



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FORMAS NORMALES TOPOLÓGICAS DE
ECUACIONES DIFERENCIALES BINARIAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:**

MATEMATICO

P R E S E N T A:

MIGUEL ANGEL GUADARRAMA GARCIA



**DIRECTOR DE TESIS:
ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ
2010**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado.

1. Datos del alumno
Guadarrama
García
Miguel Angel
57 92 25 06
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
099138947
2. Datos del tutor
Dra.
Adriana
Ortiz
Rodríguez
3. Datos del sinodal 1
Dra.
Laura
Ortiz
Bobadilla
4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Ana Irene
Ramírez
Galarza
5. Datos del sinodal 3
Dr.
Héctor
Méndez
Lango
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Federico
Sánchez
Bringas
7. Datos del sinodal trabajo escrito
Formas normales topológicas de ecuaciones diferenciales binarias
2010

Agradecimientos

A mis padres, por todo el esfuerzo que día con día llevan a cabo.

A mis hermanos por toda una vida compartida.

A Adriana Ortiz por todo el apoyo y enseñanzas que me ha brindado desde el momento que se inició este trabajo de tesis.

A Laura Ortiz, Ana Irene Ramírez, Héctor Méndez y Federico Sánchez, por todas las observaciones que han hecho de este, un mejor trabajo.

A los profesores con quienes he tomado algún curso y que hacen de su trabajo un arte.

A Daniel Velázquez por haber recuperado de un disco duro descompuesto gran parte de éste trabajo y por que ha sido un placer ser su compañero de trabajo en las clases que ambos hemos tomado.

A Julio y Valente por su amistad y compañía que durante todo el tiempo que llevamos de conocernos ha sido muy preciada.

A Citlali por su amistad y por que me recordó lo importante de una sonrisa.

A Adriana González por todo el apoyo directo e indirecto en la elaboración de ésta tesis y por tu valiosa amistad.

A Carlos, Alvaro, Victor, Jorge, Leticia, Tania, Cecilia y Elizabeth, por todas las tardes, que hicieron soportables los momentos complicados y porque siempre es disfrutable su amistad.

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) por la beca que me fue otorgada del proyecto PAPIIT IN102009.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Jets de funciones y gérmenes de funciones	1
1.2. Ecuaciones diferenciales implícitas.	3
1.3. El discriminante de polinomios cúbicos.	6
2. Ecuaciones diferenciales binarias	9
2.1. La doble cubierta asociada a una ecuación diferencial binaria	9
2.1.1. El campo vectorial tangente a la superficie M	18
2.2. Formas normales de ecuaciones diferenciales binarias lineales.	22
2.2.1. Análisis cualitativo de los puntos singulares del campo ξ	26
2.3. Formas normales mediante difeomorfismos formales.	30
2.4. Acciones de grupos.	35
2.5. Formas normales topológicas.	45
2.5.1. Análisis geométrico en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 de las curvas integrales de una ecuación diferencial binaria genérica con una singularidad de tipo Morse nodo.	48
3. Aplicaciones en geometría diferencial de superficies	55
Apéndice	59
Parte I	59
Parte II	64
Bibliografía	73
Índice alfabético	74

Introducción

El estudio de ecuaciones diferenciales de la forma

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dydx + c(x, y) dx^2 = 0,$$

con a, b y c funciones continuas ha sido motivado por la geometría diferencial de superficies. Este tipo de ecuaciones son llamadas *ecuaciones diferenciales cuadráticas* o *binarias*, también son conocidas como *formas diferenciales cuadráticas*. Tales ecuaciones forman parte de una familia más grande de ecuaciones: las *ecuaciones diferenciales implícitas*.

En una superficie diferenciable genérica, casi todos sus puntos tienen asociadas dos *curvaturas principales*, que corresponden a los valores máximo y mínimo de la curvatura normal. *Direcciones principales* son las direcciones dadas por los vectores propios de la matriz asociada a la diferencial de la aplicación de Gauss (Ver [10]). En un punto umbílico la curvatura normal es constante; en consecuencia, las direcciones principales no están determinadas. Las curvas integrales del campo de direcciones (bivaluado) determinado por las direcciones principales son llamadas *líneas de curvatura*.

La curvatura gaussiana K es definida como el determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss. Todo punto de una superficie diferenciable puede ser clasificado en elíptico, hiperbólico ó parabólico de acuerdo a que la curvatura gaussiana en tal punto sea positiva, negativa o cero respectivamente. Si, además, la diferencial de la aplicación de Gauss en un punto de una superficie es idénticamente cero, el punto es llamado *umbílico plano*.

En un punto hiperbólico, las curvaturas principales tienen signos opuestos, por lo tanto existen dos direcciones, llamadas *direcciones asintóticas*, en las cuales la curvatura normal es cero. En un punto parabólico las direcciones asintóticas coinciden y en un punto elíptico no hay tales direcciones. Así, en la parte de la superficie que contiene a los conjuntos de puntos hiperbólico y de puntos parabólicos está definido un campo de direcciones bivaluado. Las curvas integrales de este campo de direcciones son llamadas *líneas asintóticas*.

Las ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura y las ecuaciones diferenciales de líneas asintóticas son ejemplos de ecuaciones diferenciales cuadráticas.

En diversos trabajos, como los de Darboux (1896), Frost (1890), Cayley (1870), Gullstrand (1904), Sotomayor y Teillo (1982), Sotomayor y Gutierrez (1991), Bruce y Fidal (1989), se dan modelos locales del comportamiento de las líneas de curvatura cerca de un punto umbílico. La clasificación es atribuida a Darboux y los nombres a Hannay (Berry y Hannay (1977) [3]) ver figura 1.

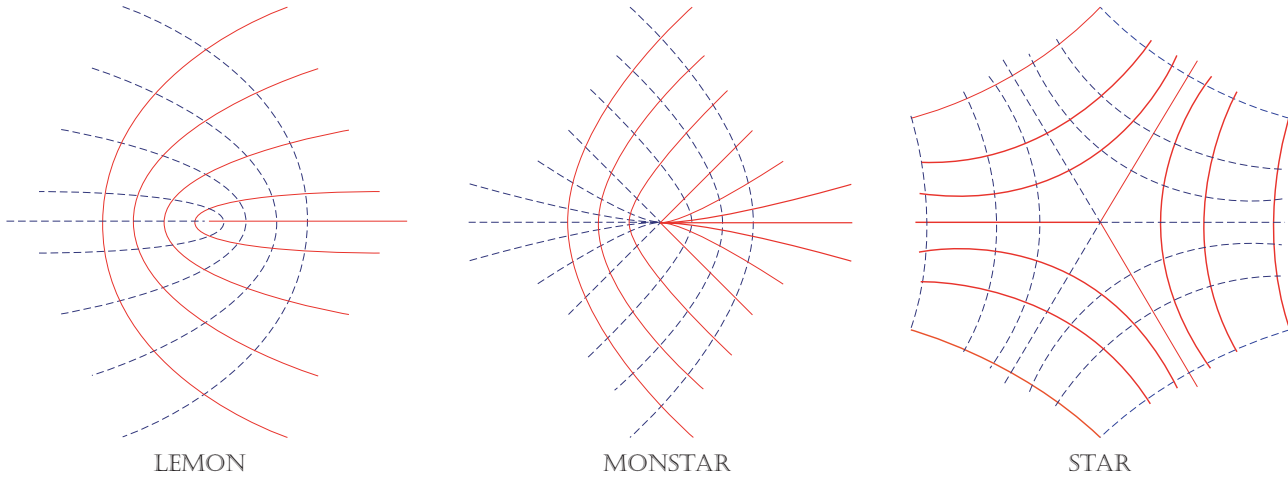


Figura 1: Formas normales caso $a=-c$

Este trabajo está basado en el artículo “On binary differential equations” de J. W. Bruce y F. Tari [7] en el cual se obtiene una clasificación topológica local de las curvas solución de una ecuación diferencial binaria en puntos en los que la función $b^2 - ac$ tiene una singularidad de Morse.

En el capítulo 1 se definen dos relaciones de equivalencia en ciertos espacios de funciones. Las clases de equivalencia son los k -jets, con $k \in \mathbb{N}$ y gérmenes de funciones, respectivamente. Un espacio de gran utilidad también es definido: *el espacio de 1-jets*. En la sección 1.2 continuamos con un estudio breve de ecuaciones implícitas $F(x, y, p) = 0$, éste incluye el método de Lie (ver [8]) el cual consiste en reemplazar la ecuación diferencial por el sistema

$$\begin{aligned} F(x, y, p) &= 0, \\ dy - pdx &= 0. \end{aligned}$$

Tal sistema produce un campo de direcciones tangente a la superficie $M = F^{-1}(0)$, definido por la ecuación $F(x, y, p) = 0$, e inducido por la 1-forma diferencial $\alpha = dy - pdx$.

En un punto singular regular (ver página 4) de la ecuación implícita $F(x, y, p) = 0$, la forma normal de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ es la ecuación $p^2 - x = 0$. Este teorema (el cual es enunciado sin prueba en la sección 1.2) fue mostrado por D. Lak (Ver [1]).

En el Capítulo 2, se consideran ecuaciones diferenciales cuadráticas binarias (a lo largo del texto las nombraremos ecuaciones diferenciales binarias) en las cuales las funciones a, b, c son diferenciables y se anulan en el origen.

En el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$, la ecuación diferencial binaria define un campo de direcciones bivaluado, el cual puede ser extendido a la frontera de este conjunto. Entonces podemos considerar $M \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ el conjunto de puntos (x, y, p) , tal que $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) \geq 0$ y p es una dirección determinada por la ecuación diferencial. Bajo ciertas condiciones M es una superficie diferenciable y la proyección canónica con dominio M y contradominio el conjunto $\{(x, y) : b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0\}$, es una aplicación cubriente con dos hojas. El campo de direcciones bivaluado se levanta a un campo vectorial univaluado ξ , tangente a M . Genéricamente,

este campo vectorial tiene en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ uno o tres puntos singulares, los cuales son de tipo nodo o silla.

Mediante difeomorfismos lineales primero (sección 2.2) y después por difeomorfismos formales (sección 2.3) se muestra que es posible llevar una ecuación diferencial binaria a una preforma normal en las que las funciones a y c sólo dependen de la variable y , mientras que la función b es una serie de potencias formal. Hechos estos cambios de coordenadas, se estudian dos familias de ecuaciones diferenciales binarias, una de ellas satisface $a = -c$ mientras que la otra cumple que $a = c$.

La clasificación topológica local de las curvas solución de la familia $a = -c$ es hecha en [5], los modelos locales coinciden con los de la figura 1.

En [12], se prueba que si una ecuación diferencial binaria puede ser escrita en la forma

$$(a_1x + a_2y + N_1(x, y)) dy^2 + (b_1x + b_2y + N_2(x, y)) dx dy + (c_1x + c_2y + N_3(x, y)) dx^2 = 0,$$

con $N_i(x, y) = O(x^2 + y^2)$, $i = 1, 2, 3$ y tal que

$$\begin{aligned} b_1^2 - 4a_1c_1 &> 0, \\ (b_1^2 - 4a_1c_1)(b_2^2 - 4a_2c_2) - (b_1b_2 - 2c_2a_1 - 2c_1a_2)^2 &> 0, \end{aligned}$$

entonces en cualquier sistema de coordenadas local del plano, la ecuación diferencial tiene esta propiedad.

En este trabajo, se explica la clasificación topológica local de las curvas integrales de ecuaciones diferenciales binarias que satisfacen la desigualdad

$$(b_1^2 - 4a_1c_1)(b_2^2 - 4a_2c_2) - (b_1b_2 - 2c_2a_1 - 2c_1a_2)^2 < 0,$$

y que además satisfacen la condición $c_1 = 0$.

En ecuaciones diferenciales binarias con estas condiciones, algunos de los cambios de coordenadas lineales propuestos en la sección 2.2 preservan la topología local de las curvas integrales. La condición $c_1 = 0$, será estrictamente necesaria hasta la sección 2.5, donde se expone el teorema de clasificación topológica local de las curvas integrales. Modelos locales para ecuaciones diferenciales con las condiciones mencionadas, se muestran en la figura 2.9.

En el capítulo 3 se obtienen formas normales topológicas de la forma diferencial cuadrática que define las direcciones asintóticas de una superficie diferenciable en la vecindad de un punto umbílico plano. La configuración de las líneas asintóticas en un punto umbílico plano, el caso b) del corolario de la página 58, fue conjeturado por David Mond en su tesis doctoral, Liverpool University 1982, p 167.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Jets de funciones y gérmenes de funciones

Definición. Sean $f_1, f_2 : A \rightarrow B$ funciones diferenciables, con $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Sea $k \geq 0$ un número entero. Decimos que las funciones f_1 y f_2 son *tangentes de orden k ó k -tangentes en un punto x_0 de A* si para cada número entero j tal que $0 \leq j \leq k$, se satisface que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f_1(x) - f_2(x)\|}{\|x - x_0\|^j} = 0.$$

Se sigue de la definición que si f_1 y f_2 son k -tangentes en x_0 , entonces $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Ejemplo 1 Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función para la cual existen todas las derivadas de orden menor o igual que k en I . Sea $x_0 \in I$ y $g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_k(x - x_0)^k$ el polinomio de Taylor de grado k para f en x_0 . Las funciones f y g son funciones k -tangentes en x_0 , esto es debido a que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^k} = 0$.

Ejemplo 2 Las funciones $f(x, y) \equiv 0$ y $g(x, y) = 1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ son funciones tangentes de orden 1 en $(0, 0)$. La afirmación es cierta pues

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} &= 0 \text{ y} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Observación. La relación de k -tangencia es una relación de equivalencia.

Demostración. La relación es claramente reflexiva y simétrica. Para ver que la relación es transitiva usaremos la desigualdad del triángulo. Sean f_1, f_2 y $f_3 : A \rightarrow B$ funciones tales que f_1 y f_2 son k -tangentes en x , f_2 y f_3 son k -tangentes en x . Si $0 \leq j \leq k$, entonces

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f_1(x) - f_3(x)\|}{\|x - x_0\|^j} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f_1(x) - f_2(x)\|}{\|x - x_0\|^j} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f_2(x) - f_3(x)\|}{\|x - x_0\|^j} = 0.$$

Por lo tanto, f_1 y f_3 son k -tangentes en x . ■

Definición. Sea $f : A \rightarrow B$ una función diferenciable con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. El *jet de orden k* (ó el k -jet) de f en un punto $x \in A$ es la clase de funciones k -tangentes a f en x , denotada por $\mathcal{J}_x^k(f) = \left\{ \widehat{f} : A \rightarrow B \mid \widehat{f} \text{ es } k\text{-tangente a } f \text{ en } x \right\}$.

La elección de coordenadas en A y B en vecindades de los puntos x y $f(x)$, respectivamente, relacionan un k -jet de f en puntos cercanos a x con los coeficientes del polinomio de Taylor de la función f de grado menor o igual que k .

Consideremos los siguientes ejemplos de jets:

Ejemplo 3 El 0-jet de $f : A \rightarrow B$ en $x \in A$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, es la pareja (x, y) con $y = f(x)$. El 1-jet de f en x está determinado por la elección del valor y de la función en x y el valor p de su derivada en x , es decir, está dado por la terna ordenada (x, y, p) donde $p = \frac{dy}{dx}$. Al espacio tridimensional con coordenadas (x, y, p) se le llama el *espacio de 1-jets de funciones $y = f(x)$* .

Definición. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq A$ vecindades de $x_0 \in A$. Dos funciones $f_1 : \Omega_1 \rightarrow B$ y $f_2 : \Omega_2 \rightarrow B$, definen el mismo *germen en x_0* si existe $\Omega \subseteq A$ una vecindad de x_0 tal que para todo $x \in \Omega$, $f_1(x) = f_2(x)$.

Cabe hacer notar que Ω en la definición anterior puede ser una vecindad de x_0 contenida en la intersección de las vecindades Ω_1 y Ω_2 .

Observación. La relación de definir el mismo germen en un punto x_0 es una relación de equivalencia en el espacio de funciones definidas en alguna vecindad de x_0 .

Demostración. La relación es reflexiva, sean $f_1 : \Omega \rightarrow B$ una función y Ω una vecindad de x_0 , entonces $f_1(x) = f_1(x), \forall x \in \Omega$. La relación es simétrica pues si $f_1 : \Omega_1 \rightarrow B$ y $f_2 : \Omega_2 \rightarrow B$ definen el mismo germen en x_0 entonces $f_1(x) = f_2(x), \forall x$ en una vecindad Ω de x_0 , se sigue que $f_2(x) = f_1(x), \forall x \in \Omega$. Por lo tanto $f_2 : \Omega_1 \rightarrow B$ y $f_1 : \Omega_2 \rightarrow B$ están relacionadas.

Sean $f_1 : \Omega_1 \rightarrow B$, $f_2 : \Omega_2 \rightarrow B$ y $f_3 : \Omega_3 \rightarrow B$ funciones con $x_0 \in \Omega_i, i = 1, 2, 3$. Tales que f_1 está relacionada con f_2 y f_2 está relacionada con f_3 . Ésto es, $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in \Omega$ y $f_2(x) = f_3(x), \forall x \in \tilde{\Omega}$. Se sigue que $f_1(x) = f_3(x), \forall x \in \Omega \cap \tilde{\Omega}$. Por lo que la relación es transitiva. En consecuencia la relación es de equivalencia. ■

El *germen de una función $f : \Omega \rightarrow B$ en x_0* es la clase de equivalencia de funciones definidas en una vecindad de x_0 que forman el mismo germen con f . A esta clase de equivalencia la denotaremos por

$$f : (\Omega, x_0) \rightarrow (B, f(x_0)).$$

Si la clase de equivalencia $f : (\Omega, x_0) \rightarrow (B, f(x_0))$, es tal que todo representante es un homeomorfismo, diremos que $f : (\Omega, x_0) \rightarrow (B, f(x_0))$ es un *germen de homeomorfismos*.

1.2. Ecuaciones diferenciales implícitas.

En esta sección consideraremos ecuaciones diferenciales implícitas de la forma

$$F(x, y, p) = 0,$$

donde F es una función de valores reales y $p = \frac{dy}{dx}$. En el espacio de 1-jets la ecuación $F = 0$ describe, en general, una superficie M . Supondremos en este apartado que la superficie M es diferenciable, en el capítulo siguiente serán impuestas condiciones sobre F , con las cuales $M = F^{-1}(0)$ es una superficie diferenciable. Ahora construiremos en la superficie M un campo tangente de direcciones.

Definición. Sea (x, y, p) un punto en el espacio de 1-jets. El plano de contacto en (x, y, p) consiste de todos aquellos vectores anclados en el punto (x, y, p) que anulan la 1-forma diferencial $\omega = dy - p dx$.

El plano de contacto para un punto (x_0, y_0, p_0) es el plano vertical, que contiene una recta paralela al eje p , cuya intersección con el plano $\{(x, y)\}$ es una recta de pendiente p_0 . En coordenadas cartesianas, está dado por la ecuación $0 = y - p_0 x + (p_0 x_0 - y_0)$.

Todo punto en el espacio de 1-jets tiene asociado su plano de contacto. Al conjunto de todos los planos de contacto le llamamos *estructura de contacto*.

La estructura de contacto define sobre $M = F^{-1}(0)$ un campo de direcciones tangente de la siguiente manera. En cada punto $(x, y, p) \in M$ la intersección del plano tangente a M en (x, y, p) con el plano de contacto en tal punto es no vacía. Si en el punto $(x, y, p) \in M$ la intersección de los planos es una recta, entonces a (x, y, p) se le asigna esta recta tangente. Si en el punto (x, y, p) los dos planos coinciden, decimos que el campo de direcciones tangente tiene una *singularidad en (x, y, p)* , pues no es posible asignarle a (x, y, p) una única recta tangente.

Definición. Las curvas integrales de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ son las curvas integrales del campo de direcciones tangente a M obtenido con la estructura de contacto.

Además de las singularidades del campo de direcciones tangente a M existen otros puntos especiales: éstos son los puntos críticos de la proyección $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x, y, p) = (x, y)$. El conjunto de puntos críticos de π son los puntos de M en los que el plano tangente es vertical.

En particular, en cada singularidad del campo de direcciones tangente a M , el plano tangente es vertical, pues coincide con el plano de contacto. Así, las singularidades del campo de direcciones tangente a M están todas en el conjunto de puntos críticos de la proyección π .

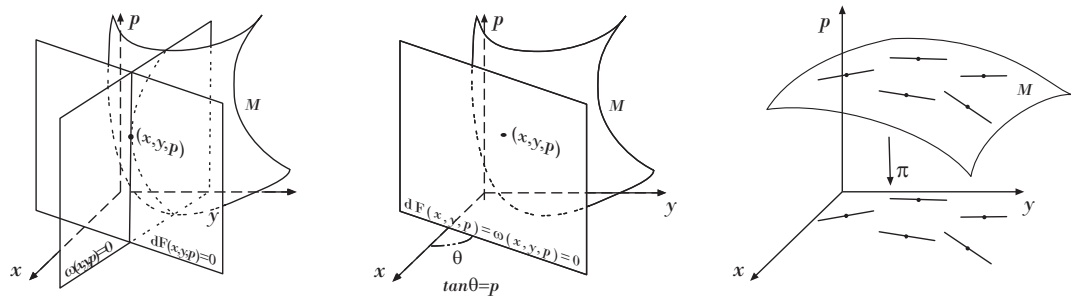


Figura 1.1: Campo de direcciones tangente a M .

Dado que los vectores $(-p, 1, 0)$ y (F_x, F_y, F_p) son normales al plano de contacto y al plano tangente a M en (x, y, p) respectivamente, el producto vectorial de este par de vectores nos da condiciones con las cuales localizar las singularidades del campo de direcciones tangente a M . El producto vectorial de este par de vectores se anula si y sólo si

$$F_p(x, y, p) = 0 \quad \text{y} \quad (F_x + pF_y)(x, y, p) = 0.$$

Y en este caso, el plano de contacto y el plano tangente a M en el punto (x, y, p) coinciden.

Observación. En general, en una superficie diferenciable M , existe al menos un punto $(x, y, p) \in M$ tal que el plano tangente $T_{(x,y,p)}M$ y el plano de contacto en (x, y, p) se intersectan transversalmente. Más aún, todos los puntos en una vecindad de (x, y, p) tienen la misma propiedad.

Definición. Decimos que (x, y, p) es un *punto singular de la ecuación* $F(x, y, p) = 0$ si (x, y, p) es un punto crítico de la proyección $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Al conjunto de valores críticos de la proyección $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ le llamaremos la *curva discriminante* de la ecuación $F(x, y, p) = 0$. Si $(x, y, p) \in M$ no es un punto crítico de π entonces (x, y, p) será llamado un *punto regular de M*.

Los puntos regulares de M son aquellos en los que el plano tangente no es vertical. Por el teorema de la función implícita la proyección π es un difeomorfismo local en cada punto regular de M . Por lo tanto, en un punto regular, M es representada por la gráfica de una función diferenciable, $p = v(x, y)$. Esta función tiene asociada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = v(x, y)$. En el plano $\{(x, y)\}$ la ecuación diferencial define un campo de direcciones, éste es dado por la ecuación $\frac{dy}{dx} = p$.

Por construcción, en un punto $(x_0, y_0, p_0) \in M$ el plano de contacto es proyectado sobre el plano $\{(x, y)\}$ en una recta de pendiente p_0 , esto es, en la recta definida por la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = v(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) . Por lo tanto, en una vecindad de un punto regular $(x_0, y_0, p_0) \in M$, el campo de direcciones tangente sobre M es llevado, mediante la proyección π , en el campo de direcciones que determina la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = v(x, y)$. De esto se tiene como consecuencia el siguiente resultado.

Teorema 1 *En una vecindad de un punto regular $(x_0, y_0, p_0) \in M$, la proyección π lleva las curvas integrales de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ en las curvas integrales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = v(x, y)$ definida en una vecindad de $(x_0, y_0) = \pi(x_0, y_0, p_0)$.*

De manera global las proyecciones de las curvas integrales de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ no necesariamente son curvas integrales de algún campo de direcciones en el plano $\{(x, y)\}$, ya que algunas proyecciones pueden tener cúspides sobre el discriminante de la ecuación $F(x, y, p) = 0$.

Ejemplo 4 Sea $F(x, y, p) = p^2 - x$. Entonces la superficie $M = \{(x, y, p) : p^2 = x\}$ es un cilindro parabólico, en este caso, la curva discriminante de la ecuación $p^2 - x = 0$ es el eje y . Como en las coordenadas (x, y) la proyección lleva dos puntos distintos del cilindro parabólico en un solo punto del plano $\{(x, y)\}$, entonces es conveniente considerar el sistema local de coordenadas (y, p) para encontrar una expresión de las curvas integrales sobre $F(x, y, p) = p^2 - x = 0$. Una condición para que un vector (dx, dy, dp) anclado en el punto $(x, y, p) \in M$ pertenezca al campo de direcciones sobre M es que sea tangente a M , esto es,

$$0 = (dx, dy, dp) \cdot \nabla F = -dx + 2pdp.$$

También debe pertenecer al plano de contacto:

$$dy = p dx.$$

Consecuentemente, en coordenadas (y, p) , las curvas integrales sobre $p^2 - x = 0$ son obtenidas de las siguientes igualdades

$$dy = p dx = 2p^2 dp.$$

Por lo tanto, las expresiones $y + c = \int 2p^2 dp = \frac{2}{3}p^3$, $x = p^2$ describen a las curvas integrales sobre $p^2 - x = 0$. Las proyecciones de estas curvas integrales al plano $\{(x, y)\}$ son las parábolas semicúbicas:

$$y + c = \frac{2}{3}p^3 = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

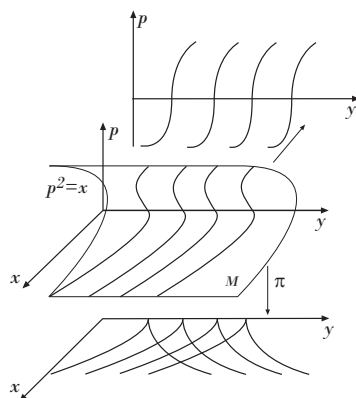


Figura 1.2: Curvas integrales del cilindro parabólico.

Por el teorema de la función implícita, los puntos singulares de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ son los que satisfacen simultáneamente las ecuaciones:

$$F(x, y, p) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial p} F(x, y, p) = 0.$$

Genéricamente, el conjunto de puntos singulares de la ecuación $F(x, y, p) = 0$, al ser la intersección de dos superficies en el espacio de 1-jets, forma una curva la cual llamaremos *criminante* de la ecuación $F(x, y, p) = 0$. Esta curva es diferenciable en una vecindad de cada uno de los puntos en los que la diferencial de la función

$$\Psi(x, y, p) = \left(F(x, y, p), \frac{\partial}{\partial p} F(x, y, p) \right)$$

tiene rango máximo, en este caso rango igual a 2.

Definición. Un punto (x, y, p) en el criminante es llamado *tangente a su plano de contacto*, si la recta tangente a la curva criminante en (x, y, p) está contenida en el plano de contacto del punto (x, y, p) .

En particular, si la recta tangente a la curva criminante en un punto (x, y, p) es paralela a la dirección p , entonces (x, y, p) es tangente a su plano de contacto. Nótese también, que las singularidades del campo de direcciones obtenido por medio de la estructura de contacto son tangentes a su plano de contacto.

