



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**DISPERSIÓN INVERSA MULTIDIMENSIONAL EN
UN CAMPO ELÉCTRICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**F Í S I C O
P R E S E N T A:**

GERARDO DANIEL VALENCIA MARTÍNEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. RICARDO ALBERTO WEDER
ZANINOVICH
2010**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Dispersión inversa multidimensional en un campo eléctrico

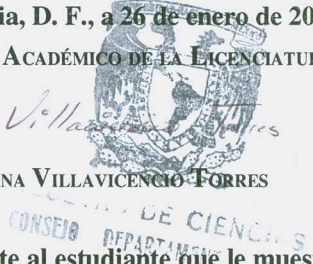
realizado por **Valencia Martínez Gerardo Daniel** con número de cuenta **0-9561922-6** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Física**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Rafael René Del Río Castillo
Propietario	Dr. Pablo Barberis Blostein
Propietario Tutor	Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich
Suplente	Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero
Suplente	Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz

[Handwritten signatures in blue ink: Rafael René Del Río Castillo, Pablo Barberis, Ricardo Alberto Weder Zaninovich, María de los Ángeles Sandoval Romero, Juan Héctor Arredondo Ruiz]

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 26 de enero de 2010
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

[Handwritten signature: Mirna Villavicencio Forres]
M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO FORRES



Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

'nlm.

Agradecimientos

Por su apoyo y cariño a lo largo de toda mi vida, les estoy infinitamente agradecido a mis padres, hermanos, abuelos, tíos y primos.

Por su ayuda incondicional, por su tiempo y amor, por estar presente en cada momento, mis más sinceros agradecimientos a Elizabeth.

Por ser un excelente maestro y consejero, por su ayuda y dirección durante estos años, agradezco al Dr. Ricardo Weder.

Por su amistad a lo largo de estos años, un especial agradecimiento para Armando, Elsa, Enrique, Fabiola, Fany, Félix, Guadalupe, Jairo, Javier, Joaquín, Jesus, Laura, Marco, María Elena, Miguel, Nahela, Noé, Paul, Sabino. En general a todos los compañeros que he tenido a lo largo de mi vida.

Por la educación que he recibido agradezco tanto a la Universidad Nacional Autónoma de México como al Instituto Politécnico Nacional, y a los muchos buenos maestros que he tenido.

Por el apoyo económico agradezco: Por medio de becas, a la Coordinación de Posgrado en Ciencias Matemáticas de la Facultad de Ciencias (FC-UNAM), al Sistema Nacional de Investigadores (SNI) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT); por medio de trabajo, al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM(FC-UNAM), al Grupo Integer, a la Universidad Anáhuac México Norte y a la Universidad Interamericana para el Desarrollo.

Quiero agradecer también al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS) y al Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA) Paris-Rocquencourt por haberme permitido usar sus instalaciones para el desarrollo de esta tesis.

Índice general

Índice general	3
1. Introducción	5
1.1. Características físicas de los sistemas de dispersión	6
1.2. Distintos tipos de dispersión	7
1.3. Cantidades observables	9
1.4. Problemas inversos en la física	10
1.5. Dispersión inversa en mecánica cuántica	11
1.6. Alcance de la tesis	13
1.7. Trabajos posteriores a la tesis	13
2. Espacios de Hilbert y Operadores Lineales	15
2.1. Espacios L^p	15
2.2. Espacios de Hilbert	16
2.3. Operadores lineales en espacios de Hilbert	20
2.4. Transformada de Fourier	27
2.5. Teoría de Perturbaciones. Hamiltonianos de - Schrödinger	29
2.6. Operadores de Schrödinger con potenciales singulares	32
2.7. Operadores Hilbert-Schmidt	34
2.8. Operadores compactos	36
3. Grupos de Evolución	39
3.1. Grupos de evolución y sus generadores infinitesimales	39
3.2. Cálculo funcional	42
3.3. Propiedades ergódicas de los grupos de evolución	45
3.4. El grupo de evolución libre de Schrödinger	50
4. Propiedades asintóticas de los grupos de evolución	53
4.1. Estados ligados, estados de dispersión y estados de absorción	54
4.2. Operadores de onda	60
4.3. Condiciones abstractas para la existencia y la completitud de los operadores de onda	64
4.4. Completitud asintótica para los operadores de Schrödinger	69
4.5. Potenciales de rango largo	75

5. Teoría de la dispersión	79
5.1. El operador de dispersión y la matriz S	80
6. Formulación general de la dispersión multicanal	85
6.1. Agrupamiento de partículas	85
6.2. La condición asintótica	90
6.3. Canales de dispersión	95
7. Dispersión inversa multidimensional en un campo eléctrico	101
7.1. Resumen	101
7.2. Introducción	101
7.3. El caso de dos cuerpos	109
7.4. El caso de N cuerpos	117
8. Apéndice	125
Referencias	149

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del desarrollo de la física, se ha visto que una pregunta ha sido fundamental en su historia, la pregunta es la de conocer las leyes que gobiernan el comportamiento de los sistemas físicos. Durante el desarrollo de las ciencias físicas se han venido realizando experimentos que se fundamentan en un fenómeno físico conocido con el nombre de dispersión y que han otorgado muchas respuestas para poder dar a conocer al mundo algunas de las leyes que actualmente rigen el mundo atómico; por mencionar algunos de los experimentos que se desarrollan actualmente bajo este fenómeno están: los experimentos de espectroscopía, de difracción, y de colisiones dentro de aceleradores de partículas.

En esta parte introductoria se habla de lo que es el fenómeno de dispersión a rasgos generales para después dar el tratamiento matemático necesario para la comprensión total del problema.

La teoría de dispersión es una herramienta que ayuda a explicar algunos de los fenómenos del mundo atómico, forma una parte importante de la gran teoría de la física que se conoce como Mecánica Cuántica (también es importante en la Mecánica Clásica). Existen muchas variedades de experimentos de dispersión, pero en general dichos experimentos constan de cuatro partes esenciales que son:

- (a) La fuente, que es un aparato que producirá las partículas que han de interactuar con las que se encuentran en el blanco. Aquí es importante mencionar que la fuente debe producir partículas de manera repetida, continua y bajo prácticamente las mismas condiciones, esto es porque todos los experimentos de dispersión involucran mediciones repetidas para sistemas que son idénticos.
- (b) Un aparato “preparador” (que puede ser por ejemplo un “colimador”, el rayo de un espectrómetro, o un polarizador), y que sirve para definir las condiciones iniciales de las partículas idénticas que van incidiendo en él.
- (c) El blanco, que contiene a las partículas que interactuarán con las partes incidentes. Las condiciones en que se encuentre el blanco influirán mucho en las mediciones, por lo que deben conocerse para poder dar la interpretación correcta. Por ejemplo, si el blanco es grueso entonces será posible observar dispersión

múltiple, y si por ejemplo, el blanco tiene estructura cristalina entonces será posible observar un patrón de difracción. Por otro lado, si se trata de un blanco móvil (por ejemplo un gas) entonces ese efecto también será reflejado en las mediciones que se realicen. La interpretación más sencilla de los resultados se encuentra cuando el blanco es muy fino y contiene una distribución aleatoria de partículas en reposo.

- (d) El detector, que es un aparato que se encarga de registrar los resultados y que usualmente se encuentra en un lugar en el que sea posible detectar únicamente las partículas dispersadas, dicho de otra forma, si el blanco se retira del arreglo experimental entonces el detector no registra nada. En la práctica esta condición no es tan fácil de llevar a cabo pues no siempre es posible tener un rayo lo suficientemente bien colimado, o porque existen residuos de dispersión en el material debido a otras interacciones (es por ello la importancia de la buena calibración del detector). También es muy importante situar al detector lo suficientemente lejos del blanco para que no detecte las interacciones entre las partículas dispersadas y las partículas del blanco. En casi todos los casos el detector tiene un ángulo finito de resolución, lo mejor que se puede hacer es que dicho ángulo sea lo suficientemente pequeño para tener mejores mediciones, pero también es cierto que existen ciertas limitaciones físicas que no permiten hacer la resolución muy precisa, y estos mismos problemas suceden con el aparato “preparador”.

1.1. Características físicas de los sistemas de dispersión

Las características físicas esenciales de un sistema de dispersión son las siguientes:

En un proceso de dispersión debemos distinguir tres momentos en la evolución temporal del sistema. En el primer momento el estado del sistema se encuentra en el pasado remoto. Durante este momento la partícula incidente y la partícula del blanco se encuentran lo suficientemente lejanas como para poder despreciar la interacción entre ellas, en términos de teoría de dispersión clásica las partículas incidentes se comportan como partículas libres. De esta forma se espera que el estado del sistema evolucione en este primer momento obedeciendo las leyes que rigen el comportamiento de las partículas libres.

Durante el segundo momento las partículas interaccionan mutuamente y la evolución del sistema es gobernada por una ecuación de movimiento para la cuál el término de interacción desempeña un papel fundamental. Es en el momento de la interacción que la dispersión ocurre.

Para el tercer momento uno se encuentra en una situación análoga que en el primer momento. De hecho, cuando el fenómeno de dispersión ha ocurrido, las partículas se han alejado de tal forma que la interacción mutua es nuevamente despreciable y no tiene efecto en el futuro de la evolución del sistema. En el futuro del sistema, el detector,

observa el nuevo estado de las partículas ocasionado por el proceso de dispersión.

La condición de que los estados que describen los fenómenos de dispersión deban ser caracterizables en el tiempo remotamente pasado ($-\infty$) y en el tiempo remotamente lejano ($+\infty$) por cantidades que conciernen a la dinámica de partículas libres, se conoce como la condición asintótica. Para poder describir dicha condición en términos matemáticos es necesario estudiar la descripción de la evolución en el tiempo de sistemas mecánico cuánticos (se puede hacer para los sistemas mecánico clásicos) y también es necesario introducir una topología (una noción de convergencia) que servirá para expresar la diferencia entre el sistema perturbado y el sistema libre (en el pasado remoto y el futuro lejano). En la próxima sección se entrará de lleno a este planteamiento.

1.2. Distintos tipos de dispersión

Hasta el momento no hemos hecho distinción entre los distintos tipos de dispersión. El proceso más simple de dispersión es la dispersión elástica entre distintas partículas. Este proceso puede representarse simbólicamente por una expresión tal como la siguiente:

$$a + b \rightarrow a + b. \quad (1.1)$$

Esta expresión indica que las partículas a y b en algún estado inicial son dispersadas en las partículas a y b en algún estado final. El término elástico se refiere al hecho de que la energía cinética total de las partículas antes y después es la misma. Un caso especial de la dispersión elástica es la dispersión entre partículas idénticas.

$$a + a \rightarrow a + a. \quad (1.2)$$

Cuando las partículas incidentes o el blanco tienen grados internos de libertad es posible que durante el proceso de dispersión una de las partículas sufra un cambio en su estado interno. Si esto sucede entonces la energía cinética de las partículas antes y después de la dispersión ya no es la misma y se habla entonces de dispersión inelástica. El caso más frecuente es la excitación de un estado interno, la energía cinética final es menor en una cantidad igual a la energía de excitación. Esta se llama dispersión hypoeelástica o endoérgica. Es, sin embargo, también posible que algunos estados excitados metaestables de una de las partículas se desexciten durante el proceso de dispersión. En este caso la energía cinética final es mayor que la inicial, y podemos hablar de dispersión hyperelástica o exoérgica.

Otro tipo de dispersión asociado con los grados internos de libertad se observa cuando esos grados están degenerados en la energía. Es el caso para partículas con spin, el proceso de dispersión estaría todavía descrito por (1.1) pero debe tomarse en cuenta el efecto de la dispersión sobre los grados internos de libertad de las partículas incidentes. Esto da lugar a una gama de fenómenos interesantes de polarización los cuales pueden dar significativa información sobre la dependencia del espín sobre la interacción.

Un tipo enteramente diferente de dispersión se observa si las partículas salientes difieren en número y clase de las entrantes. Por ejemplo los constituyentes del haz incidente y los centros de dispersión en el blanco pueden no ser partículas elementales sino estructuras compuestas tales como partículas α , átomos de hidrógeno, etc., y durante el proceso de dispersión la interacción puede descomponer tales sistemas compuestos en algunos de sus partes constituyentes o reorganiza sus partes constituyentes en nuevos sistemas compuestos. Se habla entonces de reordenamientos de dispersión y se puede escribir esquemáticamente

$$a + b \rightarrow c + d + e + \dots \quad (1.3)$$

La teoría de la dispersión puede desarrollarse de tal manera que la dispersión elástica, dispersión inelástica, dispersión hiperelástica y la dispersión con reordenamiento pueden tratarse en una manera unificada. Esta teoría unificada se llama teoría de dispersión de multicanal.

Un ejemplo típico de dispersión multicanal es la dispersión de un deuteron d por un centro fijo de fuerza. Un deuteron puede ser dispersado elásticamente o puede ser descompuesto en sus partes constituyentes (un protón p y un neutrón n), de tal manera que tenemos dos posibilidades

$$d \begin{cases} \rightarrow d \\ \rightarrow p + n \end{cases}$$

Cada colección diferente posible de partículas y sistemas compuestos después de la colisión determina el llamado canal de dispersión. En el ejemplo anterior sólo hay dos canales de dispersión.

Otra razón para un cambio en el tipo y el número de partículas es la creación de nuevos tipos de partículas durante el proceso de dispersión. Estos procesos de creación se observan frecuentemente en dispersiones a altas energías; a suficientemente altas energías éstas están siempre presentes. Una colisión entre dos nucleones N_1 y N_2 , por ejemplo, se puede proceder de acuerdo a los esquemas

$$N_1 + N_2 \begin{cases} \rightarrow N_1 + N_2 & \text{canal elástico} \\ \rightarrow N_1 + N_2 + \pi \\ \rightarrow N_1 + N_2 + K + \bar{K} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \text{ varios canales inelásticos}$$

Aquí partículas nuevas, como mesones π y K , pueden ser creados, y ciertos canales finales claramente representan más que un simple reordenamiento de los constituyentes de N_1 y N_2 . La teoría de dispersión multicanal usual no incluye tales colisiones y su descripción teórica va más allá del alcance de este trabajo.

En todos los casos hemos considerado hasta el momento que el número inicial de partículas o sistemas compuestos, los cuales participan en una dispersión individual es siempre dos. Es lógicamente posible considerar procesos de dispersión con más de dos partículas iniciales. Tales situaciones rara vez se encuentran en el laboratorio debido a las dificultades experimentales para preparar tales estados. Estos experimentos juegan

un cierto rol en la teoría de gases densos. Pero en la física de partículas elementales no son importantes.

Otro caso de importancia, sin embargo, es aquella en la que sólo hay una partícula incidente. La evolución del estado de una sola partícula libre estable no da información sobre ninguna interacción. Si es inestable, sin embargo, decaerá en algunos fragmentos estables o inestables y es perfectamente posible mirar un decaimiento como un cierto tipo de proceso de dispersión degenerado de acuerdo con el esquema

$$a \rightarrow b + d + \dots \quad (1.4)$$

En este caso no se necesita ningún blanco para observar el proceso. Es posible considerar tal decaimiento de una partícula inestable como parte de un proceso de dispersión ordinario, debido a que la partícula inestable debió haberse creado en algún punto en el pasado gracias a otro proceso de dispersión ordinario. Esta manera de ver a los sistemas inestables es especialmente útil si el tiempo de vida de la partícula inestable es muy corto. Tenemos entonces un caso de dispersión resonante (formación y decaimiento de una resonancia). Esto se observa a menudo y es bien conocido en física nuclear donde las resonancias se asocian con algún estado excitado de corta duración de un núcleo intermedio.

Si la partícula inestable tiene un tiempo de vida suficientemente largo es posible producir efectos de dispersión ordinarios con ella y desarrollar una teoría donde la partícula es tratada con una suficientemente buena aproximación como una partícula estable.

1.3. Cantidades observables

Toda teoría física debe tener una interpretación en términos de ciertos efectos físicamente observables. Estos efectos usualmente se expresan dando valores numéricos de ciertas cantidades. Las cantidades principales que aparecen en la teoría de la dispersión son la sección transversal de dispersión, el tiempo de vida de una partícula inestable o el ancho de resonancia y la razón de bifurcación para procesos multicanal. Por las razones expuestas anteriormente el tiempo de vida es en cierto sentido una cantidad secundaria la cual puede relacionarse al comportamiento de la sección transversal en algún proceso de dispersión apropiado.

La razón de bifurcación (i.e. la probabilidad de la dispersión en un canal particular) en realidad no es una cantidad física independiente, debido a que se puede obtener si las secciones transversales individuales para los distintos canales son conocidos. A menudo es posible sobre la base de consideraciones de simetría, sin una teoría detallada, obtener expresiones para las razones de bifurcación sin el conocimiento de los valores de las secciones transversales.

Existe otro enfoque teórico, el cuál se conoce como el problema de dispersión inversa. En esta teoría se supone que ciertos datos experimentales, resultados de un proceso de dispersión son dados, entonces se encuentra una interacción (usualmente un potencial)

que produce precisamente los datos dados cuando se considera el problema de dispersión directa.

En las siguientes secciones se discutirán brevemente los conceptos sobre problemas inversos primero en general y después en el contexto de la mecánica cuántica; las siguientes secciones están basadas principalmente en el libro de Chadán y Sabatier [15] y en los contenidos del curso “Inverse scattering in Quantum Mechanics” impartido por el Dr. Ricardo Weder dentro de la escuela de primavera en mecánica clásica y cuántica realizada en el IIMAS-UNAM en el mes de marzo de 2008.

1.4. Problemas inversos en la física

El trabajo normal de los físicos puede pensarse esquemáticamente como una predicción del movimiento de las partículas sobre la base de fuerzas conocidas, o la propagación de radiación sobre la base de un conocimiento de la constitución de la materia. El problema inverso es el de concluir qué fuerzas o constituciones están sobre la base del movimiento observado. Una gran parte de nuestro contacto sensorial con el mundo que nos rodea depende de una solución intuitiva de un problema inverso: Inferimos la forma, el tamaño y la textura de la superficie de objetos externos a partir de dispersión y absorción de luz, la cuál es detectada por nuestros ojos. Cuando se usan experimentos de dispersión para conocer el tamaño o la forma de las partículas, o las fuerzas que unas ejercen sobre las otros, la naturaleza del problema es similar, o más refinada. La cinemática, las ecuaciones de movimiento, usualmente se suponen conocidas. Se investiga como son las fuerzas, y cómo varían de punto a punto.

La expresión matemática de una ley física es una regla que define una transformación \mathcal{M} de un conjunto de funciones \mathcal{C} , llamados los parámetros, en un conjunto de funciones \mathcal{E} llamadas los resultados. Esta regla usualmente es un conjunto E de ecuaciones, en los cuáles los parámetros son elementos de \mathcal{C} , las soluciones son los correspondientes elementos de \mathcal{E} , por lo tanto, la definición de \mathcal{M} está dada implícitamente. Sin embargo, a partir de la sola definición de una transformación, la solución de E debe existir y ser única en \mathcal{E} para cualquier elemento de \mathcal{C} . Esta es la única restricción que se le tiene que pedir a E . Llamamos resultados calculados a los elementos de \mathcal{E} los cuales son así obtenidos a partir de aquellos de \mathcal{C} . Derivar los resultados calculados para un elemento dado de \mathcal{C} se llama resolver el problema directo. Recíprocamente, obtener el subconjunto de \mathcal{C} que corresponde a un elemento dado de \mathcal{E} se llama resolver el problema inverso.

Para dar significado físico a \mathcal{M} , \mathcal{E} debe ser tal que sus elementos pueden ser comparados con los resultados experimentales. En lo que resta, suponemos que el resultado de cualquier medición relevante es un elemento de un subconjunto, \mathcal{E}_e de \mathcal{E} , llamado el conjunto de resultados experimentales. \mathcal{E} por lo tanto contiene la unión de los resultados experimentales y los resultados calculados. También se supone que a \mathcal{E} se le puede dar la estructura de un espacio métrico. La comparación de un resultado computado dado e_i , y un resultado experimental, e_j , es medido entonces por la distancia $d(e_i, e_j)$.

El conjunto \mathcal{C} fue definido como el conjunto de funciones para las cuales E puede

ser resuelta. Mayores limitaciones a menudo aparecen cuando las propiedades físicas se toman en cuenta. En otras palabras, \mathcal{C} podría ser el conjunto \mathcal{S} de todas las funciones para las cuales E puede resolverse y que son consistentes con toda la "información física" que proviene ya sea de los principios generales o a partir de medidas previas. Sin embargo, la definición de \mathcal{S} es, en la mayoría de los casos, indirecta y difícil para hacer precisa, y por eso, a uno se le deja la elección de \mathcal{C} como un subconjunto conveniente de \mathcal{S} , con una clara definición. Por otro lado, el intento de incrementar la definición de \mathcal{C} muchas veces da acceso a una nueva clase de parámetros para los cuales los problemas directo e inverso pueden resolverse.

Con estas definiciones, podría parecer que todos los problemas físicos son problemas inversos. Realmente, uno generalmente reserva este nombre para los problemas donde se buscan formas matemáticas precisas para las transformaciones inversas generalizadas de \mathcal{E} en \mathcal{C} . Esto excluye el llamado procedimiento de ajuste en el cuál los modelos que dependen de algunos parámetros y que dan un buen ajuste de los resultados experimentales son obtenidos por ensayo error o por otra técnica.

La primera persona que estudió problemas inversos de la clase que nosotros consideramos fue Lord Rayleigh (1877)[41], quien discutió la posibilidad de inferir la densidad de una cuerda por medio de sus frecuencias de vibración. Más recientemente, una generalización fue expuesta por Marc Kac (1966) [35] en su famoso artículo titulado: "Can one hear the shape of a drum?".

1.5. Dispersión inversa en mecánica cuántica

Con la invención de la ecuación de Schrödinger se incrementó enormemente la aplicabilidad de los problemas espectrales en ecuaciones diferenciales parciales a los problemas de la física: el tipo de ecuaciones que anteriormente tenían solamente aplicaciones a problemas de vibraciones mecánicas, se utilizarían ahora para la descripción de átomos y moléculas.

Nuestro tema de estudio son los problemas inversos de la teoría de dispersión (principalmente en mecánica cuántica). Así, los resultados experimentales son cantidades medidas en experimentos de dispersión, e.g., secciones transversales o cantidades relacionadas. Debido a que estas cantidades están relacionadas a un comportamiento asintótico de las funciones de onda, siempre consideraremos problemas donde el conjunto \mathcal{E} consiste de "medidas teóricas" de este comportamiento asintótico, e.g., la amplitud de dispersión o el cambio de fase. Esto lleva, de manera natural, al problema particular de construir la amplitud de dispersión a partir de la sección transversal. Dejando esta discusión, las ecuaciones E que definen la transformación \mathcal{M} consisten de una ecuación de onda (e.g., la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Dirac junto con las condiciones apropiadas). Los conjuntos \mathcal{C} de "parámetros" son conjuntos de "potenciales" locales o no locales, a partir de los cuales es posible predecir los resultados de dispersión.

Los problemas de dispersión inversos en mecánica cuántica han sido extensivamente estudiados desde el trabajo inicial de W. Heisenberg en la teoría de la matriz de disper-

sión en 1943 y 1944. En términos precisos, existen tres problemas de dispersión inversa en mecánica cuántica:

- Unicidad. Demostrar que el operador de dispersión determina unívocamente los potenciales.
- Reconstrucción. Dar métodos para reconstruir los potenciales a partir del operador de dispersión.
- Caracterización. Dar condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea el operador de dispersión asociado a un potencial, que pertenece a una cierta clase de potenciales dada.

Hay distintas maneras de proporcionar información de la dispersión. Por ejemplo, se puede dar el operador de dispersión para todas las energías, el límite de alta energía del operador de dispersión, o el operador de dispersión a energía fija.

Debido a que toda la información que se puede obtener sobre núcleos, partículas y subpartículas físicas se obtiene a partir de experimentos de dispersión, estos problemas son de importancia física obvia. Además, existe el problema muy relacionado de la dispersión inversa de ondas acústicas, electromagnéticas y elásticas, el cual tiene muchas aplicaciones tecnológicas, por ejemplo, la tomografía.

Su interés intrínseco, como problemas matemáticos, aparece en su conexión con varias ramas del análisis: resultados avanzados en teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, análisis armónico, teoría espectral de operadores, funciones holomorfas, expansiones asintóticas, análisis numérico, todo lo necesario para estudiar estos problemas impropriamente planteados.

La mayoría de las contribuciones a los problemas inversos en la física cuántica utilizan métodos estacionarios, es decir, la solución física es idealizada como periódica en el tiempo, con energía infinita. Haciendo ésto, las propiedades físicas de propagación en las soluciones se pierden (ya que la función de onda en realidad no evoluciona en el tiempo, sino permanece en un estado estacionario). Esta carencia de intuición física implica que la herramienta matemática que se utiliza para resolver los problemas dé poca información acerca de la física del problema. Además, en los métodos estacionarios se utiliza una transformada de Fourier generalizada que integra las funciones de onda sobre espacios de medida infinita y que son periódicas en el tiempo. Otro problema de los métodos estacionarios es que utilizan de manera fundamental la linealidad del problema directo, siendo difícil pensar en generalizar el método para resolver problemas no lineales.

En (1993 [19], 1994 [20], 1995 [21]) V. Enss y R. Weder introdujeron un nuevo método dependiente del tiempo, en donde se aplican fundamentalmente las propiedades físicas de propagación de las funciones de onda de energía finita para resolver los problemas inversos en mecánica cuántica, utilizando más clara y sencillamente la herramienta matemática, la cual está muy relacionada con la intuición física del problema. Además, a diferencia de los métodos estacionarios, este método puede aplicarse para la solución de problemas de dispersión inversa para ecuaciones no lineales

[46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63]. En los últimos años, el método dependiente del tiempo ha tenido varias aplicaciones: para estudiar hamiltonianos con campo eléctrico y magnético [8]; en la ecuación de Dirac [34]; en el caso de N cuerpos [20, 21]; en el efecto Aharonov-Bohm [60], [10] y [11]; en el efecto Stark [49]; en potenciales dependientes del tiempo para la ecuación de Schrödinger [50] y para la ecuación de Dirac [32, 33], entre otras.

1.6. Alcance de la tesis

Este trabajo de tesis, es una reseña del artículo de Weder [49].

La estructura de la tesis es la siguiente: La introducción da la motivación física del problema y lo ubica dentro del área específica de los problemas inversos en teoría de la dispersión en la mecánica cuántica no relativista. Dando por supuestos la teoría de la medida y algunas nociones de topología general a continuación se estudian los espacios de Hilbert (capítulo 2) necesarios para postular la mecánica cuántica. En el capítulo 3 se estudian los grupos de evolución los cuales permiten dar una descripción de la dinámica de un sistema, en particular usando la ecuación de Schrödinger. Con las propiedades asintóticas de los grupos de evolución se prepara el terreno para definir los operadores de onda para terminar estableciendo el operador de dispersión (capítulos 4 y 5). El capítulo 6 se dedica a generalizar la teoría para la dispersión multicanal, dando un marco para el problema de N cuerpos. Todo esto permite enunciar el problema directo de la teoría de la dispersión. Estos capítulos están basados en los libros de Amrein, et. al [5] y Amrein [7].

El capítulo 7 muestra la solución de Weder [49] al problema inverso para el efecto Stark con un campo eléctrico externo constante, estableciendo la unicidad y la reconstrucción de los potenciales. Por último, en el apéndice se dan bastantes detalles sobre afirmaciones del artículo de Weder [49].

1.7. Trabajos posteriores a la tesis

Dentro de un proyecto de doctorado, se desea extender los resultados de Weder [49] para el caso donde el campo eléctrico depende del tiempo.

Para esto se define un hamiltoniano de tipo Stark (relacionado al efecto Stark) dependiente del tiempo. Un problema abierto es el desarrollar más la existencia y completitud para estos hamiltonianos ya que los resultados existentes para dos y N cuerpos de Weder (1996) [50], Jacob Schach Moller (2000) [36], Koichiro Yokoyama (1999) [64] y Adachi (2007) [2] son muy restrictivos respecto a la dependencia temporal tanto del potencial como del campo eléctrico.

También se desea resolver el problema de dispersión inversa para este tipo de Hamiltonianos mejorando los resultados ya existentes de Weder (1996) [50] [49], Nicoleau (2003) [38], (2005) [39] y Adachi (2007) [3] al considerar una dependencia general respecto al tiempo del campo eléctrico y de los potenciales.

Capítulo 2

Espacios de Hilbert y Operadores Lineales

El objeto matemático básico, el cuál es necesario para la descripción de partículas en la mecánica cuántica, es el espacio de Hilbert.

El contenido del capítulo es el siguiente: Se da una breve presentación de los espacios L^p en la sección 2.1. En la sección 2.2 se introduce el espacio de Hilbert, se discuten algunas de sus propiedades elementales y se ilustran éstas en los espacios L^2 . En la sección 2-2 se presentan varios resultados simples concernientes a operadores lineales en el espacio de Hilbert. El énfasis es el de empezar a trabajar con operadores acotados y autoadjuntos. La sección 2.7 se dedica a ciertas clases de operadores como son los llamados compactos, de Hilbert Schmidt y operadores de clase de traza. Finalmente, en la sección 2.5, se introduce el producto tensorial y la suma directa de espacios de Hilbert. Para la redacción de este capítulo se ha utilizado los libros de Amrein [5] y [7].

2.1. Espacios L^p

Brevemente se presentarán algunas definiciones y resultados de la teoría de los espacios L^p . Sea $(M; \mu)$ un espacio de medida, en otras palabras, sea μ una medida definida en una σ -álgebra \mathcal{R} de subconjuntos del conjunto M . Si Δ es un subconjunto medible de M (i.e. un elemento de \mathcal{R}), denotamos por χ_Δ la función característica de Δ , la cuál se define como sigue:

$$\chi_\Delta(s) = \begin{cases} 1 & s \in \Delta \\ 0 & s \notin \Delta. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para $p \in [1, \infty]$, $L^p(M; d\mu)$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones medibles $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $\|f\|_p < \infty$, donde dos funciones se dicen equivalentes si son iguales μ -casi todo punto, y donde $\|f\|_p$ se define como sigue:

$$\|f\|_p := \left[\int_M |f(s)|^p d\mu(s) \right]^{1/p} \quad \text{si } p < \infty \quad (2.2)$$

y

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{s \in M} |f(s)|. \quad (2.3)$$

Aquí $\operatorname{ess\,sup} g(s)$ es el ínfimo del $\sup h(s)$ con h variando sobre todas las funciones que son iguales a g casi en todo punto. En otras palabras $\operatorname{ess\,sup} g(s)$ es el ínfimo de todas las m tales que la medida $\mu(\Delta_m)$ del conjunto $\Delta_m = \{s \in M \mid g(s) > m\}$ es cero. Si, por ejemplo, M es el intervalo cerrado $M = [a, b]$, μ es la medida de Lebesgue y si f es continua en $[a, b]$, entonces $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

$L^p(M; d\mu)$ es un espacio lineal normado completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_p$. Si $f \in L^p(M; d\mu)$, $g \in L^q(M; d\mu)$ y $1/r = 1/p + 1/q$, entonces $f(\cdot)g(\cdot) \in L^r(M; d\mu)$ y

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (2.4)$$

La desigualdad (2.4) se conoce como la desigualdad de Hölder. Los siguientes hechos acerca de los espacios L^p se usan frecuentemente:

Lema 2.1 (a) Si Δ es un subconjunto medible de M con medida finita, $p \in [1, \infty]$ y $f \in L^p(M; d\mu)$, entonces $\chi_\Delta(\cdot)f(\cdot) \in L^r(M; d\mu)$ para cada $r \in [1, p]$. (b) Si $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces $L^p(M; d\mu) \cap L^q(M; d\mu) \subset L^r(M; d\mu)$ para cada $r \in [p, q]$.

Un importante teorema, el cuál permite intercambiar un límite con una integral, es el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Sólo la usamos para $p = 1$:

Teorema 2.2 *Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue*

- i $g, f_t \in L^1(M; d\mu) (t \in \mathbb{R})$,
- ii $|f_t(s)| \leq g(s)$ para casi toda $s \in M$ y toda t ,
- iii $\lim_{t \rightarrow t_0} f_t(s) = f(s)$ para casi toda $s \in M$.

Entonces $f \in L^1(M; d\mu)$ y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_M f_t(s) d\mu(s) = \int_M f_{t_0}(s) d\mu(s).$$

En lugar de usar funciones con valores en \mathbb{C} , también podemos considerar funciones de M a algún espacio normado \mathcal{H}_0 y definir los espacios $L^p(M, \mathcal{H}_0; d\mu)$.

2.2. Espacios de Hilbert

Definición 2.3 *Un espacio de Hilbert \mathcal{H} es una colección de objetos llamados vectores, denotados por f, g, \dots , los cuales satisfacen los siguientes axiomas:*

- I \mathcal{H} es un espacio vectorial lineal con coeficientes complejos.

II Existe un producto escalar estrictamente positivo en \mathcal{H} . Un producto escalar (f, g) es una función de dos vectores $f, g \in \mathcal{H}$ con valores en los números complejos y satisface las siguientes condiciones:

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (2.5)$$

$$(f, g + \alpha h) = (f, g) + \alpha(f, h) \text{ para todo complejo } \alpha, \quad (2.6)$$

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} > 0 \text{ a menos que } f = \theta. \quad (2.7)$$

III El espacio \mathcal{H} es completo en la norma definida por (2.7): Siempre que $\{f_n\}$ sea una sucesión de Cauchy en el sentido de que $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$, existe un vector $f \in \mathcal{H}$ tal que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$.

IV El espacio \mathcal{H} es separable. Esto significa que existe una sucesión $\{f_n\} \in \mathcal{H}$ con la propiedad de ser densa en H . Un conjunto D es denso en \mathcal{H} si para toda $f \in \mathcal{H}$ y cualquier $\eta > 0$ existe algún elemento f_η en D tal que $\|f - f_\eta\| < \eta$.

Pese a que existen espacios de Hilbert no separables, en este trabajo siempre haremos usos de espacios separables y por eso lo hemos integrado en la definición.

Antes de introducir los espacios L^2 como ejemplos concretos de espacios de Hilbert, se dan algunas definiciones adicionales y algunas relaciones elementales que se siguen de los siguientes axiomas.

Proposición 2.4 *Desigualdad de Schwarz. Para todas f, g en \mathcal{H}*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|. \quad (2.8)$$

Una consecuencia de (2.8) es la desigualdad de Minkowsky también llamada desigualdad del triángulo:

Proposición 2.5 *Desigualdad de Minkowsky. Para todas f, g en \mathcal{H}*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (2.9)$$

La desigualdad del triángulo junto con los axiomas I y II implican que un espacio de Hilbert es un espacio normado.

Debido a que los vectores de \mathcal{H} se pueden interpretar como estados puros de un sistema físico, dos estados f y g serán prácticamente indistinguibles si $\|f - g\|$ es muy pequeño. Por esta razón examinaremos las propiedades de convergencia de sucesiones $\{f_n\}$ de elementos de \mathcal{H} .

Definición 2.6 *La convergencia de una sucesión de vectores en la norma $\|\cdot\|$ ya ha sido usada en la formulación del axioma III. En la teoría de los espacios de Hilbert ésta se llama convergencia fuerte. En este caso, escribimos $s\text{-lím } f_n = f$ cuando $n \rightarrow \infty$. El límite fuerte f es único.*

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia fuerte es que la sucesión sea de Cauchy en el sentido definido en el axioma III.

Definición 2.7 *La convergencia en \mathcal{H} por medio del producto escalar se llama convergencia débil. Una sucesión $\{f_n\}$ converge débilmente a un límite f si para cada $g \in \mathcal{H}$ la sucesión de productos escalares $\{(f_n, g)\}$ converge a $\{(f, g)\}$. En tal caso, escribimos $w\text{-lím } f_n = f$ cuando $n \rightarrow \infty$. El límite débil f es único.*

La convergencia fuerte implica la convergencia débil, pero el recíproco no es verdadero. De hecho se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.8 *$s\text{-lím } f_n = f$ si y sólo si $w\text{-lím } f_n = f$ y $\lim \|f_n\| = \|f\|$.*

Ahora introduzcamos la noción de ortogonalidad y de conjuntos mutuamente ortogonales.

Definición 2.9 *Dos vectores f y g se dicen ortogonales entre sí si $(f, g) = 0$.*

Definición 2.10 *Dos subconjuntos M_1 y M_2 de \mathcal{H} son mutuamente ortogonales si $(f_1, f_2) = 0$ para todos $f_1 \in M_1$ y $f_2 \in M_2$.*

Una importante relación concerniente a vectores mutuamente ortogonales es el siguiente:

Teorema 2.11 *Teorema de Pitágoras.*

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2 \text{ si } (f_i, f_j) = 0 \text{ para todas } i \neq j. \quad (2.10)$$

Definición 2.12 *Una sucesión ortonormal de vectores $\{h_i\}$ se caracteriza por la propiedad $(h_i, h_j) = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.*

Proposición 2.13 *Desigualdad de Bessel. Sea $\{h_i\}$ una sucesión ortonormal de vectores en \mathcal{H} entonces para toda $f \in \mathcal{H}$:*

$$\sum_{i=1}^n |(h_i, f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (2.11)$$

Definición 2.14 *Una sucesión ortonormal de vectores $\{e_i\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} si el conjunto de las combinaciones lineales de vectores que pertenecen a $\{e_i\}$ es densa en \mathcal{H} .*

En un espacio de Hilbert separable, una base ortonormal siempre es un conjunto numerable. La existencia de una base ortonormal puede establecerse al escoger un subconjunto de vectores linealmente independientes de un conjunto denso numerable D y aplicándole el proceso de ortogonalización de Schmidt.

Definición 2.15 *La dimensión de un espacio de Hilbert es igual al número N de vectores de una base ortonormal.*

Se puede demostrar que el número N anterior no depende de la elección de alguna base particular, en consecuencia, la dimensión de un espacio de Hilbert está bien definida. Los axiomas de espacio de Hilbert aplican tanto para espacios de dimensión finita como dimensión infinita. Sin embargo, en el caso de dimensión finita, los axiomas III y IV son consecuencia de los axiomas I y II; además, la convergencia fuerte coincide con la convergencia débil.

Teorema 2.16 *Relación de Parseval. Si $\{e_i\}$ es una base ortonormal de vectores de \mathcal{H} y $f \in \mathcal{H}$*

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, f)|^2 \quad (2.12)$$

La relación anterior implica que toda $f \in \mathcal{H}$ puede expresarse como el límite fuerte de la sucesión de vectores $\{f_n\}$, donde $f_n = \sum_{i=1}^n (e_i, f)e_i$.

Proposición 2.17 *Sea D un conjunto denso en \mathcal{H} y $f \in \mathcal{H}$. Si $(f, g) = 0$ para toda $g \in D$, entonces $f = \theta$.*

Definición 2.18 *Una variedad lineal es un subconjunto M de \mathcal{H} que satisface el axioma I pero no necesariamente el axioma III (M siempre satisfará los axiomas II y IV, debido a que es un subconjunto de \mathcal{H}). Un subconjunto de \mathcal{H} que satisface los cuatro axiomas se llama un subespacio.*

Un importante ejemplo de variedad lineal cerrada (i.e. un subespacio) está dado en la siguiente definición.

Definición 2.19 *El complemento ortogonal N^\perp de un subconjunto N de \mathcal{H} es el conjunto de todos los vectores $f \in \mathcal{H}$ tales que $(f, g) = 0$ para toda $g \in N$.*

Hay que notar el siguiente hecho conocido como:

Teorema 2.20 *Teorema de Proyección. Si M es subespacio y M^\perp es su complemento ortogonal, entonces todo vector f en \mathcal{H} tiene una única descomposición $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in M$ y $f_2 \in M^\perp$.*

Una simple, pero muy importante consecuencia es la siguiente:

Proposición 2.21 *Criterio de Densidad. Si M es una variedad lineal tal que el único vector de \mathcal{H} que es ortogonal a M es el vector θ , entonces M es denso en \mathcal{H} .*

A continuación se define el concepto de funcional lineal acotado.

Definición 2.22 *Un funcional lineal acotado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , es una función lineal Φ de \mathcal{H} en \mathbb{C} , la cuál es acotada con respecto a la norma en \mathcal{H} , i.e.,*

$$\|\Phi\| = \sup_{f \neq \theta} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|} < \infty.$$

Si g es un vector fijo en \mathcal{H} , podemos definir un funcional lineal acotado Φ_g en \mathcal{H} dado por $\Phi_g(f) = (g, f)$. Recíprocamente tenemos el, muy famoso, resultado conocido como:

Teorema 2.23 *Teorema de Representación de Riesz. Sea $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Entonces existe un vector $g \in \mathcal{H}$ unívocamente determinado tal que $\Phi_g(f) = (g, f)$ para toda $f \in \mathcal{H}$, y $\|\Phi\| = \|g\|$.*

A continuación se presenta uno de los ejemplos concretos de espacios de Hilbert más útiles: El conjunto de las funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ forman un espacio vectorial lineal si definimos la suma y multiplicación por escalares como sigue:

$$(f_1 + f_2)(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}), (\alpha f)(\bar{x}) = \alpha f(\bar{x}).$$

El producto escalar entre dos funciones está definida por

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\bar{x})g(\bar{x})d^n x.$$

Esta integral puede demostrarse que es finita por la desigualdad de Hölder.

El espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ no consiste de funciones individuales por sí mismas, en cambio, de clases de equivalencia de funciones. Dos funciones se definen equivalentes si difieren sólo en un conjunto de medida cero. En la mayoría de los casos es posible transferir todas las operaciones en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ a funciones individuales. Sin embargo, existen situaciones donde la distinción entre clases de equivalencia y funciones es esencial y debe ser tomada en cuenta.

La completez de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un resultado clásico del análisis conocido como el teorema de Riesz-Fischer. La separabilidad también puede demostrarse.

2.3. Operadores lineales en espacios de Hilbert

Definición 2.24 *Un operador lineal en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es una transformación lineal entre vectores de \mathcal{H} .*

Ejemplos de transformaciones lineales son la transformada de Fourier \mathcal{F} en $L^2(\mathbb{R}^n)$ la cuál fue definida para todos los vectores que están en el conjunto denso $S(\mathbb{R}^n)$ y el cuál es lineal.

Un operador lineal se define dando su dominio, i.e. una variedad lineal $D(A)$ en \mathcal{H} , y una función lineal A de $D(A)$ en \mathcal{H} . La siguiente notación es muy usada: Si M es un subconjunto de $D(A)$, entonces AM es el conjunto de todos los vectores f en \mathcal{H} tal que $f = Ag$ para alguna g en M . El conjunto $AD(A)$ se le conoce como el rango del operador A .

Dos operadores lineales A y B son iguales si y sólo si $D(A)=D(B)$ y $Af = Bf$ para toda $f \in D(A)$.

Definición 2.25 *Un operador lineal A' se le llama una extensión de A si $D(A) \subset D(A')$ y $A'f = Af$ para toda $f \in D(A)$. En tal caso escribimos $A \subset A'$. Uno puede llamar a A la restricción de A' en $D(A)$. Un operador lineal usualmente lo llamaremos un operador.*

Definición 2.26 *Sea A un operador en \mathcal{H} . Decimos que A es cerrable si se cumple la siguiente condición: Siempre que $\{f_n\}$ y $\{f'_n\}$ sean dos sucesiones de Cauchy en $D(A)$ que convergen fuertemente al mismo límite f , y tanto $\{Af_n\}$ como $\{A'f'_n\}$ también son Cauchy, entonces $s\text{-lím } Af_n$ y $s\text{-lím } A'f'_n$ son iguales.*

Como A es lineal, tenemos la siguiente equivalencia:

Proposición 2.27 *Un operador es cerrable si y sólo si siempre que $\{f_n\} \in D(A)$, $f_n \rightarrow \theta$ y Af_n es fuertemente Cauchy, entonces $Af_n \rightarrow \theta$.*

Una manera muy natural de definir una extensión \bar{A} de un operador A es la siguiente:

Definición 2.28 *Si un operador A es cerrable definimos la cerradura \bar{A} del operador A cuyo dominio es $D(\bar{A})$. Decimos que $f \in D(\bar{A})$ si f es el límite fuerte de una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ de elementos en $D(A)$ tal que $\{Af_n\}$ también es de Cauchy y converge fuertemente a g . Definimos $\bar{A}f = g$. La cerradura está bien definida por ser A cerrable.*

Si un operador A es cerrable, entonces su cerradura \bar{A} es su extensión cerrada más pequeña, i.e. si A' es una extensión arbitraria cerrada de A , entonces $\bar{A} \subset A'$.

Una clase de operadores cerrables muy importante es la clase de los operadores acotados.

Definición 2.29 *Se dice que un operador lineal A es acotado si existe un número $M < \infty$ tal que $\|Af\| \leq M\|f\|$ para toda $f \in D(A)$. Si no existe tal M , A se dice no acotado. Para A acotado uno define su norma $\|A\|$ como*

$$\|A\| = \sup_{f \in D(A), f \neq \theta} \frac{\|Af\|}{\|f\|}. \quad (2.13)$$

Denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de todos los operadores acotados A en \mathcal{H} para los cuales $D(A) = \mathcal{H}$

En consecuencia se tiene que para $f \in D(A)$:

$$\|Af\| \leq \|A\|\|f\|, \quad (2.14)$$

esto tiene como consecuencia el siguiente resultado muy importante en la teoría de dispersión.

Proposición 2.30 *Si A es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces tiene un única extensión acotada \bar{A} en el subespacio generado por $D(A)$ (i.e. la cerradura $\overline{D(A)}$ de $D(A)$). \bar{A} es cerrado, y $\|\bar{A}\| = \|A\|$. En particular, si $D(A)$ es denso en \mathcal{H} , entonces $D(\bar{A}) = \mathcal{H}$.*

Definiremos el concepto de operador adjunto A^* de un operador lineal A .

Definición 2.31 *Supongamos que $D(A)$ es denso en \mathcal{H} . Primero definamos el dominio $D(A^*)$: Un vector $g \in \mathcal{H}$ pertenece a $D(A^*)$ si existe un vector $g^* \in \mathcal{H}$ tal que*

$$(g, Af) = (g^*, f) \quad \forall f \in D(A). \quad (2.15)$$

La función A^* se define entonces como $A^*g = g^*$.

La ecuación (2.15) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$(g, Af) = (A^*g, f) \quad \forall f \in D(A), g \in D(A^*). \quad (2.16)$$

Puede demostrarse que A^* está bien definido, i.e. el vector g^* en (2.15) es único. Claramente A^* es lineal. Algunas de las propiedades del operador adjunto de un operador lineal son las siguientes:

- (a) El adjunto de un operador lineal A siempre es un operador cerrado.
- (b) Si A es cerrable y $D(A)$ es denso, entonces

$$A^* = (\bar{A})^* \equiv \bar{A}^*. \quad (2.17)$$

Si $D(A^*)$ también es denso en \mathcal{H} , entonces $A^{**} \equiv (A^*)^*$ existe. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.32 *Sea A un operador lineal tal que $D(A)$ y $D(A^*)$ son densos en \mathcal{H} . Entonces A es cerrable y $\bar{A} = A^{**}$.*

Definición 2.33 *A es simétrico si $D(A)$ es denso en \mathcal{H} y $A \subset A^*$ (i.e. si $D(A) \subset D(A^*)$ y $A^*f = Af$ para cada $f \in D(A)$).*

La condición $A \subset A^*$ también puede escribirse como:

$$(Af, g) = (f, Ag) \text{ para todo } f, g \in D(A). \quad (2.18)$$

Definición 2.34 *A es autoadjunto si $D(A)$ es denso en \mathcal{H} y $A = A^*$ (i.e. si $D(A) = D(A^*)$ y $A^*f = Af$ para cada $f \in D(A)$).*

Claramente todo operador autoadjunto es simétrico. Si A es acotado y $D(A) = \mathcal{H}$, entonces A es simétrico si y sólo si es autoadjunto. Si A no es acotado, la condición de que A sea autoadjunto es una condición muy fuerte, ya que requiere que $D(A^*)$ sea exactamente igual a $D(A)$. La condición (2.18), la cuál es fácil de verificar en las aplicaciones, no es suficiente para que A sea autoadjunto.

Definición 2.35 *Un operador simétrico A se dice esencialmente autoadjunto si \bar{A} es autoadjunto.*

Una definición equivalente de autoadjuntez esencial es que $A^* = A^{**}$. Un operador esencialmente autoadjunto tiene una y sólo una extensión autoadjunta. La noción de autoadjuntez esencial es importante debido a que en las aplicaciones a menudo se proporciona un operador simétrico no cerrado. Si se muestra que tal operador es esencialmente autoadjunto, se sigue que determina un único operador autoadjunto.

Cada operador autoadjunto induce de manera natural una descomposición del espacio de Hilbert subyacente \mathcal{H} en una suma directa de dos subespacios ortogonales.

