UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La ley de refracción a través de la historia, desde el s. III a.n.e hasta el s. XVII d.n.e

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
MARCELA MORALES OLEA

DIRECTOR DE TESIS:
JOSÉ RAFAEL MARTÍNEZ ENRIQUEZ

2010

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, al estudio de las leyes y propiedades relacionadas con la luz lo llamamos Óptica. Como muchos objetos del conocimiento tuvo que pasar por varios siglos de investigación, integración y desarrollo antes de consolidarse como una rama de la ciencia que tiene perfectamente delimitado lo que en ella se puede y no analizar.
Hay fenómenos ocasionados por la luz con una genealogía incuestionable. Un ejemplo de esto son las imágenes que se observan en un espejo. Sin embargo rara vez viene a nuestra conciencia que tienen asociado un modelo geométrico que nos permite analizar y entender dichas imágenes y nuestra percepción de ellas. Con la utilización de este tipo de análisis surgieron distintas problemáticas vinculadas con los fenómenos relacionados con la luz. Una de estas preocupaciones se centró en la cuestión de cuál sería la forma óptima de una superficie especular para causar un incendio en un punto dado como consecuencia del reflejo y concentración de la luz del sol, problema mejor conocido como el de los espejos comburentes o ardientes. Tomando en cuenta lo anterior, lo que se pretende con este trabajo es llevar a cabo un recuento histórico y un análisis de las soluciones generadas a partir de la matematización de la Óptica, lo cual permitió aprovechar la simplificación que resultaba de recurrir a los conocimientos acumulados acerca de ciertas secciones cónicas. Tan exitosa resultó esta estrategia que pasó a formar parte de la cultura al hablar de las propiedades ópticas de las cónicas.

Durante las últimas décadas ha habido un corrimiento en los estudios relacionados con la historia de la ciencia: en lugar de centrar la atención en quién descubrió la ley de refracción, o si Arquímides tuvo antecesores en la construcción de espejos comburentes, los historiadores también han puesto bajo la mira de su escrutinio los procesos históricos y sociales que, además de las fuerzas internas propias del impulso creativo de las disciplinas y de quienes las practican, dieron como resultado los descubrimientos o la puesta en práctica de dispositivos generados por el avance del conocimento. Por ello en este trabajo he intentado presentar tanto el contenido científico -definiciones, postulados, teoremas- de las contribuciones de varios autores, unidos bajo la lógica de encontrar los modos de comportarse de la naturaleza, como algunas de las condiciones y situaciones que propiciaron la difusión, intrumentación y aprovechamiento de dichos conocimientos.
Dos son los temas en torno de los cuales gira esta tesis. Uno es el conocimiento de las propiedades ópticas de una superficie reflejante, conocimento que pasa por la acumulación de una serie de resultados que la historia ha recogido asociándolos con los nombres de Euclides, Diocles, Arquímides y Ptolomeo, y el otro es el de la ley de refracción. El descubrimiento de la expresión algebraica o geométrica de esta ley es sólo un fragmento de la historia de la teoría de refracción de la luz al pasar de un medio a otro de diferente densidad. El hecho de que esta ley, la ley de los senos, haya sido descubierta de manera -casi seguro- independiente por Thomas Harriot (C. 1600), René Descartes (1620), Willebrod Snell (entre 1621 y 1625) y Pierre de Fermat (1662) y de que Kepler (1604) estuviera al borde de descubrirla también, muestra que el ambiente que cobijaba al conocimiento óptico en el seno de la filosofía natural durante el periodo de 1550 a 1660 propició una serie de observaciones y desarrollos técnicos que convergieron en resultados equivalentes -aún siguiendo rutas diferentes y un tanto dudosas en algún caso- y que hoy conocemos como ley de refracción.
Siguiendo su historia podremos observar que el establecimiento de una disciplina que se ocupara de las propiedades de reflexión y refracción de la luz tomó algo de tiempo, y de hecho dos fueron las disciplinas que se instituyeron: la catróptica y la dióptrica. La primera se ocupaba de la refle-

xión de la luz en tanto que la segunda de la refracción. En este trabajo, para simplificar, en primer término se introduce una esquematización lo más ajena posible a las distintas concepciones filosóficas que dieron origen al planteamiento, análisis y resolución matemática de los problemas de la óptica geométrica. Asimismo, se analizan las aportaciones al problema por parte de dos matemáticos: Diocles e Ibn Sahl. Ambas soluciones tienen una gran semejanza en el planteamiento; sin embargo, las distintas metodologías utilizadas permitieron la implementación de mejoras en la determinación de las secciones cónicas, las cuales en particular simplificaron de manera considerable la caracterización de la parábola, estableciendo una nomenclatura y propiedades que se siguen utilizando.

Asociada con el problema de los espejos comburentes aparece el de las lentes comburentes, es decir, lentes que al desviar mediante la refracción los haces de luz producen la concentración de estos de manera que también pueden provocar la ignición de algún material. El análisis de la desviación del rayo luminoso en estos casos también resultó de gran utilidad, eventualmente, en la astronomía. Fue en la década de los ochenta, en el siglo XX, que se constató que los primeros estudios sobre lentes se llevaron a cabo en el siglo X d.C., y que se gestarían en la mente de un matemático árabe llamado Ibn Sahl, quien tuvo el ingenio para resolver el problema de los espejos ardientes introduciendo una innovadora caracterización de la parábola y un método más práctico para generar este tipo de curva. También llevó a cabo un estudio sobre las propiedades de las superficies generadas por distintos tipos de secciones cónicas en diferentes materiales. Además, en su *Tratado sobre los Instrumentos Ardientes* presenta un análisis del problema del paso de la luz de un medio a otro y el desvío del rayo en la frontera entre los medios. Esto le llevó a establecer, hasta donde se sabe por primera vez en la historia, *la ley de refracción de la luz*. Esta regla rompía con algunos paradigmas de la época tales como suponer la existencia del éter. El establecimiento de esta regla matemática que describe el comportamiento luminoso en la frontera entre dos medios; utiliza un argumento matemático impecable que brilla por su sencillez y concisión, lo cual contrasta con el método utilizado por Descartes siete siglos después cuando establece el mismo resultado.

Delinear con mayor precisión el desarrollo de los acontecimientos esbozados en estos párrafos es el propósito de esta tesis. Con este fin en el primer capítulo de este trabajo se analizan los resultados previos a la resolución del problema de los espejos comburentes, mismos que permitieron iniciar el análisis matemático de ciertos fenómenos ópticos relacionados con la reflexión de los rayos luminosos. Se realiza una revisión de dos textos *La Perspectiva* y *La Especularía*, ambos escritos por Euclides en el siglo III a.C.. A partir de la anécdota sobre Arquímedes de Siracusa en la que se relata que este matemático utiliza la propiedad de reflexión con fines bélicos se parte para luego analizar la solución desarrollada por Diocles para el problema de los espejos comburentes.

En el segundo capítulo se analiza y se reconstruye la posible metodología utilizada por Ibn Sahl para enfrentar esta misma problemática utilizando distintas secciones cónicas. El tercer capítulo se ocupa de los primeros estudios, resultados y experimentos relacionados con la refracción de la luz realizados por Ptolomeo, y de los que posiblemente Ibn Sahl tuvo conocimiento ya que son fundamentales en su argumentación y demostración de la ley de refracción.

Por último, en el cuarto capítulo, se analiza brevemente la disputa sobre la autoría de Snell y de Descartes de la ley de refracción, y se analiza el argumento cartesiano que conduce al establecimiento de dicha ley, argumento que, como sabemos, ha desatado grandes polémicas a través de los tiempos debido a cuestiones epistemológicas que ponen en duda la solidez del discurso que desemboca en la ley que en Francia se denomina Ley de Descartes, pero que en el resto de Occidente es conocida como Ley de Snell.

Capítulo 2

La catóptrica antes de Ibn Sahl

2.1. Euclides

Euclides es, primordialmente, recordado por los trabajos que realizó en torno de la geometría, y en particular por la recopilación de una parte sustancial del saber geométrico griego que constituye sus *Elementos*.[1] Sin embargo su legado no se limita a ellos. Existen otros, menos conocidos, entre los cuales se encuentran *La Perspectiva y La Especularia*, [2] tratados que se ocupan de algunos aspectos geométricos de la visión.
Sobre estos textos hay varios puntos que quisiera resaltar antes de pasar a analizar algunos resultados que en ellos aparecen y que resultan bastante interesantes.
La visión es algo que en la época de Euclides tenía fascinados a los filóso-

[1] Las traducciones clásicas a lenguas modernas son las de T.L. Heat [1925] (1956) *The Thirteenth Books of Euclid's Elements*, 3 vols., B. Vitrac (1990-2001) *Les Éléments*, 4 vols., y Acerbi (2008), Euclide, *Tutte le Opere*. Todas estas versiones se basan en el texto de *Los Elementos* establecido por I.L Heiberg y publicado entre 1883 y 1888, como parte de *Euclidis Opera Omnia*. Entre 1969-1977 se reeditó como *Euclidis Elementa*.

[2] El primero también es conocido como *La Óptica*. Ambas obras fueron publicadas en castellano por el Instituto Politécnico Nacional como edición facsimilar de la obra traducida por Pedro Ambrosio Onderiz en Madrid en 1585. De aquí en adelante las referencias a *La Perspectiva* o *La Especularia* remiten a esta edición.

fos, probablemente por ser la manera más inmediata en la que nos podemos relacionar con el mundo exterior para intentar conocer lo que nos rodea. Las explicaciones que se daban acerca de qué era lo que nos permitía ver y cómo era que la vista funcionaba, fueron varias. Dentro del ámbito que hoy calificaríamos como científico, las que se referían a estos temas no podían dejar de estar empapadas de una u otra corriente filosófica. Euclides, en los textos que sobre óptica presenta no es la excepción. Sin embargo, dado que trata, al menos en cuanto a forma, de reproducir la metodología y estructura que dio a los *Elementos*, hace de estas concepciones y supuestos -junto con algunos fenomenos de la visión que no puede simplificar más- la base para establecer los axiomas que le permiten enunciar una gran cantidad de proposiciones acerca de las relaciones entre los objetos y la manera como los percibimos. De esta forma logra que estas suposiciones den pie a un modelo geométrico que las describa a través de enunciados geométricos que pueden ser demostrados matemáticamente.

Sin embargo, los supuestos filosóficos que adopta para explicar por qué vemos[3] no se establecen de manera explícita. Esto, aparentemente, no interfiere en la objetividad de lo que se demuestra. Con todo, tenerlos en mente es algo que ayuda a comprender qué era lo que trataba de mostrar y el por qué de la metodología.

A pesar de que tanto en *La Perspectiva*, que es una teoría geométrica de la apariencia de los objetos, como en *La Especularia*, que explica la formación de imágenes de objetos vistos mediante su reflejo en un espejo, el acto de visión juega un papel fundamental, y los supuestos que establece en cada uno de estos textos son diferentes. Por ejemplo, en *La Perspectiva* la suposición uno dice: *Supóngase que los rayos que salen del ojo van por línea recta, y que entre sí están apartados con cierta distancia,* [4] mientras que en *La Especularia* establece lo siguiente: *Supóngase que el rayo visual es una línea recta cuyos medios cubren los extremos.*[5]

[3] A diferencia de los atomistas, para Euclides el llamado rayo visual es algo que sale del ojo, es decir, no es el objeto observado el que desprende algo de sí que, transportado hacia el ojo, forma la imagen al entrar en contacto con él.

[4] Euclides, *La Perspectiva*, suposición 1.

[5] Euclides, *La Especularia*, suposición 1.

Entre las dos suposiciones no hay contradicción; sin embargo es interesante observar que de acuerdo con las propiedades, o uso que le interesa establecer, toma una parte o modelación del fenómeno de la visión, o establece premisas, o suposiciones -no del todo carentes de ambigüedades- o principios a partir de los cuales puede derivar un listado de teoremas y sus demostraciones.
Otra diferencia respecto del comportamiento de los rayos visuales es que en el primer texto la visión se modela mediante un cono formado por los rayos visuales que salen del ojo, y donde la base es el objeto observado. Sin embargo estos rayos no salen de manera continua, pues lo hacen dejando intervalos muy pequeños sin cubrir. El tamaño aparente de la base del cono depende de la distancia a la que estemos viendo el objeto. En cambio, en *La Especularia*, el rayo visual es análogo en su comportamiento a un rayo de luz, es decir, es sólo un rayo continuo que viaja en línea recta y es obstruido por algunos cuerpos y reflejado por otros. La percepción que se tiene del objeto, visto después de reflejarse en el espejo, es explicada en términos de dónde se sitúa una imagen generada por los rayos reflejados.
Los resultados que presenta en *La Perspectiva* pretenden explicar cómo se "construye" el posicionamiento espacial que hace que percibamos a los objetos tal y como lo hacemos, estableciendo que la modificación en la apariencia de las cosas se da cuando entre el objeto y el observador varía un ángulo; recordemos que para Euclides entre el ojo y lo que se observa se crea un cono; y el ángulo al que me refiero es el que se forma en el vértice del cono, siendo el que determina qué tan abierto o cerrado es éste.

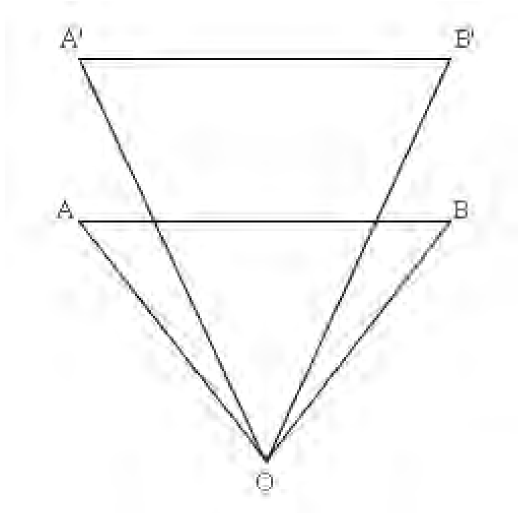


Fig. 1 [6]

Es en términos de esta variación que demuestra por qué la apariencia de un objeto cambia cuando es observado desde diferentes distancias y alturas; por ejemplo, es en términos de los rayos visuales y de sus ángulos que justifica porqué parece que las rectas paralelas se juntan al alejarse del observador (*La Perspectiva*, Teorema 6), que el horizonte está siempre a la altura de los ojos (*La Perpectiva*, Teoremas 10 y 11), y muchos otros fenomenos ópticos; incluso algunos de ellos están ligados con el observador en movimiento, el objeto en movimiento o ambos. Con base en esto da cuenta de muchos fenómenos que se pueden apreciar en la vida cotidiana e incluso de algunas ilusiones ópticas.

Lo que se encuentra ahí escrito resulta muy útil cuando de representar la realidad se trata, como es el caso de la pintura; de igual manera, la fuerte relación que establece entre lo que se observa y cierto ángulo, puede ayudar a resolver muchos problemas prácticos, tales como calcular la distancia de

[6] Supongamos que el ojo se encuentra en O, $AB = A'B'$ y que OA, OB, OA' y OB' son rayos visuales; si hay un objeto en AB y otro en $A'B'$ tendremos que $\measuredangle AOB > \measuredangle A'OB'$, de modo que según las suposiciones que estableció al principio del texto, el objeto que se encuentra en OAB nos parecerá mayor que el que se encuentra en $OA'B'$, y esto se debe sólo a la distancia a la que se encuentran del observador.

algún objeto dado a través de establecer relaciones entre los tamaños relativos, e incluso podría llegar a resolver cuestiones de carácter astronómico y se puede creer, de manera *naive*, que la óptica acompaña a la astronomía en la construcción de los primeros escalones en el desarrollo de la trigonometría.
La Especularia es un texto fundamental para el desarrollo de la catóptrica, término utilizado para referirse a fenómenos que involucran la reflexión de la luz. En esta obra Euclides analiza las propiedades y el comportamiento de la reflexión de los rayos visuales sobre tres tipos de espejos: planos, cóncavos esféricos y convexos esféricos.[7] Para cada uno de estos casos demuestra varias proposiciones que resultan ser fundamentales tanto en el desarrollo de este texto como en los trabajos posteriores de diferentes autores.
Entre los resultados más destacados se encuentra que "el ángulo de incidencia de un rayo que se refleja en una superficie plana es igual al ángulo de reflexión",[8] aseveración que por lo general se presenta como el principio de reflexión. En este texto Euclides lo introduce como un teorema que deduce a partir de los principios, ie. *suposiciones*, establecidos. Tal resultado constituye el primer teorema de *La Especularia.*[9]

Teorema 1.
En los espejos planos, cóncavos y convexos, los rayos visuales se reflejan con ángulos iguales.
Sea el ojo B, (Fig.2) y el espejo plano AC y tirado el rayo visual BF haga la reflexión en el punto D. Digo que el ángulo E es igual al ángulo G. Tírense al espejo las perpendiculares BC y DA, y porque es como BC a CF, así DA a AF (supuesto III, *La Especularia*), luego el triánguloBCF será semejante

[7] Que los espejos que considera sean esféricos se sigue de las demostraciones de los fenómenos a los que se refiere el texto, ya que en varias menciona el centro de la esfera.
[8] Que sea un teorema es decisión de Euclides, ya que para poder demostrarla se tienen que apoyar completamente en una suposición que describe lo que quiere que suceda. Euclides, *La especularia*, p. 43. Suposición III. *Si un espejo se colocare en un plano, y sobre el tal plano se levantare en ángulos rectos una cualquiera altura, hágase que la proporción que tiene la línea que está entre el que mira, y el espejo, a la línea que está entre el espejo, y la altura levantada, esa misma tenga la altura del que mira, a la altura que está en ángulos rectos sobre el plano del espejo.* (Se ha mantenido la sintaxis de la fuente de esta cita).
[9] Al citar los teoremas incluidos en *La Perspeciva* o en *La Especularia* mantengo la dicción y ortografía -no así la puntuación- de la edición de Pedro Ambrosio de Orendiz.

al triángulo DAF, y por ello el ángulo E, será igual al ángulo G; porque los triángulos semejantes también son equiángulos.

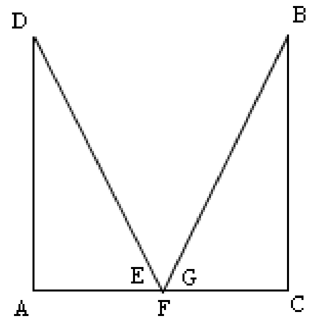


Fig. 2

Para mostrar que esta propiedad es válida para el espejo cóncavo y convexo considera el plano tangente a la superficie por el punto en el que incide el rayo, y ahí utiliza lo demostrado para el espejo plano. Posteriormente muestra que sólo en el espejo cóncavo los rayos visuales convergen, y esto sucede si el ojo se coloca en la circunferencia, en el centro de ésta o fuera, y que si se coloca entre el centro y la circunferencia algunas veces convergerá y otras no.[10] Esta proposición es importante ya que es la que le permite establecer, a modo de conclusión, que *en los espejos cóncavos opuestos al Sol se enciende fuego.*[11]

En el resto del libro realiza un análisis detallado de cómo se ven las imágenes en los distintos tipos de espejo, cómo alteran la profundidad, longitud, orientación, tamaño y forma aparente de los objetos que en ellos se reflejan, así como de qué manera inciden y son reflejados los rayos visuales para que en cada espejo la imagen varíe según una manera característica.

2.2. Arquímedes

Se cuenta que en el sitio que Roma impuso a Siracusa, durante el periodo 215-212 a.C, Arquímedes contribuyó a la defensa de su ciudad haciendo uso

[10] Euclides, *La Especularia*, Teoremas 5 y 6.
[11] Euclides, *La Especularia*, Teorema 31.

de diversas armas diseñadas por él; algunos dicen que utilizó espejos que al reflejar la luz del Sol le permitieron incendiar la flota del general romano Marcelo. Hay que tener en cuenta que también hay quienes creen que esto es solamente un mito y que el fuego pudo no ser creado por espejos, sino por alguna otra arma o por el arrebato de la batalla.

La veracidad de esta historia es dudosa por muy diversas razones: en el aspecto histórico, las crónicas más detalladas en las que se habla del uso de espejos se encuentran en relatos escritos 1400 años después del suceso, y fueron escritos por Tzetzes y Zonaras, autores bizantinos del siglo XII, y aunque en ambos relatos se menciona el uso de espejos como armas, en la crónica de Tzetzes se dice que Arquímides usa un aparato formado por varios espejos hexagonales y cuadrados,[12] mientras que en la de Zonaras sólo se hace referencia a un espejo.[13] En trabajos de historiadores más antiguos, como Plutarco, Polibio y Tito Livio, las narrativas sobre el sitio de Siracusa mencionan el uso de algunas armas y estrategias tales como máquinas para lanzar misiles -lanzamiento de rocas- sobre el ejército enemigo, catapultas para arrojar piedras y otras máquinas más pequeñas con las cuales se disparaban dardos de acero; también se menciona el uso de una garra que elevaba los barcos y, después de varios movimientos violentos, los hundía dejándolos caer al agua. Sin embargo en estas crónicas no se alude al uso de espejos entre las armas creadas por Arquímedes.[14] Esto no significa que este tipo de espejos fuera desconocido en la antigüedad. Pero quien aparente-

[12] Tzetzes, John.[s. XII]. *Book of histories (Chiliades)*, líneas 118-128. Cuando Marcelo se retiraba (sus naves) un tiro de flecha, el hombre viejo (Arquímedes) construyó un tipo de espejo hexagonal, y en espacios proporcionales al tamaño del espejo colocó espejos más pequeños de cuatro lados, movidos mediante lazos y unos tipos de bisagras, e hizo (este mecanismo) el centro de los rayos solares; de los de medio día, ya fuera verano o pleno invierno. Después, cuando los rayos se reflejaron en el espejo, un fuego tremendo cayó en las naves, y desde la distancia del tiro de flecha lo volvió cenizas. Es de esta forma que el hombre viejo triunfó con sus armas sobre Marcelo.

[13] Zonaras,John. [s.XII], en su *Epitome ton istorion* relata que: “Al final, de una manera increíble él [Arquímedes] incendió toda la flota romana... Mediante la inclinación de una especie de espejo que concentraba los rayos del Sol en él; debido a su espesor y lo lustroso, se incendió el aire y a partir de este rayo se prendió una gran flama, la cual se dirigió completamente hacia las naves que se encontraban ancladas en el curso del fuego, hasta que éste consumió todo.

[14] D. L. Simms (1975), “Archimedes and burning mirrors”. *Phys. Educ. Vol. 10*, p. 518

mente contribuye a propalar la anécdota de que Arquímides utilizó espejos ardientes contra los romanos fueron Diodorus Siculus (s. I a.C), autor de una 'Historia del mundo en 40 libros', Anthemius de Tralles (s. V-VI d.C), el arquitecto de la basílica de Hagia Sophia en la entonces llamada Constantinopla, y el ya mencionado John Tzetzes, (s. XII d.C), autor de un *Libro de Historias*, mejor conocido como *Chiliades*.

A pesar de que aparentemente las armas mencionadas eran lo suficientemente efectivas, aun cuando un tanto fantásticas, tal vez por la autoridad asociada con el nombre de Arquímedes y el enorme ingenio que desplegaba, se empezó a dar crédito a la leyenda de que diseñó espejos para quemar las naves romanas con los rayos solares que concentraban. Cuando se descubrió la propiedad focal de la parábola se supuso que en el caso de que se haya utilizado un espejo seguramente hubiera sido de este tipo, aunque las complicaciones derivadas de crear uno con la distancia focal apropiada y el difícil manejo que representaría una estructura de tal magnitud hizo que se descartara rápidamente la posibilidad de que el sabio de Siracusa hubiera construido uno.[15] Hay quienes sugieren que en el caso de haber utilizado la propiedad concentradora de luz de algunos espejos, lo que Arquímides habría hecho consistiría en construir un dispositivo con superficie parabólica formado por pequeños espejos. La forma más factible es el uso de una gran variedad de espejos planos dispuestos de manera específica, aunque muchas de las dificultades técnicas que ello implicaba requieren de una solución que en esa situación resulta poco práctica. Además, existen las complicaciones

[15] El hecho de que Polibio, Livio y Plutarco hayan escrito relatos sobre el sitio de Siracusa y no mencionaran a los espejos comburentes entre las máquinas que describen como construidas por Arquímedes, justifica la duda de que dichos artefactos hayan sido utilizados tal y como lo relata la leyenda. Con todo, hay evidencia de que para cuando Arquímides vivió ya se tenía conocimiento de las propiedades concentradoras de rayos solares de espejos con la curvatura adecuada. Así lo atestiguan Diocles y Dositeo. Este último es uno de los receptores de las cartas de Arquímides y a su vez estudioso de las propiedades de los espejos parabólicos (ver *Diocles*, Toomer (1976), p. 34). Por si fuera poco, Apuleyo, en su *Apología*, XVI, y Teón de Alejandría, en *Comentary on the Almagest* (347:5-348:1) escriben sobre una *Catóptrica* cuya escritura atribuyen a Arquímides. Aun cuando este texto está perdido sería razonable suponer que en él se discutían las propiedades caústicas de los espejos parabólicos. Sobre este respecto Apuleyo es muy puntual en señalar, mientras describe el contenido de dicho texto, las características de espejos cóncavos capaces de concentrar en un punto los rayos solares. (Ver Russo (2000), pp. 60-63.)

impuestas por el calentamiento que se puede lograr con los rayos solares, así como qué tan inflamables eran los materiales con los que estaban construidos los barcos.
Sin embargo este relato no dejó de tener eco en todas las épocas, y no fueron pocos los matemáticos que aportaron sus observaciones a favor o en contra. Lo relevante de este hecho es que sirvió como incentivo para la investigación en torno de los espejos ardientes y el posterior desarrollo de la óptica.

2.3. Diocles y los espejos comburentes

Uno de los matemáticos que nos legó una importante aportación a la catóptrica, y en particular al problema de los espejos ardientes o comburentes, es Diocles (C.240-C.180 a.C.).
El texto con el que contamos, titulado en su versión francesa *Livre de Diocles sur les miroirs ardents*,[16]contiene una gran variedad de resultados, probados con un rigor semejante al de Euclides, sobre problemas que involucran la construcción de espejos ardientes con características particulares, así como la solución a otros problemas de índole matemática, entre ellos la duplicación del cubo. El libro inicia respondiendo a dos preguntas. La primera fue planteada por Pytion de Tasos, quien escribe a Conon preguntando cómo encontrar la superficie de un espejo tal que puesto de frente al Sol los rayos reflejados en él converjan sobre una circunferencia [de tamaño reducido]. La siguiente pregunta, formulada por el astrónomo Hippodamus es, ¿Cómo encontrar la superficie de un espejo tal que puesto de cara al sol los rayos converjan en un punto y lo hagan arder?
Diocles responde a ambas preguntas, y la manera en la que lo hace es realmente sorprendente, ya que echa mano de una amplia gama de las matemáticas conocidas hasta el momento, e incluso de resultados de los cuales no se tiene registro y que muestran una ingeniosidad verdaderamente deslumbrante.

