UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

Secuencia didáctica por el modelo de la enseñanza directa del teorema de Bayes

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN DOCENCIA
PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA
Act. Giselle Ochoa Hofmann

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ANA MEDA GUARDIOLA

MÉXICO D.F. JUNIO 2010.

Dedicatorias

Dedico esta tesis a mis hijas, las cuales a través de su amor y sus risas me estimulan a seguir adelante y me dan fuerzas para luchar cada día de mi vida.

A mi esposo Jorge, mi gran amor, el cual siempre me ha brindado su comprensión, paciencia y apoyo para realizar todos mis proyectos.

A mi gran y espectacular madre, la cual siempre es un modelo de lucha y no hay mejor aprendizaje en mi vida que el tratar de seguir su ejemplo. Además de ser un apoyo en cualquier y para todo momento de mi vida.

A mi padre Alfonso, el cual me enseño a no desistir y su recuerdo me lleva a cumplir todas mis metas.

A mi hermano Alfonso, que con sus sabias palabras me ha enseñado a afrontar los retos y que los sueños pueden dejar de ser una utopía.

A mis hermosas sobrinas Ana Sofía y Hanna Alfonsina su presencia llenan de gozo mi existencia.

A mi nana Tere, la cual no se encuentra a mi lado en presencia pero su esencia me impulsa cada día.

Agradecimientos.

Quiero agradecer especialmente a la Dra. Nahina Dehesa D' Gives por dar luz a este trabajo de tesis y su gran asesoría es el fruto que de este trabajo se puede recolectar.

Al Dr. Javier Páez Cárdenas por ser siempre incondicional para brindar su apoyo y asesoria en este trabajo recepcional.

A mi amiga Gabriela Peña por las arduas horas otorgadas, para la revisión y así lograr lo mejor de este trabajo.

A todos mis asesores, los cuales siempre mostraron disposición y entusiasmo para que yo continúe en este camino.

Por último, agradezco a todos mis amigos y compañeros, que siempre tuvieron una palabra animosa y su apoyo incondicional.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN………………………………………………………………. 1

INTRODUCCIÓN……………………………………………………………. 5

I. EL MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE COMO UN PROBLEMA SOCIAL………………………………………………………………………….. 13

I.1. La Incertidumbre como parte de nuestra vida…..………………. 15
I.2. Los resultados de PISA, y su impacto en los estudiantes mexicanos…………………………………………………………… 16
I.3. Idoneidad Didáctica como planificador de clases……………………………………………………………….. 21
I.4. El Modelo de la Enseñanza Directa como Estrategia Didáctica……….. 23

II. LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD: VIA LOS PROBLEMAS DE TIPO BAYESIANO………………………………………………………... 27

II.1. Azar e Incertidumbre………………………………………………. 29
I1.2. La Probabilidad en nuestro entorno……………………………... 30
II.2.1. El Mundo Biológico……………………………………………......... 30
II.2.2. El Mundo Social……..…………………………………………….. 30
II.2.3. El Mundo Físico……………..……………………………………...... 32
II.2.4. El Mundo Político………………………….…………………...... 33
II.3. Intuición Probabilística……………………………………..……. 34
II.4. Alfabetizar en Probabilidad………………………………...……. 36
II.5. Razones por las que la Probabilidad se debe incorporar al Currículo de la Educación Media Superior (EMS)……………… 37
II.6. Dificultades en el aprendizaje de la Probabilidad………………. 42
II.6.1. Representatividad……………………………………………..…. 43
II.6.2. Disponibilidad……………………………………………..……… 44
II.7. La Probabilidad en el Nivel de Enseñanza Media Básica….…. 48
II.8. La Situación Curricular en el Bachillerato y su vinculación con el Nivel de Enseñanza Superior……………………………..…. 49
II.9. Diferentes concepciones de la Enseñanza de la Probabilidad. 53
II.10. La Enseñanza de la Probabilidad Subjetiva a través de problemas de tipo bayesiano ..………………………………… 56

III	EL MODELO DE LA ENSEÑANZA DIRECTA COMO ESTRATEGÍA DOCENTE Y SU RELACIÓN CON LA IDONEIDAD DIDÁCTICA……...		61
	III.1.	El Modelo de la Enseñanza Directa………………………………	64
	III.1.1.	La Planeación del Modelo de la Enseñanza Directa……………	66
	III.1.2.	La Implementación del Modelo de la Enseñanza Directa..........	70
	III.2.	El Modelo de la Enseñanza Directa en relación con la Idoneidad Didáctica…………………………….……………..	71
	III.2.1.	Idoneidad Epistémica………………………………….………..	73
	III.2.2.	Idoneidad Cognitiva…………………………………………......	74
	III.2.3.	Idoneidad Mediacional, Emocional e Interactiva……….……….	75
	III.2.4.	Idoneidad Ecológica………..…………………………….………	78
IV	DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA……………………………………………….…………….		. 81
	IV.1.	El Estudio………..……………………………………….............	83
	IV.2.	La Población…………………………………...…......................	85
	IV.3.	Diseño y planeación de la secuencia didáctica……..………….	86
	IV.4.	Implementación de la secuencia didáctica……………………...	90
	IV.5.	Contenidos Abordados…………………………………..…………	91
	IV.6.	Examen diagnóstico……………………………………..…………	94
	IV.7.	Situación didáctica No. 1……………………………..…………	94
	IV.7.1.	Cuadro de situación didáctica No. 1………………..…………	98
	IV.8.	Situación didáctica No. 2……………………………..…………	100
	IV.8.1.	Presentación en la situación didáctica No. 2……………………	101
	IV.8.2.	Secuencia de representación gráfica por tabla de contingencia	105
	IV.8.3.	Secuencia de obtención del denominador del teorema de Bayes (probabilidad total)………………………………………	106
	IV.8.4.	Teorema de Bayes……………………………………..…………	108
	IV.8.5.	Otra representación gráfica. Diagrama de árbol…..………….	108
	IV.8.6.	Cuadro de situación didáctica No. 2…………………………...	112
	IV.9.	Situación didáctica No. 3………………………….……………	113
	IV.9.1.	Cuadro de situación didáctica No. 3………………..…………	119
	IV.10.	Evaluación final………………………………………………….	120
	IV.11.	La evaluación en la secuencia del Teorema de Bayes………...	121
	IV.11.1.	Finalidad y contenidos del área matemática……………………	121
	IV.11.2.	Elementos matemáticos a evaluar………………………………	122
	IV.11.3.	Técnicas e instrumentos……………………………..…………	124
	IV.12.	Evaluación en la secuencia…………………………..…………	126
	IV.12.1.	Evaluación diagnóstica……………………………..……………	126
	IV.12.2.	Evaluación durante el proceso de aprendizaje. (Evaluación de la práctica guiada)……………………………………….…………	132
	IV.12.3.	Evaluación final. (Evaluación de la práctica independiente)….	135
	IV.12.4.	Resultados de la encuesta de opinión…………………………	139

V. CONCLUSIONES………………………………………………………………. 143

V.1. Perspectivas y limitaciones del trabajo recepcional………….......... 151

ANEXO 1. Hojas de trabajo para las situaciones didácticas e instrumentos de evaluación……………………………………………………………………………….. 153

Examen diagnóstico…………………………………………………………… 153
Situación didáctica No. 1……………………………………………………… 154
Situación didáctica No. 2……………………………………………………… 161
Situación didáctica No. 3……………………………………………………… 166
Evaluación final……………………………………………………………..…. 175
Encuesta de opinión……………………………………………………..…..…. 179

ANEXO 2. Algunos ejemplos de los resultados de los estudiantes en la secuencia didáctica para la práctica independiente……………………………… 181

BIBLIOGRAFÍA……………………………………………………………................ 191

P R E S E N T A C I Ó N

El presente Trabajo Recepcional, para obtener el Grado de Maestría en Educación para el Nivel Medio Superior (MADEMS), en el campo de conocimiento de Matemáticas, tiene como propósitos:

1. Exponer una Secuencia Didáctica para la enseñanza de la Probabilidad Subjetiva, en especial el Teorema de Bayes, tema considerado en el Programa de la asignatura de Estadística y Probabilidad del Plan de Estudios 1996 en la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM; y

2. Presentar algunas sugerencias y recomendaciones didácticas que se obtuvieron a partir de:

- Los resultados obtenidos por México y dados a conocer en 2003 por la OCDE en el Programme for Internacional Student Assement- Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) que corresponden a sus siglas en inglés- (OCDE: 2000).

- La “Idoneidad Didáctica” de Font *et. al.*[•] a partir de los aspectos idóneos, dentro de la Enseñanza de las Matemáticas, como un planificador de clases y del “Modelo de Enseñanza Directa” (Eggen:2001), como estrategia de enseñanza para la construcción de nuevos conceptos, procedimientos y habilidades matemáticas.

- Los diversos estudios de la “Didáctica de las Matemáticas” que dan muestra de las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la probabilidad.

[•] Juan D. Godino, Delisa Bencomo ,Vicenç Font y Miguel R. Wilhelmi investigadores de Educación Matemática de la Universidad de Granada; España

- Los “Estudios Psicológicos” de Inhelder y Piaget (1955) que muestran a la intuición como una herramienta que puede beneficiar o perjudicar el proceso de enseñanza- aprendizaje en la Probabilidad.

- Las diferentes concepciones que existen en la enseñanza de la Probabilidad, haciendo hincapié en la Probabilidad Subjetiva.

- La revisión de los “Programas de Estudio” de los dos subsistemas de la UNAM (CCH y ENP), así como también, la vinculación que guarda la enseñanza de la Probabilidad en los Niveles Medio Básico, Medio Superior y Superior.

Esta investigación se encuentra dividida en cinco capítulos, además de una Introducción donde se presenta el problema a tratar:

En el Capítulo I: *La incertidumbre como un problema social*, se plasma la necesidad de que todo ciudadano tenga un mejor manejo de su propia incertidumbre, y para ello se requiere de una base sólida en Probabilidad y Estadística que le permita generar competencias matemáticas para poder comprender, juzgar y criticar la información que maneja día con día y le ofrezca herramientas para la toma de decisiones. El problema se plantea a partir de ¿cómo poder desarrollar en los estudiantes estas competencias matemáticas?

También se presentan los resultados internacionales y el impacto en los estudiantes mexicanos. Estos estudios proveen algunos de los aspectos que deben ser considerados en la enseñanza de las Matemáticas para elevar el desempeño académico.

“La “Idoneidad Didáctica”, en el área matemática, es un criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados.”[1]

Este criterio considera varias dimensiones en el proceso de construcción del conocimiento y por ello en este trabajo se consideró aplicar estas dimensiones en la planeación de las clases e implementar la estrategia constructivista del “Modelo de la Enseñanza Directa” para el trabajo dentro de las aulas en la ENP y optimizar así, el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas en los estudiantes para la resolución de problemas matemáticos.

En el Capitulo II: *La Enseñanza de la Probabilidad vía los Problemas de Tipo Bayesiano”*, se expone la probabilidad en su relación con los fenómenos aleatorios.

La importancia de crear una sociedad con una cultura de la probabilidad y mostrar las razones del ¿por qué la probabilidad se tiene que incorporar al currículo de la Educación Media Superior’.

Por otra parte, se considera que los seres humanos desde muy pequeños generamos intuiciones acerca de la probabilidad, que en ocasiones pueden ser favorables o desfavorables en su enseñanza, entre otras dificultades que se presentan en este capítulo.

También se exponen diversas concepciones acerca del estudio de la probabilidad. Además de un breve análisis de los conceptos probabilísticos considerados en los Programas de Estudio del Nivel Medio Básico, Medio Superior y su vinculación con en el Nivel Superior observando el grado en que se desarrolla la intuición probabilística en cada nivel cada uno de ellos.

En el Capítulo III: *El Modelo de la Enseñanza Directa como estrategia docente y su relación con la Idoneidad Didáctica,* con base en el análisis de los Capítulos I y II, se presentan las generalidades y particularidades del “Modelo de la Enseñanza Directa” (Eggen: 2001), en relación con la “Idoneidad Didáctica” (Font, *et. al.*:2006) como una Propuesta Didáctica, para implementar diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje en el Nivel de Enseñanza Media Superior, las cuales se desarrollaran en una Secuencia Didáctica para el Teorema de Bayes.

En el Capítulo IV: *Diseño, Implementación y Resultados de la Secuencia Didáctica,* se presenta la Propuesta Didáctica, bajo tres diferentes situaciones, para la enseñanza de la Probabilidad Subjetiva, que son:

- Modelo de Urnas
- Aplicación del Teorema de Bayes en dos eventos.
- Aplicación del Teorema de Bayes para tres o más eventos.

Este capitulo exhibe el diseño, la planeación y la implementación de cada una de las tres situaciones, así como la evaluación diagnóstica y la final. Se elaboró y aplicó una encuesta de opinión a un grupo de sexto año de bachillerato, en la ENP, en el que se observó las actitudes, aptitudes (de los estudiantes), para determinar en que medida se cumple con la “Idoneidad Didáctica”.

En el Capítulo V: *Conclusiones*, se presentan comentarios finales, perspectivas y limitaciones de la problemática planteada en la presente investigación.

Al final se presenta la bibliografía/webgrafía, que sirven como fuente de información para la realización de este trabajo, y un anexo divido en dos partes: La primera parte contiene: el material didáctico, empleado en cada una de las situaciones didácticas; los instrumentos de evaluación diagnóstica y final; y, la encuesta de opinión.
En la segunda parte se muestran los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica.

La Educación Media Superior ha observado un crecimiento extraordinario en los últimos 50 años aproximadamente, al multiplicar su población estudiantil atendida en más de cien veces. Tal expansión ha permitido que un número cada vez más grande de personas contemplen los estudios superiores como una esperanza históricamente asequible. Así, la Universidad Pública adquiere, por esta virtud, un papel adicional a los propios de las instituciones de este género en cualquier sociedad moderna: formar a los dirigentes de un país, difundir la cultura y la economía productiva y generar nuevos conocimientos. Efecto de ello es el valor social que proyecta sobretodo en lo educativo.

Alrededor de la década de los años 60's la educación presenta un crecimiento muy acelerado en las oportunidades educativas, tuvo un costo que no se previó y que tampoco se ha podido corregir. Los procesos formativos son, para el grueso de los estudiantes, de calidad precaria, que adicionalmente, y justo a la educación poco cuidada, han ido segmentando a la población estudiantil entre aquellos pocos que obtienen una formación amplia y lo suficientemente sólida para sostener los estudios superiores, y aquella mayoría que sólo obtiene un certificado con una calidad indeterminada de conocimientos y habilidades sociales y académicamente útiles.

Las evaluaciones internacionales, en particular con los exámenes del "Programa para la Evaluación de los Estudiantes" (**PISA**) dan muestra de que los estudiantes mexicanos, en su gran mayoría, sólo pueden resolver una pregunta en un solo paso y recuerda únicamente los procedimientos más simples. En el área matemática, este tipo de resultados nos muestran que más de la mitad de los alumnos mexicanos no puede realizar la más básica y simple de las tareas que a ella competen o tienen mucha dificultad para lograrlo.[2]

Este dato da evidencia de la falta de eficacia para desarrollar alumnos con habilidades matemáticas, lo cual nos remite a atender las deficiencias que presenta la enseñanza de las matemáticas en nuestro sistema educativo actual.

---

[2] *vid*; Zorrilla Alcalá, Juan Fidel. *Desarrollo de Habilidades Verbales y Matemáticas I.* pp.13-14

Con esas perspectivas se ha vuelto imposible, y hasta inadecuado, responder de manera puramente cuantitativa a la insaciable demanda de educación (en especial las Matemáticas), que entraña un bagaje escolar cada vez más voluminoso. Es que ya no basta con que cada individuo acumule al comienzo de su vida una reserva de conocimientos a la que podrá recurrir después sin límites. Sobre todo, debe estar en condiciones de aprovechar y utilizar durante toda la vida cada oportunidad que se le presente de actualizar, profundizar y enriquecer ese primer saber y de adaptarse a un mundo en permanente cambio.

> Para cumplir el conjunto de las misiones que les son propias, la educación debe estructurarse en torno a cuatro aprendizajes fundamentales que en el transcurso de la vida serán para cada persona, en cierto sentido, los pilares del conocimiento: aprender a conocer, es decir, adquirir los instrumentos de la comprensión; aprender a hacer, para poder influir sobre el propio entorno; aprender a vivir juntos, para participar y cooperar con los demás en todas las actividades humanas; por último, aprender a ser, un proceso fundamental que recoge elementos de los tres anteriores. Por supuesto, estas cuatro vías del saber convergen en una sola, ya que hay entre ellas múltiples puntos de contacto, coincidencia e intercambio.
>
> Mas, en general, la enseñanza escolar se orienta esencialmente, por no decir que de manera exclusiva, hacia el aprender a conocer y, en menor medida, el aprender a hacer. Las otras dos formas de aprendizajes dependen las más de las veces de circunstancias aleatorias, cuando no se les considera una mera prolongación, de alguna manera natural, de las dos primeras. Así bien, cualquier sistema de enseñanza estructurado, tiene que considerar, cada uno de esos cuatro "pilares del conocimiento" debe recibir una atención equivalente a fin de que la educación sea para el ser humano, en su calidad de persona y de miembro de la sociedad, una experiencia global y que dure toda la vida en los planos cognoscitivos y prácticos.[3]

Los seres humanos nos movemos en un mundo de incertidumbre en el que tomar decisiones es importante. El mundo moderno presenta muchos factores de cambio e incertidumbre en la vida de las personas, como por ejemplo: la crisis financiera que

[3] Delors, Jaques (1994). "*Los cuatro pilares de la educación*". En: La educación encierra un tesoro. pp. 91-103

genera una crisis económica; el cambio climático y la agenda política de los diferentes países, entre otros.

Por lo tanto, para los individuos es necesario realizar valoraciones personales de escenarios alternativos, en términos probabilísticos, y calibrar y jerarquizar diferentes tipos de información, bajo una visión clara y una comprensión adecuada de los conceptos básicos de la Teoría de la Probabilidad.

Uno de los problemas a los que se enfrenta el docente de bachillerato en la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad, contemplado en particular, en el *curriculum* de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) y de otros bachilleratos, es que no siempre se consigue que los alumnos asimilen correctamente los conceptos. De acuerdo con Antonio Fernández Morales[4] existen una serie de obstáculos que dificultan el aprendizaje de la probabilidad, tanto en alumnos de secundaria como en alumnos universitarios, Otros autores como Kahneman y Tversky (1972, 1973), Shaughnessy (1977, 1982), Tversky y Kahneman (1982, 1983), Fischbein y Gazit(1982), Konold (1989, 1991), Konold *et. al*. (1993), Pollastek *et al.* (1987), Hirsch y O'Donnell (2001), Girotto y Gonzalez (2001), Batanero y Serrano (1995), Serrano y Batanero (1996) y Serrano *et. al*. (2001), también han mostrado evidencias de las dificultades que presenta la enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad, tales como: la falta de desarrollo de la intuición probabilística; el uso de la notación utilizada en esta rama de las matemáticas; el uso impreciso del lenguaje cotidiano, las estrategias erróneas de disponibilidad y representatividad; entre otras.

Por ejemplo, el estudio de Daniel Kahneman y Amos Tversky manifiesta que los seres humanos a menudo tomamos decisiones en momentos de incertidumbre guiándonos por la intuición y no por la lógica. La intuición es un pensamiento rápido e impulsivo que no se vale de un razonamiento claro. Ofrece conclusiones inmediatas, aunque también puede engañar y a veces resulta desastroso. Estos psicólogos, estudiaron la manera

[4] *vid*; Fernández Morales, Antonio. "*Obstáculos para la enseñanza de la probabilidad en estudiantes de economía y administración de empresas" p.1.*

como se toman decisiones en momentos de incertidumbre y comprobaron que el juicio humano presenta a menudo serias fallas.[5] Dicho esto, es común que los estudiantes comienzan los cursos de probabilidad con intuiciones muy arraigadas, muchas de las cuales son incorrectas y constituyen un obstáculo para el aprendizaje probabilístico. Estas intuiciones son muy difíciles de cambiar porque los sujetos pueden tener concepciones múltiples y a menudo contradictorias de una misma situación particular, Konold (1995)[6]. No obstante, no se debe olvidar que hay otros factores que influyen en la asimilación de los contenidos probabilísticos, como la madurez y la experiencia, tal y como señala Jolliffe (1991).[7]

Un primer paso para afrontar este problema, en la Enseñanza de la Probabilidad, y en particular en el Nivel de Enseñanza Media Superior, debe ser el generar situaciones didácticas que se apoyen en el conocimiento previo que los estudiantes poseen acerca de los conceptos relativos a la probabilidad, aunque la mayoría de las veces, estas intuiciones son erróneas, pero es importante considerarlas debido a que, cuando se enseña algo nuevo, los estudiantes construyen su conocimiento relacionado la nueva información con el conocimiento previo con base en la postura constructivista de Garfield (1995)[8].

Por lo tanto, es importante que el profesor establezca el nivel de conocimiento del tema y se fije objetivos y metas, para desarrollo de estrategias de aprendizaje, a través de una buena selección de ejemplos y problemas que permitan alcanzar las metas establecidas.

En consecuencia, surge la necesidad de establecer nuevas formas de enseñanza, en las cuales los estudiantes, en particular los bachilleres de la ENP, puedan aprender

[5] Coon, Dennis (2005). *Psicología.* p.389
[6] *vid; Fernández, op.cit, p.1*
[7] *Coon, op.cit. p.389*
[8] *vid; Fernández, op.cit, p.1*

matemáticas, cubriendo con las expectativas que demandan los cuatro pilares del conocimiento.

Con base en lo anterior, este Trabajo Recepcional se enfoca al desarrollo de competencias matemáticas en el área de Probabilidad para los alumnos de la ENP, en particular, y para todo estudiante del Nivel de Enseñanza Media Superior, en donde se inserte a la probabilidad condicional como parte de sus Programas de Estudio.

Se parte del supuesto de que hasta este momento, la didáctica aplicada en la enseñanza de la Probabilidad, no ha cumplido con las expectativas esperadas en el desarrollo de habilidades matemáticas y en el manejo de la intuición probabilística, por parte de los estudiantes. Se establece por lo tanto, que el objetivo de éste trabajo, es proponer el uso de un Modelo Constructivista a través de una secuencia didáctica para elevar el rendimiento académico de los estudiantes.

Para lograr este objetivo se seleccionó el “Modelo de la Enseñanza Directa” (Eggen: 2001), el cual es un modelo de enseñanza constructivista, el cual se basa en una estrategia receptiva o expositiva caracterizada porque el docente expone explícitamente una estructura conceptual del tema para que el alumno lo relacione. El alumno a partir del vínculo que se produce entre sus teorías previas y las estructuras de nuevos contenidos, construirá una nueva organización conceptual, que le permita asimilar en forma condensada conceptos teóricos, que difícilmente hubiera descubierto por el mismo. El modelo hace uso de una o varias ideas generales, que son presentada antes de que se ofrezcan los materiales de aprendizaje propiamente dichos, con el fin de facilitar su asimilación. El fin último de este modelo es tender un puente cognitivo entre lo que el alumno ya sabe antes de que pueda aprender significativamente, la tarea en cuestión. Otro elemento importante para llegar a lograr los objetivos de este trabajo es la “Idoneidad Didáctica” (Font, *et. al.*:2006), la cual permite evaluar la pertinencia de un proceso de instrucción matemática y determinar pautas para la mejora del diseño y de la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Estas implicaciones para la docencia no tienen carácter normativo o técnico (obtención de un listado de prescripciones "a ejecutar"), sino explicativo (determinación de criterios para la valoración de la viabilidad y de la adecuación a un proyecto de enseñanza).

En este sentido este trabajo contempla como principal vía, el estudio de la probabilidad para llegar a la inferencia estadística a través de una Secuencia didáctica del Teorema de Bayes, usando el Modelo de la Enseñanza Directa y la Idoneidad Didáctica par su validación, debido a que es fundamental en las aplicaciones de la Estadística y la Probabilidad, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información. Este tipo de razonamiento es muy importante en tareas profesionales, como el diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y aplicaciones de inferencia estadística en la investigación empírica.

El Teorema de Bayes ofrece un método estadístico para calcular una probabilidad condicional en circunstancias de dependencia. Este teorema es de gran utilidad para evaluar una probabilidad a posteriori partiendo de probabilidades simples, y así poder revisar la estimación de la probabilidad apriori de un evento que se encuentra de un estado o en otro.

A partir de esta Propuesta Didáctica para el Nivel de Enseñanza Media Superior, que se espera, genere en los estudiantes el desarrollo de habilidades matemáticas que el mundo moderno demanda, así como una mejora en el manejo de la intuición probabilística.

El presentar una serie de Situaciones Didácticas, las cuales consideran problemas del tipo bayesiano relacionados con el mundo biológico, social y físico de los estudiantes, es uno de los propósitos de este trabajo, para ofrecer una enseñanza significativa que permita a los estudiantes relacionar el tema con su entorno cotidiano.

Las Situaciones Didácticas, se muestran en la temática de la Probabilidad Subjetiva a través del Teorema de Bayes, tema tratado en el Programa de Estudio de la Asignatura de Estadística y Probabilidad (1996), del 6° año de bachillerato en la ENP.

Para determinar en que medida se cumple con la “Idoneidad Didáctica”, se realizó un análisis de las aptitudes y actitudes de los estudiantes para la asimilación y aprendizaje de los conceptos de la Probabilidad Subjetiva, así como la resolución de problemas bayesianos.

Este trabajo expone los conceptos de la lógica probabilística, desde los básicos hasta lo más general, como por ejemplo: la comprensión y homogeneidad en la apreciación semántica de la terminología y vocabulario, propios del campo semántico probabilístico, y los mecanismos para la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Así como también, se presentan las fortalezas y debilidades que tiene esta Propuesta Didáctica.

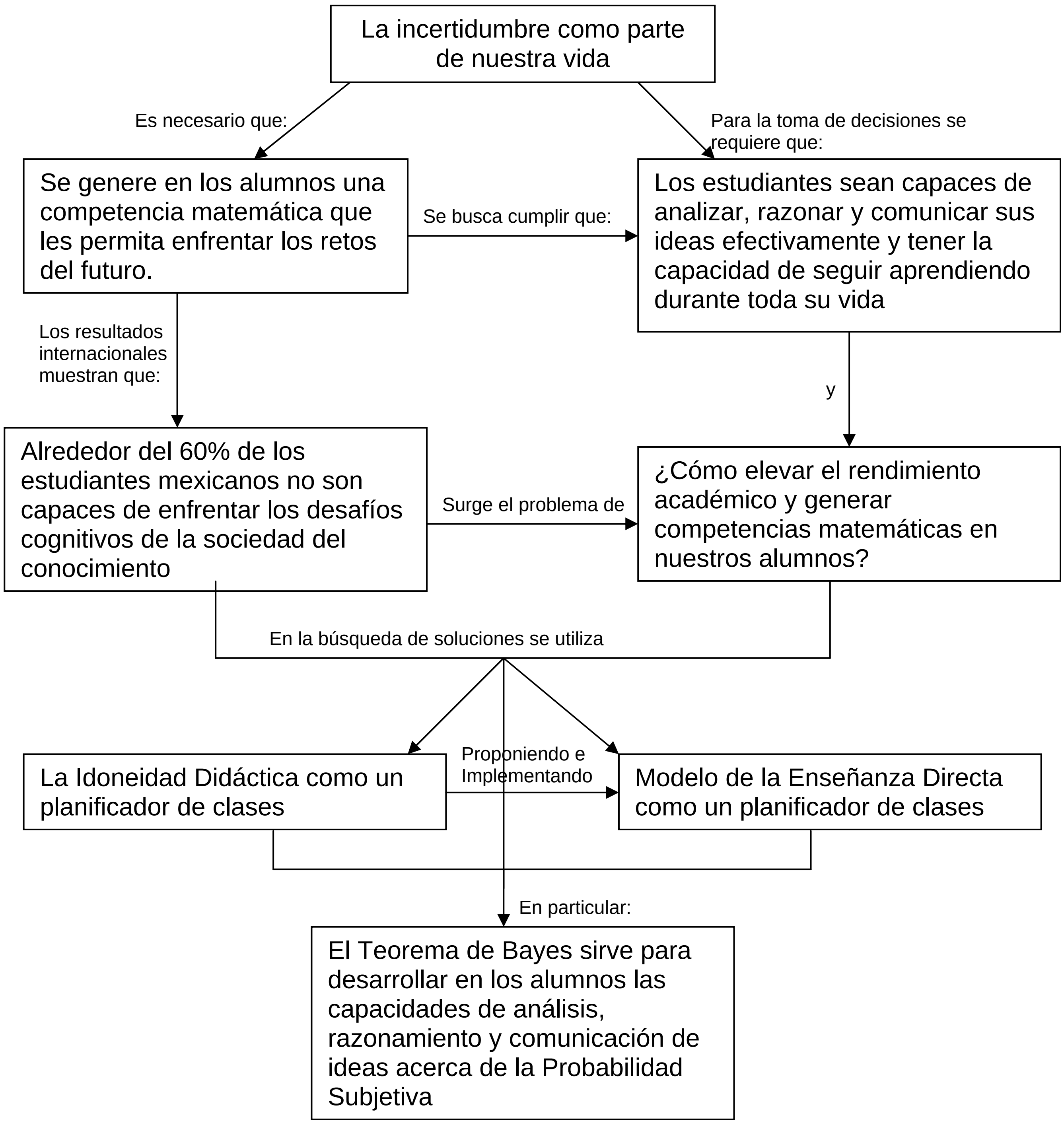
I. EL MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE COMO UN PROBLEMA SOCIAL.

En este Capítulo se abordará la importancia que tiene el que nuestros alumnos cuenten con un acervo básico de conocimientos, en lo que a Estadística y Probabilidad se refiere, que les permita ser capaces de enfrentar los desafíos cognitivos de la sociedad del conocimiento.

Así mismo, los resultados de exámenes internacionales muestran que el tipo de educación que tenemos hoy en día, no es suficiente para desarrollar capacidades matemáticas en los estudiantes mexicanos. Esto nos lleva a reflexionar que la enseñanza de las Matemáticas requiere de cambios que permitan generar competencias y habilidades de mayor nivel que las mostradas en este tipo de exámenes.

Expuesto el problema, se propone una nueva forma de enseñanza basada en la “Idoneidad Didáctica” y el “Modelo de la Enseñanza Directa”, para resolver problemas del tipo bayesiano y que los estudiantes muestren sus capacidades de analizar, razonar y comunicar sus ideas para llegar a la solución de problemas de éste tipo.

Mapa conceptual del desarrollo del capitulo I



I.1. La incertidumbre como parte de nuestra vida

¿Qué es la probabilidad? Cuando escuchamos esta pregunta, en general se tiene cierta idea de lo que significa esta palabra. En diversas ocasiones se ha escuchado o se utiliza la palabra probabilidad en situaciones como: "hoy es probable que llueva"; "es posible que pase el examen, debido a que he estudiado mucho"; o cuando se es niño y se espera ansiosamente que los Reyes Magos regalen juguetes, se dice que, "es muy probable que los Reyes me traigan el regalo, porque sólo pedí uno y son tres Reyes Magos". Esto nos habla de que en general se reconoce que existen eventos o sucesos de cuya ocurrencia no se está seguro, como puede o no suceder, pero también se concibe la idea de que algunos eventos tienen mayor ocurrencia de suceder que otros, este tipo de ideas surgen de manera natural que en la vida cotidiana, de hecho existen eventos a los cuales comúnmente les asignamos un valor numérico. Por ejemplo, cuando se trata de identificar el sexo de un ser humano que esta por nacer (sin haber hecho ultrasonidos) decimos que existe la posibilidad del 50% que sea niño o el 50% que sea niña, esto nos quiere decir, que de manera intuitiva pensamos en la probabilidad, cuando se trata de un hecho en el cual la incertidumbre siempre esta presente, con frecuencia a este tipo de acontecimientos solemos asignarle un valor numérico, que se asocia a un resultado e indica el grado de certeza de que pueda ocurrir el resultado. Lo anterior muestra que es muy común encontrarnos en situaciones las cuales están rodeadas de incertidumbre.

En las noticias, en la literatura, en los deportes, encontramos referencias al azar, como por ejemplo: la probabilidad de que caiga la bolsa, debido a que cayó el precio del petróleo, o la probabilidad de que gane el equipo de Pumas ante el América es alta, por supuesto que eso lo opina la gente a favor del equipo de los Pumas.

Por lo anterior, se puede observar que la "Teoría de la Probabilidad" es una de las ramas de la Matemática que tiene varias aplicaciones en nuestra actualidad, por medio de ésta se abordan: el cálculo de las primas de los seguros, los riesgos nucleares, los pronósticos económicos, políticos y del tiempo, entre otros.

En las últimas décadas, esta ciencia de lo aleatorio ha adquirido mayor relevancia que en las anteriores, hasta el punto de que muchos autores, entre ellos Dacunha (1996), han propuesto la necesidad de que todo ciudadano posea una base sólida en Probabilidad y Estadística, que le permita comprender, juzgar y criticar la avalancha de información que los medios de comunicación le brindan día con día, generando así una competencia matemática.

Pero, uno de los grandes problemas en la educación de nuestro país es ¿cómo generar las competencias matemáticas en nuestros alumnos para elevar su rendimiento académico? La educación actual, le ha dado un gran impulso al desarrollo de las competencias, buscando elevar el rendimiento académico, debido a que los resultados internacionales (en especial los exámenes de PISA) han dado muestras de que la mayoría de los estudiantes de nuestro país son incapaces de realizar las tareas más simples y básicas en el Área de Matemáticas.

I.2. Los resultados de PISA y su impacto en los estudiantes mexicanos.

El PISA, sus siglas en inglés que significan el Programme for Internacional Student Assesment, (en español es **"Programa para la evaluación de los Estudiantes**"), es un estudio internacional comparativo de los Sistemas Educativos, coordinado por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE).

El propósito de PISA es evaluar el grado de preparación de los estudiantes, para enfrentar los retos del futuro, si son capaces de analizar, razonar y comunicar sus ideas efectivamente y si tienen la capacidad de seguir aprendiendo durante toda su vida. El PISA **evalúa**, por tanto, **habilidades o competencias de los estudiantes de 15 años**, en los **dominios de Ciencias, Lectura y Matemáticas.**

En cada país una institución asume la representación y responsabilidad de PISA, bajo la coordinación del Consorcio Internacional. En México el responsable es el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), organismo descentralizado creado en 2002 para encargarse de evaluaciones nacionales.

PISA se aplica cada tres años, con énfasis en un dominio diferente. Por ejemplo: En el 2000 el dominio fue Lengua Materna; en donde participaron 41 países; en 2003 en Matemáticas y participaron 41 países y, en el 2006 en Ciencias y participaron 57 países. En cada país la evaluación se aplica aproximadamente a 5,000 estudiantes de 150 escuelas. Sin embargo, los países participantes pueden solicitar ampliar su muestra de escuelas para tener mayor representatividad.

En el caso de Matemáticas, la evaluación de PISA 2003 se constituyó por 85 preguntas distintas, con diferentes niveles de dificultad, se midió el desempeño de los estudiantes en los siguientes aspectos.

- **Reproducción.** Comprende el conocimiento de los hechos, la representación, el reconocimiento de equivalencias, la retención memorística de objetos y propiedades matemáticas, el desarrollo de procedimientos de rutina, la aplicación de algoritmos estándar y el desarrollo de destrezas técnicas.

- **Conexión**. Tiene el propósito de resolver problemas sencillos se establecen conexiones e integración de información entre las diferentes ramas y campos de las matemáticas. A pesar de que se supone que los problemas no son rutinarios, éstos si requieren grados de conceptualización o matematización relativamente bajos.

- **Reflexión.** Se espera que el estudiante sepa qué es una demostración matemática y en que difiere de otros tipos de razonamiento matemático;

comprenda y evalué cadenas de diferentes tipos de razonamiento matemático; tenga un cierto sentido de la heurística y logre crear argumentos matemáticos.

En la evaluación de PISA existen 6 niveles de medición, en el caso de México una pequeña minoría de los estudiantes es capaz de realizar las tareas más complicadas y se ubica en el nivel 6, mientras que quienes sólo pueden realizar tareas sencillas se ubican en el nivel 1. Los alumnos que no son capaces ni siquiera de completar estas tareas, se ubican en el nivel “inferior a 1”, como lo muestra el siguiente cuadro:

Cuadro comparativo de los resultados de PISA 2003, para el Área de Matemáticas, promedio de la OCDE y México

Aspectos evaluados	**Resultados**		**Niveles de comprensión y habilidad**						
	Casos	**Media**	**-1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Espacio y forma	OCDE	496	10.6	14.2	20.4	21.5	17.2	10.4	5.8
	México	382	39.1	27.8	20.6	9.4	2.5	0.5	0.0
Cambio y relaciones	OCDE	499	10.2	13.0	19.8	22.0	18.5	11.1	5.4
	México	364	47.2	24.1	17.0	8.6	2.6	0.4	0.1
Cantidades	OCDE	501	8.8	12.5	20.1	23.7	19.9	11.0	4.0
	México	394	35.5	25.0	21.4	12.4	4.6	1.0	0.1
Incertidumbre	OCDE	502	7.4	13.3	21.5	23.8	19.2	10.6	4.2
	México	390	35.	30.	21.	9.5	2.7	0.5	0.

			3	6	3				0
Total	OCDE	500	8.2	13.2	21.1	23.7	19.1	10.6	4.0
	México	385	38.1	27.9	20.8	10.1	2.7	0.4	0.0

Fuente*: Learnig for Tomorrow's World. Firs Results from PISA 2003, OCDE, París, 2004*

Llama la atención, sobre todo, la proporción de estudiantes mexicanos calificados como deficientes en Matemáticas, es decir, aquellos que no alcanzan ni siquiera el primer grado en la jerarquía de valores (38.01%). Si a esos se les aúna el grupo de alumnos que calificaron en el nivel inicial (27.9%), tenemos que más de dos terceras partes de los jóvenes de 15 años, aún en la escuela, cuentan a lo mucho, con capacidades iniciales para enfrentar los desafíos cognitivos de la sociedad del conocimiento. En el mismo sentido, la distribución muestra que apenas una proporción del 0.4% de los alumnos mexicanos califica en niveles satisfactorios (5 y 6 de escala), cuando cerca del 15% de los estudiantes de la OCDE accede a los mismos.

Según los estudios realizados por la OCDE dan muestra de que los estudiantes motivados, son los que confían en su capacidad y que con regularidad aplican estrategias eficaces de aprendizaje, tienden a mostrar un mejor desempeño escolar. Sin embargo, los enfoques positivos no sólo contribuyen a explicar el desempeño estudiantil, sino que son resultados importantes de la educación por derecho propio. Los estudiantes que aprenden con eficacia cuando terminan sus estudios y, en especial, los que han conseguido regular su propio aprendizaje, a menudo se considera que tienen una mayor probabilidad de continuar formándose a lo largo de su vida.

Los resultados de los exámenes de PISA nos otorgan una medición en la solución de problemas los cuales se centran en una serie de procesos que los estudiantes necesitan realizar al enfrentarse a un problema, a ver:

- Comprensión de una situación;
- Identificación de información o restricciones relevantes;
- Representación de alternativas posibles o rutas de solución;
- Selección de una estrategia de solución;
- Solución del problema;
- Revisión o reflexión acerca de la solución; y
- Comunicación del resultado.

Poco menos de uno de cada cinco jóvenes de 15 años, de acuerdo a la OCDE, resuelve problemas de manera *reflexiva y comunicativa*, con capacidad de realizar tareas difíciles.

Mientras que en México, más del 50% de los alumnos se encuentran ubicados por debajo del nivel 1, es decir, no pueden resolver problemas básicos.

Al mostrar los resultados es importante preguntar, ¿qué puede hacer un docente para elevar el rendimiento académico de los estudiantes mexicanos? Obviamente no sólo se trata de elevar un número, sino tratar de que los estudiantes mexicanos resuelvan problemas de manera reflexiva y comunicativa, para poder aumentar la capacidad en nuestros estudiantes para realizar las tareas difíciles.

Estas inquietudes, en la Enseñanza de las Matemáticas, son las que despertaron el interés de esta investigación. Para responder la problemática tratada en el párrafo anterior, este trabajo investigó posibles soluciones en la Didáctica de las Matemáticas y en Modelos de Enseñanza-aprendizaje de la Psicopedagogía. Durante la investigación se encontró que la “Idoneidad Didáctica” (Font *et. al*.:2006), como un planificador de las clases, y el “Modelo de la Enseñanza Directa” (Eggen: 1991), como estrategia de enseñanza, pueden contribuir en gran medida a elevar el rendimiento académico de los estudiantes, permitiendo que ellos resuelvan problemas de una manera reflexiva y a su vez comuniquen sus resultados. Son tantas las ramas de las matemáticas en los cuales se puede aplicar este tipo de planeación, así como la estrategia indicada que este trabajo, que no podría dar cabida a la inmensidad de resultados. Por lo anterior, en esta investigación se acotaron las dimensiones, solamente al aspecto de la incertidumbre con base en la enseñanza de la Probabilidad Condicional Inversa, la cual se trata través del Teorema de Bayes, que pretende que los estudiantes resuelvan problemas del tipo bayesiano y lleven a cabo la serie de procesos que se necesitan realizar al enfrentarse a un problema como lo marca los exámenes de PISA, citados anteriormente.

I.3. Idoneidad Didáctica como planificador de clases

De acuerdo a Font, *et. al*. (2006) la *Idoneidad Didáctica* se concibe como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.

*Idoneidad epistémica: "*Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia" Dentro del contexto de este trabajo, consiste en dar a los estudiantes situaciones-problemas*,* en los cuales se realizó una selección de una muestra representativa de problemas del tipo bayesiano articulados con situaciones de contextualización ejercitación y aplicación del Teorema de Bayes, *lenguaje adecuado,* para el trabajo con adolescentes y hace uso de diferentes modos de expresión verbal y gráfico (que en el caso de la Probabilidad Condicional se puede manejar a través de diagramas de árbol y tablas de contingencia); y *simbólico,* que desde el punto de vista de la Probabilidad, consiste en el uso de una notación adecuada. Al mismo tiempo se requiere de *elementos regulativos,* los cuales se refieren a dar definiciones y procedimientos de enseñanza, clara y correctamente enunciados, adaptados al Nivel Medio Superior; y, por último, establecer relaciones, articulando de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Idoneidad cognitiva: Consiste en la identificación de los conocimientos previos y su planeación para estructurar el nuevo tema a implementar, se incluyen actividades de planeación y refuerzo, y exhibe una evaluación para ver el nivel de adquisición de los contenidos abordados en el tema.

