

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS



Solubilidad del sistema integrable H_3

T E S I S

que para obtener el grado de:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

presenta
Marcos Alejandro García García

DIRECCIÓN
Dr. Alexander Turbiner Rosenbaum

COMITÉ TUTORAL
Dr. Juan Carlos López Vieyra
Dr. Antonmaría Minzoni Alessio

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco a cada uno de los miembros del jurado

- Dr. Alexander Turbiner Rosenbaum
- Dr. Antonmaria Minzoni Alessio
- Dr. Chryssomalis Chryssomalakos
- Dr. Jorge Andrés Ize Lamache
- Dr. José David Vergara Oliver

y al

- Dr. Juan Carlos López Vieyra

por sus comentarios, los que sin duda mejoraron el presente estudio. En particular a los doctores Alexander Turbiner Rosenbaum y Juan Carlos López Vieyra, por el apoyo constante que me han dado desde la licenciatura y por todo lo que he aprendido de ellos.

*A mi familia
Por todo su cariño y apoyo*

*A Lici
Por enriquecer y alegrar mi vida*

Índice general

Introducción	1
Hamiltonianos asociados con sistemas de raíces (caso racional) . . .	4
1. El hamiltoniano H_3 (solubilidad e integrabilidad)	9
1.1. El hamiltoniano	9
1.2. Separación de variables e integral de movimiento	12
1.3. Estado base	13
1.4. Variables invariantes	15
2. Representación algebraica	17
2.1. El hamiltoniano H_3 en forma algebraica	17
2.2. Integral de movimiento en forma algebraica	22
3. Espectro	25
3.1. Autovalores	25
3.2. Funciones propias y sus nodos	26
3.3. Teoría de perturbaciones	36
4. El álgebra escondida $h^{(3)}$	39
4.1. Operadores generadores	39
4.2. Estructura y relaciones de conmutación	41
4.3. Representación algebraica de H_3	43
Conclusión	45
Apéndices	47
A. Antecedentes matemáticos	47
A.1. Sistemas de raíces	47

ÍNDICE GENERAL

vii

A.1.1. Grupos generados por reflexiones y sistemas de raíces .	47
A.1.2. Clasificación de los sistemas de raíces	51
A.2. El sistema de tipo H_3	54
A.2.1. Representación unitaria del grupo H_3	59
B. Relaciones de conmutación para $h^{(3)}$	61
Bibliografía	73

Introducción

En la década de 1970 Olshanetsky y Perelomov desarrollaron el Método de Reducción Hamiltoniana, conocido posteriormente como el Método de Proyección [1]. Este método provee una oportunidad de construir hamiltonianos mecánico-cuánticos (y clásicos) multidimensionales no triviales con la propiedad de ser completamente integrables. Los hamiltonianos están asociados con los espacios de raíces de las álgebras de Lie clásicas (A_n, B_n, C_n, D_n) y excepcionales (G_2, F_4, E_6, E_7, E_8), los cuales constituyen la totalidad de los sistemas cristalográficos. Los potenciales que aparecen en el hamiltoniano, escrito en coordenadas cartesianas, tienen la forma de funciones racionales, trigonométricas, hiperbólicas o elípticas. A partir de este punto nos referiremos a dichos sistemas como los sistemas *racionales, trigonométricos, hiperbólicos o elípticos*.

Los hamiltonianos construídos vía el Método de Reducción Hamiltoniana aparecen como partes radiales de operadores de Laplace-Beltrami en espacios simétricos. En cualquier espacio simétrico existen operadores invariantes que conmutan con las transformaciones del grupo de Lie G que define al espacio simétrico. En particular, el operador de Laplace-Beltrami es uno de los operadores invariantes. Estos operadores forman un álgebra conmutativa, así como sus partes radiales. Los operadores de orden mayor que dos se denominan las *integrales* del sistema.

Los sistemas que han sido estudiados hasta ahora han resultado ser no sólo completamente integrables, sino también exactamente solubles. Esto significa que el espectro puede ser encontrado en forma analítica cerrada y las autofunciones pueden obtenerse explícitamente mediante métodos del álgebra lineal. Aún más, para todos los sistemas racionales y trigonométricos, se han encontrado representaciones algebraicas para los hamiltonianos mecánico-cuánticos

(donde los coeficientes enfrente de las derivadas son funciones polinomiales) (A. Turbiner et al., 1997-2009). Esto, a su vez, implica que el espectro se encuentra como un polinomio de segundo grado en números cuánticos y las autofunciones pueden hallarse como elementos de ciertos espacios de polinomios preservados por los operadores hamiltonianos en su forma algebraica.

Por construcción los hamiltonianos y las integrales son invariantes con respecto a transformaciones en el grupo de Weyl. Por tanto, estos espacios de polinomios parecen ser equivalentes (isomórficos) a los espacios de invariantes del sistema de raíces correspondiente. Las formas algebraicas de los hamiltonianos están relacionadas con elementos del álgebra universal envolvente de ciertas álgebras de operadores diferenciales que dichos espacios de invariantes. Tales álgebras se denominan *álgebras escondidas* de los modelos. Sorprendentemente, para todas los modelos relacionados con las álgebras clásicas, el álgebra escondida es la misma (tanto en el caso racional como en el trigonométrico): es simplemente el álgebra gl_n (A. Turbiner et al., 1997-1998). Para los modelos relacionados con los grupos excepcionales el álgebra escondida es distinta para cada modelo. Estas álgebras escondidas son álgebras de dimensión infinita al parecer desconocidas en la literatura hasta ahora.

En el caso de los modelos racionales existe la posibilidad de construir hamiltonianos asociados con los sistemas de raíces no cristalográficos H_3 , H_4 e $I_2(m)$ (sistema diedral). Para estos modelos la invariancia está relacionada con el grupo de Coxeter correspondiente. La propiedad cristalográfica que vuelve un grupo de Coxeter en un grupo de Weyl se pierde. Sin embargo, la integrabilidad completa de los sistemas racionales H_3 , H_4 e $I_2(m)$ ha sido demostrada abstractamente en [7] utilizando el formalismo de los pares de Lax cuánticos.

El objetivo de la presente tesis es estudiar la solubilidad del sistema H_3 racional. Este modelo está definido en el espacio euclidiano tridimensional (físico). Un análisis completo del espacio de configuración, el espectro y las funciones propias es necesario para el estudio de la solubilidad del sistema. Existen un estudio previo del modelo H_3 racional [5]. Es incompleto y algunos resultados son erróneos.

Para estudiar la solubilidad del modelo H_3 racional seguiremos el formalismo

general que ha sido desarrollado para los sistemas racionales [2]. Este formalismo se presenta más adelante en esta introducción.

En el capítulo 1 el hamiltoniano, el espacio de configuración, una integral de movimiento y la función del estado base son presentadas. Un conjunto de nuevas variables que da lugar a una forma algebraica para el hamiltoniano es introducido.

La representación algebraica del hamiltoniano y de la integral de movimiento en términos de las variables ya introducidas se encuentra en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se demuestra la solubilidad exacta del hamiltoniano y se calcula su espectro. El espectro de la integral de movimiento se encuentra también. Las autofunciones del hamiltoniano se muestran y un estudio breve de sus superficies nodales se presenta.

El capítulo 4 está dedicado al estudio del álgebra escondida de operadores que actúa en los espacios de polinomios preservados por el hamiltoniano. Presentamos sus operadores generadores y su estructura. La representación Lie-algebraica del hamiltoniano es encontrada.

En el apéndice A las herramientas y definiciones matemáticas que son requeridas para el estudio se presentan; en particular la introducción al grupo H_3 y su sistema de raíces.

El conjunto completo de relaciones de conmutación que definen al álgebra escondida del modelo se presentan en el apéndice B.

Prácticamente todos los resultados fueron obtenidos utilizando los programas Maple 8 y Maple 11 junto con los paquetes Coxeter y Weyl creados por J. Stembridge. Las figuras fueron creadas con Maple y Matlab.

Hamiltonianos asociados con sistemas de raíces (caso racional)

Consideremos un sistema cuántico descrito por un hamiltoniano racional asociado con un sistema de raíces \mathcal{R} de rango N :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} g_{|\alpha|} |\alpha|^2 \frac{1}{(\alpha \cdot x)^2}. \quad (1)$$

Aquí $\alpha \in \mathcal{R}^+$ denota las raíces positivas del sistema \mathcal{R} , que son vectores en \mathbf{R}^N , $x = (x_1, \dots, x_N)$ es un conjunto de coordenadas cartesianas, $|\alpha|^2 = \sum_1^N \alpha_k^2$, y el producto escalar $(\alpha \cdot x) = \sum_1^N \alpha_k x_k$. Se asume que las constantes de acoplamiento $g_{|\alpha|}$ son iguales para las raíces de igual longitud. Para asegurar la existencia de estados ligados, un potencial de un oscilador armónico isotrópico $\frac{1}{2} \sum_1^N \omega^2 x_k^2$ se añade, donde $\omega \in \mathbf{R}$ juega el papel del parámetro de frecuencia. En general, los hamiltonianos de este tipo describen una partícula cuántica en un espacio multidimensional. Este sistema es completamente integrable para cualquier sistema cristalográfico \mathcal{R} (véase [1]).

Estamos interesados en el espectro y las autofunciones de la ecuación de Schroedinger

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Psi_k(x) &= E_k \Psi_k(x), \\ \Psi_k(x) &= 0 \quad \text{en } (\alpha \cdot x) = 0, \quad \int |\Psi_k|^2 d^N x < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

En el caso de sistemas cristalográficos (véase p.ej. [2]) es sabido que el espacio de configuración es la cámara principal de Weyl y Ψ debe pertenecer al espacio de Hilbert correspondiente. Tales sistemas tienen las siguientes propiedades [1]:

1. El operador \mathcal{H} (1) es autoadjunto y sus autovalores E_k son reales si la siguiente desigualdad es válida:

$$g_{|\alpha|} = \nu_{|\alpha|}(\nu_{|\alpha|} - 1) > -\frac{1}{4}.$$

2. El espectro E_k es puramente discreto y positivo, estando caracterizada la energía E_k por N números enteros $k = (k_1, \dots, k_N)$.

3. La función del estado base tiene una forma factorizada

$$\Psi_0 = N_0(\nu) \left(\prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} (\alpha \cdot x)^{\nu_{|\alpha|}} \right) \exp \left(-\frac{\omega}{2} t_2^{(\Omega)} \right) , \quad (3)$$

donde $t_2^{(\Omega)}$ es el invariante de grado dos. La energía del estado base viene dada por

$$E_0 = \omega \left(\frac{N}{2} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \nu_{|\alpha|} \right) . \quad (4)$$

La demostración de (3) y (4) está basada en un cálculo directo donde las propiedades

$$\frac{1}{2}(-\Delta + \omega^2 x^2) \exp \left(-\frac{\omega}{2} t_2^{(\Omega)} \right) = \frac{1}{2} N \omega \exp \left(-\frac{\omega}{2} t_2^{(\Omega)} \right)$$

($t_2^{(\Omega)}$ es el invariante de grado dos (cuadrático), véase más adelante) y

$$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2(\nabla f \cdot \nabla g) .$$

son usadas. Estos enunciados son válidos no sólo en los casos cristalográficos, sino también para los sistemas no cristalográficos con un grupo de Coxeter como una simetría del sistema.

Realicemos una transformación de similaridad sobre el hamiltoniano tomando la función del estado base Ψ_0 como factor

$$h = -2(\Psi_0(x))^{-1}(\mathcal{H} - E_0)\Psi_0 . \quad (5)$$

Un nuevo problema espectral surge

$$h\phi(x) = -\epsilon\phi(x) , \quad (6)$$

con un nuevo parámetro espectral $\epsilon = 2(E - E_0)$. Si en (2) la condición de frontera significa la normalizabilidad de la autofunción $\Psi(x)$, entonces para (6) requiere la normalizabilidad de $\phi(x)$ con el factor de peso $\Psi_0^2(x)$. Por construcción, el autovalor más bajo es $\epsilon_0 = 0$ y la autofunción más baja es $\phi_0 = \text{const.}$ Nuestra meta es encontrar, mediante un cambio de variables, una forma *algebraica* del operador h si existe.

Definición. Un operador diferencial lineal con coeficientes polinomiales se denomina *algebraico*.

Para encontrar estas variables suponemos que respetan las mismas simetrías que el hamiltoniano. En particular esto implica que sean invariantes bajo el grupo de Coxeter W . Luego, es natural tomar como nuevas variables los invariantes polinomiales de Coxeter (A.7). Ellos pueden ser obtenidos al promediar un monomio sobre una *órbita* del grupo. Denotando por G el grupo de Coxeter que actúa en \mathbf{R}^N , la órbita de un punto $x \in \mathbf{R}^N$ es el conjunto

$$\Omega(x) = \{g \cdot x \in \mathbf{R}^N \mid g \in G\}. \quad (7)$$

Es importante mencionar que para cualquier sistema de raíces existe un invariante de segundo grado $t_2^{(\Omega)}(x)$ que no depende de la órbita elegida¹. Más adelante haremos uso de los invariantes como nuevas variables y los llamaremos *variables de órbita*.

Los invariantes de grados fijos están definidos hasta una combinación no-lineal de los invariantes de menor grado. Esta ambigüedad juega un papel importante en la obtención de las formas algebraicas de los hamiltonianos, porque estas formas dependen de la elección de las variables. Una combinación especial de las variables resulta en la forma que corresponde a la preservación del flag mínimo de subespacios invariantes (véase más adelante).

Introducimos ahora una noción de *solubilidad exacta*. Supongamos que el operador h posee una infinidad de espacios invariantes de dimensión finita \mathcal{P}_n , $n = 0, 1, \dots$, los cuales pueden ser ordenados

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n \subset \dots$$

de manera que formen un *flag* infinito (o filtración) \mathcal{P} . Por tanto uno puede decir que el operador h preserva el flag \mathcal{P} .

Definición.

- Un operador h que preserve un flag infinito de espacios de dimensión finita explícitamente definidos \mathcal{P} se denomina un *operador exactamente*

¹Resulta claro que dicho invariante existe, puesto que los elementos del grupo de Coxeter corresponden a transformaciones ortogonales. Un invariante polinomial adecuado es por tanto el cuadrado de la longitud del vector de coordenadas en el espacio de raíces, $t_2^{(\Omega)} = x^2$.

soluble con flag \mathcal{P} . Suponemos que el flag \mathcal{P} es denso: entre dos espacios subsecuentes no existe un espacio de dimensión intermedia que pueda pertenecer al flag.

- Si un operador dado h preserva varios flags y entre ellos hay un flag para el cual $\dim \mathcal{P}_n$ es *maximal* para cualquier n dado, decimos que dicho flag es *mínimo*.

Consideraremos ahora ciertos espacios lineales de polinomios en varias variables.

Definición. Considérese el espacio lineal triangular de polinomios en k variables

$$\mathcal{P}_n^{(f_1, \dots, f_k)} = \langle s_1^{p_1} s_2^{p_2} \cdots s_k^{p_k} \mid 0 \leq f_1 p_1 + f_2 p_2 + \cdots + f_k p_k \leq n \rangle, \quad (8)$$

donde las f son números enteros positivos y n es un entero. El *vector característico* es un vector cuyas componentes son iguales a los coeficientes f_i enfrente de los p_i :

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k). \quad (9)$$

El vector característico está definido hasta un factor multiplicativo entero que escogemos como el mínimo. Tomando una secuencia de los espacios caracterizados por números enteros crecientes n obtenemos un flag que tiene a $\mathcal{P}_n^{(f_1, \dots, f_k)}$ como su espacio lineal *generador*. En los ejemplos n toma valores enteros consecutivos, $n = 0, 1, 2, \dots$. Representamos a este flag como $\mathcal{P}^{(f_1, \dots, f_k)}$.

En general la meta es encontrar el flag mínimo. Una estrategia general para este estudio es la siguiente: (i) como primer paso consideramos una rotación de norma del hamiltoniano con la función del estado base como factor, (ii) escogemos una órbita dada para construir un conjunto particular de variables que de lugar a una forma algebraica para el hamiltoniano transformado, (iii) explotando la ambigüedad en la definición de los invariantes de grado fijo buscamos variables que preserven un flag mínimo.

Capítulo 1

El hamiltoniano H_3 (solubilidad e integrabilidad)

1.1. El hamiltoniano

Consideramos un sistema físico descrito por un hamiltoniano racional asociado con el sistema de raíces H_3 (denotado por \mathcal{R}_3), de manera análoga con los sistemas cristalográficos. Sustituyendo en (1) el conjunto de raíces positivas \mathcal{R}_3^+ de H_3 (véase la Tabla (A.3)) el hamiltoniano toma la forma,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 + \frac{g}{x_k^2} \right] + \sum_{\{i,j,k\}} \sum_{\substack{\mu_l=0,1 \\ \text{for } l=1,2}} \frac{2g}{[x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k]^2}, \quad (1.1)$$

donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ y sus permutaciones pares. Denotamos por

$$\varphi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a la *razón áurea* y su conjugado algebraico. La constante de acoplamiento puede escribirse como

$$g = \nu(\nu - 1) > -\frac{1}{4}. \quad (1.2)$$

Esta condición evita el colapso. Además, asegura la hermiticidad del hamiltoniano (1.1) con $\omega > 0$.

El hamiltoniano (y por tanto el sistema físico) es simétrico con respecto a las transformaciones del grupo de Coxeter H_3

$$x \longrightarrow g x , \quad g \in H_3 . \quad (1.3)$$

Esto es equivalente a la relación

$$\mathcal{U}^{-1}(\alpha) \mathcal{H} \mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{H} . \quad (1.4)$$

donde $\mathcal{U}(\alpha)$ es el operador de reflexiones y $\alpha \in \mathcal{R}_3$ (véase el Apéndice A).

El hamiltoniano es también simétrico ante el intercambio

$$\begin{aligned} x_i &\longleftrightarrow x_j \\ \varphi_+ &\longleftrightarrow \varphi_- \end{aligned} \quad (1.5)$$

con $i, j = 1, 2, 3$ y $i \neq j$.

La expresión explícita para el hamiltoniano (1.1) en las coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2}\Delta^{(3)} + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}\nu(\nu-1) \left[\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \right] \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_2 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_2 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_2 - \varphi_-x_3)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_2 - \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_3 + \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_3 + \varphi_-x_1)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_3 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_3 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_1 + \varphi_-x_2)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_1 + \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_1 - \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_1 - \varphi_-x_2)^2} . \end{aligned}$$

donde $\Delta^{(3)}$ es el laplaciano en tres dimensiones.

Escogemos el espacio de configuración para \mathcal{H} como el dominio de \mathbf{R}^3 cuyos vectores tienen etiquetas de Dynkin positivas (véase el apéndice A). En coordenadas esto corresponde a la condición

$$(\alpha \cdot x) > 0 \quad (1.6)$$

para $\alpha \in \mathcal{R}_3^+$. Es el análogo de la cámara principal de Weyl en el caso de sistemas de raíces cristalográficos. Resulta ser el dominio en \mathbf{R}^3 limitado por los tres planos

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_3 + \varphi_+ x_1 + \varphi_- x_2 = 0 \quad (1.7)$$

con x_1, x_2, x_3 no negativos. Coincide con el dominio fundamental definido por las raíces simples de H_3 (A.10).

