



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre singularidades de curvas planas $V \subseteq \mathbb{C}^2$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MATEMÁTICA

P R E S E N T A
JACINTA PÉREZ GAVILÁN TORRES

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ ANTONIO SEADE KURI

México, D.F.

Mayo 2010.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres y a mi abuela

<p>1. Datos del alumno Pérez Gavilán Torres Jacinta 51717903 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 407004269</p>
<p>2. Datos del Tutor Dr. José Antonio Seade Kuri</p>
<p>3. Datos del Sinodal 1 Dra. Adriana Ortiz Rodríguez</p>
<p>4. Datos del Sinodal 2 Dra. Fuensanta Aroca Bisquert</p>
<p>5. Datos del Sinodal 3 Dra. Laura Ortiz Bobadilla</p>
<p>6. Datos del Sinodal 4 Dr. Javier Páez Cárdenas</p>

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Curvas Planas Algebraicas	1
1.1.1. Descomposición de una curva en componentes irreducibles.	4
1.2. Puntos Singulares de Curvas Planas	7
1.2.1. El Anillo Local	10
1.3. Nudos y Enlaces	12
2. Estructura Cónica Local	17
2.1. Qué es la estructura cónica	17
2.1.1. Un caso particular	18
2.2. Intersección transversal	21
2.3. Resultado General	26
3. Puiseux	29
3.1. Resolviendo la ecuación	29
3.1.1. Construcción de la expansión de Puiseux	34
3.2. Nudos y enlaces	42
3.2.1. Pares de Puiseux	43
4. Resolución mediante explosiones (Blow-Ups)	49
4.1. La explosión o blow-up de un punto	49
4.2. Teorema de resolución de singularidades mediante finitas ex- plosiones	54
4.2.1. Resultados sobre el Polígono de Newton	59
4.2.2. Prueba del Teorema	62

II

ÍNDICE GENERAL

Bibliografía

65

Introducción

El estudio de curvas como objetos matemáticos empezó hace más de 2000 años.

Los griegos, desde Tales (600 A.C.) y Euclides (300 A.C.), hicieron las primeras definiciones formales de círculos y líneas rectas. A partir de esto, curvas fueron definidas en el espacio euclidiano como lugares geométricos de puntos que cumplían ciertas relaciones de distancia con círculos y rectas fijos: las cónicas tomaron esta forma. Las relaciones que las definían ya las ponían en la categoría de ceros de polinomios, a pesar de que en ese entonces no fueron tratadas formalmente como tal.

Fue hasta el siglo XVII que G.W. Leibniz (1646-1716) les puso el nombre de “curvas algebraicas” a subconjuntos del espacio afín definidos como los ceros de un polinomio. Fue en estas épocas que I. Newton (1643-1727) comenzó a estudiar propiedades de curvas algebraicas alrededor de sus puntos singulares. Fijándose únicamente en los exponentes del polinomio que define una curva, definió el polígono que lleva su nombre, capturando propiedades esenciales de curvas en sus puntos singulares. Utilizando éste polígono, Newton construye una serie formal con exponentes racionales acotados $y = \sum x^{i/n}$ como solución implícita formal de la ecuación $f(x, y) = 0$ con f un polinomio en dos variables complejas. Bastante tiempo después de Newton, Puiseux (1855-1928) entra en el juego demostrando que la solución obtenida por Newton es de hecho una serie convergente en $x^{1/n}$ y que ésta además induce una parametrización local de la curva, dada por $x \mapsto (x^m, y(x))$, alrededor de un punto singular aislado. Después define los llamados pares de Puiseux, con los cuales determina la intersección de una curva $V \subseteq \mathbb{C}^2$ con esferas S_ε^3 para ε suficientemente pequeño, como enlaces compuestos por nudos satelitales.

Por una resolución de singularidades de una curva $V \subseteq \mathbb{C}^2$ se entiende una

pareja (X', ρ) donde X' es una variedad suave y $\rho : X' \rightarrow \mathbb{C}^2$ que es un bi-holomorfismo entre la curva dada y su preimagen fuera del conjunto singular de la curva. Esta noción comienza aproximadamente en 1676 con I. Newton, cuyo trabajo junto con el de Puiseux inducen una primera resolución de singularidades para curvas algebraicas planas.

O. Zariski (1899-1986) da pie a mucho de lo que es la investigación en singularidades hoy en día. O. Zariski no solamente fue un excelente matemático, sino un maravilloso profesor que atrajo brillantes alumnos entre los cuales destacan Abhyankar, Lipman e Hironaka. Zariski también asistió a un seminario presidido por Emmy Noether en Princeton cuando ella acababa de emigrar de Alemania en la Segunda Guerra Mundial, y después tuvo mucho contacto con B. Teissier, personalidad eminente en resolución de singularidades hoy en día. Usó resultados de Krull sobre teoría de valoraciones, tema activo hoy en el campo de investigación. En 1962 comienza a trabajar con equisingularidad [Zar79].

El resultado más reconocido en el tema se le debe a Hironaka, el alumno de Zariski, que en 1964 obtuvo una resolución encajada global para variedades de dimensión arbitraria sobre un campo K de característica cero [Hir64], resultado por el cual obtuvo la medalla Fields ese año. Resolución para característica distinta de cero es aún abierto, pero mucho trabajo y muchos resultados han sido derivados de este problema; incluso el mismo Hironaka obtuvo una resolución local y no encajada para estas curvas.

Hoy destacan, entre los matemáticos más reconocidos que trabajan en este tema y temas íntimamente relacionados, B. Teissier, J. Milnor, Whitney, Hauser, Hironaka, Abhyankar, Lipman, Abramovich, Jong, Pantev, Wang, O. Villamayor, A. Pichon, J. Seade, Alberto Verjovsky, X. Gómez-Mont, entre otros. En el primer capítulo de ésta tesis se da una introducción a las curvas algebraicas comenzando con las definiciones más básicas y terminando con un ejemplo que da pie al resto del trabajo. El segundo capítulo da una prueba de la estructura cónica local que tienen las curvas alrededor de sus puntos singulares. En el tercer capítulo se expone el trabajo de Newton y Puiseux descrito anteriormente, y en el último capítulo se obtiene una resolución de singularidades para curvas algebraicas planas mediante explosiones.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es dar una introducción a nuestros objetos de estudio: las curvas algebraicas planas.

1.1. Curvas Planas Algebraicas

Notación: Se denotarán por $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{C}[x, y]$ a los polinomios con coeficientes complejos en una y dos variables respectivamente.

Definición 1. Un subconjunto $V \subseteq \mathbb{C}^2$ es un *conjunto algebraico* si existe una colección de polinomios $\{f_\alpha\} \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ tal que se cumple que $z \in V$ si y sólo si $f_\alpha(z) = 0$ para toda f_α perteneciente a esta colección. A V se le denotará por $V(\{f_\alpha\})$

Es importante mencionar que la definición anterior se puede hacer en general para cualquier campo K en lugar de \mathbb{C} , y para cualquier subconjunto $V \subseteq \mathbb{K}^n$, diciendo que éste es un conjunto algebraico si corresponde a los ceros de polinomios en n variables con coeficientes en K .

Ejemplo 1. Sea $f(x, y) = y - x^2$. El conjunto $V(f)$ en \mathbb{R}^2 es una parábola.

Los conjuntos algebraicos son curvas cuando están definidos por un sólo polinomio, o intersecciones de curvas, cuando están definidos por más de un polinomio, ya que $V(f, g) = V(f) \cap V(g)$. Después se probará que un conjunto algebraico siempre está definido por un número finito de polinomios, lo cual es muy conveniente.

La razón por la cual la definición de conjunto algebraico se hizo para subconjuntos de \mathbb{C}^2 es simplemente que todos los resultados expuestos en las siguientes páginas serán sobre éste tipo de conjuntos algebraicos. Se recurrirá a conjuntos algebraicos reales solamente para hacer ciertas observaciones geométricas sobre éstos que ilustren gráficamente una situación similar para conjuntos algebraicos $V \subseteq \mathbb{C}^2$.

En el siguiente ejemplo se ilustra la diferencia entre conjuntos algebraicos reales y complejos.

Ejemplo 2. Considérese el conjunto algebraico $V = V(y^2 + 1, x^2 + 1) \subset \mathbb{R}^2$. Claramente V es el conjunto vacío, mientras que si consideramos el mismo conjunto como subconjunto de \mathbb{C}^2 , el conjunto no puede ser vacío, ya que por el teorema fundamental del álgebra, ambos polinomios que definen este conjunto algebraico son no constantes y por tanto deben de tener al menos una raíz en \mathbb{C} .

Para poder probar la mayoría de los resultados expuestos a continuación se usará constantemente el hecho de que \mathbb{C} es un campo algebraicamente cerrado, lo cual explica en parte porqué se tratarán conjuntos algebraicos complejos y no reales.

Definición 2. Un conjunto algebraico no vacío V se llamará *conjunto algebraico irreducible* si no es posible expresarlo como la unión de dos conjuntos algebraicos propios que no estén contenidos uno en el otro.

Proposición 1. Sea $V \subseteq \mathbb{C}^2$ un conjunto algebraico.

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid f(z) = 0 \forall z \in V\}$$

es un ideal del anillo $\mathbb{C}[x, y]$.

La prueba de la anterior proposición es directa a partir de la definición de $I(V)$.

Definición 3. Sea $V \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto algebraico. Al cociente $\mathbb{C}[x, y]/I(V)$ se le llamará el *anillo coordinado de V* , y se denotará por $\mathbb{C}[V]$.

El siguiente resultado muestra cómo se puede obtener información acerca de un conjunto algebraico a partir de su anillo de coordenadas.

Proposición 2. Sea $V \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto algebraico. Entonces V es irreducible si y sólo si $I(V)$ es un ideal primo, es decir, si y sólo si $\mathbb{C}[V]$ es un dominio entero.

Prueba. Si $I(V)$ no es primo, supongamos que $f_1 f_2 \in I(V)$, y $f_i \notin I(V)$, entonces $V = (V \cap V(f_1)) \cup (V \cap V(f_2))$ y por hipótesis, $V \cap V(f_i)$ debe de ser subconjunto propio de V , así que V es reducible.

Recíprocamente, si $V = V_1 \cup V_2$, y cada V_i es subconjunto propio de V , escogemos $f_i \in I(V_i) - I(V)$. Así, $f_1 f_2 \in I(V)$ pero $f_i \notin I(V)$, así que $I(V)$ no es primo. \square

Definición 4. Una *curva algebraica plana* es un conjunto algebraico que corresponde a los ceros de un solo polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$.

Lo “plano” de la curva lingüísticamente se refiere a que ésta es subconjunto de \mathbb{C}^2 , el plano complejo.

El siguiente resultado nos asegura que todo conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{C}^2$ está definido por un número finito de polinomios.

Sea A un anillo conmutativo con uno.

Definición 5. Se dice que A es *Noetheriano* si todo ideal de A está finitamente generado.

Proposición 3. *Son equivalentes:*

1. A es Noetheriano.
2. Todo conjunto no vacío de ideales de A admite un elemento maximal.
3. Se cumple la condición de cadena ascendente: Si $\{I_n\}$ es una cadena creciente de ideales de A , entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $I_k = I_{k+1}$.

La prueba del anterior teorema se puede consultar en [MA69].

Teorema de la Base de Hilbert. *Si A es Noetheriano, $A[x]$ es Noetheriano.*

Prueba. Sea I un ideal de $A[x]$. Dado $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \in A[x]$ con $a_d \neq 0$, el *coeficiente principal* de f es a_d .

Sea J el subconjunto de A que consta de todos los coeficientes principales de polinomios en I . No es difícil probar que J es ideal de A . Por hipótesis, hay un número finito de polinomios $f_1, f_2, \cdots, f_r \in I$ cuyos coeficientes principales

generan a J .

Sea N un número natural mayor que el grado más grande que los grados de cada f_i . Para cada $m \leq N$, sea J_m el ideal que consiste de todos los coeficientes principales de los polinomios en I con grado menor o igual a m . Sea $\{f_{m_j}\}$ un conjunto finito de polinomios cuyos coeficientes principales generan a J_m . Sea I' el ideal generado por todos los f_i y por los f_{m_j} .

Por construcción, $I' \subseteq I$. Si la contención fuese estricta, se puede elegir $g \in I - I'$ con grado mínimo.

Si el grado de g es mayor que N , existen polinomios q_i tales que $\sum q_i f_i$ tenga el mismo coeficiente principal que g , entonces $g - \sum q_i f_i \in I'$ por lo que $g \in I'$. Si el grado de g es menor o igual a N , es posible, de manera similar, restarle a g un polinomio en I' que reduzca el grado y concluir así que $g \in I'$. Así I es finitamente generado, lo cual concluye la prueba. \square

Hasta ahora, se ha hecho referencia a los polinomios que definen un conjunto algebraico. Vale la pena decir precisamente qué significa ésto. Si $V \subseteq \mathbb{C}^2$ es un conjunto algebraico, $I(V)$ es un ideal de $\mathbb{C}[x, y]$ y por el teorema anterior está finitamente generado, digamos, por $\{f_1, \dots, f_m\}$. Éste conjunto de polinomios será el conjunto que *define* al conjunto algebraico V . ¿Para qué tomar primero el ideal asociado? En general se cumple que $I = I(V)$ tiene la propiedad de que si $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es tal que $f^n \in I$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in I$. La prueba se obtiene directamente de la definición de $I(V)$. A los ideales que tienen esta propiedad se les llama radicales. Si V es una curva algebraica, $V = V(f)$ con $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Por ser éste un dominio de factorización única, $f = \prod_{i=1}^r f_i^{\alpha_i}$. La anterior descripción lo que dice es que el polinomio que define a V será $\prod_{i=1}^r f_i$, no f .

1.1.1. Descomposición de una curva en componentes irreducibles.

Las componentes irreducibles de una curva algebraica son muy importantes para estudiar curvas, ya que muchos resultados se demuestran analizando solamente las componentes irreducibles.

Para poder concluir la descomposición de una curva en componentes irreducibles es necesario establecer los siguientes resultados sobre la resultante

de dos polinomios. La resultante sirve para saber cuándo es que dos polinomios tienen ceros en común.

La Resultante

Sea A un anillo conmutativo con uno. Sean $f, g \in A[x]$;

$$\begin{aligned} f &= a_0x^m + \cdots + a_m \\ g &= b_0x^n + \cdots + b_n \end{aligned} \quad (1.1)$$

Definición 6. Sean f, g como en 1.4 La *resultante* de f y g se define como:

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_m & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & a_m & \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & b_0 & \cdots & \cdots & b_n & \end{pmatrix}$$

Nótese que $R_{f,g} \in A$. El siguiente teorema ilustra la importancia de este concepto.

Teorema 1. *Sea A un dominio de factorización única. Sean $f, g \in A[x]$ como en la definición anterior, con $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) *Los polinomios f y g tienen un factor común de grado ≥ 1 en $A[x]$.*
- ii) *La resultante $R_{f,g} = 0$ en A .*

La prueba de éste teorema se encuentra en [Fis01].

Corolario 1. *Dados $f, g \in \mathbb{C}[x]$ tales que $\deg f, \deg g \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) *Los polinomios f, g tienen un cero en común;*
- ii) *El resultante $R_{f,g} = 0$.*

Observación 1. Dados $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ si f divide a g entonces $V(f) \subseteq V(g)$, pues, si f divide a g , $g = fh$; de este modo, si $f(x, y) = 0$, necesariamente $g(x, y) = 0$.

Lema de Study. Si $V(f) \subseteq V(g)$, f es irreducible y $\deg f \geq 1$, entonces f divide a g .

Prueba. Se consideran $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ como polinomios en $\mathbb{C}[x][y]$:

$$\begin{aligned} f &= a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_m \\ g &= b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $a_i, b_j \in \mathbb{C}[x]$ y $a_0, b_0 \neq 0$.

Se prueba que $n > 0$. Si $n = 0$, entonces $g = b_0$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, b_0 tiene un número finito de raíces, digamos x_1, \dots, x_k , y por tanto

$$V(g) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = x_i \ i = 1, \dots, k\}.$$

Se puede entonces elegir $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $b_0(z_0) = g(x_0) \neq 0$. Como $m \geq 1$, el polinomio $f(x_0, y)$ tiene al menos una raíz en \mathbb{C} , lo cual implica que $V(f)$ interseca a la recta $x = x_0$ en un punto mientras que $V(g)$ no lo hace. Esto haría imposible la contención $V(f) \subset V(g)$. Entonces $n > 0$.

Observación 2. Si $R_{f,g} = 0$, por el Corolario 1, que es aplicable puesto que $n > 0$, f y g tienen un factor común, y, por ser f irreducible, necesariamente f divide a g .

Se prueba que $R_{f,g} = 0$:

Como $R_{f,g} \in \mathbb{C}[x]$, basta checar que $R_{f,g} = 0$ para infinitos $x \in \mathbb{C}$. Dado que $a_0, b_0 \neq 0$, $a(x_0), b(x_0) \neq 0$ para infinitos $x_0 \in \mathbb{C}$. Al sustituir $x = x_0$ en f y g , se obtienen polinomios $f_{x_0}, g_{x_0} \in \mathbb{C}[y]$.