Definición. Sea (x, y, p) un punto singular de la ecuación $F(x, y, p) = 0$. Decimos que (x, y, p) es un *punto singular regular*, si la diferencial de la función Ψ tiene rango máximo en (x, y, p) y este punto no es tangente a su plano de contacto.

Observación. Para una ecuación diferencial implícita genérica, casi todos los puntos singulares son regulares: los puntos singulares de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ que no son regulares son aislados.

Definición. Dos ecuaciones diferenciales implícitas son *equivalentes* si existe un difeomorfismo del plano $\{(x, y)\}$ que lleva una ecuación en la otra.

Se omite la prueba del siguiente teorema y su corolario, éstas pueden ser consultadas en [1] (pág 27-29).

Teorema 2 *Sea (x_0, y_0, p_0) un punto singular regular de la ecuación $F(x, y, p) = 0$. Entonces existe un difeomorfismo de una vecindad del punto (x_0, y_0) en el plano $\{(x, y)\}$ en una vecindad del origen del plano $\{(X, Y)\}$ que transforma la ecuación $F(x, y, p) = 0$ a una de la forma $P^2 = X$, donde $P = \frac{dY}{dX}$.*

Corolario. *Si (x_0, y_0, p_0) es un punto singular regular de la ecuación $F(x, y, p) = 0$, entonces existe una vecindad de (x_0, y_0, p_0) en donde la familia de curvas integrales de la ecuación $F(x, y, p) = 0$ es llevada en la familia de parábolas semicúbicas $y = x^{\frac{3}{2}} + c$.*

Por el teorema, existe un difeomorfismo en la vecindad de cada punto singular regular, que lleva las curvas integrales de una ecuación $F(x, y, p) = 0$ en las curvas integrales de la ecuación $p^2 = x$. Como se ha visto en el ejemplo 4, las curvas integrales del cilindro parabólico se proyectan al plano $\{(x, y)\}$ en la familia de parábolas semicúbicas $y = x^{\frac{3}{2}} + c$.

1.3. El discriminante de polinomios cúbicos.

En esta sección consideraremos polinomios con coeficientes reales mónicos de tercer grado en una variable:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Mediante la traslación $f(x) = x - \frac{1}{3}a$ (transformación de Tschirnhaus ver [6]), el polinomio $P(x)$ es transformado a un polinomio de la forma $x^3 + Ax + B$:

$$\begin{aligned} (P \circ f)(x) &= \left(x - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(x - \frac{1}{3}a\right) + c \\ &= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{3}ba + x^3 + bx + c \\ &= x^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)x + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ba + c\right). \end{aligned}$$

Proposición 3 *La transformación de Tschirnhaus deja invariante el número de raíces reales y su multiplicidad.*

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$ una raíz del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$. Entonces, $\hat{t} = t + \frac{1}{3}a$ es una raíz real del polinomio $(P \circ f)(x)$. Esto pues,

$$\left(t + \frac{1}{3}a\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)\left(t + \frac{1}{3}a\right) + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ba + c\right) = t^3 + at^2 + bt + c = 0.$$

Inversamente si s es una raíz real del polinomio $(P \circ f)(x)$, entonces $\tilde{s} = s - \frac{1}{3}a$ es una raíz real de $P(x)$. Por lo tanto, el número de raíces reales se mantiene fijo.

Una raíz t de un polinomio con coeficientes reales $g(x)$ no nulo, es de multiplicidad $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $g^{(i)}(t) = 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y $g^{(n)}(t) \neq 0$. Por lo tanto, usando este resultado se tiene que $t \in \mathbb{R}$ es una raíz de $P(x)$ de multiplicidad 1 (ó 2, ó 3) si y sólo si $\hat{t} = t + \frac{1}{3}a$ es una raíz del polinomio $(P \circ f)(x)$ de multiplicidad 1 (ó 2, ó 3). Esto se debe a que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(P \circ f)(\hat{t}) &= 3\left(t + \frac{1}{3}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right) = 3t^2 + 2at + b = \frac{d}{dx}P(t), \\ \frac{d^2}{dx^2}(P \circ f)(\hat{t}) &= 6\left(t + \frac{1}{3}a\right) = 6t + 2a = \frac{d^2}{dx^2}P(t), \\ \frac{d^3}{dx^3}(P \circ f)(\hat{t}) &= 6 = \frac{d^3}{dx^3}P(t). \end{aligned}$$

■

El conjunto de polinomios del tipo $x^3 + Ax + B$ tiene una correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos (A, B) del plano \mathbb{R}^2 . Al polinomio $x^3 + Ax + B$ se le asocia el punto (A, B) . Inversamente, al punto (C, D) en el plano se le asocia el polinomio $x^3 + Cx + D$.

Por la correspondencia entre polinomios y puntos del plano, podemos caracterizar al conjunto de polinomios de la forma $x^3 + Ax + B$ que tienen al menos una raíz con multiplicidad mayor a 1, de la siguiente manera:

$$\Lambda = \left\{ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid t^3 + At + B = 0, 3t^2 + A = 0, \text{ para alguna } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observación. El conjunto Λ es una parábola semicúbica. Esta curva divide al plano $\{(A, B)\}$ en dos subconjuntos abiertos y disjuntos. Uno de los subconjuntos corresponde al conjunto de polinomios que tienen una raíz real y dos complejas. El segundo corresponde al conjunto de polinomios que tienen tres raíces reales distintas.

Demostración. En efecto, de la condición $3x^2 + A = 0$, se obtiene $A = -3x^2$. Al sustituir este valor en la condición $x^3 + Ax + B = 0$, obtenemos que $B = 2x^3$. Las igualdades obtenidas para A y B implican que $B^2 = 4x^6$ y $A^3 = -27x^6$. Por lo tanto, se sigue la relación $\frac{B^2}{4} = x^6 = \frac{A^3}{-27}$. Equivalentemente, obtenemos

$$4A^3 + 27B^2 = 0.$$

La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = 4A^3 + 27B^2$ es continua, en consecuencia, los conjuntos

$$\begin{aligned} f^{-1}((0, \infty)) &= \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid 4A^3 + 27B^2 > 0\}, \\ f^{-1}((-\infty, 0)) &= \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid 4A^3 + 27B^2 < 0\}, \end{aligned}$$

son abiertos y disjuntos. ■

Al conjunto Λ se le conoce como el *discriminante de los polinomios cúbicos*

$$\Lambda = \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid 4A^3 + 27B^2 = 0\}.$$

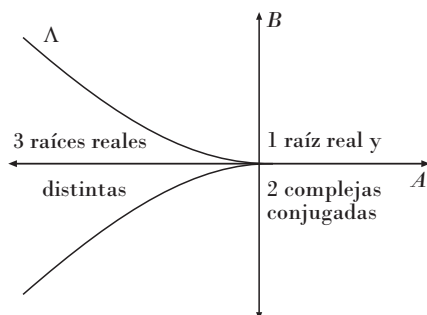


Figura 1.3: Discriminante de polinomios cúbicos

De la definición de Λ , un punto $(A, B) \in \Lambda$ si y sólo si el polinomio $t^3 + At + B$ tiene al menos una raíz de multiplicidad mayor que uno. Si un punto (A, B) pertenece a la región del plano

$$\{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid 4A^3 + 27B^2 > 0\},$$

entonces el polinomio $t^3 + At + B$ tiene dos raíces complejas conjugadas y sólo una raíz real. Por último, si el punto (A, B) pertenece a la región del plano:

$$\{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid 4A^3 + 27B^2 < 0\},$$

entonces el polinomio $t^3 + At + B$ tiene tres raíces reales distintas.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales binarias

2.1. La doble cubierta asociada a una ecuación diferencial binaria

A lo largo de este texto consideraremos *ecuaciones diferenciales binarias* (ó *cuadráticas*) de la forma

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dydx + c(x, y) dx^2 = 0, \quad (2.1)$$

en la que las funciones a, b y c son diferenciables, real valuadas, definidas en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^2$ del origen y con $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$.

Definición. A una función tal que a cada $q \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ le asigna un punto $[r_1 : r_2] \in \mathbb{R}P^1$ le llamamos *campo de direcciones en el conjunto V* . En este caso decimos que la recta que pasa por el punto $q \in V$ con vector de dirección (r_1, r_2) (ó cualquiera de sus múltiplos) pertenece al campo de direcciones. Usualmente expresamos un campo de direcciones mediante una ecuación de la forma:

$$r(x, y) \frac{dy}{dt} + s(x, y) \frac{dx}{dt} = 0, \quad (2.2)$$

lo que significa que al punto $(x, y) = q$ le asociamos la recta que pasa por $q \in U$ con vector de dirección $(r(x, y), -s(x, y))$.

De manera breve escribiremos la ecuación (2.2) como $r(x, y) dy + s(x, y) dx = 0$.

Lema 1 *Una ecuación diferencial binaria de la forma (2.1) define dos campos de direcciones en el conjunto $U = \{(x, y) \in V \mid b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0\}$.*

Demostración. Supongamos primero que $a(x, y) = 0$ en el punto $(x, y) \in U$. Entonces la ecuación (2.1) es de la siguiente forma:

$$dx(2b(x, y) dy + c(x, y) dx) = 0.$$

Así, $dx = 0$ define una dirección en (x, y) . Como $b^2(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$ entonces $b(x, y) \neq 0$, por lo tanto, la expresión $2b(x, y) dy + c(x, y) dx = 0$ define la segunda dirección en (x, y) .

Notemos que si $a(x, y) \neq 0$ y $dx = 0$ en el punto $(x, y) \in U$, entonces en este punto se satisface $a(x, y) dy^2 = 0$, lo que implica que en (x, y) la otra dirección es $dy = 0$.

Ahora supongamos que $a(x, y) \neq 0$ y $dx \neq 0$ en $(x, y) \in U$. Por lo tanto, tenemos de (2.1) que

$$dx^2 \left(a(x, y) \frac{dy^2}{dx^2} + 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + c(x, y) \right) = 0.$$

Sea $p = \frac{dy}{dx}$. Como $dx \neq 0$, entonces la ecuación anterior se satisface si y sólo si:

$$a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0. \quad (2.3)$$

Las soluciones a la ecuación cuadrática (2.3) están dadas por:

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a} \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac} \right).$$

Por lo tanto, en puntos (x, y) tales que $a(x, y) \neq 0$, los campos de direcciones definidos por la ecuación (2.1) son:

$$\begin{aligned} a(x, y) dy + \left(b(x, y) + \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)} \right) dx &= 0, \\ a(x, y) dy + \left(b(x, y) - \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)} \right) dx &= 0. \end{aligned}$$

■

Definición. Sea $a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dydx + c(x, y) dx^2 = 0$ una ecuación diferencial binaria. Considérese la función $\Delta : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$. El conjunto de puntos $(x, y) \in V$ tales que $\Delta(x, y) = 0$ es llamado *el discriminante de la ecuación diferencial binaria*.

Así definido, el discriminante de una ecuación diferencial binaria, forma una curva con una singularidad en $(0, 0)$ (es decir, la función $\Delta(x, y)$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial \Delta(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta(x, y)}{\partial y}$ se anulan en $(0, 0)$). En algunos casos, el discriminante consiste únicamente de un punto.

Definición. Decimos que un punto $(x, y) \in V$ es un *punto singular de la ecuación diferencial binaria* (2.1) si $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$.

Obsérvese que los puntos singulares de una ecuación diferencial binaria pertenecen al discriminante. En estos puntos, toda dirección (dx, dy) satisface trivialmente la ecuación (2.1).

Proposición 4 *Los campos de direcciones definidos en U por una ecuación diferencial binaria pueden ser extendidos al conjunto $\{(x, y) \in V \mid b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) \geq 0\}$. Mas aún, los campos de direcciones se extienden de tal forma que coinciden en el discriminante $\Delta(x, y) = 0$.*

Demostración. Un punto singular de una ecuación diferencial binaria es también un punto singular de los campos de direcciones. Por lo tanto, basta ver que cada punto del discriminante que no es un punto singular de la ecuación diferencial binaria tiene una única dirección definida.

Sea (x_0, y_0) un punto en la curva discriminante, el cual no es un punto singular de una ecuación diferencial binaria. Si $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$ es una sucesión convergente a (x_0, y_0) , entonces las dos direcciones definidas en cada punto de la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen a la misma dirección en (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a(x_n, y_n) dy + \left(b(x_n, y_n) \pm \sqrt{b^2(x_n, y_n) - a(x_n, y_n)c(x_n, y_n)} \right) dx \right) \\
 &= a(x_0, y_0) dy + b(x_0, y_0) dx.
 \end{aligned}$$

■

A la pareja de campos de direcciones definidos en $\{(x, y) \in V \mid b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) \geq 0\}$ le llamamos *campo de direcciones bivaluado*.

Observación. En el conjunto de puntos $(x, y) \in V$ tales que $\Delta(x, y) < 0$ no hay direcciones reales definidas por una ecuación diferencial binaria, ya que en este caso las soluciones de la ecuación (2.3) son complejas.

Considérese una ecuación diferencial binaria de la forma (2.1) y un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}P^1$. Sea \widehat{M} el subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ definido de la siguiente manera:

$$\widehat{M} = \{((x, y), [\alpha : \beta]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : a(x, y)\alpha^2 + 2b(x, y)\alpha\beta + c(x, y)\beta^2 = 0\}.$$

Si algún punto $(x, y) \in V$ es un punto singular de una ecuación diferencial binaria (esto es, a, b, c se anulan en (x, y)), entonces \widehat{M} contiene a $\{(x, y)\} \times \mathbb{R}P^1$. En particular $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset \widehat{M}$.

Por el lema 1, para cada pareja $(x, y) \in U$, hay dos direcciones $[\alpha_1 : \beta_1], [\alpha_2 : \beta_2] \in \mathbb{R}P^1$ tales que $((x, y), [\alpha_1 : \beta_1])$ y $((x, y), [\alpha_2 : \beta_2])$ pertenecen a \widehat{M} . Así, el conjunto \widehat{M} constituye una doble cubierta de U .

Llamaremos a \widehat{M} la *doble cubierta de la ecuación diferencial binaria* (2.1).

Tomando $p = \frac{dy}{dx}$, $dx \neq 0$ se elige una carta afín de la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$. Entonces, en el espacio de 1-jets definimos la función diferenciable

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y).$$

La ecuación implícita $F(x, y, p) = 0$ define el conjunto

$$M = \{((x, y), p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ap^2 + 2bp + c = 0\}.$$

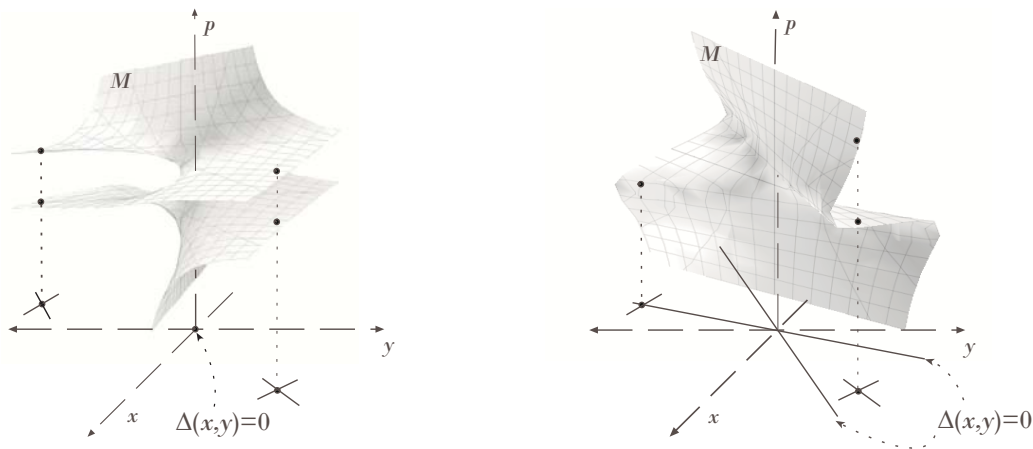


Figura 2.1: Localmente, \widehat{M} es una superficie en el espacio de 1-jets.

Si bien M es un subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$, de manera local lo podemos considerar como una superficie en \mathbb{R}^3 (Ver figura 2.1). De manera similar a \widehat{M} , si $(x, y) \in U$, existen $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y, p_i) \in M, i = 1, 2$. En cambio, si (x, y) es un punto en el discriminante que no es un punto singular de la ecuación diferencial binaria, entonces existe un único $p \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, p) \in M$. Si (x, y) es un punto singular de la ecuación diferencial binaria, se tiene que $\{(x, y)\} \times \mathbb{R} \subset M$.

Definición. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Decimos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es una singularidad de tipo Morse de f si x_0 es un punto crítico de f no degenerado.

En particular, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que f tiene una singularidad de tipo Morse en (x_0, y_0) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$
2. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) (x_0, y_0) \neq 0.$

La condición 2 es equivalente a que la matriz

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

sea no singular. Como la matriz D es simétrica, entonces tiene valores propios reales. Si ambos valores propios son positivos, entonces (x_0, y_0) es un punto mínimo de f ; si ambos son negativos entonces (x_0, y_0) es un punto máximo de f y si un valor es positivo y el restante negativo, entonces (x_0, y_0) es un punto silla de f .

Sean $a_1 = \frac{\partial}{\partial x}a(0, 0)$, $a_2 = \frac{\partial}{\partial y}a(0, 0)$, $b_1 = \frac{\partial}{\partial x}b(0, 0)$, $b_2 = \frac{\partial}{\partial y}b(0, 0)$, $c_1 = \frac{\partial}{\partial x}c(0, 0)$ y $c_2 = \frac{\partial}{\partial y}c(0, 0)$, los coeficientes del polinomio de Taylor de primer grado para las funciones a, b y c . En el resto de este texto supondremos que las funciones a, b y c están dadas de la siguiente forma: $a(x, y) = a_1x + a_2y + O(2)$, $b(x, y) = b_1x + b_2y + O(2)$ y $c(x, y) = c_1x + c_2y + O(2)$.

Proposición 5 La superficie M es diferenciable en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ si y sólo si la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ tiene una singularidad de tipo Morse en $(0, 0)$.

Demostración. Los puntos (x, y, p) en los cuales M no es una superficie diferenciable son aquéllos que satisfacen $F_x(x, y, p) = F_y(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$, pues en este caso la diferencial de F no es suprayectiva y en consecuencia 0 no es un valor regular de F .

Como $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$, entonces todo punto en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ anula a $F_p(x, y, p) = 2pa(x, y) + 2b(x, y)$. Se sigue que M no es una superficie diferenciable en algún punto de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ si y sólo si las expresiones

$$\begin{aligned} F_x(0, 0, p) &= a_1p^2 + 2b_1p + c_1, \\ F_y(0, 0, p) &= a_2p^2 + 2b_2p + c_2, \end{aligned}$$

se anulan simultáneamente para algún p . Si consideramos las expresiones $F_x(0, 0, p)$ y $F_y(0, 0, p)$ como polinomios en p , entonces estos polinomios tienen una raíz común si y sólo si el resultante R se anula,

$$R = \begin{vmatrix} c_1 & 2b_1 & a_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 2b_1 & a_1 \\ c_2 & 2b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 2b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

El determinante R es igual a cero si y sólo si

$$a_1^2 c_2^2 - 2a_1 a_2 c_1 c_2 + a_2^2 c_1^2 - 4a_1 b_2 b_1 c_2 + 4a_1 b_2^2 c_1 + 4a_2 b_1^2 c_2 - 4a_2 b_1 b_2 c_1 = 0.$$

Esta expresión es equivalente a la siguiente

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0. \quad (2.4)$$

Por otro lado, la expansión en serie de Taylor de orden 2 de la función $\Delta(x, y)$ es

$$b^2 - ac = (b_1^2 - a_1 c_1) x^2 + (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2) xy + (b_2^2 - a_2 c_2) y^2 + O(2). \quad (2.5)$$

La parte cuadrática de $b^2 - ac$ es degenerada si y sólo si la matriz A de derivadas parciales de segundo orden es singular.

$$A = \begin{pmatrix} 2(b_1^2 - a_1 c_1) & (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2) \\ (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2) & 2(b_2^2 - a_2 c_2) \end{pmatrix}.$$

Mediante un cálculo directo podemos ver que el determinante de A es

$$\begin{aligned} & 4(b_1^2 - a_1 c_1)(b_2^2 - a_2 c_2) - (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2)^2 \\ &= -a_1^2 c_2^2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 - a_2^2 c_1^2 + 4a_1 b_1 b_2 c_2 - 4a_1 b_2^2 c_1 - 4a_2 b_1^2 c_2 + 4a_2 b_1 b_2 c_1 \\ &= -(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, el determinante de A se anula si y sólo si

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0.$$

De (2.4) y (2.6) tenemos que $R = 0$ si y sólo si $\det A = 0$. En consecuencia la función Δ tiene una singularidad de Morse en el origen si y sólo si M es diferenciable en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Así, usando el teorema de la función implícita, M es diferenciable en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. ■

En el espacio real de seis dimensiones cuyas coordenadas son los parámetros $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$, el conjunto de puntos que satisface (2.4) es un conjunto de medida cero. Así, généricamente, dada una ecuación diferencial binaria, ésta define una superficie diferenciable M y en tal caso la función Δ tiene una singularidad de Morse en el origen. En lo siguiente, supondremos que la ecuación (2.1) satisface que la función Δ tiene una singularidad de Morse en el origen.

Proposición 6 *La proyección $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x, y, p) = (x, y)$, es localmente un difeomorfismo en puntos $(x, y, p) \in M$ tales que $\Delta(\pi(x, y, p)) \neq 0$.*

Demostración. Consideremos dos casos:

- a) En puntos $(x', y', p') \in M$ tales que $F_p(x', y', p') \neq 0$, el teorema de la función implícita asegura que existe una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^2$ de (x', y') y una función diferenciable $g : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y, g(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in V$. En estas condiciones, la función g es localmente la inversa de $\pi|_W$, siendo W un abierto en M tal que $(x', y', p') \in W$. Como las funciones g y $Id|_W$ son diferenciables y $g \circ \pi|_W = Id|_W$, entonces π es una función diferenciable en W , y por lo tanto, un difeomorfismo local en puntos de M que satisfacen que $F_p \neq 0$.

b) En los puntos tales que $F_p(x, y, p) = 0$, el plano tangente $T_q M$ a la superficie M en el punto $q = (x_0, y_0, p_0)$ es el conjunto $T_q M = \{(x, y, p) \mid \nabla F(q) \cdot (x - x_0, y - y_0, p - p_0) = 0\}$. Si $F_p(q) = 0$, el vector $w = (0, 0, p - p_0) \in T_q M$. Si además $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ es una curva en M , esto es, $\alpha(I) \subseteq M$, con $I = (-\epsilon, \epsilon)$ la cual satisface que $\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = w$, entonces la diferencial $d\pi_q : T_q M \longrightarrow T_{\pi(q)} \mathbb{R}^2$ de π en q cumple que

$$d\pi_q(w) = d(\pi \circ \alpha) = \left. \frac{d}{dt} (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \right|_{t=0} = (0, 0).$$

Esto demuestra que $w \neq 0$ está en el $\ker(d\pi_q)$. Por lo tanto, $d\pi_q$ no es un isomorfismo y en consecuencia π no es un difeomorfismo local.

■

La proyección $\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ no es un difeomorfismo local en puntos $(x, y, p) \in M$ que satisfacen $F = F_p = 0$. Tales puntos se proyectan mediante π en puntos del discriminante $\Delta(x, y) = 0$. Así, el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ contiene al conjunto de valores críticos de la proyección π (Ver definición en la página 4)

Observación. Si tomamos la carta afín de la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$, $q = \frac{dx}{dy}$, con $dy \neq 0$, entonces se define la función $G(x, y, q) = c(x, y)q^2 + 2b(x, y)q + a(x, y)$, y se tienen resultados semejantes a los dados en las proposiciones 5 y 6 :

Proposición 7 *La superficie $N = G^{-1}(0)$ es diferenciable en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ si y sólo si la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ tiene una singularidad de tipo Morse en $(0, 0)$.*

Proposición 8 *La proyección $\bar{\pi} : N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\bar{\pi}(x, y, q) = (x, y)$, es localmente un difeomorfismo en puntos $(x, y, q) \in M$ tales que $\Delta(\pi(x, y, q)) \neq 0$.*

La prueba para cada una de éstas proposiciones es análoga a la demostración de las proposiciones 5 y 6, respectivamente.

Lema 2 *Supongamos que el origen es una singularidad de tipo Morse de la función Δ . Entonces $(0, 0)$ tiene una vecindad en la que el único punto singular de la ecuación diferencial binaria (2.1) es $(0, 0)$.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos singulares de una ecuación diferencial binaria la cual converge al origen. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a(x_n, y_n) = b(x_n, y_n) = c(x_n, y_n) = 0$. Por lo tanto, las derivadas parciales de Δ se anulan en todos los puntos de la sucesión:

$$\begin{aligned} \Delta_x(x_n, y_n) &= (2bb_x - a_x c - ac_x)(x_n, y_n) = 0, \\ \Delta_y(x_n, y_n) &= (2bb_y - a_y c - ac_y)(x_n, y_n) = 0. \end{aligned}$$

Se concluye que para cada $n \in \mathbb{N}$, (x_n, y_n) es un punto crítico de la función Δ . Entonces tenemos una sucesión de puntos críticos de la función Δ la cual se acumula en el origen. Esto es una contradicción, pues el origen es una singularidad de Morse de Δ y por lo tanto es una singularidad aislada. ■

Como consecuencia del lema podemos suponer que el origen es el único punto singular de una ecuación diferencial binaria en una vecindad del origen.

Se ha mencionado que en general el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ es una curva con una singularidad en el origen. Debido a que la función Δ tiene en el origen una singularidad de Morse, como punto de la curva, el origen es una singularidad que puede ser sólo de dos tipos. Para ver esto, usaremos la teoría de contacto con rectas.

Definición. Sean $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Decimos que γ y $g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ tienen *contacto de orden k en un punto $p = \gamma(t_0)$* , $t_0 \in I$ si la función $G(t) = (g \circ \gamma)(t)$ satisface $G(t_0) = G^{(1)}(t_0) = G^{(2)}(t_0) = \dots = G^{(k-1)}(t_0) = 0$ y $G^{(k)}(t_0) \neq 0$.

Estamos interesados en el caso que la curva regular γ sea una recta que pasa por un punto $x \in g^{-1}(0)$ con $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. De esta forma, el orden de contacto entre γ y $g^{-1}(0)$ es mayor o igual que 1.

Definición. Sea $x \in g^{-1}(0)$, diremos que x *tiene multiplicidad l sobre $g^{-1}(0)$* si se cumplen las condiciones siguientes:

1. Si γ es cualquier recta que pasa por x tal que γ y $g^{-1}(0)$ tienen orden de contacto k , entonces $l \leq k$.
2. Existe una recta $\hat{\gamma}$ que pasa por x tal que $\hat{\gamma}$ y $g^{-1}(0)$ tienen orden de contacto l .

Definición. Sea $x \in g^{-1}(0)$ un punto de multiplicidad l . Una *recta tangente a $g^{-1}(0)$ en x* es una recta que pasa por x tal que el orden de contacto con $g^{-1}(0)$ es mayor o igual que $l + 1$.

Obsérvese que un conjunto $g^{-1}(0)$ puede tener más de una recta tangente en un punto x .

Ahora podemos saber cuáles son los tipos de singularidades que tiene la curva discriminante. En el contexto anterior Δ toma el papel de g y $\Delta^{-1}(0)$ es la curva discriminante de una ecuación diferencial binaria.