Definición 2.36 *Sea A un operador sobre \mathcal{H} . Definamos $\mathcal{H}_p(A)$ como el subespacio generado por todos los vectores propios de A , i.e., la cerradura de la variedad lineal de todas las combinaciones lineales finitas de vectores propios de A . Alternativamente, $\mathcal{H}_p(A)$ es la suma directa de todos los eigenespacios de A : $\mathcal{H}_p(A) = \bigoplus \mathcal{M}_i = \bigoplus N(A - \lambda_i)$, donde $\{\lambda_i\}$ son los valores propios de A .*

Definición 2.37 *Definimos $\mathcal{H}_c(A)$ como el complemento ortogonal de $\mathcal{H}_p(A)$.*

Vemos que \mathcal{H} es la suma directa de $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(A) \oplus \mathcal{H}_c(A). \quad (2.19)$$

Así cada vector f en \mathcal{H} tiene una única descomposición como

$$f = f_p \oplus f_c \quad (2.20)$$

con $f_p \in \mathcal{H}_p(A)$, $f_c \in \mathcal{H}_c(A)$ y $(f_p, f_c) = 0$. Los índices p y c son abreviaciones de "espectro puntual" y "espectro continuo". Si $\mathcal{H}_p(A) = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_c(A) = \{0\}$, se dice que A tiene un espectro puramente puntual. Un ejemplo es el Hamiltoniano del oscilador armónico $A = \bar{P}^2 + \bar{Q}^2$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si, por el contrario, $\mathcal{H}_p(A) = \{0\}$, $\mathcal{H}_c(A) = \mathcal{H}$, se dice que A tiene un espectro puramente continuo. Un ejemplo es el Hamiltoniano libre $H_0 = \bar{P}^2$ de la mecánica cuántica no relativista.

Proposición 2.38 *Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sean A_p y A_c las restricciones de A a $D(A) \cap \mathcal{H}_p(A)$ y $D(A) \cap \mathcal{H}_c(A)$, respectivamente.*

Entonces A_p deja $\mathcal{H}_p(A)$ invariante y A_c deja $\mathcal{H}_c(A)$ invariante. Podemos, por lo tanto, ver A_p como un operador en $\mathcal{H}_p(A)$ y A_c como un operador en $\mathcal{H}_c(A)$. Con esta convención, A_p y A_c son operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$, respectivamente, y podemos escribir, en la descomposición (2.19) de \mathcal{H} :

$$A = A_p \oplus A_c. \quad (2.21)$$

Definición 2.39 Sea A un operador lineal cerrado. El número complejo z se llama un punto regular de A si

(i) $(A - zI)$ es invertible,

(ii) $D((A - zI)^{-1}) = \mathcal{H}$,

(iii) $(A - zI)^{-1}$ es acotado.

En otras palabras si $(A - zI)^{-1}$ existe y está en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. El conjunto de todos los puntos regulares se llama el conjunto resolvente de A y es denotado por $\rho(A)$.

El complemento $\sigma(A)$ de $\rho(A)$ en \mathbb{C} se llama el espectro de A :

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

El espectro del operador A_p se llama el espectro puntual $\sigma_p(A)$ de A y el espectro de A_c el espectro continuo $\sigma_c(A)$ de A . Así, por definición,

$$\sigma_p(A) = \sigma(A_p), \quad \sigma_c(A) = \sigma(A_c).$$

Proposición 2.40 Sea $A = A^*$ y $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$ entonces $z \in \rho(A)$.

Si λ es un valor propio de A , $N(A - \lambda)$ es un subespacio no vacío de \mathcal{H} , en consecuencia $A - \lambda I$ no es invertible. Si λ no es un valor propio pero pertenece al espectro continuo de A , entonces $A - \lambda I$ es invertible pero $D((A - \lambda I)^{-1})$ es sólo un subconjunto denso propio de \mathcal{H} .

Definición 2.41 Sea A un operador cerrado. Entonces la función operador valuada: $z \mapsto (A - zI)^{-1}$ de $\rho(A)$ a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se llama el resolvente de A .

Proposición 2.42 Sea A un operador cerrado y $z, z_1, z_2 \in \rho(A)$. Entonces

(a) $(A - zI)^{-1}$ envía \mathcal{H} sobre $D(A)$ y

$$A(A - zI)^{-1}f = (A - zI)^{-1}Af, \forall f \in D(A).$$

(b) La siguiente identidad, llamada la primera ecuación resolvente se cumple:

$$(A - z_1I)^{-1} - (A - z_2I)^{-1} = (z_1 - z_2)(A - z_1)^{-1}(A - z_2)^{-1}$$

- (c) $(A - z_1 I)^{-1}(A - z_2 I)^{-1} = (A - z_2 I)^{-1}(A - z_1 I)^{-1}$, i.e. el resolvente en el punto $z_1 \in \rho(A)$ conmuta con el resolvente en cualquier otro punto $z_2 \in \rho(A)$.

Proposición 2.43 Sea A un operador cerrado. Entonces:

- (a) La transformación $z \mapsto (A - zI)^{-1}$ es continua en la norma del operador sobre $\rho(A) = \{z : (A - zI)^{-1} \text{ existe y está en } \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ i.e. $u\text{-}\lim_{z_1 \rightarrow z, z, z_1 \in \rho(A)} \|(A - z)^{-1} - (A - z_1)^{-1}\| = 0$

- (b) El resolvente es diferenciable en la norma del operador y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(A - zI)^{-1} &:= u\text{-}\lim_{z_1 \rightarrow z} (z_1 - z)^{-1}[(A - z_1)^{-1} - (A - z)^{-1}] \\ &= (A - zI)^{-2} \end{aligned}$$

Definición 2.44 Sea Δ un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y $a : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. El operador de multiplicación A asociado con a es el siguiente operador lineal en $L^2(\Delta)$:

$$\begin{aligned} D(A) &= \{f \in L^2(\Delta) : \int_{\Delta} |a(x)|^2 |f(x)|^2 dx < \infty\} \text{ y} \\ (Af)(\bar{x}) &= a(\bar{x})f(\bar{x}) \text{ para cada } f \in D(A). \end{aligned}$$

Claramente $D(A)$ es el dominio maximal en el cual la multiplicación por $a(\bar{x})$ tiene sentido.

Proposición 2.45 Sea $a : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $|a(\bar{x})| < \infty$ casi en todo punto. Entonces el operador de multiplicación asociado es un operador autoadjunto en $L^2(\Delta)$.

Proposición 2.46 Sea A el operador de multiplicación asociado con una función $a : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces A está en $\mathcal{B}(L^2(\Delta))$ si y sólo si $\|a\|_{\infty} < \infty$ en cuyo caso

$$\|A\| = \|a\|_{\infty}. \quad (2.22)$$

Definición 2.47 Una proyección ortogonal (una proyección, brevemente) es un operador lineal E que satisface $D(E) = \mathcal{H}$ y

$$E^2 = E = E^*. \quad (2.23)$$

Establecemos

$$M(E) = \{f \in \mathcal{H} | Ef = f\}. \quad (2.24)$$

Es fácil ver que $M(E)$ es un subespacio. Además, si $g \perp M(E)$, tenemos que para cualquier $h \in \mathcal{H}$

$$(Eg, h) = (g, E^*h) = (g, Eh). \quad (2.25)$$

Ahora $E^2h = Eh$, en consecuencia $Eh \in M(E)$, de tal manera que (2.25) implica que $(Eg, h) = 0$. En consecuencia $Eg = 0$ por la proposición 2.17. Esto demuestra que E no es otra cosa que la operación de proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre $M(E)$.

Una isometría (u operación isométrica) es un operador lineal Ω en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface

$$\Omega^* \Omega = I. \quad (2.26)$$

Proposición 2.48 *Sea Ω una isometría. Entonces*

(a) Ω preserva los productos escalares:

$$(\Omega f, \Omega g) = (f, g) \text{ para todo } f, g \in \mathcal{H}. \quad (2.27)$$

En particular

$$\|\Omega f\| = \|f\| \text{ para todo } f \in \mathcal{H}. \quad (2.28)$$

(b) $\|\Omega\| = 1$.

(c) $\Omega \Omega^*$ es una proyección, y $M(\Omega \Omega^*) = R(\Omega)$.

(d) Ω es invertible.

(e) $\Omega^* = \Omega^{-1} f$ si $f \in R(\Omega)$, and $\Omega^* f = 0$ si $f \perp R(\Omega)$.

La proposición precedente demuestra que un operador isométrico Ω envía el espacio de Hilbert \mathcal{H} sobre un subespacio $M(\Omega \Omega^*)$ mientras preserva la longitud de los vectores y los ángulos entre vectores. Un caso especial es el operador unitario U para los cuales $M(UU^*) = \mathcal{H}$. Así U es unitario si es isométrico y $F \equiv UU^* = I$; en otras palabras U es unitario si

$$U^*U = I \quad y \quad UU^* = I. \quad (2.29)$$

En este caso $U^* = U^{-1}$ en todos de \mathcal{H}

Una generalización de la noción de una isometría es la isometría parcial. Un operador $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se llama una isometría parcial si

$$\Omega^* \Omega = E, \quad (2.30)$$

donde E es una proyección. Algunas propiedades de las isometrías parciales son dadas en la siguiente proposición.

Proposición 2.49 *Sea Ω una isometría parcial. Entonces*

(a)

$$\Omega E = \Omega, \quad (2.31)$$

(b)

$$(\Omega f, \Omega g) = (E f, E g) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}, \quad (2.32)$$

(c) $\|\Omega\| = 1$ a menos que $E = 0$,

(d) $\Omega \Omega^*$ es una proyección, y $M(\Omega \Omega^*) = R(\Omega)$.

2.4. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es un elemento central dentro de la mecánica cuántica.

Definición 2.50 Denotamos por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ cada una de las cuales es idénticamente cero fuera de algún conjunto de soporte compacto de \mathbb{R}^n . Finalmente, si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y con medida de Lebesgue cero, denotamos por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ al conjunto de todas las funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuyo soporte está contenido en $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$

Para definir la transformada de Fourier, aparte de las funciones infinitamente diferenciables, necesitamos definir las funciones de decaimiento rápido.

Definición 2.51 Una función f pertenece a $S(\mathbb{R}^n)$ si es infinitamente diferenciable y si para cada tupla de $2n$ coordenadas de enteros no negativos $\{j_1, \dots, j_n, m_1, \dots, m_n\}$ se tiene que

$$\sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} \left| x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \frac{\partial^{|m_1+\dots+m_n|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} f(x_1, \dots, x_n) \right| < \infty.$$

A tales funciones también se les llama de decaimiento rápido. Un ejemplo es la función e^{-x^2} .

Definición 2.52 Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$, podemos definir una nueva función $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por medio de la fórmula

$$\tilde{f}(\bar{k}) = (2\pi)^{-n/2} \int d^n x e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} f(\bar{x}), \quad (\bar{k} \in \mathbb{R}^n) \quad (2.33)$$

Tenemos las siguientes propiedades de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ y $S(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.53 (a) $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

(b) $S(\mathbb{R}^n)$ es invariante bajo transformadas de Fourier.

Lema 2.54 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y con medida de Lebesgue cero, entonces el conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. En particular $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

El resultado del lema 2.53 todavía se puede hacer más fuerte. De hecho la transformada de Fourier es una transformación de $S(\mathbb{R}^n)$ en $S(\mathbb{R}^n)$. Esto puede verse definiendo la transformada inversa de Fourier en $S(\mathbb{R}^n)$ por

$$\hat{f}(\bar{x}) = (2\pi)^{-n/2} \int d^n k e^{i\bar{k} \cdot \bar{x}} f(\bar{k}), \quad f \in S(\mathbb{R}^n) \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) define la inversa de (2.33). De aquí en adelante, denotaremos la transformación $f \mapsto \tilde{f}$ por \mathcal{F} . Entonces tenemos que $f = \mathcal{F}^{-1} \tilde{f} = \hat{\tilde{f}}$. En las siguiente

sección se extenderán \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} sobre todo el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ entero.

Tenemos que tanto \mathcal{F} como \mathcal{F}^{-1} son isométricos en $S(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| = \|\hat{f}\| \quad f \in S(\mathbb{R}^n), \quad (2.35)$$

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = (f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \quad f, g \in S(\mathbb{R}^n), \quad (2.36)$$

Aunque el conjunto $\{\tilde{f} | f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ es de nuevo $L^2(\mathbb{R}^n)$, es conveniente distinguir estas dos representaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, debido a que las variables \bar{x} y \bar{k} tienen diferentes interpretaciones en la mecánica cuántica. La multiplicación de $f(\bar{x})$ por x_i corresponde a la i -ésima componente del operador de posición, y la multiplicación de $\tilde{f}(\bar{k})$ por k_i corresponde a la i -ésima componente del operador de momento. Por lo tanto, denotaremos el conjunto de funciones $\{f | f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ por $L^2(\mathbb{R}^n)$ y el conjunto $\{\tilde{f} | f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ de sus transformadas de Fourier por $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$. En otras palabras, no consideramos $L^2(\mathbb{R}^n)$ como un espacio abstracto sino como el conjunto de las funciones de onda mecánico cuánticas cuadrado integrables definidas en el espacio de configuración n dimensional.

Se puede aplicar la proposición 2.30 para probar que la transformada de Fourier \mathcal{F} definida en $D(\mathcal{F}) = S(\mathbb{R}^n)$ con norma igual a 1. En consecuencia \mathcal{F} puede extenderse a un operador acotado de norma 1 definido en todo $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para funciones que también están en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier también está definida por (2.33). Para una función f en $L^2(\mathbb{R}^n)$ arbitraria uno tiene que definir $\mathcal{F}f$ como $\mathcal{F}f = \text{s-lím } \mathcal{F}f_m$ cuando $m \rightarrow \infty$, donde $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f_m \rightarrow f$. Similarmente \mathcal{F}^{-1} puede extenderse a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$ y de nuevo se denotará esta extensión por \mathcal{F}^{-1} . Una aplicación de la proposición 2.30 implica que $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$ en todo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos algunos ejemplos muy importantes en la mecánica cuántica.

Ejemplo 2.55 $Q_m, (m = 1, \dots, n)$ el operador de multiplicación por x_m en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(Q_m f)(\bar{x}) = x_m f(\bar{x}) \quad (2.37)$$

Se llama la m -ésima componente del operador de posición en la mecánica cuántica.

Ejemplo 2.56 $P_m, (m = 1, \dots, n)$ el operador de multiplicación por k_m en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(\mathcal{F}P_m f)(\bar{k}) = k_m \tilde{f}(\bar{k}) \quad (2.38)$$

A P_m se le llama la m -ésima componente del operador de momento.

Ejemplo 2.57 Denotamos por H_0 el operador de multiplicación por $|\bar{k}^2|$ en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(\mathcal{F}H_0 f)(\bar{k}) = |\bar{k}^2| \tilde{f}(\bar{k}). \quad (2.39)$$

Este operador se llama el Hamiltoniano libre de Schrödinger en la mecánica cuántica.

$$H_0 = \bar{P}^2 = \sum_{m=1}^n P_m^2. \quad (2.40)$$

Ejemplo 2.58 Si $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función medible la cuál es finita en casi todo punto entonces determina un operador de multiplicación V en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Usaremos las letras v y V para tales operadores cuando tengamos en mente el operador de interacción de una partícula cuántica no relativista, y la función v será llamada un potencial.

El Hamiltoniano para una partícula que se mueve bajo la influencia de un potencial v formalmente está dado por $H = H_0 + V$.

Proposición 2.59 (a) H_0 es un operador positivo no acotado, su espectro es $[0, \infty)$ y es puramente continuo. En particular $\mathcal{H}_p(H_0) = \{0\}$, $\mathcal{H}_c(H_0) = \mathcal{H}$.

(b) $D(H_0)$ está contenido en $D(P_m)$, y $P_m(H_0 - zI)^{-1}$ pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cada complejo z fuera de $[0, \infty)$.

(c) El resolvente de H_0 es el operador de multiplicación de $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por $(\bar{k}^2 - z)^{-1}$.

En la siguiente proposición, usamos el conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ de funciones infinitamente diferenciables de decrecimiento rápido.

Proposición 2.60 (a) Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in D(H_0)$ y

$$(H_0 f)(\bar{x}) = -(\Delta f)(\bar{x}), \quad (2.41)$$

donde $\Delta := \sum_{m=1}^n \partial^2 / \partial x_m^2$ es el Laplaciano.

(b) $(H_0 + I)$ transforma $S(\mathbb{R}^n)$ de manera sobreyectiva en $S(\mathbb{R}^n)$.

(c) La restricción \hat{H}_0 de H_0 en $S(\mathbb{R}^n)$ es esencialmente autoadjunta, y $\hat{H}_0^* = H_0$.

Nota 2.61 Existen otras subvariedades lineales de $D(H_0)$ sobre las cuáles, H_0 es esencialmente autoadjunto. Mencionamos dos de esas subvariedades:

(a) El conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de todas las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto.

(b) El conjunto $\tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ cuya transformada de Fourier \tilde{f} infinitamente diferenciables de soporte compacto.

2.5. Teoría de Perturbaciones. Hamiltonianos de - Schrödinger

En la presente sección se dan condiciones sobre el potencial v el cual permita considerar el operador V como una "pequeña" perturbación de H_0 , de tal manera que el operador suma $H_0 + V$ sea autoadjunto. Claramente una condición suficiente es que $\|v\|_\infty < \infty$, gracias a que $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sin embargo, es importante tratar también potenciales no acotados, debido a que estos potenciales aparecen en la mecánica cuántica, por ejemplo el potencial de Coulomb.

Primero damos unos resultados abstractos, los cuales serán aplicados a los operadores de Schrödinger. Si A y B son autoadjuntos y al menos uno de ellos es acotado, digamos B , entonces $A + B$ es autoadjunto con $D(A + B) = D(A)$. Si tanto A y B son no acotados pero $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ es denso en \mathcal{H} , entonces $A + B$ es simétrico pero en general no es autoadjunto ni esencialmente autoadjunto.

A continuación introducimos el concepto de acotamiento relativo el cual permite comparar dos operadores no acotados.

Definición 2.62 Sean A y B operadores lineales. Decimos que B es A -acotado si

(a) $D(A) \subset D(B)$,

(b) Existen dos números β y γ en $[0, \infty)$ tales que

$$\|Bf\| \leq \beta\|Af\| + \gamma\|f\| \quad \forall f \in D(A) \quad (2.42)$$

El ínfimo de todos los números β para los cuales (2.42) es verdadera se llama la A cota de B .

Nota 2.63 El número γ en (2.42) puede ser diferente para diferentes valores β . La A cota de B se determina únicamente considerando todos los posibles valores de β .

Lema 2.64 Suponga que $A = A^*$.

(i) Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

(a) B es A acotado.

(b) $B(A - zI)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para alguna $z \in \rho(A)$.

(c) $D(A) \subset D(B)$ y

$$\|Bf\|^2 \leq \beta_0^2\|Af\|^2 + \gamma_0^2\|f\|^2 \quad \forall f \in D(A), \quad (2.43)$$

donde β_0, γ_0 son números en $[0, \infty)$.

La A cota de B también es igual al ínfimo de todos los números β_0 para los cuáles (2.43) se cumple.

(ii) Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(d) B es A acotada con A cota $\nu < 1$.

(e) Existe un número $z \in \rho(A)$ tales que $\|B(A - zI)^{-1}\| < 1$.

Proposición 2.65 Si B es A acotado, entonces $B(A - zI)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cada $z \in \rho(A)$.

Proposición 2.66 *Teorema Kato-Rellich.* Sea A autoadjunto, B simétrico y A acotado con A cota $\nu < 1$. Entonces $A+B$ es autoadjunto en $D(A)$. Además, si A es acotado por abajo, también lo es $A+B$. (A se dice acotado por debajo si $A + \mu \geq 0$, o equivalentemente si $(-\infty, \mu) \in \rho(A)$, para alguna $\mu \in \mathbb{R}$.)

Proposición 2.67 *Bajo las hipótesis de la proposición 2.66, B es $(A+B)$ acotado. Además, se tiene la segunda ecuación resolvente para cada $z \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$:*

$$\begin{aligned} (A+B-z)^{-1} &= (A-z)^{-1} - (A-z)^{-1}B(A+B-z)^{-1} \\ &= (A-z)^{-1} - (A+B-z)^{-1}B(A-z)^{-1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ejemplo 2.68 Sea $A = A^*, B = B^*$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces sabemos que $A+B$ es autoadjunto en $D(A)$. Esto resulta, por supuesto, también de la proposición 2.66. De hecho, B es A acotado con A cota $\nu = 0$, debido a que podemos poner $\beta = 0, \gamma = \|B\|$ en (2.42)

Ejemplo 2.69 Sea $A = A^*$ no acotado, y sea $B = -\lambda A$ con $\lambda \geq 0$. Entonces $\|Bf\| \leq \lambda \|Af\|, \forall f \in D(A)$, en consecuencia B es A acotado con A cota λ . Si $\lambda < 1, A+B = (1-\lambda)A$ el cual es autoadjunto. Por otra parte, si $\lambda = 1, A+B$ es la restricción del operador cero con dominio \mathcal{H} . Esto muestra que la hipótesis $\nu < 1$ no puede debilitarse en la proposición 2.66 (Si $\nu = 1$, uno puede mostrar, sin embargo, que $A+B$ es esencialmente autoadjunto).

Ahora aplicaremos la proposición 2.66 a los operadores de Schrödinger en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Iniciamos con una estimación auxiliar.

Lema 2.70 Sea $D = L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $2 \leq p \leq \infty$ y sean $\phi, \psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Denote por $\phi(\bar{P})$ el operador de multiplicación por $\phi(\bar{k})$ en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$, y defina $A_{\phi\psi} = \phi(\bar{P})\psi(\bar{Q}), B_{\phi\psi} = \psi(\bar{Q})\phi(\bar{P})$. Entonces las cerraduras de $A_{\phi\psi}$ y $B_{\phi\psi}$ están en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$, y

$$\|A_{\phi\psi}\| \leq \|\phi\|_p \|\psi\|_p \quad (2.45)$$

$$\|B_{\phi\psi}\| \leq \|\phi\|_p \|\psi\|_p \quad (2.46)$$

Introducimos una clase de potenciales a menudo usaremos en este trabajo. Una función medible $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá de clase v_{\circlearrowleft} si puede ser escrita como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $v_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para alguna p que satisfaga $p \geq 2$ y $p > n/2$.

Ejemplos:

1. Pozo cuadrado o barrera:

$$V(\bar{x}) = \begin{cases} V_0 & |\bar{x}| \leq a \\ 0 & |\bar{x}| > a, \end{cases}$$

donde $V_0 \in \mathbb{R}$, podemos tomar $V_1 = V, V_2 = 0$ o $V_1 = 0, V_2 = V$.

2. Potencial de Yukawa:

$$V(\bar{x}) = \alpha|\bar{x}|^{-1} \exp(-\mu|\bar{x}|)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mu > 0$. Si $n = 3$ uno puede tomar $V_1 = 0, V_2 = V$ y $p = 2$.

3. Potencial de Coulomb:

$$V(\bar{x}) = \alpha|\bar{x}|^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aquí se toma:

$$V_1(\bar{x}) = \begin{cases} V(\bar{x}) & |\bar{x}| > 1 \\ 0 & |\bar{x}| \leq 1, \end{cases}, V_2(\bar{x}) = V(\bar{x}) - V_1(\bar{x}), p = 2$$

Proposición 2.71 Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2, \dots$. Sea $v \in v_{\mathcal{O}}$. Entonces $D(H_0) \subset D(V)$, V es H_0 acotada con H_0 cota $V = 0$, y $V(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall z \in \rho(H_0)$.

Proposición 2.72 Bajo las suposiciones de la proposición 2.71 $H = H_0 + V$ es autoadjunto y acotado por abajo.

Lema 2.73 Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponga que $v, w \in v_{\mathcal{O}}$, sea $H = H_0 + V$ y denote por W el operador de multiplicación por $w(\bar{x})$. Entonces, para $z \in \rho(\mathcal{H})$, el operador $W(H - z)^{-1}$ y la cerradura de $(H - z)^{-1}W$ pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2.6. Operadores de Schrödinger con potenciales singulares

Consideramos Hamiltonianos con potenciales singulares. Estos puntos pueden ser singulares en el infinito o tener singularidades locales mucho más fuertes que aquellas permitidas por la proposición 2.71. Por ejemplo: $v(\bar{x}) = \alpha|\bar{x}|^{-k}, k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que las singularidades locales del potencial se restringen al conjunto Γ el cual es un conjunto cerrado de medida cero donde los potenciales (de valor real) satisfacen que

$$v \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma), \text{ con } p \geq 2, p > n/2. \quad (2.47)$$

Esto significa que $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ es un conjunto abierto y que, para cada compacto Δ de $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$,

$$\int_{\Delta} |v(\bar{x})|^p d^n x < \infty, \quad (2.48)$$

o equivalentemente que

$$\int |\phi(\bar{x})v(\bar{x})|^p d^n x < \infty \text{ para cada } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma). \quad (2.49)$$

Para definir H , primero introducimos el así llamado operador minimal \hat{H} como sigue:

$$D(\hat{H}) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma), \quad \hat{H}f(\bar{x}) = -\Delta f(\bar{x}) + v(\bar{x})f(\bar{x}). \quad (2.50)$$

Claramente $-\Delta f(\bar{x}) = (H_0 f)(\bar{x})$ está en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para ver que $vf \in L^2(\mathbb{R}^n)$, escoja una función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ tal que $\phi(\bar{x})f(\bar{x}) = f(\bar{x}), \forall \bar{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} Vf &= V\phi(\bar{Q})f \\ &= V\phi(\bar{Q})(H_0 + 1)^{-1}(H_0 + 1)f \end{aligned}$$

el cuál está en $L^2(\mathbb{R}^n)$, debido a que $f \in D(H_0)$ y $V\phi(\bar{Q})(H_0 + 1)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ y por el hecho de que $V\phi(\bar{Q})$ es H_0 acotado. Como v es de valor real y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ es denso en $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$, \hat{H} es un operador simétrico. Puede mostrarse que siempre tiene extensiones autoadjuntas. En general \hat{H} no es esencialmente autoadjunto y puede tener una infinidad no numerable de extensiones autoadjuntas. En lo que sigue H será una extensión autoadjunta arbitraria de \hat{H} .

Vimos en la proposición 2.72 que, si $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \geq 2, p > n/2$, entonces $H = H_0 + V$ es autoadjunto con $D(H_0) = D(H)$. En analogía, se espera que, si $v \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ con p como antes, los dominios de una extensión autoadjunta H y de H_0 deberían ser los mismos localmente en $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$. En términos matemáticos esto se representaría como sigue: Si $f \in D(H)$, entonces $\phi(\bar{Q})f \in D(H_0)$ para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$, y si $g \in D(H_0)$, entonces $\phi(\bar{Q})g \in D(H)$ para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$. Además, si v está en L^p cerca del infinito, debería ser necesario requerir que $\phi(\bar{x}) = 0$ cerca del infinito.

Proposición 2.74 *Sea $v \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ con $p \geq 2, p > n/2$. Sea H una extensión autoadjunta de \hat{H} y sea $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi, \text{grad } \phi$ y $\Delta\phi$ están en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $v\phi = w_1 + w_2$ con $w_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n), w_2 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $q \geq 2, q > n/2$ (i.e. $v\phi \in \nu_\odot$). Entonces, para cada $z \in \rho(H_0)$, $H\phi(\bar{Q})(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además $H\phi(\bar{Q})(H_0 - z)^{-1} = H_0\phi(\bar{Q})(H_0 - z)^{-1} + V\phi(\bar{Q})(H_0 - z)^{-1}$.*

Si v es singular en Γ , ϕ debe ser cero en una vecindad de Γ . Similarmente, si v es singular en el infinito, ϕ debe ser cero cerca del infinito (al menos en una vecindad de aquellas direcciones a lo largo de la cual v tiene singularidades). Por otra parte, si $v = v_1 + v_2$ cerca del infinito con $v_1 \in L^\infty, v_2 \in L^q$, entonces ϕ no necesita tender a cero en el infinito pero debe permanecer acotado allí.

Lema 2.75 *Sea $w \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $p \geq 2, p > n/2$. Sean $a, b \geq 0$ tales que $a + b > n/(2p)$. Entonces la cerradura de $(H_0 + I)^{-a}w(\bar{Q})(H_0 + I)^{-b}$ está en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Proposición 2.76 *Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n), v \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ con $p \geq 2, p > n/2$, y sea H una extensión autoadjunta de \hat{H} . Entonces $H_0\phi(\bar{Q})(H - z)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ y cada $z \in \rho(H)$.*

Para demostrar la proposición 2.76 se define $\Phi = \phi(\bar{Q})$. Observe que $\Phi^* = \bar{\phi}(\bar{Q})$, donde $\bar{\phi}(\bar{x}) = \overline{\phi(\bar{x})}$.

Corolario 2.77 *Suponga las hipótesis de la proposición 2.76. Sea $f \in D(\hat{H}^*)$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$. Entonces $\phi(\bar{Q})f \in D(H_0) \cap D(H) \cap D(V)$ y $H\phi(\bar{Q})f = H_0\phi(\bar{Q})f + V\phi(\bar{Q})f$.*

Como en la proposición 2.74, el resultado de la proposición 2.76 puede generalizarse a funciones ϕ que no se anulan en el infinito si v no es singular en el infinito. Para esto es útil introducir las siguientes notaciones:

Definición 2.78 Sea Γ un conjunto cerrado y acotado de medida de Lebesgue cero en \mathbb{R}^n . Entonces denotamos por C_Γ al conjunto de todas las funciones ϕ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que ϕ , $\text{grad } \phi$ y $\Delta\phi$ están en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y ϕ se anula en una vecindad abierta de Γ . Más aún, denotamos por v_Γ al conjunto de todas las funciones medibles $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ las cuales pueden ser escritas como $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $v_2\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para alguna p con $p \geq 2$, $p > n/2$ y para cada $\phi \in C_\Gamma$. (Así $|v|^p$ es integrable en alguna vecindad del infinito así como también localmente en $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$).

No es difícil ver que:

$$v \in v_\Gamma \Leftrightarrow v\phi \in v_\emptyset \quad \forall \phi \in C_\Gamma. \quad (2.51)$$

Proposición 2.79 Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, sea Γ un conjunto acotado y cerrado de medida cero y suponga que $v \in v_\Gamma$. Sea H una extensión autoadjunta de \hat{H} . Entonces:

- (a) $H_0\phi(\bar{Q})(H - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \forall \phi \in C_\Gamma, \forall z \in \rho(H)$.
- (b) Si $f \in D(\hat{H}^*)$ y $\phi \in C_\Gamma$, entonces $\phi(\bar{Q})f \in D(H_0) \cap D(H) \cap D(V)$ y $H\phi(\bar{Q})f = H_0\phi(\bar{Q})f + V\phi(\bar{Q})f$.

Finalmente se da un análogo al lema 2.73.

Lema 2.80 Sea Γ, \mathcal{H} y v como en la proposición 2.79. Sea $w \in v_\Gamma$, entonces para cada $\phi \in C_\Gamma$ y cada $z \in \rho(H)$, el operador $W\phi(\bar{Q})(H - z)^{-1}$ y la cerradura de $(H - z)^{-1}\phi(\bar{Q})W$ están en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. También, para cada $m = 1, \dots, n$, el operador $P_m\phi(\bar{Q})(H - z)^{-1}$ y la cerradura de $(H - z)^{-1}\phi(\bar{Q})P_m$ están en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2.7. Operadores Hilbert-Schmidt

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable, A un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Asociamos a A una nueva norma $\|A\|_{HS}$, la norma Hilbert-Schmidt de A , como sigue:

Definición 2.81 Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} . Entonces

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2. \quad (2.52)$$

Si $\|A\|_{HS} < \infty$, A se llama un operador Hilbert-Schmidt. El conjunto de todos los operadores Hilbert-Schmidt en \mathcal{H} se denotará por $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ o simplemente por \mathcal{B}_2 .

Lema 2.82 La suma en (2.52) es independiente de la base ortonormal $\{e_i\}$ de \mathcal{H} (en consecuencia $\|A\|_{HS}$ depende sólo de A). Más aún

$$\|A^*\|_{HS} = \|A\|_{HS}. \quad (2.53)$$

Proposición 2.83 (a) $A \in \mathcal{B}_2$ si y sólo si $A^* \in \mathcal{B}_2$.

(b) $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$.

(c) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $(A_1 + \alpha A_2) \in \mathcal{B}_2$.

(d) Si $A \in \mathcal{B}_2$ y $B \in \mathcal{B}$, entonces $AB \in \mathcal{B}_2$ y $BA \in \mathcal{B}_2$, y

$$\|AB\|_{HS} \leq \|B\| \|A\|_{HS}$$

$$\|BA\|_{HS} \leq \|B\| \|A\|_{HS}$$

Proposición 2.84 \mathcal{B}_2 es un espacio de Hilbert con respecto al producto escalar

$$\langle A, B \rangle := \sum_i (Ae_i, Be_i)$$

donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H}

Si \mathcal{H} es un espacio de funciones, entonces los operadores de Hilbert-Schmidt tienen una simple (y muy útil) caracterización como operadores integrales. Para tal efecto sea $\mathcal{H} = L^2(\Delta; d\mu)$ el espacio de Hilbert de todas las funciones medibles de un conjunto Δ a \mathbb{C} que son cuadrado integrales con respecto a una medida $\mu(\cdot)$ sobre Δ (en las aplicaciones, en caso de que no se indique específicamente, μ será la medida de Lebesgue).

Definición 2.85 Un operador A en \mathcal{H} se dice que es un operador integral si existe una función medible $a : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(Af)(s) = \int_{\Delta} a(s, s') f(s') d\mu(s') \quad (s \in \Delta)$$

para toda $f \in D(A)$. A a se le llama el núcleo de A .

Definición 2.86 Una función $a : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ se llama un núcleo de Hilbert-Schmidt (con respecto a la medida μ) si

$$M_a := \int_{\Delta} \int_{\Delta} d\mu(s) d\mu(s') |a(s, s')|^2 < \infty.$$

Proposición 2.87 Sea $\mathcal{H} = L^2(\Delta; d\mu)$. Entonces $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_2(\mathcal{H})$ si y sólo si A es un operador integral con un núcleo de Hilbert-Schmidt, además

$$\|A\|_{HS}^2 = M_a = \int_{\Delta} \int_{\Delta} d\mu(s) d\mu(s') |a(s, s')|^2 < \infty.$$

Algunas propiedades importantes de los operadores de Hilbert-Schmidt

- (a) Uno puede estimar la norma de ciertos operadores calculando o estimando una integral.
- (b) Los operadores de Hilbert-Schmidt a menudo son usados para probar que ciertos operadores son compactos.
- (c) Las secciones transversales de dispersión (relacionadas con la teoría de dispersión, la cuál se expondrá más adelante) pueden ser expresadas en términos de normas Hilbert-Schmidt.

Proposición 2.88 *Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ el operador de posición y $\bar{P} = (P_1, \dots, P_n)$ el operador de momento. Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, sea $\psi(\bar{Q})$ el operador de multiplicación por $\psi(\bar{x})$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\phi(\bar{P})$ el operador de multiplicación por $\phi(\bar{k})$ en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\psi(\bar{Q})\phi(\bar{P})$ y $\phi(\bar{P})\psi(\bar{Q})$ son operadores de Hilbert-Schmidt si y sólo si ambas funciones ϕ y ψ pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^n)$ o una de ellas es cero en casi todo punto, y uno tiene que*

$$\|\psi(\bar{Q})\phi(\bar{P})\|_{HS} = \|\phi(\bar{P})\psi(\bar{Q})\|_{HS} = (2\pi)^{-n/2} \|\phi\|_2 \|\psi\|_2.$$

2.8. Operadores compactos

Si $A \in \mathcal{B}_2$ y $\{e_k\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} , podemos, para cada entero $N < \infty$, podemos definir un operador A_N por

$$A_N \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right] = \sum_{k=1}^N \alpha_k A e_k. \quad (2.54)$$

Vemos en particular que $A_N e_k = A e_k$ si $k \leq N$ y $A_N e_k = 0$ si $k > N$. El rango de A_N es un subespacio finito dimensional, i.e., el subespacio generado por $A e_1, \dots, A e_N$. El operador A_N definido en (2.54) se llama un operador de rango finito. Observe que el operador A_N puede escribirse como $A_N f = \sum_{k=1}^N (e_k, f) A e_k$

Definición 2.89 *Más generalmente, un operador de rango finito se define como un operador de la forma*

$$Tf = \sum_{k=1}^N (g_k, f) h_k,$$

donde $N < \infty$ y $g_1, \dots, g_N, h_1, \dots, h_N$ son $2N$ -vectores arbitrarios en \mathcal{H} .

Todo operador de Hilbert-Schmidt es el límite en la norma Hilbert-Schmidt de una sucesión de operadores de rango finito (claramente todo operador de rango finito está en \mathcal{B}_2). Uno obtiene una clase más grande de operadores acotados al considerar todos los límites uniformes de sucesiones $\{T_N\}$ de operadores de rango finito.

Lema 2.90 *Sea T un operador de rango finito. Entonces*

- (a) T^* es un operador de rango finito.
- (b) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces BT y TB son operadores de rango finito.
- (c) Si T_1 es un operador de rango finito, entonces también lo es $T + \alpha T_1$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Definición 2.91 Un operador A en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacto si existe una sucesión $\{T_N\}$ de operadores de rango finito tales que $\|A - T_N\| \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. El conjunto de todos los operadores compactos que actúan en \mathcal{H} será denotado por $\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ o simplemente por \mathcal{B}_∞ .

Proposición 2.92 (a) $A \in \mathcal{B}_\infty$ si y sólo si $A^* \in \mathcal{B}_\infty$.

- (b) Si $A \in \mathcal{B}_\infty$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $AB \in \mathcal{B}_\infty$ y $BA \in \mathcal{B}_\infty$.
- (c) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_\infty$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $(A_1 + \alpha A_2) \in \mathcal{B}_\infty$.
- (d) Si $A_n \in \mathcal{B}_\infty$ ($n = 1, 2, \dots$), $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $A \in \mathcal{B}_\infty$.
- (e) $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_\infty$, i.e. cada operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

Proposición 2.93 Sean $A \in \mathcal{B}_\infty$ y $\{f_n\}$ una sucesión de vectores que converge débilmente a cero, i.e. $w - \lim f_n = 0$. Entonces $s - \lim Af_n = 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. (En otras palabras, un operador compacto transforma sucesiones débilmente convergentes en fuertemente convergentes).

Proposición 2.94 Una proyección E es compacta si y sólo si su rango es un subespacio de dimensión finita.

Proposición 2.95 Sean $B_n, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $s - \lim B_n = B$ cuando $n \rightarrow \infty$.

- (a) Si $A \in \mathcal{B}_\infty$, entonces $\|B_n A - BA\| \rightarrow 0$ y $\|AB_n^* - AB^*\| \rightarrow 0$, en otras palabras, $u - \lim B_n A = BA$ y $u - \lim AB_n^* = AB^*$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- (b) Si $A \in \mathcal{B}_2$, entonces $\|B_n A - BA\|_{HS} \rightarrow 0$ y $\|AB_n^* - AB^*\|_{HS} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En la siguiente proposición mostramos que un operador compacto autoadjunto tiene propiedades espectrales muy importantes.

Proposición 2.96 Sea A un operador compacto autoadjunto. Entonces

- (a) A tiene espectro puramente puntual, i.e. $\mathcal{H}_C(A) = \{0\}$.
- (b) Dado $\epsilon > 0$, a los más hay un número finito de eigenvalores λ de A tales que $|\lambda| \geq \epsilon$.
- (c) Cada valor propio no cero de A tiene multiplicidad finita, i.e. El subespacio propio correspondiente es de dimensión finita.

Así, el espectro de un operador compacto autoadjunto consiste sólo de valores propios además (si $\dim \mathcal{H} = \infty$) del punto $\lambda = 0$. El único punto de acumulación posible de estos valores propios es $\lambda = 0$, y cada valor propio no cero es de multiplicidad finita. Si \mathcal{H} es de dimensión infinita, $\lambda = 0$ debe ser un punto de acumulación de valores propios o un valor propio de multiplicidad infinita. Si $\{\lambda_i\}$ es una enumeración de los valores propios distintos de cero de A , $\{\mathcal{M}_i\}$ los correspondientes subespacios propios, entonces

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{M}_i \oplus N(A). \quad (2.55)$$

Finalmente demostraremos la compacidad de algunos operadores particulares en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.97 *Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $2 \leq p < \infty$ y $\phi, \psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces los operadores $A_{\phi\psi} = \phi(\bar{P})\psi(\bar{Q})$ y $B_{\phi\psi} = \psi(\bar{Q})\phi(\bar{P})$ son compactos.*

Corolario 2.98 *Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea H_0 el Hamiltoniano libre de Schrödinger (2.40) y sea $z \in \rho(H_0)$.*

- (a) *Si $(I + |\bar{Q}|)^{-\kappa}$ es el operador de multiplicación por $(1 + |\bar{x}|)^{-\kappa}$ y $\kappa > 0$, entonces $(I + |\bar{Q}|)^{-\kappa}(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$ y $(I + |\bar{Q}|)^{-\kappa}P_m(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$ para $m = 1, \dots, n$.*
- (b) *Para cada función acotada $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, uno tiene $\phi(\bar{Q})(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$ y $\phi(\bar{Q})P_m(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$ ($m = 1, \dots, n$). En particular esto se cumple para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Capítulo 3

Grupos de Evolución

Un grupo de evolución en la mecánica cuántica es un grupo uniparametrizado fuertemente continuo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . (Estrictamente hablando, se usa el término "grupo de evolución" sólo para un grupo que da la evolución temporal de un sistema, en el cuál el generador infinitesimal debe ser el Hamiltoniano del sistema. Como se tiene precisamente esta idea en mente, usamos el término "grupo de evolución", abusando del lenguaje, para denotar a un grupo uniparametrizado unitario fuertemente continuo arbitrario.) En la sección 3.1 se establece el hecho de que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de grupos de evolución y el conjunto de operadores autoadjuntos en \mathcal{H} . En la sección 3.2 definimos funciones de un operador autoadjunto en términos del grupo de evolución asociado y demostramos algunos resultados simples acerca del cálculo funcional. En la sección 3.3 mostramos que los vectores en el espacio de continuidad $\mathcal{H}_C(A)$ de un operador autoadjunto A tienen ciertas propiedades ergódicas y en la sección 3.4 se muestran algunos resultados acerca de los grupos de evolución asociados con el Hamiltoniano libre de Schrödinger H_0 . Este capítulo está basado en el capítulo cuatro del libro de Amrein [7].

3.1. Grupos de evolución y sus generadores infinitesimales

Un grupo uniparametrizado unitario fuertemente continuo (brevemente, un grupo de evolución) es una función $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que tiene las siguientes propiedades:

E1 Unitario:

$$U_t^* U_t = U_t U_t^* = I \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

E2 Continuidad fuerte:

$$s - \lim_{\tau \rightarrow 0} (U_{t+\tau} - U_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

E3 Propiedades de Grupo:

$$U_t U_s = U_s U_t = U_{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

$$U_0 = I. \quad (3.4)$$

Observe que, para simplificar las notaciones, escribimos U_t en lugar de $U(t)$ para el valor de U en el punto t . Como \mathcal{H} es separable, bastaría suponer en (3.2) sólo continuidad débil.

Observamos que la ecuación (3.1) implica que $U_t^* = (U_t)^{-1}$, mientras que (3.3) y (3.4) nos da que $(U_t)^{-1} = U_{-t}$. En consecuencia tenemos:

$$U_t^* = U_{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

El siguiente teorema asocia con cada grupo de evolución un operador autoadjunto.

Proposición 3.1 *Teorema de Stone.* Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución. Defina A como el siguiente operador lineal, llamado el generador infinitesimal de $\{U_t\}$:

$$D(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid s - \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1}(U_\tau - I)f \text{ existe}\}, \quad (3.6)$$

$$Af = s - \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1}(U_\tau - I)f \text{ donde } f \in D(A). \quad (3.7)$$

Entonces $D(A)$ es densa en \mathcal{H} y A es autoadjunto.

De la demostración de la proposición 3.1 se obtiene el siguiente:

Corolario 3.2 *El resolvente del generador infinitesimal A se relaciona con el grupo de evolución asociado $\{U_t\}$ como sigue:*

$$\text{Si } \text{Im } z > 0 : (A - zI)^{-1} = i \int_0^\infty e^{izs} U_s ds, \quad (3.8)$$

$$\text{Si } \text{Im } z < 0 : (A - zI)^{-1} = -i \int_{-\infty}^0 e^{izs} U_s ds. \quad (3.9)$$

Corolario 3.3 *Sean $\{U_t\}$ y A como en la proposición 3.1. Entonces U_t envía $D(A)$ en sí mismo, y*

$$U_t Af = AU_t f \quad \forall f \in D(A), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Un grupo de simetría continuo de un sistema mecánico cuántico debe ser representado en el espacio de Hilbert relevante por un grupo de operadores unitarios que dependen de uno o varios parámetros (por ejemplo: el grupo de rotación en \mathbb{R}^3 es un grupo de tres parámetros). El teorema de Stone demuestra que los generadores infinitesimales deben de ser autoadjuntos. En particular, si $\{U_t\}$ describe la evolución temporal del sistema, su generador infinitesimal es el Hamiltoniano del sistema, el cuál debe ser

autoadjunto. Esto muestra la necesidad de estudiar las propiedades relacionadas con el ser autoadjunto de los operadores de Schrödinger y de Dirac, entre otros.

El teorema de Stone tiene un recíproco: dado un operador autoadjunto A , existe un único grupo de evolución tal que su generador infinitesimal es A . Formalmente, vemos a partir de las relaciones (3.10) y (3.7) que $AU_t = idU_t/dt$, por lo tanto, deberíamos tener que $U_t = e^{-iAt}$. Si A es acotada, la función exponencial podría definirse por la usual serie de potencias $e^{\alpha A} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n A^n/n!$, la cual es convergente en la norma del operador. Si A no es acotado, A^n sigue estando densamente definida. Como $D(A^n) = (A - i)^{-1}D(A^{n-1})$ y la imagen de un conjunto denso bajo $(A - i)^{-1}$ de nuevo es densa. Sin embargo los conjuntos $D(A^n)$ se van reduciendo mientras n crece, y no es simple construir un dominio denso común. En este caso es conveniente usar una definición diferente de la función exponencial, ver (3.12).

Proposición 3.4 *Sea A un operador autoadjunto en \mathcal{H} . Entonces existe un único grupo de evolución $\{U_t\}$ tal que A es el generador infinitesimal de $\{U_t\}$.*

La demostración define la siguiente sucesión de operadores:

$$U_{t,n} := \left(\frac{it}{n}A + I\right)^n = \begin{cases} I & \text{si } t = 0 \\ \left[\frac{n}{it}(A - \frac{in}{t})^{-1}\right]^n & \text{si } t \neq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

La función $t \mapsto U_{t,n}$ es fuertemente continua e uniformemente diferenciable. La función exponencial finalmente se define como:

$$U_t := s - \lim_{n \rightarrow \infty} U_{t,n} \quad (3.12)$$

Corolario 3.5 *Si f es un vector propio de A , $Af = \lambda f$, entonces $U_t f = e^{-i\lambda t} f$.*

Hemos visto en la sección 2.3 que un operador autoadjunto A induce una descomposición ortogonal del espacio de Hilbert en dos subespacios $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$. En la siguiente proposición se establecen algunas relaciones entre esta descomposición de \mathcal{H} y el grupo de evolución asociado con A .

Proposición 3.6 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, A su generador infinitesimal y $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(A) \oplus \mathcal{H}_c(A)$ la descomposición asociada de \mathcal{H} . Denote por $E_p(A)$ y $E_c(A)$ las proyecciones ortogonales con rango $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$, respectivamente. Entonces*

- (a) *Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $BU_t = U_t B$ para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces las restricciones de B a $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$ dejan invariantes a $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$, respectivamente, i.e. $B = B_p \oplus B_c$, donde B_p es un operador que actúa en $\mathcal{H}_p(A)$ y B_c es un operador que actúa en $\mathcal{H}_c(A)$. En otras palabras, si $f_p \oplus f_c$, entonces*

$$Bf = B_p f_p \oplus B_c f_c, \quad (3.13)$$

o equivalentemente

$$BE_p(A) = E_p(A)B, \quad BE_c(A) = E_c(A)B. \quad (3.14)$$

- (b) U_t deja $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$ invariantes, y las restricciones de U_t a $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$, definen grupos uniparametrizados unitarios fuertemente continuos $U_{t,p}$ y $U_{t,c}$ los cuales actúan en $\mathcal{H}_p(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$, respectivamente.

El siguiente lema da otro resultado sobre conmutatividad.

Lema 3.7 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, A su generador infinitesimal. Suponga que $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto y que $BU_t = U_tB$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces*

- (a) U_t deja a cada subespacio propio M_i de B y $\mathcal{H}_c(B)$ invariantes, i.e., en la descomposición $\mathcal{H} = \bigoplus_i M_i \oplus \mathcal{H}_c(B)$:

$$U_t = \bigoplus_i U_{t;i} \oplus U_{t,c}(B). \quad (3.15)$$

- (b) Los operadores $\{U_{t;i}\}$ forman un grupo uniparametrizado fuertemente continuo en M_i .