Sea $c \in \mathbb{C}$ una raíz de f_{x_0} , la cual existe puesto que $m > 1$. Se cumple entonces que $g_{x_0}(c) = 0$ ya que $V(f) \subseteq V(g)$. Así, $y - c$ es un factor común no unidad de f_{x_0} y g_{x_0} en $\mathbb{C}[y]$. Esto es equivalente a que $R_{f_{x_0}, g_{x_0}} = 0$. Se concluye que $R_{f,g} = 0$, ya que lo es para infinitos $x_0 \in \mathbb{C}$. Por la observación inicial, f divide a g , como se quería. □

Lema 1. Una curva algebraica $V = V(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ es irreducible si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ y $g \in \mathbb{C}[x, y]$ irreducible tal que $f = g^k$

Prueba. Sea $V = V(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ irreducible. Supóngase que $f = f_1 f_2$ con $f_1 \neq f_2$ y no unidades. Lo anterior dice que $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$, y como

las f_i no son unidades, $V(f_i) \neq \emptyset$. Esto implica que $V(f_1) = V(f_2)$ por la irreducibilidad de V . Así, si h es un factor irreducible no unidad de f_1 , $V(h) \subseteq V(f_1)$, y por el Lema de Study h divide a f_2 . Como todos los factores de f_1 son de f_2 por el anterior argumento, se tiene que $f = g^k$.

Ahora para el inverso, procediendo por contrapositiva: Si V es reducible, $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$ donde $V(f_1) \not\subseteq V(f_2)$ y $V(f_2) \not\subseteq V(f_1)$. De este modo, existen h_1 y h_2 irreducibles tales que dividen a f_1 y a f_2 respectivamente. Por lo tanto, f tiene al menos dos factores primos distintos. \square

Observación 3. Este lema sugiere una prueba para la Proposición 2 en el caso de curvas algebraicas. De hecho, con este lema, la prueba es trivial: $V = V(g^k)$ con g irreducible si y sólo si $I(V)$ es un ideal primo casi por definición, estableciendo así lo deseado.

Teorema 2. *Toda curva algebraica $V \subseteq \mathbb{C}^2$ se puede expresar de la forma*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$$

Donde V_i son curvas algebraicas irreducibles. Esta representación es única salvo por el orden en el que aparecen las curvas V_i .

Prueba. Sea $V = V(f)$ con $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Como $\mathbb{C}[x, y]$ es un dominio de factorización única, $f = f_1^{a_1} f_2^{a_2} \cdots f_n^{a_n}$, con f_i irreducible en $\mathbb{C}[x, y]$. Entonces

$$V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_n).$$

Además cada $V(f_i)$ es irreducible por el lema anterior. Esto establece la existencia.

Para probar la unicidad, hay que probar que si una curva $V' \subseteq V$ es irreducible, entonces $V' = V_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $V' = V(f') \subseteq V$ es irreducible, entonces f' es irreducible, por lo anterior. Por el lema de Study f' debe ser un factor primo de f . \square

Habiendo establecido el anterior resultado, es posible analizar una curva componente a componente, reduciendo el estudio de curvas algebraicas a curvas algebraicas irreducibles.

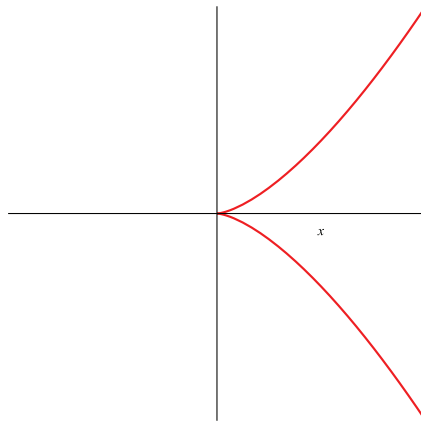
1.2. Puntos Singulares de Curvas Planas

La teoría de curvas planas algebraicas estudia ciertos puntos “especiales” de la curva, analizando lo que se llama ‘propiedades locales’ de estos puntos, que

consiste básicamente en analizar qué comportamiento (geométrico, topológico, algebraico) tiene la curva alrededor de un punto.

Ejemplo 3. Sea $f(x, y) = y^2 - x^3$. Considérese por el momento $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ con el fin de poder ilustrar claramente la curva.

Figura 1.1: $V(f)$; $f(x, y) = y^2 - x^3$



El origen es un punto distinto a los demás en esta curva. Observando el dibujo de esta curva es intuitivo, pero además $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, mientras que en cualquier otro punto p , $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$. A los puntos que asemejan este comportamiento en general se les llamará puntos singulares.

La definición de punto singular para un conjunto algebraico en general es la siguiente:

Definición 7. Sea $V \subseteq \mathbb{C}^2$ un conjunto algebraico, y $\{f_i\}$ el conjunto finito de polinomios que lo definen. Un punto $x \in V$ se dice que es *simple o regular* si la matriz $(\partial f_i(x)/\partial x_j(x))$ tiene rango máximo (digamos ρ). Diremos que x es singular si el rango de dicha matriz es menor que ρ .

En el caso de curvas algebraicas planas, un punto singular de $V \subseteq \mathbb{C}^2$ una curva algebraica definida por $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es aquél punto en el cual ambas parciales de f se anulan.

¿Cómo se comporta una curva plana alrededor de un punto regular? El siguiente muy conocido resultado nos da la respuesta.

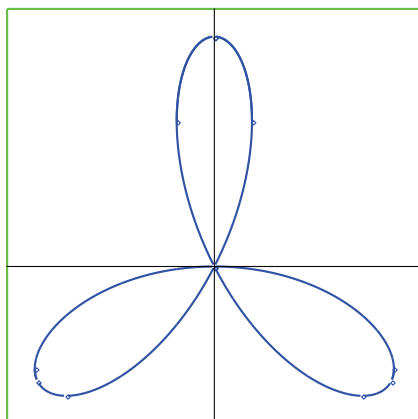
Teorema de la Función Implícita. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ y $f(0, 0) = 0$. Entonces existe una única $y \in \mathbb{C}[x]$ tal que $y(0) = 0$ y $f(x, y(x)) = 0$ en una vecindad del origen.

Qué pasa alrededor de un punto singular es otra historia, por eso no se hablará mucho más sobre puntos regulares.

De manera similar a la recta tangente a una curva $V(f)$ por un punto regular $p = (a, b)$ ($V(f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b))$), se definen varias rectas tangentes en el caso singular:

Definición 8. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$, supóngase que $0 \in V(f)$ es un punto singular. Se escribe a f como $f = f_m + f_{m+k} + \dots$, donde cada f_i es un polinomio homogéneo de grado $i > 1$. El cono tangente a $V(f)$ en el origen es el conjunto $\bigcup V(f_{m_i})_{i=1}^n$ donde $f_m = \prod_{i=1}^n f_{m_i}$, f_{m_i} es irreducible.

Ejemplo 4. Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$. Claramente $0 \in V(f)$ y es punto singular ya que f no tiene términos lineales. El polinomio homogéneo de menor grado de f es $3x^2y = y(\sqrt{3} - y)(\sqrt{3} + y)$, por lo que en este caso el cono tangente es $V(y, \sqrt{3} + y, \sqrt{3} - y)$. A continuación se considera la curva como subconjunto de \mathbb{R}^2 para poder obtener un dibujo de la curva y sus rectas tangentes.



Al considerar la curva como subconjunto de \mathbb{C}^2 , obtenemos, en lugar de tres rectas tangentes, un verdadero “cono” tangente; de ahí el nombre.

De manera natural se puede generalizar el concepto de cono tangente a un punto singular $p = (a, b) \neq (0, 0)$ de una curva plana $V(f)$, simplemente

tomando coordenadas x', y' definidas por $x' = x - a$, $y' = y - b$, sustituyendo éstas en el polinomio original para obtener $f'(x', y') = f(x' + a, y' + b)$. Así, se obtiene el polinomio homogéneo de menor grado de f' , digamos f'_m . Sus componentes lineales definen en este caso las rectas tangentes, módulo una traslación al punto p .

1.2.1. El Anillo Local

Las siguientes definiciones se harán para conjuntos algebraicos $X \subseteq \mathbb{C}^2$ en general.

Definición 9. Sea $X \subset \mathbb{C}^2$ un conjunto algebraico irreducible que pasa por un punto $p \in \mathbb{C}^2$. Sabemos que X es irreducible si y sólo si $\mathbb{C}[X]$ es dominio entero. Denotando por $\mathbb{C}(X)$ al campo de fracciones correspondiente en este caso, definimos el *anillo local* de X como:

$$O_p(X) = \{f/g \in \mathbb{C}(X) \mid g(p) \neq 0\}.$$

Es decir, el anillo local de X en el punto p es el subconjunto de funciones racionales que están definidas en el punto p .

El anillo local de una variedad en un punto así definido, es, en efecto, un anillo local en el sentido algebraico:

Definición 10. Un anillo A es *local* si tiene un único ideal maximal propio.

Afirmación 1. Dado X un conjunto algebraico irreducible definido por $f \in \mathbb{C}[x, y]$ que pasa por un punto p , $O_p(X)$ es un anillo local, y su ideal maximal es

$$m_p = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(p) = 0\}.$$

Demostración. Primero se probará que m_p es un ideal maximal de $O_p(X)$. Si no fuese maximal, existiría otro ideal propio η distinto de m_p tal que $m_p \subset \eta \subset O_p(X)$. Por tanto existe $\frac{f}{g} \in \eta - m_p$; así, $f(p) \neq 0$, así que $\frac{1}{f} \in O_p(X)$. Por tanto $\frac{g}{f} \frac{f}{g} = 1 \in \eta$, por lo que $\eta = O_p(X)$, lo cual contradice el hecho de que η sea ideal propio. Por lo tanto, m_p es ideal maximal. Además, es el único ideal maximal por un argumento completamente análogo al anterior (se supone que existe $\eta \neq m_p$ ideal maximal). \square

Lo anterior sirve para obtener información sobre un conjunto algebraico irreducible X alrededor del punto p a partir de su anillo local.

Proposición 4. *Sea $X \subset \mathbb{C}^2$ un conjunto algebraico irreducible. Hay una correspondencia biyectiva entre los ideales primos de $O_p(X)$ y los subconjuntos algebraicos irreducibles de X que pasan por p .*

Prueba. Sea $J \subset O_p(X)$ un ideal primo. Es claro que $J \cap \mathbb{C}[X]$ es un ideal primo en $\mathbb{C}[X]$, así que $V_X(J) = \{q \in X \mid f(q) = 0 \forall f \in J\}$ es un subconjunto algebraico irreducible de X . Además, como $O_p(X)$ es un anillo local con único ideal maximal m_p , $J \subseteq m_p$, por lo que por definición, $f(p) = 0$ para toda $f \in J$. Por lo tanto $p \in V_X(J)$ como se quería.

Sea ahora $V \subset X$ un subconjunto algebraico irreducible de X que pasa por p . Se sabe que $I_X(V) = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(q) = 0 \forall q \in V\}$ es un ideal primo en $\mathbb{C}[X]$; cabe observar que $f(p) = 0$ para toda $f \in I_X(V)$. Se prueba ahora que $\langle I_X(V) \rangle \subseteq O_p(X)$ es un ideal primo. Nótese que

$$\langle I_X(V) \rangle = \{f/g \mid f/g(q) = 0 \forall q \in V\}.$$

Supóngase que $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in O_p(X)$ son tales que $\frac{a}{b} \frac{c}{d} \in \langle I_X(V) \rangle$, es decir, para todo $q \in V$, $\frac{ac}{bd}(q) = 0$. Se usará el hecho de que $O_p(X)$ es un dominio entero, lo cual implica que para todo $q \in V$, $\frac{a}{b}(q) = 0$ o $\frac{c}{d}(q) = 0$, por lo que $\frac{a}{b} \in J$ o $\frac{c}{d} \in J$. Por lo tanto, $\langle I_X(V) \rangle$ es un ideal primo. \square

Más adelante se verá cómo obtener más información sobre una variedad por un punto a partir de su anillo local, especialmente cuando el punto es singular, pero por el momento la proposición anterior exhibe una relación entre anillo local y propiedades locales de la variedad en el punto en cuestión. El siguiente ejemplo finaliza esta sección.

Ejemplo 5. Sea $f(x, y) = y^2 - x^5$, considérese $X = V(f)$. Es fácil ver que f es irreducible y así está definido su anillo local en todo punto. El origen es en este caso el único punto singular de la curva; se calcula el anillo local en este punto. Por definición,

$$\begin{aligned} O_0(X) &= \{f/g \in \mathbb{C}(X) \mid g(0) \neq 0\} \\ &= \{f/g \in \mathbb{C}(X) \mid g \in \mathbb{C}[X] - \langle [x], [y] \rangle\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por otro lado, el ideal maximal m_0 de este anillo local está dado por:

$$m_0 = \{f/g \in (X) \mid f \in \langle [x], [y] \rangle\}$$

Después de este desarrollo surgen naturalmente algunas preguntas; ¿Qué queremos estudiar? ¿Para qué?

Lo que se quiere hacer a grandes rasgos es describir exactamente que es lo que pasa al rededor de los puntos singulares de una curva plana algebraica. Mientras que el teorema de la función implícita caracteriza completamente a los puntos regulares (diciendo que, localmente, todos son iguales), en el caso de puntos singulares no nos dice absolutamente nada. El objetivo radica en estudiar cómo clasificar los puntos singulares; topológicamente, analíticamente, etc.

Una de las cosas que se presentarán es como se “ve” una curva (recordamos que las curvas estudiadas serán subconjuntos de \mathbb{C}^2) en vecindades suficientemente pequeñas del origen. Resulta que, intersecando con esferas de dimensión real tres se obtienen curvas de dimensión real uno anudadas, literalmente. Por esta razón y con el fin de tener un tratamiento más cómodo de estos aspectos en el siguiente capítulo, se introducen nociones básicas de nudos en el espacio.

1.3. Nudos y Enlaces

No hay nada complicado en la definición de un nudo. Un nudo es lo que todo el mundo entiende por nudo.

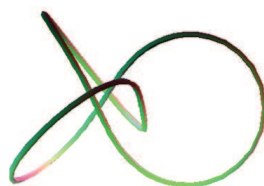


Figura 1.2: Nudo tipo “trébol”

Definición 11. Un *nudo* es una circunferencia S^1 encajada en una variedad tridimensional.

Definición 12. Un *enlace* consta de una unión finita disjunta de nudos.

Observación 4. En este trabajo las variedades que se consideran son todas diferenciables. Además, las variedades tridimensionales mencionadas en la definición de nudo serán, en este trabajo, esferas de dimensión real tres encajadas en \mathbb{C}^2 .

A continuación se definen cierto tipo de nudos que juegan un papel muy importante en el comportamiento local de las curvas algebraicas planas.

Definición 13. Un *nudo toroidal de tipo* (p, q) es un nudo contenido en un toro, tal que al ser parametrizado como curva, da q vueltas al meridiano, mientras que a un paralelo le da p vueltas.

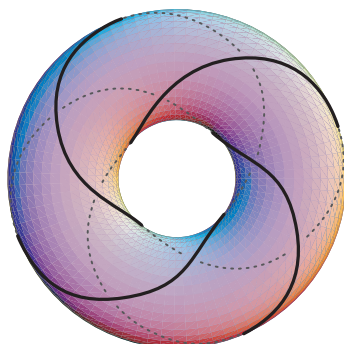


Figura 1.3: Nudo toroidal tipo $(3,4)$

La siguiente definición, teorema y ejemplo ilustran qué tipo de intersección se desea obtener al intersecar la curva en cuestión con conjuntos de dimensión real tres (que serán esferas).

Definición 14. Sean X y Y dos subvariedades de una variedad Z . Decimos que X y Y se *intersecan transversalmente* si para cada punto $x \in X \cap Y$ se cumple que

$$T_x X + T_x Y = T_x Z$$

.



Figura 1.4: $x^2 + y^2 - z = 0$; $z = 10$

Teorema 3. *La intersección de dos subvariedades transversales es una subvariedad. Además,*

$$\text{codim}(X \cap Y) = \text{codim}(X) + \text{codim}(Y)$$

Ejemplo 6. Sea en \mathbb{R}^3 la superficie dada por $x^2 + y^2 - z = 0$ y el plano $z = 10$. Su intersección es transversal ya que, en cada punto donde se intersecan (los puntos dados por $x^2 + y^2 = 10$) los planos tangentes correspondientes generan al espacio tangente a \mathbb{R}^3 en ese punto.

Cabe observar que este tipo de intersección coincide con la noción intuitiva de que una intersección sea transversal. Además, queda ilustrado qué es lo que dice el último teorema: ambas curvas se intersecan en una circunferencia, que es una variedad suave.

