UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE ONDAS DE AGUA EN PROFUNDIDAD VARIABLE BAJO EL RÉGIMEN DE BOUSSINESQ

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

PEDRO ACEVES SÁNCHEZ

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. PANAYIOTIS PANAYOTAROS

MÉXICO, D.F. ABRIL, 2010

EL PROBLEMA DE ONDAS DE AGUA EN PROFUNDIDAD VARIABLE BAJO EL RÉGIMEN DE BOUSSINESQ.

PEDRO ACEVES SÁNCHEZ.

Resumen

En este trabajo se describirá la deducción de dos tipos de sistemas de ecuaciones aproximadas para el problema de ondas de agua en profundidad variable bajo el régimen de escala de ondas largas. Para ello comenzaremos planteando el problema de ondas de agua en su formulación Hamiltoniana usando el operador de Dirichlet-Neumann. La deducción de estas aproximaciones se basa en el trabajo de W. Craig *et al.* [6] sobre la aproximación del operador de Dirichlet-Neumann para el Laplaciano en el dominio ocupado por el fluido. En la deducción del primer sistema de ecuacines usamos el desarrollo del operador de Dirichlet-Neumann en potencias de la topografía y posteriormente usamos un análisis dimensional. Cabe mencionar que éste es un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq, el cual no había sido dado antes. Para la segunda aproximación suponemos que el fondo depende tanto de una variable larga como de una variable lenta. Luego hacemos una expansión del operador de Dirichlet-Neumann en potencias del parámetro pequeño que resulta de las suposiciones de escalamiento del problema y aplicamos la teoría de operadores Pseudo-Diferenciales. Por último, usamos la estructura Hamiltoniana del sistema y aplicamos los lemas de separación de escala dados en W. Craig *et al.* [6].

1. Introducción.

El estudio de la propagación de ondas de agua a través de un fondo rugoso ha sido objeto de estudio por varios años, debido a su gran importancia en la ingeniería costera. Las ondas de agua en las costas tienen una gran complejidad debido a cambios en el fondo, los cuales producen cambios locales de la velocidad de la onda con los subsecuentes efectos de reflección, refracción y difracción. Aunado a esto, los efectos nolineales debido a la interacción onda-onda y onda-fondo, juegan un papel importante. En los últimos años, el problema de la propagación de ondas de agua recobró más importancia debido al desastre provocado por el tsunami de Sumatra en el 2004. Debido a este suceso se vió en la necesidad de tener mejores modelos para describir este tipo de fenómenos con el propósito de reducir la cantidad de daños provocados por estos.

Figura 1: *Interacción de ondas en la playa.*

En este trabajo analizaremos el problema de ondas de agua en un canal con profundidad variable. Para tal efecto, comenzamos planteando el problema de ondas de agua en la formulación Hamiltoniana dada por V. I. Zakharov [24] en 1968, desde el punto de vista introducido por W. Craig y C. Sulem [8] en

1993 usando el operador de Dirichlet-Neumann. Siguiendo el trabajo de W. Craig *et al.* [6], describimos la deducción de dos sistemas de ecuaciones bajo el régimen de Boussinesq, *i.e.* usando la suposición de que la longitud de onda es grande en comparación con otras escalas de longitud en el problema. El primer sistema lo obtenemos usando un desarrollo del operador de Dirichlet-Neumann en potencias de la profundidad variable y finalmente usamos argumentos dimensionales. Cabe mencionar que este sistema de ecuaciones no había sido dada antes. En el segundo método de aproximación suponemos que el fondo depende tanto de una escala lenta, $X = \varepsilon x$ para $\varepsilon \ll 1$, como de una escala larga, x. Éste sistema de ecuaciones es deducido de una forma sistemática usando la teoría de perturbación de Hamiltonianos tal como es presentada por W. Craig y M. Groves [5], la teoría de operadores Pseudo-Diferenciales aplicados a funciones multiescala y la estructura Hamiltoniana del sistema, en donde la escala rápida es promediada en el Hamiltoniano. En esta teoría se supone que la amplitud del fondo puede ser de orden $\mathcal{O}(1)$. Cabe mencionar que éste sistema de ecuaciones es una extensión de los resultados de R. Rosales y G. Papanicolaou [22].

También obtenemos la aproximación lineal, la cual nos da una corrección de la velocidad de propagación de ondas de agua cuando el medio es no rugoso y horizontal. Ésta predice que la velocidad de la onda será menor cuando el fondo es irregular, lo cual era de esperarse debido a la interacción de la onda con el fondo.

2. Planteamiento del Problema.

Consideremos un fluido incompresible, irrotacional e inviscido, *i.e.* ideal, con una frontera libre en una región del plano. Este estará acotado por debajo, por la gráfica de la función $-h + \beta(x)$, en donde $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ y $h \in \mathbb{R}^+$, y por arriba estará acotado, en el tiempo $t \geq 0$, por la gráfica de la función $\eta(x,t)$, en donde $\eta \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$, ver figura (2).

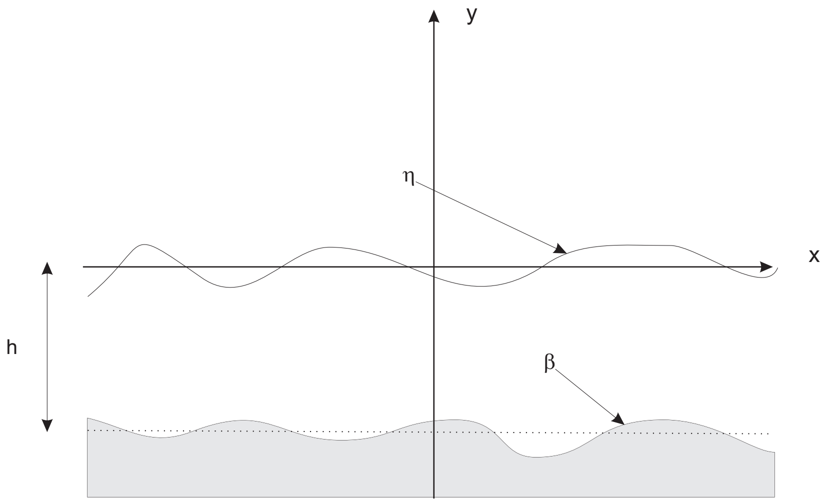

Figura 2

El dominio del fluido estará dado por

$$\mathfrak{D}_t(\beta, \eta) := \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, -h + \beta(x) < y < \eta(x,t)\},$$

en donde el fluido en reposo corresponderá a $\eta \equiv 0$.

Haremos un estudio de este fluido desde el punto de vista de la formulación Euleriana. En esta formulación se busca la velocidad u, la presión p y la densidad del fluido ρ, como funciones de $(x,y) \in \mathfrak{D}_t$, para $t \geq 0$, *i.e.* u, p y ρ dependen de un punto (x,y) en el espacio y de un tiempo t, sin hacer referencia a un punto específico en el fluido.

Además de las hipótesis que hemos impuesto sobre el fluido supondremos que la única fuerza externa que actúa sobre él es la fuerza de la gravedad, la presión en la superficie del fluido es constante y consideraremos que no existe tensión superficial.

Debido a que el fluido es incompresible y homogéneo tendremos que $\rho(x, y, t) \equiv$ constante para todo $(x, y) \in \mathfrak{D}_t$ y para todo $t \geq 0$, por lo tanto

$$\nabla \cdot u = 0. \tag{1}$$

Ahora, como el fluido es irrotacional, tendremos que

$$\nabla \wedge u = 0. \tag{2}$$

Debido a que el fluido es inviscido, que la fuerza externa que actúa sobre él es conservativa (la fuerza de la gravedad) y que la densidad es una función constante, podemos aplicar el Teorema de Kelvin (ver [2]), el cual nos dice que si comenzamos con un fluido irrotacional, entonces la evolución del fluido no generará vorticidad. Por lo tanto tendremos que

$$\nabla \wedge u = 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}_t, \text{ para todo } t \geq 0,$$

lo cual implica que para todo $t \geq 0$, suponiendo que $D_t(\beta, \eta)$ es simplemente conexo para $t \geq 0$, existe una función $\varphi : \mathfrak{D}_t \to \mathbb{R}$ (la cual es única salvo la suma de una constante), tal que

$$u = \nabla\varphi \quad \text{en } \mathfrak{D}_t. \tag{3}$$

Ahora, de (1) y (3), obtenemos la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{ en } \mathfrak{D}. \tag{4}$$

La frontera libre deberá satisfacer dos condiciones,

1. Como estamos condiserando un fluido gravitacional, esto implica que la fuerza sobre el fluido es $f = -g\hat{e}_z = -\nabla(gz)$. Además, como la presión sobre la superficie libre es constante, tenemos que la ecuación de Bernoulli, consultar [10], sobre la superficie libre toma la forma,

$$\partial_t\varphi + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + g\eta = 0, \tag{5}$$

la cual se conoce como *condición dinámica.*

2. Todo punto que se encuentre sobre la superficie libre deberá permanecer sobre ella para todo tiempo $t \geq 0$, *i.e.* todos los puntos en la superficie libre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cumplen que $y - \eta(x, t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(y - \eta(x, t)) \\ &= \dot{y} - (\partial_x\eta)\dot{x} - \partial_t\eta \\ &= \partial_y\varphi - (\partial_x\eta)(\partial_x\varphi) - \partial_t\eta \quad \text{en } y = \eta(x, t), \end{aligned} \tag{6}$$

a esta ecuación se le conoce como *condición cinemática.*

En la frontera del fondo del fluido $\{y = -h + \beta(x)\}$, la velocidad de éste satisface la condición de Neumann $u \cdot N(\beta) = 0$, la cual queda expresada en términos del potencial φ como

$$\nabla\varphi \cdot N(\beta) = 0,$$

en donde $N(\beta) = (1 + |\partial_x\beta|^2)(\partial_x\beta, -1))$ es la normal unitaria exterior.

Reuniendo lo anterior, llegamos a las *Ecuaciones de las Ondas* de un fluido ideal bajo la fuerza de la gravedad,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\varphi(x,y) &= 0 \qquad \text{para todo } (x,y)\in\mathfrak{D}_t(\beta,\eta) && (7)\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}} &= 0 \qquad \text{en } y=-h+\beta(x) && (8)\\
\partial_y\varphi-(\partial_x\eta)(\partial_x\varphi)-\partial_t\eta &= 0 \qquad \text{en } y=\eta(x,t) && (9)\\
\partial_t\varphi+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+g\eta &= 0 \qquad \text{en } y=\eta(x,t) && (10)
\end{aligned}
$$

a las ecuaciones (9) y (10) se les conoce como *Ecuaciones de Básicas de Ondas de Agua* para un fluido potencial. Ahora, solo hace falta dar condiciones iniciales para completar el problema, es decir, dada una perturbación inicial $\eta(\cdot,0)\in C^1(\mathbb{R})$, y $\varphi(\cdot,0)\in C^1(\mathfrak{D}_0)$, queremos encontrar para todo $t\geq 0$, $\eta(x,t)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, y $\varphi(x,y,t)$ para todo $(x,y)\in\mathfrak{D}_t$, que satisfagan (7)-(10). A éste problema se le conoce como *problema de Cauchy-Poisson*, consultar [17]. Cabe mencionar que éste problema es nolineal, lo cual se debe a las ecuaciones (9) y (10). Definamos la siguiente función $\xi(x,t)=\varphi(x,\eta(x,t),t)$, la cual es el valor del potencial en la frontera libre al tiempo t.

Es importante notar que si resolvemos las ecuaciones (9) y (10), bajo las condiciones iniciales $\eta(\cdot,0)\in C^1(\mathbb{R})$ y $\xi(\cdot,0)\in C^1(\mathbb{R})$, entonces el sistema de ecuaciones (7)-(10) queda resuelto debido a que para cada tiempo $t\geq 0$ obtendriamos un problema de Laplace con condición de Dirichlet, $\varphi(x,\eta(x,t),t)=\xi(x,t)$, en la frontera superior y con condición de Neumann, $\partial\varphi/\partial\hat{n}=0$, en la frontera rígida (consultar [3]), *i.e.*, φ queda determinado de forma única en $\mathfrak{D}_t$.

3. Ecuaciones Canónicas de Hamilton para el problema de ondas de agua.

En el año de 1968, V. E. Zakharov [24] planteó el sistema de las Ecuaciones de Ondas de Agua, (9) y (10), en una formulación Hamiltoniana, en donde las variables canónicas son $\eta(x)$ y $\xi(x)$). Haremos uso de esta formulación desde el punto de vista del trabajo realizado por W. Craig y C. Sulem [8]. Con tal motivo introduciremos el operador de Dirichlet-Neumann.

