de donde

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n \cdot dz = 0$$

El caso $n \leq -2$ es análogo al anterior.

Ahora si $n = -1$ consideramos la parametrización $\gamma(t) = re^{it} + z_0$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. De donde $\gamma'(t) = ire^{it}$. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it} + z_0) - z_0} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i = n$$

Por lo tanto

$$n = I(\gamma, z_0)$$

□.

1.1.9 Teorema. Teorema del Índice Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ una curva cerrada (C^1 por tramos). Entonces $I(\gamma, z_0)$ es un entero.

Demostración:

Sea

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

Entonces, en puntos donde la integral es continua, el teorema fundamental del cálculo nos da

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

De esta forma se tiene

$$\frac{d}{dt} e^{-g(t)} [\gamma(t) - z_0] = 0$$

en puntos donde $g'(t)$ existe, y por tanto $e^{-g(t)} [\gamma(t) - z_0]$ es constante por tramos en $[a, b]$. Este valor constante es

$$e^{-g(a)} [\gamma(a) - z_0]$$

Así $e^{-g(b)} [\gamma(b) - z_0] = e^{-g(a)} [\gamma(a) - z_0]$. Pero $\gamma(b) = \gamma(a)$, de modo que $e^{-g(b)} = e^{-g(a)}$. Por otra parte, $g(a) = 0$; así que $e^{-g(b)} = 1$.

Por lo tanto, $g(b) = 2\pi ni$ con $n \in \mathbb{Z}$.

□.

1.2. Espacios Cubrientes

1.2.1 Definición. Sean X, Y espacios conexos. Un *mapeo cubriente* sobre un espacio topológico X es una función continua $p : Y \rightarrow X$, tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U que satisface:

- $p^{-1}(U)$ es la unión ajena de abiertos $V_j \subseteq Y$, $j \in J$ donde J es algún conjunto no vacío de índices.

- Para cada $j \in J$, la restricción $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Decimos que X es la *base* del cubrimiento y Y es el espacio cubriente.

Para cada punto x en la base, la imagen inversa de x en U es un espacio discreto llamado *fibra* sobre x tal que p es suprayectiva.

1.2.2 Definición. Sea $p : Y \rightarrow X$ un mapeo cubriente. Si $f : W \rightarrow X$ es una función continua entonces un *levantamiento* de f es una función continua $\tilde{f} : W \rightarrow Y$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

1.2.3 Teorema. Levantamiento de curvas Sea $p : Y \rightarrow X$ un mapeo cubriente tal que $p(y_0) = x_0$. Entonces cualquier curva $\gamma : I \rightarrow X$ que comienza en x_0 tiene un levantamiento único a una curva $\tilde{\gamma}$ en Y que comienza en y_0 .

1.2.4 Proposición. Para cualquier $f : S^1 \rightarrow S^1$ existe una única $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Entonces $f(\alpha) = \hat{\varphi}(\alpha)$, $\alpha \in S^1$.

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\
 \varphi' \downarrow & & \downarrow e^{2\pi i t} \\
 S^1 & \xrightarrow{f} & S^1
 \end{array}$$

Demostración:

Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)}$ y $\varphi(0) = 0$.

Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, tal que $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$, donde $\log(z) = \ln(r) + i\theta$ y sea $q : i \rightarrow S^1$, tal que $q(t) = f(e^{2\pi i t})$.

Definamos el inverso de q . Como I es compacto, q es uniformemente continua. Tomemos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, partición de I , tal que $|q(t) - q(t_j)| < 2$ si $t \in [t_j, t_{j+1}]$ y $j = 0, 1, \dots, k-1$. Entonces $q(t) \neq -q(t_j)$, de aquí que $q(t) \cdot -q(t_j)^{-1} \neq -1$, por tanto $\log(q(t)) \cdot q(t_j)^{-1}$ está bien definido. Entonces

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} (\log(\frac{q(t_1)}{q(t_0)}) + \dots + \log(\frac{q(t_j)}{q(t_{j-1})}))$$

$t \in [t_j, t_{j+1}]$

En consecuencia φ está bien definida, es continua y toma valores reales. Además $q(t_0) = q(0) = 1$, entonces $e^{2\pi i \varphi(t)} = \frac{q(t)}{q(t_0)} = q(t) = f(e^{2\pi i t})$.

Ahora veamos que es única. Sea $\varphi, \psi : (I, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, tal que $\hat{\varphi} = \hat{\psi} : S^1 \rightarrow S^1$ donde $e^{2\pi i \varphi(t)} = e^{2\pi i \psi(t)}$, entonces $\varphi(t) - \psi(t) \in \mathbb{Z}$, $t \in I$.

Ahora como $I \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que $t \rightarrow \psi(t) - \varphi(t)$ es continua, I conexo y \mathbb{Z} discreto, entonces la función es constante y, como $\psi(0) - \varphi(0) = 0 - 0$; $\psi = \varphi$. Y $e^{2\pi i t}$ es el cubriente de S^1 . \square

1.2.5 Observación. Sea $p : Y \rightarrow X$ un mapeo cubriente. Entonces $\forall x \in X$ los conjuntos $p^{-1}(x)$ tienen la misma cardinalidad.

1.2.6 Teorema. Levantamiento de Homotopías Sea W un espacio topológico y $p : Y \rightarrow X$ un mapeo cubriente. Entonces toda homotopía $F : W \times I \rightarrow X$ con $F(w, 0) = f(w)$, $w \in W$ puede ser levantada a una homotopía $\tilde{F} : W \times I \rightarrow Y$ con $\tilde{F}(w, 0) = \tilde{f}(z)$, donde $\tilde{f} : W \rightarrow Y$ es el levantamiento de f .

1.2.7 Teorema. Sea $p : Y \rightarrow X$ un mapeo cubriente tal que $p(y_0) = x_0$. Sean γ y φ dos curvas de x_0 a x_1 en X tal que $\gamma \simeq \varphi \text{ rel}\{0, 1\}$ donde $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\varphi}$ son sus respectivos levantamientos en Y que empiezan en y_0 . Entonces $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\varphi} \text{ rel}\{0, 1\}$ y las dos curvas $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\varphi}$ terminan en el mismo punto.

Demostración:

Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y supongamos que $p(y_0) = x_0$. Sean γ y φ dos curvas en X de x_0 a x_1 ; sean $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\varphi}$ sus respectivos levantamientos a curvas en Y que empiezan en y_0 . Si γ y φ son equivalentes (homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$), entonces $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\varphi}$ son equivalentes. En particular, $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\varphi}$ terminan en el mismo punto. \square

Si $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un mapeo tal que $p(z) = e^z$ donde $z = x + iy$. Entonces p es un mapeo cubriente.

1.2.8 Ejemplo. Consideremos $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, tal que $p(y) = e^{2\pi iy}$ entonces $p(y)$ es el cubriente de S^1 .

Demostración:

Sea $U = S^1 \setminus \{1\}$, entonces $p^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ y por ser p un homeomorfismo se tiene que para cada n la restricción $p|_{(n, n+1)} \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Ahora, sea U cualquier abierto tal que U está contenido S^1 , entonces $p^{-1}(U) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{U}_n$ y $p|_{\tilde{U}_n} : \tilde{U}_n \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Así para toda vecindad de $1 \in S^1$ está cubierta por p .

Por lo tanto la exponencial es una mapeo cubriente donde su fibra es equivalente a \mathbb{Z} .

□

1.2.9 Corolario. Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\zeta_0} = \gamma(a)$. Entonces existe una única $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{\tilde{\gamma}(t)}$, $\forall t \in [a, b]$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C} \\
 & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \text{exp} \\
 [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C} \setminus \{0\}
 \end{array}$$

1.2.10 Teorema. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrada y sea $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{C}$ su levantamiento. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} (\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0))$$

Demostración:

Sean $\delta : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ función continua y $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp^{-1}(w_0) = \zeta_0 + 2\pi in$, donde $e^{\zeta_0} = w_0$. Es decir, si $e^{w_0} = e^{w_1}$ entonces $w_0 - w_1 \in 2\pi in$, $n \in \mathbb{Z}$.

Podemos escribir $\gamma(t) = \delta(t) + z_0$, tal que $\gamma(t) - z_0 = e^{\tilde{\gamma}(t)}$.

Por lo tanto $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(t)e^{\tilde{\gamma}(t)}$

$$2\pi i I(\gamma, z_0) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} ds = \int_a^b \tilde{g}'(t) dt = \tilde{g}|_a^b$$

y $\tilde{g}(b) - \tilde{g}(a) \in \mathbb{Z}$. □.

1.3. Grado e Invarianza Homotópica

1.3.1 Lema. Sea $H : f \rightarrow g$ una homotopía relativa a G . Entonces la familia de funciones $H_t : X \rightarrow Y$ es una relación de equivalencia, tal que $f \simeq g(\text{rel } G)$.

Al conjunto de clases de equivalencia le denotamos como X/\sim .

1.3.2 Definición. Sean $\gamma \sim \varphi(\text{rel}\{0, 1\})$ dos curvas cerradas en X . Y sea $F : I \times I \rightarrow X$ una función tal que:

$$F(t, 0) = \gamma(t)$$

$$F(t, 1) = \varphi(t)$$

para $t \in I$ y

$$F(0, s) = \gamma(0) = \varphi(0)$$

$$F(1, s) = \gamma(1) = \varphi(1)$$

para $s \in I$.

Entonces $\gamma \sim \varphi$ forman una *relación de equivalencia*.

Denotemos como $[\gamma]$ a la clase de equivalencia.

Sea $X = \{\gamma : S^1 \rightarrow S^1 \mid \gamma \text{ es continua}\}$. Entonces denotamos como $X/\sim = [S^1, S^1]$ al conjunto de clases de equivalencia del círculo en el círculo.

1.3.3 Definición. Sean $f : S^1 \rightarrow S^1$ y S^1 orientado y subdividido en puntos $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} = z_1$ para $i = 1, \dots, n$. Llamamos α_i al arco más pequeño que se define de $f(z_i)$ a $f(z_{i+1})$, tal que la imagen de f no tiene puntos antipodales, i.e, el diámetro, denotado como δ , es < 1 .

Además decimos que α_i es *positivo* si va en sentido opuesto a las manecillas del reloj y *negativo* en el caso contrario. Denotaremos como $p(\zeta)$ al número de α_i en sentido *positivo*, y $n(\zeta)$ al número de α_i en sentido *negativo*, donde $\zeta \in S^1$ es diferente de cualquier $f(z_i)$.

1.3.4 Definición. Sea $\zeta \in S^1$, distinto de $f(z_i)$. Definimos al *grado* como la diferencia en $p(\zeta) - n(\zeta)$ de f . Y lo denotamos como \deg .

1.3.5 Lema. El grado no depende de ζ o de la subdivisión de z_1, \dots, z_n .

En particular, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el mapeo $z \rightarrow z^n$ tiene grado n .

Por otro lado observemos que si $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es una aplicación cubriente y $\gamma \in S^1$ una curva cerrada que comienza en x_0 y $\tilde{\gamma}$ su levantamiento tal que $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}$. Entonces el *grado de γ* , $\deg(\gamma)$, es el número $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\tilde{\gamma}(1) = n$.

1.3.6 Teorema. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre conjuntos donde $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \sim x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces existe una única $\hat{f} : X/\sim \rightarrow Y$ y el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \Pi \downarrow & & \nearrow \hat{f} \\
 X/\sim & &
 \end{array}$$

Es decir $f = \hat{f} \circ \Pi$

1.3.7 Proposición. Sea $X = \{\gamma : S^1 \rightarrow S^1 | \gamma \in C^0\}$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ donde $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \sim x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces existe una única $\hat{f} : X/\sim \rightarrow \mathbb{Z}$ y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{deg}} & \mathbb{Z} \\
 \Pi \downarrow & \nearrow \text{Deg} & \\
 [S^1, S^1] & &
 \end{array}$$

Es decir $\text{deg}(f)$ es un invariante homotópico.

1.3.8 Proposición. Si $f \simeq g : S^1 \rightarrow S^1$, entonces $\text{deg}(f) = \text{deg}(g)$.

Demostración:

Sean $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$ una homotopía tal que $H(\alpha, 0) = f(t)$ y $H(\alpha, 1) = g(t)$, y $f_j : S^1 \rightarrow S^1$, en donde $f_j(t) = H(t, s)$. Sabemos por el teorema 1.2.6 que existe $\varphi_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ única, en la que $\varphi_j(0) = 0$, $\varphi_j(1) = n \in \mathbb{Z}$.

Tomemos $h : I \times I \rightarrow S^1$, donde $h(s, t) = f_j(e^{2\pi it})$ sabemos que es uniformemente continua. Elegimos una partición de I de tal manera que

$|h(s, t) - h(s, t_i)| < 2$ si $s \in I$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ y $i = 0, 1, \dots, k-1$ Tomamos $h_j : t \rightarrow h(s, t)$, con $s \in I$ y $t \in [t_i, t_{i+1}]$, y definimos φ_j como:

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} (\log(\frac{h(s, t_1)}{h(s, t_0)}) + \dots + \log(\frac{h(s, t_j)}{h(s, t_{j-1})}) + \log(\frac{h(s, t)}{h(s, t_i)}))$$

Por lo tanto, $\varphi_j(t)$ es continua en s y en t . En particular, la función $s \rightarrow \varphi_j(1)$ es continua y, como $\varphi_j(1) \in \mathbb{Z}$, es constante. Ahora, $f(\alpha) = f(1)$ y $g(\alpha) = g(1)$.

Por lo tanto, $\text{deg}(f) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = \text{deg}(g)$. \square .

1.3.9 Teorema. La función $[S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que $[f] \rightarrow \text{deg}(f)$, está bien definida y es biyectiva. Es decir, se tiene que

a) Si $n \in \mathbb{Z}$, la función $g_n : S^1 \rightarrow S^1$, donde $g_n(\alpha) = \alpha^n$, es tal que $\deg(g_n) = n$.

b) Sean $f, g : S^1 \rightarrow S^1$, entonces $f \simeq g$ si y sólo si $\deg(f) = \deg(g)$.

Demostración:

a) Como $g_n(e^{2\pi it}) = e^{(2\pi int)}$, entonces $g_n(\alpha) = \hat{\varphi}_n$, de donde $\deg(f) = \varphi_n(1) = n$

b) Ya sabemos que $f \simeq g$, entonces $\deg(f) = \deg(g)$. Ahora si, $\deg(f) = \deg(g) = n$, entonces $f(\alpha) = f(1) \circ \hat{\varphi}(\alpha)$ y $g(\alpha) = g(1) \circ \hat{\gamma}(\alpha)$, de manera que estas composiciones son homotópicas a Id_{S^1} , donde $\varphi(0) = 0 = \gamma(0)$ y $\varphi(1) = n = \gamma(1)$. Y, como ya sabemos que $\varphi \simeq \varphi_n \simeq \gamma$, por lo tanto tenemos que $f \simeq \hat{\varphi} \simeq \hat{\varphi}_n \simeq \hat{\gamma} \simeq g$. \square

1.3.10 Observación. Cada clase de curva cerrada en S^1 se caracteriza por el número de vueltas que le da a S^1 . Es decir el Índice es un invariante homotópico que se factoriza a través de las clases de equivalencia.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{I} & \mathbb{Z} \\
 \downarrow f & & \nearrow \bar{i} \\
 X/\sim & &
 \end{array}$$

1.4. Índice y Grado

Por lo visto en la primera sección sabemos que el *índice* se calcula como una integral. El grado de $f : S^1 \rightarrow S^1$ se calculó con base en levantamientos. De allí que la correspondencia $f \rightarrow \gamma$ induce una biyección de X/\sim en $[S^1, S^1]$. Lo cual nos ayudará a la comparación entre el cálculo del Índice y el Grado.

1.4.1 Teorema. Sea $p : [0, 1] \rightarrow S^1$ tal que $p(\alpha) = e^{2\pi\alpha}$ donde $\deg(\varphi) = \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0)$, entonces $\deg(\varphi) = I(\gamma, 0)$.

$$\begin{array}{ccc}
 X/\sim & \xrightarrow{\tilde{I}} & \mathbb{Z} \\
 \downarrow & \nearrow \text{Deg} & \\
 [S^1, S^1] & &
 \end{array}$$

Demostración:

Con un cambio de parámetro σ lineal vimos que

$$I(t \circ \gamma \circ \sigma, 0) = I(t \circ \gamma, 0)$$

donde

$$t \circ \gamma \circ \sigma : [0, 1] \rightarrow S^1$$

y

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow [a, b].$$

Tal que, vía la exponencial $\gamma = \varphi$ y $\sigma = \varphi \circ e^{2\pi i(\cdot)}$, tenemos que

$$\deg(\varphi) = I(\gamma, 0).$$

□.

