



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS**

**HIPERGRAFICAS DIRIGIDAS, HIPERGRAFICAS DE NIVELES  
Y UNA CONJETURA DE MEYNIEL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS**

**PRESENTA:**

**MARTIN MANRIQUE MANSOUR**



**DIVISION DE ESTUDIOS  
DIRECTORA DE TESIS: DE POSGRADO**

**DOCTORA HORTENSIA GALEANA SANCHEZ**

México, D.F.

Abril 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HIPERGRÁFICAS DIRIGIDAS, HIPERGRÁFICAS DE NIVELES Y UNA  
CONJETURA DE MEYNIEL

Tesis que presenta el M. en C. Martín Manrique Mansour para obtener el  
grado de Doctor en Ciencias

Tutora principal: Dra. Hortensia Galeana-Sánchez

Comité tutorial: Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía y Dra. María del Rocío  
Rojas Monroy

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera especial a mi tutora Hortensia Galeana Sánchez. A ella debo gran parte de mi formación como matemático y como investigador, además de que me ha apoyado en diversos ámbitos, no sólo en el académico. Durante el doctorado disfruté los beneficios no sólo de su reconocido valor como matemática, sino también de su gran capacidad como guía y de su inapreciable calidad humana.

Agradezco también a los miembros de mi comité tutorial, Hugo Alberto Rincón Mejía y María del Rocío Rojas Monroy, por su apoyo, su flexibilidad y sus importantes comentarios.

Quiero dar gracias a mis sinodales Ricardo Gómez Aíza, Juan José Montellano Ballesteros y Eduardo Rivera Campo tanto por su eficiencia y rapidez como por sus comentarios.

Por último, estoy sinceramente agradecido con mis profesores, tanto de la carrera como de la maestría, que salvo excepción fueron todos muy buenos, con el personal del Posgrado en Matemáticas, con la Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas y, en general, con la UNAM como institución, que me permitió hacer una carrera como quise, enriquecedora no sólo en el aspecto matemático, y me brindó todo lo necesario para adquirir una formación sólida.

## ÍNDICE

<b>Introducción</b> .....	4
<b>1. Resultados preliminares</b> .....	5
<i>Gráficas y digráficas</i> .....	5
<i>Núcleos en digráficas</i> .....	6
<i>Hipergráficas</i> .....	6
<b>2. Hipergráficas dirigidas</b> .....	10
<i>Definiciones</i> .....	10
<i>Núcleos Transversales</i> .....	14
<i>Digráficas asociadas</i> .....	24
<i>Conclusiones</i> .....	25
<b>3. Hipergráficas de niveles</b> .....	26
<i>Fundamentos</i> .....	26
<i>Familias intersectantes</i> .....	31
<i>Coloraciones por aristas</i> .....	33
<i>La propiedad de Helly</i> .....	33
<i>Secciones</i> .....	34
<i>Transversales y apareamientos</i> .....	37
<i>Propiedad de König</i> .....	43
<i>Transversales fraccionarias y apareamientos fraccionarios</i> .....	44
<i>Hipergráficas producto</i> .....	47
<i>Coloraciones por vértices</i> .....	48
<i>Ciclos. Hipergráficas balanceadas y unimodulares</i> .....	50
<i>Número ciclomático e hipergráficas planas</i> .....	55
<i>Hipergráficas con dos niveles</i> .....	57
<i>Conclusiones</i> .....	62
<b>4. Una versión corregida de la conjetura de Meyniel</b> .....	64
<i>Hipergráficas cuadradas y núcleos en digráficas</i> .....	64
<i>Una modificación de la conjetura de Meyniel</i> .....	67
<i>Conclusiones</i> .....	73
<b>Conclusiones</b> .....	74
<b>Bibliografía</b> .....	75

## INTRODUCCIÓN

Durante el doctorado se han seguido tres líneas de investigación, todas relacionadas con las hipergráficas. Como resultado, se han enviado cuatro artículos a revistas de circulación internacional y con arbitraje, de los cuales dos están ya publicados.

La primera línea parte de definir el concepto de "hipergráfica dirigida": una generalización de las digráficas relacionada estrechamente con las hipergráficas. Básicamente, consiste en generar una partición en cada arista de una hipergráfica dada (de acuerdo con ciertos principios) y dar un orden total a los elementos de dichas particiones. Después se define el concepto de "núcleo transversal" y se demuestran resultados relativos a él, que implican generalizaciones de los teoremas de Neumann-Lara y Richardson referentes a núcleos en digráficas. Puede también asociarse una digráfica a cada hipergráfica dirigida, lo que permite encontrar una familia de digráficas con núcleo, aunque su caracterización queda como problema abierto.

La segunda dirección consiste en asociar a cada hipergráfica otra que respeta su estructura pero a veces tiene muchos menos vértices (y nunca más). Esto permite "traducir" resultados de hipergráficas cuyas hipótesis tienen que ver con cantidad de vértices a otros planteados en términos de la estructura de la hipergráfica. En ocasiones resultan dichas traducciones en generalizaciones y a veces son resultados independientes, aunque suelen aplicar a familias más amplias de hipergráficas.

La tercera línea consiste en establecer una relación entre digráficas e hipergráficas cuadradas con un sistema (fijo) de representantes. De acuerdo con ella, cierto tipo de conjunto transversal en la hipergráfica corresponde a un núcleo en la digráfica asociada. Esto permite encontrar una familia de digráficas con núcleo: de hecho, una restricción de una famosa conjetura debida a Meyniel (probada falsa por Galeana-Sánchez).

A lo largo del texto, muchos resultados que no son nuestros se enunciarán sin demostración.

## CAPÍTULO 1: RESULTADOS PRELIMINARES

### Gráficas y digráficas

*Definición:* Una *gráfica*  $G$  en un conjunto  $V$  consiste en una familia de subconjuntos de  $V$  con uno o dos elementos. Decimos que  $x \in V$  es un *vértice* de  $G$  y que  $A \in G$  es una *arista* de  $G$ . Si  $G$  no es un conjunto, es decir, si hay aristas repetidas, decimos que  $G$  es una *multigráfica*. Si todas las aristas tienen dos elementos y  $G$  es un conjunto,  $G$  es *simple*.

*Definición:* Dada una gráfica  $G$ , un *camino de longitud  $k$*  es una sucesión no vacía  $(x_0, A_0, \dots, x_{k-1}, A_{k-1}, x_k)$ , donde  $x_i \in V$  para todo  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $A_i \in G$  para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  y  $A_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ . Un camino es *cerrado* si  $x_0 = x_k$ . Una *trayectoria* es un camino tal que  $x_i \neq x_j$  para todo  $\{i, j\} \subset \{0, \dots, k-1\}$ . Un *ciclo* es una trayectoria cerrada.

Si no hay aristas repetidas en  $G$ , un camino queda determinado por su sucesión de vértices  $(x_0, \dots, x_k)$ .

*Proposición 1.1:* Dada una gráfica  $G$ , todo camino en  $G$  tiene una trayectoria como subsucesión. Todo camino cerrado de longitud impar en  $G$  tiene un ciclo de longitud impar como subsucesión.

*Definición:* Dada una gráfica  $G$  en un conjunto  $V$ , un conjunto  $S \subset V$  es *independiente* si no hay aristas entre los vértices de  $S$ .

*Definición:* Una gráfica es *bipartita* si hay una partición de su conjunto de vértices en dos conjuntos independientes.

*Proposición 1.2:* Una gráfica  $G$  es bipartita si, y sólo si, no tiene ciclos de longitud impar.

*Definición:* Una gráfica simple es *completa* si tiene todas las aristas posibles, es decir, si hay una arista entre cualesquiera dos de sus vértices.

*Definición:* Una *digráfica*  $D$  en un conjunto  $V$  consiste en una familia de pares ordenados de  $V$ . Decimos que  $x \in V$  es un *vértice* de  $D$  y que  $F \in D$  es una *flecha* de  $D$ . Se definen multidigráfica y digráfica simple de manera análoga al caso de gráficas.

Se definen camino dirigido, trayectoria dirigida y ciclo dirigido de la misma forma que para gráficas, pidiendo  $F_i = (x_i, x_{i+1})$ .

Notemos que puede considerarse una gráfica como una digráfica en la que toda flecha es simétrica, con la salvedad de que en el segundo caso hay ciclos (dirigidos) de longitud 2 y en el primero no.

*Proposición 1.3:* Sea  $D$  una digráfica. Todo camino dirigido cerrado de longitud impar en  $D$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar como subsucesión.

*Definición:* Dada una digráfica  $D$  y  $x \in V(D)$ , el conjunto  $N^+(x) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in D\}$  es el *conjunto de ex-vecinos* de  $x$ , y el conjunto  $N^-(x) =$

$\{y \in V(D) \mid (y, x) \in D\}$  es el *conjunto de in-vecinos* de  $x$ . Dado  $S \subset V(D)$ , el conjunto  $N^+(S) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in D \text{ para algún } x \in S\}$  es el *conjunto de ex-vecinos* de  $S$ , y el conjunto  $N^-(S) = \{y \in V(D) \mid (y, x) \in D \text{ para algún } x \in S\}$  es el *conjunto de in-vecinos* de  $S$ .

*Definición:* Sea  $D$  una digráfica en un conjunto  $V$ . El símbolo  $D^{-1}$  denota a la digráfica en  $V$  tal que  $(x, y) \in D^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in D$ .

### Núcleos en digráficas

*Definición:* Dados una digráfica  $D$  en un conjunto  $V$  y  $S \subset V$ , decimos que:

- 1)  $S$  es *independiente* si para cualquier par de vértices  $\{x, y\} \subset S$ , ninguno de los pares ordenados  $(x, y)$  y  $(y, x)$  está en  $D$ ;
- 2)  $S$  es *absorbente* si para todo vértice  $x \in V \setminus S$  existe un vértice  $y \in S$  tal que  $(x, y) \in D$ ;
- 3)  $S$  es un *núcleo* de  $D$  si es independiente y absorbente.

Si ordenamos los subconjuntos de  $V$  por contención, todo núcleo de  $D$  es tanto un conjunto independiente máximo como un conjunto absorbente mínimo. Esto no necesariamente sucede si ordenamos los subconjuntos de  $V$  por cardinalidad, es decir, puede haber núcleos de diferentes tamaños.

*Definición:* Una digráfica  $D$  es *núcleo-perfecta* si, y sólo si, toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

*Teorema 1.4 (Richardson) [51]:* Toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar es núcleo-perfecta.

Este es uno de los resultados más importantes relativos a núcleos en digráficas.

*Definición:* Dada una digráfica  $D$ , un conjunto  $S \subset V(D)$  es un *seminúcleo* de  $D$  si, y sólo si, es independiente y cumple lo siguiente: dado  $x \in V \setminus S$ , si existe  $s \in S$  tal que  $(s, x) \in D$ , entonces existe  $s' \in S$  tal que  $(x, s') \in D$ . En otras palabras, un seminúcleo es un conjunto independiente de vértices que absorbe a todos sus ex-vecinos.

Todo núcleo de una digráfica dada  $D$  es trivialmente un seminúcleo de  $D$ , pero el inverso no se cumple.

*Teorema 1.5 (Neumann-Lara) [48]:* Sea  $D$  una digráfica tal que todas sus subdigráficas inducidas tienen seminúcleo no vacío. Entonces  $D$  es núcleo-perfecta.

### Hipergráficas

*Definición:* Dado un conjunto finito  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , una *hipergráfica* en  $V$  es una familia  $H = (E_1, \dots, E_m)$  de subconjuntos de  $V$  tal que:

- 1)  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, E_i \neq \emptyset$

$$2) \bigcup_{i=1}^m E_i = V$$

Cada  $E_i$  es una *arista* de  $H$ . Una arista de cardinalidad 1 es un *lazo*. Notemos que todo v3rtice aislado debe tener un lazo para que se cumpla la segunda condici3n. Podemos ver a una gr3fica como una hipergr3fica cuyas aristas no tienen m3s de dos elementos, con la salvedad de que los v3rtices aislados deben tener lazos.

*Definici3n:* Una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es *simple* si, y s3lo si,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, E_i \subset E_j \Rightarrow i = j$ .

Puede representarse una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  mediante su *matriz de incidencia*  $A = (a_j^i)$ , una matriz de  $n \times m$  tal que  $a_j^i = 1$  si  $x_i \in E_j$  y  $a_j^i = 0$  si  $x_i \notin E_j$ .

*Definici3n:* Dada una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ , un conjunto  $S \subset V$  es *independiente* si, y s3lo si,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, |E_i| > 1 \Rightarrow E_i \not\subset S$ . El conjunto  $S \subset V$  es *fuertemente independiente* si, y s3lo si,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, |E_i \cap S| \leq 1$ . Notemos que para gr3ficas ambos conceptos coinciden.

*Definici3n:* Dada una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ , un conjunto  $S \subset V$  es *transversal* si, y s3lo si,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, |E_i \cap S| \geq 1$ .

*Definici3n:* Dada una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ , un conjunto  $S \subset H$  es una *cubierta* si, y s3lo si,  $\bigcup_{E \in S} E = V$ .

*Definici3n:* Dada una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ , un conjunto  $S \subset H$  es un *apareamiento* si, y s3lo si,  $\forall E, F \in S, E \cap F = \emptyset$ .

*Definici3n:* Dada una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$  y un entero  $k \geq 2$ , un *camino de longitud  $k$*  es una sucesi3n  $C = (x_0, E_0, x_1, \dots, x_{k-1}, E_{k-1}, x_k = x_0)$  tal que:

- 1)  $\forall i \in \{0, \dots, k-2\}, E_i \neq E_{i+1}$ , y  $E_{k-1} \neq E_0$
- 2)  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, x_i \neq x_{i+1}$
- 3)  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, x_i, x_{i+1} \in E_i$

La segunda condici3n implica que los lazos no pueden formar parte de caminos.

*Definici3n:* Dada una hipergr3fica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$  y un entero positivo  $k$ , un *ciclo de longitud  $k$*  es una sucesi3n  $C = (x_0, E_0, x_1, \dots, x_{k-1}, E_{k-1}, x_k = x_0)$  tal que:

- 1)  $\forall \{i, j\} \subset \{0, \dots, k-1\}, E_i \neq E_j$
- 2)  $\forall \{i, j\} \subset \{0, \dots, k-1\}, x_i \neq x_j$
- 3)  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, x_i, x_{i+1} \in E_i$

*Proposición 1.6:* Toda hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  sin ciclos de longitud impar tiene un conjunto independiente transversal. Más aún, toda hipergráfica  $H$  tal que cualquiera de sus ciclos de longitud impar tiene una arista con cuando menos tres vértices del ciclo, tiene un conjunto independiente transversal.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$  y un entero positivo  $k$ , una  $k$ -coloración por vértices de  $H$  es una partición de  $V = S_1 \cup \dots \cup S_k$  tal que  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, |E_i| > 1 \Rightarrow E_i \not\subseteq S_j$ . Una  $k$ -coloración por vértices es *buena* si toda arista  $E$  tiene la máxima cantidad posible de colores, acotada por  $k$  y por  $|E|$ ; es *equitativa* si toda arista  $E$  de  $H$  satisface  $\left\lfloor \frac{|E|}{k} \right\rfloor \leq |E \cap S_j| \leq \left\lceil \frac{|E|}{k} \right\rceil$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , donde  $[*]$  significa "mayor entero menor o igual que  $*$ " y  $[*]'$  significa "menor entero mayor o igual que  $*$ "; es *fuerte* si  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, |E_i \cap S_j| \leq 1$ .

*Definición:* Sea  $H$  una hipergráfica. Una  $k$ -coloración  $(S_1, \dots, S_k)$  de  $H$  es *uniforme* si, y sólo si,  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq |S_i| \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Nótese que el concepto de coloración uniforme, a diferencia de los anteriores, no tiene que ver con lo que pasa en cada arista.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$  y un vértice  $x \in V(H)$ , el *grado*  $d_H(x)$  de  $x$  en  $H$  es la cantidad de aristas en  $H$  en las que está  $x$ . El grado máximo de los vértices de  $V(H)$  en  $H$  se representa con  $\Delta$ , y su grado mínimo con  $\delta$ .

Puede definirse también como grado de un vértice  $x$  la cantidad de vértices adyacentes a él, la cardinalidad de su vecindad. No se utilizará dicho concepto en esta tesis, así que no hace falta diferenciarlos.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$  y  $x \in V$ , la *estrella* de  $x$  es  $E_x = \{E \in H \mid x \in E\}$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$  y un entero positivo  $k$ , una  $k$ -coloración por aristas de  $H$  es una partición de  $H = S_1 \cup \dots \cup S_k$  tal que  $\forall x \in V, \forall j \in \{1, \dots, k\}, |E_x| > 1 \Rightarrow E_x \not\subseteq S_j$ . Una  $k$ -coloración por aristas es *buena* si toda estrella  $E_x$  tiene la máxima cantidad posible de colores, acotada por  $k$  y por  $d_H(x)$ ; es *equitativa* si todo vértice  $x$  de  $V$  satisface  $\left\lfloor \frac{d_H(x)}{k} \right\rfloor \leq |E_x \cap S_j| \leq \left\lceil \frac{d_H(x)}{k} \right\rceil$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , donde  $[*]$  significa "mayor entero menor o igual que  $*$ " y  $[*]'$  significa "menor entero mayor o igual que  $*$ "; es *fuerte* si  $\forall x \in V, \forall j \in \{1, \dots, k\}, |E_x \cap S_j| \leq 1$ ; es *uniforme* si  $\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \leq |S_i| \leq \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil^*$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Sea por vértices o por aristas, una coloración buena es equitativa y una equitativa es fuerte, pero no a la inversa. En este caso también el concepto de coloración uniforme no se relaciona con lo que sucede en cada vértice (estrella), sino en toda la hipergráfica. En [7] se define "coloración por aristas" como

lo que aquí es "coloración fuerte por aristas", y los demás conceptos no son considerados.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$  y  $S \subset V$ , la subhipergráfica de  $H$  *inducida* por  $S$  es  $H[S] = (E_1 \cap S, \dots, E_m \cap S)$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ , la hipergráfica  $H' = (F_1, \dots, F_k)$  en  $V$  es una hipergráfica *parcial* de  $H$  si  $\forall i \in \{1, \dots, k\} \exists j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $F_i = E_j$ .

*Definición:* Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  es *regular* si  $\forall \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $d_H(x_i) = d_H(x_j)$ , es *uniforme* si  $\forall \{i, j\} \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $|E_i| = |E_j|$ . Se dice que  $H$  es *r-uniforme* si es simple y  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $|E_i| = r$ . Dados dos enteros  $r \leq n$ ,  $K_n^r$  es la hipergráfica en un conjunto  $V$  de  $n$  vértices cuyas aristas son todos los subconjuntos de  $V$  con  $r$  elementos.

## CAPÍTULO 2: HIPERGRÁFICAS DIRIGIDAS

La motivación original de este trabajo fue buscar familias de hipergráficas con conjuntos transversales fuertemente independientes. En la Figura 2.1 hay ejemplos de hipergráficas sin conjuntos transversales fuertemente independientes. Los casos a) y b) sugieren buscar dichas familias entre las hipergráficas simples sin ciclos de longitud impar, aunque el caso c) muestra que no todas esas hipergráficas tienen un conjunto con las propiedades requeridas. Aquí presentamos una de tales familias.

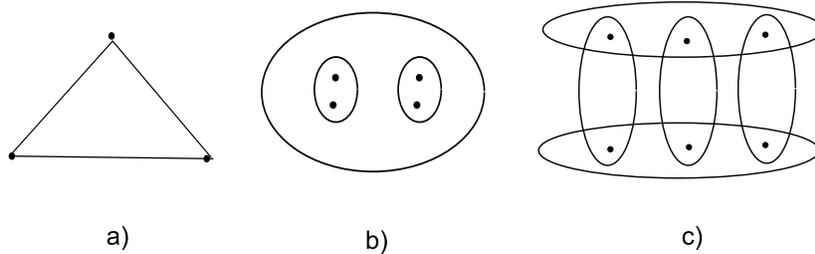


Figura 2.1: Hipergráficas sin conjuntos transversales fuertemente independientes.

### Definiciones

Intuitivamente, podemos considerar una hipergráfica dirigida como una hipergráfica en cuyas aristas se define una relación de orden total no trivial (salvo en los lazos). Formalmente, podemos empezar definiendo una hipergráfica dirigida y después considerar (o no) su hipergráfica subyacente, o podemos tomar una hipergráfica dada, eliminar los lazos y asignarle una "dirección" a las otras aristas. Lo primero es mejor para estudiar hipergráficas dirigidas como objeto matemático o para utilizarlas como herramienta para investigar digráficas, y lo segundo funciona de manera más adecuada si se buscan resultados en hipergráficas.

Para empezar, se define un concepto relativo a hipergráficas:

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , se define una partición  $P = \{P_1, \dots, P_k\}$  de  $V(H)$  de la siguiente manera:  $\{x, y\} \subset V(H)$  está contenido en un elemento de  $P$  si, y sólo si,  $x$  y  $y$  pertenecen exactamente a las mismas aristas de  $H$ . Ésta es la *partición natural* de  $V(H)$ , y la partición definida en cada arista  $E \in H$  como  $\{P_i \subset E \mid P_i \in P\}$  es la *partición natural* de  $E$ .

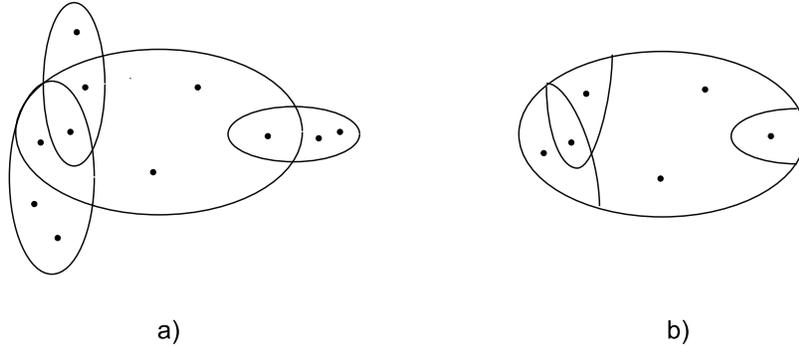


Figure 2.2: a) Partición natural de una hipergráfica. b) Partición natural de una arista.