[16]De aquí en adelante las referencias a Diocles se tomarán de la recopilación de "Livre de Diocles sur les miroirs ardents", en *Les Catopticiens Grecs*. Texto traducido y comentado por Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres, 2002, pp 106-141

El trabajo sobre los espejos ardientes que analizaremos a continuación utiliza constantemente las secciones cónicas, en particular la parábola, a la que se refiere como *la sección de un cono en ángulo recto*, haciendo referencia a cómo interseca el plano al triángulo axial. [17], y que responde a la manera de caracterizar a las cónicas en tiempos de Menaechmo aunque Papo lo adscribe a Aristeo.[18]

Apolonio había escrito las *Cónicas*[19] aproximadamente un siglo antes, [20] y en dicho texto se encuentra una caracterización para cada una de las secciones; [21] sin embargo Diocles no utiliza las ahí dadas, sino que introduce una caracterización equivalente que mostraremos en el desarrollo de este trabajo.

Antes de iniciar con las demostraciones es importante mencionar algunos puntos sobre sus características: primero, Diocles no utiliza el método del análisis y síntesis, es decir, no va obteniendo los puntos importantes durante la demostración a través de distintas construcciones, sino que utiliza los puntos y rectas que van a satisfacer las propiedades necesarias para que la demostración resulte verdadera. Segundo, en algunos casos no especifica la orientación de las rectas auxiliares que utilizará en la demostración, a pesar de que las construcciones se encuentran en el espacio tridimensional.

[17] El triángulo axial se obtiene al pasar un plano por el eje del cono. La definición de la parábola aparece como la proposición 11 de *Las Cónicas* de Apolonio. Esta obra se constituyó en la base para el estudio de las cónicas desde su aparición y hasta el siglo XVII, cuando se recurre a los nuevos métodos analítico-algebraicos que inician una nueva era para las matemáticas.

[18] Ver Heath, *Apollonius*, p. xxxi

[19] El texto de la *Cónicas* de Apolonio se puede consultar en inglés en el vol.11 de los *Great Books* de la *Enciclopedia Británica* y en la edición de William H. Donahue de los primeros cuatro libros publicados por Green Lion Press (2000). En francés está la traducción, ya clásica de, Paul Ver Eecke, *Les coniques d'Apollonius de Perge* (1923), y la más reciente y aún incompleta de Roshdi Rashed.

[20] Heath, Sir Thomas. *A History of Greek Mathematics.* vol. II, p. 200

[21] En el caso de la parábola, en la proposición once del vol. I de las *Cónicas*, se enuncia que si un cono es intersecado por un plano que pasa por el eje del cono y posteriormente por otro que interseca la base del triángulo axial de forma perpendicular, además de satisfacer determinadas proporciones entre ciertas rectas y la curva definida en la superficie del cono, la curva obtenida será una parábola, mientras que si el segundo plano que tomamos interseca o no al triángulo axial de diferente manera, y cumple con otras proporciones, tendremos alguna de las otras cónicas o un círculo.

La primera proposición que Diocles demuestra se divide en cuatro partes, y es aquí donde responde a las preguntas anteriormente planteadas. Veamos primero cómo demuestra que el espejo con el cual se puede incendiar un punto corresponde al obtenido por la revolución de un segmento de parábola y, además, por qué es que esta curva funciona como espejo comburente.

Proposición 2.3.1 *En una parábola los rayos que inciden de manera paralela al eje convergen siempre en un mismo punto situado sobre el eje.*

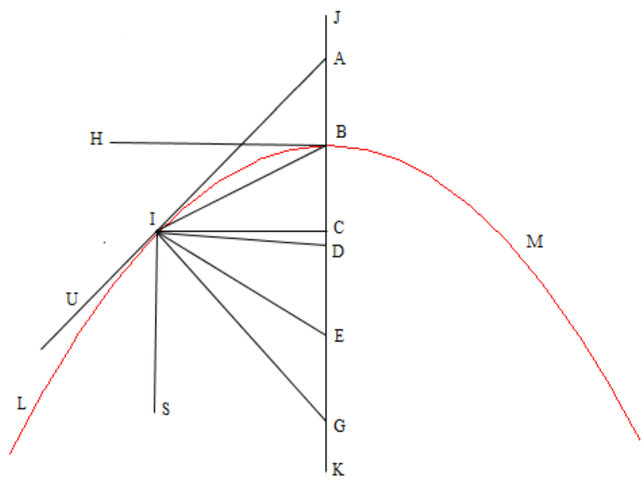


Fig. 3

Sea LBM la sección de una parábola donde B es el vértice, JK el eje y λ[22] el lado recto.
Sea $BH = \frac{\lambda}{2}$, perpendicular a JK por B, y BE sobre JK tal que $BE = BH$.
Llamemos D al punto medio de BE, de modo que $BD = DE$
Tomemos I, un punto cualquiera en la párabola, y sea IA la tangente por ese punto, donde A es el punto en el eje donde corta la tangente. Consideremos

[22] En los tiempos en los que Diocles realizó estos trabajos, el lado recto de una parábola no era la recta que pasa por el foco y es paralela a la directriz, ya que no se tenía esta caracterización; de modo que se le llamaba así a una recta auxiliar que normalmente se colocaba en un plano diferente al de la sección cónica y al plano del triángulo axial, que en la Fig. 3 satistface $IC^2 = AC \cdot \lambda$, la cual es la caracterización dada por Apolonio en la proposición 11 de su primer libro de *Las Cónicas*.

$IG \perp IA$, con G en JK.
Sea C el pie de la perpendicular a AG por I. Como A es el punto en el que la tangente por I corta a JK tenemos que $AB = BC$, [23] y como también tenemos que $CG = \frac{\lambda}{2}$,[24] de modo que $CG = BE = BH$,[25] por lo que $EG = AB$ [26], entonces $AD = DG$.
Observemos que $\triangle AIC$, $\triangle IGC$ y $\triangle AGI$ son semejantes, por lo que

$$\measuredangle AIC = \measuredangle IGC \quad \text{y} \quad \measuredangle GIC = \measuredangle IAC$$

Unamos I con D. Como $\measuredangle AIG = \frac{\pi}{2}$ e $ID = DG = AD$, entonces $\triangle IDG$ y $\triangle AID$ son isósceles, por lo que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\measuredangle DGI = \measuredangle GID \quad \text{y} \quad \measuredangle DIA = \measuredangle IAD$$

Consideremos una recta paralela al eje por I y sea ésta SI, entonces $\measuredangle SIG = \measuredangle DGI$ por ser alternos internos; ahora, como $IG \perp IA$ resulta que $\measuredangle GIS + \measuredangle UIS = \frac{\pi}{2}$, y teníamos que $\measuredangle GID + \measuredangle DIC + \measuredangle CIA = \frac{\pi}{2}$, y

[23] Apolonio. *Cónicas* I. 35

[24] Ver *Cónicas* V. 11. Una observación importante es que $CG = \frac{\lambda}{2}$ es equiva- lentes a la caracterización que da Apolonio. Fijemonos en los triángulos que se forman en la Figura 3 y consideremos $IC^2 = IG^2 - CG^2$, $IG^2 = AG^2 - IA^2$, donde $IA^2 = AC^2 + IC^2$, entonces

$$IC^2 = AG^2 - AC^2 - IC^2 - CG^2$$

pero $AG = AC + CG$ de modo que

$$2IC^2 = AC^2 + 2AC \cdot CG + CG^2 - AC^2 - CG^2$$

pero $CG = \frac{\lambda}{2}$ por lo que tenemos

$$IC^2 = AC \cdot \tfrac{\lambda}{2} \text{ pero } AC = 2BC$$

por lo que

$$IC^2 = BC \cdot \lambda$$

que es la caracterización dada por Apolonio.

[25] Así que para $I \neq B$ el punto E siempre va a estar más cercano al foco que G ya que $CG = BC$.

[26] Esta propiedad es válida para todas las posibles incidencias de C, ya sea entre DE o EG.

sabemos que $\measuredangle GID = \measuredangle DGI = \measuredangle SIG$, entonces $\measuredangle UIS = \measuredangle DIC + \measuredangle CIA$, es decir, si interpretamos a SI como un rayo de luz incidente sobre el punto I del espejo parabólico LBM, y nos apoyamos en la ley de reflexión, resulta que el rayo será reflejado en el punto D.

Diocles concluye que la superficie mediante la cual se va a poder prender fuego a un punto es la que se obtiene al girar la curva LBM alrededor de JK, dado que I era un punto cualquiera de la parábola. Todos los puntos sobre el círculo con centro en el eje JK y que pasan por I gozarán de la misma propiedad. Evidentemente esto se extiende al resto de la parábola, es decir, esta demostración abarca todos los posibles puntos sobre el paraboloide de revolución ya que para cualquiera de los puntos el comportamiento de los rayos luminosos, representados por la rectas correspondientes, va a ser exactamente el mismo; con esto da solución a uno de los problemas planteados.

Con respecto al problema de concentrar los rayos sobre una sección de circunferencia Diocles presenta dos soluciones; ambas con base en la parábola, considerando que los rayos que inciden de manera paralela al eje convergen en el foco de ésta.

En la primera solución considera una parábola en la cual el vértice B se mueve alrededor del eje que pasa por L, trazando una media circunferencia y creando una superficie en la que el foco genera también media circunferencia. La desventaja de esta primera solución es que no se puede obtener una circunferencia porque la superficie se cerraría y los rayos luminosos no podrían entrar, de modo que con esta solución no habría manera de obtener una circunferencia completa.

La segunda solución es más general, ya que se puede generar una superficie tal que incendie cualquier tipo de curva cerrada. Para obtenerla se toma sólo un pedazo de la parábola BM. En un plano ortogonal al plano que contiene a ésta se coloca, por el vértice B, la curva cerrada que se desee incendiar de tal modo que el vértice esté en la curva. Posteriormente el vértice la recorre y arrastrando el segmento de parábola -que gira adecuadamente- el foco de la parábola BM reproduce también la curva y se va generando la superficie reflejante que incendiará. (Ver Fig. 4).

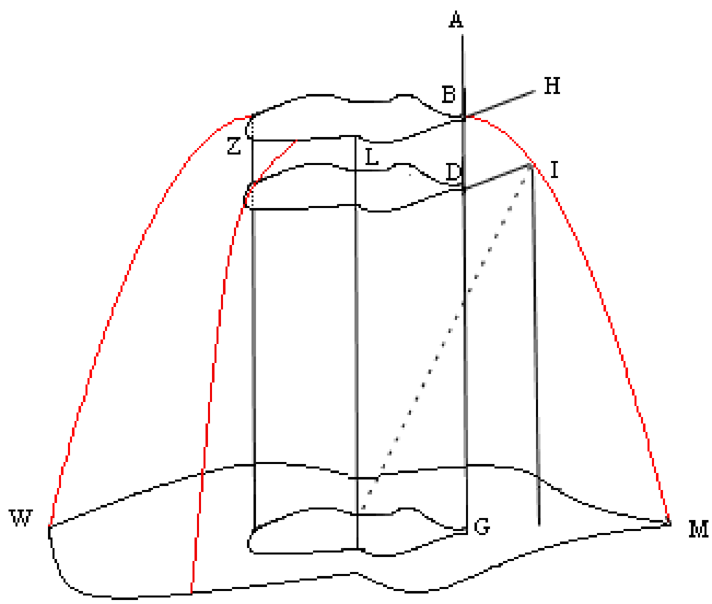


Fig. 4

A Diocles debemos también el hecho de que se haya descartado a la superficie cóncava esférica como la superficie a partir de la cual podamos construir un espejo ardiente; esto lo llevó a cabo mostrando que el teorema final del trabajo sobre catóptrica de Euclides, "*La Especularia*", no era del todo correcto. Diocles da una demostración bastante completa de por qué sucede que esta superficie, comparada con la parábola, resulta ineficiente. He aquí la demostración:

Proposición 2.3.2 *Los rayos que inciden en un espejo cóncavo esférico de manera paralela a un radio, convergen entre el punto medio de éste y el punto extremo del radio, es decir, el punto donde el radio encuentra a la superficie.* [27]

Para demostrarlo Diocles realiza lo siguiente:
Sea la circunferencia WMA con centro en B (Fig. 5). Consideremos un radio

[27] Diocles, *Diocles On Burning Mirrors*, pp. 108-112

cualquiera, AB, donde H es el punto medio y dos rectas paralelas a éste, LW y CS respectivamente. Unamos BL con LW y a BC con CS. Ahora construyamos M y G tales que el arco que forman LM y CG sea igual al arco formado en LC. [28]

Tenemos que los triángulos $\triangle BML$, $\triangle BLC$ y $\triangle BCG$ son semejantes e isósceles, ya que dos de sus lados son radios y subtienden el mismo arco de circunferencia, de modo que $\measuredangle BLM = \measuredangle BLC = \measuredangle BCG$.[29]

Sobre BL, en el vértice en L, copiemos el $\measuredangle BLW$ [30] y llamemos E al punto en el que la prolongacion de este ángulo interseca a AB; entonces $\measuredangle BLW = \measuredangle ELB$. Pero teníamos que $\measuredangle BLM = \measuredangle BLC$, por lo que $\measuredangle CLE = \measuredangle WLM$. Pero $\measuredangle BLW = \measuredangle LBE$, por ser alternos internos, de modo que $\measuredangle LBE = \measuredangle BLE$, por lo que el triángulo ELB es isósceles y $BE = EL$.

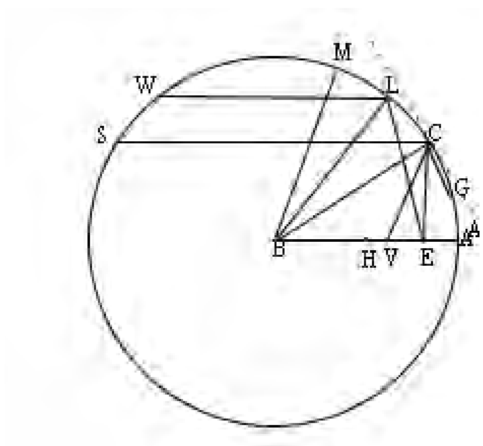


Fig. 5

Por demostrar que $LE > EA$.

E está sobre el radio BA entonces $EA < BA$. Si con centro en E trazamos una circunferencia de radio EA tendremos que el radio de curvatura es menor que el de la circunferencia de radio AB centrada en B.

Esto significa que cualquier recta a partir de E cruza la circunferencia de

[28] Euclides, *Elementos* I.23

[29] Euclides, *Elementos* I.5

[30] Euclides, *Elementos* I.23

radio EA antes de tocar un punto sobre la circunferencia AMW, en particular el punto L o C. Lo cual significa que $LE > EA$. De modo que E se encuentra entre H y A.
A continuación realizaremos el mismo análisis para una recta distinta con la finalidad de ver en qué sección del radio es que incidiria si dicha recta fuera un rayo luminoso.
Sobre CG y con vértice en C, copiemos el $\measuredangle SCL$ y llamemos V al punto en AB donde interseca la prolongación de este ángulo. Entonces $\measuredangle EBC = \measuredangle BCS$, por ser alternos internos; por construcción teníamos que $\measuredangle BCL = \measuredangle BCG$, de modo que

$$\measuredangle BCS = \measuredangle BCL - \measuredangle SCL = \measuredangle BCG - \measuredangle SCL = \measuredangle BCV$$

por lo tanto

$$\measuredangle BCS = \measuredangle EBC = \measuredangle BCV$$

por lo tanto $BV = VC$, y mediante un argumento análogo al utilizado para demostrar que $LE > EA$, obtenemos que $BV > VA$. Por lo que V se encuentra entre H y A.
Con esto hemos demostrado que los rayos reflejados en la circunferencia que inciden de manera paralela a un radio dado son reflejados entre el punto medio H y A; también resulta que los rayos que inciden sobre la circunferencia en puntos más cercanos al radio convergen más cerca de H, mientras que los más alejados inciden más cerca de A.
Finalmente veremos qué porción de esfera sería la óptima en el caso de que insistiéramos en construir un espejo ardiente con base en esta figura.

Proposición 2.3.3 *El arco adecuado para construir un espejo ardiente a partir de un círculo es el que abarca dos sextos consecutivos de éste.*[31]

Sea DAW una circunferencia con centro en B y tomemos AB un radio y H el punto medio de éste. Consideremos DW, recta que pasa por H y tal

[31] Diocles (2002), *Les Catoptricien Grecs*, pp. 109-112.

que $DW \perp AB$. Entonces el arco DA es igual al arco AW.
Por demostrar: que el arco DA es igual a un sexto de la circunferencia.
El $\triangle BHD$ es congruente con $\triangle DHA$, de modo que $DA = BD$, por lo que el $\triangle BDA$ es equilátero. Consideremos el diámetro AA' y H', D', W' análogos a los puntos construidos sobre AB. Tenemos $D'A' = DA = AB = A'B'$. De modo que el $\triangle A'D'B$ es equilátero por lo que $\measuredangle A'BD' = \frac{\pi}{3}$.[32] El $\measuredangle A'BD = \frac{2\pi}{3}$ por ser el ángulo exterior del $\triangle ADB$. Así que $\measuredangle D'BD = \frac{\pi}{3}$.

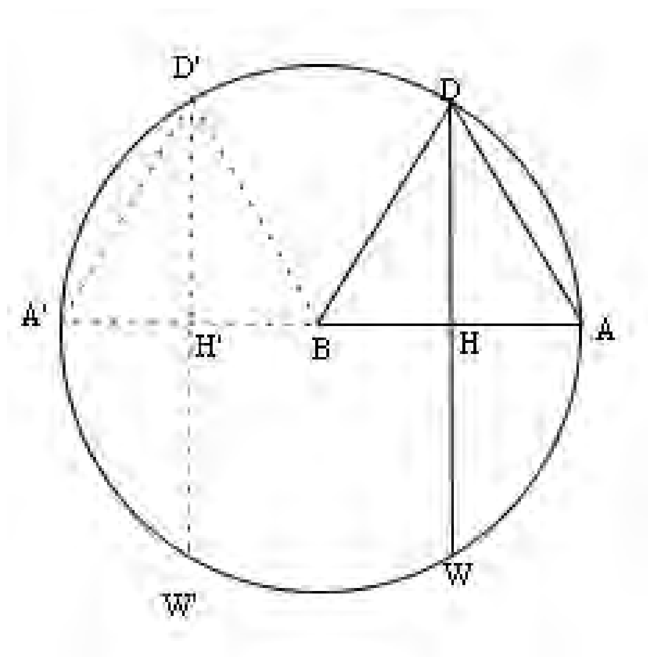


Fig. 6

Por lo tanto el arco DA es un sexto de la circunferencia y queda concluido lo que se quería demostrar acerca de la magnitud del espejo esférico que sugiere Diocles es el más apto.
Para justificar las razones de Diocles uno puede especular y señalar que en esta cuestión hay que tomar en cuenta varios elementos del orden práctico y

[32] Diocles no utilizaría los símbolos $\frac{\pi}{3}$, sino que se referiría a este valor como "un sexto de la circunferencia". En este trabajo recurro a utilizar π para una mayor facilidad en la escritura de los razonamientos de Diocles.

que posiblemente derivan de la experiencia. Si uno desea utilizar la propiedad comburente de un espejo para aumentar la temperatura de un objeto y hacer que eventualmente prenda fuego, el objeto o el espejo tienen que responder a ciertas limitantes.

Si el objeto es grande y es colocado frente a un espejo lo mejor es que éste sea tal que concentre los rayos que van a quemar al objeto relativamente lejos de la superficie especular. De lo contrario, digamos que el objeto está a una distancia menor al radio de curvatura del espejo, éste tendría que ser lo suficientemente grande como para englobar al objeto. Entonces hay que establecer una especie de balance entre el tamaño del espejo -tomando en cuenta el peso que tendría si es muy grande, su montadura, si se desea que sea desplazable, etc.- y el uso que se le deba dar.

Los resultados presentados hasta el momento indican que los rayos solares paralelos a un cierto radio o eje del espejo, al incidir sobre él, se reflejan sobre este eje de manera que caen en una zona delimitada por la mitad del radio, el punto H, y el punto donde éste toca a la superficie especular (punto A). Conforme se acerca al radio el rayo luminoso que incidirá sobre el espejo se refleja más cerca del punto H, y conforme se aleja más de este radio más se refleja hacia el punto A, teniendo como límite los puntos que harían del espejo una semiesfera. Conforme cambia esto último el espejo sería más grande y más pesado. Por ello se consideró que lo óptimo era utilizar un espejo cuyo diámetro estuviera definido en términos de la curvatura del espejo, haciendo que la mitad del radio de curvatura (BA) marcara el punto donde una perpendicular al radio delimita el diametro de lo que sería el espejo (la línea DHW) (ver Fig. 7).

Que esta estrategia optimiza el funcionamiento de un espejo comburente se entiende de inmediato si se toma en cuenta que se puede demostrar -lo cual Diocles no lleva a cabo, o al menos no lo hace entre sus escritos que nos han llegado- que en el caso de un cuerpo esférico cuyo diámetro DHW es pequeño comparado con el radio de curvatura[33] BA del espejo, sucede que

[33] El diámetro DHW no es el diámetro de la superficie esférica en la cual se realiza el corte para obtener el espejo, sino que, como la figura lo indica, es el diámetro efectivo -del corte transversal- del espejo. Por ende, cuando se habla de radio de curvatura del espejo,

los rayos paralelos a BA son reflejados hacia una zona pequeña que tiene como un extremo, izquierdo en este caso, al punto medio del radio BA y al que denotaremos como H.

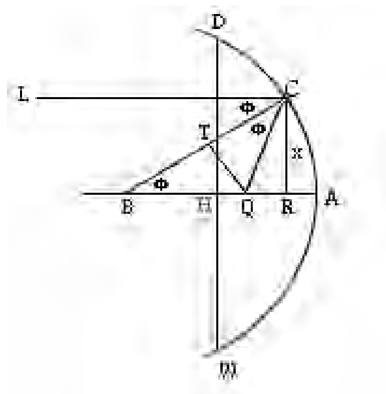


Fig. 7

Para ver que esto sucede así veamos la figura 7:
Sea el rayo incidente LC que se refleja en C y pasa por Q. Por la ley de reflexión ocurre que $\measuredangle LBC = \measuredangle BCQ$ y llamémosle ϕ a este ángulo.
Como LC y BA son paralelas resulta, como se había visto antes, que $\triangle BCQ$ es isóceles y $\measuredangle QBC = \phi = \measuredangle QCB$. Llamemos s a la magnitud BQ la cual es igual a QC,y por x denotemos a la perpendicular a BA (y de paso a su magnitud), es decir, CR que pasa por C. Sea el radio $BC = BA = r$.
Sea T el pie de la perpendicular a BC que pasa por Q. Como el $\triangle BCQ$ es isóceles BT es la mitad de BC.
Entonces, en el $\triangle BCR$ tenemos que

$$sen\phi = \frac{CR}{BC} = \frac{x}{r}$$

y del $\triangle BTQ$

$$cos\phi = \frac{BT}{s} = \frac{r}{2s}$$

y como $sen\phi^2 + cos\phi^2 = 1$, entonces

dicho radio no es la mitad de la magnitud DHW, sino BA.

$$(\frac{x}{r})^2 + (\frac{r}{2s})^2 = 1 \Rightarrow \frac{r^2}{4s^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2}$$

En vista del uso que se le desea dar al espejo, es decir, concentrar rayos que provienen de una fuente lejana, el espejo no puede abarcar más de media esfera, y por consiguiente el valor máximo que puede alcanzar x es BA, la mitad del diámetro de la esfera, o radio de curvatura que generó el espejo.
Como usualmente ocurre, el espejo no será semiesférico y por ello, si llamamos t al valor máximo de x, entonces t podría -suele- ser mucho más pequeño que BA. Podemos entonces obtener un valor aproximado para s, la distancia desde B a la que el rayo paralelo al eje BA cruza el eje después de la reflexión. Esto se lleva a cabo despreciando el valor de $(\frac{x}{r})^2$, dado que x^2 es mucho menor que r^2 en la expresión anterior. Esto conduce a la aproximación $4s^2 = r^2 \Rightarrow s = \frac{r}{2}$, es decir, el punto donde incide en el eje BA el rayo reflejado es uno en la mitad del camino entre B y A, y esto es independiente, dentro de la aproximación realizada, del punto de incidencia en el espejo. Esto significa que alrededor de H se encuentran los rayos y ello produce el efecto comburente en la zona cercana a H.
Esto es válido para cualquier punto del espejo sobre el que incide un rayo paralelo al eje BA. Si se toman en cuenta más rayos es evidente que no todos cruzan al eje BA en el mismo punto y los que inciden sobre el espejo más cerca de D cruzan el eje en puntos s más alejados de B que los rayos que inciden más cerca de A. Sin embargo, y por lo ya argumentado, la acumulación de rayos en una zona determinada sí logra producir el aumento de temperatura buscado.
En función de lo anterior es que se juzgó conveniente tomar espejos esféricos cuyo diámetro DHW fuera definido por el punto H, el punto a la mitad del radio BA.
Sea ahora C la mitad del arco DA [34] y N la mitad de AW (ver Fig. 8). Sea CT paralela a AB y unamos C con B.
Si la recta CT fuera un rayo luminoso que se reflejare en C de modo que hiciera ángulos iguales respecto al plano tangente por ese punto, esta recta incidiría en la recta AB en un punto V situado entre A y H.