Idoneidad mediacional. Los componentes de esta idoneidad son el uso y elaboración de *materiales didácticos adecuados*, para su adaptación con grupos de todo tipo (en este caso numerosos aproximadamente de 50 a 60 alumnos) y la adaptación a un aula que sólo cuenta con pizarrón y sillas movibles, situación que se presenta en los grupos de la ENP.

Idoneidad emocional. Se basa en las configuraciones didácticas que motiven la acción y la participación de los alumnos, tomando en cuenta sus intereses, afectos y emociones, hacía las matemáticas. Para ello, es necesario seleccionar tareas o situaciones didácticas, las cuales se vinculen con los conocimientos, ideas o experiencias previas de los estudiantes, para así, despertar su interés en la Matemática.

Se trata de promover actitudes en los estudiantes, en las cuales se incentive la perseverancia, la responsabilidad, la ayuda mutua, respeto a la diversidad, tolerancia, dialogo o inclusión. La creación de un “clima” de respeto mutuo y de trabajo cooperativo será un factor positivo para desarrollar configuraciones didácticas que motiven la acción y la participación del aprendizaje y así lograr un mayor aprendizaje por parte de los estudiantes.

Por otra parte, es necesario que el docente evite que sus alumnos sientan rechazo o miedo a las Matemática, permitiendo que los estudiantes expresen sus dudas y compartan sus opiniones acerca del tema en cuestión.

Idoneidad interaccional. Esta consiste en la interacción del docente con los alumnos. El docente tiene que: hacer una presentación adecuada de los alumnos; reconocer y resolver los conflictos de los alumnos, interpretando sus silencios, sus expresiones faciales y corporales, sus preguntas y, de éstas, lograr un juego de preguntas y respuestas; buscar diferentes recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos; dar una dinámica de clase de tal manera que permita la inclusión y no la exclusión de sus estudiantes. Por otra parte, a través del *aprendizaje cooperativo* se favorece el diálogo, la comunicación y la inclusión entre los mismos estudiantes. Además, se presenta una evaluación formativa, que permite, se observe sistemáticamente el progreso cognitivo de los alumnos.

Idoneidad Ecológica. Permite una adaptación del tema en el currículo en cuanto este corresponde a una directriz del mapa curricular, la Probabilidad contribuirá a la formación socio-profesional de los estudiantes, los significados se relacionan con otros contenidos, tanto de las Matemáticas, como su relación con otras materias.

Para el desarrollo de la Intuición Probabilística, por lo tanto, se consideraron los 6 aspectos que Font cita, debido a que integra los medios de enseñanza para alcanzar el objetivo de *Matematizar*[1]. La estrategia didáctica para la planeación de las clases será el Modelo de la Enseñanza Directa.

I.4. El Modelo de la Enseñanza Directa como Estrategia Didáctica.

El "Modelo de la Enseñanza Directa" (Eggen: 2001), es una *Estrategia Constructivista*, en la cual se propicia una discusión a través de la exposición del docente. Este tipo de estrategia también recibe el nombre de "Descubrimiento Guiado", debido a que el alumno aprende observando, actuando, resolviendo ejercicios, etc., bajo un marco conceptual y una serie de objetivos claros, sobre qué están haciendo y por qué lo hacen. Es importante que exista una mediación conceptual por parte del docente que

---

Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos relevantes, descubrir irregularidades, relaciones y estructuras.[1] *vid.* García Cruz, José Antonio. *"La didáctica de las Matemáticas una visión general"*.

genere en los alumnos la necesidad de descubrir su propio conocimiento a partir de preguntas y ejemplos que originen la inducción.

En virtud de lo anterior, el docente debe:

- Exhibir y modelar claramente a los alumnos aquello que han de aprender.
- Brindar la oportunidad de que el alumno aplique lo aprendido.
- Desarrollar la retroalimentación apropiada y/o, en su caso, correctiva, así como proveer la orientación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

El docente, en todo momento de la enseñanza, tiene que procurar:

- Comunicar a los alumnos lo que van aprender y ayudarles a relacionarlo con sus experiencias, ideas o conocimientos previos.
- Modelar una habilidad o implementar u proceso determinado y verbalizar las reflexiones que tengan lugar.
- Promover la practica guiada de una habilidad o proceso.
- Resumir lo que se ha aprendido y verbalizar cómo y cuándo aplicarlo.
- Promover la práctica independiente de los alumnos buscando ejercicios que ayuden a desarrollar la habilidad o de aplicar los procesos adquiridos.

Enseñar a los alumnos a autorregular la comprensión en la solución del ejercicio o tarea a emprender. Para ello es necesario resumir el contenido, clarificar sus dudas y generar preguntas que induzcan a la solución de la tarea propuesta.

El “Modelo de Enseñanza Directa” en su fase de implementación, transcurre en cuatro etapas: Introducción, Presentación, Práctica guiada y Práctica independiente las cuales se realizan en forma cronológica, con propósitos específicos. El orden es proveer una visión general, modelar una práctica por parte del docente, proporcionar un espacio en el que el alumno practique el nuevo contenido en forma individual y grupal; por último, una fase en la que el alumno practicará el nuevo contenido en un contexto escolar.

También permite que los estudiantes usen habilidades del pensamiento y razonamiento probabilístico a situaciones problema que estén, de alguna manera, estructuradas y en donde el estudiante pueda establecer una representación matemática del “mundo real”. Por otra parte, el estudiante usa el razonamiento y la comprensión para interpretar y analizar la información dada, para desarrollar modelos apropiados y realizar procesos de cálculo secuenciales; y bajo esto, comunique razones y argumentos de la solución de un problema.

El Teorema de Bayes nos permite el desarrollo de todas estas habilidades, por ser un método estadístico que requiere que el estudiante use el razonamiento y la comprensión para interpretar y analizar la información dada (identificar las probabilidades simples y condicionales establecidas en el problema), para desarrollar modelos apropiados (realizar diagramas de árbol y tablas de contingencia) y poder realizar procesos de cálculo secuenciales (obtener la probabilidad total); y que lo lleve a comunicar razones para la obtención de una probabilidad condicional en circunstancias de dependencia.

Este Teorema tiene gran utilidad, porque nos permite contrastar las ideas intuitivas anteriores, con la información obtenida después de un desarrollo probabilístico. De esta manera, la investigación contribuye al desarrollo de la intuición probabilística, para lograr que los alumnos tengan un mejor manejo de su propia incertidumbre.
En conclusión, podemos ver lo poco que se ha avanzado en el desarrollo de las competencias matemáticas, en los estudiantes mexicanos. A partir de esta información, se pueden generar nuevas estrategias de Enseñanza y Aprendizaje, con las que los alumnos sean capaces de argumentar las soluciones a un problema bayesiano, dado en su entorno natural, social, político o económico bajo el manejo de un lenguaje comprensible.

Un aspecto importante es vincular los conocimientos previos de los estudiantes con el nuevo contenido y orientar sus intuiciones hacia la solución de este tipo de problemas, para lograr una mejor comprensión del tema y desarrollar en ellos un aprendizaje que de las bases para la construcción de nuevos conocimientos.

II. LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD: VIA LOS PROBLEMAS DE TIPO BAYESIANO

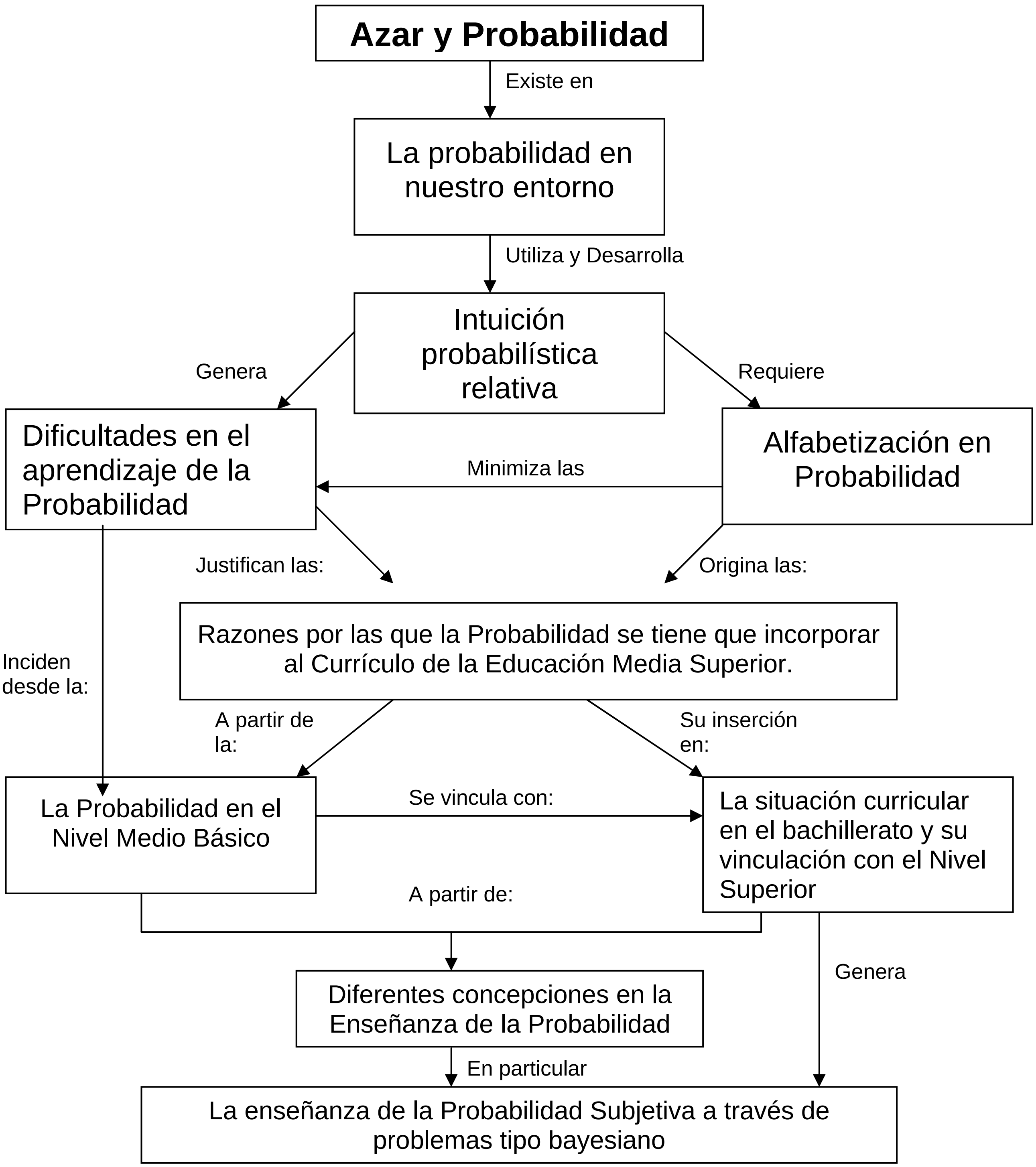
En este capítulo se presentan los diferentes matices que se dan en contextos de azar y las consecuencias generadas en el manejo de la probabilidad. Se analiza la clasificación de los fenómenos aleatorios, divida en cuatro grupos, para los campos de aplicación de la Estadística, en el hombre: el Mundo Biológico; su Mundo Físico, su Mundo Social y su Mundo Político.

Para los fines de esta investigación, en el material didáctico que se utiliza en la Secuencia Didáctica, sólo se consideraron: el Mundo Biológico; el Mundo Social y el Mundo Físico. Así mismo, se determinará como la *Intuición Probabilística* a menudo ofrece conclusiones inmediatas, que pueden ser en ocasiones engañosas provocando llegar a resultados desastrosos.

Por lo tanto, se estudiará la manera de cómo se toman las decisiones en momentos de incertidumbre que conllevan a la alfabetización en Probabilidad, lo cual justifica la inserción de la materia de Probabilidad en el Currículum de la Educación Media Superior, en particular en la ENP, así como su vinculación con el Nivel Medio Básico y el Nivel Superior.

Por otra parte, se muestran las diferentes concepciones que se generan en la enseñanza de la Probabilidad (Clásica, Frecuencial, Axiomática y Subjetiva) y los problemas de tipo bayesiano, dentro del marco de la Probabilidad Subjetiva.

Mapa Conceptual del Capitulo II



II.1. Azar e Incertidumbre

Incertidumbre, en su definición más extensa, es la: "*Expresión del grado de desconocimiento de una condición futura*"[10]. Inevitablemente la incertidumbre va ligada al azar, pero en la vida cotidiana existen muchas referencias al azar, y por lo tanto, ¿cuál es el significado atribuido a ésta palabra?[11]

Para hacer referencia al azar existen otros términos, usados con frecuencia en el lenguaje cotidiano, con un significado similar, aunque pueden presentar matices diferenciadores según el contexto. Entre ellos citamos los siguientes: casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado, inopinado, ocasional o por suerte. Por ejemplo: Casualmente me encontré a Luis; eventualmente veo a Luis; u ocasionalmente veo a Luis.

Pero, existen expresiones coloquiales usadas con frecuencia con el mismo significado, por ejemplo: De chiripa me encontré a Luis; o sin querer vi a Luis y otras más como: de rebote, por rechazo, o sin intención. Si todas estas expresiones dan a conocer un mismo concepto, esto genera la idea de la variedad de matices para referirse a un mismo evento en el cual se involucra el azar.

[10] *http://www.greenfacts.org/es/glosario/ghi/incertidumbre.htm [octubre 2008]*

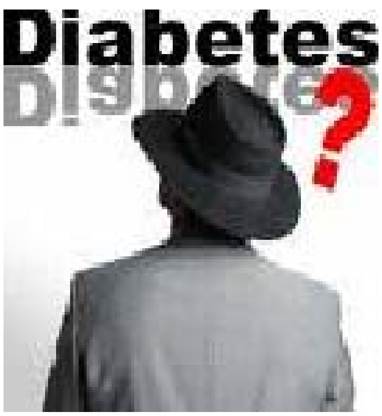
11 Azar se de define la cualidad de ser aleatorio como aquello que es <<Incierto. Se dice de lo que depende de la suerte o el azar>>, siendo el azar la <<supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención intencionada humana ni divina>> Como también, encontramos que el origen epistemológico de la palabra azar: <<Del árabe "zahr", flor, por la que se pintaba una de las caras del dado>>. Esta acepción etimológica nos evoca un Experimento en gran medida paradigmático de los fenómenos aleatorios: el lanzamiento de un dado, que permite apreciar con nitidez el carácter imprevisible del resultado o acontecimiento en cuestión. vid., María Moliner. Diccionario del uso del español. sic., Díaz Godino et. al. Azar y Probabilidad. Matemáticas: Cultura y aprendizaje.p.14

II.2. La Probabilidad en nuestro entorno

Los fenómenos aleatorios, como se ha mencionado, se manifiestan en el entorno de nuestra vida cotidiana, por ello Tanur y Cols. (1971) [*sic.,* Godino, *et. al*.:Azar y Probabilidad:15] clasifican la fenomenología del azar, para los campos de aplicación de la Estadística, en cuatro grupos: el mundo biológico, físico, social y político.

II.2.1.*El Mundo Biológico.*

Una aplicación del Mundo Biológico, en el campo de a medicina son las características hereditarias, por ejemplo: la posibilidad de contagio o no de una enfermedad, la duración de cierto síntoma, o la posibilidad de un diagnóstico correcto: como es el caso del siguiente problema bayesiano:



Un adulto mayor de 50 años se selecciona al azar en una comunidad, en la cual 9% de quienes rebasan esa edad sufren de diabetes, por lo que se les somete a una prueba simple de nivel de glucosa para detectar o desechar la presencia del padecimiento. Sin embargo, el examen no es totalmente confiable, pues al 3% de las personas que no sufren el mal les señala como "positivos" mientras que el 15% de aquellos que sí están enfermos, la prueba resulta "negativa".

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ese individuo tenga diabetes, dado que el resultado marca "positivo"?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no padezca ese mal si marca "negativo"?

II.2.2. *El Mundo Social.*

El hombre, bajo el instinto gregario, no vive aislado, va conformado grupos como son: la familia, el vecindario, la escuela, el trabajo, que a su vez le generan situaciones en las que predomina la incertidumbre como son: el ocio, el número de hijos por familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias, por lo tanto vive en sociedad.

Así, en la escuela, por ejemplo, ¿podemos prever las preguntas del próximo examen?:

En el distrito universitario de Jauja los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20% estudian arquitectura, el 35% medicina y el 45% economía.
El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%.

a) Elegido un alumno al azar determinar la probabilidad de que haya acabado los estudios.
b) Dado que terminó sus estudios haya estudiado medicina.

Por otra parte, en México, se implementa la campaña “Conduce sin alcohol” (Diciembre 2007), la cual consiste en un dispositivo policíaco que se ubica en las principales avenidas de la ciudad, detienen al azar a los conductores haciendo que soplen en una boquilla del “alcoholímetro” (aparato que sirve para medir los niveles de alcohol por mililitro en la sangre).En caso de rebasar de 0.08 grados por litro de sangre (nivel máximo permitido en la ingestión de alcohol), se considera que esa persona ya tiene trastornos de intoxicación, debido a que el hígado solo puede metabolizar de 6 a 7 grados de alcohol por hora. Al pasar esta cantidad la vigilancia, la percepción, la coordinación y los reflejos se ven afectados, prohibiendo la conducción bajo estas condiciones.

Las estadísticas muestran que los viernes por la noche, aproximadamente 30% de los automovilistas de la ciudad de México conducen en un estado de ebriedad. Suponga, además, que 85% de los ebrios hacen caso omiso de los señalamientos de tránsito, mientras que sólo 60% de los sobrios lo respetan.

a) Si alguien observa un viernes por la noche que un automovilista hace caso omiso de los señalamientos, ¿Cuál es la probabilidad de que esté ebrio?
b) Si un conductor respeta las señales de tránsito, ¿Cuál es la probabilidad de que este sobrio?

II.2.3. *El Mundo Físico*

Las situaciones del Mundo Físico, se dan en la naturaleza consisten: en fenómenos meteorológicos, como: la duración, intensidad y extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas mínimas y máximas; la intensidad y dirección de los vientos, entre otros, y se consideran como variables aleatorias, al igual que las consecuencias de estos fenómenos.

Otro factor que también se considera como fenómeno físico, es la transformación de las materias brutas a materias primas como son: el petróleo y sus derivados; diversos minerales; fuentes de energía (nuclear, eléctrica, hidroeléctrica, eólica), las cuales están sujetas a variaciones de carácter aleatorio.

Medir magnitudes es otra fuente de variabilidad aleatoria, por ejemplo, cuando pesamos, o medimos tiempo, longitudes, etc., cometemos errores aleatorios.

El parte meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:
Que llueva: probabilidad del 50%.
Que nieve: probabilidad del 30%
Que haya niebla: probabilidad del 20%.
Según estos posibles estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente es la siguiente:
Si llueve: probabilidad de accidente del 20%.
Si nieva: probabilidad de accidente del 10%
Si hay niebla: probabilidad de accidente del 5%.
a) Obtén la probabilidad de que haya ocurrido un accidente.
b) Si hubo un accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que este nublado?

II.2.4. *El Mundo Político*

Actualmente los gobiernos, a cualquier nivel (local, nacional o de organismos internacionales), necesitan tomar múltiples decisiones que depende de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Por este motivo, la administración precisa de la elaboración de censos y del empleo de técnicas cuantitativas; las cuales consisten en realizar una o varias investigaciones sobre una muestra de sujetos representativos de una población, utilizando procedimientos estandarizados de interrogación (evaluaciones diagnósticas), con el fin de conseguir mediciones cuantitativas sobre una gran cantidad de características objetivas y/o subjetivas de la población. Estás técnicas cuantitativas reciben el nombre de encuestas diversas.

El término *Estadística* se deriva de la palabra latina *status* (que significa “estado”). Los primeros usos de la Estadística implicaron la compilación de datos y la elaboración de gráficas para describir diversos aspectos de un Estado o de un país. En 1662, John Graunt, publicó información estadística acerca de los nacimientos y los decesos de la población en la ciudad de Londres, dando la pauta para nuevos estudios sobre tasas de mortalidad y de enfermedad, tamaño de poblaciones, ingresos y tasas de desempleo.

Por lo tanto, los censos y encuestas diversas ayudan a los gobiernos, Instituciones u Organismos Internacionales, a conocer desde resultados electorales, tasas de desempleo, tasas de emigración-inmigración, índice de precios al consumidor, que coadyuvan de su administración y que por lo tanto, todas estas estadísticas, políticas sociales y económicas se refieren a distintas variables aleatorias relativas a un cierto colectivo o población.

II.3. Intuición Probabilística

Debido a que la probabilidad rodea nuestro entorno, está presenta una diversidad de aplicaciones en nuestra vida cotidiana. Por ello, el estudio de la Probabilidad puede ser visto de manera tan natural como la Aritmética Elemental, siempre y cuando se construyan escenarios en los cuales la probabilidad sea parte de la cotidianidad del individuo. Estos escenarios, en muchos casos, pueden ser dispositivos de azar artificiales como: dados, urnas, pirinola, etc.

Las *Intuiciones Probabilísticas*, son muchas veces utilizadas erróneamente, como en los siguientes casos: cuando se planea una familia, “ya tengo 3 varones, ahora si voy a tener una niña”; sin tomar en cuenta que la probabilidad en este evento no depende del número de niños o niñas que se haya tenido, la probabilidad sigue siendo la misma. El mal del jugador, él cual siempre piensa, ¡como ya he perdido mucho!, ahora si ya voy a ganar, aunque esto le cueste la bancarrota. En los deportes, como el fútbol, cuando juega la Selección Nacional de fútbol, se dice, juega contra la selección de Costa Rica, seguro gana México o al contrario cuando le toca jugar con Brasil, se dice, ya perdió México, sin importar las condiciones en las que se encuentre cada selección.

Es muy fácil, hacer conjeturas sobre un evento, sin considerar otras situaciones que lo condicionan. Es por esto, que las *intuiciones* son difíciles de eliminar, por ello, se requiere un desarrollo paulatino en la *Intuición Probabilística.*

Por lo anterior, autores como Godino y Batanero (1991) consideran que:

> Una cultura científica reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico. *La intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de unos límites muy estrechos*. La comprensión, interpretación, evaluación y predicción de fenómenos probabilísticos no pueden ser confiados a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas, y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de operaciones que no pueden articularse con ellos.
> Nuestro sistema de educación tiende a dar a los alumnos la impresión de que para cada pregunta existe una sola respuesta sencilla y clara, que no existe nada intermedio entre lo verdadero y lo falso. Esto no es demasiado acertado, ya que los problemas que encontrarán a lo largo de su vida tendrán un carácter menos definido. Así pues, parece importante que durante los años de la escuela se enseñe a los estudiantes el carácter específico de la lógica probabilística, la forma de distinguir sus grados de incertidumbre y que se les enseñe a comparar sus predicciones y extrapolaciones particulares con lo que realmente sucede; en una palabra, que se les enseñe a ser dueños de su propia incertidumbre.[12]

Por otra parte, para el estudio de la Probabilidad, a nivel de bachillerato, se requiere de conocimientos matemáticos elementales, como el manejo de la Aritmética, y el uso de ecuaciones lineales. A este respecto Godino y Batanero (1991) opinan que: “la Probabilidad puede ser aplicada a la realidad tan directamente como la aritmética elemental, no siendo preciso el conocimiento de teorías físicas ni de técnicas matemáticas, complicadas”[13]. Por sus muchas aplicaciones, adecuadamente comprendida, *la Probabilidad proporciona una excelente oportunidad para: mostrar a los estudiantes cómo Matematizar*, el proceso de construcción de modelos; la diferencia entre “modelo y realidad”; oportunidades para aplicar las teorías de aprendizaje aceptadas con mayor generalidad; contribuye a enfatizar el papel de la resolución de problemas; propicia la actividad del alumno en la construcción del conocimiento y la

[12] Díaz, *et. al., op cit.* P.46
[13] *Ibid.,* p. 12

formulación del lenguaje matemático; validación, demostración y razonamiento de las ideas matemáticas; y, la institucionalización colectiva del conocimiento matemático en el proceso cognitivo.

Para extender los conocimientos a problemas que se relacionan con la cotidianidad del estudiante, se proponen problemas como el siguiente: Se va a elegir un representante de 5 posibles candidatos de una escuela para un concurso de matemáticas. Se realiza una encuesta en el grupo y se obtiene la probabilidad para cada uno de estos candidatos. Bajo este ejemplo se le podría explicar a los alumnos que así se obtienen las encuestas para las elecciones a la presidencia, sólo que la población que se escoge es una muestra aleatoria de todo el país y no un grupo como se hizo en ese momento.

En consecuencia, la enseñanza de las nociones probabilísticas puede ser llevada a cabo mediante una metodología heurística y activa, a través del planteamiento de problemas concretos y la realización de experimentos reales o simulados.

II.4. Alfabetizar en Probabilidad

Es necesario el conocimiento de la Teoría de la Probabilidad para una comprensión adecuada de los métodos estadísticos, que hoy por hoy son útiles e indispensables en los campos científico, profesional y social; debido a que la Probabilidad brinda un modelo para medir la incertidumbre y en consecuencia, los modelos probabilísticos son el fundamento de la mayor parte de la Teoría Estadística. De acuerdo a Acosta e Ibáñez (2008):

> La estadística y la probabilidad es una de las disciplinas que más importancia han tenido desde los inicios mismos del hombre. En las últimas décadas, sus métodos y aplicaciones han permeado la mayoría de las áreas de la ciencia. La realidad es que se ha convertido en una disciplina que evolucionó para quedarse e incorporarse a la cultura de la sociedad moderna.
> Sin embargo, en contextos más generales, como en las notas que aparecen en medios masivos de comunicación, es común encontrar información con

errores en la presentación y valoración de los datos. Del mismo modo, en documentos académicos se pueden encontrar representaciones gráficas y tablas mal elaboradas. En las aulas escolares ocasionalmente se detectan concepciones erróneas sobre conceptos estadísticos básicos. Actualmente la estadística está mucho más relacionada con otras disciplinas que con la Matemática. Se ha usado como lenguaje y método de investigación científica en áreas tan diferentes como la lingüística, geografía, física, ingeniería, psicología y economía (ICMI/IASE, 2006).
Lo anterior tiene naturalmente implicaciones desfavorables para la sociedad que los lee, observa o escucha. Por tanto, para el ciudadano común el saber estadística se ha convertido en una necesidad y una obligación de su educación integral porque implica más que su uso como herramienta, técnica o método[14].

II.5. Razones por las que la Probabilidad se debe incorporar al Currículo de la Educación Media Superior (EMS)

Como se ha visto, la Probabilidad es rica en problemas interesantes en sí mismos, que pueden despertar o motivar el gusto hacia las Matemáticas en los alumnos., en contraposición al tradicionalismo del rechazo y miedo hacia las mismas.
Existen diversas razones, principios y argumentos, que validan la incorporación a Probabilidad al currículo de la EMS, en particular a la ENP, y que a continuación se presentan:

- Los conceptos de la Teoría Elemental de la Probabilidad son ricos en resonancias intuitivas. Cotidianamente tenemos que evaluar y tomar decisiones en circunstancias donde hay incertidumbre o interviene el azar. Gracias a ello desarrollamos ciertas intuiciones o ideas preconcebidas acerca de los fenómenos probabilísticos, y en muchas ocasiones las intuiciones acerca de la probabilidad que muestran los alumnos son erróneas, estas ideas preconcebidas erróneas no sólo son atribuibles a la falta de formación matemática, según demuestran estudios de diversos psicólogos como Tversky y Kahneman, sino que tienen un origen psicológico, Shaughnessy (1982).[15] Algunas de estas creencias erróneas

[14] Cuevas Acosta Jesús Humberto e Ibáñez Bernal Carlos.(En línea) *"Estándares en educación estadística y necesidad de conocer la base teórica y empírica que lo sustentan"*.p.34.
[15] *vid.,Díaz, op.cit. p. 46.*

son sistemáticas y otras dependen de los patrones de creencias previas individuales de los sujetos. Esta contradicción entre lo intuitivo y los errores probabilísticos es tema de la siguiente sección de “Dificultades en el aprendizaje de la probabilidad”. Por ello, la enseñanza de la probabilidad proporciona al educador un reto y un excelente comienzo para desarrollar la intuición probabilística en los estudiantes y acercarse gradualmente a formulaciones matemáticas más precisas.

- La Probabilidad proporciona un ambiente donde pueden aplicarse con sentido conceptos y técnicas dentro de la matemática misma, relacionados con las fracciones, las cifras de porcentajes, el razonamiento proporcional y la simbolización algebraica. La Probabilidad, tiene por lo tanto, valor para adquirir, reforzar y profundizar en la comprensión de nociones y procedimientos pertenecientes a otras partes de las matemáticas, que son recurrentes a lo largo de la vida del estudiante; Primaria, Secundaria, Bachillerato, en temas de Aritmética, Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral.

- El estudio de la Probabilidad permite un aprendizaje y enseñanza participativa, siempre y cuando se apoye en el conocimiento previo de los conceptos relativos a la misma, permitiendo así, que se incorpore el nuevo conocimiento, según el punto de vista constructivista de Garfield (1995).[16] Además se tiene que ofrecer a los estudiantes la oportunidad de practicar este nuevo conocimiento para así lograr la automatización y la transferencia. Si se logra el ambiente adecuado, entonces los estudiantes podrán por si mismos formular una hipótesis, contrastar sus expectativas con los resultados que se presenta y producir y discutir sus propias explicaciones. Dichas explicaciones ayudan al desarrollo de las nociones matemáticas y, en todo caso, constituyen un terreno fértil para que el profesor enriquezca sus actividades de enseñanza.

[16] *vid.*, Fernández, *op.cit*, p.2.

- Anteriormente se observó que el estudio de la Probabilidad genera modelos matemáticos de los fenómenos de la naturaleza, en donde el hombre se ha encontrado en situaciones que obedecen a un mundo determinista y a otras que pertenecen a un modelo aleatorio. Debido a lo anterior, se menciona que la sociedad se ve inevitablemente obligada a adaptar y reestructurar su sistema educativo, para cumplir con su compromiso de formar a los individuos que la componen. Una persona que vive en esta sociedad moderna debe tener una idea más clara de los fenómenos de carácter aleatorio que influyen en los cambios en su vida, debido a cuenta con más información. Algunos casos que lo ilustran son los siguientes: Cada mañana cuando se dirige al trabajo, un individuo tiene la confianza de que llegará. Sin embargo todos los días muchas personas salieron de sus casas y no lo lograron; esto lo conduce a pensar en los riesgos que debe asumir y los eventuales seguros que debe tomar. Al escoger el banco para sus operaciones un individuo espera que éste tenga solidez; no obstante, todas las decisiones tienen alguna incertidumbre, que se refiere a aquellas situaciones que no se pueden controlar, pero que influirán en el resultado. Si un joven decide iniciarse en el tabaquismo, hoy día existe mucha información que indica el riesgo de enfermar de cáncer. [17]

  Dacunha, [18] señala que el *azar* ha sido un recurso que han utilizado algunas sociedades para resolver diversas situaciones y que en nuestra época hasta se ha intentado utilizar en la asignación de empleos. Agrega, hay que aprender a dudar, a reconocer la incertidumbre, a saber que ella es parte del ejercicio de la ciudadanía. Los ciudadanos deberían integrar a su juicio la dimensión de lo aleatorio, cuando se trata de su responsabilidad individual y de la responsabilidad del estado.

  De esta manera, se debe incluir en los Programas de Matemática el concepto de *aleatorio*, en el Nivel de Enseñanza Media Superior en nuestro país.

[17] *cfr*,.Jimenez, Liliana M. “¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿para qué? y ¿por qué?”
[18] Dacunha-Castelle, D. (1996) *Chemins de L'Aleatorie. Le Hasard et le Risque dans la Société Moderne*.

Así como también, enseñar un conjunto de teorías que den acceso a los estudiantes a los elementos básicos de probabilidades, para que a través de argumentos con validez estadística le permitan entender, analizar e incluso cuestionar y tomar decisiones en su vida cotidiana y contar con una formación mínima para que puedan desarrollarse desde esa perspectiva en cualquier campo profesional o científico. "La probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos" (Pérez, *et. al*: 2000:15). Sólo así se logrará cumplir con el compromiso de formar un individuo que pueda manejar los conceptos básicos del siglo XXI.

- Siguiendo a Batanero:[19] ": Más allá de su comprensión intuitiva, la probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, evidencia proporcionada por los datos, grado de creencia lógico o personal, propensión y modelo matemático que nos ayuda a comprender la realidad. El análisis de los diferentes significados históricos de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, lógico, propensión y axiomático, sugiere que su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, ya que están ligadas dialécticamente.

  Un análisis del currículo de Matemáticas, en la Educación Media Superior, muestra que la enseñanza ha dado primacía a uno u otro significado, de acuerdo a las tendencias pedagógicas del momento, debido a que las controversias que acompañaron la historia de la probabilidad, también han influido las tendencias educativas. Hasta 1970, la visión clásica, basada en cálculo combinatorio fue la dominante y muchos profesores vieron la Probabilidad como una parte secundaria de las Matemáticas, que sólo se interesaba por los juegos de azar, quedando oculta su aplicación a diferentes Ciencias, donde la equiprobabilidad se encuentra raramente.

[19] *vid*, Batanero, Ma del C. y Díaz Carmen. "*Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje*".p.2

Puesto que el razonamiento combinatorio es complejo, además muchos estudiantes encontraron difícil este enfoque, en la década de los setentas, el auge de la teoría de conjuntos aumentó el interés de los matemáticos por la probabilidad, al ser una parte privilegiada para mostrar su aplicabilidad, tanto por su simplicidad, como por su conexión con la realidad. El enfoque axiomático, sin embargo, llevó a una abstracción excesiva para los alumnos del bachillerato, puesto que se centró más en la formalización de la idea de probabilidad y el estudio de sus propiedades matemáticas que en su aplicabilidad a temas de interés para los estudiantes. [20].

El desarrollo progresivo de las computadoras en México y su introducción en la enseñanza ha elevado el interés por la introducción frecuencial de la probabilidad, con un enfoque experimental, donde los estudiantes recogen datos y estiman la probabilidad como límite de la frecuencia estabilizada. Las simulaciones y los experimentos ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos. Pero un enfoque experimental puro de la enseñanza de la Probabilidad no es suficiente, incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar las solución de problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no permite probar que esta solución es la más adecuada, porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en la computadora. Un conocimiento genuino de probabilidad sólo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal. Aunque este estudio debe ser gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes, lo que ha llevado a combinar los enfoques clásico, axiomático y frecuencial, en mayor o menor medida en la Enseñanza Media Superior actual.

Es importante que la visión subjetiva de la Probabilidad cobre mayor atención en la Enseñanza Media Superior, debido a que actualmente la Estadística Bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a

. [20] *Ibidem.*

priori, y, el permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia es lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento .

II.6. Dificultades en el aprendizaje de la Probabilidad

Una de las dificultades en la estimación probabilística, se da como consecuencia del uso impreciso del lenguaje ordinario, esto surge porque a una misma expresión relativa de un mismo fenómeno probabilístico, dos personas le pueden atribuir distintos grados de probabilidad.

La falta del desarrollo de la intuición probabilística, genera errores sistemáticos y conductas estereotipadas persistentes en la toma de decisiones por parte de los individuos ante situaciones de tipo psicológico, distintos autores[21] consideran que una mera exposición de las leyes teóricas de probabilidad, pueden no ser suficientes para superarlos. Incluso la existencia en el alumno de estos sesgos puede dificultar la asimilación de los conceptos formales.

Kahneman, Slovic y Tversky (1982)[22] han identificado dos tipos de estrategias erróneas las cuales de denominan de *representatividad y disponibilidad*. La persistencia de estos errores proporciona una razón crucial para la temprana introducción del pensamiento probabilístico en la Matemática Básica. Resultados de las encuestas, llevadas a cabo, muestran que la mayoría de los alumnos entran en la universidad con un conocimiento escaso o nulo de las nociones probabilísticas y con sesgos en la intuición profundamente arraigados. Puesto que en los cursos pre-universitarios la Probabilidad se introduce usualmente con el Modelo Abstracto de Kolmogorov (conjuntos, espacios muestrales, variables aleatorias), es bastante probable que este tipo de enseñanza no ayude al

[21] Hope y Kelly (1983), Kahneman, Slovic y Tversky(1982). *vid*; Díaz , *op.cit*, p.46-47
[22] I*bidem.*

alumno a superar estos errores, siendo precisa una metodología experimental y heurística para tener éxito en la superación de los prejuicios probabilísticos.

II.6.1.*Representatividad.*

Para explicar la *Representatividad,* guiémonos por el siguiente ejemplo:
La probabilidad de que nazca un varón es un 50% y a lo largo de un año completo habrá más días en los cuales al menos el 60% de los nacimientos corresponderán a varones:

a) En un hospital grande
b) En un hospital pequeño
c) No hay ninguna diferencia

Menciona Batanero, que el mayor porcentaje de respuestas, corresponde a C. Esto denota un conflicto, debido a que, aunque la intuición intentaría reproducir las características de la población, la realidad es que a menor tamaño de la muestra mayor variabilidad presenta.[23]

Así, el error de *representatividad*[24] consiste en adjudicar mayor probabilidad de un suceso desestimando características de la muestra, tales como el tamaño de la muestra.

La estrategia errónea de la *representatividad* (aún en personas formadas en la Teoría de Probabilidad.[25]) surge de las siguientes actitudes:

- Insensibilidad a las probabilidades a priori (probabilidad que se da a conocer antes de realizar el experimento), y la no consideración de las proporciones de los sucesos compuestos en la población.

[23] *Ibidem.*
[24] *Ibidem.*
[25]*cfr,.* Altorresi, *et.al., Sesgos en la Estimación de Probabilidades, para dos situaciones aleatorias,* p.3

- Desconocimiento de los efectos del tamaño de la muestra sobre la precisión de las estimaciones.

- Confianza, sin fundamento, en una predicción basada en la información no válida (supersticiones, etc.).

- Errores de azar, tales como la <<falacia del jugador>>, según la cual, en pruebas repetidas independientes, la aparición de una racha a favor de un resultado aumenta la probabilidad del contrario.

II.6.2. *Disponibilidad*

Otro error característico en la Probabilidad, es la *Disponibilidad,* la cual origina un sesgo sistemático en las estimaciones probabilísticas, porque la gente tiende a pensar que los resultados que pueden recordarse fácilmente son más probables.

Además de los errores de *representatividad* y *disponibilidad*, descritos anteriormente, Shaughnessy (1982)[26] identifica otros dos tipos:

- No considerar la información proporcionada por los experimentos aleatorios anteriores.
- Dependencia de modelos deterministas y sistemas de creencias arraigados (por lo tanto, no apreciar el carácter específico del azar).

Estos errores se ponen de manifiesto en las respuestas al clásico problema bayesiano que se presenta en las investigaciones de Tversky y Kahneman[27], que a continuación se presenta:

[26] *vid;* Díaz, *op.cit.*p. 50.
[27] *Ibidem.*

En una ciudad hay dos compañías de taxis, verdes y azules. El 85% son verdes y el 15% son azules. Uno de estos coches se ve implicado en un accidente de tráfico, y un testigo declara que el taxi era azul. Datos anteriores sobre la veracidad de la identificación hecha por testigos indican que el 80% de los casos, estas identificaciones de color son correctas, pero que el 20% son incorrectas. ¿Cuál es la probabilidad de que el coche del accidente fuera azul?

a)80 % *b)15%* *c)(15/100) x (80/100)%* *d)41 %*

La mayoría de los participantes en las investigaciones de Tversky y Kahneman, y otros, que usan el mismo tipo de tarea, eligen como respuesta a) (estimación que coincide con la fiabilidad del testigo); aunque al resolver el problema, mediante el Teorema de Bayes, se obtiene una probabilidad igual a 0.41 de que el taxi implicado sea azul. En el enunciado hay tres informaciones relevantes para hacer la predicción:

a) las tasas base o probabilidad a priori del suceso; en este caso es del 15%

b) la evidencia específica del caso individual (lo que dijo el testigo);

c) la precisión esperada de la predicción del número de aciertos del testigo, es de un 80%.

Una regla fundamental en Estadística es que la precisión esperada queda modificada por la evidencia y la probabilidad a priori, pero, en lugar de usar esta regla, las personas se fijan solamente en la fiabilidad del testigo Tversky y Kahneman, (1982), denominan *falacia de las tasa base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori del suceso en la población, en la toma de decisiones, en problemas que involucran la Probabilidad Inversa. Este tipo de razonamiento también se ha encontrado en investigaciones en educación matemática (Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998)[28].

A pesar de la unidad del pensamiento lógico, hay que observar que la probabilidad presenta particularidades propias que la distinguen de las Matemáticas Deterministas. Un ejemplo típico es la transitividad: estamos acostumbrados que sí una relación de

[28] *vid.*; Díaz y De la Fuente, I. (2007). "*Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología".* p.p *75-94.*

orden A supera a B, y B supera a C, entonces, A supera a C. Sin embargo, esto no sucede en el terreno de las probabilidades. Es un hecho observado que, en los juegos de azar (por ejemplo una partida de dados), el jugador A le ganó al jugador B, y el jugador B le ganó al jugador C, pero el jugador C le gana al jugador A.

Otra gran dificultad que existe, es no presentar un comportamiento lineal, para ilustrarlo, obsérvese el ejemplo, de la “Paradoja del Cumpleaños”, muy conocido en ésta área de las Matemáticas, la cual dice lo siguiente: como el año tiene 366 días (incluido el 29 de febrero), se tendrían que reunir 367 personas para estar seguros de que por lo menos dos personas del grupo han nacido el mismo día. ¿Por qué?, ahora bien, ¿qué pasa si nos conformamos con tener una certeza del sólo el 50%?, ¿cuántas personas habrá de tener el grupo para que la probabilidad de que, por lo menos dos hayan nacido el mismo día, sea mitad?, a primera vista uno diría que 183 es decir, uno piensa linealmente, si la probabilidad se redujo a la mitad, entonces el número de personas que se necesitan también es la mitad, pero sorprendentemente, sólo bastan 23 personas, lo cual rompe totalmente nuestra intuición y pensamiento lineal. En otras palabras, exactamente la mitad de las veces que se reúnen veintitrés personas elegidas al azar, dos o más de ellas han nacido el mismo día.