- (c) $D(A) \cap M_i$ es denso en M_i .

Proposición 3.8 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución y A su generador infinitesimal. Para $f \in \mathcal{H}$, defina su órbita $\mathcal{O}(f) := \{U_s f | s \in \mathbb{R}\}$, y denotemos por $\mathcal{M}(f)$ el subespacio generado por $\mathcal{O}(f)$. Entonces, si $f \in \mathcal{H}_c(A)$ y $f \neq 0$, $\mathcal{M}(f)$ es infinito dimensional.*

3.2. Cálculo funcional

Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución y A su generador infinitesimal. El propósito de esta sección es la de definir funciones de A y algunas de sus propiedades.

La manera estándar de definir funciones de operadores autoadjuntos es mediante el uso del teorema espectral. Como en este trabajo se evita el teorema espectral, por lo tanto, se usaran definiciones en términos del grupo de evolución. Esta definición sólo da una clase restringida de funciones de A , sin embargo, es suficiente para nuestras aplicaciones.

Supongamos que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es la transformada inversa de Fourier de una función $\tilde{\phi}$ en $L^1(\mathbb{R})$ (en consecuencia, formalmente, $\tilde{\phi}$ es la transformada inversa de Fourier de ϕ). Considere la expresión:

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(t) U_t^* dt. \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) define un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{\phi}(t) U_t^*\| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\phi}(t)| dt = \|\tilde{\phi}\|_1 < \infty. \quad (3.17)$$

Si $\tilde{\phi}$ es continua, la integral en (3.16) se define como una integral de Riemann; en las aplicaciones posteriores $\tilde{\phi}$ siempre será continua.

El operador definido por (3.16) se denotará por $\phi(A)$:

$$\phi(A) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(t) U_t^* dt. \quad (3.18)$$

Esto se puede justificar formalmente escribiendo $U_t^* = e^{iAt}$, de nuevo de manera formal, (3.18) da la transformada inversa de Fourier ϕ de $\tilde{\phi}$, donde el argumento es el operador A .

Demostremos algunas propiedades de los operadores $\phi(A)$.

Proposición 3.9 *Suponga que $\tilde{\phi}, \tilde{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

(a) $\phi(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\|\phi(A)\| \leq (2\pi)^{-1/2} \|\tilde{\phi}\|_1$.

(b)
$$\phi(A)U_s = U_s\phi(A) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

(c)
$$[\phi(A)]^* = \bar{\phi}(A), \quad \text{donde } \bar{\phi}(\lambda) := \overline{\phi(\lambda)}. \quad (3.20)$$

(d)
$$\phi(A)\psi(A) = \psi(A)\phi(A) = (\phi\psi)(A), \quad (3.21)$$

donde $(\phi\psi)(\lambda) := \phi(\lambda)\psi(\lambda)$.

(e) Si $Af = \lambda f$, entonces $\phi(A)f = \phi(\lambda)f$.

(f) Si $f \in D(A)$, entonces $\phi(A)f \in D(A)$ y

$$A\phi(A)f = \phi(A)Af. \quad (3.22)$$

(g) $f \in \mathcal{H}_p(A) \Rightarrow \phi(A)f \in \mathcal{H}_p(A)$, y $g \in \mathcal{H}_c(A) \Rightarrow \phi(A)g \in \mathcal{H}_c(A)$, o equivalentemente

$$E_p(A)\phi(A) = \phi(A)E_p(A), \quad E_c(A)\phi(A) = \phi(A)E_c(A). \quad (3.23)$$

Lema 3.10 *Suponga que $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$s - \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(s) U_{\tau s}^* ds = (2\pi)^{1/2} \phi(0)I. \quad (3.24)$$

Proposición 3.11 *Suponga que $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$, $\tilde{\phi}$ es continuamente diferenciable y que su derivada $\tilde{\phi}'$ también pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{R}(\phi(A)) \subset D(A)$, $A\phi(A)$ esta en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y está dado por*

$$A\phi(A) = i(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}'(t) U_t^* dt. \quad (3.25)$$

Ejemplos de funciones que satisfacen todas las hipótesis de las proposiciones 3.9 y 3.11 son funciones ϕ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$. El resolvente $(A - z)^{-1}$ es también $\phi(A) \equiv \psi_z(A)$; de hecho, por el corolario 3.2, tenemos:

$$\text{Si } \text{Im } z > 0 : \tilde{\psi}_z(t) = \sqrt{2\pi i} e^{-izt} \chi_{(-\infty, 0)}(t), \quad (3.26)$$

$$\text{Si } \text{Im } z < 0 : \tilde{\psi}_z(t) = -\sqrt{2\pi i} e^{-izt} \chi_{(0, \infty)}(t), \quad (3.27)$$

donde χ_Δ denota la función característica del conjunto Δ . Observe que $\tilde{\psi}_z \in L^1(\mathbb{R})$ pero su derivada no es una función. También, (3.26) y (3.27) implican, junto con (3.20) que

$$[(A - z)^{-1}]^* = (A - \bar{z})^{-1}. \quad (3.28)$$

Dada una función ϕ , podemos definir una sucesión $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ agregando un factor de convergencia en la transformada de Fourier $\tilde{\phi}$ de ϕ . Más precisamente, definimos ϕ_ϵ por

$$(\tilde{\phi}_\epsilon)(t) = \tilde{\phi}(t) e^{-\epsilon|t|} \quad (\epsilon > 0) \quad (3.29)$$

En el siguiente lema relacionamos $\phi_\epsilon(A)$ al resolvente de A . Además se establece que $\phi_\epsilon(A)$ converge a $\phi(A)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Lema 3.12 *Suponga que ϕ y $\tilde{\phi}$ están en $L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$(\phi_\epsilon)(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) [(A - \lambda - i\epsilon)^{-1} - (A - \lambda + i\epsilon)^{-1}] d\lambda, \quad (3.30)$$

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\phi(A) - \phi_\epsilon(A)\| = 0. \quad (3.31)$$

El resto de esta sección se dedica a enunciar las afirmaciones que permiten demostrar la parte (a) de la proposición 2.96: Un operador compacto no puede tener espectro continuo. Iniciamos con unos resultados preliminares.

Escogemos una función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la cuál tiene las siguientes propiedades:

$$(i) \quad |\phi(\lambda)| \leq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(ii)

$$\phi(\lambda) = 1, \text{ si } |\lambda| \leq 1, \quad (3.32)$$

$$(iii) \quad \phi(\lambda) = 0, \text{ si } |\lambda| \geq 2.$$

Para una $\mu \in \mathbb{R}$, definimos una sucesión $\{\phi_{\mu, n}\}$ de funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ por

$$\phi_{\mu, n}(\lambda) = \phi(2^n(\lambda - \mu)). \quad (3.33)$$

Fácilmente se checa que estas funciones tienen las siguientes propiedades:

$$\phi_{\mu, n}(\lambda) \phi_{\mu, n+m}(\lambda) = \phi_{\mu, n+m}(\lambda) \quad \forall m \geq 1, \quad (3.34)$$

$$\tilde{\phi}_{\mu,n}(t) = 2^{-n} e^{-i\mu t} \tilde{\phi}(2^{-n}t), \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\phi}_{\mu,n}(t) := \tilde{\phi}'_{\mu,n}(t) = -i\mu \tilde{\phi}_{\mu,n}(t) + 2^{-2n} e^{-i\mu t} \tilde{\phi}'(2^{-n}t). \quad (3.36)$$

Lema 3.13 *Sea A autoadjunto. Entonces, para cada $\mu \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \mu)\phi_{\mu,n}\| = 0. \quad (3.37)$$

Lema 3.14 *Sea A autoadjunto, y sea $\mathcal{R}_{\mu,n}$ el rango de $\phi_{\mu,n}(A)$. Entonces*

$$(a) \quad U_t \mathcal{R}_{\mu,n} \subset \mathcal{R}_{\mu,n} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

$$(b) \quad \mathcal{R}_{\mu,n+m} \subset \mathcal{R}_{\mu,n} \quad \forall m \geq 0. \quad (3.39)$$

Lema 3.15 *Sea A autoadjunto con espectro puramente continuo. Defina $\mathcal{M}_{\mu,n}$ la cerradura de $\mathcal{R}_{\mu,n}$. Entonces el subespacio $\mathcal{M}_{\mu,n}$ es de dimensión infinita o cero.*

Lema 3.16 *Sea A un operador autoadjunto con espectro puramente continuo, y sea $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces, existe un entero n_0 tal que $\phi_{\mu,n}(A) = 0$ para toda $n \geq n_0$, o existe una sucesión de vectores $\{g_n\} \in D(A)$ los cuales satisfacen $\|g_n\| = 1$, $w - \lim g_n = 0$ y $s - \lim (A - \mu)g_n = 0$.*

Con estos resultados se puede demostrar la proposición 2.96.

3.3. Propiedades ergódicas de los grupos de evolución

En esta sección damos algunos resultados acerca de las propiedades ergódicas de los grupos de evolución. Estos serán muy útiles para estudiar el comportamiento asintótico de la parte de un grupo de evolución en el subespacio de continuidad $\mathcal{H}_c(A)$ de su generador infinitesimal A . En términos generales, demostraremos aquí que los vectores en $\mathcal{H}_c(A)$ tienden débilmente a cero bajo $\{U_t\}$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, pero en general sólo cuando sean promediados sobre el parámetro t en algún sentido. Existen varias maneras de promediar que podrían usarse, sin embargo, sólo consideraremos el promedio de Cesàro de una función $\phi(t)$ definido como

$$\frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt.$$

Primero consideraremos un lema simple acerca del límite de Cesàro, a continuación deduciremos los teoremas básicos, el llamado teorema ergódico medio y se enunciarán varias consecuencias de él.

El primer lema establece que, si una función $\phi(t)$ tiene un límite cuando $t \rightarrow \infty$, entonces también lo hace su promedio de Cesàro cuando $T \rightarrow \infty$. El recíproco, por supuesto no es cierto; sin embargo, en algunos casos, si el promedio de Cesàro converge, es posible encontrar una sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ y tal que $\{\phi(t_n)\}$ converge al mismo límite que el promedio de Cesàro. Uno de estos casos se trata en la parte (b) del lema 3.17

Lema 3.17 (a) Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y suponga que $\lim \phi(t) = a_{\pm}$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, respectivamente. Entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \phi(t) dt = a_{\pm}. \quad (3.40)$$

(b) Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tal que (3.40) se cumple con $a_{\pm} = 0$. Entonces existen sucesiones $\{t_n^{\pm}\}$ tales que $t_n^{\pm} \rightarrow \pm\infty$ y $\phi(t_n^{\pm}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

(c) Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\|\phi\|_{\infty} \equiv \text{ess sup}_t \phi(t) < \infty$. Entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt = 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\phi(t)|^2 dt = 0.$$

Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución. Sean \mathcal{N}_0 y \mathcal{N}_1 definidos como sigue:

$$\mathcal{N}_0 = \{f \in \mathcal{H} | U_t f = f \quad \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad (3.41)$$

$$\mathcal{N}_1 = \{g \in \mathcal{H} | g = U_t f - f \text{ para alguna } f \in \mathcal{H} \text{ y alguna } t \in \mathbb{R}\}, \quad (3.42)$$

y sea \mathcal{N} el subespacio generado por \mathcal{N}_1 . Entonces:

Lema 3.18

(a) \mathcal{N}_0 y \mathcal{N} son subespacios cada uno de los cuales es invariante bajo $\{U_t\}$.

(b) \mathcal{N}_0 y \mathcal{N} son complementos ortogonales el uno del otro, i.e. $\mathcal{H} = \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}$.

(c) \mathcal{N}_0 es el espacio nulo del generador infinitesimal A de $\{U_t\}$.

Teorema 3.19 Teorema de la media ergódica. Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, A su generador infinitesimal y $E_0(A)$ la proyección ortogonal cuyo rango es $N(A)$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}$,

$$s - \lim_{T \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} U_t f dt = E_0(A)f. \quad (3.43)$$

En particular, si $f \perp N(A)$, el límite anterior es cero.

Lema 3.20 Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, y suponga que su generador infinitesimal A tiene espectro puramente continuo. Suponga que $B \in \mathcal{B}_{\infty}$ y que $B U_t = U_t B$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces $B = 0$. (En otras palabras: el conmutador de un operador autoadjunto A con espectro puramente continuo no puede contener ningún operador compacto distinto de cero.)

Lema 3.21 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, A su generador infinitesimal. Suponga que A tiene espectro puramente continuo. Entonces, para todas $f, g \in \mathcal{H}$:*

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} |(g, U_t f)|^2 dt = 0. \quad (3.44)$$

Proposición 3.22 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, A su generador infinitesimal y $f \in \mathcal{H}_c(A)$. Entonces para cada $g \in \mathcal{H}$:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} |(g, U_t f)|^2 dt = 0, \quad (3.45)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} |(g, U_t f)| dt = 0, \quad (3.46)$$

La proposición 3.22 muestra que la evolución $U_t f$ de cada $f \in \mathcal{H}_c(A)$ converge débilmente a cero en el promedio. De manera natural se introduce el conjunto de vectores que convergen débilmente a cero sin promedio alguno. Por lo tanto, definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_w^\pm(A) &= \{f \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (f, U_t f) = 0\} \\ &\text{y} \\ \mathcal{H}_w(A) &= \mathcal{H}_w^+(A) \oplus \mathcal{H}_w^-(A) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Denotamos por $E_w(A)$ la proyección con rango $\mathcal{H}_w(A)$ y entonces tenemos:

Proposición 3.23 (a) $\mathcal{H}_w^+(A) = \mathcal{H}_w^-(A) = \mathcal{H}_w(A)$.

(b) Si $f \in \mathcal{H}_w(A)$, entonces $w - \lim U_t f = 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

(c) $\mathcal{H}_w(A)$ es un subespacio de $\mathcal{H}_c(A)$, y es invariante bajo U_s para cada $s \in \mathbb{R}$.

(d) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es tal que $BU_s = U_s B$ para toda $s \in \mathbb{R}$, entonces $BE_w(A) = E_w(A)B$.

De la teoría espectral se conoce que el llamado subespacio de continuidad $\mathcal{H}_{ac}(A)$ esta contenido en $\mathcal{H}_w(A)$. Este subespacio también puede ser introducido en términos del grupo de evolución $\{U_t\}$ asociado con A :

$$\mathcal{H}_{ac}(A) := \text{Subespacio generado por } \{f \in \mathcal{H} \mid \int_{\mathbb{R}} |(f, U_t f)|^2 dt < \infty\} \quad (3.48)$$

Al final de la sección (Nota 3.31 y lema 3.30) se dará una descripción heurística de que esta definición del subespacio de continuidad coincide con aquella de la teoría espectral y se dará una verificación del hecho que $\mathcal{H}_{ac}(A) \subset \mathcal{H}_w(A)$.

Proposición 3.24 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución, A su generador infinitesimal y B un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Suponga que existe un operador $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

- (a) $CU_t = U_tC$ para toda $t \in \mathbb{R}$,
- (b) $\mathcal{R}(C)$ es denso en \mathcal{H} ,
- (c) $BC \in \mathcal{B}_\infty$.

Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}_c(A)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|BU_t f\|^2 dt = 0, \quad (3.49)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|BU_t f\| dt = 0, \quad (3.50)$$

Además, para cada $f \in \mathcal{H}_w(A)$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|BU_t f\| = 0, \quad (3.51)$$

En particular, (3.49) - (3.51) se cumple si $B \in \mathcal{B}_\infty$ o si $B(A - zI)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$ para alguna $z \in \rho(A)$.

Lema 3.25 *Suponga que $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$. Sea $f \in \mathcal{H}_c(A)$. Entonces*

$$s - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} ds \tilde{\phi}(s) U_{\tau s}^* f = 0. \quad (3.52)$$

Definición 3.26 *Denotemos por $C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables de \mathbb{R} en \mathbb{C} cada una de las cuales se anula en alguna vecindad de $\lambda = 0$ y fuera de algún intervalo finito. Es decir:*

$$C_{00}^\infty(\mathbb{R}) := C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (3.53)$$

Proposición 3.27 *Sea A autoadjunto, \mathcal{M} un subespacio de $\mathcal{H}_c(A)$ invariante bajo U_t y \mathcal{D} un subconjunto total de \mathcal{M} . Entonces el conjunto $\{\phi(A)\mathcal{D} \mid \phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})\}$ es total en \mathcal{M} .*

Nota 3.28 *La proposición 3.27 también puede demostrarse para el caso donde $C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ se reemplaza por otros subconjuntos de $C_0^\infty(\mathbb{R})$, por ejemplo: $C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \Gamma)$, donde Γ es un conjunto finito o un conjunto cerrado numerable. Sin embargo, para nuestras aplicaciones basta saber este resultado para $C_{00}^\infty(\mathbb{R})$.*

Damos otra consecuencia de las propiedades ergódicas precedentes.

Proposición 3.29 *Sea $\{U_t\}$ un grupo de evolución y $U_{t,c}$ su restricción al subespacio continuo $\mathcal{H}_c(A)$ de su generador infinitesimal A . Entonces existen dos sucesiones $\{t_n^\pm\}$ tales que $t_n^+ \rightarrow \infty, t_n^- \rightarrow -\infty$ y $w - \lim U_{t_n^\pm, c} = 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Terminamos esta sección con algunas consideraciones relacionadas con los subespacios espectrales de un operador autoadjunto A . Primero demostramos que cada vector en el subespacio de continuidad absoluta de A , definido en (3.48), converge débilmente a cero bajo el grupo de evolución asociado:

Lema 3.30 *Sea A un operador autoadjunto y sea $\{U_t\}$ el grupo de evolución asociado. Entonces*

$$\mathcal{H}_{ac}(A) \subset \mathcal{H}_w(A).$$

Nota 3.31 *Usando las transformadas de Fourier con respecto a la variable t de las funciones $(f, U_t f)$, es posible introducir un subdivisión adicional del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_c(A)$. Se puede demostrar que $(f, U_t f)$ puede ser representado de la forma*

$$(f, U_t f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} d\mu_f(\lambda),$$

donde μ_f es una función de \mathbb{R} a $[0, \infty)$ la cuál depende tanto de f como del operador A y satisface

- (α) $\mu_f(\lambda) \geq \mu_f(\lambda')$ si $\lambda \geq \lambda'$,
- (β) $\mu_f(-\infty) := \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mu_f(\lambda) = 0$,
- (γ) $\int_{-\infty}^{\infty} d\mu_f(\lambda) = \mu_f(+\infty) = \|f\|^2 < \infty$,
- (δ) $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mu_f(\lambda + \epsilon) = \mu_f(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Este es un caso especial de un teorema de Bochner.

Un vector $f \in \mathcal{H}$ se dice que pertenece al espacio de continuidad absoluta $\mathcal{H}_{ac}(A)$ de A si la medida determinada por μ_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , i.e. si $\mu_f(\Delta) = 0$ para cada subconjunto de Borel Δ cuya medida de Lebesgue es cero. f se dice que pertenece al subespacio de singularidad $\mathcal{H}_s(A)$ de A si μ_f es singular respecto a la medida de Lebesgue, i.e. si existe un conjunto de Borel Δ_0 , de medida de Lebesgue cero, $|\Delta_0| = 0$, tal que $\mu_f(\Delta) = \mu_f(\Delta \cap \Delta_0)$ para cada conjunto de Borel Δ de \mathbb{R} . Puede mostrarse que $\mathcal{H}_{ac}(A)$ y $\mathcal{H}_s(A)$ son invariantes bajo U_t y complementos ortogonales el uno del otro, i.e. que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}(A) \oplus \mathcal{H}_s(A)$ y que también $A = A_{ac} \oplus A_s$ con en (2.21).

Si f es tal que $(f, U_t f) \in L^p(\mathbb{R})$ para alguna $p \in [1, 2]$, entonces $|(f, U_t f)|^2 \leq c|(f, U_t f)|^p$ para alguna constante $c < \infty$ que depende sólo de f . Así $(f, U_t f)$ también está en $L^2(\mathbb{R})$, en consecuencia f está en $\mathcal{H}_{ac}(A)$ de acuerdo a la definición (3.48). Así $\phi(t) := (f, U_t f)$ es la transformada de Fourier de una función $\hat{\phi}$ la cual está en $L^2(\mathbb{R})$, en consecuencia, localmente en $L^1(\mathbb{R})$:

$$(f, U_t f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \hat{\phi}(\lambda) d\lambda.$$

Es claro (y puede demostrarse de manera rigurosa) que $\widehat{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$ y que $d\mu_f(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda)d\lambda$. Por lo tanto, en este caso, la medida μ_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, además de que $f \in \mathcal{H}_{ac}(A)$ también por la definición de $\mathcal{H}_{ac}(A)$ vía la transformada de Fourier.

Suponga que f es un vector propio de A , digamos que $Af = \alpha f$. Entonces $(f, U_t f) = \exp(-i\alpha t)\|f\|^2$. En este caso la función μ_f debe ser como sigue: $\mu_f(\lambda) = 0$ para $\lambda < \alpha$, $\mu_f(\lambda) = \|f\|^2$ para $\lambda \geq \alpha$. Así, el soporte de la medida μ_f consiste en un sólo punto $\Delta = \{\alpha\}$, un conjunto de medida de Lebesgue cero. Esto muestra que cada eigenvector de A pertenece a $\mathcal{H}_s(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}_p(A) \subset \mathcal{H}_s(A)$ y consecuentemente $\mathcal{H}_{ac}(A) \subset \mathcal{H}_c(A)$.

Aparte de \mathcal{H}_p , el subespacio de singularidad $\mathcal{H}_s(A)$ también puede contener una parte de $\mathcal{H}_c(A)$, en cuyo caso, $\mathcal{H}_{ac}(A)$ es estrictamente más pequeño que $\mathcal{H}_c(A)$. La intersección de $\mathcal{H}_s(A)$ y $\mathcal{H}_c(A)$ se llama el subespacio de continuidad singular de A y se denota por $\mathcal{H}_{sc}(A)$. Entonces se tienen las siguientes descomposición de \mathcal{H} y A :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{ac}(A) \oplus \mathcal{H}_{sc}(A) \oplus \mathcal{H}_p(A), \\ A &= A_{ac} \oplus A_{sc} \oplus A_p.\end{aligned}$$

donde cada uno de los operadores es autoadjunto en su subespacio respectivo. El espectro de A_{ac} , como un operador en $\mathcal{H}_{ac}(A)$, se llama el espectro de continuidad absoluta $\sigma_{ac}(A)$ de A ; el espectro de A_{sc} , como un operador en $\mathcal{H}_{sc}(A)$, se llama el espectro de continuidad singular $\sigma_{sc}(A)$ de A . Si por ejemplo, $\mathcal{H}_{sc}(A) = \{0\}$, entonces A se dice que tiene espectro singular continuo, i.e. $\sigma_{sc}(A) = \emptyset$. Claramente $\sigma_c(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sc}(A)$.

3.4. El grupo de evolución libre de Schrödinger

En el ejemplo 2.15 introducimos el llamado Hamiltoniano libre de Schrödinger H_0 , el operador autoadjunto determinado por el negativo del Laplaciano en $L^2(\mathbb{R}^n)$. El grupo de evolución asociado será denotado por $\{U_t^0\}$ y será llamado el grupo de evolución libre de Schrödinger. En la presente sección se dan algunas propiedades simples de los operadores U_t^0 .

Proposición 3.32 En $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$, U_t^0 está dado por

$$(\mathcal{F}U_t^0 f)(\bar{k}) = e^{-i|\bar{k}|^2 t} \tilde{f}(\bar{k}). \quad (3.54)$$

Proposición 3.33 En $L^2(\mathbb{R}^n)$, U_t^0 es un operador integral dado para $(t \neq 0)$

$$(U_t^0 f)(\bar{x}) = (4\pi i t)^{n/2} \int e^{i|\bar{x}-\bar{y}|^2/(4t)} f(\bar{y}) d^n y, \quad (3.55)$$

donde la rama de la raíz cuadrada es tal que

$$\left(\frac{4\pi i t}{|4\pi i|} \right)^{-n/2} = \begin{cases} e^{-in\pi/4} & \text{si } t > 0 \\ e^{+in\pi/4} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Nota 3.34 Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, la integral en (3.55) existe para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Para una función arbitraria en $L^2(\mathbb{R}^n)$, (3.55) tiene que interpretarse como un límite en la media.

Proposición 3.35 El Hamiltoniano libre de Schrödinger H_0 es espectralmente absolutamente continuo, i.e. se tiene que

$$\mathcal{H}_{ac}(H_0) = \mathcal{H}_w(H_0) = L^2(\mathbb{R}^n).$$

Proposición 3.36 Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $t \neq 0$, defina un operador Z_t como

$$(Z_t f)(\bar{x}) = e^{i\bar{x}^2/4t} f(\bar{x}). \quad (3.56)$$

Entonces Z_t es unitario y satisface

$$(a) \quad s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} Z_t = I, \quad (3.57)$$

$$(b) \quad U_t^{0*} \phi(\bar{Q}) U_t^0 = Z_t^* \phi(2t\bar{P}) Z_t \quad \forall \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.58)$$

Proposición 3.37 Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la transformada inversa de una función $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $\phi(H_0)$ es el operador de multiplicación en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por $\phi(\bar{k}^2)$. Además $\|\phi(H_0)\| = \|\phi\|_\infty$.

Capítulo 4

Propiedades asintóticas de los grupos de evolución

En este capítulo se demuestran algunos resultados sobre el comportamiento de $U_t f$ cuando el parámetro t tiende a $\pm\infty$.

Para clasificar los vectores de acuerdo a su comportamiento asintótico bajo U_t , se debe considerar alguna estructura matemática adicional aparte del grupo de evolución $\{U_t\}$. En la sección 4.1 ésta será una familia de "operadores de localización". En $L^2(\mathbb{R}^n)$, estos operadores son precisamente la medida espectral de la n -ésima componente del operador de posición introducido en el ejemplo 2.55. Se clasificarán los vectores de acuerdo a cómo se comportan en el espacio de configuración \mathbb{R}^n como una función de t , y en particular se definen los llamados estados ligados y los estados de dispersión.

Ligeramente hablando, los vectores de dispersión son vectores cuya probabilidad de ser localizados en cualquier región acotada del espacio de configuración tiende a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$. En la sección 4.2 consideramos como estructura matemática adicional un segundo grupo de evolución $\{U_t^0\}$ y nos preguntamos si es posible describir el comportamiento asintótico de los estados de dispersión del primer grupo $\{U_t\}$ en términos del segundo grupo $\{U_t^0\}$. Físicamente esto corresponde a preguntarse si la condición asintótica de los estados de dispersión se satisface respecto a un grupo $\{U_t^0\}$ que describe un sistema "sin interacción"; Matemáticamente es una manera posible de preguntar si el generador infinitesimal A de $\{U_t\}$ (o de su parte continua) es unitariamente equivalente a un operador más simple, el generador infinitesimal A^0 de $\{U_t^0\}$. (Por ejemplo, A^0 puede ser el Hamiltoniano libre de Schrödinger H_0 del ejemplo 2.57, o bien el Hamiltoniano libre de Stark (6.45)).

La comparación asintótica de $\{U_t\}$ y $\{U_t^0\}$ puede hacerse en términos de los operadores de onda. Estos se definirán en la sección 4.2, donde también establecemos sus propiedades básicas. En la sección 4.3 damos un criterio abstracto para la existencia y completitud de los operadores de onda, y en la sección 4.4 lo aplicamos para el caso concreto de grupos de evolución determinados por el Hamiltoniano de Schrödinger.

El capítulo 5 del libro de Amrein [7] ha sido la base del presente capítulo.

4.1. Estados ligados, estados de dispersión y estados de absorción

En esta sección consideramos la situación concreta donde $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por B_r la bola de radio $r > 0$ en \mathbb{R}^n centrada en el origen:

$$B_r = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{x}| \leq r\}. \quad (4.1)$$

Sea F_r la proyección ortogonal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con rango en $L^2(B_r)$, en otras palabras el operador de multiplicación por la función característica χ_r de B_r . Recordamos que $\chi_r(\bar{x}) = 1$ si $\bar{x} \in B_r$ y $\chi_r(\bar{x}) = 0$ si $\bar{x} \notin B_r$.

Observamos que

$$s - \lim_{r \rightarrow \infty} F_r = I. \quad (4.2)$$

En efecto, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|(I - F_r)f\|^2 = \int_{|\bar{x}| \geq r} |f(\bar{x})|^2 d^n x \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty.$$

La interpretación física de F_r es como sigue. Supongamos que el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ se usa para describir un sistema físico (sin estructura) en un espacio de configuración n -dimensional de acuerdo a las reglas de la mecánica cuántica. Entonces F_r es el observable de localización en B_r ; en otras palabras, si $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, entonces $\|F_r f\|^2 / \|f\|^2$ es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado f localizado dentro de la bola B_r . (Cada vector $f \neq 0$ en \mathcal{H} determina un estado puro del sistema, el rayo unitario $\{\alpha f \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = \|f\|^{-1}\}$. Abusando de la terminología, nos referiremos a los vectores f como "estados".)

Sea $\{U_t f\}$ un grupo de evolución. Denotamos su generador infinitesimal por H , como ahora tenemos en mente el grupo que da la evolución temporal real de un sistema mecánico cuántico, por lo tanto, H es el Hamiltoniano del sistema. Un vector f en \mathcal{H} se llama un estado ligado de H si, en el curso de su evolución, permanece esencialmente localizado en una región acotada del espacio de configuración para todos los tiempos. Matemáticamente este requerimiento puede ser formulado como sigue: dado cualquier $\epsilon > 0$, existe una bola finita B_r tal que, para toda $t \in \mathbb{R}$, la probabilidad de que $U_t f$ se localize fuera de la bola B_r es menor que ϵ :

$$\frac{1}{\|f\|^2} \int_{|\bar{x}| \geq r} |(U_t f)(\bar{x})|^2 d^n x < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ para algún } r \in (0, \infty).$$

Escrito de manera distinta, f es un estado ligado si

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(I - F_r)U_t f\|^2 = 0. \quad (4.3)$$

El conjunto de todos los estados ligados de H se denotará por $\mathcal{M}_0(H)$.

Podemos introducir dos conjuntos $\mathcal{M}^+(H)$ y $\mathcal{M}^-(H)$ que consisten de aquellos estados que están ligados a tiempos positivos y negativos, respectivamente:

$$f \in \mathcal{M}_0^\pm(H) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \pm\infty)} \|(I - F_r)U_t f\|^2 = 0. \quad (4.4)$$

Claramente

$$\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{M}_0^+(H) \cap \mathcal{M}_0^-(H). \quad (4.5)$$

Vamos ahora a la definición de los estados de dispersión. En una situación de dispersión, el sistema debería estar localizado muy lejos de cada región acotada en tiempos grandes (positivos y negativos); debe propagarse hacia el infinito cuando $t \rightarrow \pm\infty$. De antemano no existe razón para que los estados de dispersión en $t = +\infty$ debieran ser los mismos que en $t = -\infty$, en consecuencia haremos una distinción entre los dos casos.

Las observaciones precedentes llevan a la siguiente definición: Un vector f en \mathcal{H} es un estado de dispersión en $t = \pm\infty$ si, para cada $r < \infty$,

$$\frac{1}{\|f\|^2} \int_{|\bar{x}| \leq r} |(U_t f)(\bar{x})|^2 d^n x \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \pm\infty, \text{ respectivamente.}$$

Una definición equivalente es

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|F_r U_t f\|^2 = 0 \quad \forall r < \infty. \quad (4.6)$$

El conjunto de todos los estados de dispersión en $t = \pm\infty$ se denotará por $\mathcal{M}_\infty^\pm(H)$.

Hemos visto en el capítulo 3 que los grupos de evolución automáticamente tienen ciertas propiedades ergódicas. Para hacer uso de estas propiedades ergódicas, es conveniente introducir una noción algo más débil de estados de dispersión al promediar sobre un parámetro t . En lugar de requerir la convergencia a cero de la probabilidad de encontrar el sistema en una bola finita B_r , uno simplemente requiere la convergencia a cero de la probabilidad media cuadrada de encontrar el sistema en tal bola. Así, introducimos dos conjuntos $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H)$ de los "Estados de dispersión en el promedio temporal" como sigue:

$$f \in \bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|F_r U_t f\|^2 dt = 0 \quad \forall r < \infty. \quad (4.7)$$

Nota 4.1 *El uso de las funciones características para definir los estados de dispersión en (4.6) y (4.7) no es esencial. Se hace esta elección porque los operadores F_r tienen una interpretación física simple. Una definición equivalente sería, por ejemplo:*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\phi(\bar{Q})U_t f\|^2 = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En la primera proposición de las siguientes damos algunas propiedades de los subconjuntos $\mathcal{M}_0^\pm(H)$, $\mathcal{M}_\infty^\pm(H)$ y $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H)$ del espacio de Hilbert \mathcal{H} . En particular veremos que los vectores en $\mathcal{H}_p(H)$ siempre son ligados. Mientras que los estados de dispersión

siempre están contenidos en el subespacio de continuidad $\mathcal{H}_c(H)$ del Hamiltoniano H . De manera natural surge la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones se tiene que $\mathcal{H}_p(H) = \mathcal{M}_0^\pm(H)$ y $\mathcal{H}_c(H) = \bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H)$? Daremos condiciones suficientes para que estas identidades se cumplan y una lista de algunos ejemplos.

Proposición 4.2 (a) $\mathcal{M}_0(H)$, $\mathcal{M}_0^\pm(H)$, $\mathcal{M}_\infty^\pm(H)$ y $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H)$ son subespacios de \mathcal{H} .
Cada uno de estos subespacios es invariante bajo U_t .

(b) $\mathcal{M}_\infty^+(H) \subset \bar{\mathcal{M}}_\infty^+(H)$ y $\mathcal{M}_\infty^-(H) \subset \bar{\mathcal{M}}_\infty^-(H)$.

(c) $\mathcal{M}_0^+(H) \perp \bar{\mathcal{M}}_\infty^+(H)$ y $\mathcal{M}_0^-(H) \perp \bar{\mathcal{M}}_\infty^-(H)$.

(d) $\mathcal{M}_0(H) \perp \bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H)$.

(e) $\mathcal{H}_p(H) \subset \mathcal{M}_0(H)$ y $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) \subset \mathcal{H}_c(H)$.

(f) $\mathcal{M}_\infty^\pm(H) \subset \mathcal{H}_w(H)$.

Proposición 4.3 Cada una de las dos condiciones implican que $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H)$, $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_c(H)$ y $\mathcal{M}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_w(H)$:

(α) $F_r(H - zI)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$ para cada $r < \infty$ y alguna $z \in \rho(H)$,

(β) Existe un operador C en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $CU_t = U_tC$ para toda $t \in \mathbb{R}$, $R(C)$ es denso en \mathcal{H} y $F_rC \in \mathcal{B}_\infty$ para cada $r < \infty$.

Ejemplo 4.4 Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $H = \phi(\bar{Q})$ el operador de multiplicación en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por $\phi(\bar{x})$. Entonces

$$(U_t f)(\bar{x}) = e^{-i\phi(\bar{x})t} f(\bar{x}),$$

en consecuencia $\|(I - F_r)U_t f\|^2 = \|(I - F_r)f\|^2 \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Vemos así que, en este ejemplo, $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}$ y $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \{0\}$. En particular, si el espectro de H no es puramente puntual, $\mathcal{M}_0(H) \cap \mathcal{H}_c(H) \neq \{0\}$. Por ejemplo, si $H = \bar{Q}^2$: $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}$.

El ejemplo 4.4 muestra que las conclusiones de la proposición 4.3 sólo se cumplen bajo condiciones adecuadas sobre H pero no en general.

Ejemplo 4.5 Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $H = \phi(\bar{P})$ el operador de multiplicación en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por $\phi(\bar{k})$. Aquí

$$(\mathcal{F}U_t f)(\bar{k}) = e^{-i\phi(\bar{k})t} f(\bar{k}).$$

Sea $C = (|\bar{P}|^{2n} + I)^{-1}$ el operador de multiplicación por $(|\bar{k}|^{2n} + 1)^{-1}$ en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$. C conmuta con U_t , su rango es $R(C) = D(|\bar{P}|^{2n})$, el cual es denso en \mathcal{H} , y F_rC es compacto (de hecho $F_rC = \chi_r(\bar{Q})(|\bar{P}|^{2n} + I)^{-1}$ es Hilbert-Schmidt por la proposición 2.88). En consecuencia por la proposición 4.3, $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H)$, $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_c(H)$ y $\mathcal{M}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_w(H)$.

Ejemplo 4.6 *Un caso especial del ejemplo 4.5 es el Hamiltoniano libre de Schrödinger $H_0 = \bar{P}^2$. En este caso $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H) = \{0\}$. Además, todos los vectores en \mathcal{H} son estados de dispersión en el sentido de (4.6) (Sin promediar sobre el parámetro t):*

$$\mathcal{M}_\infty^\pm(H_0) = \mathcal{H}_{ac}(H_0) = \mathcal{H}. \quad (4.8)$$

De hecho, tenemos $\mathcal{M}_\infty^\pm(H_0) = \mathcal{H}_w(H_0)$ por el ejemplo 4.5 y $\mathcal{H}_w(H_0) = \mathcal{H}_{ac}(H_0) = \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ por la proposición 3.35.

El siguiente lema es un caso especial del corolario 2.98

Lema 4.7 *Sea H_0 del ejemplo 4.6. Entonces, para cada $r < \infty$ y cada $z \in \rho$, $F_r(H_0 - z)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$.*

Proposición 4.8 *En $L^2(\mathbb{R}^n)$, sea $H = H_0 + V$, donde $v \in V_\emptyset$. Entonces $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H)$, $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_c(H)$ y $\mathcal{M}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_w(H)$.*

Más adelante demostraremos (proposición 4.35) que, para una subclase de los potenciales considerados en la proposición 4.8 que $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \mathcal{M}_\infty^\pm(H)$. Otro punto digno de ser observado es que la compacidad de $F_r(H - i)^{-1}$ utilizado para demostrar la proposición 4.8 debería ser cierta únicamente imponiendo condiciones locales sobre v (i.e. v podría ser singular en el infinito). Esto es, en efecto, sencillo de verificar usando los resultados de la sección 2.6:

Proposición 4.9 *Sea $v \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ para alguna p que satisface $p \geq 2, p > n/2$ (i.e. v satisface (2.49) para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$). Sea H una extensión autoadjunta arbitraria del operador minimal $\hat{H} = -\Delta + v(\bar{x})$ definido en $D(\hat{H}) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H)$, $\bar{\mathcal{M}}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_c(H)$ y $\mathcal{M}_\infty^\pm(H) = \mathcal{H}_w(H)$.*

Ahora como en la sección 2.6, el potencial v también puede tener singularidades locales. Más precisamente, supongamos que $v\phi \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \leq 2, p > n/2$) para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$, donde Γ es un conjunto cerrado y acotado de medida de Lebesgue cero. Sea H una extensión autoadjunta arbitraria del operador minimal (2.50), y sea Δ un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ y $F_\Delta = \chi_\Delta(\bar{Q})$ el operador de multiplicación por la función característica χ_Δ de Δ . Al escoger una $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ tal que $\phi(\bar{x}) = 1$ para $\bar{x} \in \Delta$, se ve que, usando el lema 4.7 que $F_\Delta(H + i)^{-1} \in \mathcal{B}_\infty$. Consecuentemente, por la proposición 3.24,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|F_\Delta U_t f\|^2 = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}_w(H), \quad (4.9)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|F_\Delta U_t f\|^2 dt = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}_c(H). \quad (4.10)$$

En otras palabras, si por ejemplo $f \in \mathcal{H}_w(H)$, entonces la probabilidad de encontrar el sistema en cualquier conjunto compacto de $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ tiende a cero. Intuitivamente existen ahora dos posibilidades: el sistema se propaga al infinito, i.e. f es un estado de

dispersión, o se mueve cada vez más cerca al conjunto Γ , i.e. el estado f queda "absorbido" en las singularidades de v . Esto lleva a la introducción de cuatro subconjuntos adicionales de \mathcal{H} , los conjuntos $\mathcal{M}_\Gamma^\pm(H)$ de estados absorbidos en $t = \pm\infty$, respectivamente, y los conjuntos $\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^\pm(H)$ de estados que son absorbidos en el promedio temporal. Así

$$f \in \mathcal{M}_\Gamma^\pm(H) \iff \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\phi(\bar{Q})U_t f\|^2 = 0 \quad \forall \phi \in C_\Gamma, \quad (4.11)$$

$$f \in \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^\pm(H) \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|\phi(\bar{Q})U_t f\|^2 dt = 0 \quad \forall \phi \in C_\Gamma. \quad (4.12)$$

La clase de funciones C_Γ fue introducida en la definición 2.78. Si Γ es acotado, C_Γ contiene todas las funciones infinitamente diferenciables ϕ tal que $\phi(\bar{x}) = 1$ cerca del infinito y sobre cualquier subconjunto compacto Δ_0 de $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$, y $\phi(\bar{x}) = 0$ en alguna vecindad de Γ . Así, si $f \in \mathcal{M}_\Gamma^+(H)$ y Δ es cualquier vecindad abierta de Γ , la probabilidad de que $U_t f$ esté localizada en Δ converge a 1 cuando $t \rightarrow +\infty$. Si por ejemplo $\Gamma = \{0\}$, se tiene que para todo $f \in \mathcal{M}_\Gamma^+(H)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F_r U_t f\|^2 / \|f\|^2 = 1 \quad \forall r > 0. \quad (4.13)$$

Debido a que este estado será localizado esencialmente en una región muy pequeña ($\Gamma = \{0\}$) para tiempos muy grandes, es claro de las relaciones de incertidumbre de la mecánica cuántica que, este estado debe adquirir momento infinito cuando $t \rightarrow \infty$. Antes de demostrar esto, recolectamos unas propiedades muy simples de los subconjuntos $\mathcal{M}_\Gamma^+(H)$ y $\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^+(H)$ de \mathcal{H} .

Proposición 4.10 *Sea Γ un conjunto cerrado y acotado de medida cero. Entonces*

- (a) $\mathcal{M}_\Gamma^\pm(H)$ y $\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^\pm(H)$ son subespacios de \mathcal{H} e invariantes bajo U_t .
- (b) $\mathcal{M}_\Gamma^+(H) \subset \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^+(H)$ y $\mathcal{M}_\Gamma^-(H) \subset \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^-(H)$.
- (c) $\bar{\mathcal{M}}_\infty^+(H) \perp \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^+(H)$ y $\bar{\mathcal{M}}_\infty^-(H) \perp \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^-(H)$.
- (d) $\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^\pm(H) \subset \mathcal{H}_c(H)$.
- (e) $\mathcal{M}_\Gamma^\pm(H) \subset \mathcal{H}_w(H)$.
- (f) $\mathcal{M}_\Gamma^+(H) \subset \mathcal{M}_0^+(H)$ y $\mathcal{M}_\Gamma^-(H) \subset \mathcal{M}_0^-(H)$.
- (g) $\mathcal{M}_\Gamma^+(H) \cap \mathcal{M}_\Gamma^-(H) \subset \mathcal{M}_0(H)$.

Veamos ahora que, si $f \in \mathcal{M}_\Gamma^\pm$, entonces adquiere momento infinito, en consecuencia energía cinética infinita cuando $t \rightarrow \pm\infty$, respectivamente, y si $f \in \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^\pm(H)$, entonces adquiere energía cinética infinita en el promedio temporal (el operador de energía cinética es precisamente el Hamiltoniano libre de Schrödinger $H_0 = \bar{P}^2$).

Proposición 4.11 *Sea Γ un conjunto cerrado de medida cero, $v \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ con $p \geq 2, p > n/2$, y \mathcal{H} una extensión arbitraria autoadjunta del operador minimal \hat{H} .*

(a) *Si $f_{\pm} \in \bar{\mathcal{M}}_{\Gamma}^{\pm}(H)$, entonces para cada $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|\psi(H_0)U_t f_{\pm}\|^2 dt = 0. \quad (4.14)$$

(b) *Si $g_{\pm} \in \mathcal{M}_{\Gamma}^{\pm}(H)$, entonces para cada $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$:*

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi(H_0)U_t g_{\pm} = 0. \quad (4.15)$$

Nota 4.12 *En $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$, (4.15) implica que, para cada $M < \infty$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|\bar{k}| \leq M} |(\mathcal{F}U_t g_{\pm})(\bar{k})|^2 d^n k = 0.$$

Esto significa que, cuando $t \rightarrow \pm\infty$, la probabilidad de que el momento o la energía cinética del vector $U_t g_{\pm}$ permanezca en cualesquier conjunto finito tiende a cero; en otras palabras, $U_t g_{\pm}$ se propaga al infinito en el espacio de momentos.

Se termina esta sección con algunos comentarios más acerca de la absorción local. Como H conmuta con U_t y formalmente $H = \bar{P}^2 + V$, esperamos que la absorción sea posible sólo si el potencial v tiene una parte negativa suficientemente grande cerca e Γ ; en efecto, uno formalmente tiene

$$(f, Hf) = (U_t f, H U_t f) = (U_t f, H_0 U_t f) + (U_t f, V U_t f). \quad (4.16)$$

Si $f \in \mathcal{M}_{\Gamma}^{\pm}(H)$, el primer término del lado derecho de (4.16), tiende a $+\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$ por la proposición 4.11, el segundo a $(U_t f, V F_{\Delta} U_t f)$, donde Δ es cualquier vecindad abierta de Γ . Como el lado izquierdo es independiente de t , se debería tener que $(U_t f, V F_{\Delta} U_t f) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Lo anterior simplemente es un argumento heurístico. De hecho, debemos escoger $f \in D(H)$ en (4.16); esto implica que $U_t f \in D(H)$ para cada t , pero en general $U_t f$ no estará en $D(H_0)$ ni en $D(V)$.

Un comentario final relacionado con el promedio temporal para definir los estados de dispersión y los estados absorbidos. El promedio sobre el tiempo fue introducido para permitirnos usar el Teorema Medio Ergódico y sus consecuencias probando propiedades de los subconjuntos de los estados de dispersión y los estados absorbidos. El promedio temporal relacionado a las propiedades espectrales de H es necesario sólo para tratar vectores en $\mathcal{H}_{sc}(H)$ los cuales no pertenecen a $\mathcal{H}_w(H)$. En muchos casos no existen tales vectores. De hecho se mostrará más adelante en este capítulo, para una clase de operadores de Schrödinger H , que $\mathcal{M}_0(H) = \mathcal{H}_p(H)$ y $\mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H) = \mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}_{ac}(H)$.

4.2. Operadores de onda

Hemos visto que los estados de dispersión asociados con un Hamiltoniano H se propagan a infinito cuando el tiempo t tiende a $+\infty$ o $-\infty$. A menudo el potencial rápidamente tiende a cero a grandes distancias, por lo tanto, un estado de dispersión debería sentir sólo una fuerza muy pequeña cuando $|t|$ es muy grande. Así, se espera que a tiempos grandes un estado de dispersión debería comportarse casi como un estado libre. El objetivo principal de la teoría de la dispersión es dar una descripción más detallada de la evolución temporal de los estados de dispersión a tiempos grandes al mostrar que pueden ser cada vez mejor aproximados por la evolución temporal de un estado diferente bajo un grupo de evolución distinto y más simple (llamado el grupo de evolución libre). Si ambos grupos de evolución están dados, la posibilidad de tal aproximación asintótica de uno de ellos mediante el otro no está de antemano garantizada; es una condición sobre la interacción o el potencial (formalmente la diferencia entre los dos generadores infinitesimales), llamada la condición asintótica.

De ahora en adelante, por lo tanto, consideraremos dos grupos de evolución $\{U_t\}$ y $\{U_t^0\}$, llamados el grupo de evolución total y el grupo de evolución libre, respectivamente. Por el momento, permitimos que $\{U_t^0\}$ sea un grupo abstracto, pero más adelante, $\{U_t^0\}$ será el grupo de evolución libre de Schrödinger. Los generadores de $\{U_t\}$ y $\{U_t^0\}$ se denotan por H y H_0 llamados el Hamiltoniano total y el Hamiltoniano libre, respectivamente. Así, en el sentido de la proposición 3.4:

$$U_t = e^{-iHt}, \quad U_t^0 = e^{-iH_0t}. \quad (4.17)$$

Iniciamos formulando la condición asintótica en términos matemáticos. Como ya se dijo, si $f \in \mathcal{M}_\infty^+(H)$ es un estado de dispersión de H (en $t = +\infty$), debería existir un vector $g_+ \in \mathcal{M}_\infty^+(H_0)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_t f - U_t^0 g_+\| = 0. \quad (4.18)$$

Como U_t es unitario, se tiene

$$\|U_t f - U_t^0 g_+\| = \|U_t^*(U_t f - U_t^0 g_+)\| = \|f - U_t^* U_t^0 g_+\|. \quad (4.19)$$

Así (4.18) puede reescribirse como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f - U_t^* U_t^0 g_+\| = 0, \quad (4.20)$$

$$\text{i.e. } f = s - \lim_{t \rightarrow +\infty} U_t^* U_t^0 g_+. \quad (4.21)$$

En el mismo sentido, si $f \in \mathcal{M}_\infty^-(H)$, debería existir un vector $g_- \in \mathcal{M}_\infty^-(H)$ tal que

$$f = s - \lim_{t \rightarrow -\infty} U_t^* U_t^0 g_-. \quad (4.22)$$

Estas consideraciones llevan de manera natural a la introducción de los dos siguientes operadores Ω_{\pm} , llamados los operadores de onda:

$$\Omega_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^* U_t^0 E_{\infty}^{\pm}(H_0), \quad (4.23)$$

donde $E_{\infty}^{\pm}(H_0)$ denote la proyección ortogonal con rango $\mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H_0)$. En la presente sección supongamos que los límites en (4.23) existen y derivemos algunas propiedades generales de Ω_{\pm} . En las siguientes dos secciones se darán condiciones para la existencia de estos límites.