[34] Euclides, *Elementos*, I.9

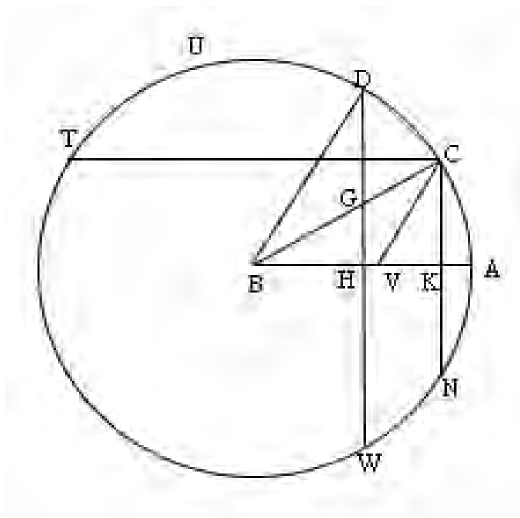


Fig.8

Dado que en la proposición anterior vimos que el arco DA es un sexto de la circunferencia, y recurriendo al principio de reflexión, resulta que $\measuredangle ABC = \measuredangle VCB = \frac{\pi}{6}$ (ver Fig. 8). Tomemos la recta que une a CN y que interseca a AB en K de forma perpendicular. Fijémonos en lo siguiente: $\measuredangle KVC = \frac{\pi}{3}$, ya que es el ángulo externo de $\triangle CBV$, de modo que $\measuredangle KCV = \frac{\pi}{6}$; ahora, el ángulo en H que forma la recta DW con AB es recto; llamenos G al punto donde BC interseca a DW, entoces $\measuredangle BGH = \frac{\pi}{3}$. De esta forma tenemos que $\triangle BKC$, $\triangle BGH$ y $\triangle CVK$ son semejantes.
Diocles sólo concluye lo anterior, y sin embargo utiliza que $\triangle BGH$ es congruente con $\triangle CVK$. Veamos cómo podríamos obtener en términos modernos este resultado.
Demostración. Fijémonos en $\triangle CBK$; sabemos que

$$sen\measuredangle CBK = sen\frac{\pi}{6} = \frac{CK}{BC} = \frac{1}{2}$$

de modo que $CK = \frac{BC}{2}$. Y teníamos que $BH = \frac{AB}{2}$, pero como $BC = AB$ por ser radios, resulta que $CK = \frac{AB}{2} = BH$, así que $\triangle BHG$ es congruente con $\triangle CKV$;[35] se sigue que $CK = BH$, $VK = GH$ y $BG = VC$.

[35] Euclides, *Elementos*, I,26

Ahora consideremos el $\triangle BHG$. En el cual se da la siguiente igualdad, $cos\frac{\pi}{6} = \frac{BH}{BG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de modo que $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}BG$ y por lo tanto $BG^2 = \frac{4}{3}BH^2 = BH^2 + \frac{BH^2}{3}$
Como el $\triangle BHG$ es congruente con $\triangle CKV$, $BG = BV$, lo cual implica que $BV = \frac{2}{\sqrt{3}}BH$.
De lo anterior Diocles concluye que $BH > 6HV$; sin embargo esta desigualdad puede no ser del todo evidente, de modo que agrego una pequeña demostración en la cual se muestra que es válida.
Tenemos que $BH + HV = BV = \frac{2}{\sqrt{3}}BH$, lo cual implica que $HV = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}BH$. Sabemos que $48 < 49$ es decir $16 \cdot 3 < 49$, por lo que $4\sqrt{3} < 7$ pero $4\sqrt{3} = \frac{12}{\sqrt{3}}$, así que $12 < 7\sqrt{3}$. Entonces $12 - 6\sqrt{3} < \sqrt{3}$ de modo que $2 - \sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{6}$ y, finalmente, $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < \frac{1}{6}$. Por lo tanto $HV = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}BH < \frac{BH}{6}$ de modo que $BH > 6HV$.
Como H es el punto medio de AB tenemos que $AH = BH$ y $HV + VA = AH$, por lo que $AV > 5VH$.
Si las rectas paralelas que llegan a los arcos CD y NW se reflejan haciendo ángulos iguales, los rayos reflejados incidirán entre los puntos A y V; ninguno de estos rayos se reflejará más allá de V del lado de H.
Los rayos paralelos a AB que incidan en el arco CAN, si se reflejan haciendo ángulos iguales, incidirán en la recta HV. Los dos rayos que se reflejan en C y N inciden en el punto V; entre los rayos restantes, aquéllos más cercanos a A se reflejarán más cerca del punto H.
Si fijamos la recta AB y hacemos girar alrededor de ella el arco AD hasta que vuelva a su posición inicial, la superficie obtenida será parte de una superficie esférica. Si construimos esta superficie en cobre y la ponemos de frente al sol de tal forma que sólo un rayo pase por AB, tendremos que los rayos reflejados en la superficie generada incidirán en AV. Los rayos que se reflejen en la porción generada por el arco AC incidirán en la recta HV. Los rayos que procedan del círculo generado por C incidirán en V; los rayos que incidan más cerca de A al reflejarse incidirán más cerca de H, en la línea HV, de modo que generan una gran cantidad calor en HV, y los rayos que inciden en esta porción de arco se reflejarán más cerca de H que de V.

Así que no podemos aprovechar sólo la superficie generada por CD, ya que los rayos que se reflejan en este arco se dispersan demasiado. De modo que si se desea construir un espejo ardiente de una porción de esfera lo aconsejable es construir sólo la generada por el arco AC.
Entre otros de los resultados que Diocles demuestra relacionados con la combustión mediante reflexión en superficies pulidas se encuentra, como era se suponerse, la construcción de un espejo parabólico con una distancia focal dada. Dejo al lector interesado la consulta de este resultado en la edición de Rashed o Toomer del tratado de Diocles.

Capítulo 3

Ibn Sahl, el trazo mecánico de las cónicas y la construcción de los espejos

Entre los trabajos más destacados y descubiertos recientemente se encuentra el escrito de Ibn Sahl conocido como *Tratado de Instrumentos Ardientes* que escribió entre el 983 y 985 dC.[1] En él propone el uso de espejos para resolver la siguiente pregunta ¿Cómo es posible causar ignición mediante la luz del Sol sólo con la ayuda de la reflexión?

Como hemos visto Ibn Shal no fue el primero en ofrecer una respuesta a esta pregunta. Antes que él, Euclides en *La Especularia* enuncia la manera cómo cierto tipo de espejo, puesto de frente al Sol, permitiría incendiar objetos colocados frente a él. Sin embargo este resultado es erróneo, lo cual se constata comparándolo con el último resultado de Diocles que se mostró en el capítulo anterior; el argumento que Euclides planteó es el siguiente.
El teorema 31 de *La Especularia* dice: *En los espejos cóncavos opuestos al Sol se enciende fuego.*
Por principio de cuentas hay que aclarar que aunque el enunciado se refiere a un espejo cóncavo -en general- en el curso de su argumentación lo supone

[1] Rosdi Rashed (1990), "A Pioneer on Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses". p. 465

esférico, con lo cual resulta que la propiedad a la que hace referencia sería válida, si fuera el caso, para un espejo cóncavo no esférico. En su demostración, lo primero que hace Euclides es mostrar que los rayos que salen desde un sólo punto del Sol e inciden el espejo son reflejados en la línea que pasa por ese punto y el centro del espejo a diferentes alturas entre el centro del espejo y este punto que se encuentra en el Sol; sin embargo después considera sólo los rayos que al incidir en el espejo lo hacen de manera perpendicular a la tangente por ese punto (como si fuera posible desechar todos los otros rayos), y como anteriormente había mostrado que estos rayos inciden en sí mismos (y sabemos que los rayos que pueden ser perpendiculares a la tangente por un punto de la circunferencia son los radios) tendremos que todos estos convergerán en el centro del espejo, de modo que si ahí se coloca algún combustible (*estopa*) éste arderá.

Después de Euclides los resultados más interesantes que nos han llegado son los de Diocles, quien mostró la propiedad focal de la parábola y propuso el uso de espejos ardientes obtenidos a partir de superficies de revolución de esta curva, así como la construcción de un espejo con una distancia focal dada.

Una diferencia fundamental entre Ibn Sahl y los matemáticos anteriores a él, es que con las herramientas encontradas previamente logra simplificar de manera notable la construcción de curvas tales como la parábola y la elipse, ya que recurre a caracterizaciones geométricas mucho más sencillas que las utilizadas por Diocles y Apolonio, de modo que da un gran paso en la caracterización de estas curvas y logra llevar a cabo un estudio mucho más completo y sencillo de las propiedades ópticas que ahora nos interesan.

3.1. El espejo parabólico

Como se mencionó, Ibn Shal responde a la pregunta planteada líneas arriba acerca de cómo prender fuego utilizando rayos de sol concentrados en una región del espacio de la siguiente manera:[2]

[2] Ver Ibn Shal (2005), “The Treatise on Burning Mirrors”, pp. 78-88

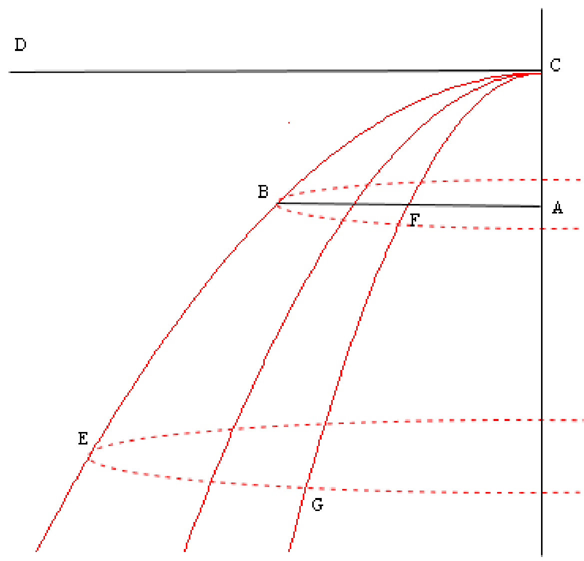


Fig. 9

Sea AB una distancia dada y AC la dirección de los rayos solares. Supongamos que $AC \perp AB$ y tal que $AC = \frac{AB}{2}$. Dibujamos $DC \perp AC$ y tal que

$$CD \cdot AC = AB^2 \quad {}^3$$

La parábola de vértice C, con eje AC y lado recto CD [4] pasa por B. Consideremos un arco BE de esta parábola en la dirección opuesta a C. Si rotamos el arco BE alrededor de la línea fija AC, el punto B describe un arco circular BF y el punto G un arco circular EG.
Delimitemos la porción $EBGF$ del paraboloide de revolución y designemos a éste como (BG).

Proposición 3.1.1 *Los rayos paralelos a AC que inciden en la superficie (BG), en caso de que sean reflejados, inciden en el punto A.*

[3] Ver Apolonio. *Cónicas* I.11

[4] Apolonio no se refiere a las partes de la parábola utilizando esa nomenclatura; sólo se refiere a las proporciones que estas rectas satisfacen.

Dado que el uso del plano tangente a un punto es esencial en la demostración, Ibn Sahl decide mostrar la unicidad de éste y hace lo siguiente:

Sea el plano ACH que interseca a (BG) por el arco IJ (ver Fig. 10), donde IJ es un arco parabólico igual a BE (ya que (BG) es una superficie de revolución formada por BE).

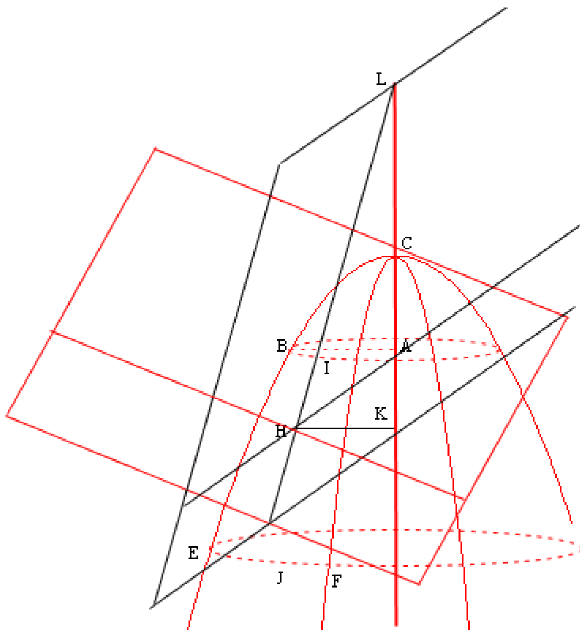


Fig. 10

Sea K la proyección ortogonal de H en AC; sea L en AC tal que $LC = CK$. La línea recta LH es tangente a IJ.[5] Entonces el plano que pasa por la línea LH y es perpendicular al plano AHC es tangente a la superficie (BG) en H.

Con esto es suficiente para demostrar la unicidad del plano, ya que la proposición 35 del libro I de las *Cónicas* de Apolonio establece que la recta tangente en H que satisface las condiciones anteriores es única. [6]

[5] Apolonio. *Cónicas* I.35

[6] Apolonio, *Cónicas*, Proposición 35. *Si una línea recta toca una parábola, intersectando el diámetro* (que de acuerdo con la definición coincide con el eje) *fuera de la sección, la línea recta trazada desde el punto de contacto de forma que sea bisectada por el diametro,*

A continuación Ibn Sahl analiza cómo es la reflexión de los rayos luminosos cuya dirección al incidir sobre el espejo es paralela al eje. Su demostración se puede presentar, utilizando nuestra notación y con el fin de ilustrar su estrategia, de la manera que a continuación mostraré:
Sea el rayo HX, paralelo a AC, que cae en H, y sea M un punto en la prolongación de LH (Fig. 11).
Hay que demostrar que $\measuredangle MHX = \measuredangle AHL$, es decir, que el rayo incidente es reflejado en el punto A. Por construcción tenemos que

$$CD \cdot AC = AB^2 = 4AC^2$$ [7]

Esto implica que $CD = 4AC$

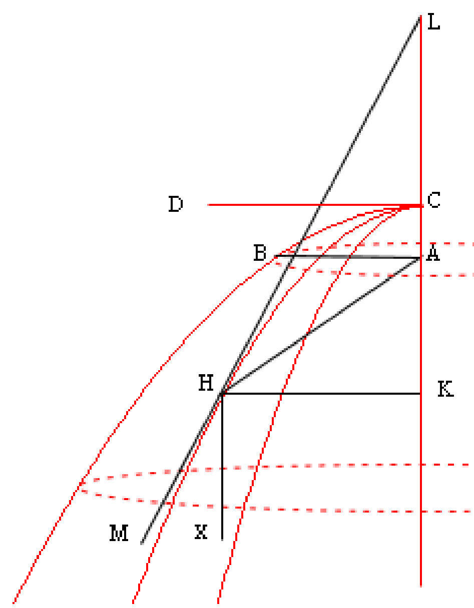


Fig.11

Como H está en el paraboloide también satisface

$$HK^2 = CD \cdot KC = 4AC \cdot KC$$

---

cortará a éste, empezando desde el vértice de la sección, en una línea igual a la recta entre el vértice y la tangente, y ninguna otra línea podrá haber entre la sección y la tangente.

[7] Ya que $AC = \frac{AB}{2}$

de modo que

$$AH^2 = AK^2 + HK^2 = AK^2 + 4AC \cdot KC =$$
$$AK^2 + 4AC^2 + 4AC \cdot KA = (AK + 2AC)^2 = AL^2$$

La primera igualdad se satisface en virtud de Euclides, *Elementos* I.47, y la tercera con base en Euclides, *Elementos* II.3, ya que $KA + AC = KC = LC$.

De modo que el triángulo ALH resulta ser isósceles y en consecuencia, como $\measuredangle AHL = \measuredangle ALH$ y HX es paralela a KL, entonces $\measuredangle AHL = \measuredangle MHX$.

De esta forma se concluye que el rayo luminoso XH que incide en H es reflejado en el punto A.

Tal como se ha presentado aquí este resultado es una traducción, a la uzansa actual, que permite expresar con mayor claridad los pasos matemáticos que llevan a la conclusión, manera que se expresa a través del lenguaje algebraico. Ibn Sahl, por su parte, escribiendo en la segunda mitad del siglo X, no gozó de estas ventajas.

Con el propósito de ilustrar su forma de proceder, con la herramienta matemática a su dispocición -básicamente la geometría elemental de los escritos euclidianos- presento una transcripción del teorema y su demostración, tal y como aparece en el *Tratado de Instrumentos Ardientes*.[8]

El Espejo Ardiente Parabólico

Deseamos incendiar un cuerpo que se encuentra a una distancia dada mediante la luz.

Sea la distancia dada la línea recta AB. La ignición debe tener lugar cuando la luz es reflejada en algún instrumento o luego de que pase por él. Si la ignición se da cuando la luz es reflejada en un instrumento, entonces trazamos la línea recta AC. [Los rayos de] luz, trazados desde un punto en la superficie del cuerpo luminoso a los lados del instrumento, pueden ser paralelos en "sensación" o no. Si los rayos luminosos, trazados desde un punto en la superficie del cuerpo luminoso a los lados del instrumento son paralelos en sensación —esto es, para todos los rayos que vienen desde el

[8] Rashed (2005). *Geometry and Dioptrics.* pp. 78-80.

cielo— , el ángulo BAC es un ángulo recto, de otra forma no.

Si el ángulo BAC es un ángulo recto, hagamos la línea recta AC la mitad de la línea recta AB. Tracemos la línea CD perpendicular a la línea AC, y hagamos el rectángulo CD por AC igual al cuadrado de AB; la parábola cuyo eje es la línea recta AC, y el lado de su eje[9] *es la línea recta CD, la cual [la parábola] pasa por el punto B, y delimita una porción de sí misma empezando desde el punto B y terminando en la dirección diferente del punto C, esto es, BE.*

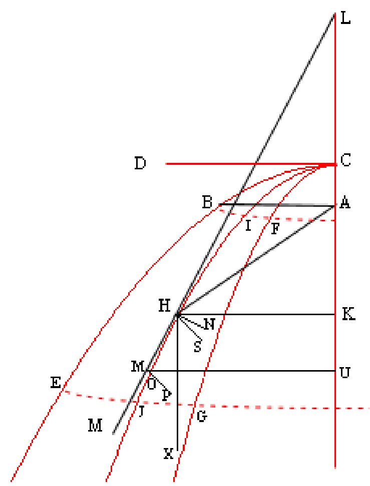


Fig. 12

Fijemos la línea recta AC y rotemos la porción BE alrededor de ella; entonces el punto B traza el arco BF y el punto E traza el arco EG, de modo que se crea la superficie BG, la cual tomaremos como la superficie del espejo opuesta al punto A. La luz del sol, si es reflejada desde toda la superficie BG al punto A, debe incendiar este punto. Tomemos dos mirillas por detrás del espejo: una sigue el arco EG, y tiene en el centro un agujero rodeado por un círculo; y la otra sigue el arco BF, y a su lado, la primera tiene al frente un círculo, el cual debe ser alcanzado por la luz del sol que pasa por el agujero (en la primera; donde se coloca), tal que la línea que une sus dos centros es paralela a la línea recta AC. Coloquemos el espejo de

[9] Éste es el lado recto o *latus rectum.*

frente al sol, de tal forma que la luz que pase por el agujero llegue hasta el círculo.

Digo que la luz del sol es reflejada por toda la superficie BG al punto A.

Demostración. Supongamos que el punto H está en la superficie BG y tracemos el plano ACH. (Ver Fig. 12) Generemos la línea IJ en la superficie BG. Como la sección BG es una parábola cuyo eje es la línea recta AC y el lado de su eje es CD, y está superpuesto en la figura IJ, entonces su eje es la recta AC y el lado del eje es igual a la recta CD.
Trazamos la línea recta HK perpendicular a la recta AC; hacemos la línea CL igual a recta CK; y trazamos la línea LHM, la cual será tangente a la sección IJ en el punto H. Sobre la línea recta LM trazamos el plano LMN perpendicular al plano ACH; será tangente a la superficie BG en H, ya que si no fuera tangente la cortaría en este punto. De modo que se sigue que una parte del plano LMN que se extiende hasta el punto H estaría dentro del ángulo limitado por la superficie FJ y el plano ACH.
Supongamos que N se encuentra en esta parte y trazamos el plano HKN. La línea AC puede ser perpendicular al plano HKN o no serlo.
Si la recta AC es perpendicular al plano HKN, dejemos que el plano HKN genere el arco HS sobre la superficie FJ y la línea recta HN sobre el plano LMN. Como el punto N se encuentra dentro del ángulo limitado por la superficie FJ y el plano ACH sobre HKN, se encuentra dentro del ángulo limitado por el arco HS y la línea recta HK. Es obvio que el punto K es el centro del arco HS; de donde resulta que la línea recta HN no es perpendicular a la recta HK. Pero como AC es perpendicular al plano HKN, entonces el plano HKN es perpendicular al plano ACH, y lo mismo es cierto para el plano LMN. La intersección de los dos planos HKN y LMN —esto es, la línea recta HN— es perpendicular a la línea recta HK; pero esto es imposible.

Si la línea recta AC no es perpendicular al plano HKN, trazamos desde el punto N un plano tal que la recta AC es perpendicular a él; haz que este plano genere el arco OP en la superficie FJ, y sobre el plano ACH la línea recta MU que se encuentra con la línea recta AC en el punto U, el cual genera (también) la recta MN sobre el plano LMN. Entonces el punto N

se encuentra dentro del ángulo limitado por el arco OP y la línea recta OU, y el punto M queda fuera. El punto U es el centro del arco OP; de modo que la línea recta MN es perpendicualar a la recta MU; pero esto es imposible. EL plano LMN es entonces tangente a la superficie BG en el punto H.

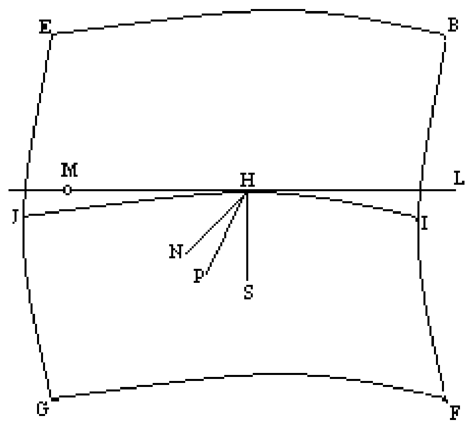


Fig. 13

La superficie BH no es tangente a H en ningún otro plano mas que en el plano LMN, ya que si hubiera otro plano tangente en este punto —sea HN la intersección entre el plano cuyo arco es HS y el plano LMN. Dicha recta es tangente al arco HS en el punto H— , este plano [10] *debería cortar al plano LMN en H, y debe por consiguiente cortar una de las dos líneas HN, HL en el punto H. Si este plano cortara la línea recta HN en el punto H, entonces sea la intersección entre este plano y el plano del arco HS la línea recta HP. Pero como este plano es tangente a la superficie BG en H, entonces la línea recta HP debe ser tangente al arco HS por H, y lo mismo es verdad para la línea HN; pero esto es imposible.*

Si este plano interseca a la línea recta HL en el punto H, la intersección entre este plano y el plano de la sección IJ es la línea recta HR. Entonces, como este plano es tangente a la superficie BG en el punto H, la línea recta HR es tangente a la sección IJ en el punto H, y lo mismo es verdad para la

[10] El segundo plano tangente.

recta HL; pero esto es imposible. Ningún otro plano más que el plano LMN es tangente a la superficie BG en el punto H.

Dado que la superficie [generada por] CD por AC es igual al cuadrado de AB, y el cuadrado de AB es cuatro veces el cuadrado de AC, y dado que la línea AC es la mitad de la recta AB, tenemos entonces que la superficie [generada por] CD por AC es cuatro veces el cuadrado de AC; de modo que la línea recta CD es cuatro veces la línea recta AC, y el cuadrado de HK es igual a la superficie [generada por] CD por KC; de modo que el cuadrado de HK es cuatro veces la superficie [generada por] AC por CK. La suma de los dos cuadrados de AK y KH —esto es, el cuadrado de AH— es igual a la suma del cuadrado de AK más cuatro veces la superficie AC por CK —lo cual— es el cuadrado de AL. El cuadrado de AH es entonces igual al cuadrado de AL, por lo que la línea recta AH es igual a la recta AL. De esta forma el ángulo AHL es igual al ángulo ALH. Trazamos la línea recta HX paralela a la línea AL; así, el ángulo ALH es igual al ángulo MHX, y el ángulo AHL es igual al ángulo MHX. Y las dos líneas rectas AH, HX no encuentran a la superficie BG en otro punto más que en H. De hecho, si se llegan a encontrar en algún otro punto, sería en el punto S, ya que S se encuentra en la superficie BG, y al mismo tiempo se encuentran en el plano ACH, de modo que está en su intersección, es decir, con la sección IJ. Se sigue que las dos rectas AH, HX encuentran a la sección IJ, la cual es una parábola cuyo eje es la línea recta AC, en un punto diferente a H, pero esto es imposible.

De modo que las líneas AH, HX no encuentran a la superficie BG en un punto diferente de H.

Sin embargo, como hemos colocado el espejo de frente al sol, de modo tal que la luz pase a través del agujero y llegue hasta el círculo, tenemos que en un punto en la superficie la luz del sol es propagada a través del aire por las líneas rectas que unen el centro del agujero con el del círculo. Cada una de las dos líneas —la línea que une los dos centros y la recta HX— es paralela a la línea recta AC. La línea recta que une los dos centros es paralela a la línea HX. La línea recta HX no encuentra la superficie antes de este punto. Es sabido que si desde un punto en la superficie la luz del sol se propaga *a lo largo de una de las líneas rectas que para nosotros son paralelas, y la otra recta no encuentra la superficie antes de este punto, entonces su luz es también propagada a lo largo de la otra; por lo tanto la luz de este punto es propagada siguiendo la línea recta HX, y no interseca a la superficie BG en un punto diferente a H. Por lo tanto encuentra algo diferente al aire; pasando a través del aire llega al punto H para así ser reflejado a lo largo de la línea AH. Esta línea no encuentra a la superficie BG en un punto que no sea H; encuentra algo diferente al aire y luego llega al punto A. La mismo es verdadero para todos los puntos que se encuentran en la superficie BG. Si el punto A es colocado en la superficie externa que deseamos incendiar, la línea recta AC es superpuesta sobre la sombra de este cuerpo; pero sabemos que la línea recta AC no llega a la superficie BG. Lo mismo seguirá siendo válido para toda línea que pasa entre el punto A y el arco BF que sea paralela a la recta AC. Si en alguna de las partes cercanas a la superficie BG la sombra del cuerpo terminara en alguna de estas rectas, la superficie BG permanece expuesta al sol; su luz se reflejará desde toda la superficie en dirección de las posiciones del punto A fuera de la superficie, y lo incendiará. Esto es lo que queríamos demostrar.*

Si el ángulo BAC no es un ángulo recto, trazamos la línea recta BC perpendicular a la recta AC, y hacemos a la línea recta AD igual a la línea AB; [11] *dividimos la recta CD en dos mitades en el punto E, y trazamos la línea recta EF perpendicular a la recta CD, y hacemos la superficie [generada por] EF por CE igual al cuadrado de BC. Sea BG la parábola cuyo eje sea la línea recta AE, y cuyo "latus rectum" sea la línea EF, pasa por el punto B y delimita una porción que inicia en el punto B y termina en la dirección opuesta a E. Fijemos la línea recta AC, y rotemos la sección BG alrededor de ella de manera que el punto B trace el arco BH y el punto G trace el arco GI; el resultado es la superficie BI, la cual tomamos como la superficie de un espejo opuesto al punto A. Si la luz del sol es reflejada desde la superficie BI hacia el punto A, en este punto debe encender el fuego.*

Montemos dos mirillas en la parte posterior del espejo, las cuales usaremos como hemos descrito.

[11] Lo cual crea dos casos, uno cuando C y D están del mismo lado y otro en el que no.

Digo que la luz del sol es reflejada desde cualquier punto de la superficie BI hacia el punto A e incendia lo que hay en ese punto.