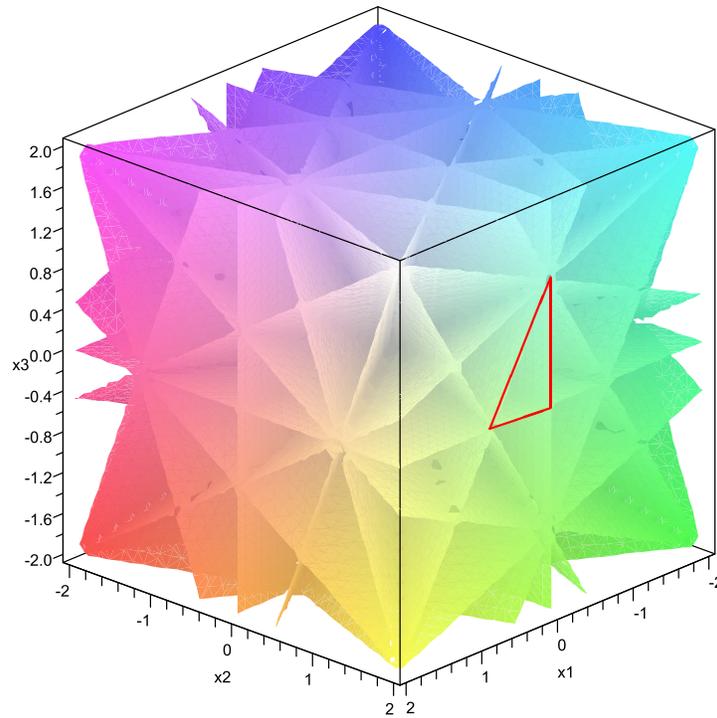


Figura 1.1: Espacio de configuración: Los planos mostrados están definidos por las ecuaciones $(\alpha \cdot x) = 0$ con $\alpha \in \mathcal{R}_3^+$. Ellos confinan los 120 dominios fundamentales del grupo H_3 (compárese con la figura A.4). El dominio tridimensional resaltado en rojo es el espacio de configuración (1.7).

1.2. Separación de variables e integral de movimiento

El hamiltoniano (1.1) puede ser escrito en coordenadas esféricas. Toma la forma

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Delta^{(3)} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{W(\theta, \phi)}{r^2} . \quad (1.8)$$

donde r , θ y ϕ denotan la distancia radial, el ángulo polar y el ángulo azimutal, respectivamente.

Denotando $c_\vartheta \equiv \cos \vartheta$, $s_\vartheta \equiv \sin \vartheta$, la función $W(\theta, \phi)$ puede ser escrita como

$$\begin{aligned} W(\theta, \phi) = & \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi + \varphi_+ s_\theta s_\phi + \varphi_- c_\theta)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi - \varphi_+ s_\theta s_\phi + \varphi_- c_\theta)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi + \varphi_+ s_\theta s_\phi - \varphi_- c_\theta)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi - \varphi_+ s_\theta s_\phi - \varphi_- c_\theta)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi + \varphi_+ c_\theta + \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi - \varphi_+ c_\theta + \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi + \varphi_+ c_\theta - \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi - \varphi_+ c_\theta - \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta + \varphi_+ s_\theta c_\phi + \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta - \varphi_+ s_\theta c_\phi + \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta + \varphi_+ s_\theta c_\phi - \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta - \varphi_+ s_\theta c_\phi - \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} \\ & + \frac{\nu(\nu-1)}{2s_\theta^2 c_\phi^2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2s_\theta^2 s_\phi^2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2c_\phi^2} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

La ecuación de Schroedinger admite una separación de variables: cualquier función propia puede escribirse como el producto

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Q(\theta, \phi) , \quad (1.10)$$

donde las funciones R y Q satisfacen las ecuaciones

$$\left[-\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{\gamma}{r^2} \right] R(r) = ER(r) , \quad (1.11)$$

y

$$\mathcal{F} Q(\theta, \phi) = \gamma Q(\theta, \phi) , \quad (1.12)$$

siendo γ la constante de separación. El operador \mathcal{F} tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 + W(\theta, \phi) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + W(\theta, \phi) , \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde \mathcal{L} es el operador de momento angular. Puede verificarse inmediatamente que \mathcal{H} y \mathcal{F} conmutan:

$$[\mathcal{H}, \mathcal{F}] = 0 . \quad (1.14)$$

Por tanto, \mathcal{F} es una integral de movimiento. Tiene funciones propias en común con \mathcal{H} . Este operador es simétrico con respecto a transformaciones en el grupo H_3 (véase el Apéndice A): para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}_3$,

$$\mathcal{U}^{-1}(\alpha) \mathcal{F} \mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{F} . \quad (1.15)$$

1.3. Estado base

Puede probarse por sustitución directa que la función del estado base tiene la forma

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= \left(\prod_{\alpha \in R_+} (\alpha \cdot x)^\nu \right) \exp\left(-\frac{\omega}{2} t_2\right) \\ &= \Delta_1^\nu \Delta_2^\nu \exp\left(-\frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^3 x_k^2\right) , \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde t_2 es el invariante de grado dos (véase más adelante) y los factores pre-exponenciales son

$$\Delta_1 = \prod_{k=1}^3 x_k , \quad (1.17)$$

$$\Delta_2 = \prod_{\{i,j,k\}} \prod_{\mu' s=0,1} [x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k] . \quad (1.18)$$

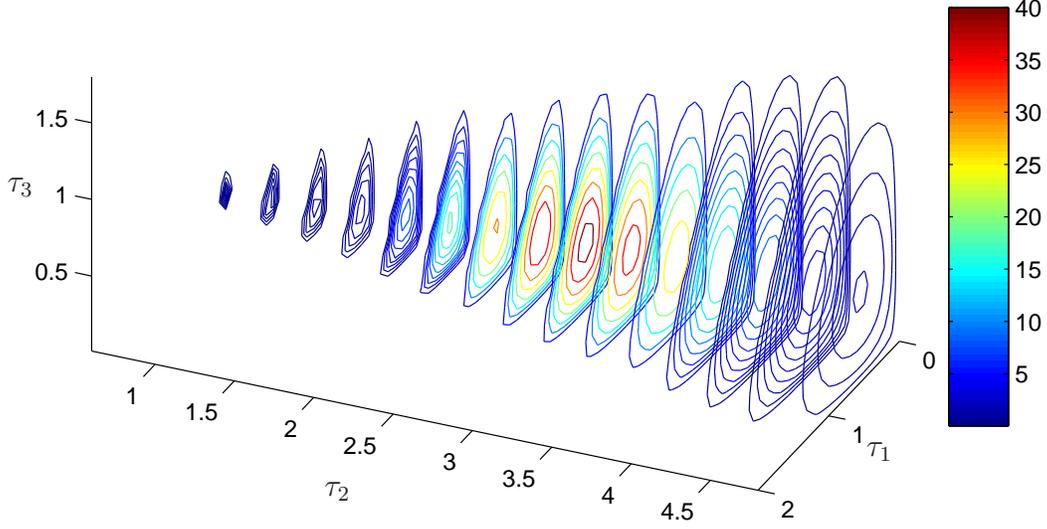


Figura 1.2: Curvas de nivel para la función de estado base no normalizada (1.16) con $\omega = 1$, $\nu = 3/5$. La función se anula en los planos (1.7) y alcanza su máximo a una distancia radial $r = 3$. Las coordenadas del máximo son aproximadamente $x_1 = 0.387$, $x_2 = 2.941$, $x_3 = 0.446$.

Esta autofunción es no nula (no tiene nodos) en el espacio de configuración (1.7). Es simétrica ante el intercambio (1.5) y es invariante hasta una fase con respecto a la acción del grupo H_3 (ver (1.4)):

$$\mathcal{U}(\alpha) \Psi_0(x) = (-1)^\nu \Psi_0(x) . \quad (1.19)$$

La correspondiente energía del estado base es

$$E_0 = \frac{3}{2} \omega (1 + 10\nu) . \quad (1.20)$$

Recordemos que el parámetro ν está relacionado con la constante de acoplamiento como $g = \nu(\nu - 1)$, o equivalentemente

$$\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4g} . \quad (1.21)$$

La condición $g > -1/4$ asegura que ν es real. Sin embargo, debemos fijar el valor del signo en la ecuación (1.21). Podemos hacerlo recordando que

cualquier autofunción Ψ_k del operador hamiltoniano (1.1) debe satisfacer las condiciones de frontera (2)

$$\Psi_k(x) = 0 \quad \text{en} \quad (\alpha \cdot x) = 0, \quad \int |\Psi_k|^2 d^N x < \infty.$$

Por tanto debemos tomar el signo positivo en (1.21), ya que para $\nu < 0$ la función del estado base tiende a infinito en la frontera del espacio de configuración.

La función Ψ_0 es también la menor autofunción del operador \mathcal{F} con autovalor

$$\gamma_0 = \frac{15}{2}\nu(1 + 15\nu). \quad (1.22)$$

1.4. Variables invariantes

El objetivo del estudio es descubrir un cambio de variables que lleve a una forma algebraica para el operador hamiltoniano, si existe. Para obtener estas variables suponemos que respetan las mismas simetrías que el hamiltoniano. Por tanto, deben ser invariantes del grupo de Coxeter H_3 . Las escogemos como polinomios que surgen tras promediar un monomio sobre una órbita del grupo H_3 . Consideramos como órbitas apropiadas a las órbitas generadas por los pesos fundamentales $\{\omega\}$ (véase A.16). Tales órbitas están caracterizadas por una longitud (el número de elementos que pertenece a la órbita):

peso fundamental	longitud de la órbita
$\omega_1 = (1, \varphi_+^2, 0)$	20
$\omega_2 = (0, 2\varphi_+, 0)$	30
$\omega_3 = (0, \varphi_+, 1)$	12

Podemos escoger cualquier órbita, pero por razones de simplicidad nuestra elección es la órbita más corta $\Omega(\omega_3)$. Luego, las variables invariantes quedan definidas como

$$t_a^{(\Omega)}(x) = \sum_{\omega \in \Omega(\omega_3)} (\omega \cdot x)^a \quad (1.23)$$

donde $a = 2, 6, 10$ son los grados del grupo H_3 . Por tanto, los invariantes son polinomios de grados 2, 6 y 10,

$$\begin{aligned}
t_2^{(\Omega)} &= (10 + 2\sqrt{5})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) , \\
t_6^{(\Omega)} &= (40 + 16\sqrt{5}) \left[(x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) + \frac{3}{2}(2 + \varphi_-)(x_1^2x_2^4 + x_2^2x_3^4 + x_3^2x_1^4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}(2 + \varphi_+)(x_1^2x_3^4 + x_2^2x_1^4 + x_3^2x_2^4) \right] , \\
t_{10}^{(\Omega)} &= (250 + 110\sqrt{5}) \left[(x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10}) + \frac{9}{5}(3 + 4\varphi_+)(x_1^8x_2^2 + x_2^8x_3^2 + x_3^8x_1^2) \right. \\
&\quad + \frac{9}{5}(3 + 4\varphi_-)(x_1^8x_3^2 + x_2^8x_1^2 + x_3^8x_2^2) + \frac{42}{5}(2 + \varphi_+)(x_1^6x_2^4 + x_2^6x_3^4 + x_3^6x_1^4) \\
&\quad \left. + \frac{42}{5}(2 + \varphi_-)(x_1^6x_3^4 + x_2^6x_1^4 + x_3^6x_2^4) \right] .
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Las funciones $t_a^{(\Omega)}(x)$ son simétricas ante el intercambio (1.5). Por construcción, son invariantes respecto a la acción del grupo H_3 . Es conveniente normalizarlas:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{1}{10 + 2\sqrt{5}} t_2^{(\Omega)} , \\
t_2 &= \frac{1}{40 + 16\sqrt{5}} t_6^{(\Omega)} , \\
t_3 &= \frac{1}{250 + 110\sqrt{5}} t_{10}^{(\Omega)} ,
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Esto permite remover los coeficientes irracionales en (1.24). En adelante llamaremos a estas variables *variables de órbita*.

Capítulo 2

Representación algebraica

2.1. El hamiltoniano H_3 en forma algebraica

Realicemos una rotación de norma del hamiltoniano (1.1) tomando a la función del estado base Ψ_0 como factor,

$$h = -2(\Psi_0(x))^{-1}(\mathcal{H} - E_0)\Psi_0(x), \quad (2.1)$$

donde E_0 es la energía del estado base. Surge un nuevo problema espectral

$$h\phi(x) = -2\epsilon\phi(x), \quad (2.2)$$

donde el nuevo parámetro espectral es $\epsilon = E - E_0$; por tanto, el menor autovvalor es $\epsilon = 0$.

Puede probarse por un cálculo directo que el hamiltoniano h , escrito en términos de las variables de órbita t_i (1.25) adquiere la forma algebraica

$$h = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial}{\partial t_j}. \quad (2.3)$$

Definiendo

$$\Psi_0(x) = e^{-\phi_0(x)},$$

las funciones coeficientes que aparecen en (2.3) son

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial t_i}{\partial x_k} \frac{\partial t_j}{\partial x_k}, \quad B_j = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 t_j}{\partial x_k^2} - 2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \frac{\partial t_j}{\partial x_k} \right),$$

donde $A_{ji} = A_{ij}$. Estas funciones coeficientes son:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 4 t_1, \\
A_{12} &= 12 t_2, \\
A_{13} &= 20 t_3, \\
A_{22} &= \frac{87}{2} t_1^5 - 30 t_1^2 t_2 + \frac{45}{2} t_3, \\
A_{23} &= \frac{1328}{3} t_1^7 - \frac{2020}{3} t_1^4 t_2 + \frac{368}{3} t_1 t_2^2 + 168 t_1^2 t_3, \\
A_{33} &= \frac{81412}{45} t_1^9 - \frac{31936}{15} t_1^6 t_2 - \frac{4544}{15} t_1^3 t_2^2 + \frac{128}{45} t_2^3 + 336 t_1^4 t_3 \\
&\quad + 384 t_1 t_2 t_3, \\
B_1 &= 6 + 60\nu - 4\omega t_1, \\
B_2 &= 45 t_1^2 + 186\nu t_1^2 - 12\omega t_2, \\
B_3 &= -210 t_1^4 + 336 t_1 t_2 - \frac{764\nu}{3} t_1^4 + \frac{1760\nu}{3} t_1 t_2 - 20\omega t_3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

No hay números irracionales en estos coeficientes. Un análisis simple demuestra que el hamiltoniano (2.3) tiene una infinidad de subespacios polinomiales invariantes de dimensión finita.

$$\mathcal{P}_n^{(1,3,5)} = \langle t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 3p_2 + 5p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

donde los p_i 's son enteros positivos. Forman un flag con vector característico

$$\boldsymbol{\alpha}_t = (1, 3, 5). \tag{2.6}$$

Las primeras autofunciones de h (en orden de energía creciente) escritas en las variables de órbita t 's (1.25) pueden encontrarse de manera sencilla:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= t_1 - \frac{3(1 + 10\nu)}{2\omega}, & \epsilon_1 &= 2\omega, \\
\phi_2 &= t_2 - \frac{15 + 62\nu}{2(7 + 30\nu)} t_1^3, & \epsilon_2 &= 6\omega, \\
\phi_3 &= t_3 - \frac{4(63 + 110\nu)}{3(17 + 30\nu)} t_2 t_1^2 + \frac{2205 + 9856\nu + 10476\nu^2}{3(17 + 30\nu)(11 + 30\nu)} t_1^5, & \epsilon_3 &= 10\omega.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

¿Existen otras formas algebraicas de \mathcal{H} (1.1)? Recordemos que los invariantes polinomiales están definidos de manera ambigua, hasta una combinación no-lineal de invariantes de menor grado. Así, consideremos la siguiente transformación triparamétrica de las coordenadas t , la cual preserva los grados de

los invariantes en coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}\tau_1 &= t_1, \\ \tau_2 &= t_2 + a_1 t_1^3, \\ \tau_3 &= t_3 + a_2 t_1^2 t_2 + a_3 t_1^5.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Para cualquier valor de $a_{1,2,3}$, existe una forma algebraica para el hamiltoniano. Por ejemplo, puede tomarse como τ 's las autofunciones (2.7) con $\nu = 0$.

Diferentes valores de los parámetros en (2.8) dan lugar a diferentes flags preservados por el hamiltoniano. Es posible probar que el flag $\mathcal{P}^{(1,3,5)}$ no es mínimo. El flag mínimo es generado por los subespacios

$$\mathcal{P}_n^{(1,2,3)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

y tiene vector característico

$$\boldsymbol{\alpha}_\tau = (1, 2, 3). \tag{2.10}$$

Las variables que dan lugar a este flag se obtienen de la transformación (2.8) con

$$a_1 = -\frac{13}{10}, \quad a_2 = -\frac{76}{15}, \quad a_3 = \frac{1531}{375}. \tag{2.11}$$

En forma explícita estas variables son

$$\begin{aligned}\tau_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \tau_2 &= -\frac{3}{10}(x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) + \frac{3}{10}(2 - 5\varphi_+)(x_1^2 x_2^4 + x_2^2 x_3^4 + x_3^2 x_1^4) \\ &\quad + \frac{3}{10}(2 - 5\varphi_-)(x_1^2 x_3^4 + x_2^2 x_1^4 + x_3^2 x_2^4) - \frac{39}{5}(x_1^2 x_2^2 x_3^2), \\ \tau_3 &= \frac{2}{125}(x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10}) + \frac{2}{25}(1 + 5\varphi_-)(x_1^8 x_2^2 + x_2^8 x_3^2 + x_3^8 x_1^2) \\ &\quad + \frac{2}{25}(1 + 5\varphi_+)(x_1^8 x_3^2 + x_2^8 x_1^2 + x_3^8 x_2^2) \\ &\quad + \frac{4}{25}(1 - 5\varphi_-)(x_1^6 x_2^4 + x_2^6 x_3^4 + x_3^6 x_1^4) \\ &\quad + \frac{4}{25}(1 - 5\varphi_+)(x_1^6 x_3^4 + x_2^6 x_1^4 + x_3^6 x_2^4) \\ &\quad - \frac{112}{25}(x_1^6 x_2^2 x_3^2 + x_2^6 x_3^2 x_1^2 + x_3^6 x_1^2 x_2^2) \\ &\quad + \frac{212}{25}(x_1^2 x_2^4 x_3^4 + x_2^2 x_3^4 x_1^4 + x_3^2 x_1^4 x_2^4).\end{aligned}\tag{2.12}$$

El hamiltoniano toma ahora la forma

$$h_{H_3} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial}{\partial \tau_j} \quad (2.13)$$

con coeficientes sorprendentemente sencillos:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4\tau_1, \\ A_{12} &= 12\tau_2, \\ A_{13} &= 20\tau_3, \\ A_{22} &= -\frac{48}{5}\tau_1^2\tau_2 + \frac{45}{2}\tau_3, \\ A_{23} &= \frac{16}{15}\tau_1\tau_2^2 - 24\tau_1^2\tau_3, \\ A_{33} &= -\frac{64}{3}\tau_1\tau_2\tau_3 + \frac{128}{45}\tau_2^3, \\ B_1 &= 6 + 60\nu - 4\omega\tau_1, \\ B_2 &= -\frac{48}{5}(1 + 5\nu)\tau_1^2 - 12\omega\tau_2, \\ B_3 &= -\frac{64}{15}(2 + 5\nu)\tau_1\tau_2 - 20\omega\tau_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es necesario remarcar que la matriz A_{ij} , tomada como una métrica con índices superiores, da lugar a un tensor de Riemann nulo y, por tanto, corresponde a un espacio plano.