Para las propiedades generales de Ω_{\pm} dadas a continuación, no es esencial que los límites de $U_t^* U_t^0$ se consideren sobre los subespacios $\mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H_0)$. Por lo tanto, reemplazaremos $E_{\infty}^{\pm}(H_0)$ en (4.23) por una proyección general E_{\pm} que conmuta con U_t^0 , i.e. supongamos a través de esta sección que

$$E_{\pm} = E_{\pm}^* = E_{\pm}^2, \quad U_t^0 E_{\pm} = E_{\pm} U_t^0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.24)$$

y que los siguientes límites existen:

$$\Omega_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^* U_t^0 E_{\pm}. \quad (4.25)$$

Proposición 4.13 Ω_{\pm} son isometrías parciales que satisfacen

$$\Omega_{\pm}^* \Omega_{\pm} = E_{\pm}. \quad (4.26)$$

Si $E_{\pm} = I$, entonces Ω_{\pm} son isometrías.

Proposición 4.14 Ω_{\pm} se entrelaza con H y H_0

(a)

$$U_t \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} U_t^0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.27)$$

$$\Omega_{\pm}^* U_t = U_t^0 \Omega_{\pm}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.28)$$

(b) Si ϕ es tal que $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\phi(H) \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} \phi(H_0), \quad (4.29)$$

$$\Omega_{\pm}^* \phi(H) = \phi(H_0) \Omega_{\pm}^*. \quad (4.30)$$

(c) Si $f \in D(H_0)$, entonces $\Omega_{\pm} f \in D(H)$ y

$$H \Omega_{\pm} f = \Omega_{\pm} H_0 f. \quad (4.31)$$

Definamos ahora

$$F_{\pm} = \Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^*. \quad (4.32)$$

Por la proposición 2.49 F_{\pm} son las proyecciones sobre los rangos $R(\Omega_{\pm})$ de Ω_{+} y Ω_{-} respectivamente. Los subespacios $R(\Omega_{\pm}) = R(F_{\pm})$ son invariantes bajo el grupo de evolución total; esto es el contenido de la parte (a) de la siguiente proposición:

Proposición 4.15 (a)

$$U_t F_{\pm} = F_{\pm} U_t \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

(b) Si ϕ es tal que $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\phi(H) F_{\pm} = F_{\pm} \phi(H). \quad (4.34)$$

En particular:

$$g \in R(\Omega_{\pm}) \Rightarrow \phi(H)g \in R(\Omega_{\pm}), \quad (4.35)$$

$$g \perp R(\Omega_{\pm}) \Rightarrow \phi(H)g \perp R(\Omega_{\pm}). \quad (4.36)$$

(c) Si $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H_0)$, entonces $R(F_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H)$.

(d) Si $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{H}_{ac}(H_0)$, entonces $R(F_{\pm}) \subset \mathcal{H}_{ac}(H)$.

(e) Si $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{H}_w(H_0)$, entonces $R(F_{\pm}) \subset \mathcal{H}_w(H)$.

(f) Si $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H_0)$, entonces $R(F_{\pm}) \subset \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H)$.

Corolario 4.16 Sea H_0 el Hamiltoniano libre de Schrödinger (2.39). Entonces, para cualquier E_{\pm} ,

$$R(\Omega_{\pm}) \subset \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H) \cap \mathcal{H}_{ac}(H_0). \quad (4.37)$$

La proposición 4.15 y el corolario 4.16 llevan de manera natural a la noción de completitud asintótica. Se pueden considerar varias formas de esta noción, algunas de las cuales discutiremos brevemente.

Suponemos que, como es usualmente el caso, se tiene que $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H_0)$. Entonces $R(\Omega_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H)$ por la proposición 4.15 (c). Se dice, entonces, que los operadores de onda Ω_{\pm} son completos (se habla, entonces, de la completitud asintótica de la teoría) si las inclusiones anteriores son ambas igualdades, i.e. si

$$R(\Omega_+) = R(\Omega_-) = \mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}_p(H)^{\perp}. \quad (4.38)$$

En este caso se tiene una descripción asintótica completa, cuando $t \rightarrow \pm\infty$, de todos los vectores en $\mathcal{H}_c(H)$ en términos del grupo de evolución libre U_t^0 , en el sentido de (4.18) y de su análogo para $t \rightarrow -\infty$; en otras palabras, si $f \in \mathcal{H}_c(H)$, existen dos vectores $g_{\pm} \in R(E_{\pm})$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_t f - U_t^0 g_{\pm}\| = 0. \quad (4.39)$$

En otras situaciones los rangos de Ω_{\pm} solamente serían subespacios de $\mathcal{H}_c(H)$. Se espera que generalmente se tenga $R(\Omega_{\pm}) = \mathcal{M}_{\infty}^{\pm}(H)$ o $R(\Omega_{\pm}) = \bar{\mathcal{M}}_{\infty}^{\pm}(H)$. Todavía se puede hablar de la completitud asintótica en un sentido generalizado, siempre que se pueda dar una descripción del comportamiento de los vectores en $\mathcal{H}_c(H) \cap R(\Omega_{\pm})^{\perp}$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Una situación simple es donde todos los vectores en $\mathcal{H}_c(H) \cap R(\Omega_{\pm})^{\perp}$ son estados ligados, i.e. donde $\mathcal{H}_p(H)$ en (4.38) se reemplaza simplemente por $\mathcal{M}_0(H)$:

$$R(\Omega_+) = R(\Omega_-) = \mathcal{M}_0(H)^\perp. \quad (4.40)$$

Esta última es más general que (4.38), debido a que $\mathcal{H}_p(H)$ puede ser un subespacio propio de $\mathcal{M}_0(H)$, y a esto se le llama completitud asintótica en el sentido geométrico.

Una noción algo más simple se obtiene al considerar (4.40), para cada signo del tiempo por separado, i.e. al requerir que

$$\mathcal{H} = R(\Omega_+) \cap \mathcal{M}_0^+(H) = R(\Omega_-) \cap \mathcal{M}_0^-(H), \quad (4.41)$$

la cual puede llamarse completitud en el sentido geométrico para tiempos positivos y para tiempos negativos. En este caso, es posible que $R(\Omega_+) \neq R(\Omega_-)$. Este tipo de completitud asintótica implica completitud asintótica ordinaria en el sentido geométrico si y sólo si los estados ligados para tiempos positivos y para tiempos negativos son iguales, i.e. si y sólo si $\mathcal{M}_0^+(H) = \mathcal{M}_0^-(H)$.

El término "completitud asintótica generalizada" se usa si todos los estados en $\mathcal{H}_c(H) \cap R(\Omega_\pm)^\perp$ quedan absorbidos cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Así, se habla de completitud asintótica generalizada si

$$\mathcal{H}_c(H) = R(\Omega_+) \cap \mathcal{M}_\Gamma^+(H) = R(\Omega_-) \cap \mathcal{M}_\Gamma^-(H) \quad (4.42)$$

y de completitud asintótica generalizada en el promedio si

$$\mathcal{H}_c(H) = R(\Omega_+) \cap \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^+(H) = R(\Omega_-) \cap \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^-(H). \quad (4.43)$$

Aquí de nuevo los rangos de Ω_+ y de Ω_- en general no serán iguales. Observe que por la proposición 4.10 (f), la completitud asintótica generalizada implica la completitud asintótica en el sentido geométrico para tiempos positivos y tiempos negativos (al menos si $R(E_\pm) \subset \mathcal{M}_\infty^\pm(H_0)$).

En ocasiones es útil considerar un tipo más general de operadores de onda en el cual aparezca un factor adicional entre los dos grupos de evolución. Sean J_\pm dos operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces se pueden considerar los límites

$$W_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^* J_\pm U_t^0 E_\pm. \quad (4.44)$$

Usamos el símbolo W_\pm para estos operadores de onda más generales y Ω_\pm para el caso donde $J_\pm = I$. Un ejemplo que se discutirá en la sección 4.4 es cuando J_\pm son los operadores de corte, los cuales cortan una parte del espacio de configuración. Otra situación donde tales operadores J_\pm aparecen se da cuando U_t^0 y U_t actúan sobre dos espacios de Hilbert distintos, digamos \mathcal{H}_0 y \mathcal{H} respectivamente. Entonces, J_\pm son los operadores de inyección que transforman \mathcal{H}_0 en \mathcal{H} .

Terminamos esta sección dando algunas propiedades de W_\pm .

Proposición 4.17 *Suponga que los límites en (4.44), que definen a W_\pm , existen. Entonces*

(a) W_{\pm} se entrelaza con H y H_0 :

$$U_t W_{\pm} = W_{\pm} U_t^0, \quad W_{\pm}^* U_t = U_t^0 W_{\pm}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.45)$$

y, si $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\phi(H) W_{\pm} = W_{\pm} \phi(H_0), \quad W_{\pm}^* \phi(H) = \phi(H_0) W_{\pm}^*. \quad (4.46)$$

(b) Si $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H_0)$, entonces $R(W_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H)$.

(c) Si $R(E_{\pm}) \subset \mathcal{H}_w(H_0)$, entonces $R(W_{\pm}) \subset \mathcal{H}_w(H)$.

(d) Si $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} F_r J_{\pm} U_t^0 E_{\pm} = 0$ cuando $t \rightarrow \infty \quad \forall r < \infty$, entonces $R(W_{\pm}) \subset \mathcal{H}_{\infty}^{\pm}(H)$.

(e) El rango de W_{\pm} , el complemento ortogonal $R(W_{\pm})^{\perp}$ y su cerradura son invariantes bajo U_t . (Contrariamente a $R(\Omega_{\pm})$, $R(W_{\pm})$ no necesita ser cerrado.)

Como resultado final, se establece una relación entre W_{\pm} y Ω_{\pm} :

Proposición 4.18 *Suponga que*

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_{\pm} - I) U_t^0 E_{\pm} = 0. \quad (4.47)$$

Entonces

(a) Si W_{\pm} existe, entonces Ω_{\pm} también existe y $W_{\pm} = \Omega_{\pm}$. En particular W_{\pm} son isometrías parciales con $W_{\pm}^* W_{\pm} = E$.

(b) Si Ω_{\pm} existe, entonces también W_{\pm} y $W_{\pm} = \Omega_{\pm}$.

4.3. Condiciones abstractas para la existencia y la completitud de los operadores de onda

El propósito de esta sección es la de enunciar un teorema abstracto sobre la existencia y completitud de los operadores de onda. A continuación, en la siguiente sección, se observará que las condiciones de este teorema se satisfacen para los operadores de Schrödinger.

A lo largo de esta sección suponemos que J_{\pm} son dos operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y E_{\pm} dos proyecciones que satisfacen (4.24). Primero se enuncia el criterio de existencia para los límites $W_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^* J_{\pm} U_t^0 E_{\pm}$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ (proposiciones 4.20 y 4.21). Se observa que es suficiente demostrar la existencia de $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^* J_{\pm} U_t^0 E_{\pm}$ en un conjunto total D_0^{\pm} de $R(E_{\pm})$. El siguiente lema da una condición suficiente para que $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$ exista cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Lema 4.19 *Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ una familia de operadores acotados. Suponga que $\{W_t\}$ es fuertemente continua diferenciable y que la siguiente integral impropia de Riemann de valor real existe para alguna $a < \infty$:*

$$\int_a^\infty \left\| \frac{d}{dt} W_t f \right\| dt < \infty.$$

Entonces $\{W_t\}$ es fuertemente convergente cuando $t \rightarrow \infty$. Un resultado similar se cumple para $t \rightarrow -\infty$.

Proposición 4.20 *Suponga que J_\pm transforma $D(H_0)$ en $D(H)$ y que $t \mapsto \|(HJ_\pm - J_\pm H_0)U_t^0 f\|$ es integrable en $t = \pm\infty$ para toda f en algún subconjunto D_0^\pm de $R(E_\pm)$ el cuál es total en $R(E_\pm)$ y contenido en $D(H_0)$. Entonces los operadores de onda $W_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^* J_\pm U_t^0 E_\pm$ existen.*

Para el siguiente resultado introducimos las notaciones $R_z = (H - z)^{-1}$, $R_z^0 = (H_0 - z)^{-1}$ y

$$Y_z^\pm = J_\pm R_z^0 - R_z J_\pm. \quad (4.48)$$

De la identidad $A(A - z)^{-1} = I + z(A - z)^{-1}$, se deduce fácilmente que

$$Y_z^\pm = H R_z J_\pm R_z^0 - R_z J_\pm H_0 R_z^0 = R_z (H J_\pm - J_\pm H_0) R_z^0. \quad (4.49)$$

La primera igualdad se cumple sobre todo \mathcal{H} (debido a que $H R_z$ y $H_0 R_z^0$ están definidos en todos lados), mientras que la segunda es cierta sólo bajo la suposición adicional que $J_\pm D(H_0) \subset D(H)$.

Proposición 4.21 *Suponga que existe un conjunto total D_0^\pm de $R(E_\pm)$ tal que, para cada $f \in D_0^\pm$ y alguna $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$:*

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \|Y_z^\pm U_t^0 f\| dt \right| < \infty. \quad (4.50)$$

Entonces $W_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^ J_\pm U_t^0 E_\pm$ existe.*

La proposición 4.20 muestra que, para que los operadores de onda W_\pm existan, basta saber que la función $t \mapsto \|(HJ_\pm - J_\pm H_0)U_t^0 f\|$ es integrable en $t = \pm\infty$ para un número suficientemente grande de vectores f . En las aplicaciones, U_t^0 es a menudo dado de manera explícita en alguna representación de \mathcal{H} como un espacio de funciones (considere e.g. el grupo de evolución libre de Schrödinger), y por lo tanto, lo es $HJ_\pm - J_\pm H_0$. Es bastante fácil verificar las condiciones de integrabilidad arriba mencionadas.

Similarmente la proposición 4.21 requiere la integrabilidad en $t = \pm\infty$ de la función $t \mapsto \|Y_z U_t^0 f\|$ para un número suficientemente grande de vectores. En lo que sigue, hacemos una suposición de integrabilidad más fuerte, esencialmente que $t \mapsto \|Y_z^\pm U_t^0 E_\pm D_\pm\|$ sea integrable en $\pm\infty$, donde D_\pm son dos operadores adecuadamente seleccionados (esencialmente, D_\pm deben formar una partición de la unidad, i.e. $D_+ + D_- = I$, y satisfacen

algunas condiciones adicionales). Mientras esta suposición es demasiado fuerte si solamente se quiere demostrar la existencia de los operadores de onda, es apropiado para establecer simultáneamente la completez asintótica de la teoría y varias propiedades espectrales del Hamiltoniano total H .

Estableceremos un conjunto de condiciones las cuales implican la existencia y la completitud de los operadores de onda. A continuación, en una secuencia de lemas, se derivan varias conclusiones a partir de estas condiciones y finalmente se concretan, en la proposición 5.28, los resultados generales implicados por el conjunto entero de condiciones.

Para efectos de simplicidad, supondremos a partir de ahora que $E_+ = E_-$. Así, en las condiciones (C1)-(C8) a continuación, E es una proyección que conmuta con U_t^0 y tal que $R(E) \subset \mathcal{H}_c(H_0)$; D_\pm, J_\pm y K_\pm son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y z es algún número complejo en $\rho(H) \cap \rho(H_0)$. Las condiciones que involucran una función ϕ se suponen que se satisfacen para cada $\phi \in C_{00}^\infty$.

$$(C1) \quad E = E(D_+ + D_-).$$

$$(C2) \quad (a) \quad s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} D_\mp U_t^0 E = 0,$$

$$(b) \quad s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} D_\mp^* U_t^0 E = 0.$$

$$(C3) \quad \left| \int_0^{\pm\infty} \|Y_z^\pm \phi(H_0) U_t^0 E D_\pm\| dt \right| < \infty.$$

$$(C4) \quad Y_z^\pm \in \mathcal{B}_\infty.$$

$$(C5) \quad (J_+ - J_-) R_z^0 E \in \mathcal{B}_\infty.$$

$$(C6) \quad J_\pm \phi(H_0) (I - E) \in \mathcal{B}_\infty.$$

$$(C7) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|K_\pm (I - J_\pm^*) U_t f\|^2 dt = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}_c(H).$$

$$(C8) \quad s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_\pm - I) U_t^0 E = 0.$$

Hagamos algunos comentarios sobre estas condiciones. (C1) esencialmente significa que D_+^* y D_-^* forman a partición de la unidad sobre el subespacio $R(E)$. (C2) es más fácilmente interpretado cuando D_\pm son proyecciones. Entonces significa que, bajo el grupo de evolución libre, cada vector en $R(E)$ eventualmente no queda componente en el rango de D_- cuando $t \rightarrow +\infty$, i.e. se propaga fuera del subespacio $R(D_-)$, y similarmente para D_+ y $t \rightarrow -\infty$. (C3) es la condición de integrabilidad ya mencionada. (C4) significa que la diferencia entre H y H_0 debe ser pequeña en un cierto sentido, cf. (4.49). (C5) requiere que J_+ y J_- no sean demasiado distintos. Se cumple de manera trivial cuando $J_+ = J_-$. Similarmente (C6) es trivial cuando $E = I$. Significa que E no debería ser muy diferente de I e implica una restricción en el espectro puntual de H_0 el cuál discutiremos después. (C7) establece que J_\pm difícilmente cambia un vector en $R(E)$ que ha evolucionado a través de una cantidad muy grande de tiempo bajo el grupo de evolución libre. (C8) se hace trivial cuando $J_\pm = I$.

Todas las condiciones que hemos mencionado hasta el momento involucran, aparte de E y D_{\pm} , sólo el Hamiltoniano libre y la diferencia de H y H_0 . (C7) es diferente en este respecto, ya que es una hipótesis sobre el grupo de evolución total. Es una condición de desvanecimiento, como se consideró en la sección 4.1. Si, por ejemplo, $K_{\pm} = I$ y $J_{\pm} = I - F_r$, significa que todos los vectores en $\mathcal{H}_c(H)$ se desvanecen, en el promedio temporal, desde la bola B_r (en el contexto de la sección 4.1). Si r puede tomar todos los valores en $(0, \infty)$, entonces (C7), con $K_{\pm} = I$, es el requerimiento que $\mathcal{H}_c(H) = \bar{\mathcal{M}}^{\pm}(H)$. Si $J_{\pm} = I$, entonces (C7) se hace trivial.

Lema 4.22 (a) *Suponga (C1), (C2, a) y (C3). Entonces los operadores de onda $W_{\pm} = s - \lim U_t^* J_{\pm} U_t^0 E$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existe.*

(b) *Suponga además (C8). Entonces $\Omega_{\pm} = s - \lim U_t^* U_t^0 E$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ también existe, y $W_{\pm} = \Omega_{\pm}$.*

Lema 4.23 *Suponga que (C4) se cumple. Entonces se tiene que para cada ϕ tal que ϕ y $\tilde{\phi}$ están en $L^1(\mathbb{R})$:*

$$\phi(H)J_{\pm} - J_{\pm}\phi(H_0) \in \mathcal{B}_{\infty} \quad (4.51)$$

$$\text{y } (J_{\pm} - U_t^* J_{\pm} U_t^0)\phi(H_0) \in \mathcal{B}_{\infty}. \quad (4.52)$$

Lema 4.24 *Suponga (C1), (C2, a), (C3), (C4). Entonces, para cada $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$:*

$$R_z(J_{\pm} - W_{\pm})\phi(H_0)ED_{\pm} \in \mathcal{B}_{\infty}. \quad (4.53)$$

Lema 4.25 *Suponga (C4) y (C5). Entonces $R_z(J_+ - J_-)E \in \mathcal{B}_{\infty}$.*

Lema 4.26 *Suponga (C1), (C2, a, b) y (C3)-(C6). Suponga que f es tal que $f \in \mathcal{H}_c(H) \cap D(H)$ y $f \perp R(W_+)$. Entonces, para cada $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|J_+^* \phi(H) U_t f\| dt = 0. \quad (4.54)$$

Sabemos de la proposición 4.17 que $R(W_{\pm})$ y $R(W_{\pm})^{\perp}$ son invariantes bajo U_t y que $R(W_{\pm}) \subset \mathcal{H}_c(H)$. Por lo tanto, $G_{\pm} := R(W_{\pm})^{\perp} \cap \mathcal{H}_c(H)$ son subespacios de $\mathcal{H}_c(H)$ los cuales son invariantes bajo U_t , y el problema de la completitud asintótica o completitud asintótica generalizada consiste en estudiar estos espacios G_{\pm} . En particular los operadores de onda W_{\pm} son completos si y sólo si $G_{\pm} = \{0\}$, i.e. $R(W_{\pm})^{\perp} = \mathcal{H}_p(H)$.

Derivamos ahora algunas propiedades de los subespacios G_{\pm} .

Lema 4.27 *Suponga (C1)-(C6). Entonces se tiene para cada $f \in G_{\pm}$:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|J_{\pm}^* U_t f\|^2 dt = 0. \quad (4.55)$$

Lema 4.28 *Suponga (C1)-(C7). Entonces se tiene para cada $f \in G_{\pm}$:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|K_{\pm}^* U_t f\|^2 dt = 0. \quad (4.56)$$

Proposición 4.29 (a) *Suponga (C1)-(C7) con $K_{\pm} = I$. Entonces los operadores de onda $W_{\pm} = s - \lim U_t^* J_{\pm} U_t^0 E$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen y son completos en el sentido de que $\overline{R(W_{\pm})} = \mathcal{H}_p(H)^{\perp}$. Además, si $R(E) \subset \mathcal{H}_w(H_0)$, entonces $\mathcal{H}_c(H_0) = \mathcal{H}_w(H_0)$.*

(b) *Suponga (C1)-(C8) con $K_{\pm} = I$. Entonces los operadores de onda $\Omega_{\pm} = s - \lim U_t^* U_t^0 E$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen y son isometrías parciales que cumplen $\Omega_{\pm}^* \Omega_{\pm} = E$ y $\Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^* = E_c(H)$ (en otras palabras Ω_{\pm} son operadores unitarios de $R(E) \subset \mathcal{H}_c(H_0)$ sobre $\mathcal{H}_c(H)$). Si $R(E) \subset \mathcal{H}_{ac}(H_0)$, entonces $\mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}_{ac}(H)$, i.e. H no tiene espectro singularmente continuo.*

Se termina esta sección con un resultado sobre el especto puntual de H y algunas anotaciones sobre las condiciones (C1)-(C8).

Proposición 4.30 *Suponga (C1)-(C6) con $J_{\pm} = I$. Entonces cada eigenvalor distinto de cero de H es de multiplicidad finita (i.e. el subespacio propio correspondiente es de dimensión finita), y los únicos puntos de acumulación posibles de los eigenvalores de H son $\lambda = 0$ y $\lambda = \pm\infty$.*

Nota 4.31 (a) *Las condiciones (C3) y (C6) fueron requeridas para cumplirse sobre todas las $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$. La elección de esta clase particular de funciones fue hecha simplemente por razones de conveniencia y porque es una clase adecuada para las aplicaciones que nos interesan, a saber los operadores de Schrödinger. En vista del comentario 3.28, la demostración de la completitud asintótica se obtiene si se requiere que (C3) y (C6) se cumplan sólo para todas las $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \Gamma)$, donde Γ es un conjunto numerable cerrado. Bajo estas hipótesis más débiles, la conclusión de la proposición 4.30 se hace un poco diferente: Cada valor propio $\lambda \notin \Gamma$ de H es de multiplicidad finita, y los únicos posibles puntos de acumulación de los valores propios de H son los puntos $\lambda \in \Gamma$ y $\pm\infty$.*

(b) *Ahora comentaremos brevemente sobre la condición (C6), suponiendo que $J_{\pm} = I$. Esta condición se lee entonces $\phi(H)(I - E) \in \mathcal{B}_{\infty}$ para todos las $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$ o para todas $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \Gamma)$. Supongamos también que la proyección E es la máxima admisible, digamos $E = E_c(H_0)$. (C6) entonces se convierte la condición de que $\phi(H_0)E_p(H_0) \in \mathcal{B}_{\infty}$ para todas las ϕ en una de las clases indicadas anteriormente. Esta condición requiere que $\phi(\lambda) = 0$ en cada λ que es un valor propio de H_0 de multiplicidad infinita así como también en cada una de las λ que son puntos de acumulación de los valores propios de H_0 . Debido a que Γ debe ser numerable y cerrado, ésto muestra que H_0 no puede ser arbitrario (por ejemplo, se excluyen todos los operadores H_0 que tienen un conjunto denso de valores propios en algún intervalo Δ).*

- (c) También es posible demostrar que las hipótesis de la proposición 4.29 (a) junto con la suposición adicional de que $R(E) \subset \mathcal{H}_{ac}(H_0)$, implican que $\mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}_{ac}(H)$, por lo tanto H no tiene espectro singularmente continuo. La condición $R(E) \subset \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ se satisface siempre que H_0 mismo no tenga espectro singularmente continuo, i.e. cuando $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(H_0) \oplus \mathcal{H}_{ac}(H_0)$. En particular esto es cierto para el Hamiltoniano libre de Schrödinger (2.40), para el cual se tiene que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ por la proposición 3.35.

4.4. Completitud asintótica para los operadores de Schrödinger

Ahora aplicamos los resultados abstractos de la sección precedente a los operadores de Schrödinger con potenciales de rango corto. Primero definimos la clase de potenciales que consideraremos, luego verificamos las condiciones (C1)-(C8), y por último establecemos algunos resultados sobre la completitud asintótica. En esta sección tenemos que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.32 Sea Γ un conjunto cerrado y acotado de medida de Lebesgue cero en \mathbb{R}^n , y sea $\kappa > 0$. Entonces una función medible $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase $v_{\Gamma, \kappa}$, si puede ser escrita en la forma $v(\bar{x}) = w(\bar{x})(1 + |\bar{x}|)^{-\kappa}$ con $w \in v_{\Gamma}$ (ver la definición 2.78).

Habrán diferencias esenciales entre los casos $\Gamma = \emptyset$ y $\Gamma \neq \emptyset$ y entre los casos $\kappa > 1$ y $\kappa \leq 1$. Cuando $\Gamma = \emptyset$, las singularidades locales de v (si las hay) deben estar en $L^p(\mathbb{R}^n)$, mientras que en el caso $\Gamma \neq \emptyset$ estas singularidades pueden ser muy fuertes. Hablaremos, por lo tanto, de potenciales débilmente singulares y fuertemente singulares. Cuando $\kappa > 1$, la función $|w_1(\bar{x})(1 + |\bar{x}|)^{-\kappa}|$ tiende a cero en el infinito más rápido que el potencial de Coulomb $V_C = \gamma|x|^{-1}$. Se habla entonces de potenciales de rango corto. Si $\kappa \leq 1$ y $|w_1(\bar{x})| \geq c > 0$ en una vecindad del infinito, el decrecimiento no es más rápido que $|\bar{x}|^{-1}$. Tales potenciales se llaman potenciales de rango largo.

El Hamiltoniano libre es $H_0 = \bar{P}^2$, y el Hamiltoniano total H se define como en el capítulo 2. Todos los resultados del capítulo 2 pueden aplicarse aquí debido a que $v_{\Gamma, \kappa} \subset v_{\Gamma}$. Cuando $\Gamma = \emptyset$, $H_0 + V$ es autoadjunto en $D(H_0)$. Por otra parte, cuando $\Gamma \neq \emptyset$, H será una extensión autoadjunta arbitraria del operador minimal \hat{H} dado en (2.50).

Ahora definamos los operadores E y J_{\pm} . La proyección E será tomada como el operador de identidad I . Esto es admisible debido a que H_0 tiene exclusivamente espectro absolutamente continuo, así que $R(E) = \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}(H_0)$. Con esta elección de E , la condición (C6) se satisface de manera trivial.

Cuando $\Gamma = \emptyset$, también hacemos $J_{\pm} = I$. (C7) y (C8) se cumplen trivialmente. Cuando $\Gamma \neq \emptyset$, escogemos un número positivo M tal que Γ está contenido en el interior de la bola $B_M = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{x}| \leq M\}$, y tomamos $J_+ = J_- = j(Q)$ como el operador de multiplicación por una función real $j \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $j(\bar{x}) = 0$ para $|\bar{x}| \leq M + 1$ y

$j(\bar{x}) = 1$ para $|\bar{x}| \geq M+2$. En este caso puede pasar que (C7) no se satisfaga, un punto que se discutirá más adelante. (C8) sin embargo se satisface también en este caso; de hecho uno tiene que $I - j(Q) = [I - j(\bar{Q})]F_{M+2}$, de donde, para cada $f \in \mathcal{H}$:

$$\|[I - j(\bar{Q})]U_t^0 f\| \leq (1 + \|j\|_\infty)\|F_{M+2}U_t^0 f\|.$$

Esta última tiende a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$ por el ejemplo 4.6, lo que demuestra (C8).

Observe que los operadores $J = j(\bar{Q})$ "corta" aquella parte del espacio de configuración donde el potencial v puede ser fuertemente singular. También remarkamos que, en el caso $\Gamma \neq \emptyset$, el potencial de corte $v(\bar{x})j(\bar{x})$ pertenece a $v_{\emptyset, \kappa}$:

$$v \in v_{\Gamma, \kappa}, \quad \Gamma \neq \emptyset \Rightarrow vj \in v_{\emptyset, \kappa}. \quad (4.57)$$

La condición (C5) es trivial tanto para $\Gamma = \emptyset$ y $\Gamma \neq \emptyset$. Después verificaremos (C4). Observe que $Y_z^+ = Y_z^- =: Y_z$.

Lema 4.33 *Suponga que $v \in v_{\Gamma, \kappa}$. Entonces $Y_z \in \mathcal{B}_\infty$.*

Ahora prestamos atención a las condiciones (C1)-(C3) restantes las cuales involucran los operadores D_\pm . Ligeramente hablando, D_\pm será como sigue: D_+ selecciona aquella parte de un vector f en la cuál la componente de velocidad a largo de la dirección del vector de posición de la partícula es positiva, mientras D_- selecciona aquella parte de f en la cuál esta componente es negativa. Se puede demostrar que, para cada $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\|(I + |\bar{Q}|)^{-\kappa} \phi(H_0)U_t^0 D_\pm\| \leq c(\phi, \kappa)(1 + |t|)^{-\kappa} \text{ para } t \geq 0. \quad (4.58)$$

Así, la norma en el lado izquierdo de la ecuación (4.58) es una función integrable de t sobre $[0, \pm\infty)$ siempre que $\kappa > 1$, la cual permite obtener (C3) para potenciales que decrecen más rápidamente que $|\bar{x}|^{-1}$ en el infinito.

Damos una definición precisa de los operadores D_\pm en la mecánica cuántica. Existen varias maneras de obtener un análogo mecánico cuántico de la condición $\bar{x} \cdot \bar{v} > 0$. Para este efecto, es conveniente usar el siguiente operador:

$$A_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}^2} \cdot \bar{Q} + \bar{Q} \cdot \frac{\bar{P}}{\bar{P}^2} \right), \quad (4.59)$$

con dominio $D(A_0) = \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{C} cuyas transformadas de Fourier son infinitamente diferenciables, de soporte acotado y se anulan en alguna vecindad de $\bar{k} = 0$. A_0 es simétrico en este dominio (sin embargo no tiene extensiones autoadjuntas). Más aún, como $\bar{Q} = i\nabla$ en $\tilde{L}^2(\mathbb{R}^n)$, vemos que A_0 deja a $D(A_0)$ invariante, de tal manera que $D(A_0) = D(A_0^n)$ para cada $n \geq 1$.

En cálculos anteriores y venideros, es útil tener a nuestra disposición la siguiente relación de conmutación: Si $\psi, f \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$Q_m \psi(\bar{P})f = \psi(\bar{P})Q_m f + i \frac{\partial \psi}{\partial k_m}(\bar{P})f. \quad (4.60)$$

La ecuación (4.60) se obtiene escribiendo $Q_m = i\partial/\partial k_m$ en las variables de momento y usando la regla de derivación de un producto.

En este momento estableceremos algunas relaciones que involucran a A_0 . Para tal efecto es útil introducir coordenadas esféricas polares $(k, \bar{\omega})$ en el espacio de momentos. $k \in (0, \infty)$ se define como $k = |\bar{k}|$, mientras que $\bar{\omega} = \bar{k}/k$ es un vector en la esfera unitaria S^{n-1} de \mathbb{R}^n : $S^{n-1} := \{\bar{k} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{k}| = 1\}$. En lugar de k usaremos la variable $\lambda = k^2$. (λ se llama la energía cinética asociada con el vector de onda \bar{k}). Usando las relaciones $\bar{Q} = i\nabla_{\bar{k}}$, $\partial k/\partial k_m = k_m/k$ y $k\partial/\partial k = \sum_{m=1}^n k_m \partial/\partial k_m$, tenemos que para $f \in D(A_0)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}A_0 f)(\bar{k}) &= \frac{i}{2} \sum_{m=1}^n \left[\frac{k_m}{k^2} \frac{\partial}{\partial k_m} \tilde{f}(\bar{k}) + \frac{\partial}{\partial k_m} \left\{ \frac{k_m}{k^2} \tilde{f}(\bar{k}) \right\} \right] \\ &= \frac{i}{2} \sum_{m=1}^n \left[2 \frac{k_m}{k^2} \frac{\partial}{\partial k_m} \tilde{f}(\bar{k}) + \frac{k^2 - 2k_m^2}{k^4} \tilde{f}(\bar{k}) \right] \\ &= i \left(\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{n-2}{2k^2} \right) \tilde{f}(k\bar{\omega}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

En particular tenemos

$$A_0 = (\bar{P}^2)^{-1} \left[\bar{P} \cdot \bar{Q} + i \frac{i(n-2)}{2} \right]. \quad (4.62)$$

De la misma manera se puede obtener una expresión para A_0^n teniendo todos los operadores de momento a la izquierda de los operadores de posición:

$$A_0^l = (\bar{P}^2)^{-l} \left(\alpha_0^{(l)} + \sum_{k=1}^l \alpha_k^{(l)} \sum_{m_1 \cdots m_k=1}^n P_{m_1} \cdots P_{m_k} Q_{m_1} \cdots Q_{m_k} \right), \quad (4.63)$$

donde $\alpha_0^{(l)}$ ($k = 0, \dots, l$) son constantes que dependen de n . Para $l=1$, (4.63) es idéntica con (4.62), y para l general puede deducirse fácilmente a partir de (4.62) por inducción, por medio de un cálculo similar al de (4.61).

La expresión (4.61) para A_0 se hace aún más simple si transformamos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ por medio de una transformación unitaria \mathcal{U}_0 sobre el espacio de Hilbert $K = L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$. Esta transformación \mathcal{U}_0 también será importante más adelante. Primero damos las definiciones relevantes. $L^2(S^{n-1})$ es el conjunto de todas las funciones medibles cuadrado integrables de la esfera unitaria S^{n-1} a \mathbb{C} , con respecto a la medida de Lebesgue en S^{n-1} . Denotamos esta medida por $d\omega$, el producto escalar en $L^2(S^{n-1})$ por $(\cdot, \cdot)_0$ y la norma en este espacio por $\|\cdot\|_0$.

$L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$ es el conjunto de todas las funciones medibles definidas en $(0, \infty)$ con valores en el espacio de Hilbert $L^2(S^{n-1})$, cuyas $L^2(S^{n-1})$ normas son cuadrado integrables con respecto a la medida de Lebesgue $d\lambda$ en $(0, \infty)$. Denotamos el valor de tal función g en el punto $\lambda \in (0, \infty)$ por g_λ . Así g_λ es un vector en $L^2(S^{n-1})$, i.e. una función cuadrado integrable $g_\lambda(\bar{\omega})$ de las variables $\bar{\omega} \in S^{n-1}$, y $\int_0^\infty d\lambda \|g_\lambda\|_0 < \infty$. El producto escalar entre $f = \{f_\lambda\}$ y $g = \{g_\lambda\}$ en $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$ es

$$(f, g) = \int_0^\infty (f_\lambda, g_\lambda)_0 d\lambda = \int_0^\infty d\lambda \int_{S^{n-1}} d\omega \overline{f_\lambda(\bar{\omega})} g_\lambda(\bar{\omega}). \quad (4.64)$$

Definamos ahora, para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(\mathcal{U}_0 f)_\lambda(\bar{\omega}) = 2^{-1/2} \lambda^{(n-2)/4} \tilde{f}(\lambda^{1/2} \bar{\omega}). \quad (4.65)$$

Usando el hecho de que $d^n k = k^{n-1} dk d\omega = \frac{1}{2} \lambda^{(n-2)/2} d\lambda d\omega$ vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\lambda \|(\mathcal{U}_0 f)_\lambda\|_0^2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^{(n-2)/2} d\lambda \int_{S^{n-1}} d\omega |\tilde{f}(\lambda^{1/2} \bar{\omega})|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n k |\tilde{f}(\bar{k})|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Así \mathcal{U}_0 es un operador isométrico de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$. De hecho \mathcal{U}_0 es sobre, en consecuencia unitario, debido a que su inversa es como sigue: Si $g = \{g_\lambda\} \in L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$, entonces

$$[\mathcal{F}\mathcal{U}_0^{-1}g](\bar{k}) = 2^{1/2} k^{(2-n)/2} g_{\bar{k}^2}(\bar{\omega}).$$

También mostramos la siguiente relación que corresponde al lema 5.3:

$$[\mathcal{U}_0 \phi(H_0) f]_\lambda = \phi(\lambda) (\mathcal{U}_0 f)_\lambda. \quad (4.66)$$

Esto significa que la transformación unitaria \mathcal{U}_0 diagonaliza el operador $H_0 = \bar{P}^2$. Se dice que es la transformación espectral de H_0 .

Calculemos $\mathcal{U}_0 A_0 \mathcal{U}_0^{-1}$, usando (4.61) y $k^{-1} \partial / \partial k = 2\partial / \partial \lambda$. Si g está dada como arriba tal que $\mathcal{U}_0^{-1} g \in D(A_0)$, obtenemos

$$(\mathcal{U}_0 A_0 \mathcal{U}_0^{-1} g)_\lambda = i \lambda^{(n-2)/4} \left[2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{n-2}{2\lambda} \right] \lambda^{-(n-2)/4} g_\lambda = 2i \frac{\partial}{\partial \lambda} g_\lambda,$$

En consecuencia, formalmente

$$\mathcal{U}_0 A_0 \mathcal{U}_0^{-1} = 2i \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (4.67)$$

Es más conveniente ahora ver a $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$ como un subespacio de $L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}))$ y aplica la transformada inversa de Fourier en este último espacio respecto a la variable λ . Así, definimos, para $z \in \mathbb{R}$:

$$[\mathcal{F}_1^{-1}\{f_\lambda\}]_z(\bar{\omega}) \equiv \hat{f}_z(\bar{\omega}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} f_\lambda(\bar{\omega}) d\lambda.$$

Esto transforma $i\partial/\partial\lambda$ en multiplicación por z : Si $g = \{g_\lambda\}$, entonces

$$(\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{U}_0A_0\mathcal{U}_0^{-1}\mathcal{F}_1g)_z = 2z\hat{g}_z.$$

Los operadores D_+ y D_- debería ahora seleccionar las z componentes positivas y negativas de \hat{g}_z respectivamente. Así, definimos dos proyecciones \hat{F}_\pm en la z representación de $L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}))$ por

$$(\hat{F}_+g)_z = \chi_{(0,\infty)}(z)\hat{g}_z, \quad (\hat{F}_-g)_z = \chi_{(-\infty,0)}(z)\hat{g}_z.$$

Claramente $\hat{F}_+ + \hat{F}_- = I$. Sin embargo, si $g = \{\hat{g}_z\}$ es la imagen bajo \mathcal{F}_1^{-1} de un vector en $L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}))$ (i.e. que tengan λ soporte en $(0, \infty)$), entonces $\hat{F}_\pm g$ no tendrá esta propiedad. En otras palabras, $F_\pm \equiv \mathcal{F}_1\hat{F}_\pm\mathcal{F}_1^{-1}$ no conmutan con la proyección E_+ de $L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1}))$ en $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$. Para obtener los operadores D_\pm que actúen en $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$ (en la variable λ), debemos proyectar de vuelta hacia $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}))$. Tomemos así, en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$D_\pm = \mathcal{U}_0^{-1}E_+\mathcal{F}_1\hat{F}_\pm\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{U}_0. \quad (4.68)$$

Como $\hat{F}_+ + \hat{F}_- = I$, $D_+ + D_-$ es el operador de identidad en $L^2(\mathbb{R}^n)$. D_\pm son autoadjuntos y están en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De hecho $\|D_\pm\| \leq 1$, ya que D_\pm son productos de operadores unitarios y de proyecciones. Además D_\pm satisfacen la desigualdad (4.58); sin embargo, se enuncia un resultado más débil:

Lema 4.34 *Sea $\kappa > 0$. Entonces, para cada $\kappa' \in [0, \kappa)$ y cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:*

$$\|(I + |\bar{Q}|)^{-\kappa}\phi(H_0)U_t^0D_+\| \leq c(\phi, \kappa, \kappa')t^{-\kappa'} \quad \forall t \geq 1 \quad (4.69)$$

y

$$\|(I + |\bar{Q}|)^{-\kappa}\phi(H_0)U_t^0D_-\| \leq c(\phi, \kappa, \kappa')t^{-\kappa'} \quad \forall t \leq -1. \quad (4.70)$$

Discutiremos ahora (C2) y (C3), usando el lema 4.34. (C2) involucra sólo el Hamiltoniano libre y puede obtenerse como sigue: Sea $f \in D(I + |Q|)$, i.e. $f = D(I + |Q|)^{-1}g$ para algún $g \in \mathcal{H}$, y sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, debido a que $U_t^{0*} = U_{-t}^0$:

$$\begin{aligned} \|D_-U_t^0\phi(H_0)f\| &\leq \|D_-U_t^0\phi(H_0)(I + |Q|)^{-1}\| \|g\| \\ &= \|(I + |Q|)^{-1}\phi(H_0)U_{-t}^0D_-\| \|g\|, \end{aligned} \quad (4.71)$$

la cual converge a cero cuando $t \rightarrow +\infty$ (i.e. $-t \rightarrow -\infty$) por (4.70). Como $D(I + |Q|)$ es denso en \mathcal{H} , (4.72) muestra que $s - \lim D_-U_t^0h = 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ para todos los h en el subconjunto total $\{\phi(H_0)D(I + |Q|)|\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$, ver la proposición 3.27. Por lo tanto, $s - \lim D_-U_t^0 = 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Esto demuestra (C2).

Respecto a (C3), debemos suponer que $v \in v_{\Gamma, \kappa}$ con $\kappa > 1$. Sabemos que $Y_z = B_z(I + |Q|)^{-\kappa}R_z^0$, donde B_z es un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ([7]). Si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, definimos ψ

por $\psi(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}\phi(\lambda)$ y observe que $\psi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ también. Consecuentemente, por (4.69),

$$\begin{aligned} \|Y_z\phi(H_0)U_t^0D_+\| &\leq \|B_z\| \|(I + |Q|)^{-\kappa}\psi(H_0)U_t^0D_+\| \\ &\leq c(\psi, \kappa, \kappa') \|B_z\| (1+t)^{-\kappa'} \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\kappa > 1$, podemos tomar $\kappa' > 1$, la cual muestra que $\|Y_z\phi(H_0)U_t^0D_+\|$ es integrable en $[0, +\infty)$. Esto demuestra (C3).

Resumiremos los resultados obtenidos hasta el momento, usando las proposiciones 4.29 y 4.30.

Proposición 4.35 *Suponga que $v \in v_{\emptyset, \kappa}$ para alguna $\kappa > 1$, i.e. $v(\bar{x}) = [w_1(x) + w_2(x)](1 + |\bar{x}|)^{-\kappa}$ con $w_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $w_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 2$, $p > \nu/2$. Sea $H = H_0 + V$. Entonces los operadores de onda $\Omega_\pm = s - \lim U_t^*U_t^0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen y son completos en el sentido que*

$$R(\Omega_\pm) = \mathcal{H}_p(H)^\perp = \mathcal{H}_{ac}(H) = \mathcal{M}_\infty^\pm(H). \quad (4.72)$$

El operador H no tiene espectro singularmente continuo, cada valor propio distinto de cero de H es de multiplicada finita y los únicos puntos de acumulación de estos valores propios son $\lambda = 0$ y $\lambda = \pm\infty$ (ver también el comentario 4.37).

Proposición 4.36 (a) *Sea Γ un conjunto cerrado y acotado de medida cero en \mathbb{R}^n . Suponga que $v \in v_{\Gamma, \kappa}$ para algún $\kappa > 1$. Sea H una extensión arbitraria autoadjunta del operador minimal \hat{H} dado en (2.50), y U_t el grupo de evolución asociado. Entonces los operadores de onda $\Omega_\pm = s - \lim U_t^*U_t^0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen.*

(b) *Suponga que además, que para cada $f \in \mathcal{H}_c(H)$,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\pm T} \|F_r U_t f\|^2 dt = 0, \quad (4.73)$$

donde r es tal que Γ está contenido en el interior de la bola $B_r = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{x}| \leq r\}$. Entonces Ω_\pm son completos, i.e. se tiene (4.72). En particular H no tiene espectro singularmente continuo.

Nota 4.37 (a) *Bajo las suposiciones de la proposición 4.35 es posible para mostrar usando diferentes métodos que los valores propios de H forman un conjunto acotado, en consecuencia se pueden acumular a lo más en $\lambda = 0$; para los valores propios negativos, este resultado se sigue de las proposiciones 2.66 y 2.71.*

(b) *La proposición 4.36 (a) muestra que las singularidades locales del potencial no tienen influencia sobre la existencia de los operadores de onda Ω_\pm . Su comportamiento en el infinito sin embargo es crucial. La demostración de existencia falla cuando $\kappa \leq 1$, debido a que no se puede verificar (C3). De hecho se sabe que $\{U_t^*U_t^0\}$ no es fuertemente convergente para los potenciales de Coulomb y*

otros potenciales de rango largo [16]. Sin embargo, se tiene que los operadores de onda $W = s - \lim U_t^* J_\pm U_t^0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ para operadores J_\pm (dependiendo del potencial) [37], [40] y [22]. La completitud de tales operadores de onda también ha sido demostrada en [22], por métodos distintos a los utilizados aquí.

- (c) Cuando nos interesamos en la completitud de Ω_\pm , se ve de las proposiciones 4.36 (b) (y también de la discusión al final de la sección 4.1) que ésta depende de las singularidades locales de v . Si v es débilmente singular, Ω_\pm son siempre completos. Si v tiene fuertes singularidades locales, entonces una condición suficiente y necesaria para la completitud es (4.73), indicando que todos los vectores en $\mathcal{H}_c(H)$ desaparecen en el promedio temporal en una bola que contiene todos los puntos de singularidad fuerte de v en su interior. Si se elimina la hipótesis (4.73), se pueden demostrar algunas formas de completitud asintótica generalizada. Digamos que se tiene completitud asintótica generalizada en el promedio así como también completitud asintótica en el sentido geométrico a tiempos positivos y negativos.

Proposición 4.38 *Bajo las hipótesis de la proposición 4.36 (a), se tiene que (4.43) y (4.41), i.e.*

$$\mathcal{H}_c(H) = R(\Omega_+) \oplus \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^+(H) = R(\Omega_-) \oplus \bar{\mathcal{M}}_\Gamma^-(H) \quad (4.74)$$

y

$$\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^\pm(H) \subset \mathcal{M}_0^\pm(H). \quad (4.75)$$

También se tiene que

$$\mathcal{H} = \mathcal{M}_\infty^+(H) \oplus \mathcal{M}_0^+(H) = \mathcal{M}_\infty^-(H) \oplus \mathcal{M}_0^-(H). \quad (4.76)$$

Usando el teorema espectral, se puede demostrar más [6]

$$\mathcal{H}_w(H) = R(\Omega_+) \oplus \mathcal{M}_\Gamma^+(H) = R(\Omega_-) \oplus \mathcal{M}_\Gamma^-(H)$$

y

$$\mathcal{H}_{sc}(H) \subset \mathcal{M}_0(H). \quad (4.77)$$

(4.77) se sigue de la proposición 4.38 debido a que $\mathcal{H}_{sc} \subset R(\Omega_+)^\perp \cap R(\Omega_-)^\perp$.