Definición 3.1. *Operador de Dirichlet-Neumann. Consideremos el dominio $\mathfrak{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -h+\beta(x)\leq y\leq\eta(x)\}$, en donde $\beta,\eta\in C^1(\mathbb{R})$, y denotemos por $\hat{n}$ a la normal exterior en $\partial\mathfrak{D}$. Consideremos la función $\varphi:\mathfrak{D}\to\mathbb{R}$ que es solución del problema*

$$
\left.\begin{array}{ll}
\nabla^2\varphi(x,y)=0 & \textit{para } (x,y)\in\mathfrak{D},\\
\varphi(x,\eta(x))=\xi(x) & \textit{para } x\in\mathbb{R},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}}(x,-h+\beta(x))=0 & \textit{para } x\in\mathbb{R}.
\end{array}\right\} \qquad (11)
$$

Entonces, el operador de Dirichlet-Neumann se define como

$$(G(\beta,\eta)\xi)(x)=(1+(\partial_x\eta(x))^2)^{1/2}\nabla\varphi(x,\eta(x))\cdot N(\eta(x)),$$

en donde $N(\eta(x))=(1+(\partial_x\eta(x))^2)^{-1/2}(-\partial_x\eta,1)$, con $x\in\mathbb{R}$.

La expresión $(1+(\partial_x\eta)^{1/2})$ es un factor para que $G(\beta,\eta)$ sea autoadjunto en cierto dominio, consultar [4]. A continuación enunciaremos algunas propiedades del operador de Dirichlet-Neumann,

Proposición 3.2. *El operador $G(\beta,\eta)$ satisface lo siguiente:*

1. *$G(\beta,\eta)$ es positivo semidefinido.*
2. *$G(\beta,\eta)$ es autoadjunto en cierto dominio S.*
3. *$G(\beta,\eta)$ es un operador continuo de $H^1(S)$ a $L^2(S)$.*
4. *El operador $G(\beta,\eta):H^1(S)\to L^2(S)$ es analítico en una bola $B_r(0)\subseteq C^1(S)$, para $r>0$.*

Demostración. Consultar [4]. □

3.1. Ecuaciones Básicas de Ondas de Agua en términos de η y ξ.

A continuación demostraremos la siguiente,

Proposición 3.3. *Las Ecuaciones Básicas de Ondas de Agua (9) y (10), se pueden expresar como la siguiente ecuación de evolución,*

$$\begin{aligned} \eta_t &= G(\beta,\eta)\xi, && (12)\\ \xi_t &= -\frac{1}{2(1+\eta_x^2)}\left(\xi_x^2-(G(\beta,\eta)\xi)^2+2\eta_x\xi_x G(\beta,\eta)\xi\right)-g\eta && (13)\end{aligned}$$

Demostración. Despejando η_t de (9), obtenemos

$$\begin{aligned} \eta_t &= \partial_y\varphi-(\partial_x\eta)(\partial_x\varphi)\\ &= \nabla\varphi\cdot(-\partial_x\eta,1)\\ &= \nabla\varphi\cdot\frac{(-\partial_x\eta,1)}{(1+(\partial_x\eta)^2)^{1/2}}\left(1+(\partial_x\eta)^2\right)^{1/2}\\ &= (1+(\partial_x\eta)^2)^{1/2}\nabla\varphi\cdot N(\eta)\\ &= G(\beta,\eta)\xi, && (14)\end{aligned}$$

con lo cual hemos probado la igualdad (12).

Ahora procederemos a demostrar la igualdad (13), para ello tomemos la derivada parcial de ξ con respecto a x y despejemos $\partial_x\varphi$,

$$\partial_x\varphi=\xi_x-(\partial_y\varphi)(\partial_x\eta). \tag{15}$$

Usando la definición de $G(\beta,\eta)$ y la relación (15), obtenemos

$$\begin{aligned} G(\beta,\eta)\xi &= \partial_y\varphi-\partial_x\varphi\partial_x\eta\\ &= \partial_y\varphi-(\xi_x-\partial_y\varphi\partial_x\eta)\partial_x\eta\end{aligned} \tag{16}$$

de lo cual obtenemos que

$$\partial_y\varphi=\frac{G(\beta,\eta)\xi+(\partial_x\xi)(\partial_x\eta)}{1+(\partial_x\eta)^2} \tag{17}$$

y

$$\partial_x\varphi=\xi_x-\frac{G(\beta,\eta)\xi+(\partial_x\xi)(\partial_x\eta)}{1+(\partial_x\eta)^2}\eta_x. \tag{18}$$

Ahora diferenciando a ξ con respecto a t y utilizando la ecuación de Bernoulli

$$\begin{aligned} \xi_t &= \varphi_y\eta_t+\varphi_t\\ &= \varphi_y\eta_t-\frac{1}{2}\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2\right)-g\eta. && (19)\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (14), (17) y (18), en (19), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\xi_t &= N^{-1}(G\xi+\xi_x\eta_x)G\xi-\frac{1}{2}\Big\{\xi_x^2-2N^{-1}(G\xi+\xi_x\eta_x)\xi_x\eta_x \\
&\quad +N^{-2}(G\xi+\xi_x\eta_x)^2\eta_x^2+N^{-2}(G\xi+\xi_x\eta_x)^2\Big\}-g\eta \\
&= \frac{1}{2}N^{-1}\Big\{(G\xi+\xi_x\eta_x)^2-(1+\eta_x^2)\xi^2\Big\}-g\eta \\
&= \frac{1}{2}N^{-1}\Big\{(G\xi)^2+2\xi_x\eta_xG\xi-\xi_x^2\Big\}-g\eta, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

en donde $N=1+\eta_x^2$ y $G\xi=G(\beta,\eta)\xi$.

□

Ahora calculemos la energía total del fluido en el tiempo t y la denotaremos por E_t, suponiendo que $\rho=1$. La cual estará dada por la suma de la energía potencial U mas la energía cinética K,

$$
\begin{aligned}
E &= K+U \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)}\frac{1}{2}|u|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)}gy\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)}\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x+g\int_{\mathbb{R}}\left\{\frac{(\eta(x))^2}{2}-\frac{(-h+\beta(x))^2}{2}\right\}\mathrm{d}x \qquad (21) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)}\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x+g\int_{\mathbb{R}}\frac{(\eta(x))^2}{2}\mathrm{d}x-C_\beta. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Definamos las siguiente curvas en $\mathbb{R}^2$, $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=\eta(x,t)\}$ y $\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=-h+\beta(x)\}$. Aplicando el Teorema de la Divergencia, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
K &= \int_{\mathbb{R}}\int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)}\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{-h+\beta(x)}^{\eta(x)}\varphi\nabla^2\varphi\mathrm{d}V}_{=0,\text{ ya que }\varphi\text{ es armónica.}}+\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\mathrm{d}S+\underbrace{\int_{\Gamma_2}\frac{1}{2}\varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\mathrm{d}S}_{=0,\text{ por la condición de Neumann.}} \\
&= \int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\mathrm{d}S \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\Big(\varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\Big)\Big|_{(x,y)=(x,\eta(x))}\sqrt{1+\eta_x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\xi G(\beta,\eta)\xi\mathrm{d}x, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Siguiendo al trabajo de V. E. Zakharov, propondremos como Hamiltoniano del problema de ondas de agua a

$$
H=\frac{1}{2}\int\Big(\xi G(\beta,\eta)\xi+g\eta^2\Big)\mathrm{d}x. \qquad (24)
$$

En 1968 V. E. Zakharov demostró el siguiente,

Teorema 3.4. *Las ecuaciones (9) y (10) son equivalentes al siguiente sistema Hamiltoniano*

$$
\partial_t\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mathbb{I}\\ -\mathbb{I} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_\eta H\\ \delta_\xi H\end{pmatrix}.
$$

en donde H está dado por (24).

Demostración. Consultar [24]. □

4. Expansión del Operador $G(\beta, \eta)$ en Potencias de η.

Nuestro principal objetivo es encontrar expresiones para la solución del problema (11). Para ello nos enfocaremos en hacer un desarrollo asintótico del operador $G(\beta, \eta)$ cuando la forma del fondo β no es constante. Supondremos que $\beta(x)$ es de orden $\mathcal{O}(1)$ mientras que el perfil de la superficie $\eta(x)$ será pequeño, esto con el motivo de poder aplicar el resultado de [3] para expandir $G(\beta, \eta)$ en potencias de η. Con tal motivo comenzaremos con el caso $\eta(x) = 0$. Posteriormente, cuando tengamos un perfil no constante usaremos un método perturbativo.

Comenzaremos encontrando una solución del problema (11), expresado por medio del dato de frontera $\varphi(x, 0) = \xi(x)$ en la superficie libre $\{y = 0\}$. Primero, en el caso en el que el fondo es plano $\{y = -h, x \in \mathbb{R}\}$ obtenemos, gracias al lema (A.1) del apéndice, que la solución está dada formalmente por el siguiente multiplicador de Fourier

$$\varphi(x, y) = \int\int \mathrm{e}^{ik\cdot(x-x')} \frac{\cosh((y+h)k)}{\cosh(hk)} \xi(x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}k = \frac{\cosh((y+h))D}{\cosh(hD)} \xi(x). \tag{25}$$

Ahora, cuando la topografía del fondo es no trivial, propondremos como ansatz a la expresión (25) más un término correctivo dado por la siguiente fórmula,

$$\varphi(x, y) = \frac{\cosh((y+h)D)}{\cosh(hD)} \xi(x) + \operatorname{senh}(yD)(L(\beta)\xi)(x). \tag{26}$$

Es importante notar que el primer término de (26) satisface la condición de frontera homogénea de Neumann en $\{y = -h\}$, mientras que el segundo término satisface la condición homogénea de Dirichlet en $y = 0$. El operador $L(\beta)$, el cual actúa sobre los datos en la frontera libre $\xi(x)$, se escoge de tal forma que la expresión (26) es una solución del problema (11) tomando $\eta(x) = 0$.

Ahora desarrollaremos al operador $G(\beta, \eta)$ en potencias de η, uniformemente en β. Consideremos la familia de funciones harmónicas elementales en el dominio del fluido $D_t(\beta, \eta)$,

$$\varphi_k(x, y) = \frac{\cosh(k(y+h))}{\cosh(kh)} \mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx} \operatorname{senh}(py) \widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp \tag{27}$$

Debido a la definición del operador de Dirichlet-Neumann tenemos que

$$G(\beta, \eta)\varphi_k(x, \eta(x)) = (\partial_y \varphi_k - (\partial_x \eta)\partial_x \varphi_k)\big|_{y=\eta} \tag{28}$$

Ahora, como

$$G(\beta, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} G^l(\beta, \eta), \tag{29}$$

en donde G^l es homogéneo de orden l en η, consultar [18], y notando que

$$\partial_y \varphi_k = k \frac{\sinh(k(h+y))}{\cosh(hk)} \ \mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} p \ \mathrm{e}^{ipx} \cosh(py) \widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp \tag{30}$$

y

$$\partial_x \varphi_k = ik \frac{\cosh(k(h+y))}{\cosh(hk)} \ \mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} ip \ \mathrm{e}^{ipx} \operatorname{senh}(py) \widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp, \tag{31}$$

obtenemos, sustituyendo (27), (29), (30) y (31) en (28), lo siguiente

$$\left\{ \sum_{l=0}^{\infty} G^l(\beta, \eta) \right\} \left\{ \frac{\cosh(k(h+\eta))}{\cosh(kh)} \mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx} \operatorname{senh}(p\eta) \widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp \right\}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & k\frac{\sinh(k(h+\eta))}{\cosh(hk)}\ \mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} p\ \mathrm{e}^{ipx}\cosh(p\eta)\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp \\
& + (\partial_x\eta)\Bigg(ik\frac{\cosh(k(h+\eta))}{\cosh(hk)}\ \mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} ip\ \mathrm{e}^{ipx}\mathrm{senh}(p\eta)\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp\Bigg).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Expandiendo $\mathrm{senh}(k(h+\eta))$ y $\cosh(k(h+\eta))$ alrededor de $\eta = 0$, el lado derecho de (32) toma la forma

$$
\begin{aligned}
& k\Bigg(\tanh(kh)\sum_{\nu\geq 0\ \mathrm{par}}\frac{1}{\nu!}(k\,\eta)^{\nu} + \sum_{\nu\geq 1\ \mathrm{impar}}\frac{1}{\nu!}(k\,\eta)^{\nu}\Bigg)\mathrm{e}^{ikx} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} p\ \mathrm{e}^{ipx}\Bigg(\sum_{\nu\geq 0\ \mathrm{par}}\frac{1}{\nu!}(p\eta)^{\nu}\Bigg)\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp \\
& -(\partial_x\eta)\Bigg\{ik\cosh(hy)\mathrm{e}^{ikx} + ik\tanh(hk)\Bigg(\sum_{\nu\geq 1\ \mathrm{impar}}\frac{1}{\nu!}(p\eta)^{\nu}\Bigg)\mathrm{e}^{ikx} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ipx}ip\Bigg(\sum_{\nu\geq 1\ \mathrm{impar}}\frac{(p\eta)^{\nu}}{\nu!}\Bigg)\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp\Bigg\}
\end{aligned} \tag{33}
$$