El operador h con coeficientes (2.14) es triangular con respecto a la acción sobre monomios $\rho = \tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}$. Se puede hallar un ordenamiento $\{\rho_1, \rho_2, \dots\}$ de la base de monomios tal que

$$h \rho_k = \lambda \rho_k + \sum_{j < k} \alpha_j \rho_j. \quad (2.15)$$

Si un operador algebraico T es tal que

$$T(\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}) = \tau_1^{n_1+a_1}\tau_2^{n_2+a_2}\tau_3^{n_3+a_3}$$

definimos su *grado* como

$$\deg(T) \equiv \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

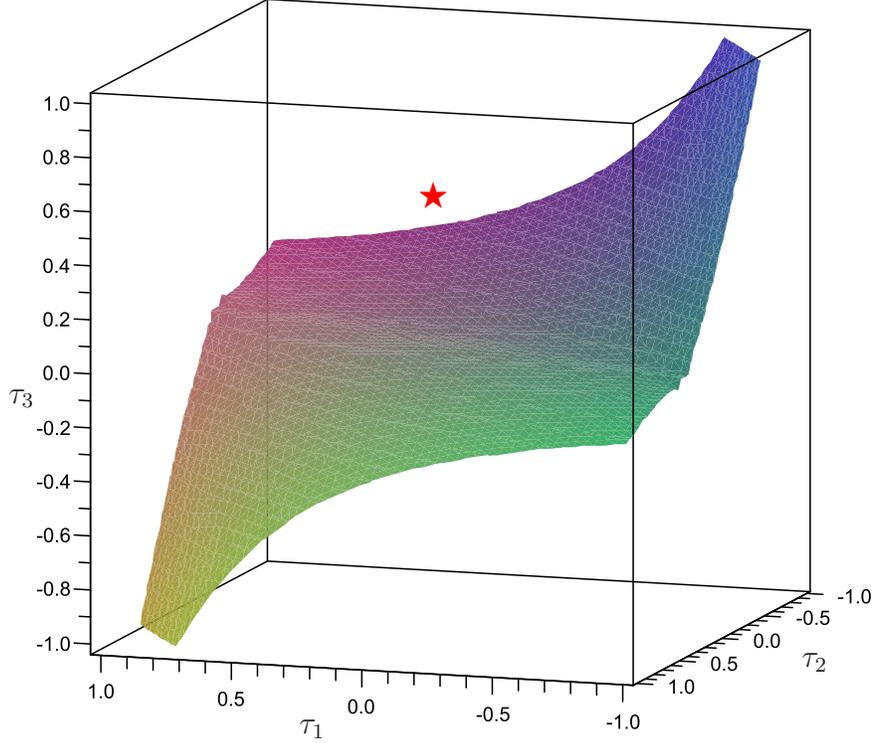


Figura 2.1: Frontera del espacio de configuración $\kappa(\tau)$ (2.16). El espacio de configuración (1.7) se mapea en el dominio marcada por la estrella.

Resulta así posible mostrar que un operador algebraico T está en forma triangular si existe un vector β tal que el producto escalar $(\beta \cdot \text{deg}(T)) > 0$. Para el hamiltoniano h (2.13) dicho vector puede tomarse como

$$\beta = (1, 3, 5) .$$

La frontera del espacio de configuración en las variables τ está determinada por los ceros de la función de onda del estado base (1.16). En coordenadas cartesianas es la superficie algebraica $\prod_{\alpha \in \mathcal{R}_3^+} (\alpha \cdot x)^2 = 0$ de grado 30 (el conjunto de planos en la figura 1.1). En coordenadas τ es la superficie algebraica de grado 7 (Fig. 2.1):

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) \equiv & -12960\tau_1^5\tau_3^2 + 5760\tau_1^4\tau_2^2\tau_3 - 640\tau_1^3\tau_2^4 - 54000\tau_1^2\tau_2\tau_3^2 \\ & + 21600\tau_1\tau_2^3\tau_3 - 2304\tau_2^5 - 50625\tau_3^3 = 0 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

El cuadrado del jacobiano del cambio de variables de x a τ puede calcularse explícitamente. Resulta ser proporcional al factor pre-exponencial de la función de onda del estado base (1.16) con $\nu = 2$. Por tanto, se anula solamente en la frontera del espacio de configuración:

$$J^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}^2 = \frac{9}{5} \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_3^+} (\alpha \cdot x)^2 = \frac{8}{45} \kappa(\tau). \quad (2.17)$$

Aquí $\alpha \in \mathcal{R}_3^+$ son las raíces positivas de H_3 (ver Tabla A.3).

2.2. Integral de movimiento en forma algebraica

Consideremos la rotación de norma del operador \mathcal{F} (1.13):

$$f = (\Psi_0(x))^{-1} (\mathcal{F} - \gamma_0) \Psi_0(x), \quad (2.18)$$

donde γ_0 es el autovalor más bajo de \mathcal{F} (1.22). Mostraremos que el operador

$$f = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{j=1}^3 G_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}. \quad (2.19)$$

tiene una forma algebraica en términos de las variables τ (2.12). Aquí

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 (x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial \tau_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tau_j}{\partial x_l},$$

$$G_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 (x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial^2 \tau_j}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^3 \left(x_k + r^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} - x_k \sum_{l=1}^3 x_l \frac{\partial \phi_0}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k}.$$

La integral \mathcal{F} depende sólo de las coordenadas esféricas θ y ϕ . Luego, en el operador f (2.19) no deben aparecer derivadas con respecto a τ_1 (recordemos

que $\tau_1 = r^2$ (2.12)). Un cálculo inmediato confirma que $F_{1j} = 0$ y $G_1 = 0$. Los restantes coeficientes son

$$\begin{aligned}
F_{22} &= \frac{24}{5}\tau_1^3\tau_2 - \frac{45}{4}\tau_1\tau_3 + 18\tau_2^2, \\
F_{23} &= -\frac{8}{15}\tau_1^2\tau_2^2 + 12\tau_1^3\tau_3 + 30\tau_2\tau_3, \\
F_{33} &= -\frac{64}{45}\tau_1\tau_2^3 + \frac{32}{3}\tau_1^2\tau_2\tau_3 + 50\tau_3^2, \\
G_2 &= \frac{24}{5}(1 + 5\nu)\tau_1^3 + 3(7 + 30\nu)\tau_2, \\
G_3 &= \frac{32}{15}(2 + 5\nu)\tau_1^2\tau_2 + 5(11 + 30\nu)\tau_3.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Puede probarse que el operador f posee una infinidad de subespacios invariantes en polinomios

$$\mathcal{P}_n^{(1,3,5)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 3p_2 + 5p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.21}$$

los cuales forman un flag con vector característico $(1, 3, 5)$, igual al vector característico en (2.6).

El operador h_{H_3} con coeficientes (2.14) conmuta con el operador f (2.19). Sin embargo, los flag mínimos que ambos preservan no coinciden. Existe una relación entre esta diferencia y la degeneración del hamiltoniano. Puede probarse que h_{H_3} preserva ambos flags con vectores característicos $(1, 2, 3)$ y $(1, 3, 5)$. Por tanto, las funciones propias comunes a ambos operadores son elementos del flag de espacios $\mathcal{P}^{(1,3,5)}$.

Por ejemplo, las autofunciones $\phi_{2,1}$ y $\phi_{3,0}$ son degeneradas con respecto a \mathcal{H} , y provienen de valores diferentes de n ($n = 2$ y 3 ; para las definiciones y la notación véase el siguiente capítulo). No son funciones propias de \mathcal{F} , pero las combinaciones lineales $\phi_{3,0}$ y $\frac{5(7+30\nu)}{8(1+5\nu)}\phi_{2,1} + \phi_{3,0}$ son autofunciones (no degeneradas) de \mathcal{F} . Estas combinaciones lineales pertenecen a espacios de polinomios con vector característico $(1,2,3)$ y $n \geq 3$, pero también a espacios con vector $(1,3,5)$ y $n \geq 3$. Con respecto a este último flag, ambas provienen del mismo valor de n ($n = 3$). Así, parte de la degeneración es removida si las funciones propias de h_{H_3} se toman como elementos del flag $\mathcal{P}^{(1,3,5)}$ (y como autofunciones simultáneas de f) y no como elementos del flag mínimo $\mathcal{P}^{(1,2,3)}$.

Capítulo 3

Espectro

3.1. Autovalores

El operador h_{H_3} es triangular con respecto a la acción sobre monomios $\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}$. Por tanto es posible encontrar el espectro de (2.13), $h_{H_3}\phi = -2\epsilon\phi$ explícitamente:

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = 2\omega(n_1 + 3n_2 + 5n_3), \quad (3.1)$$

donde los n_i son enteros no negativos. La degeneración $m(k)$ del espectro ϵ es igual al número de soluciones de la ecuación diofantina

$$n_1 + 3n_2 + 5n_3 = k$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, en enteros no negativos. La función generadora para $m(k)$ está dada por la serie de Poincaré (ver [1])

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} m(k)t^k = (1-t)^{-1}(1-t^3)^{-1}(1-t^5)^{-1} \\ &= 1 + t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 3t^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Puede encontrarse una expresión cerrada:

$$m(k) = \frac{1}{15} \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j \frac{\sin(j-i)\pi}{\sin(j-i)\pi/3} \right) \frac{\sin(k-j)\pi}{\sin(k-j)\pi/5}. \quad (3.3)$$

El espectro ϵ no depende de la constante de acoplamiento g y es equidistante. Es igual al espectro de un oscilador armónico anisotrópico de frecuencias $(2\omega, 6\omega, 10\omega)$ (hasta una diferencia en el autovalor más bajo) y posee la

misma degeneración. En este sentido el potencial racional en el hamiltoniano (1.1) “deforma” el oscilador isotrópico de frecuencia ω presente también en (1.1). Para un oscilador armónico isotrópico de frecuencia ω el espectro viene dado por $\epsilon = \omega(n_1 + n_2 + n_3 + 3/2)$ y la degeneración $m(k)$ está dada por el número de soluciones de la ecuación $n_1 + n_2 + n_3 = k$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. En este caso $m(k) = (k + 1)(k + 2)/2$.

Las energías del hamiltoniano \mathcal{H} (1.1) están dadas por

$$E = E_0 + \epsilon \quad (3.4)$$

siendo E_0 el menor autovalor (1.20) y ϵ el parámetro espectral (3.1).

El espectro de la integral de movimiento \mathcal{F} puede encontrarse de manera cerrada. Este espectro da los posibles valores para la constante de separación γ en (1.12):

$$\gamma_{k_2, k_3} = \gamma_0 + 2(3k_2 + 5k_3)^2 - 30k_2k_3 + (1 + 30\nu)(3k_2 + 5k_3) . \quad (3.5)$$

Aquí $k_2, k_3 = 0, 1, 2, \dots$. Los subíndices reflejan el hecho de que el operador \mathcal{F} no tiene dependencia en las derivadas de τ_1 . La constante γ_0 es el valor propio de la función del estado base (1.22).

3.2. Funciones propias y sus nodos

Como encontramos en el capítulo 2, el hamiltoniano h_{H_3} tiene una infinidad de subespacios invariantes de dimensión finita

$$\mathcal{P}_n^{(1,2,3)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n \rangle , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

que forman el flag infinito $\mathcal{P}^{(1,2,3)}$. Este flag es invariante con respecto a las transformaciones proyectivas pesadas:

$$\begin{aligned} \tau_1 &\rightarrow \tau_1 + a , \\ \tau_2 &\rightarrow \tau_2 + b_1 \tau_1^2 + b_2 \tau_1 + b_3 , \\ \tau_3 &\rightarrow \tau_3 + c_1 \tau_1 \tau_2 + c_2 \tau_1^3 + c_3 \tau_2 + c_4 \tau_1^2 + c_5 \tau_1 + c_6 . \end{aligned} \quad (3.7)$$

siendo a , b 's y c 's constantes.

Marquemos con n las autofunciones $\phi_{n,i}$ de h_{H_3} que sean elementos del espacio invariante $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$. El índice extra numera la autofunción para cada n . Las funciones $\phi_{n,i}$ están relacionadas con las autofunciones del hamiltoniano \mathcal{H} (1.1) como

$$\Psi_{n,i} = \Psi_0 \phi_{n,i} ,$$

Por tanto, cualquier función propia del modelo H_3 tiene una forma factorizada. Las autofunciones ϕ son ortogonales con respecto al factor de peso $|\Psi_0|^2$.

Presentamos $\phi_{n,i}$ explícitamente para $n = 0, 1, 2, 3$:

- **n=0** (una autofunción)

$$\begin{aligned} \phi_{0,0} &= 1 , \\ \epsilon_{0,0} &= 0 . \end{aligned}$$

- **n=1** (una autofunción)

$$\begin{aligned} \phi_{1,0} &= \tau_1 - \frac{3}{2\omega}(1 + 10\nu) , \\ \epsilon_{1,0} &= 2\omega . \end{aligned}$$

- **n=2** (dos autofunciones)

$$\begin{aligned} \phi_{2,0} &= \tau_1^2 - \frac{5}{\omega}(1 + 6\nu)\tau_1 + \frac{15}{4\omega^2}(1 + 6\nu)(1 + 10\nu) , \\ \epsilon_{2,0} &= 4\omega , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,1} &= \tau_2 + \frac{12}{5\omega}(1 + 5\nu)\tau_1^2 - \frac{6}{\omega^2}(1 + 5\nu)(1 + 6\nu)\tau_1 \\ &\quad + \frac{3}{\omega^3}(1 + 5\nu)(1 + 6\nu)(1 + 10\nu) , \\ \epsilon_{2,1} &= 6\omega . \end{aligned}$$

- **n=3** (tres autofunciones)

$$\begin{aligned} \phi_{3,0} &= \tau_1^3 - \frac{3}{2\omega}(7 + 30\nu)\tau_1^2 + \frac{15}{4\omega^2}(1 + 6\nu)(7 + 30\nu)\tau_1 \\ &\quad - \frac{15}{8\omega^3}(1 + 6\nu)(7 + 30\nu)(1 + 10\nu) , \\ \epsilon_{3,0} &= 6\omega , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{3,1} &= \tau_1\tau_2 + \frac{12}{5\omega}(1+5\nu)\tau_1^3 - \frac{15}{2\omega}(1+2\nu)\tau_2 \\
&\quad - \frac{36}{5\omega^2}(1+5\nu)(3+10\nu)\tau_1^2 + \frac{12}{\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)(3+10\nu)\tau_1 \\
&\quad - \frac{9}{2\omega^4}(1+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu), \\
\epsilon_{3,1} &= 8\omega, \\
\phi_{3,2} &= \tau_3 + \frac{16}{15\omega}(2+5\nu)\tau_1\tau_2 + \frac{32}{25\omega^2}(1+5\nu)(2+5\nu)\tau_1^3 \\
&\quad - \frac{4}{\omega^2}(1+2\nu)(2+5\nu)\tau_2 - \frac{64}{25\omega^3}(1+5\nu)(2+5\nu)(3+10\nu)\tau_1^2 \\
&\quad + \frac{16}{5\omega^4}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(3+10\nu)\tau_1 \\
&\quad - \frac{24}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu), \\
\epsilon_{3,2} &= 10\omega.
\end{aligned}$$

Las autofunciones $\phi_{0,0}$, $\phi_{1,0}$ y $\phi_{2,0}$ son no degeneradas, y las funciones $\phi_{2,1}$ y $\phi_{3,0}$ son degeneradas con el mismo autovalor. De acuerdo con (3.2) los autovalores $\epsilon_{3,1}$ y $\epsilon_{3,2}$ tienen una degeneración doble y triple, respectivamente. Sin embargo, sólo hemos mostrado una función propia por cada valor ($\phi_{3,1}$ y $\phi_{3,2}$).

La superficie nodal de la autofunción $\phi_{1,0}$ es el plano

$$\tau_1 - \frac{3}{2\omega}(1+10\nu) = 0$$

en coordenadas τ . En el espacio físico con coordenadas cartesianas es la esfera de radio $[3(1+10\nu)/2\omega]^{1/2}$. Esta superficie divide el espacio de configuración en un dominio compacto y un dominio no compacto (véase Figs. 3.1 (a) y 3.2 (a)).

En el caso de la función $\phi_{2,0}$ las superficies nodales en coordenadas τ son los planos

$$\tau_1 = \frac{5}{2\omega}(1+6\nu) \pm \left[\frac{5}{2\omega^2}(1+6\nu) \right]^{1/2}.$$

En las coordenadas cartesianas corresponden a esferas con radios iguales a $5(1+6\nu)/2\omega \pm [5(1+6\nu)/2\omega^2]^{1/2}$. Estas esferas separan el espacio de configuración en dos dominios compactos y un dominio no compacto (véase Figs.

3.1 (b) y 3.2 (b)).

La superficie nodal dada por $\phi_{2,1} = 0$ es un cilindro parabólico en coordenadas τ para cualquier valor de ν y $\omega > 0$ (véase Fig. 3.1 (c)). En coordenadas cartesianas es una superficie algebraica ilustrada en la Fig. 3.2 (c) para $\omega = 1$ y $\nu = 3/5$. Esta superficie nodal divide el espacio de configuración en dos dominios no compactos.

Para la autofunción $\phi_{3,0}$ las superficies nodales vienen dadas por las raíces de la ecuación cúbica

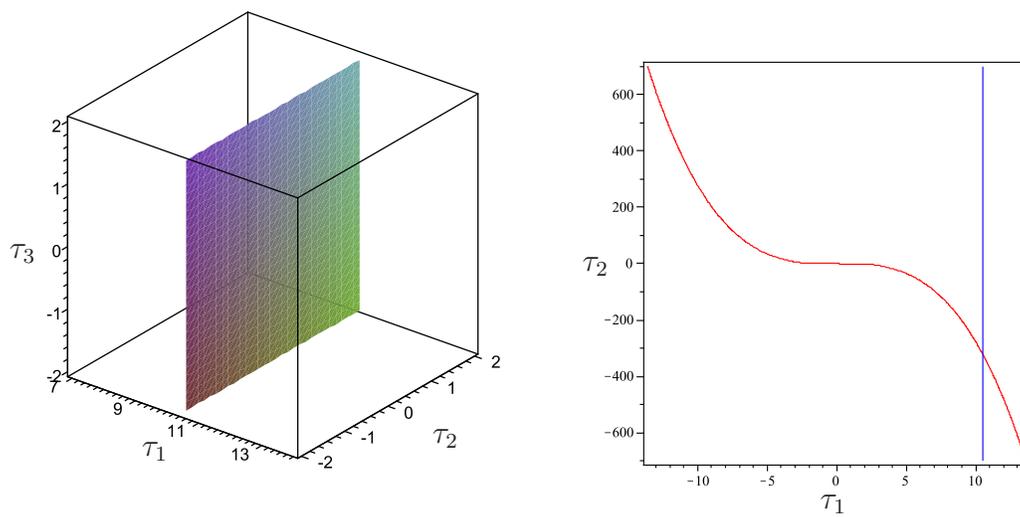
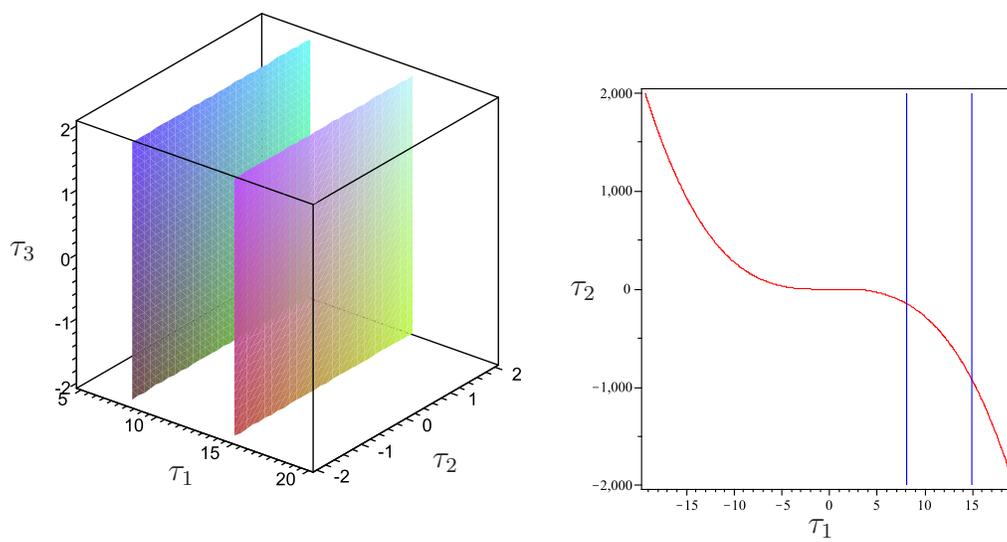
$$\tau_1^3 - \frac{3}{2\omega}(30\nu+7)\tau_1^2 + \frac{15}{4\omega^2}(180\nu^2+72\nu+7)\tau_1 - \frac{15}{8\omega^3}(180\nu^2+72\nu+7)(10\nu+1) = 0$$