Demostración. La superficie [generada por] EF por CE es igual al cuadrado de BC. De modo que la suma del cuadrado de AC y de la superficie EF por CE es igual a la suma de los dos cuadrados de AC y BC; y la suma de los dos cuadrados de AC y BC es igual al cuadrado de AB; el cuadrado de AB es igual al cuadrado de AD; y el cuadrado de AD es igual a la suma del cuadrado de AC y cuatro veces la superficie AE por EC; la superficie EF por EC es entonces igual a la suma de cuatro veces la superficie AE por CE; y la línea recta EF es entonces cuatro veces la línea recta AE.

De esta forma la luz del sol es reflejada desde toda la superficie BI hacia el punto A, y esto incendia ese punto de acuerdo a lo que se mostró en la primera parte. Y esto era lo que buscábamos demostrar.

Diocles ya había mostrado con anterioridad que los rayos luminosos que inciden de manera paralela al eje del paraboloide son reflejados en cierto punto (el foco)[12] que satisface estar sobre el eje y encontrarse a una distancia igual a un cuarto del lado recto del vértice. Sin embargo hay diferencias esenciales entre su demostración y la dada por Ibn Sahl.
La primer diferencia importante es que Diocles considera a la parábola como la sección que se obtiene como la sección de un cono cortada de una manera particular, mientras que Ibn Sahl da la curva y la caracterización que de ésta proporciona Apolonio, lo cual simplifica la metodología de manera notable. Las demostraciónes de Diocles y de Ibn Sahl son semejantes en cuanto a las rectas auxiliares que utilizan, las propiedades que éstas deben satisfacer y el objetivo mismo: mostrar la igualdad de ciertos ángulos. Sin embargo Diocles no se apoya en la caracterización anteriormente mencionada de manera explícita.
Otra gran diferencia es que Diocles demuestra la propiedad focal del paraboloide para un solo caso, mientras que Ibn Sahl analiza dos posibles casos más, mismos que surgen si el punto que se desea incendiar A (el foco) no

[12] Fue Kepler quien llamó así al punto o puntos que en la parábola y la elipse concentran los rayos luminosos reflejados adecuadamente en su superficie. Ver Kepler *Ad Vitellionem Paralipomena...*(1604) iv,4.

coin- cide con el pie de la perpendicular C trazada desde un punto en la parábola B al eje AE (ver figuras 13.a y 13.b). Es así como Ibn Sahl abarca todos los casos de posible incidencia y muestra que la propiedad de reflejar los rayos luminosos en el foco la satisfacen todos los puntos en el paraboloide. Una pregunta pertinente en este momento es ¿De dónde surge la necesidad de dos casos más?. Posiblemente en el caso de Ibn Sahl nace de un interés por reforzar la propiedad que se establece en el caso anterior, a saber, que todos los rayos luminosos que incidan en el paraboloide serán reflejados en un mismo punto, y que la distancia entre el vértice y éste (el foco) es un cuarto del lado recto.
La siguiente proposición la tomamos del texto de Roshdi Rashed, *Les miroirs ardents*,[13] y con el propósito de seguir la construcción geométrica nos basaremos en las imágenes 14.a y 14.b.

Proposición 3.1.2 *Dibujemos la perpendicular desde B hasta AE; sea C el pie de esta recta.*
Prolongamos AC hasta D de tal modo que $AB = AD$. [14]
Hay dos casos posibles:

a) C y D están de lados distintos respecto de A.

b) C y D están del mismo lado respecto de A.

Sea E el punto medio de CD, y EF la perpendicular a CD, tal que $EF \cdot CE = BC^2$.

Entonces la parábola de vértice E, eje AE y lado recto EF, pasa por B. Consideremos un arco BG de esta parábola, y la porción de paraboloide (BI) generado por rotación de ese arco alrededor de AC. Si la superficie de esta porción de paraboloide es reflejante, entonces cualquier rayo paralelo a AC que incida en algún punto de esta superficie es reflejado hacia el punto A.

Ibn Sahl concluye que para demostrar la proposición en ambos casos es suficiente mostrar que A es el foco de la parábola, o que

$$EA = \frac{1}{4}EF$$

[13] Roshdi Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam.* pp. 49-50

[14] Euclides, *Elementos*, I.2

Veamos que así sucede. Dado que

$$EF \cdot CE = BC^2 \text{ y que } AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + EF \cdot CE$$

Ahora, considerando las dos posibilidades podríamos tener los dos casos:
caso a) $AD = 2EC - AC$ y $AE = EC - AC$
caso b) $AD = 2EC + AC$ y $AE = EC + AC$.

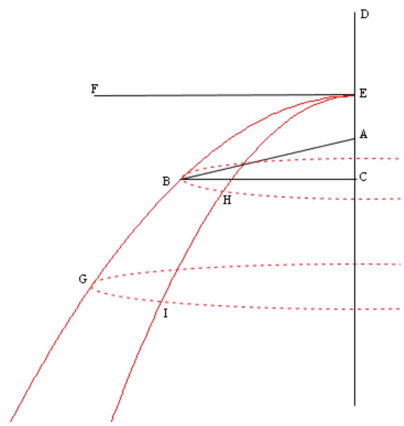


Fig. 14.a

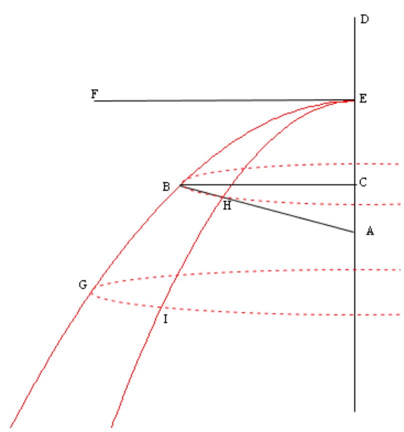


Fig. 14.b

De modo que

$$\begin{aligned} AD^2 &= 4EC^2 + AC^2 \pm 4EC \cdot AC \\ &= AC^2 + 4EC(EC \pm AC) \\ &= AC^2 + 4EC \cdot AE \end{aligned}$$

A partir de esta última igualdad y de las obtenidas anteriormente se sigue que:
$AD^2 - AC^2 = EF \cdot EC \Rightarrow AC^2 + 4EC \cdot AE = AC^2 + EF \cdot EC$
De modo que

$$EF = 4AE$$

Esta igualdad significa que el punto A está a una distancia de un cuarto de *lado recto* del vértice y, por ende, que A es el foco de la parábola.
Una vez demostrada la propiedad anterior se puede repetir la demostración del caso en que se pone de manifiesto que los ángulos que forman los rayos que inciden en un punto de la superficie con el plano tangente por este punto son tales que los rayos resultan reflejados necesariamente hacia el foco.
Ibn Sahl demostró que en cualquiera de los tres casos, a saber, $\measuredangle BAC = \frac{\pi}{2}, \measuredangle BAC < \frac{\pi}{2}$ y $\measuredangle BAC > \frac{\pi}{2}$, los rayos paralelos al eje son reflejados hacia el punto A del eje, "el foco", y cuya distancia al vértice es $\frac{1}{4}$ del lado recto.
De esta forma se puede ver cómo la *definición* que Apolonio había dado para la parábola junto con la propiedad que Ibn Sahl muestra acerca de la distancia a la que se encuentra el foco, permiten definirla de mejor manera como un lugar geométrico, aunque no en el sentido en que lo manejamos ahora. Lo que sí es un hecho es que se van descubriendo las relaciones fundamentales que permiten dar un paso hacia la simplificación de la definición de esta curva.
Pero Ibn Sahl no se restringe a las cuestiones teóricas, y consecuente con el interés original que dio paso al planteamiento del problema, y que es de donde surgió la leyenda que hizo de Arquímedes el primer usuario efectivo de las propiedades reflejantes de una curva, el pensador árabe se ocupó también de la construcción práctica de la curva adecuada. Esto lo hace, como se verá en la sección siguiente, de una manera bastante original.

3.2. Trazo continuo de la parábola usando el foco y la directriz

Ibn Sahl propone un método para trazar una parábola de manera mecánica. Sin embargo, el texto no fue encontrado completo y aquí sólo presentaremos el trazo de un arco de esta curva, el cual se puede encontrar en el texto de Roshdi Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam.*[15]

Sea un punto fijo A (ver Fig.15), una línea recta DF y una longitud $DE = l$. Coloquemos DF de tal forma que $FA = l$. Sea AC la perpendicular de A a DF tal que $DE > AC$.(Esto restringe la posición en la que podemos colocar a DF, ya que si consideramos la circunferencia de centro A y radio l, la recta DF no puede ser un diámetro ni tampoco la tangente por F). Pongamos DE perpendicular a DF en D del lado contrario a A.

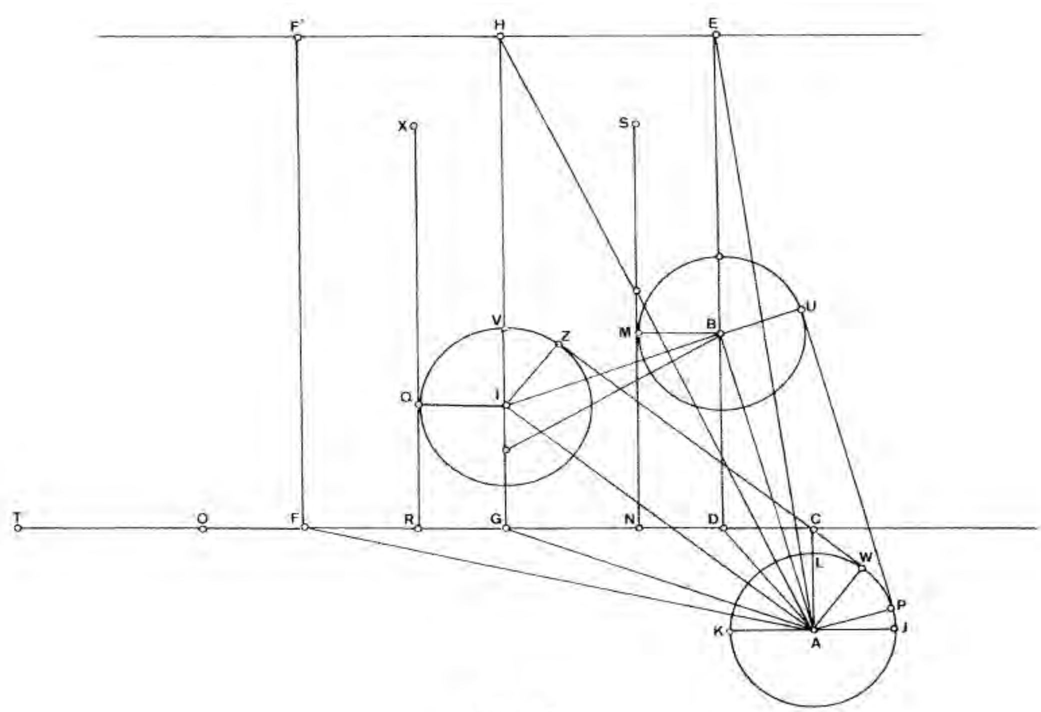


Fig. 15

[15] Ver Rashed (2005), pp. 88-94.

Unamos A con E, fijémosnos en el $\measuredangle DEA$ y construyamos uno igual sobre la recta AE con vértice en A, [16] de modo que abra hacia el mismo lado que el $\measuredangle DEA$. Sea B en DE el punto donde la recta del ángulo cons- truido interseca a DE; observemos que el $\triangle ABE$ es isósceles, de modo que $BE = BA$. Consideremos una magnitud α tal que $2\alpha < AB$, y tomemos la circunferencia con centro A y radio α, a la cual llamaremos (A); en ella tomemos el diámetro JK, paralelo a DF.
Con radio α tracemos una circunferencia con centro en B, a la cual denotaremos por (B).
Sea G en DF tal que $2\alpha < GD$. Pasando por G pongamos $GH = l$ perpendicular a DF. Unamos A con H, y de manera análoga a la anterior copiemos el $\measuredangle AHG$ en la recta AH con vértice en A. Llamemos I donde la prolongación del ángulo construido interseca a GH, de modo que el $\triangle IHA$ resulta ser isósceles e $IH = IA$.
De esta forma tenemos que

$$BD + BA = BD + BE = l$$

e

$$IG + IA = IG + IH = l;$$

donde los puntos F, G, D, C se siguen en ese orden en DF.

Por demostrar $IA > AB$.
Supongamos que $IA = AB$ entonces

$$IG + IA = IG + BA = BD + BA = l$$

lo cual implica que

$$IG = BD$$

y como IA era igual a AB resultaría que

$$DA = GA$$

[16] Euclides. *Elementos*. I. 23

Pero esto es una contradicción ya que $G \neq D$

Ahora supongamos que $IA < AB$, entonces como $IA = IH$ (por construcción), entonces $IH < BE$, y si $IA < AB$ e $IH < BE$ entonces $\triangle AIH$ es un triángulo (en vista de la restricción de que I debe estar en una perpendicular a CF entre FE' y FC ya que $\measuredangle HAI$ será menor que $\measuredangle EAB$) cuyo vértice I estará a la derecha de B y por lo tanto G sería tal que $GC < DC$. Pero esto es una contradicción.
Por lo tanto $IA > AB$.
Sea un círculo con centro en I y radio α; la circunferencia en I no interseca a la circunferencia en B ya que $2\alpha < DG$.
Sea BA la recta que une el centro de (A) y (B), tomemos el radio $BU \perp BA$ en (B) y el radio AP tal que $AP \perp AB$ en (A), de modo que $BU \parallel AP$; unamos los extremos de BU a los de AP, y llamemos a esta recta UP. Tenemos que $UP = BA$ ya que $BU = AP$ es decir, $BU \parallel AP$ y ambas son ortogonales a AB. Asi, tenemos que PU es ortogonal a BU y a AP, de modo que PU es tangente a (A) y a (B).
Tomemos el radio MB en (B) paralelo al radio KA en A y a la tangente a (B) que pasa por M llamémosla MN, de modo que $MN = BD$, de donde el arco $\hat{PK} = \hat{UM}$.
La línea $JPUMN$ tiene una longitud a la que denotaremos como s_1; al semiperímetro de las circunferencias llamémosle p.
Notemos que $PU = BA = BE$, lo cual implica que $PU + MN = l$; entonces tenemos que

$$s_1 = \hat{JP} + PU + \hat{UM} + MN = l + p$$

Procediendo de manera análoga, consideremos la recta que une los centros de las circunferencias (A) e (I) y tomemos los radios en (A) e (I) ortogonales a esta recta; llamémosles AW e IZ de manera correspondiente; si unimos la recta ZW, ésta resulta ser tangente a (A) e (I) de tal modo que $ZW = IA$, y también tendremos que estas rectas son paralelas. Ahora, al igual que con la circunferencia (B), consideremos el radio QI paralelo a DF y la tangente (QR) por ese punto Q. Tenemos que $QR = IG$ y $\hat{QZ} = \hat{KW}$. Así que la línea $JWZQR$ tiene longitud s_2

$$s_2 = J\hat{W} + WZ + \hat{ZQ} + QR = l + p$$

De modo que resulta que $s_1 = s_2$.
Una vez establecidas estas magnitudes, y mostradas las igualdades que satisfacen las circunferencias y rectas que utilizamos en la construcción, veamos cómo se puede realizar el trazo continuo de esta curva, y constatar que efectivamente corresponde al arco de una parábola.
Sean $NS = NO$, los lados de una escuadra rígida, donde $NS > NM$; NS se coloca sobre NM y NO sobre DF.
Consideremos que el punto A y la circunferencia (A) están fijos mientras que la circunferencia (B) es móvil. Colocamos una cuerda -Ibn Sahl se refiere a ella como un alambre de hierro y justifica que se usen círculos para que el alambre no sufra rupturas-[17] no elástica de longitud $l + p$ sobre esta estructura, de manera que uno de los extremos está fijo en el punto J que se encuentra en (A), y el otro punto se encuentra fijo en el vértice N de una escuadra recta que colocamos con un lado en la línea DF y el otro tangente a (B).
Si ponemos un *estilo*[18] en B, aplicamos presión en el círculo (B) de tal forma que la cuerda se mantenga tensa de manera que (B) siga siendo tangente al lado de la escuadra NS, y deslizamos NS a través de la recta DF, se traza un arco parabólico BI.
El movimiento del punto B debe ser realizado desde la posición inicial hasta que el círculo (B) sea tangente a DF.
La última parte del texto de Ibn Sahl sobre el trazo continuo de la parábola desafortunadamente está perdido, sin embargo mostraremos que la curva que Ibn Shal obtiene con este método efectivamente pertenece a una parábola.
En la actualidad nos referimos a la parábola como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta a la que llamamos directriz y de un punto, el llamado foco; notemos que en la construcción anterior la recta EH corresponde a una parte de la directriz mientras que el punto A al foco. En el trazo que Ibn Sahl propone es una de las condiciones necesarias que la

[17] Rashed (2005), p. 53.
[18] Punzón con el cual escribían los antiguos en tablas enceradas.

distancia desde cada punto en la curva a EH y a A sea constante, lo cual se hace patente al decir cómo se obtienen los puntos B e I, y posteriormente comprobar que dos puntos cualesquiera en las curvas s_1 o s_2 satisfacen ser equidistantes según corresponde, a la directriz y el foco de la curva que los incluye. De modo que sobre la base de estas propiedades aseguramos que la curva que obtiene mediante este método efectivamente corresponde a un segmento de parábola.

3.3. El espejo elíptico

De acuerdo con el texto que Roshdi Rashed nos presenta del tratado de Ibn Sahl, *Treatise on Burning Instruments*, vimos el análisis que nos presenta de la parábola como sección cónica, de modo que establece la relación foco lado recto, la propiedad reflexiva de esta curva y, posteriormente, propone un trazo que permite costruir un segmento de ésta sin necesidad de recurrir a definiciones en términos de proporciones. Le basta con tener un punto, un segmento y una magnitud dada; y todo esto lo hace con la finalidad de encontrar una superficie que permitiera causar ignición mediante la luz del sol. Sin embargo, una vez obtenido el paraboloide, continúa analizando las diferentes superficies que se pueden obtener mediante las secciones cónicas. En el caso de la hipérbola presenta unos resultados sobre lentes, planteando cuestiones relacionadas con la refracción, en tanto que con la elipse exhibe otra superficie comburente.

A continuación mostraremos qué es lo que le permite llegar a dicha conclusión, la cual es un resultado que para sorpresa de los lectores modernos está enunciado de una manera muy semejante a como se maneja en la actualidad.

El pasaje correspondiente a la elipse, en la primera parte, donde se ocuparía del análisis de la elipse como sección cónica y de las propiedades ópticas, desafortunadamente se encuentra perdido. En contraste, el referente al trazo continuo de esta curva nos ha llegado casi completo.

A continuación presento un breve análisis de la elipse como sección conica, y en particular presento una serie de proposiciones que se encuentran en el libro tercero de las *Cónicas* de Apolonio, las cuales permiten esbozar una demostración de la propiedad óptica que relaciona la reflexión sobre la superficie de la elipse, el paso de la luz por los focos de esta curva y el potencial comburente de esta sección cónica.

En la actualidad, para definir una elipse es costumbre hacerlo a partir de los focos de ésta, ya que todos los puntos en la curva satisfacen la condición de que la suma de las distancias a cada uno de ellos es constante, y esa magnitud es la misma que la longitud del eje mayor. Esta propiedad no es nueva. Apolonio ya la había demostrado como una más de las propiedades que la elipse satisface. [19]
Es importante tener en cuenta que Apolonio no se refiere a los focos de la elipse como tales, sino como puntos obtenidos de la aplicación de áreas, que aparecen al utilizar una proposición muy importante en el establecimiento de ciertos resultados, misma que aparece como la proposición número 28 en el libro sexto de los *Elementos* de Euclides.

En una línea recta aplicar un paralelogramo igual (en área) *a una figua rectilínea dada, y deficiente por un paralelogramo semejante a uno dado; entonces la figura rectilínea dada no debe ser mayor que el paralelogramo descrito en la mitad de la línea recta y debe ser semejante al defecto.* [20]

Donde el eje mayor es la recta dada, el área es un cuarto de la elipse y es un cuadrado la figura a la cual la diferencia debe ser semejante. De modo que los puntos que corresponden a los focos son los obtenidos por la aplicación de áreas a ambos lados del eje.
Enunciaremos las proposiciones que se encuentran en el libro tercero de las *Cónicas* de Apolonio sólo para el caso de la elipse, teniendo en cuenta que también son válidas para la hipérbola y la circunferencia, (las demostraciones son análogas a la que presento, sólo asignando la nomenclatura adecuada a las rectas correspondientes). Esto lo hago con la finalidad de mostrar una importante propiedad relacionada con los focos, misma que nos permitirá

[19] Apolonio. *Cónicas III*, prop. 52.
[20] Heat, Sir Thomas. *The Thirteen Books of the Elements*, Vol.2. pp. 260-262.

establecer las propiedades reflexivas de la elipse.
La primer proposición a considerar es la siguiente.

Proposición 45. (Cónicas)
Si en una elipse trazamos líneas en ángulo recto desde los vértices del eje, aplicamos en cada lado de éste un rectángulo igual a la cuarta parte de la figura, deficiente por una figura semejante a un cuadrado, y trazamos la tangente a la sección por los extremos de las rectas perpendiculares, tendremos que las líneas trazadas desde los puntos de intersección (de la tangente y de las perpendiculares) a los puntos producidos por la aplicación hacen ángulo recto en los puntos mencionados.[21]

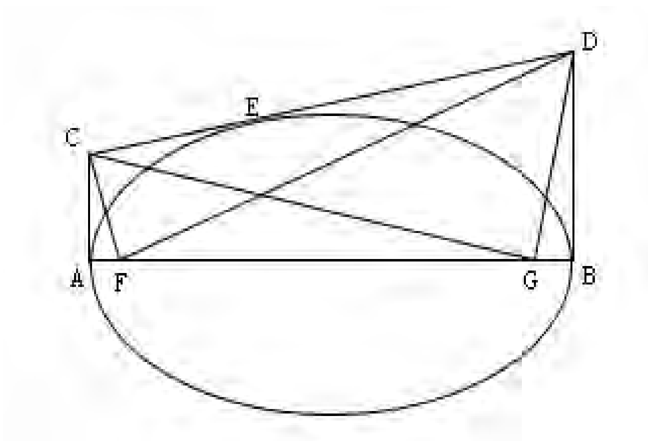


Fig. 16

Sea la sección cuyo eje es AB y sea AC, BD rectas en ángulo recto con AB y tómese CED tangente a la elipse, donde los rectángulos AF, FB y AG, GB son iguales a un cuarto de la figura y son aplicados sobre cada lado del eje (Euclides.VI 28).
Unamos CF, CG, DF y DG. Entonces se afirma que $\measuredangle CFD$ y $\measuredangle CGD$ son rectos.

[21] Estos puntos son los focos de la elipse. Esta manera de proceder es una aplicación particular de las proposiciones 28 y 29 del Libro VI de los *Elementos* de Euclides.

Demostración. El área generada por $AB \cdot CD = \frac{1}{4}$ [la figura sobre AB] [22] por hipótesis. Tenemos también que el area generada por $AF \cdot BD = \frac{1}{4}$ [de la figura] sobre AB. Por construcción $AC \cdot BD = AF \cdot FB$, de modo que $\frac{AC}{AF} = \frac{FB}{BD}$; como los ángulos en A y B son rectos tenemos que $\measuredangle ACF = \measuredangle BFD$ y $\measuredangle AFC = \measuredangle FDB$. [23]
Ya que $\measuredangle CAF$ es recto, resulta que

$$\measuredangle ACF + \measuredangle AFC = \frac{\pi}{2} = \measuredangle BFD + \measuredangle AFC$$

de modo que $\measuredangle DFC = \frac{\pi}{2}$.
De manera análoga se muestra que $\measuredangle CGD = \frac{\pi}{2}$.

Notemos que con este método el punto al que nos referimos puede ser cualquiera en la elipse; para obtener la tangente correspondiente habría que variar de manera adecuada la magnitud de las rectas perpendiculares.
Paso ahora a la
Proposición 46 (Cónicas)
Con los supuestos anteriores, tenemos que las rectas unidas forman ángulos iguales con las tangentes.

Considerando las hipótesis anteriores (figura 16), tenemos que

$$\measuredangle ACF = \measuredangle DCG \text{ y } \measuredangle CDF = \measuredangle BDG$$

Demostración. Con base en la proposición 45 de las *Cónicas*, el círculo cuyo diámetro es CD pasa por F y G, de modo que $\measuredangle DCG = \measuredangle DFG$ ya que están sustendidos por la misma cuerda.
En la proposición 45 vimos que $\measuredangle DFG = \measuredangle ACF$, por lo que $\measuredangle DCG = \measuredangle ACF$, y de manera análoga podemos concluir que $\measuredangle CDF = \measuredangle BDG$.

Proposición 47 (Cónicas)

[22] Apolonio *Cónicas* III.42. Si en una hipérbola, elipse o circunferencia de un círculo o secciones opuestas, trazamos líneas rectas desde el vértice del diámetro paralelo a una ordenada, y alguna otra línea al azar es trazada tangente, ésta cortará a las líneas rectas de modo tal que contengan un rectángulo igual a la cuarta parte de la figura sobre el mismo diámetro.
[23] Heat, Sir Thomas, *The Thirteenth Books of the Elements*, Vol. 2, pp. 204-205

Con los supuestos anteriores, la recta trazada desde el punto en que se intersecan las rectas de los puntos de aplicación hasta el punto de contacto será perpendicular a la tangente.