El siguiente ejemplo ilustra la situación general de cómo se ve una curva alrededor de un punto singular aislado. La generalización de todas las ideas expuestas se trabajará en los siguientes dos capítulos.

Ejemplo 7. Sea $f(x, y) = x^2 - y^5$. El gradiente de f es $\nabla f = (-5x^4, 2y)$, y el origen es el único punto del plano en el cual se anulan ambas coordenadas

de ∇f . Así el único punto singular de $V(f)$ es el origen. Considérese la esfera de dimensión real tres y radio $\sqrt{2}$, y $V(f) \cap S_{\sqrt{2}}^3$.

Al final de éste ejemplo, se habrá obtenido una parametrización de ésta intersección como curva. Para poder hacer esto, es necesario primero poder asegurar que es una variedad de dimensión uno real, y luego deducir una parametrización en \mathbb{C}^2 .

Se considera primero la intersección de V con S_r^3 con r arbitrario. Sea:

$$r : V \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$r(x) = |x|^2$$

Cabe observar que la diferencial de esta función es suprayectiva en todos los puntos distintos de cero, definida en V . Veamos ahora que V y S_r son transversales para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Si no lo fueran,

$$T_x V + T_x S_r \neq \mathbb{R}^4.$$

Como $\dim(V) = 2$ y $\dim(S_r) = 3$ entonces ésto solo puede pasar si $T_x V \subset T_x S_r$.

Pero $r|_{V \cap S_r} \equiv r^2$ es constante así que la diferencial restringida es cero. Si $T_x V \subset T_x S_r$ esto impide la suprayectividad, lo cual no puede ser. Por lo tanto V y S_r se intersecan transversalmente.

Por el Teorema 3, ya se tiene que $V \cap S_r$ es una variedad suave de dimensión uno real ya que $\text{codim} V \cap S_r = \text{codim} S_r + \text{codim} V = 2 + 1 = 3$. Ahora falta parametrizar ésta intersección como curva. En un inicio se consideró la esfera de radio $\sqrt{2}$, se considera este radio únicamente para facilitar los cálculos siguientes.

Se tiene que todos los puntos $(x, y) \in V$ cumplen:

$$y^5 = x^2 \tag{1.4}$$

Además todos los puntos de $V \cap S_{\sqrt{2}}^3$ son tales que $|x| + |y| = 2$. Esto junto con la propiedad 1.4 implica que $|x| = |y| = 1$.

Así se deduce que:

$$V \cap S_{\sqrt{2}}^3 = \{(e^{5\pi it}, e^{2\pi it}) \mid t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Ésta última expresión se puede expresar en realidad como una parametrización que describa a la intersección mencionada como curva, *i.e.*,

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\phi(t) = (x(t), y(t)) = (e^{5\pi it}, e^{2\pi it}).$$

Ahora, cuando $t \in [0, 1]$, $y(t)$ regresa a su punto de partida después de haber dado una vuelta, mientras que $x(t)$ ya dio dos vueltas y media; de este modo, cuando $t \in [0, 2]$, $y(t)$ y $x(t)$ han regresado ambas a su punto de partida, dando 2 y 5 vueltas, respectivamente. La curva descrita por esta intersección es entonces un nudo toroidal de tipo $(2, 5)$, ya que cruza el meridiano 5 veces y un paralelo, 2 veces.

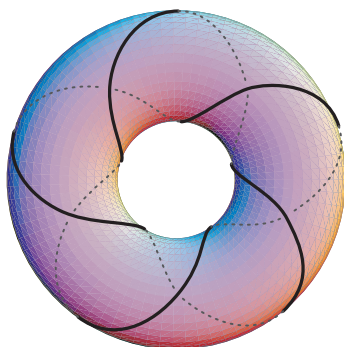


Figura 1.5: Nudo toroidal tipo $(2,5)$

En el ejemplo anterior se probó que cualquier esfera con centro en el origen interseca a la curva descrita V en una variedad suave de dimensión uno cerrada, es decir, una copia de S^1 .

¿Es cierto ésto en general? La respuesta es negativa; sin embargo, en el próximo capítulo se probará un resultado que lo generaliza para curvas algebraicas alrededor de puntos singulares aislados, además de proporcionarse un ejemplo de una curva que no interseque transversalmente a todas las esferas centradas en el origen.

Capítulo 2

Estructura Cónica Local

2.1. Qué es la estructura cónica

En el último ejemplo del capítulo anterior se describió una curva en una vecindad del origen, que en ese caso era su único punto singular. Se vio que dicha curva intersecaba transversalmente a todas las esferas con centro en dicho punto, lo cual aseguraba que cada una de éstas intersecciones era una variedad suave. Además, cada intersección era un nudo, y un nudo del mismo tipo, así que, intuitivamente, la curva tenía la forma de un cono al aproximarse al origen.

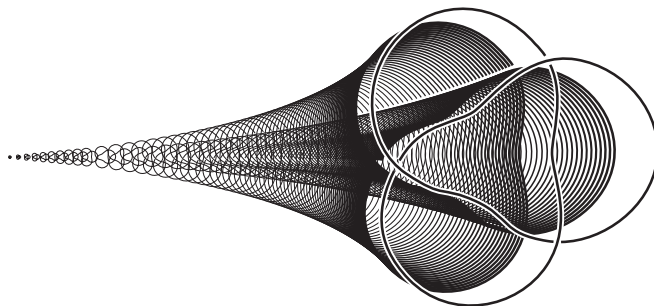


Figura 2.1: “Estructura cónica”

En general no se cumple que la intersección de una curva algebraica irreducible con esferas de radio arbitrario sea una intersección transversal; sin embargo sí se cumple para esferas de radios suficientemente pequeños si los puntos singulares son aislados (que, en el caso de curvas, siempre lo son, si

consideramos los puntos singulares de la curva como los puntos singulares del polinomio que las define). En estos casos se cumple también que la intersección resultante es un nudo, y de hecho una unión disjunta de nudos (*i.e.* un enlace) si la curva no es irreducible, pero esto se desglosará hasta el próximo capítulo.

En éste capítulo se describirá la “estructura cónica” general mencionada arriba que poseen éstas curvas. El resultado que engloba esto es el siguiente:

Teorema 4. *Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica. Para ε suficientemente pequeño, la intersección $V \cap D_\varepsilon$ es homeomorfa al cono sobre $K = V \cap S_\varepsilon$. De hecho, el par $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ es homeomorfo al par que consiste del cono sobre S_ε y el cono sobre K .*

Para entender del todo el enunciado anterior, hace falta definir qué es un cono sobre un conjunto, y qué significa que dos “pares” (U, V) y (W, S) de espacios topológicos (donde el segundo está contenido en el primero en cada par) sean homeomorfos.

Definición 15. Dado un espacio topológico X , se define el cono sobre X como:

$$C(X) = (X \times I)/(X \times 0)$$

donde $I = [0, 1]$. Aquí se trabajará con conos sobre espacios topológicos que sean subconjuntos de \mathbb{C}^2 , heredando la topología usual de \mathbb{C}^2 . Si $X \subset \mathbb{C}^2$ y $0 \notin X$, que son los conjuntos que se trabajarán en lo siguiente, entonces:

$$C(X) \cong \{tz | z \in X, t \in I\}, \text{ lo cual es muy útil e intuitivo.}$$

Definición 16. Sean U, V, W, S subconjuntos de \mathbb{C}^2 y tales que $V \subseteq U$, $S \subseteq W$. El par (U, V) es homeomorfo al par (W, S) si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow W$ tal que $h(V) = S$ y $h|_V : V \rightarrow S$ es un homeomorfismo.

2.1.1. Un caso particular

Antes de demostrar el resultado anterior, se probará para un caso particular que generaliza el ejemplo analizado al final del capítulo pasado: las curvas $V(f)$ con $f(x, y) = x^p - y^q$.

Teorema 5. *Sea $f(x, y) = x^p - y^q$ con $p, q \geq 2$. Supóngase que $p = kp'$ y $q = kq'$, con p', q' primos relativos (*i.e.* el máximo común divisor de*

p, q es k). Sea $V = V(f)$ y $K = V \cap S^3$ donde S^3 es una esfera en \mathbb{C}^2 con centro en 0 (y de radio arbitrario). Entonces K es la unión de k nudos toroidales de tipo (p', q') . Además, el par $(D_\varepsilon, D_\varepsilon \cap V)$ es homeomorfo al par $(C(S_\varepsilon^3), C(S_\varepsilon^3) \cap V)$ para ε arbitrario.

Prueba. Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p = y^q\}$ con $p = kp'$ y $q = kq'$, con p', q' primos relativos.

Es claro que si $(x, y) \in V$ entonces $(\lambda^{q'}x, \lambda^{p'}y) \in V$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. Sean

$$\{\omega_j\}_{j=1}^p = \{e^{2\pi ij/p}\}_{j=1}^p$$

las p raíces de la unidad y

$$\{\alpha_j\}_{j=1}^q = \{e^{2\pi ij/q}\}_{j=1}^q$$

las q raíces de la unidad. Así que V es la unión del origen y las órbitas generadas por los puntos (ω_j, α_i) bajo la acción inducida por el grupo

$$\langle \{\mathbb{C} - 0\}, \cdot \rangle;$$

con la acción dada por

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^{q'}x, \lambda^{p'}y).$$

Primero hay que ver cuántas órbitas distintas hay, para luego intersecarlas con la esfera y obtener el conjunto K . Para ver bajo qué condiciones dos puntos están sobre la misma órbita, basta checar con los puntos compuestos de raíces de la unidad correspondientes.

Dos puntos $(\omega_j, \alpha_l), (\omega_m, \alpha_s)$ pertenecen a la misma órbita si y sólo si

$$e^{it} \cdot (e^{2\pi ij/p}, e^{2\pi il/q}) = (e^{iq't+2\pi ij/p}, e^{ip't+2\pi il/q}) = (e^{2\pi im/p}, e^{2\pi is/q})$$

para algún $t \in \mathbb{R}$, es decir:

$$q't + 2\pi j/p; = 2\pi m/p + 2\pi u;$$

$$p't + 2\pi l/q = 2\pi s/q + 2\pi v$$

$$q'pt + 2\pi j = 2\pi m + 2\pi up;$$

$$p'qt + 2\pi l = 2\pi s + 2\pi vq$$

$$q'pt = 2\pi(m + up - j);$$

$$p'qt = 2\pi(s + vq - l)$$

Como $qp' = pq'$ todo se reduce a la ecuación con variables u y v :

$$up - vq = s - l + j - m$$

Ésta es una ecuación diofantina y tiene soluciones enteras si y sólo si $(p, q) = k$ divide a $s - l + j - m$. Por lo tanto, dos puntos están en la misma órbita si y sólo si la ecuación tiene solución, pero ésto pasa cuando $s - l = ka + c$; $j - m = kb + (k - c)$, $c = 1, \dots, k$. Además estas son las únicas órbitas. Queda probado que V es la unión de k órbitas (ajenas).

Ahora, dado un representante de una órbita arbitraria (ω_j, α_l) ,

$$e^{it} \cdot (\omega_j, \alpha_l) \in V \cap S_{\sqrt{2}}^3$$

y además, si $t \in [0, 2\pi]$, el conjunto

$$e^{it} \cdot (\omega_j, \alpha_l) = (e^{iq't}\omega_j, e^{ip't}\alpha_l)$$

es un nudo toroidal de tipo (p', q') .

Además, dado un radio arbitrario $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se puede encontrar $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lambda e^{it} \cdot (\omega_j, \alpha_l) \subset V \cap S_r^3, t \in [0, 2\pi].$$

Se sigue de la observación anterior que $K = V \cap S_\varepsilon^3$ es unión disjunta de k nudos toroidales de tipo (p', q') , dado que hay k órbitas ajenas.

Se probará ahora que el par $(D_\varepsilon, D_\varepsilon \cap V)$ es homeomorfo al par $(C(S_\varepsilon^3), C(S_\varepsilon^3))$ para ε arbitrario. Es necesario que la intersección $S_\varepsilon^3 \cap V$ sea transversal para ε arbitrario. El último ejemplo de la sección anterior prueba esto para el caso $p = 2, q = 5$. La prueba en general es completamente análoga; se basa en el hecho de que la diferencial de la función distancia es suprayectiva en todos los puntos de V salvo el origen.

Ahora, el desarrollo anterior asegura que, para cualquier valor de ε ,

$$D_\varepsilon \cap V = \{t \cdot x \mid x \in S_\varepsilon \cap V\}$$

donde \cdot es la acción descrita anteriormente. Además,

$$C(S_\varepsilon) = \{tx \mid x \in S_\varepsilon, t \in [0, 1]\} \text{ y}$$

$$C(S_\varepsilon \cap V) = \{tx \mid x \in S_\varepsilon \cap V, t \in [0, 1]\}.$$

Se define la función $h : D_\varepsilon \rightarrow C(S_\varepsilon)$ de la siguiente manera: Para cada $x \in D_\varepsilon$, considérese la curva $t \cdot x$, $t \in [0, 1]$, parametrizada por longitud de arco. Por lo anterior, ésta es transversal a todas las esferas con centro en el origen y por tanto interseca en un único punto a cada una de ellas, en particular a S_ε , digamos en z_x . Se considera ahora la recta $l = \{tz_x \mid t \in [0, 1]\}$, y la distancia del segmento de la curva entre x y el origen (digamos s). Si la distancia de la curva completa es m , la imagen de x bajo h será el punto sobre la recta considerada que esté a distancia $\frac{s\varepsilon}{m}$ del origen. Ésta función es claramente un homeomorfismo, y restringida a $D_\varepsilon \cap V$ es un homeomorfismo sobre $C(S_\varepsilon \cap V)$. Así, los pares $(D_\varepsilon, D_\varepsilon \cap V)$ y $(C(S_\varepsilon), C(S_\varepsilon \cap V))$ son homeomorfos, como se quería. \square

2.2. Intersección transversal

Ya visitado este caso, la idea de la prueba en general queda expuesta. En el ejemplo expuesto, la curva en cuestión es transversal a todas las esferas con centro en el origen. En general, ésto solamente es cierto para esferas de radio suficientemente pequeño. El siguiente ejemplo muestra una curva $V \subset \mathbb{C}^2$ que no es transversal a todas las esferas (con centro en el origen).

Ejemplo 8. Sea $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^2(z_1 + 1)$, y considérese $V(f)$. Se va a probar que ésta curva no es transversal a todas las esferas que tienen centro en el origen, es decir, que para un punto $z \in \mathbb{C}^2$,

$$T_z V \subset T_z S_r^3, \text{ para algún radio } r \in \mathbb{R}^+.$$

Como las esferas con centro en el origen son curvas de nivel de la función $g(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$, que no es holomorfa, es necesario realizar todos los

cálculos correspondientes identificando a \mathbb{C}^2 con \mathbb{R}^4 . Así, el punto (z_1, z_2) se identifica con el punto (x, y, w, v) , donde

$$z_1 = x + iy, \text{ y}$$

$$z_2 = w + iv.$$

De este modo, se tienen dos funciones $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$f(x, y, w, v) = (w^2 - v^2 - x^2 + y^2 + x + 1, 2wv - 2xy + y)$$

$$g(x, y, w, v) = x^2 + y^2 + w^2 + v^2.$$

Ahora, se quiere que $T_z V \subset T_z S_r^3$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo, que para todo $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$, cada vez que $Df(\bar{v}) = \bar{0}$ se cumpla que $dg(\bar{v}) = 0$. Se tiene que:

$$Df_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} -2x + 1 & 2y & 2w & -2v \\ -2y & -2x + 1 & 2v & 2w \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_{(x,y,z,w)} = (2x, 2y, 2w, 2v).$$

Evaluando lo anterior en el punto $(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)$ se tiene que:

$$Df_{(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\nabla g_{(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)} = (\frac{2}{3}, 0, 0, 0).$$

De este modo, si $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ es tal que

$$Df_{(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)}(v) = 0, \text{ entonces}$$

$$dg_{(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)}(v) = \left\langle \nabla g_{(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)}, v \right\rangle = 0.$$

Queda expuesto entonces un punto en el cual la curva en cuestión no es transversal a la esfera que pasa por este punto y tiene centro en el origen.

Para lo siguiente y en el resto del texto se denotará por $\Sigma(V)$ al conjunto de puntos singulares de V .

Teorema 6. *Dada una curva algebraica $V \subset \mathbb{C}^2$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ la esfera S_ε interseca a $V - \Sigma(V)$ en una variedad suave (posiblemente vacía).*

Para probar esto, serán necesarios algunos resultados sobre conjuntos algebraicos:

Observación 5. $\Sigma(V)$ es un subconjunto algebraico propio y posiblemente vacío de V .

Los siguientes dos teoremas son cruciales para el desarrollo que nos llevará a demostrar el teorema que garantiza la estructura cónica local de curvas alrededor de puntos singulares.

Teorema 7 (Whitney). *El conjunto $V - \Sigma(V)$ es una variedad compleja suave y no vacía.*

Teorema 8 (Whitney). *Dados $W \subset V$ dos conjuntos algebraicos, la diferencia $V - W$ tiene a lo más un número finito de componentes conexas.*

Las pruebas de los dos anteriores teoremas se pueden encontrar en [Whi57] y [Mil68, p.105–109] respectivamente.