4.5. Potenciales de rango largo

La familia $\{e^{iHt}e^{-iK_0t}\}$ no tiene límites fuertes cuando $t \rightarrow \pm\infty$ si $H = K_0 + V$ y V es un potencial de Coulomb u otro potencial de rango largo. Esta sección está dedicada a enunciar la existencia de los operadores de onda generalizados para la dispersión de operadores de rango largo así como también la no existencia de los operadores de onda ordinarios.

El problema de dispersión por un potencial de Coulomb $V_c(\bar{x}) = \gamma|\bar{x}|^{-1}$ es de gran interés en física atómica y nuclear. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se ha podido resolver de manera exacta en términos de funciones especiales desde los

primeros días de la mecánica cuántica. Las funciones propias de Coulomb $\psi_k^c(\bar{x})$, las cuales son las soluciones de la ecuación $(\Delta - V(\bar{x}) + \lambda)\psi(\bar{x}) = 0$ para $\lambda = k^2 > 0$. La parte dominante de la solución así como la onda esférica dispersada tiene una distorsión logarítmica en sus fases (Amrein [5]). El plano distorsionado de la onda $\exp[i\bar{k} \cdot \bar{x} + i\gamma k^{-1} \log(kr - \bar{k} \cdot \bar{x})]$ no es una función propia de K_0 correspondiente al punto espectral $\lambda = k^2$. Uno por lo tanto espera que también en el formalismo dependiente del tiempo la evolución total $\exp(-iH_c t)$ con $H_c = K_0 + V_c$ no parezca como la evolución libre $\exp(-iK_0 t)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, sino más bien alguna distorsión de la evolución libre.

Para una teoría satisfactoria se formula la condición asintótica en términos de observables y encuentra que bajo suposiciones adecuadas esto implica la existencia de una familia de operadores unitarios $\{Y_t\}$, los cuales son las funciones de K_0 o de \bar{P} tal que

$$s - \lim V_t^* Y_t \equiv \Omega_{\pm} \text{ existe cuando } t \rightarrow \pm\infty. \quad (4.78)$$

Recíprocamente, si existe tal familia $\{Y_t\}$ que satisface (4.78), es fácil verificar que $V_t^* A V_t f$ converge fuertemente a $\Omega_{\pm} A \Omega_{\pm}^*$ cuando $t \rightarrow \infty$ para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que conmuta con K_0 o con \bar{P} respectivamente y para toda f en el rango de Ω_{\pm} . $\{Y_t\}$ representa la distorsión anteriormente mencionada de la evolución libre, y Ω_{\pm} son los operadores de onda generalizados. A continuación se da un método formal para llegar al candidato para $\{Y_t\}$.

La convergencia de $V_t^* Y_t$ se muestra al demostrar que $\int_{\pm a}^{\pm\infty} \|d/dt V_t^* Y_t f\| dt < \infty$ para todos los vectores f en un conjunto fundamental. Al escribir $Y_t = U_t \exp(-iX_t)$ y $X_t \equiv X_t(\bar{P})$, se tiene

$$\|d/dt V_t^* Y_t f\| = \|(V - d/dt X_t) Y_t f\| = \|(U_t^* V U_t - d/dt X_t) \exp(-iX_t) f\|, \quad (4.79)$$

debido a que U_t conmuta con $d/dt X_t(\bar{P})$. De las definiciones de los operadores unitarios C_t y Q_t ([5] pag. 529) se tiene que $U_t = C_t Q_t$, se sigue que si $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ o $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, entonces

$$C_t^* \phi(\bar{Q}) C_t = \phi(2t\bar{P}), \quad U_t^* \phi(\bar{Q}) U_t = Q_t^* \phi(2t\bar{P}) Q_t. \quad (4.80)$$

Se sabe que Q_t y Q_t^* convergen fuertemente a I cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Por lo tanto, por (4.80), $U_t^* V(\bar{Q}) U_t - V(2t\bar{P})$ convergerá fuertemente a cero bajo hipótesis adecuadas sobre V . Así si

$$d/dt X_t(\bar{P}) = V(2t\bar{P}), \quad (4.81)$$

encontramos de (4.79) que $\|d/dt V_t^* Y_t f\|$ converge a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$ e incluso puede ser integrable en el infinito. Como se acaba de ver, X_t que satisface (4.81) da un buen candidato para Y_t para potenciales que se comportan como $|\bar{x}|^{-\beta}$ en el infinito. con $1/2 < \beta \leq 1$. En particular para un potencial de Coulomb, resulta $X_t = \frac{1}{2}\gamma(\text{sign } t)K_0^{-\frac{1}{2}} \log |t|$. Este operador fue introducido por Dollard para demostrar la existencia de los operadores de onda de Coulomb generalizados.

Es claro que para potenciales esféricamente simétricos, $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ son funciones de K_0 y en consecuencia conmuta con todas las constantes del movimiento libre, mientras

que en general $\{X_t\}$ son funciones de \bar{P} , y $\{Y_t\}$ conmutan con todos los operadores acotados que conmutan \bar{P} . Para potenciales de rango corto, i.e. $\beta > 1$, vemos a partir de (4.81) que X_t converge a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$, demostrando que el comportamiento asintótico de V_t en tal caso está dado por U_t como se espera.

Supondremos que el potencial V puede escribirse como una suma de dos partes reales V_S y V_L , i.e.

$$V = V_S + V_L, \quad \text{con } (1 + |x|^2)V_S \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad (4.82)$$

y V_L es cuatro veces continua diferenciable y satisface

$$\begin{aligned} |D^m V_L(\bar{x})| &\leq c(1 + |\bar{x}|)^{-|m|-\alpha} \quad \text{para alguna } \alpha \text{ con } 0 < \alpha < 1 \\ &\text{y } 0 \leq |m| \leq 4. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Se usa la notación multiíndice para las derivadas con $m = (m_1, m_2, m_3)$, $|m| = m_1 + m_2 + m_3$ y $D^m f(\bar{x}) = (\partial^{m_1}/\partial x_1^{m_1})(\partial^{m_2}/\partial x_2^{m_2})(\partial^{m_3}/\partial x_3^{m_3})f(\bar{x})$, donde m_1, m_2, m_3 son enteros no negativos.

Claramente V_L definida anteriormente es un operador acotado y como (4.82) implica que $V_S \in L^2(\mathbb{R}^3)$, V_S es K_0 -compacto, por la proposición 8.7 de [5], $H_0 = K_0 + V \equiv K_0 + V_S + V_L$ es autoadjunto con $D(H) = D(K_0)$.

Podemos considerar (4.81) como una ecuación para la función $X_t(\bar{k})$ e integrarla para obtener $X_t(\bar{k}) - X_0(\bar{x}) = \int_0^t V_L(2s\bar{k})ds$, donde $X_0(\bar{k})$ es la constante de integración y sólo hemos usado la parte de rango largo de la interacción, llamémosla V_L , en (4.81). En la expresión $Y_t = U_t \exp(-iX_t)$, la constante de integración X_0 solamente multiplica por un operador independiente del tiempo y no tiene influencia sobre el problema de convergencia de (4.78). Por lo tanto, eliminamos X_0 y escribimos

$$X_t(\bar{k}) = \int_0^t V_L(2s\bar{k})ds. \quad (4.84)$$

Tal ambigüedad es una característica general de los operadores de onda generalizados.

Ahora enunciaremos (la demostración se encuentra en Amrein [5]) el teorema principal: la existencia de los operadores de onda generalizados como límites fuertes (4.78). Para esto establecemos $Y_t \equiv U_t \exp(-iX_t)$ con X_t definido por (4.84).

Proposición 4.39 (a) Suponga (4.82) y (4.83) con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Los límites fuertes (4.78) existen y definen dos isometrías Ω_{\pm} . (b) Ω_{\pm} intercala H y K_0 , i.e. $H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}K_0$.

Nota 4.40 Para el potencial de Coulomb podemos escoger cualquier α con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ en las cotas de (4.83) y en consecuencia los resultados de la proposición 4.39 son válidos en este caso.

Concluimos que para $V(\bar{x}) = \gamma|\bar{x}|^{-\beta}$ ($\frac{1}{2} < \beta \leq 1$), los operadores de onda generalizados existen y tienen la propiedad usual de entrelazamiento. Ahora para un subconjunto de estos potenciales enunciaremos que los operadores ordinarios de onda no existen, i.e. $\{V_t^*U_t\}$ no tienen los límites fuertes cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Proposición 4.41 *Sea $V(\bar{x}) = \gamma|\bar{x}|^{-\beta}$. Entonces (a) si $0 < \beta \leq 1$, $\{\exp(iX_t)\}$ converge débilmente a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$, (b) si $3/4 < \beta \leq 1$, $\{V_t^*U_t\}$ converge débilmente a cero pero no tiene límites fuertes cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*

Discutimos brevemente otros trabajos en teoría de la dispersión para potenciales de rango largo. La existencia de los operadores de onda generalizados primero fue demostrada para el potencial de Coulomb por Dollard [16]. El método para construir X_t presentado en esta sección falla para $0 < \alpha \leq 1/2$. En tal caso, uno tiene que reemplazar (4.81) por la ecuación más general:

$$dX_t/dt = V(2t\bar{P} + \bar{\nabla}X_t(\bar{P})). \quad (4.85)$$

Para obtener X_t a partir de (4.85) se puede intentar resolver esta ecuación no lineal, lo cual fue hecho por Hörmander, [30] o un esquema de interacción seguido por Buslaev y Matveev [14], y Alshom [4]. El esquema de interacción es como sigue: $X_t^{(0)} = 0$, $X_t^{(m)}(\bar{k}) = \int_0^t V(2s\bar{k} + \bar{\nabla}X_s^{(m-1)}(\bar{k}))ds$. Entonces se usa la solución X_t de (4.85) o alguna $X_t^{(m)}$ para demostrar la existencia de los operadores de onda generalizados.

El operador $\exp(-iX_t)$ a veces es llamado una transformación de "vestido" dependiente del tiempo. Existen construcciones de operadores de onda generalizados usando transformaciones de "vestido" independientes del tiempo. Esto fue introducido por Muller y Zinnes para el potencial de Coulomb.

La completitud asintótica de la teoría para el potencial de Coulomb fue demostrada por Dollard [16] usando una expansión en funciones propias.

Capítulo 5

Teoría de la dispersión

Como ya se mencionó en la introducción, la teoría de dispersión es la descripción matemática del siguiente tipo de experimento físico: Un haz de partículas con unas condiciones iniciales bien definidas se hace colisionar con un blanco fijo, y se observa la distribución angular así como también otras propiedades físicas de las partículas dispersas después de la colisión.

Usando los operadores de onda, se pueden predecir los resultados de dichos experimentos si se supone que la interacción entre los constituyentes del haz y aquellos del blanco son conocidos. Para tal efecto, se divide el problema en dos partes observando que tanto el haz como el blanco están hechos de un gran número de partículas idénticas o átomos.

- i)* Se describe la dispersión de una sólo partícula del haz por medio de un sólo centro de dispersión (i.e. Un único constituyente o átomo del blanco). En el caso más simple éste es un problema de dos cuerpos; en situaciones un poco más complejas, cuando los constituyentes del haz o del blanco son sistemas compuestos tales como átomos, se tiene un problema de N cuerpos, donde N es pequeño (por ejemplo, en una dispersión protón a protón se tiene que $N=2$, en una dispersión protón a deuteron se tiene que $N=3$, ya que el deuteron está compuesto de un protón y un neutrón).
- ii)* Tomando en cuenta las propiedades del haz y del blanco, se trata la situación real -la cuál involucra un número muy grande de partículas- por medio de los resultados de *i)* y un método estadístico apropiado.

Para el caso $N=2$ en *i)* si la interacción entre dos partículas es invariante bajo simultáneas traslaciones de ambas partículas, es fácil reducir el problema en uno de dispersión de una sólo partícula sobre un potencial. Esto nos permite usar los resultados sobre los operadores de Schrödinger obtenidos en los capítulos anteriores.

El problema *i)* se trata en la sección 5.1 donde introducimos el operador de dispersión y se deducen algunas de sus propiedades.

Para el desarrollo de este capítulo se ha tomado parte del contenido del capítulo 6 de Amrein [7].

5.1. El operador de dispersión y la matriz S

Sean $\{U_t\}$ y $\{U_t^0\}$ dos grupos de evolución, E_\pm dos proyecciones que conmutan con cada U_t^0 y $J_\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Supongamos que los operadores de onda $W_\pm = s - \lim U_t^* J_\pm U_t^0 E_\pm$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen, se puede definir un operador lineal S, llamado el operador de dispersión, como sigue:

$$S := W_+^* W_-, \quad D(S) = \mathcal{H}. \quad (5.1)$$

Primero estableceremos algunas propiedades matemáticas de este operador y luego comentaremos sobre su interpretación en la teoría de dispersión.

Proposición 5.1 (a) $SU_t^0 = U_t^0 S \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(b) *If $f \in D(H_0)$, entonces $Sf \in D(H_0)$ and $H_0 Sf = SH_0 f$.*

La proposición 5.1 expresa el hecho de que el operador S no mezcla diferentes valores espectrales del Hamiltoniano libre H_0 . Si H_0 tiene espectro puramente puntual, entonces esto significaría -como en el lema 3.7- que S transforma cada subespacio propio de H_0 en sí mismo. Ahora la dispersión está asociada con el espectro continuo, y en este caso existe una generalización del concepto de "dejar cada subespacio propio invariante", llamado descomponibilidad. Explicaremos esto para el caso $H_0 = \bar{P}^2$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, debido a que este operador puede diagonalizarse explícitamente. Resultados similares pueden demostrarse en un nivel más abstracto para un operador autoadjunto H_0 (ver [5], capítulos 5-7).

La transformación espectral \mathcal{U}_0 que diagonaliza $H_0 = \bar{P}^2$ ha sido definido en la sección 4.4. Es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $G := L^2((0, \infty), \mathcal{H}_0)$ dado por (4.65), donde $\mathcal{H}_0 := L^2(S^{n-1})$ es el espacio de Hilbert de todas las funciones cuadrado integrables definidas sobre la esfera unitaria S^{n-1} de \mathbb{R}^n . El operador lineal A que actúa en G se dice descomponible si tiene la siguiente forma: para cada $\lambda > 0$ existe un operador $A(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ tal que

$$D(A) = \left\{ f \mid \int \|A(\lambda)f_\lambda\|_0^2 d\lambda < \infty \right\} \quad (5.2)$$

y

$$(Af)_\lambda = A(\lambda)f_\lambda. \quad (5.3)$$

Así, después de diagonalizar H_0 , un operador descomponible A puede descomponerse en una familia $\{A(\lambda)\}$ de operadores cada uno de los cuales actúa en \mathcal{H}_0 , de tal manera que distintos valores espectrales de H_0 no se mezclan entre sí. (La familia de operadores $\{A(\lambda)\}$ también debe tener la propiedad de ser medible, i.e. $\forall f, g \in \mathcal{H}_0$ la función $\lambda \mapsto (f, A(\lambda)g)$ debe ser Lebesgue medible.)

Si A es descomponible en G, escribiremos $A = \{A(\lambda)\}$, y denotamos por $\|A(\lambda)\|_0$ la norma del operador $A(\lambda)$. Establecemos, a continuación, algunos resultados simples sobre los operadores descomponibles.

Proposición 5.2 (a) *Sea A descomponible. Entonces A es acotado con $D(A) = G$ si y sólo si $\|A(\lambda)\|_0$ es una función esencialmente acotada de λ , y*

$$\|A\| = \text{ess sup}_{\lambda > 0} \|A(\lambda)\|_0. \quad (5.4)$$

(b) *Si $A = \{A(\lambda)\}$ y $B = \{B(\lambda)\}$ son descomponibles y están en $\mathcal{B}(G)$, entonces $A + \alpha B$, AB y A^* son también descomponibles y están dados por*

$$A + \alpha B = \{A(\lambda) + \alpha B(\lambda)\}, \quad (5.5)$$

$$AB = \{A(\lambda)B(\lambda)\}, \quad (5.6)$$

$$A^* = \{A(\lambda)^*\}. \quad (5.7)$$

Una clase especial de operadores descomponibles son los operadores diagonalizables los cuales tienen la forma $A = \{\phi(\lambda)I_0\}$, donde ϕ es una función de $(0, \infty)$ hacia \mathbb{C} e I_0 denota el operador de identidad en \mathcal{H}_0 . En este caso A es el operador de multiplicación por $\phi(\lambda)$ en $L^2((0, \infty), \mathcal{H}_0)$. Es natural llamar a este operador $\phi(H_0)$, ya que H_0 es justamente multiplicación por λ . Por supuesto esta definición de $\phi(H_0)$ es equivalente a aquella dada en la sección 3.2 si ϕ pertenece a la clase de funciones ahí consideradas. En efecto tenemos:

Lema 5.3 (a) *El operador $\mathcal{U}_0 U_t^0 \mathcal{U}_0^{-1}$ es diagonalizable y está dado por $\mathcal{U}_0 U_t^0 \mathcal{U}_0^{-1} = \{e^{(-i\lambda t)} I_0\}$.*

(b) *Suponga que ϕ es la transformada inversa de Fourier de una función $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$, y sea $\phi(H_0)$ definido por (3.18). Entonces $\mathcal{U}_0 \phi(H_0) \mathcal{U}_0^{-1}$ es diagonalizable y está dado por $\mathcal{U}_0 \phi(H_0) \mathcal{U}_0^{-1} = \{\phi(\lambda) I_0\}$.*

Del lema 5.3 (a) vemos que cada operador descomponible A conmuta con U_t^0 :

$$(\mathcal{U}_0 A U_t^0 f)_\lambda = A(\lambda) [e^{-i\lambda t} (\mathcal{U}_0 f)_\lambda] = e^{-i\lambda t} [A(\lambda) (\mathcal{U}_0 f)_\lambda] = (\mathcal{U}_0 U_t^0 A f)_\lambda.$$

En las siguientes proposiciones se enuncia el recíproco de esto:

Proposición 5.4 *Suponga que $B \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ es tal que $B U_t^0 = U_t^0 B$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{U}_0 B \mathcal{U}_0^{-1}$ es un operador descomponible en G .*

Se sigue de las proposiciones 5.1 y 5.4 que el operador de dispersión es descomponible: $\mathcal{U}_0 S \mathcal{U}_0^{-1} = \{S(\lambda)\}$ que actúa en $\mathcal{H}_0 = L^2(S^{n-1})$ se llama la matriz S a energía λ .

Es conveniente definir un operador R como:

$$R := S - I. \quad (5.8)$$

Claramente R es descomponible, $\mathcal{U}_0 R \mathcal{U}_0^{-1} = \{R(\lambda)\}$, y la matriz $R(\lambda)$ está dada por $R(\lambda) = S(\lambda) - I_0$.

En muchas situaciones físicas S es un operador unitario. La siguiente proposición contiene condiciones sobre S para que sea unitario en el caso especial donde $J_\pm = I$ y $E_\pm = I$. Resultados similares pueden obtenerse en el caso general.

Proposición 5.5 *Suponga que $\Omega_{\pm} = s - \lim U_t^* U_t^0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existe, y sea $S = \Omega_+^* \Omega_-$. Entonces*

- (a) *S es isométrico si y sólo si $R(\Omega_-) \subset R(\Omega_+)$.*
- (b) *S es unitario si y sólo si $R(\Omega_-) = R(\Omega_+)$. En particular S es unitario si se tiene completitud asintótica en el sentido ordinario o en el geométrico.*

Finalmente, concentramos nuestra atención sobre la interpretación del operador de dispersión. Suponemos que $J_{\pm} = I$ y $E_{\pm} = E_{\infty}^{\pm}(H_0)$ (cf. el inicio de la sección 4.2). Sea f un vector en el subespacio $\mathcal{M}_{\infty}^{-}(H_0)$ y $g = \Omega_- f$. Entonces, por (4.22),

$$\|U_t g - U_t^0 f\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty. \quad (5.9)$$

Más aún, $F_+ g \in R(\Omega_+)$, (F_{\pm} de ha definido en (4.32)) de tal manera que

$$\|U_t F_+ g - U_t^0 \Omega_+^* g\| = \|U_t F_+ g - U_t^0 S f\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty. \quad (5.10)$$

El significado de las dos relaciones precedentes puede ser descrito como sigue. El vector $f \in \mathcal{M}_{\infty}^{-}(H_0)$ se interpreta como el estado inicial de un evento de dispersión, dado al tiempo $t = 0$, g es un estado que evoluciona bajo el grupo de evolución real $\{U_t\}$ el cual es indistinguible del estado inicial f , que evoluciona bajo el grupo de evolución libre $\{U_t^0\}$, a tiempos negativos muy grandes (antes de que la interacción tenga lugar).

Ahora escribamos $g = F_+ g + (I - F_+)g$. La parte $F_+ g$ de g es un estado de dispersión en $t = +\infty$, i.e. $F_+ g \in \mathcal{M}_{\infty}^{+}(H)$ (ver el corolario 4.16). Además, su evolución temporal $U_t F_+ g$ se hace indistinguible a tiempos positivos muy grandes de aquel estado que se obtiene permitiendo que $S f \in \mathcal{M}_{\infty}^{+}(H_0)$ evolucione bajo el grupo de evolución libre $\{U_t^0\}$. Así $S f$ puede ser interpretado como la parte saliente del estado final (dado también a tiempo $t = 0$); Esto se dice en el sentido de (5.10): la evolución libre de $S f$ a tiempos positivos grandes da la parte saliente de un evento de dispersión iniciado, en el sentido de (5.9), en el estado $f \in \mathcal{M}_{\infty}^{-}(H_0)$.

La ventaja de esta representación es que se puede describir el estado saliente a tiempos positivos muy grandes usando el operador de dispersión y el grupo de evolución libre, el cual, en el caso de Schrödinger, tiene una forma muy simple, contrariamente al grupo de evolución total.

Hemos escrito $g = F_+ g + (I - F_+)g$ y se ve que $F_+ g$ describe una parte de g que será saliente cuando $t \rightarrow +\infty$. Para interpretar la parte restante $(I - F_+)g$, se tiene que suponer completitud asintótica en algún modo. Si se tiene completitud asintótica generalizada, entonces $(I - F_+)g$ será un estado absorbido en $t = +\infty$. En este caso la imagen es como sigue: El evento de dispersión se inicia en el estado f (o mejor dicho a $U_t^0 f$ a $t \ll -1$). Cuando $t \rightarrow +\infty$, una parte del estado será absorbida, mientras que otra parte, dada por $U_t^0 S f$, se propagará hacia el infinito. Esta última parte es analizada en un experimento de dispersión; en consecuencia esta parte es la que debe ser utilizada para calcular la sección transversal.

La situación se hace más simple si se supone la completitud asintótica en el sentido ordinario o en el sentido geométrico. Se ve que $R(\Omega_+) = R(\Omega_-)$, de tal manera que

$g = \Omega_- f \in R(\Omega_+)$, i.e. $F_+ g = g$. En este caso no hay parte absorbida (aunque los subespacios $\tilde{\mathcal{M}}_{\Gamma}^{\pm}(H)$ no necesitan ser vacíos).

Por ejemplo, si $\mathcal{M}_{\infty}(H_0)^{\pm} = \mathcal{H}$, entonces en una situación subsecuente, donde $R(\Omega_+) = R(\Omega_-)$, S es unitaria por la proposición 5.5, mientras que la situación anterior S en general no es unitario. Se ve así que la propiedad de ser unitario o no serlo (más precisamente, ser isométrico o no serlo) de S está relacionada con la posibilidad o imposibilidad, respectivamente, de absorción en $t = +\infty$ de una parte de los estados de dispersión en $t = -\infty$ (i.e. de los estados en $\mathcal{M}_{\infty}^{-}(H)$).

Capítulo 6

Formulación general de la dispersión multicanal

Este capítulo contiene una descripción de la estructura general y de las propiedades típicas de sistemas de dispersión multicanal. Las aplicaciones de esta teoría a la dispersión de N cuerpos por potenciales se verá más adelante. La sección 6.1 es una introducción que da los fundamentos físicos de la noción de agrupamiento de partículas en sistemas de muchas partículas. En la sección 6.2 se formula la condición asintótica en un sentido abstracto y se muestran las propiedades de los operadores de onda y de dispersión. En la sección 6.3 introducimos el concepto de canales de dispersión. Ahora se ha usado el libro de Amrein et. al. [5] capítulo 6 para la redacción de este capítulo.

En este capítulo nos encontraremos con operadores de la forma $A = A_1 \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes I \otimes \cdots \otimes A_n$ en un espacio producto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$, donde cada A_k es autoadjunto en \mathcal{H}_k . Puede demostrarse que A es esencialmente autoadjunto en $D(A_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} D(A_n)$, en consecuencia también en el dominio más grande $\cup_k D(I \otimes \cdots \otimes A_k \otimes \cdots \otimes I)$. Además, si cada A_k es acotado por abajo, entonces el operador suma es autoadjunto. (Ver capítulo VIII.10 [43]). En nuestras aplicaciones los operadores A_k son Hamiltonianos de ciertos sistemas físicos.

6.1. Agrupamiento de partículas

Se define un sistema de dispersión simple por la propiedad de que la evolución temporal de cada estado de dispersión de H puede aproximarse a tiempos negativos y positivos grandes por estados cuyo evolución temporal está gobernada por un grupo de evolución sin perturbar. El concepto de sistema simple de dispersión es adecuado para la descripción de sistemas físicos compuestos de sólo dos subsistemas elementales, por ejemplo, dos partículas elementales. En tal caso es usual distinguir dos tipos de estados del sistema, los estados ligados, en los cuales los dos subsistemas permanecen ligados uno con el otro en todo tiempo, y los estados de dispersión, en los cuales los dos subsistemas se apartan cada vez más entre sí cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Si un sistema físico consiste de mas de dos elementos constitutivos, esta simple

imagen ya no es suficiente. Como ejemplo, consideremos un sistema compuesto de tres subsistemas elementales etiquetados como a, b y c . Los estados ligados de nuevo serán caracterizados por la propiedad de que los tres subsistemas permanecen juntos en todo tiempo, y un estado de dispersión será aquel que a tiempos negativos y positivos muy grandes el sistema se divide en al menos dos partes cuya distancia relativa se hace más y más grande cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Se ve que existen varias posibilidades para esta división en partes, y en consecuencia, distinguiremos varios tipos de dispersión.

Puede pasar que cada uno de los tres constituyentes se mueva separadamente de los otros dos, con la distancia relativa entre cualesquiera dos constituyentes haciéndose cada vez más grande cuando $t \rightarrow \pm\infty$. El tiempo total de evolución de tal estado de dispersión será asintóticamente aproximado por aquel de los tres subsistemas en movimiento libre. Caracterizaremos formalmente tales estados de dispersión por $\{[a], [b], [c]\}$ (los corchetes indican las partes individuales en las cuales el sistema está dividido). Otra posibilidad es que a y b permanezcan ligados a tiempos muy grandes y el sistema compuesto $[a, b]$ se aleja cada vez más de c cuando $t \rightarrow \pm\infty$, i.e. estados que pueden ser designados por $\{[a, b], [c]\}$. El tiempo de evolución total de tal estado se aproximará asintóticamente por la evolución libre de un cierto estado de un sistema de dos componentes que consiste del sistema compuesto $[a, b]$ y del subsistema elemental c . Este grupo de evolución libre será diferente de aquel indicado anteriormente para los estados del tipo $\{[a], [b], [c]\}$, ya que será necesario tomar en cuenta las fuerzas que mantienen a a y b ligados, mientras que la libre evolución de los tres sistemas independientes no contiene fuerzas entre ellos. Debe indicarse que en nuestra descripción un sistema compuesto como $[a, b]$ es considerado como un sólo objeto físico, el cual puede tener una estructura interna en el sentido de que pueden ser varios estados ligados. Su movimiento libre está determinado (excluyendo la energía de enlace) por el operador de energía cinética de su centro de masa. También se ve en la descripción anterior que de la división del sistema de tres partículas en $[a, b]$ y $[c]$ involucra tres espacios diferentes: los estados de dispersión de H del tipo $\{[a, b], [c]\}$ para $t \rightarrow \pm\infty$ respectivamente (estos dos conjuntos pueden ser diferentes), y el conjunto de los posibles estados de dos componentes que consisten de $[a, b]$ y $[c]$ (el último conjunto contiene los estados en los cuales los dos primeros son asintóticamente aproximados).

Así en el ejemplo anterior se tiene que distinguir (para cada signo del tiempo) cuatro tipos de estados de dispersión de H , a saber $\{[a], [b], [c]\}$, $\{[ab], [c]\}$, $\{[ac], [b]\}$, $\{[a], [bc]\}$, y una descripción asintótica del tiempo total de evolución de cada tipo será en términos de un grupo de evolución sin perturbación para cada uno de ellos. Una situación similar se encontrará cuando se considere un sistema de $N \geq 3$ subsistemas elementales; el número de posibilidades de dividir el sistema en al menos dos subsistemas (elementales o compuestos) determinará de nuevo el número de tipos posibles de estados de dispersión. Como un ejemplo físico simple podemos considerar la dispersión de un protón por un deuterón. Esto involucra tres partículas elementales, a saber dos protones y un neutrón, y el deuterón es un sistema compuesto dado como un estado ligado de un protón y el neutrón. Debido a la indistinguibilidad de los dos protones y porque no existen estados ligados protón a protón, sólo hay dos tipos de estados de dispersión, aquellos

que están compuestos asintóticamente de dos protones libres y un neutrón libre y aquel que está compuesto por un protón y un deuterón. Debe agregarse que el número total de partículas (i.e. subsistemas elementales) en el tipo de teoría multicanal considerada aquí es fija, por lo tanto tal teoría no describirá la creación de partículas adicionales tales como los mesones a altas energías.

Se ve a partir de este ejemplo que los varios tipos de estados de dispersión pueden llevar asintóticamente a situaciones físicas muy diferentes. El primer paso hacia una teoría de dispersión es, por lo tanto, introducir los estados que apropiadamente describan la situación, i.e. los cuales, cuando evolucionen bajo un grupo de evolución sin perturbar apropiado, puede dar la descripción asintótica apropiada de los distintos estados de dispersión del Hamiltoniano H . En el caso de un sistema simple de dispersión estos estados fueron determinados como aquellos en $M_\infty(H_0)$, y su evolución temporal fue dada por $U_t = \exp(-iH_0t)$. En el presente contexto existirán varios subespacios como éste (llamados subespacios de agrupación de aquí en adelante), y con cada uno de ellos habrá un grupo unitario uniparametrizado asociado que dejará el subespacio de la agrupación invariante. El generador infinitesimal de este grupo se llamará un Hamiltoniano de la agrupación. Por el momento, nos contentaremos con una descripción de las propiedades características de estos subespacios de agrupación y Hamiltonianos de agrupación. En el capítulo 7 se tratará explícitamente la dispersión por un potencial para sistemas de N partículas.

Consideramos un sistema que consiste de N partículas indistinguibles, cada una descrita por los estados y observables asociados a un espacio de Hilbert \mathcal{H}_k ($k = 1, \dots, N$). El espacio de Hilbert del sistema entero es entonces $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$. Habrá un espacio de agrupamiento de \mathcal{H} para cada partición posible del conjunto de números $\{1, \dots, N\}$ en n subconjuntos con $2 \leq n \leq N$. Estos subconjuntos se llamarán agrupaciones y se denotan por $(1), (2), \dots, (n)$. La partición correspondiente será designada por $D = \{(1), \dots, (n)\}$ u ocasionalmente por D_n para indicar que el número de agrupaciones en la partición es n . Observe que para una n dada existen varias particiones. Como cada partícula está etiquetada por un número, podemos asociar con cada agrupación (k) un subconjunto de las N partículas, a saber aquellas cuyos números aparecen en (k) , así como también un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(k)}$, el producto tensorial de los espacios \mathcal{H}_j con $j \in (k)$. Así cada partición lleva a la división de las N partículas en al menos dos subconjuntos. Estos subconjuntos pueden consistir de $1, 2, \dots, N - 1$ partículas y ocasionalmente se llamarán agrupaciones de partículas. $\mathcal{H}^{(k)}$ es el espacio de Hilbert correspondiente al conjunto de partículas asociado con la agrupación (k) , y el espacio de Hilbert de N partículas puede escribirse como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(n)}. \quad (6.1)$$

Un hamiltoniano de agrupación es un operador autoadjunto de la forma $H^D = H^{(1)} \otimes I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes H^{(n)}$ en la representación (6.1) de \mathcal{H} como un producto tensorial, donde para cada k , $H^{(k)}$ es un Hamiltoniano para el conjunto de partículas que forman la agrupación (k) , y $H^{(k)}$ actúa en $\mathcal{H}^{(k)}$. El grupo unitario

uniparametrizado asociado (el grupo de evolución de la agrupación) tiene la forma

$$U_t^D \equiv \exp(-iH^D t) = \exp(-iH^{(1)}t) \otimes \cdots \otimes \exp(-iH^{(n)}t), \quad (6.2)$$

lo que significa que cada agrupación de partículas se mueve independientemente de las otras. ((6.2) puede verificarse al observar que el generador infinitesimal del lado derecho coincide con H^D en $D(H^{(1)}) \otimes \cdots \otimes D(H^{(n)})$) y recordando que H^D es esencialmente autoadjunto en este subconjunto de \mathcal{H} .

Considere ahora uno de los Hamiltonianos autoadjuntos $H^{(k)}$ que actúa en $\mathcal{H}^{(k)}$. Definimos $\mathcal{M}_0(H^{(k)})$ como el subespacio de $\mathcal{H}^{(k)}$ que consiste de todos los estados ligados asociados con $H^{(k)}$ (i.e. el conjunto de estados en los cuales todas las partículas que pertenecen a (k) permanecen juntas en todo tiempo relativas al grupo de evolución $\{\exp(-iH^{(k)}t)\}$). Estos estados pueden ser definidos como en (4.3) usando los operadores de posición relevantes. El subespacio de agrupación asociado con el Hamiltoniano de agrupación H^D está determinado como el siguiente subespacio de \mathcal{H} en la representación (6.1):

$$\mathcal{M}^D = \mathcal{M}_0(H^{(1)}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_0(H^{(n)}). \quad (6.3)$$

Hay algo que agregar sobre las agrupaciones que consisten de una sólo partícula. En este contexto una partícula se considera como un estado ligado en sí mismo, i.e. si (k) contiene sólo un elemento, entonces $\mathcal{M}_0(H^{(k)})$ se toma como el espacio entero $\mathcal{H}^{(k)}$ (el cuál es idéntico con el espacio original \mathcal{H}_i).

Como $\mathcal{M}_0(H^{(k)})$ reduce $H^{(k)}$ para cada k, M^D reduce H^D , o en otras palabras el grupo de evolución de la agrupación deja invariante a M^D . Los estados en M^D describen n subsistemas (compuestos o elementales) cada uno de los cuales forma un "fragmento de dispersión" y los cuales se mueven independientemente el uno del otro bajo el grupo de evolución de la agrupación $\{U_t^D\}$. Para que esta interpretación sea consistente, debemos requerir que el grupo de evolución de la agrupación no lleve a un enlace entre las agrupaciones (si esto pasara, los correspondientes estados ligados simplemente estarían incluidos en un subespacio de agrupamiento diferente).

El conjunto de subespacios de agrupación $\{M^D\}$ supone el rol que jugó el conjunto $\mathcal{M}_\infty(H_0)$ de estados de dispersión del Hamiltoniano no perturbado de la sección 5.1. El número total de estos subespacios es finito y no excede el número M_N de distintas maneras de dividir en particiones el conjunto $\{1, \dots, N\}$ en al menos dos agrupaciones. Puede, sin embargo, ser considerablemente más chico que M_N , ya que ciertas agrupaciones pueden no tener estado ligado alguno. Así $\mathcal{M}^D \neq \{0\}$ si y sólo si para cada agrupación (k) de más de una partícula que aparece en la partición D, el Hamiltoniano $H^{(k)}$ tiene al menos un estado ligado. Si todas las fuerzas interpartículas son repulsivas, no hay estados ligados de agrupación en lo absoluto, por lo tanto, el único subespacio de agrupación no trivial será el correspondiente a N partículas libres, i.e. $\mathcal{M}^{DN} = \mathcal{H}$, y la teoría de dispersión será aquella de un sistema de dispersión simple.

Debido a que los vectores de estado en los subespacios de agrupación evolucionan bajo el grupo de evolución de agrupación éste será usado para aproximar los distintos tipos de estados de dispersión de H para tiempos grandes, es claro que el Hamiltoniano de agrupación debe estar relacionado de alguna manera al Hamiltoniano total

H. Una receta simple para obtener un Hamiltoniano de agrupación H^D a partir de H sería simplemente eliminar en H todas las partes de la interacción en las que intervienen partículas pertenecientes a distintas agrupaciones en la partición D . Esto es posible si, por ejemplo, la interacción total es una suma de términos los cuales sólo involucran dos partículas, e.g. una suma de pares de potenciales que dependen de la distancia relativa del par de partículas respectivo. Luego es posible retener en H^D sólo aquellos potenciales que corresponden al par de potenciales que pertenecen a la misma agrupación. En situaciones más generales se podría introducir algún tipo de interacción efectiva entre las partículas en cada agrupación para definir los operadores H^D .

En general la posición relativa en \mathcal{H} de dos subespacios de agrupación es bastante arbitraria, aunque en ciertos casos una relación de inclusión puede existir. Por ejemplo, ya hemos visto que el subespacio de agrupación correspondiente a la agrupación D_N en N partículas individuales es el espacio de Hilbert entero, por lo tanto, $\mathcal{M}^D \subset \mathcal{M}^{D_N} = \mathcal{H}$ para cualquier partición D .

Para la descripción matemática de los sistemas de dispersión multicanal es conveniente introducir además del espacio de Hilbert \mathcal{H} un espacio de Hilbert auxiliar llamado el espacio de Hilbert asintótico \mathcal{H}_{as} . Se construye tomando la suma directa de todos los espacios de agrupación, i.e.

$$\mathcal{H}_{as} = \oplus \mathcal{M}^D, \quad (6.4)$$

donde la suma se extiende sobre todas las particiones D de $\{1, \dots, N\}$ en al menos dos agrupaciones. De aquí en adelante escribiremos \mathcal{M}^D cuando \mathcal{M}^D sea visto como un subespacio de \mathcal{H} y \mathcal{M}_{as}^D cuando es visto como un subespacio de \mathcal{H}_{as} . Similarmente un vector $f^D \in \mathcal{M}^D$ será denotado por f_{as}^D cuando se vea como un vector en \mathcal{H}_{as} .

Como cada sumando en (6.4) se identifica con un subespacio de \mathcal{H} , se puede definir un operador lineal J , el operador de inyección, de \mathcal{H}_{as} a \mathcal{H} , como sigue: la restricción de J como un sumando \mathcal{H}_{as} como la identificación, y ésta es extendida por linealidad a combinaciones lineales de vectores en diferentes sumandos. Así, si $f_{as}^D \in \mathcal{M}_{as}^D$, $J f_{as}^D = f^D \in \mathcal{H}$, y

$$J \left(\sum_D f_{as}^D \right) = \sum_D f^D. \quad (6.5)$$

Como la restricción de J a cada \mathcal{M}_{as}^D tiene norma 1 y la suma en (6.4) es finita, J es un operador acotado de \mathcal{H}_{as} a \mathcal{H} . Su adjunto J^* está bien definido, es acotado y transforma \mathcal{H} en \mathcal{H}_{as} (ver [5] pag. 577).

Es usual dividir más allá los subespacios de agrupación en los así llamados los subespacios de canal. Esta subdivisión está basada físicamente en la especificación de la estructura interna o la energía de enlace de las distintas agrupaciones de las partículas, las cuales son también determinadas en experimentos. Esta subdivisión también se discutirá en la sección 6.3, después de la formulación de la condición asintótica para la cual basta tener a la disposición los subespacios de agrupamiento.

6.2. La condición asintótica

Los objetos matemáticos necesarios para una teoría de la dispersión multicanal son

- (i) Un espacio de Hilbert separable H ,
- (ii) Un grupo unitario uniparametrizado fuertemente continuo $\{V_t\}$, llamado el grupo total de evolución, y un subespacio $\mathcal{M}_\infty(H)$ de estados de dispersión asociados con él,
- (iii) Para cada D que pertenece a algún conjunto de índices Ξ , un subespacio \mathcal{M}^D de \mathcal{H} y un grupo unitario uniparametrizado fuertemente continuo $\{U_t^D\}$ dejando \mathcal{M}^D invariante.

Los subespacios $\{\mathcal{M}^D\}$ se llamarán subespacios de agrupación, los grupos $\{U_t^D\}$ grupos de evolución de agrupación. Éstos podrían ser, por ejemplo, los objetos definidos en la sección 6.1, en cuyo caso Ξ es un conjunto finito. Sin embargo, en lugar de estos objetos se podría también tomar los subespacios de canal y los grupos de evolución de canal asociados que serán introducidos en la sección 6.3 (en cuyo caso Ξ será infinito numerable) o en algún otro conjunto de subespacios y de grupos de evolución. Denotamos por $E_\infty(H)$ la proyección con rango $\mathcal{M}_\infty(H)$ y por E^D aquella proyección que tiene como rango \mathcal{M}^D . Por hipótesis tenemos que $V_t E_\infty(H) = E_\infty(H) V_t$ y $U_t^D E^D = E^D U_t^D$ para cada $D \in \Xi$.

La observación básica hecha en un experimento de dispersión es que el arreglo de las partículas en agrupaciones (i.e. el tipo de fragmentos de dispersión) a tiempos grandes junto con la medida del momento de estos fragmentos. Correspondientemente debería existir para cada $D \in \Xi$ un observable sobre el conjunto de los estados de dispersión $\mathcal{M}_\infty(H)$ determinando si la evolución temporal de un estado llevará asintóticamente al tipo de agrupamiento determinado por D o no. En efecto, deberían de existir dos de estos observables para cada D , representados por dos operadores autoadjuntos B_\pm^D , correspondientes a $t \rightarrow +\infty$ y $t \rightarrow -\infty$ respectivamente. Además habrá un operador de momento adecuado (u otros observables) definidos en cada \mathcal{M}^D .

Discutamos aquí el primer tipo de observables. Digamos que un estado de dispersión g de H llega a la agrupación D cuando $t \rightarrow +\infty$ si existe $f_+^D \in \mathcal{M}^D$ tal que $\|V_t g - U_t^D f_+^D\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. El conjunto de los estados $g \in \mathcal{M}_\infty(H)$ que verifican esta condición es claramente un subespacio N_+^D de \mathcal{M}_∞ . El observable B_+^D se requiere que satisfaga que el subespacio N_+^D es el subespacio propio de B_+^D correspondiente a un valor propio definido, digamos el 1. Así $N_+^D = \{g \in \mathcal{M}_\infty(H) | B_+^D g = g\}$. Similarmente uno define $N_-^D = \{g \in \mathcal{M}_\infty(H) | \|V_t g - U_t^D f_-^D\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty \text{ para algún } f_-^D \in \mathcal{M}^D\}$ y requiere que $N_-^D = \{g \in \mathcal{M}_\infty(H) | B_-^D g = g\}$. Denotamos por F_\pm^D las proyecciones ortogonales con rango N_\pm^D y observamos que F_\pm^D son las proyecciones espectrales de B_\pm^D asociadas con el conjunto de Borel $\{1\}$. No será necesario especificar los observables B_\pm^D más adelante.

Usualmente se supone en la interpretación de experimentos que las observaciones de los distintos arreglos de partículas en agrupaciones son medidas compatibles. Así se

requiere que los observables $\{B_+^D\}_{D \in \Xi}$ formen un conjunto de operadores mutuamente conmutantes, y similarmente para $\{B_-^D\}_{D \in \Xi}$. La conmutatividad de dos operadores autoadjuntos implica la conmutatividad de sus proyecciones espectrales. En consecuencia este requerimiento lleva en particular a

$$F_+^C F_+^D = F_+^D F_+^C, \quad F_-^C F_-^D = F_-^D F_-^C \text{ para todo } C, D \in \Xi. \quad (6.6)$$

Si la descripción asintótica de los estados de dispersión por medio de los grupos de evolución de agrupación quiere ser significativa, ningún estado de dispersión de H debe llevar simultáneamente a dos agrupaciones distintas. Esto significa que se tiene que pedir además que

$$N_+^C \cap N_+^D = \{0\}, \quad N_-^C \cap N_-^D \text{ siempre que } C \neq D. \quad (6.7)$$

Esto junto con (6.6) tiene la siguiente consecuencia. Sea $C \neq D$ y sea $g^D \in N_+^D$, i.e. $F_+^D g^D = g^D$. Considere el vector $F_+^C g^D \in N_+^C$. Tenemos por (6.6) $F_+^D F_+^C g^D = F_+^C F_+^D g^D = F_+^C g^D =$, tal que el vector $F_+^C g^D$ es un vector propio de F_+^D con valor propio 1, i.e. $F_+^C g^D \in N_+^D$. Así $F_+^C g^D \in N_+^D \cap N_+^C$. En consecuencia, por (6.7) $F_+^C g^D = 0$ para cada $g^D \in N_+^D$. Esto significa que N_+^D es ortogonal a N_+^C siempre que $C \neq D$. Similarmente los subespacios $\{N_-^D\}$ son mutuamente ortogonales. En términos de las proyecciones $\{F_\pm^D\}$ esto significa que

$$F_+^C F_+^D = 0, \quad F_-^C F_-^D = 0 \text{ siempre que } C \neq D. \quad (6.8)$$

Como (6.8) implica (6.6) y (6.7), de aquí en adelante se reemplazarán las dos condiciones (6.6) y (6.7) por (6.8).

Una última hipótesis será la completitud asintótica de la teoría, i.e. el conjunto de subespacios de agrupación junto con los grupos de evolución asociados es suficientemente grande para proporcionar una descripción asintótica de todos los estados de dispersión de H . Esto puede restablecerse en términos de los subespacios $\{N_\pm^D\}$ al requerir que la suma directa de todos los N_+^D así como aquellos donde N_-^D es la totalidad de $M_\infty(H)$.

Las consideraciones precedentes llevan a la siguiente formulación de la condición asintótica: Para cada $D \in \Xi$ existe un par de proyecciones ortogonales F_\pm^D que verifican (6.8) tal que $W_\pm^D \equiv s - \lim U_t^{D*} V_t F_\pm^D$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen, con $\text{rango } W_\pm^D \subset \mathcal{M}^D$, y tal que $\sum_D F_+^D = \sum_D F_-^D = E_\infty(H)$.

Los operadores W_\pm^D son isometrías parciales con conjuntos iniciales N_\pm y conjuntos finales $\mathcal{M}'_\pm \subset \mathcal{M}^D$. Como en cada estado principal en \mathcal{M}^D puede prepararse como un estado inicial posible (siempre que \mathcal{M}^D esté definido adecuadamente, e.g. como en la sección 6.1), se debe tener que $\mathcal{M}'_- = \mathcal{M}^D$. Como en el caso de los sistemas de dispersión, es conveniente requerir que $\mathcal{M}'_+ = \mathcal{M}^D$. Si este es el caso, se puede reescribir la condición asintótica al usar los operadores de onda de agrupación $\Omega_\pm^D = s - \lim V_t^* U_t^D E^D$ en lugar de los operadores W_\pm^D . Esto lleva a la forma más usual de condición asintótica que consiste de los siguientes postulados dados a continuación:

(B1) Los siguientes límites, llamados los operadores de onda de agrupación, existen para cada $D \in \Xi$:

$$\Omega_{\pm}^D = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} V_t^* U_t^D E^D.$$

Se sigue que Ω_{\pm}^D son isometrías parciales con un conjunto inicial \mathcal{M}^D y conjunto final $F_{\pm}^D \mathcal{H}$, donde

$$F_{\pm}^D = \Omega_{\pm}^D \Omega_{\pm}^{D*}. \quad (6.9)$$

(B2)

$$F_+^C F_+^D = 0, F_-^C F_-^D = 0 \text{ siempre que } C \neq D. \quad (6.10)$$

(B3)

$$\sum_{D \in \Xi} F_+^D = \sum_{D \in \Xi} F_-^D = E_{\infty}(H). \quad (6.11)$$

Observe que $W_{\pm}^D = \Omega_{\pm}^{D*}$.