*Definición:* Dado un conjunto finito  $V$ , una *hipergráfica dirigida*  $D = (V, F)$  en  $V$  es un subconjunto  $X \subset V$  y un conjunto de tercias  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$  tal que para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $A_i = (E_i, P_i, \leq_i)$ , donde  $E_i \subseteq V$ ,  $E_i \neq \emptyset$ ,  $E_i \cap X = \emptyset$ ;  $P_i$  es una partición no trivial de  $E_i$ , y  $\leq_i$  es un orden total en  $P_i$ . Además, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$(1) X \cup \bigcup_{i=1}^m E_i = V.$$

(2) Para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , si  $\{x, y\} \subset E_i$  y existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $x \in E_j$ ,  $y \notin E_j$ , entonces  $x$  y  $y$  pertenecen a elementos diferentes de  $P_i$ . Es decir, si consideramos la hipergráfica subyacente  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , la partición de cada arista es un refinamiento de su partición natural. De no pedirse esta condición, puede producirse una situación bastante desagradable: dos vértices  $x, y$  y tres arcos  $A, B, C$  tales que  $x \in V(A)$  y  $x \notin V(B)$ ,  $y \in V(B)$  y  $y \notin V(A)$ , y tanto  $x$  como  $y$  están en  $V(C)$ , pero no hay un camino dirigido de  $x$  a  $y$ , ni de  $y$  a  $x$  (ver Figura 2.3.b). Adicionalmente puede pedirse que la intersección entre cualesquiera dos niveles distintos de cualesquiera dos arcos sea vacía, de manera que el conjunto de todos los niveles de  $D$  sea un refinamiento de la partición natural de  $H$ . Para estudiar hipergráficas nos enfocamos en una clase aún más específica de hipergráficas dirigidas; para buscar resultados en digráficas probablemente sea mejor permitir que los niveles de arcos distintos se traslapen, siempre y cuando todo nivel esté contenido en la intersección de todos los arcos a lo que pertenece.

(3) Dado  $E \subset V$ , si hay arcos  $A_i$  y  $A_j$  tales que  $E_i = E = E_j$ , entonces  $P_i = P_j$  y se tiene que  $\forall \{x, y\} \subset E$ ,  $x \leq_i y \Leftrightarrow y \leq_j x$ . Esto se pide para evitar que haya caminos dirigidos de longitud mayor o igual a 2 "sustentados" por una misma arista de la hipergráfica subyacente. La condición puede cambiarse u omitirse si no se buscan resultados en hipergráficas (ver Figura 2.3.c).

Cuando se puede, representamos cada arco como una "lombriz", cuyos segmentos son sus niveles acomodados en orden. Según convenga, se numeran los niveles de cada arco o se dibuja una flecha del primer nivel al segundo, salvo

en los arcos simetricos, para los que se utiliza una flecha con dos puntas para ambos arcos.

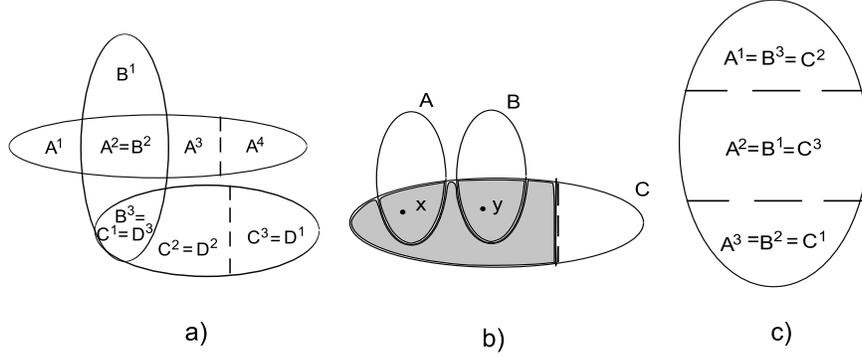


Figura 2.3: a) Hipergráfica dirigida:  $A^2 = B^2$ ,  $B^3 = C^1 = D^3$ ,  $C^2 = D^2$ ,  $C^3 = D^1$ . b) Si el área sombreada es un solo nivel de  $A$ , no hay camino dirigido ni de  $x$  a  $y$  ni de  $y$  a  $x$ . c) Se omite la condición 3:  $(x, A, y, B, z, C, x)$  es un ciclo dirigido de longitud 3.

Decimos que  $x \in V$  es un *vértice* de  $D$  y que  $A_i$  es un *arco* de  $D$ . Llamamos a  $X$  el *conjunto de vértices aislados* de  $D$ , y a  $x \in X$  un *vértice aislado* de  $D$ . Escribimos  $P_i = \{A_i^1, \dots, A_i^{r(i)}\}$ , donde  $r(i) = |P_i|$  y  $A_i^1 \leq_i A_i^2 \leq_i \dots \leq_i A_i^{r(i)}$ . Decimos que  $A_i^j$  es el *nivel*  $j$  de  $A_i$ . Si  $x \in A_i^1$ ,  $x$  es un *mínimo* de  $A_i$ ; si  $x \in A_i^{r(i)}$ ,  $x$  es un *máximo* de  $A_i$ . Como no se permiten particiones triviales, no hay arcos con un solo nivel. Si  $x \in A_i^j$ ,  $y \in A_i^k$  y  $j < k$ , decimos que  $A_i$  es un  $xy$ -arco y que  $y$  *absorbe* a  $x$ . Si  $x \in S_1 \subset V$ ,  $y \in S_2 \subset V$ , entonces  $A_i$  es un  $S_1y$ -arco, un  $xS_2$ -arco y un  $S_1S_2$ -arco; también decimos que  $S_2$  absorbe a  $x$ . Si  $S \subset V$  absorbe a todo vértice en  $V \setminus S$ ,  $S$  es un *conjunto absorbente* en  $D$ . Notemos que si  $S$  es absorbente,  $s \in S$  y  $N_s$  es la intersección de todos los niveles a los que pertenece  $s$ , entonces  $N_s \subset S$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica dirigida  $D = (X, F)$ , donde  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$  y  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $A_i = (E_i, P_i, \leq_i)$ , la hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m) \cup \bar{X}$  es la *hipergráfica subyacente* de  $D$ , donde  $\bar{X} = \{\text{lazo en } x \mid x \in X\}$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m) \cup \{\bar{X}\}$ , donde  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $|E_i| > 1$  y  $\bar{X} = \{\text{aristas de cardinalidad 1}\}$ , decimos que  $D = (X, F)$  es una hipergráfica dirigida *generada* por  $H$  si, y sólo si,  $X = \{x \in V(H) \mid x \text{ pertenece sólo a una arista de cardinalidad 1}\}$  y  $F = \{A_1, \dots, A_m, A'_1, \dots, A'_m\}$ , donde  $V(A_i) = V(A'_i) = E_i$ ,  $P_i = P'_i =$  partición natural de  $E_i$ ,  $\leq_i$  es un orden total en  $P_i$ , y  $\leq'_i$  es el "orden inverso" de  $\leq_i$  (es decir, si  $M, N \in P_i = P'_i$  y  $M \leq_i N$ , entonces  $N \leq'_i M$ ). Si  $D$  es una hipergráfica dirigida generada por  $H$ , decimos que  $H$  *genera* a  $D$ .

Notemos que dada una hipergráfica  $H$ , puede haber varias hipergráficas dirigidas generadas por  $H$  (ya que puede haber varios órdenes totales no equivalentes en la partición natural), y también puede no haber ninguna. Por ejemplo, si  $H$  no es simple, no es conexa, o tiene una sola arista, la partición natural de sus aristas puede no generar ninguna hipergráfica dirigida, pues no se permiten arcos con un solo nivel. En la mayoría de los casos, las hipergráficas dirigidas generadas por una hipergráfica dada  $H$  son un pequeño subconjunto de todas las hipergráficas dirigidas cuya hipergráfica subyacente es  $H$ . Como heredan su estructura mejor que las otras, son las más convenientes para estudiar propiedades de hipergráficas.

*Definición:* Un camino dirigido de longitud  $k$  es una sucesión

$C = (x_0, A_0, x_1, \dots, x_{k-1}, A_{k-1}, x_k)$  tal que  $A_{k-1} \neq A_0$  y para todo  $i \in \{0, \dots, k-2\}$  se tiene que  $A_i \neq A_{i+1}$ , y tal que para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  el arco  $A_i$  es un  $x_i x_{i+1}$ -arco. La longitud de  $C$  es  $l(C) = k$ . Pedimos que la longitud mínima de un camino dirigido sea 1, es decir, que haya al menos un arco. Un camino dirigido cerrado de longitud  $k$  es un camino dirigido de longitud  $k$  tal que  $x_0 = x_k$ . Un ciclo dirigido  $C = (x_0, A_0, x_1, \dots, x_{k-1}, A_{k-1}, x_k = x_0)$  es un camino dirigido cerrado tal que para todo  $\{i, j\} \subset \{0, \dots, k-1\}$  se tiene que  $x_i \neq x_j$  y  $A_i \neq A_j$ .

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida. Un conjunto  $S \subset V(D)$  es independiente si, y sólo si, no hay  $SS$ -arcos (es decir, no hay  $xy$ -arcos tales que  $\{x, y\} \subset S$ ). De forma equivalente,  $S \subset V(D)$  es independiente si, y sólo si, para todo arco  $A_i$  en  $D$  tenemos que  $S \cap A_i^j \neq \emptyset \Rightarrow S \cap A_i \subset A_i^j$ . Notemos que este concepto no coincide con el de independencia en hipergráficas: dada una hipergráfica dirigida  $D$  con hipergráfica subyacente  $H$ , un conjunto fuertemente independiente en  $H$  es independiente en  $D$ , y un conjunto independiente en  $D$  es independiente en  $H$ , pero los inversos no se cumplen.

*Definición:* Dada una hipergráfica dirigida  $D = (X, F)$  en un conjunto  $V$  y  $S \subset V$ , podemos considerar las tercias  $B_i = (E_i \cap S, P'_i, \leq'_i)$ , donde

$P'_i = \left\{ A_i^j \cap S \mid 1 \leq j \leq r(i), A_i^j \cap S \neq \emptyset \right\}$  y  $\leq'_i$  es el orden inducido por  $\leq_i$  en  $P'_i$ . La subhipergráfica de  $D$  inducida por  $S$  es  $D[S] = (S', F')$ , donde  $F' = \{B_i \mid |P'_i| \geq 2\}$  y  $S' = S \setminus \{x \in E_i \mid B_i \in F'\}$ . Al considerar el orden inducido en un arco, empezamos por el mínimo y continuamos de forma creciente. Esto es para evitar ambigüedad, como se muestra en la Figura 2.4. Decimos que  $B_i$  es el arco inducido por  $A_i$  en  $D[S]$  y que  $A_i$  induce  $B_i$  en  $D[S]$ . Notemos que si  $T \subset V$  es independiente en  $D$  y  $S$  es cualquier subconjunto de  $V$ , entonces  $T \cap S$  es independiente en  $D[S]$ . También es importante observar que si  $H$  es una hipergráfica,  $U \subset V(H)$  y  $D$  es una hipergráfica dirigida generada por  $H$ , entonces  $D[U]$  puede no ser la hipergráfica dirigida generada por  $H[U]$ , la cual no necesariamente existe (ver Figura 2.5).

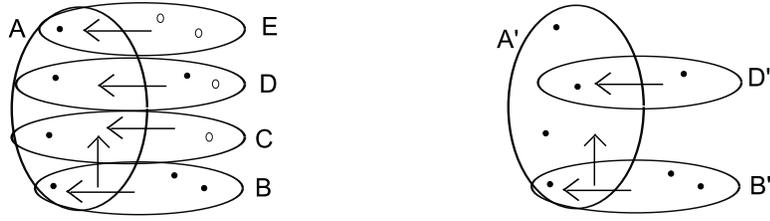


Figura 2.4: Podría haber ambigüedad al definir el orden de  $A'$ .

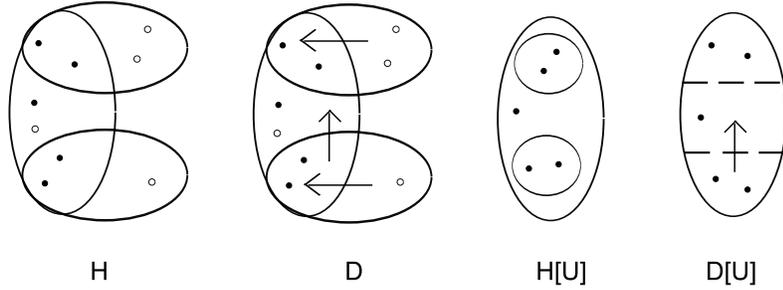


Figura 2.5: Sea  $U$  el conjunto de los vértices negros.  $H[U]$  no genera ninguna hipergráfica dirigida.

*Definición:* Dada una hipergráfica dirigida  $D = (X, F)$ , donde  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$ , un arco  $A_i$  en  $D$  es *simétrico* si, y sólo si, existe un arco  $A_j$  en  $D$  tal que  $V(A_i) = V(A_j)$ ,  $P_i = P_j$ , y para cualesquiera dos niveles  $\{N_1, N_2\} \subset V(A_i)$  tenemos que  $N_1 \leq_i N_2 \Leftrightarrow N_2 \leq_j N_1$ .

Si un arco  $A$  es simétrico, denotamos con  $A'$  al arco con el mismo conjunto de vértices subyacente (que tiene también la misma partición y el orden "inverso"). Así, (3) en la definición de hipergráfica dirigida significa que si hay dos arcos con el mismo conjunto subyacente de vértices, o son iguales o son simétricos.

*Definición:* Una hipergráfica dirigida  $D$  es *simétrica* si, y sólo si, todo arco en  $D$  es simétrico.

Notemos que si una hipergráfica dirigida  $D$  es simétrica, toda subhipergráfica dirigida de  $D$  es simétrica. Observemos también que una hipergráfica dirigida generada por cualquier hipergráfica es siempre simétrica.

### Núcleos Transversales

En esta sección nos enfocamos en resultados relativos a hipergráficas dirigidas simétricas. Dado que la hipergráfica dirigida generada por cualquier hipergráfica es siempre simétrica (cuando existe), podemos restringirnos a dicha clase de hipergráficas dirigidas al buscar aplicaciones a las hipergráficas.

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica en  $V$ . Un conjunto  $K \subset V$  es un *núcleo* si, y sólo si, es independiente y absorbente. Observemos que un núcleo es un conjunto independiente máximo y un conjunto absorbente mínimo (por contención).

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica en  $V$ . Un conjunto  $S \subset V$  es un *seminúcleo* si, y sólo si, es independiente y para todo  $y \in V \setminus S$  tal que existe un  $Sy$ -arco, existe también un  $yS$ -arco.

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida.  $S \subset V(D)$  es una *semitransversal* de  $D$  si, y sólo si,  $S$  es un seminúcleo y se cumple lo siguiente: para todo  $y \in V \setminus S$  tal que existe un  $Sy$ -arco, y para todo arco  $A$  tal que  $y$  es un mínimo de  $A$ , tenemos que  $V(A) \cap S \neq \emptyset$ .

Si  $D$  es una hipergráfica dirigida simétrica,  $S \subset V(D)$  es una *semitransversal* de  $D$  si, y sólo si, para todo  $y \in V \setminus S$  tal que existe un  $Sy$ -arco, y para todo arco  $A$  tal que  $y$  es un mínimo de  $A$ , se tiene que  $V(A) \cap S \neq \emptyset$ .

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida.  $T \subset V$  es un *núcleo transversal* ( $k$ -*transversal*) de  $D$  si, y sólo si,  $T$  es independiente, absorbente y transversal ( $T \cap V(A) \neq \emptyset$  para todo arco  $A$  en  $D$ ).

*Teorema 2.1:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida simétrica. Si toda subhipergráfica dirigida inducida de  $D$  tiene una *semitransversal* independiente no vacía,  $D$  tiene una  $k$ -*transversal*.

*Demostración:* Se procederá por inducción sobre  $|V|$ . Es claro que el teorema se cumple para toda hipergráfica dirigida con uno o dos vértices. Supongamos que el resultado es verdadero para toda hipergráfica dirigida simétrica con menos de  $n$  vértices. Sea  $D = (V, F)$  una hipergráfica dirigida simétrica tal que  $|V| = n$ .

Sean  $S$  una *semitransversal* independiente no vacía de  $D$ ,

$S^- = \{x \in V \setminus S \mid \text{existe un } xS\text{-arco en } D\}$ ,  $S' = \{y \in V \setminus S \mid \exists x \in S \forall A \in F, x \text{ y } y \text{ están en el mismo nivel de } A\}$  y  $S_0 = V \setminus (S \cup S^- \cup S')$  y  $S_0 = V \setminus (S \cup S^-)$ . Hay dos casos posibles:

*Caso 1:*  $S_0 = \emptyset$

Demostraremos que en este caso  $S \cup S'$  es una  $k$ -*transversal* de  $D$ .

i)  $S \cup S'$  es independiente:  $S$  es independiente por definición, y la existencia de un  $SS'$ -arco, un  $S'S$ -arco o un  $S'S'$ -arco implica la existencia de un  $SS$ -arco.

ii)  $S \cup S'$  es absorbente:  $V \setminus (S \cup S') = S^-$ , de manera que  $x \in V \setminus (S \cup S') \Rightarrow$  existe un  $xS$ -arco.

iii)  $S \cup S'$  es un conjunto transversal: Sea  $A \in D$  cualquier arco. Consideremos un vértice  $x \in V(A)$  tal que  $x$  es mínimo de  $A$ . Supongamos que  $x \notin S \cup S'$ . Entonces  $x \notin S^-$ , lo que implica la existencia de un  $xS$ -arco  $B$ . Como  $B$  es un arco simétrico, existe un  $Sx$ -arco en  $D$ . Entonces  $V(A) \cap S \neq \emptyset$ , ya que  $S$  es una *semitransversal*. De hecho,  $S$  es un conjunto transversal, pues  $V(A) \cap S' \neq \emptyset \Rightarrow V(A) \cap S \neq \emptyset$ .

*Caso 2:*  $S_0 \neq \emptyset$

Sea  $D_0 = D[S_0]$  la subhipergráfica dirigida de  $D$  inducida por  $S_0$ . Como  $S \neq \emptyset$  y  $S \cap S_0 = \emptyset$ , se tiene que  $|S_0| < n$ . Entonces  $D_0$  tiene una  $k$ -transversal, por hipótesis de inducción. Sea  $T_0$  una  $k$ -transversal de  $D_0$ . Demostraremos que  $T = S \cup S' \cup T_0$  es una  $k$ -transversal de  $D$ .

i)  $T$  es independiente: Supongamos que hay un  $xy$ -arco  $A$  tal que  $\{x, y\} \subset T$ . El conjunto  $\{x, y\} \not\subset S \cup S'$ , pues  $S \cup S'$  es independiente en  $D$ . De forma similar,  $\{x, y\} \not\subset T_0$ , pues  $T_0$  es independiente en  $D_0$ , y  $D_0$  es una subhipergráfica dirigida inducida de  $D$ . Si  $x \in T_0$  y  $y \in S \cup S'$ , entonces  $A$  es un  $xS$ -arco, lo que implica que  $x \in S^-$ ; esto es una contradicción, ya que  $x \in T_0 \subset S_0$  y  $S^- \cap S_0 = \emptyset$ . Si  $x \in S \cup S'$  y  $y \in T_0$ , se tiene que  $A$  es un  $Sy$ -arco, así que existe un  $yS$ -arco  $B$ , pues  $S$  es una semitransversal; entonces  $y \in S^-$ , lo que es una contradicción, dado que  $y \in T_0 \subset S_0$  y  $S^- \cap S_0 = \emptyset$ . Por lo tanto,  $T \subset V$  es un conjunto independiente en  $D$ .

ii)  $T$  es un conjunto absorbente en  $D$ : Recordemos que  $V = S \cup S' \cup S^- \cup S_0$ . Consideremos  $x \in V \setminus T$ . Si  $x \in S^-$ , entonces  $x$  es absorbido por  $S \subset T$ , según la definición de  $S^-$ . Si  $x \in S_0$ , como  $T_0$  es una  $k$ -transversal de  $D_0 = D[S_0]$  y  $x \notin T_0$ , se tiene que  $x$  es absorbido por  $T_0 \subset T$ .

iii)  $T$  es a conjunto transversal en  $D$ :

*Afirmación:*  $V(A) \cap T \neq \emptyset$  para todo arco  $A \in D$  tal que existe un vértice  $x \in V(A) \cap S^-$  que es mínimo de  $A$ .

*Demostración:* Sea  $A$  un arco en  $D$ ,  $x \in V(A) \cap S^-$  tal que  $x$  es un mínimo de  $A$ . Como  $x \in S^-$ , existe un  $xS$ -arco  $B$ . Dado que  $B$  es simétrico y existe  $y \in S$  tal que  $B$  es un  $xy$ -arco, se sigue que también existe un  $yx$ -arco  $B'$  (es decir, un  $Sx$ -arco). De esta forma, como  $S$  es una semitransversal de  $D$  y  $x$  es un mínimo de  $A$ , se tiene que  $\emptyset \neq (V(A) \cap S) \subset (V(A) \cap T)$ . Queda así demostrada la afirmación.