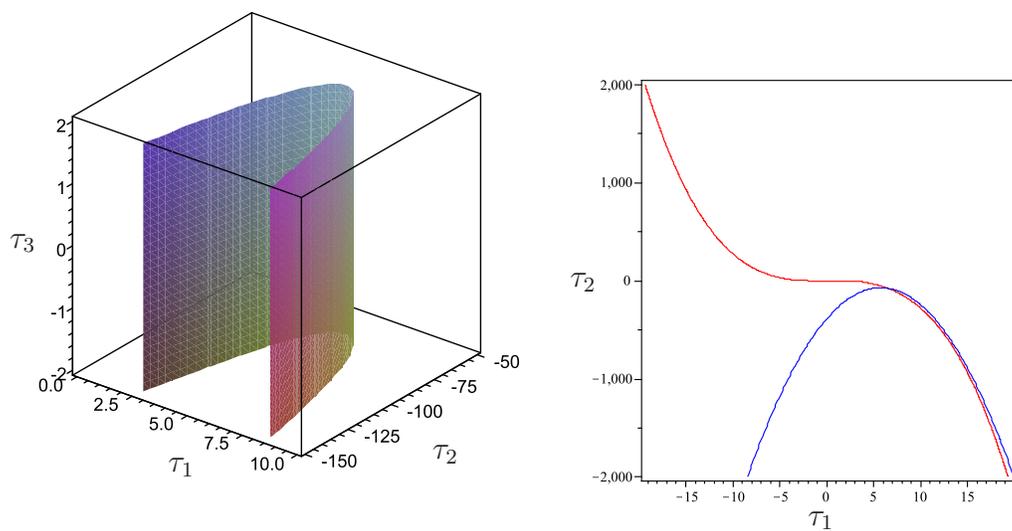
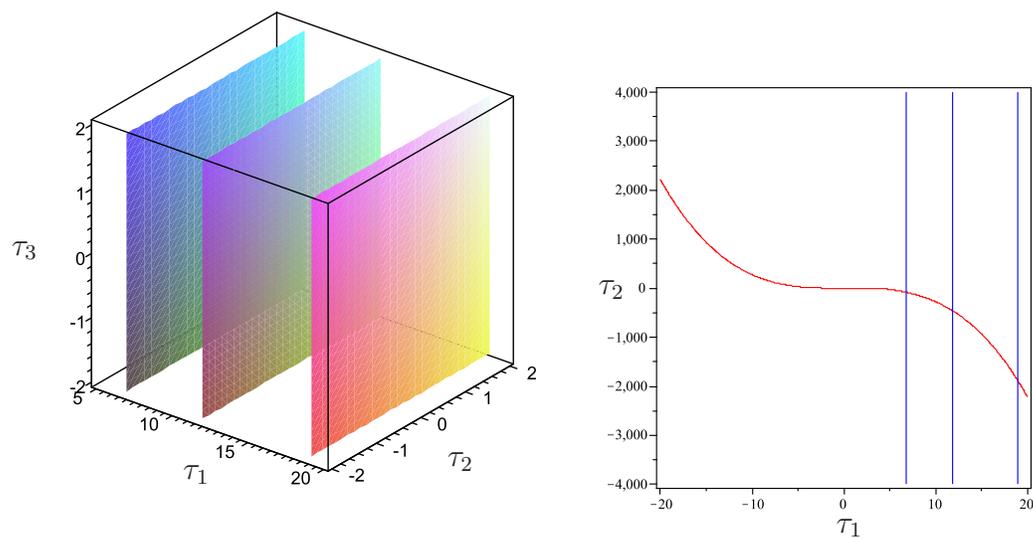
Puede probarse que para $\nu > -1/6$ la ecuación cúbica tiene tres raíces reales. Dado que $\nu > 1/2$ (véase (1.21)), las superficies nodales son tres planos paralelos en las coordenadas τ . En coordenadas x las superficies son tres esferas concéntricas centradas en el origen (véase Figs. 3.1 (d) y 3.2 (d)).

La superficie nodal en coordenadas τ para la función $\phi_{3,1}$ es el cilindro algebraico definido por la ecuación $\phi_{3,1} = 0$ (véase Fig. 3.1 (e)). En coordenadas cartesianas es una superficie algebraica que divide el espacio de configuraciones en un dominio compacto y dos dominios no compactos (véase Fig. 3.2 (e)).

La ecuación $\phi_{3,2} = 0$ define las superficies algebraicas en coordenadas τ y x ilustradas en las Figs. 3.1 (f) y 3.2 (f) para $\omega = 1$ y $\nu = 3/5$.

Las superficies nodales de $\phi_{n,i}$ para $n = 1, 2, 3$ se muestran en las siguientes páginas.

(a) $\phi_{1,0} = 0$ (b) $\phi_{2,0} = 0$ 

(c) $\phi_{2,1} = 0$ (d) $\phi_{3,0} = 0$ 

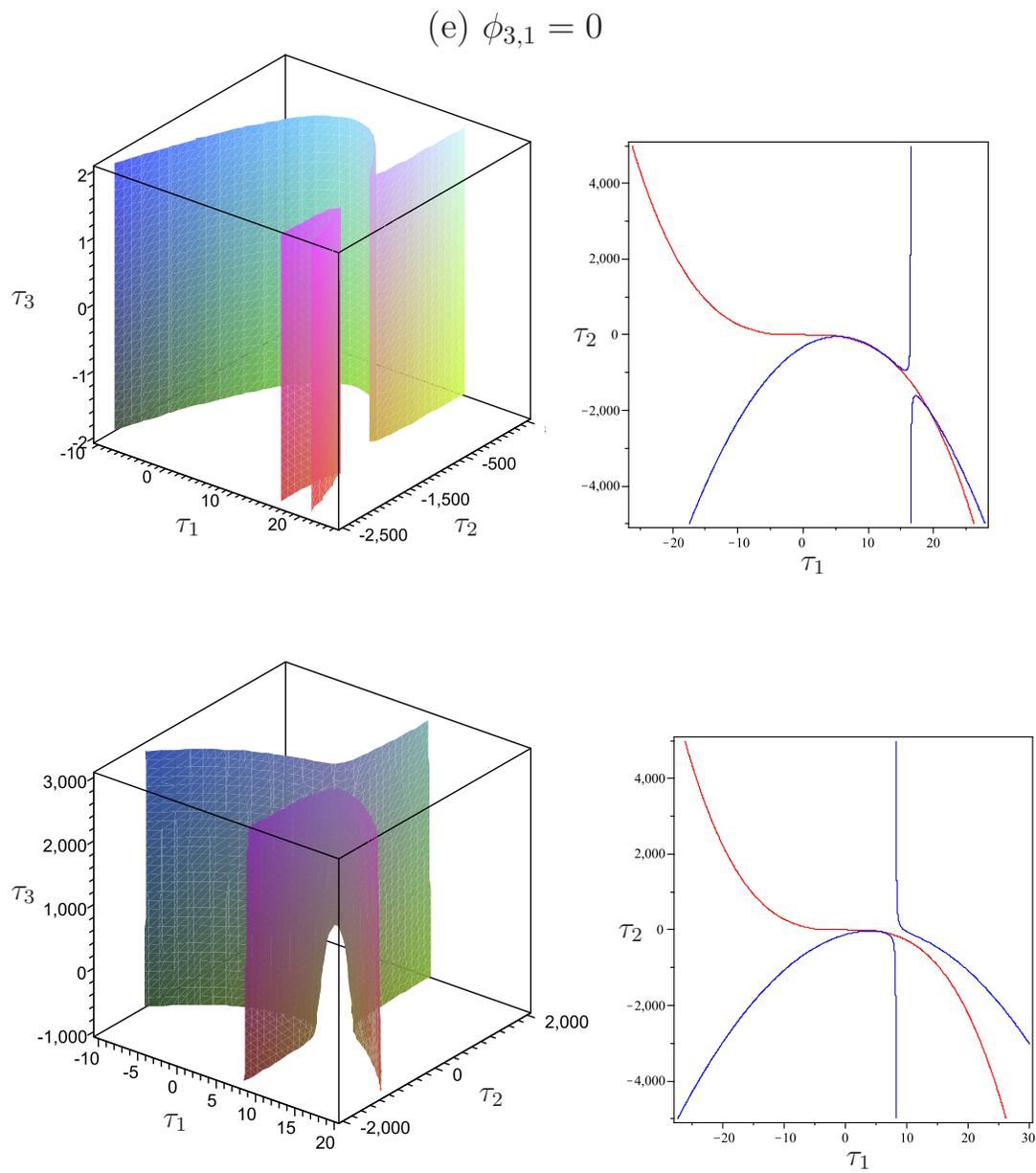
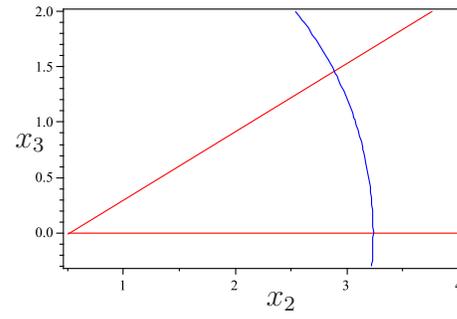
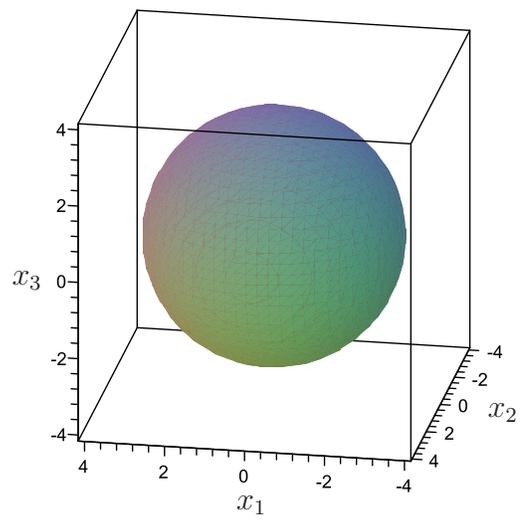
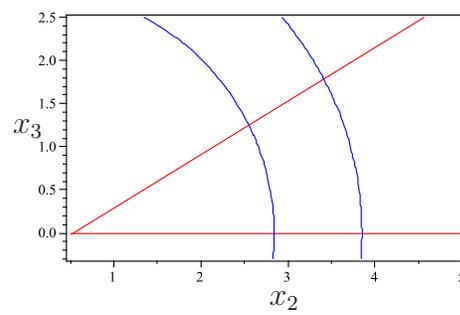
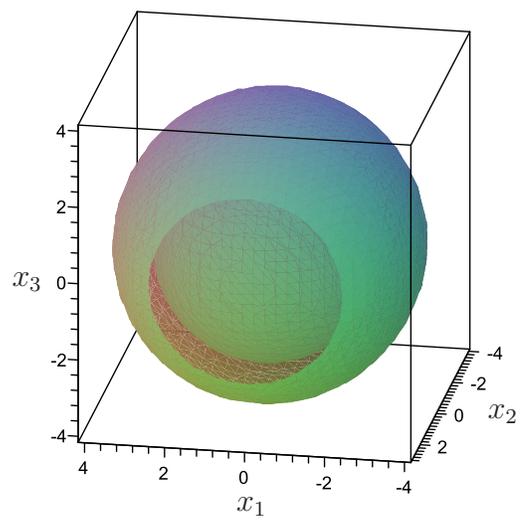
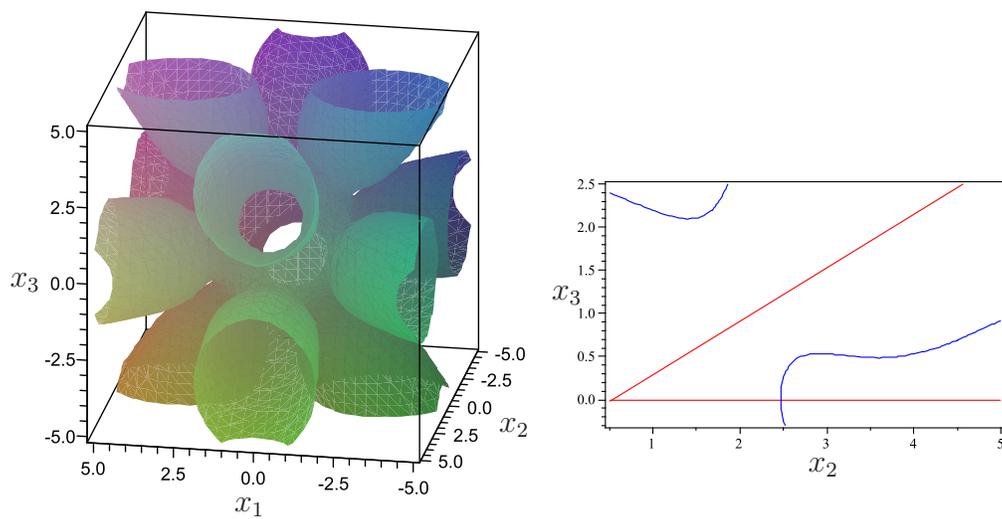
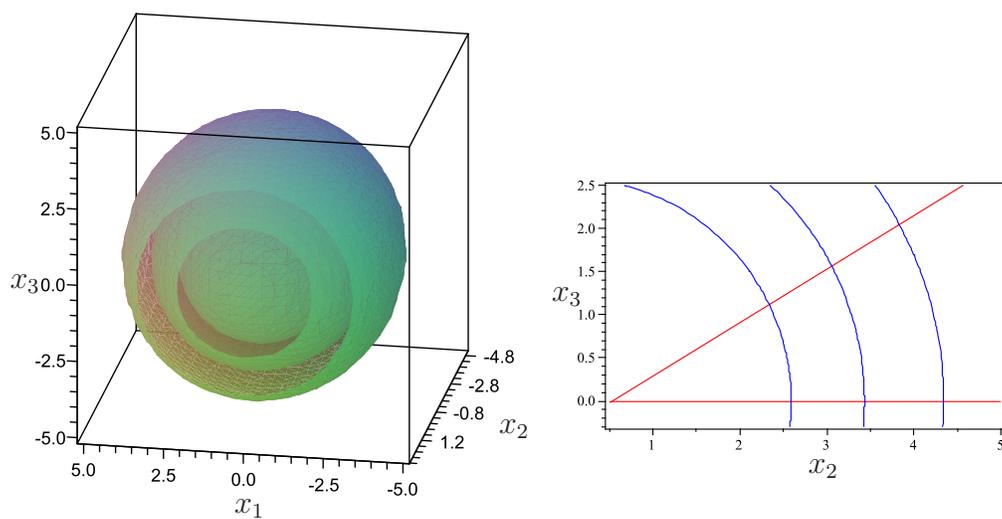


Figura 3.1: Superficies nodales en las coordenadas τ con $\omega = 1$ y $\nu = 3/5$. Las gráficas de la derecha son las curvas de nivel para las correspondientes superficies nodales (azul) y la frontera del espacio de configuración $\kappa(\tau)$ (rojo) para $\tau_3 = 0$.

(a) $\phi_{1,0} = 0$ (b) $\phi_{2,0} = 0$ 

(c) $\phi_{2,1} = 0$ (d) $\phi_{3,0} = 0$ 

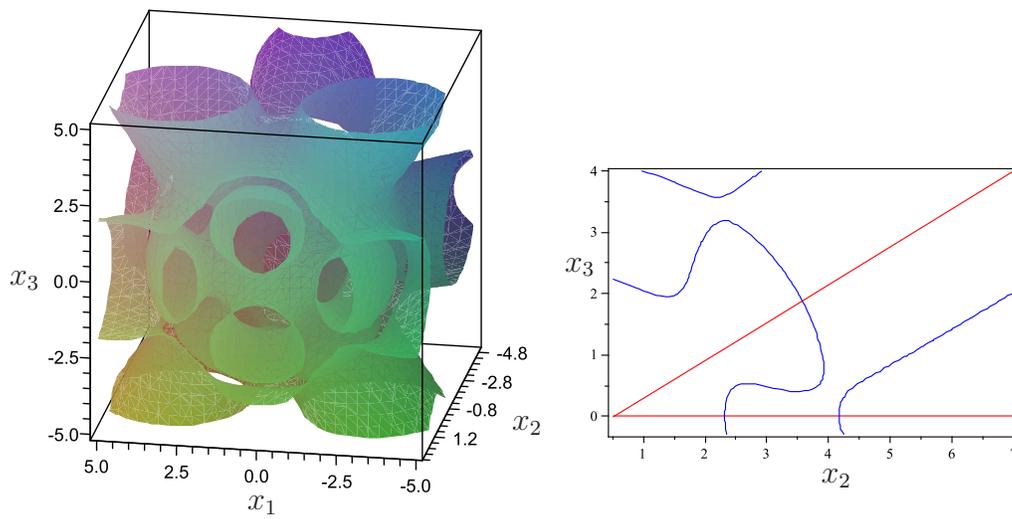
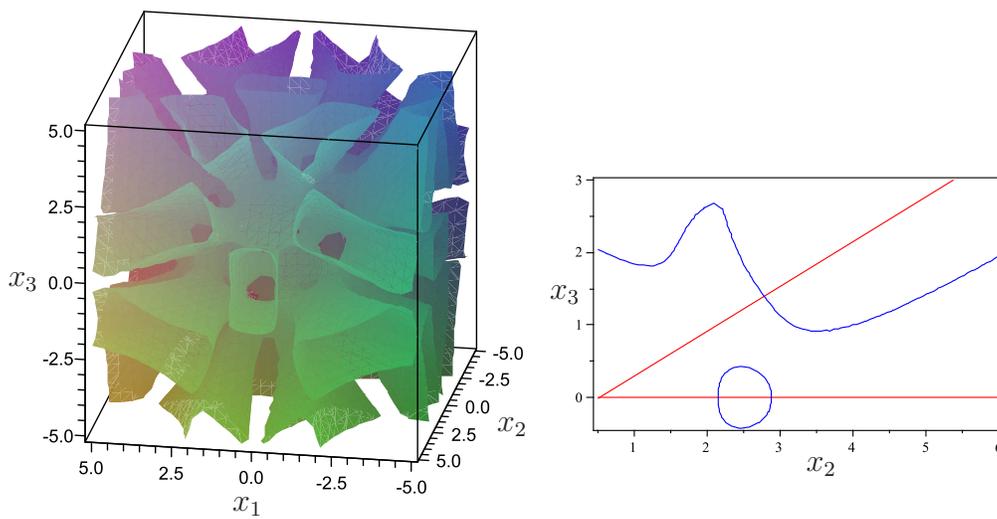
(e) $\phi_{3,1} = 0$ (f) $\phi_{3,2} = 0$ 

Figura 3.2: Superficies nodales en el espacio x con $\omega = 1$ y $\nu = 3/5$. Las gráficas de la derecha son las curvas de nivel para las correspondientes superficies nodales (azul) y la frontera del espacio de configuración (rojo) para $x_1 = 1/5$.

3.3. Teoría de perturbaciones

Al estudiar perturbaciones que tienen la forma de un polinomio en las variables τ es posible desarrollar una teoría de perturbaciones en la cual todas las correcciones pueden encontrarse mediante métodos del álgebra lineal. Consideremos por ejemplo un potencial perturbativo proporcional a τ_1 :

$$\tilde{h} = h_{H_3} + \lambda\tau_1 . \quad (3.8)$$

Evaluemos la función perturbada del estado base y su energía hasta correcciones de primer orden en λ :

$$\tilde{\phi}_0 = \phi_0 + \lambda\phi_0^{(1)} = 1 + \lambda\phi_0^{(1)} , \quad \tilde{\epsilon}_0 = \epsilon_0 + \lambda\epsilon_0^{(1)} = \lambda\epsilon_0^{(1)} . \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.9) en el problema de autovalores $\tilde{h}\tilde{\phi}_0 = \tilde{\epsilon}_0\tilde{\phi}_0$ y evaluando hasta términos de primer orden obtenemos la ecuación

$$h_{H_3}\phi_0^{(1)} + \tau_1 = \epsilon_0^{(1)} .$$

Esta ecuación puede resolverse tomando $\phi_0^{(1)} = A\tau_1$. Se obtiene

$$A = \frac{1}{4\omega} , \quad \epsilon_0^{(1)} = \frac{1}{4\omega}(6 + 60\nu) .$$

Siguiendo este procedimiento podemos encontrar correcciones de orden más alto.