Demostración. Con las hipótesis anteriores, supongamos que CG y FD se intersecan en H; y sea K el punto en el que CD y BA se intersecan. Unamos EH.
Entonces EH es perpendicular a CD

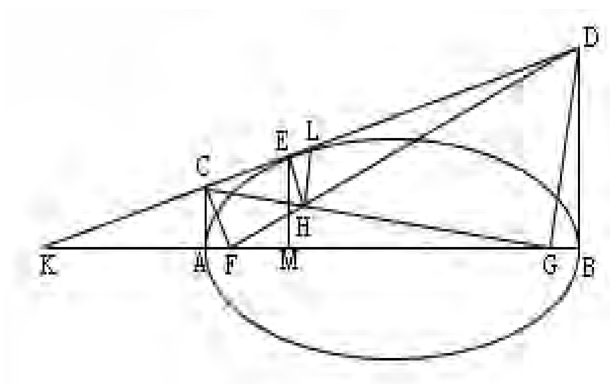


Fig. 17

Supongamos que no es así y que HL es perpendicular a CD. Entonces por la proposición 46 de las *Cónicas* tenemos que $\measuredangle CDF = \measuredangle BDG$, y como $\measuredangle DGB$ y $\measuredangle DLH$ son rectos, tenemos que $\triangle DGB$ es semejante al $\triangle LHD$, por lo que $\frac{GD}{DH} = \frac{BD}{DL}$. Pero $\frac{GD}{DH} = \frac{FC}{CH}$ ya que los ángulos en F y G son rectos (Proposición 45) y los ángulos en H son iguales.
Como $\triangle AFC$ es semejante a $\triangle LCH$ tenemos que $\frac{FC}{CH} = \frac{AC}{CL}$, por lo que $\frac{BD}{DL} = \frac{AC}{CL}$, de donde alternando obtenemos que $\frac{BD}{AC} = \frac{DL}{CL}$. Pero como $\frac{BD}{AC} = \frac{BK}{AK}$ así $\frac{DL}{CL} = \frac{BK}{KA}$.
Tracemos EM paralela a AC y entonces EM es bisectada; [24] luego resulta que $\frac{BK}{KA} = \frac{BM}{MA}$ [25] y $\frac{BM}{MA} = \frac{DE}{CE}$. Por lo tanto $\frac{DL}{CL} = \frac{DE}{EC}$, lo cual es una

[24] *ordinatewise*: dado un diámetro, hay una familia de paralelas que es bisectada por él; se dice que una recta en esa familia está colocada *ordinatewise* respecto a ese diámetro. *Las Cónicas*, Def.4

[25] Apolonio I.36.

contradicción, a menos de que $E = L$. De modo que HE es perpendicular a la tangente.

Las anteriores son proposiciones auxiliares en el establecimiento de la siguiente propiedad, la cual es la clave para demostrar que si en un espejo elíptico la fuente luminosa se sitúa en uno de los focos los rayos convergerán en el otro.

Proposición 48 (Cónicas)
Con los supuestos anteriores se mostrará que las líneas rectas trazadas desde el punto de contacto a los puntos producidos por la aplicación crea ángulos iguales con la tangente.

Con las hipótesis dadas en la proposición 45, unamos EF y EG de modo que tendremos que

$$\measuredangle CEF = \measuredangle GED$$

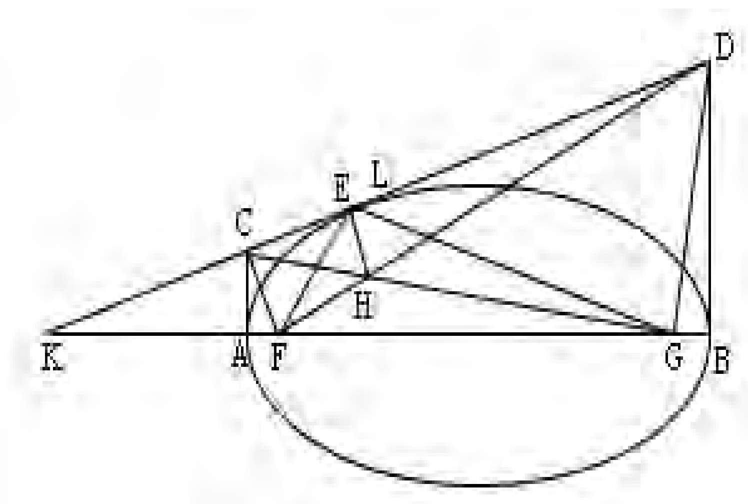


Fig. 18

Demostración. Tenemos que $\measuredangle DGH$ y $\measuredangle DEH$ son ángulos rectos (prop. 45, 47), de modo que el círculo que tiene DH como diámetro pasa por E y G (Euclides, III.21). También tenemos que $\measuredangle DHG = \measuredangle DEG$ ya que son subtendidos por la misma cuerda; de manera análoga, considerando el círculo cuyo diámetro es CH tenemos que $\measuredangle CEF = \measuredangle CHF$.
Pero $\measuredangle CHF = \measuredangle DHG$ ya que son opuestos por el vértice. Por lo tanto

$$\measuredangle CEF = \measuredangle DEG$$

Este resultado permite establecer que un rayo que tiene como origen a G (o F) (focos de la elipse), al incidir sobre la superficie se refleja de manera

que pasa por F o (G).
A continuación realizaremos un esbozo de la demostración de la propiedad reflexiva del espejo elíptico con base en las proposiciones demostradas anteriormente. En dicha propiedad se establece que si los rayos luminosos emanaran de uno de los focos, al incidir en la superficie generada por una elipse convergerían en el otro. Dado que los libros de Apolonio son anteriores a Ibn Sahl, las matemáticas que en esta demostración se utilizan no son superiores a las que hasta ese momento se pudieron conocer dentro del mundo árabe. Sin embargo no sabemos si Ibn Sahl haya tenido acceso a todos los libros de las *Cónicas*, a lo mejor alguna demostración parecida a ésta es la que pudo haber presentado en aquel fragmento de texto que se encuentra perdido o alguna otra en la que echara mano de su enorme ingenio.

Proposición 3.3.1 *Sea AEB un espejo elíptico. Si en uno de los puntos de aplicación F hay una fuente luminosa, los rayos que de ella surjan, al reflejarse en la superficie, convergerán en el otro punto de aplicación G.*

Consideremos a la elipse AEB, con eje AB, y cuyos puntos de aplicación (focos) son F y G. Sea E un punto en la elipse, tomemos la tangente por ese punto, KE. Unamos F con E, E con G y consideremos la perpendicular por E a la tangente, a la cual denominaremos EH.

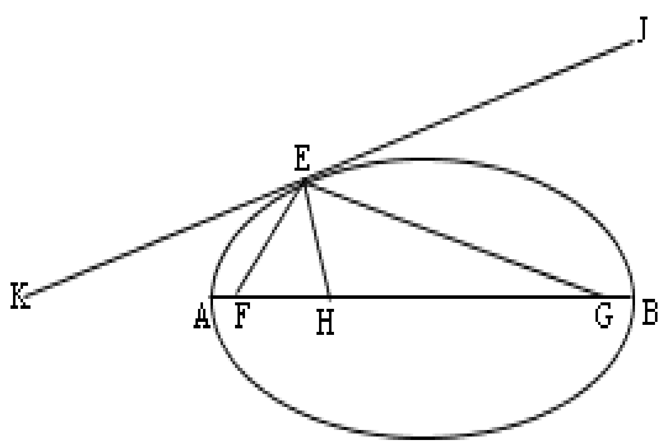


Fig. 19

Si en el punto F hay una fuente luminosa, y la superficie es tal que permite que los rayos se reflejen entonces tendremos que los rayos convergen en el punto G.
Por demostrar: $\measuredangle KEF = \measuredangle GEJ$
Demostración. De acuerdo con la proposición 36 del libro primero de las *Cónicas* la tangente por E es única. Consideremos la perpendicular a esta recta EH. Vimos que de acuerdo con la proposición 48 del libro tercero de las *Cónicas* $\measuredangle KEF = \measuredangle GEJ$, de modo que tendríamos que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Por lo tanto los rayos que surgen de uno de los focos convergen en el otro.

De esta forma se establece la propiedad reflexiva característica de la elipse.
Ahora, si consideramos la superficie generada por una sección de curva que gira alrededor del eje, tendremos que la propiedad focal se hereda; si además el material del cual se compone esta superficie es reflejante, obtenemos una superficie mediante la cual es posible, al menos teóricamente, causar ignición en otro punto situado a una distancia dada.
Sin embargo el uso de esta superficie como espejo comburente no es del todo práctica, ya que dada una distancia en la que tengamos una fuente luminosa y el punto que querramos incendiar sólo hay una elipse asociada, por lo que en el caso de que el punto por incendiar fuera móvil no habría manera de colocar en un tiempo relativamente corto tanto la fuente luminosa como la superficie sobre la que reflejaríamos los rayos.
Antes de pasar al trazo continuo de la elipse, me parece oportuno anexar la demostración en la que Apolonio hace ver que para todo punto en la elipse la suma de las distancias de dicho punto a los puntos de aplicación es igual a la magnitud del eje mayor. Esto debido a que es una de las propiedades que descubrió y que ahora permite caracterizar a esta curva de una manera mucho más sencilla que la que él utilizaba.

Proposición 52 (Cónicas)
Si en una elipse un rectángulo igual a la cuarta parte de la figura es aplicado sobre ambos lados del eje mayor, deficiente por una figura semejante a un cuadrado, y desde los puntos resultantes de la aplicación trazamos una línea

de uno de los puntos de aplicación a un punto en la elipse, y desde ahí al otro punto de aplicación, entonces esta línea será igual al eje.

Sea una elipse cuyo eje mayor es AB y con los puntos identificados con letras como aparece en la figura 20, satisfaciendo que en cada uno de sus rectángulos ocurre que $AC \cdot CB$ y $AD \cdot DB$ es igual a un cuarto de la figura, trácense desde C y D las líneas rectas CE y DE.
Entonces

$$CE + ED = AB$$

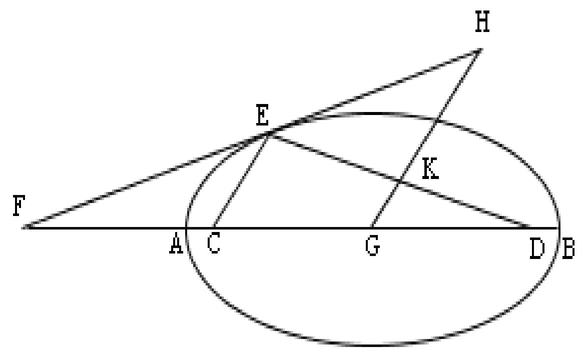


Fig. 20

Tracemos FE tangente y sea G el centro del eje AB; desde ahí tracemos GHK paralela a CE. Tenemos que $\measuredangle CEF = \measuredangle HEK$ (Prop. 48) y $\measuredangle CEF = \measuredangle EHK$ (por ser alternos internos), entonces $\measuredangle EHK = \measuredangle HEK$, por lo que $EK = KH$.
Como $AG = GB$ y $AC = DB$ entonces $CG = GD$ y $EK = KD$; [26] y es por esta razón que $ED = 2KH$ y $EC = 2GK$. Así, $ED + EC = 2GH$, pero como $AB = 2GH$, [27] por lo tanto $AB = ED + EC$.

[26] Esto se obtiene de la semejanza de $\triangle CED$ y $\triangle GKD$, donde la proporción es de 2 a 1.

[27] Apolonio *Cónicas* III.50. Con los supuestos anteriores (los de la proposición 45), si desde el centro de la sección incide en la tangente una línea paralela a la recta trazada desde el punto de contacto y uno de los puntos (de aplicación), entonces esta recta será igual a la mitad del eje.

3.4. Trazo continuo de la elipse

De manera semejante a como lo hizo con el caso de la parábola, Ibn Shal desarrolló un método mediante el cual es posible trazar el arco de una elipse a partir de sólo conoocer los focos y dar una longitud. Ibn Shal realiza lo siguiente:

Sean 3 puntos, A, B y C no alineados, tales que $AB < AC < BC$. (Ver Fig. 21)

Sea D sobre BC tal que $CD = CB + BA = l$. En el círculo (C, l) ponemos E tal que $\measuredangle ACB < \measuredangle ACE \leq \measuredangle CAB$ de tal forma que B y E estén del mismo lado de AC.

Tomemos el $\measuredangle AEC$ y copiémoslo sobre AE con vértice en A, donde la recta de este ángulo interseque a la recta CE en un punto al que llamamos F; entonces tenemos que $\measuredangle AEC = \measuredangle EAF$ por lo que $\triangle AEF$ es isósceles y $FA = FE$.

De esta forma tenemos que $FA + FC = FE + FC = l$; así, B y F pertenecen a la elipse de focos A y C, donde el círculo (C, l) es un círculo directriz.

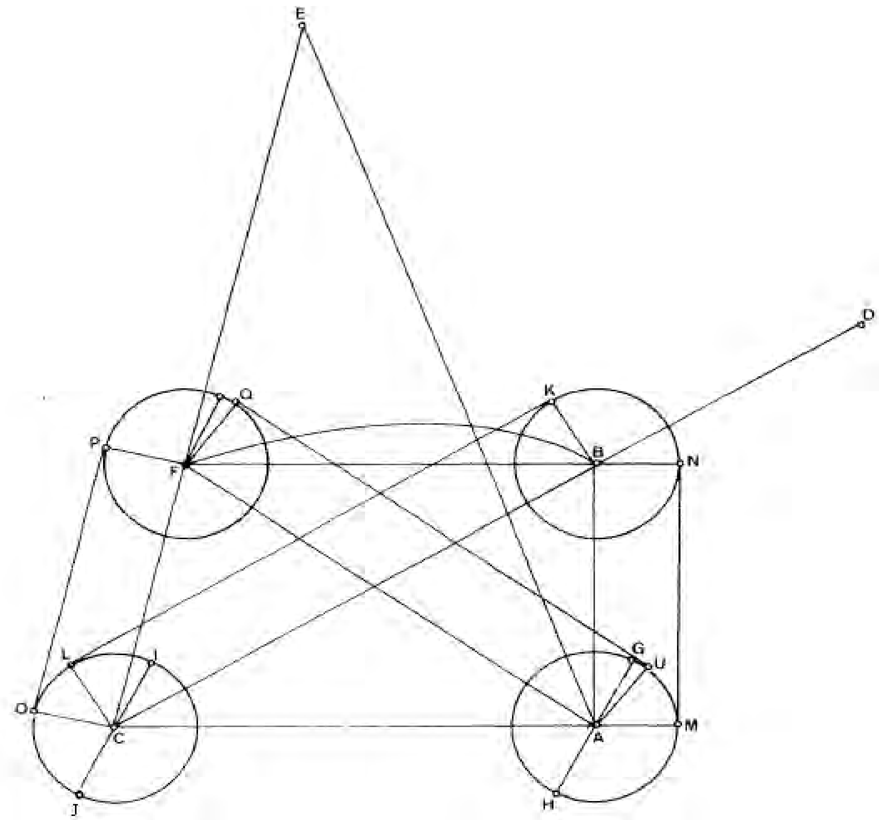


Fig. 21

A partir de la hipótesis que supusimos en la construcción de F se sigue que $AF > AB$; esta propiedad Ibn Sahl la demuestra por *reductio ad absurdum.*

Para demostrarla hago lo siguiente:

Supongamos que $AF = AB$. Esto implica que $FC = CB$ (dado que $FA + FC = CB + BA = l$) por lo que tenemos que $\triangle AFB$ y $\triangle CFB$ son isóceles, y FB es común.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\measuredangle BFA < \measuredangle BFC$, como FB es común tenemos que $\triangle FAB$ queda en el interior de $\triangle FCB$. Por otra parte teníamos que $FE = FA$ y que B y E deben estar del mismo lado de AC, por lo que E debe encontrarse en esta recta (la cual contiene a AC), pero esto es una contradicción, ya que $\measuredangle ACB \leq \measuredangle ACE$. Por lo tanto $AF \neq AB$.

Ahora supongamos que $AF < AB$. Si copiamos el segmento FA sobre la recta AB tendríamos que $CF \leq CB$. Así, si $CF < CB$ tendríamos que $FA + FC < AB + CB$ lo cual es una contradicción; si en cambio tenemos que $CF = CB$ resultaría que $\measuredangle ACE = \measuredangle ACF < \measuredangle ACB$, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto $AF \not< AB$.

De esta forma tenemos que $AF > AB$ y $CB > CF$ ya que $FA + FC = l = CB + BA$.

Sean $GH = IJ$ paralelas y menores que AB, donde A es el punto medio de GH y C de IJ. Tracemos los círculos (A), (C), (B) y (F) con radio $\frac{1}{2}GH$. Como $GH < AB$ los círculos tomados en pares son ajenos.

Sea MN tangente común de (A), (B), paralela a AB, y KL tangente común a (C), (B), paralela a BC, la recta que une sus centros.

De este modo tenemos que $MN = AB$ y $KL = BC$, por lo que $MN + KL = l$. De hecho, $AM \parallel BN$, $BK \parallel CL$ y $AH \parallel CJ$, lo cual implica que los arcos $\hat{HM} + \hat{NK} + \hat{LJ} = p$, con p el perímetro de uno de los círculos.

Sea $HMNKLJ = s_1$ entonces $\hat{HM} + MN + \hat{NK} + KL + \hat{LJ} = l + p$.

De manera análoga trazamos UQ, la tangente común de (A), (F) paralela a AF y PO la tangente común de (C), (F) paralela a la recta que une sus centros, FC.

Llamemos $s_2 = HUQPOJ$, de manera semejante a la anterior tenemos que $UP + PO = AF + FC$ y $\hat{HU} + \hat{PQ} + \hat{OJ} = p$, por lo que $\hat{HU} + UQ + \hat{PQ} + PO + \hat{OJ} = l + p$.

Por lo tanto $s_1 = s_2$.

Dejemos fijos los círculos en (A) y (C) y tomemos al círculo (B) como móvil. Tomemos una cuerda no elástica de longitud $l + p$ y pongamos un extremo de ésta en H, otro en J y pasémosla alrededor de (B); ahora apliquemos presión en (B) de tal forma que la cuerda se mantenga tensa. Tendremos que al mover (B) desde su posición inicial hasta que llegue a superponerse sobre (F), es decir, que el punto B pase a colocarse en F, el recorrido de B describirá un arco elíptico BF. Con esto queda descrita una manera de trazar la elipse mediante un procedimiento que, de acuerdo con la tradición sería calificado como mecánico.

Ibn Shal continúa con el estudio de la reflexión en un espejo elíptico. Para ello rota el arco BF alrededor de la línea AC (el eje); de esta forma genera la superficie (BX), donde B describe un arco circular BR y F el arco FX. Demostraremos que los rayos luminosos que surgen de C son reflejados en A.

Ya vimos que la suma de la distancia de un punto en la elipse a los focos se mantiene constante. Demostraremos ahora que el plano tangente a un punto en la superficie es único.

Sea I' cualquier punto en la superficie BX; el plano $AI'C$ corta a BX en el arco B_aO' (este plano contiene al eje que pasa por A y C), el cual es una de las posiciones del arco BF. De esto tenemos que $I'A + I'C = BA + BC$.

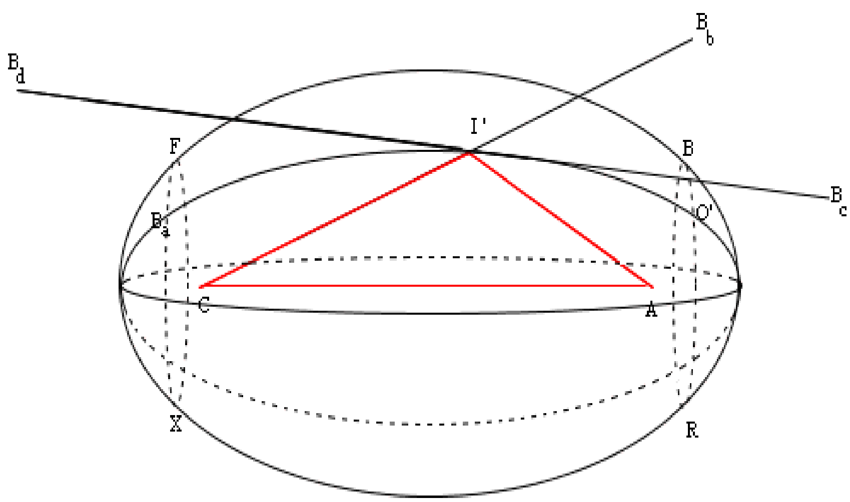


Fig. 22

La unicidad de la tangente, de manera análoga a lo que presenté en el caso de la tangente al paraboloide de revolución se sigue de la proposición 36 del primer libro de las *Cónicas*.

Prolonguemos ahora CI' hasta B_b, donde $I'B_b = I'A$. Sea $B_cI'B_d$ la recta que bisecta al $\measuredangle B_bI'A$, la cual es tangente en I' al arco B_aO'.[28] Sucede

[28] Notemos que $\measuredangle CI'B_d = \measuredangle B_cI'B_b$ por ser opuesto por el vértice. En la prop. 48 de *Las Cónicas* de Apolonio que demostramos anteriormente vimos que $\measuredangle CI'B_d = \measuredangle AI'B_c$,

entonces que el plano que contenga a B_bB_c perpendicular a ACI' es tangente a la superficie (BX) en el punto I'.

Con el trabajo que acabamos de presentar de Ibn Shal, podemos constatar que se culmina con una investigación en la cual se vieron involucrados varios afamados matemáticos del pasado, a saber, todos aquéllos interesados en ver qué tan factible era causar ignición en un punto mediante la luz del sol. El mérito del resultado obtenido por Ibn Sahl abarca varios ámbitos, en particular el geométrico y el óptico. En la matemática también se aprecia cierto cambio, el cual obedece tal vez a la configuración natural de esta rama y que en este problema se aprecia a través de la resolución. Es evidente que las proposiciones y teoremas que se van acumulando para obtener los resultados exhiben un enfoque que se centra en propiedades cada vez más específicas derivadas de las propiedades esenciales y que permiten de cierta forma simplificar un concepto o su manejo, en este caso el aprovechamiento de la propiedades de dos de las secciones cónicas: la parábola y la elipse.
Los resultados matemáticos que se obtuvieron son increíblemente novedosos, más dentro de la geometría que en la óptica, ya que la óptica utilizada para poder establecer estos resultados no requiere más que el principio de reflexión, conocido desde los tiempos previos a Euclides. En cuanto a la problemática de concentrar los rayos solares sobre un punto dado, vimos que Diocles obtuvo una solución bastante general. Sin embargo, a mi parecer, el mérito se encuentra en dos aspectos importantes, el primero es que Ibn Sahl logra abstraer o proponer, para la parábola, condiciones más sencillas (que las utilizadas por Apolonio) que la definen como un lugar geométrico, y en segundo, que no se limita sólo en la justificación de estas propiedades, sino que las sitúa en un plano práctico y lleva a la concreción de la definición de estas curvas como lugares geométricos, logrando así una construcción artesanal de estas curvas (ya que anteriormente se asociaban con un cono, y la construcción de estas curvas dependía de la manera en la que incidiera en él un plano. Obviamente utilizar esto para definir la curvatura del espejo no sólo era impráctico, sino altamente costoso). En cuanto a la construcción

de modo que referirse a la recta que satisface la igualdad es referirse a la tangente.

de espejos ardientes concierne, la probabilidad de trazar la curva de manera mecánica simplificaba notablemente la tarea, ya que se puede utilizar de manera más sencilla el conocimiento de las propiedades que tienen que satisfacer los puntos que pertenecen a la curva y por ende a la superficie generada por la rotación de la curva alrededor de un eje establecido según conviene.

Capítulo 4

Los primeros resultados sobre refracción

4.1. La óptica de Ptolomeo

Ptolomeo (s. II d.C) debe su fama a la *Sintaxis Matemática -Mathematike Syntaxis-,* mejor conocida como el *Almagesto*, al tratado de astronomía más completo y elaborado de la ciencia antigua. De hecho, ninguna otra obra astronómica, hasta la publicación en 1543 de el *De revolutionibus orbium coelestium livri sex* se le aproximó en cuanto a excelencia científica.
Sin embargo sus aportaciones al saber no se limitaron al estudio de los cielos y también fueron notables sus obras de *Geografía*,[1] el *Tetrabiblos* -un tratado de astrología- y un texto de óptica que amplía el horizonte de Euclides sobre el tema. De su contenido es patente que Ptolomeo escribió su texto sobre óptica después de haber escrito sus tratados astronómicos. Su *Óptica* cubre varios temas y la divide en cinco libros, de los cuales el primero se encuentra perdido, y el quinto, que es el que ahora nos interesa, está casi completo; en lo relativo a la catóptrica -el estudio de los espejos- aparentemente es una recopilación del trabajo realizado previamente por Euclides, y sin embargo no menciona nada relativo a los espejos ardientes, ni tampoco la anécdota

[1] El título en griego es *Geōgraphikē Hyphēgēsis*, que puede ser traducido como "Guía para el trazo de un mapa del mundo". Ver *Ptolemy's Geography* (2000), p. 4.

acerca de Arquimedes y su defensa de Siracusa ni el trabajo realizado por Diocles; simplemente enuncia los resultados relacionados con la reflexión en distintos tipos de superficie tal y como anteriormente hiciera Euclides. Una diferencia con respecto a Euclides es que al final de su escrito desarrolla un poco más lo referente a espejos compuestos.

Sin embargo en su desarrollo exhibe una diferencia esencial en relación a lo hecho por todos los matemáticos anteriores: Ptolomeo es el primero del que se tiene registro en utilizar experimentos para ilustrar resultados referentes a la catóptrica y posteriormente a la dióptrica -el estudio de las propiedades ópticas de las lentes-, a partir de los cuales deriva diferentes leyes. Esta metodología es innovadora y permite que se empiece a considerar el desarrollo experimental como apoyo y fundamento de la ciencia.

También, a diferencia de Euclides, su concepción filosófica le conduce a que nunca se aparte de las cuestiones que está tratando y de hecho esto se hace presente en el desarrollo del segundo libro, en donde establece todo lo que afecta y determina a la visión. Igual que para Euclides, la visión la modela a partir de un cono cuyo vértice se encuentra en el centro del ojo, de modo que explica varias de la cuestiones tratadas en la *Óptica* de Euclides y de manera análoga a éste las atribuye a la variación del ángulo que se forma en el vértice del cono, el cual tiene como base una superficie que es donde está el objeto.

El primer libro de la *Óptica* de Ptolomeo se encuentra perdido. En el segundo se abordan cuestiones relacionadas con factores tanto físicos como psicológicos que intervienen en la constitución de la imagen; por ejemplo, para él la visión tiene un comportamiento semejante al de la luz y es un flujo que sale del ojo y después de una especie de colisión con el objeto,[2] el cual debe estar suficientemente iluminado, se crea una *pasión* que el flujo transmite nuevamente al ojo, y es esto lo que se interpreta como imagen; Ptolomeo también analiza cómo es que la visión se ve afectada por la iluminación, el color, el movimento del objeto o del observador, a qué se debe el aparente cambio de tamaño y la aparición de otro tipo de ilusiones ópticas creadas a través de la participación de algunos de los factores mencionados.

[2] Una caracterización heredada de Aristóteles.