Capítulo 2

Grado en S^n

2.1. Grado para mapeos en la esfera

Considerando a la esfera como $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, la generalización del grado de $f : S^n \rightarrow S^n$ para $n > 1$ se sigue de la definición de grado para S^1 . Sin embargo, los preliminares requieren de algunos conceptos del álgebra que analizaremos en el presente capítulo.

2.1.1 Definición. Sea A en \mathbb{R}^n un conjunto cualquiera. La *envolvente convexa* $H(A)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A .

2.1.2 Definición. Sea $A = \{p_0, \dots, p_{n+1}\}$ un conjunto de $(n+2)$ puntos en \mathbb{R}^{n+1} . La envolvente convexa de A es llamada el $(n+1)$ -simplejo geométrico generado por A y se denota como $\sigma = (p_0, \dots, p_{n+1})$.

Si $p_1 - p_0, p_2 - p_1, \dots, p_{n+1} - p_0$ son linealmente independientes, entonces se dice que el simplejo σ es *no degenerado*.

Es fácil ver que

$$\sigma = \{\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_{n+1} p_{n+1} \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum \lambda_i = 1\}.$$

Si $q_0, \dots, q_{k+1} \subseteq \{p_0, \dots, p_{n+1}\}$. Entonces el simplejo (q_0, \dots, q_{k+1}) es una cara de (p_0, \dots, p_{n+1}) .

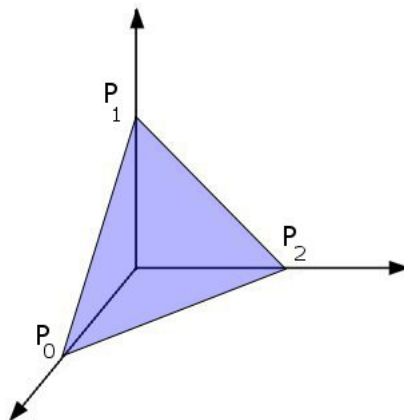


Figura 2.1: Simplejo estándar de dimensión 2

2.1.3 Lema. Sea $(x_i^1, \dots, x_i^{n+1})$ coordenadas de p_i . Entonces el simplejo $\sigma = (p_0, \dots, p_{n+1})$ es no degenerado si y solamente si

$$\det(p_0 \dots p_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_0^1 & \dots & x_0^{n+1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^1 & \dots & x_{n+1}^{n+1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Geoméricamente esto quiere decir que σ es no degenerado si y sólo si tiene volumen distinto de cero. Dicho de otro modo, los $n + 2$ vértices del simplejo no están contenidos en un $n - \text{hiperplano}$.

2.1.4 Definición. Un $(n+1)$ -simplejo orientado es un $(n+1)$ -simplejo geométrico junto con un orden total definido de sus vértices. El simplejo $\sigma = (p_0, \dots, p_{n+1})$ con sus vértices orientados, $p_1 < \dots < p_{n+1}$ se denota como $[\sigma] = [p_0, p_1, \dots, p_{n+1}]$.

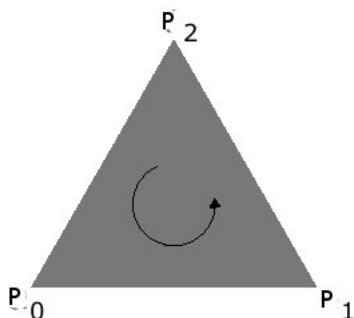


Figura 2.2: 2-simplejo orientado

El *signo* de un simplejo orientado $[p_0, p_1, \dots, p_{n+1}]$ es el signo de $\det = (p_0, \dots, p_{n+1})$. Un simplejo degenerado tiene signo cero. Una permutación par de los vértices de $[\sigma]$ no cambia su signo.

2.1.5 Lema. Sean $[\sigma] = [p_0, p_1, \dots, p_{n+1}]$ y $[\sigma'] = [p'_0, p_1, \dots, p_{n+1}]$ dos (n) -simplejos no degenerados, con (p_1, \dots, p_{n+1}) como cara común y sea L el n -hiperplano que contiene esta cara. Entonces p_0, p'_0 están del mismo lado de L si y sólo si $[\sigma]$ y $[\sigma']$ tienen el mismo signo.

Demostración:

Como $\lambda p_0 + (1 - \lambda)p'_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$, es una línea recta que une a p_0 y p'_0 , sólo necesitamos remarcar que

- $\det[\lambda p_0 + (1 - \lambda)p'_0, p_1, \dots, p_{n+1}] = \lambda \det\sigma + (1 - \lambda)\det\sigma'$. Entonces los valores de $[\det\sigma, \det\sigma']$ están en \mathbb{R}^1 .
- $\det(q, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0$ si y sólo si $q \in L$.

□

2.1.6 Definición. Sea S^n la n -esfera y p_0, \dots, p_n un conjunto de $n+1$ puntos en S^n con diámetro < 1 donde su envolvente convexa no contiene al origen 0 . Entonces el n -simplejo esférico es la proyección desde el origen en S^n del simplejo $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_n)$. Denotaremos como s al simplejo esférico.

Decimos que s es degenerado si y sólo si $(n+1)$ vértices están en un n -hyperplano que pasa por el origen, esto es, si y sólo si el $(n+1)$ -simplejo $(p_0, \dots, p_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es degenerado.

De la misma manera que antes un n -simplejo esférico ordenado es un n -simplejo esférico junto con un ordenamiento definido de sus vértices.

El *signo* del n -simplejo esférico ordenado $[p_0, \dots, p_n]$ se define como el signo del $(n+1)$ -simplejo ordenado $[p_0, \dots, p_n, 0]$ en \mathbb{R}^{n+1} .

2.1.7 Definición. Una *triangulación de S^n* es una descomposición de S^n en un número finito de n -simplejos esféricos que no se traslapan y son no degenerados, tal que cada $(n-1)$ -cara de un n -simplejo es la cara común de exactamente dos n -simplejos.

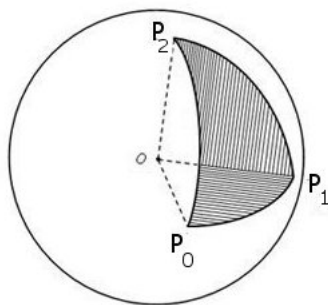


Figura 2.3: simplejo esférico en S^2

2.1.8 Definición. Sean S^n y Σ^n dos n -esferas y T una triangulación de S^n . Un *mapeo propio de vértices* $\varphi : T \rightarrow \Sigma^n$ es un mapeo con la siguiente propiedad: Si (p_0, \dots, p_n) son vértices de un simplejo de T , el conjunto $\{\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_n)\} \subseteq \Sigma^n$ tiene diámetro < 1 .

Así tenemos que a cada simplejo $\sigma \in T$ le corresponde un único simplejo $\varphi(\sigma)$ en Σ^n . Entonces el n -simplejo esférico ordenado $[\sigma] = [p_0, \dots, p_n]$ se corresponde con el n -simplejo esférico ordenado $\varphi([\sigma]) = [\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_n)]$ en Σ^n .

Aunque el ordenamiento de $[\sigma]$ determina el de $\varphi[\sigma]$, el signo de $[\sigma]$ puede ser diferente al de $\varphi[\sigma]$.

2.1.9 Ejemplo. Supongamos que φ es el mapeo antipodal. Si $[\sigma] = [p_0, \dots, p_n]$, entonces $\varphi[\sigma] = [-p_0, \dots, -p_n]$ es tal que

$$\mathbf{det}(\varphi[\sigma]) = \begin{vmatrix} -x_0^1 & \dots & -x_0^{n+1}, 1 \\ -x_n^1 & \dots & -x_n^{n+1}, 1 \\ 0 & \dots & 0, 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \mathbf{det}[\sigma]$$

Notemos que la familia de conjuntos $\{\varphi(\sigma) | \sigma \in T\}$ no necesariamente forman una triangulación de Σ^n , puede haber simplejos traslapados y degenerados.

2.1.10 Definición. Sean T una triangulación de S^n de tal manera que todo n -simplejo de T esté ordenado positivamente. Sea $\varphi : T \rightarrow \Sigma^n$ un mapeo propio de vértices y sea $\xi \in \varphi(\sigma)$ un elemento que no pertenece a la frontera de ningún $\varphi(\sigma)$. Definimos al número *positivo* de $\varphi[\sigma]$ como

$$p(\xi, T, \varphi) = \#\{\sigma \in T | \varphi[\sigma] \text{ es positivo y } \xi \in \varphi(\sigma)\}$$

y al número *negativo* de $\varphi[\sigma]$ como

$$n(\xi, T, \varphi) = \#\{\sigma \in T | \varphi[\sigma] \text{ es negativo y } \xi \in \varphi(\sigma)\}$$

2.1.11 Lema. Sean T una triangulación de S^n con todos sus n -simplejos orientados positivamente y $\varphi : T \rightarrow \Sigma^n$ un mapeo propio de vértices. Entonces

$$D(\xi, T, \varphi) = p(\xi, T, \varphi) - n(\xi, T, \varphi)$$

es el mismo número para toda $\xi \in \Sigma^n$ que no está en la frontera de ningún $\varphi(\sigma)$.

Demostración:

Supongamos que $\varphi(\tau)$ es no degenerado. Sea $\zeta \in \Sigma^n$ un punto que no está en la frontera de ningún $\varphi(\sigma)$. Consideremos una curva suave que une a dos puntos ξ y ζ en Σ^n , tal que no cruza ninguna cara de dimensión $< (n - 1)$ de ningún $\varphi(\sigma)$, y ξ se mueve a ζ a lo largo de la curva. Entonces $D(\xi, T, \varphi)$ puede cambiar solamente cuando ξ cruza una $(n - 1)$ -cara de algún $\varphi(\sigma)$. Observemos que cada $(n - 1)$ -simplejo (p_1, \dots, p_n) en T correspondiente a esta cara es la cara común a exactamente dos n -simplejos, $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ y $\sigma' = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ en T y, además $[\sigma]$ y $[\sigma']$ son de signo opuesto porque T es una triangulación. Ahora consideremos a L el hiperplano expandido por 0 y la cara $\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_n)$ es cruzada por ξ ; el argumento depende de la posición de $\varphi(p_0)$ y $\varphi(p'_0)$ en L .

- Si $\varphi(p_0)$ y $\varphi(p'_0)$ están del mismo lado de L . Entonces ξ deja a $\varphi(\sigma)$ y $\varphi(\sigma')$ cruzar L . Por el lema 2.1.6, $\varphi[\sigma]$ y $\varphi[\sigma']$ tienen el mismo signo. Sin embargo, el signo de cada $\varphi[\sigma]$ es determinado por los simplejos positivos de T , de aquí que en este caso ξ pierde (o gana) un simplejo positivo y uno negativo, por lo que $D(\xi, T, \varphi)$ no sufre ningún cambio.
- Si $\varphi(p_0)$ y $\varphi(p'_0)$ están en lados opuestos de L . Entonces ξ deja $\varphi(\sigma)$ y entra $\varphi(\sigma')$. Siguiendo la misma lógica que en el inciso anterior, ξ intercambia un simplejo de un signo por otro del mismo signo. Nuevamente $D(\xi, T, \varphi)$ no sufre ningún cambio.

Por lo tanto $D(\xi, T, \varphi) = D(\zeta, T, \varphi)$.

Ahora consideremos el caso en que hay $\varphi(\sigma)$ degenerados. Fijamos ξ y ζ y sean $\epsilon > 0$ y $\varphi' : T \rightarrow \Sigma^n$ un mapeo propio de vértices tal que:

- $\varphi'(\sigma)$ es no degenerado y $|\varphi(p) - \varphi'(p)| < \epsilon$ para cada vértice $p \in T$.
- Para cualquier $\varphi(\sigma)$ no degenerado, $\varphi[\sigma]$ y $\varphi'[\sigma]$ tienen el mismo signo.
- ξ (respecto a ζ) están en el interior de $\varphi'(\sigma)$ si y sólo si están en el interior de $\varphi(\sigma)$.

En cualquier caso se tiene que

$$\begin{aligned} D(\xi, T, \varphi) &= D(\xi, T, \varphi') = D(\zeta, T, \varphi') \\ &= D(\zeta, T, \varphi) \end{aligned}$$

□.

Notemos que el resultado de la demostración anterior para el caso donde hay $\varphi(\sigma)$ degenerados se puede generalizar al siguiente lema.

2.1.12 Lema. *Sean T, φ, ξ como en 2.1.11. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier mapeo propio de vértices $\varphi' : T \rightarrow \Sigma^n$ con $|\varphi(p) - \varphi'(p)| < \epsilon$ para todo vértice p se satisface:*

$$D(\xi, T, \varphi) = D(\xi, T, \varphi')$$

De ahora en adelante el valor $D(\xi, T, \varphi)$ será denotado simplemente por $D(T, \varphi)$.

2.1.13 Observación. *Sea $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$ una función continua. Como S^n es compacta podemos encontrar una triangulación T de S tal que $\delta f(\sigma) < 1$ para cada $\sigma \in T$.*

Si ahora reemplazamos a f por el mapeo propio de vértices $\varphi_f : T \rightarrow \Sigma^n$ tal que $\varphi_f(p) = f(p)$ para cada vértice p de T , tenemos el siguiente lema.

2.1.14 Lema. *El número $D(T, \varphi_f)$ es independiente de la triangulación T de S^n , siempre que el mapeo asociado φ_f sea un mapeo propio de vértices.*

Demostración:

Sean T y T' dos triangulaciones; y φ_f y φ'_f los mapeos propios de vértices asociados. Supongamos que T, T' tienen en común una triangulación T'' . Entonces basta con mostrar que $D(\varphi_f, T)$ y $D(\varphi'_f, T')$ son iguales a $D(\varphi''_f, T'')$. Esto se obtiene por repetición, si se muestra que introduciendo un nuevo vértice a T , este no altera el valor. Esto es fácil de obtener ya que podemos calcular $D(T, \varphi_f)$ en un punto de Σ^n y dejar $\varphi(\sigma)$ sin cambios por lo que $D(\varphi_f, T)$ y $D(\varphi'_f, T')$ son iguales a $D(\varphi''_f, T'')$ □.

2.1.15 Definición. El valor de $D(T, \varphi_f)$, que sólo depende de f , se llama *grado* de f y se denota como $D(f)$.

2.1.16 Teorema. *Sea $n \geq 0$. Si $f, g : S^n \rightarrow \Sigma^n$ son homotópicas, entonces $D(f) = D(g)$.*

Demostración:

Es claro que se cumple para $n = 0$. Consideremos $n \geq 1$. Sea $H : S^n \times I \rightarrow \Sigma^n$ una homotopía de f y sea $H(x, t) = f_t(x)$. Como $S^n \times I$ es compacto, el mapeo H es uniformemente continua y además existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x') < \delta$; por tanto $|f_t(x) - f_t(x')| < 1$ para cada $t \in I$. Entonces hay una triangulación simple en T de S^n tal que $\delta f_t(\sigma) < 1$ para toda $\sigma \in T$ y $t \in I$.

Ahora sea t_0 y fijemos $\xi \in \Sigma^n$. Por el Lema 2.1.13, dado que $\epsilon > 0$ para el cualquier ϵ -variación en los vértices $\varphi_{f_{t_0}}(p)$, no genera ningún cambio en $D(\xi, T, \varphi_{f_{t_0}})$. Por continuidad uniforme existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f_t(x) - f_{t_0}(x)| < \epsilon$$

para cada $x \in S^n$. De donde tenemos $D(f_t) = D(f_{t_0})$ para toda $|t - t_0| < \delta$.