Consecuencias directas de este hecho son por ejemplo que tanto V como $V - \Sigma(V)$ tienen a lo más finitas componentes conexas.

El siguiente resultado enriquece al teorema anterior.

Lema 2. *Cualquier conjunto algebraico V puede ser escrito como la unión disjunta finita:*

$$V = M_1 \cup \dots \cup M_p$$

donde cada M_j es una variedad compleja suave que consta de finitas componentes conexas.

Prueba. Sea

$$\begin{aligned} M_1 &= V - \Sigma(V) \\ M_2 &= \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V)) \\ &\dots \end{aligned}$$

Dado que

$$\dots \subset \Sigma(\Sigma(V)) \subset \Sigma(V) \subset \Sigma(V),$$

por el Teorema de la base de Hilbert, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $M_p = M_k$ para todo $k \geq p$. La sucesión consta de conjuntos disjuntos, y además es claro que

$$V = M_1 \cup \cdots \cup M_p.$$

Como por el Teorema 8 cada M_i consta de a lo más finitas componentes conexas, el teorema queda establecido. \square

Observación 6. El lema anterior es cierto para la diferencia de cualesquiera dos conjuntos algebraicos irreducibles $W \subset V$, basta considerar

$$M'_i = M_i - (W \cap M_i)$$

y así,

$$V - W = M'_1 \cup M'_2 \cdots \cup M'_p;$$

que es justo lo que se desea ya que por el Teorema 8 cada M'_k tiene finitas componentes conexas.

Dos últimos resultados son importantes para demostrar el teorema sobre la intersección suave de curvas algebraicas con esferas suficientemente pequeñas. Sea $V = V(f)$ una curva algebraica, y sea $M_1 = V - \Sigma(V)$ y sea $g' \in \mathbb{C}[x, y]$.

Definición 17. Un punto crítico de una aplicación suave entre variedades es un punto en el cual la diferencial de ésta no es suprayectiva. Un valor crítico es un punto que es imagen de un punto crítico.

Lema 3. *El conjunto de puntos críticos de la función $g'|_{M_1} = g$ es la intersección de M_1 y el conjunto algebraico W que consiste en los puntos $x \in V$ tales que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \\ \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \end{pmatrix}$$

tiene rango menor o igual a 1 (que es el rango máximo de la matriz que representa el gradiente de f).

Prueba. Primero supóngase que la curva en cuestión es subconjunto de \mathbb{R}^2 , y g' un polinomio en dos variables reales. Hay dos opciones para los puntos $(x, y) \in V$ en los cuales $dg_{(x,y)}$ no es suprayectiva. O bien son puntos en los cuales $dg'_{(x,y)}$ no es suprayectiva, que son los puntos que anulan completamente a la diferencial, o bien son puntos tales que la recta tangente a $V(f)$

en el punto en cuestión está contenida en el núcleo de $dg_{(x,y)}$. En el primer caso, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \end{pmatrix}$$

tiene claramente rango menor o igual a 1. En el segundo caso,

$$\langle (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}), (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \rangle = 0,$$

así que $\nabla(f)$ es tangente a las curvas de nivel de g , y además $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = \lambda(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. De manera inversa, si $(x, y) \in V$ es un punto en el cual la matriz A tiene rango menor o igual a 1, Entonces $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = \lambda(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ lo cual significa que $dg_{(x,y)}$ no es suprayectiva por la anterior observación.

De manera similar se generaliza lo anterior para curvas $V \in \mathbb{C}^2$.

□

Lema 4. *Un polinomio $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tiene a lo más un número finito de valores críticos.*

Prueba. Se denotará al conjunto de puntos críticos de g por $Crit(g)$. Por el lema anterior, $Crit(g) = M_1 \cap W$ con W como definido anteriormente. Entonces $Crit(g)$ se puede escribir como diferencia de dos conjuntos algebraicos, por lo que por el Lema 2 puede escribirse como la unión disjunta finita de variedades complejas suaves con finitas componentes conexas. Como cada una de ellas consta solamente de puntos críticos de g , se tiene que g es constante en cada componente, y, por tanto, g tiene sólo un número finito de valores críticos.

□

En este momento hay que recordar la definición de intersección transversal de dos subvariedades, y el hecho de que la intersección transversal de dos curvas suaves, es de nuevo una variedad suave.

Es ya momento de demostrar el teorema mencionado al principio. Para fines prácticos lo vuelvo a enunciar.

Teorema 9. *Dada una curva algebraica $V \subset \mathbb{C}^2$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ la esfera S_ε interseca a $V - \Sigma(V)$ en una variedad suave (posiblemente vacía).*

Prueba. Para la prueba consideremos a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R}^4 .
 Considérese la función polinomial

$$r : V - \Sigma(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$r(x) = \|x\|^2$$

Sea ε^2 suficientemente pequeño como para aislar al origen como punto singular. Sea además ε^2 más pequeño que cualquier valor regular de $r|_{(V-\Sigma(V))}$. Entonces ε^2 será un valor regular, así que la diferencial $dr_x : T_V \rightarrow \mathbb{R}$ es suprayectiva, para todo $x \in r^{-1}(\varepsilon^2) = V \cap S_\varepsilon$.

La prueba que se da en el último ejemplo del capítulo anterior es general y prueba que, puesto que ε es valor regular de r , V y S_ε son transversales. Así, se tiene que

$$K = V \cap S$$

es una subvariedad. □

2.3. Resultado General

Ahora está todo listo para probar el resultado inicial enunciado al principio del capítulo:

Teorema 10. *Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica. Para ε suficientemente pequeño, la intersección $V \cap D_\varepsilon$ es homeomorfa al cono sobre $K = V \cap S_\varepsilon$. De hecho, el par $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ es homeomorfo al par que consiste del cono sobre S_ε y el cono sobre K .*

Prueba. Sea V una curva en \mathbb{C}^2 con punto singular aislado en el origen. Sea $\varepsilon_0 \geq 0$ tal que aisle al origen como punto singular y tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ se cumpla que $V - 0 = V^*$ es transversal a todas las esferas de radio ε . Se asumirá la siguiente afirmación (la prueba se encuentra al final de ésta prueba):

Afirmación 2. *Existe un campo vectorial $v(x)$ definido en B_ε tal que: Para toda $x \in B_\varepsilon$ existe $\gamma_x(t)$ órbita del flujo que define $v(x)$ tal que existe $t_0 \geq 0$ tal que si $x \in S_\varepsilon$ entonces $\gamma_x(t)$ está definido para toda $0 \leq t \leq t_0$ y cumple las siguientes propiedades:*

- i* La órbita $\gamma_x(t)$ es transversal a toda esfera contenida en B_ϵ con centro en el origen.
- ii* La órbita $\gamma_x(t)$ converge a cero cuando t tiende a cero.
- iii* Si $x \in V$ entonces $\gamma_x(t) \subseteq V$

Construcción del homeomorfismo $h : B_\epsilon \rightarrow C(S_\epsilon)$:

Sea $x \in B_\epsilon$. Como $\gamma_x(t)$ es transversal a todas las esferas de radio menor o igual a ϵ , hay un único punto $z_x \in S_\epsilon$ tal que $\gamma_x(t_\epsilon) = z_x$ para algún t_ϵ . Además para cualquier otro punto $y \in \gamma_x(t)$, la órbita $\gamma_y(t')$ coincide con $\gamma_x(t)$ y ambas coinciden como curvas al ser parametrizadas por longitud de arco. (Al considerar cada órbita como curva, se asumirá parametrizada ya por longitud de arco.) Sea s la longitud del segmento de la curva $\gamma_x(t)$ entre el origen y el punto x . Su imagen bajo h será el punto sobre el segmento de recta que une a z_x con el origen que esté a distancia $\frac{s\epsilon}{m}$ donde m es la longitud de la curva $\gamma_x(t)$ restringida a B_ϵ (Cabe observar que este razonamiento es idéntico al realizado cuando se probó el caso particular de los polinomios $x^p - y^q$).

La prueba queda concluida salvo por la existencia del campo mencionado, la cual se presenta a continuación. \square

Prueba de la Afirmación. Como $V^* = V - 0$ es transversal a todas las esferas de radio $\epsilon \leq \epsilon_0$, al identificar a \mathbb{C}^2 con \mathbb{R}^4 , se tiene que

$$T_x V^* + T_x S_\epsilon = T_x B_\epsilon \quad (2.1)$$

Además, al considerar de nuevo la función

$$r' : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ y su restricción}$$

$$r = r'|_{V^*}. \text{ Se observa que } \nabla r \text{ no es tangente a las esferas.}$$

Como $\frac{1}{2}\nabla r = v_{rad} \not\subseteq T_x S_\epsilon$, (donde $v_{rad}(x) = x$), $Proy|_{T_x V^*} v_{rad}(x) \neq \emptyset$ por 2.1.

Se define entonces un campo tangente a V^* en cada punto $x \in V^*$:

$$v_1^*(x) = Proj|_{T_x V^*} v_{rad}(x) \quad (2.2)$$

Para cada $x \in V^*$, sea U_x una vecindad en la cual la proyección ortogonal $\pi : U_x \rightarrow V^*$ es sumersión. Entonces $D\pi : TU_x \rightarrow T(U_x \cap V^*)$ es suprayectiva. Además, $nuc(\pi)$ es el espacio tangente a las fibras de π , y entonces $D\pi$ es un isomorfismo en el haz normal a las fibras. Se aplica $(D\pi)^{-1}$ a v_1^* para extenderlo a U_x . Por el teorema de la función inversa ésto resulta ser un campo que es en efecto suave, y, además sigue siendo transversal a las esferas con centro en el origen. Se toma una partición suave de la unidad $\{\varphi_i\}$ subordinada a la cubierta $\{U_x\}$ tal que $sop\varphi_i \subseteq U_{x_i}$. El campo $v_1(x) = \sum \varphi_i(x)v_i(x)$ es entonces un campo suave en $U_1 = \bigcup U_x$, y sigue siendo transversal a las esferas por el origen ya que como $\langle v_i(x), x \rangle > 0$ por la condición de transversalidad, se tiene que

$$\left\langle \sum \varphi_i(x)v_i(x), x \right\rangle = \sum \langle \varphi_i(x)v_i(x), x \rangle > 0$$

Queda definida entonces la función suave v_1 en U_1 , que es vecindad de $V \cap B_\varepsilon - 0$ en B_ε , ya que es vecindad de cada uno de sus puntos por definición. Sea $\nabla r'(x) = v_2(x)$ en $B_\varepsilon - V = U_2$, que es también suave. Considérese la cubierta abierta de B_ε : $\{U_1, U_2\}$, y una partición de la unidad subordinada a ésta cubierta $\{\psi_i\}$ tal que $sop\psi_i \subseteq U_i$. La función $v(x) = \sum v_i\psi_i$ es una función suave bien definida en cada punto de B_ε , y vista como campo tiene todas las características que se pedían, por argumentos completamente análogos a los usados para construir el campo v_1 en U_1 . \square

Observación 7. Si se piensa en un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{C}^n$ en lugar de $V \subset \mathbb{C}^2$, de dimensión mayor y generado por cualquier número de polinomios en n variables complejas, todos los resultados que contiene este capítulo son válidos, y las pruebas de ellos son generalizaciones de las expuestas, que siguen el mismo camino. Estas pruebas generalizadas se pueden encontrar en [Mil68].

Capítulo 3

Puiseux

En este capítulo primero se obtendrá una parametrización local de una curva en \mathbb{C}^2 dada por la ecuación $f(x, y) = 0$ con $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Para hacer esto primero se probará la existencia de una solución formal y , después modificándola adecuadamente para obtener una solución que además sea una serie convergente de potencias con coeficientes complejos. Después de obtener la parametrización, se asociará un enlace a cada singularidad de cualquier curva dada por $f(x, y) = 0$, intersecando con esferas de radio suficientemente pequeño como en el capítulo anterior. Este comportamiento fue sugerido ya mediante un ejemplo.

3.1. Resolviendo la ecuación

Ejemplo 9. $f(x, y) = x^p - y^q$

Al considerar la ecuación $x^p - y^q = 0$ es claro que al sustituir $y = x^{p/q}$ se tiene una solución formal de y en términos de x . Este ejemplo ilustra que si se quiere hacer una expansión de y en potencias de x , se deben admitir potencias racionales y no solamente enteras.

El teorema que asegura la existencia de la solución mencionada es el siguiente:

Teorema 11 (Teorema de Newton). *Para cualquier ecuación de la forma $f(x, y) = 0$ con $f \in \mathbb{C}[x, y]$, existe una solución formal de la forma*

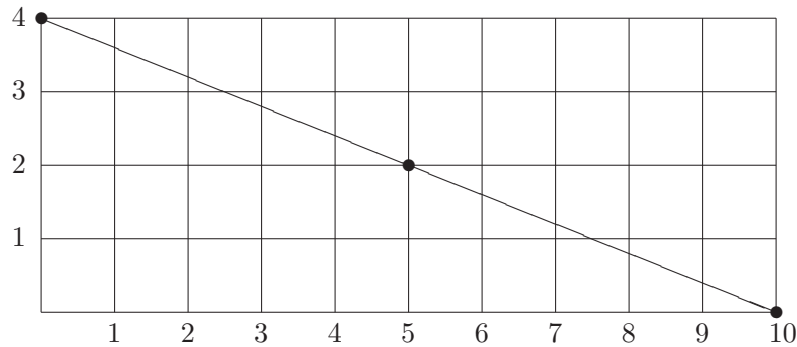
$$x = t^n, \quad y = \sum a_r t^r$$

Se hace una prueba constructiva, así que la prueba queda expuesta a continuación, desglosando lo más posible mediante ejemplos en cada paso.

Ejemplo 10. $f(x, y) = y^4 - 2x^5y^2 + x^{10}$

Considérese la posición de los exponentes en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como en la figura.

Figura 3.1: $\{(0, 4), (5, 2), (10, 0)\}$



Los tres puntos se encuentran sobre una recta, que tiene como ecuación $y = -\frac{4}{10}x + 4$, que también se puede escribir como $x + \frac{10}{4}y = 10$. Será importante recordar este hecho para encontrar la expansión buscada y . Resulta que si se toma $y = tx^{\frac{10}{4}}$ y se sustituye en la ecuación $f(x, y) = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x, tx^{\frac{10}{4}}) &= t^4 x^{\frac{10}{4} \cdot 4} - 2x^5 t^2 x^{\frac{10}{4} \cdot 2} + x^{10} = \\ &= x^{10}(t^4 - 2t^2 + 1) \end{aligned}$$

Al considerar el polinomio $g(t) = t^4 - 2t^2 + 1 \in \mathbb{C}[x, y]$, el Teorema Fundamental del Álgebra dice que éste tiene exactamente 4 raíces complejas contando multiplicidades; en particular 1 es raíz. Al sustituir t por una raíz en $y = tx^{\frac{10}{4}}$ (digamos $t = 1$) se ha obtenido una solución formal para la ecuación, como se quería.

Ejemplo 11. $f(x, y) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\gamma} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ donde $\mu = p/q$; $(p, q) = 1$.

Tratando de imitar el ejemplo anterior, se quiere encontrar $t \in \mathbb{C}$ tal que $y = tx^\mu$ sea solución de $f(x, y) = 0$. Para poder encontrar este valor, se sustituye la anterior expresión de y en la ecuación $f(x, y) = 0$ para obtener:

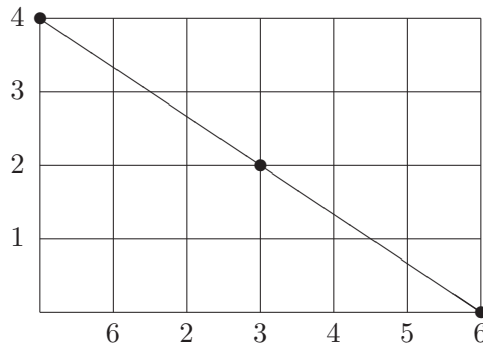
$$\begin{aligned}
 f(x, tx^\mu) &= \\
 \sum a_{\alpha\beta} x^{\alpha+\mu\beta} t^\beta &= \\
 x^\gamma \sum a_{\alpha\beta} t^\beta &= x^\gamma g(t)
 \end{aligned}$$

Como g tiene una raíz $t_0 \neq 0$, se tiene que $y = t_0 x^\mu$ es solución de $f(x, y) = 0$. Es importante destacar el significado de la restricción $\alpha + \mu\beta = \gamma$ de nuevo a pesar de que se hizo ya en el ejemplo anterior.

Sea $\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 : a_{\alpha\beta} \neq 0\}$. La condición de que $\alpha + \mu\beta = \gamma$ claramente significa que los puntos de $\Delta(f)$ son todos colineales, y además dicha recta tiene pendiente $-1/\mu$.