Ahora expandiendo $\mathrm{senh}(k(h+\eta))$ y $\cosh(k(h+\eta))$ alrededor de $\eta = 0$, el lado izquierdo de (32) es igual a

$$
\begin{aligned}
& \Bigg\{\sum_{l=0}^{\infty}G^{l}(\beta,\eta)\Bigg\}\Bigg\{\Bigg(\sum_{\nu\geq 0\ \mathrm{par}}\frac{(k\eta)^{\nu}}{\nu!} + \tanh(kh)\sum_{\nu\geq 1\ \mathrm{impar}}\frac{(k\eta)^{\nu}}{\nu!}\Bigg)\mathrm{e}^{ikx} \\
& \qquad + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ipx}\Bigg(\sum_{\nu\geq 1\ \mathrm{impar}}\frac{(p\eta)^{\nu}}{\nu!}\Bigg)\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)dp\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Reuniendo todos lo términos de órden $\mathcal{O}(\eta^0)$ de (32) y usando (33) y (34),

$$
G^0(\beta,\eta)\ \mathrm{e}^{ikx} = k\tanh(kh)\mathrm{e}^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} p\ \mathrm{e}^{ipx}\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)\mathrm{d}p, \tag{35}
$$

lo cual implica que

$$
G^0(\beta,\eta)\ \mathrm{e}^{ikx} = D\tanh(kD)\mathrm{e}^{ikx} + D(L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}). \tag{36}
$$

Reuniendo todos lo términos de órden $\mathcal{O}(\eta^1)$ de (32) y usando (33) y (34),

$$
\begin{aligned}
k(\eta k)\ \mathrm{e}^{ikx} - (\partial_x\eta)ik\ \mathrm{e}^{ikx} \quad = \quad & \\
& G^0(\beta,\eta)k\tanh(kh)\eta\ \mathrm{e}^{ikx} \\
& + G^0(\beta,\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ipx}(p\eta)\ \widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ikx}}(p)\mathrm{d}p \\
& + G^1(\beta,\eta)\mathrm{e}^{ikx},
\end{aligned}
$$

despejando $G^1(\beta,\eta)$ y reordenando,

$$
G^1(\beta,\eta)\mathrm{e}^{ikx} = \eta k^2\mathrm{e}^{ikx} + (D\eta)k\mathrm{e}^{ikx} - G^0(\beta,\eta)(\eta G^0(\beta,\eta)\mathrm{e}^{ikx}), \tag{37}
$$

por lo que

$$
G^1(\beta,\eta)\mathrm{e}^{ikx} = D(\eta D\mathrm{e}^{ikx}) - G^0(\beta,\eta)(\eta G^0(\beta,\eta)\mathrm{e}^{ikx}). \tag{38}
$$

Consideremos una función f "bien portada" [1], entonces

$$
\begin{aligned}
&(G^0(\beta,\eta)f)(x)\\
&\quad= G^0(\beta,\eta)\Big(\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \mathrm{e}^{ipx}\hat{f}(p)\mathrm{d}p\Big)\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \hat{f}(p)G^0(\beta,\eta)\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{d}p\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \hat{f}(p)\Big(p\tanh(hp)\mathrm{e}^{ipx}+\int w\mathrm{e}^{iwx}\widehat{L(\beta)\mathrm{e}^{ipx}}(w)\mathrm{d}w\Big)\mathrm{d}p\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \mathrm{e}^{ipx}p\tanh(hp)\hat{f}(p)\mathrm{d}p+\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \hat{f}(p)\Big(D(L(\beta)\mathrm{e}^{ipx})\Big)\mathrm{d}p\\
&\quad= (D\tanh(hD))(f(x))+\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \hat{f}(p)\Big(D(L(\beta)\mathrm{e}^{ipx})\Big)\mathrm{d}p\\
&\quad= (D\tanh(hD))(f(x))+D\Big(L(\beta)\Big(\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \mathrm{e}^{ipx}\hat{f}(p)\mathrm{d}p\Big)\Big)\\
&\quad= (D\tanh(hD))(f(x))+D(L(\beta)f(x))\\
&\quad= (D\tanh(hD)+D(L(\beta)))(f(x)).
\end{aligned}\tag{39}
$$

De igual forma, usando (37) podemos demostrar que

$$
(G^1(\beta,\eta)f)(x) = (D(\eta D)-G^0(\eta G^0))(f(x)). \tag{40}
$$

Es importante mencionar que debido a la forma de las expresiones (39) y (40), podemos obtener una fórmula de recurrencia para $G^l(\beta,\eta)$. Cambiando $G_0(\eta)$ por $G^0(\beta,\eta)$ en la fórmula de recurrencia para $G_l(\eta)$ en [8], obtenemos que $G^l(\beta,\eta)$ satisface la misma fórmula de recurrencia que $G_l(\eta)$.

Debido a que $\beta(x)$ es de orden $\mathcal{O}(1)$, el operador $L(\beta)$ no es en general expandible en potencias de β, sin embargo, podemos expresarlo de forma implícita.

Proposición 4.1. *El operador $L(\beta)$ puede ser escrito en la forma implícita*

$$
L(\beta) = -B(\beta)A(\beta), \tag{41}
$$

en donde los operadores $A(\beta)$ y $B(\beta)$ están definidos por

$$
A(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ikx}\sinh(\beta(x)k)\mathrm{sech}(hk)\hat{\xi}(k)\mathrm{d}k, \tag{42}
$$

$$
C(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ikx}\cosh((-h+\beta(x))k)\hat{\xi}(k)\mathrm{d}k, \tag{43}
$$

y $B(\beta)=C(\beta)^{-1}$.

Demostración. Comencemos con la condición de frontera

$$
\nabla\varphi\cdot N(\beta)=0 \qquad \text{en } y(x)=-h+\beta(x).
$$

Ahora, notemos que los términos que no contienen a $L(\beta)$ en $\partial_y\varphi-(\partial_x\beta)\partial_x\varphi=0$ son,

$$
\begin{aligned}
&\Big(D\mathrm{senh}((y+h)D)\,\mathrm{sech}(hD)-i(\partial_x\beta)D\cosh((y+h)D)\,\mathrm{sech}(hD)\Big)\xi|_{y=-h+\beta}\\
&\qquad= \int \mathrm{e}^{ikx}\Big(\mathrm{senh}(\beta(x)k)-(i/k)\partial_x(\mathrm{senh}(\beta(x)k))\Big)k\,\mathrm{sech}(hk)\widehat{\xi}(k)\,\mathrm{d}k\\
&\qquad= -i\partial_x\int \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{senh}(\beta(x)k)\,\mathrm{sech}(hk)\widehat{\xi}(k)\,\mathrm{d}k = DA(\beta)\xi.
\end{aligned}\tag{44}
$$

[1]Consideraremos una función continua e integrable f tal que $\hat{f}\in L^1$ para aplicar el Teorema de la Transformada Inversa de Fourier, consultar [13].

Por otro lado, los términos que contienen a $L(\beta)$ en $\partial_y\varphi - (\partial_x\beta)\partial_x\varphi = 0$ son,

$$
\begin{aligned}
&\Big(D\cosh(hD)L(\beta) - i(\partial_x\beta)D\,\mathrm{senh}(yD)L(\beta)\Big)\xi|_{y=-h+\beta}\\
&= \int \mathrm{e}^{ikx}\Big(\,\mathrm{senh}(\beta(x)k) - (i/k)\partial_x(\,\mathrm{senh}(\beta(x)k))\Big)k\,\mathrm{sech}(hk)\widehat{\xi}(k)\,\mathrm{d}k\\
&= \int \mathrm{e}^{ikx}\Big(\cosh((-h+\beta(x))k) - i(\partial_x\beta(x))\sinh((-h+\beta(x))k)\Big)k\widehat{L(\beta)\xi}(k)\,\mathrm{d}k\\
&= \int \mathrm{e}^{ikx}\Big(\cosh(hk)(\cosh(\beta(x)k) - i(\partial_x\beta(x)k)\,\mathrm{senh}(\beta(x)k))\\
&\qquad\qquad -\mathrm{senh}(hk)(\mathrm{senh}(\beta(x)k) - i(\partial_x\beta(x)k)\cosh(\beta(x)k))\Big)k\widehat{L(\beta)\xi}(k)\,\mathrm{d}k\\
&= DC(\beta)L(\beta)\xi.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Ahora, sumando las ecuaciones (44) y (45), obtenemos

$$D\Big(A(\beta)\xi + C(\beta)L(\beta)\xi\Big) = 0,$$

por lo tanto

$$A(\beta)\xi + C(\beta)L(\beta)\xi = c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

pero como $A(\beta) + C(\beta)L(\beta)$ es un operador lineal, se tiene que $c = 0$. Lo cual implica, debido al lema (A.2) del apéndice A, que $L(\beta) = -B(\beta)A(\beta)$.

□

Observemos que el operador $L(\beta)$ es lineal. Existen varias formas de obtener expresiones explícitas aproximadas para el operador $L(\beta)$,

1. $L(\beta)$ aplicado a funciones ξ de la forma $\xi(x) = \tilde{\xi}(X)$ ó $\xi(x) = \tilde{\xi}(x, X)$, en donde $X = \varepsilon x$ y $\varepsilon \ll 1$, usando análisis multiescala, consultar §7.
2. Expandiendo $L(\beta)$ en potencias de β, lo cual será hecho en la siguiente sección.

5. Expansión del Operador $L(\beta)$ en potencias de β.

Se supondrá que

$$L(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j(\beta), \tag{46}$$

en donde $L_j(\beta)$ es el término homogéneo en β de órden j. Para calcular explícitamente los términos $L_j(\beta)$ haremos uso de la condición de Neumann en $y = -h + \beta(x)$,

$$(\partial_y\varphi - \partial_x\beta\partial_x\varphi)(x, -h+\beta) = 0, \tag{47}$$

y haremos expansiones en potencias de β. Comencemos con la expresión (26) y calculemos sus derivadas parciales,

$$
\begin{aligned}
\partial_x\varphi(x,y) &= \int ik\,\mathrm{e}^{ikx}\frac{\cosh((y+h)k)}{\cosh(hk)}\hat{\xi}(k)\mathrm{d}k + \int ik\,e^{ikx}\mathrm{senh}(yk)\widehat{L(\beta)\xi}(k)\mathrm{d}k\\
&= i\Big(D\frac{\cosh((y+h)D)}{\cosh(hD)}\Big)\xi(x) + i\big(D\mathrm{senh}(yD)\big)\big(L(\beta)\big)\xi(x),
\end{aligned} \tag{48}
$$

y

$$\begin{aligned}
\partial_y \varphi(x,y) &= \int \mathrm{e}^{ikx} k \frac{\operatorname{senh}((y+h)k)}{\cosh(hk)} \hat{\xi}(k)\mathrm{d}k + \int e^{ikx} k \cosh(yk) \widehat{L(\beta)\xi}(k)\mathrm{d}k \\
&= i\Big(D\frac{\operatorname{senh}((y+h)D)}{\cosh(hD)}\Big)\xi(x) + i\big(D\cosh(yD)\big)\big(L(\beta)\big)\xi(x). \qquad (49)
\end{aligned}$$