Sea $\gamma_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma_m(t) = (t, mt)$, $m \in \mathbb{R}$, una parametrización de una recta de pendiente m , la cual pasa por el origen. Sea $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $G(t) = (\Delta \circ \gamma_m)(t)$. De (2.5) se sigue que

$$G(t) = (b_1^2 - a_1c_1)t^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)mt^2 + (b_2^2 - a_2c_2)m^2t^2 + O(t^3).$$

Si $t = 0$ se tiene que $\gamma_m(0) = (0, 0)$ por lo que se satisface $G(0) = (\Delta \circ \gamma_m)(0) = \Delta(0, 0) = 0$. De manera similar podemos ver que la función $G(t)$ se anula en $t = 0$. Esto pues:

$$G'(t) = 2(b_1^2 - a_1c_1)t + 2(2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)mt + 2(b_2^2 - a_2c_2)m^2t + O(t^2).$$

Así, para todo $m \in \mathbb{R}$, la recta $\gamma_m(t)$ tiene un orden de contacto igual a uno con $\Delta^{-1}(0)$. De esto tenemos que la multiplicidad de $(0, 0)$ sobre $\Delta^{-1}(0)$ es igual a 1. Así que, $\Delta^{-1}(0)$ tiene al menos una recta tangente en el origen si existe una recta que tiene orden de contacto con $\Delta^{-1}(0)$ mayor o igual a dos.

Como

$$G^{(2)}(t) = 2(b_1^2 - a_1c_1) + 2(2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)m + 2(b_2^2 - a_2c_2)m^2 + O(t).$$

Si $(b_2^2 - a_2c_2) \neq 0$, entonces la igualdad $G^{(2)}(0) = 0$ se satisface si y sólo si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 = 2(b_1^2 - a_1c_1) + 2(2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)m + 2(b_2^2 - a_2c_2)m^2. \quad (2.7)$$

Como se ha supuesto que la función Δ tiene una singularidad de Morse en el origen, entonces la expresión (2.6) es distinta de cero. En consecuencia, la ecuación cuadrática (2.7) tiene dos soluciones distintas.

Es necesario considerar también el orden de contacto de la recta $\gamma(t) = (0, t)$. En este caso:

$$\begin{aligned} G(t) &= (\Delta \circ \gamma)(t) = (b_2^2 - a_2c_2)t^2 + O(t^3), \\ G'(t) &= 2(b_2^2 - a_2c_2)t + O(t^2), \\ G^{(2)}(t) &= 2(b_2^2 - a_2c_2) + O(t). \end{aligned}$$

En $t = 0$, $G(t) = 0 = G'(t)$. Si $2(b_2^2 - a_2c_2) \neq 0$, entonces la ecuación (2.7) es efectivamente de grado 2 y no hay cambio en las conclusiones obtenidas. Si $2(b_2^2 - a_2c_2) = 0$, entonces (2.7) es de grado 1 y las rectas tangentes son $\gamma(t) = (0, t)$ y $\gamma_{m_0}(t) = (t, m_0t)$ con m_0 solución de

$$0 = 2(b_1^2 - a_1c_1) + 2(2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)m.$$

En cualquier caso, si (2.6) es menor a cero, entonces existen dos rectas $\gamma_{m_1}(t), \gamma_{m_2}(t)$ que tienen orden de contacto con $\Delta(x, y) = 0$ mayor o igual que dos. Como las rectas $\gamma_{m_1}(t)$ y $\gamma_{m_2}(t)$ con $\Delta(x, y) = 0$ tienen orden de contacto mayor a la multiplicidad de $(0, 0)$, entonces ambas son rectas tangentes al discriminante $\Delta(x, y) = 0$ en $(0, 0)$.

Si el conjunto $\Delta^{-1}(0)$ tiene dos rectas tangentes distintas en el origen, entonces decimos que el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ tiene un nodo en el origen. En este caso, en una vecindad del origen el discriminante consiste dos curvas que se cruzan (Ver figura 2.2(a)).

Si (2.6) es mayor a cero, entonces no hay raíces reales de la ecuación cuadrática (2.7). Podemos pensar que $\Delta(x, y) = 0$ tiene dos rectas tangentes complejas en $(0, 0)$. En este caso, decimos que el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ es un punto aislado, esto es, el origen es una componente conexa de la curva $\Delta(x, y) = 0$ (Ver figura 2.2(b)).

Lema 3 *Si el discriminante de una ecuación diferencial binaria es un punto aislado en una vecindad del origen, entonces $\pi^{-1}(\Delta(x, y) = 0) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Si el discriminante tiene un nodo en el origen entonces $\pi^{-1}(\Delta(x, y) = 0)$ consiste de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ junto con dos curvas que intersecan a $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ en dos puntos.*

Demostración. Recordemos que $\pi(x, y, p) = (0, 0)$ si y sólo si $x = y = 0$, por lo que $\pi^{-1}(\{(0, 0)\}) = \{(0, 0, p)\} = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Si la curva $\Delta(x, y) = 0$ es un nodo en el origen, se tienen dos rectas tangentes distintas en $(0, 0)$, entonces el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ en una vecindad del origen consta de dos ramas las cuales se

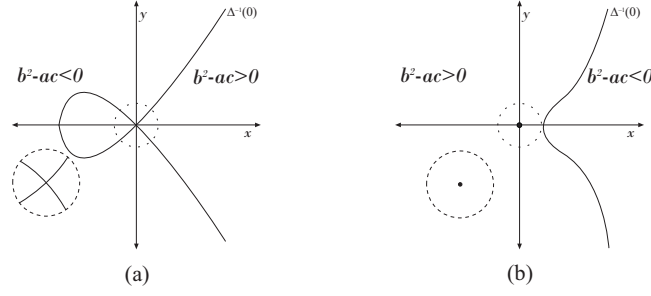


Figura 2.2: Tipos de singularidades en el origen de la curva discriminante.

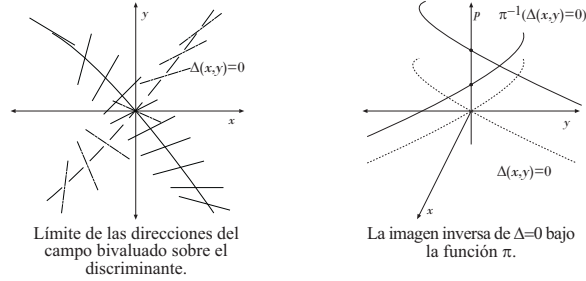


Figura 2.3: Discriminante tipo nodo y su imagen inversa.

intersectan transversalmente en $(0, 0)$. Si $\delta_1(t)$ es una de estas ramas entonces existe una dirección $[dx : dy] \in \mathbb{R}P^1$ la cual es el límite cuando t tiende a 0 de las direcciones definidas por la ecuación diferencial (2.1) a lo largo de $\delta_1(t)$.

Supongamos que la recta $y = m_1 t$ es la recta tangente a $\delta_1(t)$ en $t = 0$. Analizaremos el comportamiento de las direcciones definidas por (2.1) en la recta $y = m_1 t$, pues ésta nos da una buena aproximación del comportamiento de las direcciones definidas por (2.1) en $\delta_1(t)$ si $t \rightarrow 0$. Las direcciones definidas en $\Delta(x, y) = 0$ están dadas por

$$p = \frac{-b(x, y)}{a(x, y)} = -\frac{b_1 x + b_2 y + O(\|(x, y)\|^2)}{a_1 x + a_2 y + O(\|(x, y)\|^2)}.$$

Luego, si $\gamma_{m_1}(t) = (t, m_1 t)$ entonces

$$p \circ \gamma_{m_1}(t) = \frac{-b(t, m_1 t)}{a(t, m_1 t)} = -\frac{b_1 t + b_2 m_1 t + O(\|(x, y)\|^2)}{a_1 t + a_2 m_1 t + O(\|(x, y)\|^2)}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{t \rightarrow 0} p \circ \gamma_{m_1}(t) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{b_1 t + b_2 m_1 t + O(\|(x, y)\|^2)}{a_1 t + a_2 m_1 t + O(\|(x, y)\|^2)} = -\frac{b_1 + b_2 m_1}{a_1 + a_2 m_1}.$$

Se sigue que, $[dx : dy] = [a_1 + a_2 m_1 : -(b_1 + b_2 m_1)]$ es la dirección límite en $(0, 0)$.

De manera similar podemos ver que la dirección $[dx : dy] = [a_1 + a_2 m_2 : -(b_1 + b_2 m_2)]$ es el límite cuando t tiende a 0 de las direcciones definidas por la ecuación diferencial (2.1) a lo largo de $\delta_2(t)$, la segunda rama de $\Delta(x, y) = 0$ en una vecindad de $(0, 0)$. ■

2.1.1. El campo vectorial tangente a la superficie M .

Definición. Supóngase que la superficie M es diferenciable. A un campo vectorial ξ tangente a M le llamamos *levantamiento de la ecuación (2.1)*, o *levantamiento del campo bivaluado determinado por la ecuación diferencial binaria* si $d\pi|_{(x,y,p)}(\nu)$ es una recta de pendiente p en el punto (x, y) , para todo punto $(x, y, p) \in M$ y para todo vector $\nu \in \xi$

Proposición 9 *El campo vectorial*

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

es un levantamiento del campo de direcciones bivaluado en una vecindad del origen.

Demostración. El vector $(F_p, pF_p, -(F_x + pF_y))$ es claramente tangente a M en (x, y, p) pues

$$(F_p, pF_p, -F_x - pF_y) \cdot (F_x, F_y, F_p) = 0.$$

La diferencial de π en (x, y, p) transforma al vector $(F_p, pF_p, -(F_x + pF_y))$ en el vector (F_p, pF_p) anclado en (x, y) y este último genera una recta de pendiente p en el punto (x, y) . ■

Proposición 10 *El campo vectorial ξ en M tiene genéricamente uno o tres puntos singulares en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$, los cuales son del tipo nodo o silla.*

Demostración. Los puntos singulares de ξ en M son aquellos puntos (x, y, p) que satisfacen cada una de las tres igualdades siguientes: $F(x, y, p) = 0$, $F_p(x, y, p) = 0$, $(F_x + pF_y)(x, y, p) = 0$.

Se ha notado que el sistema $F(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$, se satisface en la imagen inversa del discriminante $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$. Por lo tanto, los puntos singulares del campo ξ en M se proyectan bajo π en puntos del conjunto $\Delta(x, y) = 0$. Consideraremos primero los puntos singulares ξ que están en la fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Como $F(0, 0, p) = 0 = F_p(0, 0, p)$, los puntos singulares de ξ en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ están dados por la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(0, 0, p) + pF_y(0, 0, p) \\ &= a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1 \\ &= \phi(p). \end{aligned}$$

El conjunto discriminante de los polinomios cúbicos $\phi(p)$, formado por los polinomios con una raíz real repetida, es un conjunto de medida cero en el espacio real de seis dimensiones cuyas coordenadas son los parámetros $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$. Genéricamente, un polinomio $\phi(p)$ tiene una raíz real o bien tres raíces reales distintas.

En lo siguiente, vamos a considerar ecuaciones diferenciales binarias tales que el polinomio $\phi(p)$ tiene una o tres raíces reales distintas.

Sea p_1 una raíz de ϕ , entonces $\phi(p_1) = (F_x + p_1F_y)(0, 0, p_1) = 0$. Afirmamos que $F_y(0, 0, p_1) \neq 0$. Si suponemos que $F_y(0, 0, p_1) = 0$, entonces $F_x(0, 0, p_1) = 0$. En este caso M no es diferenciable según

se mostró en la proposición 5 de esta sección. Podemos asumir que $F_y(0, 0, p_1) \neq 0$. Entonces, por el teorema de la función implícita, M es localmente la gráfica de una función diferenciable $y = g(x, p)$ tal que $F(x, g(x, p), p) = 0$ y sus derivadas parciales cumplen

$$F_x + F_y(g_x) = 0 \quad \text{y} \quad F_y(g_p) + F_p = 0. \quad (2.8)$$

Consideremos la proyección del campo de direcciones ξ en M sobre el plano (x, p) . Denotemos el nuevo campo definido en el plano xp como $\tilde{\xi}$. En un punto $(0, p_1)$ escribimos al campo de direcciones $\tilde{\xi}$ por

$$\tilde{\xi} = \left[\alpha_1 x + \alpha_2 (p - p_1) + O\left(\|(x, y)\|^2\right) \right] \frac{\partial}{\partial x} + \left[\beta_1 x + \beta_2 (p - p_1) + O\left(\|(x, y)\|^2\right) \right] \frac{\partial}{\partial p}.$$

Podemos calcular los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 de la siguiente manera:

En $(0, p_1)$ se cumplen las siguientes igualdades por ser $\tilde{\xi}$ la proyección del campo $\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p}$.

$$\begin{aligned} F_p &= \alpha_1 x + \alpha_2 (p - p_1) + O\left(\|(x, y)\|^2\right), \\ -(F_x + p F_y) &= \beta_1 x + \beta_2 (p - p_1) + O\left(\|(x, y)\|^2\right). \end{aligned}$$

Al calcular las derivadas parciales en $(0, p_1)$ en ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} F_{px}(0, p_1) &= \alpha_1, & F_{pp}(0, p_1) &= \alpha_2, \\ -(F_{xx} + p F_{yx})(0, p_1) &= \beta_1, & -(F_{xp} + p F_{yp})(0, p_1) &= \beta_2. \end{aligned}$$

Nótese que $F_p = F_p(x, g(x, p), p)$, luego, al derivarla implícitamente en $(0, p_1)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (F_{px} + F_{py} g_x)|_{(0, p_1)}, \\ \alpha_2 &= (F_{py} g_p + F_{pp})|_{(0, p_1)}. \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} (F_x + p F_y) \Big|_{(0, p_1)} = F_{xx} + F_{xy} g_x + p (F_{yy} g_x + F_{xy})|_{(0, p_1)}, \\ \beta_2 &= -\frac{\partial}{\partial p} (F_x + p F_y) \Big|_{(0, p_1)} = F_{xy} g_p + F_{xp} + F_y + p (F_{yp} + F_{yy} g_p)|_{(0, p_1)}. \end{aligned}$$

Notemos que $g_x(0, p_1) = p_1$ ya que $(F_x + p F_y)(0, p_1) = \phi(p_1) = 0 = (F_x + (g_x) F_y)(0, p_1)$ ver (2.8).

Como $g(0, p_1) = 0$ entonces tenemos que $F_p(0, p_1) = F_p(0, g(0, p_1), p_1) = 0$, de (2.8) se obtiene que $0 = (F_y(g_p) + F_p)(0, p_1) = (F_y g_p)(0, p_1)$. Como consecuencia de $F_y(0, p_1) = F_y(0, 0, p_1) \neq 0$ se cumple que $g_p(0, p_1) = 0$.

Debido a que $0 = (F_p)|_{(0, p_1)}$ tenemos que

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial p} F_p \right) \Big|_{(0, p_1)} = \frac{\partial}{\partial p} (F_p(x, g(x, p), p)) \Big|_{(0, p_1)} = (F_{py} g_p + F_{pp})|_{(0, p_1)}.$$

Como $g_p(0, p_1) = 0$, entonces $F_{pp}(0, p_1) = 0$. Por lo tanto $\alpha_2 = (F_{py}g_p + F_{pp})|_{(0, p_1)} = 0$. Podemos ahora simplificar las expresiones para α_1 , α_2 y β_2 con ayuda de la expresión

$$F(x, y, p) = (a_1x + a_2y + \dots)p^2 + 2(b_1x + b_2y + \dots)p + (c_1x + c_2y + \dots).$$

Por lo tanto se consigue que en $(0, p_1)$,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2(a_2p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1), \\ \alpha_2 &= 0, \\ \beta_2 &= -\{3a_2p_1^2 + 2(2b_2 + a_1)p_1 + (c_2 + 2b_1)\} = -\phi'(p_1).\end{aligned}$$

La matriz $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ es la correspondiente a la parte lineal de $\tilde{\xi}$ en $(0, p_1)$.

Como $\alpha_2 = 0$ tenemos que los eigenvalores de la parte lineal de $\tilde{\xi}$ son

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_1(p_1) = 2(a_2p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1) \\ \beta_2 &= -\phi'(p_1)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Como p_1 no es raíz repetida de ϕ entonces $\phi'(p_1) \neq 0$.

Los polinomios α_1 y ϕ tienen un factor en común si y sólo si su resultante se anula, como el valor de este determinante es un polinomio en las variables $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$, entonces, genéricamente, α_1 y ϕ no tienen raíces comunes. En el resto del texto supondremos que $\alpha_1(p_1) \neq 0$. Por lo tanto, topológicamente los ceros de $\tilde{\xi}$ son nodos o sillas dependiendo del signo de α_1 y β_2 . ■

Observación. Genéricamente, los puntos singulares de ξ son aislados. Más aún, en el caso que $\Delta(x, y) = 0$ es un nodo los puntos singulares de ξ no se acumulan en puntos sobre $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Demostración. Como se ha supuesto que los eigenvalores α_1 y β_2 son distintos de cero, entonces los puntos singulares en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ son aislados.

Notemos que un punto singular (x, y, p) de ξ se proyecta en un punto (x, y) sobre el discriminante. Así, para una ecuación diferencial binaria, tal que $\Delta(x, y) = 0$ es un punto aislado, en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$, el campo vectorial ξ sólo tiene puntos singulares sobre $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Si para una ecuación diferencial binaria el discriminante es un nodo y (x, y, p) es un punto singular de ξ con $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces la recta tangente al discriminante en (x, y) coincide con la dirección del campo bivaluado en el punto (x, y) . También sabemos que las direcciones del campo bivaluado en una rama del discriminante convergen a una dirección en $(0, 0)$ (ver la prueba del lema 3).

Si $\{(x_n, y_n, p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos singulares del campo vectorial ξ que tienen un punto de acumulación $(0, 0, p_0)$ en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ (podemos pensar que esta sucesión se proyecta sólo en una de las ramas del discriminante), entonces la sucesión de espacios tangentes $\{T_{(x_n, y_n, p_n)}M\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $T_{(0, 0, p_0)}M$. Y como (x_n, y_n, p_n) es un punto singular de ξ , entonces $T_{(x_n, y_n, p_n)}M$ interseca al plano $\{(x, y)\}$ en una recta de pendiente p_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $T_{(0, 0, p_0)}M$ interseca al plano $\{(x, y)\}$ en una recta de pendiente p_0 . Esto implica que $(0, 0, p_0)$ es un punto singular de ξ .

Como $(0, 0, p_0)$ es un punto singular de ξ y p_0 es la pendiente de una recta tangente al discriminante en $(0, 0)$, entonces deben satisfacerse simultáneamente las igualdades:

$$\begin{aligned} 0 &= a_2 p_0^3 + (2b_2 + a_1) p_0^2 + (2b_1 + c_2) p_0 + c_1 = \phi(p_0), \\ 0 &= 2(b_2^2 - a_2 c_2) p_0^2 + 2(2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2) p_0 + 2(b_1^2 - a_1 c_1). \end{aligned}$$

Este caso no es genérico, pues la condición para que estos polinomios tengan una raíz común determina un subespacio de medida cero en el espacio determinado por los parámetros $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$. ■

Observación. Se puede suponer que para una ecuación diferencial binaria, el campo vectorial ξ definido sobre M tiene únicamente singularidades en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Si esto no es así, podemos restringir el estudio de una ecuación diferencial en una vecindad lo suficientemente pequeña del origen de \mathbb{R}^2 tal que el campo ξ tiene únicamente singularidades en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Esto es posible pues genéricamente los puntos singulares de ξ no se acumulan en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Nota 1 Genéricamente, el polinomio $\phi(p) = a_2 p^3 + (2b_2 + a_1) p^2 + (2b_1 + c_2) p + c_1$ no tiene a cero como raíz, pues $c_1 = 0$, determina en el espacio real de seis dimensiones $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$ un conjunto de medida cero.

Si se elige la carta de la recta proyectiva con $dy \neq 0$, entonces para la superficie $N = G^{-1}(0)$ donde $G(x, y, q) = c(x, y) q^2 + 2b(x, y) q + a(x, y)$, el campo vectorial

$$\zeta = G_q \frac{\partial}{\partial x} + q G_q \frac{\partial}{\partial y} - (G_x + q G_y) \frac{\partial}{\partial q}$$

es un levantamiento del campo bivaluado.

Los puntos singulares de ζ en la fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$, son del tipo nodo y/ó silla y están dados por las raíces del polinomio

$$\begin{aligned} (G_x + q G_y)(0, 0, q) &= a_1 + 2b_1 q + c_1 q^2 + q(a_2 + 2b_2 q + c_2 q^2) \\ &= c_2 q^3 + (2b_2 + c_1) q^2 + (a_2 + 2b_1) q + a_1 \\ &= \overline{\phi}(q) \end{aligned}$$

Genéricamente, $\overline{\phi}(q)$ no tiene a $q = 0$ como raíz.

Nota 2 En \widehat{M} , se tiene un campo vectorial tangente $\widehat{\xi}$, este campo vectorial coincide con ξ en la carta coordenada de \widehat{M} con $dx \neq 0$. El número y el tipo topológico de los puntos singulares del campo vectorial $\widehat{\xi}$ coincide con los del campo ξ .

2.2. Formas normales de ecuaciones diferenciales binarias lineales.

En esta sección, el objetivo es mostrar que existe un cambio de coordenadas lineal con el cual una ecuación diferencial binaria puede ser transformada a una en la que las funciones $a(x, y)$ y $c(x, y)$ sólo dependen de la segunda variable. Los cambios de coordenadas transforman términos de grado k de una ecuación en términos de grado mayor o igual que k , en particular los términos lineales de una ecuación diferencial binaria serán transformados bajo un difeomorfismo lineal en términos lineales. Por lo tanto, es suficiente analizar los coeficientes lineales de una ecuación diferencial binaria en los dos sistemas coordenados, antes y después de realizar cambios de coordenadas.

Sean $\mathcal{J}_z^k(a)$, $\mathcal{J}_z^k(b)$ y $\mathcal{J}_z^k(c)$ los jets de orden k en el punto z de las funciones a, b y c respectivamente. Decimos que la ecuación diferencial $\mathcal{J}_z^k(a) dy^2 + \mathcal{J}_z^k(b) dydx + \mathcal{J}_z^k(c) dx^2 = 0$ es el *jet de orden k de la ecuación diferencial binaria (2.1) en el punto z* .

Para las funciones a, b y c los respectivos 1-jets son $\mathcal{J}_{(0,0)}^1(a) = a_1x + a_2y$, $\mathcal{J}_{(0,0)}^1(b) = 2(b_1x + b_2y)$ y $\mathcal{J}_{(0,0)}^1(c) = c_1x + c_2y$, por lo que el 1-jet de la ecuación (2.1) es la ecuación diferencial binaria lineal $(a_1x + a_2y) dy^2 + 2(b_1x + b_2y) dxdy + (c_1x + c_2y) dx^2 = 0$.

Proposición 11 *Supongamos que el polinomio $\phi(p)$ no tiene raíces repetidas, y que los polinomios $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$ no tienen raíces comunes, entonces el 1-jet de la ecuación diferencial binaria 2.1 puede ser transformado en alguna de las siguientes formas normales*

$$\begin{aligned} ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx - ydx^2 &= 0, \\ ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx + ydx^2 &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. Consideraremos una ecuación diferencial binaria en la que las funciones a, b, c son lineales:

$$(a_1x + a_2y) dy^2 + 2(b_1x + b_2y) dxdy + (c_1x + c_2y) dx^2 = 0. \quad (2.10)$$

Escribimos la ecuación 2.10 en forma matricial (a lo largo de esta sección, para simplificar los cálculos, consideraremos una ecuación diferencial binaria lineal en su forma matricial).

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Considérese un difeomorfismo lineal en el plano \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

La composición del difeomorfismo con la ecuación diferencial binaria 2.10 nos da una nueva ecuación diferencial binaria lineal $K : AdY^2 + 2BdXdY + CdX^2 = 0$, en la cual $A = A_1X + A_2Y$, $B = B_1X + B_2Y$ y $C = C_1X + C_2Y$. La forma matricial de K es

$$K : \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & A_1 \\ C_2 & B_2 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ahora vamos a determinar los coeficientes A_i, B_i, C_i .

Primero, encontremos las expresiones de las formas cuadráticas $dx^2, 2dxdy$ y dy^2 en las coordenadas (X, Y) :

$$\begin{aligned} dx^2 &= (\alpha dX + \beta dY)^2 = \alpha^2 dX^2 + 2\alpha\beta dXdY + \beta^2 dY^2, \\ 2dxdy &= 2(\alpha dX + \beta dY)(\gamma dX + \delta dY) = 2\alpha\gamma dX^2 + 2(\alpha\delta + \beta\gamma) dXdY + 2\beta\delta dY^2, \\ dy^2 &= (\gamma dX + \delta dY)^2 = \gamma^2 dX^2 + 2\gamma\delta dXdY + \delta^2 dY^2. \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación 2.10 en las coordenadas (X, Y) tiene la expresión:

$$(X \ Y) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Así, los coeficientes de la ecuación K son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \delta^2(\alpha a_1 + \gamma a_2) + 2\beta\delta(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \beta^2(\alpha c_1 + \gamma c_2), \\ A_2 &= a_2\delta^3 + \beta\delta^2(2b_2 + a_1) + \beta^2\delta(2b_1 + c_2) + c_1\beta^3, \\ B_1 &= \gamma\delta(\alpha a_1 + \gamma a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \alpha\beta(\alpha c_1 + \gamma c_2), \\ B_2 &= \gamma\delta(\beta a_1 + \delta a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha\beta(\beta c_1 + \delta c_2), \\ C_1 &= \gamma^3 a_2 + \gamma^2\alpha(a_1 + 2b_2) + \alpha^2\gamma(2b_1 + c_2) + \alpha^3 c_1, \\ C_2 &= \gamma^2(\beta a_1 + \delta a_2) + 2\alpha\gamma(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2(\beta c_1 + \delta c_2). \end{aligned}$$

Recordemos que los puntos singulares del campo ξ sobre $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ están dados por las raíces del polinomio $\phi(p) = a_2 p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$. Supongamos $\beta \neq 0$, si tomamos $p = \frac{\delta}{\beta}$ entonces se puede reescribir a los coeficientes

$$A_2 = \beta^3 \phi\left(\frac{\delta}{\beta}\right) \quad \text{y} \quad C_1 = \alpha^3 \phi\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Si p_1 es una raíz de $\phi(p)$, elegimos $\gamma = \alpha p_1$ y entonces la transformación $(x, y) = (\alpha X + \beta Y, \alpha p_1 X + \delta Y)$ hace que $C_1 = 0$. Tomando a $\gamma = \alpha p_1$ no podemos elegir $\delta = \beta p_1$, pues en este caso la transformación $(x, y) = (\alpha X + \alpha Y, \alpha p_1 X + \beta p_1 Y)$ no es un cambio de coordenadas ya que la matriz J es singular.