Ejemplo 12. $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 + x^6$

Figura 3.2: $\Delta(f)$



En este caso claramente $\mu = -\frac{3}{2}$ y $\gamma = 6$. Para encontrar las soluciones descritas en el ejemplo anterior de la forma $y = tx^\mu$, se sustituye este valor para y en $f(x, y) = 0$ para obtener $0 = f(x, tx^{3/2}) = x^6(t^4 - 2t^2 + 1)$, siendo $g(t) = (t^2 - 1)^2$ cuyos ceros son ± 1 . Una vez más, $y = x^{3/2}$ es solución formal de $f(x, y) = 0$.

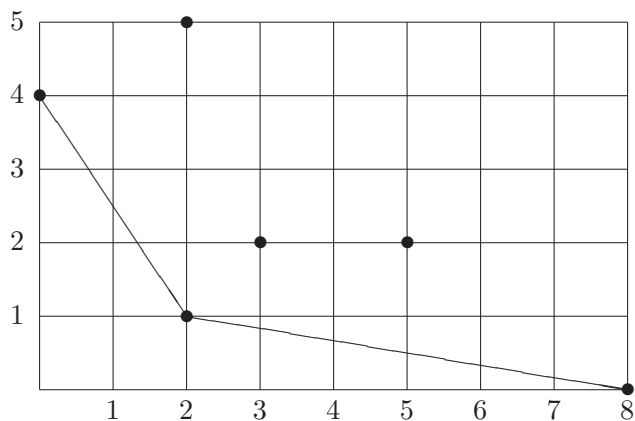
El ejemplo anterior, y el primero, muestran un polinomio cuyos exponentes, vistos como puntos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, están todos en una misma recta. Sin embargo, claramente no todos los polinomios cumplen con esta restricción.

La siguiente definición es una herramienta fundamental para lo que sigue, implementada por Newton con contribuciones de Leibiniz y Oldenburg en 1676. Para ver fragmentos de las cartas que se escribieron en el proceso se puede consultar [EB81] o bien [New60, p.20-42,110-163].

Definición 18. El **Polígono de Newton** de f es la frontera del casquete convexo generado por el conjunto $\bigcup_{p \in \Delta(f)} (p + (\mathbb{R}^+)^2)$

Ejemplo 13. $f(x, y) = y^4 + x^5y^2 + x^3y^2 + x^2y^5 + x^2y + x^8$

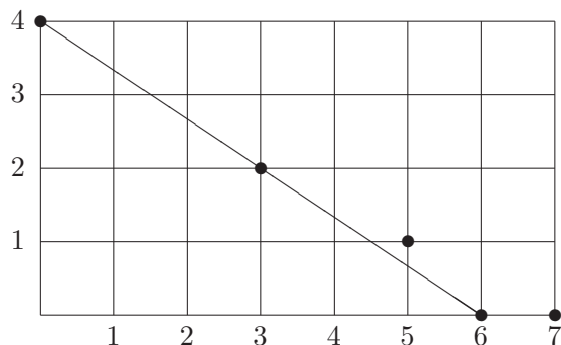
Figura 3.3: Polígono de Newton de f



Observación 8. Es importante notar que las pendientes de los segmentos del polígono de Newton de un polinomio tal deben de ser todas negativas, por construcción.

Ejemplo 14. $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$

Figura 3.4: $\Delta(f)$



En este caso los puntos de $\Delta(f)$ no son todos colineales, sin embargo podemos escribir a f como:

$$\begin{aligned} f &= f^* + h, \text{ donde} \\ f^*(x, y) &= y^4 - 2x^3y^2 + x^6, y \\ h(x, y) &= -4x^5y - x^7. \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación $y = x^{3/2}$, $f(x, x^{3/2}) = h(x, y)$, es decir, f^* se anula, como se vio en el ejemplo anterior. En general, si $-\frac{1}{\mu}$ es la menor de las pendientes de las rectas que conforman al polígono de Newton. Se define el *orden* de un monomio (solamente para esta construcción) $a_{\alpha\beta}$ como $\alpha + \mu\beta$. La solución formal deseada será entonces de la forma $y = x^{3/2} +$ términos de orden mayor. Para obtener una segunda aproximación de una solución para el polinomio original, escribiremos

$$y = x^{3/2}(1 + y_1). \quad (3.1)$$

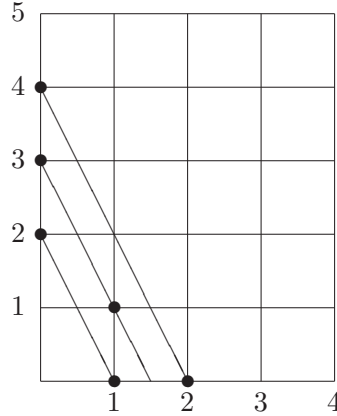
Para eliminar exponentes fraccionarios llamamos x_1 a $x^{1/2}$. Sustituyendo ahora $x = x_1^2, y = x_1^3(1 + y_1)$ en la ecuación original, se obtiene un polinomio en las nuevas variables x_1 y y_1 :

$$\begin{aligned} f(x_1^2, x_1^3(1 + y_1)) &= \\ x_1^{12}(y_1^4 + 4y_1^3 + 4y_1^2 - 4x_1y_1 - 4x_1 - x_1^2) &= \\ x_1^{12}f_1(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Considérese ahora $\Delta(f_1)$:

Esta vez $\Delta(f_1)$ consiste de tres rectas paralelas con pendiente -2 . Siguiendo el camino antes descrito, se quieren soluciones $y_1 = tx_1^{1/2}$ para la ecuación $f_1(x_1, y_1) = 0$. Recordando que el orden de un monomio $x^\alpha y^\beta$ es $\alpha + \mu\beta$, donde en este caso $\mu = \frac{1}{2}$ se sustituye $y_1 = t_1x_1^{1/2}$ en los términos de orden menor, es decir en $4y_1^2 - 4x_1$, que corresponden a los puntos que se encuentran sobre el primer segmento del Polígono de Newton de $\Delta(f_1)$, que en este caso resultó ser el único segmento. En resumen, se aplica a f_1 el tratamiento al cual fue sometido f originalmente:

$$4y_1^2 - 4x_1 = 4(t_1^2x_1 - x_1) = x_1(4t_1^2 - 4)$$

Figura 3.5: $\Delta(f_1)$ 

Los ceros del polinomio $g_1(t_1) = 4t_1^2 - 4$ son $t_1 = \pm 1$, escogemos $t_1 = 1$. Ante esta elección, $y_1 = x_1^{1/2}$. En este caso se cumple que $f_1(x_1, x_1^{1/2}) = 0$; así que el proceso termina en este paso para obtener una solución formal de f . Sustituyendo x_1, y_1 en 3.1 se obtiene que

$$y = x^{3/2}(1 + y_1) = x^{3/2}(1 + x^{1/2}) = x^{3/2} + x^{7/4}$$

es solución formal de $f(x, y) = 0$. Es importante destacar que en general este procedimiento no tiene porque terminar; a continuación se construye esta expansión en general.

3.1.1. Construcción de la expansión de Puiseux

Definición 19. Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ se dice que es regular en y de orden m si se cumple que $f(0, y) = y^m A(y)$ con $A(0) \neq 0$

Observación 9. Si un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ no es regular en y , se debe de cumplir entonces que $f(0, y) = 0$, así que sus ceros quedan parametrizados por $\gamma(t) = (0, t)$, lo cual permite considerar únicamente polinomios de esta forma en lo que sigue.

Sea $f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}[x, y]$ regular de orden m para algún $m > 1$ ($a_{0m} \neq 0$, y que $a_{0i} = 0$ para $i > m$).

Sea $-1/\mu_0$ la menor de las pendientes de los segmentos que constituyen el polígono de Newton de f . Se puede escribir a f como:

$$f(x, y) = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \gamma} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha + \mu_0 \beta > \gamma} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

donde γ es la intersección de la línea en el polígono de Newton que pasa por $(0, m)$ con pendiente $-1/\mu_0$ con el eje α , por lo que se cumple que $\gamma = m\mu_0$. Además, por construcción hay al menos dos parejas $(\alpha, \beta) \in \Delta(f)$ tales que $\alpha + \mu_0\beta = \gamma$.

Nota 1. Se asume que todas las pendientes de los segmentos del polígono de Newton son negativas, ya que, de haber una pendiente cero, y dividiría al polinomio, y entonces $y \cong 0$ sería solución de $f(x, y) = 0$.

La construcción de la solución es recursiva:

La primera solución se construye para

$$f^*(x, y) = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \gamma} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Se sustituye $y = tx^{\mu_0}$ para obtener:

$$f^*(x, tx^{\mu_0}) = x^\gamma \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m} a_{\alpha\beta} t^\beta = x^\gamma g(t).$$

Aquí g es un polinomio de grado m . Como al menos dos coeficientes $a_{\alpha\beta}$ son distintos de cero como observado anteriormente, existe $t_0 \neq 0$ raíz de g . Así se obtiene la primera aproximación, $y_0 = t_0 x^{\mu_0}$. Para efectos de notación, como $\mu_0 \in \mathbb{Q}$, $\mu_0 = p_0/q_0$ con $(p_0, q_0) = 1$, podemos definir $x_1 = x^{1/q_0}$ como el el Ejemplo 14 para poder escribir a y_0 como $t_0 x_1^{p_0}$. Antes de hacer esto, vale la pena sustituir esta primera aproximación el polinomio original para checar que no sea ya solución (como sucedió después de la segunda aproximación en el Ejemplo 14).

Ahora, $y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ se sustituye en $f(x, y) = 0$. Esto da lugar a una nueva serie $f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1))$. Notemos que $x_1^{\gamma q_0}$ divide a esta serie, ya que:

$$\begin{aligned} f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) &= \\ \sum_{\alpha + \mu_0 \beta \geq \gamma} a_{\alpha\beta} x_1^{\alpha q_0} x_1^{\beta p_0} (t_0 + y_1)^\beta &= \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha+\mu_0\beta \geq \gamma} a_{\alpha\beta} x_1^{\alpha q_0 + p_0 \beta} (t_0 + y_1)^\beta.$$

Además como $\alpha + \mu_0\beta \geq \gamma$, se tiene que $\alpha + p_0/q_0\beta \geq \gamma$. Así, podemos escribir a esta nueva serie como:

$$f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) = x_1^{\gamma q_0} f_1(x_1, y_1),$$

donde $f_1(x_1, y_1)$ es regular de orden $m_1 \leq m (= m_0)$, ya que, al elevar $(t_0 + y_1)$ a la potencia β correspondiente, los términos serán de orden menor o igual que el polinomio original (pensando en la noción usual de orden esta vez por el contexto).

Por fines ilustrativos a f se le llamará f_0 .

En el paso $n + 1$, (considerando que el paso 1 es cuando $f_i = f_0$) se construye el polígono de Newton de la serie f_n , se considera $-1/\mu_n$ la menor pendiente de los segmentos que lo constituyen,

$$(\mu_n = p_n/q_n),$$

se obtiene una solución aproximada, como en el caso base:

$$y_n = t_n x_n^{\mu_n}.$$

De nuevo, hay que revisar que y_n no sea solución de f_n . Si es así, se ha obtenido una solución. Si no, se define

$$x_{n+1} = x_n^{1/q_n};$$

para finalmente sustituir $y_n = x_{n+1}^{p_n}(t_n + y_{n+1})$ en $f_n(x_n, y_n)$. Al hacer esto se obtiene

$$f_n(x_{n+1}^{q_n}, x_{n+1}^{p_n}(t_n + y_{n+1})) = x_{n+1}^{\gamma n q_n} f_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$$

donde f_{n+1} tiene orden $m_{n+1} \leq m_n$.

Así se obtienen series convergentes y_n , $n \in \mathbb{N}$; y sustituyendo todo en la solución original $y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= x^{\mu_0}(t_0 + x_1^{\mu_1}(t_1 + x_2^{\mu_2}(t_2 + \dots))) \\ &= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x^{\mu_0 + \mu_1/q_0} + t_2 x^{\mu_0 + \mu_1/q_0 + \mu_2/q_0 q_1} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para completar la prueba del teorema enunciado al inicio de éste capítulo, es necesario utilizar la siguiente afirmación.

Proposición 5. *En la expansión obtenida anteriormente expresada en 3.2, existe $n \in \mathbb{N}$ que es común denominador de todos los exponentes involucrados.*

Para la prueba es necesario el siguiente lema.

Lema 5. *Si $m_i = m_{i+1}$, entonces $\mu_i \in \mathbb{N}$*

Prueba. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $i = 0$. Sustituyendo $x = x_1^{q_0}$, y $y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ en la ecuación

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\gamma} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\mu_0\beta>\gamma} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \text{ se tiene que} \\ x_1^{\gamma q_0} f_1(x_1, y_1) &= f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) \\ &= x_1^{\gamma q_0} \left(\sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta}(t_0 + y_1)^\beta + x_1(\dots) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_1(0, y_1) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta}(t_0 + y_1)^\beta = g(t_0 + y_1).$$

Aquí t_0 es una solución no cero de la ecuación $g(t) = 0$, y g es un polinomio de grado $m = m_0$. El número m_1 es simplemente el orden del cero $y_1 = 0$ en $f_1(0, y_1)$, y por tanto el orden del cero t_0 de g . Si, como se asumió, $m_1 = m_0 = m$, entonces g es de la forma

$$g(t) = c(t - t_0)^m \quad (c \neq 0).$$

En particular, el coeficiente de t^{m-1} en el polinomio:

$$g(t) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta}t^\beta$$

es distinto de cero, *i.e.* $a_{\alpha, m-1} \neq 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha + \mu_0(m-1) = \mu_0 m$. Se sigue que $\mu_0 = \alpha \in \mathbb{N}$, como se quería. \square

Prueba de 5. Las series f_i son todas y_i -regulares de orden m_i , y los números m_i forman una sucesión decreciente de números naturales:

$$m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots$$

Como la sucesión de los m_i es de números naturales, ésto último sólo puede pasar un número finito de veces. Así, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo i mayor o igual que i_0 , $m_i = m_{i_0}$, lo cual, por el Lema 5 implica que $\mu_i \in \mathbb{N}$. Se infiere entonces que $q_i = 1$ para todo $i \geq i_0$ y por tanto, $n = q_1 q_2 \dots q_{i_0-1}$ es un común denominador para todos los coeficientes de la expansión. \square

La prueba del Teorema 11 queda concluida con esto; por formalidad se expone en el siguiente renglón.

Prueba del Teorema 11. La construcción anterior junto con la Proposición 5 aseguran la existencia de una serie formal de potencias racionales $y(x)$ que cumple $f(x, y(x)) = 0$, y que es de la forma $y = \sum a_i x^{i/n}$. Haciendo $x = t^n$, se tiene que $y = \sum a_i t^i$ y que $f(t^n, y(t)) = 0$. \square

A continuación se probará que, para cualquier curva de la forma $X = V(f)$, la expansión obtenida anteriormente induce una parametrización local de la curva alrededor de un punto singular. Se necesitará un resultado técnico conocido como el Teorema de Preparación de Weirstrass, que, en efecto, prepara a los polinomios para el estudio de sus ceros.

Teorema 12 (Teorema de Preparación de Weirstrass). *Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ regular en y de orden m . Existen $u \in \mathbb{C}[x, y]$, $a_i \in \mathbb{C}[x]$ tales que*

$$f(x, y) = u(x, y) \left(y^m + \sum_{i=0}^{s-1} a_i(x) y^i \right); u(0, 0) \neq 0.$$

Una prueba directa de este teorema se puede encontrar en [Wal04, p.21-22]; se basa en establecer un algoritmo de la división en $\mathbb{C}[x, y]$. Cabe mencionar que la existencia de tal u implica que de hecho $u(x, y) \neq 0$ en una vecindad del origen, lo cual reduce el estudio local de los ceros de f al estudio de los ceros de $y^m + \sum_{i=0}^{s-1} a_i(x) y^i$. A los polinomios de esta forma se les conoce como polinomios de Weirstrass.

El siguiente teorema no solamente implica la convergencia local de la expansión de Puiseux (que ya puede ser vista como una serie en potencias enteras, y por tanto, uni-valuada), sino que además muestra que ésta induce una parametrización de la curva considerada alrededor de su punto singular.

Teorema 13. *Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ y -regular de orden $m > 0$ irreducible. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ hay $\delta > 0$ tal que: Si*

$$X = \{(x, y) \in U_{\varepsilon, \delta} : f(x, y) = 0\}$$

es la variedad de f restringida a la región

$$U_{\varepsilon, \delta} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \|y\| < \varepsilon, \|x\| < \delta\}$$

Entonces existe una serie de potencias convergente $y(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ tal que

$$\pi : B \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\pi(z) = (z^m, y(z))$$

donde $B = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < \delta^{1/m}\}$, es holomorfa y sobre (con X como contradominio); además,

$$\pi : B - \{0\}$$

es un biholomorfismo y $\pi^{-1}(0) = 0$.

Para la prueba serán necesarios dos lemas, se exponen antes para obtener la mayor brevedad posible al hacer la prueba.