Obsérvese la solución en este problema de probabilidad:

Según la regla del producto, cinco fechas distintas se pueden elegir de (365x365X365x365x365) maneras distintas (si se permiten las repeticiones). De estos 365^5 casos, en sólo 365x364x363x362x361 ocurre que no hay fechas repetidas; se puede escoger en primer lugar cualquiera de los 365 días, pero como ya elegí uno me quedan 364 días para elegir el segundo, y así sucesivamente. Así pues, dividiendo $\frac{365\times 364\times 363\times 362\times 361}{365^5}=0.97$, el resultado nos indica la probabilidad de que cinco personas elegidas al azar no cumplan años el mismo día. Y sí restamos esta probabilidad al 1, tendremos la probabilidad complementaria, de que al menos dos personas cumplan años el mismo día, es decir, sólo existe una probabilidad del 0.03=3% de que dos de las 5 personas cumplan años el mismo día.

Ahora realicemos un cálculo análogo para 23 personas que no cumplan años el mismo día, esto sería: $\frac{365 \times 364 \times \cdots \times 334 \times 333}{365^{23}} = 0.5$.

Y sí restamos esta probabilidad al 1, tendremos la probabilidad complementaria de que al menos dos personas cumplan años el mismo día, es decir, sólo existe una probabilidad del 0.5=50% de que dos de las 23 personas celebren su cumpleaños el mismo día.

En este ejemplo, se observa que la probabilidad rompe con el esquema del pensamiento lineal y da pauta a nuevos análisis, lo cual representa un gran reto en la enseñanza de la misma.

Godino menciona (1991), que para desarrollar una *Intuición Probabilística*, y sean satisfechos los requisitos para una cultura científica eficiente, es necesario entrenar, desde los primeros niveles, la base intuitiva relevante al pensamiento probabilístico. En este sentido, la Educación Secundaria tiene un Programa de Estudios, que ofrece un conjunto de ideas fundamentales para iniciar a los alumnos en el desarrollo de las *Intuiciones Probabilísticas*.

II.7. La Probabilidad en el Nivel de Enseñanza Media Básica

Los contenidos de Probabilidad de los Programas de Estudio de Nivel de Enseñanza Media Básica, cuentan con limitado número de definiciones, fórmulas y procedimientos, para calcular probabilidades, están centrados en un conjunto pequeño de ideas fundamentales, que se desarrollan a lo largo de los tres años de esta instrucción, como son:

- La idea de azar y la distinción entre experiencias aleatorias y deterministas.
- El uso de diagramas de árbol y arreglos rectangulares – así como, de otras técnicas sencillas de conteo- para enumerar casos.
- Las nociones frecuencial y clásica de la Probabilidad
- La idea de simulación y Modelo de Urna.
- Propiedades simples de la Probabilidad: eventos complementarios; eventos mutuamente excluyentes y regla de la suma; eventos independientes y regla del producto de las probabilidades.

Es muy importante considerar, que en este nivel, no se consideran las dificultades que otorgan los problemas del tipo bayesiano, debido a que este tipo de problemas se abarcan en el marco del estudio de la Probabilidad Subjetiva, la cual forma parte de los estándares de la educación estadística, según el NCTM (National Council Teachers of Mathematics) de Estados Unidos, para la educación del noveno al doceavo grado de estudios, que en nuestro país equivale a la del Educación a Nivel Medio Superior.

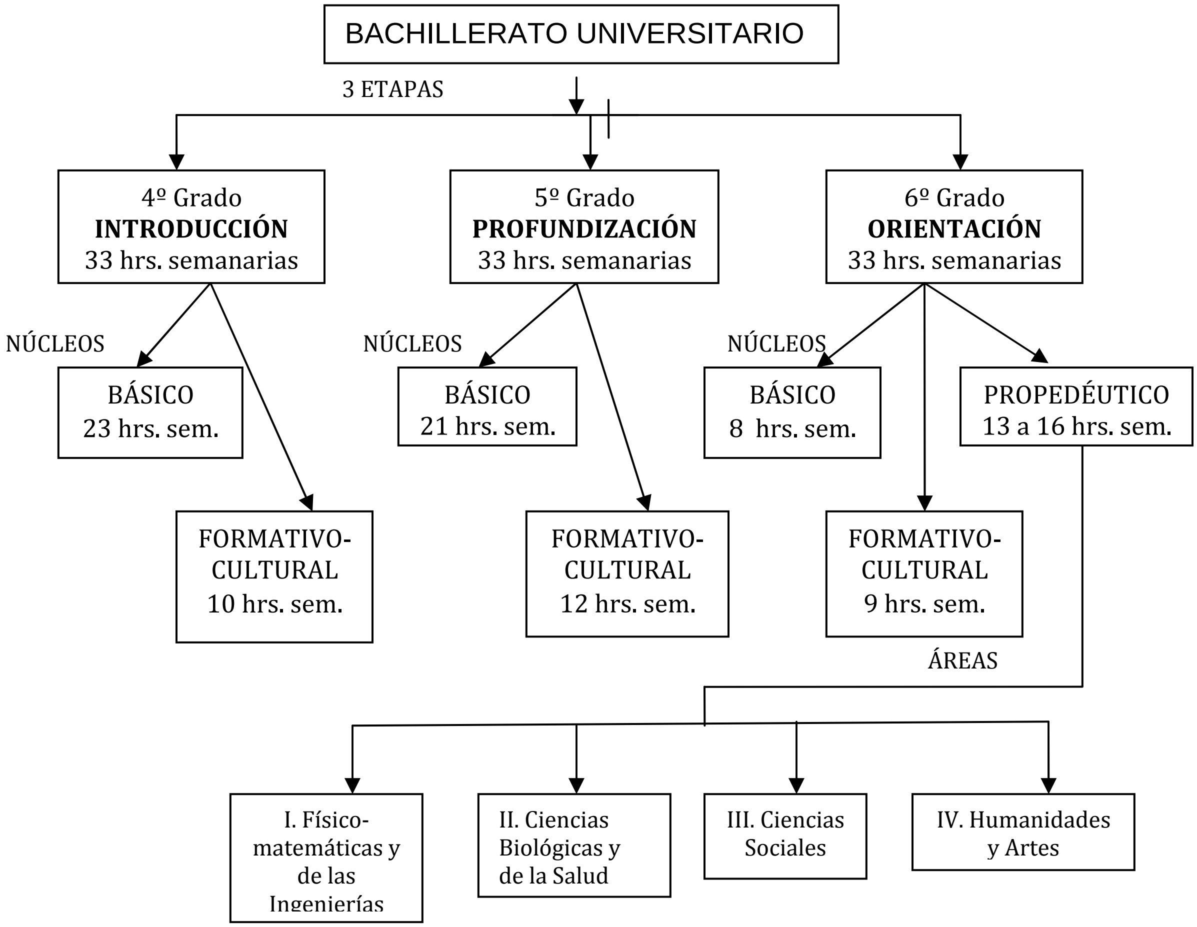
La propuesta de la enseñanza de los problemas de tipo bayesiano, no es un simple consejo o una ocurrencia de los educadores matemáticos, debido a que, según Fischebein (*cfr.* Godino: *Azar y Probabilidad:* 44), la síntesis entre el azar y lo deducible no se realiza completa y espontáneamente, sino es hasta el nivel de las operaciones formales que se realiza como tal, como lo muestran los experimentos donde se requiere que el sujeto reconozca probabilidades iguales en diferentes condiciones experimentales, encontramos que es el adolescente evita lo impredecible y busca dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias.

II.8. La situación curricular en el Bachillerato y su vinculación con el Nivel de Enseñanza Superior.

Las cuestiones oficiales del Bachillerato Universitario de la ENP, inserta la Estadística y Probabilidad en sexto año, dentro del Núcleo Propedéutico, en las cuatro áreas de estudio, como una asignatura optativa de carácter teórico.

El curso de Estadística y Probabilidad está planeado para impartirse con tres horas de clase a la semana. Está estructurado en tres unidades, cuyos contenidos son: en la primera unidad la bases de la estadística descriptiva; en la segunda unidad se reafirman y enriquecen las operaciones entre conjuntos así como su simbología para una mejor comprensión de los contenidos de la tercera unidad que son las bases de la probabilidad.

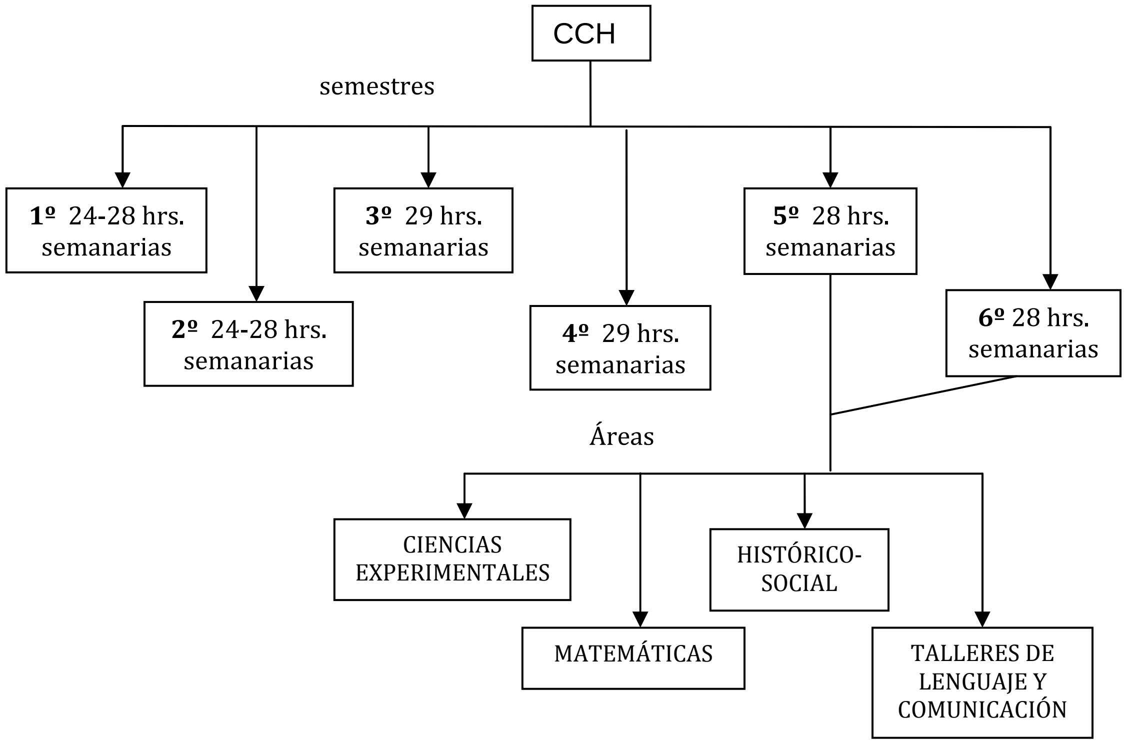
El Plan de estudios se encuentra estructurado de la siguiente manera[29]:



En comparación con el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) la Probabilidad se inserta en el 5º y 6º semestre, en la Unidad III, para el planteamiento de problemas de Probabilidad Condicional, con el uso de diagramas de árbol.

Su Plan de estudios se encuentra estructurado de la siguiente manera:[30]:

[29] Plan de Desarrollo 2002-2006 de la ENP.
[30] *Plan de Estudios Actualizado. Colegio de Ciencias y Humanidades. Unidad Académica de Ciclo de Bachillerato,*



Pero los enfoques que se dan a Probabilidad son muy escuetos, debido a que los objetivos de la asignatura en el CCH dicen que: *"el alumno debe de conocer los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo para determinar la probabilidad de un evento, por medio del planteamiento de problemas en los cuales se resalte la naturaleza de los tres enfoques y que permitan la discusión de los resultados con el grupo"*[31]*,* y, en la ENP, se marca que: "*se deben impartir los Teoremas de probabilidad a través de problemas del tipo; En una caja se tienen 20 sobres idénticos, 10 de los cuales están vacíos, 8 tienen un billete de 10 pesos y 2 uno de 100 pesos. Si se sacan 2 sobres al azar, calcule la probabilidad de que ambos contengan un billete de 100 pesos, a) Si el primero se regresa a la caja antes de sacar el segundo, b) Si el primero no se regresa".*[32]

El problema de estos enfoques se da, no en los contenidos, sino en la **forma de transmitir** este conocimiento, para cumplir con el objetivo del Programa de Estadística del CCH que dice: *"El alumno pueda comprender conceptos fundamentales que le*

UNAM, CCH. Julio 1996.
[31] *Ibidem*
[32] Programa de Estudios de la asignatura de Estadística y Probabilidad (1996) p.10

permitan asociar a la Probabilidad y a sus reglas directamente con la Inferencia Estadística” o del Programa de Estadística y Probabilidad de la ENP que dice:*“El alumno sea capaz de identificar a la probabilidad como un instrumento confiable en la inferencia y toma de decisiones”* .

La formulación es éstos objetivos genera un grave problema didáctico, debido a que, la mayoría de los alumnos del Bachillerato y de Formación Profesional, no hacen uso de los conocimientos que la Probabilidad les brinda, como se muestra el siguiente ejemplo:(llevado a cabo por psicólogos como Tversky y Kahenman (*sic*, Steen: 2003)) se presentó el perfil de la personalidad de una joven, a estudiantes universitarios, y, luego se les preguntó, ¿cuál de los siguientes enunciados es más probable?:

1. Linda, es cajera de un banco
2. Linda, es cajera de un banco, y participa en el movimiento feminista.

Cerca del 85% de los estudiantes eligieron el segundo enunciado, debido a que cuenta con más características, a pesar de que éste evento es un subconjunto del primero. Este error persistió a pesar de varios intentos, con enunciados opcionales, que pudieran hacer más transparente la cuestión.

Este ejemplo, nos muestra que los estudiantes universitarios, presentan un escaso o nulo conocimiento de las nociones probabilísticas, así como, la persistencia de los errores sistemáticos, mencionados en una de las secciones citadas anteriormente, y que estos errores se encuentran profundamente arraigados en su *Intuición Probabilística*. Asimismo, se ha demostrado que, una mera exposición de la Teoría Matemática de la Probabilidad en el Bachillerato, es insuficiente para corregir dichos sesgos, y que éstos pueden dificultar la asimilación de los conceptos formales. Por otra parte, los conocimientos de probabilidad involucran aspectos del pensamiento matemático, que no son naturales en los estudiantes, al ver la lectura atenta y literal de los enunciados lógicos.

Siguiendo a Hawkins y Kapadia (1984))[33], es importante resaltar, que el estudio de la Probabilidad, en estos Planes de Estudio, exige ya un marco en la Probabilidad Formal, debido a que el objetivo se centra en que el estudiante use con precisión las leyes matemáticas de la Teoría Axiomática correspondiente. La base matemática puede reflejar hipótesis hechas en las concepciones: Clásica, Frecuencial o Subjetiva.

II.9. Diferentes concepciones de la Enseñanza de la Probabilidad.

Godino y Batanero (1991)[34] definen las concepciones de la Probabilidad de la siguiente manera:

La Probabilidad Clásica: es importante, porque históricamente con Laplace (1812) se dio el primer intento de definir, con rigor matemático, la Probabilidad, en su obra: *Teoría Analytique des Probabilités*, dando la definición *clásica de la probabilidad* de un suceso que puede ocurrir solamente un número finito de modalidades, como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados de este evento, sean igualmente probables.

De acuerdo con esta definición, el cálculo de la probabilidad de los sucesos se reducía a problemas de análisis combinatorio. Pero incluso, en su misma época, esta definición se encontró inadecuada. Además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta realmente a la Probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades para algunos sucesos sencillos. Laplace - siguiendo a Bernoulli- usó el principio de *Razón Insuficiente*, que considera las alternativas, como equiprobables en la ausencia de la razón conocida, para esperar lo contrario. Más recientemente, para justificar la asignación de probabilidades, por la regla de Laplace, ha sido formulado, el *Principio de Indiferencia*, que considera las alternativas como equiprobables, cuando hay un balance de evidencia a favor de cada alternativa.

[33] *vid*; Díaz Godino; *op.cit*..p 27.
[34] *Ididem*

Laplace comete el error de considerar la definición *clásica de probabilidad*, aplicable a todos los casos, cuando no es siempre posible admitir el postulado de indiferencia. Además, no considera la posibilidad de que el número total de resultados posibles sea infinito.

La *Probabilidad Clásica* tiene su limitación al no proporcionar una guía adecuada, para cuando las alternativas no son equiprobables, y por tanto, esta puede no llevar a la solución correcta, en problemas con eventos que no presenten la misma probabilidad de ocurrencia, debido a que nuestro objetivo académico, es que el estudiante se empiece a centrar en el dominio formal de una Teoría Lógica de Probabilidad, el cual, es generalmente, un conjunto de inferencias entre enunciados y preposiciones, bajo un cierto lenguaje, más que el conjunto de oraciones en sí mismos, siendo diferente el dominio de aplicación de una Teoría Empírica (conjunto de sucesos o resultados experimentales), y del dominio de una Teoría Subjetiva (conjunto de creencias de una persona).

La Probabilidad Frecuencial: esta se calcula, al igual que las frecuencias relativas observadas, de cada uno de los diferentes resultados de un experimento en pruebas repetidas.

La importancia en la enseñanza de este tema dentro del bachillerato se basa en dos aspectos: El primero de ellos, es el hecho que los resultados varían de una repetición a otra, de manera imprevisible, y esto dará al alumno la significación del término de *variación aleatoria*; y, en Segundo lugar, el estudiante puede observar cómo un hecho empírico, a corto plazo puede ser desordenado, pero a la larga, surge una cierta regularidad.

La *Probabilidad Subjetiva***:** Es un punto de vista alternativo, en el cual se interpretan las probabilidades como evaluaciones personales o subjetivas. Tales probabilidades expresan una creencia sobre las incertidumbres involucradas, y se aplican, especialmente, cuando existe poca o ninguna evidencia; por lo que no hay otra opción que considerar, sólo, evidencias paralelas (indirectas), conjeturas fundamentadas y, quizás, intuición u otros factores subjetivos.

Este punto de vista de la Probabilidad, donde se mide la confianza que un individuo, tiene sobre la verdad de una proposición particular, y, por tanto, no está unívocamente determinada, no descansa en la repetibilidad de ningún proceso, por lo que es posible evaluar la probabilidad de un suceso que pueda ocurrir una sola vez, como por ejemplo, la probabilidad de que se descubra un medicamento que cure el cáncer el siguiente año.

Por otra parte, el Teorema de Bayes ofrece un método estadístico, para calcular una *probabilidad condicional* en circunstancias de dependencia, dentro de la Teoría Probabilística, proporciona la distribución de la probabilidad condicional de un evento "A" dado un evento "B" (probabilidad a posteriori), en función de la distribución del evento "B" dado un evento "A", y la distribución de probabilidad marginal del evento "A", lo que se conoce como la probabilidad simple o a priori.

Para poder enunciar el Teorema de Bayes, es necesario conocer la fórmula de la *probabilidad condicional* y la *probabilidad de la intersección* para eventos dependientes, así, para enseñar este tema, es necesario recurrir a las leyes básicas de la Probabilidad y reforzar en los estudiantes los conocimientos fundamentales de la Teoría de Probabilidad.

La *Probabilidad Subjetiva*, puede desarrollarse a través de problemas de tipo bayesiano y que se resuelven a través de la aplicación del Teorema de Bayes.

II.10. La enseñanza de la Probabilidad Subjetiva a través de problemas de tipo bayesiano.

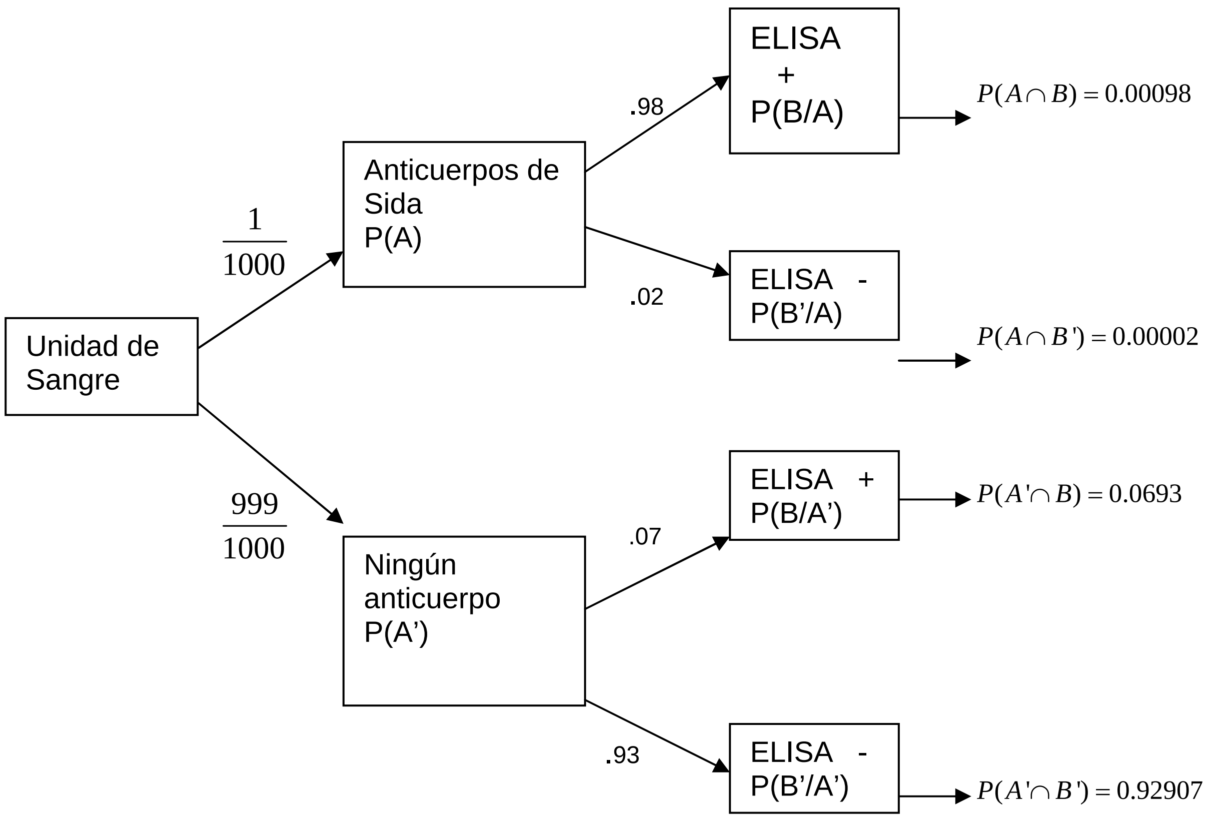
El estudio de la *Probabilidad Subjetiva*, puede tener gran riqueza en la enseñanza, debido a que otorga un paso hacia delante en el estudio de los fundamentos de la P*robabilidad Condicional*. El Teorema de Bayes otorga las herramientas necesarias para hacer visible estas reglas, además, de que hace la enseñanza de la *probabilidad condicional* interesante (debido a la gran aplicación en problemas situados en un contexto real), en el uso de la construcción y de descripciones matemáticas de procesos, con un nivel moderadamente avanzado. Como ejemplo, encontramos, en el caso de los falsos positivos: al investigar condiciones de excepción, se aplica la probabilidad condicional a cuestionarios tan comunes, como los de las pruebas en consumo de drogas; el uso de detectores de mentiras y, para determinar la presencia de anticuerpos de SIDA,

Un ejemplo basado en un informe reciente,[35] en los que se puede encontrar un análisis estadístico detallado, es la prueba Elisa, se introdujo a mediados de los ochenta, para detectar la presencia de anticuerpos de SIDA en la sangre donada. Cuando los anticuerpos están presentes, ELISA es positiva con una probabilidad aproximada de 0.98; cuando la sangre analizada no está contaminada con anticuerpos, la prueba da un resultado positivo con una probabilidad aproximada de 0.07. Estos números son probabilidades condicionales. Si una en mil de las unidades de sangre examinadas por ELISA contiene anticuerpos de SIDA, entonces el 98.6% del total de las respuestas positivas serán falsos positivos.

El cálculo de falsos positivos en las pruebas de sangre ELISA, para detectar falsos positivos, puede llevarse a cabo a través del Teorema de Bayes, el cual requiere de un diagrama de árbol, como el que se muestra en la siguiente figura:

[35] *cfr.,*Gastwirth, Joseph. “The statical precision of medical screening procedures: Aplication to polygraph and AIDS antibodies test data.” pp.213-218.

ÁRBOL DE PROBABILIDAD DE LA PRUEBA ELISA



Donde:

A: el evento de tener anticuerpos de SIDA

A': no tener anticuerpos de SIDA

B: el evento de que la prueba ELISA sea positiva

B': el evento de que la prueba ELISA sea negativa.

CALCULO DEL FALSO POSITIVO EN LA PRUEBA ELISA

$$P\left(No\ \text{SIDA/ Elisa Positiva}\right) = P(A/B) = \frac{\text{P(No SIDA } \cap \text{ELISA+)}}{P(ELISA+)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.06993}{0.00098 + 0.06993}$$

$$= \frac{0.06993}{0.07091} = 0.986$$

La Probabilidad Subjetiva, lleva consigo una serie de dificultades conceptuales que, como las del estudio temprano de la probabilidad, pueden pasarse por alto de manera fácil e inteligente; si la instrucción está dirigida principalmente a la enseñanza de definiciones y reglas. Los estudiantes encuentran difícil la distinción entre P(A/B), la probabilidad de que dado que ocurrió B ocurra A, P(B/A),la probabilidad de que dado que ocurrió A ocurra B, y, P(A y B), la probabilidad de que ocurra A y B.

Otro ejemplo sería, mostrar una fotografía de una mujer atractiva, y bien vestida, y preguntar la probabilidad de que sea modelo de modas. Las respuestas indican que la pregunta se interpreta como si se pidiera la probabilidad condicional de que, una mujer conocida como modelo de modas sea atractiva y bien vestida, es decir, los individuos que responden se confunden P(A/B) y P(B/A). Los ejercicios cualitativos con la identificación de la información A, que se conoce, y el evento B, cuya probabilidad quiere conocerse, son un aspecto preliminar esencial para el trabajo formal con P(B/A) y P(A/B)

En este sentido la secuencia didáctica trata de clarificar la diferencia entre P(A/B), P(B/A) y P(A y B), y que el alumno pueda aplicar el Teorema de los falsos positivos con el uso del Teorema de Bayes y la Probabilidad Total.

Los problemas bayesianos involucran una serie de dificultades[36]:: Identificar los datos de un problema;(Identificación y asignación de probabilidades), construir una representación adecuada;(diagrama de árbol o tablas de contingencia), calcular el denominador del Teorema de Bayes (Cálculo de la probabilidad total, la probabilidad de salir positivo en la prueba ELISA), calcular la probabilidad inversa (Teorema de Bayes, dado que salió positivo en la prueba ELISA, no se tenga SIDA); y, además se considera inferencia en artículos o revistas de la probabilidad condicional.

En conclusión, enseñar el entendimiento conceptual de la Probabilidad, parece ser todavía una tarea muy difícil, llena de ambigüedades y espejismos. En consecuencia, en esta investigación se exploran las formas en que, las ideas útiles de la inferencia estadística, pueden enseñarse, para tratar de que nuestros estudiantes observen la potencialidad que la *Probabilidad Subjetiva* tiene para cambiar el grado de creencia ante un suceso determinado.

El brindar a los estudiantes, una secuencia didáctica en la enseñanza del Teorema de Bayes, ayuda a esclarecer la lógica, la interpretación, y las limitaciones subyacentes de la inferencia Estadística Clásica, dando lugar a generar la inferencia Estadística Bayesiana. Además, se pretende dar un seguimiento, midiendo poco a poco, cada una de las dificultades que presenta Batanero: rúbricas de evaluación, y el poder observar, en qué grado, la secuencia aporta el entendimiento del Teorema de Bayes.

Al considerar lo anterior, se resalta que no es suficiente que se citen sólo ejemplos de la probabilidad condicional, es necesario ir más allá, es decir, se requiere diseñar una estrategia de enseñanza, para lograr que el estudiante construya un conocimiento significativo, por ello, la *secuencia didáctica brinda una articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica (lo que se conoce, según*

[36] v*id*; Batanero y Díaz. *Principales Dificultades en el razonamiento bayesiano en estudiantes de psicología.* en línea

Font como Idoneidad Didáctica) y para poder lograr esto se utiliza el Modelo de la Enseñanza Directa.

Por otra parte, Díaz Godino(1991) considera que: “La estadística bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia, lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento”[37].

Por lo tanto, con base en los planteamientos anteriores se fundamenta la propuesta metodológica de esta investigación.

[37] Díaz, *op cit, 40*.

III. EL MODELO DE LA ENSEÑANZA DIRECTA COMO ESTRATEGÍA DOCENTE Y SU INTERACCIÓN CON LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

En este capítulo, se abordará con detalle, el Modelo de la Enseñanza Directa (en apartado III.1), aplicada en la Probabilidad Subjetiva, como Estrategia Didáctica, para el diseño de los materiales en la Enseñanza del Teorema de Bayes. Se describe con detalle los pasos, de cada una de las etapas de Planeación y de Implementación del Modelo aplicados en el desarrollo de la Secuencia Didáctica de ésta investigación,(que se presenta en el Capitulo IV), para activar el conocimiento previo y la construcción de un conocimiento significativo para los estudiantes. Para ello, se especifican las metas de enseñanza, se desarrollan problemas y ejercicios significativos, para incentivar: la atención, codificación y/o el procesamiento profundo de la información en el estudiante.

La Planeación consta de tres pasos que son: especificación de metas; identificación de conocimientos previos; y, selección de ejemplos y problemas; los cuales se explican en el apartado III.1.1.

La Implementación se desarrolla en cuatro etapas: introducción, presentación; práctica guiada; y, práctica independiente las cuales se presentan en el apartado III.1.2.

Por otra parte, en este Capítulo, también se presenta el *Modelo de la Enseñanza Directa,* en relación con cada uno de los aspectos de la *Idoneidad Didáctica*, como son: epistémica; cognitiva; mediacional; emocional; interactiva; y, ecológica.

En aras de hacer operativo, este Modelo, en su relación con la Idoneidad Didáctica, como herramienta metodológica, para establecer un puente entre la didáctica descriptiva y la didáctica normativa o técnica, se tomaron en cuenta los modelos epistemológico y cognitivo bajo una situación didáctica.

Para los fines de este Trabajo Recepcional, y con base en las condiciones superestructurales e infraestructurales de la ENP; se modifico la secuencia de los aspectos de la Idoneidad, agrupando la mediacional, la emocional y la interactiva en un solo bloque, para tratar que el modelo alcance en su aplicación el mayor grado de Idoneidad, y de esta manera, se brinda un apoyo en los procesos de construcción de conocimiento significativo de los alumnos, como una Propuesta Didáctica, para implementar diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje en el Nivel de Enseñanza Media Superior, las cuales se desarrollaron en una Secuencia Didáctica para el Teorema de Bayes.

Modelo de la Enseñanza Directa

La Planeación Modelo de la Enseñanza Directa

- Identificación de Metas Principales Dificultades en el razonamiento bayesiano.
- Identificación de conocimientos previos.
- Selección de ejemplos y problemas

La Implementación del Modelo de la Enseñanza Directa

- Etapa de Introducción.
- Etapa de Presentación.
- Etapa de Práctica Guiada.
  Aprendizaje Cooperativo
- Etapa de Práctica Independiente.

El Modelo de la Enseñanza Directa, y su relación con la Idoneidad Didáctica

- Idoneidad Epistémica.
- Idoneidad Cognitiva.
- Idoneidad Mediacional, Emocional e Interactiva.
- Idoneidad Ecológica.

III.1. El Modelo de la Enseñanza Directa.

El *Modelo de Enseñanza Directa*, es una estrategia, que puede ser utilizada para enseñar conceptos y desarrollar habilidades en los estudiantes. Además, con base en la eficacia del docente, lo ubica como centro de la enseñanza, y le otorga la responsabilidad de estructurar el contenido y promover el desarrollo de habilidad a través de la identificación de las metas de la clase, para que una vez transmitido el conocimiento, el alumno pueda aplicarlo en la práctica individual y grupal. Una de las características que distinguen a este Modelo, es el patrón de interacción entre el docente y los estudiantes, las clases de enseñanza directa comprometen activamente a los alumnos mediante el uso de las preguntas, los ejemplos, la práctica y la retroalimentación, que el docente provea.

Una idea central que guía los patrones de interacción en el "Modelo de Enseñanza Directa", es la transferencia de la responsabilidad. En la apertura de la clase, el docente asume la responsabilidad de explicar y describir el contenido, a medida que se da el desarrollo, y los alumnos comienzan a comprender (contenido y procedimientos), asumen mayor responsabilidad para resolver problemas y analizar ejemplos, lo que permite el desarrollo sus habilidades; en el cierre de la clase, el alumno ya es capaz de aplicar, explicar y practicar lo aprendido, y por lo tanto, el docente se convierte sólo en guía y coordinador de las actividades en clase.

El *Modelo de Enseñanza Directa* se basa en tres líneas de investigación, a saber:

1) *Investigación sobre la eficacia del docente*.
2) *El rol de la observación en el aprendizaje de conductas y habilidades complejas*. Basada en el trabajo de Albert Blandura (1986, 1989), se demuestra que los estudiantes también aprenden en la clase mediante la observación y este aprendizaje a menudo tiene lugar a través de modelos. *El aprendizaje por observación incluye cambios en la conducta, el pensamiento o las emociones que resultan de observar la conducta de*

otra persona (un modelo); por lo tanto, modelar es exponer aquellas conductas que constituyen la meta de aprendizaje.

3) *El aprendizaje como un modelo social* (Vygostky). Existen dos conceptos del trabajo de Lev Vygostky. Uno es la noción de andamiaje. El andamiaje se refiere al apoyo que permite que los alumnos realicen una habilidad. En este sentido los docentes proveen andamiaje en la enseñanza de maneras diferentes; entre ellas descomponiendo las habilidades complejas en subcomponentes; ajustando la dificultad de las preguntas, dando ejemplos y ofreciendo consignas de apuntalamiento y pistas. El segundo concepto de la teoría de Vygostky se denomina la zona de desarrollo próximo es la etapa del proceso de aprendizaje en la cual el alumno todavía no puede resolver un problema o realizar una habilidad solo, pero puede hacerlo bien con la ayuda del docente. Es dentro de esta zona donde los docentes pueden ayudar a los alumnos a aprender: Fuera de la zona, los alumnos o no necesitan ayuda (ya manejan el contenido o habilidad) o carecen de las habilidades requeridas o de los conocimientos previos para beneficiarse de esta enseñanza.[38]

Por otra parte podemos considerar que la implementación de este Modelo, dentro del Nivel de Enseñanza Media Superior, se hace necesario para incentivar al educando en la enseñanza de la Probabilidad Subjetiva, y en el establecimiento de nuevas estrategias de enseñanza.

Por lo tanto, una vez que se consideraron estas tres líneas de investigación, se pasa a la etapa de la Planeación del Modelo

[38] Eggen, Paul y Kauchack *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades del pensamiento*. p.

III.1.1. *La Planeación del Modelo de Enseñanza Directa.*

En la etapa de la *Planeación del Modelo* se desarrollan tres pasos:[39]

1) **La Especificación de Metas**. Para la enseñanza del Teorema de Bayes, se considera como meta, que los estudiantes puedan resolver un problema bayesiano, minimizando las dificultades planteadas en el capítulo anterior.

   La Planeación aplicada en nuestra Secuencia Didáctica[40], fue la siguiente: a) Identificar los datos del problema; b) Construir una representación adecuada; c) Calcular el denominador del Teorema de Bayes (Cálculo de la Probabilidad Total); d) Calcular la Probabilidad Inversa (Teorema de Bayes); y, e) Inferencia de la Probabilidad Condicional en artículos de periódicos o revistas.
   A continuación se explica cada de los rubros:

   a) *Identificar los datos del problema***.** El hecho de solicitar a los alumnos que en el problema, identifiquen probabilidades, simples y condicionales, implica (según la taxonomía de Bloom, para el Desarrollo de Habilidades) que deba: entender, interpretar, comparar y captar, el significado de la información en el contexto del problema. Por lo anterior, se considera que el hecho de identificar las probabilidades condicionales y sustituirlas, no se da sólo en un determinado nivel de conocimientos, como lo es el de recavar información sino, más bien se pasa a un nivel superior del razonamiento como lo es la comprensión.
   b) *Construir una representación adecuada***.** Según Fischbein (*sic.* Batanero: 1975), el Diagrama de Árbol, es una representación que permite el desarrollo de niveles cognitivos superiores; y también es una estructura que puede ser concretizada en uno de los tres modos de representación –inactiva, icónica y simbólica- sin cambiar las características esenciales de la estructura; y, usando sólo métodos adecuados de esta representación,

[39] *vid. supra.,* Cap. IV.
[40] *Ibidem*.

es posible, no sólo preparar el próximo estadío de desarrollo, sino acelerar el desarrollo hacia el nuevo estadío.

> El Diagrama de Árbol es presentado como un modelo generativo que permite sugerir e inculcar la generalización iterativa (extensión sin límite a cualquier número de eventos, como ocurre en la inducción matemática) y la generalización constructiva, esto es su adaptación a nuevos problemas derivados del primitivo, que es una característica del razonamiento recursivo.[41]

En el desarrollo del Diagrama de Árbol, el alumno hace uso de la información y utiliza métodos en situaciones nuevas para solucionar un problema, lo cual implica que el estudiante haga uso de sus habilidades y conocimientos, por lo anterior, el alumno no sólo repite el conocimiento, sino que se ve en la necesidad de aplicarlo, para completar la tarea.

c) Calcular el denominador del Teorema de Bayes (Cálculo de la Probabilidad Total). En esta secuencia se pretende que el alumno, pueda por sí mismo, obtener una fórmula de la Probabilidad Total, usando como herramienta el Diagrama de Árbol, lo que implica, que el alumno construya una estructura de la fórmula, con ello se puede evitar que el docente escriba la fórmula correspondiente, en el pizarrón, y que el estudiante sólo sustituya datos en ella para obtener un resultado. De esta manera, el alumno es capaz de deducir su propia fórmula, y, una vez estructurada, sustituir los valores en ella, lo que genera, que pueda llegar a la síntesis, como habilidad del pensamiento.

d) *Calcular la Probabilidad Inversa (Teorema de Bayes)*. El estudiante tiene que hacer uso de la información previa, dentro del contexto del problema y de la nueva información, a través de la obtención de la Probabilidad Total para solucionar el planteamiento que sugiere el Teorema de Bayes. En este sentido, el alumno ha alcanzado ya, el nivel de aplicación, como

[41],Batanero, Ma. Del C; *et al*., *Razonamiento Combinatorio. Educación Matemática en Secundaria*. .p.71

habilidad del pensamiento, debido a que tiene que solucionar el problema con base en sus habilidades desarrolladas y conocimientos adquiridos con anterioridad.

Sumado a estas dificultades bayesianas, en esta investigación se insertó otra dificultad no considerada en la Teoría de Batanero[42]:

e) *Inferencia de la Probabilidad Condicional en artículos de periódicos o revistas* El estudiante tiene como tarea leer diversos artículos, que se relacionen con el tema, posteriormente debe argumentar, por qué se relaciona con las probabilidades condicionales, es decir, el estudiante generaliza los conceptos de Probabilidad Condicional a contextos de su vida cotidiana, de esta manera, sintetiza el contenido, en otras situaciones muy diversas que no se encuentran en el contexto del salón de clase. A partir de lo anterior, se puede observar, cómo un estudiante puede reconocer e interpretar la información que le presenta un artículo de periódico o revista, para clasificarla e incluso interpretarla, dándose el caso, en algunos estudiantes, de llegar a construir un esquema de la información. Esto nos lleva a concluir, que la enseñanza de este Teorema (presentado de esta manera), permite que el alumno realice un análisis crítico de la información presentada por los medios masivos de comunicación, y así, modificar su visión de la realidad. En consecuencia, podríamos decir que, el alumno empieza a generar en sí mismo, una competencia matemática importante, conocida como *inferencia estadística empírica*.

Después de aclarar las metas, establecidas en la aplicación del Modelo para esta Secuencia Didáctica, podemos determinar que, en la Etapa de Planeación se requiere que el docente, identifique los conocimientos previos de sus alumnos.

[42] *vid. infra*., Capítulo II.10

2) **La Identificación de los Conocimientos Previos**. El conocimiento previo provee de “anzuelos” para el nuevo aprendizaje, que sirven de apoyo en la planeación de las clases, es necesario que los docentes visualicen cómo será presentado el concepto y cómo se conectará con lo que los alumnos ya saben, para motivar el desarrollo de habilidades matemáticas.

   Esta parte implica desarrollar habilidades complementarias, como son: la obtención de probabilidades simples; el complemento de la probabilidad; la unión e intersección de probabilidades para el caso de independencia o dependencia de eventos; y, la aplicación de las fórmulas de probabilidad condicional, temas que sientan las bases para poder construir el nuevo conocimiento, que le sea significativo, para enunciar el Teorema de Bayes y aplicarlo a problemas bayesianos.

Es importante mencionar que, los temas citados con anterioridad, son previos a la enseñanza del Teorema de Bayes, y es de esta manera, que se encuentran considerados en los Programas de: Estadística y Probabilidad en ENP, y de Estadística en el CCH, en la UNAM.

Selección de Ejemplos y Problemas. Para la selección de los problemas, es necesario que los ejemplos tengan relación con la vida cotidiana del estudiante, aplicados en los problemas de la Probabilidad Subjetiva, que en nuestro caso se consideraron los aspectos del Mundo Biológico, Social y Físico. Además, se tomó, en cuenta hasta qué punto, estos ejemplos y problemas representan las características esenciales para alcanzar las metas. Los problemas bayesianos se seleccionaron, con base en secuencias de sólo dos eventos, posteriormente se desarrollaron en secuencias de tres o más eventos, para así lograr la generalización del Teorema de Bayes.