Sea  $A$  cualquier arco de  $D$ . Acabamos de ver que

$M_A = \{x \in V(A) \mid x \text{ es mínimo de } A\} \cap S^- \neq \emptyset$  implica que  $\emptyset \neq (V(A) \cap S) \subset (V(A) \cap T)$ . Podemos entonces asumir que  $M_A \subset S_0$ . Consideremos  $x \in M_A$ ; si  $x \in T_0$ , entonces  $x \in (V(A) \cap T_0) \subset (V(A) \cap T)$ . Si  $x \notin T_0$ , tomemos  $y \in V(A)$  tal que  $y$  es máximo de  $A$ . Si  $y \in S_0$ , existe un arco  $A_0 \in D_0$  tal que  $A_0$  es inducido por  $A$  en  $D_0$ . Como  $T_0$  es una  $k$ -transversal de  $D_0$ ,  $V(A_0) \cap T_0 \neq \emptyset$ , de manera que  $V(A) \cap T \neq \emptyset$ . Si  $y \notin S_0$  entonces  $y \in S^-$ , pues  $A$  es un  $xy$ -arco y no hay  $S_0S$ -arcos. Dado que  $A$  es simétrico, existe un  $yx$ -arco  $A'$  tal que  $V(A) = V(A')$  y  $y$  es mínimo de  $A'$ ; de acuerdo con la Afirmación,  $V(A') \cap T \neq \emptyset$ , así que  $V(A) \cap T \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $T$  es una  $k$ -transversal de  $D$  y la demostración del Teorema 2.1 está completa. ♦

Notemos que sólo necesitamos que  $D$  fuera simétrica para mostrar que el conjunto es transversal, así que omitiendo (iii) en ambos casos se tiene una demostración del siguiente resultado:

*Teorema 2.1':* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida. Si toda subhipergráfica dirigida inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío, entonces  $D$  tiene núcleo.

*Definición:* Una hipergráfica dirigida  $D$  es *núcleo-perfecta* si, y sólo si, toda subhipergráfica dirigida inducida de  $D$  tiene núcleo.

*Teorema 2.1'':* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida. Si toda subhipergráfica dirigida inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío, entonces  $D$  es núcleo-perfecta.

*Demostración:* El resultado es consecuencia directa del Teorema 2.1', pues toda subhipergráfica dirigida inducida de una subhipergráfica dirigida inducida de  $D$  es una subhipergráfica dirigida inducida de  $D$ . ♦

El Teorema 2.1'' es una generalización del Teorema de Neumann-Lara (1.5), pues toda digráfica es una hipergráfica dirigida.

*Definición:* Una hipergráfica dirigida  $D$  es *bipartita* si, y sólo si, hay una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes no vacíos.

*Teorema 2.2:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida simétrica. Si  $D$  es bipartita entonces tiene una  $k$ -transversal.

*Demostración:* Como toda subhipergráfica dirigida inducida de una hipergráfica dirigida bipartita es bipartita, y en virtud del Teorema 2.1, basta mostrar que toda hipergráfica dirigida bipartita tiene una semitransversal no vacía.

Sea  $D$  una hipergráfica dirigida bipartita y sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes. Notemos que tanto  $V_1$  como  $V_2$  son conjuntos transversales. Si existe un vértice  $x \in V_2$  que sea máximo de todo arco  $A$  de  $D$  tal que  $x \in V(A)$ , entonces  $\{x\}$  es una semitransversal de  $D$ . Si no existe tal vértice, se tiene que para todo  $x \in V_2$  existe un arco  $A_x$  tal que  $x$  no es máximo de  $A_x$ . Como  $V_2$  es independiente,  $A_x$  es un  $xV_1$ -arco para todo  $x \in V_2$ . Entonces  $V_1$  es una  $k$ -transversal de  $D$ . ♦

Si consideramos el Teorema 2.1'' en lugar del Teorema 2.1, llegamos al siguiente resultado:

*Teorema 2.2':* Toda hipergráfica dirigida bipartita es núcleo-perfecta.

Se demostrará ahora que toda hipergráfica dirigida simétrica sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar tiene una  $k$ -transversal. Para lograrlo se requieren algunos resultados previos:

*Lema 2.3:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida y sea  $C = (x_0, A_0, x_1, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_{2k+1} = x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud impar en  $D$ . Si para todo  $\{i, j\} \subset \{0, \dots, 2k\}$  se tiene que  $A_i \neq A_j$ , entonces  $C$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar como subsucesión.

*Demostración:* Por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado.

Sea  $C = (x_0, A_0, x_1, A_1, x_2, A_2, x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud 3. De la definición de camino dirigido se tiene que  $x_0 \neq x_1$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_2 \neq x_0$ ,  $A_0 \neq A_1$ ,  $A_1 \neq A_2$ ,  $A_2 \neq A_0$ . Entonces  $C$  es un ciclo dirigido de longitud 3.

Supongamos ahora que todo camino dirigido cerrado de longitud cuando mucho  $2k-1$  en el que todos los arcos son diferentes tiene un ciclo dirigido de longitud impar como subsucesión, y sea  $C = (x_0, A_0, x_1, A_1, x_2, A_2, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud  $2k+1$  tal que para todo  $\{i, j\} \subset \{0, \dots, 2k\}$  se tiene que  $A_i \neq A_j$ . Si  $x_i \neq x_j$  para todo  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, 2k\}$ , entonces  $C$  es un ciclo dirigido. Si existe  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, 2k\}$  tal que  $i < j$  y  $x_i = x_j$ , tenemos dos caminos dirigidos cerrados:  $C_1 = (x_0, A_0, \dots, x_i = x_j, A_j, x_{j+1}, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$  y  $C_2 = (x_j = x_i, A_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, A_{j-1}, x_j)$ . Notemos que  $F(C_1) \cap F(C_2) = \emptyset$ ,  $V(C_1) \cap V(C_2) = \{x_j\}$ , de forma que  $C_1, C_2$

son caminos dirigidos (pues ninguno "utiliza" cada arco más que una vez). Más aún, se tiene que  $l(C_1) \neq 0$ ,  $l(C_2) \neq 0$ , y  $l(C_1) + l(C_2) = l(C)$ , lo que implica que  $l(C_1)$  es impar y  $l(C_2)$  es par, o viceversa. En cualquier caso, existe un camino dirigido cerrado de longitud impar cuando mucho  $2k - 1$  que es subsucesión de  $C$ . Por hipótesis de inducción, dicho camino dirigido tiene un ciclo dirigido de longitud impar como subsucesión, y tal ciclo es también subsucesión de  $C$ . ♦

Es importante notar que si existe  $\{p, q\} \subset \{1, \dots, 2k\}$  tal que  $p < q$ ,  $A_p = A_q$ , puede haber caminos dirigidos cerrados de longitud impar sin ciclos dirigidos de longitud impar como subsucesiones. De hecho, hay hipergráficas dirigidas con caminos dirigidos cerrados de longitud impar y sin ningún ciclo dirigido de longitud impar (Fig. 2.6). Sin embargo, podemos garantizar la existencia de un ciclo dirigido de longitud impar bajo ciertas condiciones:

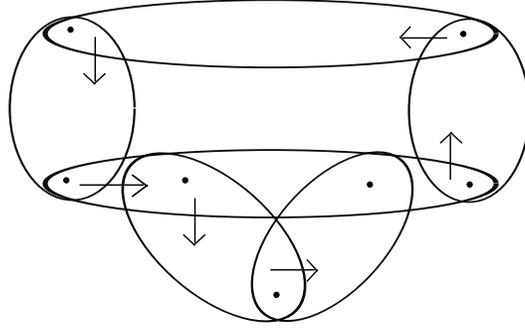


Figura 2.6: Hipergráfica dirigida con caminos dirigidos cerrados de longitud impar y sin ciclos dirigidos de longitud impar.

*Lema 2.4:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida tal que para todo camino dirigido cerrado de longitud impar  $C = (x_0, A_0, x_1, A_1, x_2, A_2, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$ , y para todo arco  $A$  tal que para  $\{p, q\} \subset \{1, \dots, 2k\}$  con  $p < q$  y  $A_p = A = A_q$ , se tiene que  $x_p$  pertenece al mismo nivel de  $A_p$  que  $x_q$ , o que  $x_{p+1}$  pertenece al mismo nivel de  $A_p$  que  $x_{q+1}$ . Entonces se cumple lo siguiente: Si  $D$  tiene un camino dirigido cerrado de longitud impar,  $D$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar.

*Demostración:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida y sea  $C = (x_0, A_0, x_1, A_1, x_2, A_2, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud  $2k + 1$  tal que para  $\{p, q\} \subset \{1, \dots, 2k\}$  se tiene que  $A_p = A = A_q$ . Si  $x_p$  pertenece al mismo nivel de  $A_p$  que  $x_q$ , ó  $x_{p+1}$  pertenece al mismo nivel de  $A_p$  que  $x_{q+1}$ , se tiene que  $A_p$  es tanto un  $x_p x_{q+1}$ -arco como un  $x_q x_{p+1}$ -arco. Entonces hay dos caminos dirigidos cerrados de longitud cuando mucho  $2k - 1$ :  $C_1 = (x_0, A_0, \dots, x_p, A_p, x_{q+1}, A_{q+1}, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$  y  $C_2 = (x_q, A_p, x_{p+1}, \dots, x_{q-1}, A_{q-1}, x_q)$ , tales que  $l(C_1) \neq 0$ ,  $l(C_2) \neq 0$ , y  $l(C_1) + l(C_2) = l(C)$ . Obsérvese que tanto  $C_1$  como  $C_2$  usan el arco  $A_p = A_q$  una vez menos que  $C$ . Repitiendo este procedimiento llegaremos necesariamente a un camino dirigido cerrado de longitud impar en el que todos los arcos sean diferentes. De acuerdo con el Lema

2.3, dicho camino tiene un ciclo dirigido de longitud impar como subsucesión. Es importante notar que el ciclo encontrado no es necesariamente subsucesión de  $C$ . ♦

Obsérvese que si  $A_p = A_q$  y  $x_p$  pertenece al mismo nivel de  $A_p$  que  $x_{q+1}$ , entonces  $x_q$  pertenece a un nivel diferente de  $A_p$  que  $x_{p+1}$ , pues  $A_p$  es tanto un  $x_p x_{p+1}$ -arco como un  $x_q x_{q+1}$ -arco. Esto significa que hay cuando menos tres niveles distintos en  $A_p$ :  $x_q$  pertenece a uno,  $x_{q+1}$  y  $x_p$  pertenecen a otro, y  $x_{p+1}$  está en un tercero. De manera análoga, si  $x_q$  pertenece al mismo nivel de  $A_p$  que  $x_{p+1}$ , hay un nivel al que pertenece  $x_p$ , un segundo en el que están  $x_{p+1}$  y  $x_q$ , y aún otro donde está  $x_{q+1}$ . Por lo tanto, si el arco  $A_p = A_q$  tiene sólo dos niveles, satisface necesariamente las condiciones del Lema 2.4. Queda así demostrado el siguiente resultado:

*Lema 2.5:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida que tenga un camino dirigido cerrado de longitud impar pero no tenga ciclos dirigidos de longitud impar, entonces cuando menos un arco en  $D$  tiene más de dos niveles.

Un resultado adicional, que no será utilizado posteriormente, es el siguiente:

*Lema 2.6:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida simétrica tal que en todo camino dirigido cerrado de longitud impar  $C = (x_0, A_0, x_1, A_1, x_2, A_2, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$ , y en todo arco  $A$  tal que para  $\{p, q\} \subset \{1, \dots, 2k\}$ , con  $p < q$  y  $A_p = A = A_q$ , se tiene que  $x_p$  pertenece a un nivel diferente de  $A_p$  que  $x_{q+1}$  y  $x_q$  pertenece a un nivel diferente de  $A_p$  que  $x_{p+1}$ . Entonces  $D$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar.

*Demostración:* En este caso se tienen también dos caminos dirigidos cerrados de longitud cuando mucho  $2k-1$ :  $C_1 = (x_0, A_0, \dots, x_p, [A_p], x_{q+1}, A_{q+1}, \dots, x_{2k}, A_{2k}, x_0)$  y  $C_2 = (x_q, [A_p], x_{p+1}, \dots, x_{q-1}, A_{q-1}, x_q)$ , tales que  $l(C_1) \neq 0$ ,  $l(C_2) \neq 0$  y  $l(C_1) + l(C_2) = l(C)$ . El símbolo  $[A_p]$  significa  $A_p$  o  $A'_p$ , según corresponda. Como  $C_1$  y  $C_2$  son subsucesiones de  $C$  (salvo por el posible cambio de  $A_p$  por  $A'_p$ ), se tienen dos caminos dirigidos cerrados, uno de los cuales es de longitud impar, y tales que ambos utilizan arcos cuyo conjunto subyacente de vértices es  $V(A_p)$  (es decir,  $A_p$  ó  $A'_p$ ) una vez menos que  $C$ . Siguiendo un razonamiento similar al de la demostración del Lema 2.4, se concluye que  $D$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar (que no es necesariamente subsucesión de  $C$ ). ♦

*Lema 2.7:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida. Si  $D$  es bipartita, todo arco en  $D$  tiene dos niveles.

*Demostración:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida, y sea  $A$  un arco en  $D$  con más de dos niveles. Sean  $N_1, N_2, N_3$  niveles distintos de  $A$ , y consideremos  $\{x_1, x_2, x_3\} \subset V(A)$  tal que para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $x_i \in N_i$ . Supongamos que  $D$  es bipartita, y sea  $\{V_0, V_1\}$  una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $x_1 \in V_1$ . Como  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a niveles distintos de  $A$ , y  $V_1$  es un conjunto independiente, se sigue que  $x_2$  no pertenece a  $V_1$ ; entonces está en  $V_0$ . De forma similar, como  $x_1$  y  $x_3$  pertenecen a niveles distintos de  $A$  y  $V_1$  es un conjunto independiente,  $x_3$  no está en  $V_1$ ; como  $x_2$  y  $x_3$  están en niveles diferentes de  $A$  y  $V_0$  es un

conjunto independiente,  $x_3$  no pertenece a  $V_0$ . Por lo tanto  $D$  no es bipartita. Esto es una contradicción, y queda demostrado el Lema 2.7. ♦

*Definición:* Una hipergráfica dirigida  $D$  es *fuerte* si para todo  $\{x, y\} \subset V(D)$  tal que  $x$  y  $y$  no están en el mismo nivel de todo arco al que pertenezcan, hay un  $xy$ -camino dirigido.

*Definición:* Una hipergráfica dirigida  $D$  es *conexa* si para todo  $\{x, y\} \subset V(D)$  tal que  $x$  y  $y$  no están en el mismo nivel de todo arco al que pertenezcan, hay un  $xy$ -camino dirigido o un  $yx$ -camino dirigido.

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida, y sea  $D'$  una subhipergráfica dirigida fuerte de  $D$  que no está contenida en ninguna otra subhipergráfica dirigida fuerte de  $D$ . Entonces  $D'$  es una *componente fuerte* de  $D$ .

*Definición:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida, y sea  $D'$  una subhipergráfica dirigida conexa de  $D$  que no está contenida en ninguna otra subhipergráfica dirigida conexa de  $D$ . Entonces  $D'$  es una *componente conexa* de  $D$ .

*Observación:* Una hipergráfica dirigida simétrica es conexa si, y sólo si, es fuerte. Además, una hipergráfica dirigida  $D$  tiene una  $k$ -transversal  $T$  si, y sólo si, todas sus componentes conexas tienen una  $k$ -transversal; en tal caso,  $T$  es la unión de las  $k$ -transversales de las componentes conexas de  $D$ . Por lo tanto, una hipergráfica dirigida simétrica tiene una  $k$ -transversal si, y sólo si, todas sus componentes fuertes la tienen.

*Teorema 2.8:* Una hipergráfica dirigida fuerte  $D$  tal que  $|V(D)| \geq 2$  es bipartita si, y sólo si, no tiene caminos dirigidos cerrados de longitud impar.

*Demostración:* Primero demostraremos que una hipergráfica dirigida bipartita no tiene ciclos dirigidos de longitud impar: Sea  $D$  una hipergráfica dirigida bipartita, sea  $\{V_0, V_1\}$  una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes, y sea  $C = (x_0, A_0, \dots, x_{k-1}, A_{k-1}, x_k = x_0)$  un ciclo dirigido de longitud  $k$ . Podemos asumir que  $x_0 \in V_0$ . Como  $C$  es un ciclo, y tanto  $V_0$  como  $V_1$  son conjuntos independientes, se sigue que  $x_1 \in V_1$  y, en general, para todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  y  $j \in \{0, 1\}$ , tenemos que  $x_i \in V_j$  si, y sólo si,  $i \equiv j \pmod{2}$ . Por lo tanto,  $k \equiv 0 \pmod{2}$  para  $x_k = x_0 \in V_0$ .

Sea  $D$  una hipergráfica dirigida, y sea  $C$  un camino dirigido cerrado de longitud impar. Según el párrafo anterior, si  $D$  tiene un ciclo de longitud impar, no es bipartita. Si  $D$  no tiene ciclos de longitud impar, el Lema 2.5 afirma que existe cuando menos un arco en  $D$  con más de dos niveles, así que  $D$  no es bipartita, de acuerdo con el Lema 2.7.

Consideremos ahora una hipergráfica dirigida fuerte  $D$  sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar y tal que  $|V(D)| \geq 2$ . Tomemos  $x \in V(D)$  y definamos  $V_0 = \{x\} \cup \{y \in V(D) \mid \text{existe un } xy\text{-camino dirigido de longitud par en } D\} \cup \{z \in V \mid x \text{ y } z \text{ están en el mismo nivel de todo arco al que pertenezcan}\}$ ,

$V_1 = \{y \in V(D) \mid \text{existe un } xy\text{-camino dirigido de longitud impar en } D\}$ . Entonces  $\{V_0, V_1\}$  es una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos independientes:

i)  $V(D) = V_0 \cup V_1$ , pues  $D$  es fuerte.

ii)  $V_0 \neq \emptyset \neq V_1$ : como  $x \in V_0$ , se tiene que  $V_0 \neq \emptyset$ . Existe cuando menos un vértice  $y \in V(D)$  tal que  $y \neq x$ . Si  $y \notin V_1$  entonces  $y \in V_0$ , pues  $D$  es fuerte, así que hay un  $xy$ -camino dirigido  $C$  tal que  $l(C)$  es par, es decir, tal que  $l(C) \geq 2$ . Así,  $C = (x = x_0, A_0, x_1, \dots, A_{k-1}, x_k = y)$  contiene a la subsucesión  $C' = (x = x_0, A_0, x_1)$ , que es un  $xx_1$ -camino dirigido de longitud 1. Por lo tanto,  $x_1 \in V_1$ .

iii)  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ : supongamos que existe  $y \in V_0 \cap V_1$ . Como hay un  $xy$ -camino dirigido  $C_1$  tal que  $l(C_1)$  es impar,  $x$  y  $y$  no están en el mismo nivel de todo arco al que pertenecen, así que hay un  $xy$ -camino dirigido  $C_0$  tal que  $l(C_0)$  es par. Como  $D$  es fuerte, hay un  $yx$ -camino dirigido  $C'$ . Si  $l(C')$  es impar, entonces  $C' \cup C_0$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar. Si  $l(C')$  es par, entonces  $C' \cup C_1$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar. Por lo tanto,  $\nexists y \in V_0 \cap V_1$ .

iv)  $V_0$  y  $V_1$  son conjuntos independientes: supongamos que existe  $\{y, z\} \subset V_0$  tal que hay un  $yz$ -arco  $A$  en  $D$ . Si  $x$  y  $y$  están en el mismo nivel de todo arco al que pertenecen, entonces hay un  $xz$ -arco, así que  $z \in V_0 \cap V_1$ , lo que es una contradicción. Si no, hay un  $xy$ -camino dirigido de longitud par  $C = (x = x_0, A_0, x_1, \dots, A_{k-1}, x_k = y)$ , así que la longitud del  $xz$ -camino dirigido  $C' = (x = x_0, A_0, x_1, \dots, A_{k-1}, y, A, z)$  es impar. Entonces  $z \in V_0 \cap V_1$ , lo que es imposible. Se sigue que  $V_0$  es un conjunto independiente. Podemos ver que  $V_1$  es independiente siguiendo un razonamiento similar. ♦

*Teorema 2.9:* Toda hipergráfica dirigida simétrica  $D$  sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar tiene una  $k$ -transversal.

*Demostración:* Según la observación que antecede al Teorema 2.8, una hipergráfica dirigida simétrica tiene una  $k$ -transversal si, y sólo si, todas sus componentes fuertes tienen una, así que podemos asumir que  $D$  es fuerte. Como  $D$  es fuerte, por el Teorema 2.8  $D$  es bipartita, y entonces el Teorema 2.2 afirma que  $D$  tiene una  $k$ -transversal. ♦

*Corolario 2.10:* Sea  $H$  una hipergráfica tal que existe una hipergráfica dirigida  $D$  generada por  $H$  sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar. Entonces  $H$  tiene un conjunto transversal fuertemente independiente.

*Demostración:* Sea  $H$  una hipergráfica que satisface las condiciones del corolario, y sea  $D$  una hipergráfica dirigida generada por  $H$  sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar. El Teorema 2.9 afirma que  $D$  tiene una  $k$ -transversal  $T$ . Como la partición de cada arco es la partición natural de las aristas de  $H$ , la intersección entre cualesquiera dos niveles de  $D$  es vacía. Sean  $N_1, \dots, N_k$  los niveles de arcos en  $D$  tales que  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $N_i \cap T \neq \emptyset$ . Consideremos un conjunto  $N = \{x_1, \dots, x_k\}$ , donde  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $x_i \in N_i$ . Por otra parte, notemos que el conjunto de vértices aislados  $X$  de  $D$  está contenido en  $T$ . Entonces  $L = X \cup N$  es un conjunto transversal fuertemente independiente en  $H$ : como todo nivel intersectado por  $T$  es también intersectado por  $L$ , se tiene que  $L$  es

un conjunto transversal de  $H$ ; como  $T$  es independiente (es decir, no hay dos niveles  $N_p$  y  $N_q$  tales que  $N_p \cap T \neq \emptyset \neq N_q \cap T$  y para algún arco  $A$  en  $D$ ,  $N_p \subset V(A)$ ,  $N_q \subset V(A)$ ) y sólo tomamos un vértice de cada nivel, se sigue que  $L$  es fuertemente independiente en  $H$ .♦

*Corolario 2.11:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica sin ciclos de longitud impar y tal que la partición natural de todas sus aristas tiene dos elementos. Entonces  $H$  tiene un conjunto transversal fuertemente independiente. En particular, toda multigráfica sin lazos ni ciclos de longitud impar tiene un conjunto transversal independiente.