Resulta indistinto considerar una perturbación proporcional a τ_1 en el hamiltoniano algebraico h_{H_3} (2.13) o una perturbación proporcional a $r^2 = \sum_{k=1}^3 x_k^2$ en el hamiltoniano \mathcal{H} original (1.1). Esto se debe a que los espectros de ambos operadores están relacionados por la ecuación $E = E_0 + \epsilon$.

Consideremos de nuevo la perturbación $\lambda\tau_1 = \lambda r^2$. Recordemos que la corrección a primer orden para la energía del estado base puede calcularse mediante la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schroedinger:

$$\tilde{E}_0 = E_0 + \lambda\langle\Psi_0|r^2|\Psi_0\rangle . \quad (3.10)$$

Ya que el valor de la corrección a primer orden se encontró anteriormente, obtenemos el siguiente resultado:

$$\langle\tau_1\rangle \equiv \langle\Psi_0|r^2|\Psi_0\rangle = \frac{1}{4\omega}(6 + 60\nu) . \quad (3.11)$$

Luego, utilizando la forma algebraica del hamiltoniano es posible evaluar algunos valores esperados de manera algebraica.

Consideremos ahora el potencial perturbativo $V_p = \lambda\tau_2$. La corrección a primer orden para el estado base está dada por (3.9). Sustituyendo en $\tilde{h}\tilde{\phi}_0 = \tilde{\epsilon}_0\tilde{\phi}_0$ obtenemos la ecuación

$$h_{H_3}\phi_0^{(1)} + \tau_2 = \epsilon_0^{(1)} ,$$

válida hasta términos de primer orden en λ . Supongamos que la solución es un polinomio de grado uno en τ_2 y grado tres en τ_1 , $\phi_0^{(1)} = A\tau_2 + B\tau_1^3 + C\tau_1^2 + D\tau_1$, es decir, es un polinomio de grado seis en las coordenadas cartesianas. Al sustituir y resolver el sistema de ecuaciones que resulta obtenemos que

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= \frac{1}{2\omega}\tau_2 - \frac{1}{10\omega^2}(1+5\nu)\tau_1^2 - \frac{1}{2\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)\tau_1 \\ \epsilon_0^{(1)} &= -\frac{3}{\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu) , \end{aligned}$$

de modo que el valor esperado de τ_2 para el estado base es

$$\langle \tau_2 \rangle = -\frac{3}{\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu) . \quad (3.12)$$

Finalmente, si se toma como potencial perturbativo $V_p = \lambda\tau_3$ y la corrección a primer orden para el estado base (3.9), se obtiene entonces la siguiente ecuación para las correcciones:

$$h_{H_3}\phi_0^{(1)} + \tau_3 = \epsilon_0^{(1)} ,$$

Considerando como solución un polinomio en τ_1, τ_2, τ_3 que corresponda a un polinomio de grado diez en las coordenadas cartesianas, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= \frac{1}{20\omega}\tau_3 - \frac{1}{75\omega^2}(2+5\nu)\tau_2\tau_1 - \frac{1}{30\omega^3}(1+2\nu)(2+5\nu) \\ &\quad + \frac{4}{375\omega^3}(1+5\nu)(1+2\nu)\tau_1^3 + \frac{4}{125\omega^4}(1+5\nu)(2+5\nu)(3+10\nu)\tau_1^2 \\ &\quad + \frac{4}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(3+10\nu)\tau_1 \\ \epsilon_0^{(1)} &= \frac{24}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu) , \end{aligned}$$

de manera que el valor esperado de τ_3 en el estado base es

$$\langle \tau_3 \rangle = \frac{24}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu) . \quad (3.13)$$

Capítulo 4

El álgebra escondida $h^{(3)}$

4.1. Operadores generadores

Hemos mostrado que la forma algebraica del operador hamiltoniano (2.13) actúa en los espacios de polinomios en varias variables

$$\mathcal{P}_n^{(1,2,3)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

¿Puede ser el espacio de dimensión finita $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$ ser un espacio de representación de un álgebra de operadores diferenciales? Mostraremos que esta respuesta es afirmativa y por tanto el álgebra existe. Nos referiremos en adelante a esta álgebra como el álgebra $h^{(3)}$.

Los elementos generadores del álgebra $h^{(3)}$ pueden ser separados en dos clases. La primera clase de generadores actúa en $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$ para cualquier $n \in \mathbf{N}$ y por tanto preserva el flag $\mathcal{P}^{(1,2,3)}$. Los operadores de la segunda clase actúan en el espacio $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$ para *sólo* un cierto valor de n . Corresponden a operadores de ascenso.

El álgebra $h^{(3)}$ es de dimensión infinita pero es generada por un número finito de generadores. Los operadores generadores de la primera clase son:

- 13 operadores diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
T_0^{(1)} &= \partial_1, & T_0^{(2)} &= \partial_2, & T_0^{(3)} &= \partial_3, \\
T_1^{(1)} &= \tau_1 \partial_1, & T_2^{(2)} &= \tau_2 \partial_2, & T_3^{(3)} &= \tau_3 \partial_3, \\
T_1^{(3)} &= \tau_1 \partial_3, & T_{11}^{(3)} &= \tau_1^2 \partial_3, & T_{111}^{(3)} &= \tau_1^3 \partial_3, \\
T_1^{(2)} &= \tau_1 \partial_2, & T_{11}^{(2)} &= \tau_1^2 \partial_2, & T_2^{(3)} &= \tau_2 \partial_3, \\
T_{12}^{(3)} &= \tau_1 \tau_2 \partial_3.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

- 6 operadores diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
T_2^{(11)} &= \tau_2 \partial_{11}, & T_{22}^{(13)} &= \tau_2^2 \partial_{13}, & T_{222}^{(33)} &= \tau_2^3 \partial_{33}, \\
T_3^{(12)} &= \tau_3 \partial_{12}, & T_3^{(22)} &= \tau_3 \partial_{22}, & T_{13}^{(22)} &= \tau_1 \tau_3 \partial_{22}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

- 2 operadores diferenciales de tercer orden:

$$T_3^{(111)} = \tau_3 \partial_{111}, \quad T_{33}^{(222)} = \tau_3^2 \partial_{222} \tag{4.3}$$

Los generadores de la segunda clase (operadores de ascenso) son:

- Un operador diferencial de primer orden:

$$J_1^+ = \tau_1 J_0. \tag{4.4}$$

- 4 operadores diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
J_{2,-1}^+ &= \tau_2 \partial_1 J_0, & J_{3,-2}^+ &= \tau_3 \partial_2 J_0, \\
J_{22,-3}^+ &= \tau_2^2 \partial_3 J_0, & J_2^+ &= \tau_2 J_0 (J_0 + 1).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

- 3 operadores diferenciales de tercer orden:

$$\begin{aligned}
J_{3,-11}^+ &= \tau_3 \partial_{11} J_0, & J_{3,-1}^+ &= \tau_3 \partial_1 J_0 (J_0 + 1), \\
J_3^+ &= \tau_3 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde

$$J_0 = \tau_1 \partial_1 + 2\tau_2 \partial_2 + 3\tau_3 \partial_3 - n. \tag{4.7}$$

y la siguiente notación para las derivadas es usada:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \tau_i}, \quad \partial_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j}, \quad \partial_{ijk} \equiv \frac{\partial^3}{\partial \tau_i \partial \tau_j \partial \tau_k}.$$

4.2. Estructura y relaciones de conmutación

Para investigar las relaciones de conmutación entre los generadores resulta útil la siguiente noción. Sean T_1 y T_2 operadores que actúan en monomios. Decimos que T_2 es el operador *conjugado* a T_1 cuando el operador T_2T_1 deja sin cambio el grado de un monomio.

Un cierto número de operadores generadores (4.1)-(4.6) de $h^{(3)}$ generan diez subálgebras abelianas:

$$\begin{aligned}
L = \{T_0^{(3)}, T_1^{(3)}, T_{11}^{(3)}, T_{111}^{(3)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{L} = \{T_3^{(111)}, J_{3,-11}^+, J_{3,-1}^+, J_3^+\} \\
R = \{T_0^{(2)}, T_1^{(2)}, T_{11}^{(2)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{R} = \{T_2^{(11)}, J_{2,-1}^+, J_2^+\} \\
F = \{T_2^{(3)}, T_{12}^{(3)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{F} = \{T_3^{(12)}, J_{3,-2}^+\} \\
E = \{T_3^{(22)}, T_{13}^{(22)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{E} = \{T_{22}^{(13)}, J_{22,-3}^+\} \\
G = \{T_{222}^{(33)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{G} = \{T_{33}^{(222)}\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Los restantes operadores generan un álgebra no conmutativa

$$B = \{T_0^{(1)}, T_1^{(1)}, T_2^{(2)}, T_3^{(3)}, J_0, J_1^+\} \tag{4.9}$$

La flecha indica que los generadores están relacionados mediante conjugación (por ejemplo $T_0^{(3)}$ y J_3^+). El álgebra B es la única en ser su propia conjugada.

Los operadores de las subálgebras abelianas se muestran en un cierto orden. Este ordenamiento está relacionado con el operador J_1^+ . Sea Y una entre las subálgebras abelianas (4.8) y sea $Y = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ donde n puede ser 1, 2, 3, 4. Los elementos generadores de Y están ordenados por las condiciones

$$[X_i, J_1^+] = (n - i)X_{i+1}, \quad i < n \tag{4.10}$$

y

$$[X_n, J_1^+] = 0. \tag{4.11}$$

Por tanto, las álgebras de Lie $\{X, J_1^+\}$ son nilpotentes. Esto implica también que los generadores pueden escribirse como conmutadores:

$$X_i = \frac{(n - i)!}{n!} \underbrace{[[\dots [X_0, J_1^+] \dots, J_1^+], J_1^+]}_{i \text{ conmutadores}}.$$

Las relaciones de conmutación entre los elementos generadores se muestran en el apéndice B. Sin embargo, la clasificación (4.8),(4.9) permite una representación compacta de estas relaciones de conmutación. Mostramos primero los conmutadores de las subálgebras abelianas separadas de sus conjugadas:

$$\begin{array}{ll}
[L, R] = 0, & [\mathfrak{L}, \mathfrak{R}] = 0, \\
[L, F] = 0, & [\mathfrak{L}, \mathfrak{F}] = 0, \\
[L, E] = P_2(R), & [\mathfrak{L}, \mathfrak{E}] = P_2(\mathfrak{R}), \\
[L, G] = 0, & [\mathfrak{L}, \mathfrak{G}] = 0, \\
[R, F] = L, & [\mathfrak{R}, \mathfrak{F}] = \mathfrak{L}, \\
[R, E] = 0, & [\mathfrak{R}, \mathfrak{E}] = 0, \\
[R, G] = P_2(F), & [\mathfrak{R}, \mathfrak{G}] = P_2(\mathfrak{F}), \\
[F, E] = P_2(R \oplus B), & [\mathfrak{F}, \mathfrak{E}] = P_2(\mathfrak{R} \oplus B), \\
[F, G] = 0, & [\mathfrak{F}, \mathfrak{G}] = 0, \\
[E, G] = P_3(F \oplus B), & [\mathfrak{E}, \mathfrak{G}] = P_3(\mathfrak{F} \oplus B),
\end{array}$$

Aquí $P_k(Q)$ significa que el conmutador es un polinomio de grado k en los generadores de Q . Salta a la vista que los conmutadores son simétricos ante conjugación. Esta propiedad es también satisfecha por el conjunto de relaciones de conmutación:

$$\begin{array}{ll}
[L, \mathfrak{R}] = P_2(F \oplus B), & [\mathfrak{L}, R] = P_2(\mathfrak{F} \oplus B), \\
[L, \mathfrak{F}] = P_2(R \oplus B), & [\mathfrak{L}, F] = P_2(\mathfrak{R} \oplus B), \\
[L, \mathfrak{E}] = P_2(F), & [\mathfrak{L}, E] = P_2(\mathfrak{F}), \\
[L, \mathfrak{G}] = P_2(R \oplus E), & [\mathfrak{L}, G] = P_2(\mathfrak{R} \oplus \mathfrak{E}), \\
[R, \mathfrak{F}] = E, & [\mathfrak{R}, F] = \mathfrak{E}, \\
[R, \mathfrak{E}] = P_2(F \oplus B), & [\mathfrak{R}, E] = P_2(\mathfrak{F} \oplus B), \\
[R, \mathfrak{G}] = 0, & [\mathfrak{R}, G] = 0, \\
[F, \mathfrak{E}] = G, & [\mathfrak{F}, E] = \mathfrak{G}, \\
[F, \mathfrak{G}] = P_2(E \oplus B), & [\mathfrak{F}, G] = P_2(\mathfrak{E} \oplus B), \\
[E, \mathfrak{G}] = 0, & [\mathfrak{E}, G] = 0,
\end{array}$$

El conmutador de un operador en cualquier subálgebra abeliana (4.8) y un operador en la subálgebra B es del tipo de un producto semidirecto:

$$\begin{array}{llllll}
[L, B] = L, & [R, B] = R, & [F, B] = F, & [E, B] = E, & [G, B] = G, \\
[\mathfrak{L}, B] = \mathfrak{L}, & [\mathfrak{R}, B] = \mathfrak{R}, & [\mathfrak{F}, B] = \mathfrak{F}, & [\mathfrak{E}, B] = \mathfrak{E}, & [\mathfrak{G}, B] = \mathfrak{G},
\end{array}$$

El conmutador de generadores de subálgebras conjugadas es un polinomio en los generadores de B :

$$\begin{aligned} [L, \mathfrak{L}] &= P_3(B), & [R, \mathfrak{R}] &= P_2(B), & [F, \mathfrak{F}] &= P_2(B), \\ [E, \mathfrak{E}] &= P_3(B), & [G, \mathfrak{G}] &= P_4(B). \end{aligned}$$

Las relaciones mencionadas anteriormente pueden ser representadas mediante algunos diagramas triangulares, por ejemplo,

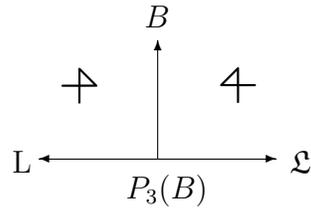


Figura 4.1: Diagrama triangular que relaciona las subálgebras L , \mathfrak{L} y B . Puede considerarse como el análogo a la descomposición de Gauss.

Las relaciones de conmutación son no-lineales en los operadores generadores. Por tanto, para tener una estructura de álgebra de Lie, es necesario considerar monomios en los operadores generadores como los elementos de $H^{(3)}$. Puede probarse que las relaciones de conmutación no cierran a ningún orden. Se sigue que $h^{(3)}$ es el álgebra de dimensión infinita de monomios ordenados en los 29 operadores generadores (4.1)-(4.6) que se muestran anteriormente.

4.3. Representación algebraica de H_3

Dado que $h^{(3)}$ es el álgebra de operadores diferenciales que actúan en $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$ debe ser posible escribir el hamiltoniano h_{H_3} (2.13) como una combinación de los elementos generadores (que preservan el flag) de $h^{(3)}$.

La forma $h^{(3)}$ -Lie algebraica del modelo H_3 (1.1) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
h_{H_3} = & 4T_1^{(1)}T_0^{(1)} + 24T_2^{(2)}T_0^{(1)} + 40T_3^{(3)}T_0^{(1)} - \frac{48}{5}T_2^{(2)}T_{11}^{(2)} \\
& + \frac{45}{2}T_3^{(22)} + \frac{32}{15}T_{12}^{(3)}T_2^{(2)} - 48T_3^{(3)}T_{11}^{(2)} - \frac{64}{3}T_3^{(3)}T_{12}^{(3)} \\
& + \frac{128}{45}T_{222}^{(33)} + (6 + 60\nu)T_0^{(1)} - 4\omega T_1^{(1)} - \frac{48}{5}(1 + 5\nu)T_{11}^{(2)} \\
& - 12\omega T_2^{(2)} - \frac{64}{15}(2 + 5\nu)T_{12}^{(3)} - 20\omega T_3^{(3)} .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

No es posible presentar una expresión similar para el operador f (2.19). El flag preservado por este operador tiene vector característico $(1, 3, 5)$, de modo que este resultado es consistente.

Conclusión

Hemos mostrado que el sistema racional H_3 es exactamente soluble. Este es el primer ejemplo de solubilidad exacta de un modelo relacionado con un sistema de raíces no cristalográfico. Este trabajo complementa los estudios previos de los modelos racionales (y trigonométricos) relacionados con los sistemas de raíces cristalográficos (p.ej. [2],[3],[4]).

Para entender las propiedades físicas del sistema es necesario un conocimiento de las propiedades del sistema de raíces y su grupo de Coxeter. El espacio de configuración para el sistema es un dominio fundamental del grupo. Los planos que definen a este dominio son clásicamente impenetrables y esto a su vez define las condiciones de frontera. También, el estudio de las simetrías del hamiltoniano nos guió a su forma algebraica en términos de los invariantes tomados como variables. Fuimos capaces de hacer uso del método desarrollado para los sistemas cristalográficos: (i) realizamos una transformación de norma con la función del estado base como factor y (ii) tomamos polinomios invariantes de H_3 específicos como variables. Después de este procedimiento el hamiltoniano toma una forma algebraica siendo ahora un operador diferencial con coeficientes polinomiales. Encontramos que el flag mínimo de polinomios preservado por esta forma algebraica tiene vector característico $(1, 2, 3)$.

El espectro se encuentra en una forma analítica cerrada. Coincide con el espectro de un oscilador armónico anisotrópico (diferiendo sólo en el menor autovalor). Luego, la presencia del potencial racional adicional en el hamiltoniano (1.1) “deforma” el espectro del potencial original de oscilador armónico isotrópico. Esto significa que podemos obtener formalmente el espectro del modelo H_3 considerando la sustitución de las frecuencias en las direcciones cartesianas $(\omega, \omega, \omega) \longrightarrow (2\omega, 6\omega, 10\omega)$ en el espectro del oscilador isotrópico

(sin considerar el estado base). Las autofunciones se encuentran en forma de polinomios en los invariantes del grupo H_3 , reflejando la propiedad de invariancia del sistema ante transformaciones del grupo H_3 .

Debe ser enfatizado el hecho de que el hamiltoniano del sistema es completamente integrable [7]. Esto implica la existencia de al menos dos operadores que conmutan con el hamiltoniano y que están en involución (conmutan entre sí). Estos operadores que conmutan deben tener una forma algebraica después de una rotación de norma (con la función del estado base como factor) y un cambio de variables de las coordenadas cartesianas a las variables invariantes. Encontramos explícitamente una integral de movimiento de segundo orden, la cual está relacionada con la separación de variables en coordenadas esféricas. Los resultados que se conocen para los sistemas cristalográficos sugieren que deben existir dos integrales que conmutan, que son operadores diferenciales de órdenes seis y diez. Sus formas explícitas no son conocidas hasta ahora.

El álgebra escondida $h^{(3)}$ del modelo se encontró y se investigó. Es un álgebra de dimensión infinita pero es generada de forma finita. La construcción de las subálgebras abelianas de elementos generadores hace posible escribir las relaciones de conmutación entre los generadores en una forma compacta. El estudio del álgebra escondida es importante porque sugiere que la solubilidad del modelo está relacionada con la existencia de esta álgebra, Es también importante porque hace posible el estudio de las perturbaciones (en forma de polinomios en las variables invariantes) del hamiltoniano mediante métodos puramente algebraicos: dado que existe una forma Lie–algebraica del hamiltoniano es posible desarrollar una teoría de perturbaciones en la cual todas las correcciones se encuentran mediante métodos de álgebra lineal [9].