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha p_1 & \beta p_1 \end{pmatrix}.$$

Con $\gamma = \alpha p_1$, las expresiones para A_1 y C_2 se vuelven

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha(\delta^2(a_1 + p_1 a_2) + 2\beta\delta(b_1 + p_1 b_2) + \beta^2(c_1 + p_1 c_2)), \\ C_2 &= \alpha^2((p_1^2 a_1 + 2p_1 b_1 + c_1)\beta + (p_1^2 a_2 + 2p_1 b_2 + c_2)\delta). \end{aligned}$$

Caso 1 *Veamos que en general, $C_2 \neq 0$.*

Supongamos que $C_2 = 0$. El coeficiente puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$C_2 = \alpha^2 (\beta F_x(0, 0, p_1) + \delta F_y(0, 0, p_1)).$$

Como M es diferenciable, F_x y F_y no se anulan simultáneamente. Supongamos primero que $F_y(0, 0, p_1) \neq 0$, entonces

$$\delta = \beta \left(\frac{-F_x}{F_y}(0, 0, p_1) \right) = \frac{-\beta F_x(0, 0, p_1)}{F_y(0, 0, p_1)}.$$

La transformación $(x, y) = \left(\alpha X + \beta Y, \alpha p_1 X - \frac{\beta F_x}{F_y} Y \right)$ tiene jacobiano nulo: $\frac{-1}{F_y} (\alpha \beta F_x + \alpha p_1 \beta F_y) = -\frac{\alpha \beta}{F_y} \phi(p_1) = 0$, y por lo tanto no es un difeomorfismo.

Si $F_y(0, 0, p_1) = 0$ entonces $0 = \alpha^2 \beta F_x(0, 0, p_1) = C_2$. Como se ha supuesto $\beta \neq 0$, necesariamente $\alpha = 0$, en este caso la transformación $(x, y) = (\beta Y, \delta Y)$ no es un cambio de coordenadas.

Así, el conjunto de ecuaciones diferenciales binarias tales que $C_2 = 0$ es un conjunto de codimensión uno en el espacio de ecuaciones diferenciales binarias del tipo 2.10.

Caso 2 *Mediante un cambio de coordenadas apropiado, haremos $A_1 = 0$.*

La ecuación $A_1 = 0$ se cumple si y sólo si

$$\alpha (\delta^2 (a_1 + p_1 a_2) + 2\beta \delta (b_1 + p_1 b_2) + \beta^2 (c_1 + p_1 c_2)) = 0. \quad (2.11)$$

Notemos que la ecuación (2.11) es homogénea en β, δ de grado 2. Al reemplazar δ por βp_1 obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha (\beta^2 p_1^2 (a_1 + p_1 a_2) + 2\beta^2 p_1 (b_1 + p_1 b_2) + \beta^2 (c_1 + p_1 c_2)) \\ &= \alpha \beta^2 (p_1^2 (a_1 + p_1 a_2) + 2p_1 (b_1 + p_1 b_2) + (c_1 + p_1 c_2)) \\ &= \alpha \beta^2 (a_2 p_1^3 + (a_1 + 2b_2) p_1^2 + (2b_1 + c_2) p_1 + c_1) = \alpha \beta^2 \phi(p_1), \end{aligned}$$

de esto obtenemos que $\delta = \beta p_1$ es solución de $\alpha \beta^2 \phi(p) = 0$. Como $A_1 = 0$ es una ecuación homogénea en β, δ de grado 2 entonces $\alpha \beta^2 \phi(p_1)$ tiene una segunda solución, digamos $\delta = \lambda \beta$. De la ecuación (2.11) obtenemos

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{-2(b_1 + p_1 b_2) \pm \sqrt{(b_1 + p_1 b_2)^2 - 4(a_1 + p_1 a_2)(c_1 + p_1 c_2)}}{2(a_1 + p_1 a_2)}.$$

Si las soluciones coinciden, es decir, $\lambda = p_1$, entonces $p_1 = \frac{\delta}{\beta}$ y de la ecuación (2.11) se concluye que

$$p_1 = -(b_1 + p_1 b_2) / (a_1 + p_1 a_2),$$

expresión equivalente a

$$a_2 p_1^2 + (a_1 + b_2) p_1 + b_1 = \frac{1}{2} \alpha_1(p_1) = 0.$$

De esto se sigue que α_1 y ϕ tengan una raíz común. Esta situación no es genérica, por tanto, podemos suponer que $\lambda \neq p_1$. Obsérvese que definir $\delta = \lambda \beta$ anula al coeficiente A_1 .

Observación. Nótese que $A_1 = 0$ tiene una raíz doble si y sólo si

$$(2\beta(b_1 + p_1b_2))^2 - 4\beta^2(c_1 + p_1c_2)(a_1 + p_1a_2) = 0.$$

Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} & (b_1 + p_1b_2)^2 - (c_1 + p_1c_2)(a_1 + p_1a_2) \\ &= (b_2^2 - a_2c_2)p_1^2 + (2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)p_1 + b_1^2 - a_1c_1 = 0 \end{aligned}$$

Al comparar esta expresión con la parte cuadrática (el 2-jet) de la función $\Delta = b^2 - 4ac$, geoméricamente significa que $y = p_1x$ es la recta tangente a una de las ramas del discriminante $\Delta(x, y) = 0$ de la ecuación diferencial binaria en $(0, 0)$.

Hemos conseguido el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha p_1 & \lambda \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \neq p_1,$$

con el cual obtenemos la siguiente ecuación diferencial binaria

$$(X \ Y) \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

Caso 3 Podemos encontrar cambios de coordenadas con el cual los coeficientes $A_2 = 1$ y $C_2 = \pm 1$.

Consideremos el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

aplicado a la ecuación diferencial binaria 2.12 se obtienen los siguientes coeficientes

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2\delta B_1 & 0 \\ \alpha^2\delta C_2 & \alpha\delta^2 B_2 & \delta^3 A_2 \end{pmatrix}.$$

Necesitamos encontrar α y δ tales que $\alpha^2\delta C_2 = (\text{signo}(\delta C_2))1$ y $\delta^3 A_2 = 1$.

Sea $\delta = (\sqrt[3]{A_2})^{-1}$, entonces $\alpha^2 = \frac{(\text{signo}(\delta C_2))}{\delta C_2} = \frac{|\sqrt[3]{A_2}|}{|C_2|}$ y $\alpha = \pm \sqrt{\frac{|\sqrt[3]{A_2}|}{|C_2|}}$.

Por lo tanto, dada la ecuación diferencial binaria lineal 2.10 la composición de los difeomorfismos

$$(X\alpha + Y\beta, \ Y\beta\lambda + X\alpha p_1) \text{ y } \left(\sqrt{\frac{|\sqrt[3]{A_2}|}{|C_2|}} X, \ (\sqrt[3]{A_2})^{-1} Y \right),$$

reduce 2.10 a una de las formas normales. ■

2.2.1. Análisis cualitativo de los puntos singulares del campo ξ .

Considere las ecuaciones diferenciales binarias $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx \pm ydx^2 = 0$. En este apartado, para cada una de estas formas normales, daremos una partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ de acuerdo al tipo de puntos singulares del campo vectorial ξ definido en la superficie M .

El cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix},$$

mantiene invariante el tipo de ecuación diferencial binaria:

$$\begin{aligned} (x \ y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ \pm 1 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ dx dy \\ dy^2 \end{pmatrix} \\ = (x \ y) \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ \pm 1 & -b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ dx dy \\ dy^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de esto observamos que existe una simetría en la partición con respecto al eje b_1 en el plano con coordenadas (b_1, b_2) , pues el número y tipo topológico de los puntos singulares del campo vectorial ξ se conserva tras haber hecho el cambio de coordenadas.

La Forma Normal Lineal

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx - ydx^2 = 0.$$

Las siguientes curvas son las separatrices asociadas al tipo de punto(s) singular(es) del campo vectorial ξ correspondiente a la forma normal $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx - ydx^2 = 0$.

1. La curva “no Morse” $b_1 = 0$.

Si $b_1 = 0$, entonces la parte cuadrática de la función Δ es degenerada. Esto implica que Δ no tiene una singularidad de Morse en el origen.

2. Las curvas $2b_1 - 1 = 0$ y $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$.

Para este tipo de ecuación diferencial binaria el polinomio $\phi(p)$ tiene la siguiente forma

$$\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 - 1)p.$$

Las raíces de $\phi(p)$ son $0, -b_2 + \sqrt{b_2^2 - (2b_1 - 1) - b_2}$ y $-b_2 - \sqrt{b_2^2 - (2b_1 - 1) - b_2}$. Por lo tanto, si $2b_1 - 1 = 0$ ó $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$, entonces el polinomio $\phi(p)$ tiene una raíz doble.

3. La curva con raíces comunes de $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$.

El eigenvalor α_1 para este tipo de ecuación diferencial binaria es:

$$\alpha_1(p) = 2(p^2 + b_2p + b_1).$$

Si $b_1 = 0$ entonces α_1 tiene a cero como raíz, por lo tanto, se tiene una situación no genérica, pues α_1 y $\phi(p)$ tienen una raíz común.

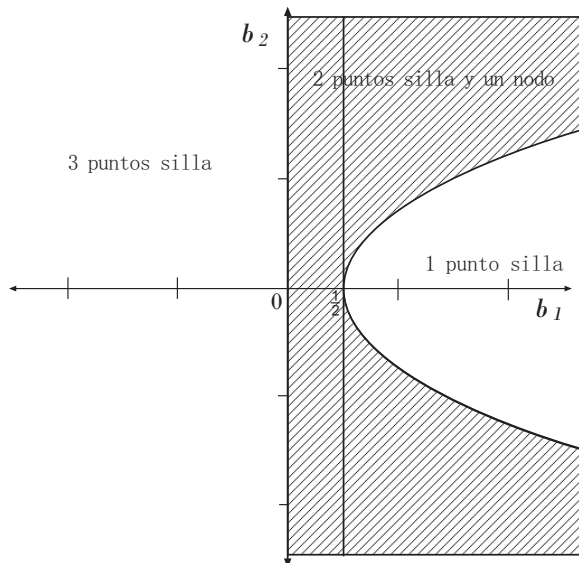


Figura 2.4: Partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ determinado por $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx - ydx^2 = 0$.

En el apéndice se puede encontrar un análisis detallado de las siguientes afirmaciones, que corresponden a la partición que ilustra la figura 2.4.

En el conjunto $\{(b_1, b_2) : \frac{1}{2} < b_1, b_2^2 - 2b_1 + 1 < 0\}$, el polinomio $\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 - 1)p$, tiene una única raíz real, $p = 0$. Las otras dos raíces son complejas conjugadas, pues $b_2^2 - (2b_1 - 1) < 0$. Como los valores propios correspondientes a la parte lineal del campo vectorial $\bar{\xi}$ en el punto $(0, 0)$ son

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0, \\ -\phi(0) &= -(2b_1 - 1) < 0, \end{aligned}$$

entonces el punto singular del campo vectorial $\bar{\xi}$ es un punto silla. Como $\bar{\xi}$ es la proyección en el plano $\{(x, p)\}$ del campo ξ , entonces $(0, 0, 0)$ es topológicamente un punto silla.

En el conjunto $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0\}$, el polinomio $\phi(p)$ tiene tres raíces reales distintas, digamos ρ_1, ρ_2, ρ_3 , que corresponden a tres puntos singulares del campo ξ , éstos tienen dos posibles configuraciones: silla, nodo, silla o bien, silla, silla, nodo respectivamente.

En el conjunto $\{(b_1, b_2) : b_1 < 0, b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0\}$, el polinomio $\phi(p)$ tiene tres raíces reales distintas que corresponden a tres puntos singulares del campo ξ . Topológicamente, cada uno de ellos es un punto singular de tipo silla.

Observación. Si una ecuación diferencial binaria es tal que $a = -c$, el origen es un punto aislado del discriminante. En este caso, si el campo vectorial ξ tiene sólo un punto singular el cual es un punto silla, entonces el origen es de tipo *lemon*. Si ξ tiene tres puntos singulares los cuales son tres puntos sillas, entonces se tiene el caso *star*. El caso *monstar* se consigue si el campo ξ tiene dos puntos silla y un nodo (Ver figura 2.5).

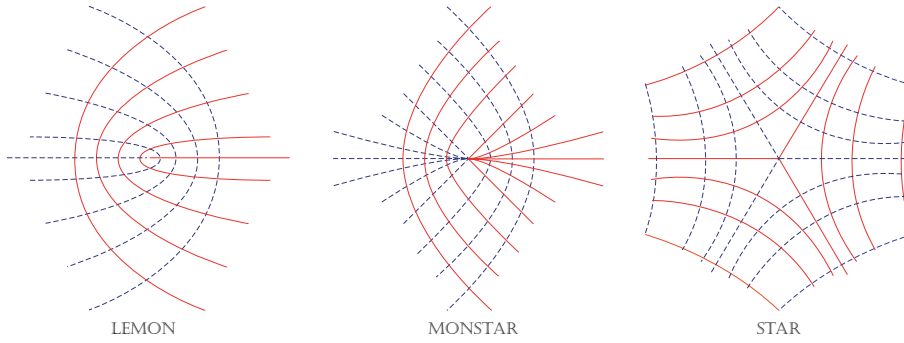


Figura 2.5: Modelos locales de la forma normal lineal $yy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx - ydx^2 = 0$.

La Forma Normal Lineal

$$yy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx + ydx^2 = 0.$$

Las curvas separatrices asociadas al tipo de punto(s) singular(e)s del campo de direcciones ξ correspondientes a la forma normal $yy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx + ydx^2 = 0$ son las siguientes:

1. La curva “ no Morse ” $b_1 = 0$.
2. Las curvas $2b_1 + 1 = 0$ y $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 - 1)$.

El polinomio $\phi(p)$ para este tipo de ecuación diferencial binaria tiene la siguiente forma

$$\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 + 1)p$$

Este polinomio tiene las raíces $0, -b_2 + \sqrt{b_2^2 - (2b_1 + 1)} - b_2$ y $-b_2 - \sqrt{b_2^2 - (2b_1 + 1)}$. Por lo tanto, si los coeficientes de $\phi(p)$ satisfacen las ecuaciones de la recta $2b_1 + 1 = 0$ ó de la parábola $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 - 1)$, entonces $\phi(p)$ tiene una raíz doble, que no es un caso genérico.

3. Las curvas $b_1 = 0$ y $b_1 = \pm b_2 - 1$.

El eigenvalor α_1 para este tipo de ecuación diferencial binaria es:

$$\alpha_1(p) = 2p^2 + 2b_2p + 2b_1.$$

Si $b_1 = 0$, entonces $p = 0$ es una raíz común de los polinomios $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$.

Si $b_1 = \pm b_2 - 1$, entonces $\alpha_1(p) = 2p^2 + 2b_2p \pm 2b_2 - 2$ y $\phi(p) = p(p^2 + 2b_2p + (\pm 2b_2 - 1))$. Por lo tanto, las raíces de α_1 son $\mp 1, 1 - b_2$. Mientras que $\phi(p)$ tiene las raíces $0, -1$ y $1 - 2b_2$. Así, en este caso, -1 es una raíz común de los polinomios $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$, que no es un caso genérico.

En el apéndice se puede encontrar un análisis detallado de las siguientes afirmaciones, que corresponden a la partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ que ilustra la figura 2.6. Si los coeficientes b_1 y b_2 de la forma normal están en los conjuntos

$$\{(b_1, b_2) : b_1 < -1, b_2 \geq 0, b_1 < b_2 - 1, b_1 < -b_2 - 1\},$$

$$\text{y } \{(b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2 \geq 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 > 0, b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1\},$$

junto con sus simétricos con respecto al eje b_1 , entonces el campo vectorial ξ tiene tres puntos singulares en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Topológicamente, estos tres puntos singulares son sillas.

El campo vectorial ξ tiene tres puntos singulares: dos de ellos son sillas y el tercero es un nodo si los coeficientes b_1 y b_2 pertenecen a los conjuntos

$$\left\{ (b_1, b_2) : b_1 < 0, b_1 \neq -\frac{1}{2}, b_2 \geq 0, b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1 \right\},$$

$$\left\{ (b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2 \geq 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 > 0, b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1 \right\},$$

junto con sus simétricos con respecto al eje b_1 .

Si los coeficientes están en el conjunto

$$\left\{ (b_1, b_2) : -1 < b_1 < 0, b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_2^2 - 2b_1 - 1 > 0 \right\},$$

entonces ξ tiene tres puntos singulares: dos de ellos son nodos y el tercero es una silla.

En el conjunto

$$\left\{ (b_1, b_2) : -\frac{1}{2} < b_1 < 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 < 0 \right\},$$

el polinomio $\phi(p)$ sólo tiene una raíz real, que corresponde a un punto singular tipo nodo del campo vectorial ξ .

En el conjunto

$$\left\{ (b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2^2 - 2b_1 - 1 < 0 \right\},$$

el polinomio $\phi(p)$ sólo tiene una raíz real, que corresponde a un punto singular tipo silla del campo vectorial ξ .

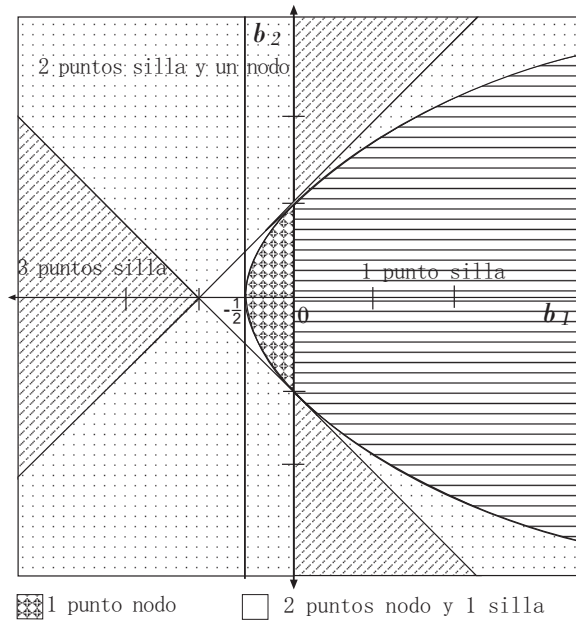


Figura 2.6: Partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ determinado por $yd y^2 + 2(b_1 x + b_2 y) dy dx + y dx^2 = 0$.

2.3. Formas normales mediante difeomorfismos formales.

En la sección anterior logramos llevar una ecuación diferencial binaria (2.1) mediante cambios de coordenadas lineales, en alguna de las siguientes formas reducidas:

$$(y + \tilde{a}(x, y)) dy^2 + 2(b_1x + b_2y + \tilde{b}(x, y)) dydx + (y + \tilde{c}(x, y)) dx^2 = 0, \quad (2.13)$$

$$(y + \tilde{a}(x, y)) dy^2 + 2(b_1x + b_2y + \tilde{b}(x, y)) dydx + (-y + \tilde{c}(x, y)) dx^2 = 0. \quad (2.14)$$

En este tipo de ecuaciones las funciones \tilde{a} , \tilde{b} y \tilde{c} son diferenciables, sin términos constantes y sin términos lineales.

El objetivo en esta sección es demostrar, que bajo ciertas condiciones, las ecuaciones diferenciales binarias (2.13) y (2.14) pueden ser transformadas formalmente en una ecuación diferencial binaria tal que $\tilde{a}(x, y) \equiv 0$ y $\tilde{c}(x, y) \equiv 0$. Para lograrlo, se usará el método de Poincaré que consiste en eliminar sucesivamente los términos de grado mayor o igual que 2 en las funciones a y c .

Definición. Sean D un dominio entero y $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ una familia de elementos de D . Una *serie de potencias formal sobre D* (o con coeficientes en D) es una suma infinita de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Nótese que el conjunto de series de potencias formales sobre D forma un dominio entero, el cual contiene al anillo de polinomios con coeficientes en D .

Antes de enunciar la proposición, introducimos la reducción formal aniquilando los términos de grado $k = 2$. Sean

$$P_2 = p_1X^2 + p_2XY + p_3Y^2 \quad y \quad Q_2 = q_1X^2 + q_2XY + q_3Y^2,$$

polinomios homogéneos de grado 2. Consideremos la aplicación $H_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$H_2(X, Y) = (X + P_2, Y + Q_2).$$

El jacobiano de H_2 en $(0, 0)$ es

$$\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial}{\partial X} P_2 & \frac{\partial}{\partial X} Q_2 \\ \frac{\partial}{\partial Y} P_2 & 1 + \frac{\partial}{\partial Y} Q_2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \det \begin{pmatrix} 1 + 2p_1X + p_2Y & 2q_1X + q_2Y \\ p_2X + 2p_3Y & 1 + q_2X + 2q_3Y \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = 1.$$

Por lo tanto, H_2 es un difeomorfismo en una vecindad de $(0, 0)$.

Es conveniente reescribir la función $y + \tilde{a}(x, y)$ como $y + \tilde{a}(x, y) = y + \hat{\alpha}_2(x, y) + O(\|(x, y)\|^3)$ donde $\hat{\alpha}_2$ es la forma de grado dos en la expansión de Taylor de \tilde{a} :

$$\hat{\alpha}_2(x, y) = \alpha_1x^2 + \alpha_2xy + \alpha_3y^2.$$

De manera semejante para $\pm y + \tilde{c}(x, y) = \pm y + \hat{\varsigma}_2(x, y) + O(\|(x, y)\|^3)$ con $\hat{\varsigma}_2$ la forma de segundo grado en la expansión de Taylor de $\tilde{c}(x, y)$:

$$\hat{\varsigma}_2 = \varsigma_1x^2 + \varsigma_2xy + \varsigma_3y^2.$$

Con esto obtenemos la ecuación diferencial binaria

$$\left(y + \hat{\alpha}_2 + O(\|(x, y)\|^3) \right) dy^2 + 2(b_1x + b_2y + \tilde{b}(x, y)) dydx + \left(\pm y + \hat{\varsigma}_2 + O(\|(x, y)\|^3) \right) dx^2 = 0. \quad (2.15)$$

Necesitamos encontrar un difeomorfismo del plano que lleve la ecuación (2.15) en una de la forma

$$(Y + A(X, Y)) dY^2 + 2(b_1X + b_2Y + B(X, Y)) dYdX + (\pm Y + C(X, Y)) dX^2 = 0,$$

donde las funciones $A(X, Y)$ y $C(X, Y)$ no tienen términos de grado menor o igual a 2.

Con el difeomorfismo H_2 la ecuación (2.15) se transforma en:

$$\begin{aligned} \left(Y + Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) (dY + dQ_2)^2 + 2(b_1X + b_2Y + B(X, Y)) d(Y + Q_2) d(X + P_2) + \\ \left(\pm Y \pm Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) (dX + dP_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Nos disponemos a calcular los términos de grado dos en la descomposición en serie de potencias de esta última ecuación diferencial binaria.

Notemos que

$$\begin{aligned} (dY + dQ_2)^2 &= \left(dY + \frac{\partial Q_2}{\partial X} dX + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} dY \right)^2 = \\ dY^2 + 2\frac{\partial Q_2}{\partial X} dX dY + 2\frac{\partial Q_2}{\partial Y} dY^2 + 2\frac{\partial Q_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} dX dY + \frac{\partial Q_2}{\partial X}^2 dX^2 + \frac{\partial Q_2}{\partial Y}^2 dY^2 = \\ \left(1 + 2\frac{\partial Q_2}{\partial Y} + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right)^2 \right) dY^2 + \left(2\frac{\partial Q_2}{\partial X} + 2\frac{\partial Q_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} \right) dX dY + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} \right)^2 dX^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(Y + Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) (dY + dQ_2)^2 \\ = \\ \left(Y + Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(\left(1 + 2\frac{\partial Q_2}{\partial Y} + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right)^2 \right) dY^2 + 2\left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} \right) dX dY + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} \right)^2 dX^2 \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

De manera similar tenemos que:

$$\begin{aligned} d(Y + Q_2) d(X + P_2) &= \left(dY + \frac{\partial Q_2}{\partial X} dX + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} dY \right) \left(dX + \frac{\partial P_2}{\partial X} dX + \frac{\partial P_2}{\partial Y} dY \right) \\ &= dXdY + \frac{\partial P_2}{\partial X} dXdY + \frac{\partial P_2}{\partial Y} dY^2 + \frac{\partial Q_2}{\partial X} dX^2 + \frac{\partial Q_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial X} dX^2 + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} dXdY + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} dYdX + \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} dYdX + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} dY^2 \\ &= \left(\frac{\partial P_2}{\partial Y} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right) dY^2 + \left(1 + \frac{\partial P_2}{\partial X} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right) dXdY + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial Q_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial X} \right) dX^2. \end{aligned}$$

Si denotamos por $S_1 = \left(\frac{\partial P_2}{\partial Y} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right)$, $S_2 = \left(1 + \frac{\partial P_2}{\partial X} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right)$ y

$S_3 = \left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial Q_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial X} \right)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} (b_1X + b_2Y + B(X, Y)) d(Y + Q_2) d(X + P_2) \\ = (b_1X + b_2Y + b(X, Y)) (S_1 dY^2 + S_2 dXdY + S_3 dX^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por último,

$$\begin{aligned}
(dX + dP_2)^2 &= \left(dX + \frac{\partial P_2}{\partial X} dX + \frac{\partial P_2}{\partial Y} dY \right)^2 = \\
& dX^2 + \frac{\partial P_2^2}{\partial X} dX^2 + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} dX^2 + 2 \frac{\partial P_2}{\partial Y} dX dY + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial Y} dX dY + \frac{\partial P_2^2}{\partial Y} dY^2 \\
& \frac{\partial P_2^2}{\partial Y} dY^2 + \left(2 \frac{\partial P_2}{\partial Y} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial Y} \right) dX dY + \left(1 + \frac{\partial P_2^2}{\partial X} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \right) dX^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \left(\pm Y \pm Q_2 + \widehat{\varsigma}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) (dX + dP_2)^2 \tag{2.18} \\
= & \left(\pm Y \pm Q_2 + \widehat{\varsigma}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(\frac{\partial P_2^2}{\partial Y} dY^2 + \left(2 \frac{\partial P_2}{\partial Y} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial Y} \right) dX dY + \left(1 + \frac{\partial P_2^2}{\partial X} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \right) dX^2 \right).
\end{aligned}$$

Y entonces de las igualdades (2.16),(2.17) y (2.18) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& Y + A(X, Y) = \\
& \left(Y + Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(1 + 2 \frac{\partial Q_2}{\partial Y} + \frac{\partial Q_2^2}{\partial Y} \right) + 2(b_1 X + b_2 Y + b(X, Y)) \left(\frac{\partial P_2}{\partial Y} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right) + \\
& \left(\pm Y + Q_2 + \widehat{\varsigma}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(\frac{\partial P_2^2}{\partial Y} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 X + b_2 Y + B(X, Y) = \\
& \left(2 \frac{\partial Q_2}{\partial X} + 2 \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} \right) \left(Y + Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) + \\
& (b_1 X + b_2 Y + b(X, Y)) \left(1 + \frac{\partial P_2}{\partial X} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} \frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial Q_2}{\partial Y} + \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right) + \\
& \left(\pm Y \pm Q_2 + \widehat{\varsigma}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(2 \frac{\partial P_2}{\partial Y} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial Y} \right),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \pm Y + C(X, Y) = \\
& \left(Y + Q_2 + \widehat{\alpha}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(\frac{\partial Q_2^2}{\partial X} \right) + (b_1 X + b_2 Y + b(X, Y)) \left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} + \frac{\partial Q_2}{\partial X} \frac{\partial P_2}{\partial X} \right) + \\
& \left(\pm Y \pm Q_2 + \widehat{\varsigma}_2 + O\left(\|(X, Y)\|^3\right) \right) \left(1 + \frac{\partial P_2^2}{\partial X} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} \right).
\end{aligned}$$

De esto último notamos que los nuevos términos $A_2(X, Y)$ y $C_2(X, Y)$ de grado 2 de $A(X, Y)$ y $C(X, Y)$ respectivamente, son:

$$\begin{aligned}
A_2(X, Y) &= Q_2 + Y 2 \frac{\partial Q_2}{\partial Y} + (b_1 X + b_2 Y) \left(\frac{\partial P_2}{\partial Y} \right) + \widehat{\alpha}_2 \\
&= q_1 X^2 + q_2 XY + q_3 Y^2 + 4q_3 Y^2 + 2q_2 XY + X^2 b_1 p_2 + 2Y^2 b_2 p_3 + (2b_1 p_3 + b_2 p_2) XY + \widehat{\alpha}_2 \\
&= (q_1 + b_1 p_2) X^2 + (q_2 + 2q_2 + 2b_1 p_3 + b_2 p_2) XY + (q_3 + 4q_3 + 2b_2 p_3) Y^2 + \widehat{\alpha}_2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
C_2(X, Y) &= \pm Q_2 + (\pm Y) 2 \frac{\partial P_2}{\partial X} + (b_1 X + b_2 Y) \left(\frac{\partial Q_2}{\partial X} \right) + \widehat{\varsigma}_2 \\
&= \pm (q_1 X^2 + q_2 XY + q_3 Y^2) \pm (2p_2 Y^2 + 4p_1 XY) + 2X^2 b_1 q_1 + Y^2 b_2 q_2 + (b_1 q_2 + 2b_2 q_1) XY + \widehat{\varsigma}_2 \\
&= (\pm q_1 + 2b_1 q_1) X^2 \pm (4p_1 + b_1 q_2 + 2b_2 q_1 \pm q_2) XY \pm (q_3 \pm 2p_2 + b_2 q_2) Y^2 + \widehat{\varsigma}_2
\end{aligned}$$

De las igualdades $A_2(X, Y) = 0 = C_2(X, Y)$, obtenemos un sistema de 6 ecuaciones con seis incógnitas $p_i, q_i, i = 1, 2, 3$. En forma matricial, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 2b_1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 + 2b_1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2b_2 & \pm 1 + 2b_1 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 & 0 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la matriz de este sistema, a la cual llamaremos M_2 , sólo depende de b_1 y b_2 . Por lo tanto, el determinante de M_2 es un polinomio en las variables b_1 y b_2 . Genéricamente, la matriz M_2 es no singular y en tal caso podemos encontrar los polinomios P_2 y Q_2 que anulan los términos A_2 y C_2 .