Es decir, que el valor entero de la función $D(f_t)$ es continua en cada punto $t_0 \in I$ y además $D(f_t)$ es constante en I . \square

2.1.17 Teorema. L.E.J.Brouwer *El mapeo identidad $Id : S^n \rightarrow S^n$ no es homotópicamente nulo.*

Demostración:

Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ un mapeo constante. Con lo visto hasta ahora sabemos que al calcular $D(\xi, T, \varphi_f)$ en un punto ξ que no está en la imagen entonces $D(0) = 0$ y $D(Id) = 1$. Además por el teorema 2.1.16 el mapeo identidad no puede ser homotópicamente nulo \square .

2.1.18 Definición. Sea A un subespacio de X , $r : X \rightarrow A$ es un *retracto* tal que $r|_A = 1_A$, donde r es una función continua y biyectiva.

El *Teorema de Brouwer* es equivalente al siguiente corolario:

2.1.19 Corolario. *No existe mapeo continuo $f : B^{n+1} \rightarrow S^n$ que deje los puntos de la frontera fijos. Esto es S^n no es un retracto de B^{n+1} .*

2.2. Mapeos entre esferas de distinta dimensión

La teoría de grado se define con base en el desarrollo de los mapeos de S^n en S^n , con $n \geq 1$, donde existen infinitas clases de homotopías de mapeos en la esfera S^n , es decir la cardinalidad de $[S^n, S^n]$ es infinito numerable. Ahora consideraremos los mapeos de S^k en S^n para $k \neq n$.

El número de clases de homotopía de mapeos de $S^k \rightarrow S^n$ para $k > n \geq 1$ no es conocido, salvo algunas excepciones. El cálculo requiere de métodos más avanzados, por lo que no se tocará este tema en el presente trabajo. Sin embargo, para el caso específico cuando $n = 1$, se sabe que todos los mapeos $S^k \rightarrow S^1$ son homotópicamente nulos.

Analizaremos, pues, el caso en que $k < n$. Y antes, estableceremos el hecho general que $f : S^k \rightarrow S^n$ continua (k, n arbitrarios) es siempre homotópico a un *mapeo lineal a pedazos*.

2.2.1 Definición. Sean q_0, \dots, q_{n+1} puntos no necesariamente distintos, en un espacio vectorial V . Sea $\sigma = (p_0, \dots, p_{n+1})$ un simplejo no degenerado en \mathbb{R}^{n+1} . Definimos al *mapeo baricéntrico de σ* en (q_0, \dots, q_{n+1}) del siguiente modo: Para cada $x \in \sigma$ existen números reales $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ únicas tales que

- $0 \leq \lambda_k$ con $k = 0, \dots, n + 1$.
- $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k = 1$.
- $x = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k p_k$.

Por lo tanto la correspondencia

$$x = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k p_k \rightarrow x = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k q_k$$

está bien definida y es claramente continua.

Consideremos $f : S^k \rightarrow S^n$ continua y sea T una triangulación de S^k tal que $\delta f(\sigma) < 1$ para cada k -simplejo $\sigma \in T$. Sea $\varphi_f : T \rightarrow S^n$ el mapeo propio de vértices asociado; extendemos φ_f a $\lambda_f : S^k \rightarrow S^n$ mapeando cada k -simplejo esférico $\sigma \in T$ baricéntricamente en $\varphi_f(\sigma)$. La función λ_f es continua pues para cada $(k-1)$ -cara común a dos k -simplejos; λ_f es continua. Entonces λ_f es llamada *T-aproximación lineal de f* .

2.2.2 Definición. Sea $\lambda : S^k \rightarrow S^n$ mapeo continuo, que mapea cada simplejo de una triangulación de S^k baricéntricamente a su imagen es llamado *mapeo lineal a pedazos*.

2.2.3 Lema. Sea X un espacio topológico y $f, g : X \rightarrow S^n$ dos mapeos tales que para cada $x \in X$, $f(x)$ y $g(x)$ no son antipodales, entonces $f \simeq g$.

2.2.4 Lema. Sea $f : S^k \rightarrow S^n$ continuo. Entonces $f \simeq \lambda_f$ para cada T -aproximación lineal de λ_f a f .

Demostración:

Por el lema anterior, basta demostrar que $f(x)$ y $\lambda_f(x)$ no son antipodales. Sea $x \in \sigma = (p_0, \dots, p_k)$ tal que $\sigma \in T$. Como $f(p_i) = \lambda_f(p_i)$ para $i = 0, \dots, k$ y $\delta f(\sigma) < 1$, entonces $\lambda_f(p_i)$ está contenida en la bola $B(\lambda_f(p_0), 1)$, y ya que la bola es convexa, debe contener la envolvente convexa de $\lambda_f(p_i)$ y, en consecuencia, a $\lambda_f(\sigma)$. Por lo tanto $d(\lambda_f(x), \lambda_f(p_0)) < 1$. Entonces

$$d(f(x), \lambda_f(x)) \leq d((f(x), f(p_0)) + d(\lambda_f(p_0), \lambda_f(x))) < 2$$

Los puntos $f(x), \lambda_f(x)$ no son antipodales. □.

2.2.5 Teorema. Sea $k < n$. Entonces cada $f : S^k \rightarrow S^n$ es homotópicamente nula.

Demostración:

Sea $\lambda_f : S^k \rightarrow S^n$ una T -aproximación lineal de f . Dado que λ_f es lineal a pedazos y $k < n$ se tiene que $\lambda_f(S^k)$ es finito y $S^{n-1} \subseteq S^n$; entonces $\lambda_f(S^k) \neq S^n$ y, por el lema anterior $\lambda_f \simeq 0$. □.

2.2.6 Definición. $f : S^n \rightarrow S^k$ es un *mapeo antipodal* si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in S^n$.

Podemos tomar como ejemplo a la función identidad y a la función $f : S^n \rightarrow S^n$, donde $f(x) = -x$, ambos son antipodales y mandan a cada par de puntos antipodales en un par de puntos antipodales.

2.2.7 Teorema. de K. Borsuk Sean $n \geq 0$ y $f : S^n \rightarrow S^n$ un mapeo antipodal. Entonces $D(f)$ es par y f no es homotópicamente nula. Véase [2, pp.347-349]

2.2.8 Teorema. El Teorema antipodal de Borsuk *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

- *No hay mapeos antipodales $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.*
- *Cada mapeo continuo $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ manda al menos un par de puntos antipodales al mismo punto.*
- *En cada familia de $(n + 1)$ cubiertas cerradas de S^n al menos una cubierta debe contener un par de puntos antipodales.*

2.2.9 Teorema. \mathbb{R}^n no es homeomorfo a \mathbb{R}^m para cualquier $m \neq n$.

Demostración:

Sea $n > m$ y sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Como $n - 1 \geq m$, sabemos que $h|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ envía un par de puntos antipodales a el mismo punto, entonces h no puede ser biyectiva. \square

2.3. Grado y Homotopía

Los mapeos homotópicos tienen el mismo grado. Ahora veamos que el inverso de esta proposición también se cumple.

2.3.1 Lema. *Sea A un subconjunto, propio, cerrado en S^n . Entonces existe un homeomorfismo $H : S^n \rightarrow S^n$ tal que $H \simeq 1$ y $H(A)$ está en el interior de $S_+^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ y $H^{-1} \simeq 1$.*

Demostración:

Podemos asumir que el polo sur p_- no está en A . Sea S una vecindad esférica sin frontera de p_- en CA . Para cada $x \in Fr(S)$, sea p_+xp_- el arco, una geodésica que une p_+ con p_- que pasa por x , y sea s_x el punto de intersección con el ecuador en S^{n-1} . Si definimos H por el mapeo lineal de cada p_+x en p_+s_x y xp_- lineal en s_xp_- . Entonces H es el homeomorfismo que buscábamos \square .

2.3.2 Lema. *Sea $n \geq 2$ y $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$. Entonces existe $g \simeq f$ y $\delta \in \Sigma^n$ tal que $g^{-1}(\delta)$ es vacío o es un punto.*

Demostración:

Dado f lineal a pedazos, y $\delta \in \Sigma^n$ que no está en la frontera de $f(\sigma)$; entonces $f^{-1}(\delta)$ es un número finito de puntos $p = p_1, p_2, \dots, p_k$, donde toda p_i está en el interior de S_+^n . De igual forma podemos elaborar $f = f \circ H^{-1}$.

Como $S_+^n \in \mathbb{R}^n$, podemos tomar $L \subseteq S_+^n$ como el conjunto de las $(k-1)$ curvas que unen a $p = p_1$ con cada p_2, \dots, p_k . Dado que $n \geq 2$, el conjunto compacto $f(L) \neq \Sigma^n$. Entonces existe U vecindad sin frontera tal que $L \subseteq U_{(\epsilon)} \subseteq S_+^n$ y $f(\overline{U}) \neq \Sigma^n$. De donde tenemos que

$$f : (S^n; \overline{U}) \rightarrow (\Sigma^n; \Sigma_+^n)$$

Ahora consideremos $\varphi^{-1}(\delta) = L$ y $\mu : S^n \rightarrow I$ tal que $\mu(x) = \epsilon^{-1} \min[d(x, L), \epsilon]$, y definimos a $\varphi(x)$ como sigue

$$\varphi(x) = \frac{\mu(x)f(x) + (1-\mu(x))\delta}{|\mu(x)f(x) + (1-\mu(x))\delta|}$$

De aquí que φ es continua y homotópica a f , ya que éstas funciones nunca son antipodales. Notemos ahora que si $(x \in L)$, entonces $(\varphi(x), \delta)$; de igual forma si $\varphi(x) = \delta$, entonces $f(x) = \delta$ o $\mu = 0$. En ambos casos $x \in L$, entonces $\varphi^{-1}(\delta) = L$.

Veamos ahora que hay un homeomorfismo $h : (S^n, L) \rightarrow (S^n, p)$ que es homeomorfo a $S^n - L$ en $S^n - p$. Definimos h como sigue

$$h = \frac{x\mu(x) + (1-\mu(x))p}{|x\mu(x) + (1-\mu(x))p|}$$

Entonces h es continua y $h \simeq 1$. Además, como L consiste en un número finito de líneas rectas", entonces μ es monótona no decreciente en cada línea desde p . Entonces $h|_{S^n - L}$ es un homeomorfismo.

Como $h : S^n \rightarrow S^n$ es biyectiva, entonces φh^{-1} es continua y es simplemente valuada. Si $H : h \simeq 1$, entonces $(\varphi h^{-1} \circ H)$ muestra que $\varphi h^{-1} \simeq \varphi$. Por lo tanto, como $(\varphi^{-1})^{-1}(\delta) = h\varphi^{-1}(\delta) = p$, entonces $\varphi h^{-1} \simeq f$. \square .

2.3.3 Definición. Sea el intervalo $[-1, 1]$ tal que para cada espacio topológico X , la *suspensión* SX de X es el espacio cociente $X \times [-1, 1]/\mathbb{R}$, donde \mathbb{R} es la relación de equivalencia $(x, 1) \sim (x', 1), (x, -1)$ para toda $x, x' \in X$.

$$\begin{array}{ccc}
 S^m \times [-1, 1] & \xrightarrow{f} & S^{m+1} \\
 \downarrow \Pi & & \swarrow \\
 SS^m & &
 \end{array}$$

Figura 2.4: Suspensión de S^n

2.3.4 Lema. Sea $n \geq 2$ y sea $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$. Entonces existe una función continua $g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ tal que $f \simeq Sg$.

Demostración:

Sea δ_+ el polo norte de Σ^n y consideremos $f^{-1}(\delta) = \emptyset$, $f \simeq 0$. Supongamos, ahora que $f^{-1}(\delta) = p_+$, por lo que es no vacío y consideremos las vecindades esféricas sin frontera $D \supset p_+, \Delta_+ \supset \delta_+, \Delta_- \supset \delta_-$ tal que $f(D) \subseteq \Sigma^n - \Delta_-$ y $f(\overline{CD}) \subseteq \Sigma^n - \Delta_+$.

Ahora sea $s : S^n \rightarrow S^n$ un homeomorfismo tal que $Fr(D) = S^{n-1}$. Sea también $\tau : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$ una deformación que mueve a $\Sigma^n - \delta_+ - \delta_-$ tal que $Fr(\Delta_+) = Fr(\Delta_-) = \Sigma^{n-1}$; entonces $g' = \tau \circ f \circ s^{-1} \simeq f$ y también $g'(S_+^n) \subseteq \Sigma_n^+, g'(S_-^n) \subseteq \Sigma_n^-$. Por lo tanto, como $g = g'|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, entonces para cada $x \in S^n$ tenemos que $|g'(x) - Sg(x)| < 2$.

De donde $g' \simeq Sg$ □.

2.3.5 Teorema. H. Hopf Sea $n \geq 1$ dos mapeos de S^n en si mismos son homotópicos si y sólo si tienen el mismo grado.

Demostración:

Para el caso $n = 1$ tenemos que, $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un T-mapeo lineal y S^1 parametrizado y orientado, f es un mapeo continuo, lineal a pedazos y $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, tal que $F(x+1) - F(x) = D$, para toda x donde $D \in \mathbb{Z}$ independiente de x . Sabemos que $D = D(f)$, ahora consideremos $G : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $G(x) = D(x)$; entonces $H(x, t) = tF(x) + (1-t)G(x)$ es una homotopía de F en G y, como $H(x+1, t) - H(x, t) = D$ para cada t , el mapeo H representa una homotopía de f en g .

Ahora por inducción, asumimos que el teorema es válido para $n - 1$ y probamos que se cumpla para n .

Sea $f_1, f_2 : S \rightarrow \Sigma^n$ con el mismo valor de grado. Por el lema anterior podemos asumir que $f_i = Sg_i (i = 1, 2)$ para $g_i : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Ahora sea $f_i|_{S_+^n} : S_+^n \rightarrow \Sigma_+^n$ un mapeo regular, de modo que $D_r(f_i|_{S_+^n}) = D(f_i)$; por ello sabemos que $D(g_i) = D(f_i)$. Por hipótesis de inducción $g_1 \simeq g_2$, usando tal homotopía se tiene que $Sg_1 \simeq Sg_2$.

□.

En particular el mapeo $[f] \rightarrow D(f)$ de $[S^n, S^n]$ en \mathbb{Z} es una biyección. Un mapeo $S^n \rightarrow S^n$ de grado k se puede obtener suspendiendo $(k - 1)$ veces el mapeo $f : S^1 \rightarrow S^1$ dado por $z \rightarrow z^k$.

Demostración:

Para el caso $n = 1$ tenemos que, $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un T-mapeo lineal y S^1 parametrizado y orientado, f es un mapeo continuo, lineal a pedazos y $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, tal que $F(x+1) - F(x) = D$, para toda x donde $D \in \mathbb{Z}$ independiente de x . Sabemos que $D = D(f)$, ahora consideremos $G : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $G(x) = D(x)$; entonces $H(x, t) = tF(x) + (1-t)G(x)$ es una homotopía de F en G y, como $H(x+1, t) - H(x, t) = D$ para cada t , el mapeo H representa una homotopía de f en g .

Ahora por inducción, asumimos que el teorema es válido para $n - 1$ y probamos que se cumpla para n .

Sea $f_1, f_2 : S \rightarrow \Sigma^n$ con el mismo valor de grado. Por el lema anterior podemos asumir que $f_i = Sg_i (i = 1, 2)$ para $g_i : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Ahora sea $f_i|_{S_+^n} : S_+^n \rightarrow \Sigma_+^n$ un mapeo regular, de modo que $D_r(f_i|_{S_+^n}) = D(f_i)$; por ello sabemos que $D(g_i) = D(f_i)$. Por hipótesis de inducción $g_1 \simeq g_2$, usando tal homotopía se tiene que $Sg_1 \simeq Sg_2$.

□.

En particular el mapeo $[f] \rightarrow D(f)$ de $[S^n, S^n]$ en \mathbb{Z} es una biyección. Un mapeo $S^n \rightarrow S^n$ de grado k se puede obtener suspendiendo $(k - 1)$ veces el mapeo $f : S^1 \rightarrow S^1$ dado por $z \rightarrow z^k$.

Capítulo 3

El número de Arrollamiento

La imagen inversa de un valor regular de una función suave $f : M \rightarrow N$ es una subvariedad de M . Definiremos el *grado* de una función a partir de la suma alternada de la imagen inversa de un punto, ahora en variedades diferenciales. Y así estableceremos la independencia de la teoría de grado y la elección de dicho punto.