El hamiltoniano algebraico y la integral de movimiento f soportan diferentes flags. La razón de esta diferencia no es conocida de manera exacta, pero es posible que esté relacionada con la degeneración del espectro del operador hamiltoniano.

Apéndice A

Antecedentes matemáticos

A.1. Sistemas de raíces

A.1.1. Grupos generados por reflexiones y sistemas de raíces

Sea V un espacio vectorial euclidiano de dimensión finita dotado de un producto interior definido positivo (x, y) . Estamos interesados en grupos finitos que son generados por las reflexiones en V . Una *reflexión* es un operador lineal r en V que mapea un vector no nulo α a su negativo mientras fija punto a punto el hiperplano H_α ortogonal a α . Podemos escribir $r = r_\alpha$, teniendo en mente sin embargo que $r_\alpha = r_{c\alpha}$ para cualquier $c \in \mathbf{R}$ distinto de cero. Existe una fórmula simple:

$$r_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha . \quad (\text{A.1})$$

Sea \mathcal{R} un conjunto finito de vectores no nulos en V que satisfacen las siguientes condiciones:

(R1). $\mathcal{R} \cap \mathbf{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ para todo $\alpha \in \mathcal{R}$;

(R2). $r_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ para todo $\alpha \in \mathcal{R}$.

Defínase enseguida W como el grupo generado por todas las reflexiones r_α , $\alpha \in \mathcal{R}$. El sistema de vectores \mathcal{R} se denomina el *sistema de raíces* y el grupo W es el *grupo de Coxeter*. La dimensión del espacio V se conoce como el

rango del sistema de raíces \mathcal{R} .

Cualquier grupo de Coxeter tiene una presentación en la forma de un *sistema de Coxeter* (S, W) . Es un par que consiste en el grupo W junto con un subconjunto finito $S \subset W$ que satisface las siguientes condiciones:

- (i) cada $s \in S$ es una involución: $s^2 = 1$;
- (ii) algunos pares $s, t \in S$ satisfacen relaciones de la forma $(st)^{m_{st}} = 1$ con $m_{st} \geq 2$;
- (iii) las relaciones en (i)-(ii) forman una presentación del grupo W .

En otras palabras, S genera a W , y cualquier identidad en W es una consecuencia formal de (i)-(ii) y los axiomas de un grupo.

Un *ordenamiento total* del espacio vectorial real V es una relación transitiva en V (denotada por $<$) que satisface los siguientes axiomas.

1. Para cada par $x, y \in V$, exactamente uno de $x < y$, $x = y$, $y < x$ se verifica.
2. Para todos $x, y, z \in V$, si $y < z$ entonces $x + y < x + z$.
3. Si $x < y$ y c es un número real distinto de cero, entonces $cx < cy$ si $c > 0$, mientras que $cy < cx$ si $c < 0$.

Dado dicho ordenamiento, decimos que $x \in V$ es *positivo* si $0 < x$. La suma de vectores positivos es positiva, lo mismo que el múltiplo escalar de un vector positivo por un número real positivo.

Regresando al sistema de raíces \mathcal{R} , llamamos a un subconjunto \mathcal{R}^+ un *sistema positivo* si consiste de todas aquellas raíces que son positivas relativas a algún ordenamiento total de V . Aún más, ya que las raíces vienen en pares $\{\alpha, -\alpha\}$, \mathcal{R} debe ser la unión disjunta de \mathcal{R}^+ y $-\mathcal{R}^+$, siendo este segundo conjunto llamado el *sistema negativo*. Cuando \mathcal{R} es fijo, podemos escribir $\alpha > 0$ en lugar de $\alpha \in \mathcal{R}^+$. Como ejemplo, el sistema G_2 se muestra enseguida.

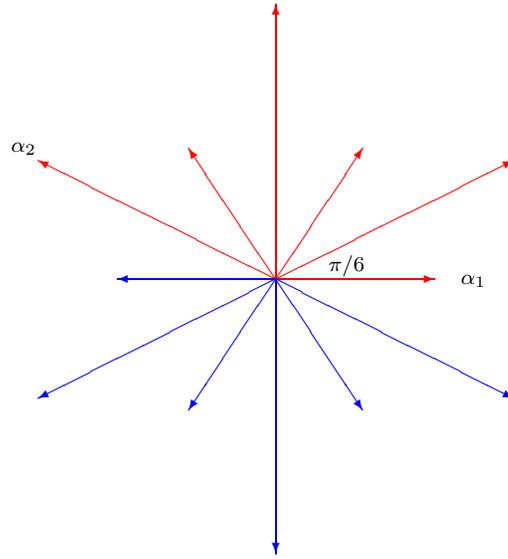


Figura A.1: El sistema de raíces G_2 . Las raíces positivas se muestran en rojo y las negativas en azul. Las longitudes de las raíces son 1 y $\sqrt{3}$. Las raíces simples están etiquetadas como α_1 y α_2 .

Llamamos a un subconjunto Δ de \mathcal{R} un *sistema simple* (y denominamos a sus elementos *raíces simples*) si Δ es una base para el subespacio generado por \mathbf{R} en V y si además cada $\alpha \in \mathcal{R}$ es una combinación lineal de Δ con coeficientes todos del mismo signo (todos positivos o todos negativos). Genéricamente la base de raíces simples *no* es ortonormal. La no-ortonormalidad está codificada en la *matriz de Cartan* C de Δ , que se define como la matriz de entradas

$$C_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad (\text{A.2})$$

donde $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$.

Un sistema de raíces \mathcal{R} es *crystalográfico* si satisface el requisito adicional

$$(\mathbf{R3}). \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbf{Z} \text{ para todos } \alpha, \beta \in \mathcal{R}.$$

Estos enteros se denominan *enteros de Cartan*. El grupo W generado por todas las reflexiones r_α se conoce en este caso como el *grupo de Weyl* de \mathcal{R} . Los sistemas de raíces crystalográficos surgen en la clasificación de las álgebras de

Lie semisimples y los espacios simétricos. Es posible probar que un sistema de raíces es cristalográfico si y sólo si existe un retículo en V invariante bajo el correspondiente grupo de Weyl W .

En virtud de la condición de integridad (R3) se sigue que los ángulos $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$ pueden existir entre dos raíces simples en un sistema cristalográfico.

Tomando

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \quad (\text{A.3})$$

el conjunto \mathcal{R}^\vee de todas las *corraíces* α^\vee ($\alpha \in \mathcal{R}$) es también un sistema de raíces en V , con sistema simple $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in \mathcal{R}\}$. Se denomina también el sistema de raíces inverso o *dual*. Utilizar los vectores α^\vee simplifica varias fórmulas. Por ejemplo, la ecuación (A.2) que define la matriz de Cartan se vuelve

$$C_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee).$$

Recordemos del álgebra lineal elemental que el espacio vectorial dual V^* de un espacio vectorial V es el espacio de mapeos lineales de V al campo base F . Cuando se considera al espacio de raíces como consistente en combinaciones lineales reales de las raíces, entonces el espacio dual al espacio de raíces se llama *espacio de los pesos*, y sus elementos son los *pesos* de \mathcal{R} . Es normalmente conveniente escoger como base del espacio de raíces a las corraíces simples. Entonces la base del espacio de raíces que es dual a la base de corraíces consiste en aquellos pesos, denotados por ω_i , que obedecen

$$\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

Estos pesos se llaman los *pesos fundamentales* del sistema \mathcal{R} , y la base que forman se conoce como la *base de Dynkin* del espacio de pesos. Los componentes de un peso en la base de Dynkin se llaman *etiquetas de Dynkin*.

Sea \mathcal{R} un sistema de raíces cristalográfico. Al remover del espacio de raíces todos los hiperplanos (que pasan por el origen) que son perpendiculares a alguna raíz, el espacio queda dividido en un abanico de conos abiertos. Estos conos se denominan *cámaras de Weyl*. Ellas son permutadas por la acción del grupo de Weyl y existe un teorema que afirma que esta acción es simplemente transitiva. Las cámaras de Weyl son todas congruentes, pero al hacer una

elección para las raíces simples, una de ellas se distingue del resto. Esta es la única cámara cuyos puntos tienen solamente etiquetas de Dynkin positivos; se denomina la cámara de Weyl *fundamental* o *principal*, o también el dominio fundamental de Weyl.

A.1.2. Clasificación de los sistemas de raíces

Sea el espacio V la suma directa de los espacios V_1, \dots, V_n . Para cualquier i , sea \mathcal{R}_i un sistema de raíces en V_i . Entonces la unión $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cdots \cup \mathcal{R}_n$ será un sistema de raíces en V . El grupo de Coxeter W se identifica con el producto de los grupos $W(\mathcal{R}_i)$. El sistema de raíces \mathcal{R} se conoce como la suma de los sistemas \mathcal{R}_i . Si esta expansión no es posible, se dice que el sistema de raíces es *irreducible*.

Un sistema de raíces *reducido* es un sistema \mathcal{R} que satisface la propiedad adicional de que, si $\alpha \in \mathcal{R}$, entonces los únicos múltiplos de α en \mathcal{R} son $\pm\alpha$.

Daremos ahora una lista de los sistemas de raíces irreducibles reducidos. Hasta un isomorfismo se definen por sus llamadas gráficas de Dynkin. La gráfica de Dynkin de un sistema de raíces \mathcal{R} es la gráfica cuyos vértices son los elementos de un conjunto de raíces simples Δ . Denotemos por $\Theta_{\alpha\beta}$ al ángulo entre las raíces α y β , y sea $\theta_{\alpha\beta} = \pi - \Theta_{\alpha\beta}$. En el caso de los sistemas cristalográficos, dos diferentes vértices α y β en la gráfica de Dynkin están conectados por 0, 1, 2, o 3 segmentos dependiendo de si $\theta_{\alpha\beta} = \pi/2, \pi/3, \pi/4$ or $\pi/6$, respectivamente. En los últimos dos casos las raíces α y β tienen longitudes diferentes. Es por ello que colocamos un signo de desigualdad en dos o tres segmentos dirigido hacia el vértice que corresponde a las raíces menores. En el caso de sistemas no cristalográficos los segmentos se denotan también como m si $\theta_{\alpha\beta} = \pi/m$.

Las gráficas de Dynkin correspondientes a los sistemas irreducibles reducidos se muestran en la tabla de la siguiente página. Adicionalmente a los sistemas mostrados, para cada $n \geq 1$ existe un único sistema de raíces irreducible no reducido BC_n que es la unión de B_n y C_n . Las primeras cuatro series infinitas se denominan sistemas de raíces *clásicos*, los siguientes cinco con los sistemas de raíces *excepcionales*, mientras que las otras tres gráficas corresponden a sistemas no cristalográficos.

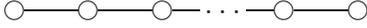
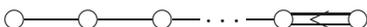
A_n		$(n \geq 1 \text{ vertices})$
B_n		$(n \geq 2 \text{ vertices})$
C_n		$(n \geq 3 \text{ vertices})$
D_n		$(n \geq 4 \text{ vertices})$
E_6		
E_7		
E_8		
F_4		
G_2		
H_3		
H_4		
$I_2(m)$		$(m \geq 3)$

Tabla A.1: Gráficas de Dynkin para los sistemas de raíces irreducibles reducidos

Invariantes polinomiales

Sea S un álgebra de polinomios definida en el espacio V , y S^W su subálgebra consistente en los elementos de S que son invariantes con respecto al grupo de Coxeter. De acuerdo con el teorema de Chevalley (véase [1]), existen $n = \text{rango}(\mathcal{R})$ polinomios homogéneos algebraicamente independientes (*invariantes*) $s_{d_1}(x), s_{d_2}(x), \dots, s_{d_n}(x)$ que generan la subálgebra S^W (d_1, d_2, \dots, d_n son los órdenes de estos polinomios). Para cada grupo de Coxeter, los órdenes d_1, d_2, \dots, d_n están definidos de manera única; el orden $|W|$ del grupo de Coxeter W y el número de raíces l en \mathcal{R} están relacionados de manera simple

con estos órdenes:

$$\begin{aligned} W &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n , \\ l &= 2 \sum_{i=1}^n (d_i - 1) . \end{aligned} \tag{A.5}$$

La dimensión del espacio de polinomios homogéneos W -invariantes de grado m es igual al número de soluciones de la ecuación

$$m = d_1 m_1 + d_2 m_2 + \cdots + d_n m_n \tag{A.6}$$

en enteros no negativos.

Los órdenes de los invariantes se denominan también como los *grados* del grupo. En la tabla A.2 se muestra la lista de los grados para cada tipo de grupo W irreducible.

Type	d_1, \dots, d_n
A_n	$2, 3, \dots, n + 1$
B_n	$2, 4, 6, \dots, 2n$
C_n	$2, 4, 6, \dots, 2n$
D_n	$2, 4, 6, \dots, 2n - 2, n$
E_6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
E_7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
E_8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$
F_4	$2, 6, 8, 12$
G_2	$2, 6$
H_3	$2, 6, 10$
H_4	$2, 12, 20, 30$
$I_2(m)$	$2, m$

Tabla A.2: Grados de los invariantes básicos

Una forma particular de los invariantes puede encontrarse al promediar monomios elementales $(\omega, x)^d$ sobre una órbita del grupo Ω (ver p.ej. [2]),

$$s_d(x) = \sum_{\omega \in \Omega} (\omega, x)^d . \tag{A.7}$$

A.2. El sistema de tipo H_3

El grupo de Coxeter H_3 es el único grupo de Coxeter no cristalográfico que actúa en el espacio tridimensional. Es un subgrupo de H_4 , que es, a su vez, el único grupo de Coxeter no cristalográfico que actúa en el espacio de cuatro dimensiones.

El grupo de tipo H_3 es el grupo de simetrías del icosaedro, el cual es un poliedro regular con 20 caras equiláteras idénticas. Tiene 30 aristas y 12 vértices, los cuales pueden tomarse como los puntos

$$(\pm 1, 0, \pm \varphi_+) , \quad (\pm \varphi_+, \pm 1, 0) , \quad (0, \pm \varphi_+, \pm 1) ,$$

donde hemos introducido la notación

$$\varphi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} ,$$

para la *razón áurea* y su conjugado algebraico. Son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 = x + 1$. Evidentemente, $\varphi_+ \varphi_- = -1$. Tienen también la propiedad de que

$$\varphi_+ = 2 \cos \frac{\pi}{5} , \quad \varphi_- = -2 \cos \frac{2\pi}{5} .$$

Dualmente, el grupo de tipo H_3 es también el grupo de simetrías del dodecaedro, que es el poliedro regular compuesto por 12 caras pentagonales regulares, 30 aristas y 20 vértices. La noción de dualidad es muy sencilla. Si los puntos medios de las caras adyacentes de un icosaedro se unen mediante segmentos de línea, entonces estos segmentos serán las aristas de un dodecaedro inscrito en el icosaedro. Cualquier rotación (o reflexión) de \mathbf{R}^3 que deje invariante al icosaedro dejará también invariante al dodecaedro inscrito y viceversa.

El grupo de rotaciones I del icosaedro consiste en las rotaciones por ángulos $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$ y $8\pi/5$ respecto de cada uno de los 6 ejes que unen los vértices opuestos; de las rotaciones por ángulos $2\pi/3$ y $4\pi/3$ respecto de cada uno de los 10 ejes que unen los centros de las caras opuestas; rotaciones por un ángulo π respecto de cada uno de los 15 ejes que unen los puntos medios de aristas opuestas, y la identidad. Luego

$$|I| = 6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 1 = 60 .$$

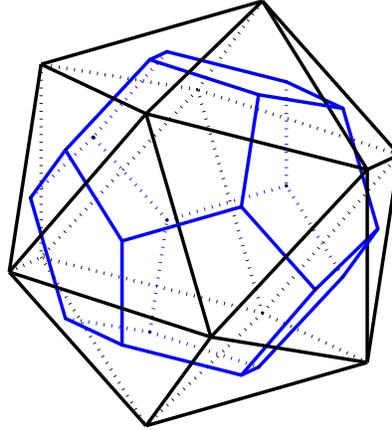


Figura A.2: Icosaedro y su dodecaedro dual.

El grupo H_3 es el grupo completo de simetrías del icosaedro, de modo que contiene I e incluye cada elemento con inversión. Por ello, $|H_3| = 120$. La simetría del icosaedro no es compatible con la simetría de traslación, de manera que H_3 no es un grupo cristalográfico.

El sistema de raíces \mathcal{R}_3 de H_3 consiste de los 30 elementos (cada uno normalizado para tener longitud 2, véase la figura A.3):

$$\mathcal{R}_3 = \begin{cases} (\pm 2, 0, 0) & \text{y todas las permutaciones,} \\ (\pm 1, \pm \varphi_+, \pm \varphi_-) & \text{y todas las permutaciones pares.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Sean $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. El conjunto de raíces es invariante ante el intercambio

$$\begin{aligned} e_i &\longleftrightarrow e_j, & i \neq j. \\ \varphi_+ &\longleftrightarrow \varphi_- \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Introduzcamos una base de raíces simples en H_3 ,

$$\alpha_1 = (2, 0, 0), \quad \alpha_2 = (-\varphi_+, -\varphi_-, -1), \quad \alpha_3 = (0, 0, 2). \quad (\text{A.10})$$

En esta base toda raíz puede escribirse como una combinación $\mathbf{Z}[\varphi_+]$ lineal, donde $\mathbf{Z}[\varphi_+] = \{a + \varphi_+ b \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ corresponde a un anillo de enteros extendido.

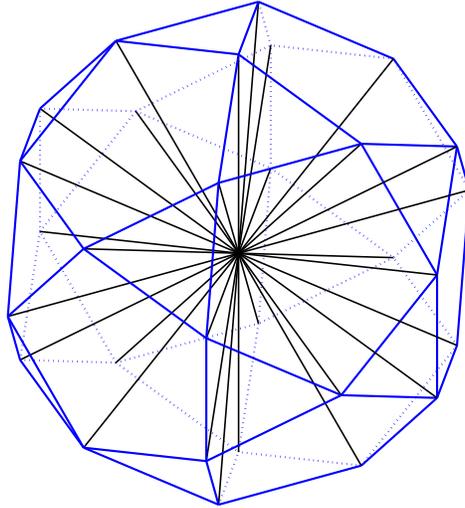


Figura A.3: Sistema de raíces de tipo H_3 . Las raíces apuntan a los vértices de un icosidodecaedro, que es un sólido con simetría icosaedral.

El grupo de Coxeter H_3 es generado por reflexiones r_j con respecto a los planos perpendiculares a las raíces simples α_j , codificadas de la siguiente manera: para cualquier $x \in \mathbf{R}^3$ un elemento $\alpha_j \in \mathcal{R}_3$ produce una reflexión a

$$r_j(x) = x - \frac{2(x \cdot \alpha_j)}{(\alpha_j \cdot \alpha_j)} \alpha_j . \quad (\text{A.11})$$

Los elementos de H_3 son generados a partir de r_1, r_2, r_3 usando las relaciones

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

$$(r_1 r_2)^5 = (r_2 r_3)^3 = (r_1 r_3)^3 = 1 \quad (\text{A.13})$$

Por tanto, si $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ entonces (R, H_3) es un sistema de Coxeter.