Una vez encontrados los polinomios P_2 y Q_2 , el difeomorfismo $H_2(X, Y) = (X + P_2, Y + Q_2)$ lleva una ecuación diferencial binaria genérica a una de la forma

$$(Y + A(X, Y)) dY^2 + 2(b_1X + b_2Y + B(X, Y)) dYdX + (\pm Y + C(X, Y)) dX^2 = 0,$$

donde las funciones $A(X, Y)$ y $C(X, Y)$ no tienen términos de grado menor o igual que dos.

Ahora abordaremos el caso general. De manera inductiva supondremos que el proceso se ha aplicado a todos los términos de grado menor o igual que $k - 1$, con $k > 2$. Por lo tanto, tenemos una ecuación diferencial binaria tal que las funciones $y + a$ y $\pm y + c$ se escriben de la siguiente forma

$$y + a = y + \hat{\alpha}_k + O(\|(x, y)\|^{k+1})$$

y

$$\pm y + c = \pm y + \hat{\varsigma}_k + O(\|(x, y)\|^{k+1}),$$

donde $\hat{\alpha}_k = \sum_{j=0}^k a_{i,k} X^{k-j} Y^j$ y $\hat{\varsigma}_k = \sum_{j=0}^k \varsigma_{i,k} X^{k-j-1} Y^j$ son polinomios homogéneos de grado $k > 2$.

Sean $p_k = \sum_{j=0}^k p_{i,k} X^{k-j} Y^j$ y $q_k = \sum_{j=0}^k q_{i,k} X^{k-j-1} Y^j$ polinomios homogéneos de grado $k > 2$. Consideremos la aplicación

$$H_k(X, Y) = (X + p_k, Y + q_k),$$

cuyo jacobiano en $(0, 0)$ es :

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial}{\partial X} p_k & \frac{\partial}{\partial X} q_k \\ \frac{\partial}{\partial Y} p_k & 1 + \frac{\partial}{\partial Y} q_k \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0)} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + \sum_{j=0}^k p_{i,j} (k-j) X^{k-j-1} Y^j & \sum_{j=0}^k q_{i,j} X^{k-j-1} Y^j \\ \sum_{j=0}^k p_{i,j} j X^{k-j} Y^{j-1} & 1 + \sum_{j=0}^k q_{i,j} (k-j) X^{k-j-1} Y^j \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0)} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, H_k es un difeomorfismo en una vecindad de $(0, 0)$.

El difeomorfismo H_k transforma la ecuación diferencial binaria

$$\left(y + \hat{\alpha}_k + \|(x, y)\|^{k+1} \right) dy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y)) dydx + \left(\pm y + \hat{\varsigma}_k + \|(x, y)\|^{k+1} \right) dx^2 = 0,$$

en la ecuación :

$$(Y + A(X, Y)) dY^2 + 2(b_1X + b_2Y + B(X, Y)) dYdX + (\pm Y + C(X, Y)) dX^2 = 0,$$

donde las funciones $A(X, Y)$ y $C(X, Y)$ no tienen términos de grado $k - 1$ y los términos de grado k son:

$$\begin{aligned} A_k &= +p_k + 2Y \frac{\partial q_k}{\partial Y} + (b_1X + b_2Y) \left(\frac{\partial p_k}{\partial Y} \right) + \hat{\alpha}_k, \\ C_k &= \pm Q_k + (\pm 2Y) \frac{\partial p_k}{\partial X} + (b_1X + b_2Y) \left(\frac{\partial q_k}{\partial X} \right) + \hat{\varsigma}_k. \end{aligned}$$

Necesitamos que las ecuaciones $A_k = 0$ y $C_k = 0$ se satisfagan simultáneamente. Esto determina un sistema de $(2k + 2)$ ecuaciones en las variables $p_{i,k}, q_{i,k}, i = 0, \dots, k$. La forma matricial de este sistema es

$$M_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_k \\ \hat{\varsigma}_k \end{pmatrix}.$$

La matriz M_k sólo depende de b_1 y b_2 , por lo tanto, el determinante de M_k es un polinomio en las variables b_1 y b_2 . Genéricamente, la matriz M_k es no singular, esto es debido a que el conjunto de puntos (b_1, b_2) en los cuales $\det(M_k) = 0$, tiene medida cero en \mathbb{R}^2 . Si M_k es no singular entonces podemos encontrar los polinomios p_k y q_k que anulan a los polinomios A_k y C_k .

Definición. A la pareja (b_1, b_2) le diremos *resonante* si existe un entero $k \geq 2$ tal que la matriz M_k es singular. Si no existe un entero k con esta propiedad diremos que (b_1, b_2) es *no resonante*.

Proposición 12 *Si la pareja (b_1, b_2) es no resonante, la ecuación diferencial binaria (2.1) puede ser reducida por un difeomorfismo formal a una de las dos siguientes formas*

$$\begin{aligned} ydy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y)) dydx - ydx^2 &= 0, \\ ydy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y)) dydx + ydx^2 &= 0, \end{aligned}$$

donde $b(x, y)$ es una serie de potencias formal sin términos lineales o constantes.

Demostración. Podemos suponer que la ecuación diferencial binaria ya está en alguna de las formas reducidas (2.13) ó (2.14). Si la pareja (b_1, b_2) es no resonante, entonces para cada $k \geq 2$ la matriz M_k es invertible y por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales

$$M_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_k \\ \hat{\varsigma}_k \end{pmatrix}$$

tiene una solución única. A la solución (p_k, q_k) , le corresponde el difeomorfismo H_k , el cual anula los términos de grado k en las funciones $a(x, y)$ y $c(x, y)$.

Anulando sucesivamente los términos de grado $2, 3, \dots, k$, obtenemos una sucesión de difeomorfismos $\{H_k\}$ cuyo producto está en la clase de series de potencias formales, esto es, los términos de grado fijo no cambian desde cierto paso en la reducción. El límite de esta sucesión transforma formalmente a una ecuación diferencial binaria (2.1) en una de las formas del enunciado de la proposición. ■

Observación. Los cambios de coordenadas $H_k, k \geq 2$ no alteran los coeficientes lineales de las ecuaciones diferenciales binarias (2.13) y (2.14). En consecuencia, el tipo de singularidad del discriminante y el tipo topológico de los puntos singulares del campo vectorial ξ se preserva bajo los cambios de coordenadas formales propuestos en la proposición 12.

2.4. Acciones de grupos.

En esta sección consideraremos ecuaciones diferenciales binarias de los siguientes tipos:

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dx dy - a(x, y) dx^2 = 0, \quad (2.19)$$

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dx dy + a(x, y) dx^2 = 0, \quad (2.20)$$

donde las funciones a y b son diferenciables y se anulan en el origen.

En la sección anterior se mostró que mediante un difeomorfismo formal, toda ecuación diferencial binaria (2.1) salvo un conjunto de medida cero puede ser reducida a una del tipo (2.19) o a una del tipo (2.20). Ahora nos preguntamos por los difeomorfismos que preservan cada tipo de ecuación diferencial binaria.

Proposición 13 Sea $\Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) = (x, y)$ un difeomorfismo del plano \mathbb{R}^2 . Si Φ satisface las igualdades (2.21) y (2.22), entonces Φ preserva las ecuaciones diferenciales del tipo (2.19).

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right)^2, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} = 0. \quad (2.22)$$

Demostración. Sea $\Phi: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$, un difeomorfismo dado por $\Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) = (x, y)$. Si denotamos a la composición $(a \circ \Phi)(u, v) = a(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ por $a \circ \Phi$ y a la composición $(b \circ \Phi)(u, v) = b(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ por $b \circ \Phi$, entonces Φ transforma la ecuación del tipo (2.19) en la siguiente:

$$(a \circ \Phi) \left((d\phi_2(u, v))^2 - (d\phi_1(u, v))^2 \right) + 2(b \circ \Phi) (d(\phi_1(u, v)) d(\phi_2(u, v))) = 0. \quad (2.23)$$

Como $d\phi_i = \frac{\partial\phi_i}{\partial u} du + \frac{\partial\phi_i}{\partial v} dv, i \in \{1, 2\}$, la ecuación (2.23) es equivalente a la siguiente:

$$(a \circ \Phi) \left(\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} du + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} dv \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u} du + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} dv \right)^2 \right) + 2(b \circ \Phi) \left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u} du + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} dv \right) \right] \left[\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} du + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} dv \right) \right] = 0.$$

Ahora hay que calcular los productos y reagrupar los coeficientes. Hecho esto, se tiene la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & \left((a \circ \Phi) \left(\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u} \right)^2 \right) + 2(b \circ \Phi) \frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \right) du^2 \\ & + \left(2(b \circ \Phi) \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \right) + 2(a \circ \Phi) \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} - \frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \right) \right) dudv \\ & - \left((a \circ \Phi) \left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial v} \right)^2 \right) - 2(b \circ \Phi) \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \right) dv^2 = 0. \end{aligned}$$

La hipótesis implica que se cumple la siguiente igualdad para cada $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$

$$(a \circ \Phi) \left(\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \right) + 2(b \circ \Phi) \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} = (a \circ \Phi) \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 \right) - 2(b \circ \Phi) \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \frac{\partial \phi_1}{\partial v}.$$

Por lo tanto, el difeomorfismo Φ preserva ecuaciones diferenciales binarias del tipo (2.19) ■

Observación. Un difeomorfismo del plano $\Phi : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$, satisface simultáneamente (2.21) y (2.22) si y sólo si se cumplen

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = \mp \frac{\partial \phi_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial v} = \pm \frac{\partial \phi_2}{\partial u}.$$

Demostración. Supongamos ciertas las ecuaciones (2.21) y (2.22).

Caso 1 Supongamos que $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = 0$. Entonces de (2.22) tenemos que $\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} = 0$ lo cual implica $\frac{\partial \phi_1}{\partial v} = 0$ ó $\frac{\partial \phi_2}{\partial v} = 0$. Si sucede que $\frac{\partial \phi_1}{\partial v} = 0$, el primer miembro de (2.21) es cero y entonces $0 = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2$. De aquí concluimos que ambos sumandos son cero, y se satisfacen trivialmente las relaciones buscadas entre las derivadas parciales.

Caso 2 Supongamos $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \neq 0$. Entonces multiplicando la ecuación (2.21) por $\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2$ tenemos:

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 \right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 \right). \quad (2.24)$$

De la ecuación (2.22) tenemos que:

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2.$$

Sustituyendo en el lado derecho de (2.24) se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 \right) &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 \\ \iff \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 \right) &= \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \right) \\ \iff \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \neq 0$, entonces $\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 \neq 0$. Por lo tanto $\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right)^2 = 0$ y en consecuencia

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = \pm \frac{\partial \phi_2}{\partial v}. \quad (2.25)$$

Al sustituir en la ecuación (2.22) tenemos

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \left(\pm \frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right) = 0.$$

De la igualdad (2.25) tenemos que $\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \neq 0$. Por lo tanto:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial v} = \pm \frac{\partial \phi_2}{\partial u}.$$

■

Si identificamos \mathbb{R}^2 con el plano complejo $x+iy$, entonces la segunda parte de la proposición anterior nos dice que el difeomorfismo Φ es holomorfo pues satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o bien antiholomorfo.

Proposición 14 Sea $\Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) = (x, y)$ un difeomorfismo del plano \mathbb{R}^2 . Si Φ satisface:

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right)^2, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} = 0, \quad (2.27)$$

entonces Φ preserva las ecuaciones del tipo (2.20).

Demostración. Al hacer la sustitución $x = \phi_1(u, v)$, $y = \phi_2(u, v)$ y mediante algunos cálculos semejantes a los realizados en el caso de una ecuación del tipo (2.19) obtenemos que la ecuación diferencial binaria del tipo (2.20) es transformada en la siguiente:

$$\begin{aligned} & \left(a \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right)^2 + a \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\right)^2 + 2b \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right) du^2 \\ & + \left(2b \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right) + 2a \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} + 2a \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_1}{\partial v}\right) dudv \\ & + \left(a \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}\right)^2 + a \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right)^2 + 2b \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right) dv^2 = 0. \end{aligned}$$

Una ecuación diferencial binaria del tipo (2.20) es preservada por el difeomorfismo Φ si las funciones que multiplican a du^2 y dv^2 coinciden. Si Φ es como en la hipótesis, entonces la siguiente igualdad se satisface:

$$\left(a \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right)^2 + a \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\right)^2 + 2b \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right) = \left(a \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}\right)^2 + a \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right)^2 + 2b \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right).$$

Por lo tanto Φ preserva las ecuaciones del tipo (2.19) ■

Observación. Si Φ satisface las igualdades (2.26) y (2.27) entonces se obtienen las ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v^2}.$$

En consecuencia, el difeomorfismo Φ puede ser escrito en la forma:

$$\Phi(u, v) = (\alpha(u+v) + \beta(u-v), \alpha(u+v) - \beta(u-v)).$$

Demostración. Si Φ satisface las ecuaciones (2.26) y (2.27) entonces obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right)^2 &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{\partial\phi_2}{\partial v} + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right)^2 \\
\iff \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right)^2 &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right)^2 \\
\iff \frac{\partial\phi_1}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u} &= \pm \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

Necesitamos analizar ambos casos:

Si $\frac{\partial\phi_1}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u} = + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right)$, entonces $\frac{\partial\phi_1}{\partial u} = \frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u}$. Por lo tanto al sustituir en (2.27) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right) \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} = \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \iff \\
0 &= \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right) \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \iff \\
0 &= \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right),
\end{aligned}$$

por lo que $\frac{\partial\phi_2}{\partial u} = \frac{\partial\phi_2}{\partial v}$ ó $\frac{\partial\phi_1}{\partial v} = \frac{\partial\phi_2}{\partial u}$.

Si $\frac{\partial\phi_2}{\partial u} = \frac{\partial\phi_2}{\partial v}$, se obtiene (al sustituir en (2.27)) que $\frac{\partial\phi_1}{\partial u} = \frac{\partial\phi_1}{\partial v}$. De este par de igualdades calculamos las derivadas parciales de segundo orden con respecto a las dos variables para obtener:

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial v^2} \quad y \quad \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial v^2}.$$

Si $\frac{\partial\phi_1}{\partial v} = \frac{\partial\phi_2}{\partial u}$, se obtiene (al sustituir en $\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{\partial\phi_2}{\partial v} = 0$) que $\frac{\partial\phi_1}{\partial u} = \frac{\partial\phi_2}{\partial v}$. Es consecuencia de ambas igualdades que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi_2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u\partial v} \quad y \quad \frac{\partial^2\phi_2}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u^2} \\
\frac{\partial^2\phi_1}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial v\partial u} \quad y \quad \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial v^2}, \quad y \quad \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial v^2}.$$

Esto concluye el análisis del primer caso.

Si se satisface $\frac{\partial\phi_1}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u} = - \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right)$ entonces $\frac{\partial\phi_1}{\partial u} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u}$, al sustituir esta última igualdad en (2.27) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{\partial\phi_1}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial v} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right) \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{\partial\phi_2}{\partial u} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \iff \\
0 &= -\frac{\partial\phi_1}{\partial v} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right) \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \iff \\
0 &= \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que se debe satisfacer $\frac{\partial\phi_2}{\partial u} = -\frac{\partial\phi_2}{\partial v}$, o bien, $\frac{\partial\phi_2}{\partial u} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial v}$.

Supongamos primero que $\frac{\partial \phi_2}{\partial u} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial v}$. Entonces al sustituir en $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} = 0$ se obtiene que $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial v}$. De esto que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial v}, \\ -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v \partial u}, & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v \partial u} &= -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v^2}, \quad y \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2}.$$

Ahora supongamos que $\frac{\partial \phi_2}{\partial u} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial v}$. Entonces (al sustituir en $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} = 0$) tenemos que $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial v}$. Por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial v} & y & \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u \partial v} \\ -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v \partial u} & y & \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial v} &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v^2} \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v^2}, \quad y \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2}.$$

Hasta aquí, hemos mostrado que si se satisfacen las ecuaciones (2.26) y (2.27) entonces obtenemos las ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial v^2}.$$

Ahora consideremos el cambio de coordenadas $\xi = u + v, \eta = u - v$, la composición con el difeomorfismo Φ tiene la forma:

$$\Phi((\xi(u, v), \eta(u, v))) = (\phi_1(\xi(u, v), \eta(u, v)), \phi_2(\xi(u, v), \eta(u, v))),$$

usando la regla de la cadena obtenemos que las derivadas parciales de $\phi_1(\xi(u, v), \eta(u, v))$ son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

siendo así, las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

de la primera ecuación de onda $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2} = 0$, obtenemos que $-4 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

La ecuación $-4 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ se satisface si y sólo si $\phi_1 = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$, con α, β funciones diferenciables de una variable. Si $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ entonces

$$\int \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \alpha_1(\xi),$$

integrando nuevamente tenemos que

$$\int \int \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi = \int \alpha_1(\xi) d\xi = \alpha(\xi) + \beta(\eta),$$

para algunas funciones $\alpha(\xi), \beta(\eta)$ diferenciables. Así que

$$\phi_1(\xi(u, v), \eta(u, v)) = \alpha(u + v) + \beta(u - v),$$

de manera análoga podemos ver que

$$\phi_2(\xi(u, v), \eta(u, v)) = \gamma(u + v) + \delta(u - v),$$

para algunas funciones $\gamma(\xi), \delta(\eta)$ diferenciables. Ahora nos ocupamos en probar que se cumplen las igualdades $\alpha(u + v) = \gamma(u + v)$ y $\delta(u - v) = -\beta(u - v)$.

Las derivadas parciales de $\phi_1(\xi(u, v), \eta(u, v))$ y $\phi_2(\xi(u, v), \eta(u, v))$, satisfacen que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(\xi(u, v), \eta(u, v)) &= \frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta(u - v)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(\xi(u, v), \eta(u, v)) &= \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \xi} + \frac{\partial \delta(u - v)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(\xi(u, v), \eta(u, v)) &= \frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta(u - v)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(\xi(u, v), \eta(u, v)) &= \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \xi} - \frac{\partial \delta(u - v)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Las igualdades $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = \frac{\partial \phi_1}{\partial v}$ y $\frac{\partial \phi_2}{\partial u} = \frac{\partial \phi_2}{\partial v}$ implican que $\frac{\partial \beta(u - v)}{\partial \eta} = 0$ y $\frac{\partial \delta(u - v)}{\partial \eta} = 0$ respectivamente, por lo tanto la matriz de Jacobi de Φ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \xi} & \frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \xi} & \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

no es invertible, una contradicción. Por lo tanto, podemos suponer que $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \neq \frac{\partial \phi_1}{\partial v}$. Con esta hipótesis, la ecuación $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} = 0$ se satisface si y sólo si $\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = \frac{\partial \phi_2}{\partial v}$ y $\frac{\partial \phi_1}{\partial v} = \frac{\partial \phi_2}{\partial u}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} &= \frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta(u - v)}{\partial \eta} = \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \xi} - \frac{\partial \delta(u - v)}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_2}{\partial v}, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} &= \frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta(u - v)}{\partial \eta} = \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \xi} + \frac{\partial \delta(u - v)}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_2}{\partial u}, \end{aligned}$$

con la suma de ambas igualdades se obtiene

$$\frac{\partial \alpha(u + v)}{\partial \xi} = \frac{\partial \gamma(u + v)}{\partial \xi},$$

y con la diferencia de ambas igualdades se consigue

$$\frac{\partial \beta(u-v)}{\partial \eta} = -\frac{\partial \delta(u-v)}{\partial \eta}.$$

Por lo tanto $\phi_2(\xi(u, v), \eta(u, v)) = \gamma(u+v) + \delta(u-v) = \alpha(u+v) - \beta(u-v)$ y el difeomorfismo Φ tiene la forma $\Phi(u, v) = (\alpha(u+v) + \beta(u-v), \alpha(u+v) - \beta(u-v))$. ■

Proposición 15 *El espacio de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.19) tiene dimensión cuatro y el grupo de transformaciones lineales que preservan este espacio contiene a un subgrupo isomorfo a $\mathbb{R}^* \times SO(2)$.*

Demostración. Una ecuación diferencial binaria lineal del tipo (2.19) tiene la forma

$$(a_1x + a_2y) dy^2 + 2(b_1x + b_2y) dx dy - (a_1x + a_2y) dx^2 = 0, \quad (2.28)$$

entonces podemos identificar al espacio de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.28) con el espacio vectorial real de dimensión 4

$$\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}\}.$$

Sea $\mathcal{A} = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid AA^t = \lambda I, \lambda > 0\}$. Todo elemento $A \in \mathcal{A}$ tiene una de las siguientes formas

$$1) \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}.$$

Haciendo uso de la observación de la página 36 y la proposición 13, se obtiene que los elementos de \mathcal{A} preservan el espacio de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.28).

Definimos el homomorfismo

$$\Omega : \mathbb{R}^* \times SO(2) \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \Omega(\mu, A) = \mu A.$$

El cual está bien definido ya que si $A \in SO(2)$ satisface que $AA^t = I$, por lo tanto $(\mu A)(\mu A)^t = \mu^2 I$. Así tomando $\mu^2 = \lambda$, se tiene que $\mu A \in \mathcal{A}$. La función Ω es monomorfismo pues si

$$(\mu_1, A_1) \neq (\mu_2, A_2) \implies \Omega((\mu_1, A_2)) = \mu_1 A_1 \neq \mu_2 A_2 = \Omega((\mu_2, A_2),)$$

esto es debido a que la igualdad $\mu_1 A_1 = \mu_2 A_2$ es equivalente a $A_1 = \mu_1^{-1} \mu_2 A_2$. Como $\det(A_1) = 1$ y $\det(A_2) = 1$, entonces $\mu_1^{-1} \mu_2 = 1$ con lo que concluimos que $\mu_1 = \mu_2$ y $A_1 = A_2$, por lo que $(\mu_1, A_1) = (\mu_2, A_2)$. También se tiene que Ω es epimorfismo, pues si $C \in \mathcal{A}$ se satisface $CC^t = \lambda I$, para algún $\lambda > 0$. Entonces $\lambda = \lambda \det I = \det CC^t = (\det C)(\det C^t) = (\det C)^2$.

Si $\det C > 0$, la matriz $A = (\sqrt{\lambda})^{-1} C$ y $\mu = \sqrt{\lambda}$ satisfacen que

$$\Omega(\mu, A) = \Omega\left(\sqrt{\lambda}, (\sqrt{\lambda})^{-1} C\right) = \sqrt{\lambda} (\sqrt{\lambda})^{-1} C = C.$$

Si $\det C < 0$, la matriz $A = -(\sqrt{\lambda})^{-1} C$ y $\mu = -\sqrt{\lambda}$ satisfacen

$$\Omega(\mu, A) = \Omega\left(-\sqrt{\lambda}, -(\sqrt{\lambda})^{-1} C\right) = -\sqrt{\lambda} \left(-(\sqrt{\lambda})^{-1} C\right) = C.$$

Por lo tanto, Ω es isomorfismo. ■

Proposición 16 *El espacio de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.20) tiene dimensión cuatro y el grupo de transformaciones lineales que preservan este espacio contiene a*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a^2 - b^2 \neq 0 \right\},$$

el cual es isomorfo a $\mathbb{R}^* \times G$, donde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(ix) & i \operatorname{sen}(ix) \\ -i \operatorname{sen}(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostración. El espacio de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.20) es identificado con el espacio vectorial real de dimensión 4

$$\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}\}.$$

Por la proposición 14, los elementos de H preservan el espacio de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.20).

Dados dos números a, b tales que $a^2 - b^2 = 1$ entonces podemos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos ix$ y $b = i \operatorname{sen} ix$, esto es debido a que $\cos ix = \cosh x$ y $i \operatorname{sen} ix = -\sinh x$. Siendo así, veamos ahora que podemos identificar al subgrupo H con el subgrupo de matrices:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \cos(ix) & \mu i \operatorname{sen}(ix) \\ \mu i \operatorname{sen}(ix) & \mu \cos(ix) \end{pmatrix} \middle| \mu, x \in \mathbb{R}, \mu \neq 0 \right\}.$$

Si la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in H$, entonces $\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{b^2}{a^2-b^2} = 1$. Escogemos $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a}{\sqrt{\pm(a^2-b^2)}} = \cos ix$ y $\frac{b}{\sqrt{\pm(a^2-b^2)}} = i \operatorname{sen} ix$, también elegimos el signo "+" si $a^2 - b^2 > 0$ o el signo "-" si $a^2 - b^2 < 0$. Entonces la siguiente relación nos da la identificación requerida,

$$\left(\sqrt{\pm(a^2-b^2)} \right) \begin{pmatrix} \cos(ix) & i \operatorname{sen}(ix) \\ i \operatorname{sen}(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Definimos $\Psi : \mathbb{R}^* \times G \longrightarrow K$, como

$$(\lambda, M) = \left(\lambda, \begin{pmatrix} \cos(ix) & i \operatorname{sen}(ix) \\ -i \operatorname{sen}(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \cos(ix) & \lambda i \operatorname{sen}(ix) \\ \lambda i \operatorname{sen}(ix) & \lambda \cos(ix) \end{pmatrix}.$$

Así definido, Ψ es un morfismo de grupos. Para ver esto, sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ y $M, N \in G$.