3.1. Variedades Diferenciales

3.1.1 Definición. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto; y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Llamaremos a f *suave* si tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

3.1.2 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $x \in U$ y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función suave. Definimos *la derivada de f* para cualquier vector $h \in \mathbb{R}^n$, en la dirección de h , evaluada en el punto x , como

$$df_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

.

De este modo la correspondencia $h \rightarrow df_x(h)$ es lineal.

3.1.3 Definición. Sea $x \in X$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subc y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ una vecindad de x ; y sean $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones suaves, tal que $f|_{V \cap X} = g|_V$. Entonces g *extiende localmente a f* alrededor de x .

3.1.4 Definición. Sean U y X subconjuntos en \mathbb{R}^n y $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones. Entonces f es *suave* si se puede extender localmente a g .

3.1.5 Definición. Sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección suave entre subconjuntos de espacios euclidianos. Entonces f es un *difeomorfismo* si la función inversa $f^{-1} : X \rightarrow Y$ es suave. Véase Apéndice

En este caso diremos que X y Y son *difeomorfos*.

3.1.6 Definición. Sean $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ una vecindad abierta de $x \in X, X \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\phi : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo entonces X es *localmente euclidiano* a \mathbb{R}^n al rededor de x .

En general si X es localmente euclidiana a \mathbb{R}^n para toda $x \in X$ le llamaremos *Mvariedad* y $\dim M$ denotará la dimensión.

3.1.7 Definición. Sean U y V vecindades en \mathbb{R}^n y U vecindad de $x \in M$, M variedad. Entonces el difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ es un *sistema de coordenadas* o *carta* y a ϕ^{-1} *parametrización*.

Si $\phi = (x_1, \dots, x_k)$ las k funciones suaves son *funciones coordenadas*.

Dicho lo anterior podemos redefinir el concepto de variedad del siguiente modo:

3.1.8 Definición. Sea $H_i : U_i \rightarrow V_i$ un homeomorfismo para algún abierto V_i contenido en \mathbb{R}^n . Llamamos *variedad* a M si esta se puede cubrir con una colección de cartas $\{(U_i, H_i)\}$ tales que $\{U_i\}$ es una cubierta de M .

3.1.9 Definición. Sea M un subconjunto de \mathbb{R}^n de $\dim M = k$, es una *variedad con frontera*, si cada $x \in M$ posee una vecindad U difeomorfa a un conjunto abierto en H^k , donde H^k es el semiespacio superior en \mathbb{R}^n .

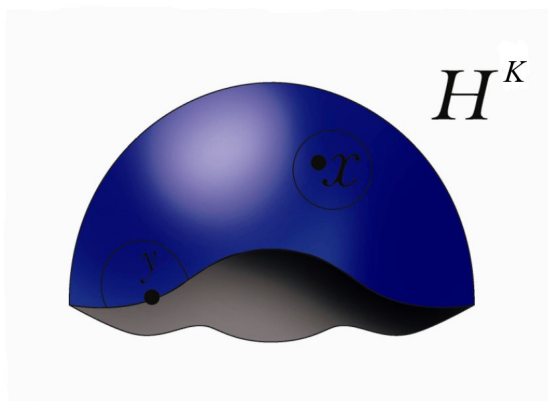


Figura 3.1: Variedad con frontera

La *frontera de M* se denota como ∂M , consta de aquellos puntos que pertenecen a la imagen de la frontera de H^k bajo alguna parametrización local. Su complemento es el *interior de M* , $Int(M)$. Entonces $Int(M) = M - \partial M$.

3.1.10 Proposición. Sean M variedad con frontera y N variedad sin frontera. Entonces el producto entre ambas es una variedad con frontera

$$\partial(M \times N) = M \times \partial N$$

3.1.11 Definición. Sean M y Z variedades en \mathbb{R}^n y $Z \subseteq M$, entonces Z es una *subvariedad* de M .

3.1.12 Definición. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad de dimensión k , definimos su *espacio tangente* $T_x(M)$ en un punto $x \in M$ como la imagen de la derivada de cualquier parametrización local en torno de x .

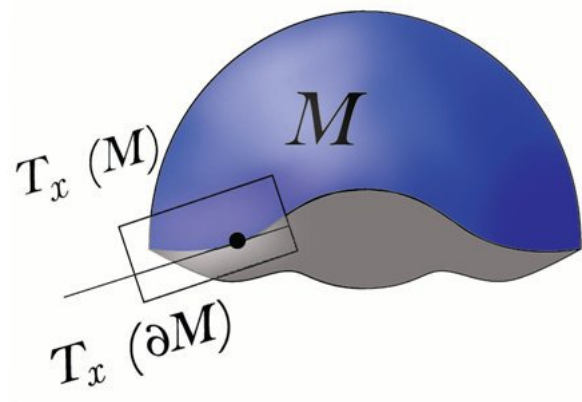


Figura 3.2: Espacio Tangente

3.1.13 Proposición. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^m$ variedad. Entonces $T_x(M)$ está bien definido.

Demostración:

Sean U y $V \in \mathbb{R}^n$ y sean; $\phi : U \rightarrow M$ y $\varphi : V \rightarrow M$ cartas con $\varphi(0) = x$. Supongamos U y V tal que $\phi(U) = \varphi(V)$. Entonces la función $h = \varphi^{-1} \circ \phi : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Escribimos ϕ como $\varphi \circ h$ y derivamos: $d\phi_0 = d\varphi_0 \circ dh_0$. Entonces $d\phi_0$ está contenida en la imagen de $d\varphi_0$. De igual forma si ahora escribimos a φ como $\phi \circ h$, tenemos que $d\phi_0(\mathbb{R}^n) = \varphi_0(\mathbb{R}^n)$ y $T_x(M)$ es el mismo para cualquier carta. \square

3.1.14 Definición. Sea $f : M \rightarrow N$ una función entre dos variedades con frontera, definimos la derivada en cualquier punto $x \in M$ como la función lineal $df_x : T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(N)$.

3.1.15 Definición. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades. Decimos que $y \in N$ es un *valor regular* de f si $df_x : T_x(M) \rightarrow T_y(N)$ suprayectiva en cada punto $x \in f^{-1}(y)$ tal que $f(x) = y$.

Un punto $y \in N$ que no sea un valor regular de f es un *valor crítico*.

3.1.16 Definición. Sea $df_x : T_x(M) \rightarrow T_y(N)$ suprayectiva. Entonces f es una *sumersión en x* .

La *sumersión canónica* es la proyección de R^k sobre R^l para $k \geq l$ en la cual $(a_1, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_l)$. Como en el caso de las inmersiones, toda sumersión es localmente canónica, salvo difeomorfismo. El Teorema de sumersión local precisa esta observación. Véase [4, I,p.26]

3.1.17 Teorema. de la Imagen Inversa. *Si y es un valor regular de $f : M \rightarrow N$, entonces la imagen inversa f^{-1} es una subvariedad de M con $\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N$.*

Demostración:

Sea y un valor regular. Entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = y$ forman un subconjunto de M ; es decir, están en la imagen inversa $f^{-1}(y)$. Para ver que dicho subconjunto forma una subvariedad consideremos tres casos:

- Cuando $\dim M > \dim N$, la regularidad de y implica que f es una sumersión en cada punto de la imagen inversa $x \in f^{-1}(y)$; en este caso podemos elegir coordenadas locales en torno de x y de y de modo que:

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$$

y y corresponde a $(0, \dots, 0)$. Así cerca de x el conjunto, $f^{-1}(y)$ es justamente el conjunto de puntos $(0, \dots, 0, x_{l+1}, \dots, x_k)$. Más precisamente, sea B la vecindad de x en la cual está definido el sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_k) . Entonces $f^{-1}(y) \cap B$ es el conjunto de puntos donde $x_1 = 0, \dots, x_l = 0$. Por lo tanto, las funciones x_{k+1}, \dots, x_l forman un sistema de coordenadas sobre el conjunto $f^{-1}(y) \cap B$ que es un subconjunto de $f^{-1}(y)$.

- Cuando $\dim M = \dim N$ tenemos que f es un difeomorfismo local en cada punto de imagen inversa. Es decir, existe una vecindad U de y en N tal que $f^{-1}(U)$ es una unión ajena $B_1 \cup \dots \cup B_N$ donde B_i es una vecindad abierta de x_i y f transforma cada B_i de manera difeomorfa sobre U .
- Cuando $\dim M < \dim N$, entonces cada punto en $f(M)$ es un valor crítico, y los valores regulares son aquellos que no son alcanzados por f . Entonces los puntos críticos forman un subconjunto en M .

3.1.18 Teorema. de Sard. *Si $f : M \rightarrow N$ es cualquier función suave entre variedades. Entonces casi todo punto de N es un valor regular de f .*

3.2. Orientación

3.2.1 Definición. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $\beta = v_1, \dots, v_k$ y $\beta' = v'_1, \dots, v'_k$ bases ordenadas de V y $A : V \rightarrow V$ un isomorfismo lineal tal que $\beta' = A\beta$. Decimos que β y β' están *orientadas de manera equivalente* si el determinante de la transformación lineal A es positivo. (Para un análisis de Espacios Vectoriales véase [7, II,p.19]).

Tenemos una relación de equivalencia que divide al conjunto de las bases ordenadas para V en dos clases.

El signo dado, de manera arbitraria, a una base ordenada β es su *orientación*, de modo que β tiene orientación *positiva* o *negativa* de acuerdo a la clase de equivalencia a la que pertenece.

Al agregar de manera arbitraria un signo positivo a los elementos de la clase de equivalencia y uno negativo al resto de los elementos de V esta adquiere una *orientación*. De tal forma que una *orientación* de V es positiva o negativa según el signo de su base β .

3.2.2 Observación. Sea $A : V \rightarrow W$ un isomorfismo entre espacios vectoriales, y sean β y β' bases ordenadas en V que pertenecen a la misma clase de equivalencia y las bases ordenadas $A\beta$ y $A\beta'$ en W pertenecen, de igual forma, a la misma clase de equivalencia. Entonces si V y W están orientados, A preserva o invierte la orientación.

3.2.3 Lema. Sea $V = V_1 \oplus V_2$ la suma directa entre espacios vectoriales. La orientación de cualquiera de dos de estos espacios induce una orientación de suma directa sobre el tercero.

3.2.4 Definición. Sea $h : U \rightarrow M$ una parametrización local en torno a cada punto $x \in M$ y sea $dh_u : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{h(u)}(M)$ que preserva orientación en cada punto u del dominio $U \subseteq H^k$. Entonces dicha parametrización es una *elección suave de orientaciones* y h es una función que preserva orientación. (Se supone de manera implícita que la orientación en \mathbb{R}^k es la canónica).

3.2.5 Definición. Sea M una variedad con frontera. Una *orientación de M* es una elección suave de orientaciones para todos los espacios tangentes $T_x(M)$.

3.2.6 Definición. Sea M y N variedades orientadas y una de ellas sin frontera entonces $M \times N$ tiene una *orientación producto* tal que en cada punto $(x, y) \in M \times N$ se tiene

$$T_{x,y}(M \times N) = T_x(M) \times T_y(N)$$

3.2.7 Definición. Sea $df_x : T_x(M) \rightarrow T_y(N)$ un isomorfismo. Si el isomorfismo preserva orientación entonces $x \in M$ tendrá un $+1$ asignado y -1 en el caso contrario. Y el $+$ o $-$ denota el *signo* de la orientación.

3.2.8 Lema. Sean $\alpha = v_1, \dots, v_k$ y $\beta = w_1, \dots, w_l$ bases ordenadas para $T_x(M)$ y para $T_y(N)$ respectivamente y sea $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ la base ordenada $(v_1, 0), \dots, (v_k, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_l)$ de $T_x(M) \times T_y(N)$. Entonces la orientación sobre $T_x(M) \times T_y(N)$ es

$$\text{signo}(\alpha \times 0, 0 \times \beta) = \text{signo}(\alpha)\text{signo}(\beta)$$

3.2.9 Corolario. Una orientación de M induce una orientación frontera sobre ∂M .

3.3. Grado y Número de Arrollamiento

3.3.1 Observación. Sea $f : M \rightarrow N$ una transformación suave arbitraria entre variedades orientadas de la misma dimensión y $x \in M$ tal que $f(x) = y$ es un valor regular. Por el Teorema de la Imagen Inversa $f^{(-1)}(y)$ es una subvariedad de M tal que

$$\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N$$

3.3.2 Corolario. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades orientadas y $y_0 \in N$ valor regular. Entonces $|f^{-1}(\{y_0\})| = \#$ finito de puntos.

Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades orientadas tal que cumplen con el Teorema de la Imagen Inversa. Entonces el *grado* es la suma orientada de los puntos $|f^{-1}(\{y_0\})| = \sum_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} \text{signo}(x)$.

3.3.3 Definición. Sean M variedad compacta, conexa, sin frontera y orientada; N variedad sin frontera y orientada, y $f : M \rightarrow N$ una función suave tal que $f(x) = y$ y $y \in N$ es un valor regular. Definimos el *grado* de f como la suma alternada de puntos en la imagen inversa de f .

3.3.4 Definición. Sea M una variedad compacta, orientada, de dimensión n y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una transformación suave. Definimos el *número de arrollamiento* de f en torno de un punto $z \in \mathbb{R}^{n+1} - f(M)$ como el número de veces en que el vector unitario $u : M \rightarrow S^{n-1}$ indica la dirección de z a $f(x)$ tal que

$$u(x) = \frac{f(x)-z}{|f(x)-z|}$$

y lo denotamos como $W(f, z)$.

3.4. Teorema de Hopf

3.4.1 Definición. Sean $f, g : M \rightarrow N$ transformaciones homotópicas entre variedades y sea $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ la homotopía entre dichas transformaciones tal que:

$$H(p, 0) = f(p)$$

$$H(p, 1) = g(p)$$

$t \in [0, 1]$ con $p \rightarrow H(p, t)$ difeomorfismo para cada t , entonces f es isotópica a g .

Dos difeomorfismos son *isotópicos* si se pueden unir por medio de una isotopía.

3.4.2 Lema. de isotopía Sean y, z puntos de una variedad N conexa, existe un difeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que $h(y) = z$ y h es isotópico a la identidad. Véase [4, pp.194 y 195]

3.4.3 Corolario. Sea N una variedad conexa de dimensión mayor que 1, y sean y_1, \dots, y_n y z_1, \dots, z_n dos conjuntos de puntos distintos en N . Entonces existe un difeomorfismo $h : N \rightarrow N$ isotópico a la identidad, con

$$h(y_1) = z_1, \dots, h(y_n) = z_n$$

3.4.4 Proposición. Sean U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave y x un punto regular, con $f(x) = z$. Sea B una bola cerrada suficientemente pequeña con centro en x , y definamos $\partial f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^n$ la restricción de f a la frontera de B . Entonces $W(\partial f, z) = +1$ si f preserva la orientación en x y $W(\partial f, z) = -1$ si f invierte la orientación en x .

Demostración:

Sean $x = 0$ y $A = df_0$. Por la regularidad, A es biyectiva. Entonces $f(0) = 0$, podemos escribir $f(z) = Az + \epsilon(z)$ tal que $\epsilon(z)/|z| \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$. Como la función lineal A es un isomorfismo, la imagen de la bola unitaria bajo A contiene cierta bola cerrada de radio $c > 0$. Por linealidad podemos elegir c tal que $|Az| > c|z|$ para toda $z \in \mathbb{R}^k$. Ahora elegimos el radio de la bola B suficientemente pequeño tal que

$$\frac{|\epsilon(z)|}{|z|} < \frac{c}{2}$$

en B .