La descripción del proceso de dispersión ahora puede estar dada como sigue. Supongamos que el estado inicial es $f_-^C \in \mathcal{M}^C$. Sea $g = \Omega_-^C f_-^C$, i.e. $\|V_t g - U_t^C f_-^C\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Se tiene que descomponer g en una suma de estados cada uno de los cuales lleva a la definición de estados de agrupamiento cuando $t \rightarrow +\infty$. Tal descomposición es posible, digamos que $g = \sum_D F_+^D g$, y es única. Para cada $F_+^D g$ existe un vector $f_+^D \in \Omega_+^{D*} g$, tal que $\|V_t F_+^D g - U_t^D f_+^D\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Vemos a partir de esto que el efecto de la dispersión puede describirse asociando con cada vector $f_-^C \equiv f_-^C \in \mathcal{M}^C$ una colección de vectores $\{f_+^D\}_{D \in \Xi}$ con $f_+^D \in \mathcal{M}^D$. Esta correspondencia es obviamente lineal, y f_+^D se interpreta como la parte del estado final (en el tiempo $t = 0$) con la agrupación D . Apartir de esta definición de f_+^D dada anteriormente vemos que

$$f_+^D = \Omega_+^{D*} \Omega_-^C f_-^C \equiv S_{DC} f_-^C. \quad (6.12)$$

Así el análogo al operador de dispersión de la sección 5.1 es una colección $\{S_{DC}\}$ ($C, D \in \Xi$) de operadores lineales, donde S_{DC} transforma \mathcal{M}^C en \mathcal{M}^D y se define como

$$S_{DC} = \Omega_+^{D*} \Omega_-^C. \quad (6.13)$$

Como Ω_{\pm}^D son isometrías parciales, tenemos

$$\|S_{DC}\| \leq \|\Omega_+^{D*}\| \|\Omega_-^C\| = 1. \quad (6.14)$$

Los operadores S_{CC} describen la parte de la dispersión en las cuales el agrupamiento de las partículas permanece sin cambio, mientras que los operadores S_{DC} con $D \neq C$ describen las varias posibilidades de reordenamiento de dispersión. Para tener el reordenamiento de dispersión, es necesario y suficiente que $F_+^D \neq F_-^D$ para alguna $D \in \Xi$.

Repetimos que los rangos de los diferentes operadores de onda de agrupamiento (con signo fijo + o -) son mutuamente ortogonales, mientras que sus conjuntos inicial y final están en general en posiciones relativas muy arbitrarias en \mathcal{H} . Ahora mencionamos algunas propiedades simples de los operadores de onda y de dispersión.

Proposición 6.1 Sea Ω_{\pm}^D definido por (B1). Entonces

(a) Ω_{\pm} son isometrías parciales con conjunto inicial \mathcal{M}^D , i.e.

$$\Omega_{\pm}^{D*}\Omega_{\pm}^D = E^D \quad (6.15)$$

y con rango $F_{\pm}^D\mathcal{H}$, donde $F_{\pm}^D = \Omega_{\pm}^D\Omega_{\pm}^{D*}$.

(b) Los adjuntos de Ω_{\pm}^D están dados por

$$\Omega_{\pm}^{D*} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t^{D*}V_t F_{\pm}^D. \quad (6.16)$$

(c) Ω_{\pm}^D entrelaza H y H^D , i.e. se tiene para toda $t \in \mathbb{R}$

$$V_t\Omega_{\pm}^D = \Omega_{\pm}^D U_t^D, \quad \Omega_{\pm}^{D*}V_t = U_t^D\Omega_{\pm}^{D*}. \quad (6.17)$$

(d) Si $f^C \in D(H^C)$, entonces $\Omega_{\pm}^C f^C \in D(H)$ y

$$H\Omega_{\pm}^C f^C = \Omega_{\pm}^C H^C f^C. \quad (6.18)$$

(e) Las proyecciones F_{\pm}^D reducen $\{V_t\}$, i.e.

$$F_{\pm}^D V_t = V_t F_{\pm}^D \text{ para toda } t \in \mathbb{R}. \quad (6.19)$$

(f) Si (B2) también se verifica, entonces

$$\Omega_{+}^{C*}\Omega_{+}^D = 0, \quad \Omega_{-}^{C*}\Omega_{-}^D = 0 \text{ siempre que } C \neq D. \quad (6.20)$$

Proposición 6.2 Suponga que (B1), (B2) y (B3) se cumplen, y sea S_{DC} definido por (6.13). Entonces

(a) S_{DC} entrelaza H^D y H^C , i.e.

$$U_t^D S_{DC} = S_{DC} U_t^C \text{ para toda } t \in \mathbb{R}, \quad (6.21)$$

y para cada $f^C \in D(H^C)$ uno tiene $S_{DC}f^C \in D(H^D)$ y

$$H^D S_{DC}f^C = S_{DC}H^C f^C. \quad (6.22)$$

(b)

$$\sum_{D \in \Xi} S_{DC}^* S_{DC'} = \delta_{CC'} E^C \quad (6.23)$$

$$\sum_{D \in \Xi} S_{CD} S_{C'D}^* = \delta_{CC'} E^C, \quad (6.24)$$

donde $\delta_{CC'} = 1$ si $C = C'$ y $\delta_{CC'} = 0$ si $C \neq C'$.

La proposición 6.2(a) expresa la conservación de la energía en el proceso de dispersión. Si $\{E_\lambda^C\}$ denota la familia espectral de H^C , entonces para cualquier conjunto de Borel $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$E_\Delta^D S_{DC} f^C = S_{DC} E_\Delta^D f^C. \quad (6.25)$$

Si f^C tiene soporte espectral en un intervalo pequeño Δ (con respecto a H^C), i.e. si $f^C = E_\Delta^C f^C$, entonces $S_{DC} f^C$ tiene soporte compacto en el mismo intervalo Δ (con respecto a H^D). Debe indicarse que H^D puede contener una parte que describe la energía cinética de diferentes agrupaciones así como también una parte que describe su movimiento interno y la proposición 6.2(a) significa sólo la conservación de su suma. En consecuencia, esta teoría admite la posibilidad de conversión de energía cinética en energía de amarre y viceversa.

La proposición 6.2(b) expresa las relaciones de unitariedad para dispersión multicanal, implican que para cada $f^C \in \mathcal{M}^C$

$$\sum_{D \in \Xi} \|S_{DC} f^C\|^2 = \sum_{D \in \Xi} (f^C, S_{DC}^* S_{DC} f^C) = \|E^C f^C\| = \|f^C\|^2. \quad (6.26)$$

Así, dado un estado inicial $f_-^C \in \mathcal{M}^C$, los cuadrados de las normas de los estados finales $\{f_+^D\}$ ($f_+^D = S_{DC} f_-^C$) asociados con f_-^C suman $\|f_-^C\|^2$. Una consecuencia de (6.26) es que en general $\|S_{DC} f^C\|^2 < \|f^C\|^2$, por lo tanto los operadores individuales S_{DC} no son parcialmente isométricos.

Algunos de los resultados precedentes pueden expresarse más concisamente en una formulación en dos espacios de Hilbert de la teoría la cual involucra el espacio de Hilbert \mathcal{H} y el espacio de Hilbert asintótico \mathcal{H}_{as} introducido en 6.4. Para motivar el uso de \mathcal{H}_{as} , consideramos dos vectores $f^C \in \mathcal{M}^C$ y $f^D \in \mathcal{M}^D$ con $C \neq D$. Por (B1) y (B2)

$$(U_t^D f^D, U_t^C f^C) = (V_t^* U_t^D f^D, V_t^* U_t^C f^C) \rightarrow (\Omega_\pm^D f^D, \Omega_\pm^C f^C) = 0 \quad (6.27)$$

cuando $t \rightarrow \pm\infty$, vemos que $U_t^C f^C$ y $U_t^D f^D$ se hacen ortogonales entre sí cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Así, si solamente se está interesado en el comportamiento de los estados de grupo a tiempos grandes, es natural el introducir la suma directa de los subespacios $\{\mathcal{M}^D\}$, la cual es otro sino el subespacio \mathcal{H}_{as} definido en (6.16).

Definimos un Hamiltoniano asintótico H_{as} que actúa en \mathcal{H}_{as} por

$$H_{as} = \oplus_{D \in \Xi} H^D E^D, \quad (6.28)$$

el cual significa que en cada \mathcal{M}_{as}^D , H_{as} coincide con el correspondiente Hamiltoniano de agrupación. Similarmente se introduce la evolución asintótica de grupo como

$$U_t^{as} = \exp(-iH_{as}t) = \oplus_{D \in \Xi} U_t^D E^D. \quad (6.29)$$

Se puede ver (Amrein [5]) que (B1) es equivalente al requerimiento de la existencia de

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} V_t^* J U_t^{as} \equiv \Omega_\pm, \quad (6.30)$$

siempre que $\|J\| < \infty$ (el cual es el caso para el operador J definido en (6.5)). Observe que los operadores $V_t^* J U_t^{as}$ y Ω_\pm transforman \mathcal{H}_{as} en \mathcal{H} y que las restricciones de Ω_\pm al subespacio \mathcal{M}_{as}^D de \mathcal{H}_{as} coincide, salvo una función cociente, entre \mathcal{M}_{as}^D y \mathcal{M}^D , con las operadores de onda de agrupación Ω_\pm^D : Si $f_{as}^D \in \mathcal{M}_{as}^D$, entonces

$$\Omega_\pm f_{as}^D = \Omega_\pm f^D \in F_\pm \mathcal{H}, \text{ donde } f^D = J f_{as}^D. \quad (6.31)$$

Proposición 6.3 *Si se verifican (B1)-(B3), entonces Ω_\pm son operadores isométricos de \mathcal{H}_{as} a \mathcal{H} con rango $\mathcal{M}_\infty(H)$, i.e.*

$$\Omega_\pm^* \Omega_\pm = I_{as}, \quad \Omega_\pm \Omega_\pm^* = E_\infty(H). \quad (6.32)$$

La restricción de Ω_\pm a \mathcal{M}_{as}^D transforma \mathcal{M}_{as}^D en $F_\pm^D \mathcal{H}$, es sobre y está dada por (6.31), y la restricción de Ω_\pm^* a F_\pm^D transforma $F_\pm^D \mathcal{H}$ en \mathcal{M}_{as}^D , es sobre y está dada por

$$\Omega_\pm^* F_\pm^D g = (\Omega_\pm^{D*} g)_{as} \in \mathcal{M}_{as}^D. \quad (6.33)$$

Ahora podemos definir un operador de dispersión en \mathcal{H}_{as} por

$$S = \Omega_+^* \Omega_-. \quad (6.34)$$

S es unitario (siempre que (B1)-(B3) se cumplan). Como $V_t \Omega_\pm = \Omega_\pm U_t^{as}$, S conmuta con H_{as} . La acción de S sobre \mathcal{M}_{as} puede ser calculada apartir de (6.31) y (6.33) resultando

$$S f_{as}^C = \oplus_{D \in \Xi} S_{DC} f_{as}^C, \quad (6.35)$$

i.e. el componente del estado $S f_{as}^C$ en \mathcal{M}_{as}^D no es nada sino $(S_{DC} f_{as}^C)_{as}$ (observe que en (6.35) S_{DC} se interpreta como un operador que transforma \mathcal{M}_{as}^C en \mathcal{M}_{as}^D). Así la correspondencia $f^C \mapsto \{S_{DC} f^C\}$ que caracteriza el efecto de la dispersión ha sido incorporado en un sólo operador S el cuál actúa en el espacio de Hilbert auxiliar \mathcal{H}_{as} .

Se observa que en la forma de dos espacios de Hilbert, la teoría de dispersión multicanal se parece mucho a la de dispersión simple, la única diferencia aparente es el uso de dos espacios de Hilbert en lugar de uno sólo. Esta es una analogía formal y no una equivalencia completa (Amrein [5] pag. 586).

6.3. Canales de dispersión

Como se indicó al final de la sección 6.1, frecuentemente se especifica no sólo el tipo de agrupamiento de los estados de dispersión de H en tiempos grandes sino también la estructura interna (energía de enlace, spin, etc.) de los distintos agrupamientos de partículas. Matemáticamente esta sirve para subdividir los subespacios de agrupamiento \mathcal{M}^D en los llamados subespacios de canal. Para hacer esto, resumimos nuestra discusión de agrupamiento de la sección 6.1; en particular suponemos que H^D está dado por (6.2) y \mathcal{M}^D por (6.3) en el espacio de Hilbert \mathcal{H} definido por (6.1).

Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(k)}$ asociado con una agrupación (k) que consiste de dos o más partículas y el Hamiltoniano correspondiente $H^{(k)}$. Primero se tiene que separar el movimiento del centro de masa de la agrupación (k) de su movimiento interno. Para esto se introduce, en lugar de los operadores de momento de las partículas individuales que forman la agrupación, un nuevo conjunto de operadores de momento en $\mathcal{H}^{(k)}$ tales que uno de ellos, el operador de momento total $\bar{P}_{tot}^{(k)}$, es la suma de los operadores de momento individuales y los restantes son un conjunto de operadores linealmente independientes que representan el momento relativo entre esas partículas (o equivalentemente se puede escoger un conjunto de coordenadas tal que una de ellas es la coordenada del centro de masa de las partículas que forman la agrupación y las restantes son un conjunto de coordenadas relativas linealmente independientes). Se puede escribir

$$\mathcal{H}^{(k)} = \mathcal{H}_{CM}^{(k)} \otimes \mathcal{H}_{rel}^{(k)}, \quad (6.36)$$

donde los estados en $\mathcal{H}_{CM}^{(k)}$ describen el centro de masa de la agrupación y los estados en $\mathcal{H}_{rel}^{(k)}$ su estructura interna.

Supongamos ahora que la evolución temporal de los estados del centro de masa es independiente de aquella de los estados internos, i.e. que

$$\exp(-iH^{(k)}t) = \exp(-iH_{CM}^{(k)}t) \otimes \exp(-iH_{rel}^{(k)}t), \quad (6.37)$$

o equivalentemente que $H^{(k)}$ tiene la siguiente forma en la representación (6.36) de $\mathcal{H}^{(k)}$:

$$H^{(k)} = H_{CM}^{(k)} \otimes I + I \otimes H_{rel}^{(k)}. \quad (6.38)$$

$\{\exp(-iH_{CM}^{(k)}t)\}$ describirá el movimiento libre de la agrupación como un todo y $\{\exp(-iH_{rel}^{(k)}t)\}$ el movimiento relativo de las partículas que forman la agrupación. En particular $H_{rel}^{(k)}$ contendrá la interacción entre las partículas. El subespacio $\mathcal{M}_0(H^{(k)})$ de $\mathcal{H}^{(k)}$ será de la forma

$$\mathcal{M}_0(H^{(k)}) = \mathcal{H}_{CM}^{(k)} \otimes \mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)}) \quad (6.39)$$

en la representación (6.36), donde $\mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)})$ es el subespacio de $\mathcal{H}_{rel}^{(k)}$ formado por los estados ligados de $H_{rel}^{(k)}$. Los estados ligados de las partículas en (k) tienen una estructura interna siempre que $\mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)})$ tiene una dimensión mayor a uno. Para especificar esta estructura interna, se selecciona en $\mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)})$ una base ortonormal $\{e_j^{(k)}\}, j = 1, \dots, \dim \mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)})$.

En un subespacio canal cada agrupación que consiste de dos o más partículas está en uno de los estados de la respectiva base ortonormal. Usamos el índice α (o β, γ) para etiquetar los canales de dispersión. Un canal se determina como sigue: Primero se escoge una partición D de $\{1, \dots, N\}$ en $n \geq 2$ subconjuntos. Entonces si $(k_1), \dots, (k_m)$ denotan las agrupaciones en D que consisten de dos o más partículas, se selecciona para cada una de ellas un vector básico $e_{j_s}^{(k_s)}$ ($s = 1, \dots, m$). Así se puede escribir

$$\alpha = (D; e_{j_1}^{(k_1)}, \dots, e_{j_m}^{(k_m)}), \text{ con } m = m(D). \quad (6.40)$$

El subespacio de canal asociado \mathcal{M}^α es de la forma

$$\mathcal{M}^\alpha = \mathcal{M}^{(1),\alpha} \otimes \mathcal{M}^{(2),\alpha} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}^{(n),\alpha} \quad (6.41)$$

en la representación (6.1), donde $\mathcal{M}^{(k),\alpha} = \mathcal{M}^{(k)}$ si (k) consiste de sólo una partícula y, si $k = k_s$ para alguna $s = 1, \dots, m$, $\mathcal{M}^{(k_s),\alpha} = \mathcal{H}_{CM}^{(k_s)} \otimes e_{j_s}^{(k_s)}$ en el espacio (6.36).

El conjunto de todos los canales se obtiene tomando en (6.40) todas las posibles elecciones de una partición y todas las posibles combinaciones de vectores básicos. Escribiremos $\alpha \div D$ si α es un canal asociado con la partición D como en (6.40). Así $\alpha \div D$ significa que las agrupaciones que aparecen en α son las mismas que aquellas en las que aparecen en la partición D . También escribimos $\alpha \div \beta$ si existe una partición D tal que $\alpha \div D$ y $\beta \div D$. Es claro a partir de la definición de los canales de dispersión que el subespacio de agrupación \mathcal{M}^D es la suma directa de los subespacios de canal determinados por la partición D , i.e.

$$\mathcal{M}^D = \bigoplus_{\alpha \div D} \mathcal{M}^\alpha. \quad (6.42)$$

La base $\{e_j^{(k)}\}$ de $\mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)})$ puede, por ejemplo, escogerse como los vectores propios comunes de un conjunto completo de observables que conmutan en $\mathcal{M}_0(H_{rel}^{(k)})$ ([5], pag 590). Es útil tomar como uno de estos observables el Hamiltoniano $H_{rel}^{(k)}$, debido a que los estados ligados asociados con $H_{rel}^{(k)}$ usualmente coinciden con el subespacio generado por sus vectores propios y los valores propios correspondientes a las energías de enlace. Si ninguno de estos valores propios es degenerado cuando (k) varía sobre todas las agrupaciones posibles (i.e. si la multiplicidad espectral de cada valor propio de todos los $H_{rel}^{(k)}$ es 1), entonces el conjunto de los subespacios de canal está unívocamente determinado por esta elección de $\{e_j^{(k)}\}$. Por otro lado, si alguno de los valores propios es degenerado, el subespacio de canal depende de la elección de observables adicionales tales como espines. El número de canales de dispersión se determina por el número de valores propios (incluyendo las multiplicidades) de varios operadores $H_{rel}^{(k)}$. Si cada uno de los operadores tiene sólo un número finito de valores propios de multiplicidad espectral finita, el número total de canales es finito. Si $\mathcal{H}_p(H_{rel}^{(k)})$ es de dimensión infinita para al menos alguna agrupación (k) , entonces el número de canales es infinito numerable (debido a que \mathcal{H} es separable).

Durante lo que resta de este capítulo supondremos que los vectores básicos $\{e_j^{(k)}\}$ son eigenvectores de $H_{rel}^{(k)}$. Esto nos permite introducir para cada canal α un canal Hamiltoniano H^α . Para esto observamos bajo la suposición anterior que \mathcal{M}^α reduce el Hamiltoniano de agrupación H^D correspondiente, y es fácil ver [5] que la parte de H^D en \mathcal{M}^α es autoadjunta y está dada por

$$H^D / \mathcal{M}^\alpha = \sum_{k=1}^n H_{CM}^{(k)} / \mathcal{M}^\alpha + \sum_{s=1}^m \lambda_s^\alpha, \quad \text{con } \alpha \div D. \quad (6.43)$$

Aquí n es el número de agrupaciones en la partición D que aparecen en la definición de α , m es el número de agrupaciones en D que consisten de dos o más partículas y $\{\lambda_s^\alpha\}$ son los valores propios asociados con los vectores propios en (6.40), i.e.

$$H_{rel}^{(k_s)} e_{j_s}^{k_s} = \lambda_s^\alpha e_{j_s}^{k_s}. \quad (6.44)$$

En \mathcal{M}^α el Hamiltoniano del canal H^α está dado simplemente por (6.43). Es conveniente definir el siguiente operador en el espacio de Hilbert entero:

$$H^\alpha = \sum_{k=1}^n H_{CM}^{(k)} + \sum_{s=1}^m \lambda_s^\alpha \equiv H_{kin}^\alpha + \lambda^\alpha. \quad (6.45)$$

H^α y $H^D(\alpha \div D)$ coinciden en \mathcal{M}^α pero pueden bastante diferentes en el complemento ortogonal de \mathcal{M}^D . H_{kin}^α representa la energía cinética total de los fragmentos del canal α y λ^α su energía total de enlace.

El operador autoadjunto H^α define un grupo unitario de evolución del canal $U_t^\alpha \equiv \exp(-iH^\alpha t)$. La parte de U_t^α en \mathcal{M}^α describe el movimiento libre de las agrupaciones $(1), \dots, (n)$ mientras que los estados internos de cada agrupación que consiste de más de una partícula es estacionaria.

Sea E^α la proyección con rango \mathcal{M}^α . Entonces $U_t^\alpha E^\alpha = E^\alpha U_t^\alpha$, y puede definir los operadores de onda de canal por

$$\Omega_\pm^\alpha = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} V_t^* U_t^\alpha E^\alpha. \quad (6.46)$$

Sus rangos son $F_\pm^\alpha \mathcal{H}$, donde

$$F_\pm^\alpha = \Omega_\pm^\alpha \Omega_\pm^{\alpha*}. \quad (6.47)$$

Como $H^\alpha E^\alpha = H^D E^\alpha$ por (6.43), tenemos

$$\Omega_\pm^\alpha = \Omega_\pm^D E^\alpha (\alpha \div D) \text{ y } \Omega_\pm^\alpha = \sum_{\alpha \div D} \Omega_\pm^\alpha. \quad (6.48)$$

De la relación (6.42) se tiene que

$$E^\alpha E^\beta = 0 \text{ siempre que } \alpha \neq \beta \text{ y } \alpha \div \beta. \quad (6.49)$$

(6.48), (6.15) y (6.49) implican que, si $f^\alpha \in \mathcal{M}^\alpha, f^\beta \in \mathcal{M}^\beta, \alpha \neq \beta$ y $\alpha \div \beta$, entonces $(\Omega_+^\alpha f^\alpha, \Omega_+^\beta f^\beta) = (\Omega_+^D f^\alpha, \Omega_+^D f^\beta) = (f^\alpha, f^\beta) = 0$. En consecuencia los rangos de Ω_+^α y Ω_+^β son ortogonales si $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \div \beta$, en otras palabras $F_+^\alpha F_+^\beta = 0$. Por otra parte, si α y β pertenecen a distintas particiones, entonces $F_+^\alpha F_+^\beta = 0$ por (6.47) y (B2). Así, si (B1)-(B3) se verifican, tenemos

$$F_+^\alpha F_+^\beta = 0, F_-^\alpha F_-^\beta = 0 \text{ siempre que } \alpha \neq \beta, \quad (6.50)$$

$$\sum_\alpha F_+^\alpha = \sum_\alpha F_-^\alpha = E_\infty(H). \quad (6.51)$$

Las consideraciones anteriores muestran que, si (B1)-(B3) se cumplen para subespacios de agrupación y grupos de evolución de agrupación, entonces también se verifican para subespacios de canal y grupos de evolución de canal. Así, todas las afirmaciones en las proposiciones 6.1 y 6.2 siguen siendo ciertas si uno reemplaza los índices de agrupación C y D por los índices de canal α y β . Los operadores de dispersión de canal se definen como

$$S_{\beta\alpha} = \Omega_+^{\beta*} \Omega_-^{\alpha*} \quad (6.52)$$

y en términos de los canales la dispersión se describe al asociar con cada vector $f_-^\alpha \in \mathcal{M}^\alpha$ una familia de vectores $\{f_+^\beta\}$ con $f_+^\beta = S_{\beta\alpha} f_-^\alpha$. Un subíndice α indica que estamos usando una ecuación de la sección 6.2 para canales en lugar de agrupaciones. Así, por ejemplo, $(6.9)\alpha$ es la misma que la ecuación (6.47).

El operador $S_{\alpha\alpha}$ describe la dispersión elástica en canal α , i.e. no involucra cambio alguno de agrupación y ningún cambio en la estructura interna de los fragmentos de dispersión. En particular sus energías de enlace son las mismas antes y después de la dispersión, por lo tanto, por (6.45) y (6.22) α su energía cinética total H_{kin}^α se conserva. Los operadores $S_{\beta\alpha}$ con $\alpha \div \beta$ y $\alpha \neq \beta$ describe la dispersión inelástica entre los fragmentos del canal α . Los fragmentos permanecen igual, pero al menos uno de ellos sufre un cambio de su estado interno. En particular las energías de enlace y en consecuencia la energía cinética total de los fragmentos puede cambiar. Finalmente, si las particiones que definen α y β son diferentes, entonces $S_{\beta\alpha}$ describe la dispersión de reordenamiento.

Dados cualquier par de canales α y β , la dispersión de α en β puede no ser posible para valores pequeños de la energía total cinética total de los fragmentos en el canal inicial α . Para ilustrar esto, tómesese un valor específico λ_{kin}^α de esta energía cinética total. Entonces por (6.22) α y (6.45), $\lambda_{kin}^\alpha + \lambda^\alpha = \lambda_{kin}^\beta + \lambda^\beta$. Debido a que la energía cinética es positiva, esta relación no puede verificarse si $\lambda_{kin}^\alpha < \lambda^\beta - \lambda^\alpha$. Así, si $\lambda^\beta - \lambda^\alpha > 0$, no hay dispersión del canal α al canal β siempre que $\lambda_{kin}^\alpha < \lambda^\beta - \lambda^\alpha$, i.e.

$$S_{\beta\alpha} \hat{E}_\lambda^\alpha = 0 \text{ para todo } \lambda < \lambda^\beta - \lambda^\alpha, \quad (6.53)$$

donde $\{\hat{E}_\lambda^\alpha\}$ denota la familia espectral de H_{kin}^α . La energía total minimal (i.e. energía cinética más de la enlace) en el canal α en la cual la dispersión hacia el canal β se hace posible en el sentido anterior se llama umbral de energía $\lambda(\alpha \rightarrow \beta)$ para la dispersión del canal α al canal β . Así bajo las circunstancias anteriores

$$S_{\beta\alpha} \hat{E}_\lambda^\alpha = 0 \text{ para todo } \lambda < \lambda^\beta - \lambda^\alpha, \quad (6.54)$$

Finalmente, debemos decir que el enfoque de la dispersión multicanal basada en dos espacios de Hilbert definida en términos de canales es exactamente igual a la dada en la sección 6.2 en términos de agrupaciones. Esto se sigue fácilmente a partir de las observaciones precedentes y de (6.42) la cuál implica que $\mathcal{H}_{as} = \bigoplus_\alpha \mathcal{M}^\alpha$.

Capítulo 7

Dispersión inversa multidimensional en un campo eléctrico

En este capítulo se hace una reseña del artículo de Weder (1996) [49]. Se agregan detalles tanto en el apéndice como en el cuerpo del presente capítulo.

7.1. Resumen

Demostramos que el límite de alta velocidad del operador de dispersión de un sistema de dos cuerpos en un campo eléctrico externo constante determina unívocamente el potencial. En caso de un sistema de N cuerpos se demuestra que el límite de alta velocidad de cualquiera de los operadores de dispersión de Dollard determina unívocamente el potencial. Más aún, obtenemos una fórmula con término de error para la reconstrucción del potencial. Demostramos nuestros resultados con un método simple dependiente del tiempo.

7.2. Introducción

Estudiamos la dispersión por un potencial de una partícula mecánica cuántica, o un sistema de dos cuerpos en el sistema de referencia del centro de masa, en un campo eléctrico externo constante. Demostramos en el teorema 7.2 que el operador de dispersión, S , determina unívocamente el potencial. Como mostramos abajo es suficiente conocer el límite de alta velocidad del operador de dispersión. Además, damos en (7.54) una fórmula con término de error para la reconstrucción del potencial a partir del límite de alta velocidad de $S - I$.

Una característica importante de la dispersión en un campo eléctrico externo constante es que los potenciales que son de rango largo en la ausencia de un campo eléctrico se convierten de rango corto cuando se agrega un campo eléctrico externo y constante. Por ejemplo, los potenciales que decaen en el infinito cuando $V(\bar{x}) \approx |x|^{-\gamma}$, $1/2 < \gamma \leq 1$, son de rango largo en la ausencia de campo eléctrico y requieren, por lo tanto, la in-

roducción de una evolución libre en el tiempo modificada para la definición de los operadores de onda y los operadores de dispersión. Por el contrario, en un campo eléctrico externo constante los mismos potenciales (definidos unas líneas arriba) son de rango corto en el sentido de que los operadores de onda y de dispersión existen; i.e., no es necesario considerar una evolución temporal libre modificada para ellos.

Este hecho es particularmente importante en el estudio del problema inverso porque para definir una evolución temporal libre modificada apropiada, por ejemplo, una evolución temporal libre de Dollard, es necesario conocer la "cola" del potencial. Esto implica que para definir un operador de dispersión cuando no hay un campo eléctrico es necesario conocer a priori la parte de rango largo del potencial. En los trabajos de Enss y Weder [19], [20], [21] se demostró para un sistema mecánico cuántico de N cuerpos que el operador de dispersión de Dollard, S^D , determina unívocamente la parte de rango corto del potencial y, además, que cualquiera de los operadores de dispersión de Dollard determina unívocamente el potencial total. Se obtuvo una fórmula con el término de error para la reconstrucción del potencial a partir del límite de alta velocidad de $S^D - I$.

Los operadores de dispersión de Dollard son una clase natural de operadores de dispersión modificados. Sin embargo, no están unívocamente definidos (observe que la división en las partes de rango corto y largo no es única) y, más aún, otras opciones de operadores de dispersión modificados son posibles. Claramente en el caso de rango largo sin campo eléctrico no existe una elección canónica del operador de dispersión como en el caso de rango corto. Entonces los resultados de Enss y Weder [19], [20], [21] dejan abierta la pregunta sobre cómo reconstruir la parte de rango largo del potencial a partir de un operador de dispersión definido.

A continuación se da una solución a este problema al considerar la dispersión en un campo eléctrico constante, donde, como se mencionó anteriormente, no se requiere ninguna evolución temporal libre modificada. De esta forma demostramos la unicidad y damos una fórmula de reconstrucción con término de error en el caso de dos cuerpos para una gran clase de potenciales con decaimiento lento la cual contiene al potencial de Coulomb.

El Hamiltoniano de una partícula, o de un sistema de dos cuerpos en el marco de referencia del centro de masa, en un campo eléctrico externo y constante está dado por el siguiente operador en $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$,

$$H_0 = (2m)^{-1}\bar{p}^2 + q\bar{E} \cdot \bar{x}, \quad \bar{p} = -i\nabla, \quad (7.1)$$

donde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denota la posición de la partícula, o la posición del centro de masa de las dos partículas, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $q \neq 0$ es la carga eléctrica de la partícula o la carga relativa del sistema de dos cuerpos, $m > 0$ es la masa de la partícula, o la masa reducida del sistema. El campo eléctrico está dirigido a lo largo de la dirección $-x_1$, $\bar{E} = (-E, 0, \dots, 0)$, $E = |\bar{E}| > 0$. El operador (7.1) es esencialmente autoadjunto en el espacio de Schwartz (ver Avron y Herbst [9]; Veselić and Weidmann [48]). Denotamos por igual como H_0 a su única extensión autoadjunta. Decimos que un operador es Kato chico en $L^2(\mathbb{R}^n)$ si es relativamente acotado con respecto al Laplaciano

con cota relativa cero (cf 2.62). Para cualquier conjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ denotemos por $F(x \in O)$ el operador de multiplicación por la función característica de O .

Supondremos que el potencial pertenece a la siguiente clase de funciones:

Definición 7.1 Denotamos por \mathcal{V}_E la clase de potenciales, $V^E(\bar{x})$, definida en \mathbb{R}^n con valores en \mathbb{R} y tal que

$$V^E(\bar{x}) = V^{E,s}(\bar{x}) + V^{E,l}(\bar{x}), \quad (7.2)$$

con $V^{E,s}(\bar{x}) \in \mathcal{V}_{E,s}$, y $V^{E,l}(\bar{x}) \in \mathcal{V}_{E,l}$ y donde $\mathcal{V}_{E,s}$ es la clase de potenciales de valor real, $V^{E,s}(\bar{x})$, que satisfacen $V^{E,s}(\bar{x}) = V_1^{E,s}(\bar{x}) + V_2^{E,s}(\bar{x})$, con $(1 + |x_1|) V_1^{E,s}(\bar{x})$ es Kato chico, $V_2^{E,s}(\bar{x})$ acotado y

$$\int_0^\infty dR \|V^{E,s}(\bar{x}) (-\Delta + I)^{-1} F(|\bar{x}| \geq R)\| < \infty. \quad (7.3)$$

Además, $\mathcal{V}_{E,l}$ es la clase de potenciales de valor real, $V^{E,l}(\bar{x})$, que satisfacen

$$|V^{E,l}(\bar{x})| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-\gamma}, \quad \gamma > 3/4, \quad (7.4)$$

y para alguna $1 \leq j \leq n$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l}(\bar{x}) \right| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-1-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq \gamma. \quad (7.5)$$

La propiedad de decaimiento en (7.3) es equivalente a la condición más intuitiva de que

$$\|F(|x| \geq R) V^{E,s}(\bar{x}) (-\Delta + I)^{-1}\|$$

decae integrablemente.

La clase \mathcal{V}_E está fuertemente relacionado a la clase de los potenciales (ver la definición 7.3) considerada en Enss y Weder [21]. $V^{E,s}(\bar{x})$ y $V^{E,l}(\bar{x})$ corresponde respectivamente a las partes de corto y rango largo de los potenciales en Enss y Weder [21]. Observemos que en Enss y Weder [21] se pide que V^l satisfaga que $|\nabla V^l(\bar{x})| \leq C(1 + |\bar{x}|)^\beta$, $\beta > 3/2$.

El Hamiltoniano de interacción se define como

$$H = H_0 + V^E(\bar{x}), \quad (7.6)$$

con $V^E(\bar{x}) \in \mathcal{V}_E$. Se sigue del lema 2 en Simon [47] que $V^E(\bar{x})$ es H_0 acotado con cota relativa cero. Entonces H es autoadjunto con $D(H) = D(H_0)$.

Los operadores de onda se definen como

$$\Omega_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}. \quad (7.7)$$

La existencia de Ω_\pm ha sido demostrado en Avron y Herbst [9] y en Veselić y Weidmann [48]. Esta existencia también se sigue para $V^E(\bar{x}) \in \mathcal{V}_E$ a partir de nuestras estimaciones de la sección 7.3. De hecho requerimos condiciones de decaimiento más

fuertes que las necesarios para la existencia (ver Avron y Herbst [9]) ya que necesitamos un decaimiento más fuerte para resolver el problema inverso; las condiciones son más fuertes ya que requerimos que una parte del potencial sea Kato chico, otra que sea acotada y un decaimiento integral (ver nuestra definición 7.1), por otra parte, las condiciones en Avron y Herbst [9] básicamente son estimaciones sobre la fuerza (el gradiente del potencial) y sus derivadas.

El operador de dispersión se define como

$$S = (\Omega_+)^* \Omega_- \quad (7.8)$$

y S , una función de \mathcal{V}_E en el subespacio de Banach de todos los operadores acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se llama la función de dispersión (ver la sección 4.1). A continuación se enuncia uno de los resultados principales de este capítulo: El problema inverso de determinar el potencial a partir del operador de dispersión tiene solución.

Teorema 7.2 *La función de dispersión $S : \mathcal{V}_E \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es inyectiva.*

La demostración del teorema 7.2 y de nuestra formula de reconstrucción serán dadas en la sección 7.8. Nuestros resultados se demuestran por medio de un método dependiente del tiempo simple que es una extensión al caso de un campo eléctrico externo constante del método de Enss y Weder [19], [20] y [21].

Ahora consideremos el caso de un sistema de N cuerpos. Denotemos por $m_j, q_j, \tilde{x}_j \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, 1 \leq j \leq N$, respectivamente, las masas, las cargas y las posiciones de las partículas. El Hamiltoniano del sistema de N cuerpos en un campo eléctrico constante es

$$\tilde{H}_0 = \sum_{j=1}^N (2m_j)^{-1} \tilde{p}_j^2 + \sum_{j=1}^N q_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j, \quad \tilde{p} = -i\nabla_{\tilde{x}_j}, \quad (7.9)$$

donde el campo eléctrico $\bar{E} = (-E, 0, \dots, 0), E = |\bar{E}| > 0$ está dirigido a lo largo de menos la primera dirección coordenada.

Como es usual, estudiamos el sistema de N cuerpos en el marco de referencia del centro de masa está dado por

$$\bar{X}_{CM} = (1/M) \sum_{j=1}^N m_j \tilde{x}_j, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j, \quad (7.10)$$

donde M es la masa total. El momento del centro de masa es

$$\bar{P}_{CM} = \sum_{j=1}^N \tilde{p}_j.$$

El espacio de Hilbert de estados, $\tilde{\mathcal{H}}$, se descompone de la siguiente manera

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_{CM} \otimes \mathcal{H}, \quad (7.11)$$

donde $\tilde{\mathcal{H}}_{CM}$ es el espacio de Hilbert de los estados del centro de masa y \mathcal{H} es el espacio de Hilbert de estados internos en el centro del marco de referencia del centro de masa. $\tilde{\mathcal{H}}_{CM}$ es representado en el espacio de configuración por $L^2(\mathbb{R}^n)$. \mathcal{H} se representa en el espacio de configuración por funciones de onda ϕ en

$$L^2(\mathbb{X}), \mathbb{X} = \left\{ (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N) \mid \sum_{j=1}^N m_j \tilde{x}_j = 0 \right\} \cong \mathbb{R}^{n(N-1)},$$

con la medida inducida en \mathbb{X} por la siguiente norma en \mathbb{R}^{nN} : $\|\tilde{x}\| = \left[\sum_{j=1}^N m_j \tilde{x}_j^2 \right]^{1/2}$. El conjunto de las funciones de onda en el espacio de momentos, $\hat{\phi}$, es el espacio

$$L^2(\hat{\mathbb{X}}), \hat{\mathbb{X}} = \left\{ (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N) \mid \sum_{j=1}^N \tilde{p}_j = 0 \right\} \cong \mathbb{R}^{n(N-1)},$$

$\hat{\mathbb{X}}$ está equipado con la métrica dual inducida por $\left[\sum_{j=1}^N (m_j)^{-1} \tilde{p}_j^2 \right]^{1/2}$ en \mathbb{R}^{nN} . Las medidas de \mathbb{X} y $\hat{\mathbb{X}}$ son equivalentes a la medida de Lebesgue y la transformada de Fourier es un operador unitario del $L^2(\mathbb{X})$ sobre $L^2(\hat{\mathbb{X}})$. Dado un estado (abstracto) $\Phi \in \mathcal{H}$ usaremos tanto su función de onda en el espacio de configuración o en el espacio de momentos como se necesite. Bajo (7.11) \bar{H}_0 se descompone como

$$\bar{H}_0 = H_{CM} \otimes I + I \otimes H_0,$$

donde H_{CM} es el Hamiltoniano para el movimiento del centro de masa

$$H_{CM} = (2M)^{-1} \bar{P}_{CM}^2 + Q \bar{E} \cdot \bar{X}_{CM},$$

donde $Q = \sum_{j=1}^N q_j$, es la carga total, y H_0 es el Hamiltoniano en un campo eléctrico constante externo en el marco de referencia del centro de masa

$$H_0 = \sum_{j=1}^N (2m_j)^{-1} \tilde{p}_j^2 - (2M)^{-1} \bar{P}_{CM}^2 + \sum_{j=1}^N (q_j - m_j Q/M) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j.$$

H_0 es esencialmente autoadjunto en el espacio de Schwartz (ver abajo). También denotamos por H_0 la única extensión autoadjunta.

Para obtener la intuición de cómo formular el problema inverso en el caso de N cuerpos es particularmente instructivo examinar la forma en la que H_0 toma en las coordenadas de Jacobi. Estas coordenadas se definen de la siguiente manera (ver Reed y Simon [44]).

$$\xi_j = \tilde{x}_{j+1} - \left(\sum_{k=1}^j m_k \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^j m_k \tilde{x}_k \right), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (7.12)$$

Estas coordenadas se obtienen primero cambiando las variables $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ a $\xi_1 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$ y el centro de masa de partículas (1) y (2), $\bar{R}_{12} = (m_1 + m_2)^{-1}(m_1\tilde{x}_1 + m_2\tilde{x}_2)$. Entonces cambiamos de $(\bar{R}_{12}, \tilde{x}_3)$ a $\xi_2 = \tilde{x}_3 - \bar{R}_{12}$ y el centro de masa de partículas (1), (2), y (3), y así sucesivamente. Al final obtenemos las coordenadas de Jacobi $\xi_j, 1 \leq j \leq N-1$, en X y la coordenada del centro de masa \bar{X}_{CM} . En estas coordenadas H_0 se expresa como

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N-1} ((2v_j)^{-1} \hat{p}_j^2 + q_j^R \bar{E} \cdot \xi_j), \quad \hat{p}_j = -i\nabla_{\xi_j} \quad (7.13)$$

donde

$$v_j^{-1} = m_{j+1}^{-1} + \left(\sum_{k=1}^j m_k \right)^{-1}, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

$$q_j^R = (q_{j+1}M_j - m_{j+1}Q_j)/(m_{j+1} + M_j), \quad M_j = \sum_{k=1}^j m_k, \quad (7.14)$$

$$Q_j = \sum_{k=1}^j q_k, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

v_j y $q_j^R, 1 \leq j \leq N-1$, son, respectivamente, la masa reducida y la carga relativa de la partícula (j+1) con respecto a las masas y las cargas de las primeras j partículas. La fórmula (7.13) muestra que la demostración de que H_0 es esencialmente autoadjunta en el espacio de Schwartz se reduce al caso de dos cuerpos. Las coordenadas de Jacobi anteriormente dadas se basan en el par de partículas (1,2) en el sentido de que hemos tomado como primera coordenada $\xi_1 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$ la distancia relativa de las partículas (1) y (2). Por supuesto, podemos basar las coordenadas de Jacobi en cualquier par de partículas $(j, k), j, k = 1, 2, \dots, N$.

Para determinar el potencial para un par dado numeramos las partículas de tal manera que el par dado consiste de las partículas uno y dos. Entonces por (7.13)

$$H_0 = \left[(2v_1)^{-1} \hat{p}_1^2 + \frac{(q_2m_1 - m_2q_1)}{m_1 + m_2} \bar{E} \cdot \xi_1 \right] \otimes I + I \otimes \hat{H}_0, \quad (7.15)$$

bajo la descomposición de $L^2(\mathbb{X})$ como

$$L^2(\mathbb{X}) = L^2(\mathbb{R}_{\xi_1}^n) \otimes \left[\otimes \prod_{j=2}^{N-1} L^2(\mathbb{R}_{\xi_j}^n) \right],$$

donde

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^{N-1} ((2v_j)^{-1} \hat{p}_j^2 + q_j^R \bar{E} \cdot \xi_j), \quad (7.16)$$

Esto muestra que si la carga relativa del par (1,2), $(q_2m_1 - m_2q_1)/(m_1 + m_2)$, es diferente de cero la distancia relativa del par (1,2) se acelera por el campo eléctrico como en el caso de los dos cuerpos. Sin embargo, si la carga relativa es cero ambas partículas se aceleran en la misma manera por el campo eléctrico y la distancia relativa no es acelerada, y entonces con respecto al par (1,2) la dispersión relativa es como en el caso donde el campo eléctrico constante externo es cero.

Esto muestra que para cualquier par dado de partículas el problema de dispersión inversa tiene que ser formulado como en caso de dos cuerpos sin campo eléctrico si la carga relativa del par es cero y, como en el caso de dos cuerpos con un campo eléctrico, si la carga relativa del par es diferente de cero. Para este propósito introducimos a continuación una clase apropiada de potenciales.

Denotamos por \mathcal{V}_0 la clase de pares de potenciales consideradas en Enss y Weder [21]. Por $C_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ designamos el espacio de todas las funciones continuamente diferenciables que tienden a cero en el infinito.

Definición 7.3 Denotamos por \mathcal{V}_0 la clase de potenciales de valor real, $V^0(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$V^0(\bar{x}) = V^{0,s}(\bar{x}) + V^{0,l}(\bar{x}), \quad (7.17)$$

con $V^{0,s}(\bar{x}) \in \mathcal{V}_{0,s}$ y $V^{0,l}(\bar{x}) \in \mathcal{V}_{0,l}$, y donde $\mathcal{V}_{0,s}$ es la clase de potenciales de valor real, $V^{0,s}(\bar{x})$ que son Kato-Chico y

$$\int_0^\infty dR \|V^{0,s}(\bar{x})(-\Delta + I)^{-1}F(|\bar{x}| \geq R)\| < \infty. \quad (7.18)$$

Además, $\mathcal{V}_{0,l}$ es la clase de potenciales reales, $V^{0,l}$, tal que $V^{0,l} \in C_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$|\nabla V^{0,l}(\bar{x})| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-\beta}, \quad \beta > 3/2. \quad (7.19)$$

$V^{0,s}$ y $V^{0,l}$ son, respectivamente, las partes de rango corto y rango largo del potencial. Esta separación no es única y sin pérdida de generalidad podemos hacerlo de tal manera que además, (ver Hörmander [30]),

$$V^{0,l}(\bar{x}) \in C^4(\mathbb{R}^n), \quad |D^\alpha V^{0,l}| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-1-|\alpha|(\epsilon+1/2)},$$

para $1 \leq |\alpha| \leq 4$, $0 < \epsilon < 1/2$, y donde D^α denota las derivadas con la notación multi índice.

Designamos por $q_{jk} = (q_k m_j - q_j m_k)/(m_j + m_k)$ la carga relativa del par (j,k) y denotamos por $\sum_{j < k}^0$ y $\sum_{j < k}^E$, respectivamente, la suma sobre todos los índices, $j < k$, $j, k = 1, \dots, N$, con $q_{jk} = 0$, y $q_{jk} \neq 0$.

Suponemos que el potencial del sistema de N cuerpos es un operador de multiplicación que es una suma de pares de potenciales,

$$V = \sum_{j < k}^0 V_{jk}^0(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + \sum_{j < k}^E V_{jk}^E(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j), \quad (7.20)$$

con $V_{jk}^0 \in \mathcal{V}_0$, y $V_{jk}^E = V_{jk}^{E,s} + V_{jk}^{E,l} \in \mathcal{V}_E$ (ver la definición 7.1). Al usar una descomposición de H_0 como en (7.15) para cada par (j,k) vemos que para cada par de potenciales V_{jk}^0 o V_{jk}^E están relativamente acotados con respecto a H_0 con cota relativa cero. Observe que para un par dado el correspondiente potencial del par pertenece a \mathcal{V}_0 si la carga relativa del par es cero y pertenece a \mathcal{V}_E si la carga relativa es diferente de cero. Entonces V es relativamente acotado con respecto a H_0 con cota relativa cero y el Hamiltoniano de interacción,

$$H = H_0 + V, \quad (7.21)$$

es autoadjunto en $D(H) = D(H_0)$, ([5] teorema de Rellich-Kato (8.5) y (8.7)).

La evolución de Dollard modificada está dada por

$$U^D(t) = e^{-itH_0} \tilde{U}(t), \quad (7.22)$$

donde

$$\tilde{U}(t) = \exp \left[-i \sum_{j < k}^0 \int_0^t ds V_{jk}^{0,l}(\bar{p}_{jk}/\mu_{jk}) \right], \quad (7.23)$$

donde \bar{p}_{jk}/μ_{jk} es la velocidad relativa del par (j,k), $\bar{p}_{jk}/\mu_{jk} = (\tilde{p}_k/\bar{m}_k) - (\tilde{p}_j/\bar{m}_j)$, con $\mu_{jk} = m_j m_k / (m_j + m_k)$ la masa reducida (observe que en la notación de 7.14 $\mu_{12} = v_1$).

Los operadores de onda de Dollard modificados para el canal libre se definen como

$$\Omega_{\pm}^D = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} U^D(t). \quad (7.24)$$

La existencia de los límites fuertes es conocida y, de hecho, se sigue de nuestras estimaciones en la sección 7.4. Son isometrías parciales y satisfacen $(\Omega_{\pm}^D)^*(\Omega_{\pm}^D) = I$. En este punto es conveniente partir en potencial en su parte de rango largo del par de potenciales entre partículas con carga relativa cero y el resto del potencial. Para este proposito definimos

$$\mathcal{V}_{SR} = \left\{ V^S = \sum_{j < k}^0 V_{jk}^{0,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + \sum_{j < k}^E V_{jk}^E(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \mid V_{jk}^{0,s} \in \mathcal{V}_{0,s}, V_{jk}^E \in \mathcal{V}_E \right\}, \quad (7.25)$$

$$\mathcal{V}_{LR} = \left\{ V^L = \sum_{j < k}^0 V_{jk}^{0,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \mid V_{jk}^{0,l} \in \mathcal{V}_{0,l} \right\}. \quad (7.26)$$

Entonces

$$V = V^S + V^L, \quad H = H_0 + V = H_0 + V^S + V^L. \quad (7.27)$$

El operador de dispersión de Dollard modificado entre los canales libres se define como

$$S^D = (\Omega_{+}^D)^* \Omega_{-}^D = S^D(V^L; V^S). \quad (7.28)$$

Note que $S^D - I = (\Omega_{+}^D - \Omega_{-}^D)^* \Omega_{-}^D$. Llamamos a la función $S^D(V^L; \cdot) : \mathcal{V}_{SR} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ la transformación de dispersión.