Como

$$MN = \begin{pmatrix} \cos(ix) & i \operatorname{sen}(ix) \\ -i \operatorname{sen}(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(iy) & i \operatorname{sen}(iy) \\ -i \operatorname{sen}(iy) & \cos(iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(ix+iy) & i \operatorname{sen}(ix+iy) \\ -i \operatorname{sen}(ix+iy) & \cos(ix+iy) \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{MN} = \begin{pmatrix} \cos(ix) & i \operatorname{sen}(ix) \\ i \operatorname{sen}(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(iy) & i \operatorname{sen}(iy) \\ i \operatorname{sen}(iy) & \cos(iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(ix+iy) & i \operatorname{sen}(ix+iy) \\ i \operatorname{sen}(ix+iy) & \cos(ix+iy) \end{pmatrix}.$$

Entonces: $\Psi(\lambda\mu, MN) = \lambda\mu\overline{MN} = \overline{\lambda M\mu N} = \Psi(\lambda, M)\Psi(\mu, N)$, esto es:

$$\begin{aligned} \Psi\left(\lambda\mu, \begin{pmatrix} \cos(ix+iy) & i\sin(ix+iy) \\ -i\sin(ix+iy) & \cos(ix+iy) \end{pmatrix}\right) &= \lambda\mu \begin{pmatrix} \cos(ix+iy) & i\sin(ix+iy) \\ i\sin(ix+iy) & \cos(ix+iy) \end{pmatrix} \\ &= \Psi\left(\lambda, \begin{pmatrix} \cos(ix) & i\sin(ix) \\ -i\sin(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix}\right) \Psi\left(\mu, \begin{pmatrix} \cos(iy) & i\sin(iy) \\ -i\sin(iy) & \cos(iy) \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

El morfismo Ψ es inyectivo, pues la igualdad $\Psi(\lambda, M) = I$ se cumple si y sólo si $\lambda \cos(ix) = 1$, $\lambda i \sin(ix) = 0$, esto es equivalente a que $\lambda = 1$ y $M = I$.

De la definición podemos ver que Ψ es epimorfismo:

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos(ix) & \lambda i \sin(ix) \\ \lambda i \sin(ix) & \lambda \cos(ix) \end{pmatrix} = \Psi\left(\lambda, \begin{pmatrix} \cos(ix) & i\sin(ix) \\ -i\sin(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix}\right).$$

Por lo tanto Ψ es isomorfismo. ■

A una ecuación diferencial binaria $(a_1x + a_2y)(dy^2 - dx^2) + 2(b_1x + b_2y)dxdy$ la podemos identificar con la matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Tomando en cuenta esta asignación, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 17 *La transformación $A \mapsto C^{-2}AC$, con $C \in SO(2)$, es una acción de $SO(2)$ en el conjunto de ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.19).*

Demostración. Todo elemento Φ en $SO(2)$ tiene la forma $\Phi(u, v) = (ru - qv, qu + rv)$ con $r^2 + q^2 = 1$ y satisface las igualdades (2.21) y (2.22), por lo que Φ preserva las ecuaciones diferenciales binarias lineales del tipo (2.19).

Debido a que en forma matricial la ecuación diferencial binaria en coordenadas (x, y) está dada por

$$\begin{pmatrix} dy^2, & 2dxdy, & dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

entonces al aplicar el difeomorfismo Φ , en las coordenadas (u, v) está dada por:

$$\begin{pmatrix} dv^2, & 2dudv, & du^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 & 2qr & q^2 \\ -qr & r^2 - q^2 & qr \\ q^2 & -2qr & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

si los nuevos coeficientes son:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ -A_1 & -A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 2qr & q^2 \\ -qr & r^2 - q^2 & qr \\ q^2 & -2qr & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -q \\ q & r \end{pmatrix}$$

Es sólo un cálculo directo ver que se satisface la igualdad:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 - q^2 & 2qr \\ -2qr & r^2 - q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -q \\ q & r \end{pmatrix}.$$

Debido a que la matriz $\begin{pmatrix} r^2 - q^2 & 2qr \\ -2qr & r^2 - q^2 \end{pmatrix}$ es la inversa de $\begin{pmatrix} r & -q \\ q & r \end{pmatrix}^2$, entonces la transformación $A \mapsto C^{-2}AC$ está bien definida y es una acción pues $SO(2)$ es abeliano. ■

Proposición 18 *Si la ecuación $(a_1x + a_2y)(dy^2 + dx^2) + 2(b_1x + b_2y)dxdy$ es identificada con la matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, entonces tenemos una acción dada por $A \mapsto B^2AB$, tal que $B \in H$.*

Demostración. Si $B \in H$, entonces existen $r, q \in \mathbb{R}$ tal que $B = \begin{pmatrix} r & q \\ q & r \end{pmatrix}$. Escribiendo $\Phi(u, v) = (ru + qv, qu + rv)$ y sustituyendo en la ecuación

$$(a_1x + a_2y)(dy^2) + 2(b_1x + b_2y)dxdy + (a_1x + a_2y)(dx^2) = 0,$$

se obtiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} du^2 & 2dudv & dv^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 & 2qr & q^2 \\ qr & q^2 + r^2 & qr \\ q^2 & 2qr & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Si en coordenadas (u, v) los coeficientes de la ecuación diferencial después de la transformación son

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 2qr & q^2 \\ qr & q^2 + r^2 & qr \\ q^2 & 2qr & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & q \\ q & r \end{pmatrix},$$

entonces, tenemos la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 + q^2 & 2qr \\ 2qr & r^2 + q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & q \\ q & r \end{pmatrix},$$

esto muestra que la acción está bien definida, pues

$$\begin{pmatrix} r & q \\ q & r \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} q^2 + r^2 & 2qr \\ 2qr & q^2 + r^2 \end{pmatrix}.$$

■

2.5. Formas normales topológicas.

Considere una ecuación diferencial binaria de la forma

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2 = 0, \quad (2.29)$$

con a, b, c funciones diferenciables y con parte lineal no nula. Suponga que la curva discriminante $\Delta(x, y) = 0$ es de tipo Morse nodo en una vecindad del origen y que el polinomio $\phi(p)$ no tiene raíces repetidas ni raíces en común con el polinomio $\alpha_1(p)$. Bajo estas hipótesis tenemos el siguiente resultado:

Teorema 19 *Existe un germen de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ que lleva las curvas integrales de (2.29) en las curvas integrales de alguna de las formas normales*

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ Silla} & ydy^2 + 2xdxdy + ydx^2 = 0, \\ 1 \text{ Nodo} & ydy^2 - \frac{1}{2}xdxdy + ydx^2 = 0, \\ 3 \text{ Sillas} & ydy^2 - 4xdxdy + ydx^2 = 0, \\ 2 \text{ Sillas} + 1 \text{ Nodo} & ydy^2 + 2(y-x)dxdy + ydx^2 = 0, \\ 1 \text{ Silla} + 2 \text{ Nodos} & ydy^2 - \frac{4}{3}xdxdy + ydx^2 = 0. \end{array}$$

En general, una ecuación diferencial binaria (2.29) tal que el discriminante tiene un nodo en el origen puede ser transformada a la pre-forma normal

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y + \tilde{b}(x, y)) dx dy + ydx^2 = 0, \quad (2.30)$$

para esta ecuación, la función $\tilde{b}(x, y)$ no tiene términos lineales ni constantes. El discriminante para esta preforma normal es de tipo Morse nodo.

Se ha visto que tanto el discriminante como el número y tipo de puntos singulares del campo vectorial ξ sólo dependen del 1-jet de las funciones a, b y c . En particular, para la ecuación (2.30) éstos sólo dependen de b_1 y b_2 . Por lo tanto, tomando en cuenta lo hecho en el apartado 2.4.1 se tiene que se puede clasificar una ecuación diferencial binaria genérica (2.29) por medio de su discriminante, el número de puntos singulares de su levantamiento ξ y el tipo topológico de éstos. La partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ exhibe las cinco posibilidades enunciadas si el discriminante tiene una singularidad de Morse nodo en el origen.

Para completar la prueba del teorema resta probar que en una vecindad lo suficientemente pequeña del punto $(0, 0)$, las curvas integrales de la ecuación diferencial (2.30) pueden ser llevadas en las curvas integrales de la ecuación diferencial lineal

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dx dy + ydx^2 = 0. \quad (2.31)$$

Para esto, es suficiente probar que existe un homeomorfismo $\widehat{\Psi}$ entre \widehat{M} , la cubierta de la ecuación diferencial (2.30) y \widehat{N} , la cubierta de la ecuación diferencial lineal (2.31), que lleve curvas integrales del levantamiento de la ecuación (2.30) en las curvas integrales del otro campo vectorial que es un levantamiento de la ecuación (2.31) y que sea *compatible con la proyección* π , es decir, dados dos puntos $q_1, q_2 \in \widehat{M}$, tales que $\pi(q_1) = \pi(q_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\widehat{\Psi}(q_1) = q_1'$ y $\widehat{\Psi}(q_2) = q_2'$, entonces $\pi(q_1') = \pi(q_2') \in \mathbb{R}^2$. Ahora se procede a construir el homeomorfismo $\widehat{\Psi}$.

Con el significado habitual, sean

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left\{ (x, y, p) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, p) = yp^2 + 2(b_1x + b_2y + \tilde{b}(x, y))p + y = 0 \right\}, \\ \xi &= F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned}$$

los determinados por la ecuación (2.30). Mientras que

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \left\{ (x, y, p) \in \mathbb{R}^3 : \Upsilon(x, y, p) = yp^2 + 2(b_1x + b_2y)p + y = 0 \right\}, \\ \vartheta &= \Upsilon_p \frac{\partial}{\partial x} + p\Upsilon_p \frac{\partial}{\partial y} - (\Upsilon_x + p\Upsilon_y) \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned}$$

sean los determinados por la ecuación diferencial binaria lineal (2.31).

Dada una ecuación diferencial binaria tal que la curva discriminante $\Delta(x, y) = 0$ es de tipo Morse nodo, además del eje p , dos curvas contenidas en M son proyectadas por π en el discriminante de la ecuación diferencial. Cada una de estas curvas intersecta al eje p en un punto (Ver lema 3). A este par de curvas les llamamos *curvas pliegue* de la superficie M .

Si $V \subseteq M$ es una vecindad del eje p , entonces las curvas pliegue dividen a V en tres subconjuntos. Uno de estos subconjuntos tiene en su interior al punto $(0, 0, 0)$, este subconjunto es el único acotado si V está definida en puntos (x, y, p) tales que (x, y) pertenece a una vecindad lo suficientemente pequeña de $(0, 0)$ y la intersección de las curvas pliegue con V está contenida en la frontera de V . Se denota por Ω_M a la cerradura en M de este subconjunto acotado. De manera similar, esto ocurre para una vecindad del eje p , $W \subseteq N$. Siendo así, los subconjuntos Ω_M y Ω_N son compactos.

Proposición 20 *Existe un homeomorfismo $\psi : \Omega_M \rightarrow \Omega_N$ que lleva las curvas integrales del campo vectorial $\xi|_{\Omega_M}$ en las curvas integrales del campo vectorial $\vartheta|_{\Omega_N}$.*

Para la demostración de esta proposición, necesitamos el siguiente material.

Observación. (1) Dada una ecuación diferencial binaria (2.29), en cada punto singular del campo vectorial ξ uno de los eigenvectores es paralelo al eje p .

(2) Debido a que $F_p(0, 0, p) = 0$, en cada punto $(0, 0, p)$ que no es singular, el campo vectorial ξ es de la forma $\xi(0, 0, p) = -(F_x(0, 0, p) + pF_y(0, 0, p)) \frac{\partial}{\partial p}$. Por lo tanto, el campo vectorial apunta en la dirección del eje p en puntos no singulares del mismo.

(3) Para la ecuación diferencial binaria (2.30), el número de puntos singulares de su levantamiento ξ , coincide con el número de puntos singulares del levantamiento ϑ , pues para ambos campos vectoriales el polinomio $\phi(p) = p^3 + 2b_2p + (2b_1 + 1)p$, determina la cantidad de puntos singulares en el eje p . La cantidad y el tipo topológico de los puntos singulares de los dos campos sólo depende de b_1 y b_2 . De esta dependencia, se tiene también que: un punto $\mathcal{P} = (0, 0, p) \in \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ es punto singular silla (nodo) del campo ξ si y sólo si \mathcal{P} es punto singular silla (nodo) del campo ϑ .

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3 \in \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ tres puntos singulares del campo vectorial ξ , en el caso que ξ tenga un único punto singular, podemos pensar que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$, así, se enuncia la siguiente afirmación.

Afirmación 1 Para $i = 1, 2, 3$ existen vecindades $A_i \subseteq \mathbb{M}$ y $B_i \subseteq \mathbb{N}$, ambas del punto singular $\mathcal{P}_i = (0, 0, p_i)$ y un homeomorfismo $g_i : A_i, \mathcal{P}_i \rightarrow B_i, \mathcal{P}_i$, que lleva las curvas integrales de ξ restringido a A_i en las curvas integrales de ϑ restringido a B_i .

Demostración. Como \mathbb{M} y \mathbb{N} son superficies diferenciables en los puntos del eje p , entonces la afirmación es consecuencia del teorema de Hartman-Gröbman, pues \mathcal{P}_i es un punto singular del mismo tipo para ambos campos vectoriales. ■

Afirmación 2 Para cada punto $P = (0, 0, p)$ del conjunto $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ que no es singular del campo vectorial ξ existe una vecindad $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{M}$ de $P = (0, 0, p)$ y un difeomorfismo $\Phi : \mathcal{V}, P \rightarrow \mathcal{V}, P$ que lleva el campo vectorial ξ en el campo vectorial constante $\varepsilon = \frac{\partial}{\partial p}$. Esto ocurre también para el campo vectorial ϑ tangente a \mathbb{N} , por lo tanto, los campos vectoriales ξ y ϑ son localmente difeomorfos en cada punto $P = (0, 0, p)$ no singular.

Demostración. La existencia de los difeomorfismos es garantizada por el teorema de rectificación de campos vectoriales. ■

Demostración de la proposición 20. El origen $\mathcal{P}_1 = (0, 0, 0)$ es un punto singular de ξ y de ϑ , por lo tanto, en $\Omega_{\mathbb{M}}$ y en $\Omega_{\mathbb{N}}$ hay al menos un punto singular de ξ y de ϑ , respectivamente.

Por el momento, suponga que en $\Omega_{\mathbb{M}}$ hay sólo un punto singular del campo ξ . Ahora veamos que el homeomorfismo $g_1 : A_1, \mathcal{P}_1 \rightarrow B_1, \mathcal{P}_1$, se extiende a $\Omega_{\mathbb{M}}$. Como $\Omega_{\mathbb{M}}$ es compacto, las curvas integrales del campo ξ , definidas en A_1 , pueden ser prolongadas a la frontera de $\Omega_{\mathbb{M}}$ (Ver [2] pág 304-305). En particular, curvas integrales que intersectan a A_1 son prolongadas a los puntos pliegue que están en $\Omega_{\mathbb{M}}$. Análogamente, lo anterior se satisface en $\Omega_{\mathbb{N}}$. Por la afirmación 2, en puntos no singulares los campos vectoriales son difeomorfos y se puede extender el homeomorfismo g_1 a todo $\Omega_{\mathbb{M}}$, de tal forma que las curvas pliegue de $\Omega_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{M}$ van en las curvas pliegue de $\Omega_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$.

Si en $\Omega_{\mathbb{M}}$ hay más de un punto singular del campo ξ , usamos los homeomorfismos $g_i : A_i, \mathcal{P}_i \rightarrow B_i, \mathcal{P}_i$ definidos en los puntos singulares y para extenderlos a $\Omega_{\mathbb{M}}$ usamos la afirmación 2. ■

Ahora se debe extender el homeomorfismo $\psi : \Omega_{\mathbb{M}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{N}}$ a un homeomorfismo entre $\widehat{\mathcal{V}} \subseteq \widehat{\mathbb{M}}$ y $\widehat{\mathcal{W}} \subseteq \widehat{\mathbb{N}}$ vecindades de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$, el nexo es la siguiente proposición.

Proposición 21 Para una ecuación diferencial binaria (2.29) tal que $a = c$, existe una involución $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}$, en $\widehat{\mathbb{M}} = \{(x, y), [\alpha : \beta] \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : a(x, y)\alpha^2 + 2b(x, y)\alpha\beta + a(x, y)\beta^2 = 0\}$, definida por la regla $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}(x, y, [\alpha : \beta]) = (x, y, [\beta : \alpha])$. Las curvas pliegue de $\widehat{\mathbb{M}}$ son el conjunto de puntos fijos de la involución $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}$. Esta involución es diferenciable y deja invariante al conjunto $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$, más aún, lleva curvas integrales del campo vectorial ξ en curvas integrales del campo vectorial ξ .

Demostración. Un punto $(x, y, [\alpha : \beta]) \in \widehat{\mathbb{M}}$ está en una curva pliegue si y sólo si $(x, y, [\alpha : \beta])$ es una raíz de multiplicidad dos de la ecuación $a(x, y)\alpha^2 + 2b(x, y)\alpha\beta + a(x, y)\beta^2 = 0$. Nótese que $(x, y, [\alpha : \beta])$ y $(x, y, [\beta : \alpha])$ son ambas raíces de esta ecuación, así, $(x, y, [\alpha : \beta]) \in \widehat{\mathbb{M}}$ está en una curva pliegue si y sólo si $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}(x, y, [\alpha : \beta]) = (x, y, [\alpha : \beta])$.

Como $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}^2(x, y, [\alpha : \beta]) = (x, y, [\alpha : \beta])$, entonces $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}^2$ es la identidad en $\widehat{\mathbb{M}}$ y por lo tanto la involución $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}$ es diferenciable. Es claro que $\mathcal{I}_{\widehat{\mathbb{M}}}(\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$.

La involución $\mathcal{I}_{\widehat{M}}$ intercambia en cada punto (x, y) las direcciones $[\alpha : \beta]$ y $[\beta : \alpha]$, este intercambio produce un intercambio de las rectas tangentes a \widehat{M} que están en la dirección de ξ en los puntos $(x, y, [\alpha : \beta])$ y $(x, y, [\beta : \alpha])$ respectivamente, así, $\mathcal{I}_{\widehat{M}}$ lleva curvas integrales de ξ en curvas integrales ξ . ■

En \widehat{M} , el subconjunto Ω_M contiene a una de las cubiertas del subconjunto del plano que satisface $\Delta(x, y) > 0$ con (x, y) en una vecindad del origen y también contiene a las curvas pliegue. La otra cubierta es llevada por la involución en la cubierta contenida en Ω_M . En particular, las curvas integrales del campo ξ en el complemento de Ω_M son llevadas por la involución $\mathcal{I}_{\widehat{M}}$ en las curvas integrales de ξ en Ω_M .

Ahora podemos definir un homeomorfismo $\widehat{\Psi} : \widehat{V} \longrightarrow \widehat{W}$, con $\widehat{V} \subseteq \widehat{M}$, $\widehat{W} \subseteq \widehat{N}$ vecindades de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Considere a $\psi : \Omega_M \subset \widehat{M} \longrightarrow \Omega_N \subset \widehat{N}$ el homeomorfismo de la proposición 20. Entonces se define :

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(x, y, [\alpha : \beta]) &= \psi(x, y, [\alpha : \beta]) \text{ si } (x, y, [\alpha : \beta]) \in \Omega_M, \\ \widehat{\Psi}(x, y, [\alpha : \beta]) &= \mathcal{I}_{\widehat{N}} \circ \psi \circ \mathcal{I}_{\widehat{M}}(x, y, [\alpha : \beta]) \text{ si } (x, y, [\alpha : \beta]) \notin \Omega_M. \end{aligned}$$

Así definido el homeomorfismo $\widehat{\Psi}$, éste lleva las curvas integrales del campo vectorial $\widehat{\xi}$ en las curvas integrales del campo vectorial $\widehat{\vartheta}$, deja invariante a $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ y lleva el conjunto de puntos pliegue de \widehat{M} en el conjunto de puntos pliegue de \widehat{N} , mas aún:

Afirmación 3 *El homeomorfismo $\widehat{\Psi} : \widehat{V} \longrightarrow \widehat{W}$ induce un homeomorfismo del plano $\{(x, y)\}$ el cual lleva las curvas integrales de la ecuación (2.30) en las curvas integrales de la ecuación (2.31).*

Demostración. El homeomorfismo $\widehat{\Psi}$ es tal que si dados dos puntos $(x, y, [\alpha : \beta]), (x, y, [\beta : \alpha]) \in \widehat{V}$ con $\widehat{\Psi}(x, y, [\alpha : \beta]) = (x', y', [\beta' : \alpha'])$, entonces $\widehat{\Psi}(x, y, [\beta : \alpha]) = (x', y', [\beta' : \alpha'])$. Por lo tanto, se define $h : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ como $h(x, y) = (x', y')$. ■

Esto concluye la prueba del teorema.

2.5.1. Análisis geométrico en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 de las curvas integrales de una ecuación diferencial binaria genérica con una singularidad de tipo Morse nodo.

En este apartado, sólo se consideran ecuaciones diferenciales binarias genéricas con una singularidad de tipo Morse nodo. Se puede asumir que las ecuaciones diferenciales son dadas de tal forma que $a(x, y) = c(x, y)$ y más aún, por el teorema 19 se puede suponer que las funciones a y b son lineales.

Para conocer el comportamiento locales de las curvas integrales del campo de direcciones bivaluado nos auxiliaremos de la variedad

$$\widehat{K} = \{((x, y), [\delta : \gamma]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : a(x, y)\delta + b(x, y)\gamma = 0\}$$

y de la función $T : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{K}$ definida por

$$T((x, y), [\alpha : \beta]) = ((x, y), [\alpha^2 + \beta^2 : 2\alpha\beta]).$$

Note que la función T está bien definida, pues para todo punto $((x, y), [\alpha : \beta]) \in \widehat{M}$, se satisface $(\alpha^2 + \beta^2) a(x, y) + \alpha\beta 2b(x, y) = 0$. A continuación veremos algunas propiedades de estos objetos.

En coordenadas afines el conjunto \widehat{K} es descrito por $K = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 : a(x, y)p + b(x, y) = 0\}$. De manera análoga a la proposición 5 se muestra la siguiente proposición.

Proposición 22 *Si la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a^2(x, y)$ tiene una singularidad de Morse entonces K es una superficie diferenciable en una vecindad del eje p .*

Demostración. Sea $G(x, y, p) = a(x, y)p + b(x, y)$, como $G_p(x, y, p) = a(x, y)$ se anula en el eje p , entonces K no es una superficie diferenciable si las derivadas parciales G_x y G_y se anulan simultáneamente en algún punto $(0, 0, p)$,

$$\begin{aligned} G_x(0, 0, p) &= a_1p + b_1, \\ G_y(0, 0, p) &= a_2p + b_2. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales G_x y G_y se anulan simultáneamente en algún punto $(0, 0, p)$ si y sólo si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Para una ecuación diferencial binaria en la que $a(x, y) = c(x, y)$, la función F está dada por $F(x, y, p) = (p^2 + 1)a(x, y) + pb(x, y)$ y la ecuación (2.4) es simplemente

$$-4(b_2a_1 - a_2b_1)^2 = 0.$$

Así, la condición $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ es equivalente a que la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a^2(x, y)$ no tenga una singularidad de Morse. ■

Observación. Se puede considerar al conjunto \widehat{K} como la cerradura de la gráfica de una función $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$, donde para cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene que $\rho(x, y) = [-b(x, y) : a(x, y)]$ si $a(x, y)\delta + b(x, y)\gamma = 0$, es decir, a cada punto distinto del origen, ρ le asocia la dirección dada por la recta $a(x, y)\delta + b(x, y)\gamma = 0$.

Si se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y) = a_1x + a_2y + O(\|(x, y)\|^2), \\ \frac{dy}{dx} &= b(x, y) = b_1x + b_2y + O(\|(x, y)\|^2), \end{aligned}$$

entonces el campo de direcciones en el plano $a(x, y)dy - b(x, y)dx = 0$ determina la función ρ .

Si se supone que la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a^2(x, y)$ tiene una singularidad de Morse en el origen, entonces $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. En consecuencia la matriz asociada a la parte lineal del sistema tiene determinante distinto de cero y, por lo tanto, sus valores propios son distintos de cero. Esto implica que el origen es un punto singular no degenerado del sistema de ecuaciones diferenciales, es decir, el origen es equivalente topológicamente a un punto silla, a un nodo, a un foco o a un centro, si los valores propios son reales con signo distintos, con signos iguales y/o valores iguales, complejos o imaginarios puros, respectivamente. Notemos que el índice de cada uno de estos puntos singulares es 1 ó -1.

Ahora consideremos una recta en el plano $\{(x, y)\}$ que pasa por el origen. Para cada punto de esta recta distinto del origen una dirección del campo de direcciones $a(x, y)dy - b(x, y)dx = 0$ le es asignado,

si giramos continuamente la recta de 0 a 180 grados tomando como centro de rotación al origen, entonces se toman todas las direcciones del campo de direcciones y se lleva la recta en sí misma, de manera que puntos antípodos van en puntos antípodos. Así, usando también que el índice de los puntos singulares es ± 1 se sigue que ρ toma todos los valores en $\mathbb{R}P^1$ e identifica las imagenes de puntos antípodos de la recta. Por lo tanto se tiene la siguiente proposición:

Proposición 23 *Si la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a^2(x, y)$ tiene una singularidad de Morse en el origen, entonces \widehat{K} contiene una vecindad Γ de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ la cual es difeomorfa a una banda de Möbius.*

La función $T : \widehat{M} \rightarrow \widehat{K}$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1 *Es diferenciable y el conjunto de puntos críticos de T consiste de los puntos $(x, y, [\alpha : \beta]) \in \widehat{M}$ tal que $\Delta(x, y) = 0$, con $(x, y) \neq (0, 0)$ y de los puntos $(0, 0, [-1 : 1])$, $(0, 0, [1 : 1]) \in \widehat{M}$.*

En cartas coordenadas la función T tiene alguna de las siguientes representaciones locales

$$\begin{aligned} T(x, y, q) &= \left(x, y, \frac{2q}{1+q^2} \right) && \text{si } \beta \neq 0, \\ T(x, y, p) &= \left(x, y, \frac{1+p^2}{2p} \right) && \text{si } \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

De esta forma, la matriz de Jacobi de T es diagonal (en cualquiera de las dos representaciones locales). Entonces, para conocer los puntos críticos de T es suficiente encontrar los puntos en los que se anulan las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{2q}{1+q^2} \right)$ y $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1+p^2}{2p} \right)$, pues los otros valores sobre la diagonal son 1. Notemos que si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $0 = \Delta(x, y) = b^2(x, y) - a^2(x, y)$, entonces $q = \frac{-b(x, y)}{a(x, y)}$. Así, en el caso $\beta \neq 0$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{2q}{1+q^2} \right) = -2 \frac{q^2 - 1}{(q^2 + 1)^2} = -2 \frac{\left(\frac{-b(x, y)}{a(x, y)} \right)^2 - 1}{\left(\left(\frac{-b(x, y)}{a(x, y)} \right)^2 + 1 \right)^2} = 2 \frac{a^2(x, y) - b^2(x, y)}{a^2(x, y) + b^2(x, y)} = 0.$$

Si $(x, y) = (0, 0)$, entonces los puntos $(0, 0, [-1 : 1])$, $(0, 0, [1 : 1]) \in \widehat{M}$ en coordenadas afines son $(0, 0, -1)$ y $(0, 0, 1)$, en consecuencia $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{2q}{1+q^2} \right) ((0, 0, \pm 1)) = 0$. El caso $\alpha \neq 0$ es análogo.