Definamos

$$f_t(z) = Az + t\epsilon(z).$$

Como

$$|f_t(z) - z| \geq |(A)z| - t|\epsilon(z)| > \frac{1}{2}c|z|$$

para $0 \leq t \leq 1$ la transformación

$$F_t(z) = \frac{f_t(z) - z}{|f_t(z) - z|}$$

define una homotopía $\partial B \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Consideremos $H : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^k$ una homotopía que preserva orientación. Entonces H_t una homotopía que consta de isomorfismos lineales, tales que $H_0 = H$ y H_1 es igual a la identidad. Si H invierte la orientación, entonces consideremos H_1 reflexión

$$H_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Al aplicar esto a $H = A$, obtenemos una homotopía de F_0 con $z \rightarrow H_1 z / |H_1 z|$. En las dos posibilidades para H_1 se preserva la norma, tal que $|H_1 z| = |z| = r$, el radio de B . Así, si A preserva la orientación, F_0 es homotópica al difeomorfismo canónico que preserva orientación, $z \rightarrow z/r$, de $\partial B \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que $W(F_0, z) = 1$. Si A invierte orientación, entonces H_0 es homotópica al mismo difeomorfismo seguido de la reflexión que invierte la orientación en \mathbb{R}^n , de modo que $W(F_0) = -1$. \square

3.4.5 Proposición. Sean B una bola cerrada en \mathbb{R}^n , $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave, y z un valor regular de f sin preimágenes sobre la esfera de la frontera ∂B , y sea $\partial f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces el número de imágenes inversas de z es igual al número de arrollamiento $W(\partial f, z)$.

Demostración:

$W(\partial f, z)$ es el grado en ∂B de la función F dada por

$$z \rightarrow \frac{f(z)-z}{|f(z)-z|}$$

Pero en ∂F es igual a la función F_1 dada por

$$z \rightarrow \frac{f_1(z)-z}{|f_1(z)-z|}$$

Ahora, sean z_1, \dots, z_n los puntos de la imagen inversa de f y sea B_i en torno de z_i , tal que sean ajenas entre sí y con respecto de ∂B . Entonces F_1 se extiende a

$$B' = B - \cup_{i=1}^n \text{Int}(B_i)$$

de modo que su grado como función $\partial B' \rightarrow \mathbb{R}^n$ es igual a cero. Pero como

$$\partial B' = \partial B - \cup_{i=1}^n \partial B_i$$

Este grado es igual a su grado en ∂B , menos sus grados en ∂B_i . Por lo tanto, el grado de F_i en ∂B_i es $W(f, z)$. \square

3.4.6 Proposición. Sean B una bola cerrada en \mathbb{R}^n y $f : \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(B) \rightarrow Y$ cualquier función suave definida fuera de la bola abierta $\text{Int}(B)$. Entonces si la restricción $\partial f : \partial B \rightarrow Y$ es homotópica a una constante, podemos extender a f a una función suave en todo \mathbb{R}^n a Y .

Demostración:

Sea B centrada en 0, y sea $g_t : \partial B \rightarrow Y$ una homotopía tal que $g_1 = \partial f$ y g_0 es constante. Entonces una extensión de f a B está dada por $f(tx) = f_t(x)$, con $x \in \partial B$ y $t \in [0, 1]$. \square

3.4.7 Proposición. Cualquier función suave $f : S^n \rightarrow S^n$ con grado cero es homotópica a una transformación constante.

Demostración:

Sea f una función no suprayectiva y sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ con $\deg(f) = 0$. Consideremos B una bola cerrada en \mathbb{R}^{n+1} y $\phi : B \rightarrow S^n$ entonces $f(S^n) \subseteq \phi(B)$. Y sea $H(x, t) = \phi(1-t)\phi^{-1}(f(x)) + t\bar{0}$ la homotopía buscada. \square

3.4.8 Lema. Sean M una variedad compacta con frontera, y $f : \delta M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una función suave arbitraria. Entonces f se puede extender a toda la variedad M .

3.4.9 Teorema. de extensión Sean M una variedad compacta, conexa, orientada, de dimensión $n + 1$, con frontera, y $f : \delta M \rightarrow S^n$ una función suave. Entonces f se extiende a una transformación definida globalmente $F : M \rightarrow S^n$, con $\delta F = f$.

3.4.10 Teorema. de Hopf Dos funciones de una variedad M compacta, conexa, orientada, de dimensión n a S^n son homotópicas si y sólo si tienen el mismo grado.

Capítulo 4

Grado y Kronecker

Sea $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ una función suave, y sea M una variedad compacta y orientada. La integral de F relaciona los conceptos de grado e índice. Para ello describiremos como toda subvariedad de un espacio euclidiano es una variedad *riemana* de manera natural; y toda variedad riemana orientada admite de manera natural asociarle su forma de volumen. También desarrollaremos y definiremos los conceptos de formas diferenciales e integración en variedades y así obtener la integral de Kronecker. Observando que de igual forma el grado es un invariante homotópico.

4.1. Formas Diferenciales

4.1.1 Definición. Álgebra tensorial Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n . Un p -*tensor* en V es una función p -lineal $\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto $J^p(V) = \{\alpha : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es } p\text{-tensor}\}$ adquiere estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} , con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(u_1, \dots, u_p) &= \alpha(u_1, \dots, u_p) + \beta(u_1, \dots, u_p) \\(c\alpha)(u_1, \dots, u_p) &= c\alpha(u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

Sean $\alpha \in J^p(V)$ y $\beta \in J^q(V)$. Definimos el *producto tensorial* de α y β como la función:

$$\alpha \otimes \beta : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por:

$$(\alpha \otimes \beta)(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) = \alpha(u_1, \dots, u_p) \cdot \beta(v_1, \dots, v_q)$$

Es claro que $\alpha \otimes \beta \in J^{p+q}(V)$. Es fácil ver que el producto es asociativo.

En lo sucesivo, denotaremos como V^* al dual del espacio vectorial V .

4.1.2 Lema. *Sea ϕ_1, \dots, ϕ_k una base dual del espacio dual de V . Entonces los p -tensores*

$$\{\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_p} : 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq k\}$$

forman una base de $J^p(V)$. Por lo tanto, $\dim J^p(V^) = k^p$. Véase [4, p. 154]*

4.1.3 Observación. $\bigoplus_{p=0}^{\infty} J^p(V^*)$ es un álgebra graduada.

4.1.4 Definición. Álgebra Alternante Sea V espacio vectorial de dimensión n . Un p -tensor α es *alternante* si para cada $1 \leq i < j \leq p$ se cumple que

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

Observemos que $\Lambda^p(V^*) = \{\alpha : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es } p\text{-tensor alternante}\}$ es un subespacio vectorial de $J^p(V)$.

Sea S_p el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, p\}$ bajo composición. Recordemos que $\text{sign } \sigma$ es $+1$ si la permutación σ es par y -1 si es impar. Definimos a la función

$$\text{Alt} : J^k(V) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$$

como

$$\text{Alt}(\alpha)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign } \sigma \alpha(v_{1\sigma(1)}, \dots, v_{p\sigma(p)})$$

El operador alternante Alt tiene las siguientes propiedades Véase [4, pp. 155 y 156]:

- Si $\alpha \in J^p(V)$ entonces $\text{Alt}(\alpha) \in \Lambda^p(V^*)$.
- Si $\beta \in \Lambda(V^*)$ entonces $\text{Alt}(\beta) = \beta$.

- Si $\alpha \in J^p(V)$ entonces $\text{Alt}(\text{Alt}(\alpha)) = \text{Alt}(\alpha)$

Sean $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$ y $\beta \in \Lambda^q(V^*)$. Definimos *el producto exterior*

$$\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{(p+q)}(V^*)$$

como

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

De este modo $\bigoplus_0^\infty \Lambda^p(V^*)$ es un álgebra graduada.

4.1.5 Lema. Sea $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ una base para V^* entonces

$$\{\phi_i = \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq k\}$$

es una base para $\Lambda^p(V^*)$ de donde

$$\dim \Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p} \frac{k!}{p!(k-p)!}$$

Véase [4, pp. 158]

Entonces sean V un espacio vectorial de dimensión n y $\dim \Lambda^p = \binom{n}{p}$.

Tenemos

$$\dim \Lambda^{n-p} = \binom{n}{n-p}$$

Observemos que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Por lo tanto Λ^p y Λ^{n-p} son *isomorfos*.

4.1.6 Definición. Sea V espacio vectorial de dimensión n con un producto interior $\langle \alpha, \beta \rangle$; y sean $\lambda = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$, $\mu = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p$. Definimos el *producto interior* inducido en $\Lambda^p(V)$ como

$$(\lambda, \mu) = | \langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{i,j} |$$

El *producto interior* está bien definido ya que $|\langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{i,j}|$ es una función multilinear alternante. Véase [3, p.14]

4.1.7 Definición. Sea V un espacio vectorial orientado de dimensión n con el producto interior $\langle \alpha, \beta \rangle$ y sea $\lambda \in \Lambda^p(V)$. Definimos el *operador estrella* \star como la transformación lineal

$$\begin{aligned}\star : \Lambda^p(V) &\rightarrow \Lambda^{n-p}(V) \\ \mu &\mapsto \lambda \wedge \mu\end{aligned}$$

Véase [3, p.15]

4.1.8 Definición. Sea M una variedad. Definimos una *p-forma* en M como la función

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^p(M) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^p[T_x(M)]$$

tal que

$$\omega(x) \in \Lambda^p[T_x(M)] \quad \forall x \in M$$

Al espacio de *p-formas* en M lo denotamos como $\Lambda^p(M)$. Esto sin peligro de confusión con $\Lambda^p(V)$.

Las *p-formas* se suman puntualmente. Sean ω_1 y ω_2 dos *p-formas*. Entonces:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2)(x) &= \omega_1(x) + \omega_2(x) \\ (\alpha\omega)(x) &= \alpha(\omega(x))\end{aligned}$$

Una $(q+p)$ -*forma* $\omega_1 \wedge \omega_2$ está dada por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

Observemos que la anticonmutatividad $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1$ resulta de la ecuación análoga en cada punto.

4.1.9 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y $V \subseteq \mathbb{R}^l$ subconjuntos abiertos y $f : V \rightarrow U$ suave. Consideremos (x_1, \dots, x_k) y (y_1, \dots, y_l) para denotar las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^l respectivamente. Entonces

$$df_y = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) \right)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_k)$.

4.1.10 Observación. Para cada sucesión de índices creciente $I = (i_1 < \dots < i_p)$. Se tiene que

$$dx_I = (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})$$

es una p -forma en \mathbb{R}^k .

4.1.11 Definición. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades, $x \in M$. Entonces la *derivada* df_x la definimos como:

$$df_x : T_x(M) \rightarrow T_y(N)$$

4.1.12 Definición. Sea M variedad y sea $x \in M$ tal que para cada x existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Entonces definimos la *diferencial* de ϕ como

$$d\phi_x : T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \phi_x$$

Lo anterior nos define una *1-forma* $d\phi$ en M y las *0-formas* son funciones reales arbitrarias en M .

4.1.13 Observación. Sean $U \subseteq M$ un subconjunto abierto de M , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta y $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$. Entonces

$$\{\partial\phi_j|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n\}$$

es la base dual de

$$\left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \Big|_x \right\}_{i=1}^n$$

Notemos que $d\phi_x = (d\phi_1(x), \dots, d\phi_k(x))$ es isomorfismo de $T_x(M) \cong \mathbb{R}^n$.

4.1.14 Lema. Sean $x \in U$ y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta, $I = (i_1, \dots, i_p)$ sucesión. Entonces

$$d\phi_I = d\phi_{i_1}(x) \wedge d\phi_{i_2}(x) \wedge \dots \wedge d\phi_{i_p}(x)$$

es base de

$$\Lambda^p[T_x(M)^*]$$

y

$$\Lambda^p[T_x(M)^*] = \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$$

4.1.15 Definición. Sea ϕ una carta y $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, donde cada f_i es una función suave en U y $l = (i_1, \dots, i_p)$. Entonces

$$\omega(x) = \sum_l f_l(x) d\phi_l(x)$$

Diremos que una p -forma ω es suave si para cualquier carta ϕ , cada función coeficiente $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ en su desarrollo $\sum_I f_I(x) d\phi_I(x)$ es suave.

4.1.16 Definición. Sea $T : V \rightarrow W$ una función entre espacios vectoriales de \mathbb{R} . Definimos el *pull-back* como la función lineal

$$\begin{aligned} T^* : J^p(W) &\rightarrow J^q(V) \\ \alpha &\mapsto T^*(\alpha) \end{aligned}$$

tal que

$$T^*(\alpha)(u_1, \dots, u_p) = \alpha(T(u_1), \dots, T(u_p))$$

Nota Aún cuando la expresión *pull-back* no es castellana, nos permitiremos conservarla.

Propiedades Sea $\alpha \in \Lambda(V^*)$ y sea $S : E \rightarrow V$ función entre espacios vectoriales. Entonces se tiene:

- $T^*(\alpha) \in \Lambda^k(V^*)$.
- $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.
- $(Id)^* = Id$.

4.1.17 Definición. Sean $f : M \rightarrow N$ función suave entre variedades, $\omega(y) \in T_y(N)$ un p -tensor alternante y $(df_x)^*$ transformación dual. Definimos el *pull-back* del p -tensor alternante como:

$$f^*\omega(x) = (df_x)^*\omega(f(x))$$

Notemos que la transformación dual de $(df_y)^*$ es la matriz transpuesta. Entonces:

$$f^*dx_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j = df_i$$

donde $f = (f_1, \dots, f_l)$, y cada f_i es una función suave.

4.1.18 Definición. Sea $f^*\omega(x)$ un p -tensor alternante en $T_x(M)$. Definimos a $f^*\omega$ como la *forma inducida* de ω bajo f .

Entonces el *pull-back* de ω es

$$f^*(\omega) = \sum_{j=1}^l (f_j^*) df_j$$

donde $\omega = \sum_j f_j dx_j$ es una forma arbitraria en $U \subseteq \mathbb{R}^k$.

4.1.19 Definición. Sea $\phi : U \rightarrow M$ una carta y $\phi^*\omega$ es una forma suave en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces ω es *suave* en M .

4.1.20 Observación. Sean $\phi_i : U_i \rightarrow M$ una colección de cartas y M variedad, tal que $\bigcup_i \phi_i(U_i) = M$, y sea $\phi_i^*\omega$ una forma suave en U . Entonces ω es suave.

4.1.21 Proposición. Sean $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades orientadas de dimensión k y i_1, i_2, \dots, i_k una permutación en σ^k . Entonces $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ es la forma de volumen de N .

Demostración:

$$\begin{aligned} \omega &= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_k=1}^k \frac{\delta x_1}{\delta y_{i_1}} \dots \frac{\delta x_k}{\delta y_{i_k}} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}. \\ &= \sum_{i \in \sigma^n} \frac{\delta x_1}{\delta y_{i_1}} \dots \frac{\delta x_k}{\delta y_{i_k}} (-1)^i dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$= \det \left(\frac{\delta x_j}{\delta y_i} \right) \Big|_{i,j=1}^n dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$$

□

4.1.22 Teorema. del Determinante Sea $T : V \rightarrow V$ un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales y sea $\alpha \in \Lambda^k(V)$ y $\dim V = k$. Entonces

$$T^*\alpha = (\det T)\alpha$$

Notemos que en particular, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^k(V^*)$. Entonces

$$T^* \alpha_1 \wedge \dots \wedge T^* \alpha_k = (\det T) \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$$

Véase [4, p.160].

4.2. Integración en Variedades

4.2.1 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^k$ abierto y $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ una k -forma en U . Definimos el *soporte* de ω como

$$\text{sop } \omega = \overline{\{x \in U : \omega_x \neq 0\}} = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

4.2.2 Definición. Sea f una función integrable en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ una k -forma con soporte compacto en U . Entonces ω es integrable y

$$\int_U \omega = \int_U f dx_1 \cdots dx_k$$

4.2.3 Teorema. de cambio de variable en \mathbb{R}^k Sean $f : V \rightarrow U$ un difeomorfismo entre conjuntos abiertos de \mathbb{R}^k y ω una k -forma integrable en U que preserva orientación. Entonces

$$\int_U \omega = \int_V f^* \omega.$$

Si f invierte orientación entonces

$$\int_U \omega = - \int_V f^* \omega.$$

Véase [4, p.166].