III.3.2. *La Implementación del Modelo de Enseñanza Directa*

La Implementación del *Modelo de Enseñanza Directa* consta de cuatro etapas, en cada una se desarrolla un problema diferente, para clarificar la enseñanza del Teorema de Bayes, y a continuación se describen en el siguiente cuadro:

Cuadro No.1

Las Etapas en la Implementación del Modelo de la Enseñanza Directa

Etapa	Propósito	Ejemplo.
Introducción	Proveer una visión general del nuevo contenido; determinar los conocimientos previos del alumno para establecer los enlaces con el nuevo contenido; apoyar a los alumnos para comprender el valor del nuevo conocimiento.	A través del *Modelo de Urnas*, el alumno obtiene la probabilidad, simple conjunta y condicional para uno o más eventos.
Presentación	Explicar el nuevo contenido, estructurado por el docente, en forma interactiva.	A través de un problema bayesiano, para dos eventos, el docente lo expone en clase, haciendo hincapié en: la identificación de probabilidades simples y condicionales; llevar a cabo la representación adecuada, a través del Diagrama de Árbol o Tabla de Contingencia para obtener la probabilidad de la intersección de eventos; calcular el denominador del Teorema de Bayes (Probabilidad Total); y, por último, obtener y aplicar la fórmula del Teorema de Bayes. El problema tratado es el de los falsos positivos en diabetes.
Práctica guiada	Proporcionar a los alumnos oportunidades para practicar el nuevo contenido.	Los alumnos resuelven los problemas bayesianos, formando equipos de trabajo, bajo las instrucciones del docente, para: identificar probabilidades simples y condicionales, hacer una representación adecuada a través del Diagrama de Árbol o Tabla de Contingencia para obtener la probabilidad de la intersección de eventos; calcular el denominador del Teorema de Bayes (Probabilidad Total); y, por último, obtener y aplicar la fórmula del Teorema de Bayes.
Práctica Independiente	Promover la retención y la transferencia, para que los estudiantes practiquen solos el concepto y desarrollen sus habilidades.	Los alumnos resuelven ejercicios de forma individual, sin la intervención del docente. Además, investigan, en periódicos o revistas, información que tenga relación con la probabilidad condicional y la argumenta.

Por lo tanto, podemos resaltar, como a través de la Implementación del Modelo de la Enseñanza Directa, los estudiantes aprender a socializar el conocimiento, estructurarlo de manera significativa, lo que les permite desarrollar habilidades matemáticas y procesos cognitivos como son: la síntesis, el análisis, la reflexión, la comparación, entre otros. De esta manera, se forman dentro de la autorregulación y se cumple con el proceso de andamiaje y desarrollo de las “Zonas de Desarrollo Próximo” de Vigosky.

Los resultados de la Implementación de este Modelo se presentaran en el Capítulo IV, debido a que es en donde se presenta y desarrolla la Secuencia Didáctica.

III.2. El Modelo de la Enseñanza Directa en relación con la Idoneidad Didáctica

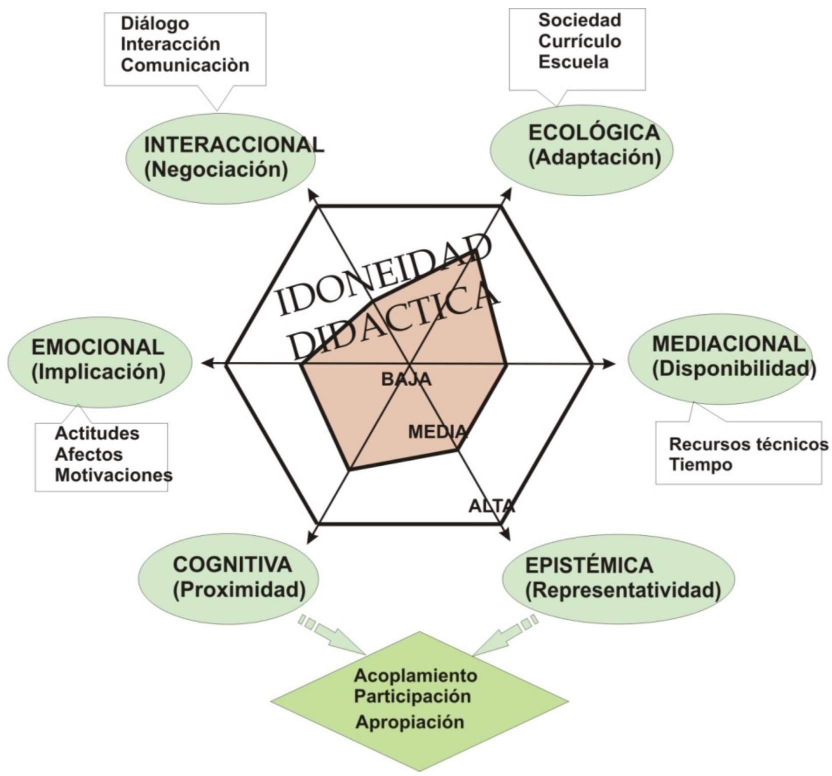
> La *Idoneidad Didáctica* es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados[43]

En esta definición, se introducen seis criterios parciales de Idoneidad para hacerla operativa, atendiendo a las siguientes dimensiones que caracterizan y condicionan el proceso de enseñanza- aprendizaje: *epistémica*, relativa a los significados institucionales; *cognitiva*, relativa a los significados personales; mediacional relativa a los recursos tecnológicos y temporales; *emocional* relativa a las actitudes, afectos y emociones; *interaccional* relativa a las interacciones docente–discentes; y, *ecológica* relativa a las relaciones intradisciplinares, interdisciplinares y sociales.
Por lo tanto, la *Idoneidad Didáctica* supone que estas dimensiones se articulan de una manera coherente y armónica, y así son representadas mediante un hexágono regular, en donde la *Idoneidad Didáctica* corresponde a un proceso de estudio pretendido o

[43] Díaz, et. al *La pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.* En línea.

programado, y supone *a priori* un grado máximo de las idoneidades parciales. En el interior del hexágono regular se inserta un hexágono irregular que representa a las idoneidades logradas efectivamente, en la realización de un proceso de estudio implementado.

Esquema de la Idoneidad Didáctica.
Figura No.1



Con base en el Esquema, se presenta y desarrolla, en los siguientes rubros el significado de cada una de las diferentes dimensiones, demostrando que al aplicar en una Secuencia Didáctica el Modelo de la Enseñanza Directa, se cumple, en gran medida, con la Idoneidad Didáctica Alta, para la enseñanza de un tema de Matemáticas, en particular con el Teorema de Bayes.

III.2.1.*Idoneidad Epistémica*

Se define como: "el *Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia"*[44]*.*

La aplicación del Modelo de la Enseñanza Directa en la Idoneidad Didáctica, establece que la enseñanza debe estar basada en situaciones problema, en donde el docente selecciona problemas vinculados al tema (en este caso el Teorema de Bayes), y se representan y articulan en situaciones de la vida cotidiana del alumno, lo que promueve la ejercitación y aplicación del Teorema a estudiar.

Bajo este enfoque, el docente debe manejar distintos modos de expresión: en la transmisión oral: transforma el *lenguaje* común al *lenguaje* matemático, para que el alumno, conozca, entienda y aplique, un lenguaje especializado en el ámbito conceptual;, procedimental y actitudinal; en la transmisión escrita; utiliza *gráficos*, por ejemplo, los Diagramas de Árbol y las Tablas de Contingencia, para la comprensión del problema; utiliza símbolos, que dan lugar a la formalización del lenguaje y procedimientos matemáticos. Para ello, es necesario que el profesor utilice un lenguaje adecuado a sus alumnos, que se encuentran en la etapa de la adolescencia, ubicados en el Nivel de Enseñanza Media Superior, de tal manera, es muy importante, que se deje en claro las definiciones y los procedimientos que utilizaran los alumnos. Debido a que, en la Secuencia Didáctica se pueden utilizar varias representaciones gráficas y el alumno podrá decidir cuál es, para él, la más clara, mientras que el profesor lo orientará si es no la más factible a la situación del problema.

El profesor tiene que llevar a cabo un andamiaje educativo (Vygostky: 1996), que permita y apoye a los alumnos para realizar un procedimiento y desarrollen así sus habilidades. En este sentido, el docente, debe de descomponer las habilidades complejas (que implica llegar a la solución total del problema), en subcomponentes, por

[44] *Ibidem*

ejemplo en la Secuencia Didáctica, se da bajo el siguiente procedimiento: identifica las probabilidades simples y condicionales que da el problema; identifica la probabilidad que solicita el problema; realiza una representación visual del problema, trazando un Diagrama de Árbol o una Tabla de Contingencia; obtiene la Probabilidad Total; y, aplica el Teorema de Bayes); ajustando la dificultad de las preguntas, dando ejemplos y ofreciendo consignas de apuntalamiento y pistas, que nos llevará a la solución total del problema.

Es importante, que el alumno practique (con la ayuda del profesor, con sus compañeros o de manera individual), los temas tratados, con ejercicios, dentro y fuera de la clase.

El objetivo es, que el alumno, al final de la Secuencia Didáctica pueda generalizar y aplicar el método propuesto en ella, a otros ejercicios.

III.2.2. *Idoneidad Cognitiva*

Se define como: *"Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados"*[45].

La aplicación del Modelo de la Enseñanza Directa en la Idoneidad Didáctica, bajo este rubro, establece que se tienen que identificar los conocimientos previos, de los estudiantes, en la Etapa de la Introducción; en el caso de que no existan, deberá abrir un preámbulo, para poder establecer la vinculación con el nuevo contenido que corresponde a la Etapa de Presentación. En la Etapa de la Práctica Guiada, el profesor deberá incluir actividades, que refuercen y amplíen el Teorema de Bayes, y en cada situación se evaluaran los avances que permitan alcanzar las metas establecidas en la Planeación del Modelo, o en su caso, reestructurarla. Es importante determinar el nivel de apropiación del conocimiento, que ha logrado el estudiante, competencia pretendida o implementada en la clase.

[45] *Ibidem*

III.2.3. *Idoneidad Mediacional, Emocional e Interactiva*

La aplicación del Modelo de la Enseñanza Directa en la Idoneidad Didáctica, bajo este rubro fue modificada, para los fines de este Trabajo Recepcional, y con base en las condiciones superestructurales e infraestructurales de la ENP; se agrupo la Idoneidad Mediacional, la Emocional y la Interactiva en un solo bloque, para tratar que el Modelo alcance en su aplicación el mayor grado de Idoneidad, y de esta manera, se brindara un apoyo en los procesos de construcción de conocimiento significativo de los alumnos, como una Propuesta Didáctica, para implementar diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje en el Nivel de Enseñanza Media Superior, las cuales se desarrollaron en una Secuencia Didáctica para el Teorema de Bayes.

En los materiales didácticos, que se elaboraron para este fin, se indican los pasos y procedimientos para la solución de un problema bayesiano, mediante un lenguaje comprensible para el estudiante, así, para que pueda establecer, un significado lógico en los pasos que estructuran el proceso de solución del problema. El profesor mediante preguntas y explicaciones breves, enseña a estructurar el contenido y el proceso de solución de problemas bayesianos, haciendo énfasis en los puntos clave del tema. El uso de gráficos como Diagrama de Árbol y Tablas de Contingencia, permite que el alumno mediante la visualización de éstos induzca la fórmula de Probabilidad Total. Por último, el estudiante debe hacer uso de sus conocimientos previos de Probabilidad Condicional y de Intersección de Eventos Dependientes, para inferir el Teorema de Bayes., para ello, es necesario que se muestre, que este Teorema se obtiene bajo un simple despeje en la fórmula de la Probabilidad Condicional y la Intersección de Eventos Dependientes. Una vez obtenida la fórmula del Teorema de Bayes, el problema se reduce a sustituir probabilidades, previamente obtenidas o expresadas en el contexto del problema (la inferencia del Teorema de Bayes, en esta Secuencia Didáctica se muestra solo para dos eventos).

A partir de que se obtuvo la fórmula de Bayes para dos eventos, el profesor expondrá las bases, de manera clara y precisa, para poder inducir la Generalización del Teorema, pero gracias al uso del Diagrama de Árbol, el alumno puede transferir la fórmula de la Probabilidad Total, de manera análoga, a la que hizo en la fórmula para dos eventos.

Esta forma de enseñanza permite que el profesor abandone su papel de expositor de una fórmula, a ser un guía en la deducción del Teorema. Por esta razón, el alumno ya no se concreta a ver una fórmula y a sustituir datos en ella, sino el estudiante ya es capaz de deducir y argumentar de donde obtuvo dicha fórmula a utilizar.

Esto motiva al estudiante a utilizar las definiciones de probabilidad condicional e intersección de las probabilidades contextualizandola a un modelo concreto.

Es de vital importancia que el profesor interprete las señales que le dan sus alumnos, como por ejemplo, un silencio largo cuando se hace una pregunta, ya que esto se puede interpretar a que la pregunta no quede clara o que el tema todavía no se entiende. También es necesario aprender a interpretar las expresiones faciales de sus alumnos, como una cara de duda o una expresión de rechazo y al observar un estudiante con estas características preguntarle si ha entendido y confirmarlo mediante una pequeña pregunta o una breve explicación del contenido al alumno.

El “Modelo de Enseñanza Directa”, permite explicar un contenido o habilidad, sin importar el número de alumnos a los que se esta enseñando, ya que en su parte expositiva, la interacción estudiante- profesor se logra a través de preguntas dirigidas y la parte de la práctica guiada, la cual se lleva a cabo a través del aprendizaje cooperativo. El estudiante puede compartir con sus compañeros lo que él comprendió del tema. Si el estudiante adquiere un concepto erróneo o tiene una duda, sus mismos compañeros podrán esclarecerle la duda o el error. Si persiste la duda o concepto erróneo en el estudiante o en el equipo correspondiente, el profesor tiene que orientar el camino correcto para su resolución dejando en claro a los miembros del equipo en dónde se cometió el error o la mala interpretación del problema, para que el estudiante o equipo pueda continuar con la solución correcta al ejercicio correspondiente.

De esta manera, el estudiante se vuelve un ente activo y no pasivo durante la clase, el alumno no sólo se vuelve un receptor (como lo plantea la enseñanza meramente expositiva), sino que también es un mediador en su conocimiento volviendo al estudiante parte activa de la clase y de su propio conocimiento. Esto es lo que en educación matemática y psicología se conoce como un alumno autorregulado o autónomo en lo que se refiere al aprendizaje del tema.

Este Modelo, se acopla muy bien en grupos numerosos, situación que cotidianamente se presenta en las aulas del bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM, en donde se presentó la secuencia a grupos de aproximadamente 60 estudiantes y donde los salones en los que se imparte la clase sólo cuentan con pizarrón y gises, pupitres movibles para la enseñanza de cualquier materia.

Esta secuencia, se lleva a cabo en estas condiciones en un tiempo de 8 horas clase, siempre y cuando el alumno tenga los conocimientos previos necesarios para la impartición del tema, si este no fuera el caso, se necesita una preparación adicional de aproximadamente 4 horas clase para sentar los conocimientos previos para la buena enseñanza del tema. Esto permitirá que el alumno le de sentido a su conocimiento para ligar el contenido anterior con el nuevo contenido y aumentar la motivación del estudiantes.

Por lo tanto, la secuencia cumple didácticamente con la idoneidad en matemáticas (En opinión de la Idoneidad Didáctica de las matemáticas) se ha logrado establecer una **idoneidad mediacional** (Definido por Godino , Batanero y Font) como "*la aplicación de los recursos materiales y temporales disponibles para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje"* e **interaccional** (definido por los autores citados anteriormente) como el "*grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje*." Y la **idoneidad emocional: "***Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes"*

III.2.4. *Idoneidad Ecológica*

Esta secuencia se desarrolla en cualquier bachillerato que tenga la asignatura de Estadística y Probabilidad, dentro del marco del estudio de la probabilidad condicional, es decir, el alumno tiene que tener un conocimiento anterior de la obtención de la probabilidad simple, conjunta y condicional; así como de las leyes de la probabilidad y su aplicación en problemas prácticos.

Es importante resaltar que este tema contribuye al perfil del egresado del bachillerato, según el Colegio de Ciencias y Humanidades y la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM, debido a que es estudio del Teorema de Bayes permite que el estudiante desarrolle:

- El conocimiento y aplicación de los criterios de validez en el campo científico.
- El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo, particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo.
- La incorporación de la visión no determinista de los fenómenos aleatorios, que coadyuve a una mejor comprensión de su entorno.
- La valoración del conocimiento científico en diferentes campos del saber.
- La reflexión sobre planteamientos de tipo estadístico de los medios masivos de comunicación.
- La incorporación de nuevas formas de expresión matemática a su lenguaje y modos de argumentación habituales.

- La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos estocásticos correspondientes al nivel de bachillerato
- El fortalecimiento de la seguridad en sí mismo y de su autoestima, a partir de la correcta aplicación de los conocimientos adquiridos. [46]

La secuencia tiene pensados problemas que contribuyan en la formación socio-profesional de los estudiantes, planteando problemas que involucren situaciones médicas, jurídicas, económicas, para dar significatividad a la probabilidad en otras áreas y no sólo en la matemática misma. Con ello los estudiantes logran observar que el Teorema de Bayes, les contribuye a analizar situaciones a su vida cotidiana y sobre todo en opinión de los mismos a su formación profesional.

Con esto, se cumple que la secuencia tenga una **Idoneidad Ecológica** (mencionada así por Font, Becomo y Godino) logrando dar una adaptación al currículo, apertura hacia la innovación didáctica, observando una adaptación profesional y cultural y dando conexiones intra e inter-disciplinares con otras asignaturas.

En conclusión, este capítulo presentó la estructura que presenta el Modelo de la Enseñanza Directa, los pasos requeridos en su planeación e implementación en el Teorema de Bayes. También este capítulo muestra la relación que guarda esta estrategia didáctica con los aspectos de la Idoneidad Didáctica para tratar de generar estudiantes que cumplan con los objetivos requeridos en los subsistemas de Educación Media Superior de la UNAM. De la misma, manera el Modelo de la Enseñanza Directa cumple con las misiones que le son propias a la educación, en torno a los cuatro aprendizajes fundamentales en el transcurso de la vida, es decir, el modelo muestra como los estudiantes pueden:

a) Aprender a conocer, adquiriendo los instrumentos de la comprensión para la Probabilidad Subjetiva.

[46] Planes y Programas de Estudio del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). Asignatura Estadística y Probabilidad I. Considerado Actual 2008. p.p7.

b) Aprender a hacer; debido a que observa, analiza critica para tomar decisiones en situaciones cotidianas donde este presente la Probabilidad Condicional.
c) Aprende a convivir, y observa que el trabajo colaborativo es muy útil para cumplir con las expectativas del trabajo emprendido (Es decir para llegar a las soluciones de un problema bayesiano).
d) Aprende a ser, observando como sus capacidades se han desarrollado en cada aspecto relacionado a los incisos anteriores.

IV. DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En los capítulos precedentes se comentó la problemática de generar competencias matemáticas para elevar el desempeño académico de los estudiantes en la solución de problemas. Así mismo se observaron las dificultades que presenta la enseñanza de la probabilidad y se mostraron los retos que se presentan al tratar de que los alumnos construyan el conocimiento de la misma. Por otra parte se mostró a detalle en que consiste el Modelo de la Enseñanza Directa y su relación con los diferentes aspectos que la Idoneidad Didáctica marca.

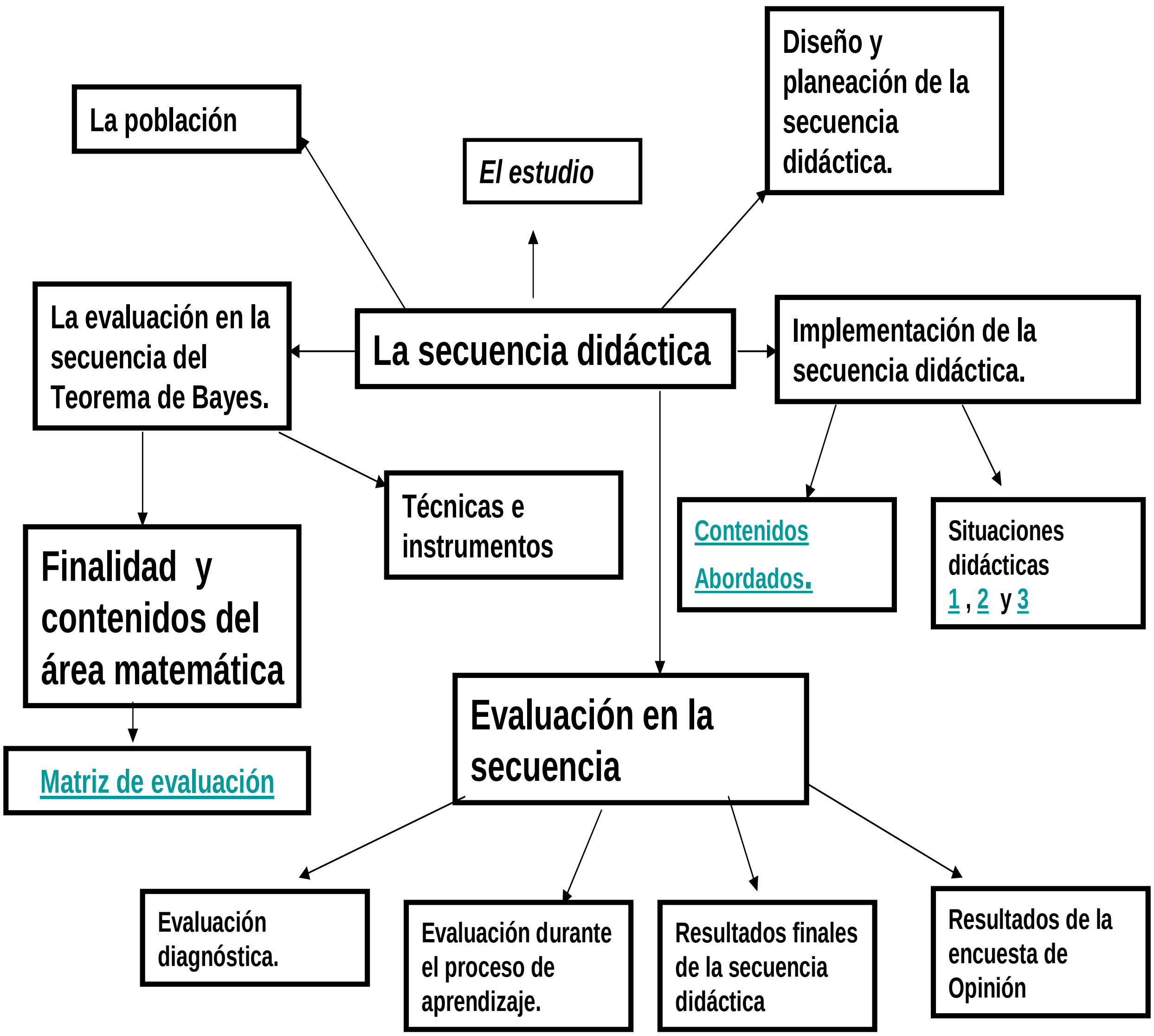
En este capítulo ha llegado el momento de mostrar la manera en que fue expuesta está secuencia, delimitando tiempo, espacio y las condiciones en las que se implementó esta serie de situaciones didácticas.

La secuencia expone tres situaciones didácticas basadas en el Modelo de Enseñanza Directa, en las cuales se exhiben los contenidos abordados y el número de secciones y las actividades realizadas al momento de impartirse. Así mismo, este capítulo brinda una transcripción de parte de la presentación del tema para la situación didáctica No. 2.

Por otra parte exhibe las técnicas e instrumentos utilizados para la evaluación (dividida en tres partes inicial, formativa y final) cubriendo con las finalidades y contenidos que el área matemática requiere.

Por último el capítulo exhibe los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia y se puede observar la medida en que esta cumple con los objetivos planteados en capítulos anteriores

Mapa Conceptual del Capítulo IV



IV.1. El Estudio

Uno de los propósitos de este trabajo es explorar los aspectos de la Idoneidad didáctica alta propuesta por Font et. Al. para lograr transmitir los conocimientos del Teorema de Bayes haciendo uso de problemas que se involucren con el entorno biológico y social del estudiante.

El diseño de la secuencia empleada en el aula y que se propone en la presente tesis considera dos fases: la de preparación e implementación (según Modelo de Enseñanza Directa de Eggen 1991).

La fase de Preparación constó de las siguientes fases:

a) Establecer las metas que se pretenden alcanzar durante la implementación. Estas se resumen en: minimizar las dificultades en la solución de Problemas bayesianos (Batanero, et. Al.) y empleo de artículos periodísticos referentes a la probabilidad condicional.
b) Reforzar los conocimientos previos de los estudiantes acerca de la probabilidad, para de esta manera proveer un anzuelo a la enseñanza del Teorema de Bayes.

En la planeación se considero primero reforzar los conocimientos previos de los estudiantes mediante el uso de dispositivos artificiales de azar (Ver 1° situación didáctica en el Anexo I), esto sirvió para inicializar al alumno al estudio de probabilidades simples, la intersección de probabilidades y la enseñanza de la probabilidad condicional. Una vez establecidas estas bases en el estudio de las probabilidades, se prosigue a establecer un diagrama de árbol de probabilidad y bajo este esquema deducir la fórmula de la probabilidad total (considerada como el denominador del Teorema de Bayes) y por último construir la fórmula que rige al Teorema de Bayes.

En la segunda situación didáctica se enfoca a la situación de problemas bayesianos para dos eventos, situados en un contexto significativo para el estudiante (Ver 2° situación didáctica en el Anexo I). La solución de cada problema bayesiano se desglosa en la identificar y obtener de probabilidades simples o condicionales, representarlas bajo un diagrama de árbol o tabla de contingencia y bajo este esquema visual obtenerla fórmula de la probabilidad total y por último aplicar el Teorema de Bayes para estos eventos.

La tercera situación expone la generalización del Teorema de Bayes, así como la solución de problemas bayesianos que involucren tres o más eventos. En esta situación se busca generar la analogía para el Teorema de Bayes en dos eventos y bajo este esquema poder establecer la generalización y la solución de estos problemas.

c) En la planeación se seleccionó y secuenció ejemplos y ejercicios de acuerdo a un contexto significativo para los estudiantes, teniendo en cuenta que estos ilustrarán de las características esenciales de los problemas bayesianos. También se consideró al seleccionar los ejercicios que los estudiantes puedan desarrollar destreza y confianza en la solución de este tipo de problemas.

   La selección de ejercicios y problemas tiene como fin último que los alumnos comprendan y practiquen la solución de problemas bayesianos de cualquier índole.

La fase de implementación consistió en:

a) Aplicar un examen diagnóstico (para verificar los conocimientos previos de los estudiantes acerca de la probabilidad, clásica, frecuencial y subjetiva).

b) Aplicar las tres secuencias didácticas a desarrollar en la fase de planeación llamadas: a) El modelo de las urnas, b) Aplicaciones del teorema de Bayes en dos eventos, c) La generalización del teorema de Bayes.

c) Aplicar una evaluación final y una encuesta de opinión de los estudiantes acerca de la enseñanza y aprendizaje del tema durante la implementación de la secuencia didáctica.

Adicionalmente a la evaluación final sumativa, se evaluó de forma individual cada unidad didáctica.

La fase de implementación se explica mejor con el cuadro IV.1 en el que se mencionan las situaciones didácticas, su duración y las actividades realizadas en cada una de ellas. Posteriormente se desglosa un esquema de cada una de las situaciones didácticas, en estos cuadros se puede observar: El número de sección en la cual fue impartida cada situación, su duración, los temas abordados, los recursos didácticos, y por último los propósitos o contenidos centrales.

IV.2. La población

La secuencia se implementó en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) No, 5 de la UNAM “José Vasconcelos” en el Turno Matutino con el grupo 603. El grupo 603 tiene 58 estudiantes que cursan el último año del bachillerato, en el área I (Físico – Matemáticas y de las Ingenierías). Las edades en que fluctúan los estudiantes de este grupo son de 17 a 19 años de edad. El ambiente en el cual se implementó la secuencia es el entorno natural de los grupos de la Escuela Nacional Preparatoria, que dentro de sus aulas tienen mesa-bancos movibles, pizarrón, cátedra, escritorio y silla para el profesor.

La secuencia fue implementada de acuerdo a los Planes y Programas de Estudio de la Asignatura de Estadística y Probabilidad de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM, materia de carácter optativo con una duración de 90 horas anuales, las cuales se distribuyen en tres horas semanales.

La asignatura se divide en tres unidades básicas que son: Unidad I, Estadística (30 horas); Unidad II, Conjuntos (5 horas) y Unidad III, Probabilidad (45 horas). La puesta en escena de esta secuencia se desarrolla en la Unidad III (Probabilidad), en el desarrollo del contenido de los Teoremas de Probabilidad.

Esta secuencia requiere de los conocimientos previos de los Teoremas de Probabilidad para los eventos: mutuamente excluyentes, no excluyentes, complementarios, condicionales e independientes, según lo marcan los Planes y Programas de Estudio de la ENP. La secuencia dentro de sus objetivos es dar un refuerzo al estudiante para el desarrollo de estos temas, además del cálculo de la probabilidad condicional inversa, tema que sostiene el Teorema de Bayes.

IV.3. Diseño y planeación de la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica se debe aplicar conforme lo dictan los planes y programas de estudio del bachillerato en que se imparta. La secuencia tiene como base el estudió de la probabilidad subjetiva y se implementó en la Escuela Nacional Preparatoria. Por ello está se llevó a cabo después de haber visto la probabilidad simple y las leyes de la probabilidad para eventos, excluyentes, no excluyentes, independientes y dependientes, así como la probabilidad para un evento seguro, y la probabilidad complemento. La secuencia toma como base de estudio los problemas bayesianos, los cuales consideran la fenomenología del azar que rodea el entorno de los estudiantes (Tanur y Cols.

(1971),)[47], así como abatir las "Dificultades que presenta el aprendizaje de la probabilidad". Hope y Kelly (1983), Kahneman, Slovic y Tversky(1982) y Shaughnessy (1981))[48] y sobre todo busca minimizar y de ser posible eliminar las dificultades que Batanero y Díaz consideran en su trabajo "Principales dificultades en el razonamiento bayesiano en estudiantes de Psicología".

La secuencia considera como metas que el estudiante identifique las probabilidades que involucra el problema y establezca su notación, la realización de diagramas, obtención de la probabilidad total (denominador del teorema de Bayes) y aplicar el teorema de Bayes. Cada uno de estas metas se consideró en la rúbrica de evaluación.

La Enseñanza Directa como método a seguir para llegar a la Idoneidad Didáctica alta, consideró en la planeación de la clase el grupo en el cual se tenía que llevar a cabo la implementación, este grupo contaba con 58 estudiantes, problema que se tiene que considerar, ya que se tiene que motivar e ingresar en la zona de Desarrollo Próximo (Vygostky) de cada uno de estos alumnos, para poder lograr las metas que se querían alcanzar en la implementación de la secuencia (véase Capítulo II), verificando con el profesor de grupo en el que se implementó la secuencia hubiera abarcado los temas que se consideraron anteriormente como conocimientos previos y la selección de problemas que cumplieran con la fenomenología del azar del entorno de los estudiantes.

Otro punto en importante en la planeación fue investigar con el profesor titular del grupo, si los estudiantes contaban con los conocimientos previos requeridos para su implementación

En esta planeación, se considera un examen diagnóstico, en el cual se pregunta acerca de los conocimientos previos de los estudiantes requeridos para la enseñanza del

[47] Referido por: Díaz Godino, J.; Batanero, Ma. C.; Cañizares Ma. J. (1996). **Azar y Probabilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje.**

[48] Referido por: Díaz Godino, J.; Batanero, Ma. C.; Cañizares Ma. J. (1996). **Azar y Probabilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje.** P.p.46

teorema de Bayes. Este examen tiene como finalidad que el profesor observe las deficiencias en estos conocimientos, para que el profesor en el momento que los utilice haga hincapié en dar un refuerzo a los conocimientos en los cuales los alumnos no obtuvieron buenos resultados en este examen, así como ir construyendo el conocimiento del teorema de Bayes de manera gradual.

La primera situación didáctica cumple con la fase de introducción del modelo de enseñanza directa. Esta situación didáctica tiene como finalidad que los estudiantes obtengan diversas probabilidades (simples, unión e intersección de probabilidades y probabilidades condicionales) a través de un dispositivo de azar artificial, en este caso dispositivo elegido fue un modelo de urnas, así como hacer una introducción a las representaciones gráficas (diagrama de árbol), el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes, para el ejemplo específico de extraer una bola de cualquiera de dos urnas numeradas con los números uno y dos.

Para ello se planearon las hojas de trabajo, la cual presentaba preguntas que no pudieran prestarse a varias interpretaciones por parte de los alumnos, y así obtener sólo la respuesta adecuada.

La segunda situación didáctica, ya plantea problemas bayesianos que involucran la fenomenología del azar a situaciones biológicas y sociales para dos eventos exclusivamente, ya que este es el caso más fácil de trabajar. Pensando ya en la implementación en el aula se considera la manera de dar la fase presentación (exposición del docente), en la cual simultáneamente se da la fase de introducción (rescate de los conocimientos previos para la adquisición del nuevo conocimiento). Se planearon las preguntas que el docente tenía que ir haciendo con sus estudiantes, así como la hipótesis de las posibles respuestas. Si durante la planeación la pregunta se prestaba a una mala interpretación, se daba una nueva redacción con la cual se obtuviera la respuesta esperada para el docente.

Para llevar a cabo la práctica guiada, la cual consiste en que el alumno empiece a practicar con ayuda los conocimientos impartidos en la exposición. El profesor entrega una hoja de trabajo, la cual tiene orientaciones para la solución de los problemas bayesianos para dos eventos. Esta fase de la implementación se maneja a través del aprendizaje cooperativo y el profesor ya sólo se vuelve un mediador del conocimiento del alumno (empieza el andamiaje considerado por Vygostky).

En la última fase de esta planeación, se otorga un problema de tipo bayesiano para dos eventos el cual tiene como finalidad medir en que grado el estudiante estructura cada uno de los pasos de la solución. Por último, se plantea un ejercicio en el cual se les solicita al alumno que analice una noticia o artículo periodístico en la cual tiene el estudiante que: identificar probabilidades condicionales y justificar el hecho de por qué se trata en el caso elegido de una probabilidad condicional. Evidentemente esto sólo se solicita para dos eventos.

La tercera situación didáctica, generaliza el teorema de Bayes para problemas bayesianos del entorno biológico y social del estudiante. Al igual que la parte anterior se realizó el mismo trabajo, sólo que ahora los problemas involucran un mayor grado de dificultad ya que en esta situación se trabaja para tres o más eventos.

Es importante hacer notar, que durante la implementación siempre se procuró dar la retroalimentación, así como otorgar a los alumnos un ambiente adecuado para que ellos tuvieran la libertad de preguntar sus dudas, también se fomentó siempre que los comentarios se realizaran con respeto hacía el docente, y entre compañeros. El docente establece las reglas o parámetros para lograr que dentro los equipos la ayuda sea mutua entre compañeros y profesor, estableciendo un respeto a la diversidad de opiniones, donde cada uno de los estudiantes sean tolerantes hacía las actitudes o comentarios de otros compañeros y sobre todo que los equipos trabajen a través del dialogo y la inclusión, para que los equipos puedan planificar y establecer discusiones conjuntas que favorezca el intercambio de roles y se delimite la división del trabajo entre los miembros para finalizar satisfactoriamente la tarea que se ha designado.

Para observar la eficiencia de la secuencia didáctica, además de observar la transferencia del conocimiento a otros problemas bayesianos que involucrarán dos o más eventos se planeó un examen final. Este fue evaluado tomando en cuenta l cada uno de los aspectos que se trataron de cubrir a través de las situaciones didácticas anteriores. Para ello el autor elaboró una rúbrica en la cual se observa hasta qué grado se llegó al cumplimiento de las metas que se había propuesto la secuencia (véase capítulo II). Y por último se diseñó un cuestionario de opinión en el cual se trata de observar qué actitudes y habilidades se desarrollaron a través de esta secuencia, así como, su percepción ante la puesta en escena de la secuencia; y por supuesto en qué grado de idoneidad didáctica fue considerara por los estudiantes.

IV.4. Implementación de la secuencia didáctica.

La implementación se llevó a cabo en 8 secciones de 50 minutos cada una. Se abarcó un total de 3 situaciones didácticas, un examen diagnóstico y final, así como una encuesta de opinión. Las situaciones didácticas cuidaban que la implementación se llevará a cabo como lo exige el Método de Enseñanza Directa (Eggen 1991) y cuidando que realmente el trabajo en equipos se diera en forma de trabajo cooperativo.

Para ello se implementaron las cuatro fases de la enseñanza directa, las cuales se conforman por Introducción (establecer un vínculo con los conocimientos previos de los estudiantes y el nuevo conocimiento a adquirir), presentación (exposición del Profesor de manera que la clase sea interactiva, es decir, donde se permita que los estudiantes participen a través de preguntas o tareas sencillas), práctica guiada (la oportunidad de practicar el nuevo contenido) y la práctica independiente en donde los alumnos de manera individual tenían que aplicar el contenido de los temas de otros contenidos, así como tratar de llevar el conocimiento a situaciones de la vida cotidiana a través de notas y artículos periodísticos, los cuales tuvieran relación con la probabilidad condicional.

Para ello, los estudiantes tenían en sus manos las hojas de trabajo, las cuales le permitían orientar los pasos a seguir en la solución de un problema bayesiano. Si en algún momento, un equipo o estudiante no comprendía alguno de estos pasos el profesor lo guiaba para que él mismo encuentre la solución a sus dudas.

Para lograr una buena implementación, el papel del profesor es muy importante. El profesor tiene que tener la disposición de resolver sus dudas y hacerle sentir que su pregunta es importante. Nunca se debe de minimizar las dudas de los estudiantes ya que esto implica que por lo menos este alumno no tenga la confianza de volver a preguntar cualquier otra duda.

El profesor tiene que darse cuenta de las reacciones de los estudiantes, como un largo silencio en la exposición del profesor y cerciorarse que este silencio es porque el estudiante no entendió nada de lo antes dicho o realmente se comprendió lo que el profesor expuso. Otro caso es el aislamiento de un compañero cuando se trabaja en equipo y ayudar al estudiante a trabajar en equipo mostrando ante sus compañeros que él es un elemento útil y que esta dispuesto a trabajar con ellos.
Es importante que el profesor en todo momento observe que las discusiones del equipo siempre se den en un ambiente donde impere el respeto y que la finalidad del equipo sea la de trabajar juntos para la adquisición del conocimiento.

IV.5. Contenidos Abordados.

La secuencia didáctica abordó en general 3 situaciones que presentaban el desarrollo de los problemas bayesianos, en contextos no matemáticos. El cuadro III.1 muestra a continuación el nombre de las situaciones didácticas (incluidas en el anexo I), el tiempo que se llevó para ponerlas en práctica, así como las actividades que se realizaron en cada una de ellas.

Situación Didáctica Número.	Situación didáctica	Duración	Actividades Realizadas
	Examen diagnóstico	20 minutos	Presentación de examen diagnóstico.
1	Modelo de Urnas (Introducción al tema) Afirmación de conocimientos previos e introducción al nuevo tema.	80 minutos	1) Presentación de hoja de trabajo. 2) Extraer una bola de una urna. 3) Extraer una bola de alguna de las dos urnas. 4) Diagrama de árbol y obtención de la probabilidad Total. 5) Teorema de Bayes para dos eventos.
2	Aplicaciones del Teorema de Bayes para dos eventos.	100 minutos	Se divide en 4 partes. 1) Entrega de hoja de trabajo y redacción de los ejercicios a exponer del profesor. 2) *Presentación.* Exposición del profesor del Teorema de Bayes para dos Eventos. 3) *Práctica Guiada* Resolución de un problema bayesiano para dos eventos. 4) *Práctica Independiente*. Resolución de dos problemas bayesianos. Identificación de probabilidades condicionales en noticias periodísticas
3	Aplicaciones de la generalización del Teorema de Bayes para tres o más eventos.	100 minutos	Se divide en 4 partes. 1) Entrega de hoja de trabajo y redacción de los ejercicios a exponer del profesor. 2) *Presentación.* Exposición del profesor del Teorema de Bayes para 3 o más eventos. 3) *Práctica Guiada* Resolución de problema bayesiano para tres o más eventos. 4) *Práctica Independiente*. Resolución de dos problemas bayesianos. Identificación de probabilidades condicionales en noticias periodísticas.
	Evaluación Final	100 minutos	1) Presentación del examen final. 2) Presentación de encuesta de opinión.

Cuadro No. IV.1 "Situaciones Didácticas"

A continuación se desglosa una descripción de las situaciones de trabajo, identificando los recursos, contenidos y/o propósitos que se desarrollan en cada situación didáctica.

La descripción de las situaciones didácticas, serán expresadas cada una en un cuadro, en el cual se describe cada una de sus partes, la sección a la que correspondió el tema a tratar, los recursos didácticos empleados, así como los propósitos y /o contenidos que se quieren abordar en cada parte del tema.

El examen diagnóstico consiste en la identificación de los conocimientos previos de los estudiantes. El examen diagnóstico consistió en 8 preguntas, los cuales se distribuyeron de la siguiente manera:

- Tres preguntas consisten en extraer probabilidades simples.
- Dos de ellos son de aplicación de las leyes de Probabilidad.
- Uno consiste en la obtención de una probabilidad condicional a través de probabilidades simples.
- Y los últimos dos son acerca de la notación utilizada en la probabilidad condicional.

Al finalizar el examen diagnóstico, se inicia con la situación didáctica No. 1, en la cual se da una revisión a los conocimientos previos y da una introducción al teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

IV.6. Examen diagnóstico.

	No. de sesión	Duración	Tema	Recurso	Propósitos/ Contenidos
Parte 1	1	20 minutos	Presentación de examen diagnóstico.		Identificar los conocimientos previos de probabilidad de los alumnos.
Materiales didácticos utilizados: • Examen Diagnóstico.					

Cuadro No. IV.2 "Examen Diagnóstico"

Ver Anexo 1, página 158.

IV.7. Situación didáctica No. 1

Esta situación didáctica provee una visión general del contenido nuevo y explora las conexiones con los conocimientos previos del alumno y ayuda a los alumnos a comprender el valor del nuevo contenido. Es decir, esta situación didáctica en el modelo de enseñanza directa es el paso de **introducción** que rige la implementación del modelo.

Parte I. Para iniciar el estudio del teorema de Bayes, se organizaron equipos de 5 personas, y a cada equipo se le entregó una hoja de trabajo.

Parte 2. Consistió en una dramatización por parte de los alumnos, la cual consistía en pasar dos alumnos con los ojos vendados al frente de sus compañeros para extraer una bola de una sola urna. El experimento se repitió tres veces y bajo la observación de este experimento, los estudiantes discutían por equipos la probabilidad simple para la extracción de una bola blanca, una bola negra, una bola blanca marcada con un alfiler o una bola blanca marcada con dos alfileres.

Al finalizar el ejercicio, el grupo discutió los resultados uno a uno con la guía y explicación del profesor.