Ahora hagamos la expansión formal en serie de Taylor de los siguientes operadores,

$$\begin{aligned}
D\operatorname{senh}((h+y)D)|_{y=-h+\beta} &= \sum_{\nu\ \geq 1 \text{ impar}} \frac{\beta^\nu}{l!} D^{\nu+1} \\
D\ \cosh((h+y)D)|_{y=-h+\beta} &= \sum_{\nu \geq 0 \text{ par}} \frac{\beta^\nu}{l!} D^{\nu+1}
\end{aligned}$$

alrededor del 0 y

$$\begin{aligned}
D\operatorname{senh}(yD)|_{y=-h+\beta} &= -\sum_{\nu\geq 0 \text{ par}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\operatorname{senh}(hD) + \sum_{\nu\geq 1 \text{ impar}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\cosh(hD) \\
D\ \cosh(yD)|_{y=-h+\beta} &= \sum_{\nu\geq 0 \text{ par}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\cosh(hD) - \sum_{\nu\geq 1 \text{ impar}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\operatorname{senh}(hD)
\end{aligned}$$

alrededor de $-hD$. Es impotante notar que el operador D no actúa en β. Sustituyendo (48) y (49) en (47), y usando los desarrollos en serie de Taylor anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu\geq 1 \text{ impar}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} \operatorname{sech}(hD) D^{\nu+1} + \sum_{\nu\geq 0 \text{ par}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\cosh(hD)\big(L(\beta)\big) - \sum_{\nu\geq 1 \text{ impar}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\operatorname{senh}(hD)\big(L(\beta)\big) \\
&\qquad -i(\partial_x\beta)\Big(\sum_{\nu\geq 0 \text{ par}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} \operatorname{sech}(hD) D^{\nu+1} + \sum_{\nu\geq 1 \text{ impar}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\cosh(hD)\big(L(\beta)\big) \\
&\qquad\qquad - \sum_{\nu\geq 0 \text{ par}} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^{\nu+1}\operatorname{senh}(hD)\big(L(\beta)\big)\Big) = 0. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Reuniendo los términos de órden β^0, tenemos

$$L_0 = 0.$$

Reuniendo los términos de órden β^1,

$$\beta \operatorname{sech}(hD) D^2 + D\cosh(hD) L_1(\beta) + (D\beta)(D\operatorname{sech}(hD)) = 0.$$

y notando que

$$D(\beta D\operatorname{sech}(hD)) = (D\beta)(D\operatorname{sech}(hD)) + \beta D^2 \operatorname{sech}(hD),$$

tenemos que,

$$L_1(\beta) = -\operatorname{sech}(hD)\big(\beta \operatorname{sech}(hD) D\big)$$

Más aun, podemos obtener fórmulas de recurrencia para j. Comencemos suponiendo que j es impar

$$L_j = -\operatorname{sech}(hD)\Big(\frac{\beta^j}{j!}\operatorname{sech}(hD) D_j + \sum_{\nu=2,\text{ par}}^{j-1} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^\nu \cosh(hD) L_{j-\nu} - \sum_{\nu=2,\text{ impar}}^{j-2} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^\nu \operatorname{senh}(hD) L_{j-\nu}\Big), \quad (51)$$

por otro lado para j par,

$$L_j = -\operatorname{sech}(hD)\Big(\sum_{\nu=2,\text{ par}}^{j-2} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^\nu \cosh(hD) L_{j-\nu} - \sum_{\nu=1,\text{ impar}}^{j-2} \frac{\beta^\nu}{\nu!} D^\nu \operatorname{senh}(hD) L_{j-\nu}\Big). \qquad (52)$$

6. Deducción de la Ecuación de Boussinesq para un Canal de Profundidad Variable Mediante la Expansión del Operador $L(\beta)$.

En el problema de ondas de agua en dos dimensiones con profundidad variable, se presentan tres parámetros de escala adimensionales, $\alpha = a/h$, $\delta = (h/l)^2$ y $\gamma = b/h$, en donde a es una amplitud típica, l es la longitud de onda característica, h es la profundidad media y b es la altura típica del fondo, ver figura (3).

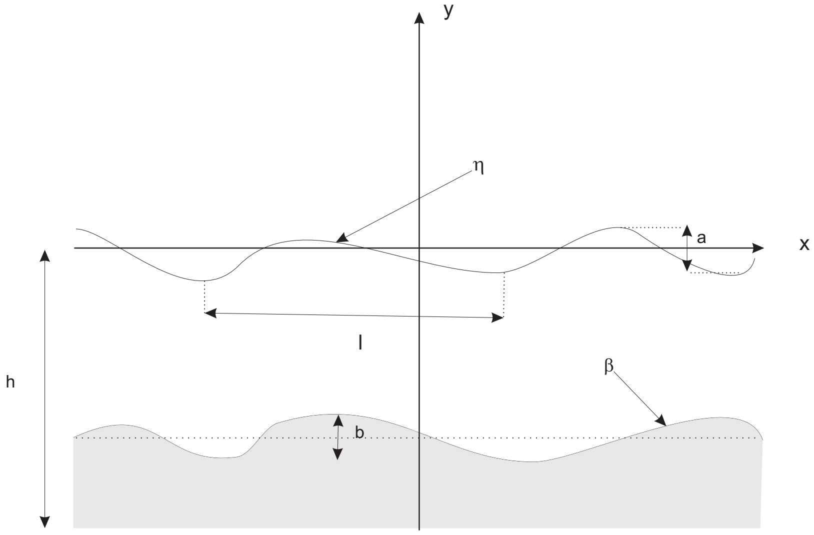

Figura 3

Consideremos las siguientes variables: x^* posición, t^* tiempo, ξ^* potencial, η^* desplazamiento horizontal del fluido y β^* la altura del fondo. Definamos las siguientes constantes $c_0 = \sqrt{gh}$ y $T = l/c_0$. Ahora, consideremos las siguientes variables adimensionales, consultar [21],

$$x = \frac{x^*}{l}, \quad t = \frac{t^*}{l/c_0}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{a}, \quad \xi = \frac{\xi^*}{gla/c_0} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\beta^*}{b}. \tag{53}$$

Entonces tendremos las siguientes identidades en términos de las variables adimensionales,

$$\begin{aligned} D\tanh(hD) &= \frac{1}{i}\partial_{x^*}\left(\frac{h}{i}\partial_{x^*} - \frac{1}{3}\Big(\frac{h}{i}\partial_{x^*}\Big)^3 + \dots\right) \\ &= -h\partial_{x^*}^2 - \frac{h^3}{3}\partial_{x^*}^4 + \dots \\ &= -\frac{h}{l^2}\partial_x^2 - \frac{h^3}{3l^4}\partial_x^4 + \dots \\ &= \frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 - \frac{1}{3}\delta^2\partial_x^4 + \mathcal{O}(\delta^3)\Big). \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} DL_1(\beta^*) &= -D\operatorname{sech}(hD)\Big(\beta^*\operatorname{sech}(hD)D\Big) \\ &= \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x + \frac{1}{2}\delta\partial_x^3 + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\Big(\beta\Big(\partial_x + \frac{1}{2}\delta\partial_x^3 + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\Big) \\ &= \frac{b}{l^2}\partial_x\beta\partial_x + \frac{b}{l^2}\delta\frac{1}{2}\partial_x\beta\partial_x^3 + + \frac{b}{l^2}\delta\frac{1}{2}\partial_x^3\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \tag{55}$$

Mas aún, se puede demostrar usando las fórmulas de recurrencia (51) y (52) que

$$DL_\nu(\beta) = \frac{b}{l^2}\mathcal{O}(\delta), \qquad \text{para } \nu \geq 2. \tag{56}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G^0(\beta^*, \eta^*) &= D\tanh(hD) + DL(\beta) \\ &= D\tanh(hD) + \sum_{\nu=0}^{\infty} DL_\nu(\beta) \\ &= \frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 - \frac{1}{3}\delta^2\partial_x^4 + \mathcal{O}(\delta^3)\Big) + \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta)\Big), \end{aligned} \tag{57}$$

y

$$\begin{aligned} G^1(\beta^*, \eta^*) &= D\eta^* D - G^0(\beta^*, \eta^*)\eta^* G^0(\beta^*, \eta^*) \\ &= -\frac{a}{l^2}\partial_x\eta\partial_x - a\Big\{\frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 - \frac{1}{3}\delta^2\partial_x^4 + \mathcal{O}(\delta^3)\Big) + \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta)\Big)\Big\} \\ &\quad \times\eta\Big\{\frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 - \frac{1}{3}\delta^2\partial_x^4 + \mathcal{O}(\delta^3)\Big) + \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta)\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{58}$$

Ahora, por la ecuación (12)

$$\begin{aligned} a\frac{c_0}{l}\eta_t &= G(\beta,\eta)\frac{gla}{c_0}\xi \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(\beta,\eta)\frac{gla}{c_0}\xi \\ &= \frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 - \delta^2\frac{1}{3}\partial_x^4 + \mathcal{O}(\delta^3)\Big)\frac{gla}{c_0}\xi + \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x\beta\partial_x + \delta\frac{1}{2}\partial_x\beta\partial_x^3 + \delta\frac{1}{2}\partial_x^3\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\frac{gla}{c_0}\xi \\ &\quad -\frac{a}{l^2}\frac{gla}{c_0}\partial_x(\eta\partial_x\xi) - a\Big\{\frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 + \mathcal{O}(\delta^2)\Big) + \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x\beta\partial_x + \delta\frac{1}{2}\partial_x\beta\partial_x^3 + \delta\frac{1}{2}\partial_x^3\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\Big\} \\ &\quad \times\eta\Big\{\frac{1}{h}\Big(-\delta\partial_x^2 + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\frac{gla}{c_0}\xi + \frac{b}{l^2}\Big(\partial_x\beta\partial_x + \delta\frac{1}{2}\partial_x\beta\partial_x^3 + \delta\frac{1}{2}\partial_x^3\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\frac{gla}{c_0}\xi\Big\}, \end{aligned}$$

de lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_t &= (-\partial_x^2 - \delta\frac{1}{3}\partial_x^4 + \mathcal{O}(\delta^2))\xi + \gamma\Big(\partial_x\beta\partial_x + \delta\frac{1}{2}\partial_x\beta\partial_x^3 + \delta\frac{1}{2}\partial_x^3\beta\partial_x + \mathcal{O}(\delta^2)\Big)\xi - \alpha\partial_x(\eta\partial_x\xi) \\ &\quad -\alpha\delta\partial_x^2(\eta\partial_x^2\xi) + \alpha\mathcal{O}(\delta^2) + \alpha\gamma\mathcal{O}(\delta^2) + \alpha\gamma^2\delta\partial_x(\beta\partial_x^2(\beta\partial_x\xi)) + \alpha\gamma^2\mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

reordenando

$$\eta_t = \Big(-\partial_x^2 - \frac{1}{3}\delta\partial_x^4 + \gamma\partial_x(\beta\partial_x) - \alpha\partial_x(\eta\partial_x)\Big)\xi + \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(\gamma\delta) + \mathcal{O}(\alpha\delta) + \mathcal{O}(\alpha\gamma\delta). \tag{59}$$

Por otro lado, de la ecuación (13),

$$\begin{aligned} \xi^*_{t^*} &= -\frac{1}{2(1+(\eta^*_{x^*})^2)}\Big((\xi^*_{x^*})^2 - (G(\beta^*,\eta^*)\xi^*)^2 + 2\eta^*_{x^*}\xi^*_{x^*}G(\beta^*,\eta^*)\xi^*\Big) - g\eta^* \\ &= -\frac{1}{2}\Big(1 - (\eta^*_{x^*})^2 + \mathcal{O}\big((\eta^*_{x^*})^2\big)\Big)\Big((\xi^*_{x^*})^2 - (G(\beta^*,\eta^*)\xi^*)^2 + 2\eta^*_{x^*}\xi^*_{x^*}G(\beta^*,\eta^*)\xi^*\Big) - g\eta^*\Big) \\ &= -\frac{1}{2}(\xi^*_{x^*})^2 + \frac{1}{2}(G(\beta^*,\eta^*)\xi^*)^2 + \ldots - g\eta^*, \end{aligned} \tag{60}$$

en términos de las nuevas variables,

$$\xi_t \quad = \quad -\eta - \frac{1}{2}\alpha\Big(\partial_x \xi\Big)^2 + \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(\gamma\delta) + \mathcal{O}(\alpha\delta) + \mathcal{O}(\alpha\gamma\delta). \tag{61}$$

Bajo el régimen de escala de Boussinesq, *i.e.* $\alpha \sim \gamma \sim \delta \sim \varepsilon$, para $\varepsilon \ll 1$, las ecuaciones (59) y (61), toman la forma

$$\eta_t \quad = \quad \Big(-\partial_x^2 - \frac{1}{3}\varepsilon\partial_x^4 + \varepsilon\partial_x(\beta\partial_x) - \varepsilon\partial_x(\eta\partial_x)\Big)\xi \tag{62}$$

$$\xi_t \quad = \quad -\eta - \frac{1}{2}\varepsilon\Big(\partial_x\xi\Big)^2. \tag{63}$$

Notemos que las ecuaciones (62) y (63) tienen la siguiente estructura Hamiltoniana