Las corraíces simples $\alpha_j^\vee = 2\alpha_j/(\alpha_j \cdot \alpha_j)$ se definen de la siguiente forma,

$$\alpha_1^\vee = (1, 0, 0), \quad \alpha_2^\vee = \frac{1}{2}(-\varphi_+, -\varphi_-, -1), \quad \alpha_3^\vee = (0, 0, 1). \quad (\text{A.14})$$

Luego, la matriz de Cartan es de la forma

$$C = (\alpha_i \cdot \alpha_j^\vee) = \begin{pmatrix} 2 & -\varphi_+ & 0 \\ -\varphi_+ & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.15})$$

Podemos introducir los pesos fundamentales de H_3 como

$$\omega_1 = (1, \varphi_+^2, 0), \quad \omega_2 = (0, 2\varphi_+, 0), \quad \omega_3 = (0, \varphi_+, 1), \quad (\text{A.16})$$

los cuales generan el espacio de pesos dual a \mathcal{R}_3 :

$$\omega_i \cdot \alpha_j^\vee = \delta_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

$(2, 0, 0)$	$= \alpha_1$
$(0, 2, 0)$	$= (1 + \varphi_+) \alpha_1 + 2\varphi_+ \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$
$(0, 0, 2)$	$= \alpha_3$
$(1, \varphi_+, \varphi_-)$	$= (1 + \varphi_+) \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \alpha_3$
$(1, \varphi_+, -\varphi_-)$	$= (1 + \varphi_+) \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$
$(-1, \varphi_+, \varphi_-)$	$= \varphi_+ \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \alpha_3$
$(-1, \varphi_+, -\varphi_-)$	$= \varphi_+ \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$
$(\varphi_+, -\varphi_-, 1)$	$= \varphi_+ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
$(\varphi_+, -\varphi_-, -1)$	$= \varphi_+ \alpha_1 + \alpha_2$
$(-\varphi_+, -\varphi_-, 1)$	$= \alpha_2 + \alpha_3$
$(-\varphi_+, -\varphi_-, -1)$	$= \alpha_2$
$(\varphi_-, 1, \varphi_+)$	$= \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$
$(\varphi_-, 1, -\varphi_+)$	$= \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2$
$(-\varphi_-, 1, \varphi_+)$	$= \varphi_+ \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$
$(-\varphi_-, 1, -\varphi_+)$	$= \varphi_+ \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2$

Tabla A.3: Raíces positivas en la base (A.10) para H_3

Un conjunto de raíces positivas \mathcal{R}_3^+ se muestra explícitamente en la tabla A.3. Se define como el subconjunto de \mathcal{R}_3 cuyos elementos pueden escribirse como combinaciones $\mathbf{Z}^+[\varphi_+]$ lineales de las raíces base, siendo

$$\mathbf{Z}^+[\varphi_+] = \{a + \varphi_+ b \mid a, b \in \mathbf{Z}^+\}.$$

Las 15 raíces positivas definen 15 planos de simetría del icosaedro. Al intersectarlos con la esfera unitaria obtenemos 120 triángulos simétricos alternadamente congruentes en la esfera, cuyos ángulos son $\pi/3$, $\pi/5$, $\pi/2$. Estos triángulos se muestran en la figura A.4. Podemos ver que dichos triángulos se encuentran en los vértices del dodecaedro en grupos de 6, en los vértices del icosaedro en grupos de 10 y en las intersecciones de las líneas perpendiculares en grupos de 4. Observamos que el número de triángulos es igual al orden del grupo de simetrías del icosaedro.

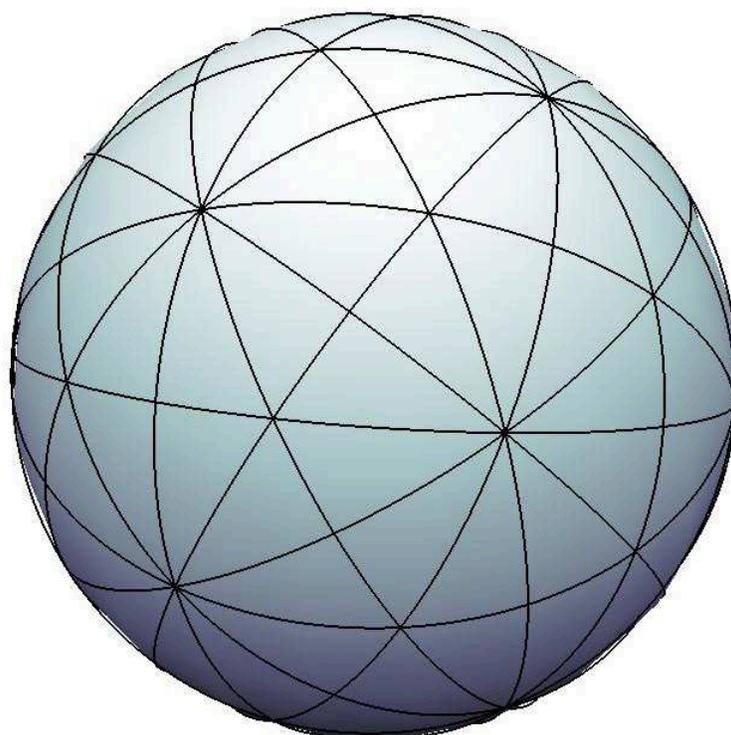


Figura A.4: Dominios fundamentales para el grupo del icosaedro. Los ángulos de los 120 triángulos son $\pi/3$, $\pi/5$ y $\pi/2$. Uniendo las intersecciones con líneas rectas obtenemos un sólido llamado *disdiquitriacontaedro*, que es un sólido con simetría icosaedral.

Consideremos el grupo de puntos que surge si le aplicamos las N operaciones de nuestro grupo a un punto arbitrario (la *órbita* del punto). Describimos

como el *dominio fundamental* de un grupo de transformaciones en general una porción del espacio que contiene uno, y sólo uno, de los puntos de cada órbita correspondiente. Puede probarse que podemos tomar como dominios fundamentales para el grupo del icosaedro cada uno de los triángulos en la esfera en la figura A.4. Por ende, el número de triángulos es igual al orden del grupo.

A.2.1. Representación unitaria del grupo H_3

Consideremos el grupo de transformaciones ortogonales H_3 en el espacio euclidiano tridimensional:

$$x \longrightarrow g x , \quad g \in H_3 .$$

Hemos mostrado que este grupo es generado por reflexiones con respecto a planos perpendiculares a las raíces simples (A.11):

$$x \longrightarrow r_j(x) = x - \frac{2(x \cdot \alpha_j)}{\alpha_j \cdot \alpha_j} \alpha_j .$$

Consideremos ahora la representación unitaria en el espacio $L^2(\mathbf{R}^3)$ del grupo H_3 :

$$\mathcal{U}(g) \Psi(x) = \Psi(g^{-1}x) , \quad g \in H_3 . \quad (\text{A.18})$$

Si $g \in H_3$ es una reflexión, entonces $g^{-1} = g$. Sea $g = r_\alpha$ la reflexión con respecto a una de las raíces (A.8) del sistema de H_3 (véase (A.1)). Denotaremos por $\mathcal{U}(\alpha)$ al operador de reflexiones asociado:

$$\mathcal{U}(\alpha) \Psi(x) = \Psi(r_\alpha(x)) , \quad \alpha \in \mathcal{R}_3 . \quad (\text{A.19})$$

Puede hallarse una expresión para $\mathcal{U}(\alpha)$. Recordemos que el operador de rotaciones en $L^2(\mathbf{R}^3)$ está dado por

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \vartheta) = \exp(-i\vartheta \mathcal{L} \cdot \hat{n}) , \quad (\text{A.20})$$

donde \mathcal{L} es el operador de momento angular (véase [10]), \hat{n} es el vector unitario a lo largo del eje de rotación y ϑ es el ángulo de rotación. Recordemos también que el operador de paridad (inversión espacial) es el operador \mathcal{P} tal que

$$\mathcal{P}^{-1} \mathcal{X} \mathcal{P} = -\mathcal{X} , \quad (\text{A.21})$$

siendo \mathcal{X} el operador de posición. Se sigue que el operador de reflexiones con respecto al plano perpendicular a la raíz α (el cual contiene el origen de coordenadas) está dado por

$$\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{D}(\hat{\alpha}, \pi) \mathcal{P} . \quad (\text{A.22})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ las raíces simples (A.10) de H_3 . Entonces,

$$\mathcal{U}(\alpha_1)^2 = \mathcal{U}(\alpha_2)^2 = \mathcal{U}(\alpha_3)^2 = 1 \quad (\text{A.23})$$

$$[\mathcal{U}(\alpha_1)\mathcal{U}(\alpha_2)]^5 = [\mathcal{U}(\alpha_2)\mathcal{U}(\alpha_3)]^3 = [\mathcal{U}(\alpha_1)\mathcal{U}(\alpha_3)]^3 = 1 \quad (\text{A.24})$$

Luego, la representación unitaria de H_3 es un sistema de Coxeter con generadores $\mathcal{U}(\alpha_j)$ para $j = 1, 2, 3$.

Apéndice B

Relaciones de conmutación para $h^{(3)}$

Mostramos ahora en detalle los conmutadores de las páginas 42 y 43.

- $[B, B]$

$$\begin{aligned}
 [T_0^{(1)}, T_1^{(1)}] &= T_0^{(1)}, & [T_0^{(1)}, T_2^{(2)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_3^{(3)}] &= 0, \\
 [T_0^{(1)}, J_0] &= T_0^{(1)}, & [T_0^{(1)}, J_1^+] &= T_1^{(1)} + J_0, & [T_1^{(1)}, T_2^{(2)}] &= 0, \\
 [T_1^{(1)}, T_3^{(3)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_0] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_1^+] &= J_1^+, \\
 [T_2^{(2)}, T_3^{(3)}] &= 0, & [T_2^{(2)}, J_0] &= 0, & [T_2^{(2)}, J_1^+] &= 0, \\
 [T_3^{(3)}, J_0] &= 0, & [T_3^{(3)}, J_1^+] &= 0, & [J_0, J_1^+] &= J_1^+.
 \end{aligned}$$

Estas relaciones implican que

$$B \cong gl_2 \oplus \mathcal{R}^{(2)}$$

donde $\mathcal{R}^{(2)}$ es un álgebra conmutativa de dimensión dos.

- $[L, E]$

$$\begin{aligned}
 [T_0^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_0^{(2)} T_0^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_0^{(2)}, \\
 [T_1^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_0^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_1^{(2)}, \\
 [T_{11}^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_1^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{11}^{(2)} T_1^{(2)}, \\
 [T_{111}^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_{11}^{(2)} T_1^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{11}^{(2)} T_{11}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, J_{22,-3}^+] &= -J_2^+ J_2^+ , & [J_3^+, T_{22}^{(13)}] &= -J_{2,-1}^+ J_2^+ , \\
[J_{3,-1}^+, J_{22,-3}^+] &= -J_{2,-1}^+ J_2^+ , & [J_{3,-1}^+, T_{22}^{(13)}] &= -J_{2,-1}^+ J_{2,-1}^+ , \\
[J_{3,-11}^+, J_{22,-3}^+] &= -J_{2,-1}^+ J_{2,-1}^+ , & [J_{3,-11}^+, T_{22}^{(13)}] &= -T_2^{(11)} J_2^+ , \\
[T_3^{(111)}, J_{22,-3}^+] &= -T_2^{(11)} J_{2,-1}^+ , & [T_3^{(111)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_2^{(11)} T_2^{(11)} .
\end{aligned}$$

- $[R, F]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_0^{(3)} , & [T_0^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_1^{(3)} , \\
[T_1^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_1^{(3)} , & [T_1^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{11}^{(3)} , \\
[T_{11}^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_{11}^{(3)} , & [T_{11}^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{111}^{(3)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{A}, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[J_2^+, J_{3,-2}^+] &= -J_3^+ , & [J_2^+, T_3^{(12)}] &= -J_{3,-1}^+ , \\
[J_{2,-1}^+, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-1}^+ , & [J_{2,-1}^+, T_3^{(12)}] &= -J_{3,-11}^+ , \\
[T_2^{(11)}, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-11}^+ , & [T_2^{(11)}, T_3^{(12)}] &= T_3^{(111)} .
\end{aligned}$$

- $[R, G]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, T_{222}^{(3)}] &= 3T_2^{(3)} T_2^{(3)} , \\
[T_1^{(2)}, T_{222}^{(3)}] &= 3T_{12}^{(3)} T_2^{(3)} , \\
[T_{11}^{(2)}, T_{222}^{(3)}] &= 3T_{12}^{(3)} T_{12}^{(3)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[J_2^+, T_{222}^{(3)}] &= -3J_{3,-2}^+ J_{3,-2}^+ , \\
[J_{2,-1}^+, T_{222}^{(3)}] &= -3T_3^{(12)} J_{3,-2}^+ , \\
[T_2^{(11)}, T_{222}^{(3)}] &= -3T_3^{(12)} T_3^{(12)} .
\end{aligned}$$

- $[F, E]$

$$\begin{aligned} [T_2^{(3)}, T_3^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_0^{(2)}, & [T_2^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_1^{(2)}, \\ [T_{12}^{(3)}, T_3^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_1^{(2)}, & [T_{12}^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_{11}^{(2)}. \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{F}, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned} [J_{3,-2}^+, J_{22,-3}^+] &= J_2^+(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}), & [J_{3,-2}^+, T_{22}^{(13)}] &= J_{2,-1}^+(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}), \\ [T_3^{(12)}, J_{22,-3}^+] &= J_{2,-1}^+(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}), & [T_3^{(12)}, T_{22}^{(13)}] &= T_2^{(11)}(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}). \end{aligned}$$

- $[E, G]$

$$\begin{aligned} [T_3^{(22)}, T_{222}^{(33)}] &= (6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4)T_2^{(3)}, \\ [T_{13}^{(22)}, T_{222}^{(33)}] &= (6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4)T_{12}^{(3)}. \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{E}, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned} [J_{22,-3}^+, T_{33}^{(222)}] &= -J_{3,-2}(6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4), \\ [T_{22}^{(13)}, T_{33}^{(222)}] &= -T_3^{(12)}(6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4). \end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{R}]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(3)}, J_2^+] &= 6J_0T_2^{(3)}, & [T_0^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= 3T_0^{(1)}T_2^{(3)}, \\ [T_0^{(3)}, T_2^{(11)}] &= 0, & [T_1^{(3)}, J_2^+] &= 2(2J_0 - 1)T_{12}^{(3)}, \\ [T_1^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= (2T_1^{(1)} - J_0 + 1)T_2^{(3)}, & [T_1^{(3)}, T_2^{(11)}] &= -2T_0^{(1)}T_2^{(3)}, \\ [T_{11}^{(3)}, J_2^+] &= 2J_1^+T_{12}^{(3)}, & [T_{11}^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= (T_1^{(1)} - 2J_0 + 1)T_{12}^{(3)}, \\ [T_{11}^{(3)}, T_2^{(11)}] &= -2(2T_1^{(1)} + 1)T_2^{(3)}, & [T_{111}^{(3)}, J_2^+] &= 0, \\ [T_{111}^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= -3J_1^+T_{12}^{(3)}, & [T_{111}^{(3)}, T_2^{(11)}] &= -6T_1^{(1)}T_{12}^{(3)}. \end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, R]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_0^{(2)}] &= -6J_{3,-2}J_0, & [J_3^+, T_1^{(2)}] &= -3J_{3,-2}^+J_1^+, \\
[J_3^+, T_{11}^{(2)}] &= 0, & [J_{3,-1}^+, T_0^{(2)}] &= -2T_3^{(12)}(2J_0 - 1), \\
[J_{3,-1}^+, T_1^{(2)}] &= J_{3,-2}^+(J_0 - 2T_1^{(1)} - 1), & [J_{3,-1}^+, T_{11}^{(2)}] &= 2J_{3,-2}^+J_1^+, \\
[J_{3,-11}^+, T_0^{(2)}] &= -2T_3^{(12)}T_0^{(1)}, & [J_{3,-11}^+, T_1^{(2)}] &= T_3^{(12)}(2J_0 - T_1^{(1)} - 1), \\
[J_{3,-11}^+, T_{11}^{(2)}] &= 2J_{3,-2}^+(2T_1^{(1)} + 1), & [T_3^{(111)}, T_0^{(2)}] &= 0, \\
[T_3^{(111)}, T_1^{(2)}] &= 3T_3^{(12)}T_0^{(1)}, & [T_3^{(111)}, T_{11}^{(2)}] &= 6T_3^{(12)}T_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_0^{(2)}(J_0 + 3T_3^{(3)}), & [T_0^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_0^{(2)}T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_1^{(2)}(J_0 + 2T_3^{(3)}), & [T_1^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_0^{(2)}(T_1^{(1)} - T_3^{(3)}), \\
[T_{11}^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_{11}^{(2)}(J_0 + T_3^{(3)}), & [T_{11}^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_1^{(2)}(T_1^{(1)} - 2T_3^{(3)}), \\
[T_{111}^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_{11}^{(2)}J_1^+, & [T_{111}^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_{11}^{(2)}(T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)}).
\end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, F]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_2^{(3)}] &= -(J_0 + 3T_3^{(3)})J_2^+, & [J_3^+, T_{12}^{(3)}] &= -J_1^+J_2^+, \\
[J_{3,-1}^+, T_2^{(3)}] &= -(J_0 + 2T_3^{(3)})J_{2,-1}^+, & [J_{3,-1}^+, T_{12}^{(3)}] &= (T_3^{(3)} - T_1^{(1)})J_2^+, \\
[J_{3,-11}^+, T_2^{(3)}] &= -(J_0 + T_3^{(3)})T_2^{(11)}, & [J_{3,-11}^+, T_{12}^{(3)}] &= (2T_3^{(3)} - T_1^{(1)})J_{2,-1}^+, \\
[T_3^{(111)}, T_2^{(3)}] &= -T_0^{(1)}T_2^{(11)}, & [T_3^{(111)}, T_{12}^{(3)}] &= (3T_3^{(3)} - T_1^{(1)})T_2^{(11)}.
\end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 3T_2^{(3)}T_2^{(3)}, & [T_0^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= 0, \\
[T_1^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 2T_{12}^{(3)}T_2^{(3)}, & [T_1^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_2^{(3)}T_2^{(3)}, \\
[T_{11}^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= T_{12}^{(3)}T_{12}^{(3)}, & [T_{11}^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -2T_{12}^{(3)}T_2^{(3)}, \\
[T_{111}^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 0, & [T_{111}^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -3T_{12}^{(3)}T_{12}^{(3)}.
\end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, E]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_3^{(22)}] &= -J_{3,-2}^+ J_{3,-2}^+ , & [J_3^+, T_{13}^{(22)}] &= 0 , \\
[J_{3,-1}^+, T_3^{(22)}] &= -2J_{3,-2} T_3^{(12)} , & [J_{3,-1}^+, T_{13}^{(22)}] &= J_{3,-2}^+ J_{3,-2}^+ , \\
[J_{3,-11}^+, T_3^{(22)}] &= -T_3^{(12)} T_3^{(12)} , & [J_{3,-11}^+, T_{13}^{(22)}] &= 2J_{3,-2} T_3^{(12)} , \\
[T_3^{(111)}, T_3^{(22)}] &= 0 , & [T_3^{(111)}, T_{13}^{(22)}] &= 3T_3^{(12)} T_3^{(12)} .
\end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_0^{(2)} T_3^{(22)} , \\
[T_1^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_1^{(2)} T_3^{(22)} , \\
[T_{11}^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_{11}^{(2)} T_3^{(22)} , \\
[T_{111}^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_{11}^{(2)} T_{13}^{(22)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, G]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_{222}^{(33)}] &= -2J_{22,-3}^+ J_2^+ , \\
[J_{3,-1}^+, T_{222}^{(33)}] &= -2J_{22,-3}^+ J_{2,-1}^+ , \\
[J_{3,-11}^+, T_{222}^{(33)}] &= -2J_{22,-3}^+ T_2^{(11)} , \\
[T_3^{(111)}, T_{222}^{(33)}] &= -2T_{22}^{(13)} T_2^{(11)} .
\end{aligned}$$

- $[R, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= 2T_3^{(22)} , & [T_0^{(2)}, T_3^{(12)}] &= 0 , \\
[T_1^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= T_{13}^{(22)} , & [T_1^{(2)}, T_3^{(12)}] &= -T_3^{(22)} , \\
[T_{11}^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= 0 , & [T_{11}^{(2)}, T_3^{(12)}] &= -2T_{13}^{(22)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{R}, F]$

$$\begin{aligned}
[J_2^+, T_2^{(3)}] &= -2J_{22,-3}^+, & [J_2^+, T_{12}^{(3)}] &= 0, \\
[J_{2,-1}^+, T_2^{(3)}] &= -T_{22}^{(13)}, & [J_{2,-1}^+, T_{12}^{(3)}] &= J_{22,-3}^+, \\
[T_2^{(11)}, T_2^{(3)}] &= 0, & [T_2^{(11)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{22}^{(13)}.
\end{aligned}$$