La mayoría de los estudiantes contestaban al unísono y las discrepancias en resultados sólo se dieron por errores de conteo simple.[49]

Parte 3. Esta parte consiste en asignar nuevamente dos alumnos para la elaboración del experimento. Ahora el experimento consiste en extraer una bola de alguna de las dos urnas marcadas con los números uno y dos. El experimento se realiza tres veces y se les solicite llenen la hoja de trabajo en la cual se les solicito llenen la hoja de trabajo, la cual contiene la obtención de probabilidades simples en el caso de la selección de una de las dos urna, después se les pide que obtengan probabilidades condicionales en el caso de que dado que tu compañero selecciono la urna 1, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?, los compañeros de equipo analizan y discuten sus resultados y después del tiempo establecido, el profesor verifica que los resultados estén correctos, en caso de que existan dos resultados diferentes, el profesor presenta ante el grupo una breve exposición de cómo se obtiene el resultado correcto.

Parte 4. Ésta se inicia con la exposición del profesor, en interacción con el grupo se establece la notación a utilizar para cada uno de los eventos acontecidos en la parte 3. A partir de establecer la notación, el profesor ilustra ante sus alumnos cómo se elabora un diagrama de árbol de probabilidad para el caso de extraer una bola de dos urnas, se establecen las probabilidades simples, condicionales ya obtenidas con anterioridad. Además se muestra al alumno la obtención de la intersección de las probabilidades, a partir de la Ley de la probabilidad para eventos dependientes, es decir:

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P(A)} \text{ si B depende de la ocurrencia de A}$$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P(B)} \text{ si A depende de la ocurrencia de B}$$

Y bajo un simple despeje se obtiene:

[49] Para ver una descripción más detallada de la situación, consúltese el Anexo 1, página----

$$P\left(A\cap B\right)=P(A)P\left(B/A\right)\text{ si B depende de la ocurrencia de A}$$

$$P\left(A\cap B\right)=P(B)P\left(A/B\right)\text{si A depende de la ocurrencia de B}$$

Después de haber elaborado el profesor el diagrama de árbol de probabilidades, lo borra del pizarrón y pide a los alumnos que lo vuelvan a elaborar en sus hojas de trabajo y contesten las preguntas correspondientes a la intersección de probabilidades, y ver si con los datos obtenidos, ellos pueden inducir cómo obtener la extracción de una bola blanca (sin importar la urna), es decir, que obtengan la probabilidad total. Después de esta inducción, el maestro explica cómo se obtiene la probabilidad de obtener una bola blanca a través del diagrama ya elaborado con anterioridad y la aplicación de las leyes antes citadas. Una vez terminada la exposición del profesor, se le solicita a los alumnos que ellos obtengan la probabilidad total para el caso de las bolas negras, al final del tiempo establecido para los estudiantes, el profesor tiene que retroalimentar el resultado obtenido.

El 95% de los estudiantes lo realiza de forma correcta, por lo que se inicia la siguiente parte.

Parte 5. Después de la obtención de la probabilidad total, se les solicita a los alumnos que respondan la pregunta contenida en la hoja de trabajo (Si un compañero no vio la realización del experimento, pero lo único que observa es una bola blanca, y ésta ya no cuenta con alfileres que le indiquen de qué urna proviene. ¿Puede tu compañero obtener la probabilidad de qué está bola sea de la urna 1?). Esta pregunta ya es la intervención para la obtención de la probabilidad condicional inversa. La mayoría del estudiantado, dedujo que si se puede obtener pero no conoce la forma de obtenerlo.

Una vez sembrada la curiosidad para obtener la probabilidad de que dado que hay una bola blanca esta provenga de la urna 1. Se inicia la exposición del profesor, para ello se les pide que de manera conjunta, digan en notación probabilística de que manera se plantea esta pregunta.

La respuesta no fue fácil de obtener, se observaron algunos problemas en la forma de escribir la notación condicional. La gran mayoría de los alumnos no podían identificar la dependencia de los eventos, es decir ahora el evento dependiente es el hecho de extraer de la urna 1 y no el color de la bola. Al final, se entendió que el primer evento es tener la bola blanca y por lo tanto la probabilidad condicional se expresaba como:

$$P(U_1 / B) = \frac{P\left(U_1 \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(U_1) \bullet P(B / U_1)}{P(B)}$$

donde:

$P(U_1)$ es la probabilidad de extraer una bola de la urna número 1.

$P(B)$ es la probabilidad de extraer una bola de color blanco.

$P(U_1 / B)$ es la probabilidad de que dado que se tiene una bola blanca, esta provenga de la urna 1.

$P(B / U_1)$ es la probabilidad de que dado que se extrajo una bola de la urna 1, esta sea blanca.

Y se destaca el hecho de que era necesario definir los eventos, que el problema planteaba, así cómo obtener la probabilidad de la bola blanca, debido a que los demás ya estaban dados en el problema. Por último se sustituyen los valores y se obtiene la solución.

Para finalizar la situación didáctica, se les solicitó a los estudiantes que por equipos obtuvieran la probabilidad de que dada que se extrajo una bola negra provenga de la urna 2.

Dentro de la discusión de los equipos, existieron sobre todo discrepancias en la notación. Al profesor se le solicita el apoyo para la aclaración de las dudas, y por qué tenía la solución que darse de esa forma, siempre con el apoyo del gráfico (diagrama de árbol).

Al terminar el trabajo, se entregaron las hojas y se despidió el profesor.

IV.7.1. Cuadro de la situación didáctica No.1

	No. de sesión	Duración	Tema	Recurso	Propósitos/ Contenidos
Parte 1	1	1 minuto	Presentación de una hoja de trabajo		
Parte 2	1	6 minutos	Extracción de una bola de una urna	Dramatización por parte de los alumnos. Extraer una bola de una urna Discusión de las preguntas de la hoja de trabajo, en trabajo colaborativo. Llenado de la hoja de trabajo.	Obtención de probabilidades simples a través del modelo de la urna. Asignación de la notación para cada evento.
		3 minutos		Retroalimentación Profesor-Alumnos.	
Parte 3	1	6 minutos	Extraer una bola de alguna de las dos urnas.	Dramatización por parte de los alumnos. Extraer una bola de alguna de las dos urnas. Discusión de las preguntas de la hoja de trabajo, en trabajo colaborativo. Llenado de la hoja de trabajo.	Obtención de probabilidades condicionales a través del modelo de las urnas.
		4 minutos		Retroalimentación Profesor-Alumnos.	
Parte 4	1	5 minutos	Diagrama de árbol.	Exposición del Profesor. Elaboración de un diagrama de árbol.	Elaboración de una representación adecuada, a través de un diagrama de árbol de probabilidad y obtención de intersección de las probabilidades.
		5 minutos		Elaboración de diagrama de árbol de probabilidad por parte de los alumnos.	
	2	6 minutos		Discusión de las preguntas de la hoja de trabajo, en trabajo colaborativo. Llenado de la hoja de trabajo	

		4 minutos		Discusión de la pregunta (en trabajo colaborativo): ¿La probabilidad de obtener una bola blanca del primer experimento (se extrajo una bola de una sola urna) es igual a obtener una bola blanca del segundo experimento (se extrajo la bola de dos urnas)	Análisis de la reducción del espacio muestral cuando se presenta la probabilidad condicional.
		10 minutos		Exposición del profesor. Fórmula de la probabilidad total, para el caso de las bolas blancas	Cálculo del Teorema de la probabilidad total y aplicarlo para el caso de las bolas negras extraídas de las urnas.
		10 minutos		Discusión del Teorema de la probabilidad Total para el caso de las bolas negras en trabajo colaborativo. Llenado de la hoja de trabajo Incluye retroalimentación profesor-alumnos.	
Parte 5	2	4 minutos	Teorema de Bayes para dos eventos	Discusión de la pregunta (en trabajo colaborativo): Si un compañero no vio la realización del experimento, pero lo único que observa es una bola blanca, y esta ya no cuenta con alfileres que le indiquen de que urna proviene. ¿Puede tu compañero obtener la probabilidad de que está bola sea de la urna 1?	Obtención de la probabilidad condicional inversa a través del Teorema de Bayes para dos eventos.
		8 minutos		Exposición del profesor Aplicación del Teorema de Bayes a la situación.	
		10 minutos		Discusión del Teorema de Bayes para obtener la probabilidad de que dado que se tiene una bola	

				negra esta provenga de la urna 2. Trabajo colaborativo. Llenado de la hoja de trabajo Incluye retroalimentación profesor-alumnos. Entrega de las hojas de trabajo	
• **Materiales didácticos utilizados:** • 5 bolas blancas y 3 bolas negras, marcadas con un alfiler, 4 bolas blancas y 2 negras con dos alfileres. • 2 urnas numeradas con los números 1 y 2. • Hoja de trabajo • Pizarrón y gises o en su caso plumones para pizarrón blanco.					

Cuadro No. IV.3 "Situación Didáctica No 1"

IV.8. Situación didáctica No. 2

Esta situación didáctica pretende, aplicar el conocimiento del Teorema de Bayes aplicado a dos eventos en un caso de la cotidianidad del alumno. Para ahorrar tiempo, debido a que los problemas tienen la redacción extensa, se le entregó una copia del problema a cada alumno. El profesor inicia su exposición, por el Método de Enseñanza Directa, en la cual se muestra la interacción del alumno.

Es importante resaltar la exposición de la clase, ya que la importancia de este método se centra en la enseñanza del profesor, en consecuencia el docente tiene que tener un dominio total del tema, para poder aclarar las dudas de sus alumnos o plantear situaciones diferentes las cuales sean de interés al estudiante.

IV.8.1.Presentación en la situación didáctica No. 2.

En la fase de presentación, el profesor explica el contenido, teniendo como meta que los alumnos puedan desarrollar las dificultades (explicadas en el capítulo II) que el tema implica, y estas son:

- Identificar los datos del problema.
- Construir una representación adecuada.
- Calcular el denominador del Teorema de Bayes (Cálculo de la probabilidad total).
- Calcular la probabilidad Inversa (teorema de Bayes)

Obsérvese como a lo largo de la exposición se va desarrollando el tema, en secuencia con las dificultades dichas anteriormente.

El profesor plantea con los alumnos el siguiente problema: Para ello se les entrego a cada uno de los estudiantes una copia fotostática con el problema. Esto se hizo para minimizar el tiempo con el que se cuenta en la propuesta.

Ejemplo:

Un adulto mayor de 50 años se selecciona al azar en una comunidad, en la cual 9% de quienes rebasan esa edad sufren de diabetes, por lo que se les somete a una prueba simple de nivel de glucosa para detectar o desechar la presencia del padecimiento. Sin embargo, el examen no es totalmente confiable, pues al 3% de las personas que no sufren el mal les señala como "positivos" mientras que el 15% de aquellos que sí están enfermos, la prueba resulta "negativa".

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ese individuo tenga diabetes, dado que el resultado marca "positivo"?

A continuación se transcribe parte del diálogo realizado en el aula. En ella, el profesor tiene dos objetivos: primeramente que el alumno abstraiga los eventos a partir de la lectura de la anterior descripción. En segundo lugar, que se nombren con notación matemática dichos eventos.

Transcripción	**Comentarios**
P: El primer paso para lograr plantear el problema es identificar los eventos que presenta el problema. ¿Qué eventos presenta el problema? **A:** Ser diabético mayor de 50 años **P:** Nada más es eso **A:** Que en la prueba de diabetes sea positivo **P:** ¿Existe otro evento? **A:** Si… **P**: ¿Cuáles? **A:** No tener diabetes ó ser negativo en la prueba **P:** ¿Ya no hay más? **A:** No **P:** Escribamos en el pizarrón los eventos, llamemos D al evento de tener diabetes, ¿les parece bien? **A:** Sí **P:** ¿Cómo le llamamos al hecho de que la prueba sea positiva? Les parece una V de verdadera, para no confundirnos con la P de la probabilidad **A:** Sí	No basta con mencionar los objetivos al alumno, se requiere de pasos más específicos que muestre la ruta de lo que persigue el profesor. En este caso, se pretende que el alumno con un ejemplo concreto como el "tener diabetes" proporcione significado preciso a la variable probabilística.

El profesor escribe en el pizarrón.

Sea D.- El evento de ser diabético mayor de 50 años.

Sea V.- El evento de que la prueba sea positiva.

Una vez establecida la notación, el profesor tiene por objetivo la asignación de probabilidades simples y complementarias.

Transcripción	**Comentarios**
P: Ahora, ¿Cuál es la probabilidad de ser diabético? **A:** 9% **P:** ¿Cómo se expresa en decimales? Recuerda que el 9%= 9/100 y esto es:	Aquí se observa la importancia de los conocimientos previos de los alumnos, para

A: 0.09 **P:** Y la de no tener diabetes. ¿Cómo lo obtengo? **A:** Es el complemento de tener diabetes. **P**: Sí, porque o se tiene o no se tiene diabetes. Entonces como obtengo la probabilidad del complemento **A:** Como uno menos la probabilidad de tener diabetes es igual a 1-0.09=0.91	poder hacer la vinculación al nuevo contenido por aprender. Se rescata la obtención de probabilidades simples y la probabilidad complemento aplicado a un ejemplo concreto. La realización de una conversión de porcentaje a fracción y a un número decimal.

Entonces el profesor ya puede escribir en el pizarrón:

La probabilidad de ser diabético es: P(D)=0.09

Y la de no ser diabético es (D’) es igual a P(D’)=1-P(D)=1-0.09=0.91

En este dialogo se observa parte de las “Dificultades en el aprendizaje de la probabilidad”, que se plantean en los capítulos anteriores. Uno de los objetivos en esta parte del profesor es que el alumno centre la diferencia en la notación de la probabilidad condicional, es decir, la diferencia entre P(A/B) (la probabilidad de que dado que ocurre un evento B ocurra A), y la de P(B/A) (la probabilidad de que dado que ocurre el evento A ocurra el evento B). El siguiente objetivo importante es que se establezca la asignación de las probabilidades con los datos planteados en el problema.

Transcripción	**Comentarios**
P: ¿Qué otros datos me da el problema? **A:** El 3% de las personas que no sufren el mal les señala como “positivos”. **P:** ¿Cómo lo puedo representar como una probabilidad? **A:** mmmmmmmmm **P:** Observen que quiere decir que las personas no sufran de ese mal.	La asignación de la notación en la probabilidad condicional, no se da de manera implícita en el problema. Es necesario que el

A: Qué no tienen diabetes. **P:** Entonces, podemos decir que dado que no tienen diabetes son positivos. **A:** Sí. **P:** Entonces, estamos hablando de una probabilidad condicional y ¿Cómo lo represento? Recuerda que en la probabilidad condicional los eventos tienen un orden de ocurrencia. Según la oración ¿Qué ocurre primero? No tener diabetes o hacerte la prueba. **A:** No tener diabetes (Nota: la cronología de los eventos no es una respuesta fácil para los alumnos). El punto aquí es el explicarles el dado que: No tenía diabetes, entonces salió positivo. **P:** Recordemos que la probabilidad condicional es P(A/B) es decir dado que ocurrió B ocurre A. Entonces bajo esa premisa como expreso en probabilidad que *dado que no tienen diabetes son positivos.* **A:** P(V/D')=3% **P:** P(V/D')=3%=3/100=0.03	profesor haga hincapié en los eventos y la ocurrencia en el orden cronológico que plantea el problema para así poder asignar la notación correcta y por lo tanto verificar que la probabilidad que indica el problema es la que realmente se expresa.

El profesor escribe en el pizarrón:

P(V/D')=3%=3/100=0.03

Transcripción	**Comentarios**
P: Existe otra probabilidad en el problema. **A:** El 15% de aquellos que sí están enfermos, la prueba resulta "negativa". **P:** ¿Cómo se representa? **A:** P(V'/D)=85%=0.85	Para corroborar el entendimiento de la parte anterior, es necesario verificar que los alumnos pueden identificar y asignar la probabilidad correcta a otro dato del problema expresado en probabilidad condicional.

El profesor escribe en el pizarrón: P(V'/D)=85%=0.85

IV.8.2.Secuencia de representación gráfica por tabla de contingencia

El objetivo es que el profesor brinde a los alumnos la forma de dar una representación adecuada a los problemas bayesianos, a través de una tabla de contingencia y esta establezca las probabilidades implícitas y las que se tienen que deducir a través del complemento de la probabilidad.

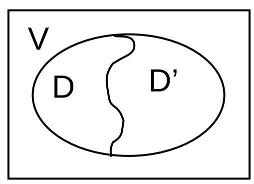
La tabla de contingencia es una representación de una matriz de 2x2, en la cual las columnas involucran a los eventos independientes y las filas a los eventos dependientes para pasar a describir las probabilidades condicionales. Esta representación gráfica va a ayudar al estudiante a entender y deducir el problema de la Probabilidad Total que se verá posteriormente en otra transcripción.

La elaboración de la tabla de contingencia, trabajo dos de los elementos de la idoneidad didáctica, la epistemológica y la cognitiva.

Transcripción	**Comentarios**
<table><tr><td></td><td>**Diabéticos**</td><td>**No Diabéticos**</td></tr><tr><td>**Diagnóstico Positivo**</td><td>***P:*** *¿Qué tendría que escribir aquí?* ***A:*** La probabilidad de que dado que sea diabético la prueba sea positiva 85% P(V/D)=0.85</td><td>**P:** La probabilidad de que dado que no sea diabético la prueba sea positiva *3%* *P(V/D')=0.03*</td></tr><tr><td>**Diagnóstico Negativo**</td><td>**P:** La probabilidad de que dado que sea diabético la prueba sea negativa *15%* *P(V'/D)=0.15*</td><td>**P:** *¿Qué tendría que escribir aquí?* ***A:*** La probabilidad de que dado que no sea diabético la prueba sea negativa **97%** **P(V'/D')=0.97**</td></tr><tr><td>**Total**</td><td>100%</td><td>100%</td></tr></table>	Bajo la tabla de contingencia, el alumno observa que eventos ocupan las columnas como los eventos independientes y los eventos dependientes ocupan las filas. En este caso, el profesor tiene por tarea hacerle notar al estudiante por qué el hecho de tener o no tener diabetes son los eventos que no dependen de la ocurrencia de tener un diagnóstico positivo y negativo. Además de ello, se enseña como obtener los complementos de la probabilidad para eventos condicionales.

IV.8.3. Secuencia de obtención del denominador del teorema de Bayes (probabilidad total)

A través del siguiente dialogo el objetivo consiste en que el alumno pueda deducir a través de una tabla de contingencia la fórmula para la probabilidad total. Una vez deducida la fórmula se procede a que el alumno sustituya valores de manera adecuada para obtener una probabilidad de un evento el cual no se encuentra descrito en los datos del problema.

Transcripción	**Comentarios**
P: ¿Qué probabilidad solicita el problema en el inciso a? **A:** La probabilidad de que dado que es positivo tenga diabetes. **P:** ¿Cómo represento este evento? **A:** P(D/V) **P:** Si recordamos las leyes de probabilidad, sabemos que: $P(D/V)=\frac{P(D)\cdot P(V/D)}{P(V)}$ Observemos que en esta fórmula tenemos la probabilidad de ser diabético, es decir P(D). ¿Qué más tenemos? **A:** La probabilidad de que dado que es diabético fue positivo. P(V/D) **P:** ¿Qué falta obtener en esta fórmula? **A:** La probabilidad de ser positivo P(V). **P:** A ver recordemos que:  Por teoría de conjuntos tenemos que: $V=(V\cap U)=V\cap\left(D\cup D'\right)=\left(V\cap D\right)\cup\left(V\cap D'\right)$ *entonces* $V=\left(V\cap D\right)\cup\left(V\cap D'\right)$ Pero Observemos que $\left(V\cap D\right)$ es ajeno a $\left(V\cap D'\right)$ Si los vemos como eventos quería decir que $\left(V\cap D\right)$ es excluyente a $\left(V\cap D'\right)$ Como $V=\left(V\cap D\right)\cup\left(V\cap D'\right)$ si aplico la probabilidad la unión de eventos excluyentes es la ___________de las probabilidades ¿Qué operación es? **A:** Suma **P:** Entonces Aplicando probabilidades queda: $P(V)=P(V\cap D)+P\left(V\cap D'\right)$ Por definición de eventos dependientes sabemos que: $P(V\cap D)=P(D)\cdot P(V/D)$	La ruta a seguir consiste en que el profesor ofrece un argumento sólido del cual se deriva la fórmula de la probabilidad total, no es sólo una mera exposición y aplicación de la fórmula. El profesor trata de dar un sentido a través de los conocimientos previos y la representación gráfica a la obtención de la fórmula. Una vez expresado esto, el alumno puede sustituir de manera más sencilla los valores y obtener la probabilidad deseada. No se trata de una simple reproducción, si se logra la comprensión de la obtención de la fórmula el alumno habrá llegado a la categoría de síntesis, una de las categorías más altas en las habilidades del

sustituyendo tenemos:

A: $P(V \cap D) = (0.09)(0.85) = 0.0765$

P: Y $P(V \cap D') = P(D') \cdot P(V / D')$

Es igual a:

A: $P(D \cap V') = (0.91)(0.03) = 0.0273$

P: Entonces:

$$P(V) = P(D) \cdot P(V / D) + P(D') \cdot P(V / D')$$

sustituyendo:

A: $P(V) = (0.09)(0.85) + (0.91)(0.03) = 0.0765 + 0.0273 = 0.1038$

P: Esto es lo que se conoce con el nombre del Teorema de la Probabilidad Total. Veamos que quiere decir esto en la tabla de contingencia:

	Diabéticos P(D)=0.09	**No Diabéticos P(D')=0.91**
Diagnóstico Positivo P(V)=0.1038	***P:*** *¿Qué tendría que escribir aquí?* ***A:*** La probabilidad de que dado que sea diabético la prueba sea positiva 85% P(V/D)=0.85	**P:** La probabilidad de que dado que no sea diabético la prueba sea positiva *3%* *P(V/D')=0.03*
	$P(V \cap D) = (0.09)(0.85) = 0.0765$	$P(D \cap V') = (0.91)(0.03) = 0.0273$
Diagnóstico Negativo P(V')=0.0135+0.8827 P(V')=0.8962	**P:** La probabilidad de que dado que sea diabético la prueba sea negativa *15%* *P(V'/D)=0.15*	P: *¿Qué tendría que escribir aquí?* *A:* La probabilidad de que dado que no sea diabético la prueba sea negativa 97% P(V'/D')=0.97
Trabajo de los alumnos	$P(V' \cap D) = (0.09)(0.15) = 0.0135$	$P(V' \cap D') = (0.91)(0.97) = 0.8827$
Total	100%	100%

pensamiento.

Después de esto el profesor corrobora de manera rápida, que la exposición a sido más o menos comprendida, ya que su verificación total se dará en la práctica guiada y la práctica independiente.

P: Observa que sólo consiste en ver quienes conforman el diagnóstico positivo, multiplicar por las probabilidades y así obtienes la probabilidad total de que el diagnóstico sea positivo. De la misma forma que yo lo hice obténganlo ustedes para el caso del diagnóstico negativo.

Después de realizado este cálculo, de que ¿otra manera lo podemos obtener?

A: 1-P(V) .

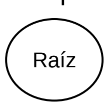
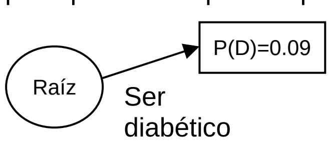
P: Verifíquenlo.

A: 1-0.1038=0.8992.

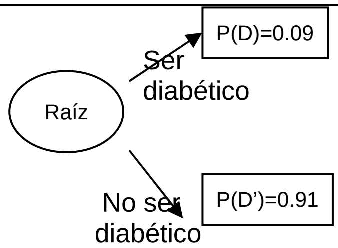
IV.8.4.Teorema de Bayes:

Transcripción	**Comentarios**
P: Regresando al problema: Ahora si podemos obtener: $P(D/V) = \frac{P(D) \cdot P(V/D)}{P(V)} = \frac{0.09 \times 0.85}{0.1038} = \frac{0.0765}{0.1038} = 0.7367 = 73.67\%$ Por lo tanto, la probabilidad de que dado que una persona obtenga un resultado positivo sea diabética es de 73.67%	Aquí ya se llega a la solución total del problema, pero observe el lector la serie de pasos que involucraron esta solución, lo que implicó descomponer una habilidad compleja en habilidades más sencillas, llamadas sub-partes o componentes para lograr la habilidad. Esto se relaciona con la idoneidad epistémica, cognitiva e interaccional.

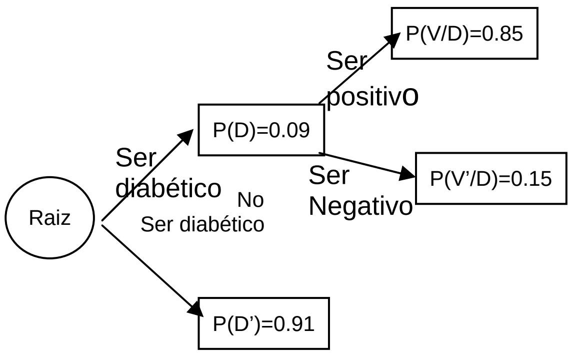
IV.8.5. Otra representación gráfica. Diagrama de árbol

Transcripción	**Comentarios**
P: Este problema también puede ser analizado a través de un diagrama de árbol de probabilidad. Veamos: Nota: El profesor realiza todos los trazos en el pizarrón.  Despues puede ser que una persona sea diabética ó  **A:** No ser diabética.	El diagrama de árbol es presentado como un modelo generativo que permite sugerir e inculcar la generalización iterativa (extensión sin límite a cualquier número de eventos, como ocurre en la inducción matemática) y la generalización constructiva, esto es su adaptación a nuevos problemas

<table>
<tr>
<td>

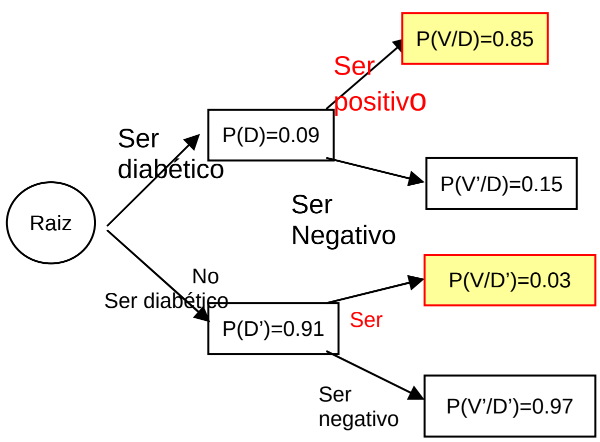


P: Si es diabética, puede que su examen salga positivo o negativo.



Si no es diabético, su examen también es:

A: Positivo o negativo.



P: Ahora, se tienen que observar los casos en los cuales las personas resultaron con un examen positivo. ¿En qué casos se da?

A: En el gráfico anterior, señala un alumno los dos casos (son los que se resaltan con amarillo).

P: Pero $P(D \cap V) = P(D) \times P(V / D)$ por ser eventos dependientes y P(D') es igual a:

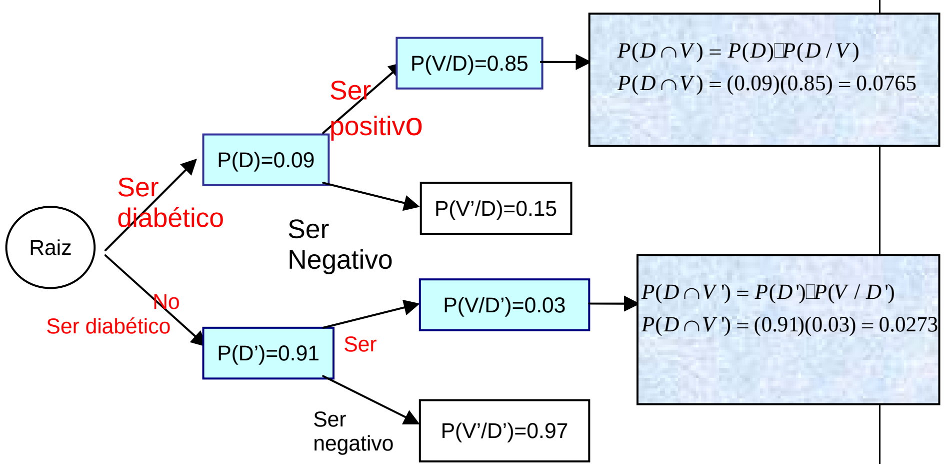
</td>
<td>

derivados del primitivo, que es una característica del razonamiento recursivo.

</td>
</tr>
</table>

A: $P(D' \cap V) = P(D') \times P(V / D')$

P:



P: Entonces la probabilidad de ser positivo en la prueba es:

A: $P(V) = (0.09)(0.85) + (0.91)(0.03) = 0.0765 + 0.0273 = 0.1038$

P: Por último:

Ahora si podemos obtener:

$$P(D/V) = \frac{P(D) \cdot P(V/D)}{P(V)} = \frac{0.09 \times 0.85}{0.1038} = \frac{0.0765}{0.1038} = 0.7367 = 73.67\%$$

Como habíamos visto en el caso anterior.

Nos vemos la siguiente clase.

A: Es mucho más fácil que la otra. (Opinan en voz alta).

Esta presentación tomó en cuenta los temas que más se le dificultan al estudiante y surge la necesidad de la calculadora como recurso de apoyo, las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones. Estas razones hacen que la exposición cumpla con la idoneidad mediacional y ecológica. Por lo expuesto, la enseñanza directa cumple las seis componentes de la idoneidad didáctica alta.

Al terminar la exposición del profesor, se da inicio a la práctica guiada. El profesor solicita que se formen equipos de 5 personas y se entrega una hoja de trabajo por equipo, en donde se expone otro problema de tipo bayesiano, para que se discuta y resuelva con sus compañeros. En esta parte la mayoría de los equipos, pudieron fácilmente asignar la notación a los eventos simples, pero hubo dos equipos que presentaron duda en la asignación de la probabilidad condicional. Al llenar la tabla de contingencia la mayoría de los equipos discutían la probabilidad de que se respeten las señales de tránsito (problema de la Probabilidad Total), el profesor se acerca con cada uno de los equipos y explica nuevamente cómo se obtiene la probabilidad Total a través de la tabla de contingencia, y una vez establecida esta probabilidad los equipos continuaban con su trabajo.

En la elaboración del diagrama de árbol, la mayoría de los equipos lo realizaban correctamente, pero omiten escribir la probabilidad de la intersección de los eventos, debido a que la tenían escrita en la parte anterior.

En la última actividad del Teorema de Bayes 7 de los 9 equipos formados, concluyeron satisfactoriamente, pero los otros 2 equipos no pudieron establecer la probabilidad condicional inversa, de hecho se observó que en uno de ellos el tiempo asignado para la actividad fue insuficiente, y el otro presentó demasiadas dudas en su intento por resolver esta parte de la hoja de trabajo, pero no pudieron llegar a la solución.

A lo largo de la solución de este ejercicio, el profesor entregó individualmente la tarea, la cual forma la parte de la práctica independiente.

El propósito de la tarea es ver en qué grado el alumno asimiló los conocimientos impartidos para la aplicación del Teorema de Bayes a un problema bayesiano, y en segunda instancia observar cómo los alumnos pueden transmitir el conocimiento a su cotidianeidad, explorando en qué grado ellos pueden identificar y justificar la probabilidad condicional en artículos o notas periodísticas.

III.8.6. Cuadro de Situación didáctica No. 2.

	No. de sesión	Duración	Tema	Recurso	Propósitos/ Contenidos
Parte 1	3	3 minutos	Entrega del ejercicio a exponer del profesor.		
Parte 2	3	47 minutos	Presentación del Teorema de Bayes para dos eventos	Exposición del Profesor.	Resolución de un problema bayesiano para dos eventos poniendo especial atención a que el estudiante logre: Identificar y asignar probabilidades a eventos. Construir una representación adecuada. Teorema de la probabilidad total. Aplicación del teorema de Bayes para dos eventos. Identificación de la probabilidad condicional en notas periodísticas.
Parte 3	4	50 minutos	Entrega de la hoja de trabajo para el Teorema de Bayes en dos eventos. Práctica Guiada del Teorema de Bayes para dos eventos	En trabajo colaborativo, (equipos de alrededor de 5 personas). Se resolverá un problema bayesiano para dos eventos, modelizado a la exposición del profesor.	Ejercitación de los contenidos vistos en la exposición y exposición de las dudas ante sus compañeros o el profesor, para que el estudiante pueda ser un examinador de su propia comprensión.
Parte 4	Tarea en casa		Entrega de la tarea para la realización de la Práctica Independiente en el Teorema de Bayes en dos eventos.	De manera individual, el alumno resolverá dos problemas dados en la hoja de trabajo. El alumno tendrá que buscar una noticia periodística que presente probabilidades condicionales para dos eventos identificación y justificación de la probabilidad condicional	Ejercitación de manera independiente de los contenidos, habilidades y procedimientos, y observar en qué grado se está dando la automatización y la transferencia a otras situaciones (nota periodística).

Materiales didácticos utilizados:

- Copia del problema a utilizar en la exposición del profesor.
- Hoja de trabajo

Pizarrón y gises o en su caso plumones para pizarrón blanco.

Cuadro No. IV.4 "Situación Didáctica No. 2"

III.9. Situación didáctica No. 3.

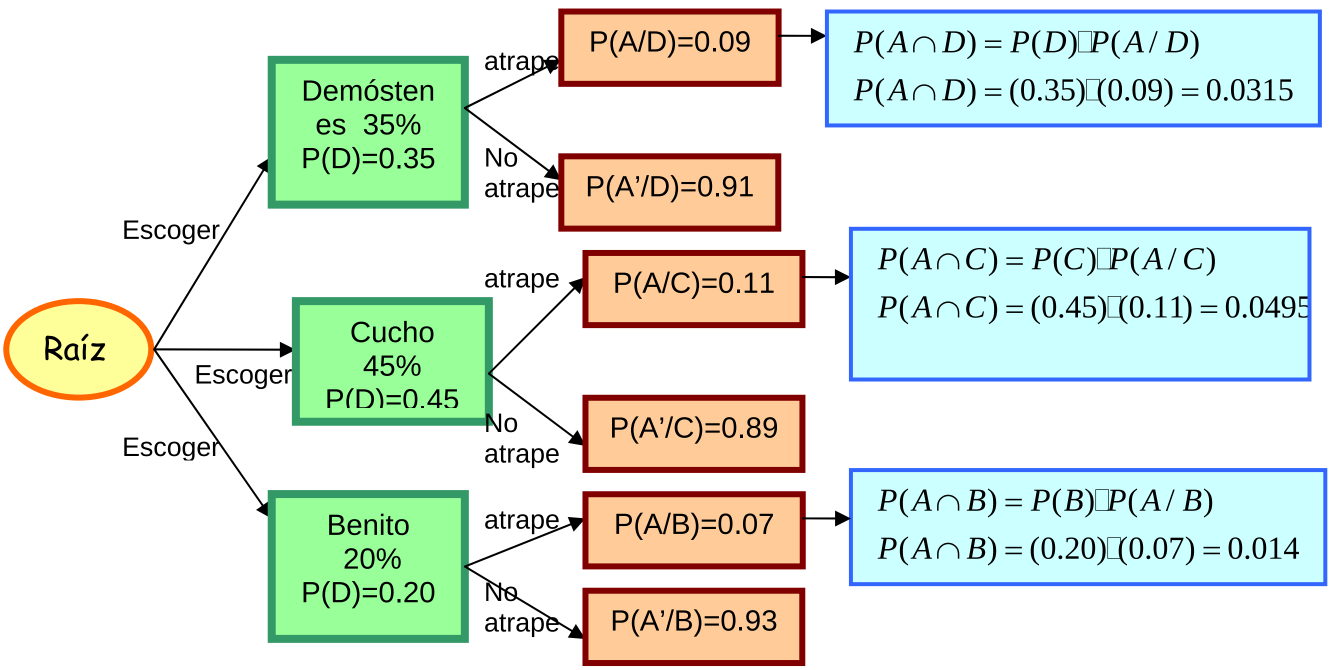
La situación didáctica para el Teorema de Bayes en tres eventos se presenta de manera análoga para la situación didáctica anterior, la diferencia principal radica en el número de eventos a trabajar en el planteamiento del problema. Esto se puede expresar como la Generalización del Teorema de Bayes.

Al inicio de la situación didáctica, se les entrego a los alumnos dos problemas bayesianos, uno de ellos el primero a exponer por el profesor involucraba tres eventos y el segundo involucraba nueve eventos. Observemos el primer problema.

Don Gato tiene tres candidatos. Demóstenes, Cucho y Benito Bodoque, para un a misión que consiste en vender boletos de una rifa inexistente a unos turistas ingenuos. Sólo uno de los tres sabe hacerlo. Estima que Demóstenes cuenta con 35% de oportunidades de ser elegido, Cucho 45% y Benito 20%. Hay una probabilidad de 0.09 de que los atrape el sargento Matute si va Demóstenes; de 0.11 si es Cucho y de 0.07 si Benito es el escogido. Si Matute lo atrapó, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el escogido Benito Bodoque como el encargado de vender los

En cada problema se les pidió a los alumnos que identificaran y propusieran la notación adecuada para definir cada uno de los eventos que estaban inmersos en el problema, bajo esto se les solicitaba que identificarán que probabilidad pedía el problema, y cómo es el desarrollo bajo las leyes de la probabilidad para eventos dependientes. Una vez hecho este, se identificaban que datos si tenía el problema y cuales se tenían que obtener de manera indirecta. En este sentido el profesor tiene que hacer mucho hincapié en como denotar los eventos para las probabilidades condicionales, ya que como se dijo en el capítulo I en la parte de “Dificultades en la Enseñanza de la Probabilidad” los alumnos confunden mucho P(A/B) la probabilidad de que dado un evento B suceda un evento A con P(B/A), o viceversa. Ahí que hacer notar que la probabilidad tiene una secuencia en el tiempo en el que acontecen los eventos, preguntar qué evento ocurre primero y que este se encuentra siempre hasta la derecha y así se van escribiendo los eventos en orden cronológico.

Después se procedió a la elaboración del diagrama de árbol. En la exposición de la elaboración del diagrama el docente siempre tiene que estar interactuando con los estudiantes (elaborando preguntas e incentivando la participación).



Sin detallar la exposición de la clase, ésta siguió el orden que a continuación se presenta:

Pero el problema nos pide que dado que Matute atrapó a uno de ellos ¿Cuál es la probabilidad de que sea Benito?, es decir en lenguaje matemático, es $P(B/A)$

Aplicando el Teorema de Bayes se tiene:

$$P(B/A)=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}$$

Falta obtener la probabilidad de que lo atrape, pero ésta se obtiene de la siguiente manera:

$$P(A)=P(D)\cdot P(A/D)+P(C)\cdot P(A/C)+P(B)\cdot P\left(A/B\right)$$
$$P(A)=(0.35)(0.09)+(0.45)(0.11)+(0.2)(0.07)$$
$$P(A)=0.0315+0.0495+0.014=0.095$$
$$P(A)=0.095$$

Por lo tanto:

$$P(B/A)=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}=\frac{(0.2)(0.07)}{0.095}=0.147$$

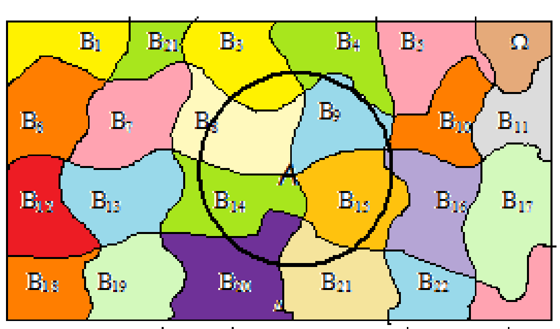
En conclusión, dado que Matute atrapó a uno de ellos la probabilidad de que sea Benito es 0.147 o el 14.7%.

El procedimiento consiste en considerar el espacio muestral S como una unión de subconjuntos que son mutuamente excluyentes. Es decir que $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_j \; con \; B_i \cap B_j = \varnothing \;\; para \; i \neq j$ Entonces cualquier subconjunto A de Ω se puede escribir como:

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_j) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_j) \end{aligned}$$

Como son eventos excluyentes tenemos que:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_j) \\ &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_j)P(A/B_j) \\ &= \sum_{i=!}^{n} P(B_i)(P(A/B_i) \end{aligned}$$



Por lo que una probabilidad condicional de la forma $P(B_K/A)$ se puede calcular como:

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_K \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=!}^{n} P(B_i)(P(A/B_i)}$$

A la regla de Bayes también se le conoce como la probabilidad de las “causas”, puesto que B_i es una partición del espacio muestral S, uno y solo uno de los eventos B_i puede ocurrir al mismo tiempo ya que son eventos excluyentes.

La fórmula anterior nos da la probabilidad de que un evento B_i, particularmente ocurra (donde B_i es una causa) dado que ya ocurrió el evento A.

Ejemplo:

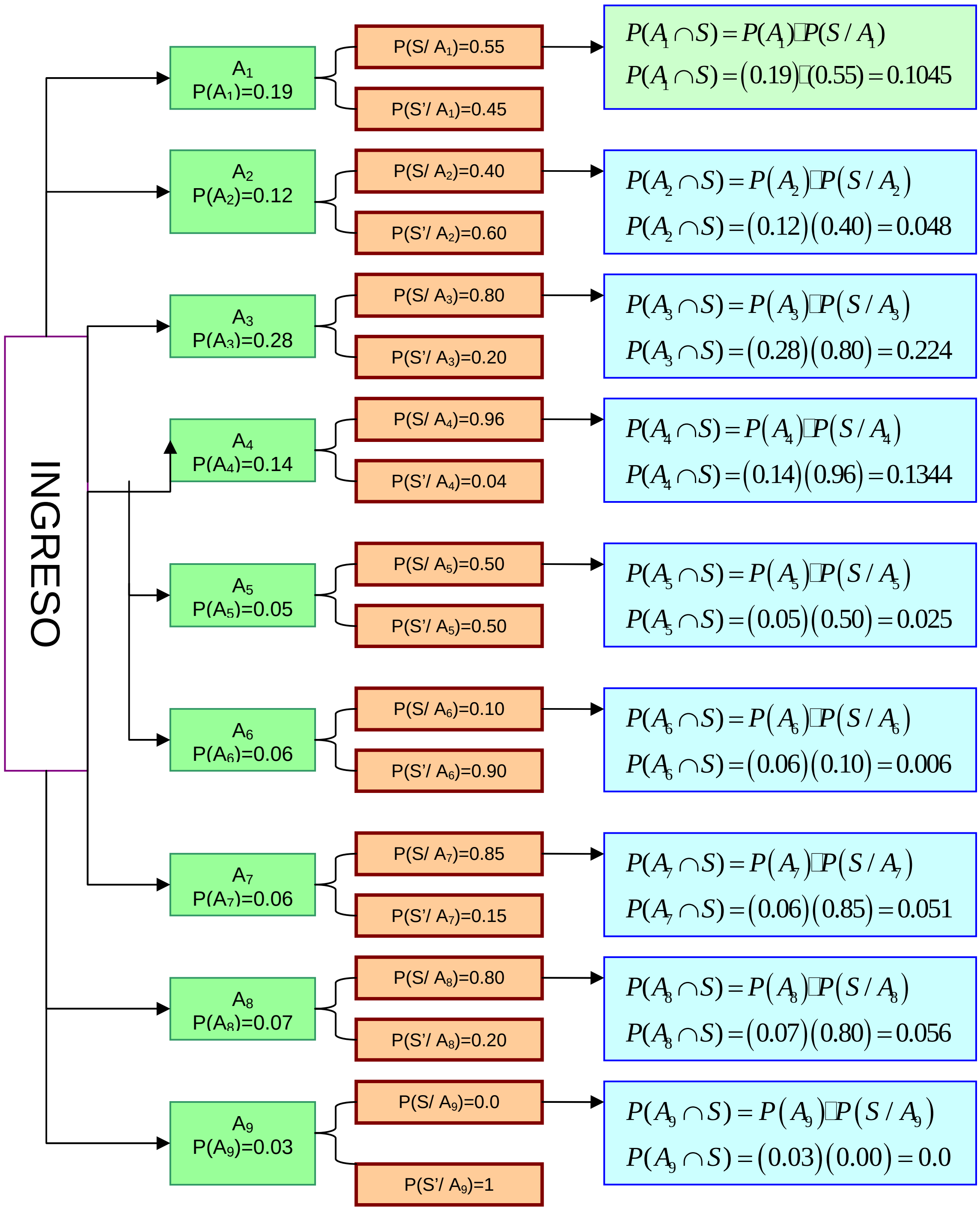
Para cuatro o más eventos

El cuadro siguiente muestra la proporción de pacientes que ingresan a la clínica de especialidades “Aranda de la Parra” de León Guanajuato, y las probabilidades aproximadas de curación completa.