4.2.4 Definición. Sea M una variedad orientada de dimensión k y ω una k -forma sobre M . Definimos el soporte de ω en M como

$$\text{sop } \omega = \overline{\{x \in M : \omega_x \neq 0\}}$$

4.2.5 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $W \subseteq M$ abierto. Y sean $\text{sop } \omega \subseteq W$ y $h : U \rightarrow W$ un difeomorfismo. Entonces el *pull-back* $h^* \omega$ es una k -forma suave de soporte compacto en U integrable y definimos su integral como

$$\int_M \omega = \int_U h^* \omega$$

4.2.6 Observación. Sean $f : V \rightarrow U$ y $g : V \rightarrow W$ otra parametrización de W y sea $f = h^{-1} \circ g$ difeomorfismo que preserva orientación. Entonces

$$\int_U h^* \omega = \int_V f^* h^* \omega = \int_V g^* \omega.$$

4.2.7 Proposición. Sea ω una k -forma suave en la variedad orientada M , y $\{V_1 \cup \dots \cup V_k\}$ una colección de cartas que forman una cubierta abierta de M y sea $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{V_1, \dots, V_k\}$. Entonces $\rho_i \omega$ es una k -forma sobre M donde

$$\text{sop } \rho_i \omega \subseteq \text{sop } \rho_i \subseteq V_i, \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\omega = \sum_{i=1}^k \rho_i \omega$$

Definimos

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \rho_i \omega$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\{\tilde{V}_1 \cup \dots \cup \tilde{V}_n\}$ otra cubierta abierta para M y $\{\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n\}$ una partición de la unidad subordinada a esta cubierta de M .

Como $\sum_{i=1}^k \rho_i \omega(x) = 1 = \sum_{j=1}^n \tilde{\rho}_j \omega(x)$, tenemos que

$$\int_M \rho_i \omega = \sum_{j=1}^n \int_M \tilde{\rho}_j \rho_i \omega.$$

Similarmente para cada j

$$\int_M \rho_j \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \rho_i \tilde{\rho}_j \omega.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^k \int_M \rho_i \omega = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \int_M \tilde{\rho}_j \rho_i \omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \int_M \rho_i \tilde{\rho}_j \omega = \sum_{j=1}^n \int_M \tilde{\rho}_j \omega.$$

Por lo tanto, $\int_M \omega$ no depende de la partición de la unidad ni de la cubierta dada. \square

Observemos que $\omega \rightarrow \int_M \omega$ cumple con las propiedades de linealidad.

Sean ω y η n -formas en M de soporte compacto y $a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_M \omega + \eta = \int_M \omega + \int_M \eta$$

$$\int_M a\omega = a \int_M \omega$$

Usando el Teorema de Cambio de Variables daremos una generalización del mismo, para mostrar que la interacción se comporta de manera adecuada al cambiar de dominio.

4.2.8 Teorema. Sean $\omega \in M$ una k -forma suave con soporte compacto y $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo que preserva orientación entre variedades de la misma dimensión. Entonces

$$\int_M \omega = \int_N f^* \omega$$

Véase [4, p.168]

4.2.9 Definición. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades de dimensión k y $dV = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ la forma de volumen de N . Entonces

$$\int_M f = \int_M f dV$$

4.2.10 Teorema. de Stokes Sea ω una k -forma en M . Entonces

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Véase [3, pp.64-66]

La principal aplicación del teorema de Stokes es la siguiente fórmula que usaremos para establecer su versión local en torno de valores regulares en el

teorema del mismo nombre, el cual relaciona la operación analítica de integración con el comportamiento topológico de las transformaciones.

Fórmula de grado Sea $f : M \rightarrow N$ una función entre variedades compactas y orientadas de dimensión k y sea ω una k -forma en N entonces

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

4.2.11 Teorema. Fórmula de Grado Sea $f : M \rightarrow N$ función entre variedades compactas orientadas de dimensión k y $y \in M$ un valor regular y sea U una vecindad de y . Entonces

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

es válido para cada k -forma ω con soporte en U . Véase [4, pp.194-196].

4.2.12 Proposición. Sea $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$ un polinomio complejo y Ω una región en el plano sin raíces en su frontera. Entonces el número de raíces de p en Ω , incluyendo multiplicidades, está dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d \arg p(z)$$

4.2.13 Proposición. Sean γ una curva cerrada suave en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y ω una 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Entonces

$$\oint_{\gamma} \omega = W(\gamma, 0) \int_{S^1} \omega$$

4.3. La forma de volumen en S^n

4.3.1 Definición. Sean X, Y campos vectoriales en una variedad suave M de dimensión n . Definimos a α_p como *tensor métrico* tal que

$$\alpha_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

es una familia definida positiva de productos interiores y satisface las propiedades de espacio Métrico [Véase Apéndice] y

$$p \mapsto \alpha_p(X(p), Y(p))$$

asigna a cada punto $x, y \in M$ a un número real no negativo.

Esto nos da una base de los vectores tangentes a cada punto de M . Entonces

$$\alpha_{i,j}(p) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right\rangle$$

y \langle, \rangle representa el producto interior.

De la misma forma, la métrica tensorial puede ser escrita en términos de la base dual dx_1, \dots, dx_n :

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \sum_{j=i}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_x \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i g_{ij} b_j \end{aligned}$$

Si las funciones g_{ij} son suaves entonces a la métrica descrita se le llama *métrica de Riemman*

4.3.2 Definición. Una *variedad de Riemman* es una pareja (M, α) que consiste de una variedad M y α un tensor métrico.

4.3.3 Proposición. Sea (M, α) una variedad de Riemann. Entonces

$$\det \left[\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\rangle \right)_{i,j=1}^k \right]^{1/2} dx_1|_p \wedge \dots \wedge dx_k|_p$$

define una forma de volumen dV en M .

DEMOSTRACIÓN:

Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal orientada en R^n , $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , V un espacio vectorial en M variedad de Riemman; y sea $T : V \rightarrow V$, tal que $T(e_j) \mapsto v_j$. Entonces

$$v_j = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v_j \rangle e_i$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |\det T| &= \sqrt{\det T^t T} \\ &= \sqrt{\det \left(\sum_k \langle e_k, v_i \rangle \langle e_k, v_j \rangle \right)} \\ &= \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* &= (\det T) v_1^* \cdots \wedge v_n^* \\ &= \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^* \end{aligned}$$

Y

$$\left\{ v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right\}_{j=1}^n$$

Sea $U \subseteq M$ y $(U, \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n))$ carta alrededor de x . Entonces

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = \sqrt{\det \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right\rangle_x} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Por lo tanto

$$x \mapsto e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

está bien definida y es una *forma de volumen* dV en M y $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*|_x \in \Lambda^n(T_x M)$ es única \square .

4.3.4 Definición. Sea $\iota : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie es decir una superficie de Riemman de dimensión n . Entonces (ι^*, α) es la métrica de Riemman *naturalmente* inducida por su posición en \mathbb{R}^{n+1} . Por lo tanto si $p \in M$ entonces

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mu_p, v \rangle = 0\}$$

donde μ_p es el vector unitario perpendicular a M en p .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \iota^*, \alpha \rangle_p(v, w) &= \langle dv, dw \rangle_{\iota(p)} \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

4.3.5 Teorema. Sea M una hipersuperficie de Riemann en \mathbb{R}^{n+1} y μ_p el vector normal a M en p . Entonces

$$dV_M|_p(v_1, \dots, v_n) = \det(\mu_p, v_1, \dots, v_n)$$

4.3.6 Proposición. Sean $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, M una variedad de Riemann y $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ una carta de M . Entonces $(r \circ f)^*(dV_{S^n}) = \sigma$ la forma de volumen inducida en M .

4.3.7 Definición. Sean $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades de dimensión k , (N, α) una variedad de Riemann y sea $dV_{(N, \alpha)}$ la forma de volumen inducida en N . Entonces se define

$$dV_{(M, f^*\alpha)} = f^*(dV_{(N, \alpha)})$$

4.3.8 Proposición. Sea $\omega = dx_1 \cdots dx_n$ la forma de volumen en \mathbb{R}^n y sea $r^2 = \sum x_i^2$. Entonces la forma de volumen V_n de la bola unitaria es

$$V_n = \int_{r \leq 1} \omega$$

4.3.9 Observación. Sea σ' una n -forma de volumen de dimensión n en la esfera unitaria $S^n = \{x | r = 1\}$ y sea

$$A_n = \int_{S^n} \sigma'$$

Donde $A_1 = 2\pi$, $A_2 = 4\pi$ y $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$. Observemos que

$$V_n = \int_0^1 r^{n-1} A_{n-1} dr = \frac{1}{n} A_{n-1}$$

Evaluando la integral se tiene que

$$V_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2} V_{n-1} dx$$

Cosideremos

$$J_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2} dx$$

Entonces

$$= V_{n-1}J_n$$

Integrando por partes obtenemos

$$J_n = \int_{-1}^1 x(2x)\left(\frac{n-1}{2}\right)(1-x^2)^{(n-3)/2} dx = (n-1)(-J_n + J_{n-2})$$

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

Por lo tanto

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

4.3.10 Observación. Sea $rdr = \sum x_i dx_i$ una 1-forma en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces

$$\star r dr = \sum (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \hat{dx}_i \cdots dx_{n+1}$$

es una n forma en \mathbb{R}^{n+1} y $\sigma' = c \star r dr$ es una n -forma en S^n con c constante.

4.3.11 Observación. Sea $c = 1$, $\sigma' = r dr$ un elemento de volumen de dimensión n en S^n . Entonces

$$d(\star r dr) = \sum (-1)^{i-1} dx_i dx_1 \cdots \hat{dx}_i \cdots dx_{n+1} = (n+1)\omega$$

Entonces

$$A_n = \int_{S^n} \sigma' = c \int_{S^n} \star r dr = c \int_{r \leq 1} d(\star r dr) = c \int_{r \leq 1} n\omega = cnV_n = cA_n$$

Por lo tanto

$$\sigma = \star r dr = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \hat{dx}_i \cdots dx_{n+1}$$

define una n forma σ en \mathbb{R}^{n+1} y $d\sigma = (n+1)\omega$. Si tomamos σ en S^n entonces σ' es una n -forma de S^n .

4.3.12 Proposición. Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ tal que $\pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Entonces $r^* \sigma'$ define una $(n+1)$ -forma en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

4.3.13 Definición. Sea $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ una función tal que $r(x) = x/\|x\|$. Entonces definimos la forma de volumen de S^n como:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} |_{S^n}$$

4.4. La integral de Kronecker

4.4.1 Proposición. Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una n -variedad de Riemman cerrada y orientada; y $f : \Sigma \rightarrow S^n$ una función continua. Entonces $\deg(\frac{f}{\|f\|})$ está dado en términos de una integral.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y $\delta = \deg(\pi)$

$$\int_{\Sigma} \tau = \int_{\Sigma} \pi^* \sigma' = \int_{\pi(\Sigma)} \sigma' = \delta \int_{S^n} \sigma = \delta A_n$$

Entonces

$$\delta = \frac{1}{A_n} \int_{\Sigma} \tau$$

El grado de f está dado por la integral múltiple de N y su frontera \square .

4.4.2 Definición. Sea $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ una función y M una variedad compacta y orientada definimos a la integral de Kronecker $K(F)$ como:

$$K(F) = (\text{vol } S^n)^{-1} \int_M \|F(x)\|^{n+1} \det(F(x), \frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)) dx$$

en términos de formas diferenciales tenemos

$$K(F) = (\text{vol } S^n)^{-1} \int_M (\pi \circ F)^* \sigma$$

4.4.3 Teorema. La integral de Kronecker Sea M una variedad cerrada y orientada y $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ una función suave. Entonces el número de veces que M gira al rededor del origen $W(f,0)$ es

$$\frac{1}{A_n} \int_M f^* \tau,$$

la Integral de Kronecker $K(F)$

DEMOSTRACIÓN:

Sea

$$g = \pi \circ f : M^n \rightarrow S^n$$

$$g(M) = (\deg g)S^n + \partial M$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_M g^* \sigma' &= \int_{gM} \sigma' \\ &= (\deg g) \int_{S^n} \sigma' \\ &= A_n(\deg g) \\ \frac{1}{A_n} \int_M g^* \sigma' &= \deg g \end{aligned}$$

pero

$$g^* \sigma' = (f^* \circ \pi^*) \sigma' = f^* \tau$$

de donde

$$\deg g = \frac{1}{A_n} \int_M f^* \tau$$

La integral de Kronecker define el número de giros que f realiza alrededor del origen y $W(f, 0) = \deg(\pi)$ \square .

4.4.4 Lema. Sea $f : M^n \rightarrow N^n$ una función entre variedades de dimensión n y dV la forma de volumen en N . Entonces $\int_N dV = 1$ y $\deg f = \int_M f^* dV$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que $f(M) = (\deg f)N + \partial M$. Entonces

$$\int_M f^* dV = \int_{fM} dV = (\deg f) \int_N dV = \deg f$$

□.

4.4.5 Proposición. Sea $F : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $\gamma = r \circ F \circ \varphi^{-1} = \frac{F}{\|F\|} \circ \varphi^{-1}$. Entonces $K(F) = I(\gamma)$

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos el caso $n = 1$ con $M = S^1$. Entonces $K(F)$ se calcula como sigue

$$\begin{aligned} K(F) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\|F(\theta)\|^2} |F(\theta), \frac{\delta F}{\delta t}| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma(t), \gamma'(t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma_1(t)\gamma_1'(t)| dt \end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned} K(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma^{-1}(t) \cdot \gamma'(t) dt \end{aligned}$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned}
I(\gamma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\gamma_1(t) - \gamma_2(t)i)(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_1'(t) + \gamma_2(t)\gamma_2'(t) + \frac{1}{2\pi i} dt \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma \cdot \gamma' dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma^{-1} \cdot \gamma' dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \|\gamma\|^2 dt + K(F) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \|\gamma\|^2 \Big|_0^{2\pi} + K(F) \\
&= \frac{1}{2\pi i} (\|\gamma(2\pi)\|^2 - \|\gamma(0)\|^2) + K(F) \\
&= 0 + K(F) \\
&= K(F)
\end{aligned}$$

□.

4.4.6 Teorema. El invariante de Hopf Sea $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ y $f^*\sigma_n = d\omega_{n-1}$. Entonces

$$\int_{S^{2n-1}} \omega_{n-1} \wedge f^*\omega_n$$

es un número entero. Véase [3, p.79]

Capítulo 5

Algunos comentarios históricos

La noción topológica de grado, $\deg(f)$, de una función continua $f : M \rightarrow N$, donde M y N son variedades orientadas, compactas y conexas; puede remontarse a L.E.J Brouwer (1881-1966). Una idea relacionada es la del *número de arrollamiento*, $W(f, 0)$ de una función continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que; $W(f, 0) = \deg(f/||f||)$. Sin embargo, aún antes del trabajo de Brouwer, para el caso diferenciable este concepto fue conocido como "*La característica de Kronecker*" o "*La integral de Kronecker*" de una función f .

En Marzo de 1910 Brouwer informó a Hilbert que había llegado a una solución parcial del problema de la invariancia dimensional, directamente relacionada a la distinción topológica entre esferas de dimensión par e impar y sus transformaciones.

El artículo "Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl" presentado por Brouwer incluía el nuevo concepto de "grado de un mapeo". Brouwer inicialmente desarrolló el concepto de *grado* para la generalización n-dimensional del teorema de singularidad para campos vectoriales en esferas y el teorema del punto fijo para mapeos de esferas.

5.1. Teorema de Brouwer

La teoría del punto Fijo, comenzó a formar parte integral de la topología con Poincaré en 1880. El mostró que la solución a algunos problemas analíticos, podrían ser estudiados definiendo un conjunto X y una función

$f : X \rightarrow X$ de tal forma que las soluciones corresponden a los *puntos fijos* de la función f , esto es los puntos $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

El Teorema del punto fijo de Brouwer, para mapeos continuos de la bola unitaria cerrada de dimensión n , fue de los primeros teoremas en la Topología Algebraica y es la base más general para el Teorema del Punto fijo.

5.1.1 Proposición. Sean $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ y $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, tal que $g(x) = x - f(x)$. Entonces $g(-1) \leq 0$ y $g(1) \geq 0$. Si $g(-1)$ o $g(1)$ es igual a 0, entonces f tiene un punto fijo.

Esto coincide para la bola unitaria de dimensión 1 en el desarrollo del Teorema del punto fijo.

5.1.2 Teorema. del Valor Intermedio. Sea $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $g(-1) \leq 0$ y $g(1) \geq 0$. Entonces $g(c) = 0$ para alguna c , tal que $-1 < c < 1$.