En el tercer y cuarto libro de la *Óptica* de Ptolomeo se analiza todo lo referente a la reflexión; en el tercero se presentan las leyes que la rigen así como las peculiaridades de la reflexion en espejos planos y convexos; en el cuarto libro analiza el caso de espejos cóncavos y compuestos.
Lo que es completamente inovador en la *Óptica* de Ptolomeo es que el libro V está completamente dedicado a la refracción, y en él podemos encontrar una gran variedad de resultados, análisis y experimentos sobre dióptrica; esta problemática en un principio se considera como un tema de la catóptrica, ya que con este nombre se referían a los fenómenos en los cuales hay rompimiento de un rayo visual, es decir, un cambio de dirección, lo cual sucede tanto en la reflexión de la luz como en el paso de ésta de un medio a otro.
En la reflexión, la superficie contra la que incide el rayo lo bloquea, mientras que en la refracción la superficie entre dos medios de diferente consistencia es atravesada.[3]

4.2. La refracción antes de Ptolomeo

Ptolomeo no es el primero en escribir sobre la refracción; las primeras menciones sobre este tema se remontan a algunos escritos de Aristóteles en el s.III a.C.,[4] donde se refiere el cambio de tamaño de las estrellas y el Sol al encontrarse más cerca del horizonte que del cenit. Relacionado con esto está el hecho de que a Aristóteles también se debe una de las primeras justificaciones de la existencia del éter, idea que perduró por varios siglos; él consideraba que los rayos luminosos sólo podían viajar en medios transparentes y no lo podían hacer en el vacío, de modo que la existencia de una sustancia que llenara el espacio más allá del lugar natural de los elementos terrestres era necesaria para que las estrellas se pudieran ver.
Posterior a Aristóteles, Arquímides observa que los objetos cambian de tamaño cuando se encuentran sumergidos en el agua y atribuye este fenómeno a las leyes de refracción conocidas hasta el momento.

[3] La consistencia la asocian con la densidad de la sustancia.
[4] *Meteorológica*, s. VI a.C.

1. El rayo incidente, la normal, y el rayo refractado están en el mismo plano.

2. La posición aparente de un punto sumergido se encuentra en la extensión del rayo visual que incide.

3. El ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de refracción siempre que el rayo pase de un medio "raro" a uno más denso.[5]

Es evidente que la refracción debida al paso de los rayos luminosos entre medios como agua y vidrio era algo conocido, pero ¿cuándo se empezó a hablar de refracción atmosférica?
El siguiente paso en cuanto a refracción se encuentra en los escritos de Plinio el Viejo, s. I d.C., quien menciona una observación hecha dos siglos antes y que atribuye a Hiparco, en la que se cuenta que se pudo observar la Luna y el Sol a la misma hora del día. [6]
Cleómedes [7] también escribió sobre este tema. Describió un fenómeno semejante al atribuido a Hiparco y dio una respuesta al por qué de éste, utilizando el modelo en el cual la Tierra es cubierta por una capa de aire a la que a su vez cubre el éter. El fenómeno lo atribuyó a un cambio en la humedad del aire, la cual va disminuyendo a medida que se acerca al cenit, de modo tal que los rayos incidentes son refractados, y es por eso que el Sol se podía ver cuando ya se había puesto por el horizonte, y la Luna, en la dirección opuesta, sin que todavía lo rebasara.

[5] Al referirse a medio raro y medio denso habla de la "densidad" en los dos medios, donde raro es el de menor densidad y denso el de mayor.

[6] Este fenómeno aparentemente ocurre con frecuencia, ya que en algunas ocasiones podemos observar el sol y la luna en lo alto del cielo, pero en este caso se refiere a que fueron observados al ras del horizonte.

[7] Probablemente entre el s. I a.C. y el s. IV d.C. La primera fecha es defendida por T. L. Heath y la segunda por Otto Neugebauer.

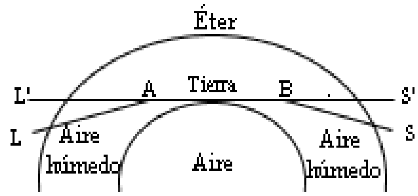


Fig. 23

4.3. El 5^{to} libro de Ptolomeo: de lo empírico a lo teórico

Veamos de manera general, con relación al fenómeno de refracción, lo que Ptolomeo presenta en este libro.

La primera observación que hace es que el rompimiento de los ángulos no ocurre como en la reflexión, de modo que lo que le interesa es investigar la relación cuantitativa entre el ángulo de incidencia ($\measuredangle_i$) y el ángulo de refracción ($\measuredangle_r$). Para lograrlo realiza una serie de experimentos que le permitan medir ambos ángulos en diferentes medios.

Algo interesante en los experimentos que Ptolomeo realiza es que están sujetos a una planificación muy elaborada. Para ello desarrolla instrumentos con los cuales realiza las mediciones e induce la metodología adecuada para que a través de dichos instrumentos pueda obtener información suficiente para realizar el análisis.

Para llevar a cabo los experimentos sobre refracción construye una placa circular de cobre y la divide en cuadrantes subdivididos en 90 partes. Construye un instrumento para medir la refracción en agua y otro para medirla en cristal: para el primer instrumento utiliza un semicilindro (al parecer con tapas en las bases hechas con algún material traslúcido que le permite observar por el costado dónde incide el rayo) tapado en ambos lados, que utiliza para almacenar agua; para el segundo construye un semicilindro de vidrio con un diámetro menor al de la placa de cobre; en ambos cilindros alinea uno de los diámetros marcados en la placa de cobre con el diámetro de los instrumentos, (de modo que el otro diámetro de la placa de cobre queda alrededor con la normal a la superficie) ambos coincidiendo con la superficie que separa los dos medios. Para medir la refracción en el agua introduce un objeto, el cual observa desde fuera en un punto en el diámetro de la placa de cobre; para medirla en cristal hace una pequeña marca por el borde de la placa de cristal y la observa desde un punto en la placa de cobre. El procedimiento que sigue en los experimentos con los que mide la refracción consiste en mover la marca u objeto correspondiente y hacer una medición cuando desde el borde de la placa de cobre el rayo lanzado, que atraviesa ambos medios parezca una línea recta.

Ptolomeo realiza tres experimentos con esa metodología. En el primero los medios son aire-agua, en el segundo aire-vidrio y en el último cristal-agua; a cada uno de los experimentos le asigna una tabla de correspondencia entre el ángulo de incidencia, $\measuredangle_i$, y el ángulo de refracción, $\measuredangle_r$, medidos respecto a la normal. Con base en estos resultados concluye lo siguiente (Fig. 23):

- Un objeto O sumergido en agua se ve en O', más arriba de la posición en la que se encuentra.
- Si el rayo visual y el objeto O se encuentran en la perpendicular, no hay refracción.
- La recta a lo largo de la cual desde el medio B se observa el objeto O situado en el medio A es la misma con la que se observa a O'' en el medio B desde el medio A.

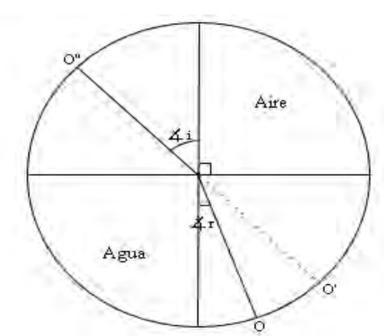


Fig. 24

Éstas son observaciones generales que realiza sobre la refracción que ocurre con motivo del paso de un haz de luz que transita entre medios manejables y es lo que le permite sentar las bases para pasar a analizar la refracción atmosférica, en donde el fenómeno ocurre en la superficie entre el aire y el éter.

Lo primero que hace es describir el siguiente fenómeno en el cual los cuerpos celestes, cuando salen o se ponen, tienden a *inclinarse* más hacia el norte (hacia el polo celeste [8]) que cuando están enmedio del cielo. A partir de esta observación afirma lo siguiente:

> *...éste es un efecto de la refracción del flujo visual que ocurre en la superficie que separa el aire y el éter, una superficie que debe ser esférica, con su centro siendo el centro común de todos los elementos, es decir, el centro de la Tierra.*[9]

A continuación enunciaremos un teorema en el cual explica cómo se comporta la refracción cuando los medios son el aire y el éter; aquí se puede ver cómo con ayuda de los experimentos que realizó anteriormente puede concluir que el fenómeno que se observa en los cielos se debe al fenómeno de refracción, ya que se acomoda a la perfección con las observaciones realizadas.

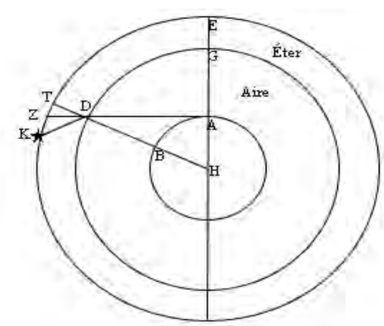


Fig. 25

[8] Punto que coincide con el eje de rotación de la Tierra

[9] Ptolomeo, *La Óptica*, libro V, pp. 238-239

Sea E el cenit de un observador y tómese uno de los círculos "mayores" de la esfera de los elementos, de manera que corte a la Tierra a lo largo de AB.
Sea GD el círculo mayor en la interfase entre el aire y el éter, y sea EZ el círculo mayor que pasa por una estrella dada, y sea H el centro de todos los círculos.
Tracemos EAH. Sea A el ojo, y ZDA la línea que coincide con el horizonte y con la circunferencia GD; sea DT la normal a los círculos y a partir de la cual mediremos los ángulos de incidencia y de refracción (funciona así porque es un radio, de modo que es ortogonal a la tangente por ese punto).
Supongamos que KDA es un rayo visual refractado en D y que la estrella se encuentra en K.
Los rayos visuales son refractados en la interfase a una posición diferente respecto de E, de modo tal que el $\measuredangle_i KDT$, que se encuentra en un medio menos denso es mayor que el $\measuredangle_r ADB$. De modo que si la estrella es observada desde A ésta aparecerá en la recta ZDA, de modo que la distancia de la posición aparente al cenit ZE será menor que la distancia real KE; y cuanto más se acerque la estrella al cenit menor será la diferencia entre la posición real y la aparente. Si la estrella se encuentra en E, ésta será perpendicular a la superficie y no habrá refracción.
Más adelante generaliza a tres dimensiones estos resultados, y lo hace de manera semejante a como lo hizo en el caso anterior, que es el modelo que correspondería a lo que observamos realmente.
Finalmente concluye lo siguiente: cuando un rayo pasa de un medio raro a uno denso el rayo se acerca a la normal, después de cruzar la superficie que separa a los dos medios, mientras que cuando pasa de un medio denso a uno raro se aleja de la normal. Ptolomeo establece una relación entre los ángulos a partir de la diferencia de densidad de los medios, de modo que según él la desigualdad entre $\measuredangle_i$ y $\measuredangle_r$ se incrementa de manera directa a la diferencia de densidad de los medios.
Posteriormente hace una comparación entre el comportamiento de la reflexión y la refracción, argumentando que si bien ambos fenómenos tienen en común que la imagen se encuentra en la continuación de un rayo visual que

sufre un rompimiento, en el caso de la reflexión se establece una relación de igualdad entre el ángulo incidente y el rayo visual, que es el que determina la dirección en la cual se observa la imagen. En el caso de la refracción la relación entre los ángulos de incidencia y de refracción no es de igualdad. Sin embargo hace notar que en estos comportamientos se puede observar el curso de la naturaleza conservando la energía.[10]

4.4. Demostración de Ibn Sahl de que las esferas celestes no son de extrema transparencia

Aparte de los resultados que Ibn Sahl obtuvo acerca de los espejos ardientes en los casos de la parábola y de la elipse, cuando pasa a analizar a la hipérbola el propósito de Ibn Sahl es mostrar que con base en esta curva se puede crear una figura hecha de cristal de manera tal que si los rayos solares inciden en él, es posible incendiar un punto dado. Para poder establecer este resultado Ibn Sahl incursiona en el estudio de las lentes y la refracción, realizando el primer análisis geométrico de estos temas.
Aparentemente los resultados enunciados en el texto de Ptolomeo sobre estas cuestiones no eran desconocidos para Ibn Sahl, y tomándolos como punto de partida logra llegar, hasta donde se sabe por primera ocasión a la ley de refracción que actualmente conocemos como ley de Snell, aunque, como veremos más adelante, en Francia se conoce como ley de Descartes.
En el libro 5^{to} de la *Óptica* Ptolomeo pudo establecer, a través de los diferentes experimentos y observaciones que realizó, cuáles eran los factores involucrados en el fenómeno de refracción y en cierto grado, cuáles eran los de mayor importancia; el de mayor relevancia fue que para un ángulo de incidencia dado el de refracción varía dependiendo de los medios que cruza el rayo de luz, y la dirección en la que se desvían dependerá de la diferencia de densidad entre los medios; sin embargo le fue imposible establecer una ley válida para cualquier medio que le permitiera determinar cuánto se desviaba el rayo que incidía.

[10] Ptolomeo, *La óptica*, libro V, p. 244.

Con base en estos resultados y en una concepción geométrica de los rayos, Ibn Sahl escribe un tratado sobre *Las Esferas Celestes y su Transparencia*, en el cual se hacen evidentes los fenomenos de refracción que se observan en el firmamento. Según este tratado el éter no es la sustancia sublime que hasta ese momento se había pensado que era.
A continuación, y con base en el trabajo de Roshdi Rashed, presento cómo es que llega a este resultado y, posteriormente, cómo logra establecer la ley de refracción.[11]

Sea F una estrella en la esfera celeste (medio I) cuya luz emitida llega al punto A en la esfera de los elementos (medio II), y es refractada en la superficie y forma el rayo AB. (Ver figura 26)

Afirmación: La esfera celeste no es de extrema transparencia.

Para el rayo AB hay tres posibles casos de refracción de acuerdo con la posición del rayo incidente FA respecto de la normal GA y la prolongación AE del rayo BA.

$*1^{er}$ caso

FA se encuentra entre GA y AE.

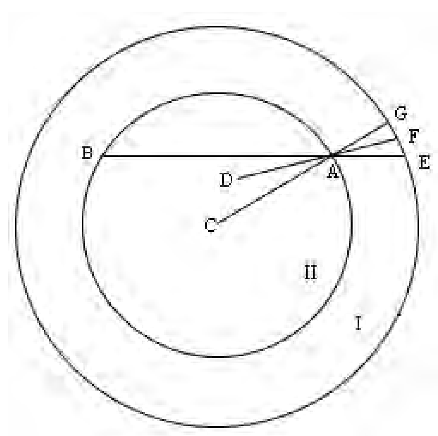


Fig. 26

[11] Rashed (2005), pp. 58-63 y 144-149.

Esto significa que el ángulo de refracción $\measuredangle CAB > \measuredangle FAG$, el ángulo de incidencia, ya que FA se encuentra en el medio I y AB en el medio II, el cual es más denso que I.
De modo que de acuerdo con lo establecido por Ptolomeo,[12] esto implica que el medio II es más transparente que el medio I, por lo que la esfera celeste no es de extrema transparencia, dado que el medio II es aún más transparente.

$*2^{do}$ caso

FA está alineada con AE.

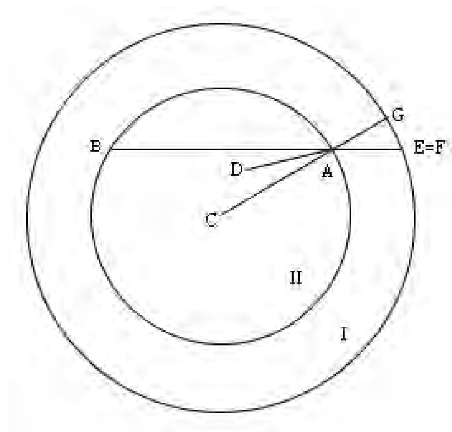


Fig. 27

Si FA es refractada y sigue en la dirección AB de la fig. 27 esto quiere decir que el rayo no cambia de dirección, por lo que el medio I y el medio II son de igual transparencia.
Notemos que aquí Ibn Sahl utiliza una condición de necesidad y suficiencia entre la refracción y la diferencia de medios, lo cual es consecuencia del

[12] En el libro V de su *Óptica*, Ptolomeo establece que cuando un rayo pasa de un medio raro a uno más denso, el rayo al ser refractado se inclina hacia la normal, mientras que si pasa de uno denso a otro menos denso se aleja de la normal. Como el grado de transparencia lo vincula con la densidad entonces el hecho de que un rayo refractado se aleje de la normal significa que el medio en que ingresó es menos denso, y por lo tanto más transparente, que el medio del que provenía el rayo. Ver Ptolomeo, *Óptica* (1996), pp. 229-242.

análisis realizado por Ptolomeo, pero esto no fue señalado explícitamente por Ibn Sahl, como si sus lectores supieran con precisión de qué está hablando.

$*$ subcaso

Consideremos, con base en el resultado anterior, que el medio II tiene la transparencia de la esfera celeste, que AF coincide con EA pero es refractada a lo largo de AD (figura 27). Esto pasaría si el rayo AF se encontrara en un medio I' más transparente que el medio II y por lo tanto que el medio I, es decir, existiría un medio, el I', de mayor transparencia que la esfera celeste.

$*3^{er}$ caso

FA se encuentra abajo de AE.

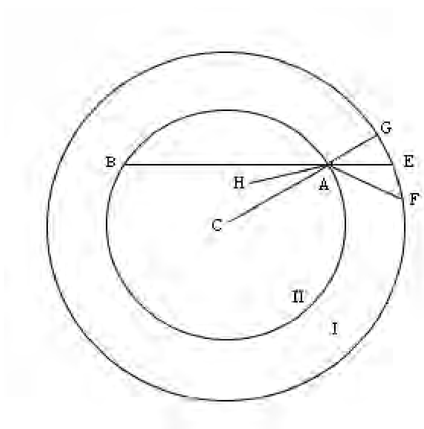


Fig. 28

Si AF es refractada y sigue por AB, tendremos que $\measuredangle FAG < \measuredangle CAB$, por lo que el medio I sería más transparente que el medio II.

Si dejamos el medio II fijo y AF es refractado por AH, donde el ángulo formado por AH con la normal es menor que el ángulo formado por AF, tendríamos que el rayo AF se encontraría en un medio I' más transparente que I, y por lo tanto la transparencia del medio I no sería extrema.

La lectura de la sección donde Ptolomeo discute, si bien cualitativamente, la cuestión de la refracción del rayo que viniendo de un estrella atraviesa la atmósfera terrestre, nos muestra que Ptolomeo ha tomado plena conciencia de la importancia de los medios que atraviesan los rayos lumínicos, y que intenta caracterizarlos a través de la transparencia o su opuesto, la opacidad, y de sus argumentos se extrae la idea de que para todo cuerpo transparente existe otro aún más transparente, lo que significa que no hay límite para la transparencia.

De acuerdo con los resultados que Ibn Sahl presenta sobre la transparencia de las esferas celestes, podemos observar, como lo habíamos mencionado antes, que la influencia de las propiedades mostradas anteriormente por Ptolomeo son parte fundamental de los resultados a los que llega Ibn Sahl. Sin embargo, a diferencia de lo que hace Ptolomeo, podemos observar que el método mediante el cual Ibn Sahl obtiene los resultados es diferente, ya que no recurre a la experimentación, como lo hizo Ptolomeo,[13] sino simplemente hace deducciones a partir de observaciones y de las bases establecidas anteriormente para la refracción, junto con algunas otras consideraciones que no se encuentran de manera explícita en el libro quinto de la *Óptica* de Ptolomeo. Un ejemplo de esto sería la demostración de que el ángulo formado por el rayo de incidencia, la normal, y el ángulo formado por el rayo refractado respecto de la normal se encuentran en el mismo plano.[14]
Los resultados que Ibn Sahl obtiene sobre la cuantificación de los ángulos de refracción surgen a partir de su estudio sobre las propiedades ópticas de las secciones cónicas en las diferentes superficies que se pueden generar con ellas con el fin de crear un instrumento que permita causar ignición en un punto o lugar dado. Es así como Ibn Sahl construye la lente plana convexa creada a partir de la hipérbola como "volumen" de revolución y la lente biconvexa, que genera juntando dos paraboloides de mismo diámetro. Ambas superficies las construye en cristal y analiza las propiedades de refracción en éstas.

[13]En el libro V de su *Óptica*, Ptolomeo presenta varias observaciones y todas ellas van seguidas de descripciones de los experimentos -a las que llama "*Ejemplos*"- o "*Experimentos*" que le llevan a dichas afirmaciones. Ver Ptolomeo, *Óptica* (1996), p. 231.

[14]Ver Ptolomeo *Óptica* (1996), Libro V, [6], p. 231.

Aquí, y como parte de su estrategia demostrativa, Ibn Sahl abandona la idea de distinguir al medio por su transparencia -opacidad- y en su lugar introduce la idea de usar el valor de un cociente entre ciertos valores -que dependen de los medios que atraviesa el rayo luminoso- obtenidos de comparar parámetros geométricos establecidos como medidas de las desviaciones respecto de la normal al plano tangente a los dos medios en el punto donde atraviesa el rayo. La igualdad que se establece en estos términos equivale a lo que se conoce como Ley de Snell.

Este planteamiento lo lleva Ibn Sahl al caso de las lentes y con base en ello analiza la refracción a la que dan lugar el paso de los rayos de luz a través de ellas.

A continuación mostraremos cómo es que Ibn Sahl obtiene la ley de refracción.

Sea FG el plano que limita la superficie de una pieza de cristal homogéneo, donde GH es la normal a la superficie, CE la línea por la que incide el rayo luminoso, E es donde intersecta a la normal, y CD la línea recta que sigue la luz después de ser refractada en el cristal.

Consideremos H, el punto donde la prolongación del rayo desviado en el cristal interseca a la normal.[15]

[15] Aquí Ibn Sahl está utilizando que el rayo incidente, la normal y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano.

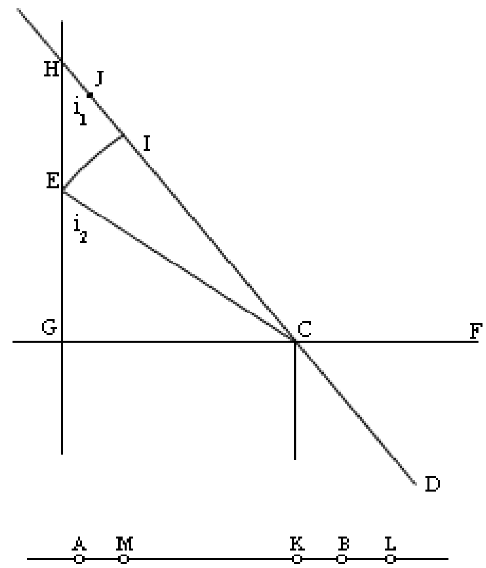


Fig. 29

A continuación, y sin justificación alguna, y suponiendo que el rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie entre los medios están en el mismo plano, afirma lo siguiente:
Por lo tanto la recta CE es menor que CH. De la línea CH, separamos CI, de igual magnitud que CE, y tomamos J el punto medio de HI. Consideremos una línea recta, y marquemos en ella A, K y B tales que AK sea a AB como CI es a CJ; en la prolongación de AB pongamos L tal que BL sea igual a BK.
Como $CE = CI$ tenemos que $CE < CJ < CH$ por lo que $\frac{CE}{CH} < 1$
A partir de esto podemos obtener la siguiente razón: llamemos i_1 al ángulo CHG y i_2 al ángulo CEG; entonces, en notación moderna, tenemos que $sen\, i_1 = \frac{CG}{CH}$, $sen\, i_2 = \frac{CG}{CE}$ (Ver fig. 29), por lo que

$$\frac{sen\, i_1}{sen\, i_2} = \frac{\frac{CG}{CH}}{\frac{CG}{CE}} = \frac{CE}{CH} = \frac{1}{n}$$

donde n es el índice de refracción del cristal respecto del aire.
De modo que considerando que el índice de refracción del cristal respecto

del aire es n se sigue que Ibn Sahl ha enunciado lo que hoy se conoce como la ley de refracción. Además, teníamos que $CI = CE$, por lo cual $\frac{CI}{CH} = \frac{1}{n}$; al parecer Ibn Sahl nota que esta división de la recta CH en los puntos C, I, J, H caracteriza al cristal en todas las refracciones, y utiliza la misma división de manera recurrente en los estudios que posteriormente realiza sobre el tema de las lentes.

Y es así como, en forma clara y explícita, Ibn Sahl presenta este resultado sin mayores alardes, tal vez sin tener en mente el valor que los estudiosos le asegurarían al grado de distinguirlo, con el nombre de su supuesto descubridor.

Capítulo 5

Los diferentes autores de la ley de refracción

5.1. El texto de Snell y el texto de Descartes

Como mencionamos en la sección anterior, el trabajo realizado por Ibn Sahl fue el primer texto en el que se puede encontrar una formulación matemática de la ley de refracción. Es pertinente aclarar que Ibn Sahl no reclama para sí mismo ser el primero en haber obtenido tal resultado. En este sentido existe la posibilidad de que éste sea una contribución de un autor previo.

Con base en el análisis realizado por Roshdi Rashed, sobre el texto localizado por él, se puede observar que los motivos que llevaron a establecer esta ley se encuentran ligados con el estudio de las lentes, y que tanto el método utilizado como los resultado matemáticos que obtiene se encuentran plenamente justificados.

Sin embargo, el texto de Ibn Sahl fue encontrado hace no mucho tiempo, hacia fines del siglo XX, y actualmente es común que se hable de este resultado como la Ley de Snell. Esto se debe a que a partir de los experimentos realizados por Ptolomeo, (quien realizó la primer indagación seria sobre la refracción) y los resultados plasmados en su *Óptica*, pasaron quince siglos durante los cuales se trató, de manera poco exitosa, de obtener una expresión matemática de la relación que regía la desviación de los rayos luminosos al pasar entre medios de distinta composición. Durante este periodo, y fuera del mundo árabe, lo único que se consiguió fue describir el fenómeno, pu- diendo predecir muy poco del comportamiento preciso o cuantitativo de éste. Durante todo este tiempo no fueron pocos los matemáticos y diversos personajes ilustres que trataron de encontrar la forma de cuantificar la refracción de la luz a su paso por cualquier medio de manera general y precisa, es decir, se buscó establecer una regla aceptable para el tránsito de la luz entre medios diferentes que aportara resultados cuantificables. A pesar de que la ley de refracción es atribuida a Snell,[1] sucede que Descartes publicó en 1637 un tratado titulado *La Dioptrique*, en el que analizaba diversos aspectos de la visión y de los fenómenos perceptibles. En dicho texto, que acompañaba junto con otros dos al *Discurso del Método,* se encuentra enunciada la ley de refracción, misma que aparece explicada con una aparente sencillez que la hace comprensible incluso para personas no versadas en matemáticas. Sin embargo, los métodos que utilizó para obtenerla no dejan de causar controversia.

Se ha dicho mucho sobre el resultado de Descartes y la ley de refracción, y entre las discusiones principales se encuentra la relación con la autoría de la ley: ¿es de Snell o es de Descartes?
Ambos matemáticos fueron casi contemporáneos, y hay quienes argumentan que quien en realidad descubrió la ley fue Snell (1581-1626), y que de alguna forma Descartes (1596-1650) se pudo haber enterado de este resultado y posteriormente publicar un estudio o tratado que lo incluía; sin embargo no se sabe exactamente cuándo fue que Snell hizo su descubrimiento ni cómo, ya que el manuscrito que se afirma que contenía la expresión de la ley en cuestión, encontrado por Golius en 1632, no ha llegado a manos de autores posteriores y hoy se considera perdido. Lo único que se conserva de éste es el índice, que no tiene fecha,[2] encontrado por C. de Waard. En dicho texto

[1] Siguiendo la tendencia de la tradición anglosajona de la que nuestro medio científico -el mexicano- es tributario.