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\eta \hat{H} \\ \delta_\xi \hat{H} \end{pmatrix}$$

en donde

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \eta^2 + \Big(1 + \varepsilon\eta - \varepsilon\beta\Big)\Big(\partial_x\xi\Big)^2 - \frac{1}{3}\varepsilon\eta\Big(\partial_x^2\xi\Big)^2 \mathrm{d}x$$

Derivando la ecuación (63) con respecto a ∂_x y haciendo el cambio de variable $u = \partial_x\xi$, las ecuaciones (62) y (63), toman la siguiente forma,

$$\eta_t \quad = \quad -\partial_x\Big((1 - \varepsilon\beta + \varepsilon\eta)u\Big) - \frac{1}{3}\varepsilon\partial_x^3 u \tag{64}$$

$$u_t \quad = \quad -\partial_x\eta - \varepsilon u\partial_x u, \tag{65}$$

o

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta + \frac{\varepsilon}{2}u^2 \\ (1 - \varepsilon\beta + \varepsilon\eta)u + \frac{1}{3}\varepsilon\partial_x^2 u \end{pmatrix}. \tag{66}$$

El Hamiltoniano del sistema (66) está dado por

$$\widetilde{H} := \frac{1}{2}\int (1 - \varepsilon\beta + \varepsilon\eta)u^2 + \eta^2 - \frac{1}{3}\varepsilon(\partial_x u)^2 \mathrm{d}x,$$

con la estructura simpléctica dada por el operador

$$\widetilde{J} := \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\eta \widetilde{H} \\ \delta_u \widetilde{H} \end{pmatrix}.$$

Observación 6.1. *El operador $\widetilde{J}$ es simpléctico debido a que la forma bilineal asociada a éste definida de la siguiente forma*

$$\{F, G\}_{\widetilde{J}} := \int \delta F \cdot \widetilde{J}\delta G \mathrm{d}x,$$

es un corchete de Poisson, i.e. satisface las siguientes dos propiedades, *i.-* $\{F,G\}_{\widetilde{J}} = -\{G,F\}_{\widetilde{J}}$ *para todos los funcionales* F *y* G*, ya que*

$$\begin{aligned}
\{F,G\}_{\widetilde{J}} &= \int (\delta_{(\eta,u)}F)\begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix}(\delta_{(\eta,u)}G)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \begin{pmatrix} \delta_\eta F \\ \delta_u F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_\eta G \\ \delta_u G \end{pmatrix}\mathrm{d}x \\
&= -\int [\delta_\eta F\partial_x\delta_u G + \delta_u F\partial_x\delta_\eta G]\,\mathrm{d}x \\
&= \int [\delta_u G\partial_x\delta_\eta F + \delta_\eta G\partial_x\delta_u F]\,\mathrm{d}x \qquad \textit{aplicando integración por partes,} \\
&= -\int \begin{pmatrix} \delta_\eta G \\ \delta_u G \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_\eta F \\ \delta_u F \end{pmatrix}\mathrm{d}x \\
&= -\{G,F\}_{\widetilde{J}}
\end{aligned}$$

ii.- *Identidad de Jacobi,* $\{\{F,G\}_{\widetilde{J}},H\}_{\widetilde{J}} + \{\{H,F\}_{\widetilde{J}},G\}_{\widetilde{J}} + \{\{G,H\}_{\widetilde{J}},F\}_{\widetilde{J}}$ *para todo funcional* F*,* G *y* H*. Esta igualdad se cumple debido a que* $\widetilde{J}$ *es antisimétrica-adjunta y no depende de las variables dinámicas.*

para un análisis más detallado consultar [20].

7. Escalas Múltiples y Homogenización en el Régimen de Boussinesq para un Canal de Profundidad Variable.

Implementaremos el régimen de escala para ondas largas dado por M. J. Boussinesq, $\alpha \sim \beta = \varepsilon \ll 1$, suponiendo que β puede variar también en una escala lenta, *i.e.* $\beta = \beta(x, \varepsilon x)$, además escalaremos de la siguiente forma,

$$X = \varepsilon x, \quad \varepsilon\xi'(X), \quad \varepsilon^2\eta'(X) = \eta(x). \tag{67}$$

Introduciendo estas transformaciones en el Hamiltoniano (24),

$$H(\eta',\xi') = \frac{1}{2}\varepsilon^2\int \xi'(\varepsilon x)G(\beta(x,\varepsilon x),\varepsilon^2\eta'(\varepsilon x))\xi'(\varepsilon x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \varepsilon^4\eta'^2(\varepsilon x)\mathrm{d}x,$$

y haciendo el cambio de variable $X = \varepsilon x$, obtenemos

$$H(\eta',\xi') = \frac{1}{2}\varepsilon\int \xi'(X)G(\beta(x,X),\varepsilon^2\eta'(X))\xi'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\int \varepsilon^3\eta'^2(X)\mathrm{d}X. \tag{68}$$

Siguiendo el trabajo de W. Craig *et al.* [6] comenzaremos usando el escalamiento (67) y el Hamiltoniano (68). Posteriormente haremos una expansión de $G(\beta,\eta)$ en potencias de ε, con ello obtendremos una aproximación del operador $G(\beta,\eta)$. Luego utilizaremos los lemas de escalas múltiples (B.2) y (B.3), para aproximar el Hamiltoniano H por un Hamiltoniano que dependerá sólo de la variable $X = \varepsilon x$.

Usando el desarrollo de $G(\beta,\eta)$ en términos homogéneos de η y sustituyendo en (68),

$$\begin{aligned}
H(\eta',\xi') &= \frac{1}{2}\varepsilon\int \xi'(X)\big(G_0(\beta(x,X),\varepsilon^2\eta'(X)) + G_1(\beta(x,X),\varepsilon^2\eta'(X)) \\
&\quad +\mathcal{O}(\varepsilon^5)\big)\xi'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\int \varepsilon^3\eta'^2(X)\mathrm{d}X \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon\int \xi'(X)\big(\underbrace{D\tanh(hD) + DL(\beta)}_{G_0} \\
&\quad +\underbrace{D(\eta D) - G_0(\varepsilon^2\eta'(X)G_0)}_{G_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^5)\big)\xi'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\int \varepsilon^3\eta'^2(X)\mathrm{d}X.
\end{aligned} \tag{69}$$

Hemos usado que $G_n = \mathcal{O}(\varepsilon^5)$, para todo $n \geq 2$.

Ahora enfocaremos nuestra atención en obtener aproximaciones de los operadores G_0 y G_1, que aparecen en la ecuación (69). Definamos $b(x, \varepsilon x) = \beta(x, \varepsilon x) - h$. Los operadores $A(\beta)$ y $B(\beta)$ que aparecen en la fórmula implícita (41) de $L(\beta)$ se pueden aproximar de la siguiente forma, suponiendo que $\xi = \tilde{\xi}(X)$ en donde $X = \varepsilon x$,

$$\begin{aligned}
&A(\beta)\tilde{\xi}(X) \\
&\quad = \big(\sinh(\beta(x)D)\mathrm{sech}(hD)\big)\tilde{\xi}(X) \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{i(\varepsilon L)x} \sinh(\beta(x)\varepsilon L)\mathrm{sech}(h\varepsilon L)\widehat{\tilde{\xi}}(L)\mathrm{d}L \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{i(\varepsilon L)x} \left\{\varepsilon\beta(x)L + \varepsilon^3\frac{1}{6}\beta(x)^3L^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\}\left\{1 - \varepsilon^2\frac{1}{2}h^2L^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\}\widehat{\tilde{\xi}}(L)\mathrm{d}L \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{iL(\varepsilon x)} \left\{\varepsilon\beta(x)L - \varepsilon^3\frac{1}{2}h^2\beta(x)L^3 + \varepsilon^3\frac{1}{6}\beta(x)^3L^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\}\widehat{\tilde{\xi}}(L)\mathrm{d}L \\
&\quad = \varepsilon\beta(x)D_X\tilde{\xi}(X) - \varepsilon^3\frac{1}{2}h^2\beta(x)D_X^3\tilde{\xi}(X) + \varepsilon^3\frac{1}{6}\beta(x)^3D_X^3\tilde{\xi}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
\end{aligned} \tag{70}$$

De forma similar se calcula $C(\beta)$. Observemos que ya que $B(\beta)$ es el inverso de $C(\beta)$ y $B(\beta)$ actuará sobre una función que depende tanto de x como de X, entonces usando la parte (ii) del Teorema (B.1), tendremos lo siguiente

$$\begin{aligned}
&C(\beta) \\
&\quad = \cosh(bD) \\
&\quad = \cosh(b(D_x + \varepsilon D_X)) \\
&\quad = \cosh(bD_x) + \varepsilon b(x)\sinh(bD_x)D_X + \varepsilon^2\frac{1}{2}b^2\cosh(bD_x)D_X^2 \\
&\qquad +\varepsilon^3\frac{1}{6}b^3\sinh(bD_x)D_X^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
\end{aligned} \tag{71}$$

Ahora, usando la identidad $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ para $|x| < 1$, y de la fórmula (71), la inversa de $C(\beta)$ estará dada por

$$\begin{aligned}
B(\beta) &= C(\beta)^{-1} \\
&= B_0(\beta) - \varepsilon B_0(\beta)b\sinh(bD_x)B_0(\beta)D_X \\
&\quad -\frac{1}{2}\varepsilon^2B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)B_0(\beta)D_X^2 \\
&\quad +\varepsilon^2B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^2 \\
&\quad -\varepsilon^3\frac{1}{6}B_0(\beta)b^3\,\mathrm{senh}(D_x)B_0(\beta)D_X^3 \\
&\quad +\varepsilon^3\frac{1}{2}B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)B_0(\beta)D_X^3 \\
&\quad +\varepsilon^3\frac{1}{2}B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^3 \\
&\quad -\varepsilon^3B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x) \\
&\qquad \times B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4),
\end{aligned} \tag{72}$$

en donde $B_0(\beta) = \cosh(bD_x)$, el cual actúa sobre funciones de la variable x. Usando las ecuaciones (70) y (72), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&B(\beta)A(\beta)\\
&\quad= \varepsilon\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X\big) - \varepsilon^2\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0D_X\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\qquad -\varepsilon^2\frac{1}{2}\big(B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)B_0(\beta)D_X^2\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\qquad +\varepsilon^3\frac{1}{6}\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta^3 D_X^3\big) - \varepsilon^3\frac{1}{2}h^2\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X^3\big)\\
&\qquad -\varepsilon^3\frac{1}{2}\big(B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)D_X^2 B_0(\beta)\big)\big(\beta D_x\big)\\
&\qquad +\varepsilon^3\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^2\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\qquad -\varepsilon^4\frac{1}{6}\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X\big)\big(\beta^3 D_X^3\big)\\
&\qquad +\varepsilon^4\frac{1}{2}h^2\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X\big)\big(\beta D_X^3\big)\\
&\qquad -\varepsilon^4\frac{1}{6}\big(B_0(\beta)b^3\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^3\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\qquad +\varepsilon^4\frac{1}{2}\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b^2\ \cosh(bD_x)B_0(\beta)D_X^3\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\qquad +\varepsilon^4\frac{1}{2}\big(B_0(\beta)b^2\ \cosh(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^3\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\qquad -\varepsilon^4\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)\\
&\qquad\quad \times B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X^3\big)\big(\beta D_X\big) + \mathcal{O}(\varepsilon^5),
\end{aligned}
\tag{73}
$$

de lo cual se concluye como actúa el operador $DL(\beta) = -D\big(B(\beta)A(\beta)\big)$ sobre funciones de la forma $\xi(x) = \tilde{\xi}(\varepsilon x)$,

$$
\begin{aligned}
DL(\beta) &= -D\Big(B(\beta)\big(A(\beta)\big)\Big)\\
&= -\varepsilon D_x\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X\big) - \varepsilon^2 D_X\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad +\varepsilon^2 D_x\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^3 \frac{1}{6} D_x\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta^3 D_X^3\big) + \varepsilon^3 \frac{1}{2} h^2 D_x\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X^3\big)\\
&\quad +\varepsilon^3 \frac{1}{2} D_x\big(B_0(\beta) b^2 \cosh(bD_x) D_X^2 B_0(\beta)\big)\big(\beta D_x\big)\\
&\quad -\varepsilon^3 D_x\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X^2\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad +\varepsilon^3 D_X\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 \frac{1}{6} D_X\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta^3 D_X^3\big) + \varepsilon^4 \frac{1}{2} h^2 D_X\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X^3\big)\\
&\quad +\varepsilon^4 \frac{1}{6} D_x\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X\big)\big(\beta^3 D_X^3\big)\\
&\quad +\varepsilon^4 \frac{1}{2} D_X\big(B_0(\beta) b^2 \cosh(bD_x) D_X^2 B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 \frac{1}{2} h^2 D_x\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X\big)\big(\beta D_X^3\big)\\
&\quad +\varepsilon^4 \frac{1}{6} D_x\big(B_0(\beta) b^3\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X^3\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 \frac{1}{2} D_x\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) b^2\ \cosh(bD_x) B_0(\beta) D_X^3\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 \frac{1}{2} D_x\big(B_0(\beta) b^2\ \cosh(bD_x) B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X^3\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 D_X\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X^2\big)\big(\beta D_X\big)\\
&\quad +\varepsilon^4 D_x\big(B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x)\\
&\qquad \times B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x) B_0(\beta) D_X^3\big)\big(\beta D_X\big) + \mathcal{O}(\varepsilon^5),
\end{aligned} \tag{74}
$$