5.1.3 Teorema. de punto fijo de Brouwer Sea B^n la bola unitaria en \mathbb{R}^n y sea $f : B^n \rightarrow B^n$ una función. Entonces $f(x) = x$ para algún $x \in B^n$.

Demostración:

Sea f sin puntos fijos y sea $g : B^n \rightarrow \delta B^n$ una retracción. Como $f(x) \neq x$, los dos puntos x y $f(x)$ determinan una recta. Entonces sea $g(x)$ el punto donde el segmento de recta que parte de $f(x)$ y pasa por x toca a la frontera.

Si $x \in \delta B^n$. Entonces $g(x) = x$. Así, $g : B^n \rightarrow \delta B^n$ es la identidad en δB^n . Como x está en el segmento de recta entre $f(x)$ y $g(x)$, podemos escribir al vector $g(x) - f(x)$ como t veces el vector $x - f(x)$, donde $t \geq 1$. Así, $g(x) = tx + (1 - t)f(x)$. Si t depende de manera suave de x , entonces g es suave. Calculamos el producto punto a ambos lados de esta fórmula.

Como $|g(x)| = 1$ obtenemos

$$t^2|x - f(x)|^2 + 2tf(x) \cdot [x - f(x)] + |f(x)|^2 - 1 = 0$$

Este polinomio cuadrático tiene una raíz única positiva. (También tiene una raíz con $t \leq 0$, correspondiente al punto donde la recta de x a $f(x)$ toca a la frontera.) Ahora basta sustituir en la fórmula cuadrática para obtener una expresión de t en términos de funciones suaves de x . \square .

5.2. Teorema del punto fijo de Lefschetz

Lefschetz estudió la teoría de intersección entre variedades y de 1923 a 1925 publicó sus investigaciones sobre mapeos continuos entre variedades, y sus puntos fijos.

Lefschetz relacionó el estudio del mapeo $f : X \rightarrow X$ con la teoría de intersección y la *gráfica*. Si f es una función que asocia cada punto $x \in X$ a un subconjunto de X . Entonces la *gráfica* de f se define como:

5.2.1 Definición. La *gráfica* de una transformación $f : X \rightarrow X$ es el subconjunto definido por

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in X \times X \mid y = f(x)\}$$

Entonces x es un *punto fijo* si $(x, f(x)) \in X \times X$ pertenece a la intersección de la gráfica de f con la diagonal Δ . La gráfica es una subvariedad de $X \times X$.

5.2.2 Definición. Sea W una variedad con frontera y orientada y sean M y N subvariedades orientadas tal que $\dim M + \dim N = \dim W$. Si a cada punto en la intersección de M y N , se le asigna un signo positivo o negativo, según su orientación. Entonces definimos como *el número de Lefschetz* $L(f)$ a la suma aritmética de dichos puntos .

Dicho número coincide con el *índice de Kronecker*. Lefschetz se interesó en extender dicho número para funciones diferenciables de espacios euclidianos y así obtener una herramienta para el estudio de funciones continuas en variedades.

De manera que el conteo de los puntos comunes: $I(\Delta, \text{graf}(f))$ se llama *el número de Lefschetz global* de f , y se denota $L(f)$.

Puede haber un número infinito de puntos fijos, donde la transformación identidad nos sirve como ejemplo. En el caso en que los puntos fijos de f formen un conjunto finito, entonces $L(f)$ se puede calcular directamente en términos del comportamiento local de f alrededor de sus puntos fijos.

5.2.3 Teorema. suave de punto fijo de Lefschetz Sea M una variedad compacta y orientada y sea $f : M \rightarrow M$ una transformación suave. Si $L(f) \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración:

Si f no tiene puntos fijos, entonces Δ y $\text{graf}(f)$ son ajenos, por lo que son transversales. De donde

$$L(f) = I(\Delta, \text{graf}(f)) = 0$$

□.

5.2.4 Corolario. $L(f)$ es invariante bajo homotopia.

El teorema del punto fijo de Lefschetz generaliza el Teorema del punto fijo de Brouwer. Consideremos $M = S^n$. Entonces

$$L(f) = 1 + (-1)^n(\text{deg}(f))$$

5.3. Característica de Kronecker

En esta sección vamos a reformular el Teorema de Kronecker, con base en su sistema regular de funciones.

5.3.1 Definición. Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ una función. Definimos a la familia de funciones $F = (F_0, \dots, F_{n+1})$, con $n \geq 1$ como un *sistema regular de funciones* con las siguientes propiedades:

- $0 \in F_i(\mathbb{R}^{n+1})$ con $0 \leq i \leq n + 1$.
- $F_i^{-1}(0)$ es compacta con $0 \leq i \leq n + 1$.
- $0 \in \mathbb{R}$ es un valor regular de F_i con $0 \leq i \leq n + 1$, es decir, $F_i(x) = 0$ entonces $dF_i(x)$ es inyectiva.
- $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un valor regular para el mapeo

$$(F_0, \dots, \hat{F}_i, \dots, F_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

con $0 \leq i, j \leq n + 1$ y $i \neq j$.

- $0 \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular para el mapeo

$$(F_0, \dots, \hat{F}_i, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1}) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

con $0 \leq i, j \leq n+1$ y $i \neq j$.

5.3.2 Teorema. Clasificación de Variedades de dimensión uno. *Toda variedad compacta, conexa, de dimensión uno y con frontera, es difeomorfa a $[0, 1]$ o S^1 y es además la unión ajena de un número finito de componentes conexa.*

5.3.3 Corolario. *Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ una función en el sistema regular de funciones $F = (F_0, \dots, F_{n+1})$. Entonces*

$$F(\{i, j\}) = (F_0, \dots, \hat{F}_i, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1})^{-1}(0)$$

con $0 \leq i, j \leq n+1$ es una 1-variedad compacta. Y sólo un número finito de componentes de $F(\{i, j\})$ es homeomorfa a S^1 .

5.3.4 Observación. *Sea $F(\{i, j\})$ una 1-variedad que interseca transversalmente a $F_i^{-1}(0)$ o $F_j^{-1}(0)$ n-variedades. Entonces*

$$T_p(F(\{i, j\})) \oplus T_p(F_i^{-1}(0)) = T_p\mathbb{R}^{n+1}$$

con $p \in F(\{i, j\}) \cap F_i^{-1}(0)$ o

$$T_q(F(\{i, j\})) \oplus T_q(F_j^{-1}(0)) = T_q\mathbb{R}^{n+1}$$

con $q \in F(\{i, j\}) \cap F_j^{-1}(0)$ Respectivamente. Entonces $F(\{i, j\}) \cap F_i^{-1}(0)$ y $F(i, j) \cap F_j^{-1}(0)$ contienen un número finito de puntos orientados.

5.3.5 Definición. *Sea $F = (F_0, \dots, F_{n+1})$ un sistema de funciones regulares y $0 \leq i, j \leq n+1, i \neq j$.*

- Un punto $e \in F(i, j) \cap F_i^{-1}(0)$ es un *punto de entrada* de $F(i, j)$ en $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / F_j(x) \cdot F_i(x) < 0\}$ y $E(i, j)$ es el conjunto de puntos de entrada de $F(i, j)$
- Sea $a \in F(i, j) \cap F_i^{-1}(0)$ es un *punto de salida* de $F(i, j)$ fuera de $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / F_j(x) \cdot F_i(x) < 0\}$ y $A(i, j)$ es el conjunto de puntos de salida de $F(i, j)$

5.3.6 Definición. Característica de Kronecker. Sea $F = (F_0, \dots, F_{n+1})$ un sistema regular de funciones y sea

$$\#E(i, j) - \#A(i, j)$$

el número de los puntos de intersección, un número entero independiente de la elección de los índices. Entonces definimos al entero

$$\chi(F_0, \dots, F_{n+1}) = 1/2(\#E(i, j) - \#A(i, j))$$

como la **característica de Kronecker** de un sistema regular de funciones.

5.3.7 Definición. $f : V \rightarrow W$ un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales finitos de dimensión real orientados. Entonces definimos el *sign* de f como

$$\text{sign} f = \begin{cases} +1 & \text{f preserva orientación} \\ -1 & \text{f revierte orientación} \end{cases}$$

5.3.8 Observación. Sea $F = (F_0, \dots, F_{n+1})$ un sistema regular de funciones y para $0 \leq j \leq n+1$. Entonces

$$\chi(F_0, \dots, F_{n+1}) = \sum_{(F_0, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1})(x)=0} (-1)^j \text{sign} d(F_0, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1})(x)$$

con $F_j(x) < 0$

$$= - \sum_{(F_0, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1})(x)=0} (-1)^j \text{sign} d(F_0, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1})(x)$$

con $F_j(x) > 0$

5.3.9 Teorema. La Integral de Kronecker. Sea $F = (F_0, \dots, F_{n+1})$ un sistema regular de funciones y $0 \leq i, j \leq n+1, i \neq j$; y sea Φ_{ij} la función

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} : F(i, j) &\rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ x &\mapsto (F_i(x), F_j(x)) \end{aligned}$$

Entonces

$$\chi(F_0, \dots, F_{n+1}) = w(\Phi_{i,j}, 0)$$

donde w es el número de arrollamiento de Φ_{ij} alrededor del origen.

5.3.10 Corolario. Sea $f : M \rightarrow N$ una función entre variedades orientadas y $y \in N$ es un valor regular para f ($f^{-1}(y) \neq \emptyset$), tal que la orientación de la variedad $f^{-1}(y)$ es la orientación preimagen. Entonces definimos la característica de Kronecker como:

$$\chi(F_0, \dots, F_{n+1}) = (-1)^j (\text{vol } S^n)^{-1} \int_{F_j^{-1}(0)} (r \circ (F_0, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_{n+1}))^* \sigma$$

para cada $0 \leq j \leq n+1$ además asumimos que $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : F_j(x) \leq 0\}$ o bien $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : F_j(x) \geq 0\}$ es compacta y $F_j^{-1}(0)$ es orientada por la orientación de la preimagen.

5.4. Teorema fundamental del álgebra

Una versión general del teorema de existencia de Kronecker nos ayuda a dar una prueba para el teorema fundamental del álgebra.

Reformularemos el teorema de existencia de Kronecker en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

5.4.1 Teorema. Sea $F = (F_0, F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un sistema regular de funciones tal que $F_0^{-1}(0)$ es conexa. Dada una orientación de $F_0^{-1}(0)$ y sea la intersección de puntos $\{p_1, \dots, p_s, p_{s+1}\} = F(\{1, 2\}) \cap F_1^{-1}(0)$ donde los índices corresponden con la orientación. Y los puntos p_1, \dots, p_s se corresponden como sigue:

$$l(p_j) = \begin{cases} 1(-1) & \text{Si } F_2(p_j) > 0 \text{ y } j \text{ es par o impar} \\ -1(1) & \text{Si } F_2(p_j) < 0 \text{ y } j \text{ es par o impar} \end{cases}$$

$$1 \leq j \leq s$$

Entonces $\sum_{j=1}^s l(p_j) \neq 0$ implica que el mapeo

$$(F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tiene un cero en $\{x \in \mathbb{R}^2 : F_0(x) < 0\}$ y también en $\{x \in \mathbb{R}^2 : F_0(x) > 0\}$

Demostración:

Consideremos

$$|\chi(F_0, F_1, F_2)| = |\#E(1, 2) - \#A(1, 2)| = \left| \sum_{j=1}^s l(p_j) \right|$$

Y esbozemos una de las pruebas de Gauss para el teorema fundamental del álgebra:

Sea

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

($a_n \neq 0$) un polinomio con coeficientes en los complejos. Separamos P en su parte real e imaginaria, es decir, $P(z) = U(z) + iT(z)$, obtenemos funciones continuas T y U tal que los conjuntos $U^{-1}(0)$, $T^{-1}(0)$ intersectan a S^1 (con centro en el origen y radio suficientemente largo) transversalmente en $2n$ puntos,

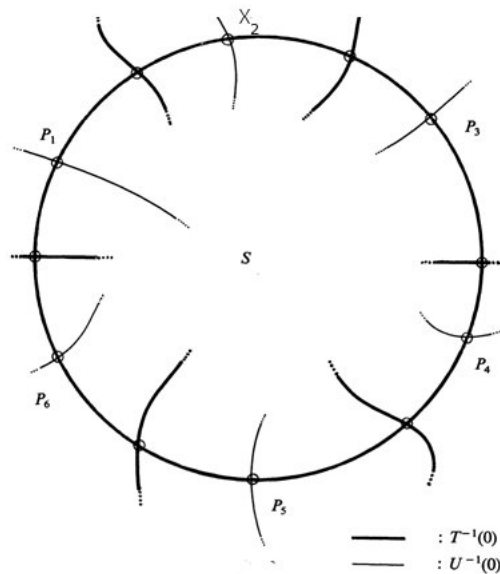


Figura 5.1: Curvas Silberg

A cada punto en la intersección $p \in U^{-1}(0) \cap S$ el mapeo $U|_S$ cambia el signo, donde el signo de $T|_S$ es constante ($\neq 0$) en una vecindad lo suficientemente pequeña de p . Etiquetando los puntos de intersección $p_1, \dots, p_{2n} =: U^{-1}(0) \cap S$ como en el capítulo anterior ($F_1 = U, F_2 = T$) es fácil ver que $|\sum_{j=1}^{2n} l(p_j)| = 2n$.

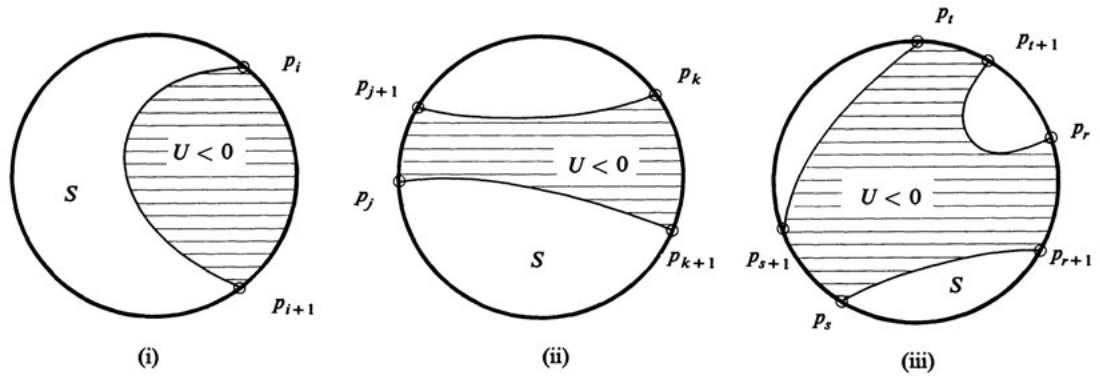


Figura 5.2: Curvas Silberg

Ahora la existencia de una raíz de P se sigue del siguiente argumento: Cada componente de $x \in \mathbb{R}^2 : U(x) < 0$ o $x \in \mathbb{R}^2 : U(x) > 0$ intersecta a la esfera S en uno, dos, o más segmentos abiertos $(p_j p_{j+1})$ según su forma

Más aún $p_j \in U^{-1}(0) \cap S$ con índice j impar debe ser conexo por $U^{-1}(0)$ con un punto $p_{\hat{j}} \in U^{-1}(0) \cap S$ con índice \hat{j} par.

Puesto que el signo de T en un punto p_j con índice impar es diferente de el signo de T en un punto $p_{\hat{j}}$ con un índice par; existe entonces n ceros de P , donde no necesariamente todos son distintos. \square

Observemos que $|\sum_{j=1}^{2n} l(p_j)| = 2n$ describe el hecho que el polinomio $P|_S$

se enrolla n veces alrededor del origen. $(\sum_{j=1}^{2n} l(p_j))$ puede ser interpretado como el número de intersección de $P(S)$ con $0 \times \mathbb{R}$

Desde el punto de vista de la *integral de Kronecker*, en el caso 1-dimensional, esto es exactamente la representación del número de arrollamiento para la teoría de funciones complejas.

5.5. El número de Gauss y la integral de Kronecker

Entre las diversas relaciones que existen de la integral de Kronecker con la teoría de grado; encontramos un caso especial de aplicación al teorema de Gauss acerca del flujo a través de una superficie.