Lema 6. *Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ y -regular de orden $m > 0$ irreducible. Se cumple que $V(f) \cap V(\frac{\partial f}{\partial y})$ es un conjunto de puntos aislados.*

Una prueba directa de lo anterior se puede encontrar en [EB81].

Lema 7. *Sea f como en el lema anterior. Para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in \{x \in \mathbb{C} : |x| < \delta\} = D_\delta$, $f(x_0, y)$ tiene exactamente m ceros en $U_{\varepsilon, \delta}$. contando sus respectivas multiplicidades.*

Demostración. Primero se escribe a f como:

$$f(x, y) = y^m + \sum_{i=1}^m c_i(x)y^{m-i}.$$

Se quiere probar primero que para ε suficientemente pequeño existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0| \leq \delta$, entonces

$$\varepsilon^{m-1}|c_1(x_0)| + \cdots + |c_m(x_0)| < \varepsilon^m.$$

Si se asume que esto ya se tiene probado, entonces se tiene que

$$|c_1(x_0)y^{m-1} + \cdots + c_m(x_0)| \leq \epsilon^{m-1}|c_1(x_0)| + \cdots + |c_m(x_0)| < \epsilon^m = |y^m| \text{ si } |y| = \epsilon$$

El teorema de Rouché asegura entonces que, dentro de $U_{\epsilon, \delta}$, $f(x_0, y)$ tiene exactamente m ceros, contando multiplicidades.

Si $m = 1$, por continuidad de $c_1(x)$, y dado que $c_1(0) = 0$, se cumple que para todo ϵ , existe $\delta > 0$ tal que $|c_1(x_0)| < \epsilon$ cada vez que $|x_0| \leq \delta$.

Si se procede por inducción sobre m , el paso inductivo asegura, para $\epsilon > 0$ la existencia de una $\delta^\circ > 0$ tal que

$$\epsilon^{m-2}|c_1(x_0)| + \cdots + |c_{m-1}(x_0)| < \epsilon^{m-1}.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por ϵ se obtiene:

$$\epsilon^{m-1}|c_1(x_0)| + \cdots + \epsilon|c_{m-1}(x_0)| < \epsilon^m.$$

Sea $\delta^{\circ\circ}$ tal que $c_m(x_0) < \frac{\epsilon^{m-s}}{2}$ si $|x_0| \leq \delta$ donde $s = \epsilon^{m-1}|c_1(x_0)| + \cdots + \epsilon|c_{m-1}(x_0)|$. Si $\delta = \min\{\delta^{\circ\circ}, \delta^\circ\}$, se tiene el resultado deseado, y, por lo anterior, se concluye la prueba. \square

Prueba del Teorema 13. Supóngase, sin perder generalidad, que f es un polinomio de Weirstrass como en el Lema 7. Por el Lema 6, $V(f) \cap V(\frac{\partial f}{\partial y})$ consta de puntos aislados. Esto junto con el Lema 7 implica que si ϵ y δ son suficientemente pequeños, y $x_0 \in D_\delta - \{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ en los ceros de f , es decir, f tiene m ceros simples. Si y_0 es uno de estos ceros, el teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función localmente holomorfa $\bar{y}(x)$ que parametriza X localmente, lo cual prueba que X es localmente una variedad suave alrededor de (x_0, y_0) , y la proyección

$$\begin{aligned} X &\rightarrow D_\delta \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

es un biholomorfismo local alrededor de (x_0, y_0) . Se concluye entonces que $X - \{0\} \rightarrow D_\delta - \{0\}$ es una cubierta en el sentido topológico.

Además, si $z_0 \in B - 0$ (donde B es como en el enunciado del Teorema 13 con la δ propuesta) y $y_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $f(z_0^m, y_0) = 0$, hay un único homeomorfismo

$$g : B - \{0\} \rightarrow X - \{0\}$$

$$z_0 \mapsto (z_0^m, y_0)$$

y hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow g & \uparrow \pi \\ & & X \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} h : B - \{0\} &\rightarrow D_\delta - \{0\} \\ z &\mapsto z^m \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi : X - \{0\} &\rightarrow D_\delta \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

La función g es de la forma $g(z) = (z^m, y(z))$, y por construcción se puede concluir que $y(z)$ es holomorfa. Además $g : B - \{0\} \rightarrow X - \{0\}$ es un biholomorfismo pues $g^{-1}(x, y)$ está dado por una rama de la función raíz n -ésima de x . \square

Corolario 2. Dado $f \in \mathbb{C}[x, y]$, la serie $y(z) = \sum a_r z^r$ dada por el Teorema 11 es una serie convergente.

Prueba. Sea, sin pérdida de generalidad, $f(x, y)$ un polinomio de Weirstrass de grado m . Si f es irreducible, el Teorema 13 asegura la existencia de una serie convergente $y(x^{1/m})$ que satisface la ecuación $f(x, y) = 0$. Se concluye entonces que las series

$$y(x^{1/m}), y(e^{2\pi i/m} x^{1/m}), \dots, y(e^{2\pi i(m-1)/m} x^{1/m})$$

son las m raíces del polinomio $f(x, y)$. Como la serie obtenida por el teorema 11 cumple también la ecuación, y no se pueden tener más de m soluciones formales, necesariamente ésta serie coincide con una de las anteriores, lo cual implica directamente su convergencia. \square

El teorema anterior no solamente contiene los resultados que habíamos deseado. Lo que dice el teorema anterior es que la expansión que obtuvimos mediante el proceso de aproximación anterior es una *resolución de singularidades* para X en el siguiente sentido:

Definición 20. Sea X un conjunto analítico (donde un conjunto analítico es el conjunto de ceros de una colección de funciones analíticas *i.e.* un conjunto algebraico es un conjunto analítico) y sea $\Sigma(X)$ su conjunto singular. Una resolución de las singularidades de X es una aplicación propia, suprayectiva y holomorfa $\pi : X' \rightarrow X$ donde X' es una variedad compleja y

$$\pi : X' - \pi^{-1}(\Sigma(X)) \rightarrow X - \Sigma(X)$$

es un biholomorfismo. Además, $\pi^{-1}(\Sigma(X))$ es un subconjunto denso en ninguna parte de X' .

Definición 21. La serie obtenida anteriormente $y = \sum a_i x^{i/n}$ es la **Expansión de Puiseux** asociada a f .

Se concluye así que la expansión de Puiseux induce una resolución de las singularidades de su variedad de ceros $V(f) = X$.

3.2. Nudos y enlaces

Ejemplo 15. Considérese $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio irreducible cuya expansión de Puiseux sea $y = x^{3/2}$.

Una parametrización de la intersección $V(f) \cap S^3$ está dada por:

$$\varphi(t) = (e^{2\pi it}, e^{3\pi it}) \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.3)$$

Cuando $t \in [0, 1]$, $x(t)$ da una vuelta a la circunferencia unitaria correspondiente, mientras que $y(x(t))$ da una vuelta y media. Así que cuando $x(t)$ da dos vueltas, $y(x(t))$ da tres, y el nudo parametrizado por φ es un nudo toroidal de tipo $(2, 3)$.

Este ejemplo ya se ha cubierto de muchas maneras a lo largo de este trabajo, hasta ahora. A continuación se definen los *pares de Puiseux*, que servirán como invariantes para clasificar a las curvas planas con punto singular de acuerdo con el nudo asociado a sus intersecciones con esferas de radio suficientemente pequeño.

3.2.1. Pares de Puiseux

Definición 22. Se definen los pares de Puiseux recursivamente. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ con expansión de Puiseux $y = \sum a_k x^k$, $a_k \neq 0, k \in \mathbb{Q}, 1 \leq k$. Sea k_1 el mínimo exponente no entero. Es posible escoger un tal k_1 ya que si todos los k fuesen enteros, f sería un polinomio regular en $(0, 0)$. Ese caso no será considerado.

Se puede entonces escribir a este número como

$$k_1 = n_1/m_1, (n_1, m_1) = 1$$

y ya sabemos que $n_1 > m_1$. El primer par de Puiseux se define como (m_1, n_1)

Si $k_j = n_j/m_j$ es el j -ésimo par de Puiseux, se define el $j+1$ -ésimo par de Puiseux como (m_{j+1}, n_{j+1}) si es que existe $k_{j+1} = n_{j+1}/m_1 \cdots m_j \cdot m_{j+1}$ tal que k_{j+1} no se puede expresar de la forma $k_{j+1} = n_{j+1}/m_1 \cdots m_j$ y $(m_{j+1}, n_{j+1}) = 1$. Si no se da el caso, se dirá que f tiene j pares de Puiseux, que son precisamente

$$(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_j, n_j)$$

En vista de la Afirmación 5, los pares de Puiseux de un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ siempre son finitos, ya que como hay un común denominador para todos los exponentes de la expansión de Puiseux, el procedimiento descrito en la anterior definición será irremediamente finito.

Construcción del nudo o enlace asociado En virtud del ejemplo anterior, en el cual, dado $f \in \mathbb{C}[x, y]$, se parametriza $x(t) = e^{2\pi it}$ y los puntos $(x(t), y(x(t)))$ (donde $y(x)$ es la parametrización de Puiseux en el 0) resultan en un nudo, el enlace asociado a la singularidad de f en 0 será precisamente el conjunto de los puntos $(x(t), y(x(t)))$ para $t \in \mathbb{R}^+$.

Definición 23. Dada f como en la construcción anterior, el conjunto de puntos $(x(t), y(x(t)))$ para $t \in \mathbb{R}^+$, donde $y(x)$ es la expansión de Puiseux correspondiente y $x(t) = \delta e^{2\pi it}$ para δ suficientemente pequeño es el *enlace* asociado a f en el punto singular $(0, 0) \in \mathbb{C}$.

Definición 24. Sean X, Y variedades suaves, y

$$f, g : X \rightarrow Y.$$

Se dice que

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

es una *isotopía* si se cumple que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, y, además, para toda $s \in [0, 1]$ se tiene que $h_s(x) = H(x, s)$ es un encaje suave.

Teorema 14. Sean $X, Y \subset \mathbb{C}^2$ dos curvas algebraicas planas irreducibles con punto singular en el origen, dadas por polinomios f, g con los mismos pares de Puiseux. Los nudos asociados a ambas curvas son isotópicamente equivalentes; es decir, existe una isotopía entre las correspondientes parametrizaciones dadas por las expansiones de Puiseux de f y de g , respectivamente.

Lo que nos dice este teorema es que dada una expansión de Puiseux $y(x)$, y los pares de Puiseux correspondiente $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_k, n_k)$, los enlaces determinados por los puntos $(x(t), y(t))$ y $(x(t), \bar{y}(x(t)))$ donde

$$\bar{y}(x) = x^{n_1/m_1} + x^{n_2/m_1 \cdot m_2} + \dots + x^{n_k/m_1 \cdots m_k}$$

son isotópicamente equivalentes.

Antes de proceder a probar este teorema se intentará que su contenido resulte natural, siendo la prueba una mera formalización de lo evidente.

Ejemplo 16. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con expansión de Puiseux

$$y = x^{3/2} + x^{7/4}.$$

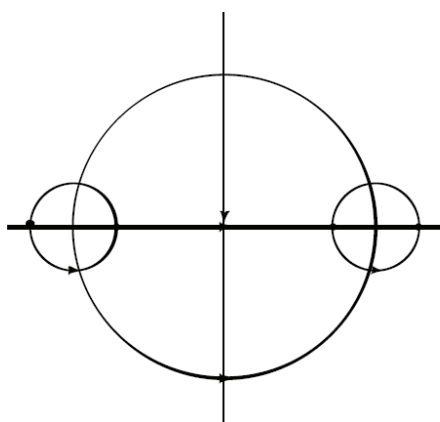
Para analizar el nudo asociado con cuidado, considérese primero la expansión asociada más sencilla $y = x^{3/2}$. Para el nudo correspondiente en S_ε se tiene la parametrización $(x, y) = (\varepsilon e^{2\pi it}, \varepsilon^{3/2} e^{3\pi it})$. Cada valor de x determina 2 valores de y , que están sobre el círculo con centro en 0 y radio $\varepsilon^{3/2}$. Para la curva en cuestión, la parametrización más natural del nudo que corresponde a la esfera S_ε es

$$(x, y) = (\varepsilon e^{4\pi it}, \varepsilon^{3/2} e^{6\pi it} + \varepsilon^{7/4} e^{7\pi it}).$$

Esta vez, a cada valor de x le corresponden 4 valores de y . Dado que $\varepsilon^{7/4}$ es “pequeño” comparado con $\varepsilon^{3/2}$ para $\varepsilon < 1$, es natural pensar que los puntos de éste nudo están cerca de los puntos anteriores. De hecho, si se toma un valor fijo de t y trazan primero un círculo de radio $\varepsilon^{3/2}$ y, luego, para cada valor correspondiente a y en la expresión más simple, se traza un círculo con centro en este punto y radio $\varepsilon^{7/4}$, acomodando sobre cada uno

de estos nuevos círculos los dos valores de y correspondientes, se obtiene un “corte” inicial del nudo, es decir, mientras x gira alrededor del círculo una vez, los puntos trazados se mueven al rededor de estos círculos auxiliares $7/4$ veces.

Figura 3.6: $y = x^{3/2} + x^{7/4}$



Ejemplo 17. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con expansión de Puiseux $y = x^{3/2} + x^{11/2}$. En este caso se piensa como en el ejemplo anterior, solo que al considerar la curva

$$(x, y) = (\varepsilon e^{4\pi it}, \varepsilon^{3/2} e^{6\pi it} + \varepsilon^{11/2} e^{7\pi it}).$$

a cada valor de x le corresponden solamente dos valores de y , con lo que se concluye que para $t \in \mathbb{R}^+$, cuando (x, y) regrese a su valor inicial en la curva $(x, y) = (\varepsilon e^{2\pi it}, \varepsilon^{3/2} e^{3\pi it})$, también lo habrá hecho en la curva de este ejemplo.

La razón por la cual se expusieron los dos ejemplos anteriores no solamente es para asentar la manera de construir los nudos asociados a cada singularidad, sino destacar diferencias entre los nudos asociados a curvas dadas por polinomios con uno y dos pares de Puiseux, respectivamente, aun cuando éstos tengan un par de Puiseux en común. Explícitamente, lo anterior dice que el nudo asociado a la curva con expansión de Puiseux $y = x^{3/2} + x^{11/2}$ se parece mucho al nudo asociado a las curvas con expansión de Puiseux $y = x^{3/2}$, mientras que el nudo asociado a la curva con expansión de Puiseux

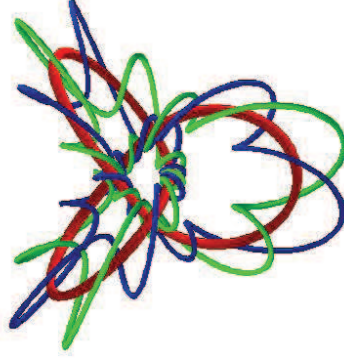


Figura 3.7: Nudo asociado a f con expansión de Puiseux $y = x^{3/2} + x^{11/2}$

$y = x^{3/2} + x^{7/4}$ parece tener completamente otra naturaleza. El Teorema 14 formaliza estas ideas.

Antes de finalmente exponer la prueba, se hará un pequeño análisis que sugiere como proceder. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$, con parametrización de Puiseux $x = t^m$; $y = \sum_{r=n}^{\infty} a_r x^r$. Se usará la siguiente notación. Si el j -ésimo par de Puiseux es (n_j, m_j) , se denotará $\frac{\beta_j}{m} = \frac{n_j}{m_j}$. Se define una sucesión de curvas irreducibles de la siguiente manera:

$$V_k \text{ está dada por la parametrización } x = t^m; \quad y = \sum_{r=n}^k a_r x^r$$

Al nudo asociado se le denotará por $K_k = V_k \cap S_\epsilon$, para valores de ϵ que sean adecuadamente pequeños.

Analicemos tres casos para valores de k .

- Si $k < \beta_1$, entonces y_k es un polinomio en x , lo cual significa que se tiene un único valor de y por cada valor de x , así que K_k no está anudado.
- Si $k = \beta_1$, se considera, como en los ejemplos, un círculo de radio $|a_k| \epsilon^{n_1/m_1}$ con centro en y_{k-1} . Por cada valor de x , hay $\frac{1}{m_1}$ puntos distribuidos sobre este círculo, que de hecho corresponden a las m_1 raíces de la unidad. Estos puntos giran uniformemente mientras x se mueve a lo largo del círculo de radio ϵ , y cada uno de ellos corresponde a $\frac{m}{m_1}$ valores de x .