Notemos que el conjunto de puntos críticos de T se proyecta en las dos ramas del discriminante de la ecuación diferencial binaria, esto es, el conjunto de puntos críticos de T coincide con las curvas pliegue de \widehat{M} .

Propiedad 2 *Para cada elemento $(x, y, [\delta : \gamma])$ en la imagen de T , existen a lo más dos puntos en \widehat{M} que son preimagen este elemento y existe sólo un elemento en la preimagen de $(x, y, [\delta : \gamma])$ si y sólo si $((x, y), [\alpha : \beta])$ es un punto crítico de T .*

La primera parte de esta propiedad es consecuencia de lo siguiente: si $((x, y), [\alpha : \beta]) \in \widehat{M}$ no es un punto crítico de T , entonces $((x, y), [\beta : \alpha]) \in \widehat{M}$ y se tiene

$$T((x, y), [\alpha : \beta]) = ((x, y), [\alpha^2 + \beta^2 : 2\alpha\beta]) = T((x, y), [\beta : \alpha]).$$

La segunda parte es debida a que en puntos del discriminante distintos del origen sólo hay una dirección que satisface la ecuación $a(x, y)\alpha^2 + 2b(x, y)\alpha\beta + a(x, y)\beta^2 = 0$ y en consecuencia sólo hay un único punto $((x, y), [\beta : \alpha]) \in \widehat{M}$.

Propiedad 3 *La imagen de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ bajo la función T es un subconjunto cerrado propio de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset \widehat{K}$, por lo tanto, $T(\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1)$ es homeomorfo a un intervalo cerrado. La frontera de este intervalo son los puntos $(0, 0, [\pm 1 : 1])$.*

Una forma de ver esto es analizando el comportamiento de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. La imagen de f es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Notemos además que $T((x, y), [0 : 1]) = ((x, y), [1 : 0]) = T((x, y), [1 : 0])$.

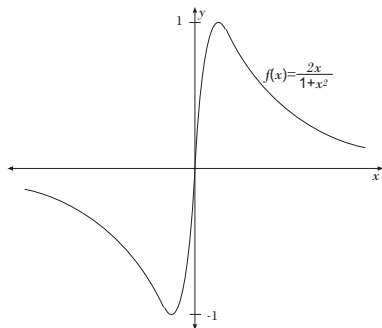


Figura 2.7: La función $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ determina el comportamiento de la función T .

Observemos que si $\Gamma \subseteq \widehat{M}$ es una vecindad compacta de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$, entonces $T(\Gamma)$ es una vecindad compacta de $T(\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1)$. Por simplicidad podemos pensar que Γ es tal que $T(\Gamma)$ es homeomorfa a un rectángulo de la forma $[-t, t] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$.

Propiedad 4 *Si $\mathcal{P}_i = (0, 0, p_i)$, $i = 1, 2, 3$ son tres puntos singulares distintos del campo vectorial ξ , entonces $T(\mathcal{P}_1)$, $T(\mathcal{P}_2)$ y $T(\mathcal{P}_3)$ son tres puntos distintos en $T(\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1)$.*

En una carta afín de $\mathbb{R}P^1$, se tiene que $T(x, y, p) = (x, y, \frac{2p}{1+p^2})$. Dos puntos singulares del campo vectorial ξ , $\mathcal{P}_1 = (0, 0, p_1)$ y $\mathcal{P}_2 = (0, 0, p_2)$, satisfacen $T(\mathcal{P}_1) = T(\mathcal{P}_2)$ si y sólo si $\frac{2p_1}{1+p_1^2} = \frac{2p_2}{1+p_2^2}$, equivalentemente $0 = -2p_1(1+p_2^2) + 2p_2(1+p_1^2) = 2(p_1 - p_2)(p_1p_2 - 1)$.

Si $p_1 - p_2 = 0$, entonces se satisface la equivalencia. Si por el contrario, $p_1 - p_2$ no es igual a cero, entonces la igualdad $0 = (p_1 - p_2)(p_1p_2 - 1)$ se satisface si $p_1p_2 - 1 = 0$. Para una ecuación diferencial binaria tal que $a = c$, si p_1 y p_2 son raíces del polinomio $\phi(p) = a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + a_2)p + a_1$, las cuales satisfacen $p_1p_2 = 1$, entonces se cumple la ecuación 2.4 y en este caso el discriminante $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a^2(x, y)$ no tiene una singularidad de tipo Morse, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no es posible que $p_1p_2 = 1$. En consecuencia los puntos $T(\mathcal{P}_1)$, $T(\mathcal{P}_2)$ y $T(\mathcal{P}_3)$ son distintos si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 son distintos.

Propiedad 5 *La diferencial de T lleva al campo vectorial ξ en dos campos vectoriales sobre $T(\widehat{M})$ estos dos campos vectoriales coinciden en la imagen de los puntos críticos de T . En el resto de $T(\widehat{M})$ los dos campos vectoriales se intersectan transversalmente.*

Como $\xi = F_P \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$, donde $F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + a(x, y)$, entonces $F_p(x, y, p) = 2a(x, y)p + 2b(x, y)$. Por lo tanto, $F_p(x, y, p) \neq F_p\left(x, y, \frac{1}{p}\right)$,

$$\begin{aligned} & dT(\xi)(F_P(x, y, p), pF_p(x, y, p), -(F_x + pF_y)(x, y, p)) \\ & \neq dT(\xi)\left(F_P\left(x, y, \frac{1}{p}\right), pF_p\left(x, y, \frac{1}{p}\right), -(F_x + pF_y)\left(x, y, \frac{1}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Es cierto también que $F_p(x, y, p)$ y $F_p\left(x, y, \frac{1}{p}\right)$ no son múltiplos y por lo tanto, los dos campos vectoriales se intersectan transversalmente.

Propiedad 6 En consecuencia, si \mathcal{P}_i es un punto singular del campo ξ entonces su imagen, $T(\mathcal{P}_i)$, es singular en sólo uno de los dos campos vectoriales, el otro campo vectorial definido sobre $T(\widehat{M})$ es diferenciable en $T(\mathcal{P}_i)$. Se sigue también que el conjunto $T(\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1) - \{T(\mathcal{P}_1), T(\mathcal{P}_2), T(\mathcal{P}_3)\}$ es unión de curvas integrales comunes a los dos campos vectoriales definidos en $T(\widehat{M})$.

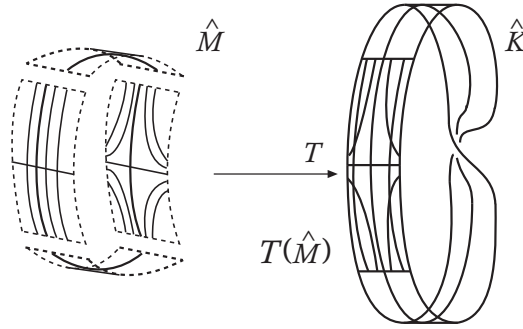


Figura 2.8: El campo vectorial $\widehat{\xi}$ es llevado en un campo bivaluado en $T(\widehat{M})$.

La aplicación T lleva una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subseteq \widehat{M}$ en un subconjunto $D = T(\widehat{M})$ de una banda de Möbius, el cual está acotado por la imagen de los puntos críticos de T . La diferencial de T lleva el campo vectorial $\widehat{\xi}$ en un campo bivaluado sobre D . Estas propiedades nos dan información topológica del comportamiento de las curvas integrales del campo bivaluado sobre un subconjunto de $T(\widehat{M})$. La proyección de $\widehat{K} \rightarrow \mathbb{R}^2$ determina los modelos locales de las curvas integrales de una ecuación diferencial tal que el discriminante es un nodo en el origen.

Observación. El corolario de la página 6 y la observación en la página 20 muestran que las curvas integrales de una ecuación diferencial binaria forman cúspides en puntos del discriminante $\Delta(x, y) = 0$.

Observación. Para la ecuación (2.30) el punto $(0, 0, 0)$ es singular del campo vectorial ξ . Si ξ tiene tres puntos singulares, los restantes se encuentran distribuidos a lo largo del eje p . Los modelos locales (figura 2.8) corresponden al caso en el que los dos puntos singulares distintos del origen se encuentran fuera del intervalo $[-1, 1]$ contenido en el eje p . Los puntos $(0, 0, \pm 1)$ son particulares pues son la intersección del eje p con las curvas que se levantan de las ramas del discriminante de la ecuación (2.30) (ver lema 3). La posición de los puntos singulares con respecto a $(0, 0, \pm 1)$ no es del todo relevante, pues se tiene el siguiente lema:

Lema 4 *Sea*

$$a_2 y dy^2 + 2(b_1 x + b_2 y) dx dy + c_2 y dx^2 = 0, \quad (2.32)$$

una ecuación diferencial lineal tal que su campo vectorial asociado tiene tres puntos singulares. Entonces existe un cambio de coordenadas lineal $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la ecuación diferencial lineal (2.32) es enviada en la ecuación diferencial lineal

$$A_2 y dy^2 + 2(B_1 x + B_2 y) dx dy + C_2 y dx^2 = 0. \quad (2.33)$$

El campo vectorial ξ de la ecuación (2.33) tiene tres puntos singulares, uno de ellos es el origen $(0, 0, 0)$ y es el único punto singular en el intervalo $[-1, 1]$ del eje p , en consecuencia, los dos restantes se encuentran en el complemento del intervalo.

Demostración. Considere un cambio lineal del plano real de la forma $(x, y) = (\alpha x, \delta y)$. La ecuación (2.32) es transformada, mediante este cambio de coordenadas a la ecuación (2.33) donde los coeficientes satisfacen

$$\begin{pmatrix} C_1 & B_1 & A_1 \\ C_2 & B_2 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \delta b_1 & 0 \\ \alpha^2 \delta c_2 & \alpha \delta^2 b_2 & \delta^3 a_2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio $\phi(p) = a_2 p^3 + 2b_2 p^2 + (2b_1 + c_2)p$, asociado a la ecuación (2.32), tiene las raíces

$$p_1 = 0 \text{ y } p_{2,3} = -\frac{1}{a_2} \left(b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 2a_2 b_1 - a_2 c_2} \right).$$

Por otro lado, el polinomio $\varphi(p) = p\delta (+\delta^2 a_2 p^2 + 2\alpha \delta b_2 p + 2\alpha^2 b_1 + \alpha^2 c_2)$, asociado a la ecuación (2.33) tiene las raíces

$$q_1 = 0 \text{ y } q_{2,3} = -\frac{\alpha}{\delta a_2} \left(b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 2a_2 b_1 - a_2 c_2} \right).$$

Note que si las raíces $p_{2,3}$ de $\phi(p)$ son reales, entonces las raíces de $q_{2,3}$ de $\varphi(p)$ son reales. Así, si por ejemplo $0 < p_2 < 1$, entonces $\frac{\alpha}{\delta} p_2 > 1$, al tomar $\delta = p_2$ y $\alpha > 1$. Si $-1 < p_2 < 0$, entonces $\frac{\alpha}{\delta} p_2 < -1$, al tomar $\delta = -p_2$ y $\alpha > 1$. ■

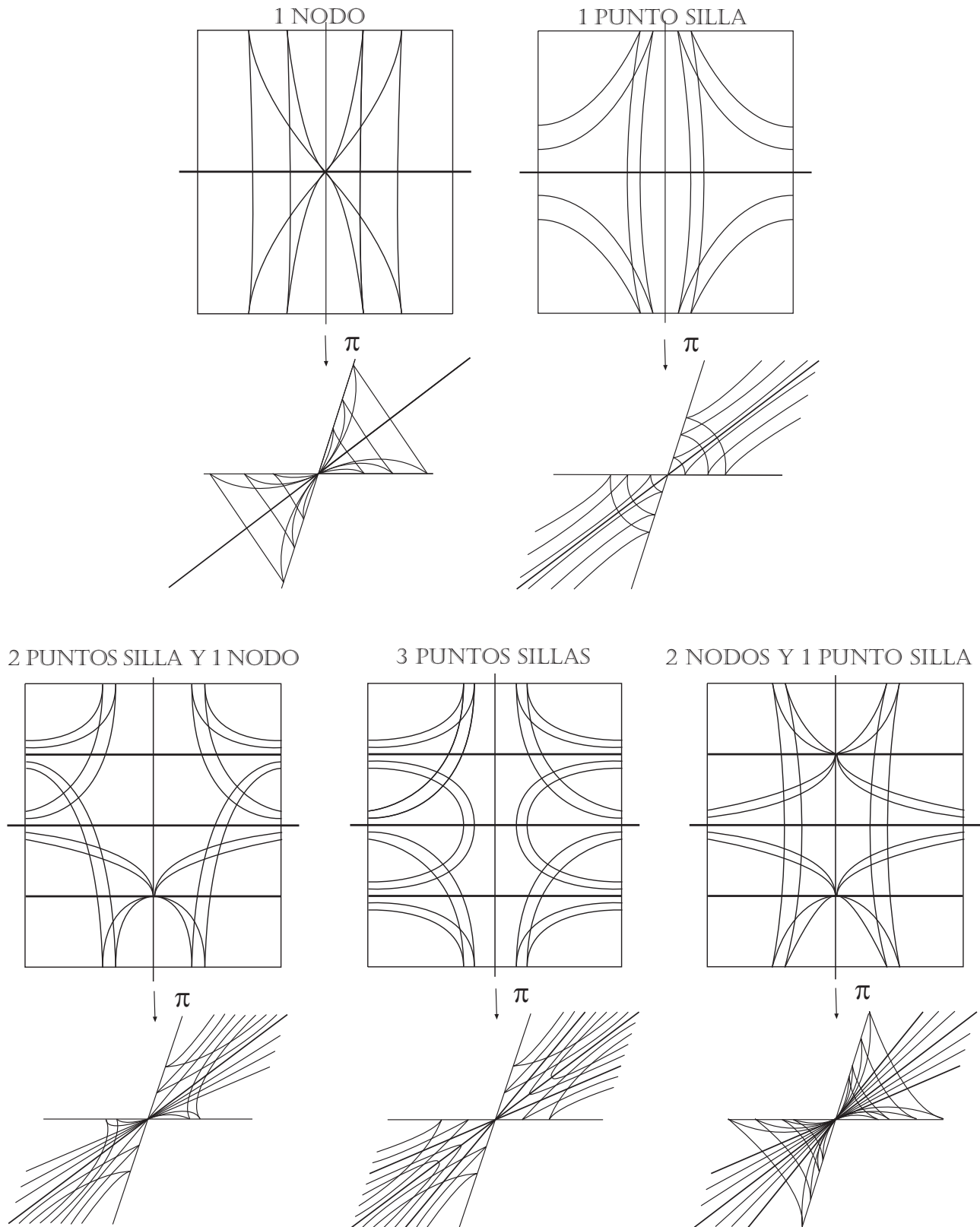


Figura 2.9: Modelos locales de las curvas integrales de una ecuación diferencial binaria con una singularidad del tipo Morse Nudo.

Capítulo 3

Aplicaciones en geometría diferencial de superficies

En este apartado consideraremos superficies diferenciables en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 .

Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 . Localmente S puede ser expresada como la gráfica de una función diferenciable. Para cada $p \in S$ podemos elegir un sistema de coordenadas de \mathbb{R}^3 tal que S es expresada localmente como la gráfica de una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y tal que el plano xy coincide con el plano tangente $T_p S$ a S en p . De esta forma decimos que la superficie es expresada en una *carta de Monge*.

En una carta de Monge, el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3 ha sido identificado con p , por lo que $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$. Bajo estas condiciones tenemos que

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} (A_{20}x^2 + 2A_{21}xy + A_{22}y^2) + O(\|(x, y)\|^3).$$

Cuando una superficie S es expresada como la gráfica de una función diferenciable, su segunda forma fundamental en una vecindad de p aplicada a un vector $(dx, dy) \in \mathbb{R}^2$ tiene la forma

$$f_{xx}(x, y) dx^2 + f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2 = 0.$$

Esta expresión corresponde a la ecuación diferencial que define las líneas asintóticas.

Si una superficie S está dada localmente como la gráfica de la función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos obtener condiciones sobre la función f tal que el discriminante de la segunda forma fundamental tenga un nodo en el origen, o bien, un punto aislado.

Supondremos que f puede representarse en serie de potencias en una vecindad del origen:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (A_{20}x^2 + 2A_{21}xy + A_{22}y^2) + A_{30}x^3 + A_{31}x^2y + A_{32}xy^2 + A_{33}y^3 + \dots$$

Necesitamos conocer las derivadas parciales de primer y segundo orden de f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) &= \frac{1}{2}(2A_{20}x + 2A_{21}y) + 3A_{30}x^2 + 2A_{31}xy + A_{32}y^2 + \dots \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) &= \frac{1}{2}(2A_{21}x + 2A_{22}y) + A_{31}x^2 + 2A_{32}xy + 3A_{33}y^2 + \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y) &= A_{20} + 6A_{30}x + 2A_{31}y + \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y) = A_{21} + 2A_{31}x + 2A_{32}y + \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y) &= A_{22} + 2A_{32}x + 6A_{33}y + \dots\end{aligned}$$

En el estudio de las ecuaciones diferenciales binarias hemos considerado que las funciones que conforman los coeficientes de la ecuación se anulan en el origen. Esta condición implica que los coeficientes cumplan la igualdad:

$$A_{20} = A_{21} = A_{22} = 0$$

Esto significa que la función f en una vecindad del origen tiene la forma $f(x, y) = C(x, y) + O(\|(x, y)\|^3)$, donde $C(x, y)$ es el polinomio homogéneo de grado tres en dos variables:

$$C(x, y) = A_{30}x^3 + A_{31}x^2y + A_{32}xy^2 + A_{33}y^3.$$

Por lo tanto, si se toma $a(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y)$, $b(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$ y $c(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y)$, entonces la ecuación diferencial que define las líneas asintóticas es

$$\begin{aligned}\left(2A_{32}x + 6A_{33}y + O(\|(x, y)\|^2)\right) dy^2 + 2\left(2A_{31}x + 2A_{32}y + O(\|(x, y)\|^2)\right) dydx \\ + \left(6A_{30}x + 2A_{31}y + O(\|(x, y)\|^2)\right) dx^2 = 0. \quad (3.1)\end{aligned}$$

Proposición 24 *La superficie M determinada por la ecuación diferencial binaria (3.1) es diferenciable en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ siempre que el polinomio $C(1, p)$ no tenga raíces reales repetidas.*

Demostración. El polinomio

$$C(1, p) = A_{33}p^3 + A_{32}p^2 + A_{31}p + A_{30},$$

tiene raíces reales repetidas si y sólo si el resultante de los polinomios $C(1, p)$ y $\frac{d}{dp}C(1, p)$ (su derivada con respecto a p) se anula. Esto es, si y sólo si

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{32} & A_{31} & A_{30} & 0 \\ 0 & A_{33} & A_{32} & A_{31} & A_{30} \\ 3A_{33} & 2A_{32} & A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 3A_{33} & 2A_{32} & A_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 3A_{33} & 2A_{32} & A_{31} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Podemos ver que el valor del determinante (3.2) es:

$$A_{33} (27A_{30}^2A_{33}^2 - 18A_{30}A_{31}A_{32}A_{33} + 4A_{30}A_{32}^3 + 4A_{31}^3A_{33} - A_{31}^2A_{32}^2) \quad (3.3)$$

Por otro lado, la superficie M determinada por la ecuación (3.1) es diferenciable en una vecindad del eje p , excepto en el caso en el que los coeficientes del polinomio C satisfacen la siguiente igualdad:

$$(2A_{31}2A_{32} - 6A_{30}6A_{33})^2 - 4(2A_{32}2A_{32} - 2A_{31}6A_{33})(2A_{31}2A_{31} - 6A_{30}2A_{32}) = 0 \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) no es más que la ecuación (2.4) reescrita con los coeficientes de la ecuación diferencial binaria (3.1). Tal como se ha probado en el caso general, el hecho de que la ecuación (3.4) se satisfaga es equivalente a que la función discriminante $\Delta = b^2 - ac$ tenga una singularidad de Morse en el origen. Es sólo un cálculo ver que (3.4) es un múltiplo de (3.3). Por lo tanto, el polinomio $C(1, p)$ no tiene raíces reales repetidas si y sólo si M es una superficie diferenciable en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. ■

Proposición 25 *Los puntos singulares del campo vectorial ξ sobre $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset M$ están dados por los ceros del polinomio cúbico $C(1, p)$. Todos los puntos singulares del campo vectorial ξ son sillas.*

Demostración. El polinomio ϕ asociado a la ecuación diferencial binaria (3.1) satisface:

$$\begin{aligned} \phi(p) &= 6A_{33}p^3 + (4A_{32} + 2A_{32})p^2 + (4A_{31} + 2A_{31})p + 6A_{30} \\ &= 6A_{33}p^3 + 6A_{32}p^2 + 6A_{31}p + 6A_{30} \\ &= 6C(1, p). \end{aligned}$$

Por lo que las raíces de ϕ son exactamente las raíces de $C(1, p)$. Éstas corresponden a los puntos singulares del campo vectorial ξ .

Los valores propios de la parte lineal del campo $\tilde{\xi}$ son

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2(6A_{33}p^2 + (2A_{32} + 2A_{32})p^2 + 2A_{31}), \\ \beta_2 &= -6(3A_{33}p^2 + 2A_{32}p^2 + A_{31}). \end{aligned}$$

Observemos que $\alpha_1(p) = \frac{2}{3}\phi'(p)$, por lo que $(\alpha_1(p))(\beta_2(p)) = -\frac{2}{3}(\phi'(p))^2 < 0$, esto es, los puntos singulares del campo vectorial ξ son sillas. Como ξ es la proyección en el plano $\{(x, p)\}$ del campo $\tilde{\xi}$, entonces sus puntos singulares son del mismo tipo que los de $\tilde{\xi}$. ■

Para la función f , el 2-jet de la función discriminante $\Delta = (f_{xy})^2 - (f_{yy})(f_{xx})$ es

$$\begin{aligned} &(2A_{31}x + 2A_{32}y)^2 - (6A_{30}x + 2A_{31}y)(2A_{32}x + 6A_{33}y) \\ &= 4x^2A_{31}^2 - 12A_{30}x^2A_{32} + 4xyA_{31}A_{32} - 36A_{30}A_{33}xy - 12A_{33}y^2A_{31} + 4y^2A_{32}^2 \\ &= (4A_{31}^2 - 12A_{30}A_{32})x^2 + (4A_{31}A_{32} - 36A_{30}A_{33})xy + (-12A_{33}A_{31} + 4A_{32}^2)y^2. \end{aligned}$$

Esta forma cuadrática es no degenerada si y sólo si

$$(4A_{31}A_{32} - 36A_{30}A_{33})^2 - 4(4A_{31}^2 - 12A_{30}A_{32})(-12A_{33}A_{31} + 4A_{32}^2) \neq 0.$$

Esta expresión se cumple siempre que el polinomio $C(1, p)$ no tenga raíces repetidas (Ver 3.3 y 3.4).

Así, la función discriminante $\Delta = (f_{xy})^2 - (f_{yy})(f_{xx})$, tiene una singularidad de Morse en el origen, por lo cual la curva $\Delta(x, y) = 0$ es localmente un nodo, o bien un punto aislado.

Corolario. *En una vecindad de un punto umbílico plano el campo de direcciones asintóticas tiene una de las siguientes formas topológicas:*

$$\begin{aligned} a) \quad & ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0, \\ b) \quad & ydy^2 - 2xdxdy + ydx^2 = 0. \end{aligned}$$

Demostración. Si el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ es un punto aislado, entonces se satisface

$$(4A_{31}A_{32} - 36A_{30}A_{33})^2 - 4(4A_{31}^2 - 12A_{30}A_{32})(-12A_{33}A_{31} + 4A_{32}^2) < 0.$$

Esta desigualdad determina un subconjunto abierto y conexo en el espacio vectorial de dimensión cuatro

$$R = \{(A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}) : A_{3j} \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, 3\}.$$

En este subconjunto, el polinomio $C(1, p)$ tiene tres raíces reales distintas, que corresponden a tres puntos singulares del tipo silla. Así, la ecuación diferencial binaria (3.1) tiene la forma normal del inciso a), el caso estar.

Si el discriminante $\Delta(x, y) = 0$ es localmente un nodo en el origen entonces

$$(4A_{31}A_{32} - 36A_{30}A_{33})^2 - 4(4A_{31}^2 - 12A_{30}A_{32})(-12A_{33}A_{31} + 4A_{32}^2) > 0.$$

En el espacio vectorial de dimensión cuatro R , esta desigualdad determina un subconjunto abierto y conexo en el que el polinomio $C(1, p)$ tiene sólo una raíz real. Por el teorema 19 y como el punto singular es un punto silla se concluye que la ecuación diferencial binaria (3.1) tiene la forma normal del inciso b). ■

Apéndice

En este apéndice, encontraremos los cálculos que justifican las particiones del plano $\{(b_1, b_2)\}$ dadas en las figuras 2.4 y 2.6. Para hacer esto, consideraremos ecuaciones diferenciales binarias lineales de la forma

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx \pm ydx^2 = 0,$$

y calcularemos los signos de los valores propios de la matriz correspondiente a la parte lineal del campo vectorial $\bar{\xi}$ en puntos (b_1, b_2) pertenecientes a cada una de las regiones limitada por las curvas separatrices.

Se ha mencionado en el apartado 2.4.1 que el cambio de coordenadas en el plano $\Phi(x, y) = (-x, y)$ mantiene invariante el tipo de ecuación diferencial binaria lineal y que existe una simetría en el plano $\{(b_1, b_2)\}$ con respecto al eje b_1 , el número y el tipo topológico de puntos singulares del campo vectorial ξ se conserva, por lo tanto, es suficiente considerar ecuaciones diferenciales binarias en las que $b_2 \geq 0$ y realizar los cálculos correspondientes en el semiplano superior $\{(b_1, b_2) : b_2 \geq 0\}$.

Parte I

Las siguientes curvas son las separatrices del tipo de puntos singulares del campo vectorial $\bar{\xi}$ asociado a la forma normal :

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx - ydx^2 = 0. \quad (5)$$

- a) La curva “ no Morse ” $b_1 = 0$.
- b) Las curvas $2b_1 - 1 = 0$ y $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$.
- c) La curva con raíces comunes de $\alpha_1(p)$, $\phi(p)$ y $b_1 = 0$.

Para la ecuación diferencial (5) el polinomio

$$\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 - 1)p,$$

tiene las raíces: $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$, $\rho_2 = 0$ y $\rho_3 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$, los valores propios del campo vectorial $\bar{\xi}$ en un punto singular $(0, 0, p)$ son:

$$\begin{aligned} -\phi'(p) &= -(3p^2 + 4b_2p + (2b_1 - 1)), \\ \alpha_1(p) &= 2(p^2 + b_2p + b_1). \end{aligned}$$

Si $b_2 \geq 0$, entonces las raíces del polinomio $\phi(p)$ tienen el siguiente orden $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$. El siguiente paso es evaluar ρ_1, ρ_2 y ρ_3 en los polinomios $-\phi'(p)$ y $\alpha_1(p)$ para obtener el signo de los valores propios en cada punto singular ρ_1, ρ_2 y ρ_3 del campo vectorial $\bar{\xi}$.

$$\begin{aligned}
-\phi'(\rho_1) &= -\phi'\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}\right) \\
&= -\left(3\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}\right)^2 + 4b_2\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}\right) + (2b_1 - 1)\right) \\
&= -2(b_2^2 - 2b_1 + 1) - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\rho_1) &= \alpha_1\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}\right) \\
&= 2\left(\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}\right)^2 + b_2\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}\right) + b_1\right) \\
&= 2(b_2^2 - b_1 + 1) + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$-\phi'(\rho_2) = -\phi'(0) = -(2b_1 - 1), \tag{8}$$

$$\alpha_1(\rho_2) = \alpha_1(0) = 2b_1. \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
-\phi'(\rho_3) &= -\phi'\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2\right) \\
&= -\left(3\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2\right)^2 + 4b_2\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2\right) + (2b_1 - 1)\right) \\
&= -2b_2^2 + 4b_1 - 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\rho_3) &= \alpha_1\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2\right) \\
&= 2\left(\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2\right)^2 + b_2\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2\right) + b_1\right) \\
&= 2b_2^2 - 2b_1 + 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

1. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : b_1 < 0, b_2 \geq 0\}$.