*Demostración:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica que satisface las condiciones del corolario. Como la partición natural de toda arista de  $H$  tiene dos niveles,  $H$  genera una hipergráfica dirigida  $D$ . Como  $H$  no tiene ciclos de longitud impar,  $D$  no tiene ciclos dirigidos de longitud impar (pues todo arco tiene sólo dos niveles), así que por el Lema 2.5  $D$  no tiene caminos dirigidos cerrados de longitud impar. Entonces el Corolario 2.10 afirma que  $H$  tiene un conjunto transversal fuertemente independiente.♦

Si la partición natural de todas las aristas de  $H$  tiene dos elementos, para toda  $E \in H$  existe una partición  $B = (B_1, B_2)$  del conjunto  $I_E = \{F \in H \mid E \neq F, E \cap F \neq \emptyset\}$ , posiblemente con elementos vacíos, tal que  $\forall i \in \{1, 2\}, \forall F_a, F_b \in B_i, E \cap F_a = E \cap F_b$ ; si  $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$ , entonces  $E \subset I_E$ . Por otra parte, el Lema 2.7 implica que toda hipergráfica  $H$  tal que existe una hipergráfica dirigida bipartita generada por ella, tiene un conjunto transversal fuertemente independiente.

*Corolario 2.12:* Sea  $H = \{E_1, \dots, E_m\}$  una hipergráfica simple sin ciclos de longitud impar y tal que la partición natural de sus aristas tiene cuando mucho dos elementos. Entonces  $H$  tiene un conjunto transversal fuertemente independiente.

*Demostración:* Sea  $H = \{E_1, \dots, E_m\}$  una hipergráfica que satisface las condiciones del corolario. Como  $H$  es simple, toda arista cuya partición natural tiene un solo elemento no intersecta a ninguna otra arista. Podemos entonces tomar un vértice de cada una de dichas aristas y considerar la hipergráfica formada por las aristas con dos niveles: sin pérdida de generalidad, sea  $H' = \{E_1, \dots, E_k\}$  el conjunto de aristas de  $H$  cuya partición natural tiene un elemento, y consideremos el conjunto  $T' = \{x_1, \dots, x_k\}$ , donde para todo  $i \in \{1, \dots, k\}, x_i \in E_i$ . La partición natural de cada arista de  $H'' = H \setminus H'$  tiene dos elementos, así que podemos aplicar el Corolario 2.11, obteniendo un conjunto transversal fuertemente independiente  $T''$  de  $H''$ . Entonces  $T' \cup T''$  es un conjunto transversal fuertemente independiente de  $H$ .♦

Como consecuencia, toda (multi)gráfica (con lazos) sin ciclos de longitud impar tiene un conjunto transversal independiente.

*Problema abierto:* Caracterizar las hipergráficas  $H$  tales que existe una hipergráfica dirigida  $D$  generada por  $H$  sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar. La Figura 2.7 muestra una hipergráfica con ciclos de longitud impar tal que toda hipergráfica dirigida generada por ella carece de ciclos.

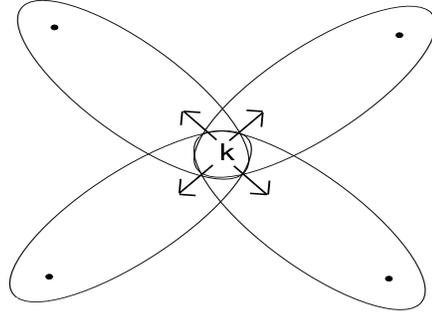


Figura 2.7. Hay  $k$  arcos,  $k$  vértices en el nivel que es mínimo de todos los arcos y un vértice en cada uno de los otros niveles.  $D$  no tiene caminos dirigidos cerrados, mientras que la hipergráfrica subyacente tiene ciclos de toda longitud no mayor que  $k$ .

Veremos ahora que toda hipergráfrica dirigida sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar es núcleo-perfecta:

*Definición:* Una componente fuerte  $T$  de una hipergráfrica dirigida  $D$  en un conjunto  $V$  es *terminal* si, y sólo si,  $\forall x \in V \setminus V(T)$ , no hay  $V(T)x$ -arcos.

Obsérvese que toda hipergráfrica dirigida tiene una componente fuerte terminal.

*Definición:* Una hipergráfrica dirigida que no es núcleo-perfecta es llamada *núcleo-imperfecta*. Una hipergráfrica dirigida núcleo-imperfecta tal que todas sus subhipergráficas dirigidas inducidas propias son núcleo-perfectas es llamada *núcleo-imperfecta crítica (NIC)*.

Nótese que dada una hipergráfrica dirigida núcleo-imperfecta  $D$ , siempre existe una subhipergráfrica dirigida inducida de  $D$  que es NIC, pues toda hipergráfrica dirigida en un conjunto de uno o dos vértices es núcleo-perfecta.

*Lema 2.13:* Toda hipergráfrica dirigida NIC es fuerte.

*Demostración:* Sea  $D$  una hipergráfrica dirigida NIC en un conjunto  $V$ . Supongamos que  $D$  no es fuerte y consideremos una componente fuerte terminal  $T$  de  $D$ . Como  $D$  no es fuerte,  $T$  es una subhipergráfrica dirigida inducida propia de  $D$ , así que tiene núcleo  $K_1$ . Como  $D$  no tiene núcleo,  $\emptyset \neq U = V \setminus (K_1 \cup N^-(K_1)) \neq V$ , lo que implica que  $D[U]$  tiene núcleo  $K_2$ .

Veamos que  $K_1 \cup K_2$  es independiente: no hay  $K_1K_2$ -arcos, pues  $T$  es terminal; no hay  $K_2K_1$ -arcos, por la definición de  $U$ . Se tiene además que  $K_2 \cup N^-(K_2) = U$  y  $K_1 \cup N^-(K_1) = V \setminus U$ , así que  $K_1 \cup K_2$  es núcleo de  $D$ . Esto es una contradicción. Por lo tanto,  $D$  es fuerte.♦

*Teorema 2.14:* Toda hipergráfrica dirigida  $D$  sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar es núcleo-perfecta.

*Demostración:* Sea  $D$  una hipergráfrica dirigida núcleo-imperfecta sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar, y sea  $D'$  una subhipergráfrica dirigida inducida NIC de  $D$ . Como  $D'$  es fuerte y no tiene caminos dirigidos cerrados

de longitud impar, el Teorema 2.8 afirma que  $D'$  es bipartita. Así, por el Teorema 2.2',  $D'$  es núcleo-perfecta. Esto es una contradicción, con lo que queda demostrado el Teorema 2.14. ♦

*Corolario 2.15:* Sea  $D$  una hipergráfica dirigida sin ciclos dirigidos de longitud impar, y tal que ninguno de sus arcos tiene más de dos niveles. Entonces  $D$  es núcleo-perfecta.

*Demostración:* Se sigue del Lema 2.5 y el Teorema 2.14. ♦

El Corolario 2.15 es una generalización del Teorema de Richardson (1.4), pues todo arco en una (multi)digráfica tiene cuando mucho dos niveles.

### Digráficas asociadas

Podemos asociar una digráfica  $Q$  a cualquier hipergráfica dirigida  $D$  de la siguiente manera:  $V(Q) = V(D)$ , y para todo  $\{x, y\} \subset V(Q) = V(D)$  hay una  $xy$ -flecha en  $Q$  si, y sólo si, hay un  $xy$ -arco en  $D$ . Esto se asemeja a la 2-sección de una hipergráfica, definida por Berge en [7] y estudiada por Borowiecki ([15]), aunque aquí puede haber dos vértices en un mismo arco de  $D$  sin flecha entre sí en  $Q$ . Dada una hipergráfica dirigida  $D$ , a cada arco  $A_i$  de  $D$  le corresponde un torneo  $r(i)$ -partito. Si pedimos que la intersección de cualesquiera dos niveles de  $D$  sea vacía y  $k$  es la cantidad total de niveles en  $D$ , entonces  $Q$  es una digráfica  $k$ -partita.

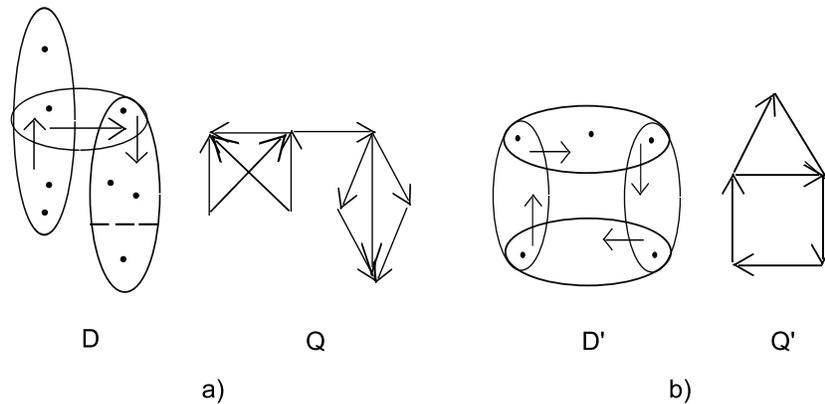


Figure 2.8: Digráfica asociada.

Notemos que una digráfica dada puede estar asociada a varias hipergráficas dirigidas (para empezar, a sí misma). De la definición de  $Q$ , se tiene que  $S \subset V(D) = V(Q)$  es independiente en  $D$  si, y sólo si, es independiente en  $Q$ , y que  $S$  es absorbente en  $D$  si, y sólo si, es absorbente en  $Q$ . Así, todo resultado referente a núcleos (no necesariamente transversales) en hipergráficas dirigidas corresponde a un resultado relativo a núcleos en digráficas. Si  $Q$  no

tiene caminos dirigidos cerrados de longitud impar,  $D$  tampoco los tiene. Sin embargo, hay hipergráficas dirigidas sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar cuyas digráficas asociadas tienen caminos dirigidos cerrados de longitud impar (es decir, ciclos dirigidos de longitud impar), como se muestra en la Figura 2.8.b. El Teorema 2.14 implica que la digráfica asociada a toda hipergráfica dirigida sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar es núcleo-perfecta.

*Problema abierto:* Caracterizar las digráficas con ciclos dirigidos (es decir, caminos dirigidos cerrados) de longitud impar que pueden asociarse a hipergráficas dirigidas sin caminos dirigidos cerrados de longitud impar. Es fácil mostrar que todo ciclo dirigido de longitud impar  $C$  de tales digráficas  $Q$  tiene cuando menos un "salto" de longitud 2: si  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2k+1} = x_0)$  es un ciclo dirigido de longitud impar en  $Q$ , entonces  $(x_{2k}, x_1)$  es una flecha de  $Q$ , o existe  $i \in \{1, \dots, 2k-1\}$  tal que  $(x_i, x_{i+2})$  es una flecha de  $Q$ .

*Observación:* Podemos decir que una hipergráfica dirigida  $D$  es  $k$ -transversal-perfecta si toda subhipergráfica dirigida inducida de  $D$  tiene una  $k$ -transversal. Como toda subhipergráfica dirigida de una hipergráfica dirigida simétrica es también simétrica, los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.9 pueden extenderse fácilmente a resultados similares a los Teoremas 2.1", 2.2' y 2.14. Sin embargo, ya se mencionó que las subhipergráficas dirigidas inducidas de una hipergráfica dirigida  $D$  generada por una hipergráfica  $H$  no son necesariamente generadas por subhipergráficas inducidas de  $H$ , así que el concepto no es útil para investigar hipergráficas.

### Conclusiones

Hasta ahora nuestros esfuerzos se han enfocado en el estudio de los núcleos transversales en hipergráficas dirigidas. Creemos que el concepto de hipergráfica dirigida puede ser útil como herramienta en otros temas relacionados con digráficas e hipergráficas.

### CAPÍTULO 3: HIPERGRÁFICAS DE NIVELES

Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , su hipergráfica de niveles es el resultado de identificar todos los vértices que pertenecen exactamente a las mismas aristas. Esta nueva hipergráfica tiene la misma estructura que la original, pero puede tener menos vértices. Dado que se preservan algunas invariantes de hipergráficas, es posible obtener nuevos resultados a partir de teoremas enunciados en términos de orden o rango. Estas nuevas afirmaciones están planteadas en términos de la estructura de las aristas; algunas son generalizaciones, mientras que otras son independientes de los resultados originales.

#### **Fundamentos**

Debido a su importancia en este capítulo, se enuncia nuevamente la definición de partición natural:

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , su *partición natural*  $P = \{P_1, \dots, P_l\}$  es la partición del conjunto de vértices  $V(H)$  de  $H$  definida por la relación de equivalencia  $\approx$ , especificada por la regla  $x \approx y \Leftrightarrow E_x = E_y$ , donde para cualquier vértice  $w$ ,  $E_w$  denota al conjunto de aristas a las que pertenece  $w$ , la estrella de  $w$ . Los elementos de  $P$  son llamados *niveles* de  $H$ , y para cada arista  $E$  de  $H$ , los conjuntos  $\{P_i \subset E \mid P_i \in P\}$ , llamados *niveles* de  $E$ , forman la *partición natural* de  $E$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  con partición natural  $P = \{P_1, \dots, P_l\}$ , la *hipergráfica de niveles*  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  de  $H$  es la hipergráfica que resulta de eliminar todos los vértices salvo uno de cada nivel  $P_i$  de  $P$ . En otras palabras, consideramos un conjunto  $S = \{x_1, \dots, x_l \mid x_i \in P_i \forall i \in \{1, \dots, l\}\}$  y tomamos  $L_H = H[S]$ , la subhipergráfica inducida por  $S$ . Es claro que  $L_H$  está bien definida, es decir, no importa qué vértice de cada nivel se conserve, pues todos desempeñan un papel equivalente.

Las nociones presentadas arriba fueron descubiertas de manera independientemente por Acharya en [1], donde considera hipergráficas con vértices aislados (es decir, vértices que no pertenecen a ninguna arista). Aquí seguimos [7], así que los vértices "aislados" tienen un lazo. La única diferencia es que en [1] todos los vértices aislados pertenecen a un solo nivel, mientras que aquí cada uno pertenece a su propio nivel. Todos los resultados presentados aquí aplican de forma directa, o pueden adaptarse fácilmente, a hipergráficas con vértices aislados verdaderos.

Como toda arista  $E$  de  $H$  tiene cuando menos un vértice, contiene cuando menos un nivel, de manera que induce una arista  $E'$  en  $L_H$ ; entonces tanto  $H$  como  $L_H$  tienen la misma cantidad de aristas. De forma similar,  $E_i$  y  $E'_i$  contienen la misma cantidad de niveles y  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$  si, y sólo si,  $E'_i \cap E'_j \neq \emptyset$ . Esto implica que  $H$  es simple si, y sólo si,  $L_H$  es simple; que  $H$  tiene aristas

repetidas si, y sólo si,  $L_H$  las tiene, y que  $\nu(H) = \nu(L_H)$ , donde  $\nu(H)$  es la máxima cardinalidad de un apareamiento en  $H$ . Nótese que toda hipergráfica  $H$  tal que todos los elementos de su partición natural tienen sólo un vértice es una hipergráfica de niveles (de sí misma, en particular), así que podemos hablar de una hipergráfica "de niveles" sin considerar ninguna hipergráfica "original".

Cualquier subhipergráfica inducida de una hipergráfica de niveles es también una hipergráfica de niveles. Dada una hipergráfica  $H$ , la hipergráfica de niveles de cualquier subhipergráfica inducida de  $H$  es una subhipergráfica inducida de  $L_H$ . Sin embargo, una hipergráfica parcial de una hipergráfica de niveles no es siempre de niveles.

Obsérvese que todo vértice que pertenezca a un nivel dado  $P_i$  de  $H$  tiene el mismo grado, al igual que el vértice que corresponde a ese nivel en  $L_H$ . En particular, se preservan el grado máximo y el grado mínimo:  $\Delta(H) = \Delta(L_H)$  y  $\delta(H) = \delta(L_H)$ .

Dada una arista  $E$  de una hipergráfica  $H$ , la arista correspondiente de  $L_H$  se denotará con  $E'$ , y una arista de  $L_H$  se escribirá siempre con apóstrofe. Se utilizará el mismo símbolo para un nivel de  $H$  y para su nivel correspondiente en  $L_H$ . Numeramos los elementos de  $V(L_H) = \{x_1, \dots, x_l\}$  de manera que  $x_i \in P_i \forall i \in \{1, \dots, l\}$ , y llamamos a  $x_i$  el *representante* de  $P_i$ .

A menos que se indique lo contrario, utilizaremos la siguiente notación para toda hipergráfica  $H$ :

$P = \{P_1, \dots, P_l\}$  = partición natural de  $H$ ;  $V(H)$  = conjunto de vértices de  $H$ ;  $n = |V(H)|$  = orden de  $H$ ;  $m = |H|$ ;  $l = |P|$ ;  $r_E$  = cantidad de niveles contenidos en la arista  $E$ ;  $r = \max_{E \in H} |E|$  = rango de  $H$ ;  $s = \min_{E \in H} |E|$  = anti-rango de  $H$ ;  $r' = \max_{E \in H} r_E$ ;  $s' = \min_{E \in H} r_E$ ;  $H^*$  = hipergráfica dual de  $H$ ;  $H[A]$  = subhipergráfica de  $H$  inducida por  $A$ ;  $\tilde{H}$  = hipergráfica parcial de  $H$ ;  $E_x = \{E \in H \mid x \in E\}$ ;  $\tau = \min\{|T| \text{ tal que } T \text{ es un conjunto transversal de } H\}$ ;  $\tau' = \max\{|T| \text{ tal que } T \text{ es un conjunto transversal de } H \text{ que no contiene propiamente a ninguna otra transversal}\}$ ;  $\alpha = \max\{|T| \text{ tal que } T \text{ es un conjunto fuertemente independiente de } H\}$ ;  $\nu = \max\{|T| \text{ tal que } T \text{ es un apareamiento de } H\}$ ;  $\rho = \min\{|T| \text{ tal que } T \text{ es una cubierta de } H\}$ ;  $N_H(x)$  = el conjunto de vértices adyacentes a  $x$  en  $H = V(E_x) \setminus \{x\}$ ;  $N_H(A)$  = el conjunto de vértices adyacentes a cualquier vértice  $x \in A$ ;  $[a]$  = mayor entero menor o igual que  $a$ ;  $[a]^*$  = menor entero mayor o igual que  $a$ . No hacemos diferencia explícita entre niveles de  $H$  y niveles de  $L_H$ , y para cualquier arista  $E$  de  $H$ , la arista de  $L_H$  inducida por  $E$  se denota  $E'$ .

En [1] aparece una manera sencilla de caracterizar las hipergráficas de niveles: una hipergráfica dada  $H$  es una hipergráfica de niveles si, y sólo si, para todo conjunto  $\{x, y\} \subset V(H)$ , hay una arista  $E$  en  $H$  tal que  $x \in E$  y  $y \notin E$ , ó  $y \in E$  y  $x \notin E$ . De forma equivalente,  $H$  es una hipergráfica de niveles si, y

sólo si, para todo  $x \in V(H)$ , el mapeo natural  $x \mapsto E_x$  es biyectivo. Las hipergráficas de niveles pueden también caracterizarse por su matriz de incidencia: una hipergráfica  $H$  es de niveles si, y sólo si, su matriz de incidencia carece de renglones repetidos ( $\Leftrightarrow$  la matriz de incidencia de  $H^*$  carece de columnas repetidas).

Entonces toda hipergráfica de niveles es su propia hipergráfica de niveles. Una (multi)gráfica es una hipergráfica de niveles si, y sólo si, no tiene componentes conexas isomorfas a  $K_2$  (ni a  $K_2$  con aristas múltiples), de acuerdo con la caracterización del párrafo anterior. La hipergráfica de niveles de  $K_2$  es un vértice con un lazo (o varios lazos, si tiene aristas múltiples).

*Definición :* Una hipergráfica  $H$  es *separable* si  $\bigcap\{E \in H \mid x \in E\} = \{x\}$ .

Nótese que toda hipergráfica separable es una hipergráfica de niveles, pero el inverso no se cumple, como se muestra en la Figura 3.1, donde sólo  $\bigcap\{E \in H \mid x_4 \in E\}$  es un singlete.

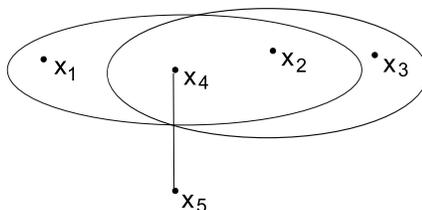


Figura 3.1

Algunos ejemplos de hipergráficas de niveles son los siguientes: hipergráficas  $r$ -completas  $K_n^r$ , hipergráficas hereditarias, planos proyectivos, hipergráficas  $k$ -partitas completas  $K_{n_1, \dots, n_k}^r$  si no más de un elemento de la partición tiene sólo un vértice. Esto puede verificarse fácilmente a partir de las caracterizaciones mencionadas. De cualquier forma, la última afirmación se demostrará en la Proposición 3.2.

Como muchas invariantes de hipergráficas son iguales en  $H$  y  $L_H$ , es posible considerar un teorema referente a algunas de ellas cuyas condiciones involucren cardinalidad, y "traducirlo" a un resultado enunciado en términos de la estructura de las aristas. Este método permite algunas generalizaciones de teoremas clásicos, aunque en otros casos los nuevos resultados apliquen a una clase diferente de hipergráficas que los originales.

*Observación:* Sean  $a, b, c, d$  enteros positivos tales que  $a \geq b$ ,  $c \geq d$ ,  $c \geq a$  y  $d \geq b$ . Si  $c - a \geq d - b$ , entonces  $\binom{c}{d} \geq \binom{a}{b}$ .