Teorema 7.4 *Sea $V^L \in \mathcal{V}_{LR}$ un potencial de rango largo dado. Entonces la transformación de dispersión $S^D(V^L; \cdot) : \mathcal{V}_{SR} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es inyectiva. Más aún, cualquiera de los operadores de dispersión de Dollard S^D determina unívocamente el potencial V .*

Como en el caso de dos cuerpos demostramos este teorema extendiendo el método simple dependiente del tiempo de Enss y Weder [21] al caso con un campo eléctrico externo constante. También damos una fórmula de reconstrucción con un término de error para el par de potenciales.

En el caso particular cuando todas las cargas relativas son diferentes de cero, el teorema 7.4 implica que el potencial total V está unívocamente definido por el operador de dispersión canónico. Por ejemplo, en el caso del hidrógeno (un protón y un electrón) nuestros teoremas prueban que el potencial de Coulomb está unívocamente determinado por el operador de dispersión. Como se mencionó anteriormente también damos un método para la reconstrucción del potencial.

El problema inverso de reconstruir unívocamente el potencial a partir del operador de dispersión fue primeramente propuesto por Heisenberg [24, 25, 26].

Hay una extensa literatura sobre el problema directo de dispersión en un campo eléctrico constante. En los artículos ya mencionados de Avron y Herbst [9]; Veselić and Weidmann [48] se demuestra la existencia de los operadores de onda en el caso de los dos cuerpos. En Herbst [28] y Simon [47] se demuestra la completitud en el caso de los dos cuerpos. En Adachi y Tamura [1] y en Herbst, Möller y Skibsted [29] se demostró la completitud en el caso de N cuerpos. En estos dos últimos artículos se dan más referencias a contribuciones a la dispersión de dos cuerpos y multipartícula. Véase también Hunziker [31] para mayores referencias sobre la literatura inicial.

7.3. El caso de dos cuerpos

La siguiente fórmula para la evolución libre en el tiempo fue demostrada por Avron y Herbst [9] y en Veselić y Weidmann [48]. Los segundos autores consideraron un caso más general,

$$e^{-itH_0} = e^{iqEx_1t} e^{-it^3q^2E^2/6m} e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-it\bar{p}^2/2m}. \quad (7.29)$$

También haremos uso frecuente de las siguientes relaciones que se obtienen bajo traslación en el espacio de configuración o de momentos generados por \bar{p} o \bar{x} , respectivamente,

$$e^{i\bar{p}\cdot\bar{v}t} f(\bar{x}) e^{-i\bar{p}\cdot\bar{v}t} = f(\bar{x} + \bar{v}t), \quad (7.30)$$

$$e^{-im\bar{v}\cdot\bar{x}} f(\bar{p}) e^{im\bar{v}\cdot\bar{x}} = f(\bar{p} + m\bar{v}), \quad (7.31)$$

para cualquier función medible y acotada f . En particular, aplicando (7.31),

$$e^{-im\bar{v}\cdot\bar{x}} e^{-it\bar{p}^2/2m} e^{im\bar{v}\cdot\bar{x}} = e^{-i\bar{p}\cdot\bar{v}t} e^{-it\bar{p}^2/2m} e^{-imv^2t/2}, \quad (7.32)$$

donde $v = |\bar{v}|$. Denotamos por $B_{m\eta}$ la bola abierta en \mathbb{R}^n con centro en cero y radio $m\eta$. Observe que la condición (7.3) implica que

$$\|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p})F(|\bar{x}| \geq R)\|$$

es una función integrable de \mathbb{R} para todas las $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ver el corolario 2.4 en Enss [17]). Se sigue que el potencial en $\mathcal{V}_{E,s}$ satisface la condición (7.33) siguiente con $\rho = 0$. Por supuesto, valores más grandes de ρ significan un decaimiento más rápido. Denotamos por $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ el vector unitario a lo largo de la dirección x_1 , $\hat{v} = \bar{v}/|\bar{v}|$, y $\hat{E} = \bar{E}/|\bar{E}|$.

Lema 7.5 *Suponga que $V^{E,s} \in \mathcal{V}_{E,s}$ y que para alguna $0 \leq \rho \leq 1$ y todas las $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$(1 + R)^\rho \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p})F(|x| \geq R)\| \in L^1((0, \infty), dR). \quad (7.33)$$

Entonces para cualquier función $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ y cualquier $0 \leq \delta < 1$ hay una constante $c > 0$ y una función h con $(1+\tau)^\rho h(\tau) \in L^1(0, \infty)$ tal que para cada $v \in \mathbb{R}^n$ que satisface $v \geq c$, y $|\hat{v} \cdot \hat{E}| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} & \|V^{E,s}(\bar{x})e^{-itH_0}f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \\ &= \|V^{E,s}(\bar{x} + \bar{v}t + \bar{e}_1qEt^2/2m)e^{-it\bar{p}^2/2m}f(\bar{p})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \leq h(|vt|). \end{aligned} \quad (7.34)$$

DEMOSTRACIÓN. Seguimos la demostración del lema 2.2 de Enss y Weder [21]. La igualdad de las normas es una consecuencia inmediata de (7.29)-(7.32). Se aplican tres traslaciones, la primera por $-m\bar{v}$, la segunda por $\bar{v}t$ y la última por $\bar{e}_1qEt/2m$. En el transcurso desaparecen factores de la forma, $e^{i\cdot}$ donde el argumento de la exponencial es puramente imaginario. Tome $g \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ tal que satisfaga que $g \equiv 1$ en el soporte de f . Entonces por (7.29) y la desigualdad del triángulo

$$\|V^{E,s}(\bar{x})e^{-itH_0}f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (7.35)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p} - m\bar{v})e^{-ip_1qEt^2/2m}\| \\ &\quad \times \|F(|\bar{x} - \bar{v}t| \geq \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m}f(\bar{p} - m\bar{v}) \\ &\quad \times F(|\bar{x}| < \lambda|vt|/8)(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\|, \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p} - m\bar{v})e^{-ip_1qEt^2/2m}\| \\ &\quad \times \|F(|\bar{x} - \bar{v}t| \geq \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m}f(\bar{p} - m\bar{v}) \\ &\quad \times F(|\bar{x}| \geq \lambda|vt|/8)(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\|, \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p} - m\bar{v})e^{-ip_1qEt^2/2m}F(|\bar{x} - \bar{v}t| < \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m} \\ &\quad \times f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\|, \end{aligned} \quad (7.38)$$

con λ cualquier constante positiva. Por (7.31) y la proposición 2.10 de Enss [17]

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p})\| \|F(|\bar{x} - \bar{v}t| \geq \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m}f(\bar{p} - m\bar{v}) \\ &\quad \times F(|\bar{x}| < \lambda|vt|/8)\| \\ &\leq C(1 + \lambda|vt|/4)^{-3}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

siempre que $v \geq 4\eta/\lambda$. Más aún, usando de nuevo (7.31),

$$I_2 \leq C \|F(|\bar{x}| \geq \lambda|vt|/8)(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \leq C(1 + |vt|/4)^{-3}. \quad (7.40)$$

Como $|\hat{v} \cdot \hat{E}| \leq \delta < 1$, existen constantes $0 < \delta_1, \delta_2 \leq 1$ tal que $|\bar{v}t + \bar{e}_1 q E t^2 / 2m| \geq \sqrt{\delta_1} |vt|^2 + \delta_2 (qE/2m)^2 t^4$. Entonces por (7.30) y (7.31)

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p})F(|\bar{x} - \bar{v}t - \bar{e}_1 q E t^2 m| < \lambda|vt|5/8)\| \\ &\leq C \|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p})F(|\bar{x}| \geq |vt|(\sqrt{\delta_1} - 5\lambda/8))\| \\ &:= h_1(|vt|), \end{aligned} \quad (7.41)$$

donde, por (7.33), $(1 + \tau)^\rho h_1(\tau) \in L^1((0, \infty))$, siempre que $\lambda < 8\sqrt{\delta_1}/5$. Las ecuaciones (7.35), (7.39), (7.40) y (7.41) demuestran el lema. \blacksquare

Lema 7.6 *Suponga que $V^{E,l}$ satisfice*

$$|V^{E,l}(\bar{x})| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-\gamma}, \quad 1 \geq \gamma > \frac{1}{2}. \quad (7.42)$$

Entonces para toda función $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ y toda $0 \leq \delta < 1$ existen constantes $0 < c, M$ tales que para cada $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $v \geq c$ y $|\hat{v} \cdot \hat{E}| \leq \delta$:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dt \|V^{E,l}(\bar{x})e^{-itH_0} f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \|V^{E,l}(\bar{x} + \bar{v}t + \bar{e}_1 q E t^2 / 2m)e^{-it\bar{p}^2/2m} f(\bar{p})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \\ &\leq M \begin{cases} v^{-(2\gamma-1)}, & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ |\ln v|v^{-1}, & \gamma = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.43)$$

DEMOSTRACIÓN. Como en el lema 7.5, tomando cualquier $\lambda > 0$,

$$\|V^{E,l}(\bar{x})e^{-itH_0} f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

con

$$\begin{aligned} I_1 &= \|V^{E,l}(\bar{x})\| \|F(|\bar{x} - \bar{v}t| \geq \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m} f(\bar{p} - m\bar{v}) \\ &\quad \times F(|\bar{x}| < \lambda|vt|/8)(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\|, \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \|V^{E,l}(\bar{x})\| \|F(|\bar{x} - \bar{v}t| \geq \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m} f(\bar{p} - m\bar{v}) \\ &\quad \times F(|\bar{x}| \geq \lambda|vt|/8)(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\|, \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \|V^{E,l}(\bar{x})e^{-ip_1 q E t^2 / 2m} F(|\bar{x} - \bar{v}t| < \lambda|vt|5/8)e^{-it\bar{p}^2/2m} \\ &\quad \times f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\|. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Observe que ahora la función $g(\bar{p} - m\bar{v})$ no se requiere porque $V^{E,l}$ está acotada. Demostramos como en el lema 7.5 que si $v > 4\eta/\lambda$,

$$I_1 + I_2 \leq C(1 + |vt|)^{-3}. \quad (7.47)$$

Además, usando (7.30) y (7.42), ya que

$$|\bar{v}t + \bar{e}_1 qEt^2/2m| \geq \sqrt{\delta_1|vt|^2 + \delta_2(qE/2m)^2t^4} \text{ con } 0 < \delta_1, \delta_2 \leq 1, \text{ y tomando } \lambda < 8\sqrt{\delta_1}/5,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt I_3 &= C \int_{-\infty}^{+\infty} dt \|V^{E,l}(\bar{x} + \bar{v}t + \bar{e}_1 qEt^2/2m) F(|\bar{x} - \bar{v}t| < \lambda|vt|5/8)\| \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} dt (1 + \sqrt{\delta_1|vt|^2 + \delta_2(qE/2m)^2t^4} - \lambda|vt|5/8)^{-\gamma} \\ &\leq C \int_0^{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E} dt (1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt)^{-\gamma} \\ &\quad + C \int_{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E}^{+\infty} dt t^{-2\gamma} \\ &\leq C \begin{cases} v^{-(2\gamma-1)}, & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ |\ln v|v^{-1}, & \gamma = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.48)$$

La conclusión del lema se sigue de (7.47) y (7.48). \blacksquare

Sea Φ cualquier configuración asintótica en el espacio de Hilbert de estados \mathcal{H} representada por las funciones de onda $\phi(\bar{x})$ y $\hat{\phi}(\bar{p})$, respectivamente, en el espacio de configuración y el espacio de momentos, donde $\phi \in L^2(\mathbb{R}_x^n)$ y $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}_p^n)$.

Note que si $V = V^{E,s} + V^{E,l}$, con $V^{E,s}$ como en el lema 7.5 con $\rho = 0$ y $V^{E,l}$ como en el lema 7.6, los límites fuertes existen en (7.7) para cualquier configuración asintótica en un conjunto denso, y luego, por continuidad, los operadores de onda Ω_{\pm} existen y son isometrías parciales con núcleo trivial. Para el caso de Ω_+ puede verse que el límite fuerte existe fijándose en la estimación (7.3) de Enss [18] y notando que el factor $1 + |\bar{x}|^2$ fue acotado por 1 en las demostraciones de los lemas 7.6 y (7.7) de Weder [49] (este artículo). El conjunto denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ donde existen los operadores de onda es el de todas las funciones infinitamente diferenciables soportadas en bolas de radio $m\eta$.

Sea $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ una configuración asintótica con su momento soportado en $B_{m\eta}$, i.e., $\hat{\phi}_0 \in C_0^\infty(B_{m\eta})$. Denotamos por $\Phi_{\bar{v}}$ la configuración impulsada

$$\Phi_{\bar{v}} = e^{im\bar{v}\cdot\bar{x}}\Phi_0 \Leftrightarrow \hat{\phi}_{\bar{v}}(\bar{p}) = \hat{\phi}_0(\bar{p} - m\bar{v}). \quad (7.49)$$

Observe que $\Phi_{\bar{v}}$ tiene soporte compacto contenido en la bola abierta centrada en \bar{v} y radio η .

Ahora estudiamos el límite de alta velocidad de Ω_{\pm} sobre cualquier dirección fija $\hat{v} = \bar{v}/|\bar{v}|$, con $|\hat{v} \cdot \hat{E}| < 1$, y $v = |\bar{v}| \rightarrow \infty$.

Corolario 7.7 *Suponga que $V^E = V^{E,s} + V^{E,l}$ con $V^{E,s} \in \mathcal{V}_{E,s}$ y*

$$|V^{E,l}| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-\gamma}, \quad 1 < \gamma \leq 1. \quad (7.50)$$

Entonces para cualquier Φ_0 y cualquier $0 \leq \delta < 1$ existe una constante C tal que para cualquier \bar{v} con $|\hat{v} \cdot \hat{E}| \leq \delta$ y para toda $t \in \mathbb{R}$,

$$\|(\Omega_{\pm} - I)e^{-itH_0}\Phi_{\bar{v}}\| \leq C \begin{cases} v^{-(2\gamma-1)}, & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ |\ln v|v^{-1}, & \gamma = 1. \end{cases} \quad (7.51)$$

DEMOSTRACIÓN. Damos la demostración para Ω_+ . El caso de Ω_- se sigue similarmente. Por la fórmula de Duhamel

$$(\Omega_+ - I)e^{-itH_0}\Phi_{\bar{v}} = i \int_0^\infty dt' e^{it'H} V^E e^{-it'H_0} e^{-itH_0}\Phi_{\bar{v}}. \quad (7.52)$$

Note que $\|(1 + \bar{x}^2)^{3/2}\Phi_{\bar{v}}\| \leq C$, uniformemente en \bar{v} . Tome $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ tal que $f(\bar{p} - m\bar{v})\Phi_{\bar{v}} = \Phi_{\bar{v}}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|(\Omega_{\pm} - I)e^{-itH_0}\Phi_{\bar{v}}\| &\leq C \left[\int_{-\infty}^\infty dt'' \|V^{E,s}(\bar{x})e^{-it''H_0} f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^\infty dt'' \|V^{E,l}(\bar{x})e^{-it''H_0} f(\bar{p} - m\bar{v})(1 + \bar{x}^2)^{-3/2}\| \right] \\ &\leq \frac{C}{v} \int_0^\infty h(\tau) d\tau + C \begin{cases} v^{-(2\gamma-1)}, & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ |\ln v|v^{-1}, & \gamma = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.53)$$

■

Teorema 7.8 *Fórmula de Reconstrucción. Suponga que $V^E \in \mathcal{V}_E$ y que $V^{E,s}(\bar{x})$ satisfacen (7.33) para toda $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \leq \rho \leq 4\gamma - 3, \rho < \alpha \leq \gamma \leq 1$, donde γ, α son respectivamente como en (7.4) y (7.5). Entonces para cualquier $0 \leq \delta < 1$ y todas $\Phi_{\bar{v}}$ como en (7.49) con $|\hat{v} \cdot \hat{E}| \leq \delta$,*

$$\begin{aligned} v(i[S, p_j]\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})p_j\Phi_0, \Psi_0) \right. \\ &\quad \left. - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_0, p_j\Psi_0) \right. \\ &\quad \left. + i \left(\left(\frac{\partial V^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_0, \Psi_0 \right) \right] \\ &\quad + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.54)$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la fórmula de Duhamel y las relaciones de entrelazado $e^{-itH}\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}e^{-itH_0}$ que

$$i(S - I)\Phi_{\bar{v}} = i(\Omega_+ - \Omega_-)^*\Omega_-\Phi_{\bar{v}} = \int_{-\infty}^\infty dt e^{itH_0} V^E \Omega_- e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}}. \quad (7.55)$$

Además, como

$$[S, p_j] = [S - I, p_j - m_j], \quad (7.56)$$

tenemos que

$$v(i[S, p_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau l_{\bar{v}}(\tau) + R(\bar{v}), \quad (7.57)$$

donde $\tau = vt$ y

$$l_{\bar{v}}(\tau) = [(V^E(\bar{x})e^{-iH_0\tau/v}(p_j\Phi)_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v}\Psi_{\bar{v}}) - (V^E(\bar{x})e^{-iH_0t/v}\Phi_{\bar{v}}, e^{-iH_0t/v}(p_j\Psi)_{\bar{v}})], \quad (7.58)$$

es el término dominante, y

$$R(\bar{v}) = v \int_{-\infty}^{+\infty} dt [((\Omega_- - I)e^{-itH_0}(p_j\Phi)_{\bar{v}}, V^E e^{-itH_0}\Psi_{\bar{v}}) - ((\Omega_- - I)e^{-itH_0}\Phi_{\bar{v}}, V^E e^{-itH_0}(p_j\Psi)_{\bar{v}})], \quad (7.59)$$

es el residuo. Pero los lemas 7.5, 7.6, y el corolario 7.7 implican que $R(\bar{v})$ satisface

$$|R(\bar{v})| \leq C \begin{cases} v^{-(4\gamma-3)}, & \frac{3}{4} < \gamma < 1, \\ (\ln v)^2 v^{-1}, & \gamma = 1. \end{cases} \quad (7.60)$$

Además,

$$l_{\bar{v}}(\tau) = (V^{E,s}(\bar{x})e^{-iH_0\tau/v}(p_j\Phi)_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v}\Psi_{\bar{v}}) - (V^{E,s}(\bar{x})e^{-iH_0\tau/v}\Phi_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v}(p_j\Psi)_{\bar{v}}) + i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x})e^{-iH_0\tau/v}\Phi_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v}\Psi_{\bar{v}} \right), \quad (7.61)$$

donde hemos usado que, por (7.29) y (7.31), $e^{-iH_0\tau/v}p_j e^{iH_0\tau/v} = p_j - \delta_{j,1}qE\tau/v$, y entonces

$$l_{\bar{v}}(\tau) = (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1qE\tau^2/2mv^2)e^{-i\tau\hat{p}^2/2mv}p_j\Phi_0, e^{-i\tau\hat{p}^2/2mv}\Psi_0) - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1qE\tau^2/2mv^2)e^{-i\tau\hat{p}^2/2mv}\Phi_0, e^{-i\tau\hat{p}^2/2mv}p_j\Psi_0) + i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1qE\tau^2/2mv^2)e^{-i\tau\hat{p}^2/2mv}\Phi_0, e^{-i\tau\hat{p}^2/2mv}\Psi_0 \right), \quad (7.62)$$

donde se usó (7.29)-(7.32). Además, para cada τ fija,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} l_{\bar{v}}(\tau) = (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)p_j\Phi_0, \Psi_0) - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{x}\tau)\Phi_0, p_j\Psi_0) + i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x} + \hat{x}\tau)\Phi_0, \Psi_0 \right), \quad (7.63)$$

y, por el lema 7.5,

$$|l_{\bar{v}}(\tau)| \leq Ch(|\tau|) \quad (7.64)$$

con h integrable, (7.54) se sigue en el caso $\rho = 0$ por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Para demostrar (7.54) para $0 \leq \rho \leq 4\gamma - 3$ estimamos la tasa de convergencia de la integral del primer término en el lado derecho de (7.62) a su valor límite. Tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau\bar{p}^2/2mv} \bar{p}_j \Phi_0, e^{-i\tau\bar{p}^2/2mv} \Psi_0) \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau) \bar{p}_j \Phi_0, \Psi_0) \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) + h_{\bar{v}}^{(2)}(\tau)), \end{aligned} \quad (7.65)$$

donde

$$\begin{aligned} h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) &= (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau) e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} p_j \Phi_0, \\ & (e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I) \Psi_0), \end{aligned} \quad (7.66)$$

$$h_{\bar{v}}^{(2)}(\tau) = ((e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I) p_j \Phi_0, V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau) \Psi_0), \quad (7.67)$$

Note que como Ψ_0 tiene soporte compacto en el momento $\|(e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I) \Psi_0\| \leq C|\tau/v|(1 + |\tau/v|)$, y como también $\|(e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I) \Psi_0\| \leq C$, se sigue que

$$\|(e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I) \Psi_0\| \leq C \left(\left| \frac{\tau}{v} \right| \right)^\rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (7.68)$$

Entonces, por el lema 7.5, $v^\rho |h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau)| \leq C(1 + |\tau|)^\rho h(|\tau|) \in L^1(0, \infty)$, y se sigue del teorema de la convergencia dominada que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 1, \\ O(v^{-1}), & \rho = 1, \end{cases} \quad (7.69)$$

donde hemos usado que cuando $\rho < 1$, $\lim_{v \rightarrow \infty} v^\rho h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) = 0$, para cada τ fija. Además,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (1 + |\tau|)^\rho \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v}) \Psi_0\| \\ \leq & C \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (1 + |\tau|)^\rho [\|V^{E,s}(\bar{x} + \hat{x}\tau) g(\bar{p}) F(|\bar{x} + \hat{x}\tau| \geq |\tau|/2)\| \\ & + \|V^{E,s}(\bar{x} + \hat{x}\tau) g(\bar{p})\| \left\| F(|\bar{x}| \geq \frac{|\tau|}{2}) \right\|] < \infty, \end{aligned} \quad (7.70)$$

por (7.33) y el decaimiento rápido en el espacio de configuración de Ψ_0 .

Entonces, usando (7.68), demostramos con en el caso de (7.69) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h_{\bar{v}}^{(2)}(\tau) = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 1, \\ O(v^{-1}), & \rho = 1, \end{cases} \quad (7.71)$$

(7.54) se sigue, estimando las contribuciones de los otros términos en el lado derecho de (7.62) de una forma similar, y por (7.60). Note que en (7.54) no permitimos que $\rho = 4\gamma - 3 = 1$ cuando $\gamma = 1$ porque necesitamos que $\rho < \alpha \leq \gamma$. ■

DEMOSTRACIÓN. (Del teorema 7.2). Sean $V_1^E(\bar{x}) = V_1^{E,s}(\bar{x}) + V_1^{E,l}(\bar{x})$ y $V_2^E(\bar{x}) = V_2^{E,s}(\bar{x}) + V_2^{E,l}(\bar{x})$ dos potenciales en \mathcal{V}_E que tienen el mismo operador de dispersión, y denotemos

$$\begin{cases} Q^{E,s}(\bar{x}) &= V_2^{E,s}(\bar{x}) - V_1^{E,s}(\bar{x}), \\ Q^{E,l}(\bar{x}) &= V_2^{E,l}(\bar{x}) - V_1^{E,l}(\bar{x}), \\ Q^E(\bar{x}) &= V_2^E(\bar{x}) - V_1^E(\bar{x}) = Q^{E,s}(\bar{x}) + Q^{E,l}(\bar{x}). \end{cases} \quad (7.72)$$

Identificamos cualquier $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ con el vector $y_1 \bar{e}_j + y_2 \bar{e}_k \in \mathbb{R}^n$ para alguna $1 \leq k \leq n, k \neq j$, donde por $\bar{e}_j, 1 \leq j \leq n$, denotamos el vector unitario a lo largo de la dirección x_j . Para cualesquiera estados Φ, Ψ con $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ denotamos por

$$\Phi(\bar{y}) = e^{-i\bar{p} \cdot \bar{y}} \Phi, \quad \Psi(\bar{y}) = e^{-i\bar{p} \cdot \bar{y}} \Psi \quad (7.73)$$

los estados trasladados por \bar{y} y por

$$\begin{aligned} f(\bar{y}) &= (Q^{E,s} p_j \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) - (Q^{E,s} \Phi(\bar{y}), p_j \Psi(\bar{y})) \\ &\quad + i \left(\left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}) \right). \end{aligned} \quad (7.74)$$

$f(\bar{y})$ es una función continua y acotada, y por (7.3), (7.5), y el decaimiento rápido en el espacio de configuración de Φ , $f(\bar{y}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Para cualquier \bar{v} en el plano \bar{y} con $|\hat{v} \cdot \hat{E}| < 1$ la transformada de Radon de $f(\bar{y})$ está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\hat{v}; \bar{y}) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{y} + \tau \hat{v}) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(Q^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) p_j \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) \right. \\ &\quad \left. - (Q^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi(\bar{y}), p_j \Psi(\bar{y})) \right. \\ &\quad \left. + i \left(\left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}) \right) \right] \equiv 0, \end{aligned} \quad (7.75)$$

por el teorema 7.8.

Entonces (ver Helgason [27] capítulo I, teorema 2.17)

$$f(\bar{y}) \equiv 0.$$

Pero como

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(Q^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = -if(\bar{y}), \quad (7.76)$$

se sigue que $(Q^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}))$ es independiente de y_1 . Pero por (7.3) y (7.4), $\lim_{|\bar{y}| \rightarrow \infty} (Q^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = 0$. Entonces $Q^E(\bar{x}) \equiv 0$ como un operador y como una función casi en todo punto.

Note que la demostración anterior da un método un método constructivo para la reconstrucción del potencial. Primero, al invertir la transformada de Radon reconstruimos $f(\bar{y})$ a partir de la límite de alta velocidad del operador de dispersión y, entonces, el potencial a partir de la integral de $f(\bar{y})$,

$$(V^E\Phi, \Psi) = i \int_0^\infty f(y_1, 0) dy_1. \quad (7.77)$$

Remarcamos que se sigue de (7.3), (7.4), y (7.5) que $f(\bar{y})$ es integrable a lo largo de cualquier línea y que el $\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} (V^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = 0$. ■

7.4. El caso de N cuerpos

Para cualquier par de potenciales construimos como en Enss y Weder [21] estados apropiados donde todas las partículas tienen una alta velocidad relativa a cada una de las otras para reconstruir el correspondiente par del potencial. Para este propósito primero introducimos alguna notación cinemática. Usamos una numeración de las partículas tales que el par en cuestión consiste de las partículas 1 y 2. Como es usual, tomamos como una variable n dimensional la distancia relativa \bar{x} y momento \bar{p} del par escogido (1,2)

$$\bar{x} := \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1, \quad \bar{p} = -i\nabla_{\bar{x}} = \mu_{12}[-i\nabla_{\tilde{x}_2}/m_2) - (-i\nabla_{\tilde{x}_1}/m_1)], \quad (7.78)$$

donde μ_{12} es la masa reducida del par (1,2), $\mu_{12} = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. Usamos también la posición \bar{x}_j y el momento \bar{p}_j de la j-ésima partícula, $j = 1, \dots, N$, relativa al centro de masa del par (1,2),

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &:= \tilde{x}_j - (m_1\tilde{x}_1 + m_2\tilde{x}_2)/(m_1 + m_2), \quad j = 1, \dots, N, \\ \bar{p}_j &:= \mu_j(\tilde{p}_j/m_j - (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)/(m_1 + m_2)), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

donde μ_j es la masa reducida de la j-ésima partícula con respecto al centro de masa del par (1,2),

$$\mu_j = m_j(m_1 + m_2)/(m_j + m_1 + m_2), \quad j = 1, \dots, N,$$

y $\tilde{p}_j = -i\nabla_{\tilde{x}_j}$ es el momento relativo a algún origen (véase (7.9)). Observe que \bar{x} es la primera coordenada de Jacobi ξ_1 .

Sea $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ una configuración asintótica con el producto de las funciones de onda en el espacio de momentos de la forma,

$$\Phi_0 \sim \hat{\phi}_{12}(\bar{p})\hat{\phi}_3(\bar{p}_3, \dots, \bar{p}_N), \quad (7.79)$$

donde $\hat{\phi}_{12} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ varía mientras que $\hat{\phi}_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n(N-2)})$ es una función normalizada fija con soporte en $\{(\bar{p}_3, \dots, \bar{p}_N) : |\bar{p}_j| < \mu_j\}$; i.e., las partículas 3 a N tienen una velocidad menor que una relativa al par (1,2). Tomamos una η tal que $\hat{\phi}_{12} \in C_0^\infty(B_{\mu_{12}\eta})$.

El estado de alta velocidad se define como (ver Enss y Weder [21])

$$\Phi_{\bar{v}} \sim \hat{\phi}_{12}(\bar{p} - \mu_{12}\bar{v})\hat{\phi}_3(\bar{p}_3 - \mu_3\bar{v}_3, \dots, \bar{p}_N - \mu_N\bar{v}_N), \quad (7.80)$$

donde $\bar{v} = v\hat{v}$, $|\hat{v}| = 1$, $v_j = v^2d_j$, con $\bar{d}_j \neq 0$, para $j = 3, \dots, N$ y donde suponemos que $\bar{d}_j - \bar{d}_k \neq 0$ para $j, k = 3, \dots, N$. Además, definimos $\bar{v}_1 = -\bar{v}\mu_{12}/m_1$, $\bar{v}_2 = -\bar{v}\mu_{12}/m_2$.

Denotamos las velocidades relativas por

$$\bar{v}_{jk} = \bar{v}_k - \bar{v}_j, \quad v_{jk} = |\bar{v}_{jk}|, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Entonces con $d_j = |\bar{d}_j|$,

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1,j} &= v^2(\bar{d}_j + \mu_{12}\hat{v}/m_1v) \neq 0 & \text{si } v > \mu_{12}/m_1d_j \\ \bar{v}_{2,j} &= v^2(\bar{d}_j + \mu_{12}\hat{v}/m_2v) \neq 0 & \text{si } v > \mu_{12}/m_2d_j \\ \bar{v}_{j,k} &= v^2(\bar{d}_k - \bar{d}_j) \neq 0 & j, k = 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Denotamos $\hat{v}_{jk} = \bar{v}_{jk}/|\bar{v}_{jk}|$ y supongamos que $|\hat{v}_{jk} \cdot \hat{E}| \leq \delta$ para algún $0 \leq \delta < 1$ y todos los pares (j,k) con $q_{j,k} \neq 0$. Se sigue que en nuestros estados de alta velocidad la velocidad promedio relativa del par (1,2) es v mientras todas las demás partículas viajan con una velocidad minimal proporcional a v^2 relativa a cada otra así como también con respecto a las partículas 1 y 2. Se sigue a partir de la definición que $\phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n(N-1)})$ y que

$$\Phi_{\bar{v}} = e^{i\mu_{12}\bar{v} \cdot \bar{x}} \prod_{j=3}^N e^{i\mu_j\bar{v}_j \cdot \bar{x}_j} \Phi_0. \quad (7.81)$$

Además, tenemos una buena localización inicial uniformemente en \bar{v} ,

$$\|(1 + |\tilde{v}_k - \tilde{v}_j|^2)^2 \Psi_{\bar{v}}\| \leq C, \quad j, k = 1, \dots, N, \quad (7.82)$$

y existen funciones $f_{jk} \in C_0^\infty(B_{\mu_{jk}\eta_{jk}})$ tal que

$$\Phi_{\bar{v}} = f_{jk}(\bar{p}_{jk} - \mu_{jk}\bar{v}_{jk})\Phi_{\bar{v}}, \quad (7.83)$$

donde \bar{p}_{jk} es el momento relativo de partículas j y k,

$$\bar{p}_{jk} = -i\nabla_{(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)}, \quad (7.84)$$

en donde en la derivada las posiciones de las demás partículas, así como también del centro de masa, se mantienen fijas. μ_{jk} es la masa reducida del par (j,k). Además,

$\eta_{12} = \eta, \eta_{1j} = 2(1 + \eta\mu_{12}/m_1), \eta_{2j} = 2(1 + \eta\mu_{12}/m_2), j = 3, \dots, N$, y $\eta_{jk} = 4$, para $j, k = 3, \dots, N$. Como en Enss y Weder [21], (7.82) y (7.83) nos permiten reducir las demostraciones en el caso de N cuerpos a aquellas para los dos cuerpos.

Usando las coordenadas de Jacobi como en (7.12) - (7.16) pero basados en el par (j,k) demostramos, como en Enss y Weder [21], que si $V_{jk}^{0,s}$ satisface (7.33) en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $q_{jk} = 0$,

$$\begin{aligned} & \left\| V_{jk}^{0,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)U^D(t) \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'}\bar{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\| \\ & \leq h_{jk}(|v_{jk}t|), \end{aligned} \quad (7.85)$$

donde $(1 + \tau)^\rho h_{jk}(\tau) \in L^1((0, \infty))$ y que

$$\begin{aligned} & \left\| (V_{jk}^{0,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) - V_{jk}^{0,l}(t\bar{p}_{jk}/\mu_{jk}))U^D(t) \right. \\ & \quad \times \left. \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'}\bar{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\| \\ & \leq C(1 + |v_{jk}t|)^{-1-\epsilon}. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Más aún, si $q_{jk} \neq 0$ usando de nuevo las coordenadas de Jacobi basándose en el par (j,k) y tomando $g_{jk} \in C_0^\infty(B_{\mu_{jk}\eta_{jk}})$ con $g_{jk}f_{jk} = f_{jk}$, demostramos como en el lema 7.5 que

$$\begin{aligned} & \left\| V_{jk}^{E,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)U^D(t) \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'}\bar{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\| \\ & \leq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (7.87)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= C \left\| F(|\tilde{x}_k - \tilde{x}_j - \tilde{v}_{jk}| \geq \lambda|v_{jk}t|/5/8) e^{-it\bar{p}_{jk}^2/2\mu_{jk}} g_{jk}(\bar{p}_{jk} - \mu_{jk}\bar{v}_{jk}) \right. \\ & \quad \times F(|\tilde{x}_k - \tilde{x}_j| < \lambda|v_{jk}t|/8) \tilde{U}(t) \prod_{j' < k'} f(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'}\bar{v}_{j'k'}) \\ & \quad \left. \times (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\|, \end{aligned} \quad (7.88)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= C \left\| F(|\tilde{x}_k - \tilde{x}_j| \geq \lambda|v_{jk}t|/8) \tilde{U}(t) \prod_{j' < k'} f(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'}\bar{v}_{j'k'}) \right. \\ & \quad \left. \times (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\|, \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$I_3 = C \left\| V_{jk}^{E,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)g_{jk}(\bar{p}_{jk})F(|\tilde{x}_k - \tilde{x}_j| \geq (\sqrt{\delta_1} - 5\lambda/8)|v_{jk}t|/3/8) \right\|, \quad (7.90)$$

para $\lambda < 8\sqrt{\delta_1}/5$. Como en el lema 2.1 tenemos que

$$I_1 \leq C(1 + |v_{jk}t|/4)^{-3}. \quad (7.91)$$

Además, demostramos como en la sección IV de Enss y Weder [21] que para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} & \left\| F(|\tilde{x}_k - \tilde{x}_j| \geq \lambda|v_{jk}t|) \tilde{U}(t) \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \bar{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\|, \\ & \leq C(1 + |v_{jk}t|)^{-2-\epsilon}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Se sigue que

$$I_2 \leq C(1 + |v_{jk}t|)^{-2-\epsilon}. \quad (7.93)$$

Entonces se sigue de (7.90), (7.91), y (7.93) que

$$\begin{aligned} & \left\| V_{jk}^{E,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) U^D(t) \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \bar{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\|, \\ & \leq h_{jk}(|v_{jk}t|), \end{aligned} \quad (7.94)$$

donde $(1 + \tau)^\rho h_{jk}(\tau) \in L^1((0, \infty))$ y ahora suponemos que $V_{jk}^{E,s}$ satisface (7.33) en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Más aún, supongamos que $q_{jk} \neq 0$ y que

$$|V_{jk}^{E,l}(\bar{x})| \leq C(1 + |\bar{x}|)^{-\gamma}, \quad \frac{1}{2} < \gamma \leq 1, \quad (7.95)$$

demostramos, similarmente (ver el lema 7.6), que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| V_{jk}^{E,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) U^D(t) \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\bar{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \bar{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{x}_k - \tilde{x}_j|^2)^{-2} \right\| \\ & \leq C \begin{cases} v_{jk}^{-(2\gamma-1)}, & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ |\ln v_{jk}| v_{jk}^{-1}, & \gamma = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.96)$$

En consecuencia, se sigue de la fórmula de Duhamel, (7.85), (7.86), (7.94), (7.96), y notando que $v_{12} = v$ y $v_{jk} = O(v^2)$ para $j < k = 3, \dots, N$ que (ver la demostración del corolario 2.3 y del corolario 3.4 de Enss y Weder [21]) los operadores de onda Ω_{\pm}^D existen y que para $\Phi_{\bar{v}}$ como en (7.80)

$$\| (e^{-itH} \Omega_{\pm}^D - U^D(t)) \Phi_{\bar{v}} \| = \begin{cases} O(v^{-(2\gamma-1)}), & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ O(|\ln v| v^{-1}), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (7.97)$$

Teorema 7.9 *Fórmula de reconstrucción.* Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$ y $V^L \in \mathcal{V}_{LR}$. Entonces para toda $\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}$ como en (7.80) con una $\hat{\phi}_3$ normalizada fija, y con $|\hat{v}_{jk} \cdot \hat{E}| \leq \delta$ para algún $0 \leq \delta < 1$ y todos los pares (j, k) con $q_{j,k} \neq 0$:

(a) Si $q_{12} = 0$ y $V_{12}^{0,s}$ satisface (7.33),

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} v(i(S^D - I)\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau ((V_{12}^{0,s}(\bar{x} + \tau\hat{v}) + V_{12}^{0,l}(\bar{x} + \tau\hat{v})) \\ & \quad - V_{12}^{0,l}(\tau\hat{v})) \Phi_{12}, \Psi_{12} \end{aligned} \quad (7.98)$$

y, más aún,

$$\begin{aligned}
& v \left[(i(S^D - I)\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) - \int_{-\infty}^{+\infty} dt ((V_{12}^{0,l}(\bar{x}) - V_{12}^{0,l}(t\bar{p}/\mu_{12}))U^D(t) \right. \\
& \quad \left. \times \Phi_{\bar{v}}, U^D(t)\Psi_{\bar{v}}) \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (V_{12}^{0,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_{12}, \Psi_{12}) \\
& \quad + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1, \\ O((\ln v)^2 v^{-1}), & \rho = 4\gamma - 3 = 1. \end{cases} \tag{7.99}
\end{aligned}$$

Adicionalmente, si $0 \leq \rho < \beta - 1, \beta \leq 2$, con β como en (7.19)

$$\begin{aligned}
v(i[S^D, p_j]\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[(V_{12}^{0,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})p_j\Phi_{12}, \Psi_{12}) \right. \\
& \quad \left. - (V_{12}^{0,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_{12}, p_j\Psi_{12}) \right. \\
& \quad \left. + i \left(\left(\frac{\partial V_{12}^{0,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_{12}, \Psi_{12} \right) \right] \\
& \quad + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1, \end{cases} \tag{7.100}
\end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq n$.

- (b) Si $q_{12} \neq 0$, $V_{12}^{E,s}$ satisface (7.33) con $0 \leq \rho \leq 4\gamma - 3, \rho < \alpha \leq \gamma \leq 1$, donde γ, α son, respectivamente, como en (7.4) y (7.5);

$$\begin{aligned}
v(i[S^D, p_j]\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[(V_{12}^{E,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})p_j\Phi_{12}, \Psi_{12}) \right. \\
& \quad \left. - (V_{12}^{E,s}(\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_{12}, p_j\Psi_{12}) \right. \\
& \quad \left. + i \left(\left(\frac{\partial V_{12}^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau\hat{v})\Phi_{12}, \Psi_{12} \right) \right] \\
& \quad + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases} \tag{7.101}
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. . La demostración de (7.98), (7.99), y (7.100) se sigue como en la demostración del teorema 4.1 de Enss y Weder [21] usando (7.85), (7.86), (7.94), (7.96), y (7.97). En las siguientes líneas demostramos (7.101). Se sigue a partir de la fórmula de Duhamel como en el caso de dos cuerpos que

$$v(i[S^D, p_j]\Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau l_{\bar{v}}(\tau) + R(\bar{v}), \tag{7.102}$$

donde

$$l_{\bar{v}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau [(V_{12}^E(\bar{x})U^D(\tau/v)(p_j\Phi)_{\bar{v}}, U^D(\tau/v)\Psi_{\bar{v}}) - (V_{12}^E(\bar{x})U^D(\tau/v)\Phi_{\bar{v}}, U^D(\tau/v)(p_j\Psi)_{\bar{v}})] \quad (7.103)$$

es el termino dominante y el residuo es

$$\begin{aligned} R(\bar{v}) = & v \sum_{j < k=3}^0 \int_{+\infty}^{-\infty} dt \{ ([V_{jk}^{0,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + V_{jk}^{0,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \\ & - V_{jk}^{0,l}(t\tilde{p}_{jk}/\mu_{jk})]U^D(t)(p_j\Phi)_{\bar{v}}, U^D(t)\Psi_{\bar{v}}) \\ & - ([V_{jk}^{0,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + V_{jk}^{0,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) - V_{jk}^{0,l}(t\tilde{p}_{jk}/\mu_{jk})] \\ & \times U^D(t)\Phi_{\bar{v}}, U^D(t)(p_j\Psi)_{\bar{v}}) \} \\ & + v \sum_{j < k=3}^E \int_{+\infty}^{-\infty} dt \{ (V_{jk}^E(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)U^D(t)(p_j\Phi)_{\bar{v}}, U^D(t)\Psi_{\bar{v}}) \\ & - (V_{jk}^E(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)U^D(t)\Phi_{\bar{v}}, U^D(t)(p_j\Psi)_{\bar{v}}) \} \\ & v \int_{+\infty}^{-\infty} dt \left((e^{-itH}\Omega_-^D - U^D(t))(p_j\Phi)_{\bar{v}}, \right. \\ & \times \left[\sum_{j < k}^0 (V_{jk}^{0,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + V_{jk}^{0,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \right. \\ & \left. \left. - V_{jk}^{0,l}(t\tilde{p}_{jk}/\mu_{jk})) + \sum_{j < k}^E V_{jk}^E(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \right] U^D(t)\Psi_{\bar{v}} \right) \\ & - v \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left((e^{-itH}\Omega_-^D - U^D(t))\Phi_{\bar{v}}, \right. \\ & \times \left[\sum_{j < k}^0 (V_{jk}^{0,s}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + V_{jk}^{0,l}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \right. \\ & \left. \left. - V_{jk}^{0,l}(t\tilde{p}_{jk}/\mu_{jk})) + \sum_{j < k}^E V_{jk}^E(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \right] U^D(t)(p_j\Psi)_{\bar{v}} \right). \end{aligned} \quad (7.104)$$

Se sigue a partir de (7.85), (7.86), (7.94), (7.96), (7.97), y recordando que $v_{12} = v$, y $v_{jk} = O(v^2)$, $j < k = 3, \dots, N$, que

$$R(\bar{v}) = \begin{cases} O(v^{-(4\gamma-3)}), & 3/4 < \gamma < 1, \\ O((\ln v)^2/v), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (7.105)$$

En este punto hemos completado la demostración de (7.101) como en el teorema 7.8 (ver también la demostración del teorema 3.5 en Enss y Weder [21]).

DEMOSTRACIÓN. Demostración del teorema 7.4. Demostramos como en Enss y Weder [21] que si V^L es conocido de antemano, cada uno de los $V_{jk}^{0,s}$ está unívocamente reconstruido a partir de S^D usando la ecuación (7.98) y las fórmulas correspondientes para V_{jk}^0 con $(jk) \neq (12)$. También demostramos como en Enss Weder [21] que cada uno de los V_{jk}^0 está unívocamente reconstruido a partir de cualquiera de los operadores de Dollard S^D usando la fórmula (7.100) y las correspondientes ecuaciones para $(jk) \neq (12)$. Además, como en la demostración del teorema 7.2 demostramos que cada uno de los V_{jk}^E está unívocamente reconstruido a partir de cualquiera de los operadores de Dollard S^D , usando la ecuación (7.101) y las correspondientes fórmulas para $(jk) \neq (12)$; esto demuestra el teorema. ■

Capítulo 8

Apéndice

En este capítulo se presentarán cálculos y demostraciones más detalladas de afirmaciones del capítulo 7.

Cálculo 8.1 *Deducir la ecuación (7.13).*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte de (7.13) se encuentra en Reed y Simon [44], pag. 78. Para la segunda parte:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{N-1} q_j^R \bar{E} \cdot \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{q_{j+1} M_j - m_{j+1} Q_j}{M_{j+1}} \right) \bar{E} \cdot \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{q_{j+1} M_j + q_{j+1} m_{j+1} - q_{j+1} m_{j+1} - m_{j+1} Q_j}{M_{j+1}} \right) \bar{E} \cdot \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{q_{j+1} M_{j+1} - m_{j+1} Q_{j+1}}{M_{j+1}} \right) \bar{E} \cdot \xi_j \\ &= \sum_{j=2}^N \left(q_j - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \bar{E} \cdot \xi_{j-1} \\ &= \sum_{j=2}^N \left(q_j - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \bar{E} \cdot \left[\tilde{x}_j - \left(\frac{1}{M_{j-1}} \right) \sum_{k=1}^{j-1} m_k \tilde{x}_k \right] \\ &= \sum_{j=2}^N \left(q_j - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j - \sum_{j=2}^N \sum_{k=1}^{j-1} \left(q_j - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \left(\frac{1}{M_{j-1}} \right) m_k \bar{E} \cdot \tilde{x}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=2}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} + \frac{m_j Q}{M} - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \\
&\quad - \sum_{j=2}^N \sum_{k=1}^{j-1} \left(q_j - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \left(\frac{1}{M_{j-1}} \right) m_k \bar{E} \cdot \tilde{x}_k \\
&= \sum_{j=2}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \sum_{j=2}^N m_j \left(\frac{Q}{M} - \frac{Q_j}{M_j} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q_j}{M_j} \right) \left(\frac{1}{M_{j-1}} \right) m_k \bar{E} \cdot \tilde{x}_k \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{Q}{M} - \frac{Q_j}{M_j} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \sum_{k=j+1}^N \left(q_k - \frac{m_k Q_k}{M_k} \right) \left(\frac{1}{M_{k-1}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \\
&\quad \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \left[\frac{Q}{M} - \frac{Q_j}{M_j} - \sum_{k=j+1}^N \left(q_k - \frac{m_k Q_k}{M_k} \right) \left(\frac{1}{M_{k-1}} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \\
&\quad \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \left[\frac{Q}{M} - \frac{Q_j}{M_j} - \sum_{k=j+1}^N \left(Q_k - Q_{k-1} - \frac{m_k Q_k}{M_k} \right) \frac{1}{M_{k-1}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \\
&\quad \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \left[\frac{Q}{M} - \frac{Q_j}{M_j} - \sum_{k=j+1}^N \left(1 - \frac{m_k}{M_k} \right) \frac{Q_k}{M_{k-1}} + \sum_{k=j+1}^N \frac{Q_{k-1}}{M_{k-1}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \left[\frac{Q}{M} - \sum_{k=j+1}^N \frac{M_{k-1}}{M_k} \frac{Q_k}{M_{k-1}} + \sum_{k=j}^N \frac{Q_{k-1}}{M_{k-1}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \left[\frac{Q}{M} - \sum_{k=j+1}^N \frac{Q_k}{M_k} + \sum_{k=j+2}^N \frac{Q_{k-1}}{M_{k-1}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j + \sum_{j=1}^{N-1} m_j \bar{E} \cdot \tilde{x}_j \left[- \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{Q_k}{M_k} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{Q_k}{M_k} \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left(q_j - \frac{m_j Q}{M} \right) \bar{E} \cdot \tilde{x}_j
\end{aligned}$$

■

Cálculo 8.2 *Deducción de la estimación (7.39).*

DEMOSTRACIÓN.

La proposición 2.10 de Enss [17] se reformula en Enss y Weder [21] proposición 2.1 siendo más claro para el lector que el exponente del lado derecho de la estimación puede ser cualquier número entero. Siguiendo a Enss y Weder [21], sean $\mathcal{M} = \{|\bar{x}| \leq |vt|/8\}$, $\mathcal{M}' = \{|\bar{x} - vt| \geq |vt|5/8\}$ y $r \geq |vt|/4$. Observe que $\|V^{E,s}(\bar{x})g(\bar{p})\|$ no depende de \bar{v} . Todo lo anterior lleva a (7.39).

■

Cálculo 8.3 *Algunos detalles de la demostración de 7.6.*

DEMOSTRACIÓN.