	Especialidad Médica	% del total que ingresan	Probabilidad de curación completa
A_1	Traumatología y ortopedia	19%	0.55
A_2	Enfermedades cardíacas y circulatorias	12%	0.40
A_3	Enfermedades Gastrointestinales	28%	0.80
A_4	Ginecología y obstetricia	14%	0.96
A_5	Oftalmología y otorrinolaringología	5%	0.50
A_6	Cancerología	6%	0.10
A_7	Dermatología	6%	0.85
A_8	Neumología	7%	0.8
A_9	SIDA	3%	0

Si un enfermo fue dado de alta sano, determina la probabilidad de que:

a) Haya sufrido algún padecimiento cardíaco o circulatorio
b) Haya sufrido algún golpe o una lesión física.


INGRESO
A1 P(A1)=0.19
P(S/ A1)=0.55
P(S'/ A1)=0.45
P(A1 ∩ S) = P(A1)□P(S / A1)
P(A1 ∩ S) = (0.19)□(0.55) = 0.1045
A2 P(A2)=0.12
P(S/ A2)=0.40
P(S'/ A2)=0.60
P(A2 ∩ S) = P(A2)□P(S / A2)
P(A2 ∩ S) = (0.12)(0.40) = 0.048
A3 P(A3)=0.28
P(S/ A3)=0.80
P(S'/ A3)=0.20
P(A3 ∩ S) = P(A3)□P(S / A3)
P(A3 ∩ S) = (0.28)(0.80) = 0.224
A4 P(A4)=0.14
P(S/ A4)=0.96
P(S'/ A4)=0.04
P(A4 ∩ S) = P(A4)□P(S / A4)
P(A4 ∩ S) = (0.14)(0.96) = 0.1344
A5 P(A5)=0.05
P(S/ A5)=0.50
P(S'/ A5)=0.50
P(A5 ∩ S) = P(A5)□P(S / A5)
P(A5 ∩ S) = (0.05)(0.50) = 0.025
A6 P(A6)=0.06
P(S/ A6)=0.10
P(S'/ A6)=0.90
P(A6 ∩ S) = P(A6)□P(S / A6)
P(A6 ∩ S) = (0.06)(0.10) = 0.006
A7 P(A7)=0.06
P(S/ A7)=0.85
P(S'/ A7)=0.15
P(A7 ∩ S) = P(A7)□P(S / A7)
P(A7 ∩ S) = (0.06)(0.85) = 0.051
A8 P(A8)=0.07
P(S/ A8)=0.80
P(S'/ A8)=0.20
P(A8 ∩ S) = P(A8)□P(S / A8)
P(A8 ∩ S) = (0.07)(0.80) = 0.056
A9 P(A9)=0.03
P(S/ A9)=0.0
P(S'/ A9)=1
P(A9 ∩ S) = P(A9)□P(S / A9)
P(A9 ∩ S) = (0.03)(0.00) = 0.0

Lo que queremos obtener es la probabilidad de que dado que el paciente fue dado de alta sano obtener:

A) Haya sufrido algún padecimiento cardiaco, es decir nos piden $P(A_2 / S)$

Que se obtiene como: $P(A_2 / S) = \dfrac{P(A_2)P(S / A_2)}{P(S)}$

Obtengamos $P(S)$ como:

$$P(S)=P(A_1\cap S)+P(A_2\cap S)+P(A_3\cap S)+P(A_4\cap S)+P(A_5\cap S)+P(A_6\cap S)+P(A_7\cap S)+P(A_8\cap S)+P(A_9\cap S)$$
$$P(S)=P(A_1)\cdot P(S/A_1)+P(A_2)\cdot P(S/A_2)+P(A_3)\cdot P(S/A_3)+P(A_4)\cdot P(S/A_4)+P(A_5)\cdot P(S/A_5)+P(A_6)\cdot P(S/A_6)+P(A_7)\cdot P(S/A_7)+P(A_8)\cdot P(S/A_8)+P(A_9)\cdot P(S/A_9)$$
$$P(S)=0.1045+0.048+0.224+0.1344+0.025+0.006+0.051+0.056+0$$
$$P(S)=0.6489$$

Por lo tanto:

$$P(A_2 / S) = \frac{P(A_2)P(S / A_2)}{P(S)} = \frac{(0.12)(0.40)}{0.6489} = \frac{0.048}{0.6489} = 0.07397$$

B) Halla sufrido algún golpe o lesión física, es decir: $P(A_1 / S)$

$$P(A_1 / S) = \frac{P(A_1)\cdot P(S / A_1)}{P(S)} = \frac{(0.19)\cdot(0.55)}{0.6489} = 0.1610$$

Al término de esta exposición el profesor pide nuevamente que se agrupen en equipos de 5 o 6 personas, pero ahora se les exige la solución de dos problemas.
Aquí observamos, que los equipos se dividieron en subgrupos de los cuales unos resolvían el primer problema y los otros el segundo. Cuando los sub-equipos no lograban ponerse de acuerdo les preguntaban a sus otros compañeros de equipo cómo se realizaba cierta tarea. Si esto no era suficiente para ayudar, el profesor intervenía cuando ellos solicitaban su ayuda. Aquí se observa ya una mejor comprensión de todas las sub-habilidades que los problemas bayesianos involucran en su solución, y en general todos los equipos lograron realizar la tarea completa en el tiempo establecido.

Análogamente se aplica la práctica independiente en el momento en que se les solicita la realización de una tarea en donde apliquen este conocimiento y ver si se puede observar si lo aprendido en una circunstancia específica puede aplicarse a notas o artículos periodísticos.

Las actividades desprendidas en esta situación didáctica se desglosan en el Cuadro No. IV.5

IV.9.1. Cuadro de Situación didáctica No. 3.

	No. de sesión	Duración	Tema	Recurso	Propósitos/ Contenidos
Parte 1	5	3 minutos	Entrega de hoja de trabajo y redacción de los ejercicios a exponer del profesor.		
Parte 2		47 minutos	Presentación del Teorema de Bayes para tres o más eventos	Exposición del Profesor.	Resolución de un problema bayesiano para tres o más eventos poniendo especial atención a que el estudiante logre : Identificar y asignar probabilidades a eventos. Elaboración de diagrama de árbol. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes para tres o más eventos. Identificación de la probabilidad condicional en notas periodísticas.
Parte 3	4	50 minutos	Práctica guiada del teorema de Bayes para tres o más eventos	En trabajo colaborativo, (equipos de 5 personas). Se resolverán dos problemas bayesianos para 3 y 4 eventos, modelizado a la exposición del profesor.	Ejercitación de los contenidos vistos en la clase y exposición de las dudas ante sus compañeros o el profesor, para que el estudiante pueda ser un examinador de su propia comprensión.
Parte 4	Tarea en casa		Práctica Independiente	De manera individual, el alumno resolverá dos problemas dados en la hoja de trabajo. El alumno tendrá que buscar una noticia periodística que involucre probabilidades condicionales para dos eventos identificar y justificar porque se habla de una probabilidad condicional	Ejercitación de manera independiente de los contenidos, habilidades y procedimientos, y observar en que grado se esta dando la automatización y la transferencia a otras situaciones (nota periodística).
Materiales didácticos utilizados: • Copia de los problemas a utilizar en la exposición del profesor. • Hoja de trabajo • Pizarrón y gises o en su caso plumones para pizarrón blanco.					

Cuadro No. IV.5 "Situación Didáctica No. 3"

IV.10. Evaluación final

Esta situación tiene dos finalidades. La primera de ellas es evaluar el teorema de Bayes como práctica independiente dentro del aula, además de ser un elemento de evaluación para la comprensión del tema. La segunda finalidad, es ver qué tanto la secuencia didáctica sirvió como un reforzador de los conocimientos previos que los estudiantes tenían al iniciar la secuencia, y así poder hacer un comparativo, sobre las preguntas del examen diagnóstico. Este elemento formará parte de la evaluación final sumativa.

La encuesta de opinión sirve para observar las actitudes que los estudiantes desarrollaron a lo largo de la secuencia didáctica.

	No. de sesión	Duración	Tema	Recurso	Propósitos/ Contenidos
Parte 1	7-8	80 minutos	Presentación de la evaluación final del tema.		Identificar los conocimientos que adquirieron los alumnos tras las actividades anteriores.
Parte 2	8	20 minutos	Presentación de la encuesta de opinión		Observar las actitudes de los alumnos con referencia a la secuencia didáctica
Materiales didácticos utilizados: • Examen final. • Encuesta de opinión • Pizarrón y gises o en su caso plumones para pizarrón blanco.					

Cuadro No. IV.6 "Evaluación Final"

IV.11. La evaluación en la secuencia del Teorema de Bayes.

IV.11.1.Finalidad y contenidos del área matemática

Las Matemática ocupa un lugar importante entre las materias curriculares, y pueden ser también consideradas como <<instrumentales>>, en la medida en que sirven de <<instrumento>> para conseguir los aprendizajes de otras materias que conforman el currículo escolar. Es un hecho constatado a lo largo de muchas generaciones de estudiantes que las dificultades en el aprendizaje de la Matemática, condiciona otros aprendizajes. Materias curriculares como la Física, la Química, las Ciencias de la Naturaleza y también las Ciencias Sociales, necesitan una base matemática previa, tanto de elementos conceptuales como de estrategias para su aprendizaje y asimilación. Esa es la razón por la que la metodología utilizada por el profesorado en su enseñanza debe de estar acorde con el nivel matemático de su alumnado y sus conocimientos previos. De esta manera se puede prevenir y probablemente eliminar, las dificultades que con frecuencia se presentan en su aprendizaje, derivadas en muchos casos de desajustes de tipo metodológico.

Hay que tener en cuenta que el aprendizaje de la Matemática es *progresivo* en la medida en que solamente puede desarrollarse a través del logro de unos conocimientos que fundamentan conocimientos siguientes cada vez más complejos, y es *operativo* ya que no basta con conocer el concepto, sino que es necesario saber aplicarlos a situaciones y problemas concretos. Es necesario que el profesorado se plantee al inicio del tema, qué contenidos de los establecidos son los que debe enseñar, y dependiendo del nivel matemático del alumnado y de sus conocimientos previos, teniendo en cuenta que esos mismos conocimientos deberán tener un lugar relevante en el diseño curricular de la Matemática.

IV.11.2. Elementos matemáticos a evaluar

En un intento de ayudar al profesorado en este aspecto, la NTCM (Nacional Council of Teachers of Mathematics, de Estados Unidos), estableció en 1989 que las categorías matemáticas a evaluar con carácter general son:

- Potencia matemática.
- Resolución de problemas
- Comunicación
- Razonamiento
- Conceptos matemáticos
- Procedimientos matemáticos
- Actitud matemática.

Y para Swam (1993)[50], los aspectos a evaluar son los que se representan a continuación:

- Hechos matemáticos
- Destrezas matemáticas
- Estrategias matemáticas
- Conceptos matemáticos
- Apreciación y conciencia
- Estrategias generales
- Cualidades y actitudes personales hacia las matemáticas.

Puede comprobarse que no es fácil determinar qué contenidos matemáticos deben ser evaluados y, por lo tanto, previamente enseñados, en función del curso y el nivel matemático de los alumnos.

Dentro de la ardua tarea de la evaluación el profesor puede verse ayudado por las orientaciones didácticas que otros profesionales pueden proporcionar al profesorado de Matemáticas.

[50] Referido por: Castillo y Cabrerizo. **Evaluación Educativa y Promoción Escolar** p.p.286

En un intento de clarificar los aspectos relacionados con la evaluación de la Matemática, la NCTM (1995) elaboró estándares de evaluación. La NCTM considera a la evaluación como un << *proceso de obtener evidencias sobre el conocimiento de los estudiantes de matemáticas, la habilidad para usarlo y disposiciones hacia ellas, y de hacer inferencias desde esas evidencias para una variedad de propósitos*>>. La práctica evaluadora puede representar algunas dificultades, por lo que Llenares y Sánchez (1998)[51] intentan introducir algunos elementos clarificadores: << *si se considera el proceso de evaluación de la Matemática como un proceso informativo y explicativo, se debe recoger información sobre el conocimiento y destrezas de los estudiantes en una amplia gama de situaciones*>>.

No se debe de olvidar que la Matemática está concebida en el currículo como materia <<instrumental>>, por lo que a la hora de evaluarla se debe considerar importante, no sólo los elementos puramente conceptuales, sino también estrategias y procedimientos operativos matemáticos. Los momentos para evaluar la Matemática son:

Al inicio del aprendizaje: Se aplicó un cuestionario de opción múltiple de 8 preguntas, con el fin de identificar si los alumnos contaban con los previos necesarios para la construcción del Teorema de Bayes. Para en caso de ser necesario reafirmar o construir los conocimientos en los cuales los alumnos mostraron deficiencias para poder llevar a cabo el andamiaje educativo necesario para establecer este nuevo conocimiento probabilístico. (En la sección IV. 12 de este capítulo se describe a detalle el instrumento aplicado y los resultados obtenidos). Es importante establecer que si los alumnos no

[51] Referido por: Castillo y Cabrerizo. **Evaluación Educativa y Promoción Escolar** p.p.286

cuentan con este tipo de conocimientos es necesario construir primero estos conocimientos previos para poder anclar el nuevo conocimiento.

Durante el proceso de aprendizaje: Una evaluación formativa que proporcione al profesor información abundante sobre la forma en que se va desarrollando el proceso de aprendizaje matemático de cada alumno. De este modo se puede reorientar dicho proceso en caso de ser necesario.

Al final de cada unidad didáctica o de un determinado periodo de tiempo: evaluación final o sumativa, para conocer los aprendizajes adquiridos al final del período de tiempo establecido, y el grado de consecución de los objetivos.

IV.11.3. Técnicas e instrumentos.

Las técnicas e instrumentos a utilizar en el proceso de evaluación del aprendizaje de esta secuencia son muy variados y adecuados para medir la evaluación de los objetivos que pretende abarcar el tema. Estos sirven para reflejar el nivel de conocimientos y de asimilación del elemento concreto que se pretende evaluar, y proporcionan al profesorado información suficiente para que pueda establecer un juicio posterior sobre el nivel de logro del elemento a evaluar, lo que le permitirá adoptar decisiones acerca de la conveniencia o no de reorientar y regular el proceso de aprendizaje matemático de este tema cuando sea necesario.

Algunas de las técnicas e instrumentos de evaluación, utilizados en esta secuencia son: realización de tareas, cumplimiento de cuestionarios, resolución de ejercicios, resolución de problemas, escalas de observación, listas de control, pruebas objetivas. Además, deberán utilizarse todos los materiales didácticos que imparte esta secuencia para cada uno de los temas, para la primera, segunda y tercera actividad. Los resultados obtenidos se reflejan en tablas, gráficas e informes para que sirva al profesorado para los fines evaluadores que se propone.

Este trabajo proporciona la evaluación en los contenidos como conceptos, procedimientos y actitudes, para así evaluar las tres categorías aunque la expresión de la evaluación sea conjunta. Las rúbricas de evaluación de la secuencia fueron las siguientes:

Matriz de evaluación referida a los contenidos conceptuales y Procedimentales para la evaluación de la secuencia					
	Identifica eventos y expresa en palabras la probabilidad condicional	**Elaboración de Diagrama de árbol**	**Aplica el teorema de la Probabilidad total**	**Aplica el teorema de Bayes**	**Inferencia en notas Periodísticas**
0	No tiene idea de la expresión.	No dibuja ningún diagrama.	No tiene idea del teorema.	No tiene idea del teorema.	No hizo ningún intento por buscar notas periodísticas.
1	Expresa solamente probabilidades simples.	Sólo traza el diagrama pero no expresa probabilidades o tiene errores en representar los porcentajes.	Sólo obtiene la expresión pero no realiza cálculos.	Sólo obtiene la expresión pero no realiza cálculos.	Busca la nota pero no expresa la relación con la probabilidad condicional.
2	Expresa probabilidades condicionales.	Traza el diagrama con probabilidades simples y condicionales correctamente.	Obtiene la expresión y realiza cálculos erróneos ya sea de porcentaje o sustitución.	Obtiene la expresión y realiza cálculos erróneos ya sea de porcentaje o sustitución.	Busca la nota sólo subraya la relación con la probabilidad condicional (No Justifica).
3	Expresa probabilidades condicionales inversas.	Obtiene probabilidades simples, condicionales y conjuntas correctamente.	Obtiene la expresión y realiza los cálculos correctamente.	Obtiene la expresión y realiza los cálculos correctamente.	Busca la nota subraya y además justifica su relación con la probabilidad condicional.

Cuadro No. IV.7. "Matriz de evaluación referida a los contenidos conceptuales y procedimentales de la secuencia"

Esta matriz, pretende facilitar al profesor el conocimiento del progreso de cada uno de los alumnos en el aprendizaje de un tema matemático y puede ser complementada cuando lo considere necesario el profesor.

Para poder evaluar, las actitudes de los estudiantes hacía la secuencia se elaboró la encuesta de opinión, en la cual los estudiantes expresan sus actitudes y consideraciones para una mejor enseñanza del tema. Hope y Kelly (1983)[52] opinan que es necesario que el profesor ayude al alumno a distinguir entre aquellas situaciones que exigen una descripción precisa de probabilidades y las que no.

<<Pero con el fin de que sean satisfechos los requisitos para una cultura científica eficiente, es necesario entrenar, desde los primeros niveles, la base intuitiva relevante al pensamiento probabilístico; de este modo se puede lograr un balance genuino y constructivo entre lo posible y lo determinado en el trabajo de la inteligencia>>

IV.12. Evaluación en la secuencia

Éste trabajo, evalúa aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales del alumno. La evaluación se lleva a cabo en tres momentos: evaluación diagnóstica, durante el desarrollo de la secuencia y al final de la secuencia, y bajo estas tres evaluaciones obtener una evaluación conjunta, en el cual se observe todo el desarrollo de la secuencia.

IV.12.1.Evaluación diagnóstica.

En su fase diagnóstica la secuencia tiene dos objetivos por cumplir. El primero de ellos es explorar el nivel de conocimientos previos requeridos para llevarla a cabo, debido a que ésta solicita ciertos conocimientos para poder implementarla (estos conocimientos se mencionan en el capitulo II (Identificación de Conocimientos Previos). El segundo de los objetivos de la secuencia es observar en qué medida la secuencia contribuye a reforzar estos conocimientos previos en los estudiantes.

[52] Referido por: Díaz Godino, J.; Batanero, Ma. C.; Cañizares Ma. J. (1996). **Azar y Probabilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje.** p.p 50.

El examen diagnóstico consta de:

- Tres preguntas que consisten en extraer probabilidades simples (Pregunta No. 1,3 y 4)
- Dos de ellos son de aplicación de las leyes de Probabilidad (Pregunta No.2 y 5)
- Una consiste en la obtención de una probabilidad condicional a través de probabilidades simples. (Pregunta No.6)
- Y los últimas dos son acerca de la notación utilizada en la Probabilidad Condicional. Estas preguntas son: Pregunta 7 y 8 (Refuerzan la enseñanza del Teorema de Bayes).

El examen diagnóstico inicial contó con una participación de 50 estudiantes y el examen final con una participación de 56 estudiantes.

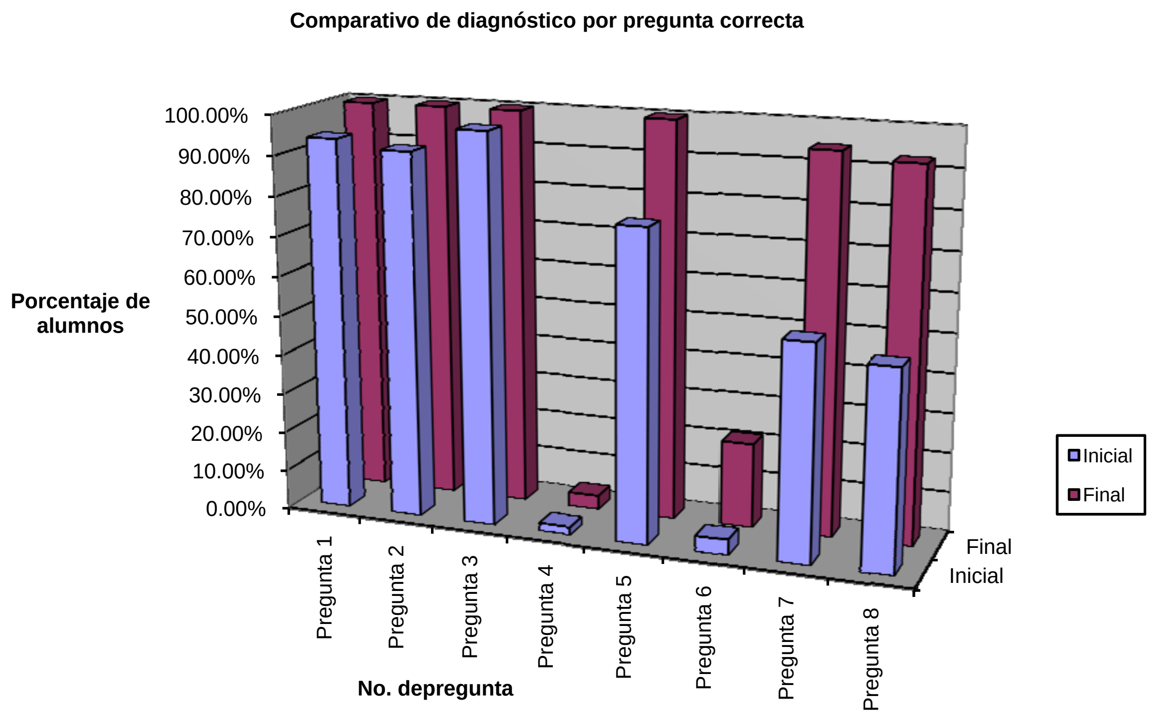
La siguiente tabla muestra los resultados iniciales (**I**) y finales (**F**) para el grupo muestra, así como los errores cometidos por los estudiantes al contestar cada una de estas preguntas. Esto tiene como finalidad observar en qué grado la secuencia del Teorema de Bayes contribuye a reforzar los conocimientos de probabilidad en los estudiantes.

Cuadro de resultados en la evaluación diagnóstica

Pregunta		Respuesta	Descripción	I	F
Pregunta 1. Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 5?	✗	$\frac{5}{6}$	Confunden el valor de la cara del dado con el número de casos favorables.	6%	0%
	✓	$\frac{1}{6}$	***Determinan probabilidades simples.***	**94%**	**100%**
	✗	$\frac{0}{6}$	No existen casos favorables. Por lo tanto la probabilidad es nula.	0%	0%
Pregunta 2. Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 2, un 4 o un 6?	✓	$\frac{1}{2}$	***Identifican eventos excluyentes y determinan*** $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$	**92%**	**100%**
	✗	$\frac{1}{6}$	No considera la ocurrencia de diferentes eventos, sólo se considera un solo evento.	8%	0%
	✗	$\frac{0}{6}$	No existen casos favorables. Por lo tanto la probabilidad es nula.	0%	0%
Pregunta 3. Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas 7?	✗	$\frac{1}{2}$	No cuenta, ni considera el número de casos favorables.	0%	0%
	✗	$\frac{1}{6}$	No considera, el evento de que caiga un siete en la tirada de un dado es improbable y toma en cuenta esta tirada.	2%	0%
	✓	$\frac{0}{6}$	***No existen casos favorables. Por lo tanto la probabilidad es nula.***	**98%**	**100%**
Pregunta 4. Al tirar dos dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Determina la probabilidad de obtener al menos un 4.	✗	6/36	No considera el orden de las tiradas.	48%	32.15%
	✗	12/36	No considera la repetición de la intercesión de este evento.	50%	64.28%
	✓	11/36	***Considera la repetición de la intersección de este evento.***	**2%**	**3.57%**
Pregunta 5. Al tirar **dos** dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Determina la probabilidad de que la suma de sus caras sea 7	✓	6/36	***Obtiene la intersección de la probabilidad***.	**78%**	**100%**
	✗	3/36	No considera el orden de las tiradas. Aunque considera probabilidades la probabilidad de la intersección.	18%	0%
	✗	0/36	No existen casos favorables. Por lo tanto la probabilidad es nula.	4%	0%
Pregunta 6. Al tirar **dos** dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Dado que la suma de los dados fue 7, ¿Cuál es la probabilidad de la cara de algún dado haya sido un 5?	✗	$\frac{11}{36}$	Hizo probabilidad de la intersección en lugar de condicional.	78%	3.57%
	✗	$\frac{2}{36}$	No considera la reducción del espacio muestral por la probabilidad condicional.	18%	75%
	✓	$\frac{2}{6}$	***Determina probabilidad condicional, si reduce espacios muestrales.***	**4%**	**21.43%**
Pregunta 7. La notación de probabilidad P(A/B) significa que:	✗	La probabilidad de que dado que sucedió el evento A ocurra el evento B.	La notación no le significa un orden en los eventos.	38%	5.36%
	✗	La probabilidad de que sucedan juntos los eventos A y B.	Confunde la probabilidad condicional con la probabilidad de la intersección	10%	0%
	✓	La probabilidad de que dado que sucedió el evento B ocurra el evento A.	***Identifica la notación de la probabilidad condicional tomando en cuenta el orden de los eventos.***	**54%**	**94.64%**
Pregunta 8 . La probabilidad de $P(A \cap B)$ si los eventos son dependientes se calcula como:	✗	P(A)*P(B)	Confunde dependencia con independencia o falta de lectura comprensión.	12%	3.57%
	✗	P(A)+P(B)	Confunde independencia de eventos con eventos no excluyentes	38%	3.57%
	✓	P(B/A)*P(A)	***Conoce la regla de la probabilidad condicional para la intersección de eventos dependientes***	**50%**	**92.86%**

Cuadro No. IV.8 "Comparativo de la resultados de la evaluación Diagnóstica y Final"

La siguiente gráfica establece un comparativo de los alumnos de acuerdo a las preguntas establecidas en este examen. Para poder realizarlo se tomaron en cuenta los porcentajes, ya que el número de alumnos que realizaron este examen fue distinto en ambas aplicaciones.

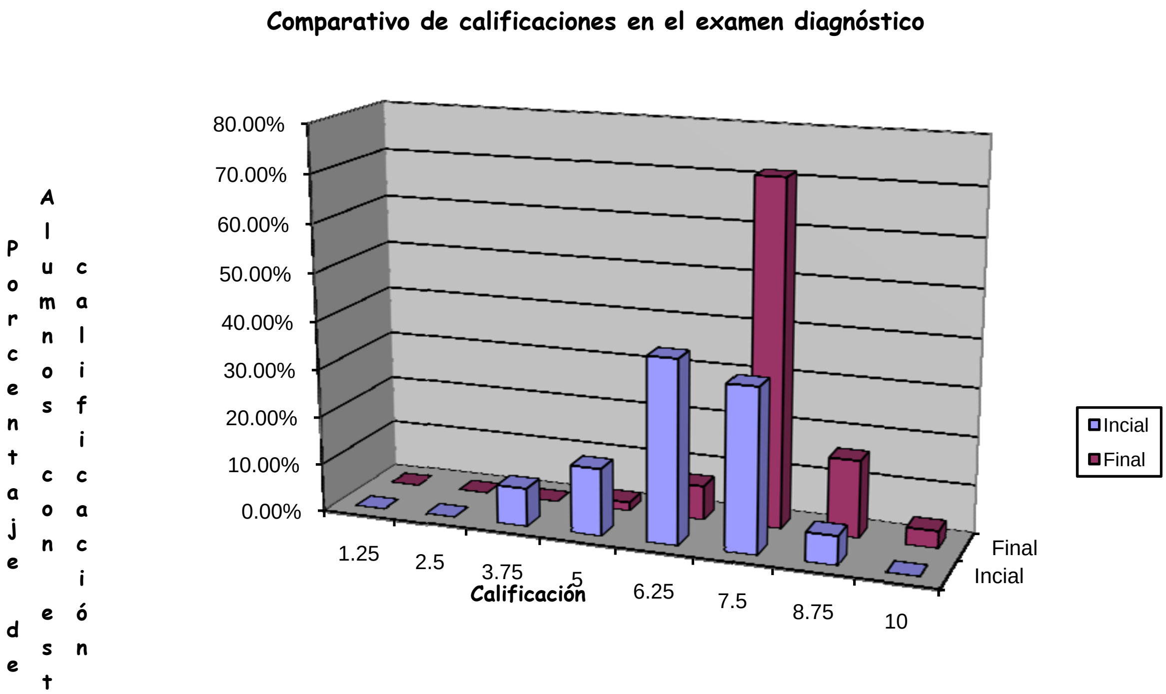


	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7	Pregunta 8
Inicial	94.00%	92.00%	98.00%	2.00%	78.00%	4.00%	54.00%	50.00%
Final	100.00%	100.00%	100.00%	3.57%	100.00%	21.43%	94.64%	92.86%

Gráfica No. IV. 1 “Comparativo del examen diagnóstico inicial y final de la secuencia por pregunta correcta”

Al final de la secuencia, se puede observar reforzamiento en la mayoría de las preguntas, la pregunta 4, en la cual todavía los alumnos no tienen consideraciones en el orden de los eventos, y además no aplican las leyes de la probabilidad de manera empírica para la intersección de eventos, y la pregunta 6 presenta un retroceso en los estudiantes, ya que no consideran la disminución del espacio muestral para las probabilidades condicionales. Pero se pueden ver logros significativos en la obtención de probabilidades simples, la aplicación de las leyes de la probabilidad y sobretodo en el manejo de la notación de la probabilidad condicional.

La gráfica que a continuación se presenta maneja las calificaciones generales obtenidas por el grupo, para observar el nivel de aprovechamiento de la secuencia, el promedio del grupo al inicio de la secuencia fue de 6.45 y al final de 7.27 lo cual nos indica, un avance de 8 décimas en el promedio del grupo. Lo anterior, ratifica que la secuencia cumple con un reforzamiento de los conocimientos básicos de probabilidad que los estudiantes deben de adquirir.



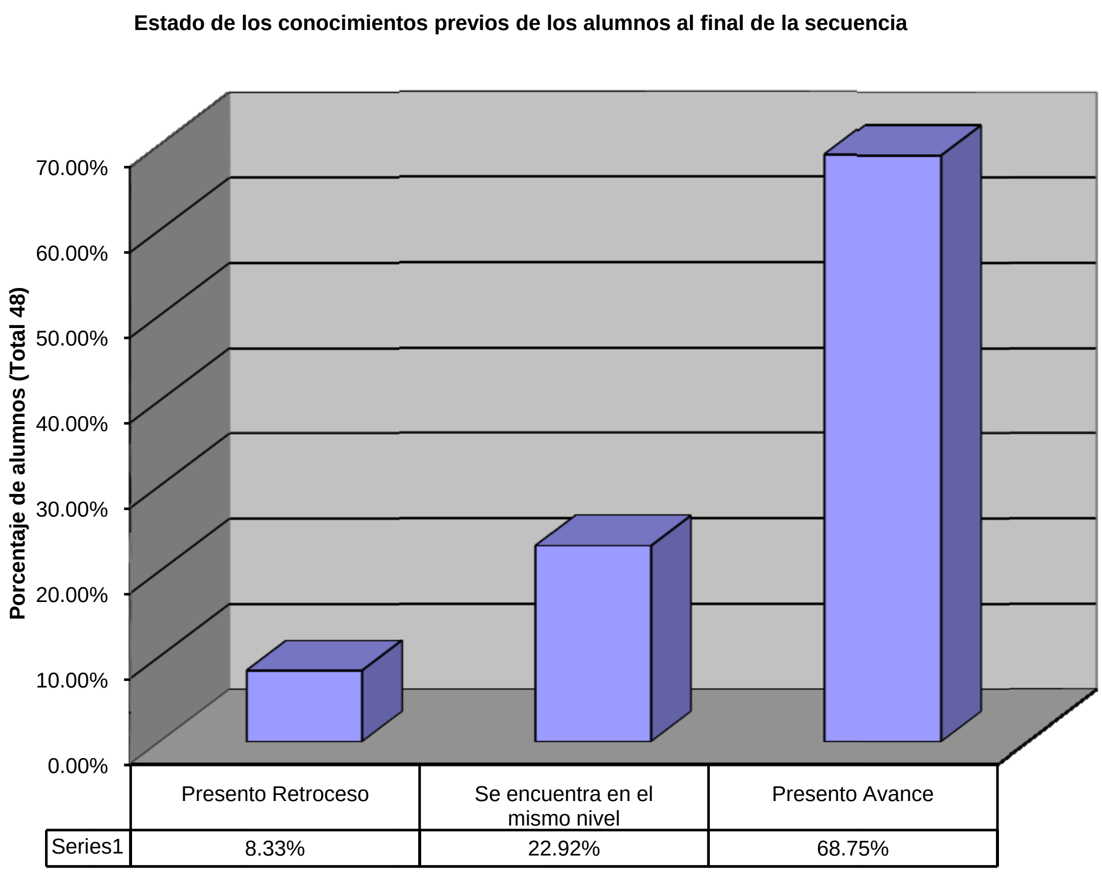
	1.25	2.5	3.75	5	6.25	7.5	8.75	10
Incial	0.00%	0.00%	8.00%	14.00%	38.00%	34.00%	6.00%	0.00%
Final	0.00%	0.00%	0.00%	1.79%	7.14%	71.43%	16.07%	3.57%

Gráfica No. IV. 2 "Comparativo de calificaciones del examen diagnóstico inicial y final de la secuencia"

La gráfica anterior presenta el estudio diagnóstico y muestra el avance o el retroceso sobre el conocimiento estos temas en los estudiantes. Para ello se considero a los estudiantes que presentaron ambos exámenes, siendo éstos un total de 48alumnos.

Al final de la secuencia, se observa que el 8.33% de los alumnos presentaron un retroceso en los conocimientos previos, el 22.92% no tuvieron ningún avance y el 68.75% presentaron avances.

Los resultados anteriores muestran que la secuencia confundió o no aporto nada a una tercera parte del alumnado de este grupo, pero en contraparte la secuencia si dio una contribución a las dos terceras partes restantes. Lo cual nos indica que la secuencia si puede ayudar a reforzar los conocimientos previos de los estudiantes.



Gráfica No. IV. 3. "Estado de los conocimientos previos de los alumnos al final de la secuencia"

IV.12.2. Evaluación durante el proceso de aprendizaje. (Evaluación de la práctica guiada).

Los resultados observados muestran que los alumnos no tienen problemas en la obtención de la probabilidad simple, pero cuando esta se empieza a complicar y requiere del uso de las leyes de la probabilidad. No consideran la probabilidad de la intersección, es decir, no aplican correctamente la fórmula para la unión de probabilidades como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Otro de los problemas serios que presentaron los alumnos es considerar el orden de los eventos. Por ejemplo, en las tiradas de dos dados diferentes uno rojo y uno blanco les es indistinto que en el dado blanco se obtenga un 3 y en el dado rojo un 4 que la tirada en donde en el dado blanco se obtuvo un 4 y en el dado rojo un 3. (Esto es por supuesto considerando el color de los dados y el orden de las tiradas).

Este error también se ve reiterado cuando el alumno tiene que establecer la notación en la probabilidad condicional o se presenta la confusión entre la probabilidad de la intersección con la probabilidad condicional.

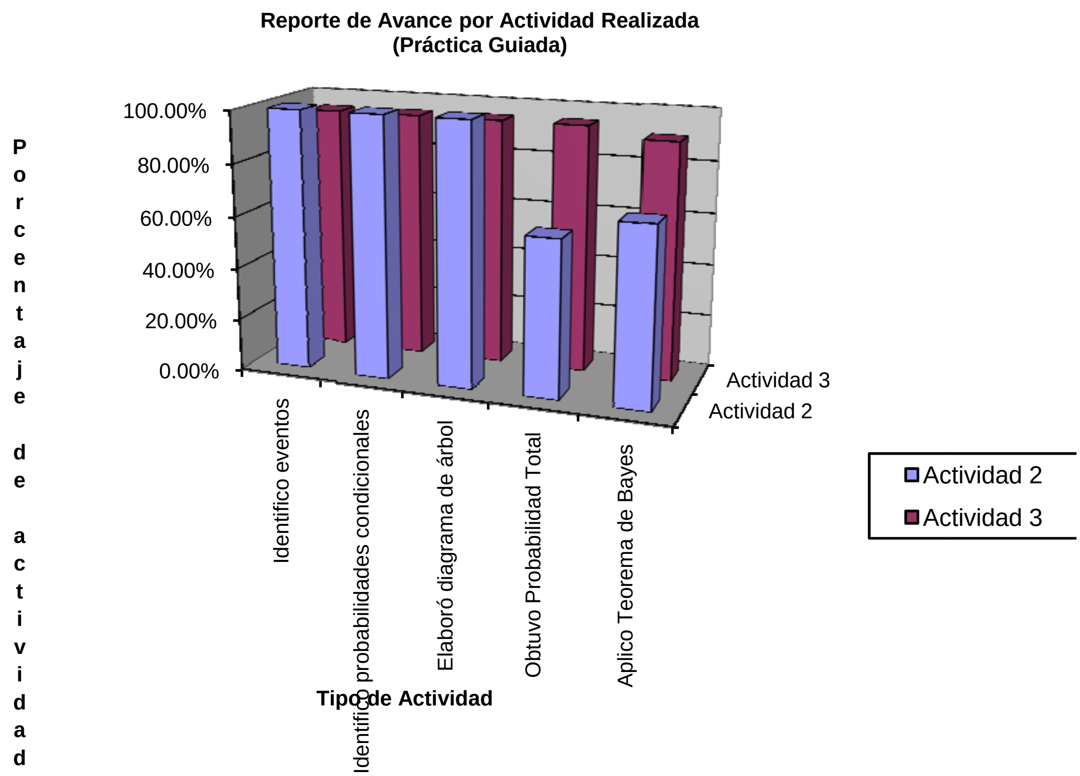
Al multiplicar las probabilidades de cada rama del diagrama de árbol, el alumno obtiene la probabilidad de la intersección. A la mayoría del alumnado aunque conocía la siguiente ley: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ no obtenían el despeje de manera simple como: $P(A/B) \bullet P(B) = P(A \cap B)$. Al observar que esto ocurría casi de manera natural en el diagrama de árbol, el alumno pudo obtener estas probabilidades casi sin problema.

En un principio, los alumnos no indicaban la probabilidad de la intersección en el diagrama de árbol; el estudiante no le daba importancia. Pero al observar su importancia en el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes fueron paulatinamente jerarquizando positivamente la importancia de este concepto.

Una vez establecido correctamente el diagrama de árbol, los alumnos pudieron establecer sin mayores problemas la probabilidad total, la mayoría del estudiantado no tuvo mayores complicaciones. Sólo en algunas circunstancias se observaron errores aritméticos, pero la aplicación de la fórmula de la probabilidad total fue correcta. Por lo anterior, se puede decir que una buena representación simplifica la aplicación de teoremas y que sin esta representación los alumnos encuentran muy difícil obtener la probabilidad. Es importante decir, que el profesor tuvo que hacer énfasis en que si el alumno lograba esta representación la obtención de la probabilidad total venía de la mano, debido a que el teorema de la probabilidad total el cual dice: $P(A) = P(A/B) + P(A/B^C)$ y que otra manera de expresarse es: $P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(B^C) \cdot P(A/B^C)$ y esta fórmula fue expresada siempre en función de los eventos determinados. En varías situaciones el profesor recalcó lo que podía suceder ya que el evento A ocurría independientemente de si acontecía B o no acontecía. Este hecho fue relevante para su entendimiento.

En la aplicación del teorema de Bayes, la cual consistía en obtener la probabilidad de un evento B dado un evento A $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. El alumno tenía que limitarse a conocer exclusivamente la probabilidad de A y la probabilidad de de que dado que aconteció un evento B suceda un evento A (P(A/B)).

Por lo tanto el alumno tuvo que hacer uso de la fórmula de la probabilidad total y el diagrama de árbol, y una vez conocidas las probabilidades, el alumno sólo tenía que sustituir estos valores para obtener la solución que pedía el problema.



Gráfica No. IV. 4. "Reporte de avance por actividad realizada durante la práctica guiada"

La secuencia tomó en cuenta el conocimiento gradual del tema, en este caso el teorema de Bayes considerando en primera instancia problemas bayesianos que involucraran dos eventos y después su generalización. Al evaluar, la segunda y tercera situación didáctica, se observa una disminución del 5% en la Identificación de eventos, probabilidades condicionales y elaboración de los diagramas de árbol, pero en contraparte, se observa un aumento mayor al 30% en la aplicación del teorema de la probabilidad total y la aplicación del teorema de Bayes. En esta parte, el autor de este trabajo considera la dificultad de tratar un tema en un caso particular (dos eventos), y logra después la transmisión a la generalización no es una conexión simple que los estudiantes, por lo anterior, esto no es considerado un fracaso, sino simplemente, hay que tener más cuidado cuando se trata de lograr un paso el cual afronte problemas cognitivos de mayor grado.