*Demostración:* Tenemos que para  $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$ ,  $d = b + p$  y  $c = a + p + q$ . Para empezar, tenemos que  $\frac{(a+p)!}{(b+p)!(a-b)!} = \binom{a+p}{b+p} \geq \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ . Por otra parte, si consideramos  $c' = a + p$ , entonces  $\frac{(c'+q)!}{(d)!(c'+q-d)!} = \binom{c'}{d} \geq \binom{c'}{d} = \frac{c!}{d!(c-d)!}$ . A partir de estas dos desigualdades llegamos al resultado deseado.  $\blacklozenge$

Esta observación elemental muestra que varios teoremas emulados proporcionan mejores cotas que los originales (aunque no siempre apliquen a la misma clase de hipergráficas).

Además, nótese que para toda arista  $E$  de una hipergráfica dada  $H$  se tiene que  $l - r_E \leq n - |E|$ .

*Teorema 3.1:* Toda hipergráfica simple  $H$  satisface:

$$(1) \sum_{E \in H} \binom{l}{r_E}^{-1} \leq 1$$

$$(2) m \leq \binom{l}{\lfloor l/2 \rfloor}$$

*Demostración:* Si  $H$  satisface las condiciones, el orden de  $L_H$  es  $l$ , y para cada arista  $E' \in L_H$ ,  $|E'| = r_E$ . Como  $H$  es simple si, y sólo si,  $L_H$  es simple, y como  $H$  y  $L_H$  tienen la misma cantidad de aristas, el resultado se sigue de un teorema de Sperner ([56]).  $\blacklozenge$

El Teorema 3.1 mejora las cotas dadas por Sperner, pues para cualquier hipergráfica  $H$  se tiene que  $\binom{l}{r_E} \leq \binom{n}{|E|}$  y  $\binom{l}{\lfloor l/2 \rfloor} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

*Proposición 3.2:* Sea  $H$  una hipergráfica y  $H^*$  su hipergráfica dual. Entonces  $L_H^*$  es como  $H^*$  sin aristas repetidas. Además, una hipergráfica  $H$  es de niveles si, y sólo si,  $H^*$  carece de aristas repetidas, y dada cualquier hipergráfica  $H$ ,  $H^*$  es de niveles si, y sólo si,  $H$  no tiene aristas repetidas.

*Demostración:* Se tiene que  $|H| = |L_H|$  y que para todo vértice en  $V(H)$  hay un vértice en  $V(L_H)$  que pertenece a las mismas aristas, entonces  $H^*$  y  $L_H^*$  tienen la misma estructura, pero  $H^*$  puede tener más aristas (repetidas), pues dos vértices en el mismo nivel de  $H$  inducen aristas repetidas en  $H^*$ . Por otra parte, la única manera de generar aristas repetidas en  $H^*$  es tener dos vértices en el mismo nivel de  $H$ , así que  $L_H^*$  no tiene aristas repetidas. Además, dos vértices en el mismo nivel de  $H^*$  corresponden a aristas repetidas en  $H$ .  $\blacklozenge$

*Definición:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica.  $H$  es *lineal* si  $|E_i \cap E_j| \leq 1$  para todo  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, m\}$ .

*Definición:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica.  $H$  es *lineal por niveles* si la intersección de cualesquiera dos aristas consiste en un solo nivel o es vacía.

*Proposición 3.3:* Sea  $H$  una hipergráfica lineal por niveles. Entonces su hipergráfica dual  $H^*$  es lineal salvo por aristas repetidas, es decir, para todo  $X, Y \in H^*$ ,  $|X \cap Y| > 1 \Rightarrow V(X) = V(Y)$ .

*Demostración:* Dada una hipergráfica  $H$ ,  $L_H^*$  es como  $H^*$  sin aristas repetidas. Sea  $H$  una hipergráfica lineal por niveles; entonces  $L_H$  es lineal, así que [7], Cáp. 1, Proposición 3 implica que  $L_H^*$  es lineal. Por la primera afirmación de este párrafo,  $H^*$  puede tener aristas repetidas, pero si dichas aristas se omiten es lineal. ♦

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  es  $r'$ -uniforme por niveles si toda arista de  $H$  tiene  $r'$  niveles.

*Teorema 3.4:* Sea  $H$  una hipergráfica lineal por niveles con  $l$  niveles y  $m$  aristas, entonces  $\sum_{E \in H} \binom{r_E}{2} \leq \binom{l}{2}$ . Si  $H$  es también  $r'$ -uniforme por niveles, entonces  $m \leq \frac{l(l-1)}{r'(r'-1)}$ .

*Demostración:* Si  $H$  satisface las condiciones, entonces  $L_H$  es una hipergráfica lineal ( $r'$ -uniforme) de orden  $l$  con  $m$  aristas. El resultado se sigue de [7], Cáp. 1, Teorema 3.

La primera afirmación aplica a una clase más amplia de hipergráficas que el resultado original, pues ser lineal implica ser lineal por niveles, y la cota resultante nunca es peor para hipergráficas lineales. La segunda afirmación también proporciona una cota mejor que [7], Cáp. 1, Teorema 3, pero aplica a una clase distinta de hipergráficas, pues ser uniforme y ser uniforme por niveles son diferentes y no comparables.

*Definición:* Una hipergráfica  $r$ -uniforme  $H$  es  $r$ -partita si  $V(H) = V_1 \cup \dots \cup V_r$  es la unión ajena de  $r$  conjuntos, y para  $i \in \{1, \dots, r\}$  y  $E \in H$  se tiene que  $|E \cap V_i| = 1$ .

*Proposición 3.5:* Una hipergráfica  $r$ -partita  $H$  con  $V(H) = V_1 \cup \dots \cup V_r$  es una hipergráfica de niveles si, y sólo si, no más de uno de los conjuntos  $V_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  tiene un solo vértice.

*Demostración:* Si dos conjuntos  $V_i$ ,  $V_j$  tienen un solo vértice, entonces esos dos vértices pertenecen a todas las aristas, es decir, están en el mismo nivel.

Si ninguno de los conjuntos  $V_1, \dots, V_r$  tiene un solo vértice, entonces para todo par de vértices  $\{x, y\} \subset V(H)$  hay una arista en la que está  $x$  pero no  $y$ , y una arista en la que está  $y$  pero no  $x$ , así que  $H$  es una hipergráfica de niveles. De forma similar, si sólo un conjunto  $V_i$  satisface  $|V_i| = 1$ , su elemento es el único vértice que está en todas las aristas, de manera que para todo par de vértices en  $V(H)$  hay una arista en la que sólo uno de ellos está, lo que implica que  $H$  es una hipergráfica de niveles. ♦

*Definición:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica y sea  $a \geq 0$  un entero. Multiplicar la arista  $E_i$  por  $a$  significa reemplazar  $E_i$  por  $a$  copias idénticas de

sí misma. Para una arista  $E$ , escribiremos  $aE$  para el resultado de multiplicar  $E$  por  $a$ .

*Definición:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica.  $H$  es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado.  $H$  es *regularizable* si puede llegarse a una hipergráfica regular multiplicando cada una de sus aristas  $E_i$  por un entero  $a_i > 0$ .  $H$  es *casi regularizable* si puede llegarse a una hipergráfica regular multiplicando cada una de sus aristas  $E_i$  por un entero  $a_i \geq 0$ .

*Proposición 3.6:* Sea  $H$  una hipergráfica y sea  $L_H$  su hipergráfica de niveles. Entonces:

- 1)  $H$  es regular si, y sólo si,  $L_H$  es regular.
- 2)  $H$  es regularizable si, y sólo si,  $L_H$  es regularizable.
- 3)  $H$  es casi regularizable si, y sólo si,  $L_H$  es casi regularizable.

En los casos 2 y 3, el entero utilizado para llegar a la hipergráfica regular es el mismo para una arista en  $H$  y para la arista que induce en  $L_H$ .

*Demostración:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica y sea  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  su hipergráfica de niveles. Supóngase que  $H$  es regularizable (casi regularizable), de forma que  $G = (a_1 E_1, \dots, a_m E_m)$  es regular para enteros positivos (no negativos)  $a_1, \dots, a_m$ . Para todo vértice en  $H$  hay un vértice en  $L_H$  con el mismo grado: el representante del nivel al que pertenece. Además, todos los vértices en un nivel dado de  $H$  se multiplicarán por los mismos enteros para obtener  $G$ . Esto implica que  $G' = (a_1 E'_1, \dots, a_m E'_m)$  es regular. Mediante un razonamiento idéntico, si  $G' = (a_1 E'_1, \dots, a_m E'_m)$  es regular entonces  $G = (a_1 E_1, \dots, a_m E_m)$  es regular. ♦

### **Familias intersectantes**

*Definición:* Sea  $H$  una hipergráfica. Una familia de aristas  $J \subset H$  es *intersectante* si, y sólo si,  $E \cap F \neq \emptyset$  para todo  $\{E, F\} \subset J$ . La máxima cardinalidad de una familia intersectante en  $H$  se denota  $\Delta_0(H)$ . Cuando  $\Delta_0(H) = m$  se dice que  $H$  es una *hipergráfica intersectante*.

Como dos aristas  $E_i$  y  $E_j$  en  $H$  se intersectan si, y sólo si, las aristas correspondientes  $E'_i$  y  $E'_j$  en  $L_H$  se intersectan, se tiene que  $\Delta_0(H) = \Delta_0(L_H)$ .

*Teorema 3.7:* Sea  $H$  una hipergráfica con  $l$  niveles y sin aristas repetidas. Entonces  $\Delta_0(H) \leq 2^{l-1}$ .

*Demostración:*  $\Delta_0(H) = \Delta_0(L_H)$ , y  $H$  tiene aristas repetidas si, y sólo si,  $L_H$  las tiene. Entonces el resultado se sigue de [7], Cáp. 1, Teorema 4.

El Teorema 3.7 es una generalización directa de [7], Cáp. 1, Teorema 4.

*Teorema 3.8:* Sea  $H$  una hipergráfica intersectante simple tal que  $r' \leq l/2$ .

Entonces  $\sum_{E \in H} \binom{l-1}{r_E-1}^{-1} \leq 1$  y  $m(H) \leq \binom{l-1}{r'-1}$ .

*Demostración:* Si  $H$  satisface las condiciones, el orden de  $L_H$  es  $l$ , su rango es  $r'$  y  $|E'| = r_E$  para cada arista  $E'$ . Además,  $m(H) = m(L_H)$ ,  $\Delta_0(H) = \Delta_0(L_H)$  y  $H$  es simple si, y sólo si,  $L_H$  es simple, así que el resultado se sigue de un teorema de Erdős, Cha-Ko y Rado ([21]).♦

El Teorema 3.8 mejora las cotas que proporciona dicho resultado, aunque no aplica a la misma clase de hipergráficas, pues que ninguna arista tenga más de la mitad de los niveles y que ninguna arista tenga más de la mitad de los vértices son diferentes y no comparables.

*Teorema 3.9:* Las siguientes afirmaciones se cumplen para cualquier hipergráfica intersectante  $H$ :

$$(1) \quad \sum_{E \in H, r_E \leq l/2} \binom{l}{r_E - 1}^{-1} + \sum_{E \in H, r_E > l/2} \binom{l}{r_E}^{-1} \leq 1$$

$$(2) \quad m(H) \leq \binom{l}{\lfloor l/2 \rfloor + 1}.$$

*Demostración:* Si  $H$  es intersectante, entonces  $L_H$  es intersectante, y el resultado se sigue directamente de la generalización debida a Greene, Katona y Kleitman del teorema de Erdős, Cha-Ko y Rado mencionado arriba ([34]).♦

El Teorema 3.9 mejora las cotas de dicha generalización. El Teorema 3.8 es un caso particular del Teorema 3.9.

*Definición:* Para un conjunto  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , una partición  $P = \{P_1, \dots, P_l\}$  de  $V$  y un entero  $r' \leq l$ , la hipergráfica  $r'$ -completa por niveles  $H_{n,l}^{r'}$  tiene conjunto de vértices  $V$  y sus aristas son los subconjuntos de  $V$  que contienen  $r'$  elementos de  $P$  y no intersectan a ningún otro elemento de  $P$ .

*Observación 3.10:* Si todo elemento de  $P$  tiene un solo vértice, tenemos la hipergráfica  $r$ -completa. Además, la hipergráfica de niveles de una hipergráfica  $r'$ -completa por niveles  $H_{n,l}^{r'}$  es  $K_l^{r'}$  (para todo  $n \geq l$ ).

*Teorema 3.11:*  $\Delta_0(H_{n,l}^{r'}) = \binom{l-1}{r'-1}$  si  $r' \leq l/2$ , y  $\Delta_0(H_{n,l}^{r'}) = \binom{l}{r'}$  si  $r' > l/2$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de la Observación 3.10, ya que  $\Delta_0(K_n^r) = \binom{n-1}{r-1}$  si  $r \leq n/2$ , y  $\Delta_0(K_n^r) = \binom{n}{r}$  si  $r > n/2$  ([7], Cáp. 1). ♦

*Teorema 3.12:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica intersectante simple con  $m(H) \geq 2$  y tal que  $\forall \{E, F\} \subset H, E \cup F \neq V(H)$ . Entonces  $m(H) \leq \frac{1}{2} \binom{l}{\lfloor l/2 \rfloor}$ .

*Demostración:* Si  $H$  satisface las hipótesis, entonces  $L_H$  también las satisface. El orden de  $L_H$  es  $l$  y  $m(H) = m(L_H)$ . El resultado se sigue de un teorema de Schönheim ([54]).♦

El Teorema 3.12 es una generalización del de Schönheim.

*Teorema 3.13:* Sea  $H$  una hipergráfica intersectante  $r'$ -uniforme por niveles. Entonces  $\Delta(H) \geq \left( \frac{r'}{(r')^2 - r' + 1} \right) m(H)$ .

*Demostración:* Como  $\Delta(H) = \Delta(L_H)$  y  $m(H) = m(L_H)$ , el resultado es consecuencia de [7], Cáp. 3, Corolario 1 al Teorema 14.♦

El Teorema 3.13 es mejor que el resultado que emula, pues  $r' \leq r$  para toda hipergráfica  $H$ .

### Coloraciones por aristas

*Definición:* Sea  $H$  una hipergráfica. Su *índice cromático*  $q(H)$  es la mínima cantidad de colores tal que existe una coloración de las aristas de  $H$  en la que aristas que se intersectan tienen colores diferentes (es decir, una coloración fuerte). Una hipergráfica  $H$  tiene la *propiedad de la coloración por aristas* siempre que  $q(H) = \Delta(H)$ .

*Observación 3.14:* Las aristas de  $L_H$  tienen la misma estructura que las de  $H$ , así que  $q(L_H) = q(H)$ . Como  $\Delta(L_H) = \Delta(H)$ , una hipergráfica dada  $H$  tiene la propiedad de la coloración por aristas si, y sólo si,  $L_H$  tiene la propiedad de la coloración por aristas.

Además,  $H$  tiene una  $k$ -coloración por aristas, así como una  $k$ -coloración buena, equitativa, fuerte o uniforme si, y sólo si,  $L_H$  tiene también tal coloración. Esto hace más sencillo averiguar si una hipergráfica dada tiene un tipo particular de coloración por aristas.

*Teorema 3.15:*  $H_{n,l}^{r'}$  tiene la propiedad de la coloración por aristas si, y sólo si,  $\exists k \in \mathbb{N}$  tal que  $l = kr'$ .

*Demostración:* Se sigue de la Observación 3.10, la Observación 3.14 y un teorema de Baranyai referente a  $K_n^r$  ([5]).♦

El Teorema 3.15 es una generalización del resultado de Baranyai.

### La propiedad de Helly

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  tiene la *propiedad de Helly* si para toda familia intersectante  $J \subset H$  se tiene que  $\bigcap_{E \in J} E \neq \emptyset$ .

*Definición:* Considérese  $k \in \mathbb{N}$ . Una hipergráfica  $H$  es  $k$ -Helly si para todo conjunto  $J \subset H$  son equivalentes las siguientes condiciones:

- 1)  $(I \subset J, |I| \leq k) \Rightarrow \bigcap_{E \in I} E \neq \emptyset$ .
- 2)  $\bigcap_{E \in J} E \neq \emptyset$ .

Tener la propiedad de Helly es ser 2-Helly.

*Observación 3.16:* Como toda arista  $E$  en  $H$  induce una arista  $E'$  en  $L_H$ , y  $E \cap F \neq \emptyset$  si, y sólo si,  $E' \cap F' \neq \emptyset$ , se tiene que  $H$  es  $k$ -Helly si, y sólo si,  $L_H$  es  $k$ -Helly.

*Teorema 3.17:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica simple  $k$ -Helly tal que para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $r_{E_i} \geq k + 1$ . Entonces  $\sum_{i=1}^m \binom{l-1}{r_{E_i}-1}^{-1} \leq 1$ .

*Demostración:* Si  $H$  satisface las condiciones, entonces  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  es una hipergráfica simple  $k$ -Helly de orden  $l$  y tal que para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $|E'_i| = r_{E_i}$ . El resultado se sigue de un teorema de Tuza ([58]).♦

*Teorema 3.18:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica simple  $k$ -Helly tal que para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $r_{E_i} \geq k + 2$ . Entonces  $m(H) \leq \binom{l-1}{r'-1}$ .

*Demostración:* Similar a la del Teorema 3.17. El resultado es consecuencia de un teorema de Bollobás y Duchet ([11]).♦

*Teorema 3.19:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica simple con la propiedad de Helly tal que  $3 \leq r' \leq l/2$ . Entonces  $m(H) \leq \binom{l-1}{r'-1}$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de un teorema de Bollobás y Duchet ([12]).♦

*Teorema 3.20:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica simple con la propiedad de Helly tal que  $5 \leq l$ . Entonces  $m(H) \leq \binom{l-1}{\lfloor l/2 \rfloor}$ .

*Demostración:* El resultado es consecuencia de un teorema de Bollobás y Duchet ([12]).♦

Los Teoremas 3.17, 3.18, 3.19 y 3.20 proporcionan mejores cotas que los resultados en los que se basan, pero sus condiciones son más fuertes. Estos resultados (como varios otros) muestran que la mejor cota en el resultado original es alcanzada por una hipergráfica de niveles.

## Secciones

*Definición:* Para una hipergráfica simple  $H = (E_1, \dots, E_m)$  y  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq r$ , la  $k$ -sección de  $H$  es una hipergráfica  $[H]_k$  con  $V([H]_k) = V(H)$  y cuyas aristas son los conjuntos  $F \subset V(H)$  que satisfacen una de las siguientes condiciones:

- 1)  $|F| = k$  y  $F \subset E_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,
- 2)  $|F| < k$  y  $F = E_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

En general, la relación entre  $k$ -secciones e hipergráficas de niveles no es fuerte, pues las primeras sólo toman en cuenta si dos vértices dados pertenecen

a la misma arista, de manera que los vértices de un nivel dado de una hipergráfica  $H$  "se separan" al considerar  $k$ -secciones de  $H$ .

La  $k$ -sección de una hipergráfica de niveles  $L_H$  es una hipergráfica de niveles con la misma estructura de niveles que  $L_H$  (ambas tienen la misma cantidad de niveles, y dos niveles son adyacentes en  $L_H$  si, y sólo si, son adyacentes en su  $k$ -sección) aunque puede tener más aristas, como se muestra en la Figura 3.2. Como la 2-sección de cualquier hipergráfica  $H$  es una gráfica, entonces  $[H]_2$  es una hipergráfica de niveles a menos que  $[H]_2$  tenga componentes conexas isomorfas a  $K_2$  (con aristas múltiples), es decir, a menos que  $H$  tenga componentes conexas isomorfas a  $K_2$  (con aristas múltiples).

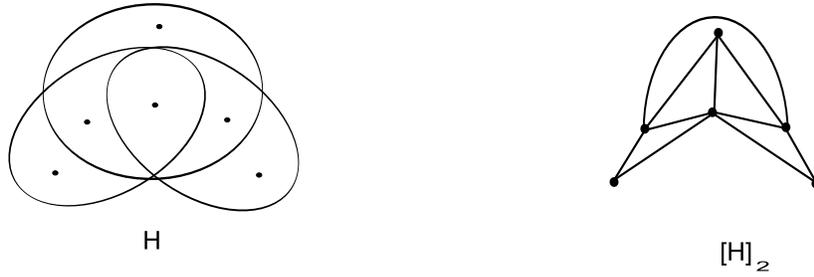


Figura 3.2

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  es *conforme* si los clanes maximales de  $[H]_2$  son aristas de  $H$ .

*Proposición 3.21:* Una hipergráfica  $H$  es conforme si, y sólo si,  $L_H$  es conforme.

*Demostración:* Dada una hipergráfica  $H$ , sus aristas son siempre clanes de  $[H]_2$ .

Dados dos vértices  $x$  y  $y$  en el mismo nivel  $P_i$  de  $H$ ,  $(x, y)$  es una arista de  $[H]_2$  y  $N(x) \setminus \{y\} = N(y) \setminus \{x\}$ .

Sea  $H$  una hipergráfica conforme. Se demostrará por inducción que  $L_H$  es conforme. Si sólo un nivel  $P_i$  de  $H$  tiene más de un vértice, consideramos dos vértices  $x$  y  $y$  en  $P_i$ . Sea  $(F_1, \dots, F_k)$  la familia de aristas que contienen a  $P_i$ , que son todas clanes maximales, pues  $H$  es conforme. Si se elimina  $y$ , tenemos la hipergráfica  $H[V \setminus \{y\}]$ , donde las aristas que contienen a  $P_i$  son  $F_1 \setminus \{y\}, \dots, F_k \setminus \{y\}$ , y las otras aristas permanecen iguales que en  $H$ . Supongamos que alguna arista  $F_j \setminus \{y\}$  no es un clan maximal de  $[H[V \setminus \{y\}]]_2$ , y consideraremos el clan maximal  $Q$  al que pertenece  $F_j \setminus \{y\}$ . En  $[H[V \setminus \{y\}]]_2$  hay una arista entre cualesquiera dos vértices de  $Q$ , así que pasa lo mismo en  $[H]_2$ . Como  $x$ , que pertenece a  $P_i$ , es un vértice de  $Q$ , se tiene que  $y$  es adyacente a todos los vértices de  $Q$  en  $[H]_2$ , lo que implica que  $F_j$  no es un clan maximal en  $[H]_2$ , así que  $H$  no es conforme. De esta manera, podemos eliminar todos los vértices salvo uno de  $P_i$  y la hipergráfica resultante seguirá siendo conforme.