- Si $\beta_1 < k < \beta_2$, los términos después de $x^{\beta_1/m}$ forman un polinomio en x^{1/m_1} , lo cual significa que aún hay m_1 valores de y_k por cada valor de x . El resultado es que la curva que describe al nudo correspondiente simplemente oscila alrededor del nudo dado por el caso anterior. En efecto, todos estos nudos K_k son isotópicos al nudo K_{β_1} siendo la isotopía entre ellos

$$x = \varepsilon e^{i \frac{m}{m_1} \theta};$$

$$y = \sum_{r=n}^{\beta_1} a_r e^{i r \frac{\theta}{m_1}} \varepsilon^{r/m} + \sum_{r=\beta_1+1}^k s a_r e^{i r \frac{\theta}{m_1}} \varepsilon^{r/m}$$

Prueba del Teorema 14. Se considera la curva con la notación descrita arriba, estando el nudo asociado K_ε dado por la parametrización

$$x = \varepsilon e^{im\theta}; \quad y = \sum_{r=n}^{\infty} a_r \varepsilon^{r/m} e^{ir\theta}$$

Para $s \in [0, 1]$ se define la siguiente transformación, que se quiere que sea una isotopía:

$$x = \varepsilon e^{im\theta}; \quad y = \sum_{r=n}^{\infty} s_r a_r \varepsilon^{r/m} e^{ir\theta},$$

donde $s_r = 1$ si $r = \beta_k$ para alguna k , y en los demás casos, $s_r = s$. Para cada $s \in [0, 1]$, la fórmula anterior define una aplicación de S^1 a S^3 . Para probar que, en efecto, esto define una isotopía, hay que probar que su derivada no se anula y que es inyectiva. La primera parte se tiene ya que $dx/d\theta \neq 0$. Para la inyectividad, hay que ver que θ y $\theta + \frac{2\pi k}{m}$ determinan distintos valores de y a menos que $m|k$. Para asegurar esto, se probará que para cada q , la suma de los términos que corresponden a $\beta_q < k < \beta_{q+1}$ es estrictamente menor que la distancia entre dos puntos sobre el q -ésimo círculo correspondiente a la descripción anterior. Se hará para el último par de Puiseux, digamos que para $q = w$ ya que éste es el caso más difícil (pues los sumandos que hay que acotar no son necesariamente finitos). Sea R tal que $|a_r| \varepsilon^{r/m}$ esté uniformemente acotado, por, supóngase, M . Así, si ε es pequeño,

$$\sum_{r=\beta_{w+1}}^{\infty} |a_r| \varepsilon^{r/m} \leq \sum_{r=\beta_{w+1}}^{\infty} MR^{-r} \varepsilon^{r/m} =$$

$$\frac{M\varepsilon^{(\beta_{w+1})/m}}{R^{\beta_w(R-\varepsilon^{1/m})}} \text{ es de orden mayor que } \varepsilon^{\beta_w/m},$$

como se quería.

Así, el nudo original es isotópico al nudo dado por la parametrización:

$$x = t^m; \quad y = \sum_{q=1}^w a_{\beta_q} t^{\beta_q}.$$

Se definen los términos auxiliares $c^q = a_{\beta_q}$ y con éstos, la siguiente isotopía:

$$x = t^m; \quad y = \sum_{q=1}^w e s l_q t^{\beta_q}; \quad \text{para } s \in [0, 1].$$

Queda probado que los nudos dados por polinomios con los mismos pares de Puiseux son isotópicos.

□

Capítulo 4

Resolución mediante explosiones (Blow-Ups)

4.1. La explosión o blow-up de un punto

Considérese el siguiente espacio de rectas que pasan por el origen en \mathbb{C}^2 , sin contar el origen, conocido comúnmente como el espacio proyectivo complejo de dimensión uno:

$$\mathbb{C}P^1 = \{l \neq 0 : l \text{ es una línea que pasa por } \bar{0}\} = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \sim$$

donde

$$(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow (z, w) = \lambda(x, y) \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Lo que se desea hacer es obtener un nuevo espacio $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ y una proyección $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ de modo que el nuevo espacio difiera de \mathbb{C}^2 solamente en la preimagen bajo π del origen. El objetivo de esto es considerar curvas en \mathbb{C}^2 como se ha estado haciendo, y luego considerar sus preimagenes alrededor de su punto singular (que se asumirá el origen, como siempre) para obtener una nueva curva que eventualmente será no singular. El nuevo espacio se construirá pegando $\mathbb{C}P^1$ en el origen como a continuación:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{C}^2} &= \{(x; l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 : x \in l\} \\ \pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x; l) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Afirmación 3. *La proyección π tiene las siguientes propiedades:*

- i. La restricción $\pi|_{\pi^{-1}(\mathbb{C}^2 - 0)} : \pi^{-1}(\mathbb{C}^2 - 0) \rightarrow \widetilde{\mathbb{C}^2}$ es uno-a-uno.*
- ii. La preimagen $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{C}P^1$*
- iii. El conjunto $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ es una variedad compleja de dimensión 2 (compleja).*

Prueba. *i* Es claro ya que por cada $z \in \mathbb{C}^2 - 0$ hay una única recta que pasa por éste y el cero.

ii $\pi^{-1}(0) = \{(0; l) : l \text{ pasa por el cero}\}$ por definición.

iii Ya que

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} = \{(x_0, x_1; z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 : x_0 z_1 = x_1 z_0\}$$

Las cartas coordenadas que establecen este inciso están dadas por:

$$U_0 = \{(x; z) \in \widetilde{\mathbb{C}^2} : z_0 \neq 0\}$$

$$U_1 = \{(x; z) \in \widetilde{\mathbb{C}^2} : z_1 \neq 0\}$$

con las coordenadas:

$$u_0 = \frac{z_1}{z_0}; v_0 = x_0$$

$$u_1 = \frac{z_0}{z_1}; v_1 = x_1$$

y el cambio de coordenadas correspondiente es:

$$u_1 = u_0^{-1}$$

$$v_1 = u_0 v_0$$

□

La proyección π está dada por las siguientes ecuaciones en las cartas coordenadas correspondientes:

$$\pi(u_0, v_0) = (v_0, u_0 v_0)$$

$$\pi(u_1, v_1) = (u_1 v_1, v_1)$$

En efecto, recordando que

$$u_0 = \frac{z_1}{z_0}; v_0 = x_0,$$

$$(v_0, u_0 v_0) = (x_0, \frac{z_1}{z_0} x_0) = (x_0, x_1).$$

Análogamente, un cálculo directo justifica la expresión de π en U_1 .

Definición 25. A $\pi^{-1}(0)$ se le llama el *divisor excepcional*; se le denotará por E . Es importante darse cuenta que el divisor excepcional está definido por $v_1 = 0$ en U_1 y por $v_0 = 0$ en U_0 .

Definición 26. A $(\widetilde{\mathbb{C}^2}, \pi)$ se le llama la *explosión del punto* $(0, 0)$ en \mathbb{C}^2 , también conocido como el *blow-up* del origen en \mathbb{C}^2 .

Sea $f \in \mathbb{C}^2$ con el origen como punto singular. Lo siguiente que interesa es estudiar la curva

$$(f \circ \pi)^{-1}(0) = \pi^{-1}(V(f)) = \pi^{-1}(f^{-1}(0)).$$

Ejemplo 18. Considérese $f(x, y) = y^2 - x^3$. La nueva curva $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ en ambas cartas, U_1 y U_0 está dada por las ecuaciones:

$$U_0 : (f \circ \pi)^{-1}(0) = \{f(v_0, u_0 v_0) = 0\} =$$

$$\{v_0^3 = u_0^2 v_0^2\} = \{v_0 = u_0^2\}$$

ya que en esta carta $v_0 \neq 0$. El hecho de poder dividir entre v_0 intuitivamente justifica su nombre de divisor excepcional. Además, al cancelar el divisor excepcional, le estamos quitando a la nueva curva copias en U_0 de E , que es justo la preimagen del punto singular, en este caso el origen, estudiando así únicamente los puntos en la preimagen de la parte no singular de la curva original. En este caso, la curva obtenida ya no es singular, dado que $\frac{\partial(f \circ \pi)^{-1}}{\partial v_0} = 1 \neq 0$. En la carta U_1 se tiene un comportamiento similar.

El ejemplo anterior exhibe de alguna manera la manera en que la curva se vuelve menos singular al explotar sus puntos singulares. Sin embargo, como ilustra el siguiente ejemplo, hay veces (muchas) en las cuales no es suficiente explotar un punto singular una sola vez para conseguir una curva no singular:

Ejemplo 19. Sea $f(x, y) = y^2 - x^5$ veamos de nuevo la expresión de $f \circ \pi$ en la carta U_0 :

$$(f \circ \pi)(u_0, v_0) = f(v_0, u_0 v_0) = u_0^2 v_0^2 - v_0^5.$$

La nueva curva esta definida entonces, ya cancelando el divisor excepcional, por:

$$u_0^2 = v_0^3$$

que es básicamente la curva original del ejemplo anterior.

Para lo siguiente se considerará una serie de potencias convergente $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Se escribe a f como:

$$f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+k}(x, y) + \dots$$

donde f_j es homogéneo de grado j .

Entonces, en U_0 :

$$f \circ \pi(u_0, v_0) = f(v_0, u_0 v_0) = v_0^m (f_m(1, u_0) + v_0^k f_{m+k}(1, u_0) + \dots);$$

y en U_1 :

$$f \circ \pi(u_1, v_1) = f(v_1 u_1, v_1) = v_1^m (f_m(u_1, 1) + v_1^k f_{m+k}(u_1, 1) + \dots)$$

Se denotará por X' a la nueva curva dada por las ecuaciones que resultan al cancelar el divisor excepcional m veces en las ecuaciones anteriores.

Definición 27. A la curva X' definida por

$$f_1 = f_m(1, u_0) + v_0^k f_{m+k}(1, u_0) + \dots \text{ en } U_0, \text{ y por}$$

$$f_1 = f_m(u_1, 1) + v_1^k f_{m+k}(u_1, 1) + \dots$$

en U_1 , se le llama la *transformada estricta* de la curva $X = V(f)$, o la transformada estricta de f en el origen.

Geoméricamente, la transformada estricta X' es la cerradura topológica de la preimágen $\pi^{-1}(V(f)/\{0\})$. Intuitivamente X' será obtenida fijándose en la preimágen de la curva original sin el punto singular y luego “pegarle” los puntos que le falten, correspondientes al divisor excepcional.

Afirmación 4. *La transformada estricta X' interseca al divisor excepcional un número finito de veces.*

Prueba. En U_0 los puntos de intersección de la transformada estricta con el divisor excepcional $\pi^{-1}(0)$ están dados por los puntos $(u_0, 0)$ tales que $f_m(1, u_0) = 0$, y en U_1 por los puntos $(u_1, 0)$ tales que $f_m(u_1, 1) = 0$; esto se tiene directamente de la expresión de la transformada estricta en cada una de las cartas coordenadas. \square

Observación 10. Los puntos determinados por esta intersección corresponden a los puntos que cumplen la ecuación homogénea $f_m(u, v) = 0$. Esto significa que la transformada estricta de f interseca al divisor excepcional justamente en los puntos del espacio proyectivo que corresponden a las rectas contenidas en el cono tangente a $X = V(f)$ en el 0; donde éste es el conjunto de puntos (x, y) en \mathbb{C}^2 que cumplen la ecuación $f_m(x, y) = 0$.

En el último ejemplo se ilustró que si se desean eliminar las singularidades de una curva, una sola explosión del punto singular no es siempre suficiente. Dado que los puntos que “corresponden” al punto singular original son los puntos de intersección del divisor excepcional y la transformada estricta de f , y estos son finitos por lo anterior, se puede pensar en una segunda explosión que consistiría en explotar estos puntos.

Por la Afirmación 3, $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ es una variedad suave de dimensión compleja dos, así que explotar un punto ahí, por ser originalmente un procedimiento local, no tiene porque cambiar. Además, como solamente interesa explotar los puntos correspondientes al cono tangente (observación anterior), que son finitos, se puede hablar de cadenas de explosiones con sus proyecciones correspondientes, siempre teniendo procedimientos puramente locales.

Ejemplo 20. Sea $f(x, y) = y^8 - x^{11}$, $X = V(f)$. El punto singular de f es el origen, y consideramos la primera explosión en la carta en la cual $(x, y) = (y_1, x_1 y_1)$. Dado que sólo se trabajará en una carta a la vez, se distinguirán las coordenadas correspondientes a la n -ésima explosión como (x_n, y_n) . La transformada estricta es

$$f_1(x_1, y_1) = x_1^8 - y_1^3.$$

Cabe destacar que en la otra carta coordenada la transformada estricta define una curva que sólo es el eje de las x (en las coordenadas correspondientes).

En divisor excepcional está dado por $y_1 = 0$. Para la segunda explosión, que se hará en el punto singular de f_1 , se toman las coordenadas:

$$(x_1, y_1) = (y_2, x_2 y_2).$$

El nuevo divisor excepcional E_2 está dado por $y_2 = 0$, y la transformada estricta de f_1 es:

$$f_2(x_2, y_2) = y_2^5 - x_2^3.$$

Se vuelve a explotar el punto singular de f_2 , esta vez con:

$$(x_2, y_2) = (x_3 y_3, y_3); \text{ para obtener la tercer transformada estricta}$$

$$f_3(x_3, y_3) = y_3^2 - x_3^3.$$

De nuevo el divisor excepcional corresponde a $y_3 = 0$; y la última explosión está dada por

$$(x_3, y_3) = (y_4, x_4 y_4),$$

siendo la transformada correspondiente en este caso, $f_4(x_4, y_4) = x_4^2 - y_4$. A pesar de que ésta curva es ya no singular, se puede eliminar la tangencia que queda haciendo una última explosión en el punto de intersección con el divisor excepcional $y_4 = 0$:

$$(x_4, y_4) = (y_5, x_5 y_5).$$

La transformada estricta en este caso está definida por $f_5(x_5, y_5) = y_5^5 - x_5^5$, la cual interseca al divisor excepcional $y_5 = 0$ transversalmente.

El siguiente teorema asegura que lo que se hizo en el ejemplo anterior es cierto en general para curvas algebraicas planas:

4.2. Teorema de resolución de singularidades mediante finitas explosiones

A continuación se introducen un par de conceptos fundamentales en el desarrollo de lo que sigue, sin los cuales el objetivo de éste capítulo ni siquiera se puede enunciar correctamente. Primero es necesario definir la multiplicidad o grado de $f \in \mathbb{C}[x, y]$ en un punto $z \in V(f)$.

4.2. TEOREMA DE RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES MEDIANTE FINITAS EXPLOSIONES

Definición 28. Sea $f(x, y)$ una serie de potencias convergente en una vecindad del origen. Si $f = f_m + f_{m+k} + \dots$ es la expresión de f como suma de polinomios homogéneos, se define la *multiplicidad* de f en el origen como $m_0(f) = m = \min j$ donde j es el grado de f_j .

De manera natural se generaliza esto para puntos z cualesquiera en el plano:

Definición 29. Sea $f(x, y)$ una serie de potencias convergente y $z = (a, b)$ un punto en el dominio de convergencia de f tal que $f(z) = g(z) = 0$. Se toma el cambio de coordenadas $x' = x - a$, $y' = y - b$, y se considera a f en estas nuevas coordenadas:

$$f(x, y) = f'(x', y') = f(x' + a, y' + b)$$

La *multiplicidad* de f en z , la cual será denotada por $m_z(f)$, es el grado del polinomio homogéneo con menor grado de f' .

Los dos conceptos siguientes determinan una manera de medir como se cruzan dos curvas en un punto dado. Las siguientes dos definiciones de *numero de intersección* son equivalentes, aunque la segunda es la definición que se usa en la práctica, ya que a partir de ella es mucho más sencillo efectuar cálculos. No se probará dicha equivalencia, si embargo más información detallada al respecto se encuentra en [Tei95, p.876], y en [Tei97].

Definición 30 (número de intersección 1). Sean $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. El *número de intersección* de $V(f)$ y $V(g)$ en el origen se denotará por $(f, g)_0$ y está dado por :

$$(f, g)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y] / \langle f, g \rangle,$$

donde $\langle f, g \rangle$ es el ideal generado en $\mathbb{C}[x, y]$ por f y g .

Definición 31 (número de intersección 2). Si se escribe a g como $g = ug_1^{s_1} \dots g_r^{s_r}$ con $u(0) \neq 0$ y g_i irreducible, y se considera $(t_i^k, y(t_i))$ la expansión de Puiseux que parametriza a g_i , se denota por I_i al orden de $f(t_i) = f(t_i^k, y(t_i))$. El *número de intersección* de f y g es:

$$(f, g)_0 = \sum_{i=1}^r s_i I_i.$$

De nuevo se hace explícita la generalización:

Definición 32. Sean $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$; $z = (a, b)$, con z tal que $f(z) = g(z) = 0$. Considérense las nuevas coordenadas x', y' como en la definición 29 para obtener las nuevas series f', g' que definen curvas por el origen. Se define

$$(f, g)_z = (f', g')_0$$

Ejemplo 21. Sean $f(x, y) = y$, $g(x, y) = y^2 - x^3$. Calculando el número de intersección de f y g de acuerdo con la primera definición, se tiene que:

$$(f, g)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y] / \langle y, y^2 - x^3 \rangle = |\{1, x, x^2\}| = 3$$

Calculando de acuerdo con la segunda definición:

$$(f, g)_0 = o(f(t^2, t^3)) = o(t^3) = 3$$

Un tratamiento detallado sobre el índice de intersección de dos curvas se puede encontrar en [Ful89], así como en [Fis01]; el siguiente resultado se menciona pues será utilizado más adelante en el capítulo; una prueba se puede encontrar en [Ful89, p.36-41].