IV.12.3.Evaluación final. (Evaluación de la práctica independiente)

La evaluación final, para llevarla a su fin hizo uso del examen final y también se consideraron las tareas para poder evaluar la parte correspondiente a la inferencia en notas periodísticas.

Los promedios obtenidos para evaluar la identificación de eventos, identificación de probabilidades condicionales, elaboración del diagrama de árbol y aplicación del teorema de Bayes, se consideraron en el examen final. Esta se evalúo como el promedio de las calificaciones de estos 4 aspectos, al aplicar un problema que bayesiano en dos eventos y en su generalización. En este caso se contó con una población de 56 estudiantes que aplicaron el examen final.

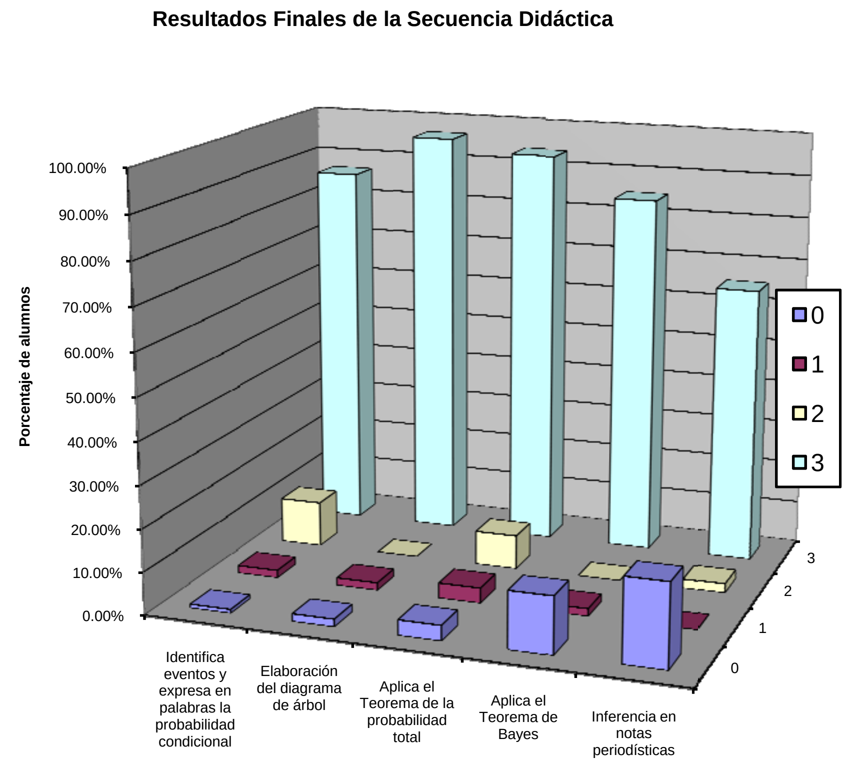
En la evaluación del aspecto que consiste en la inferencia en notas periodísticas, la evaluación fue mucho más compleja, debido a que, existieron 6 alumnos que no entregaron ninguna de las dos tareas, 3 estudiantes entregaron la primera tarea y la segunda no, y por último 3 alumnos entregaron la segunda tarea pero no la primera, por lo que de 58 estudiantes de la secuencia se consideraron sólo 46 estudiantes los cuales entregaron ambas tareas.

Para poder considerar las gráficas, se consideraron en los primeros 4 aspectos a evaluar un porcentaje sobre una población total de 56 estudiantes y para el aspecto de la Inferencia en notas periodísticas un porcentaje sobre una población de 46 alumnos.

Resultados finales de la secuencia didáctica					
	Identifica eventos y expresa en palabras la probabilidad condicional	**Elaboración de Diagrama de árbol**	**Aplica el teorema de la Probabilidad total**	**Aplica el teorema de Bayes**	**Inferencia en notas Periodísticas**
0	No tiene idea de la expresión.	No dibuja ningún diagrama.	No tiene idea del teorema.	No tiene idea del teorema.	No hizo ningún intento por buscar notas periodísticas.
	0.85%	**1.79%**	**3.57%**	**13.39%**	**19.75%**
1	Expresa solamente probabilidades simples.	Sólo traza el diagrama pero no expresa probabilidades o tiene errores en representar los porcentajes.	Sólo obtiene la expresión pero no realiza cálculos.	Sólo obtiene la expresión pero no realiza cálculos.	Busca la nota pero no expresa la relación con la probabilidad condicional.
	1.79%	**1.79%**	**3.57%**	**1.79%**	**0%**
2	Expresa probabilidades condicionales	Traza el diagrama con probabilidades simples y condicionales correctamente	Obtiene la expresión y realiza cálculos erróneos ya sea de porcentaje o sustitución	Obtiene la expresión y realiza cálculos erróneos ya sea de porcentaje o sustitución	Busca la nota sólo subraya la relación con la probabilidad condicional(No Justifica)
	10.71%	**0%**	**8.04%**	**0%**	**2.17%**
3	Expresa probabilidades condicionales inversas	Obtiene probabilidades simples, condicionales y conjuntas correctamente	Obtiene la expresión y realiza los cálculos correctamente	Obtiene la expresión y realiza los cálculos correctamente	Busca la nota subraya y además justifica su relación con la probabilidad condicional
	86.6%	**96.43%**	**93.75%**	**84.82%**	**65.22%**

Cuadro No. IV.9. “Resultados finales de la secuencia didáctica”

.



	Identifica eventos y expresa en palabras la probabilidad condicional	Elaboración del diagrama de árbol	Aplica el Teorema de la probabilidad total	Aplica el Teorema de Bayes	Inferencia en notas periodísticas
0	0.89%	1.79%	3.57%	13.39%	19.57%
1	1.79%	1.79%	3.57%	1.79%	0.00%
2	10.71%	0.00%	8.04%	0.00%	2.17%
3	86.61%	96.43%	93.75%	84.82%	65.22%

Gráfica No. IV. 5. "Resultados finales de la secuencia didáctica"

La evaluación final de la secuencia, muestra que aproximadamente el 87% de los estudiantes de este grupo mostró habilidades para identificar eventos y expresar con palabras la probabilidad condicional y la probabilidad condicional inversa. El 96% realizó un diagrama de árbol en el cual se observaban las probabilidades simples, condicionales y la probabilidad de la intersección correctamente. El 94% del grupo realizaba las operaciones y procedimientos correctamente en la obtención de la probabilidad total (también considerado el denominador del teorema de Bayes) y el 84.82% llegó a la solución correcta del problema Bayesiano ya que aplico correctamente el Teorema de Bayes, la cual da la resolución final al tema. En el aspecto de la inferencia en notas periodística los resultados no fueron tan alentadores como en los mencionados con anterioridad: sólo el 65% de los estudiantes cumplían con la evaluación más alta la cual consistía en buscar la nota, subrayarla y además justificar su relación con la probabilidad condicional. El problema que el autor considera central es que este aspecto fue evaluado a través de tareas (trabajo extraclase), y se observa que en la entrega de estas tareas el 20% de los estudiantes no hicieron ningún intento por buscar notas periodísticas, lo cual implica que la secuencia necesita buscar una mayor motivación en los estudiantes para que ellos realicen trabajo extraclase.

Por otra parte en la realización de la identificación de la probabilidad condicional para dos eventos 43 de los 46 estudiantes considerados llegaron a la máxima evaluación, mientras que en la tercera tarea (Generalización del Teorema de Bayes) sólo 29 de 46 estudiantes lo lograron, esto es a consecuencia del grado de dificultad que esto contribuye, si uno lee las noticias en muy fácil identificar noticias en las cuales se involucren únicamente dos eventos, pero el observar noticias en las cuales se involucren tres o más de tres eventos, requiere de más tiempo y esfuerzo por parte de los estudiantes, debido a que este tipo de noticias presentan una frecuencia de aparición menor en los artículos periodísticos o de revistas.

IV.12.4. Resultados de la encuesta de opinión

Las actividades para la explicación del teorema de Bayes fueron__________para entender el tema.			
Demasiadas **23.21% = 13 alumnos**	Suficientes **75%= 42 alumnos**	Escasas **0%**	Otra **1.79%= 1 alumno**
Las actividades en la explicación del teorema de Bayes fueron__________para entender el tema.			
Interesantes **67.86% = 38 alumnos**	Aburridas **0%**	Motivantes **30.36% = 17 alumnos**	Indiferentes **1.79% = 1 alumno**
En las actividades que realizaste en equipo, las discusiones (explicaciones, opiniones etc.) con tus compañeros fueron:___________ para entender el tema.			
Útiles **95.86% = 52 alumnos**	Poco útiles **3.57%= 2 alumnos**	Indiferentes **3.57%= 2 alumnos**	Otra **0%**
Consideras que tú aprendizaje al trabajar en equipo fue_____________ que trabajando individualmente.			
Mayor **62.5% = 35 alumnos**	Igual **35.71%= 20 alumnos**	Menor **1.79%= 1 alumno**	Otra **0%**
Consideras que al trabajar en equipo, las explicaciones del maestro son___________ que cuando se da una exposición a nivel grupal.			
Más claras **50%=28 alumnos**	Igual de claras **42.86%= 24 alumnos**	Menos claras **7.14%= 4 alumnos**	Confunden **0%**
En tú experiencia, consideras que este tema se puede aprender mejor si:			
Si sólo expone el maestro **7.14%=4 alumnos**	Si expone el maestro y se trabaja en equipo. **89.29% = 50 alumnos**	Si sólo se trabaja en equipo, con un libro de texto. **1.79%= 1 alumno**	Otra **1.79%= 1 alumno**
Consideras que este tema es necesario aprenderlo para:			
Sólo pasar la materia, pero no lo encuentras trascendental en tú vida cotidiana. **1.79%= 1 alumno**	Para pasar la materia y tiene trascendencia en tú vida cotidiana. **30.36%=17 alumnos**	Para pasar la materia y utilizarlo en tu vida profesional. **66.07% = 37alumnos**	Otra **1.79%=1 alumno**
Consideras que este tema sólo requiere:			
Repetir el procedimiento. **7.14%= 4 alumnos**	Identificar datos y sustituirlos en la fórmula. **16.07%= 9 alumnos**	Identificar datos, hacer una representación gráfica, aplicar este gráfico para obtener una probabilidad que no se pueden obtener directamente y por último aplicar los valores dados y obtenidos para aplicarlos en una fórmula. **39.39%=22 alumnos**	Hacer todo lo anterior y después poder justificar el porque se obtuvo esta fórmula. **37.5% = 21alumnos**
Al analizar un texto (periódico, revista, libro de texto, etc.). Puedes			
Identificar que se trata de probabilidad condicional pero no puedo decir por que se relaciona. **17.86%= 10 alumnos**	Leer, pero jamás identifico nada de la probabilidad condicional. **1.79%= 1 alumno**	Identificar que se trata de probabilidad condicional y decir por que se relaciona. **41.07% = 23 alumnos**	Identificar que se trata de probabilidad y hasta hacer diagramas de árbol sobre el artículo. Justificando porque se relaciona. **39.29%= 22 alumnos**

Cuadro No. IV.10. "Resultados de la Encuesta de Opinión"

El análisis de las opiniones de los alumnos con respecto a la secuencia didáctica, arrojó repuestas interesantes como las siguientes: el 75% del grupo opinó que las actividades en la secuencia fueron suficientes para su comprensión.

Para el 95% del grupo las actividades hechas en el teorema les parecieron interesantes y motivantes. Con respecto al aprendizaje cooperativo, más del 90% del grupo consideró que discutir en equipo fue útil para mejorar la comprensión del tema.

Por otra parte más del 90% del grupo, consideró que su aprendizaje fue mayor o igual que trabajando individualmente, y que las explicaciones del profesor eran igual o más claras que cuando se trabaja individualmente.

El 89% considera que se aprende mejor si se trabaja en equipo con la explicación del profesor mientras que un 7% considera que sólo es necesaria la explicación del profesor.

Un punto que parece relevante, es que el 30% siente que este tema tiene relevancia en su vida cotidiana y el 66% opina que tiene relevancia en su vida profesional.

El 80% del grupo considera que puede leer un artículo, revista o noticia periodística y explicar su relación con la probabilidad condicional y el 40% considera que, además puede justificar el contenido de la relación con la probabilidad condicional.

Más del 60% del grupo consideró que las clases fueron didácticas, y claras. Y debido a las opiniones del grupo, creo que la secuencia aportó un alto grado de motivación.

Al ver los resultados, se puede observar que la secuencia tuvo excelentes resultados, no sólo al nivel cognitivo de los estudiantes, sino también tuvo un gran impacto al nivel emocional de cada uno de ellos, propósito establecido al inicio de este trabajo de tesis.

Sumario.

Este capítulo ofreció una de las tantas formas en las que se puede llevar a cabo el trabajo docente. Los resultados dan muestra de la eficiencia del Modelo de la Enseñanza Directa cubriendo los aspectos que la Idoneidad Didáctica exhibe. Obviamente se observa que el que hacer educativo es una ardua tarea en la que se tienen que considerar diferentes aspectos tanto el la planeación como en la implementación de diversos temas a enseñar.

Por otra parte se definen las dos funciones básicas de la evaluación, la pedagógica y la social con el fin de valorar la significación de este conocimiento en los aprendices.

El análisis de los tres tipos de evaluación inicial, formativa y final constituyó un recurso muy valioso para abrir las pautas de regulación del proceso de enseñanza aprendizaje y para lograr formar alumnos autorregulados y comprometidos con su propio aprendizaje.

V. CONCLUSIONES

La problemática en la que se encuentra inmersa la enseñanza de las matemáticas, en conjunción con los resultados que presentan las evaluaciones internacionales en los estudiantes mexicanos, han mostrado que la enseñanza en esta área no ha dado muestra hasta ahora de una mejora en el rendimiento académico de los estudiantes.

Uno de los fines que persiguió el presente trabajo recepcional es el potenciar las habilidades y competencias de los estudiantes teniendo en cuenta los aspectos que las evaluaciones internacionales marcan para la solución de problemas matemáticos.

Ante esta inquietud se muestra una nueva manera de enseñar la probabilidad bajo los aspectos de la Idoneidad Didáctica y considerando la estrategia constructivista que proporciona el Modelo de la Enseñanza Directa en el cual se pretende que los alumnos comprendan la probabilidad subjetiva vía la enseñanza de los problemas bayesianos los cuales se relacionen con el entorno de los estudiantes. Bajo la enseñanza de la probabilidad subjetiva se pretende que los alumnos desarrollen un grado mayor de intuición probabilística.

A través del Modelo de la Enseñanza Directa se busca lograr la Idoneidad Didáctica (Font. et. al. 2006), en el cual se la da gran peso a varias dimensiones del aprendizaje como la emocional, epistémica, cognitiva, ecológica, mediacional e interaccional. Es decir, no sólo se busca desarrollar una dimensión intelectual como la educación actual lo rige, esta secuencia pretende también dar mucho peso a la dimensión emocional. Por ello, esta secuencia se preocupa por incluir sentimientos y emociones de los estudiantes y no simplemente mostrar una serie de instrucciones las cuales pueden ser recomendadas por cualquier manual y no requieren de la asistencia personal de un profesor.

Por lo anterior, esta propuesta llevó al aula situaciones que facilitaran el aprendizaje y la creatividad impulsando la motivación, el compromiso y el espíritu de cooperación.

Para lograr esto se adecuaron diversas estrategias al desarrollo del aprendizaje de la probabilidad subjetiva, se investigó también cuales son las dificultades que presenta la enseñanza de la probabilidad subjetiva y teniendo en claro las dificultades y la metodología a seguir, se diseño la propuesta.

La primera situación didáctica, utilizó dispositivos artificiales de azar (urnas), y esta situación fue la introducción de la implementación del Modelo de la Enseñanza Directa. Esta situación permitió anclar los conocimientos previos de la probabilidad clásica y condicional que se para la enseñanza del Teorema de Bayes. Además, permitió generar una gran motivación en el aula ya que se presentó una fuerte interacción entre el profesor y sus estudiantes. Se observó que las metas planteadas en el capítulo III tenían un carácter evolutivo y que estaban estrechamente vinculadas a los mensajes que transmitía el docente. La forma en que los estudiantes estructuraron la tarea y mostraron un interés intrínsico, ante la misma. La manera de demostrar su autonomía en la toma de decisiones debido a que los estudiantes los alumnos se pudieron expresar libremente sus ideas y conocimientos, así como seguir el procedimiento de agrupamiento para trabajar cooperativamente en la realización de la tarea impuesta y la participación activa de cada uno de ellos son los motivos que se citan para establecer la organización motivacional de la instrucción.

Los logros a nivel cognoscitivo de los estudiantes se manifestaron en el momento que ellos sin ayuda del profesor pudieron obtener probabilidades simples, aplicar las leyes de la probabilidad, y este situación permitió que los estudiantes pudieran ver la probabilidad condicionada de una manera muy natural.

En cada sección de esta situación didáctica, el docente procuró dar retroalimentación a sus respuestas, al realizar este trabajo, se observaba como los alumnos en los cuales se implemento la secuencia ganaban confianza en si mismos, en cada momento en el cual ellos podían corroborar que su respuesta era correcta, y si existía alguna duda siempre existía la disposición de sus compañeros en primera instancia y después del profesor para corregirle y así aumentar la motivación a través de sus expectativas de logró.

Este esquema contribuyó fundamentalmente a que los alumnos aprendieran a convivir, es decir a participar y cooperar con sus compañeros para fortalecer sus conocimientos previos para poder concatenar y sembrar las bases para el nuevo conocimiento a adquirir.

Por lo tanto, la secuencia cumplió didácticamente (con lo referido en el Capítulo III de este trabajo) con la idoneidad en matemáticas se ha logrado establecer una idoneidad mediacional utilizando los recursos materiales y temporales disponibles para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje" e interaccional ya que permitió identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Y la idoneidad emocional: Observando un alto grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes

En las dos situaciones didácticas posteriores se observan los pasos que presenta el Modelo de la Enseñanza Directa. La presentación fue modelizada utilizando diferentes modo de expresión (Ver Capítulo IV. Un ejemplo de presentación) dejando en claro las definiciones y los procedimientos que se requieren en el manejo del tema. El ambiente en el aula permitió generar clases interactivas a través de preguntas intercaladas en la exposición del tema. Es importante citar que estas preguntas en la mayoría de las veces tuvieron una respuesta por parte de los estudiantes. La siguiente fase de la secuencia con referencia al Modelo de la Enseñanza Directa fue la práctica guiada en donde se otorgo a los alumnos una serie de ejercicios que permitieran practicar lo aprendido en la fase presentación. Esta fase se llevó a cabo en forma grupal a través de aprendizaje cooperativo, en el cual se permitió la interacción cara a cara ya que existieron una serie de actividades cognitivas y dinámicas interpersonales que cada alumno presentó al investigar, generar sus propias respuestas, generando discusiones acerca de la naturaleza del problema a tratar. Así mismo permitió valorar su responsabilidad escuchando y dialogando con sus compañeros para llegar a un consenso. En este aspecto se pudieron observar una serie de habilidades interpersonales y de manejo de grupos pequeños que generó un ambiente positivo.

Los resultados de la secuencia arrojaron que los alumnos no tienen problemas en la obtención de la probabilidad simple, pero cuando se tiene que obtener la probabilidad de la intersección o de la unión de eventos, se observó que estas dificultades continuaron presentes, aún al final de la implementación, lo cual indica que existe una falta de dominio en la aplicación de las leyes de la probabilidad. La implementación de la secuencia permitió apreciar que el alumno no considera la probabilidad de la intersección de eventos o la suma dos veces, es decir, olvida que la intersección es un traslape entre conjuntos con elementos comunes y que exclusivamente se tiene que contar una vez. Por lo anterior, es necesario que el docente sea más reiterativo en las leyes de la probabilidad para que el alumno pueda usar este conocimiento correctamente a situaciones probabilísticas que requieran su aplicación.

Por otra parte, en la obtención de la probabilidad condicional se encontró en un inició que la mayoría de los alumnos no hacían distinciones en los eventos condicionados por el suceso de otro evento. Los estudiantes simplemente se reducían a obtener la probabilidad, sin considerar que la probabilidad de un evento condicionado implica un cambio en el espacio muestral. Al final de la secuencia, se observó que la obtención de la probabilidad condicionada fue un gran logró ya que ahora sólo una minoría continuó teniendo el mismo error. Un gran porcentaje de los estudiantes comprendió que la probabilidad condicionada implicaba un cambio en el espacio muestral del evento condicionado.

En las tres situaciones didácticas, los alumnos lograron expresar en palabras la probabilidad condicional, se identificó que es muy importante explicar en todo momento y hacer uso de diferentes formas de expresar el orden en que acontecen los eventos, para que de esta manera el alumno pueda establecer e identificar correctamente la probabilidad condicional, en este sentido, se trata de transformar una expresión del lenguaje coloquial al lenguaje probabilístico En un principio la comprensión de esta distinción fue una gran dificultad para los estudiantes, pero en el transcurso de las secciones los estudiantes empezaron a considerar seriamente el orden, ya que observaron que si estos datos no estaban establecidos de manera correcta, seguramente les llevaría a una solución incorrecta. En este sentido, el docente tiene que hacer mucho énfasis y hacerles notar que no establecer el orden lleva a una solución incorrecta.

En las situaciones didácticas también se fomentó el emplear más de una forma de representación (diagrama de árbol o tabla de contingencia), esta fase estuvo supervisada por el docente en todo momento. En ella, se dejó que fuera el estudiante quien decidiera la forma de representación que deseara emplear. Se observó que por lo general, casi la totalidad tuvo una forma adecuada de representación que les permitía llegar al resultado correcto. Para el caso de dos eventos al alumno le era muy similar utilizar cualquier tipo de representación (diagrama de árbol o tabla de contingencia), y en caso de tres eventos prefirieron el diagrama de árbol (por lo que al final siempre optaron por el diagrama de árbol), debido a que (en opiniones de los estudiantes) esta representación les permitió deducir y aplicar facilmente la fórmula de la probabilidad total. En este sentido el alumno, no requirió que se estableciera ninguna fórmula en el pizarrón para simplemente sustituir datos.

El diagrama de árbol ayudo al alumno a discriminar del orden de los eventos y de esta manera se estableció claramente la notación y obtención de la probabilidad condicional.

En un inicio el empleo de la notación y la deducción de la probabilidad condicional a través de su definición[53] lo encontraban aislado de sus conocimientos previos, pero al ser insistente el docente en la importancia de éstos y su relación con el teorema de Bayes, los estudiantes hicieron un gran esfuerzo por tratar de deducir las fórmulas utilizadas en los problemas bayesianos, lo cual fue un éxito dentro de la aplicación de esta secuencia, es decir, se dejo atrás el conocimiento memorístico, y se logró que en cada problema que se le presento a los alumnos ellos fueran construyendo las herramientas necesarias para la resolución de un ejercicio que implicara la aplicación del teorema de Bayes.

El aspecto de aplicabilidad de las matemáticas (en este caso de la probabilidad) propuesto por Font, se pretendió cubrir con la siguiente fase: inferencia en notas periodísticas (Identificación de la probabilidad condicional en artículos periodísticos y su justificación de porque se hablaba de este tema).

Esta actividad fue emocionante en el momento de realizarla debido a que su principal contribución es al nivel cognitivo. Sabemos que el aprendizaje significativo es un aprendizaje relacional, el cual consistió en relacionar un artículo de su cotidianeidad con el conocimiento adquirido en la clase y por lo anterior se puede afirmar que este nuevo conocimiento se convirtió en significativo y por lo tanto se recuerda por más tiempo. Este aspecto contribuyó a que el alumno pudiera contribuir a influir en su entorno y con ello aprendió a hacer y ser aspectos que Jaques Delors maneja como los pilares que siempre deben estar presentes en la educación.

A partir de las opiniones del grupo, la secuencia aportó un alto grado de motivación, la mayoría de los alumnos considera que el tema tiene utilidad en su vida cotidiana o futuramente en su vida profesional, bajo estas condiciones se puede decir que la

---

[53] $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)}$ Fórmula de la obtención de la probabilidad condicional.

secuencia cumplió el cometido llevar al aula, clases interactivas y dinámicas, y se logró en un gran porcentaje que el tema fuera más entendible para el alumno.

La mayoría de los alumnos opinó que el tema tiene utilidad en su vida cotidiana o futuramente en su vida profesional. Me atrevo a decir que la secuencia cumplió el cometido de llevar al aula clases interactivas y dinámicas y se logró en un gran porcentaje que el tema fuera más entendible para el alumno.

Al ver estos resultados, la secuencia didáctica cumple con los objetivos que plantea el aprendizaje cooperativo y por otra parte, esta secuencia logra desarrollar el perfil de un alumno egresado del bachillerato. Debido a que el alumno tiene el conocimiento y puede aplicar criterios de validez en el campo científico, hace que cambie su visión determinista de los fenómenos aleatorios y logre una mejor comprensión de su entorno, le da valor a la aplicación del teorema de Bayes en distintos campos del saber, empieza a reflexionar sobre los planteamientos de tipo estadístico en los medios masivos de comunicación , se inicializa en la exploración de nuevas formas para argumentar, comprende el significado de conceptos, símbolos y procedimientos para llevar a cabo la obtención de la probabilidad condicional y sobre todo muchos de los estudiantes obtuvieron seguridad en si mismos para la correcta aplicación del Teorema de Bayes a una diversidad de situaciones.

En este aspecto se observa que la enseñanza es un proceso continuo de negociación de significados, de establecimientos de contextos mentales compartidos, fruto y plataforma de un buen diseño de clase y de un proceso de negociación.

A partir de los resultados obtenidos se concluye que el método de la Enseñanza Directa puede ser utilizado en una diversidad de temas, en los cuales se quiera enseñar un conocimiento nuevo y unirlo a los conocimientos previos con los que los alumnos, cuentan. Es importante hacer notar que el método fue aplicado a un grupo numeroso de estudiantes y funciona si establece un buen diseño y planeación de la clase esto se puede observar a través de los resultados de esta secuencia donde se logra desarrollar el perfil de un alumno egresado del bachillerato, debido a que el alumno tiene el conocimiento y puede aplicar criterios de validez en el campo científico, hace que cambie su visión determinista de los fenómenos aleatorios y logre una mejor comprensión de su entorno, le da valor a la aplicación del teorema de Bayes en distintos campos del saber, empieza a reflexionar sobre los planteamientos de tipo estadístico en los medios masivos de comunicación , se inicializa en la exploración de nuevas formas para argumentar, comprende el significado de conceptos, símbolos y procedimientos para llevar a cabo la obtención de la probabilidad condicional y sobre todo muchos de los estudiantes obtuvieron seguridad en si mismos para la correcta aplicación del teorema de Bayes a una diversidad de situaciones.

Por lo tanto, el Teorema de Bayes tiene muchas ventajas en el desarrollo de su enseñanza, ya que como se vio anteriormente desarrolla habilidades de nivel superior en los estudiantes como el "análisis y la síntesis" a través de que:

1. Sean capaces de estructurar la información relevante de un problema, de tal forma que facilite la interpretación del fenómeno.

2. Sean capaces de detectar las cuestiones esenciales de una situación problemática, así como la generación de soluciones viables y la selección de las más convenientes, de acuerdo al contexto en que se vive.

3. Sean capaces de hacer abstracciones e identifiquen los elementos esenciales que conforman un fenómeno particular, e integrarlos de una manera coherente, de tal manera que formen un modelo que sirva para mejorar nuestra predicción y explicación de su comportamiento.

4. Sean capaces de generar hipótesis y de diseñar procesos para verificarlas.

5. Tengan la capacidad para formular juicios críticos sobre los distintos modelos que explican un cierto fenómeno.

6. Tengan la capacidad de formular juicios críticos sobre las soluciones que se proponen para un cierto problema.

Por lo tanto la secuencia se estructuró conforme a los cuatro pilares del conocimiento ya que permitió que los alumnos adquieran los instrumentos de la comprensión (aprender a ser), que puedan influir en su entorno (aprender a hacer), les enseño como se puede aprender a convivir juntos (aprender a convivir) y por lo tanto aprender a ser.

V.1 Perspectivas y Limitaciones del presente Trabajo Recepcional.

La secuencia didáctica puede ser impartida en cualquier bachillerato a nivel nacional e incluso en determinadas licenciaturas que consideren dentro de sus programas el tema de la probabilidad condicional.

Para la impartición de la secuencia es importante que los estudiantes se encuentren en el estadio de las operaciones formales, debido a que el estudio de la probabilidad subjetiva esta considerada como una operación formal. También es importante que los estudiantes cuenten con un conocimiento previo de la probabilidad clásica y condicional así como las leyes básicas de la Teoría de la Probabilidad para poder anclar el conocimiento del Teorema de Bayes el cual implica el uso de la probabilidad condicional inversa.

Una de las grandes ventajas de esta secuencia es que puede ser aplicada en grupos numerosos, pero se requiere de un juego de copias de las hojas de trabajo así como mínimo dos urnas y bolas pintadas para la impartición de la primera situación didáctica.

Las instalaciones del aula, son simples pero si se requiere de sillas movibles y un pizarrón, gis o plumón según sea el caso, para poder llevar a cabo la exposición y el trabajo cooperativo.

Y no menos importante, se requiere de un docente entusiasta, paciente, tolerante y que este con la disposición de explicar en un lenguaje comprensible las dudas de sus estudiantes. Además de que requiere un conocimiento amplio en el manejo de la probabilidad condicional y el Teorema de Bayes.

Una limitante importante en esta secuencia, es el tiempo requerido para su enseñanza, debido a que requiere de un mínimo de 8 horas para su impartición y en muchas ocasiones los programas de estudio con amplios contenidos no permiten el manejo de estos tiempos.

En conclusión, y en lo que respecta al Modelo de la Enseñanza Directa en combinación con el aprendizaje cooperativo, es muy útil en la planeación e implementación de clases en las cuales se quiera transmitir un nuevo conocimiento de manera diferente, y que ésta no tiene como obstáculos un grupo numeroso, o recurrir al uso de computadoras que hasta el momento no es fácil contar con un acceso para todos los estudiantes, simplemente considera como recursos, sillas movibles, un pizarrón, un gis y sobretodo un profesor que tenga cierta intuición probabilística un dominio del tema para poder resolver cualquier duda al respecto del mismo y sobre todo sea entusiasta, optimista para cumplir sus metas en cada situación o problema didáctico que se le presente.

ANEXO 1

Examen Diagnóstico

Nombre:______________________________________Grupo:_______________

Edad:____años_______Meses Sexo:_______________

I Parte

Instrucciones: *Escribe en el paréntesis la letra que corresponda a la respuesta correcta*.

1.	( )	Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 5?				
	a	$\frac{5}{6}$	b	$\frac{1}{6}$	c	$\frac{0}{6}$
2.	( )	Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 2, un 4 o un 6?				
	a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{6}$	c	$\frac{0}{6}$
3.	( )	Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas 7?				
	a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{6}$	c	$\frac{0}{6}$
4.	( )	Al tirar dos dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Determina la probabilidad de obtener al menos un 4.				
	a	$\frac{6}{36}$	b	$\frac{12}{36}$	c	$\frac{11}{36}$
5.	( )	Al tirar **dos** dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Determina la probabilidad de que la suma de sus caras sea 7				
	a	$\frac{6}{36}$	b	$\frac{3}{36}$	c	$\frac{0}{36}$
6.	( )	Al tirar **dos** dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Dado que la suma de los dados fue 7, ¿Cuál es la probabilidad de la cara de algún dado haya sido un 5?				
	a	$\frac{11}{36}$	b	$\frac{2}{36}$	c	$\frac{2}{6}$
7.	( )	La notación de probabilidad P(A/B) significa que:				
	a	La probabilidad de que dado que sucedió el evento A ocurra el evento B.	b	La probabilidad de que sucedan juntos los eventos A y B.	c	La probabilidad de que dado que sucedió el evento B ocurra el evento A.
8.	( )	La probabilidad de $P(A \cap B)$ si los eventos son dependientes se calcula como.				
	a	$P(A)\square P(B)$	b	$P(A)+P(B)$	c	$P(A)\square P(B/A)$ Si el evento B depende de la ocurrencia del evento A

Situación Didáctica No. 1

Equipo No:________________________ Grupo:________

Nombre de los integrantes:

	Nombre de cada uno de los integrantes.
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Forma equipos de 5 personas.

Cada equipo tendrá una hoja para responder las siguientes preguntas. Procura que las respuestas que escriban sean de común acuerdo por todos tus compañeros del equipo.

Actividad No. 1

I Parte

Instrucciones

El experimento consiste en extraer una bola de una urna.

Observa a dos de tus compañero del salón designados para realizare este experimento. Para ello observaras una urna, además y bolas blancas y negras las cuales tienen uno o dos alfileres. También se requiere de una venda para tapar los ojos de tu compañero.

El profesor a cargo te hará participe de observar que en la urna se encuentran :

5 bolas blancas y 3 bolas negras, marcadas con un alfiler, 4 bolas blancas y 2 negras con dos alfileres.

Debido a que todo el tiempo es importante recordar constantemente la anterior distribución el profesor escribirá en el pizarrón esta distribución, y después se continuará con los siguientes pasos:

Venda los ojos de alguno de tus compañeros del equipo, no se vale que vea en lo más mínimo. Pídele qué extraiga una bola.

Realicemos este experimento tres veces y contestemos, si en alguna pregunta surge alguna duda expónsela al profesor y pidele que utilice esta urna para obtener probabilidades. *Tiempo para la discusión 6minutos*.

Si en algún momento hubo alguna duda o no se llegó al consenso de la respuesta, expónsela en los siguientes 5 minutos de discusión del profesor.

¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea blanca?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea negra?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola con un alfiler?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola con dos alfileres?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola con blanca con dos alfileres?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola negra con un alfiler?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola con negra con dos alfileres?
Anota la respuesta:

Ahora si. Con ayuda del profesor. Anota lo que sucedió con las urnas.

Por ejemplo: Llamemos B al evento de obtener una bola blanca.

Tiempo 3 minutos

II Parte.

El experimento consiste en extraer una bola de alguna de las dos urnas numeradas.

Se realizara un nuevo experimento, al igual que el experimento anterior se contará con dos compañeros designados para realizar el experimento y con las mismas reglas del experimento anterior.

Para ello observaras dos urnas numeradas (1 y 2), y bolas blancas y negras las cuales tienen uno o dos alfileres. También se requiere de una venda para tapar los ojos de tu compañero.

El profesor a cargo te hará participe de observar que en la urna se encuentran :

5 bolas blancas y 3 bolas negras marcadas con un alfiler las cuales tienen que ser depositadas en la urna número 1 y 4 bolas blancas y 2 bolas negras marcadas con el número 2.

Debido a que todo el tiempo es importante recordar constantemente la anterior distribución el profesor escribirá en el pizarrón esta distribución, y después se continuará con los siguientes pasos:

Venda los ojos de alguno de tus compañeros del equipo, no se vale que vea en lo más mínimo. Pídele qué extraiga una bola.

Realicemos este experimento tres veces y contestemos, si en alguna pregunta surge alguna duda expónsela al profesor y pidele que utilice esta urna para obtener probabilidades. (Tiempo para la discusión 6 minutos).Observa que tienes un minuto para cada respuesta.

¿Cuál es la probabilidad de que se elija la urna 1?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que se elija la urna 2?
Anota la respuesta:

Ahora permite que tu compañero palpe la bola.

Solicítale que conteste las siguientes preguntas:

Si la urna de la cual extrajo la bola es la 1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
Anota su respuesta:
Si la urna de la cual extrajo la bola es la 1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?
Anota su respuesta:

Si la urna de la cual extrajo la bola es la 2. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
Anota su respuesta:
Si la urna de la cual extrajo la bola es la 2. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?
Anota su respuesta:

Tiempo de exposición 4 minutos

Guarda tus hojas y con ayuda del profesor analiza la probabilidad de este experimento en el diagrama de árbol

Tiempo 5 minutos

Parte III.

Ahora si dibuja diagrama de árbol para el experimento de dos urnas.

Tiempo 5 minutos

En las preguntas de la siguiente sección, nota que ellas no manifiestan alguna condición de dependencia (como del tipo "dado que") y más bien emplean la palabra "y". También recuerda que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ si B depende de la ocurrencia de A Tiempo 6 minutos.
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea blanca y de la urna 1?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea blanca y de la urna 2?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea negra y de la urna 1?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea negra y de la urna 2?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea blanca?
Anota la respuesta:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo sea negra?
Anota la respuesta:

Ya observaste qué pasó cuando analizamos el hecho de extraer una bola de dos urnas.

Tiempo 5 minutos.

¿La probabilidad de obtener una bola blanca del primer experimento (se extrajo la bola de una sola urna) es igual a obtener una bola blanca del segundo experimento (se extrajo la bola de dos urnas)?
SI ó NO
¿Por qué?
Tiempo 8 minutos. Observa a tu profesor la explicación de la probabilidad total.

Ahora con tus compañeros escriban cómo quedaría el teorema de la probabilidad total para el caso de las bolas negras en las urnas y obtén esta probabilidad.

Anota la respuesta:

Tiempo 10 minutos.

Parte V

Imagínate que llega un compañero de otro equipo que no vio la realización del experimento, pero lo único que observa es una bola blanca, y ésta ya no cuenta con alfileres que le indiquen de qué urna proviene.

¿Puede tu compañero obtener la probabilidad de qué está bola blanca sea de la urna 1?

Sí o No. ¿Por qué?

Tiempo 4 minutos

Discute tus respuestas con el profesor y observa el análisis de esta pregunta y su posible solución.

Tiempo de exposición 8 minutos.

Ahora escribe el teorema de Bayes para el caso de qué dado que se obtuvo una bola negra ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la urna 2? Y realiza los cálculos. Tiempo 10 minutos.

Anota la respuesta.

Gracias por tu cooperación, entrega esta hoja de resultados al profesor.

Situación Didáctica No. 2
Actividad 2
Aplicaciones del Teorema de Bayes

Equipo No.____

Nombre de los integrantes del equipo:

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____
5. ____

Ejercicio 1.

Lee cuidadosamente el problema.

Las estadísticas muestran que los viernes por la noche, aproximadamente 30% de los automovilistas de la ciudad de México conducen en un estado de ebriedad. Suponga, además, que 85% de los ebrios hacen caso omiso de los señalamientos de tránsito, mientras que sólo 60% de los sobrios lo respetan.

a) Si alguien observa un viernes por la noche que un automovilista hace caso omiso de los señalamientos, ¿Cuál es la probabilidad de que este ebrio?
b) Si un conductor respeta las señales de tránsito, ¿Cuál es la probabilidad de

Instrucciones:
Resuelve el problema. Desarrollando los siguientes puntos.
Describe los eventos que definen el problema. (Recuerda que A’ significa el complemento de A)
Por ejemplo: E es el evento de conducir ebrio
E’ ____

R____

R’ No respetar las señales de tránsito

Obtén la probabilidad de conducir en estado sobrio un viernes por la noche.

____

____

¿Cuál de todas las opciones expresa la probabilidad, que el 85% de los ebrios hacen caso omiso de los señalamientos de tránsito?

a)	$P(R'/E)$	b)	$P(R/E)$	c)	$P(E/R')$	d)	$P(E \cap R')$

¿Cuál de todas las opciones expresa la probabilidad, que el 60% de los sobrios lo respetan?

a)	$P(R'/E)$	b)	$P(R/E')$	c)	$P(E/R')$	d)	$P(E \cap R')$

Elabora una tabla de contingencia. Describiendo cada una de las probabilidades en palabras y en notación de probabilidad condicional.

	Ebrio **P (E)=** –	**Sobrio** **P( )=** –
Respeta las señales de tránsito. **Probabilidad** **P(R)=** –	En palabras *La probabilidad de que dado que esta ebrio respeta las señales de tránsito* Por probabilidad ***P(R/E)=15%=0.15***	En palabras Por probabilidad
No respeta las señales de tránsito **P( )=** –	En palabras Por probabilidad	En palabras Por probabilidad

Elabora un diagrama de árbol para el problema describiendo la notación de cada uno de los eventos y los porcentajes de probabilidad.

Obtén la probabilidad del inciso a (**Si alguien observa un viernes por la noche que un automovilista hace caso omiso de los señalamientos, ¿Cuál es la probabilidad de que este ebrio?**)
Escribe que formula utilizarías y realiza los cálculos pertinentes para obtener esta probabilidad.

Obtén la probabilidad del inciso b (**Si un conductor respeta las señales de tránsito, ¿Cuál es la probabilidad de que este sobrio?**)
Escribe que formula utilizarías y realiza los cálculos pertinentes para obtener esta probabilidad

Nombre:______________________________________Grupo:_______________

Tarea. Resuelve los el siguiente ejercicio.

En un examen de matemáticas sólo 75% de una clase respondió todas las preguntas. De aquellos que contestaron todo el examen aprobó el 80% pero de los que no respondieron todo sólo aprobó el 50%. Si un estudiante pasó ¿cuál es la probabilidad de que haya respondido todas las preguntas?

Define los eventos
R. El evento de responder todas las preguntas
R'__________________________________
P. El evento de aprobar
P'__________________________________
¿Qué probabilidad te están solicitando?
____
___
Ahora así definido.
Traza un diagrama de árbol de probabilidades donde indiques cada una de las probabilidades que obtuviste:

En este espacio marca todos los cálculos que usaste para resolver el problema.

Por último. Busca uno o más recortes de periódicos donde encuentres probabilidades condicionales. (Subraya la noticia y explica por qué esta puede ser una probabilidad condicional).

Situación Didáctica No. 3
Actividad 3
Aplicaciones del Teorema de Bayes

Nombre de los integrantes del equipo:

6. ____
7. ____
8. ____
9. ____
10. ____

Ejercicio 1.

Lee cuidadosamente el problema.

Las ventas de vasos con café caliente de la sucursal El cafecito se reparten en las siguientes proporciones: café americano 45%, café capuchino 35% y café express 20%. La probabilidad de que una persona solicite azúcar para cada uno de ellos es de 0.2 para americano, 0.4 para capuchino y 0.1 para express. Si alguien ha solicitado un sobre de azúcar, ¿cuál es la probabilidad de que sea para un café capuchino?