Supongamos ahora que dada cualquier hipergráfica conforme en la que cuando mucho  $p - 1$  niveles tengan más de un vértice, su hipergráfica de niveles es conforme. Sea  $H$  una hipergráfica conforme con  $p$  niveles con más de un vértice. Podemos proceder como en el párrafo anterior, obteniendo una hipergráfica conforme con sólo  $p - 1$  niveles con más de un vértice cuya hipergráfica de niveles es la de  $H$ .

Sea  $H$  una hipergráfica tal que  $L_H$  es conforme. Siguiendo un razonamiento similar al de los dos párrafos anteriores, podemos añadir vértices uno por uno (pues son una cantidad finita) sin alterar la conformalidad, mostrando así que  $H$  es conforme. ♦

Este resultado hace más sencillo comprobar si una hipergráfica dada es conforme.

*Definición:* Para toda hipergráfica  $H$  y toda arista  $E$  de  $H$  con  $|E| \geq k$ , las aristas de  $[H]_k$  contenidas en  $E$  constituyen una hipergráfica  $k$ -completa.  $H$  es  $k$ -conforme si, y sólo si, los subconjuntos maximales de  $V(H)$  que constituyen hipergráficas  $k$ -completas de  $[H]_k$  son aristas de  $H$ .

*Proposición 3.22:* Una hipergráfica  $H$  es  $k$ -conforme si, y sólo si,  $L_H$  es  $k$ -conforme.

*Demostración:*  $L_H^*$  es como  $H^*$  sin aristas repetidas, y ser o no  $k$ -Helly no se altera al añadir o quitar aristas repetidas. Entonces el resultado se sigue porque una hipergráfica es  $k$ -conforme si, y sólo si, su dual es  $k$ -Helly ([7], Cáp. 1).

La Proposición 3.21 es un caso particular de la Proposición 3.22.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ , su *gráfica representativa*  $R(H)$  es aquella cuyos vértices son las aristas de  $H$  y cuyas aristas son  $\{(E_i, E_j) \mid E_i \cap E_j \neq \emptyset \text{ en } H\}$ .

En otras palabras,  $R(H) = [H^*]_2$ .

*Proposición 3.23:*  $R(H) = R(L_H)$ .

*Demostración:* Como  $L_H^*$  es como  $H^*$  sin aristas repetidas, se tiene que  $[L_H^*]_2 = [H^*]_2$ , pues la adyacencia no se altera al quitar o añadir aristas repetidas. ♦

*Teorema 3.24:* Sea  $H$  una hipergráfica  $r'$ -uniforme por niveles sin vértices de grado 1, y tal que todas sus aristas intersectan cuando menos a otras  $r'$  aristas. Entonces  $R(H)$  es regularizable.

*Demostración:* El Teorema 3.24 es consecuencia de la Proposición 3.23 y un teorema de Berge ([8]). ♦

*Definición:* Dada una gráfica  $G$ , denotamos con  $\Omega(G)$  al orden mínimo de las hipergráficas  $H$  cuya gráfica representativa es  $G$ .

Dada una gráfica  $G$ , es fácil ver que toda hipergráfica cuya gráfica representativa sea  $G$  y cuyo orden sea  $\Omega(G)$  es una hipergráfica de niveles.

## Transversales y apareamientos

*Definición:* Sea  $H$  una hipergráfica.  $T \subset V(H)$  es una *transversal* de  $H$  si, y sólo si,  $T$  intersecta a todas las aristas de  $H$ . Una transversal  $T$  de  $H$  es *minimal* si, y sólo si, para toda transversal  $T'$  de  $H$ ,  $T' \subset T \Rightarrow T' = T$ . Una transversal  $T$  de  $H$  es *mínima* si, y sólo si, para toda transversal  $T'$  de  $H$ ,  $|T| \leq |T'|$ .  $\tau$  denota la cardinalidad de una transversal mínima, y  $\tau'$  denota la máxima cardinalidad de una transversal minimal.

*Observación 3.25:* Una transversal de  $L_H$  es también una transversal de  $H$ , y una transversal  $T$  de  $H$  induce una transversal de  $L_H$  eliminando todos los vértices salvo uno de cada nivel cuya intersección con  $T$  tenga más de un elemento. Además, una transversal minimal de  $H$  tiene cuando mucho un vértice por nivel, pues dos vértices en un mismo nivel pertenecen exactamente a las mismas aristas; por otra parte, si una arista  $E'_i$  de  $L_H$  es intersectada por un conjunto dado  $S \subset V(H)$ , entonces la arista correspondiente  $E_i$  de  $H$  es intersectada por  $S$ ; se sigue que todo conjunto  $T \subset V(H)$  es una transversal minimal (mínima) de  $H$  si, y sólo si,  $T$  es una transversal minimal (mínima) de  $L_H$ , tomando  $T \cap P_i$  como  $x_i$ , el representante de  $P_i$ , siempre que  $T \cap P_i \neq \emptyset$ . Por lo tanto, se tiene que  $\tau'(H) = \tau'(L_H)$  y  $\tau(H) = \tau(L_H)$ .

Utilizaremos esta observación para demostrar resultados relativos a cotas para  $\tau$  y  $\tau'$ .

*Teorema 3.26:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica tal que  $s' \geq 2$ . Entonces  $\tau' \leq \left\lfloor \frac{l\Delta}{\Delta + s' - 1} \right\rfloor$ .

*Demostración:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica que satisface las condiciones de las hipótesis. Entonces  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  es una hipergráfica de orden  $l$  con  $s' = \min |E'_i| > 1$  y  $\Delta = \Delta(L_H) = \Delta(H)$ , así que por [7], Cáp. 2, Corolario 1 al Teorema 3 se tiene que  $\tau' \leq \left\lfloor \frac{l\Delta}{\Delta + s' - 1} \right\rfloor$ . ♦

La cota que da el Teorema 3.26 no es siempre mejor que la que resulta de [7], Cáp. 2, Corolario 1 al Teorema 3. Por ejemplo, para la hipergráfica  $H$  de la Figura 3.3 el Teorema 3.26 afirma que  $\tau' \leq 5$ , mientras que  $\tau' \leq 4$  según el resultado de [7]. Sin embargo, en la mayoría de los casos el Teorema 3.26 proporciona una mejor cota, aunque aplica a una clase más restringida de hipergráficas (toda arista debe tener cuando menos dos niveles, en lugar de cuando menos dos vértices).

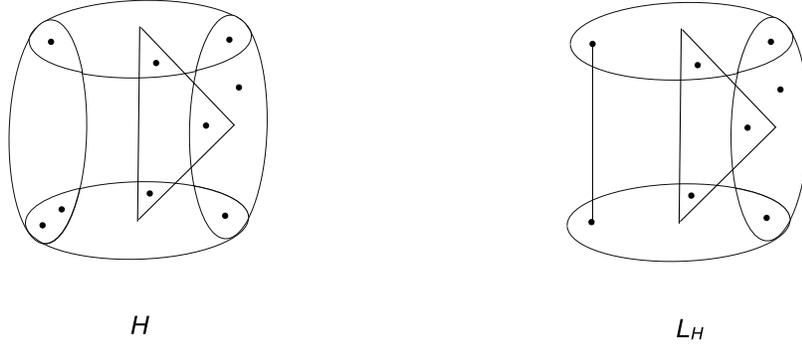


Figura 3.3

*Teorema 3.27:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica con  $s' > 1$ . Sea  $d'_i = d_H(x)$ ,  $x \in P_i$ , y etiquetemos los niveles de  $H$  de forma que

$$d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_l. \text{ Entonces } \tau'(H) = t \text{ satisface } \sum_{i=1}^t (d'_i + s' - 1) \leq \sum_{i=1}^l d'_i.$$

*Demostración:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica que satisface las condiciones. Entonces  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  es una hipergráfica de orden  $l$  con  $s' = \min |E'_i|$ , y tal que  $\{d'_1, d'_2, \dots, d'_l\}$  corresponde al conjunto de grados de sus vértices. Aplicando un teorema de Meyer [47] a  $L_H$  se obtiene el Teorema 3.27.

Como el Teorema 3.27 es una generalización del Teorema 3.26, tampoco resulta siempre en una cota mejor que el resultado de Meyer. Sí sucede en la mayoría de los casos, pero pide  $s' > 1$ , mientras que el teorema emulado aplica siempre que  $s > 1$ . ♦

*Teorema 3.28:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica lineal por niveles con  $s' > 2$ . Entonces  $\tau'(H) \leq l + \frac{1}{2}(s'^2 - 3s' + 1) - \frac{1}{2}\sqrt{4l(s'^2 - 3s' + 2) + (s'^2 - 3s' + 1)^2}$ .

*Demostración:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica según las hipótesis. Entonces  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  es una hipergráfica lineal de orden  $l$ , con  $s' = \min |E'_i|$ . El resultado se sigue de [7], Cáp. 2, Corolario 2 al Teorema 3. ♦

Como  $s \geq s'$  y  $(p^2 - 3p + 1) \geq (q^2 - 3q + 1)$  siempre que  $p \geq q > 1$ , el Teorema 3.28 es mejor que el resultado que emula. Sin embargo, aplica a una clase distinta de hipergráficas: pedir que  $H$  sea lineal por niveles es menos que pedir que  $H$  sea lineal, pero  $s' > 2$  es pedir más que  $s > 2$ .

*Teorema 3.29:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica lineal por niveles tal que toda arista tiene 3 niveles. Entonces  $\tau(H) \leq l + \frac{1}{2} - \sqrt{2l + \frac{1}{4}}$ .

*Demostración:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica según las hipótesis. Entonces  $L_H = (E'_1, \dots, E'_m)$  es una hipergráfica lineal 3-uniforme de orden  $l$ , y el resultado se sigue de un teorema de Erdős, Hajnal y Moon [22]. ♦

Como dicho resultado es un caso particular de [7], Cáp. 2, Corolario 2 al Teorema 3 (de manera que el Teorema 3.29 es un caso particular del Teorema

3.28), se tiene que el Teorema 3.29 da una mejor cota que el resultado en que se basa, pero aplica a una clase distinta de hipergráficas.

*Observación:* Un conjunto fuertemente independiente  $S$  en  $L_H$  es un conjunto fuertemente independiente en  $H$ , pues  $L_H$  es una subhipergráfica inducida de  $H$ . Inversamente, un conjunto fuertemente independiente  $S$  en  $H$  intersecta a cada nivel cuando mucho una vez, pues intersecta a cada arista cuando mucho una vez. Si tomamos  $S \cap P_i$  como  $x_i$  se tiene que  $S$  es un conjunto fuertemente independiente en  $L_H$ , pues toda arista  $E'_i \in L_H$  y todo conjunto  $A \subset V(H)$  satisfacen  $|E'_i \cap A| \geq 2 \Rightarrow |E_i \cap A| \geq 2$ .

Nótese que el concepto de independencia ( $S \subset V(H)$  es *independiente* si, y sólo si, no hay ninguna arista  $E \in H$  tal que  $|E| > 1$  y  $E \subset S$ ) no se traduce bien a las hipergráficas de niveles, pues puede darse que  $S \cap P_i \neq \emptyset$  y  $(V(H) \setminus S) \cap P_i \neq \emptyset$  para un nivel dado  $P_i$  de  $H$ .

*Teorema 3.30:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica lineal por niveles sin aristas repetidas. Entonces  $m \leq l$ .

*Demostración:* Como  $m(H) = m(L_H)$  y el orden de  $L_H$  es  $l$ , el resultado es consecuencia de un Teorema de DeBrujin y Erdős, completado por Ryser ([53]).♦

El Teorema 3.30 generaliza el resultado mencionado, dado que  $l \leq n$  y pedir que la intersección de dos aristas sea vacía o consista en un solo nivel es menos que pedir que consista en exactamente un vértice. Los casos (todos conocidos) en los que  $\forall \{i, j\} \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $|E_i| \cap |E_j| \leq 1$  y  $m = n$  son, por supuesto, hipergráficas de niveles. El siguiente es un resultado más fuerte debido a Seymour:

*Teorema 3.31' [55]:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica lineal sin lazos repetidos y sea  $n = |V(H)|$ . Entonces  $\nu(H) \geq \frac{m}{n}$ .

*Teorema 3.31:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica lineal por niveles sin aristas repetidas de un solo nivel. Sea  $l$  la cantidad total de niveles en  $H$ . Entonces  $\nu(H) \geq \frac{m}{l}$ .

*Demostración:* Sea  $H$  como en las hipótesis. Entonces  $L_H$  es una hipergráfica lineal sin lazos repetidos, con  $l$  vértices y  $m$  aristas. El resultado se sigue del Teorema 3.31'.♦

El Teorema 3.31 da una mejor cota que el Teorema 3.31', ya que  $l \leq n$ . Aplica a una clase más amplia de hipergráficas: la condición de linealidad es pedir más que intersecciones de un solo nivel; carecer de lazos repetidos parece ser menos que carecer de aristas repetidas de un solo nivel, pero en este caso ambas afirmaciones son equivalentes a pedir que no haya aristas repetidas.

*Teorema 3.32:* Toda hipergráfica simple regular  $H$  tal que toda arista tiene  $r'$  niveles satisface  $\frac{l}{(r')^2 - r' + 1} \leq \nu(H)$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de la Proposición 3.33 y [7], Cáp. 3, Corolario 2 al Teorema 14.♦

*Proposición 3.33:* Para cualquier hipergráfica  $H$  se tiene que:  $\tau(H) = \tau(L_H)$ ,  $\tau'(H) = \tau'(L_H)$ ,  $\nu(H) = \nu(L_H)$ ,  $\alpha(H) = \alpha(L_H)$  y  $\rho(H) = \rho(L_H)$ .

*Demostración:* Como una cubierta de  $H$ , al igual que una de  $L_H$ , debe cubrir todos los niveles de  $P$ , y como dadas dos aristas  $E$  y  $F$  en  $H$ ,  $E \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow E' \cap F' \neq \emptyset$ , se tiene que  $\rho(H) = \rho(L_H)$ . Las demás afirmaciones ya fueron demostradas. ♦

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$ , la hipergráfica  $Tr(H)$  tiene conjunto de vértices  $V(H)$  y sus aristas son las transversales minimales de  $H$ .

*Observación 3.34:* Aunque para toda transversal minimal de  $H$  hay una transversal minimal de  $L_H$  con vértices en los mismos niveles,  $H$  puede tener una cantidad mayor de transversales minimales, que son aristas distintas de  $Tr(H)$ . Sin embargo, para toda arista de  $Tr(H)$  hay una arista de  $Tr(L_H)$  con la misma cardinalidad. En particular, el rango y el anti-rango son iguales en ambas hipergráficas, y  $Tr(H)$  es uniforme si, y sólo si,  $Tr(L_H)$  es uniforme.  $Tr(L_H)$  no es siempre una hipergráfica de niveles, como se muestra en la Figura 3.4. No obstante, si  $H$  es una hipergráfica sin lazos, entonces  $Tr(H)$  es una hipergráfica de niveles.

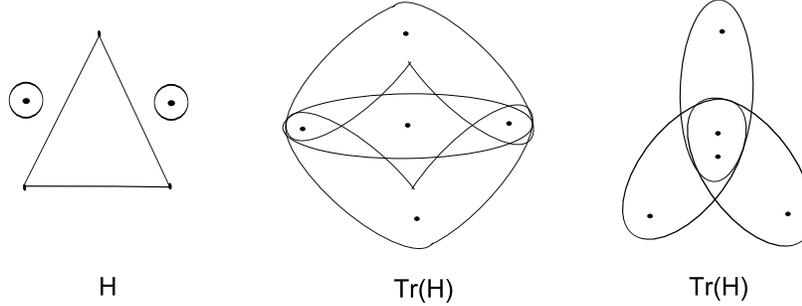


Figura 3.4

*Teorema 3.35:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica en un conjunto  $V$  con partición natural  $P$ , y sea  $t = \tau'(H)$ . Considérese  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k < s'$  y tal que cualesquiera  $k$  elementos de  $P$  están contenidos en cuando mucho  $\lambda$  aristas de  $H$ . Entonces  $\sum_{i=1}^t \binom{r_{E_i} - 1}{k} \leq \lambda \binom{l-t}{k}$ .

*Demostración:* Como  $\tau'(H) = \tau'(L_H)$ , el resultado se sigue de [7], Cáp. 2, Teorema 3. ♦

La cota del Teorema 3.35 es mejor que la de [7], pero aplica a una clase más restringida de hipergráficas:  $k < r_E$  implica  $k < |E|$ , y cualesquiera  $k$  vértices están contenidos en cuando mucho  $\lambda$  aristas de  $H$  si, y sólo si, cualesquiera  $k$  niveles están contenidos en cuando mucho  $\lambda$  aristas de  $H$ .

*Definición:* Considérese una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  en un conjunto  $V$ . El *complemento* de  $H$  es  $\overline{H} = (V \setminus E_1, \dots, V \setminus E_m)$ .

Es fácil verificar que  $\overline{\overline{H}} = L_{\overline{H}}$ , y que una hipergráfica  $H$  es de niveles si, y sólo si,  $\overline{H}$  es de niveles.

*Teorema 3.36:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica en un conjunto  $V$ . Entonces  $\tau'(H) \leq k$  si, y sólo si, la hipergráfica  $\overline{L_H}$  es  $k$ -conforme.

*Demostración:* El resultado es consecuencia de un teorema de Berge y Duchet ([9]) y de la Proposición 3.22, ya que  $\tau'(H) = \tau'(L_H)$  y  $\overline{L_H} = L_{\overline{H}}$ . ♦

El Teorema 3.36 mejora el resultado de Berge y Duchet, pues es más fácil verificar la  $k$ -conformalidad en  $\overline{L_H} = L_{\overline{H}}$  que en  $\overline{H}$ .

*Teorema 3.37:* Sea  $H$  una hipergráfica simple, y considérese  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Entonces  $\tau'(H) \leq k$  si, y sólo si, para toda hipergráfica parcial  $\tilde{H} \subset L_H$  con  $|\tilde{H}| = k + 1$  existe una arista  $E' \in L_H$  tal que  $E' \subset \{x \in V(L_H) \mid d_{\tilde{H}}(x) > 1\}$ .

*Demostración:*  $H$  es simple si, y sólo si,  $L_H$  es simple, y  $\tau'(H) = \tau'(L_H)$ . El resultado se sigue de [7], Cáp. 2, Corolario 1 del Teorema 5. ♦

Es más sencillo verificar la condición para hipergráficas parciales de  $L_H$  que para hipergráficas parciales de  $H$ .

*Teorema 3.38:* Sea  $H$  una hipergráfica simple con  $\tau(H) = t \geq 2$ . Entonces  $Tr(H)$  es uniforme si, y sólo si, para toda hipergráfica parcial  $\tilde{H} \subset L_H$  con  $|\tilde{H}| = t + 1$  existe una arista  $E' \in L_H$  tal que  $E' \subset \{x \in V(L_H) \mid d_{\tilde{H}}(x) > 1\}$ .

*Demostración:* Como  $\tau(H) = \tau(L_H)$ , el resultado se sigue de la Observación 3.34 y [7], Cáp. 2, Corolario 2 del Teorema 5. ♦

Como en el Teorema 3.37, es más fácil verificar la condición para hipergráficas parciales de  $L_H$  que para hipergráficas parciales de  $H$ .

*Definición:* Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es  $\tau$ -crítica si  $\forall E_i \in H$ ,  $\tau(H - E_i) < \tau(H)$ .

*Proposición 3.39:* Una hipergráfica  $H$  es  $\tau$ -crítica si, y sólo si,  $L_H$  es  $\tau$ -crítica.

*Demostración:* Toda transversal minimal (y por lo tanto toda transversal mínima) de  $H$  tiene cuando mucho un vértice en un nivel dado. Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica  $\tau$ -crítica y consideremos  $E_i \in H$ . Hay una transversal mínima  $T$  de  $H - E_i$  con  $\tau - 1$  vértices. Si tomamos  $T \cap P_i$  como el representante de  $P_i$  para todo nivel de  $H$  tal que  $T \cap P_i \neq \emptyset$ , se tiene que  $T \subset V(L_H)$  intersecciona a todas las aristas de  $L_H$  excepto a  $E'_i$ , la arista inducida en  $L_H$  por  $E_i$ , pues intersecciona a todas las aristas de  $H$  excepto a  $E_i$ . Dado que  $\tau(H) = \tau(L_H)$ , se concluye que  $L_H$  es  $\tau$ -crítica.

Considérese una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  tal que  $L_H$  es  $\tau$ -crítica. Para toda arista  $E_i$ , hay una transversal  $T_i$  de  $L_H - E'_i$  con  $\tau - 1$  vértices. Como  $T_i$  intersecciona a toda arista de  $H$  salvo a  $E_i$  y  $\tau(H) = \tau(L_H)$ , se sigue que  $H$  es  $\tau$ -crítica. ♦

*Observación:* A primera vista podría parecer que dada una hipergráfica  $H$  y una arista  $E \in H$ , si  $E'$  es la arista inducida en  $L_H$  por  $E$ , entonces  $L_{H-E} = L_H - E'$ . No es así, y  $L_H - E'$  no siempre es una hipergráfica de niveles, como se muestra en la Figura 3.5.



Figura 3.5

*Teorema 3.40:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica  $\tau$ -crítica con  $\tau = t + 1$ . Entonces  $\sum_{i=1}^m \binom{r_{E_i} + t}{t}^{-1} \leq 1$ .

*Demostración:* Como  $\tau(H) = \tau(L_H)$ , el resultado se sigue de la Proposición 3.39 y un teorema de Tuza ([58]). $\blacklozenge$

La cota proporcionada por el Teorema 3.40 es mejor que la de Tuza.

*Teorema 3.41:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica  $\tau$ -crítica con  $\tau = t + 1$  y tal que ninguna arista tiene más de  $r'$  niveles. Entonces  $m(H) \leq \binom{r' + t}{t}$ .