Lema 8. Sean $X = V(f), Y = V(g) \subset \mathbb{C}^2$ dos curvas planas, donde $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. Entonces para $p \in \mathbb{C}^2$, $(X, Y)_p = 1$ si y sólo si X y Y se intersecan transversalmente.

El siguiente lema asegura que, siempre al explotar un punto singular, las singularidades de los puntos en la intersección de la transformada estricta con el divisor excepcional nunca pueden ser más pesadas que la singularidad original en el siguiente sentido:

Lema 9. Sea $X = V(f) \subset \mathbb{C}^2$, con f una serie de potencias convergente en una vecindad del origen. Sea $(\widetilde{\mathbb{C}^2}, \pi)$ una explosión del origen, y sean $\{p_1, \dots, p_r\} = E \cap X'$.

$$i) \sum_{i=1}^r (X', E)_{p_i} \leq m_0(X)$$

$$ii) \sum_{i=1}^r m_{p_i}(X') \leq m_0(X)$$

Prueba. Se asume sin pérdida de generalidad que f es y -regular de orden m . Sabemos ya que

$$X' \cap E = \{(u_0, 0) | f_m(1, u_0) = 0\} \cup \{(u_1, 0) | f_m(u_1, 1) = 0\}.$$

4.2. TEOREMA DE RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES MEDIANTE FINITAS EXPLOSIONES

Como f es y -general de orden m , $f_m(u_1, 1)$ tiene término constante distinto de cero, así que $u_1 = 0$ no es raíz. Esto significa que todos los puntos de $X' \cap E$ quedan contenidas en U_0 y son de la forma $p_i = (t_i, 0)$, donde

$$f_m(1, u_0) = (u_0 - t_1)^{e_1} \cdots (u_0 - t_r)^{e_r}; \quad e_1 + \cdots + e_r = m.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $x' = u_0 - t_i$, $y' = v_0$ y sustituyendo esto en $f_1(u_0, v_0)$, se obtiene para cada $i = 1, \dots, r$:

$$f'_1(x', y') = f_m(1, x' + t_1) + y'^k(\cdots).$$

Dado que $E = V(g(u_0, v_0))$ con $g(u_0, v_0) = v_0$, bajo éste cambio de coordenadas, g queda intacta, es decir, $g'(x', y') = y'$. De este modo la parametrización de E está dada por $t \mapsto (t, 0)$, y sustituyendo esto en f' para calcular el índice de intersección $(X', E)_{p_i}$ de acuerdo a la segunda definición para éste, se obtiene:

$$f'_1(t, 0) = f_m(1, t + t_1) = t^{e_i} \prod_{j \neq i} (t + t_j - t)^{e_j}.$$

El orden o multiplicidad del polinomio anterior es menor o igual a e_i , así que

$$(X' \cap E)_{p_i} \leq e_i.$$

Sumando sobre todos los índices se concluye que:

$$\sum_{i=1}^r (X', E)_{p_i} \leq m_0(X)$$

quedando i establecido.

Para establecer ii , el razonamiento es análogo ya que por lo anterior,

$$m_{p_i}(X') \leq e_i$$

Entonces $m_{p_i}(X') \leq e_i$ por lo que

$$\sum m_{p_i}(X') \leq \sum e_i = m = m_o(X)$$

□

Corolario 3. *En el contexto del lema anterior, si hay un punto p_i tal que $m_{p_i}(X') = m_0(X)$ entonces p_i es el único punto de $X' \cap E$.*

Nos interesa probar que esta situación no se puede prolongar indefinidamente. Para demostrar esto, se introduce el concepto de “contacto entre dos curvas” como sigue:

Definición 33. Sea $X = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica que pasa por el punto $z \in \mathbb{C}^2$ con singularidad en el mismo. Sea W una curva no singular que pasa por z . El exponente de contacto de X con W en el punto z es:

$$\delta_z(X, W) = \min \left\{ \frac{(X, W)_z}{m_z(f_i)} \right\}$$

donde $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_2^{\alpha_2}$

En lo siguiente, supongamos que el punto z es el origen (sin perder generalidad).

Definición 34. El *exponente de contacto* de X en z es:

$$\delta_z(X) = \sup \{ \delta_z(X, W) : W \text{ es una curva suave que pasa por } z \}$$

Definición 35. Una curva suave que pasa por el punto z se dice que tiene *contacto máximo con X en z* si

$$\delta_z(X) = \delta_z(X, W).$$

Ejemplo 22. Se toma la notación $X = V(f)$ y $W = V(g)$, y se considera:

$$f(x, y) = y^2 - x^3$$

Una parametrización local de X está dada por $t \mapsto (t^2, t^3)$. La Afirmación ?? dice las posibles formas que podría tener g como polinomio debido a su carácter de ser suave y pasar por el origen; éstas aseguran que o bien $\delta_0(X, W) = 1$ o $\delta_0(X, W) = \frac{3}{2}$, dependiendo de la forma que tenga W . A partir de ésto se concluye directamente de la Definición 34 que $\delta_z(X) = \frac{3}{2}$. Además todas las curvas W dadas por $g(x, y) = ay + \cdots$ cumplen con tener contacto máximo con X .

Lo que se desea hacer primero es probar la existencia de las mencionadas curvas de contacto máximo para cada curva en \mathbb{C}^2 , para luego demostrar el siguiente teorema, principal en este último capítulo.

4.2. TEOREMA DE RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES MEDIANTE FINITAS EXPLOSIONES

Teorema 15. *Sea $X \subset \mathbb{C}^2$ una curva que pasa por el origen, con punto singular en el mismo, y supóngase que W tiene contacto máximo con X en el origen. Entonces se cumple lo siguiente.*

- i. El exponente de contacto $\delta_0(X, W) \geq 2$ si y sólo si existe un punto $p_1 \in X'$ tal que $\pi(p_1) = 0$ y $m_{p_1}(X') = m_0(X) = m$.*
- ii. En el caso anterior, $p_1 \in W'$ y W' tiene contacto máximo con X' en p_1 .*
- iii. En el mismo caso, el nuevo exponente de contacto entre las preimágenes estrictas de las curvas consideradas es $\delta_{p_1}(W', X') = \delta_0(W, X) - 1$.*

Para la prueba del Teorema 15, será necesario establecer ciertos resultados que relacionan al Polígono de Newton asociado a una curva $V(f) = X$ con el exponente de contacto $\delta_0(X)$, lo cual servirá para probar la existencia de curvas con contacto máximo para cualquier curva singular en \mathbb{C}^2 . Una vez probada la existencia de curvas con contacto máximo, se usarán aún resultados sobre el Polígono de Newton para probar lo deseado. Por brevedad no se prueban los resultados que se usarán: sus pruebas se encuentran en [EB81, p.486-491] y utilizan casi únicamente la definición del Polígono de Newton.

4.2.1. Resultados sobre el Polígono de Newton

Lema 10. *Si $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es irreducible, entonces su Polígono de Newton consta de un solo segmento.*

Lema 11. *Sea $f = f_1^{r_1} \cdots f_s^{r_s} \in \mathbb{C}[x, y]$ con f_i irreducible; y sea l_i el Polígono de Newton de f_i , el cual por el lema anterior consta de un solo segmento, y tómesese una numeración de los f_i de modo que para $i > k$ la pendiente de l_i sea mayor que la pendiente de l_k . Entonces se cumple que si l_i tiene como punto inicial $(0, p_i)$ y punto final $(q_i, 0)$, el Polígono de Newton de f está formado por los segmentos l'_i, \dots, l'_s , donde l'_i es el segmento con punto inicial $(\sum_{k < i} q_k, \sum_{j \geq i} p_j)$ y punto final $(\sum_{k \leq i} q_k, \sum_{j > i} p_j)$.*

Ejemplo 23. Sea $f(x, y) = (y^2 - x^5)(x^2 + y^5) = y^7 + y^2x^2 - x^5y^5 - x^7$. Las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 ilustran el contenido del Lema 11.

Figura 4.1: $\Delta(y^2 - x^5)$

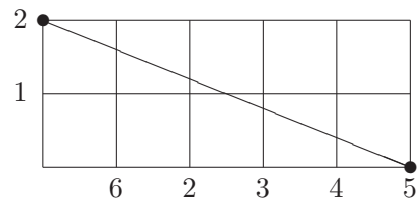
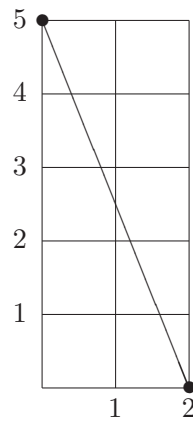
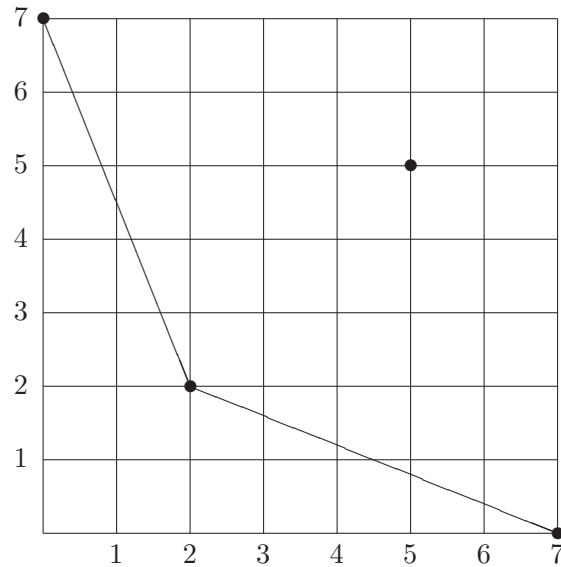


Figura 4.2: $\Delta(y^5 + x^2)$



4.2. TEOREMA DE RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES MEDIANTE FINITAS EXPLOSIONES

Figura 4.3: $\Delta(f)$



En lo siguiente se asumirá que f es un polinomio de Weierstrass de orden m , siendo $X = V(f)$, y W será el eje de las x , es decir, $W = V(g)$, donde $g(x, y) = y$.

Lema 12. *La menor de las pendientes de los segmentos del Polígono de Newton de f es $-\frac{1}{\delta_0(X, W)}$*

Para lo siguiente considérese la expresión de $f \in \mathbb{C}[x, y]$ como ya se ha hecho antes:

$$f(x, y) = F(x, y) + \sum_{\alpha+\delta\beta > m\delta} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta;$$

donde

$$F(x, y) = \sum_{\alpha+\delta\beta = \delta m} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Lema 13. *W no tiene contacto máximo con X si y sólo si F descrita arriba es de la forma*

$$F(x, y) = c(y - \lambda x^\delta)^m; \quad m \in \mathbb{N}, \quad c \neq 0$$

En particular el lema anterior sirve para demostrar el siguiente lema que implica directamente la existencia de curvas de contacto máximo.

Lema 14. *Si $\delta_0(X) = \infty$ entonces X es una curva regular.*

Nota 2. El lema anterior implica que siempre que una curva tenga una singularidad en el origen (o en cualquier otro punto), $\delta_0(X)$ es finito, lo cual implica la existencia de alguna curva que tenga contacto máximo con X en el punto en cuestión.

Ahora sí se cuenta con los hechos suficientes para poder demostrar el Teorema 15.

4.2.2. Prueba del Teorema

Prueba del Teorema 15. Sin perder generalidad asúmase que W es el eje de las x , y que $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio de Weirstrass de orden m . Sea $p_1 \in E \cap X'$, asumiendo que se encuentra en la carta coordenada U_0 ; es decir, $\pi(u, v) = (v, uv)$. Si $f = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$, recordando que al obtener la preimagen estricta de $X = V(f)$ se cancela el divisor excepcional m veces de la preimagen, la expresión de f_1 que define la preimagen estricta está dada por

$$f_1(v, u) = \sum a_{\alpha\beta} v^{\alpha+\beta-m} u^\beta.$$

El grado del monomio $v^{\alpha+\beta-m} u^\beta$ es $\alpha + 2\beta - m$, así que f_1 tiene multiplicidad igual a m si y sólo si $\alpha + 2\beta \geq 2m$. Entonces el segmento más pronunciado del Polígono de Newton es de pendiente menor o igual a $-\frac{1}{2}$, lo cual implica, por el Lema 12 que $\delta_0(X, W) \geq 2$, quedando así establecido el primer inciso del teorema.

Antes de demostrar *ii.*, se prueba *iii.* Se observa que el segmento que pasa por los puntos $(0, m)$ y (α, β) con (α, β) se convierte bajo la preimagen estricta en el segmento que pasa por $(0, m)$ y por $(\alpha + \beta - m, \beta)$ viendo las coordenadas de los exponentes de la forma (v, u) . La pendiente del segmento original es $-\frac{1}{\alpha/m-\beta}$ mientras que el nuevo segmento (considerado en coordenadas (u, v)) tiene pendiente $-\frac{1}{\alpha/(m-\beta)-1}$, lo cual, por el Lema 12, prueba *iii.* Se considera ahora *ii.* Si W_1 no tuviese contacto máximo con X_1 , entonces por el Lema 13,

$$F_1(v, u) = F(u - \lambda v^\delta)^m,$$

4.2. TEOREMA DE RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES MEDIANTE FINITAS EXPLOSIONES

en donde

$$F_1(v, u) = \frac{F(v, u)}{v^m};$$

con lo cual se obtiene, sustituyendo $v = x$; $u = \frac{y}{v}$,

$$F(x, y) = (y - \lambda x^{\delta+1})^m.$$

Como $\delta = \delta_{p_1}(W_1, X_1)$ y por lo anterior $\delta_0(W, X) = \delta_{p_1}(W_1, X_1) + 1$, esto implica por el Lema 13 que W no tiene contacto máximo con X , lo cual contradice la hipótesis. \square

Una prueba similar del Teorema 15 se puede encontrar en [Tei95, pags. 874-881]. Se introduce la siguiente terminología para poder formular un corolario del Teorema 15; la cual asegura que, mediante un número finito de explosiones (blow-ups) de los puntos singulares de una curva plana se obtiene una resolución de singularidades *encajada* en una variedad suave.

Para introducir esta terminología se considera $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$. Sea $Z^1 = \widetilde{\mathbb{C}^2}$; de nuevo se considera una curva $X \subset \mathbb{C}^2$ con punto singular en p . Sea $X' = X^1$; se vio ya que los puntos $z \in E_1 \cap X^1$ son finitos, digamos p_1, \dots, p_r . Sea Z_2 la variedad que consiste de explotar todos estos puntos; uno tras otro. Sea Z^n la variedad que se obtiene al explotar los puntos de $X^{n-1} \cap E^{n-1}$. El siguiente corolario toma la forma de un Teorema que originalmente se le debe a Max Noether.

Teorema de Resolución de Curvas Planas Algebraicas. *Dada $X \subset \mathbb{C}^2$ una curva plana con punto singular en el punto p , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión definida en el párrafo precedente es finita, es decir,*

$$Z^k \rightarrow Z^{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

tal que si se considera como $\pi : Z^k \rightarrow \mathbb{C}^2$ la composición de las proyecciones correspondientes, entonces la preimagen en Z^k bajo π de p (el divisor excepcional) es la unión de curvas no singulares que se cortan transversalmente, y la preimagen estricta de X interseca a éstas transversalmente también.

Bibliografía

- [EB81] Horst Knörrer Egbert Brieskorn, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Boston, Universität Bonn, Wegelerstrasse 10, D-5300 Bonn, 1981.
- [Fis01] Gerd Fischer, *Plane algebraic curves*, American Mathematical Society, 2001.
- [Ful89] William Fulton, *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometry.*, Advanced Book Classics, Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley, 1989.
- [Hir64] Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Mathematics (1964), no. 79, 109–326.
- [MA69] I.G. Macdonald M.F. Atiyah, *Introduction to commutative geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Great Britain, 1969.
- [Mil68] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1968.
- [New60] Isaac Newton, *The correspondence of isaac newton*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- [Tei95] Bernard Teissier, *Introduction to curve singularities*, World Sci. Publishing (1995), 866–893.
- [Tei97] ———, *Complex curve singularities: a biased introduction.*, World Sci. Publishing (1997), 825–887.
- [Wal04] C.T.C. Wall, *Singular points of plane curves*, Cambridge University Press, University Press, Cambridge, 2004.

- [Whi57] H. Whitney, *Elementary structure of real algebraic varieties*, The Annals of Mathematics **66** (1957), no. 3, 545–556.
- [Zar79] Oscar Zariski, *Collected papers, vol 4: Equisingularities on algebraic varieties (mathematicians of our time)*, MIT Press, Cambridge, 1972-79.