- $[R, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= 2T_2^{(3)}(J_0 + T_2^{(2)}), & [T_0^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_2^{(3)}T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= T_{12}^{(3)}(2J_0 + T_2^{(2)}), & [T_1^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= T_2^{(3)}(2T_1^{(1)} - T_2^{(2)}), \\
[T_{11}^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= 2T_{12}^{(3)}J_1^+, & [T_{11}^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_{12}^{(3)}(T_1^{(1)} - T_2^{(2)}).
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{R}, E]$

$$\begin{aligned}
[J_2^+, T_3^{(22)}] &= -2(J_0 + T_2^{(2)})J_{3,-2}^+, & [J_2^+, T_{13}^{(22)}] &= -2J_1^+J_{3,-2}^+, \\
[J_{2,-1}^+, T_3^{(22)}] &= -(2J_0 + T_2^{(2)})T_2^{(12)}, & [J_{2,-1}^+, T_{13}^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_1^{(1)})J_{3,-2}^+, \\
[T_2^{(11)}, T_3^{(22)}] &= -2T_0^{(1)}T_3^{(12)}, & [T_2^{(11)}, T_{13}^{(22)}] &= 2(T_2^{(2)} - T_1^{(1)})T_3^{(12)}.
\end{aligned}$$

- $[F, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_2^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= T_{222}^{(33)}, & [T_2^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= 0, \\
[T_{12}^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 0, & [T_{12}^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_{222}^{(33)}.
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{F}, E]$

$$\begin{aligned}
[J_{3,-2}^+, T_3^{(22)}] &= -T_{33}^{(222)}, & [J_{3,-2}^+, T_{13}^{(22)}] &= 0, \\
[T_3^{(12)}, T_3^{(22)}] &= 0, & [T_3^{(12)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{33}^{(222)}.
\end{aligned}$$

- $[F, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned} [T_2^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= (2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3)T_3^{(22)} , \\ [T_{12}^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= (2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3)T_{13}^{(22)} . \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{F}, G]$

$$\begin{aligned} [J_{3,-2}^+, T_{222}^{(33)}] &= -J_{22,-3}^+(2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3) , \\ [T_3^{(12)}, T_{222}^{(33)}] &= -T_{22}^{(13)}(2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3) . \end{aligned}$$

- $[B, L]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(1)}, T_0^{(3)}] &= 0 , & [T_0^{(1)}, T_1^{(3)}] &= T_0^{(3)} , & [T_0^{(1)}, T_{11}^{(3)}] &= 2T_1^{(3)} , \\ [T_0^{(1)}, T_{111}^{(3)}] &= 3T_{11}^{(3)} , & [T_1^{(1)}, T_0^{(3)}] &= 0 , & [T_1^{(1)}, T_1^{(3)}] &= T_1^{(3)} , \\ [T_1^{(1)}, T_{11}^{(3)}] &= 2T_{11}^{(3)} , & [T_1^{(1)}, T_{111}^{(3)}] &= 3T_{111}^{(3)} , & [T_2^{(2)}, T_0^{(3)}] &= 0 , \\ [T_2^{(2)}, T_1^{(3)}] &= 0 , & [T_2^{(2)}, T_{11}^{(3)}] &= 0 , & [T_2^{(2)}, T_{111}^{(3)}] &= 0 , \\ [T_3^{(3)}, T_0^{(3)}] &= -T_0^{(3)} , & [T_3^{(3)}, T_1^{(3)}] &= -T_1^{(3)} , & [T_3^{(3)}, T_{11}^{(3)}] &= -T_{11}^{(3)} , \\ [T_3^{(3)}, T_{111}^{(3)}] &= -T_{111}^{(3)} , & [J_0, T_0^{(3)}] &= -3T_0^{(3)} , & [J_0, T_1^{(3)}] &= -2T_1^{(3)} , \\ [J_0, T_{11}^{(3)}] &= -T_{11}^{(3)} , & [J_0, T_{111}^{(3)}] &= 0 , & [J_1^+, T_0^{(3)}] &= -3T_1^{(3)} , \\ [J_1^+, T_1^{(3)}] &= -2T_{11}^{(3)} , & [J_1^+, T_{11}^{(3)}] &= -T_{111}^{(3)} , & [J_1^+, T_{111}^{(3)}] &= 0 . \end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{L}]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(1)}, J_3^+] &= 3J_{3,-1}^+ , & [T_0^{(1)}, J_{3,-1}^+] &= 2J_{3,-11}^+ , & [T_0^{(1)}, J_{3,-11}^+] &= T_3^{(111)} , \\ [T_0^{(1)}, T_3^{(111)}] &= 0 , & [T_1^{(1)}, J_3^+] &= 0 , & [T_1^{(1)}, J_{3,-1}^+] &= -J_{3,-1}^+ , \\ [T_1^{(1)}, J_{3,-11}^+] &= -2J_{3,-11}^+ , & [T_1^{(1)}, T_3^{(111)}] &= -3T_3^{(111)} , & [T_2^{(2)}, J_3^+] &= 0 , \\ [T_2^{(2)}, J_{3,-1}^+] &= 0 , & [T_2^{(2)}, J_{3,-11}^+] &= 0 , & [T_2^{(2)}, T_3^{(111)}] &= 0 , \\ [T_3^{(3)}, J_3^+] &= J_3^+ , & [T_3^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= J_{3,-1}^+ , & [T_3^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= J_{3,-11}^+ , \\ [T_3^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_3^{(111)} , & [J_0, J_3^+] &= 3J_3^+ , & [J_0, J_{3,-1}^+] &= 2J_{3,-1}^+ , \\ [J_0, J_{3,-11}^+] &= J_{3,-11}^+ , & [J_0, T_3^{(111)}] &= 0 , & [J_1^+, J_3^+] &= 0 , \\ [J_1^+, J_{3,-1}^+] &= -J_3^+ , & [J_1^+, J_{3,-11}^+] &= -2J_{3,-1}^+ , & [J_1^+, T_3^{(111)}] &= -3J_{3,-11}^+ . \end{aligned}$$

- $[B, R]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_0^{(2)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_1^{(2)}] &= T_0^{(2)}, & [T_0^{(1)}, T_{11}^{(2)}] &= 2T_1^{(2)}, \\
[T_1^{(1)}, T_0^{(2)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, T_1^{(2)}] &= T_1^{(2)}, & [T_1^{(1)}, T_{11}^{(2)}] &= 2T_{11}^{(2)}, \\
[T_2^{(2)}, T_0^{(2)}] &= -T_0^{(2)}, & [T_2^{(2)}, T_1^{(2)}] &= -T_1^{(2)}, & [T_2^{(2)}, T_{11}^{(2)}] &= -T_{11}^{(2)}, \\
[T_3^{(3)}, T_0^{(2)}] &= 0, & [T_3^{(3)}, T_1^{(2)}] &= 0, & [T_3^{(3)}, T_{11}^{(2)}] &= 0, \\
[J_0, T_0^{(2)}] &= -2T_0^{(2)}, & [J_0, T_1^{(2)}] &= -T_1^{(2)}, & [J_0, T_{11}^{(2)}] &= 0, \\
[J_1^+, T_0^{(2)}] &= -2T_1^{(2)}, & [J_1^+, T_1^{(2)}] &= -T_{11}^{(2)}, & [J_1^+, T_{11}^{(2)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{R}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, J_2^+] &= 2J_{2,-1}^+, & [T_0^{(1)}, J_{2,-1}^+] &= T_2^{(11)}, & [T_0^{(1)}, T_2^{(11)}] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, J_2^+] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_{2,-1}^+] &= -J_{2,-1}^+, & [T_1^{(1)}, T_2^{(11)}] &= -2T_2^{(11)}, \\
[T_2^{(2)}, J_2^+] &= J_2^+, & [T_2^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= J_{2,-1}^+, & [T_2^{(2)}, T_2^{(11)}] &= T_2^{(11)}, \\
[T_3^{(3)}, J_2^+] &= 0, & [T_3^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= 0, & [T_3^{(3)}, T_2^{(11)}] &= 0, \\
[J_0, J_2^+] &= 2J_2^+, & [J_0, J_{2,-1}^+] &= J_{2,-1}^+, & [J_0, T_2^{(11)}] &= 0, \\
[J_1^+, J_2^+] &= 0, & [J_1^+, J_{2,-1}^+] &= -J_2^+, & [J_1^+, T_2^{(11)}] &= -2J_{2,-1}^+.
\end{aligned}$$

- $[B, F]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_2^{(3)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_{12}^{(3)}] &= T_2^{(3)}, & [T_1^{(1)}, T_2^{(3)}] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{12}^{(3)}, & [T_2^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_2^{(3)}, & [T_2^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{12}^{(3)}, \\
[T_3^{(3)}, T_2^{(3)}] &= -T_2^{(3)}, & [T_3^{(3)}, T_{12}^{(3)}] &= -T_{12}^{(3)}, & [J_0, T_2^{(3)}] &= -T_2^{(3)}, \\
[J_0, T_{12}^{(3)}] &= 0, & [J_1^+, T_2^{(3)}] &= -T_{12}^{(3)}, & [J_1^+, T_{12}^{(3)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, J_{3,-2}^+] &= T_3^{(12)}, & [T_0^{(1)}, T_3^{(12)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_{3,-2}^+] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_3^{(12)}] &= -T_3^{(12)}, & [T_2^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-2}^+, & [T_2^{(2)}, T_3^{(12)}] &= -T_3^{(12)}, \\
[T_3^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= J_{3,-2}^+, & [T_3^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_3^{(12)}, & [J_0, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-2}^+, \\
[J_0, T_3^{(12)}] &= 0, & [J_1^+, J_{3,-2}^+] &= 0, & [J_1^+, T_3^{(12)}] &= -J_{3,-2}^+.
\end{aligned}$$

- $[B, E]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_3^{(22)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_{13}^{(22)}] &= T_3^{(22)}, & [T_1^{(1)}, T_3^{(22)}] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{13}^{(22)}, & [T_2^{(2)}, T_3^{(22)}] &= -2T_3^{(22)}, & [T_2^{(2)}, T_{13}^{(22)}] &= -2T_{13}^{(22)}, \\
[T_3^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_3^{(22)}, & [T_3^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{13}^{(22)}, & [J_0, T_3^{(22)}] &= -T_3^{(22)}, \\
[J_0, T_{13}^{(22)}] &= 0, & [J_1^+, T_3^{(22)}] &= -T_{13}^{(22)}, & [J_1^+, T_{13}^{(22)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, J_{22,-3}^+] &= T_{22}^{(13)}, & [T_0^{(1)}, T_{22}^{(13)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_{22,-3}^+] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_{22}^{(13)}, & [T_2^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= 2J_{22,-3}^+, & [T_2^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_{22}^{(13)}, \\
[T_3^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= -J_{22,-3}^+, & [T_3^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_{22}^{(13)}, & [J_0, J_{22,-3}^+] &= J_{22,-3}^+, \\
[J_0, T_{22}^{(13)}] &= 0, & [J_1^+, J_{22,-3}^+] &= 0, & [J_1^+, T_{22}^{(13)}] &= -J_{22,-3}^+.
\end{aligned}$$

- $[B, G]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_{222}^{(33)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, T_{222}^{(33)}] &= 0, & [T_2^{(2)}, T_{222}^{(33)}] &= 3T_{222}^{(33)}, \\
[T_3^{(3)}, T_{222}^{(33)}] &= -2T_{222}^{(33)}, & [J_0, T_{222}^{(33)}] &= 0, & [J_1^+, T_{222}^{(33)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_{33}^{(222)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, T_{33}^{(222)}] &= 0, & [T_2^{(2)}, T_{33}^{(222)}] &= -3T_{33}^{(222)}, \\
[T_3^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_{33}^{(222)}, & [J_0, T_{33}^{(222)}] &= 0, & [J_1^+, T_{33}^{(222)}] &= 0.
\end{aligned}$$

• $[L, \mathcal{L}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, J_3^+] &= J_0(J_0 + 1)(J_0 + 2) + 9T_3^{(3)}J_0(J_0 - 1) + 6T_3^{(3)} , \\
[T_0^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= (J_0 + 1)(J_0 + 2)T_0^{(1)} + 6T_3^{(3)}J_0T_0^{(1)} , \\
[T_0^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= T_0^{(1)}T_0^{(1)}(J_0 + 3T_3^{(3)}) , \\
[T_0^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_0^{(1)}T_0^{(1)}T_0^{(1)} , \\
[T_1^{(3)}, J_3^+] &= J_1^+(J_0 + 1)(J_0 + 2) + 6J_1^+T_3^{(3)}J_0 , \\
[T_1^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= T_1^{(1)}J_0(J_0 + 1) - T_3^{(3)}J_0(J_0 - 3) - 2T_3^{(3)}T_1^{(1)}(2J_0 + 1) - 2T_3^{(3)} , \\
[T_1^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= T_1^{(1)}(J_0 + 2T_3^{(3)} + 1)T_0^{(1)} - 2T_3^{(3)}(J_0 - 1)T_0^{(1)} , \\
[T_1^{(3)}, T_3^{(111)}] &= (T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)})T_0^{(1)}T_0^{(1)} , \\
[T_{11}^{(3)}, J_3^+] &= (J_0 + 3T_3^{(3)})J_1^+J_1^+ , \\
[T_{11}^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= J_1^+T_1^{(1)}(J_0 + 2T_3^{(3)} + 1) - 2J_1^+T_3^{(3)}(J_0 - 1) , \\
[T_{11}^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= -2T_3^{(3)}(J_0 - 1) - T_3^{(3)}T_1^{(1)}(4J_0 - 3) + T_1^{(1)}T_1^{(1)}(J_0 + T_3^{(3)}) - T_1^{(1)}J_0 , \\
[T_{11}^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_1^{(1)}T_1^{(1)}T_0^{(1)} - T_1^{(1)}T_0^{(1)} - 6T_3^{(3)}T_0^{(1)} - 6T_1^{(1)}T_3^{(3)}T_0^{(1)} , \\
[T_{111}^{(3)}, J_3^+] &= J_1^+J_1^+J_1^+ , \\
[T_{111}^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= J_1^+J_1^+(T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)}) , \\
[T_{111}^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= J_1^+T_1^{(1)}T_1^{(1)} - J_1^+T_1^{(1)} - 6J_1^+T_3^{(3)} - 6J_1^+T_1^{(1)}T_3^{(3)} , \\
[T_{111}^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_1^{(1)}T_1^{(1)}T_1^{(1)} - 3T_1^{(1)}T_1^{(1)} + 2T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)}(3T_1^{(1)}T_1^{(1)} + 3T_1^{(1)} + 2) .
\end{aligned}$$

- $[R, \mathfrak{R}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, J_2^+] &= J_0(J_0 + 1) + 4T_2^{(2)}J_0 - 2T_2^{(2)}, \\
[T_0^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= T_0^{(1)}(J_0 + 2T_2^{(2)}), \\
[T_0^{(2)}, T_2^{(11)}] &= T_0^{(1)}T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(2)}, J_2^+] &= (J_0 + 2T_2^{(2)})J_1^+, \\
[T_1^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= T_1^{(1)}J_0 - T_2^{(2)}J_0 + T_2^{(2)} + T_1^{(1)}T_2^{(2)}, \\
[T_1^{(2)}, T_2^{(11)}] &= (T_1^{(1)} - 2T_2^{(2)})T_0^{(1)}, \\
[T_{11}^{(2)}, J_2^+] &= J_1^+J_1^+, \\
[T_{11}^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= J_1^+(T_1^{(1)} - 2T_2^{(2)}), \\
[T_{11}^{(2)}, T_2^{(11)}] &= T_1^{(1)}T_1^{(1)} - T_1^{(1)} - 2T_2^{(2)} - 4T_2^{(2)}T_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

- $[F, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_2^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_2^{(2)}J_0 - T_3^{(3)}J_0 + T_3^{(3)} + T_2^{(2)}T_3^{(3)}, \\
[T_2^{(3)}, T_3^{(12)}] &= (T_2^{(2)} - T_3^{(3)})T_0^{(1)}, \\
[T_{12}^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= J_1^+(T_2^{(2)} - T_3^{(3)}), \\
[T_{12}^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_1^{(1)}T_2^{(2)} - T_3^{(3)}T_1^{(1)} - T_3^{(3)}T_2^{(2)} - T_3^{(3)}.
\end{aligned}$$

- $[E, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_3^{(22)}, J_{22,-3}^+] &= T_2^{(2)}(T_2^{(2)} - 1)(T_3^{(3)} - J_0 + 1) + 4T_2^{(2)}T_3^{(3)}J_0 + 2T_3^{(3)}J_0, \\
[T_3^{(22)}, T_{22}^{(13)}] &= (2T_3^{(3)} + 4T_2^{(2)}T_3^{(3)} - T_2^{(2)}T_2^{(2)} + T_2^{(2)})T_0^{(1)}, \\
[T_{13}^{(22)}, J_{22,-3}^+] &= J_1^+(2T_3^{(3)} + 4T_2^{(2)}T_3^{(3)} - T_2^{(2)}T_2^{(2)} + T_2^{(2)}), \\
[T_{13}^{(22)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_1^{(1)}T_3^{(3)} + 4T_1^{(1)}T_2^{(2)}T_3^{(3)} - T_2^{(2)}(T_2^{(2)} - 1)(T_3^{(3)} + T_1^{(1)} + 1).
\end{aligned}$$

- $[G, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[T_{222}^{(33)}, T_{33}^{(222)}] &= 4T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_3^{(3)} - 9T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_3^{(3)}T_3^{(3)} + 2T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_2^{(2)} \\
&\quad - 9T_2^{(2)}T_3^{(3)}T_3^{(3)} - 3T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_3^{(3)} + 17T_2^{(2)}T_3^{(3)} - 6T_2^{(2)}T_2^{(2)} \\
&\quad - 6T_3^{(3)}T_3^{(3)} + 4T_2^{(2)} + 6T_3^{(3)}.
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Quantum integrable systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **94** (1983) 313-393
- [2] K. G. Boreskov, A. V. Turbiner and J. C. López Vieyra, *Solvability of the Hamiltonians related to exceptional root spaces: rational case*, Comm. Math. Phys. **260** (2005) 17-44
- [3] K. G. Boreskov, A. V. Turbiner and J. C. López Vieyra, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials*, Cont. Math. **471** (2008) 15-31
- [4] J. C. López Vieyra, M. A. G. García and A. V. Turbiner, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials. II. E_7 case*, Mod. Phys. Letts. A **24** (2009) 1995-2004
- [5] O. Haschke and W. Rühl, *An exactly solvable model of the Calogero type for the icosahedral group*, Mod. Phys. Letts. A **13** (1998) 3109-3121
- [6] J. Patera and R. Twarock, *Affine extensions of noncrystallographic Coxeter groups and quasicrystals*, J. Phys. A **35** (2002) 1551-1574
- [7] A. Bordner, N. Manton and R. Sasaki, *Calogero-Moser models. V. Supersymmetry and Quantum Lax Pairs*, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 463-487
- [8] R. Twarock, *A toolkit for the construction of icosahedral particles with local symmetry axes*, arXiv: q-bio/0508015v1
- [9] A. V. Turbiner, *Perturbations of integrable systems and Dyson-Mehta integrals*, pp. 263-310 in *Superintegrability in Classical and Quantum Systems*, CRM Proc. Lecture Notes, no.37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004

- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press (Oxford - New York - Toronto - Sydney - Paris - Frankfurt), 1977
- [11] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Math., no. 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990
- [12] J. Fuchs and C. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations. A graduate course for physicists*, Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997
- [13] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite Reflection Groups*, Graduate Texts in Mathematics 99, Springer-Verlag, New York, USA, 1985
- [14] F. Klein, *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover Publications, New York, USA, 1956
- [15] S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, lecture notes for the IAS/Park City Graduate Summer School in Combinatorics, arXiv: math/0505518v3 [math.CO].