Instrucciones:
Resuelve el problema. Desarrollando los siguientes puntos.
Describe los eventos que definen el problema.
Por ejemplo: M *es el evento de solicitar un café americano*
C es el evento de: ______________________________
E es el evento de: ______________________________
A es el evento de: ______________________________
A' es el evento de: ______________________________

Relaciona las columnas:

( )	La probabilidad de solicitar un café americano.	k)	$P(E) = 0.20$
( )	La probabilidad de solicitar un café capuchino.	t)	$P(A/M) = 0.2$
( )	La probabilidad de solicitar un café express.	j)	
( )	Expresa la Probabilidad, de que una persona solicite azúcar para un café americano.	r)	$P(M) = 0.45$
( )	Expresa la Probabilidad, de que una persona solicite azúcar para un café capuchino.	a)	$P(C/A)$
( )	Expresa la Probabilidad, de que una persona solicite azúcar para un café express.	b)	$P(C) = 0.35$
( )	Expresa la Probabilidad solicitada en el problema.	c)	$P(C/A')$
		z)	$P(A/E) = 0.1$
		g)	$P(A/C) = 0.4$

Elabora una tabla de contingencia. Describiendo cada una de las probabilidades en palabras y en términos de probabilidad condicional.

Tipo de café	**Americano Probabilidad**	**Capuchino Probabilidad_________**	**Express Probabilidad_________**
Solicitar azúcar Probabilidad _________________	En palabras *La probabilidad de que dado que se solicito un café americano solicite azúcar.* Por probabilidad $P(A/M) = 0.2$	En palabras ______ ______ ______ Por probabilidad ______ ______ ______	En palabras ______ ______ ______ Por probabilidad ______ ______ ______
No solicitar azúcar Probabilidad ________________	En palabras ______ ______ ______ Por probabilidad ______ ______	En palabras ______ ______ ______ Por probabilidad ______ ______	En palabras ______ ______ ______ Por probabilidad ______ ______

Elabora un diagrama de árbol para el problema describiendo los eventos y los porcentajes de probabilidad.

¿Cuál es la expresión de probabilidad para solicitar azúcar?

Escribe que fórmula utilizarías para obtener la probabilidad de solicitar azúcar. (Observa que este es el Teorema de probabilidad total), y después sustituye los valores del problema.

Realiza los cálculos pertinentes para obtener esta probabilidad.

Ahora obtén la probabilidad de que Si alguien ha solicitado un sobre de azúcar, esta sea para un café capuchino. (Observa que esta es la probabilidad solicitada en el problema original). Aplica el teorema de Bayes.

Realiza los cálculos pertinentes para obtener esta probabilidad.

Ejercicio 2

Una compañía de seguros, público una estadística de robo de autos por el tipo de fabricación

	Porcentaje de adquisición de un auto de fabricación **Japonesa** **P(J)=.40**	Porcentaje de adquisición de un auto de fabricación **Estadounidense** **P(E)=0.35**	Porcentaje de adquisición de un auto de fabricación **Alemana** **P(A)=.20**	Porcentaje de adquisición de un auto de fabricación **Otra** **P(O)=0.05**
Robado	En palabras Probabilidad de que dado que fue de fabricación japonesa fue robado 24 Describe en Probabilidad P(R/J)=0.24	En palabras __________ __________ __________ __________ 38 Describe en Probabilidad __________	En palabras __________ __________ __________ __________ 36 Describe en Probabilidad __________	En palabras __________ __________ __________ __________ 2 Describe en Probabilidad __________
No robado	En palabras __________ __________ __________ __________ 76 Por Probabilidad __________	En palabras __________ __________ __________ __________ 62 Por Probabilidad __________	En palabras __________ __________ __________ __________ 64 Por Probabilidad __________ __________	En palabras __________ __________ __________ __________ 98 Por Probabilidad __________ __________

Si un cliente adquirió la dosis fuerte para este medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que los comprará en forma de cápsulas?

Escribe las expresiones de probabilidad para cada uno de los eventos de la tabla. (Llénalo en los espacios que da la tabla)
Descríbelos con palabras. (Llénalo en los espacios que da la tabla).

Elabora un diagrama de árbol para el problema describiendo todos los eventos y los porcentajes de probabilidad.

Determina la probabilidad de que un automóvil sea robado en la Ciudad de México.

Realiza en el siguiente espacio los cálculos pertinentes para obtener la probabilidad, de que un automóvil sea robado.

Ahora resuelve la probabilidad de la pregunta original del problema. (**Si una persona compró un coche y al poco tiempo se lo robaron ¿Cuál es la probabilidad de que sea de fabricación japonesa?)**

Realiza los cálculos pertinentes para obtener esta probabilidad.

Nombre:_____________________________________Grupo:_______________

Tarea. Resuelve el siguiente problema.

En el distrito universitario de Jauja los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20% estudian arquitectura, el 35% medicina y el 45% economía.
El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%.

a) Elegido un alumno al azar determinar la probabilidad de que haya acabado los estudios.
b) Dado que termino sus estudios haya

Define los eventos
A. El evento de estudiar arquitectura.
M. El evento de estudiar __________________
E. ___________________________________
F. El evento de finalizar sus estudios.
F'_____________________________________

¿Qué probabilidad te están solicitando en el inciso a? (Elegido un alumno al azar determinar la probabilidad de que haya acabado los estudios)

____

¿Qué probabilidad te están solicitando en el inciso b? (Dado que termino sus estudios haya estudiado medicina)

____
_

Ahora así definido.

Traza un diagrama de árbol de probabilidades donde indiques cada una de las probabilidades que obtuviste:

*En este espacio marca todos los cálculos que usaste para resolver el inciso a (*Elegido un alumno al azar determinar la probabilidad de que haya acabado los estudios) *del problema.*

a) *En este espacio marca todos los cálculos que usaste para resolver el inciso b (*Dado que termino sus estudios haya estudiado medicina) *del problema.*

Por último. Busca uno o más recortes de periódicos donde encuentres probabilidades condicionales para tres o más eventos. (Subraya la noticia y explica porque esta puede ser una probabilidad condicional).

Evaluación Final

Nombre:____

Grupo:_________________

Edad:____años_______Meses Sexo:________________

I Parte

Instrucciones: *Escribe en el paréntesis la letra que corresponda a la respuesta correcta*.

1.	( )	Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 5?				
	a	$\frac{5}{6}$	b	$\frac{1}{6}$	c	$\frac{0}{6}$
2.	( )	Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 2, un 4 o un 6?				
	a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{6}$	c	$\frac{0}{6}$
3.	( )	Al tirar **un** dado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas 7?				
	a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{6}$	c	$\frac{0}{6}$
4.	( )	Al tirar dos dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Determina la probabilidad de obtener al menos un 4.				
	a	$\frac{6}{36}$	b	$\frac{12}{36}$	c	$\frac{11}{36}$
5.	( )	Al tirar **dos** dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Determina la probabilidad de que la suma de sus caras sea 7				
	a	$\frac{6}{36}$	b	$\frac{3}{36}$	c	$\frac{0}{36}$
6.	( )	Al tirar **dos** dados. (Uno negro y uno blanco) Se tira primero el dado negro y después el dado blanco. Dado que la suma de los dados fue 7, ¿Cuál es la probabilidad de la cara de algún dado haya sido un 5?				
	a	$\frac{11}{36}$	b	$\frac{2}{36}$	c	$\frac{2}{6}$
7.	( )	La notación de probabilidad P(A/B) significa que:				
	a	La probabilidad de que dado que sucedió el evento A ocurra el evento B.	b	La probabilidad de que sucedan juntos los eventos A y B.	c	La probabilidad de que dado que sucedió el evento B ocurra el evento A.
8.	( )	La probabilidad de $P(A \cap B)$ si los eventos son dependientes se calcula como.				
	a	$P(A)\square P(B)$	b	$P(A)+P(B)$	c	$P(A)\square P(B/A)$ Si el evento B depende de la ocurrencia del evento A

Resuelve los siguientes problemas.

La fábrica de enlatados PI S.A. produce 5000 envases diarios. La máquina A produce 3000 de estos envases, de los que el 2% son defectuosos y la máquina B produce los 2000 restantes de los que se sabe que el 4% son defectuosos.

Relaciona las siguientes columnas:

( )	Probabilidad de que un envase provenga de la máquina A	Z	P(B)=2000/5000=2/5=0.40
( )	Dado que el envase es producido por la máquina A es defectuoso.	K	P(D'/A)=0.98
( )	Expresa la probabilidad de que dado un envase no defectuoso provenga de la máquina B	L	P(D/B)=0.04
( )	Expresa la probabilidad de defectuoso	F	P(D')
( )	Expresa la probabilidad de no defectuoso	B	P(A)=3000/5000=3/5=0.60
( )	Probabilidad de que un envase provenga de la máquina B	G	P(D'/B)=0.96
( )	Dado que el envase es producido por la máquina B es defectuoso.	H	P(B/D')
		E	P(D/A)=0.02
		P	P(D)

Determinar la probabilidad de que un envase elegido al azar no sea defectuoso. Justifica tu respuesta.

Ahora si se elige al azar un envase no defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina B?
Justifica tú respuesta.

Ejercicio II.

El parte meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:

- **Que llueva**: probabilidad del 50%.
- **Que nieve**: probabilidad del 30%
- **Que haya niebla**: probabilidad del 20%.

Según estos posibles estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente es la siguiente:

- **Si llueve**: probabilidad de accidente del 20%.
- **Si nieva**: probabilidad de accidente del 10%
- **Si hay niebla**: probabilidad de accidente del 5%.

Obtén la probabilidad de que haya ocurrido un accidente.

Justifica tú respuesta.
Si hubo un accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que este nublado? **Explica y justifica tú respuesta.**

Encuesta de Opinión

Nombre:
____Grupo:___________________

Escribe en el paréntesis la respuesta correcta:

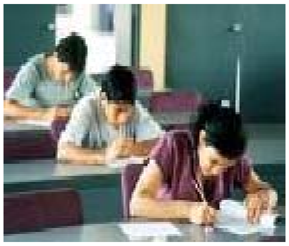
( )	Las actividades para la explicación del teorema de Bayes fueron__________para entender el tema.						
a)	Demasiadas	b)	Suficientes	c)	Escasas	d)	Otra
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	Las actividades en la explicación del teorema de Bayes fueron__________para entender el tema.						
a)	Interesantes	b)	Aburridas	c)	Motivantes	d)	Indiferentes
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	En las actividades que realizaste en equipo, las discusiones (explicaciones, opiniones etc.) con tus compañeros fueron:___________ para entender el tema.						
a)	Útiles	b)	Poco útiles	c)	Indiferentes	d)	Otra
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	Consideras que tú aprendizaje al trabajar en equipo fue_____________ que trabajando individualmente.						
a)	Mayor	b)	Igual	c)	Menor	d)	Otra
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	Consideras que al trabajar en equipo, las explicaciones del maestro son___________ que cuando se da una exposición a nivel grupal.						
a)	Más claras	b)	Igual de claras	c)	Menos claras	d)	Confunden
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	En tú experiencia, consideras que este tema se puede aprender mejor si:						
a)	Si sólo expone el maestro	b)	Si expone el maestro y se trabaja en equipo	c)	Si sólo se trabaja en equipo, con un libro de texto.	d)	Otra
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	Consideras que este tema es necesario aprenderlo para:						
a)	Sólo pasar la materia, pero no lo encuentras trascendental en tú vida cotidiana.	b)	Para pasar la materia y tiene trascendencia en tú vida cotidiana.	c)	Para pasar la materia y utilizarlo en tu vida profesional	d)	Otra
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	Consideras que este tema sólo requiere:						
a)	Repetir el procedimiento.	b)	Identificar datos y sustituirlos en la fórmula.	c)	Identificar datos, hacer una representación gráfica, aplicar este gráfico para obtener una probabilidades que no se pueden obtener directamente y por último aplicar los valores dados y obtenidos para aplicarlos en una fórmula	d)	Hacer todo lo anterior y después poder justificar el porque se obtuvo esta fórmula.
Si escribiste otra ¿Cuál?							
( )	Al analizar un texto (periódico, revista, libro de texto, etc). Puedes						
a)	Identificar que se trata de probabilidad condicional pero no puedo decir por que se relaciona	b)	Leer, pero jamás identifico nada de la probabilidad condicional	c)	Identificar que se trata de probabilidad condicional y decir por que se relaciona	d)	Identificar que se trata de probabilidad y hasta hacer diagramas de árbol sobre el artículo. Justificando porque se relaciona
Si escribiste otra ¿Cuál?							

Por último, escribe brevemente una opinión sobre las clases que fueron impartidas.

ANEXO 2

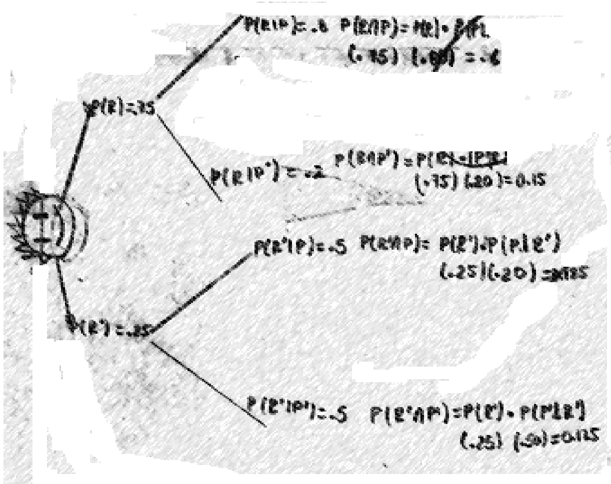
Algunos ejemplos de los resultados de los estudiantes en la secuencia didáctica para la práctica independiente.

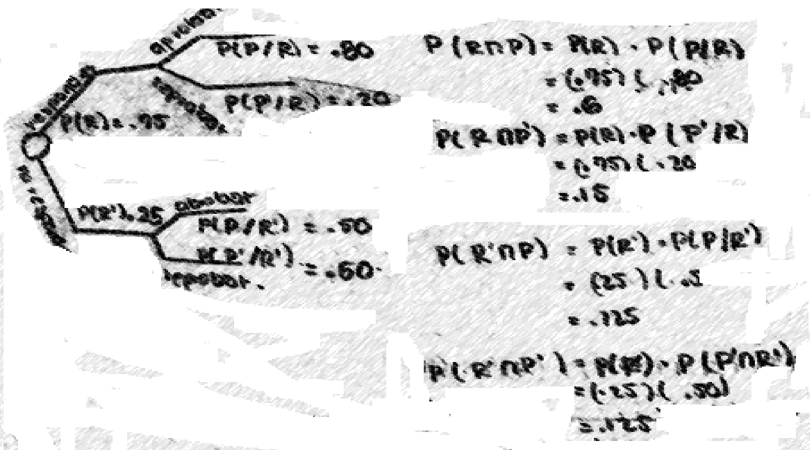
Las soluciones giran alrededor del siguiente problema.



En un examen de matemáticas sólo 75% de una clase respondió todas las preguntas. De aquellos que contestaron todo el examen aprobó el 80% pero de los que no respondieron todo sólo aprobó el 50%. Si un estudiante pasó ¿cuál es la probabilidad de que haya respondido todas las preguntas?

Representación adecuada. Diagrama de árbol.





Teorema de la probabilidad total.

$$P(R|P) = \frac{P(P\cap R)}{P(P)} = \frac{P(R)\cdot P(P/R)}{P(P)}$$

$$P(R/P) = \frac{(.75)\cdot(.8)}{.725} = \frac{.6}{.725} = .8275 = 82.7\%$$

$P(P) = P(R\cap P) + P(R'\cap P)$

$P(P) = (.6) + (.125)$

$P(P) = .725 = 72.5\%$

Obtención de la probabilidad condicional inversa. Teorema de Bayes.

$$P(R/P) = \frac{P(R) \cdot P(P/R)}{P(P)}$$

$$= \frac{(.75)(.80)}{.72.50}$$

$$= .827$$

$$= 82.7\ \%.$$

Otra forma de solucionarse, por la representación a través de la tabla de contingencia.

	$P(R) = .75$ respondieron todo el examen	$P(R') = .25$ no respondieron todo el examen
P los que aprobaron $P(P) = 0.725$	Dado de que respondieron todo el examen lo aprobaron $P(P/R) = 0.80$	dado que que no respondieron todo el examen los que aprobaron $P(P/R') = 0.50$
P' los que no aprobaron $P(P') = 0.275$	Dado de que respondieron todo el examen no lo aprobaron. $P(P'/R) = 0.20$	dado de que no respondieron todo el examen no lo aprobaron $P(P'/R') = 0.50$

$P(P) = P(R \cap P) + P(R'/P)$

$P(P) = P(R) \cdot P(P/R) + P(R') \cdot P(P/R')$

$P(P) = (0.75)(0.80) + (0.25)(0.50)$

$P(P) = 0.6 + 0.125$

$P(P) = 0.725$

$P(P') = 1 - 0.725$

$P(P') = 0.275$

$$P(R/P) = \frac{P(R \cap P)}{P(P)}$$

$$P(R/P) = \frac{P(R) \cdot P(P/R)}{P(P)}$$

$$P(R/P) = \frac{(0.75)(0.80)}{0.725} = \frac{0.6}{0.725}$$

$P(R/P) = 0.827$

$P(R/P) = 82.7\ \%$

Solución a un problema bayesiano de tres eventos

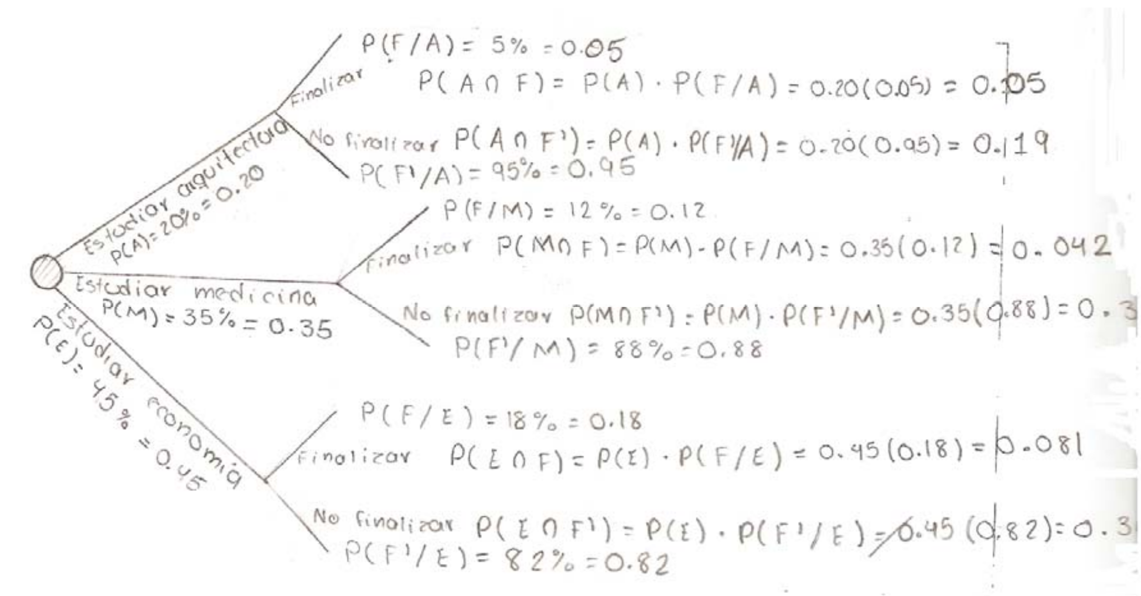
En el distrito universitario de Jauja los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20% estudian arquitectura, el 35% medicina y el 45% economía.

El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%.

a) Elegido un alumno al azar determinar la probabilidad de que haya acabado los estudios.

b) Dado que termino sus estudios haya

Representación adecuada. Diagrama de árbol.



Aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(A \cap F) + P(M \cap F) + P(E \cap F)$$

$$= P(A) \cdot P(F/A) + P(M) \cdot P(F/M) + P(E) \cdot P(F/E)$$

$$= 0.20(0.5) + 0.35(0.12) + 0.45(0.18)$$

$$= 0.01 + 0.042 + 0.081$$

$$\boxed{P(F) = 0.133}$$

$$P(F') = 1 - P(E) = 1 - 0.133 = 0.867$$

Obtención de la probabilidad condicional inversa. Teorema de Bayes.

$$P(M/F) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(F)}$$

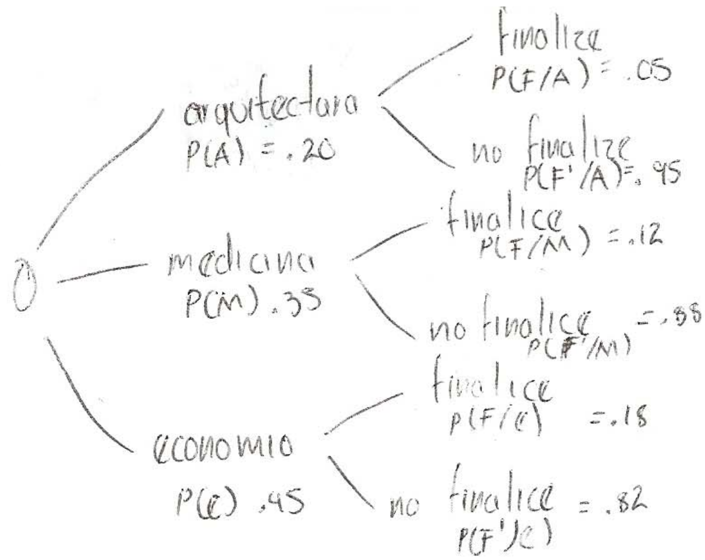
$$= \frac{(0.35)(0.12)}{0.133}$$

$$= \frac{0.042}{0.133}$$

$$= 0.315$$

$$\underline{P(M/F) = 0.315 = 31.5\%}$$

Solución por otro estudiante.
Representación adecuada. Diagrama de árbol.



$P(A\cap F) = P(A)\cdot P(F/A)$
$(.20)(.05)$
$.001$

$P(A\cap F') = P(A)\cdot P(F'/A)$
$(.20)(.95)$
$= .19$

$P(M\cap F) = P(M)\cdot (F/M)$
$(.35)(.12)$
$.042$

$P(M\cap F') = P(M)\cdot P(F'/M)$
$(.35)(.88) = .308$

$P(E\cap F) P(E)\cdot P(F/E)$
$(.45)(.18) = .81$

$P(E\cap F') = P(E)\cdot P(F'/E)$
$(.45)(.82) = .369$

Aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(A\cap F) + P(M\cap F) + P(E\cap F)$$
$$= P(A)\cdot P(F/A) + P(M)\cdot P(F/M) + P(E)\cdot P(F/E)$$
$$= .01 + .042 + .080$$
$$= .133$$
$$= 13.3\ \%$$

Probabilidad de que termine 13.3 %

Obtención de la probabilidad condicional inversa. Teorema de Bayes.

$$P(M/F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)}$$
$$P(M/F) = \frac{P(M)\cdot P(F/M)}{P(F)}$$
$$= \frac{(.35)(.12)}{.133}$$
$$= .315$$
$$= 31.5\ \%$$

Probabilidad de que finalice a estudie medicina 31.5%

Un problema resuelto para res eventos

Las ventas de vasos con café caliente de la sucursal El cafecito se reparten en las siguientes proporciones: café americano 45%, café capuchino 35% y café express 20%. La probabilidad de que una persona solicite azúcar para cada uno de ellos es de 0.2 para americano, 0.4 para capuchino y 0.1 para express. Si alguien ha solicitado un sobre de azúcar, ¿cuál es la probabilidad de que sea para un café capuchino?

Identificación de la notación de probabilidad

(r)	La probabilidad de solicitar un café americano.	k)	$P(E) = 0.20$
(b)	La probabilidad de solicitar un café capuchino.	t)	$P(A/M) = 0.2$
(k)	La probabilidad de solicitar un café express.	j)	
(t)	Expresa la Probabilidad, de que una persona solicite azúcar para un café americano.	r)	$P(M) = 0.45$
(g)	Expresa la Probabilidad, de que una persona solicite azúcar para un café capuchino.	a)	$P(C/A)$
(z)	Expresa la Probabilidad, de que una persona solicite azúcar para un café express.	b)	$P(C) = 0.35$
(a)	Expresa la Probabilidad solicitada en el problema.	c)	$P(C/A')$
		z)	$P(A/E) = 0.1$
		g)	$P(A/C) = 0.4$

Representación por tabla de contingencia

Aplicación del teorema de la probabilidad total

Tipo de café	**Americano** **Probabilidad** 0.45	**Capuchino** **Probabilidad** 0.35	**Express** **Probabilidad** 0.20
Solicitar azúcar **Probabilidad** P (A)	En palabras *La probabilidad de que dado que se solicito un café americano solicite azúcar.* Por probabilidad $P(A/M) = 0.2$	En palabras la probabilidad de que dado que se solicitó un capuchino solicite azúcar Por probabilidad P(A/C) = 0.4	En palabras la probabilidad de que dado que se solicitó un express solicite azúcar Por probabilidad P (A/E) = 0.1
No solicitar azúcar **Probabilidad** P (A')	En palabras la probabilidad dado que sea americano y no solicite azúcar Por probabilidad P(A'/M) = 0.8	En palabras la probabilidad dado que sea capuchino y no solicite azúcar Por probabilidad P (A'/C) = 0.6	En palabras la probabilidad de que sea express y no solicite azúcar Por probabilidad P (A'/E) = 0.9

$$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(C) \cdot P(A/C) + P(E) \cdot P(A/E)$$

$$P(A) = (0.45)(0.2) + (0.35)(0.4) + (0.20)(0.1)$$

$$P(A) = 0.09 + 0.14 + 0.02$$

$$P(A) = 0.25$$

$$P(A) = 25\%$$

Obtención de la probabilidad condicional inversa. Teorema de Bayes.

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$$

$$P(C/A) = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(A)}$$

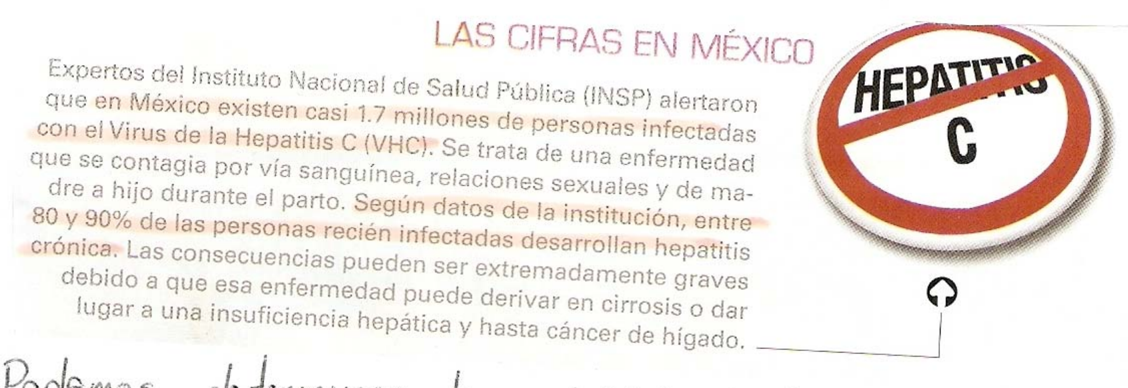
$$P(C/A) = \frac{(0.35)(0.4)}{(0.25)}$$

$$P(C/A) = \frac{0.14}{0.25}$$

$$P(C/A) = 0.56$$

$$P(C/A) = 56\%$$

Inferencia en notas periodísticas para la probabilidad condicional en dos eventos


LAS CIFRAS EN MÉXICO

Expertos del Instituto Nacional de Salud Pública (INSP) alertaron que en México existen casi 1.7 millones de personas infectadas con el Virus de la Hepatitis C (VHC). Se trata de una enfermedad que se contagia por vía sanguínea, relaciones sexuales y de madre a hijo durante el parto. Según datos de la institución, entre 80 y 90% de las personas recién infectadas desarrollan hepatitis crónica. Las consecuencias pueden ser extremadamente graves debido a que esa enfermedad puede derivar en cirrosis o dar lugar a una insuficiencia hepática y hasta cáncer de hígado.

Podemos determinar la probabilidad de desarrollar una cronica al estar o no infectado con hepatitis C.

Otra muestra.

xaca

NTIDAD CONTRADICIONES

D MONITOR

ado de Oaxaca tiene 3
nes 506 mil habitantes a
cifra que representa 135 mil
nas menos que en el año
le las cuales 35 por ciento
engua indígena.
o por ciento de las vivien-
tiene agua entubada y 40
nto no tiene drenaje, según
el Instituto Nacional de
tica, Geografía e Informá-
NEGI) al 2005.
ntidad contribuye con el 1.5
nto del Producto Interno
PIB) del país. Se localiza
gión sureste del Pacífico
no: limita al norte con Pue-
racruz, al este con Chiapas
e con Guerrero.
mbre proviene de Huax-

yacac, palabra de origen náhuatl cuyo significado es "en la nariz o en la punta de los guajes". Esto derivado de que en algún tiempo había árboles de guajes, cuyas vainas son de color rojo.

La superficie territorial es 95 mil 364 kilómetros cuadrados; lo que representa el 4.8 por ciento del total nacional, ocupando el quinto lugar del país después de Chihuahua, Sonora, Coahuila y Durango. La orografía de la entidad describe tres grandes sierras: la Sierra Madre del Sur, que se extiende a lo largo del Pacífico con una longitud de mil 200 kilómetros; la Sierra Madre Oriental –también conocida como Sierra de Oaxaca–, con una longitud de 300 kilómetros; y la Sierra Atravesada,

metros. Oaxaca cuenta con ocho regiones geoeconómicas que son: Cañada, Costa, Istmo, Mixteca, Papaloapan, Sierra Norte, Sierra Sur y Valles Centrales; la capital es considerada como Patrimonio Cultural de la Humanidad, según la UNESCO.

En la entidad conviven 16 grupos étnicos, entre ellos los amuzgos, chontales, mazatecos, mixtecos, náhuatls y zapotecos y representan a casi dos millones de los habitantes del estado.

El 54.05 por ciento de la población mayor de 12 años es considerada como económicamente activa, de ella el 98.89 por ciento se encuentra ocupada: 51.39 por ciento en el sector primario, 14.43 por

Puesto que podríamos calcular cuantas personas trabajan en el sector secundario, primario, o terciario dado que son economicamente activos ó podríamos calcular la pobabilidad de que dado que trabaja en el sector primario este sea economicament e activo.

Inferencia en notas periodísticas para la probabilidad condicional en tres eventos.

A partir de este artículo podemos sacar las probabilidades a partir de que se tienen cierta cantidad de bancos en el país unos pueden estar en mayor ventaja frente a la crisis. Así, dado que son los bancos existentes en México pueden colapsar o ir a la quiebra, o pueden sobrevivir a la crisis. Y así tendríamos o podríamos darnos una idea de como estamos ante la crisis mondial y ver que se puede hacer ante esta situación.

FINANCIAMIENTO DEL SECTOR BANCARIO EN MÉXICO
(Var. % anualizada)

Fecha	Total	a la IP
Sep 2007	23.2	29.3
Ene 2008	20.9	29.4
Jun 2008	19.5	21.5
Sep 2008	10.5	14.9

Ante una crisis bancaria como la que estamos sufriendo es cuando se ponen a prueba los modelos le desarrollo de largo plazo de las empresas y de los países. México y sus autoridades apostaron que el mejor modelo de desarrollo posible, dadas nuestras circunstancias, era que los bancos en su mayoría fueran propiedad de extranjeros.

Hasta ahora, hemos tenido relativa suert pues tenemos por casualidad que la mayoría d los bancos presentes en el país forman parte de muy reducido grupo de entidades relativament bien libradas de la crisis: HSBC, BBVA, Santander y Scotiabank.

Pero esto ha sido pura suerte, la cual no repite en el caso del segundo mayor banco d país, Banamex, cuya matriz, Citigroup, acaba ser sujeta de un colosal y polémico rescate q implica, hasta el momento, una inyección de capital en el banco por parte del gobierno de EU, de casi 45,000 mdd. que lo convierte en el mayor accionista del banco, por mucho.

Aunque quisiera, en una situación límite, en que bancos como Santander, BBVA, Scotia y HSBC estuvieran en gravísimos problema el financiamiento, que estos bancos surten a la economía mexica se paralizara (más de lo que ya está ahorita), el gobierno de Méx no podría llevar a cabo rescates como el que EU hizo de Citigrou

C2 EL UNIVERSAL

En bodega, 24% de útiles gratuitos

Locatel reporta 90 mil llamadas para aclarar dudas

Mónica Archundia

A punto de iniciar el ciclo escolar 2006-2007, 285 mil 499 paquetes de útiles escolares que otorga en forma gratuita el gobierno de la ciudad desde el 31 de julio aún permanecen en los 50 centros de distribución.

Según datos de la Secretaría de Desarrollo Social capitalina, aunque el programa de entrega masiva concluye el próximo viernes, hasta el 16 de agosto, 24% de los materiales educativos no había sido recogido por padres de familia.

Los paquetes que mayor demanda registraban hasta ese momento eran los de segundo de primaria, cuya cobertura estaba por encima del 90%, no así los de primer nivel de preescolar, con 19.7%.

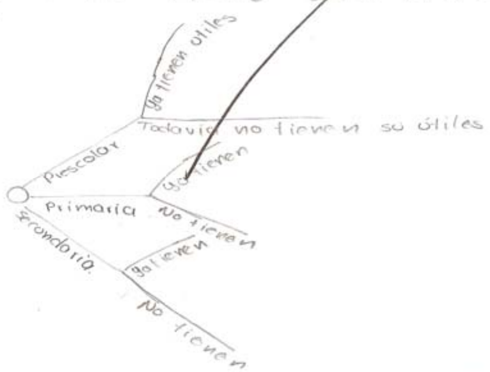
Del millón 190 mil 747 paquetes listos para su entrega, al miércoles pasado 905 mil 248 ya estaban en manos de estudiantes: 97 mil 84 de preescolar, 546 mil 171 de primaria y 261 mil 993 de secundaria.

Dichos números significan que en términos globales 62.2% de las bolsas para preescolar, 81.6% de las de primaria y 71.7% de las de secundaria habían sido recogidas por padres de familia.

El servicio de Localización Telefónica (Locatel) reportó haber acumulado, del 31 de julio al 16 de agosto, cerca de 90 mil llamadas de padres de familia con dudas sobre la forma de entrega de los paquetes o la ubicación de los centro de distribución que les corresponden.

De acuerdo con José Luis Mora

Creo que en este articulo si vemos probabilidad condicional en tres eventos. Por que los tres eventos son preescolar, primaria y secundaria, dando que son de uno de esos eventos ya tienen sus útiles. Por ejemplo los de preescolar son 97 mil 84 que es igual a 62.2%. los que tienen sus útiles lo que significa que el 27.8% todavía no tiene sus útiles



3 de 4 accidentes automovilísticos en el DF involucran a hombres, pese a la idea generalizada de que las mujeres "no saben manejar". Este tipo de incidentes ocupan el sexto lugar de mortalidad y son la primera causa de muerte de personas entre 20 y 40 años.

¿Cuál es la probabilidad de que al registrarse un accidente en la capital del país, este involucrado un hombre, y que este tenga consecuencias graves, y además este sea menor de 40 años?

BIBLIOGRAFÍA

Allen Paulos, John.(1998) *El Hombre Anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias.* 7ª. ed. Tus Queso editores TQE, España. Número total 250 p.(Serie: Metatemas. Libros para pensar ciencia. No.20)

Altorresi, Horacio; García Díaz, Alcira; Pralong, Omar: (Mayo 2008) *Sesgos en la Estimación de Probabilidades para dos situaciones aleatorias.* SUMMA Psicológica,(en línea)UST Vol 15. N1.p.p. 3-12 [citado 5 Agosto 2009]. Disponible en la World Wide Web dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2683120...0

Barragués Fuentes, José Ignacio1 y Guisasola Aranzabal, Jenaro, *La Introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios.* Enseñanza de las ciencias, 2006, 24(2) p.p.241-255 (En prensa) Vol. 24 No. 2 [citado 5 Noviembre 2008]. Disponible en la World Wide Web: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/75829/96333

Batanero, Ma. Del C; Díaz Godino, J.; Navarro-Pelayo, V. (1994) *Razonamiento Combinatorio.* (p.p.71) Serie: Educación Matemática en Secundaria. España. Síntesis

Batanero, Ma. Del C; Díaz Carmen. *Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje.* Ponencia Invitada en las *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* Granada, Julio, 2007. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.(En línea) [citado 21 mayo del 2009]. Disponible en la World Wide Web : http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/PonenciaJAEM.pdf

Batanero C. (2006) *Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana. Un desafió educativo.* En P. Flores y J Lupiañez Eds. Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar. [citado 20 de marzo de 2008]. Disponible en la World Wide Web : http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf

Castillo Arredondo, S.; Cabrerizo Diago, J. Educación (2003). *Evaluación Educativa y Promoción Escolar.* (p.p. 285-289) España. Pearson Educación

Coll, César; Pozo, Juan I.; Sarabia Bernabé, Valls Enric. (1992). *Los Contenidos de la Reforma. Enseñanza y Aprendizaje de Conceptos, Procedimientos y Actitudes*. España. Aula XXI Santillana

Coon, Dennis (2005) *Psicología*. (p.p.389) .México, Thomson.

Cuevas Acosta, Jesús Humberto; Ibañez Bernal, Carlos.(En línea) *"Estándares en educación estadística y necesidad de conocer la base teórica y empírica que lo sustentan" Revista Mexicana de Educación* Matemática Unión. Sept.2008. No.15. pag34.

Dacunha-Castelle, D. (1996) *Chemins de L'Aleatorie. Le Hasard et le Risque dans la Société Moderne*. Flammarion, Paris

Delors, Jaques (1994): "Los cuatro pilares de la educación" en *La educación encierra un tesoro*. (p.p. 91-103) El Correo de la UNESCO.

Díaz Barriga Arceo, F. Hernández Rojas Gerardo (2007), *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo.* (p.p.99-225) Una Interpretación Constructivista. México. Mc. Graw Hill

Díaz Godino, J.; Batanero, Ma. C.; Cañizares Ma. J. (1996). *Azar y Probabilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje* (p.p.11-53) España. Síntesis

Díaz, Carmen; Batanero, Carmen. *¿Cómo puede el método bayesiano contribuir a la investigación en psicología y educación?*. Paradìgma. [En línea]. dic. 2006, vol.27, no.2 [citado 29 Noviembre 2008], p.35-53. Disponible en la World Wide Web: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512006000200003&lng=es&nrm=iso>. ISSN 1011-2251.

Díaz, Carmen; Batanero, Carmen. ***Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio para alumnos de Psicología.*** (en prensa) Educación matemática ISSN 1665-5826. (2006).vol.16, no.2 [citado 8 Noviembre 2008], p.75-92. Disponible en la World Wide Web: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/edumatematDiazFuente.pdf

Eggen, Paul D. y Kauchack (2001). *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades del pensamiento*; trad. de, Dafne Mahaudy;revisión técnica de Martha Libendisky- 2°ed. México: Fondo de Cultura Económica. FCE.

Feller, W. (1983) *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. México, Limusa.*

Fernández Morales, Antonio. *"Obstáculos para la Enseñanza de la probabilidad en los estudiantes de Economía y Administración y Dirección de Empresas"*. Jornades Europees d' estadística. l' ensenyament i la difusió d l' estadística. Octubre 2001 Citado el 23 de marzo de 2009. p.p 131-143 Disponible en la World Wide Web: http://www.caib.es/ibae/altres/jornades_europees.pdf#page=129

Font, Vincenc; Godino, Juan D.;Bencomo, Delisa; Wilhelmi, Miguel R. *Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas.* Paradigma, VOL. XXVII, Nº 2, diciembre de 2006 / 221-252 En línea http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Gastwirth, Joseph. *"The statical precisionnof medical screening procedures: Aplication to polygrph and AIDS antibodies test data."* Statical Sciencie, 2, 213-218.

Gómez Chacón, Inés Ma**.** (2000**)** *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático* (p.p.159, 164.) España. Narcea S.A. de Ediciones p.p.159, 164.
Jímenez M. ,Liliana; Jímenez F, José Rafael. *¿Enseñar Probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué? Y ¿Por qué?* (en línea) Cidse. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet. ITCR Vol. 6,. No. 1[citado 19 de Mayo 2009] Disponible en la World Wide Web: http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/index.html.

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria. (2000). Secretaria de Educación Pública.p.p. 360-404.

Lonjedo, Ma. Angeles y Huerta Pedro. *La naturaleza de las Cantidades presentes en el problema de la probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución de un problema.* [en línea] http://www.uco.es/~ma1mamaa/Simposio_Cordoba/15-Lonjedo,Huerta.pdf

Kline, M. (1998) *Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades.* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Fondo de Cultura Económica, México.

Meyer, Paul L. (1992) *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.* México, Addison-Wesley Iberoamericana.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematcis*, Reston, VA:NTCM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA:NTCM.

Núñez, Félix; Sanabria Geovany y García Paulo. *Sobre la Probabilidad, lo Aleatorio y su Pedagogía.* Revista Virtual Matemática. Educación e Internet. (En línea) [citado el 27 de noviembre de 2007]. Disponible en la World Wide Web : http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV5n1Jun2004/FelixSanabriaGarcia/index.htm

*Plan de Desarrollo 2002-2006***.** (2002) México, UNAM**.**

Plan de Estudios Actualizados (1996) Colegio de Ciencias y Humanidades. Unidad Académica del ciclo de Bachillerato. UNAM, CCH, Julio 1996.

PISA para docentes (2003). La evaluación como oportunidad de aprendizaje. (p.p 22-23) Instituto Nacional Para la Evaluación de la Educación INEE, Secretaria de Educación Pública SEP.

Sánchez Corona, Octavio.(2004) *Probabilidad y Estadística*.(p.p.182-196).México, Mc Graw Hill.

Steen, Lynn Arthur (2003) *La enseñanza agradable de las matemáticas***.** (p.p.103-148) México. Limusa.

Programa de Estudios de la Asignatura de Estadística y Probabilidad de la ENP.(1996).

Programas de Estudio de la Asignatura de Estadística del Colegio de Ciencias y Humanidades. (1996)

Rossman, J. Allan; SHORT, H. Thomas. *La probabilidad condicional y la reforma educativa ¿son compatibles?* (en prensa) Journal of Statistics Education, vol. 3, No.2 [citado 8 Noviembre 2008]. Disponible en la World Wide Web: http://www.estadistica.mat.uson.mx/Articulos/rossman

Willoughby, Stephen S. (1981). *Probabilidad y Estadística*. (p.p.212) México, Cultural.

Wisniewski, Piotr M.; Velasco Sotomayor, Gabriel. (2001). *Problemario de Probabilidad*. (p.p. 55-88). México. Thomson Editores.

Zorrilla Alcalá, Juan Fidel. *Desarrollo de Habilidades Verbales y Matemáticas I*. (p.p.13-14) México .Ago Ediciones.

http://www.greenfacts.org/es/glosario/ghi/incertidumbre.htm [octubre 2008]