Por otro lado, usando (74), obtenemos

$$
\begin{aligned}
D\tanh(hD)\big(\eta DL(\beta)\big) &= D\tanh(hD)\big(\varepsilon^2 \eta'(X) DL(\beta)\big)\\
&= (D_x + \varepsilon D_X)\tanh(h(D_x + \varepsilon D_X))\big(\varepsilon^2 \eta'(X) DL(\beta)\big)\\
&= -\varepsilon^3 D_x^3 \tanh(hD_x) B_0(\beta)\beta\big(\eta'(X) D_X\big)\\
&\quad +\varepsilon^4 D_x^2 \tanh(hD_x) B_0(\beta) b\,\mathrm{senh}(bD_x)\ \times\\
&\quad \times\big(\eta'(X) D_X B_0(\beta)\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 D_x \tanh(hD_x)\big(\eta'(X) D_X B_0(\beta)\beta D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 h D_x^2 \mathrm{sech}(hD_x)^2 D_X B_0(\beta)\beta\big(\eta'(X) D_X\big)\\
&\quad -\varepsilon^4 D_x \tanh(hD_x) D_X B_0(\beta)\beta\big(\eta'(X) D_X\big) + \mathcal{O}(\varepsilon^5)
\end{aligned} \tag{75}
$$

Ahora haremos el desarrollo de $DL(\beta)$ cuando actúa en funciones $\xi(x) = \tilde{\xi}(x, X)$, en donde $X = \varepsilon x$,

$$
\begin{aligned}
A(\beta) &= \mathrm{senh}(\beta D_x + \varepsilon\beta D_X)\mathrm{sech}(hD_x + \varepsilon h D_X)\\
&= \big\{\mathrm{senh}(\beta D_x) + \varepsilon\cosh(\beta D_x)\beta D_X + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big\}\big\{\mathrm{sech}(\beta D_x)\\
&\quad -\varepsilon h\,\mathrm{sech}(hD_x)\tanh(hD_x) D_X + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big\}\\
&= \sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x) - \varepsilon h\,\mathrm{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\tanh(hD_x) D_X\\
&\quad +\varepsilon\cosh(\beta D_x)\beta D_X \mathrm{sech}(hD_x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
B(\beta)A(\beta)& \\
=\ & B_0(\beta)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big) \\
& -\varepsilon h B_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\tanh(hD_x)D_X\big) \\
& +\varepsilon B_0(\beta)\big(\cosh(\beta D_x)\beta\mathrm{sech}(hD_x)D_X\big) \\
& -\varepsilon\big(B_0(\beta)b\operatorname{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X\big)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
D\big(L(\beta)\big) \ =\ & -D_xB_0(\beta)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big) \\
& +\varepsilon hD_xB_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\tanh(hD_x)D_X\big) \\
& -\varepsilon D_xB_0(\beta)\big(\cosh(\beta D_x)\beta\mathrm{sech}(hD_x)D_X\big) \\
& +\varepsilon D_x\big(B_0(\beta)b\operatorname{senh}(bD_x)B_0(\beta)D_X\big)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big) \\
& -\varepsilon D_XB_0(\beta)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{76}
$$

$$
\begin{aligned}
DL(\beta)\big(\eta DL(\beta)\big) \ =\ & DL(\beta)\big(\varepsilon^2\eta'(X)DL(\beta)\big) \\
=\ & \varepsilon^3 D_xB_0(\beta)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big)\big(D_xB_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X\big) \\
& +\varepsilon^4D_xB_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big)\big(B_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X^2\big) \\
& -\varepsilon^4D_xB_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big) \\
& \quad\times\big(D_xB_0(\beta)b\operatorname{senh}(bD_x)B_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X^2\big) \\
& -\varepsilon^4hD_xB_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\tanh(hD_x)\big) \\
& \quad\times\big(D_xD_XB_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X\big) \\
& +\varepsilon^4D_xB_0(\beta)\big(\cosh(\beta D_x)\beta\mathrm{sech}(hD_x)\big)\big(D_xD_XB_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X\big) \\
& -\varepsilon^4D_xB_0(\beta)b\operatorname{senh}(bD_x)B_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big) \\
& \quad\times\big(D_xD_XB_0(\beta)\eta'(X)\beta D_X\big) \\
& +\varepsilon^4D_XB_0(\beta)\big(\operatorname{senh}(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big) \\
& \quad\times\big(B_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X\big)+\mathcal{O}(\varepsilon^5).
\end{aligned} \tag{77}
$$

Por último, notemos que

$$
\begin{aligned}
DL(\beta)&\big(\eta D\tanh(hD)\big) \\
&=DL(\beta)\Big(\varepsilon^2\eta'(X)\big(\varepsilon D_X(\varepsilon hD_X)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\big)\Big) \\
&=-\varepsilon^4hD_xB_0(\beta)\big(\sinh(\beta D_x)\mathrm{sech}(hD_x)\big)\big(\eta'(X)D_X^2\big)+\mathcal{O}(\varepsilon^5).
\end{aligned} \tag{78}
$$

Ahora, ya que hemos obtenenido desarrollos en potencias de ε de los operadores G_0 y G_1, primero calcularemos las ecuaciones lineales en el régimen de Boussinesq, para ello sustituiremos las ecuaciones (74), (75), (76) y (77) en (69),

$$
\begin{aligned}
H \ =\ & \frac{1}{2}\int \varepsilon^2D_xB_0(\beta)\beta\xi'(\varepsilon x)\big(D_X\xi'(X)\big)|_{X=\varepsilon x}+\varepsilon^3g\eta'^2(\varepsilon x) \\
& -\varepsilon^3(1-D_xB_0(\beta)b\operatorname{senh}(bD_x))\xi'(\varepsilon x)\big(D_XB_0(\beta)\beta D_X\xi'(X)\big)|_{X=\varepsilon x} \\
& +\varepsilon^3h\xi'(X)D_X^2\xi'(X)\mathrm{d}X+\mathcal{O}(\varepsilon^4),
\end{aligned} \tag{79}
$$

Notemos que la ecuación (79) contiene dos términos con derivadas totales con respecto al operador D_x, por lo que aplicando el lema de separación de escalas (B.2) obtenemos que estos dos términos tienen un promedio igual a 0, por lo tanto

$$H = \frac{1}{2}\int \varepsilon^3 g\eta'^2(X) - \varepsilon^3(h + \bar{c}_1(X))(D_X\xi')^2 \mathrm{d}X + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \tag{80}$$

en donde $c_1 = -B_0(\beta)\beta$. Ahora quitemos las primas $'$ y definamos el Hamiltoniano H_a, como el resultado de descartar los términos de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ en (80), por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_a}{\delta\eta} &= \varepsilon^3 g\eta \\ \frac{\delta H_a}{\delta\xi} &= -\varepsilon^3\partial_X((h + \bar{c}_1(X))u). \end{aligned}$$

Observemos que el escalamiento (67) nos produce un cambio en la estructura simpléctica $J = \varepsilon^3 J'$, en donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

consultar [7]; haciendo un escalamiento en el tiempo $t' = \varepsilon^3 t$ y quitando la prima $'$, obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \partial_t\eta &= -\partial_X((h + \bar{c}_1)u) \\ \partial_t u &= -g\partial_X\eta, \end{aligned}$$

ó

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\eta H_l \\ \delta_u H_l \end{pmatrix},$$

con

$$H_l = \frac{1}{2}\int (h + \bar{c}_1)u^2 + g\eta^2 \mathrm{d}X,$$

en donde hemos hecho el cambio de variable $u = \partial_X\xi$. Observemos que en esta aproximación lineal, el coeficiente $\bar{c}_1$ depende de X y representa la correción al problema con profundidad constante h, lo cual nos indica que la velocidad de propagación será menor que en el caso cuando el fondo es liso, ya que $\bar{c}_1 < 0$.

Ahora reteniendo términos hasta órden $\mathcal{O}(\varepsilon^5)$ en el Hamiltoniano, obtenemos

$$\begin{aligned} H \;=\; & \frac{\varepsilon}{2}\int \varepsilon^2\xi'(X)D_X\big(B_0(\beta)\beta D_X\xi'(X)\big) + \varepsilon^2 h\xi'(X)D_X^2\xi'(X) + \varepsilon^2 g\eta'^2(X) \\ & +\varepsilon^3\xi'(X)D_X\big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_X B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X\xi'(X)\big) \\ & -\varepsilon^4\frac{h^3}{3}\xi'(X)D_X^4\xi'(X) + \varepsilon^4\frac{1}{2}h^2\xi'(X)D_X\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X^3\xi'(X)\big) \\ & -\varepsilon^4\frac{1}{6}\xi'(X)D_X\big(B_0(\beta)\big)\big(\beta^3 D_X^3\xi'(X)\big) + \varepsilon^4\xi'(X)D_X\Big(\eta'(X)D_X\xi'(X)\Big) \\ & +\varepsilon^4\frac{1}{2}\xi'(X)D_X\big(B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)D_X^2 B_0(\beta)\big)\big(\beta D_X\xi'(X)\big) \\ & -\varepsilon^4\xi'(X)D_X\Big(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_X B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_X B_0(\beta)\Big)\Big(\beta D_X\xi'(X)\Big) \\ & +\varepsilon^4\xi'(X)D_X\Big(B_0(\beta)\,\mathrm{senh}(\beta D_x)D_x\,\mathrm{sech}(hD_x)\Big)\Big(B_0(\beta)\beta\eta'(X)D_X\xi'(X)\Big)\mathrm{d}X \\ & +\xi'(X)D_x F(x, X, \varepsilon)\mathrm{d}X + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \end{aligned} \tag{81}$$

en donde $D_xF(x,X,\varepsilon)$ es la suma de todos los términos que son la derivada total con respecto a D_x. Aplicando los lemas de separación de escalas (B.2) y (B.3), y notando que el último término dentro de la integral de (81) es una derivada total con respecto a D_x, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int \varepsilon^3 g\eta'^2(X) - \varepsilon^3(h+\bar{c}_1(X))(D_X\xi'(X))^2 - \varepsilon^4\bar{c}_2(X)(D_X\xi'(X))^2 - \varepsilon^5\bar{c}_3(X)(D_X\xi'(X))^2 \\ &\quad +\varepsilon^5(\bar{c}_4(X)+\frac{1}{3}h^3)(D_X\xi'(X))D_X^3\xi'(X) - \varepsilon^5\bar{c}_5(X)(D_X^2\xi'(X))^2 \\ &\quad -\varepsilon^5(1+\bar{c}_6(X))\eta'(X)(D_X\xi'(X))^2\mathrm{d}X + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \end{aligned} \tag{82}$$

en donde

$$c_2 = B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_X(B_0(\beta)\beta) - \frac{1}{2}D_X(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)), \tag{83}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{2}B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x)D_X^2(B_0(\beta)\beta) \\ &\quad +D_X\{B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x))B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_X(B_0(\beta)\beta) \\ &\quad -\frac{1}{2}D_X(B_0(\beta)b^2\cosh(bD_x))D_X(B_0(\beta)\beta) \\ &\quad +D_X(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x))B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)\beta \\ &\quad +B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_X(B_0(\beta)\beta)\} \end{aligned} \tag{84}$$

$$c_4 = -\frac{1}{2}h^2B_0(\beta)\beta + \frac{1}{6}B_0(\beta)\beta^3 - \frac{1}{2}B_0(\beta)b^2\beta, \tag{85}$$

$$c_5 = B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)B_0(\beta)\beta, \tag{86}$$

$$c_6 = -B_0(\beta)\mathrm{senh}(\beta D_x)D_x\,\mathrm{sech}(hD_x)B_0(\beta)\beta, \tag{87}$$

en donde las ecuaciones (83) y (84) son obtenidas mediante integración por partes de la siguiente forma. El término c_2 proviene del octavo término de la ecuación para $DL(\beta)$ de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} &\int \xi'(X)D_X(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_XB_0(\beta)(\beta D_X\xi'(X)))\mathrm{d}X \\ &= -\int (D_X\xi'(X))(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)D_XB_0(\beta)(\beta D_X\xi'(X)))\mathrm{d}X \\ &= -\int (D_X\xi'(X))(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)((D_X\xi'(X))D_X(B_0(\beta)\beta) \\ &\quad +(B_0(\beta)\beta)D_X^2\xi'(X)))\mathrm{d}X \\ &= -\int (D_X\xi'(X))^2(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)(D_X(B_0(\beta)\beta)\mathrm{d}X \\ &\quad -\int (D_X\xi'(X))(D_X^2\xi'(X))(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)(D_X(B_0(\beta)\beta)\mathrm{d}X \\ &= -\int (D_X\xi'(X))^2(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)(D_X(B_0(\beta)\beta)\mathrm{d}X \\ &\quad -\frac{1}{2}\int (D_X(D_X\xi'(X))^2)(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)(D_X(B_0(\beta)\beta)\mathrm{d}X \\ &= -\int (D_X\xi'(X))^2(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)(D_X(B_0(\beta)\beta)\mathrm{d}X \\ &\quad +\frac{1}{2}\int (D_X\xi'(X))^2D_X(B_0(\beta)b\,\mathrm{senh}(bD_x)(D_X(B_0(\beta)\beta)\mathrm{d}X. \end{aligned} \tag{88}$$

El término c_3 se deduce de forma similar.