*Demostración:* Como  $m(H) = m(L_H)$ , la demostración se sigue de un teorema de Bollobás y (de manera independiente) de Jaeger y Payan ([39]). $\blacklozenge$

La cota del Teorema 3.41 es mejor que la del resultado mencionado, y aplica a una clase más amplia de hipergráficas, pues no tener más de  $a$  vértices implica no tener más de  $a$  niveles.

*Teorema 3.42:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica  $\tau$ -crítica con  $\tau = t + 1$ . Sea  $\bar{A} = \{A \subset V(L_H) \mid A \notin L_H, \exists x \in V(L_H) \text{ tal que } A \cup \{x\} \in L_H\}$ . Para  $x \in V(L_H)$ ,  $\Gamma x = \{A \in \bar{A} \mid A \cup \{x\} \in L_H\}$ , y para  $Y \subset V(L_H)$ ,  $\Gamma Y = \bigcup_{x \in Y} \Gamma x$ . Sea  $S \subset V(H)$  un conjunto fuertemente independiente en  $H$ .

Entonces  $|\Gamma S'| \geq |S|$ , donde  $S'$  es el conjunto fuertemente independiente de  $L_H$  inducido por  $S$ .

*Demostración:* Un conjunto fuertemente independiente  $S$  en  $H$  es un conjunto fuertemente independiente en  $L_H$ , si tomamos  $S \cap P_i$  como el representante de  $P_i$  para todo nivel de  $H$  tal que  $S \cap P_i \neq \emptyset$ . El resultado se sigue entonces de [7], Cáp. 2, Teorema 7. $\blacklozenge$

Como toda arista de  $L_H$  tiene cuando mucho tantos vértices como su arista correspondiente de  $H$ , el Teorema 3.42 da una mejor cota que el resultado en el que está basado.

*Teorema 3.43:* Sea  $H$  una hipergráfica  $r'$ -uniforme por niveles con  $\Delta = 2$ . Entonces  $\tau(H) \leq \left\lceil \left[ \frac{2l}{r'} \right] \frac{2}{3} \right\rceil$  si  $r'$  es par, y  $\tau(H) \leq \left\lceil \frac{4l}{3r'+1} \right\rceil$  si  $r'$  es impar.

*Demostración:* El resultado se sigue de un teorema de Sterboul ([57]), pues  $\tau(H) = \tau(L_H)$  y  $\Delta(H) = \Delta(L_H)$ . ♦

La cota del Teorema 3.43 es mejor que la de Sterboul, pues  $r - r' \leq n - l$  para toda hipergráfica  $H$ . Sin embargo, aplica a una clase distinta de hipergráficas.

*Teorema 3.44:* Sea  $H$  una hipergráfica regular 3-uniforme por niveles con  $\Delta = 3$ . Entonces  $\tau(H) \leq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ .

*Demostración:* El resultado es consecuencia directa de un teorema de Henderson y Dean ([38]). ♦

*Teorema 3.45:* Sea  $H$  una hipergráfica  $r'$ -uniforme por niveles que es lineal por niveles y regularizable, y tal que ninguna de las hipergráficas parciales de  $L_H$  es un plano proyectivo de orden  $r$ . Entonces  $\nu(H) \geq \frac{m}{l-1}$ .

*Demostración:* La afirmación se sigue de [7], Cáp. 3, Ejercicio 9. ♦

Los Teoremas 3.44 y 3.45 proporcionan mejores cotas que los resultados originales, pero no aplican a las mismas clases de hipergráficas.

## Propiedad de König

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  tiene la *propiedad de König* si  $\tau(H) = \nu(H)$ .

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  tiene la *propiedad de König dual* si  $\rho(H) = \alpha(H)$ .

*Proposición 3.46:* Sea  $H$  una hipergráfica. Entonces  $H$  tiene la propiedad de König si, y sólo si,  $L_H$  tiene la propiedad de König, y  $H$  tiene la propiedad de König dual si, y sólo si,  $L_H$  tiene la propiedad de König dual.

*Demostración:* El resultado se sigue directamente de la Proposición 3.36. ♦

*Teorema 3.47:* Una hipergráfica  $H$  con la propiedad de König tiene un conjunto de  $k$  niveles que intersecta a todas las aristas si, y sólo si,  $k\Delta(\tilde{H}) \geq m(\tilde{H})$  para todo  $\tilde{H} \subset L_H$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de la Proposición 3.46 y [7], Cáp. 3, Corolario 2 al Teorema 1, pues para todo vértice  $x$  en  $V(H)$  hay un vértice  $y$  en  $V(L_H)$  tal que  $x$  y  $y$  pertenecen al mismo nivel, es decir, las aristas de  $E_y$  son las inducidas por las aristas de  $E_x$ . ♦

Es más fácil verificar la condición en  $L_H$  que en  $H$ , y si  $H$  tiene  $k$  niveles que intersectan a todas las aristas entonces tiene  $k$  vértices que intersectan a todas las aristas.

*Teorema 3.48:* Una hipergráfica  $H$  con la propiedad de König tiene  $k$  aristas ajenas dos a dos si, y sólo si, para todo  $A \subset V(L_H)$ ,  $ks(L_H[A]) \geq |A|$ .

*Demostración:* El resultado es consecuencia de la Proposición 3.46 y [7], Cáp. 3, Corolario 1 al Teorema 1, ya que dos aristas son ajenas en  $H$  si, y sólo si, sus aristas inducidas son ajenas en  $L_H$ . ♦

Es más sencillo verificar la condición en  $L_H$  que en  $H$ .

*Teorema 3.49:* Sea  $H$  una hipergráfica con la propiedad de König dual.  $V(H)$  puede cubrirse con  $k$  aristas si, y sólo si, para todo  $A \subset V(L_H)$ ,  $kr(L_H[A]) \geq |A|$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de la Proposición 3.46 y [7], Cáp. 3, Corolario al Teorema 1', pues una familia de aristas cubre  $H$  si, y sólo si, sus aristas inducidas cubren  $L_H$ . ♦

Como en el Teorema 3.48, es más fácil trabajar con  $L_H$  que con  $H$ .

### Transversales fraccionarias y apareamientos fraccionarios

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$  y  $k \in \mathbb{N}$ , un  $k$ -apareamiento de  $H$  es una función  $q : H \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  tal que para cada vértice  $x \in V$ ,  $\sum_{E \in E_x} q(E) \leq k$ .

El *valor* de un  $k$ -apareamiento es  $\sum_{E \in H} q(E)$ , y  $\nu_k(H)$  es el valor máximo de los  $k$ -apareamientos en  $H$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$ , un *apareamiento fraccionario* de  $H$  es una función  $q : H \rightarrow [0, 1]$  tal que para cada vértice  $x \in V$ ,  $\sum_{E \in E_x} q(E) \leq 1$ . El

*valor* de un apareamiento fraccionario es  $\sum_{E \in H} q(E)$ , y  $\nu^*(H)$  es el valor máximo de los apareamientos fraccionarios en  $H$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$  y  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , una  $k$ -transversal de  $H$  es una función  $p : V(H) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  tal que para cada arista  $E \in H$ ,  $\sum_{x \in E} p(x) \geq k$ . El *valor* de una  $k$ -transversal es  $\sum_{x \in V(H)} p(x)$ , y  $\tau_k(H)$  es el valor mínimo de las  $k$ -transversales en  $H$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$ , una *transversal fraccionaria* de  $H$  es una función  $p : V(H) \rightarrow [0, 1]$  tal que para cada arista  $E \in H$ ,  $\sum_{x \in E} p(x) \geq 1$ . El

valor de una transversal fraccionaria es  $\sum_{x \in V(H)} p(x)$ , y  $\tau^*(H)$  es el valor mínimo de las transversales fraccionarias en  $H$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$  y  $k \in \mathbb{N}$ , una  $k$ -cubierta de  $H$  es una función  $q : H \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  tal que para cada vértice  $x \in V$ ,  $\sum_{E \in E_x} q(E) \geq k$ .

El valor de una  $k$ -cubierta es  $\sum_{E \in H} q(E)$ , y  $\rho_k(H)$  es el valor mínimo de las  $k$ -cubiertas en  $H$ .

*Proposición 3.50:*  $\nu_k(H) = \nu_k(L_H)$ ,  $\nu^*(H) = \nu^*(L_H)$ ,  $\tau_k(H) = \tau_k(L_H)$ ,  $\tau^*(H) = \tau^*(L_H)$  y  $\rho_k(H) = \rho_k(L_H)$ .

*Demostración:* Un  $k$ -apareamiento, un apareamiento fraccionario y una  $k$ -cubierta de  $H$  son trivialmente un  $k$ -apareamiento, un apareamiento fraccionario y una  $k$ -cubierta de  $L_H$ , y viceversa. Entonces  $\nu_k(H) = \nu_k(L_H)$ ,  $\nu^*(H) = \nu^*(L_H)$ , y  $\rho_k(H) = \rho_k(L_H)$ .

$\tau_k(H) = \tau_k(L_H)$ :

Considérese una  $k$ -transversal  $p$  de  $H$  cuyo valor sea  $\tau_k(H)$ . Si hubiera un nivel  $P_i$  de  $H$  tal que  $\sum_{x \in P_i} p(x) > k$ , entonces podríamos tomar un vértice

$y \in P_i$  tal que  $p(y) > 0$  y definir  $\bar{p} : V(H) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $\bar{p}(x) = p(x)$  si  $x \neq y$ ,  $\bar{p}(y) = p(y) - 1$ , que es una  $k$ -transversal de  $H$  cuyo valor es menor que el de  $p$ . Por lo tanto, para cualquier  $k$ -transversal  $p$  de  $H$  cuyo valor sea  $\tau_k(H)$ , y para todo nivel  $P_i$  de  $H$ , se tiene que  $\sum_{x \in P_i} p(x) \leq k$ . Entonces la función

$p' : V(L_H) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $p'(x_i) = \sum_{x \in P_i} p(x)$  es una  $k$ -transversal de  $L_H$  cuyo valor es el de  $p$ , es decir,  $\tau_k(H) \leq \tau_k(L_H)$ .

Tomemos ahora una  $k$ -transversal  $p'$  de  $L_H$  y considérese la función  $p : V(L_H) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $p(x_i) = p'(x_i)$ ,  $p(x) = 0$  para todo  $x \in V(H)$  que no sea representante de ningún nivel. Entonces  $p$  es una  $k$ -transversal de  $H$  cuyo valor es el de  $p'$ , lo que implica que  $\tau_k(H) \geq \tau_k(L_H)$ .

$\tau^*(H) = \tau^*(L_H)$ :

Sea  $P = \{P_1, \dots, P_l\}$  la partición natural de  $H$  y sea  $V(L_H) = \{x_1, \dots, x_l\}$ , donde  $x_i \in P_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Sea  $p'$  una transversal fraccionaria de  $L_H$  cuyo valor sea  $\tau^*(L_H)$ . Entonces  $p : V(H) \rightarrow [0, 1]$  tal que  $p(x) = \frac{p'(x_i)}{|P_i|}$  para  $x \in P_i$  es una transversal fraccionaria de  $H$ , de manera que  $\tau^*(H) \leq \tau^*(L_H)$ .

*Lema:* Sea  $H$  una hipergráfica con partición natural  $P = \{P_1, \dots, P_l\}$  y sea  $p$  una transversal fraccionaria de  $H$  cuyo valor sea  $\tau^*(H)$ . Entonces  $\sum_{x \in P_i} p(x) \leq 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

*Demostración:* Sean  $H$  y  $p$  como se pide. Supóngase que hay un nivel  $P_j$  de  $H$  tal que  $\sum_{x \in P_j} p(x) > 1$ . Sea  $J$  el conjunto de aristas de  $H$  que contienen

a  $P_j$ . Entonces para todo  $E \in J$  y todo  $x \in E \setminus P_j$ ,  $p(x)$  es independiente de los valores  $p(y)$  para  $y \in \bigcup_{E \in J} E$ , es decir, podríamos tener  $p(y) = 0$  y aún así  $\sum_{x \in E} p(x) \geq 1$  para toda arista  $E \in J$ . Esto significa que  $p^* : V(H) \rightarrow [0, 1]$  tal que  $p^*(x) = \frac{1}{|P_j|}$  para  $x \in P_j$  y  $p^*(x) = p(x)$  para  $x \in V(H) \setminus P_j$  es una transversal fraccionaria de  $H$  cuyo valor es estrictamente menor que  $\tau^*(H)$ . Queda así demostrado el Lema.

Considérese ahora una transversal fraccionaria  $p$  de  $H$  cuyo valor es  $\tau^*(H)$ . Entonces  $p' : V(L_H) \rightarrow [0, 1]$  tal que  $p'(x_i) = \sum_{x \in P_i} p(x)$  es una transversal fraccionaria de  $L_H$ , lo que implica que  $\tau^*(H) \geq \tau^*(L_H)$ . Esto completa la demostración de la Proposición 3.50.  $\blacklozenge$

*Teorema 3.51:* Sea  $H$  una hipergráfica  $r'$ -uniforme por niveles. Entonces  $H$  es casi regularizable si, y sólo si,  $\tau^*(H) = \frac{l}{r'}$ .

*Demostración:* Sea  $H$  una hipergráfica que satisface las condiciones de las hipótesis. Entonces  $L_H$  es una hipergráfica  $r'$ -uniforme con  $|V(L_H)| = l$ , así que por [7], Cáp. 3, Teorema 7, la Proposición 3.6 y la Proposición 3.50, se tiene que  $H$  es casi regularizable si, y sólo si,  $\tau^*(H) = \tau^*(L_H) = \frac{l}{r'}$ .  $\blacklozenge$

El Teorema 3.51 implica que para toda hipergráfica casi regularizable que sea tanto uniforme como uniforme por niveles, se tiene que  $\frac{n}{r} = \frac{l}{r'}$ .

*Teorema 3.52:* Sea  $H$  una hipergráfica simple tal que toda arista tiene  $r'$  niveles. Entonces  $\tau^*(H) \leq \frac{(r')^2 - r' + 1}{r'} \nu(H)$ .

*Demostración:* Ya se vio que  $\tau^*(H) = \tau^*(L_H)$  y  $\nu(H) = \nu(L_H)$  para toda hipergráfica  $H$ . Considérese  $H$  como en las hipótesis. Entonces  $L_H$  es una hipergráfica  $r'$ -uniforme y el resultado se sigue de un teorema de Füredi [24].  $\blacklozenge$

La cota proporcionada por el Teorema 3.52 es mejor que la de Füredi, pero aplica a una clase distinta de hipergráficas.

*Teorema 3.53:* Sea  $H$  una hipergráfica regular  $r'$ -uniforme por niveles. Entonces  $p : V(H) \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\forall x \in P_i$ ,  $p(x) = \frac{1}{|P_i| r'}$  es una transversal fraccionaria óptima de  $H$ .

*Demostración:* Si  $H$  satisface las condiciones del Teorema 3.53, entonces  $L_H$  es una hipergráfica regular  $r'$ -uniforme, de manera que  $q : V(L_H) \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\forall x \in V(L_H)$ ,  $q(x) = \frac{1}{r'}$  es una transversal fraccionaria óptima de  $L_H$  ([7], Cáp. 3, Corolario 3 al Teorema 1). Para obtener una transversal fraccionaria de  $H$ , dividimos el valor de cada vértice en  $V(L_H)$  entre todos los vértices del nivel que representa. La transversal fraccionaria resultante es óptima porque  $\tau^*(H) = \tau^*(L_H)$ .  $\blacklozenge$

*Teorema 3.54 :* Sea  $H$  una hipergráfica  $r'$ -uniforme por niveles con  $r' \geq 3$ , y tal que  $L_H$  no contiene a un plano proyectivo de rango  $r$  como hipergráfica parcial. Entonces  $\tau^*(H) \leq (r' - 1)\nu(H)$ .

*Demostración:* El resultado es consecuencia de [7], Cáp. 3, Corolario 3 al Teorema 14.♦

### Hipergráficas producto

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  y una hipergráfica  $H' = (F_1, \dots, F_{m'})$ , su *producto*  $H \times H'$  es la hipergráfica con  $V(H \times H') = V(H) \times V(H')$  y cuyas aristas son los conjuntos  $E_i \times F_j$  con  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $j \in \{1, \dots, m'\}$ .

*Proposición 3.55:* Dadas dos hipergráficas  $H$  y  $H'$ , se tiene que  $l(H \times H') = l(H) \cdot l(H')$ ,  $r'(H \times H') = r'(H) \cdot r'(H')$ ,  $s'(H \times H') = s'(H) \cdot s'(H')$ ,  $L_{H \times H'} = L_H \times L_{H'}$ , y  $H \times H'$  es una hipergráfica de niveles si, y sólo si,  $H$  y  $H'$  son de niveles.

*Demostración:*  $l(H \times H') = l(H) \cdot l(H')$ : si  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a niveles diferentes de  $H$ , entonces hay una arista  $E \in H$  tal que  $x_1 \in E$  y  $x_2 \notin E$ , ó  $x_2 \in E$  y  $x_1 \notin E$ . Entonces todos los vértices  $(x_1, y)$ ,  $y \in V(H')$  pertenecen a un nivel diferente de  $H \times H'$  que todos los vértices  $(x_2, y)$ ,  $y \in V(H')$ . Sucede lo mismo con dos vértices  $y_1$  y  $y_2$  que pertenecen a niveles diferentes de  $H'$ . Entonces  $l(H \times H') \geq l(H) \cdot l(H')$ .

Si dos vértices  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  pertenecen a niveles diferentes de  $H \times H'$ , entonces hay una arista  $E_i \times F_j$  tal que  $(x_1, y_1) \in E_i \times F_j$  y  $(x_2, y_2) \notin E_i \times F_j$ , ó  $(x_1, y_1) \notin E_i \times F_j$  y  $(x_2, y_2) \in E_i \times F_j$ . Supóngase que se cumple lo primero, entonces  $x_1 \in E_i$ ,  $y_1 \in F_j$ , y  $x_2 \notin E_i$  ó  $y_2 \notin F_j$ , es decir,  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a niveles diferentes de  $H$ , o  $y_1$  y  $y_2$  pertenecen a niveles diferentes de  $H'$ , lo que implica que  $l(H \times H') \leq l(H) \cdot l(H')$ .

$r'(H \times H') = r'(H) \cdot r'(H')$  y  $s'(H \times H') = s'(H) \cdot s'(H')$ : Por el razonamiento del párrafo anterior,  $r_{E_i \times F_j} = r_{E_i} \cdot r_{F_j}$ . Los resultados se siguen directamente.

$L_{H \times H'} = L_H \times L_{H'}$ : Considérense dos hipergráficas  $H$  y  $H'$ , un nivel  $P_i$  de  $H$  y un nivel  $Q_j$  de  $H'$ . Entonces  $P_i \times Q_j = \{(x, y) \mid x \in P_i, y \in Q_j\}$  está contenido en toda arista  $E \times F$  tal que  $P_i \subset E$ ,  $Q_j \subset F$ . Por otra parte,  $P_i \times Q_j$  no está contenido en ninguna arista  $E \times F$  tal que  $P_i \not\subset E$ , ni en ninguna arista  $E \times F$  tal que  $Q_j \not\subset F$ . Esto significa que los niveles de  $H \times H'$  son los conjuntos  $P \times Q$  tales que  $P$  es un nivel de  $H$  y  $Q$  es un nivel de  $H'$ , así que es equivalente identificar los vértices de un nivel dado  $P \times Q$  que identificar primero los vértices de  $P$  y los de  $Q$  y después hacer el producto.

$H \times H'$  es una hipergráfica de niveles si, y sólo si,  $H$  y  $H'$  son hipergráficas de niveles: Por el párrafo anterior, un nivel  $P \times Q$  tiene un solo vértice si, y sólo si, tanto  $P$  como  $Q$  tienen un solo vértice.♦

*Teorema 3.56:* Toda hipergráfica  $H$  satisface  $\tau^*(H) = \min_{\tilde{H}} \frac{\tau(L_H \times L_{\tilde{H}})}{\tau(L_{\tilde{H}})}$ ,

donde  $\tilde{H}$  es una hipergráfica parcial de  $H$ .

*Demostración:* El resultado es directo a partir de la Proposición 3.50, la Proposición 3.55 y [7], Cáp. 3, Teorema 16.♦

Es más fácil trabajar con  $L_H$  que con  $H$ .

*Teorema 3.57:* Toda hipergráfica  $H$  con la propiedad de Helly satisface  $\tau^*(H) = \max_{\tilde{H}} \frac{\nu(L_H \times L_{\tilde{H}})}{\nu(L_{\tilde{H}})}$ , donde  $\tilde{H}$  es una hipergráfica parcial de  $H$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de la Observación 3.16, la Proposición 3.50, la Proposición 3.55 y [7], Cáp. 3, Teorema 17.♦

### Coloraciones por vértices

*Proposición 3.58:* Sea  $H$  una hipergráfica y  $L_H$  su hipergráfica de niveles. Si  $L_H$  tiene una  $k$ -coloración,  $H$  también la tiene, y el inverso no se cumple. Si  $H$  tiene una  $k$ -coloración fuerte,  $L_H$  también la tiene, y el inverso no se cumple. Si  $H$  tiene una  $k$ -coloración buena o equitativa,  $L_H$  puede o no tenerla, y si  $L_H$  tiene una  $k$ -coloración buena o equitativa,  $L_H$  puede o no tenerla.

*Demostración:* Sea  $H$  una hipergráfica y sea  $L_H$  su hipergráfica de niveles. Supóngase que  $L_H$  tiene una  $k$ -coloración  $(S'_1, \dots, S'_k)$ . Entonces  $(S_1, \dots, S_k)$  es una  $k$ -coloración de  $H$ , donde todo vértice en cada nivel  $P_i$  de  $H$  tiene el color  $S_j$  si, y sólo si, su representante  $x_i$  tiene el color  $S'_j$ .