5.5.1 Definición. Sea $v(x) = (x - x_0)/\|x - x_0\|^3 \in \mathbb{R}^3$ el campo eléctrico con un punto cargado 1 en x_0 . Entonces el *flujo de v a través de $S \subseteq \mathbb{R}^3$* una superficie cerrada se define como:

$$\text{flujo de } S = \int_S \langle v, N \rangle ds = \int_S (r \circ (i - x_0))^* \sigma$$

Donde N es la normal exterior y ds es el área de la superficie.

Ahora considerando el Teorema de Gauss acerca del flujo que dice; que el flujo de v a través de S es igual a 4π o desaparece conforme el punto x_0 se encuentre en S . A la luz de nuestro trabajo, podemos observar que la integral describe el flujo que corresponde exactamente a la integral de Kronecker de la inclusión $\iota : S \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ 4π veces:

$$\int_s \langle v, N \rangle ds = \int_S (r \circ (i - x_0))^* \sigma$$

5.5.2 Definición. Sea $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos mapeos continuos tal que $f(s) \neq g(t)$ para toda $s, t \in [0, 1]$. Entonces el *número de Gauss de f y g* se define como:

$$\text{enlace}(f, g) = -(4\pi)^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \|f(s) - g(t)\|^{-3} \det(f(s) - g(t), \dot{f}(s), \dot{g}(t)) ds dt$$

Dicho número corresponde exactamente con el número de arrollamiento del mapeo $F : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $F(x, y) = \tilde{f}(x) - \tilde{g}(y)$ donde \tilde{f} y \tilde{g} corresponden a los mapeos f y g via $\exp(2\pi i\lambda)$, y la integral describe el número *enlace* de Gauss corresponde exactamente a la integral de Kronecker $K(F)$.

Este número tiene una interpretación electrodinámica donde: Si f y g son curvas parametrizadas en M y N , respectivamente, entonces el campo magnético de $x \in M$ es estable debido a la corriente eléctrica por unidad que fluye alrededor de N y se describe por:

$$G(x) = -(4\pi)^{-1} \int_N \frac{(y-x) \times dy}{\|x-y\|^3}$$

De aquí se sigue que $\text{enlace}(f, g) = \int_M G(x) dx$ corresponde al *trabajo* realizado por el campo magnético en una unidad del polo magnético el cual realiza un circuito de M .

5.6. La cadena de Sturm y la integral de Kronecker

La integral de Kronecker esta inspirada en el intento por generalizar el teorema de Sturm:

5.6.1 Teorema. Sean p_1 y p_2 dos polinomios reales distintos de cero, tal que $\deg(p_1) > \deg(p_2)$. Sean $a < b$ números reales tal que $p_1(a)p_1(b) \neq 0$ y las raíces de p_1 en (a, b) son simples. Además sean p_3, \dots, p_n polinomios tal que

$$p_1 = q_2 p_2 - p_3, p_2 = q_3 p_3 - p_4, \dots, p_{n-1} = q_n p_n$$

Usando el algoritmo de Euclides para algunos polinomios q_2, \dots, q_n tenemos que; si $p_n(x) \neq 0$ para $x \in [a, b]$ entonces

$$\begin{aligned} & \#\{x \in (a, b) : p_1(x) = 0 \text{ y } p_1'(x)p_2(x) > 0\} \\ - & \#\{x \in (a, b) : p_1(x) = 0 \text{ y } p_1'(x)p_2(x) < 0\} \\ & = V(p_1(a), \dots, p_n(a)) - V(p_1(b), \dots, p_n(b)) \end{aligned}$$

Donde V indica el número de variaciones del signo en la cadena p_1, \dots, p_n .

El teorema anterior se relaciona con la característica de Kronecker de la siguiente manera:

Sean $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (i = 0, 1, 2)$ los mapeos tal que

$$F_1(x, y) = p_1(x) - y, \quad F_2(x, y) = p_2(x) - y \quad \text{y} \quad F_0(x, y) = y$$

Pensemos en $F = (F_0, F_1, F_2)$ como un sistema de funciones regulares \tilde{F} ; es decir encontremos un cubo $K \subseteq \mathbb{R}^2$ el cual contiene todas las intersecciones de los puntos $F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0)$, $F_0^{-1} \cap F_2^{-1}(0)$ y $F_0^{-1}(0) \cap F_1^{-1}(0)$, si ahora reemplazamos $F_i^{-1}(0) \cap K (i = 0, 1, 2)$ por curvas tal que $\tilde{F}_i^{-1}(0)$ son curvas que se enrollan con $i = 0, 1, 2, \dots$ y tal que $F|_K = \tilde{F}|_K$.

Esto se puede hacer de tal manera que cuando por una parte $deg p_1$ o $deg p_2$ es par, no se encuentra en la intersección de la nueva curva $\tilde{F}_1^{-1}(0)$ o $\tilde{F}_2^{-1}(0)$ con el eje x . Por otra parte en el caso en el que $deg p_1$ o $deg p_2$ es impar, entonces se considera sólo un punto adicional de intersección con el eje x . Entonces

$$V(p_1(-\infty), \dots, p_n(-\infty)) - V(p_1(\infty), \dots, p_n(\infty)) = \begin{cases} E(1, 2) - A(1, 2) = 2\chi(F_0, F_1, F_2) & deg p_1 \text{ es par} \\ E(1, 2) - A(1, 2) = 2\chi(F_0, F_1, F_2) \pm 1 & deg p_1 \text{ es impar} \end{cases}$$

5.7. Gauss-Bonnet

El teorema *Gauss-Bonnet* para una variedad M compacta riemanniana de dimensión 2 nos dice que:

$$\int_M K dv = 2\pi\chi(M)$$

donde K es la curva Gaussiana de una superficie M , dv es el área de M , y $\chi(M)$ es el número de *Euler* de M . De la definición de curvatura Gaussiana

se sigue que en el caso donde M es una hipersuperficie en \mathbb{R}^3 la forma diferencial de Kdv se iguala a $g^*\sigma$, donde $g : M \rightarrow S^2$ es el mapeo Gaussiano y σ es la forma de volumen en S^2 .

Más aún, en el caso del teorema de Gauss-Bonnet puede ser formulado como el número de arrollamiento que en el caso del mapeo de Gauss se llamará *curvatura integra*.

La generalización de este teorema es otra forma de ejemplificar la aplicación de la característica de Kronecker. En este caso el estudio se basa en un sistema de funciones $(F_0, F_{01}, \dots, F_{0n})$, donde $F_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo continuo tal que $F_0^{-1}((-\infty, 0])$ es compacto, $0 \in \mathbb{R}$ es un valor regular para F_0 y $F_{0i} = \delta F_0 / \delta x_i$. Aquí la característica de Kronecker de $(F_0, F_{01}, \dots, F_{0n})$ nos da la siguiente integral de Kronecker:

$$\chi(F_0, F_{01}, \dots, F_{0n}) = (\text{vol } S^{n-1})^{-1} \int_M r \circ (F_{01}, \dots, F_{0n})^* \sigma$$

con $M = \delta F_0^{-1}((-\infty, 0])$.

El mapeo $r \circ (F_{01}, \dots, F_{0n})$ puede ser interpretado como el $(n-1)$ -dimensional mapeo de Gauss $g : M \rightarrow S^{n-1}$, y otra vez hay un mapeo $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Kdv = (r \circ (F_{01}, \dots, F_{0n}))^* \sigma$.

La curvatura 2-dimensional del teorema de Gauss, tiene una generalización natural para dimensiones mayores (para hipersuperficies); la función K tiene una representación $K = k_1, \dots, k_{n-1}$, donde la k_i es la curvatura principal. Para el caso donde $0 \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular para (F_{01}, \dots, F_{0n}) entonces la curvatura integra de $M = \delta F_0^{-1}((-\infty, 0])$ se sigue de:

$$\begin{aligned} (\text{vol } S^{n-1})^{-1} \int_M Kdv &= (\text{vol } S^{n-1})^{-1} \int_M r \circ (F_{01}, \dots, F_{0n})^* \sigma \\ &= \sum_{(F_{01}, \dots, F_{0n})(x)=0} \text{sign}d(F_{01}, \dots, F_{0n})(x) \\ &F_0(x) < 0. \end{aligned}$$

El concepto anterior está de igual forma relacionado con el trabajo de Poincaré acerca de los puntos de equilibrio para una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z, \quad \text{donde } X, Y, Z \text{ son polinomios de } x, y, z.$$

La superficie $F_0^{-1}(0)$ donde $(F_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, 0 \in \mathbb{R})$ es un valor regular para F_0 y que no toca a el campo vectorial, induce:

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} \cdot X + \frac{\partial F_0}{\partial t} Y + \frac{\partial F_0}{\partial z} \cdot Z \neq 0 \in F_0^{-1}(0)$$

Entonces la característica $\chi(F_0, X, Y, Z)$ estrictamente hablando:

$$(\text{vol } S^2)^{-1} \int_{F_0^{-1}(0)} (r \circ (X, Y, Z))^* \sigma$$

es igual a la característica $\chi(F_0, F_{01}, F_{02}, F_{03})$ en el caso < 0 , y para el caso > 0 es igual a la característica $\chi(F_0, -F_{01}, -F_{02}, -F_{03})$.

La prueba de Poincaré se refiere a la invarianza homotópica del número de arrollamiento, que prueba la invarianza homotópica de la característica de Kronecker. Consecuentemente, si $F_0^{-1}(0)$ es una superficie que no toca al campo vectorial, entonces $\chi(F_0, F_{01}, F_{02}, F_{03}) \neq 0$ implica la existencia de un punto de equilibrio.

Los cálculos de Poincaré para $\chi(F_0, F_{01}, F_{02}, F_{03})$ en el caso que $F_0^{-1}(0)$ es una superficie 0 o 1; entonces podemos dar la fórmula general de *Gauss-Bonnet*:

Si $F_0^{-1}(0)$ es una superficie p

$$\begin{aligned} \chi(F_0, F_{01}, F_{02}, F_{03}) &= 1 - p \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \chi(F_0^{-1}(0)). \end{aligned}$$

Apéndice

- Espacio Métrico

5.7.1 Definición. Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *métrica* si d satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.
2. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
4. Para todo $x, y, z \in X$,

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

El conjunto X con una métrica fija d se llama *espacio métrico*. Formalmente, un espacio métrico es una pareja ordenada (X, d) , donde X es un conjunto y d es una métrica en X . Para cualesquiera dos puntos x y y de X , el número real $d(x, y)$ se llama *distancia* entre x y y .

- Espacio Topológico Sea (E, T) E un conjunto de puntos provisto de una topología T , i.e, una colección de subconjuntos de E que satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in T$, $E \in T$.
2. Si $(O_1 \in T, O_2 \in T)$ entonces $(O_1 \cap O_2) \in T$ Es cerrado bajo intersecciones finitas.
3. Para toda $i \in I$ y $O_i \in T$ entonces $\bigcup_{i \in I} O_i \in T$ Es cerrado bajo uniones arbitrarias o bien para toda $S \subseteq T$, $\bigcup_{O \in S} O \in T$.

5.7.2 Definición. Sean X, Y dos espacios topológicos, $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \rightarrow Y$ continua. Entonces $F : X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$ es una *extensión* de f sobre X relativa a Y .

5.7.3 Definición. Sean $x \in X$ y U un conjunto abierto. Llamamos a V *vecindad* de x tal que $x \in U$ y $U \subseteq V$.

Observemos que si U es abierto, U es vecindad de cualquier punto en U .

5.7.4 Definición. Un espacio Y es *Hausdorff* si dados cualesquiera $p \neq q$ en Y sus vecindades $U(p), V(q)$ son tal que $U \cap V = \emptyset$.

5.7.5 Definición. Sea Y un espacio de Hausdorff. Entonces Y es *normal* si para cada par de conjuntos cerrados disjuntos tienen vecindades disjuntas.

5.7.6 Definición. Un espacio topológico T se llama *compacto*, cuando cualquier cubrimiento abierto suyo contiene un subcubrimiento finito.

5.7.7 Observación. La propiedad de compacidad la tienen todos los subconjuntos cerrados acotados de un espacio euclídeo de cualquier dimensión finita.

Véase [5, p.104]

5.7.8 Teorema. Sea $\{V_1, \dots, V_n\}$ una cubierta abierta de M y sean $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables tal que:

- $0 \leq f_i(x) \leq 1, \forall x \in M$ y $\forall_i = 1, \dots, n$.
- $\text{sop } f_i \subseteq V_i, \forall_i = 1, \dots, n$.
- $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1, \forall x \in M$

Entonces f_1, \dots, f_n son una partición de la Unidad.

Véase [4, p.52]

■ Propiedades de la función Exponencial.

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ existe y es analítica en \mathbb{C} .
2. $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.
3. $e^{z+w} = e^z e^w$ para toda $z, w \in \mathbb{C}$.

4. e^z es periódica, cualquier periodo de e^z tiene la forma $2\pi ni$, n entero.
5. Si x es real, entonces $e^x > 1$ cuando $x > 0$, y $e^x < 1$ cuando $x < 0$. Toda franja horizontal de ancho 2π se mapea biyectivamente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
6. e^z nunca es 0. Su imagen es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
7. $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tal que $E(\theta) = e^{i\theta}$ es el cubriente universal.
8. $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.
9. $\log e^z = \log |e^z| + i \arg e^z$, donde $\log z$ es la inversa de e^z tal que para cualquier rama de $\log z$ tenemos que $e^{\log z} = z$.
10. $e^{2\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.
11. $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2n\pi i$ para algún entero n (positivo, negativo o 0).

Glosario

S^1	circunferencia.
S^n	esfera de grado n.
\mathbb{C}	complejos.
\mathbb{Z}	enteros.
\mathbb{R}	reales.
$H(A)$	envolvente convexo.
σ^n	n-simplejo.
$[\sigma^n]$	simplejo orientado.
$H : X \times I \rightarrow Y$	homotopía.
γ	curva.
$I(\gamma, z_0)$	índice de γ .
\tilde{f}	levantamiento.
p	mapeo cubriente.
X/\sim	conjunto de clases de equivalencia.
$[\gamma]$	clase de equivalencia.
α_i	arco en S^1 .
$p(\zeta)$	número en sentido <i>positivo</i> , de α_i .
$n(\zeta)$	número en sentido <i>negativo</i> de α_i .
deg	grado.
T	triangulación.
$p(\xi, T, \varphi)$	número positivo de φ .
$n(\xi, T, \varphi)$	número negativo de φ .
$D(\xi, T, \varphi)$	suma aritmética de p y n.
Id	mapero identidad.
$r : X \rightarrow A$	retracto.
B	bola.
p_+	polo norte.
p_-	polo sur.

SX	suspensión de X .
M, N	variedades.
∂M	frontera de M .
$Int(M)$	interior de M .
T_x	espacio tangente.
H^n	semiespacio superior de \mathbb{R}^n .
V, W	espacio vectorial.
$W(f, x)$	número de arrollamiento.
V^*	dual de V .
Λ^p	p -tensor alternante.
Alt	alternante.
$\omega(x)$	p -forma.
$\Lambda^p(M)$	espacio de p -formas en M .
$\text{sop } \omega$	soporte.
$K(F)$	integral de Kronecker.

Bibliografía

- [1] Birkhoff Garrett, Saunders MacLane, Algebra. U.S.A, The MacMillan Company. 1967.
- [2] Dugundji, James, Topology. Los Angeles U.S.A, Allyn and Bacon. 1974.
- [3] Flanders, Mathematics in Science and Engineering, Volume 11. U.S.A, Academic Press, University of Southern California. 1963.
- [4] Guillemin Victor, Pollack Alan, Differential Topology. New Jersey, U.S.A, Prentice-Hall, Massachusetts Institute of Technology, 1974.
- [5] Kolmogorov, Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Editorial Mir, Moscú, 1975.
- [6] Marsden Jerrold E. Hoffman Michael J. Análisis Básico de Variable Compleja, México. Trillas. 2003.
- [7] Rincón Mejía, Hugo, Algebra lineal. México, Prensa de Ciencias, UNAM. 2006
- [8] Sieberg Willi, "Some Historical Remarks Concerning Degree Theory", The American Mathematical Monthly. Vol.88, No.2. February 1981, pp.125-139, Mathematical Association of America.
- [9] , I. M. (Ioan Mackenzie), James, History of Topology. Oxford University, UK .1999
- [10] <http://www.matcuer.unam.mx/~jlcm/toroyesfera.pdf>