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento dadas por esta aproximación son

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \eta & = & -\partial_X((\bar{h}(X) + \varepsilon^2(1+\bar{c}_6)\eta)u) - \varepsilon^2 \partial_X^2((\frac{1}{3}h^3 + \bar{c}_4 + \bar{c}_5)\partial_X u), \\ \partial_t u & = & -g\partial_X \eta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_X((1+\bar{c}_6)u^2), \end{array}\right\} \tag{89}$$

en donde la profundidad efectiva del fondo está dada por $\bar{h}(X) = h + \bar{c}_1 + \varepsilon\bar{c}_2 + \varepsilon^2\bar{c}_3 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\partial_X^2\bar{c}_4)$ y en donde los términos c_i dependen de X, para $2 \le i \le 6$.

8. Conclusiones.

En este trabajo hemos deducido dos aproximaciones para el problema de ondas de agua con fondo variable bajo el régimen de Boussinesq. La deducción de estas aproximaciones se basa en el trabajo de W. Craig *et al.* [6] sobre la aproximación del operador de Dirichlet-Neumann para el Laplaciano en el dominio ocupado por el dominio. Para ello planteamos el problema en su formulación Hamiltoniana dada por Zakharov y convenientemente reformulada a través del operador de Dirichlet-Neumann por W. Craig y C. Sulem [8]. La primera aproximación la obtuvimos haciendo la adimensionalisación de las Ecuaciones Básicas de Ondas de Agua, obteniendo ciertos parámetros característicos del problema, y posteriormente hicimos uso de la expansión de Taylor del operador de Dirichlet-Neumann. La segunda aproximación la hicimos usando un procedimiento sistemático dado por W. Craig y M. Groves [5], quienes usan la teoría de perturbación de Hamiltonianos con un parámetro pequeño. En la deducción de esta ecuación suponemos que el fondo varia tanto en una escala larga como en una escala corta. Debido a ello, usamos la teoría de Homogenización y encontramos los coeficientes *efectivos* para este problema, por lo que *el problema es homogenizable.* Además de estas dos aproximaciones, obtuvimos una aproximación lineal bajo la condición de que el fondo depende de dos escalas. Esta ecuación nos predice que la velocidad de la onda se verá disminuida, esto era de esperarse debido a la interacción que se presenta entre la onda y el fondo rugoso. Es importante señalar que se pueden obtener aproximaciones de mayor exactitud con relativa facilidad, debido a la fórmula iterativa dada esencialmente por W. Craig y C. Sulem [8], para obtener términos de mayor grado en el operador de Dirichlet-Neumann, aunado con el procedimiento sistemático dado por W. Craig y M. Groves [5].

El primer sistema de ecuaciones presenta una ventaja sobre el segundo desde el punto de vista de la implementación computacional. La forma de los coeficientes del segundo sistema sugiere el uso de una combinación de un método Pseudo-Espectral con un método de diferencias finitas. Sin embargo, para aplicar el método Pseudo-Espectral es necesario estudiar el espectro de ciertos operadores que no estan dados en forma explícita. Mientras que para el primer sistema, se puede usar un método Pseudo-Espectral, el cual presenta una pequeña complicación debido a los términos no lineales, aunque no lo llevamos acabo. Empero, será el tema de un trabajo futuro.

A. Resultados Misceláneos.

Lema A.1. *La solución del problema*

$$\nabla^2\varphi(x,y) = 0 \qquad \textit{para } x \in \mathbb{R} \textit{ y } -h \le y \le 0, \tag{90}$$

$$\varphi(x,0) = \xi(x) \qquad \textit{para } x \in \mathbb{R}, \tag{91}$$

$$\varphi_y(x,-h) = 0 \qquad \textit{para } x \in \mathbb{R}, \tag{92}$$

está dada formalmente por el multiplicador de Fourier

$$\varphi(x,y) = \frac{\cosh((y+h)D)}{\cosh(hD)}\xi(x).$$

Demostración. Este es un problema elíptico con condiciones de frontera tipo Dirichlet-Neumann que se puede resolver usando el método de la transformada de Fourier.

Supongamos que φ es una solución del problema anterior, entonces

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(w,y) e^{iwx} dw, \tag{93}$$

como (93) debe satisfacer (90), tenemos que

$$\nabla^2 \varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^2 \hat{\varphi}(w,y)}{dx^2} - w^2 \hat{\varphi}(w,y) \right) dw = 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{d^2 \hat{\varphi}(w,y)}{dx^2} - w^2 \hat{\varphi}(w,y) = 0,$$

resolviendo obtenemos que

$$\hat{\varphi}(w,y) = A(w) \sinh(wy) + B(w) \cosh(wy). \tag{94}$$

Entonces sustituyendo (94) en (93), y usando (91),

$$\varphi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(w,0) e^{iwx} dw = \xi(x),$$

lo cual se cumple si y sólo si $\hat{\varphi}(w,0) = \hat{\xi}(x)$. Por lo tanto, $B(w) = \hat{\xi}(x)$.
Ahora, de forma similar, de acuerdo a la condición (92),

$$\varphi_y(x,-h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_y(w,-h) e^{iwx} dw = 0,$$

lo cual implica que

$$\hat{\varphi}_y(w,-h) = 0.$$

Por lo tanto, usando (94)

$$\hat{\varphi}_y(w,-h) = A(w) w \cosh(wh) - \hat{\xi}(w) w \sinh(wh) = 0.$$

De lo cual se desprende que

$$A(w) = \hat{\xi}(x) \tanh(wh).$$

Sustituyendo en (93), se llega a que

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\xi}(w) \tanh(wh) \mathrm{senh}(wy) + \hat{\xi} \cosh(wy) \right) \mathrm{e}^{iwx} \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iwx} \frac{\cosh(w(h+y))}{\cosh(wh)} \hat{\xi}(x) \mathrm{d}w \\
&= \frac{\cosh((h+y)D)}{\cosh(hD)} \xi(x). \qquad (95)
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el lema.

□

Lema A.2. *El operador inverso $B(\beta)$ de $C(\beta)$ dado por (43) esta bien definido.*

Demostración. Consideremos el siguiente problema

$$\nabla^2 u = 0, \quad u(x,0) = \xi(x), \quad \partial_y u(x,0) = 0. \tag{96}$$

en el semi-espacio $\{y \leq 0\}$.

De forma análoga a la demostración dada en (A.1), la solución del problema (96) está dada formalmente por la expresión $u(x,y) = \cosh(yD)\xi(x)$, y la traza del operador $\cosh(hD)\xi(x)$ en la curva $y = -h+\beta(x)$ está dada por $C(\beta)\xi(x) = u(x, -h+\beta(x))$. Empero, para definir $B(\beta) = C(\beta)^{-1}$, tenemos que considerar el problema alterno

$$\begin{aligned}\nabla^2 w &= 0, \quad \text{para}\,(x,y) \in \mathfrak{D}(\beta, 0),\\ \partial_x w(x,0) &= 0,\\ w(x, -h+\beta(x)) &= \zeta(x),\end{aligned}$$

el cual tiene una solución única y su traza en $y = 0$ está bien definida. De hecho,

$$B(\beta)\zeta(x) = C(\beta)^{-1}\zeta(x) = w(x,0).$$

$\square$

B. Análisis de funciones multiescala.

Con el propósito de justificar la expansión multiescala del problema de ondas de agua, haremos un análisis breve de desarrollos asintóticos de operadores Pseudodiferenciales aplicados a funciones multiescala. Estos resultados fueron obtenidos por W. Craig *et al.* en [6]. Para una análisis más detallado, consultar [1], [9] ó [19].

Dado un parámetro $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, una función multiescala es una función suave $u(x,X) : \mathbb{R}^{2(n-1)} \to \mathbb{C}$, en donde $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $X \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $X = \varepsilon x$ es la variable espacial que describe variaciones largas. A esta clase de funciones las denotaremos por $u(x, \varepsilon x)$ o por $u(x,X)|_{X=\varepsilon x}$.

Usaremos la siguiente notación, $D_x = (1/i)\partial_x$ y $D_X = (1/i)\partial_X$. Definamos formalmente el operador $m(D_x)$ como

$$m(D_x)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{ik\cdot x} m(k)\hat{f}(x)\mathrm{d}k, \tag{97}$$

en donde $m \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. A $m(D_x)$ se le llama *multiplicador* de Fourier y a $m(k)$ se le conoce como el *símbolo* de éste . Además, supondremos que el símbolo $m(k)$ es de órden p, es decir, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ y $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ compacto, existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$|\partial_k^\alpha m(k)| \leq C_\alpha(1+|k|^2)^{(p-|\alpha|)/2}. \tag{98}$$

A continuación expondremos varios resultados que nos serán de ayuda en este trabajo.

Teorema B.1. *Consideremos un multiplicador de Fourier $m(k)$ de órden p*

i.- Supongamos que $f(X)$ es una función suave de la variable lenta X. Entonces

$$\begin{aligned}m(D_x)f(\varepsilon x) &= (m(\varepsilon D_X f))(\varepsilon x)\\ &= \sum_{|\alpha|\leq q} \frac{1}{\alpha!}\varepsilon^{|\alpha|}\partial_k^\alpha m(0)(D_X^\alpha f)(X)|_{X=\varepsilon x} + \mathcal{O}(\varepsilon^{q+1}).\end{aligned} \tag{99}$$

ii.- Supongamos que $f(x,X)$ es una función multiescala suave. Entonces

$$m(D_x)f(x,\varepsilon x) = \sum_{|\alpha|\leq q} \frac{1}{\alpha!}\varepsilon^{|\alpha|}(\partial_k^\alpha m)(D_x)D_X^\alpha f(x,X)|_{X=\varepsilon x} + \mathcal{O}(\varepsilon^{q+1}). \tag{100}$$

Demostración. Es claro que (i) es consecuencia de (ii), sin embargo, demostraremos cada apartado por separado para obtener claridad en la demostración. Comencemos definiendo $g(x) = f(\varepsilon x)$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\kappa) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{-i\omega\cdot\kappa} g(\omega)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{-i\omega\cdot\kappa} f(\varepsilon\omega)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{-i\Omega\cdot\frac{\kappa}{\varepsilon}} f(\Omega)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\hat{f}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
m(D_x)f(\varepsilon x) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{ik\cdot x} m(k)\hat{f}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{i\varepsilon K\cdot x} m(\varepsilon K)\hat{f}(K)\mathrm{d}K \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \mathrm{e}^{i\varepsilon K\cdot x}\left(\sum_{|\alpha|\le q}\frac{\varepsilon^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_k^\alpha m(0)K^\alpha + \mathcal{R}_q\right)\hat{f}(K)\mathrm{d}K,
\end{aligned} \tag{101}$$

en donde $\mathcal{R}_q$ es el residuo de órden q de la expansión en serie de Taylor de $m(k)$ alrededor del 0. La expresión (101) es equivalente a la ecuación (99), teniendo en cuenta que $\mathcal{R}_q = \mathcal{O}(\varepsilon^{q+1})$.