Veamos qué es lo que pasa con la estimación de la integral de $I_1 + I_2$:

$$\int_0^\infty dt(I_1 + I_2) \leq \frac{-C}{v}(1 + |vt|)^{-2} \Big|_0^\infty = Cv^{-1}. \quad (8.1)$$

Por el teorema del binomio

$$-2|vt||qEt^2/2m| \geq -|vt|^2 - |qEt^2/2m|^2, \quad (8.2)$$

Aplicando (8.2)

$$\begin{aligned}
|\bar{v}t + \bar{e}_1 qEt^2/2m| &= \sqrt{|vt|^2 + 2 \left(\bar{v}t \cdot \frac{\hat{e}_1 q\bar{E}t^2}{2m} \right) + \left| \frac{qEt^2}{2m} \right|^2} \\
&\geq \sqrt{|vt|^2 - 2|vt| \left| \frac{qEt^2}{2m} \right| |(\hat{v} \cdot \hat{e}_1)| + \left| \frac{qEt^2}{2m} \right|^2} \\
&\geq \sqrt{\left[|vt|^2 + \left| \frac{qEt^2}{2m} \right|^2 \right] [1 - (\hat{v} \cdot \hat{e}_1)]}.
\end{aligned}$$

De aquí se observa que podemos poner $\delta_1 = \delta_2 = 1 - (\hat{v} \cdot \hat{e}_1) > 0$, gracias a que $|\hat{v} \cdot \hat{E}| \leq \delta < 1$.

Algunos otros comentarios sobre la deducción de la estimación (7.48). La integral respecto al tiempo de $-\infty$ a $+\infty$ se convierte en una integral de 0 a $+\infty$ ya que el integrando es una función par respecto al tiempo, el factor 2 es absorbido por la constante C. Observe la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta_1 v^2 t^2} &\leq \sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} \\ 1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt &\leq 1 + \sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} - \lambda |vt| 5/8 \\ \left[1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt\right]^{-\gamma} &\geq \left[1 + \sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} - \lambda |vt| 5/8\right]^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Cuando $t > 2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v &< \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{|q|E}{2mv} t} \\ \delta_1 |vt|^2 &< \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2mv}\right)^2 t^4 \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\sqrt{\delta_1 |vt|^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2mv}\right)^2 t^4} < \sqrt{2\delta_2 \left(\frac{|q|E}{2mv}\right)^2 t^4}. \quad (8.5)$$

Gracias a las estimaciones anteriores tenemos que,

$$\begin{aligned}
& 1 + \sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} - \frac{5}{8} \lambda |vt| \\
& > 1 + \sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} - \sqrt{\delta_1} |vt| \\
& > \sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} - \sqrt{\delta_1} |vt| \\
& = \frac{\delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4}{\sqrt{\delta_1 v^2 t^2 + \delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4} + \sqrt{\delta_1} |vt|} \\
& \geq \frac{\delta_2 \left(\frac{|q|E}{2m}\right)^2 t^4}{(\sqrt{2} + 1) \sqrt{\delta_2} \left(\frac{|q|E}{2mv}\right) t^2} \\
& = \frac{\sqrt{\delta_2}}{(\sqrt{2} + 1)} \left(\frac{|q|E}{2m}\right) t^2. \tag{8.6}
\end{aligned}$$

Veamos el calculo de la segunda integral del penúltimo paso de (7.48), observando que $1/2 < \gamma \leq 1$:

$$\begin{aligned}
& \int_{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E}^{+\infty} dt t^{-2\gamma} \\
& = \frac{t^{-(2\gamma-1)}}{-(2\gamma-1)} \Big|_{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E}^{+\infty} \\
& = C v^{-(2\gamma-1)}. \tag{8.7}
\end{aligned}$$

Supongamos que $1/2 < \gamma < 1$ y estimemos la primera integral:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E} dt \left[1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt\right]^{-\gamma} \\
& = \frac{1}{(-\gamma + 1)(\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)v} \left[1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt\right]^{-\gamma+1} \Big|_0^{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E} \\
& = \frac{1}{(-\gamma + 1)(\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)v} \left[\left(1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8) \frac{2mv^2\sqrt{\delta_1/\delta_2}}{|q|E}\right)^{-\gamma+1} - 1 \right].
\end{aligned}$$

Podemos escoger v suficientemente grande, i.e., $v > c$ para alguna constante $c > 0$.

$$\leq \frac{2}{(-\gamma + 1)(\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)} \left[(\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8) \frac{2m\sqrt{\delta_1/\delta_2}}{|q|E} \right]^{-\gamma+1} v^{-(2\gamma-1)}.$$

Tomemos el caso especial $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E} dt \left[1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)v} \ln \left| 1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)vt \right|_0^{2mv\sqrt{\delta_1/\delta_2}/|q|E} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8)v} \ln \left| 1 + (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8) \frac{2mv^2\sqrt{\delta_1/\delta_2}}{|q|E} \right|. \end{aligned} \tag{8.8}$$

De nuevo tomando v grande:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8} v^{-1} \left[\ln \left| (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8) \frac{4mv^2\sqrt{\delta_1/\delta_2}}{|q|E} \right| \right]. \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8} v^{-1} \left[\ln \left| (\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8) \frac{4m\sqrt{\delta_1/\delta_2}}{|q|E} \right| + 2 \ln |v| \right]. \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\delta_1} - \lambda 5/8} v^{-1} \ln |v|. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Para obtener (7.48) y también para concluir la demostración es importante tener la siguiente estimación:

$$c_1 v^{-1} \ln v + c_2 v^{-1} \leq 2 \max\{c_1, c_2\} v^{-1} \ln v. \tag{8.10}$$

■

Cálculo 8.4 Comentario sobre la demostración del corolario 7.7.

DEMOSTRACIÓN.

La fórmula de Duhamel es una versión generalizada del teorema fundamental del cálculo. En (7.52), al aplicar la fórmula de Leibnitz para la derivada de un producto aparece una diferencia entre el Hamiltoniano perturbado y el Hamiltoniano libre, razón por la cual aparece en factor V^E . A continuación se reescribe (7.52)

$$(\Omega_+ - I)e^{-itH_0}\Phi_{\bar{v}} = i \int_0^\infty dt' e^{it'H} V^E e^{-it'H_0} e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}}.$$

■

Cálculo 8.5 *Identidad (7.56).*

DEMOSTRACIÓN.

p_j es una componente cualquiera del operador de momento \bar{p} , p_j en el espacio de configuración es igual a $-i\partial x_j$ y en el espacio de momentos es el operador de multiplicación por p_j . v_j es la componente de la velocidad promedio \bar{v} de la partícula, por lo tanto es sólo un escalar. v es el valor esperado del módulo del operador de velocidad, este último en el espacio de momentos es igual a \bar{p}/m .

$$\begin{aligned}
 [S - I, p_j - mv_j] &= (S - I)(p_j - mv_j) - (p_j - mv_j)(S - I) \\
 &= Sp_j - Smv_j - p_j + mv_j - p_jS + mv_jS + p_j - mv_j \\
 &= Sp_j - p_jS \\
 &= [S, p_j]
 \end{aligned}$$

■

Cálculo 8.6 *Deducción de (7.57).*

DEMOSTRACIÓN.

Primero desarrollemos los siguiente:

$$\begin{aligned}
 i[S, p_j] &= i[S - I, p_j - mv_j] \\
 &= i(S - I)(p_j - mv_j) - (p_j - mv_j)i(S - I) \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E \Omega_- e^{-itH_0} \right) (p_j - mv_j) \\
 &\quad - (p_j - mv_j) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E \Omega_- e^{-itH_0} \right) \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0} \right) (p_j - mv_j) \\
 &\quad - (p_j - mv_j) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0} \right) \\
 &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0} \right) (p_j - mv_j) \\
 &\quad - (p_j - mv_j) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0} \right)
 \end{aligned}$$

También se utilizará la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
(p_j \Phi_0)_{\bar{v}} &= (p_j \hat{\phi})(\bar{p} = \bar{p} - m\bar{v}) \\
&= (p_j - mv_j) \hat{\phi}(\bar{p} - m\bar{v}) \\
&= (p_j - mv_j) \Phi_{\bar{v}}
\end{aligned}$$

Note que las componentes del operador de momento \bar{p} son autoadjuntas en el espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto.

$$\begin{aligned}
v(i[S, p_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) &= v(i[S - I, p_j - mv_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) \\
&= v\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0}\right) (p_j - mv_j) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&\quad - v\left((p_j - mv_j) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0}\right) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&\quad + v\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0}\right) (p_j - mv_j) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&\quad - v\left((p_j - mv_j) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0}\right) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&= v\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0}\right) (p_j - mv_j) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&\quad - v\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0}\right) \Phi_{\bar{v}}, (p_j - mv_j) \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&\quad + v\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0}\right) (p_j - mv_j) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&\quad - v\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0}\right) \Phi_{\bar{v}}, (p_j - mv_j) \Psi_{\bar{v}}\right) \\
&= \int dx \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} v dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0}\right) (p_j \Phi)_{\bar{v}} \overline{\Psi_{\bar{v}}}\right) \\
&\quad - \int dx \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} v dt e^{itH_0} V^E e^{-itH_0}\right) \Phi_{\bar{v}} \overline{(p_j \Psi)_{\bar{v}}}\right) \\
&\quad + v \int dx \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0}\right) (p_j \Phi)_{\bar{v}} \overline{\Psi_{\bar{v}}}\right) \\
&\quad - v \int dx \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0}\right) \Phi_{\bar{v}} \overline{(p_j \Psi)_{\bar{v}}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} v dt \int dx e^{itH_0} V^E e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}} \overline{\Psi_{\bar{v}}} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} v dt \int dx e^{itH_0} V^E e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}} \overline{(p_j \Psi)_{\bar{v}}} \\
&\quad + v \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}} \overline{\Psi_{\bar{v}}} \\
&\quad - v \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}} \overline{(p_j \Psi)_{\bar{v}}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v dt (e^{itH_0} V^E e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} v dt (e^{itH_0} V^E e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}}, (p_j \Psi)_{\bar{v}}) \\
&\quad + v \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) \\
&\quad - v \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{itH_0} V^E (\Omega_- - I) e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}}, (p_j \Psi)_{\bar{v}}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v dt (V^E e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}}) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} v dt (V^E e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}}, e^{-itH_0} (p_j \Psi)_{\bar{v}}) \\
&\quad + v \int_{-\infty}^{\infty} dt ((\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, V^E e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}}) \\
&\quad - v \int_{-\infty}^{\infty} dt ((\Omega_- - I) e^{-itH_0} \Phi_{\bar{v}}, V^E e^{-itH_0} (p_j \Psi)_{\bar{v}})
\end{aligned}$$

■

Cálculo 8.7 Estimación (7.60).

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $R_1(\bar{v})$ definido a continuación, la estimación para $(R - R_1)(\bar{v})$ es completamente análoga y se omite. Con ambas estimaciones se obtiene la correspondiente para $R(\bar{v})$

$$\begin{aligned}
R_1(\bar{v}) &= v \int_{-\infty}^{\infty} dt ((\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, V^E e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}}) \\
|R_1(\bar{v})| &\leq v \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| ((\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, V^E e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}}) \right| \\
&\leq v \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| (\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}} \right| \left| V^E e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq v \left\| (\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}} \right\| \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\| V^E e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}} \right\| \\
&\leq Cv \left(\begin{cases} v^{-(2\gamma-1)}, & \frac{3}{4} < \gamma < 1, \\ (\ln v) v^{-1}, & \gamma = 1 \end{cases} \right)^2 \\
&\leq C \begin{cases} v^{-(4\gamma-3)}, & \frac{3}{4} < \gamma < 1, \\ (\ln v)^2 v^{-1}, & \gamma = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Para estimar $\left\| (\Omega_- - I) e^{-itH_0} (p_j \Phi)_{\bar{v}} \right\|$ se usó (7.51). $\int_{-\infty}^{\infty} dt \left\| V^E e^{-itH_0} \Psi_{\bar{v}} \right\|$ se ha estimado usando el lema 7.5 para la parte de rango corto y el lema 7.6 para la de rango largo; ambas estimaciones se "suman" de la misma manera que la última línea de (7.53). ■

Cálculo 8.8 Deducción de (7.61).

DEMOSTRACIÓN. Primero demostremos la relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
&e^{-iH_0\tau/v} p_j e^{iH_0\tau/v} \\
&= e^{iqEx_1t} e^{-it^3q^2E^2/6m} e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-it\bar{p}^2/2m} p_j e^{it\bar{p}^2/2m} e^{ip_1qEt^2/2m} e^{it^3q^2E^2/6m} e^{-iqEx_1t} \\
&= e^{-it^3q^2E^2/6m} e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-it\bar{p}^2/2m} p_j e^{it\bar{p}^2/2m} e^{ip_1qEt^2/2m} e^{it^3q^2E^2/6m} \Big|_{p=p-(qE\tau/v, 0, \dots)} \\
&= p_j - \delta_{j,1} qE\tau/v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{iH_0\tau/v} V^{E,l}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} \\
&= e^{it\bar{p}^2/2m} e^{ip_1qEt^2/2m} e^{it^3q^2E^2/6m} e^{-iqEx_1t} V^{E,l}(\bar{x}) e^{iqEx_1t} e^{-it^3q^2E^2/6m} e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-it\bar{p}^2/2m} \\
&= e^{it\bar{p}^2/2m} e^{ip_1qEt^2/2m} V^{E,l}(\bar{x}) e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-it\bar{p}^2/2m} \\
&= e^{it\bar{p}^2/2m} V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 qE\tau^2/2mv^2) e^{-it\bar{p}^2/2m}
\end{aligned}$$

Consideremos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
&(V^{E,l}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} \Phi_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v} (p_j \Psi)_{\bar{v}}) \\
&= (\Phi_{\bar{v}}, e^{iH_0\tau/v} V^{E,l}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} (p_j - mv_j) \Psi_{\bar{v}}) \\
&= \left(\Phi_{\bar{v}}, e^{it\bar{p}^2/2m} V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 qE\tau^2/2mv^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} (p_j - mv_j) \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&= \left(\Phi_{\bar{v}}, e^{it\bar{p}^2/2m} V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 qE\tau^2/2mv^2) (p_j - mv_j) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&= \left((p_j - mv_j) V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 qE\tau^2/2mv^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left((-i\partial_j V^{E,l})(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad + \left(V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) p_j e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad \left(-m v_j V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&= -i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad + \left(V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} p_j \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad \left(-m v_j V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&= -i \left(e^{it\bar{p}^2/2m} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad + \left(e^{it\bar{p}^2/2m} V^{E,l}(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} (p_j - m v_j) \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&= -i \left(\left(e^{iH_0\tau/v} \frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad + \left(e^{iH_0\tau/v} V^{E,l}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&= -i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} \Phi_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v} \Psi_{\bar{v}} \right) \\
&\quad + \left(V^{E,l}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v} \Psi_{\bar{v}} \right)
\end{aligned}$$

■

Cálculo 8.9 *Deducción de (7.62).*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos sólo un sumando de (7.61), la deducción para los demás sumandos es completamente similar.

$$\begin{aligned}
l_{1\bar{v}}(\tau) &= (V^{E,s}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} (p_j \Phi)_{\bar{v}}, e^{-iH_0\tau/v} \Psi_{\bar{v}}) \\
&= (e^{iH_0\tau/v} V^{E,s}(\bar{x}) e^{-iH_0\tau/v} e^{im\bar{v}\cdot\bar{x}} p_j \Phi_0, e^{im\bar{v}\cdot\bar{x}} \Psi_0) \\
&= (e^{-im\bar{v}\cdot\bar{x}} e^{it\bar{p}^2/2m} V^{E,s}(\bar{x} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} e^{im\bar{v}\cdot\bar{x}} p_j \Phi_0, \Psi_0) \\
&= (e^{it\bar{p}^2/2m} V^{E,s}(\bar{x} + \tau\hat{v} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} p_j \Phi_0, \Psi_0) \\
&= (V^{E,s}(\bar{x} + \tau\hat{v} + \bar{e}_1 q E \tau^2 / 2m v^2) e^{-it\bar{p}^2/2m} p_j \Phi_0, e^{-it\bar{p}^2/2m} \Psi_0)
\end{aligned}$$

■

Cálculo 8.10 *Determinación de (7.54).*

DEMOSTRACIÓN. Caso $\rho = 0$.

Entonces tenemos que $h(\tau) \in L^1(0, \infty)$. Por demostrar que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v^0} \left| v(i[S, p_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) p_j \Phi_0, \Psi_0) - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, p_j \Psi_0) + i \left(\left(\frac{\partial V^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, \Psi_0 \right) \right] \right| = 0$$

Equivalentemente

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v(i[S, p_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) p_j \Phi_0, \Psi_0) - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, p_j \Psi_0) + i \left(\left(\frac{\partial V^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, \Psi_0 \right) \right]$$

Por (7.57).

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v(i[S, p_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\tau l_{\bar{v}}(\tau) + R(\bar{v}) \right)$$

Por (7.64) el integrando está dominado por una función integrable, en consecuencia se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. También se aplica (7.60). El resultado se obtiene utilizando (7.63).

Caso $0 < \rho \leq 4\gamma - 3$, exceptuando el caso $\rho = 4\gamma - 3 = 1$.

Por demostrar que

$$\begin{aligned} v(i[S, p_j] \Phi_{\bar{v}}, \Psi_{\bar{v}}) &- \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) p_j \Phi_0, \Psi_0) - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, p_j \Psi_0) + i \left(\left(\frac{\partial V^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, \Psi_0 \right) \right] \\ &= \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 < \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituyendo (7.57) y (7.62) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} p_j \Phi_0, e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Psi_0) \right. \\
& \quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Phi_0, e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} p_j \Psi_0) \\
& \quad \left. + i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Phi_0, e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Psi_0 \right) \right] \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) p_j \Phi_0, \Psi_0) \right. \\
& \quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, p_j \Psi_0) \\
& \quad \left. + i \left(\left(\frac{\partial V^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, \Psi_0 \right) \right] + R(\bar{v}) \\
& = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 < \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Para esto basta ver las cuatro siguientes tasas de convergencia.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[(V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} p_j \Phi_0, e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Psi_0) \right. \\
& \quad \left. - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) p_j \Phi_0, \Psi_0) \right] \\
& = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 < \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1, \end{cases} \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Phi_0, e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} p_j \Psi_0 \right] \\
& \quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, p_j \Psi_0) \\
& = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 < \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1, \end{cases} \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V^{E,l} \right) (\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1 q E \tau^2 / 2mv^2) e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Phi_0, e^{-i\tau \bar{p}^2 / 2mv} \Psi_0 \right. \\
& \quad \left. - \left(\left(\frac{\partial V^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \tau \hat{v}) \Phi_0, \Psi_0 \right) \right] \\
& = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 < \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$R(\bar{v}) = \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 < \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases}$$

Weder [49] ha considerado que, para las tres primeras estimaciones anteriores, basta verificar la tasa de convergencia para (7.65).

Verifiquemos que las funciones definidas por (7.66) y (7.67) satisfacen (7.65).

$$\begin{aligned} h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) + h_{\bar{v}}^{(2)}(\tau) &= (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{x}\tau)e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \\ &\quad (e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} - I)\Psi_0) \\ &\quad + ((e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} - I)p_j\Phi_0, V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)\Psi_0) \\ &= (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \\ &\quad e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv}\Psi_0) \\ &\quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \Psi_0), \\ &\quad + (e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)\Psi_0) \\ &\quad - (p_j\Phi_0, V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)\Psi_0) \\ &= (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1qE\tau^2/2mv^2))e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \\ &\quad e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv}\Psi_0) \\ &\quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \Psi_0), \\ &\quad + (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \Psi_0) \\ &\quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)p_j\Phi_0, \Psi_0) \\ &= (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau + e_1qE\tau^2/2mv^2))e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} p_j\Phi_0, \\ &\quad e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv}\Psi_0) \\ &\quad - (V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)p_j\Phi_0, \Psi_0) \end{aligned}$$

Ahora deduzcamos las dos desigualdades que se utilizan para obtener la estimación (7.68).

$$\begin{aligned}
& \|(e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} - I) \Psi_0\|^2 \\
& \Psi_0\|^2 = \|(e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-i\bar{p}^2t/2m} - I) \hat{\psi}_0(\bar{p})\|^2 \\
& = \int d\bar{p} |(e^{-ip_1qEt^2/2m} e^{-i\bar{p}^2t/2m} - 1) \hat{\psi}_0(\bar{p})|^2 \\
& = \int d\bar{p} \left| \int_0^t ds \frac{d}{ds} \left(e^{-ip_1qEs^2/2m} e^{-i\bar{p}^2s/2m} \right) \right|^2 |\hat{\psi}_0(\bar{p})|^2 \\
& \leq \int d\bar{p} \left[\int_0^t ds \left| \frac{d}{ds} \left(e^{-ip_1qEs^2/2m - i\bar{p}^2s/2m} \right) \right| \right]^2 |\hat{\psi}_0(\bar{p})|^2 \\
& \leq \int d\bar{p} \left[\int_0^t ds \left| (p_1qEs/m + \bar{p}^2/2m) \right| \right]^2 |\hat{\psi}_0(\bar{p})|^2 \\
& \leq \int d\bar{p} \left[|p_1qE|t^2/2m + \bar{p}^2t/2m \right]^2 |\hat{\psi}_0(\bar{p})|^2 \\
\text{Por la compacidad del soporte} & \leq C^2(|t| + t^2)^2 \int d\bar{p} |\hat{\psi}_0(\bar{p})|^2 \\
& \leq [C|\tau/v|(1 + |\tau/v|)]^2
\end{aligned}$$

La segunda estimación necesaria para la desigualdad (7.68) es:

$$\begin{aligned}
\|(e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} - I) \Psi_0\| & \leq \|e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} \Psi_0\| + \|\Psi_0\| \\
& = \|\Psi_0\| + \|\Psi_0\| \\
& = 2 \\
& \leq C
\end{aligned}$$

Para deducir la estimación (7.68) se toman dos casos. Recuérdate que $0 \leq \rho \leq 1$.

(a) $|t| < 1$: En este caso claramente tenemos que $|t|^\rho \geq |t|$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|(e^{-ip_1qE\tau^2/2mv^2} e^{-i\bar{p}^2\tau/2mv} - I) \Psi_0\| & \leq C|\tau/v|(1 + |\tau/v|) \\
& \leq C|\tau/v|(2) \\
& \leq 2C|\tau/v| \\
& \leq 2C|\tau/v|^\rho
\end{aligned}$$

(b) $|t| \geq 1$: Ahora se tiene que $|t|^\rho \geq 1$, así:

$$\begin{aligned} \|(e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I)\Psi_0\| &\leq C \\ &\leq C|\tau/v|^\rho \end{aligned}$$

Ahora estimemos el valor absoluto de $h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau)$:

$$\begin{aligned} |h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau)| &\leq \|V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} p_j \Phi_0\| \\ &\quad \times \|(e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I)\Psi_0\| \\ &\leq \|V^{E,s}(\bar{x} + \hat{v}\tau)e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} p_j\| \\ &\quad \times \|(e^{-ip_1 q E \tau^2 / 2mv^2} e^{-i\bar{p}^2 \tau / 2mv} - I)\| \\ &\leq C|\tau/v|^\rho h(|\tau|) \\ v^\rho |h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau)| &\leq C|\tau|^\rho h(|\tau|) \in L^1(0, \infty) \end{aligned}$$

Veamos el siguiente límite:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^\rho \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau v^\rho h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau)$$

Cuando $\rho < 1$, por el teorema de la convergencia dominada:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau v^\rho h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \lim_{v \rightarrow \infty} v^\rho h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cuando $\rho = 1$, y por el teorema de la convergencia dominada:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \left| v \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) \right| &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau v \left| h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) \right| \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \lim_{v \rightarrow \infty} v \left| h_{\bar{v}}^{(1)}(\tau) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C(1 + |\tau|)h(|\tau|) \\ &\leq M \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir (7.68).

Veamos la siguiente estimación inocente, supongamos que $|\bar{x} + \tau\hat{v}| \leq |\tau|/2$.

$$\begin{aligned}
|\bar{x}| &\geq ||\bar{x} + \tau\hat{v}| - |\tau\hat{v}|| \\
&\geq ||\tau| - |\bar{x} + \tau\hat{v}|| \\
&= |\tau| - |\bar{x} + \tau\hat{v}| \\
&\geq |\tau| - |\tau|/2 \\
&= |\tau|/2
\end{aligned}$$

Con la desigualdad anterior podemos demostrar la estimación siguiente que ayudará a demostrar (7.70).

$$\begin{aligned}
\|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})\Psi_0\| &= \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})\Psi_0\| \\
&= \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})(F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \geq |\tau|/2) \\
&\quad + F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \leq |\tau|/2))\Psi_0\| \\
&\leq \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \geq |\tau|/2)\Psi_0\| \\
&\quad + \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \leq |\tau|/2)\Psi_0\| \\
&= \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \geq |\tau|/2)\| \|\Psi_0\| \\
&\quad + \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})\| \|F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \leq |\tau|/2)\Psi_0\| \\
&\leq \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})F(|\bar{x} + \tau\hat{v}| \geq |\tau|/2)\| \\
&\quad + \|V^{E,s}(\bar{x} + \tau\bar{v})g(\bar{p})\| \|F(|\bar{x}| \geq |\tau|/2)\Psi_0\|
\end{aligned}$$

Veamos cómo el decaimiento rápido en el espacio de configuración de Ψ_0 hace que la segunda integral de (7.70) esté acotada. Observe el uso de la desigualdad de Hölder y que la integral de una función de decrecimiento rápido multiplicada por un polinomio es finita (gracias también a la desigualdad de Hölder).

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\tau(1 + |\tau|)^\rho \|F(|\bar{x}| \geq |\tau|/2)\Psi_0\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} d\tau(1 + |\tau|) \|F(|\bar{x}| \geq |\tau|/2)\Psi_0\| \\
&\leq 2 \int_0^{\infty} d\tau(1 + \tau)^{-1} \|(1 + \tau)^2 F(|\bar{x}| \geq \tau/2)\Psi_0\| \\
&\leq 2 \left(\int_0^{\infty} d\tau(1 + \tau)^{-2} \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} d\tau \|(1 + \tau)^2 F(|\bar{x}| \geq \tau/2)\Psi_0\|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\int_0^\infty d\tau \int_{|\bar{x}| \geq \tau/2} d\bar{x} (1 + \tau)^4 |\psi_0(\bar{x})|^2 \right)^{1/2} \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\bar{x} \int_{\tau \leq 2|\bar{x}|} d\tau (1 + \tau)^4 |\psi_0(\bar{x})|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\bar{x} \int_{\tau \leq 2|\bar{x}|} d\tau (1 + 2|\bar{x}|)^4 |\psi_0(\bar{x})|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\bar{x} |\bar{x}| (1 + 2|\bar{x}|)^4 |\psi_0(\bar{x})|^2 \right)^{1/2} \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Como último paso para demostrar (7.60) veamos qué pasa con $R(\bar{v})$. Sustituyendo (7.60):

$$\begin{aligned}
\lim_{v \rightarrow \infty} v^\rho |R(\bar{v})| &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} C \begin{cases} v^{-(4\gamma-3-\rho)}, & 3/4 < \gamma < 1 \Leftrightarrow 0 < 4\gamma - 3 < 1, \\ (\ln v)^2 v^{\rho-1}, & \gamma = 1 \Leftrightarrow 4\gamma - 3 = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim_{v \rightarrow \infty} v^{-(4\gamma-3-\rho)}, & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3 < 1, \\ \lim_{v \rightarrow \infty} (\ln v)^2 v^{\rho-1}, & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3 = 1, \\ \lim_{v \rightarrow \infty} v^{-(4\gamma-3-\rho)}, & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3 < 1, \\ 0, & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3 = 1, \\ C, & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases} \\
R(\bar{v}) &= \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 4\gamma - 3, \\ O(v^{-\rho}), & \rho = 4\gamma - 3 < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aquí se observa muy claramente porque no se permite el caso $\rho = 4\gamma - 3 = 1$. ■

Cálculo 8.11 *Demostración de las propiedades de la función definida en (7.74).*

DEMOSTRACIÓN.

$$\text{Sea, } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

Reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f(\bar{y}) &= f_1(\bar{y}) + f_2(\bar{y}) + f_3(\bar{y}) \\
f_1(\bar{y}) &:= (Q^{E,s} p_j \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) \\
f_2(\bar{y}) &:= -(Q^{E,s} \Phi(\bar{y}), p_j \Psi(\bar{y})) \\
f_3(\bar{y}) &:= +i \left(\left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}) \right).
\end{aligned}$$

Veamos que f_3 es acotada, continua y está en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Tomemos $g \in C_0^\infty$ tal que $g(\bar{p})$, tal que $g(\bar{p})\hat{\phi} = \hat{\phi}$ y $0 \leq g(\bar{p}) \leq 1$

$$f_3(\bar{y}) = +i \left(\left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) g(\bar{p}) \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}) \right) \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned}
|f_3(\bar{y})| &\leq \left\| \left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) g(\bar{p}) \Phi(\bar{y}) \right\| \|\Psi(\bar{y})\| \\
&\leq \|\Psi\| \left\| \frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right\| [\|g(\bar{p})F(|\bar{x}| \geq |y|/2)\| \|\Phi(y)\| \\
&\quad + \|F(|\bar{x}| < |y|/2)e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\Phi\|] \\
&\leq \left\| \frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right\| [\|g(\bar{p})F(|\bar{x}| \geq |y|/2)\| \\
&\quad + \|F(|\bar{x}| < |y|/2)e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\Phi\|] \quad (8.13)
\end{aligned}$$

Observe también que:

$$f_3(\bar{y}) \leq \left\| \frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right\|$$

y por (7.5), f_3 es acotada.

El primer término del lado derecho de la desigualdad (8.13) es integrable porque g en el espacio de configuración es de rápido decaimiento. El segundo término es integrable gracias al decaimiento rápido en el espacio de configuración de Φ . En ambos casos esto se puede demostrar de la misma manera en la que se hace en (8.11).

Para ver la continuidad de f_3 consideremos, para \bar{x} fija, el integrando de (8.12):

$$\bar{y} \mapsto \left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x}) g(\bar{p}) e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \phi(\bar{x}) e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}} \overline{\psi(\bar{x})}. \quad (8.14)$$

De aquí se ve que basta ver la continuidad de:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &\mapsto e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \phi(\bar{x}) \\
&= \mathcal{F}^{-1} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \mathcal{F} \phi(\bar{x}). \quad (8.15)
\end{aligned}$$

La continuidad en (8.15) se tiene ya que \mathcal{F} es continua y tiene inversa continua del espacio de Schwartz en sí mismo.

Una estimación muy parecida a la de (8.13) permite finalmente demostrar que se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada para establecer la continuidad de f_3 (ver Bartle [12] Corolario 5.8).

Ahora trabajemos con f_1 .

$$\begin{aligned}
f_1(\bar{y}) &= (Q^{E,s} p_j \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) & (8.16) \\
&= (Q^{E,s} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} p_j \Phi, \Psi(\bar{y})) \\
&= (p_j \Phi, e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}} Q^{E,s} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \Psi) \\
&\leq \|p_j \Phi\| \|e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}} Q^{E,s} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \Psi\| \\
&\leq C \|Q^{E,s}(\bar{x} + \bar{y}) \Psi\| \\
&= C \|e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}} Q^{E,s} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \Psi\| \\
&= C \|Q^{E,s} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}} \Psi\| \\
&\leq C [\|Q^{E,s}(\bar{x}) g(p) F(|\bar{x}| \geq |\bar{y}|) \Psi(\bar{y})\| \\
&\quad + \|Q^{E,s}(\bar{x}) g(p) F(|\bar{x}| < |\bar{y}|) \Psi(\bar{y})\|] \\
&\leq C [\|Q^{E,s}(\bar{x}) g(p) F(|\bar{x}| \geq |\bar{y}|)\| \\
&\quad + \|Q^{E,s}(\bar{x})\| \|F(|\bar{x}| < |\bar{y}|) \Psi(\bar{y})\|] & (8.17)
\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la desigualdad (8.17) es integrable por (7.33). El segundo término es integrable gracias al decaimiento rápido en el espacio de configuración de Φ . En ambos casos esto se puede demostrar de la misma manera en la que se hace en (8.11).

Trabajar con f_2 es análogo al caso de f_1 y no lo repetiremos. ■

Cálculo 8.12 *Justificación de (7.75).*

DEMOSTRACIÓN. Para cada potencial V_1 y V_2 se tiene una instancia de (7.54). Ambas instancias (ecuaciones) se restan y se pasa al límite cuando $v \rightarrow \infty$. ■

Cálculo 8.13 *Cálculo de la derivada parcial que aparece después de (7.75).*

DEMOSTRACIÓN. Descompongamos $(Q^E \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}))$, en sus partes de corto y largo rango.

(a) Cálculo para la parte correspondiente a la parte del potencial de rango largo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_1}(Q^{E,l}\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) &= \frac{\partial}{\partial y_1}((Q^{E,l}(\bar{x})e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\Phi, \Psi) \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1}(e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}}Q^{E,l}(\bar{x})e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\Phi, \Psi) \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1}(Q^{E,l}(\bar{x} + \bar{y})\Phi, \Psi) \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1} \int d\bar{x} Q^{E,l}(\bar{x} + \bar{y})\Phi\bar{\Psi} \tag{8.18}
\end{aligned}$$

Antes de seguir veamos qué sucede con la siguiente derivada:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}Q^{E,l}(\bar{x} + y_1\bar{e}_j + y_2\bar{e}_k). \tag{8.19}$$

Para calcular la derivada (8.19) tenemos que calcular primero la derivada de la siguiente transformación $(y_1, y_2) \mapsto \bar{x} + y_1\bar{e}_j + y_2\bar{e}_k$. Esta última derivada es una matriz que tiene 1 en sus entradas $(j, 1)$ y $(k, 2)$ y cero en todas las demás. Así pues, para obtener la derivada parcial (8.19) hay que calcular el gradiente de $Q^{E,l}$ respecto a \bar{x} y multiplicarlo por el vector e_j . En consecuencia:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}Q^{E,l}(\bar{x} + y_1\bar{e}_j + y_2\bar{e}_k) = \frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j}(\bar{x} + \bar{y}). \tag{8.20}$$

Para poder intercambiar la derivada con la integral en (8.18), se puede invocar un corolario del teorema de la convergencia dominada (Bartle [12] Corolario 5.9) donde es suficiente ver que: $\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j}(\bar{x} + \bar{y})$ está dominada por una función integrable, pero esto se sigue de (7.5).

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_1}(Q^{E,l}\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) &= \int d\bar{x} \frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j}(\bar{x} + \bar{y})\Phi\bar{\Psi} \\
&= \left(\left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) (\bar{x} + \bar{y})\Phi, \Psi \right) \\
&= \left(\left(\frac{\partial Q^{E,l}}{\partial x_j} \right) \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}) \right) \tag{8.21}
\end{aligned}$$

(b) Cálculo para la parte correspondiente a la parte del potencial de rango corto.

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(Q^{E,s}\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int d\bar{p} \mathcal{F}^{-1}Q^{E,s}\mathcal{F}\Phi(\bar{y})\overline{\Psi(\bar{y})} \tag{8.22}$$

Antes de seguir veamos qué sucede con la siguiente derivada (en este caso es mejor considerar el espacio de momentos):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1}(\Phi(\bar{y})\overline{\Psi(\bar{y})}) &= \frac{\partial\Phi(\bar{y})}{\partial y_1}\overline{\Psi(\bar{y})} + \Phi(\bar{y})\frac{\partial\overline{\Psi(\bar{y})}}{\partial y_1} \\ &= \frac{\partial(e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\Phi)}{\partial y_1}\overline{\Psi(\bar{y})} + \Phi(\bar{y})\frac{\partial(e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}}\overline{\Psi})}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Para calcular la derivada (8.23) tenemos que calcular primero la derivada parcial respecto a y_1 de la siguiente transformación $(y_1, y_2) \mapsto -i\bar{p} \cdot \bar{y}$. Esta última derivada es igual a $-ip_j$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1}(\Phi(\bar{y})\overline{\Psi(\bar{y})}) &= -i \left[e^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}p_j\Phi\overline{\Psi(\bar{y})} - \Phi(\bar{y})e^{i\bar{p}\cdot\bar{y}}p_j\overline{\Psi} \right] \\ &= -i \left[p_je^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\Phi\overline{\Psi(\bar{y})} - \Phi(\bar{y})p_je^{-i\bar{p}\cdot\bar{y}}\overline{\Psi} \right] \\ &= -i \left[p_j\Phi(\bar{y})\overline{\Psi(\bar{y})} - \Phi(\bar{y})p_j\overline{\Psi(\bar{y})} \right] \end{aligned} \quad (8.24)$$

Tenemos que justificar el intercambio de la derivada y la integral en (8.23). De (8.24) se observa que $\frac{\partial}{\partial y_1}(\Phi(\bar{y})\overline{\Psi(\bar{y})})$ es una función de decrecimiento rápido. $\Phi(y)$ y $\Psi(y)$ son funciones de decrecimiento rápido y al multiplicarlas por el "polinomio" p_j , siguen siendo de decrecimiento rápido (considerando el espacio de momentos). Ahora imitando lo realizado en (8.13) y gracias al decaimiento de los potenciales de rango corto se ve que $Q^{E,s}\frac{\partial}{\partial y_1}(\Phi(\bar{y})\overline{\Psi(\bar{y})})$ está dominado por una función integrable. ■

Cálculo 8.14 Conclusión de la demostración del teorema 7.2.

DEMOSTRACIÓN. Citando el libro de Helgason [27] se obtiene que $\frac{\partial}{\partial y_1}(Q^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = 0$, implicándose de manera inmediata que $(Q^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y}))$ no depende de y_1 . (7.3) y (7.4) implican que las partes tanto de corto y largo alcance del potencial tienden a cero cuando la posición tiende a infinito. Ahora seguiremos usando el hecho de que el producto interno puede intercambiarse con el límite.

$$\begin{aligned} \lim_{|y| \rightarrow \infty} (Q^E\Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) &= \lim_{|y| \rightarrow \infty} (Q^E(\bar{x} + \bar{y})\Phi, \Psi) \\ &= \left(\lim_{|y| \rightarrow \infty} Q^E(\bar{x} + \bar{y})\Phi, \Psi \right) \\ &= (0, \Psi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.25)$$

Por lo tanto, por (8.25), tenemos, para todo $y_1 \in \mathbb{R}^+$ que

$$\begin{aligned}
 (Q^E \Phi, \Psi) &= (Q^E \Phi(0, 0), \Psi(0, 0)) \\
 &= (Q^E \Phi(y_1, 0), \Psi(y_1, 0)) \\
 &= \lim_{|y_1| \rightarrow \infty} (Q^E \Phi(y_1, 0), \Psi(y_1, 0)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Como Ψ es un elemento arbitrario en un conjunto denso de $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $Q^E \Phi = 0$ para toda Φ en un conjunto denso de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $Q^E(\bar{x}) \equiv 0$ como operador. Por lo tanto, su norma como operador (y en consecuencia como función en $L^2(\mathbb{R}^n)$) es cero. Esto implica que $Q^E(\bar{x}) \equiv 0$ como una función en casi todo punto. ■

Cálculo 8.15 *Reconstrucción del potencial.*

DEMOSTRACIÓN.

Se toma la definición de $f(\bar{y})$ como en (7.74), pero en lugar de Q^E se sustituye V^E . Se encuentra la transformada de Radon como en (7.75). La ecuación (7.76) sigue siendo válida con V^E en lugar de Q^E , se integra respecto a y_1 y se evalúa en $y_2 = 0$. Se obtiene así (7.77).

El límite $\lim_{|y| \rightarrow \infty} (V^E \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = 0$ por la misma razón que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} (Q^E \Phi(\bar{y}), \Psi(\bar{y})) = 0$, es decir, porque el potencial tiende a cero en el infinito. Las propiedades de $f(\bar{y})$ se demostraron en (8.11). ■

Referencias

- [1] Adachi T. and Tamura H., Asymptotic completeness for long-range many-particle systems with Stark effect, II, *Comm. Math. Phys.* 174 (1996), 537-559.
- [2] Adachi, T. Asymptotic completeness for N-body quantum systems with long-range interactions in a time-periodic electric field. *Commun. Math. Phys.* 275, 443-447 (2007).
- [3] Adachi, T. Maehara K. On multidimensional inverse scattering for Stark Hamiltonians. *J. Math. Phys.* 48, 042101 (2007).
- [4] Alsholm, P.: Wave operators for long-range scattering. *J. Math. Anal. Appl.*, 59, 550-572 (1977).
- [5] Amrein W. O. ; Josef M. Jauch; Kalyan B. Sinha. *Scattering Theory in Quantum Mechanics, Physical principles and Mathematical Methods.* 1977 W. A. Benjamin, Inc. Advanced book program.
- [6] Amrein W. O.; Pearson D.B.; Wollenberg M.; *Helv. Phys. Acta* 53, 335 (1980).
- [7] Amrein W. O. *Non-Relativistic Quantum Dynamics.* 1981 D. Reidel Publishing Company, Holland.
- [8] Arians, S. Geometric approach to inverse scattering for the Schrödinger equation with magnetic and electric potentials. *J. Math. Phys.* 38 (6), 2761-2773, (1997).
- [9] Avron, J. E.; Herbst, I. W. Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect. *Comm. Math. Phys.* 52 (1977), no. 3, 239–254.
- [10] Ballesteros M.; Weder R., High-velocity estimates for the scattering operator and Aharonov-Bohm effect in three dimensions. *Commun. Math. Phys.* 285 (2008), 345-398, doi: 10.1007/s00220-008-0579-1
- [11] Ballesteros M.; Weder R., The Aharonov-Bohm Effect and Tonomura et al. Experiments. *Rigorous Results.* arXiv:0711.2569.
- [12] Bartle R. *The elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Classics Library Edition Published 1995.

- [13] Berezin F.A.; Shubin M.A. The Schrödinger Equation. Kluwer Academic Publishers 1991.
- [14] Buslaev, V.S.; Matveev, V.B. Wave operators for the Schrödinger equation with a slowly decreasing potential, *TMF*, 2:3 (1970), 367-376 .
- [15] Chadan K.; Sabatier P.C. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Second Edition. Springer-Verlag.
- [16] Dollard J. D.; *J. Math. Phys.* 5, 729 (1964).
- [17] Enss V. Propagation properties of quantum scattering states, *J. Funct. Anal.* 52 (1983), 219-251.
- [18] Enss V. A new look at the multidimensional inverse scattering problem, *Understanding Physics*, pp. 31-48, A.K. Richter editor, Copernicus Gesellschaft, Katlenburg-Lindau (1998).
- [19] Enss V. and Weder R., Inverse Potential Scattering: A geometrical approach, in: "Mathematical Quantum Theory II: Schrödinger Operators", Proceedings of the Summer School in Mathematical Quantum Theory, August 1993, Vancouver, B.C., Feldman J., Froese R., and Rosen L., editors, CRM Proceedings and Lecture Notes 8, AMS Providence (ca. 1995).
- [20] Enss, V; Weder, R. Uniqueness and reconstruction formulae for inverse N-particle scattering, appeared in "Differential Equations and Mathematical Physics", Proceedings of the International Conference, Univ. of Alabama at Birmingham, March 1994, I. Knowles editor, International Press Boston (ca. 1995) 53-66.
- [21] Enss, V; Weder, R. The geometric approach to multidimensional inverse scattering, *J. Math. Phys.*, Vol. 36 (8), 3902-3921, (1995).
- [22] Georgescu V. Méthodes stationnaires pour des potentiels à longue portée à symétrie sphérique, thèse, Université de Genève (1974).
- [23] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Second edition. Springer. Berlin.
- [24] Heisenberg, W. Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen, *Z. Phys.* 120 (1943), 513-538.
- [25] Heisenberg, W. Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen. II. *Z. Phys.* 120 (1943), 673-702.
- [26] Heisenberg, W. Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen. III. *Z. Phys.* 123 (1944), 93-112.
- [27] Helgason S., Groups and geometric analysis, Academic Press, Orlando, 1984.

-
- [28] Herbst I. W., Unitary equivalence of Stark Hamiltonians, *Math. Z.* 155 (1977), 55-70.
- [29] Herbst I. W., Möller J. S., and Skibstead E., Asymptotic completeness for N-body Stark hamiltonians, *Comm. Math. Phys.* 174 (1996), 509-535.
- [30] Hörmander L. The existence of wave operators in scattering theory, *Math. Z.* 146 (1976), 69-91.
- [31] Hunziker W. Schrödinger operators with electric or magnetic fields, in “Mathematical Problems in Theoretical Physics” (K. Osterwalder, Ed.), *Lecture Notes in Physics*, Vol. 116, pp. 25-44, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [32] Ito, Hiroshi T. Inverse scattering problems for Dirac operator with time-dependent electromagnetic potentials. (Japanese) *Spectral-scattering theory and related topics (Japanese) (Kyoto, 1997)*. *Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku No. 1047* (1998), 26-35
- [33] Ito, Hiroshi T. An inverse scattering problem for Dirac equations with time-dependent electromagnetic potentials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 34 (1998), no. 4, 355-381.
- [34] Jung, W. Geometrical approach to inverse scattering for the Dirac equation. *J. Math. Phys.* 38 (1997), no. 1, 39-48.
- [35] Kac, M. Can one hear the shape of a drum?. *Am. Math. Monthly* 73, no. 4, part II, 1-23 (section XVIII.4, Foreword)
- [36] Møller, Jacob Schach. Two-body short-range systems in a time-periodic electric field. *Duke Math. J.* 105 (2000), no. 1, 135-166.
- [37] Mulherin D.; Zinnes I.I. *J. Math. Phys.* 11, 1402 (1970).
- [38] Nicoleau, F. Inverse scattering for Stark Hamiltonians with short-range potentials. *Asymptot. Anal.* 35 (2003), no. 3-4, 349-359.
- [39] Nicoleau, F. An inverse scattering problem for short-range systems in a time-periodic electric field. *Mathematical Research Letters*, Vol. 12, Issue 16, (November 2005).
- [40] Prugovecki E.; Zorbas J. *Math. Phys.* 14, 1398 (1973).
- [41] Lord Rayleigh J. W. S. *The theory sound*, Dover Publications, New York, 1877.
- [42] Reed M.; Simon B. *Functional Analysis. Revised and Enlarged Edition*. Academic Press 1980.
- [43] Reed M.; Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press 1975.

- [44] Reed M.; Simon B. Vol. III. Scattering Theory. Academic Press, New York 1979.
- [45] Rudin W. Functional Analysis. MacGrow-Hill 1973.
- [46] Sandoval Romero, M.; Weder, R. The Initial Value Problem, Scattering and Inverse Scattering, for Non-Linear Schrödinger Equations with a Potential and a Non-Local Non-Linearity. J. Phys. A 39 (2006), no. 37, 11461–11478.
- [47] Simon B. Phase space analysis of simple scattering systems: extensions of some work of Enss. Duke Math. J. Volume 46, Number 1 (1979), 119-168.
- [48] Veselić, Krešimir; Weidmann, Joachim Potential scattering in a homogeneous electrostatic field. Math. Z. 156 (1977), no. 1, 93–104.
- [49] Weder, R. Multidimensional inverse scattering in an electric field. J. Funct. Anal. 139 (1996), no. 2, 441–465.
- [50] Weder, R. Inverse scattering for N -body systems with time-dependent potentials. Inverse problems of wave propagation and diffraction (Aix-les-Bains, 1996), 27–46, Lecture Notes in Phys., 486, Springer, Berlin, 1997.
- [51] Weder, R. Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation. Communications in Partial Differential Equations, 22, (1997), 2089-2103.
- [52] Weder, R. Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation and L^p - $L^{\dot{p}}$ estimates. Spectral and scattering theory and related topics (Japanese) (Kyoto, 1999). Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku No. 1156 (2000), 157–168.
- [53] Weder, R. L^p - $L^{\dot{p}}$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential. J. Funct. Anal. 170 (2000), no. 1, 37–68.
- [54] Weder, R., Uniqueness of inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation and reconstruction of the potential and the nonlinearity. Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000), 631–634, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [55] Weder, R. Center manifold for nonintegrable nonlinear Schrödinger equations on the line. Comm. Math. Phys. 215 (2000), no. 2, 343–356.
- [56] Weder, R., Inverse scattering for the non-linear Schrödinger equation: reconstruction of the potential and the non-linearity. Math. Methods Appl. Sci. 24 (2001), no. 4, 245–254.
- [57] Weder, R., Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation. II. Reconstruction of the potential and the nonlinearity in the multidimensional case. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 12, 3637–3645 (electronic).

-
- [58] Weder, R., Direct and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential. VI Seminar on Free Boundary Value Problems and their Applications, Part 1 (Spanish) (Rosario, 1998), 13–20, MAT Ser. A Conf. Semin. Trab. Mat., 3, Univ. Austral, Rosario, 2001.
- [59] Weder, R. Multidimensional inverse scattering for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential. *Journal of Differential Equations*, 184, (2002), 62-77.
- [60] Weder, R. The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory. *Inverse Problems* 18 (2002), no. 4, 1041–1056.
- [61] Weder, R. The time-dependent approach to inverse scattering theory. *Contemporary Mathematics Volume 327*, 2003, 359-377.
- [62] Weder, R. Scattering for the forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 28, (2005), 1219-1236.
- [63] Weder, R. The forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 28, (2005), no. 10, 1237–1255.
- [64] Yokoyama, Koichiro. Asymptotic completeness for Hamiltonians with time-dependent electric fields. *Osaka J. Math.* 36 (1999), no. 1, 63–85.