En este conjunto se satisfacen simultáneamente las desigualdades $b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0$ y $b_2^2 - b_1 + 1 > 0$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= -2(b_2^2 - 2b_1 + 1) - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2(b_2^2 - b_1 + 1) + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_2) &= -\phi'(0) = -(2b_1 - 1) > 0, \\ \alpha_1(\rho_2) &= \alpha_1(0) = 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

Se afirma

$$-\phi'(\rho_3) = -2b_2^2 + 4b_1 - 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} < 0.$$

Como $b_2 > 0$ y $b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0$, entonces la desigualdad $-\phi'(\rho_3) < 0$ se satisface si y sólo si $0 < 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} < 2b_2^2 - 4b_1 + 2$,

equivalentemente, $0 < (2b_2^2 - 4b_1 + 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1})^2$, la cual se satisface

si y sólo si $0 < 16b_1^2 - 16b_1b_2^2 - 16b_1 + 4b_2^4 + 8b_2^2 + 4 - (4b_2^2 - 8b_1b_2^2 + 4b_2^4)$, que es equivalente a

$$0 < 16b_1^2 - 8b_1b_2^2 - 16b_1 + 4b_2^2 + 4 = 4(2b_1 - 1)(-b_2^2 + 2b_1 - 1), \quad (12)$$

esta desigualdad se satisface, pues ambos factores dentro de los parentesis son negativos.

Se afirma

$$\alpha_1(\rho_3) = 2b_2^2 - 2b_1 + 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} + 2 > 0.$$

Se satisface la desigualdad $\alpha_1(\rho_3) > 0$ si y sólo si $2b_2^2 - 2b_1 + 2 > 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} > 0$,

que es cierta si y sólo si $(2b_2^2 - 2b_1 + 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1})^2 > 0$, la cual es equivalente a

$$4b_1^2 - 8b_1b_2^2 - 8b_1 + 4b_2^4 + 8b_2^2 + 4 - (4b_2^2 - 8b_1b_2^2 + 4b_2^4) > 0. \quad (13)$$

Note que la desigualdad (13) se satisface pues:

$$\begin{aligned} &4b_1^2 - 8b_1b_2^2 - 8b_1 + 4b_2^4 + 8b_2^2 + 4 - (4b_2^2 - 8b_1b_2^2 + 4b_2^4) \\ &= 4(b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 + 1) > 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_3 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ es un punto silla.

2. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1 < \frac{1}{2}, b_2 \geq 0\}$.

Junto con las desigualdades $0 < b_1 < \frac{1}{2}$ y $b_2 \geq 0$, se satisfacen $b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0$, y $b_2^2 - b_1 + 1 > 0$. El orden de las raíces del polinomio $\phi(p)$ es: $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Y se tiene que:

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= -2(b_2^2 - 2b_1 + 1) - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2(b_2^2 - b_1 + 1) + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} > 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 - 1) > 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2 = 0$ es un nodo.

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_3) &= -2b_2^2 + 4b_1 - 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} < 0, \\ \alpha_1(\rho_3) &= 2b_2^2 - 2b_1 + 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} + 2 > 0. \end{aligned}$$

Esto es debido a que las desigualdades (12) y (13) se satisfacen también en el subconjunto del plano $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1 < \frac{1}{2}, b_2 \geq 0\}$.

Así $\rho_3 = \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2$ es un punto silla.

3. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : \frac{1}{2} < b_1, b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0, b_2 > 0\}$.

Junto con las desigualdades $0 < 2b_1 - 1$ y $b_2 \geq 0$, se satisfacen $b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0$, y $b_2^2 - b_1 + 1 > 0$.

El polinomio $\phi(p)$ tiene las raíces $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$, $\rho_2 = 0$ y $\rho_3 = \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2$, el orden de las raíces es $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= -2(b_2^2 - 2b_1 + 1) - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2(b_2^2 - b_1 + 1) + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} > 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 - 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

$$\begin{aligned} \phi'(\rho_3) &= 2(2b_1 - 1) + 2b_2 \left(-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} \right) > 0, \\ \alpha_1(\rho_3) &= 2b_2^2 - 2b_1 + 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} + 2 > 0. \end{aligned}$$

Observe que $2b_2^2 - 2b_1 + 2 > 0$ y $2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} > 0$. En consecuencia, $\alpha_1(\rho_3) > 0$ se satisface si sólo si $2b_2^2 - 2b_1 + 2 > 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$, esta desigualdad es cierta si y sólo si

$(2b_2^2 - 2b_1 + 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1})^2 > 0$, que se cumple si y sólo si $4b_1^2 - 8b_1b_2^2 - 8b_1 + 4b_2^4 + 8b_2^2 + 4 - (4b_2^2 - 8b_1b_2^2 + 4b_2^4) > 0$. La cual se satisface pues $4b_1^2 - 8b_1 + 4b_2^2 + 4 = 4(b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 + 1) > 0$.

Así $\rho_3 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ es un nodo.

4. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : \frac{1}{2} < b_1, b_2^2 - 2b_1 + 1 < 0, b_2 \geq 0\}$.

En este conjunto, el polinomio $\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 - 1)p$ tiene únicamente una raíz real, a saber $p = 0$, las raíces $\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_2$ y $-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ son complejas. Por lo tanto,

$$-\phi'(0) = -(2b_1 - 1) < 0,$$

$$\alpha_1(0) = 2b_1 > 0.$$

Así, $\phi(p)$ tiene sólo un punto singular el cual es un punto silla.

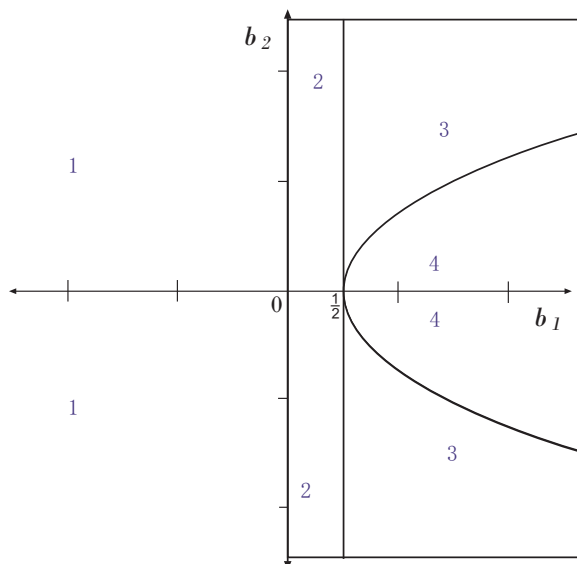


Figura 1: Partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$

Parte II

Las siguientes curvas son las separatrices del tipo de puntos singulares del campo vectorial $\bar{\xi}$ asociado a la forma normal

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx + ydx^2 = 0. \quad (14)$$

- a) La curva “ no Morse ” $b_1 = 0$.
- b) Las curvas $2b_1 + 1 = 0$ y $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 - 1)$.
- c) Las curvas $b_1 = 0$ y $b_1 = \pm b_2 - 1$.

Para una ecuación diferencial binaria del tipo (14), el polinomio

$$\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 + 1)p,$$

tiene las raíces $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$, $\rho_2 = 0$ y $\rho_3 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$. Los valores propios de la parte lineal del campo vectorial $\bar{\xi}$ son:

$$\begin{aligned} -\phi'(p) &= -(3p^2 + 4b_2p + (2b_1 + 1)), \\ \alpha_1(p) &= 2(p^2 + b_2p + b_1). \end{aligned}$$

En cada una de las raíces del polinomio ϕ , los eigenvalores $-\phi'(p)$ y $\alpha_1(p)$ tienen las siguientes expresiones :

En $\rho_1 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$.

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= -\left(3\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right)^2 + 4b_2\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right) + (2b_1 + 1)\right) \\ &= 4b_1 - 2b_2^2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} + 2 \\ &= 2(2b_1 + 1) - 2b_2\left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(\rho_1) &= 2\left(\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right)^2 + b_2\left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right) + b_1\right) \\ &= 2b_2^2 - 2b_1 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - 2 \\ &= -2(b_1 + 1) + 2b_2\left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right). \end{aligned}$$

En $\rho_2 = 0$.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1), \\ \alpha_1(0) &= 2b_1. \end{aligned}$$

En $\rho_3 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$.

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_3) &= -\left(3\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2\right)^2 + 4b_2\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2\right) + (2b_1 + 1)\right) \\ &= 4b_1 - 2b_2^2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} + 2 \\ &= 2(2b_1 + 1) + 2b_2\left(-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(\rho_3) &= 2\left(\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2\right)^2 + b_2\left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2\right) + b_1\right) \\ &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - 2 \\ &= -2(b_1 + 1) - 2b_2\left(-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}\right). \end{aligned}$$

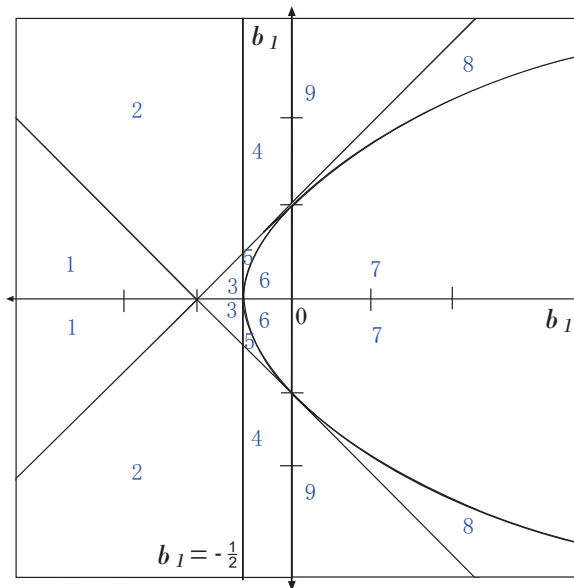


Figura 2: Partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$

1. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : b_1 < -1, b_1 < b_2 - 1, b_1 < -b_2 - 1, b_2 > 0\}$.

En este caso $-2b_1 - 1 > 0$ por lo que $b_2^2 - 2b_1 - 1 > b_2^2 > 0$, equivalentemente $\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > b_2 > 0$.

En consecuencia se tiene que las raíces del polinomio $\phi(p)$ tienen el siguiente orden $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Así, $2b_2 \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) > 0$. Entonces para este conjunto se cumple que:

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= 2(2b_1 + 1) - 2b_2 \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= -2(b_1 + 1) + 2b_2 \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ_1 es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) > 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Por lo que $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

Se afirma que

$$-\phi'(\rho_3) = -2b_2^2 + 4b_1 + 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0.$$

Note que $-2b_2^2 + 4b_1 + 2 < 0$, pero $4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) > 0$ lo cual implica que

$$|-2b_2^2 + 4b_1 + 2| > \left| 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right| = 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}. \text{ De esto tenemos que } -\phi'(\rho_3) < 0.$$

Para ver que se satisface $|4b_1 - 2b_2^2 + 2| > \left| 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right|$, obtendremos la veracidad de la desigualdad $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 - \left(2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2 > 0$, que se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} 16b_1^2 - 8b_1b_2^2 + 16b_1 - 4b_2^2 + 4 &= & (15) \\ 16b_1^2 - 16b_1b_2^2 + 16b_1 + 4b_2^4 - 8b_2^2 + 4 - (4b_2^4 - 4b_2^2 - 8b_1b_2^2) &> 0. \end{aligned}$$

Pero debido a que $16b_1^2 - 8b_1b_2^2 + 16b_1 - 4b_2^2 + 4 = 4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) > 0$, se tiene que la desigualdad es cierta.

Se afirma que

$$\alpha_1(\rho_3) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0.$$

Como $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$ y $2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0$ entonces $\alpha_1(\rho_3) > 0$ si y sólo si $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 > \left(2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2$. Esta desigualdad es cierta si y sólo si la siguiente desigualdad lo es

$$\begin{aligned} 4b_1^2 - 8b_1b_2^2 + 8b_1 + 4b_2^4 - 8b_2^2 + 4 - (4b_2^4 - 4b_2^2 - 8b_1b_2^2) &= & (16) \\ 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) &> 0, \end{aligned}$$

la cual se cumple pues $b_1 - b_2 + 1 < 0$ y $b_1 + b_2 + 1 < 0$.

Así, ρ_3 es un punto silla.

2. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : b_1 < \frac{-1}{2}, b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_2 > 0\}$.

En este caso $-2b_1 - 1 > 0$ por lo que $b_2^2 - 2b_1 - 1 > b_2^2 > 0$ ó equivalentemente $\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > b_2 > 0$. Se sigue que las raíces de $\phi(p)$, tienen el siguiente orden $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. En consecuencia se cumple que:

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= 2(2b_1 + 1) - 2b_2 \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2 + 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0. \end{aligned}$$

Para ver que $\alpha_1(\rho_1) > 0$, veremos que se satisface: $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 < (2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2$, desigualdad que se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} &4b_1^2 - 8b_1b_2^2 + 8b_1 + 4b_2^4 - 8b_2^2 + 4 - (4b_2^4 - 4b_2^2 - 8b_1b_2^2) \\ &= 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) < 0, \end{aligned}$$

la última desigualdad se satisface para la región del plano que se está analizando.

Por lo tanto, ρ_1 es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) > 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

$$-\phi'(\rho_3) = 4b_1 - 2b_2^2 + 2 + 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 :$$

Como $4b_1 - 2b_2^2 + 2 < 0$, entonces $-\phi'(\rho_3) < 0$ si sólo si $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 > (2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2$. La equivalencia se satisface ya que $4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) > 0$ (ver la igualdad (15)).

Se afirma que

$$\alpha_1(\rho_3) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2 - 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 :$$

En el conjunto que se está analizando, la expresión $2b_2^2 - 2b_1 - 2$ cambia de signo y mas aún, toma el valor cero, en puntos donde $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$, probaremos que se satisface $2b_2^2 - 2b_1 - 2 < 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$. Para esto notemos que: $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - (2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) < 0$, (se deduce de las desigualdades que definen la región), entonces $\alpha_1(\rho_3) < 0$.

Así, ρ_3 es un nodo.

3. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : -1 < b_1 < \frac{-1}{2}, b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_2 > 0\}$.

En este caso $-2b_1 - 1 > 0$, por lo que $b_2^2 - 2b_1 - 1 > b_2^2 > 0$ ó equivalentemente $\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > b_2 > 0$. Por lo anterior, tenemos que las raíces de $\phi(p)$, tienen el siguiente orden $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Y

para esta región del plano se cumple que:

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= 2(2b_1 + 1) + 2b_2 \left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2 + 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 : \end{aligned}$$

En esta región $2b_2^2 - 2b_1 - 2 < 0$, por lo tanto, $\alpha_1(\rho_1) < 0$ si y sólo si

$$(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - \left(2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) > 0.$$

La última desigualdad es cierta pues $b_1 - b_2 + 1 > 0$, $b_1 + b_2 + 1 > 0$, se concluye que $\alpha_1(\rho_1) < 0$.

Así, ρ_1 es un nodo.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) > 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

$$-\phi'(\rho_3) = 4b_1 - 2b_2^2 + 2 + 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 :$$

En este caso $4b_1 - 2b_2^2 + 2$ es negativo, pero $4(2b_1 + 1)(-b_2^2 + 2b_1 + 1) > 0$ lo cual implica que $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 > \left(2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2$. De esto tenemos que $-\phi'(\rho_3) < 0$.

$$\alpha_1(\rho_3) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2 - 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 :$$

Como se satisface que $2b_2^2 - 2b_1 - 2 < 0$, entonces $\alpha_1(\rho_3) < 0$ si y sólo si

$$(2b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 - \left(2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) > 0.$$

Así, ρ_3 es un nodo.

4. Análisis en el conjunto $\left\{ (b_1, b_2) : \frac{-1}{2} < b_1 < 0, b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_2 > 0 \right\}$.

En este caso $-2b_1 - 1 < 0$ por lo que $0 < b_2^2 - 2b_1 - 1 < b_2^2$ equivalentemente $0 < \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < b_2$. Por lo anterior, tenemos que las raíces de $\phi(p)$ tienen el siguiente orden $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$. Así, se cumple que:

$$\begin{aligned} -\phi' \left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) &= -2(b_2^2 - 2b_1 - 1) - 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0, \\ \alpha_1 \left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2 + 2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0. \end{aligned}$$

Pues $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 < \left(2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2$ si y sólo si

$$(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - \left(2b_2 \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right)^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) < 0,$$

Por lo tanto $|2b_2^2 - 2b_1 - 2| < 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$, lo que muestra que $\alpha_1(\rho_1) > 0$.

Así, ρ_1 es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Por lo que $\rho_2 = 0$ es un nodo.

$$-\phi' \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 4b_1 - 2b_2^2 + 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0 :$$

Como $-2b_2^2 + 4b_1 + 2 < 0$, entonces $-\phi'(\rho_3) > 0$ si y sólo si $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 < (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2$, que se satisface pues $4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) < 0$.

$$\alpha_1 \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 :$$

Variando los puntos (b_1, b_2) en el conjunto que está siendo analizado, la expresión $2b_2^2 - 2b_1 - 2$, cambia de signo y más aun toma el valor cero. Como en este conjunto $b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$, entonces se afirma que se satisface $|2b_2^2 - 2b_1 - 2| < 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$.

Como $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) < 0$, (se deduce de las desigualdades que definen la región) entonces $\alpha_1(\rho_3) < 0$.

Así, ρ_3 es un punto silla.

5. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : \frac{-1}{2} < b_1 < 0, b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_2 > 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 > 0\}$.

En este caso $-2b_1 - 1 < 0$ por lo que $b_2^2 - 2b_1 - 1 < b_2^2$ y también $0 < \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < b_2$.

Se concluye que las raíces de $\phi(p)$ tienen el siguiente orden $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$. Así, se cumple que:

$$\begin{aligned} -\phi' \left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) &= -2(b_2^2 - 2b_1 - 2) - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0, \\ \alpha_1 \left(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} \right) &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0. \end{aligned}$$

Como $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1)$ y

$b_1 - b_2 + 1 > 0, b_1 + b_2 + 1 > 0$, se tiene que $\alpha_1(\rho_1) < 0$.

En consecuencia, ρ_1 es un nodo.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Por lo que $\rho_2 = 0$ es un nodo.

$$-\phi' \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 4b_1 - 2b_2^2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} + 2 > 0 :$$

Aquí $4b_1 - 2b_2^2 + 2 < 0$, pero $4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) < 0$, lo cual implica que $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 < (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2$. De esto tenemos que $-\phi'(\rho_3) > 0$.

$$\alpha_1 \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - 2 < 0 :$$

Como se satisface que $2b_2^2 - 2b_1 - 2 < 0$, y $-2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0$ entonces $\alpha_1(\rho_3) < 0$.

Así, ρ_3 es un punto silla.

6. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : \frac{-1}{2} < b_1 < 0, b_2 > 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 < 0\}$.

En este conjunto el polinomio $\phi(p)$ tiene únicamente una raíz real, $\rho = 0$ y

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 < 0. \end{aligned}$$

Así, el punto singular $\rho = 0$ es un nodo.

7. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2 > 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 < 0\}$.

El polinomio $\phi(p)$ tiene únicamente una raíz real, $\rho = 0$ y

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, el punto singular $\rho = 0$ es un punto silla.

8. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2 > 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 > 0, b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1\}$.

En este caso $b_1 > 0$ por lo que $b_2^2 - 2b_1 - 1 < b_2^2$ ó equivalentemente $\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < b_2$, se sigue que las raíces de $\phi(p)$ tienen el siguiente orden, $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$. Además, note que $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= -2(b_2^2 - 2b_1 - 1) - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0. \end{aligned}$$

Así, ρ_1 es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0. \end{aligned}$$

Por lo que $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

$$-\phi' \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 4b_1 - 2b_2^2 + 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0 :$$

Se satisface la desigualdad $-2b_2^2 + 4b_1 + 2 < 0$, pero $4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) < 0$ lo cual implica que $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 < (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2$. De esto tenemos que $-\phi'(\rho_3) > 0$.

$$\alpha_1 \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0 :$$

Aquí la expresión $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$, probaremos que se satisface $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$. Como $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) > 0$. Se sigue que $\alpha_1(\rho_3) > 0$.

Así, ρ_3 es un nodo.

9. Análisis en el conjunto $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2 > 0, b_2^2 - 2b_1 - 1 > 0, b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1\}$.

En este caso $-2b_1 - 1 < 0$ por lo que $b_2^2 - 2b_1 - 1 < b_2^2$ ó equivalentemente $\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < b_2$. Por lo anterior, las raíces de $\phi(p)$, tienen el siguiente orden $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$. Además, note que $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$. Entonces, se cumple:

$$\begin{aligned} -\phi'(\rho_1) &= -2b_2^2 + 4b_1 + 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0, \\ \alpha_1(\rho_1) &= 2b_2^2 - 2b_1 - 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que ρ_1 es un punto silla.

$$\begin{aligned} -\phi'(0) &= -(2b_1 + 1) < 0, \\ \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0. \end{aligned}$$

Por lo que $\rho_2 = 0$ es un punto silla.

$$-\phi' \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 4b_1 - 2b_2^2 + 2 + 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} > 0 :$$

En este caso se satisface la desigualdad $-2b_2^2 + 4b_1 + 2 < 0$, pero $4(2b_1 + 1)(2b_1 - b_2^2 + 1) < 0$, lo cual implica que $(4b_1 - 2b_2^2 + 2)^2 < (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2$. De esto tenemos que $-\phi'(\rho_3) > 0$.

$$\alpha_1 \left(\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} - b_2 \right) = 2b_2^2 - 2b_1 - 2 - 2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1} < 0 :$$

Como se satisface que $2b_2^2 - 2b_1 - 2 > 0$ y también que $4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) < 0$ entonces $(2b_2^2 - 2b_1 - 2)^2 - (2b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2 = 4(b_1 - b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 1) < 0$.

Así, ρ_3 es un punto silla.

10. Para concluir el análisis, supóngase que $b_2 = 0$. Así, el polinomio $\phi(p) = p^3 + (2b_1 + 1)p$ tiene las raíces $0, \sqrt{-2b_1 - 1}$ y $-\sqrt{-2b_1 - 1}$. Los eigenvalores de la parte lineal de el campo $\bar{\xi}$ son :

$$\begin{aligned} -\phi' &= -(3p^2 + (2b_1 + 1)) \\ \alpha_1 &= 2(p^2 + b_1) \end{aligned}$$

y en las raíces de ϕ toman los siguientes valores.

$$\begin{aligned} -\phi' \left(-\sqrt{-2b_1 - 1} \right) &= - \left(3 \left(-\sqrt{-2b_1 - 1} \right)^2 + (2b_1 + 1) \right) = 4b_1 + 2, \\ \alpha_1 \left(-\sqrt{-2b_1 - 1} \right) &= 2 \left(\left(-\sqrt{-2b_1 - 1} \right)^2 + b_1 \right) = -2b_1 - 2, \\ \phi' (0) &= -((2b_1 + 1)) = -2b_1 - 1, \\ \alpha_1 (0) &= 2(b_1) = 2b_1, \\ -\phi' \left(\sqrt{-2b_1 - 1} \right) &= - \left(3 \left(\sqrt{-2b_1 - 1} \right)^2 + (2b_1 + 1) \right) = 4b_1 + 2, \\ \alpha_1 \left(-\sqrt{-2b_1 - 1} \right) &= 2 \left(\left(-\sqrt{-2b_1 - 1} \right)^2 + b_1 \right) = -2b_1 - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

Hay tres raíces distintas del polinomio ϕ . Si $b_1 < -1$, el tipo de los puntos singulares es silla, silla, silla. O bien, si $-1 < b_1 < \frac{-1}{2}$ se tiene nodo, silla, nodo.

Si $\frac{-1}{2} < b_1 < 0$ la única raíz de ϕ es 0 y se tiene un punto singular del tipo nodo. Si $0 < b_1$, entonces se tiene un punto singular del tipo silla.

Bibliografía

- [1] Arnold V. I., Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, (Berlín : Springer), 1983.
- [2] Arnold V. I., Ordinary differential equations, Springer-Verlag, third edition, 1984.
- [3] Berry M. V. and Hannay J. H., Umbilic points on Gaussian random surfaces, *J. Phys. A* **10** (1977), 1809-1821.
- [4] Brocker T. and Lander L. C., Differentiable germs and catastrophes, London Math. Soc. Lectures notes series 17, Cambridge University press.
- [5] Bruce J. W. and D.L. Fidal A., On binary differential equations and umbilics, *Proc. R. Soc. Edinburgh*, **111A**, (1989), 147-168.
- [6] Bruce J. W. and Giblin P.J., Curves and singularities second edition, Cambridge University press.
- [7] Bruce J. W. and Tari F., On binary differential equations, *Nonlinearity* **8**, (1955), 255-271.
- [8] Dara L., Singularité génériques des équations différentielles multiformes, *Bol.Soc.Brasil Math* **6**, (1975), 95-128.
- [9] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, Vol 4 (Paris: Gauthiers Villars), 1896.
- [10] Do Carmo M. P., Geometría diferencial de curvas y superficies, Alianza Editorial, 1990.
- [11] Gibson C. G., Elementary Geometry of Algebraic Curves: An undergraduate introduction, Cambridge University press, 1998.
- [12] Guíñez V., Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 309,2, (1998).
- [13] Porteous I. R., Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces, Second Edition, Cambridge University press.
- [14] Gutierrez C., Sotomayor J., Structurally stable configurations of lines of principal curvature. *Astérisque*, (1982), 98-99.
- [15] Thom R., Sur les equations differential multiformes et leur integral singulieres, *Bol Soc Brasil. Math.* **3**, (1971), 1-11.

Índice alfabético

- Campo de direcciones 3, 9
 - bivaluado 11
- Compatible con la proyección π 45
- Contacto de orden k 15
- Curvas pliegue 46
- Discriminante de polinomios cúbicos 7
- Ecuación diferencial binaria, cuadrática VII, 9
 - Discriminate de una 10
 - Nodo 16
 - Punto aislado 16
- Doble cubierta de una 11
- Levantamiento de la 18
- Lineal 22
- Punto singular de una 10
- Ecuación diferencial implícita 3
 - Curva criminante de una 5
 - Curva discriminante 4
 - Curvas integrales de 3
 - Equivalencia de 6
 - Punto regular de 4
 - Punto singular de 4
 - Punto singular regular de 4
- Espacio de 1-jets 2
- Estructura de contacto 3
- Germen 2
- k -jet 2
- k -tangencia 1
- Multiplicidad 15
- Pareja resonante 34
- Plano de contacto 3
- Punto umblico plano VII
- Recta tangente 15
- Serie de potencias formal 30
- Tangente al plano de contacto 5
- Transformación de Tschirnhaus 6