Ahora demostreremos la parte *(ii)*. Comencemos definiendo $F(x) = f(x, \varepsilon x)$ y notemos que

$$f(x, \varepsilon x) = f(x, X)|_{X=\varepsilon x} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int \mathrm{e}^{i\lambda\cdot x}\mathrm{e}^{iL\cdot x}|_{X=\varepsilon x}\hat{f}(\lambda, L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L.$$

Por lo tanto, el multiplicador de Fourier esta dado por

$$\begin{aligned}
&m(D_x)f(x, \varepsilon x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \mathrm{e}^{ikx} m(k)\hat{F}(k)\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int \mathrm{e}^{ik\cdot(x-x')} m(k) f(x', \varepsilon x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int \mathrm{e}^{ik\cdot(x-x')} m(k) \int\int \mathrm{e}^{i\lambda\cdot x'}\mathrm{e}^{iL\cdot X'}|_{X'=\varepsilon x'}\hat{f}(\lambda, L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L\mathrm{d}x'\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int\int \mathrm{e}^{ik\cdot x} m(k) \int \mathrm{e}^{i(\lambda+\varepsilon L-k)\cdot x'}\mathrm{d}x'\hat{f}(\lambda, L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int \left(\int \mathrm{e}^{ik\cdot x} m(k)\,\delta(\lambda + \varepsilon L - k)\mathrm{d}k\right)\hat{f}(\lambda, L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int \mathrm{e}^{i(\lambda+\varepsilon L)\cdot x} m(\lambda + \varepsilon L)\hat{f}(\lambda, L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L,
\end{aligned} \tag{102}$$

en donde $\delta(\cdot)$ es la distribución de Dirac y hemos usado la fórmula $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = g(0)$, consultar [25] pág. 161. Debido a que m es suave, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&m(D_x)f(x,\varepsilon x)\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\int \mathrm{e}^{i\lambda\cdot x}\mathrm{e}^{iL\cdot(\varepsilon x)}m(\lambda+\varepsilon L)\hat{f}(\lambda,L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L\\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\int \mathrm{e}^{i\lambda\cdot x}\mathrm{e}^{iL\cdot(\varepsilon x)}\sum_{|\alpha|\le q}\frac{1}{\alpha!}\partial_k^\alpha m(\lambda)\varepsilon^{|\alpha|}L^\alpha\hat{f}(\lambda,L)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}L+\mathcal{R}_{q+1}\\
&\quad= \sum_{|\alpha|\le q}\frac{1}{\alpha!}\partial_k^\alpha m(D_x)\varepsilon^{|\alpha|}D_X^\alpha f(x,X)|_{X=\varepsilon x}+\mathcal{R}_{q+1}.
\end{aligned}
$$

Debido a la condición (98) y teniendo en cuenta que $\mathcal{R}_{q+1}=\mathcal{O}(\varepsilon^{q+1})$, obtenemos (100).

□

Llamaremos red a un subconjunto Γ de $\mathbb{R}^n$ de la forma $\{Aa : \text{para todo } a\in\mathbb{Z}^n\}$ en donde A es una matriz no singular. Esta red tiene una red recíproca Γ', generada por la matriz $2\pi(A^T)^{-1}$. Denotaremos por $\mathbb{R}^n/\Gamma$ al dominio fundamental generado por el grupo Γ y por $|\mathbb{R}^n/\Gamma|$ a la medida del dominio fundamental.

Lema B.2. *Consideremos una función continua $g:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{C}$ tal que $g(x+\gamma)=g(x)$, para todo $\gamma\in\Gamma$, en donde $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ es una red, y una función $f\in L^1(\mathbb{R}^{n-1})\bigcap C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Entonces, para todo N tenemos*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)f(\varepsilon x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)f(X)|_{X=\varepsilon x}\mathrm{d}x\\
&= \bar{g}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(X)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}X+\mathcal{O}(\varepsilon^N),
\end{aligned}
\tag{103}
$$

en donde

$$
\bar{g}=\frac{1}{|\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma|}\int_{\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma} g(x)\mathrm{d}x.
$$

El lema (B.2) implica que la escala corta representada por x en $g(x)$ y la escala larga $X=\varepsilon x$ representada en $f(X)$ son asintóticamente separadas.

Demostración. Comencemos definiendo $h=\overline{f}$, y notemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\int g(x)\overline{h(\varepsilon x)}\mathrm{d}x &= \int g\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)\overline{h(w)}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}w\\
&= \int\left(\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \mathrm{e}^{i\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)\lambda}\hat{g}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\overline{h(w)}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}w\\
&= \int\left(\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \mathrm{e}^{i\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)w}\overline{h(w)}\mathrm{d}w\right)\hat{g}(\lambda)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}\lambda\\
&= \int\overline{\left(\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)w}h(w)\mathrm{d}w\right)}\hat{g}(\lambda)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}\lambda\\
&= \int\overline{\hat{h}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}\hat{g}(\lambda)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}\lambda\\
&= \int\hat{g}(\varepsilon y)\overline{\hat{h}(y)}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Como $g(x)$ es periódica sobre el dominio fundamental $\mathbb{T}^{n-1}=\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma$, consultar [14] pág. 178,

$$
\hat{g}(k)=\sum_{\kappa\in\Gamma'}c_n\hat{g}_\kappa\delta(k-\kappa),
$$

en donde Γ' es la red recíproca de Γ,

$$c_n = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{|\mathbb{T}^{n-1}|}} \quad y \quad \hat{g}_\kappa = |\mathbb{T}^{n-1}|^{-1/2} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \mathrm{e}^{-i\kappa\cdot x} g(x)\mathrm{d}x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \hat{g}(\varepsilon K)\overline{\hat{h}(K)}\mathrm{d}K &= \int \Big(\sum_{\kappa\in\Gamma'} c_n \hat{g}_\kappa \delta(\varepsilon K - \kappa)\Big)\overline{\hat{h}(K)}\mathrm{d}K \\
&= \sum_{\kappa\in\Gamma'} \int \overline{\hat{h}(K)} c_n \hat{g}_\kappa \delta(\varepsilon K - \kappa)\mathrm{d}K \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \sum_{\kappa\in\Gamma'} c_n \overline{\hat{h}\Big(\frac{\kappa}{\varepsilon}\Big)} \hat{g}_\kappa.
\end{aligned}$$

Dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}) \bigcap C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, se tiene que $|\hat{h}(K)| = \mathcal{O}((1+|K|^2)^{-N/2})$, para todo N, consultar [16] pág. 25, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \hat{g}(\varepsilon K)\overline{\hat{h}(K)}\mathrm{d}K &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \sum_{\kappa\in\Gamma'} c_n \overline{\hat{h}\Big(\frac{\kappa}{\varepsilon}\Big)} \hat{g}_\kappa \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} c_n \hat{g}_0 \overline{\hat{h}(0)} + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \sum_{\kappa\in\Gamma'\setminus\{0\}} \overline{\hat{h}\Big(\frac{\kappa}{\varepsilon}\Big)} c_n \hat{g}_\kappa \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} c_n \overline{g} \int \overline{h(X)}\mathrm{d}X + \mathcal{O}(\varepsilon^N)
\end{aligned}$$

sustituyendo $h = \overline{f}$ se obtiene (103).

□

Cuando la función g depende de x y de εx, se obtiene el siguiente

Lema B.3. *Consideremos una función continua $g(x, \varepsilon x)$ periódica en la variable x con respecto a la red $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}) \bigcap C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ y para todo $N \geq 1$, se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x, \varepsilon x) f(\varepsilon x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \overline{g}(X) f(X) \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}X + \mathcal{O}(\varepsilon^N), \tag{104}$$

en donde

$$\bar{g}(X) = \frac{1}{|\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma} g(x, X)\mathrm{d}x.$$

Demostración. Consultar [6] págs. 850 y 851. □

Agradecimientos. Agradezco al Dr. Panayiotis Panayotaros por todo el apoyo brindado tanto en la elaboración de este proyecto así como en mis estudios en la maestría. Al Dr. Antonmaría Minzoni por su dispocisión para ayudarme durante la elaboración de este trabajo. A todos los miembros del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS-UNAM, por toda la ayuda que me han brindado, en particular al Dr. Arturo Olvera. Me gustaría también agradecer a todos los miembros del Posgrado Conjunto UNAM-UMSNH, en particular al Dr. Jesũs Muciño, al Dr. Pierre Bayard y al Dr. Francisco Dominguez, por todo su apoyo y enseñanzas, las cuales fortalecieron mucho mi educación.

Por último, agradezco a Pedro Aceves, Ma. Esther Sánchez, Javier Aceves y a Marilú Miranda, por todo lo que me han enseñado de la vida.

Referencias

[1] Bensoussan, A., Lions, J.-L. y Papanicolaou, G. 1978, "Asymptotic analysis of periodic structures." *Studies in Mathematics and Its Applications,* vol. **5**. Amsterdan: North-Holland.

[2] Chorin, A. J. y Marsden, J. E. 1993, "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics", *Texts in Applied Mathematics*, **4**, Tercera Edición.

[3] Coifman, R. y Meyer, Y. 1985, Nonlinear harmonic and analytic dependence, in: *Proceedings of the Conference on Pseudodifferential Operators and Applications,* Notre Dame, IN, 1984, Amer. Math. Soc., págs. 71-78.

[4] Craig, W., 2008, "Transformation theory of Hamiltonian PDE and the problem of water waves", *Proceedings of the Advanced Study Institute on Hamiltonian Dynamical Systems and Applications, NATO Science for Peace and Security Series B:* Springer - Verlag, págs. 67-83.

[5] Craig, W. y Groves, M. 1994, Hamiltonian long-wave scaling limits of the water-wave problem. *Wave Motion* **19**, págs. 367-389.

[6] Craig, W., Guyenne, P., Nicholls, D. y Sulem, C., 2005, Hamiltonian long-waves expansions for water waves over a rough bottom. *Proc. Roy. Soc. Lond.* - A **461**, no. 2055, 839-87.

[7] Craig, W., Guyenne P. y Kalisch, H., 2005, Hamiltonian long-wave expansions for free surfaces and interfaces. *Comm. Pure Appl. Math.* **58**, núm. 12, 1587-1641.

[8] Craig, W. y Sulem, C. 1994, Numerical simulation of gravity waves. *J. Computat. Phys.* **108**, págs. 73-83.

[9] Craig, W., Sulem, C. y Sulem, P.-L. 1992, Nonlinear modulation of gravity waves: a rigorous approach. *Nonlinearity* **5**, págs. 497-552.

[10] Currie, I. G. 1993, "Fundamental Mechanics of Fluids", McGraw-Hill, Segunda Edición.

[11] Duoandikoetxea, J., 2000, "Fourier Analysis", *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence R.I.

[12] Evans, L. C. 1998, "Partial Differential Equations", *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence R.I.

[13] Folland, G., 1992, "Fourier Analysis and Its Applications", *The Wadsworth and Brooks/ Cole Mathematics Series.*

[14] Hörmander, L., 1983, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis", *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*, Segunda Edición, Springer-Verlag.

[15] Johnson, R. S., 1997, "A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves", *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press.

[16] Katznelson, Y., 2002, "An Introduction to Harmonic Analysis", Cambridge University Press, Tercera Edición.

[17] Kuznetsov, N., Maz'ya, V. y Vainberg, B., 2002, "Linear Water Waves, A Mathematical Approach", Cambridge University Press .

[18] Nicholls, D., y Reitich, F., 2001, A new approach to analyticity of Dirichlet-Neumann operators, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **131**, núm. 6, págs. 1411-1433.

[19] Nirenberg, L. 1972, "Lectures on Linear Partial Differential Equations", *CBMS Lecture Notes* **17**, Providence, RI, AMS.

[20] Olver, P. J., 1993, “Applications of Lie Groups to Differential Equations”, *Graduate Texts in Mathematics*, **107**, Segunda Edición Springer.

[21] Panayotaros, P., Notas del Curso Mecánica de Fluidos.

[22] Rosales, R., y Papanicolaou, G., 1983, Gravity waves in a channel with a rough bottom, *Stud. Appl. Math.*, **68**, $89 - 102$.

[23] Whitham, G. B. 1974, “Linear and Nonlinear Waves”, Wiley.

[24] Zakharov, V. E. 1968, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 1990-1994.

[25] Zeidler, E., 1995 “Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics”, *Applied Mathematical Sciences*, **108**, Springer-Verlag, New York.