[2] William Whewell, en su *History of the Inductive Sciences* (1857), vol. II, p. 276, afirma que Snell la descubrió en 1621, pero no aporta ningún dato que sustente o que permita

la ley de refracción se encuentra enunciada de la siguiente forma:

Radius verus ad apparentem in uno eodemque medio diverso eandem habent inter se rationem. Un secans complementi inclunationis in raro ad secantem refracti in denso, ita radius apparens ad verum seu incidentiae radium.[3]

Lo que Snell llama *radius verus* es el rayo refractado, y *radius apparens* es la prolongación del rayo incidente desde el punto de incidencia hasta la intersección con la normal trazada desde un extremo del rayo incidente (ver figura 30). Este enunciado es equivalente a la proporción $\frac{cosec\, i}{cosec\, r} = \lambda$ donde i y r son los ángulos de incidencia y refracción que se forman con la normal a la superficie en el punto de incidencia. [4]

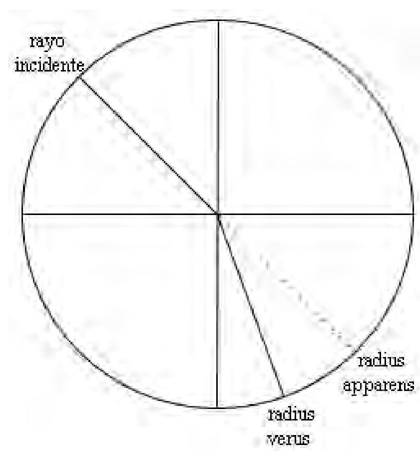


Fig. 30

Existe consenso en que antes del otoño de 1628 Descartes encontró la relación que equivale a la invarialidad del valor del cociente de los senos de los ángulos para el caso de la refracción de la luz. Se cree que este descubrimiento tuvo lugar entre 1625 y 1628, durante su estancia en París. Antes de ello, como se ha dicho, y dado que murió en 1626, Snell encontró el resultado equivalente, lo plasmó en su manuscrito y nunca lo publicó.

corroborar esta fecha.

[3] Vollgraff. J. A., "Snell note's on refraction", p. 720

[4] Sabra (1981), *Theories of Light, p. 100.*

Pero Snell tuvo la fortuna de que al menos dos de sus contemporáneos, afamados también, tuvieran acceso a su manuscrito. Isaac Vossius [5] y Christian Huygens tuvieron conocimiento de los resultados de los estudios de Snell acerca de la refracción y concluyeron, injustamente, que Descartes había plagiado al danés. Sin embargo, todo parece indicar que éste es un caso más del descubrimiento casi simultáneo, pero independiente, de un resultado. Algo que apoya el descubrimiento por parte de Descartes de la ley de refracción, es que cuando en 1632 el francés comunicó a Jakob Gool -sucesor de Snell en la cátedra de matemático en Leyden- su ley de los senos, éste no aclaró ni hizo ninguna sugerencia en el sentido de que el resultado ya era conocido por Snell.

Lo que si es posible es que Descartes se haya enterado sin conocer los detalles del método utilizado, a través de Marin Mersenne, de que los rayos de luz, al pasar de un medio a otro, se desvían siguiendo una ley de los "senos".[6]

A pesar de que no se sabe con precisión en qué momento enunció Snell la ley, lo que más ha llamado la atención es la manera ni estrictamente matemática ni tampoco restringida a una sola analogía con coherencia interna con la cual Descartes la muestra y respalda. A diferencia de los matemáticos que habían analizado la situación de la refracción, ésta debería tener un fundamento matemático o uno empírico, como en Ptolomeo; sin embargo en el texto de Descartes se hace patente un método que involucra tanto deducciones como experimentos pensados que rebasan el umbral de nuestra confianza en la validez de las analogías a las que recurre en el camino, por lo que el descrito por Descartes resulta ser un método que sigue causando polémica.

[5] Vossius fue el primero que acusó d eplagio a Descartes sobre la custión de la ley de refracción. Ver D.J. Korteweg (1896), pp. 489-501.

[6] Ver Shea (1991), p. 150, donde cita una carta del 18 de agosto de 1625 en la que un ingeniero de nombre Robert Cornier informa a Mersenne de que un tal Mr. Le Vasseur encontró un resultado sobre refracción que involucra una relación entre senos y afirma no poder aclarar más pues no tiene mayor conocimiento sobre el asunto.

5.2. El manuscrito perdido de Snell

A pesar de que en su tiempo Wilebrord Snellius (1581-1626), o Snell -aunque él escribía su nombre como Snel- hoy día es mejor conocido como cartógrafo y matemático, su fama la debe a la ley de refracción que lleva su nombre.

Dada a conocer después de su muerte, no formaba parte de un libro o tratado de óptica publicado durante su vida, a pesar del interés que Snell mostró por la óptica. Existen dos fuentes de información sobre sus estudios en esta área: sus anotaciones a la *Óptica* de Risner, que incluye las aportaciones ópticas de Alhazen y Witelo, algunos avances posteriores, [7] y unas notas que se piensa eran el preludio para un tratado de óptica. Los comentarios de Snell en la obra de Risner cubren el periodo de 1611 a 1622 y no se hace mención a alguna ley de refracción, por lo que se puede inferir que su descubrimiento ocurrió en una fecha posterior. Por otra parte, de sus notas se desprende que tenía pleno conocimiento de los escritos clásicos -Euclides, Filopón- de óptica y también de los medievales y casi contemporáneos -Peckham, Witelo (o Vitelo), Cardano, Kepler, Risner y Aguillonius-. Típico de todo ellos, excepto Risner, es que apelaban a la experimentación del orden práctico vinculada con los fenómenos asociados con la luz. Esto debió haber tenido algún impacto en Snell dado que en sus notas menciona haber realizado algún experimento, en 1621, con espejos cóncavos y convexos, aunque no menciona nada con relación a la refracción. Cabe hacer notar su interés en realizar experimentos, pues si bien había quienes en el pasado reciente defendían la necesidad de realizarlos -Leonardo, Giovanni della Porta-, por lo general eran poco utilizados para aplicar el conocimento de la naturaleza.

La siguiente fuente de información son las notas que parecen configurar un futuro texto sobre óptica. Sin nombre que testifique su autoría, caligrafía y comentarios que aparecen en él justifican que se adjudique a Snell.[8] En este

[7] Risner, Fredrich. *Opticae Libri Quatour.* Kassel, 1606.

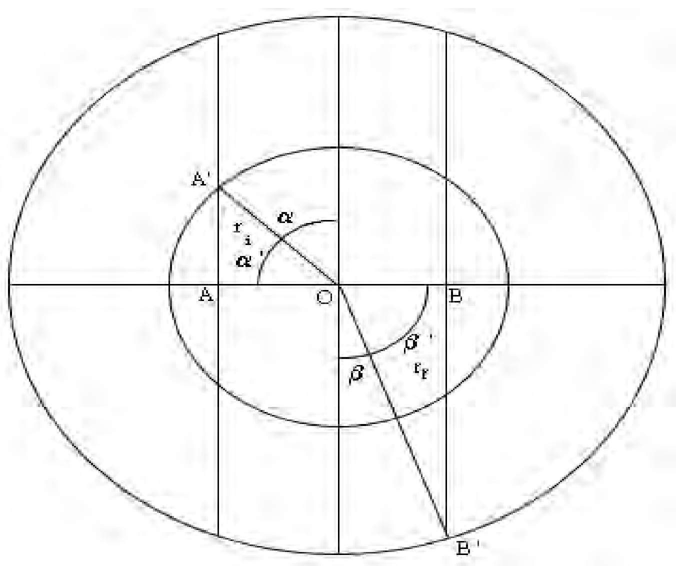
[8] El manuscrito se encuentra depositado en la biblioteca de la Universidad de Amsterdam. Ver de Waard (1935), pp. 60-73. Ésta es la traducción literal del texto en latín al castellano citado en la pág. 75. Notemos que puede resultar confuso la parte que dice *en uno y el mismo medio diferente*, sin embargo debemos tener en cuenta que este enunciado

texto aparece enunciada la ley de refracción, tal y como fue citada en latín al final de la sección anterior y que más adelante analizaré. Quienes lo dan a conocer son, como ya se mencionó, Isaac Vossius y Christian Huygens. Ambos tuvieron en sus manos un manuscrito de Snell donde también aparecía la ley, el cual desafortunadamente se perdió en algún momento.

Textualmente lo que afirma el manuscrito que contiene la ley de refracción es que:

El rayo verdadero guarda respecto del rayo aparente la misma proporción en uno y el mismo medio diferente. La secante del ángulo complementario de la inclinación en el medio más raro tiene la misma razón con la secante [del ángulo complementario] del [rayo] cortado en el medio más denso que la [razón] entre el rayo aparente y el rayo incidente o verdadero. [9]

Para entender este enunciado veamos el siguiente diagrama.



Aquí r_i es el "rayo verdadero" o "incidente" y corresponde a la recta $A'O$, r_r es el "rayo aparente" o "rayo refractado", y es el segmento OB'; O es el punto de intersección del rayo r_i con la línea que separa los dos medios, A el punto de intersección de la interfase y la perpendicular a ésta que pasa por

trata de hacer referencia a una pareja específica de medios diferentes.

[9] De Waard (1935), pp. 64-65.

el punto inicial de r_i, B es el punto, del otro lado de O, tal que $AO = OB$ (punto simétrico de A respecto de O a lo largo de la interfase), α el ángulo entre r_i y la perpendicular a la interfase en O, (α es el ángulo de incidencia), α' el ángulo entre r_i y la interfase, β (el ángulo de refracción) es el ángulo entre el rayo "aparente" y la perpendicular a la interfase por O, y β' es el complemento.
Con estos elementos lo que dice la ley de refracción, tal y como la formula Snell, es que

$$r_i : r_r = p : q$$

donde la razón $p : q$ es una constante para cada pareja de medios a través de los que se da la refracción.
La parte izquierda de la igualdad se puede reescribir, recurriendo a la trigonometría, -cuyo uso ya se había generalizado en esa época como:

$$r_i : r_r = \frac{OA}{cos\,\alpha'} : \frac{OB}{cos\,\beta'}$$

y dado que $OA = OB \Longrightarrow r_i : r_r = cos\,\beta' : cos\,\alpha' = sen\,\beta : sen\,\alpha$
Esto significa que, según Snell, la razón entre las longitudes que asocia con los rayos incidente y refractado va como la razón inversa de los senos de los ángulos que, respectivamente, forman los rayos en su medio con la perpendicular a la interfase en el punto donde ocurre la refracción.
La siguiente parte del resultado de Snell se expresa, en términos de las secantes como:

$$sec\,\alpha' : sec\,\beta' = r_r : r_i$$

pero si desarrollamos la parte izquierda de esta igualdad veremos que

$$sec\,\alpha' : sec\,\beta' = \frac{1}{cos\,\alpha} : \frac{1}{cos\,\beta} = cos\,\beta' : \cos\,\alpha' = r_r : r_i$$

Sin embargo, de acuerdo con el diagrama $cos\,\alpha' = \frac{OA}{OA'}$ y $cos\,\beta' \frac{OB}{OB'}$, y como $AO = OB \Longrightarrow cos\,\beta' : cos\,\alpha' = \frac{OB}{OB'} : \frac{OA}{OA'} = OA' : OB' = r_i : r_r$, que es la expresión correcta de la ley de refracción.

Esto significa que Snell se equivocó en la segunda parte de su enunciado. Lo cuál no es del todo grave, sólo indica un descuido por parte de Snell en el manuscrito que, si se hubiera llevado a la etapa final como publicación, seguramente hubiera sido corregido. Que Snell sabía cuál es la forma correcta del enunciado se sabe gracias al testimonio de Golius y de Constantin y Christian Huygens, quienes tuvieron en sus manos el manuscrito, perdido desde entonces, donde Snell enuncia la ley que había sido publicada por Descartes en 1637.

El hecho de que Isaac Vossius acusara de plagio a Descartes en su *De lucis natura et proprietate* (1662), y de que Leibniz hiciera lo mismo en su *Discours de métaphysique* muestra que Snell y Descartes presentaban resultados equivalentes en cuanto al cambio de ángulo que ocurría con el rayo de luz al atravesar de un medio a otro.[10] Sobre esta misma cuestión al comparar los métodos de ambos científicos Golius -Jakob Gool, sucesor de Snell en la cátedra de matemáticas en la Universidad de Leyden, y quien sugiere a Descartes analizar el problema de Pappus-,[11] concediendo que los descubrimientos habían ocurrido de manera independiente, concluyó que "El francés [encontró la ley de refracción] a partir de considerar principios y causas, y el danés a partir de efectos y observaciones... ambos llegaron a la misma conclusión".

5.3. Descartes, una ley encubierta

Descartes, al igual que Euclides y Ptolomeo, escribió un tratado de óptica, y aunque el resultado sobre refracción se encuentra en el segundo discurso de éste, para entender su argumentación hay que leer el primer libro, donde introduce el lenguaje y la metodología mediante la cual Descartes establecerá el resultado. El primer discurso se encuentra dedicado a la luz y su comportamiento, mientras que el segundo a la refracción. Hay que aclarar que no establece una teoría sobre qué es la luz y se limita a describir su comportamiento a través de analogías mecánicas e hidráulicas. En el segundo

[10] ver nota 1, p. 149 de Shea (1991), *The Magic of Numbers and Motion.*
[11] Gaukruger (1995), *Descartes*, p. 210.

libro, habiéndonos acostumbrado a sus explicaciones analógicas, se encarga de sutilmente repetir este patrón retórico.
Observaremos más adelante que parte de la relevancia del resultado de Descartes radica en la manera en la que sienta las bases para obtenerlo, que resulta ser un despliegue sutil e intelectualmente seductor de analogías. El uso de este recurso retórico se justifica cuando se utiliza para explicar partes de algún concepto complicado mediante otro que es conocido y que tiene cierta semejanza en un aspecto particular, lo cual permite mostrar algunas propiedades de manera más sencilla que si fueran analizadas bajo el régimen del concepto inicial. Sin embargo y por lo general, los razonamientos por analogía no se consideran como una demostración.
Las analogías utilizadas por Descartes tienen la misma finalidad y es mediante éstas que muestra y avala algunas de las propiedades fundamentales que le permiten "justificar" sus resultados. En la ciencia este proceder no suele ser válido -aunque sí esclarecedor-, ya que esas suposiciones no se encuentran fundamentadas en algo completamente infalible. Esto se debe a que en algunas de las ocasiones parecen estar sujetas a nociones perceptivas. En los dos primeros discursos de *La Dioptrique* Descartes las utiliza un poco más allá de lo que se podría considerar, en algunos casos, como válido, ya que de manera sutil juegan el mismo papel que los axiomas y los supuestos que en la ciencia se utilizan constantemente para dar inicio a la matematización de nuevos fenómenos. El fundamento de los argumentos de Descartes es geométrico, sin embargo en algunas partes la línea que los separa de las analogías es muy tenue, ya que éstas juegan un papel primordial en las demostraciones. A continuación paso a presentar un esbozo del argumento cartesiano que conduce a la ley de refracción.

5.4. Primer Discurso o la justificación de la analogía

Como mencioné anteriormente, el primer capítulo de la obra de Descartes trata sobre la luz y establece de qué manera se puede modelar su movimiento, y esto lo establece con una analogía mediante la cual le asocia a la luz un movimiento mecánico que le permite analizar de una manera más sencilla su comportamiento.[12]

Lo que le interesa en esta parte no es profundizar en la naturaleza de la luz, ya que para él es sólo *un movimiento o acción*; lo que busca es exhibir de manera inteligible -y hasta gráfica- las características de la luz que posteriormente le permitirán establecer la ley de refracción. En función de ello se enfoca en mostrar cómo y a qué velocidad viaja la luz en diferentes medios, así como cuándo su trayectoria se puede ver afectada. Esto lo realiza mediante *comparaciones para convencer de la manera más conveniente y explicar las propiedades que la experiencia conoce, para después deducir las otras que no pueden ser tan fácilmente observadas.*

La manera en la que justifica la velocidad con la que viaja la luz es la siguiente: así como un bastón transmite a una persona ciega el mundo que lo rodea de manera instantánea tenemos que *la luz puede extender de manera instantanea sus rayos desde el sol hasta nosotros*. En estos términos es que la analogía le permite ilustrar, de una manera comprensible, con qué velocidad se puede llegar a desplazar la luz de modo que al iluminar los objetos podemos apreciar las características de ellos; así como el bastón le permite "conocer" los objetos a un ciego, de la misma forma la luz nos permite conocer el mundo que nos rodea.

A continuación Descartes llama a reconocer una distinción entre *moverse y la acción o inclinación a moverse*, y lo ilustra de la siguiente manera:

Descartes considera que no hay vacío en la naturaleza. Todo, incluso los poros de los objetos, se encuentran llenos de una sustancia sutil que puede ser comparada con el vino en una tina, y los cuerpos más ligeros así como los más pesados que se puedan encontrar en el aire, además de otros cuerpos transparentes, pueden ser comparados con los racimos de uvas que se encuentran mezclados con el vino en la tina.

[12] En lo que sigue utilizaré la edición de *Discourse on Method, Optics and Meteorology 1637 René Descartes* (1965), traducida por Paul Tannery y Charles Adam.

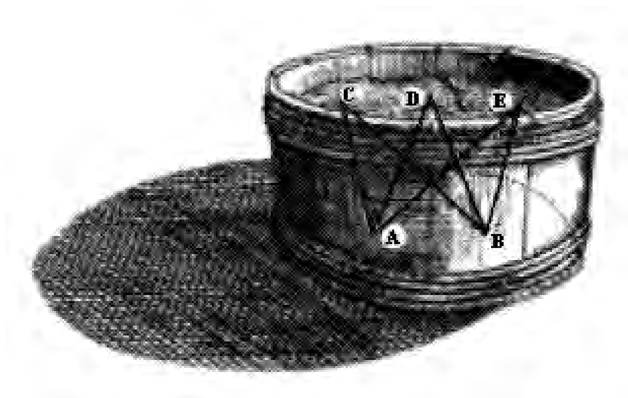


Fig. 31

Supongamos que hacemos dos hoyos A y B en la parte beja de la tina; entonces tendremos que las partes de vino que se encuentren cerca de C *tienden* a ir en línea recta hacia A y B, de manera simultánea, en el instante en que son abiertos. Sin embargo no se puedan mover hacia los dos hoyos al mismo tiempo, y de la misma manera las partes de vino que se encuentran cerca de D y E *tienden* hacia A y B cuando estos hoyos son abiertos, y ninguna de estas *acciones* (de ir hacia A o hacia B) se ve impedida por la otras ni por la resistencia que puedan oponer los racimos de uvas; de la misma manera los rayos del sol se propagan en línea recta sin verse desviados por los delicados cuerpos que se puedan encontrar en el aire o por otro medio por el que pueda pasar; por ello es que *no es el movimiento, pensado como la acción de los cuerpos luminosos, lo que debemos tomar como luz, y los rayos luminosos no son más que las líneas por las cuales tiende esta acción.*

Sin embargo, podemos observar que aunque los rayos luminosos son rectos, cuando pasan a través de cuerpos transparentes uniformes pueden ser desviados, de la misma manera en que una pelota se desvía al ser lanzada y colisionar con los cuerpos que encuentra; *de esta forma es fácil creer que es la acción o inclinación a moverse lo que tomamos como luz y que debe seguir las mismas leyes que sigue el movimiento.*

En las últimas hojas del primer discurso Descartes intenta mostrar por qué es válido comparar el comportamiento de la luz con el movimiento de una pelota de un lugar a otro, mostrando que así como esta trayectoria se puede ver afectada por distintas superficies, lo mismo sucede a la luz, que dependiendo de la superficie sobre la que cae puede ser reflejada en el caso de estar lo suficientemente pulida, y así como una pelota puede cambiar su trayectoria al incidir sobre diferentes medios, la luz lo hace al incidir en medios transparentes y translúcidos.

Para hacer evidente esta analogía Descartes llama a observar este fenómeno tal y como se presenta en el juego de tenis, donde constantemente se pueden percibir estos distintos comportamientos, y esto lo hace no sólo con la finalidad de tener un referente en la experiencia, sino también para justificar la acción de una fuerza inicial que le es aplicada a la pelota para ir de un lado a otro y, de manera análoga, la que le es impuesta a los rayos por provenir de una fuente luminosa.

Es importante notar que en este primer discurso Descartes plantea muchas cuestiones que serán de fundamental importancia en el desarrollo de la ley de refracción, entre ellas se encuentra, como ya se dijo, el uso de analogías, mismas que debemos enfatizar se encuentran fundamentadas en la percepción sensorial y que se adaptan a la situación deseada, lo cual podría parecer contradictorio con el Descartes del *Discurso del Método*. Pero lo cierto es que no sólo no es contradictorio, sino que es un ejemplo en el que se hace patente la aplicación de lo dicho en el Discurso, ya que si bien los hechos son observados a partir de la experiencia, veremos que la manera de fundamentar la ley de refracción es mediante situaciones y resultados que se obtienen deductivamente. En este primer discurso también establece que la luz es análoga al movimiento, lo cual puede parecer no del todo convincente hasta que da un ejemplo explícito, a saber, el de una pelota lanzada con cierta fuerza de un lugar a otro y, finalmente, la primera distinción que hace de la *acción* en este primer discurso no es completamente clara. Con todo, veremos que es algo semejante a la *inercia* de los cuerpos, de modo que en este primer discurso plantea la semejanza de la luz con el movimiento, lo cual le permitirá analizar su comportamiento de modo conveniente para finalmente establecer la ley de refracción.

5.5. El juego de tenis o la ley de refracción

La finalidad del segundo discurso es conocer de manera exacta la "cantidad" de refracción, lo cual puede ser convenientemente entendido mediante analogías como las que ha hecho anteriormente. Para poder llegar a exhibir la forma de la ley de refracción, Descartes primero muestra cómo se comportan los rayos luminosos en el caso de la reflexión; las razones para hacer tal cosa apuntan a que de esta forma el análisis de la refracción será mucho más sencillo, y esto tiene mucho sentido cuando notamos que es mediante el primer fenómeno que establece los fundametos que nos servirán para entender a la refracción con base en propiedades del movimiento; sin embargo, las propiedades que sirven en la reflexión no son las mismas que se utilizan en el fenómeno de la refracción, y es por detalles como éstos que la prueba de Descartes ha sido duramente criticada.

Veamos a continuación cómo es que Descartes presenta la reflexión.

Lo primero que haremos será considerar una pelota que es lanzada de A a B (figura 32). En B golpea a la superficie del suelo CBE, la cual no le permite pasar más allá por lo que sólo le resta regresar. Veamos en qué dirección lo hace. En lo que sigue presento los diagramas a los que recurre Descartes y que por su claridad y calidad se han convertído en íconos de la historia de la ciencia.[13]

[13] Ver cualquier edición de la *Dióptrica* de Descartes que incluye los diagramas. En particular está disponible la reimpresión de la edición estándar de la obra de Descartes, debida a Charles Adam y Paul Tannery, publicada entre 1897 y 1913. Las reimpresiones recientes son de 1957-1958 y la editora Vrin publicó una revisión de esta última impresión en 1964-1974. Otra reimpresión es de 2009, de la editorial BiblioLife. En español se cuenta con la edición de Guillermo Quintanés Alonso, de Alfaguara, de 1987.

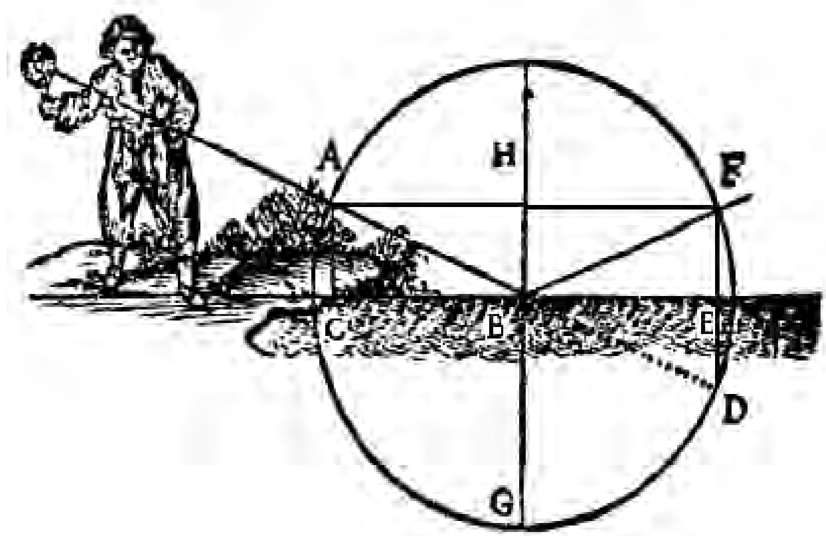


Fig. 32

Al realizar este análisis Descartes considera todas las posibles variables que pueden afectar el movimiento de la pelota como son el peso y las irregularidades del piso. A estas últimas las descarta para que este movimiento sea lo más semejante posible al de la luz y, algo muy importante, supone que la pelota viaja tanto durante el ascenso como en el descenso con una velocidad constante.

Descartes hace notar que la fuerza que mueve a la pelota es diferente a la que determina la dirección. A continuación desarrolla una idea que vendrá a ser fundamental en la prueba.

Lo que muestra que no es imposible que la pelota se desvíe al encontrar el suelo y por lo tanto que la "determinación" que la hace ir hacia B cambie sin que se altere la "fuerza" ya que éstas son dos cosas diferentes. Y como resultado no debemos imaginar que la pelota se detiene por algunos momentos en B antes de ir hacia F, como muchos filósofos creyeron, ya que si este movimiento se viera interrumpido como consecuencia de tal encuentro no se *podría encontrar una causa que después lo hiciera reanudar el movimiento. Sin embargo debemos notar que la "determinación de moverse" en cierta dirección, así como cualquier otra cantidad en general, puede ser dividida entre todas las partes que imaginemos lo componen.*[14]

En este párrafo Descartes hace una afirmación muy importante en su argumento, a saber, que la *determinación de moverse* [15] puede separarse en todas las partes que la componen. En el desarrollo posterior podremos darnos cuenta de que la *determinación* se puede ver como lo que actualmente conocemos como un vector, que tiene cierta magnitud y dirección, y en la parte en la que se refiere a dividirla en sus componentes, lo podemos interpretar como los vectores a partir de los cuales esta *determinación* se puede obtener como su suma. Evidentemente Descartes no se refiere a éstos como vectores ni define las operaciones válidas entre ellos, en este caso la suma; pero es creíble que tenía en mente estos conceptos que revolucionarían el análisis de diferentes problemáticas en las matemáticas.[16]

Volvamos al argumento de Descartes. *Podemos imaginar fácilmente que la parte de la pelota que se mueve desde A hacia B está compuesta por dos movimientos o determinaciones, uno que la hace descender de AF a CE y otro que actúa simultáneamente y la hace ir de AC a FE, y los dos juntos la conducen a B por AB.*[17]

Acto seguido Descartes se ocupa de saber en qué dirección regresará la pelota; para ello traza un círculo con centro en B y radio BA y afirma lo siguiente: *en el mismo tiempo que a la pelota le toma ir de A a B debe, de manera infalible regresar desde B hasta algún punto en la circunferencia.* Con lo cual afirma que recorre distancias iguales en tiempos iguales; *y como habíamos asumido que el movimiento de la pelota se daba siempre con velocidad constante*, como recorre distancias iguales en tiempos iguales, las

[14] En adelante las citas estarán referidas a la edición de Adam y Tannery y se utilizará la forma estandar para las citas: A-T, VI, 95 significa edición de Adam y Tannery, volumen VI, sección 95.

[15] La cual tiene una gran semajanza a lo que actualmente nos referimos como *ímpetu*.

[16] Por ejemplo la solución de Descartes al problema de Papo o Pappus.

[17] A-T, L. VI, 95. Cabe aclarar que en lo que se refiere a esta frase y las que aparecen adelante en letra cursiva no estoy citando textualmente a Descartes sino presentando una versión resumida de lo que aparece eun su texto.

determinaciones la guían de manera particular, y como el suelo impide el paso de la pelota a ésta no le queda más que ir hacia F, un punto situado arriba, y como la velocidad no se altera en ninguna de las dos determinaciones no le resta más que moverse reflejándose con un ángulo igual al ángulo de incidencia. Y es así como justifica que ésta sea la manera como ocurre la reflexión. [18]

En una primera impresión sobre este párrafo Descartes explica cómo calcular los ángulos de incidencia y reflexión, pero en realidad hace mucho más que eso, ya que con esta analogía establece varias cosas que son de sumo interés. Primero, con lo anterior trata de explicar que la trayectoria de un objeto está definida mediante cierta (*determinación*) composición de diferentes partes, las cuales definen la dirección, y que son ajenas a la velocidad, de modo que dado que el movimiento se da con una dirección y velocidad particular, las *determinaciones* no constituyen el movimiento. Lo segundo es que establece los factores que se considerarán al construir los diagramas "auxiliares".

Una vez que ha analizado el fenómeno de reflexión, Descartes pasa a ocuparse de la refracción suponiendo que en vez de suelo firme la pelota, al ser lanzada de A hacia B, se encuentra con una tela tal que la pelota tiene la *fuerza* suficiente para romperla y pasar a través de ella *perdiendo sólo parte de su velocidad.* Con el fin de iluminar a los lectores inicia su análisis considerando que pierde la mitad. Y continúa diciendo que *para saber qué trayectoria sigue consideremos una vez más que que el movimiento difiere completamente de lo que es la "determinación" de ir en una dirección u otra. Consideremos que la determinación está compuesta de dos partes* (como en el caso anterior) *y que sólo la parte que va de arriba hacia abajo puede cambiar cuando la pelota encuentra la tela, y que la que la hace ir a la derecha se mantiene igual ya que no hay tela que se le oponga en esta dirección.*[19]

[18] A-T, L. VI, 96.
[19] A-T, L. VI, 98.

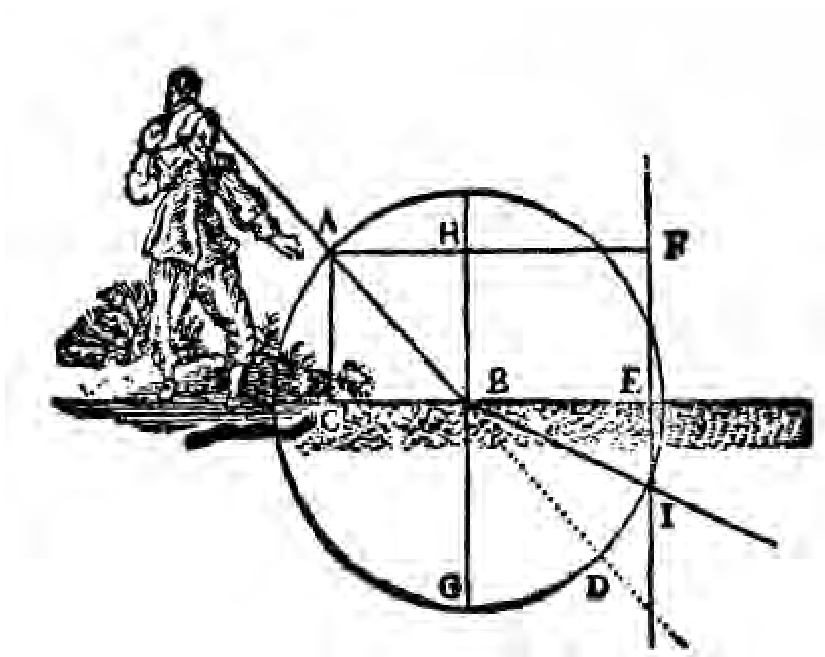


Fig. 33

Supongamos que $BE = 2CB$, y como al impactarse con la tela la pelota pierde la mitad de la velocidad debe tomar dos veces el tiempo que recorre de AB al pasar de B hasta algún punto en la circunferencia, y como la determinación que hace ir a la pelota de izquierda a derecha no se ve alterada, en dos veces el tiempo debe recorrer el doble de distancia, así que llegará a algún punto de la recta FE en el instante en que llega a algún punto de la circunferencia AFD, donde I es el único punto que satisface estar tanto en la recta como en la circunferencia (ver figura 33). En notación moderna lo anterior se puede ver de manera muy sencilla sabiendo que $v = \frac{d}{t}$ (lo cual al parecer Descartes conocía en diferentes términos) por lo que es evidente que el punto en el cual Descartes afirma que incide la pelota es en el que efectivamente lo hace. Ahora, es muy importante hacer notar que el argumento anterior se fundamenta en la disminución de la velocidad de la pelota al atravesar la tela. Posteriormente Descartes dirá que la trayectoria que siguió la pelota es la misma que sigue la luz si en vez de considerar una superficie de tela pensamos que el rayo luminoso incide en agua y que ésta toma la misma cantidad de su *fuerza*, a saber, que le quita la mitad de la velocidad a la luz, en la misma medida que la tela hacía disminuir la velocidad de la pelota. Notemos que a diferencia del primer discurso el desplazamiento de la luz de un sitio a otro no es instantáneo, lo cual se traduce a que la velocidad ya no es infinitamente grande sino que ahora es finita. También hay que considerar que pasó de hablar de fuerza a referirse a velocidades.

La luz se verá más o menos desviada de acuerdo con qué tan oblicuamente incida respecto de la superficie, de modo que si incide en ángulo recto, como si fuera lanzada de H a B, seguirá en línea recta hacia G, es decir, no sufrirá ninguna desviación.

Este argumento funciona cuando tratamos de explicar qué pasa con la luz al pasar de un medio "raro " a uno "denso"; a continuación veremos cómo explica el paso de la luz a un medio menos denso del que proviene.

Supongamos que la pelota, lanzada de A a B, es impulsada nuevamente por la raqueta CBE, la cual aumenta la *fuerza* de su movimiento. Supongamos que lo hace en un tercio, de modo que ahora puede recorrer en dos "tiempos" lo que anterioemente hacía en tres, de modo que *esto tendría el mismo efecto que si la pelota encontrara en* B *un cuerpo de una naturaleza tal que pudiera pasar por la superficie* CBE *un tercio más fácilmente que por el aire.*

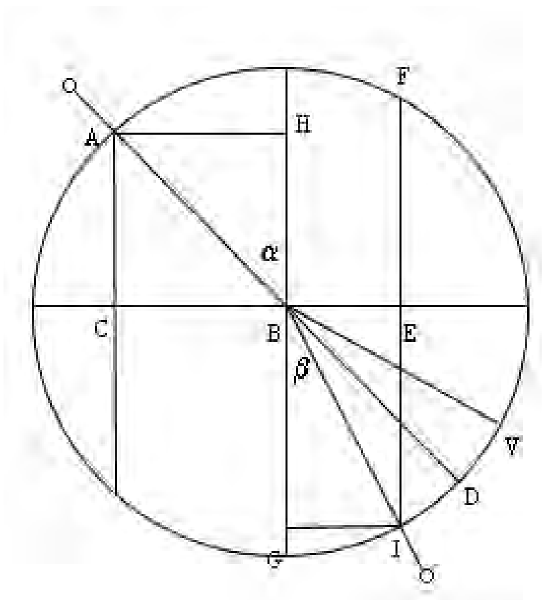


Fig. 34

De modo que con base en lo demostrado anteriormente resulta que si trazamos el círculo AD, y las líneas AC, HB, FE de modo que haya un tercio menos de distancia entre FE y HB que entre HB y AC, el punto I, que se encuentra en la intersección de la circunferéncia AD y la línea EF (Fig. 34), es el punto en el cual la pelota incidirá después de ser desviada en B.

Ahora podemos tomar el inverso de esta conclusión, y decir que así como la pelota viene de A en línea recta hacia B, y cambia de dirección en B y toma su curso de ahí hacia I, esto significa que la fuerza o facilidad con que entra en el cuerpo $CBEI$ es a aquélla con la que deja el cuerpo $ABCE$, como la distancia entre AC y HB es a aquélla entre HB y FI, es decir como la línea CB es a BE.[20] Este es el enunciado de la ley de refracción publicado por Descartes. Es notorio que no aparece la palabra *sinus* ni ninguna referencia a ella, a pesar de que para entonces ya estaba en uso. Sin embargo el término *sinus* sí aparece en la carta donde Descartes habla sobre el asunto

[20] A-T, L. VI, 100.

con Mersenne (junio 1632). Es posible que la omisión en la versión francesa se deba a que en ese entonces el vocablo *sinus* no era de uso corriente en la lengua francesa y por ello Descartes no la utilizara. [21]

Descartes continúa señalando que como la luz *sigue en este ámbito las mismas leyes que el movimiento de la pelota, es necesario decir que cuando los rayos pasan de manera oblicua de un cuerpo transparente a otro que los recibe más o menos fácilmente que el primero, éstos son desviados de tal manera que siempre son menos desviados de la superficie de estos cuerpos en el lado que los reciba más fácilmente que en el otro.*

De modo que si AB es un rayo luminoso que pasa de un medio de mayor "densidad" a uno de menor densidad, y la separación entre los dos medios está dada por la superficie CBE, e incide en B, tenemos que $CB = AH$, $BE = GI$ y $AB = BI$, de donde se sigue, usando notación moderna, que $sen\,\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{CB}{AB}$, por lo que $sen\,\beta = \frac{GI}{BI} = \frac{BE}{BI}$. de donde obtenemos que (ver figura 34)

$$\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta} = \frac{\frac{CB}{AB}}{\frac{BE}{BI}} = \frac{CB}{BE} = \frac{n_2}{n_1},$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de cada medio e indican, o son medida de, en términos actuales, el cambio de la velocidad de la luz al pasar de un medio a otro.

Algo muy importante en esta demostración es que a pesar de que en la analogía auxiliar para la prueba del fenómeno de refracción Descartes utiliza que la velocidad de la luz cambia y poder así justificar el diagrama que utiliza, es muy cuidadoso en cambiar los términos de *velocidad* a *fuerza del movimiento y la facilidad con la que penetra en el medio,* lo cual a pesar de manejar de manera implícita la noción de velocidad no se refiere e- xactamente a ella, evitando de esta forma determinar la velocidad de la luz. Aparentemente Descartes concebía a la luz como una especie de "presión" que se desplazaba infinitamente rápido (algunos sostienen que sólo afirmó que "muy rápido" y no "infinitamente" rápido) a través de ese "algo" que llenaba el espacio. Esta posición obviamente iriá en contra de su afirmación

[21] Sobre la carta de Mersenne ver A-T, L. I, 255.

de que la luz viaja más rápidamente en el agua que en el aire (por ser más densa el agua). Descartes no tuvo a la mano ninguna evidencia acerca de la velocidad -finita o infinita- de la luz en un medio. Para cuando se llevó a cabo el primer experimento que comprobó la finitud de la velocidad de la luz Descartes ya había muerto.[22]

Pero volvamos al texto de la *Dioptrica*. En él podemos notar cierta semejanza entre el diagrama utilizado por Descartes y el modelo que Ptolomeo había extraído de sus experimentos.

Finalmente, Descartes señala que las líneas que nos permitirán medir la refracción son las que él determinó, y no los ángulos que se forman con la normal, (algo en lo que probablemente muchos de los esfuerzos de matemáticos anteriores se vio desgastado) ya que si llegamos a medir la proporción entre diferentes ángulos de incidencia las proporciones que obtengamos pueden ser distintas, mientras que si tomamos las rectas que determina los diferentes ángulos siempre obtendremos la misma cantidad para la refracción. Concluye que la "cantidad" de refracción depende de la naturaleza del medio en el que incida el rayo, y además considera que es suficiente con analizar la incidencia de un sólo rayo, aunque normalmente no se puede hacer con la suficiente facilidad ni certeza. Por ello es que en algunas ocasiones es necesario repetir la medición utilizando otros rayos, de ser posible con diferentes inclinaciones respecto de la normal.

Con este análisis Descartes logra establecer la ley de refracción. Sin embargo podemos ver que el fundamento de esta prueba es un tanto contradictorio: es empírico en cuanto a los conceptos a los que recurre como "axiomas", y es matemático en la manera en la que hila los argumentos y deduce el resultado. Esta cuestión, que no deja de sorpendernos, permite abrir nuevas investigaciones que tratan de descifrar el verdadero significado de cada uno de los conceptos que en este argumento utiliza, así como sopesar si ésta es una versión accesible de una prueba realizada con todo el rigor que las

[22] En 1675 Olaf Roemer llevó a cabo un experimento para medir la velocidad de la luz que consistía básicamente en medir los periodos durante los cuales se eclipsaban las lunas de Júpiter. Solo fue hasta 1850 que se mostró que la velocidad de la luz en el agua era inferior a la que tenía en el aire. Esto lo llevan a cabo los franceses Hippolyte Fizeau y Jean Foucault. Ver Nahin (2003), *When least is best...*, p. 106.

matemáticas requieren.

Capítulo 6

Conclusión

En este trabajo podemos observar que las investigaciones que se desencadenaron a partir de la problemática de los espejos comburentes fueron diversas, ya que para poder analizarla se requería del desarrollo de fundamentos y métodos lo suficientemente sólidos mediante los cuales se pudieran estudiar los distintos fenómenos relacionados con la luz y la visión. Así, lo más importante resultaba definir el comportamiento del factor clave en este caso, la luz. Por ello fue que los pioneros en el estudio de la óptica se dieron a la tarea de proporcionar una descripción geométrica (lo menos influenciada por diversas corrientes filosóficas) del fenómeno de la visión, tales como las proporcionadas por Euclides en los textos de *La Perspectiva* y *La Especularia*; éstas resultaron ser las primeras descripciones geométricas del comportamiento de los rayos luminosos, las cuales sirvieron como base para el análisis de distintos fenómenos relacionados con la reflexión de la luz y posteriormente con la refracción.

Tal vez el problema de los espejos comburentes resulta ser tan interesante por la incredulidad que despierta con su planteamiento, al cual se le asocia de manera inmediata la pregunta: ¿es posible crear una superficie especular que permita causar la ignición mediante la luz del sol en un punto dado?. Matemáticos como Diocles e Ibn Sahl mostraron que al menos teóricamente dicha superficie existe. Durante el desarrollo de este trabajo vimos que la solución al problema de los espejos ardientes requiere del hábil manejo de los resultados que se encuentran en los textos de Euclides y de Apolonio, los cuales no por ser de los primeros compendios geométricos de los que se tiene registro resultan ser de fácil comprensión, ya que todavía no se contaba, digamos, con un lenguaje algebraico que permitiera una expresión y manejo más sencillo de las propiedades que ahí se presentan. Y es por esta cuestión por la que la resolución del problema de los espejos comburentes resulta significativa, ya que, eventualmente Ibn Sahl aportó a las matemáticas una simplificación conceptual en la caracterización de las secciones cónicas, en particular de la parábola, pues se establecieron propiedades sobre los puntos que la componen en vez de sobre las distintas rectas auxiliares aso- ciadas. Esto permitió la traslación de conceptos matemáticos a cuestiones del orden práctico con ayuda de métodos como el que Ibn Sahl propone para el trazo de la parábola. Sin embargo persiste la interrogante de si la caracte- rización por él introducida fue utilizada en esos tiempos.

Sobre el trabajo que realizó Ibn Sahl también resulta interesante reconocer cómo fue que el trabajo que llevó a cabo con las secciones cónicas le permitó resolver el problema de los espejos ardientes y establecer la ley de refracción. Con base en el análisis que realizó se puede observar que una de las principales preocupaciones en el ámbito de la filosofía natural de su época, y que motivaron el establecimiento de la ley de la refracción, fue el estudio de los cielos, y gracias a su texto podemos observar que existía la inquietud por encontrar instrumentos que permitieran un mejor trabajo de observación.

Sin embargo, y para desgracia de los historiadores de la ciencia y la filosofía en Occidente, el texto de Ibn Sahl estuvo perdido por varios siglos, de modo que el establecimiento de la ley de refracción fue un capítulo sin terminar por mucho tiempo y, aparentemente, fue uno de los tópicos de interés de los trabajos sobre óptica desde el siglo X hasta el siglo XVII d.C., cuando de manera casi simultánea, como ya se dijo, Harriot, Snell, Descartes y Fermat la descubrieron nuevamente.

Sobre el trabajo realizado por Descartes es interesante analizar cómo replantea la experimentación, que si bien había sido introducida por Ptolomeo como una forma de respaldar el establecimineto de resultados, Descartes la transforma al utilizar experimentos pensados, modalidad en la que no es necesario realizar el experimento para poder predecir los resultados, ya que las bases teóricas en las que se fundamentan se piensa que son lo suficientemente consistentes, y eso es lo que genera la perplejidad ante el resultado obtenido, ya que a pesar de que los resultados son correctos, los fundamentos son algunas veces erróneos o dudosos. Este tipo de experimentos en los que Descartes fue uno de los pioneros de la época moderna, hoy en día son muy populares. Sin embargo, la mayoría de las veces cuando se utiliza esta argumentación los resultados teóricos se mantienen en el nivel de conjeturas. Epistemológicamente no podría ser de otra manera.

Tanto en el estudio de la reflexión como en el de la refracción de la luz podemos notar que se hace patente la íntima relación que la física -o filosofía natural- mantenía con la matemática, y también que las inovaciones relacionadas con el establecimiento de la ley de refracción fueron, en ambas ramas, sorprendentes. En particular por el hecho de utilizar un concepto que en la época de Descartes apenas se empezaba a popularizar y que en los tiempos de Ibn Sahl sólo se reconoció como una proporción. Me refiero al uso de las funciones trrigonométricas que formaban parte de la nueva era del análisis matemático y que permitían, en una especie de concilio con la filosofía natural, describir un aspecto de la realidad.

Capítulo 7

Bibliografía

Apolonio de Perga, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*. Ed. I. L. Heiberg: Leipzig: Teubner, (1891/1893) .

Apolonio de Perga, *Apollonius de Perge, Coniques*. Tome 1.1: Livre I. Comentarios históricos y matemáticios, ed, y traducción del árabe al frances de Roshdi Rashed. Berlín , Ney York: Walter de Gruyter.

Apolonio de Perga, *Apollonius of Pergue. Conics*. Books I-III. Trad. por R. Catesby Taliaferro. Diagramas de W. H. Donahue. Int. de Harvey Flaumenhaft. Ed. Dana Densmore. Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press, 2000.

Apolonio de Perga, *Les Coniques d'Apollonius de Pergue*. Trad. del griego al frances Con una introducción de Paul Ver Eecke. Paris: Librairie A. Blanchard, [1923], 1959.

Bellosta, Hélène, "Burning Instruments: From Diocles to Ibn Sahl", *Arabic Sciences and Philosophy*, Vol. 12 (2002) pp. 285-303.

Catoptriciens Grecs (2002), *Les Catoptriciens Grecs, tome 1. Miroirs ardents*. Paris: Les Belles Letres, pp.98-150.

Descartes, René (1965), *Discourse on Method, Optics and Meteorology 1637 René Descartes* Translated with an Introducciton by Paul J. Olscamp.

USA: The Bobbs-Merril Company, pp. 65-83.

DESCARTES, RENÉ, *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geométrica*. Prólogo, trad. y notas de Guillermo Quintás Alonso. Madrid: Alfaguara, 1987.

DESCARTES, RENÉ, *Oeuvres de René Descartes*. Adam, Charles y Tannery, Paul (eds.), 11 vols.. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1996. Reedición de la 2da edición de 1974-1986.

EUCLIDES [1585], *La Perspectiva y La Especularia de Euclides*. Madrid: En casa de la viuda de Alonso Gómez, pp. 1-61.

EUCLIDES (1956),*The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol. 1 y 2 (Libros I-IX)*, New York: Dover.

DIOCLES, *On burning mirrors*. Ed. y traducción de Gerald J. Toomer. Berlín: Springer, 1976.

DE WARDS, CORNELIS, "Le manuscript perdu de Snellius sur la réfraction" *Janus*, 39, 1935, pp. 51-73.

GAUKROGER, STEPHEN. *Descartes, an intellectual biography*. Oxford: Clarendon Press, 1995.

HEATH, TH. L., *Apollonius of Perga*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

KNOWLES MIDDLETON, W. E., "Archimedes, Kircher, Buffon, and the Burning-Mirrors", *Isis*, Vol. 52, No. 4 (Dec., 1961), pp. 533-543.

KORTEWEG, D.J., "Descartes et les manuscripts de Snellius d'après quelques documents nouveaux", *Reveu de Metáphisique et de Morale*, 4, 1896, pp. 482-501.

LINDBERG, DAVID C., "The Cause of Refraction in Medieval Optics", *The British Journal for the History of Science*, Vol. 4, No. 1 (Jun., 1968), pp. 23-38.

MARTÍNEZ, RAFAEL (2000), "La Refracción según la *Dioptrique*. ¿Engaño Cartesiano?" en *Descartes y la Ciencia del Siglo XVII*. Eds. Alvarez, Carlos y Martínez, Rafael. México: Siglo XXI, pp. 244-271.

Ed. Maynard Hutchins, Robert (1952), *Great Books of the Western World Vol. 11 Euclid, Archimedes, Apollonius of Perga, Nicomachus.* William Benton, Encylopedia Britannica, Inc., pp. 603-811.

Nahin, Paul J., *When Least Is Best: How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small (or as Large) as Possible.* Princenton: Princenton University Press, 2003.

Ptolomeo, *Ptolemy's Geography. An Annoted Translation of the Theoretical Chapters.* (eds.) J. Lennart Berggren y A. Jones. Princeton: Princeton University Press, 2000.

Rashed, Roshdi, "A Pioner in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses", *Isis*, Vol 81. No. (sep. 1990). pp.464-491.

Rashed, Roshdi, "Le « Discours de la lumière » d'Ibn al-Haytham (Alhazen). Traduction française critique", *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 1968, Vol. 21, No. 3, pp. 197 - 224.

Rashed, Roshdi (2005),*Geometry and Dioptrics in Classical Islam.* Londres: Al-Furqan Islamic Heritage Foundation, pp. 43-63, 77-110.

Ribe, Neil M., "Cartesian Optics and the Mastery of Nature", *Isis*, Vol. 88, No. 1 (Mar., 1997), pp. 42-61.

Risner, Fredrich. *Opticae Libri Quator.* Kassel, 1606.

Russo, Lucio, *The Fotgotten Revolution.* Berlín, N. Y.: Springer, 2000.

Sabra, A. I. (1981),*Theories of Light from Descartes to Newton.* New York: Cambridge University Press, pp. 93-136.

Shea, William R., *The Magic of Numbers and Motion. The Scientific Career of Réne Descartes.* Canton, MA: Science History Publications, 1991.

Smith, A. Mark, "Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics: A Source Based Guided Study", *Transactions of the American Philosophical Society, New Series*, Vol. 89, No. 3 (1999),pp. 1-172.

Smith, A. Mark, "Ptolemy's Search for a Law of Refraction: A Case-Study in the Classical Methodology of “Saving the Appearances” and its Limitations”, *Archive for Historie of Exact Sciences*, Vol. 26, No. 3, Sep. (1982), pp. 221-240.

SMITH, A. MARK(1996), *Ptolemy’s Theory of Visual Perception: An English Translation of the Optics With Introduction and Comentary*. Filadelfia: Transactions of The American Philosophical Society, pp. 1-61,129-172, 228-261

SMITH, A. MARK, “Revisión sin título”, *Isis*, Vol. 69, No. 2 (Jun., 1978), pp. 290-292.

SIMMS, D. L., “Archimedes’ Weapons of War and Leonardo”, *The British Journal for the History of Science*, Vol. 21, No. 2 (Jun., 1988), pp. 195-210.
SIMMS, D.L., “Archimedes and burning mirrors” *Phys. Educ.* Vol.10, No. 7 (Nov. 1975), pp. 517-521.

STANSFIELD EASTWOOD, BRUCE, “Descartes on Refraction: Scientific versus Rhetorical Method”, *Isis*, Vol. 75, No. 3 (Sep., 1984), pp. 481-502.

TEÓN DE ALEJANDRÍA, *Comentaires de Pappus et de Theón d’ Alexandrie sur l’Almageste*. Ed. de Adolphe Rome. Roma: Biblioteca Apostólica Vaticana, 1936.

TOBIN, RICHARD, “Ancient perpective and Euclid’s Optics”, *Journal of the Warbourg and Courtauld Institutes*, Vol. 53 (1990), pp. 14-41.

TZETZES, JOHN (1941), *Greek Mathematical Works, Vol. II. From Aristarchus to Pappus*, Trad. Ivor, Thomas. Londres: Loeb Classical Library No. 362, Harvard University Press, p. 19.

VOLLGRAFF, J. A., “Snellius’ Notes on the Reflection and Refraction of Rays”, *Osiris*, Vol. 1 (Jan., 1936), pp. 718-725.

WALDEMAR H., LEHN Y VAN DER WERF, SIEBREN, “Atmospheric refraction: a history”, *Applied Optics*, Vol. 44, No. 27, pp. 5624-5636.

ZONARAS, JOHN (1914), *Roman History, Volumen II*, Trad. por Cary, Earnest y Foster, Herbert B Londres: Loeb Classical Library, Harvard University Press, p. 171.