Supóngase ahora que  $H$  tiene una  $k$ -coloración fuerte. Como todos los vértices que pertenecen a una arista tienen colores distintos, si se asigna a cada vértice de  $L_H$  cualquiera de los colores presentes en el nivel de  $H$  que representa, se obtiene una  $k$ -coloración fuerte de  $L_H$ . La Figura 3.6 muestra una hipergráfica  $H$  tal que  $L_H$  tiene una 3-coloración fuerte, que por lo tanto es equitativa y buena, mientras que  $H$  no tiene ninguna 3-coloración buena, y  $H$  tiene una 2-coloración equitativa, mientras que  $L_H$  ni siquiera tiene una 2-coloración.♦

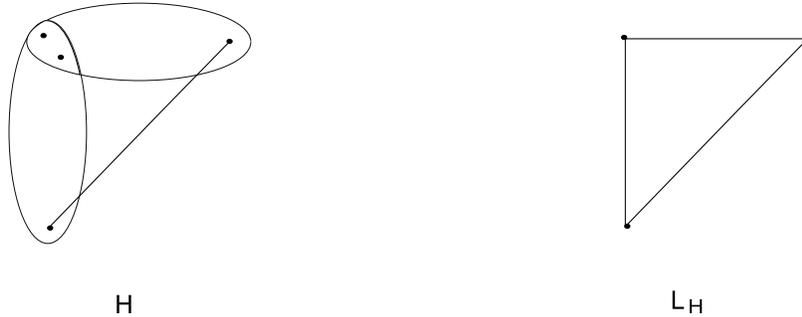


Figura 3.6

*Proposición 3.59:* Si  $L_H$  tiene una  $k$ -coloración uniforme, entonces  $H$  también tiene una.

*Demostración:* Supóngase que  $L_H$  tiene una  $k$ -coloración uniforme  $S = (S_1, \dots, S_k)$ . Para obtener una  $k$ -coloración uniforme de  $H$ , numeraremos los elementos de  $S$  de manera que  $|S_i| \geq |S_{i+1}|$  para todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Considérese un vértice no coloreado  $x$  y coloréese con  $S_{j+1}$ , el color que cumpla  $|S_j| > |S_{j+1}|$ , si es que existe; si no lo hay, coloréese  $x$  con  $S_1$ . Sígase coloreando vértices no coloreados en orden, es decir,  $S_{i+1}$  después de  $S_i$ , y  $S_1$  después de  $S_k$ . No importa cuál vértice (no coloreado) tiene cuál color. El resultado es una  $k$ -coloración  $S'$  de  $H$ , pues empezamos con una  $k$ -coloración de  $L_H$ , así que no hay aristas monocromáticas. Como  $S$  es uniforme, y por la forma en que se colorean los vértices de  $V(H) \setminus V(L_H)$ ,  $S'$  es uniforme.  $\blacklozenge$

El inverso no se cumple, como se muestra en la Figura 3.6, donde  $H$  tiene una 2-coloración uniforme y  $L_H$  ni siquiera tiene una 2-coloración.

*Teorema 3.60:* Toda hipergráfica  $H$  con  $s' > 1$  y tal que  $\sum_{E \in H} \binom{l - r_E}{\lfloor l/2 \rfloor} < \binom{l-1}{\lfloor l/2 \rfloor}$  admite una 2-coloración uniforme.

*Demostración:* El resultado se sigue directamente de la Proposición 3.59 y [7], Cáp. 4, Teorema 5.  $\blacklozenge$

El Teorema 3.60 aplica a una clase distinta de hipergráficas que [7], Cáp. 4, Teorema 5.

*Teorema 3.61:* Sea  $H$  una hipergráfica. Considérese  $k \leq l$ ,  $p = \lfloor \frac{l}{k} \rfloor$ ,  $q = l - pk$ . Si  $k \sum_{E \in H} \binom{l - r_E}{l - p} + q \sum_{E \in H} \left( \frac{r_E}{p + 1 - r_E} \right) < \binom{l}{p}$ , entonces  $H$  admite una  $k$ -coloración uniforme.

*Demostración:* Es consecuencia de la Proposición 3.59 y una generalización de Hansen y Loréa ([37]) a [7], Cáp. 4, Teorema 5.  $\blacklozenge$

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$ , su *número de Kneser*  $\tau_0(H)$  es la cantidad mínima de familias intersectantes cuya unión es  $H$ . Su  *$k$ -número de Kneser*  $\kappa_k(H)$  es la cantidad mínima de familias intersectantes requeridas para cubrir  $k$  veces  $H$ . Su *número de Kneser fraccionario* es  $\tau_0^*(H) = \min_{k \geq 1} \left( \frac{\kappa_k(H)}{k} \right)$ .

*Proposición 3.62:* Las siguientes afirmaciones se cumplen para cualquier hipergráfica  $H$ :  $\tau_0(H) = \tau_0(L_H)$ ,  $\kappa_k(H) = \kappa_k(L_H)$ ,  $\tau_0^*(H) = \tau_0^*(L_H)$ .

*Demostración:* El resultado se cumple porque dos aristas se intersectan en  $H$  si, y sólo si, sus aristas inducidas se intersectan en  $L_H$ , y un conjunto de aristas cubre  $k$  veces  $H$  si, y sólo si, el conjunto de sus aristas inducidas cubre  $k$  veces  $L_H$ .  $\blacklozenge$

*Teorema 3.63:* Sea  $H$  una hipergráfica  $r'$ -uniforme por niveles con  $l \geq 2r'$ . Entonces  $\tau_0(H) \leq l - 2r' + 2$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de la Proposición 3.62 y [7], Cáp. 4, Proposición. ♦

La cota del Teorema 3.63 es mejor que la de [7], Cáp. 4, Proposición, pero aplica a una clase distinta de hipergráficas.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H$ , su *número cocromático*  $\bar{\gamma}(H)$  es el menor entero positivo  $k$  tal que para toda  $k$ -partición  $S = (S_1, \dots, S_k)$  de  $V(H)$  hay una arista  $E \in H$  tal que  $\{x, y\} \in E$ ,  $x \in S_i$ ,  $y \in S_j \Rightarrow i \neq j$ .

*Proposición 3.64:*  $\bar{\gamma}(L_H) \leq \bar{\gamma}(H)$ .

*Demostración:* Sea  $\bar{\gamma}(H) = k$  y tómesese una  $k$ -partición  $S = (S_1, \dots, S_k)$  de  $V(H)$ . Sea  $E \in H$  una arista tal que  $\{x, y\} \in E$ ,  $x \in S_i$ ,  $y \in S_j \Rightarrow i \neq j$ . Si coloreamos el representante de cada nivel con cualquier color presente en ese nivel, se obtiene una  $k$ -partición  $S' = (S'_1, \dots, S'_k)$  de  $V(L_H)$  tal que  $\{x, y\} \in E'$ ,  $x \in S'_i$ ,  $y \in S'_j \Rightarrow i \neq j$ . ♦

Es claro que el inverso no se cumple, pues dada una hipergráfica de niveles  $L_H$ , existe una hipergráfica  $H$  cuya hipergráfica de niveles es  $L_H$  y tal que toda arista  $E \in H$  tiene tantos vértices como se quiera.

### Ciclos. Hipergráficas balanceadas y unimodulares

Dada una hipergráfica  $H$ , si  $L_H$  tiene un ciclo de longitud  $k$ , entonces  $H$  también tiene uno (de hecho, el mismo). El inverso no se cumple. Existen hipergráficas  $H$  con ciclos de cualquier longitud dada  $k$  tales que  $L_H$  no tiene ciclos de longitud  $k$ . Si  $H$  tiene  $k$  aristas que se intersectan en un solo nivel con  $k$  vértices, entonces  $H$  tiene ciclos de toda longitud no mayor que  $k$ , mientras que  $L_H$  no tiene ciclo alguno, como se muestra en la Figura 3.7 para  $k = 4$ . Sin embargo, otras nociones que generalizan las gráficas bipartitas a hipergráficas se preservan en las hipergráficas de niveles.

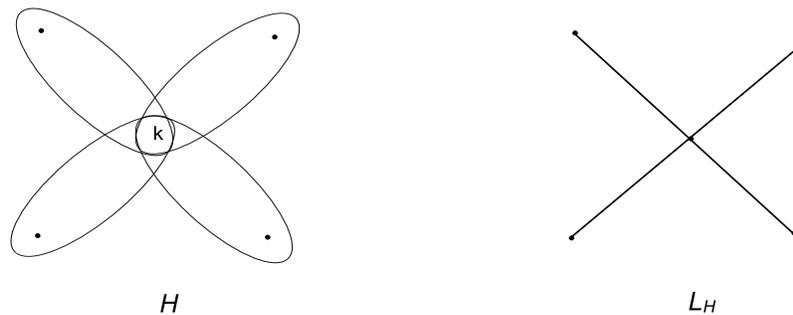


Figura 3.7

*Definición:* Sea  $H$  una hipergráfica. Un  $B$ -ciclo  $(x_1, E_1, \dots, E_k, x_1)$  de  $H$  es un ciclo impar tal que ningún vértice de  $\bigcup_{i=1}^k E_i$  está en más de dos aristas de él, y tal que  $|E_i \cap E_{i+1}| = 1$  para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  (aunque  $|E_k \cap E_1| \geq 1$ ).

*Proposición 3.65:* Si  $H$  tiene un  $B$ -ciclo de longitud  $k$  entonces  $L_H$  tiene un  $B$ -ciclo de longitud  $k$ .

*Demostración:* Sea  $C = (x_1, E_1, \dots, E_k, x_1)$  un  $B$ -ciclo de longitud  $k$  en  $H$ . Como ningún vértice de  $V(H)$  está en más de dos aristas de  $C$ , entonces todos los vértices del conjunto  $\{x_1, \dots, x_k\}$  pertenecen a niveles diferentes de  $H$  (de hecho, todos excepto  $x_1$  pertenecen siempre a niveles con un solo vértice), de manera que  $C' = (x_1, E'_1, \dots, E'_k, x_1)$  es un ciclo de  $L_H$ , si se toma  $x_1$  como representante de su nivel. Es directo verificar que  $C'$  es un  $B$ -ciclo en  $L_H$ . ♦

El inverso no se cumple, como se muestra en la Figura 3.8.

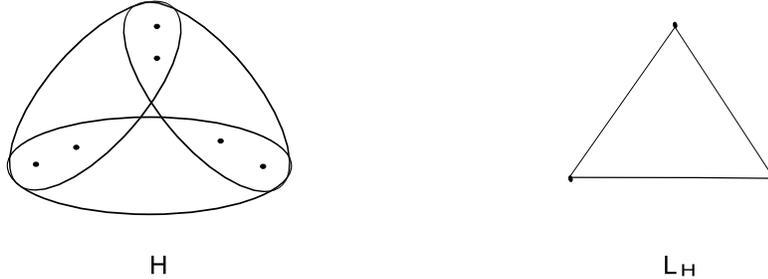


Figura 3.8

*Definición:* Dadas dos hipergráficas  $H = (E_1, \dots, E_m)$  y  $H' = (F_1, \dots, F_n)$  con  $V(H) = V(H')$ , y tales que toda arista de  $H$  intersecta cuando menos a una arista de  $H'$  y viceversa, la *composición* de  $H'$  con  $H$  es  $H \circ H'$ , cuyos vértices son las aristas de  $H'$  y cuyas aristas son los conjuntos  $\bar{E}_j = \{F_i \mid E_j \cap F_i \neq \emptyset\}$ .

*Proposición 3.66:*  $H \circ H' = L_H \circ L_{H'}$ .

*Demostración:* Para toda hipergráfica  $H$ ,  $|L_H| = |H|$  y  $E_j \cap F_i \neq \emptyset$  si, y sólo si,  $E'_j \cap F'_i \neq \emptyset$ . ♦

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  es *balanceada* (respectivamente *totalmente balanceada*) si para todo ciclo de longitud impar (respectivamente para todo ciclo)  $C$  hay una arista de  $C$  que contiene cuando menos tres vértices de  $C$ .

*Proposición 3.67:* Una hipergráfica  $H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada) si, y sólo si,  $L_H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada).

*Demostración:* Asúmase que  $H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada), y sea  $C' = (x_0, E'_0, \dots, x_k, E'_k, x_0)$  un ciclo de longitud impar  $k$  (respectivamente de cualquier longitud  $k$ ) en  $L_H$ . Entonces el ciclo  $C = (y_0, E_0, \dots, y_k, E_k, y_0)$ , donde  $y_i$  pertenece al mismo nivel que  $x_i$ , es un ciclo de longitud  $k$  en  $H$ . Como  $H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada), hay una arista  $E_i$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$  con cuando menos tres vértices de  $C$ , lo que implica que la arista correspondiente  $E'_i$  tiene cuando menos tres vértices del ciclo  $C'$ . Por lo tanto,  $L_H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada).

Inversamente, asúmase que  $L_H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada) y considérese un ciclo  $C = (y_0, E_0, \dots, y_k, E_k, y_0)$  de longitud impar  $k$  (respectivamente de cualquier longitud  $k$ ) en  $H$ . Si ningún par de vértices de  $V(C)$  pertenece al mismo nivel, el ciclo  $C$  induce un ciclo  $C' = (x_0, E'_0, \dots, x_k, E'_k, x_0)$  de la misma longitud en  $L_H$ . Como  $L_H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada), hay una arista  $E'_i$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$  con cuando menos tres vértices de  $C'$ , lo que implica que la arista correspondiente  $E_i$  tiene cuando menos tres vértices del ciclo  $C$ . Por lo tanto,  $H$  es balanceada (respectivamente totalmente balanceada).

Si hay dos vértices  $y_i, y_j$ ,  $i < j$ , que pertenecen al mismo nivel, entonces tanto  $E_{i-1}$  como  $E_j$  tienen cuando menos tres vértices de  $C$ :  $\{y_{i-1}, y_i, y_j\} \subset E_{i-1}$  y  $\{y_i, y_j, y_{j+1}\} \subset E_j$ . Esto completa la demostración.  $\blacklozenge$

*Teorema 3.68' ([7], Cáp. 5, Teorema 8):* Sea  $H$  una hipergráfica balanceada. Entonces  $H$  tiene una  $k$ -coloración buena para todo  $k \geq 2$ .

*Teorema 3.68'' :* Sea  $H$  una hipergráfica balanceada tal que  $|E| = r$  para toda arista  $E \in H$ . Entonces hay una partición de  $V(H)$  en  $r$  transversales fuertemente independientes ajenas dos a dos.

*Demostración:* Se sigue del Teorema 3.68', pues dada una  $r$ -coloración buena el conjunto de vértices con un color dado es una transversal fuertemente independiente.

*Teorema 3.68:* Sea  $H$  una hipergráfica balanceada tal que toda arista  $E \in H$  tiene  $r'$  niveles. Entonces  $H$  tiene  $r'$  transversales fuertemente independientes ajenas dos a dos.

*Demostración:* La Proposición 3.67 afirma que  $L_H$  es balanceada, así que podemos aplicarle el Teorema 3.68''. De acuerdo con la Observación 3.25, hay  $r'$  transversales fuertemente independientes de  $H$  ajenas dos a dos.  $\blacklozenge$

El Teorema 3.68 aplica a una clase más amplia de hipergráficas que el teorema 3.68'', pero no es tan fuerte, pues no se trata necesariamente de una partición del conjunto de vértices.

*Definición:* Una hipergráfica  $H$  es *fuertemente unimodular* si es balanceada y no tiene ciclos de longitud impar en los que una arista contenga exactamente tres vértices del ciclo y las otras contengan sólo dos.

*Proposición 3.69:* Una hipergráfica  $H$  es fuertemente unimodular si, y sólo si,  $L_H$  es fuertemente unimodular.

*Demostración:* La demostración es muy similar a la de la Proposición 3.67. Asíumase que  $H$  es fuertemente unimodular, y sea  $C' = (x_0, E'_0, \dots, x_k, E'_k, x_0)$  un ciclo de longitud impar  $k$  en  $L_H$ . Entonces el ciclo  $C = (y_0, E_0, \dots, y_k, E_k, y_0)$ , donde  $y_i$  pertenece al mismo nivel que  $x_i$ , es un ciclo de longitud  $k$  en  $H$ . Como  $H$  es fuertemente unimodular, hay una arista con cuando menos cuatro vértices de  $V(C)$  o dos aristas con cuando menos tres vértices de  $V(C)$ . De cualquier manera, las aristas correspondientes en  $C'$  preservan dichas propiedades, lo que implica que  $L_H$  es fuertemente unimodular.

A la inversa, asíumase que  $L_H$  es fuertemente unimodular y considérese un ciclo  $C = (y_0, E_0, \dots, y_k, E_k, y_0)$  de longitud impar en  $H$ . Si no hay dos vértices de  $V(C)$  que pertenezcan al mismo nivel, el ciclo  $C$  induce un ciclo  $C' = (x_0, E'_0, \dots, x_k, E'_k, x_0)$  de la misma longitud en  $L_H$ . Como  $L_H$  es fuertemente unimodular, hay una arista con cuando menos cuatro vértices de  $V(C')$ , o cuando menos dos aristas con tres vértices de  $V(C')$ , lo que implica que las aristas correspondientes de  $C$  satisfacen las mismas propiedades.

Si hay dos vértices  $y_i, y_j, i < j$ , que pertenecen al mismo nivel, entonces tanto  $E_{i-1}$  como  $E_j$  tienen cuando menos tres vértices de  $C$ :  $\{y_{i-1}, y_i, y_j\} \subset E_{i-1}$  y  $\{y_i, y_j, y_{j+1}\} \subset E_j$ . Queda así demostrada la proposición. ♦

*Definición:* Una matriz  $A = (a_j^i)$  es *totalmente unimodular* si toda submatriz cuadrada de  $A$  tiene determinante 0, +1, ó -1. Una hipergráfica  $H$  es *unimodular* si su matriz de incidencia es totalmente unimodular.

*Proposición 3.70 [7]:* Una hipergráfica  $H$  es unimodular si, y sólo si, para todo  $S \subset V(H)$  la hipergráfica  $H[S]$  tiene una 2-coloración equitativa.

*Nota:* Obsérvese que si  $H$  es unimodular, todas sus subhipergráficas inducidas son unimodulares.

*Proposición 3.71:* Una hipergráfica  $H$  es unimodular si, y sólo si,  $L_H$  es unimodular.

*Demostración:* Supóngase que  $H$  es unimodular. Como  $L_H$  es una subhipergráfica inducida de  $H$ , se tiene que  $L_H$  es unimodular.

Inversamente, supóngase que  $L_H$  es unimodular. Entonces  $L_H$  tiene una 2-coloración equitativa  $R = \{R_1, R_2\}$ . Se demostrará por inducción matemática sobre la cantidad de niveles con más de un vértice que toda subhipergráfica inducida de  $H$  tiene una 2-coloración equitativa. Sea  $S \subset V(H)$ , y sea  $H' = H[S]$ . Si todo nivel de  $H'$  tiene un vértice, se trata de una subhipergráfica inducida de  $L_H$ , que por tanto tiene una 2-coloración equitativa.

Supóngase que sólo un nivel  $P'_i$  de  $H'$  tiene más de un vértice. Si  $|P'_i|$  es impar, consideramos la hipergráfica de niveles  $L_{H'}$  de  $H'$ , que tiene una 2-coloración equitativa  $R' = \{R'_1, R'_2\}$ . Para obtener  $H'$ , debe añadirse una cantidad par de vértices a  $L_{H'}$ , todos en el mismo nivel, es decir, en las mismas aristas, así que podemos colocar la mitad de dichos vértices en  $R'_1$  y la otra mitad en  $R'_2$ , obteniendo una 2-coloración equitativa de  $H'$ . Si  $|P'_i|$  es par, eliminamos  $P'_i$ . Como la hipergráfica resultante  $H'' = H[S \setminus P'_i]$  es una subhipergráfica

inducida de  $L_H$ , tiene una 2-coloración equitativa  $R'' = \{R''_1, R''_2\}$ . Añadimos entonces  $P'_i$ , colocando la mitad de sus vértices en  $R''_1$  y la otra mitad en  $R''_2$ . Como toda arista que contenga  $P'_i$  recibe la misma cantidad de vértices de cada color y las demás aristas no son modificadas, la 2-coloración de  $H'$  resultante es equitativa. Así, toda subhipergráfica inducida de  $H$  tal que sólo uno de sus niveles tiene más de un vértice tiene una 2-coloración equitativa.

Considérese ahora un entero  $p > 1$  y supóngase que toda subhipergráfica inducida de  $H$  con menos de  $p$  niveles con más de un vértice tiene una 2-coloración equitativa, y sea  $H'$  una subhipergráfica inducida de  $H$  con  $p$  niveles con más de un vértice. Procedemos como antes: considérese un nivel  $P'_i$  de  $H'$  con más de un vértice. Si  $|P'_i|$  es impar, quitamos de  $P'_i$  todos los vértices salvo uno, digamos  $x'$ ; entonces se tiene una subhipergráfica inducida de  $H$  con  $p - 1$  niveles con más de un vértice, que tiene una 2-coloración equitativa  $R' = \{R'_1, R'_2\}$ ; añadiendo la mitad de los vértices de  $P'_i \setminus \{x'\}$  a  $R'_1$  y la otra mitad a  $R'_2$  se obtiene una 2-coloración equitativa de  $H'$ . Si  $|P'_i|$  es par, quitamos todos los vértices de  $P'_i$ , eliminándolo; entonces se tiene una subhipergráfica inducida de  $H$  con  $p - 1$  niveles con más de un vértice, que tiene una 2-coloración equitativa  $R'' = \{R''_1, R''_2\}$ . Como antes, si añadimos la mitad de los vértices de  $P'_i$  a cada color se tiene una 2-coloración equitativa de  $H'$ . Queda así demostrada la proposición. ♦

*Teorema 3.72:* Una hipergráfica  $H$  es balanceada si, y sólo si, las subhipergráficas inducidas de su hipergráfica de niveles  $L_H$  son dos coloreables.

*Demostración:* El teorema se sigue de la Proposición 3.67 y [7], Cáp. 5, Teorema 7. ♦

*Teorema 3.73:* Una hipergráfica  $H$  es balanceada si, y sólo si, toda subhipergráfica parcial de  $L_H$  tiene la propiedad de König.

*Demostración:* El resultado se sigue de la Proposición 3.46, la Proposición 3.67 y un teorema de Berge y Las Vergnas ([10]). ♦

*Teorema 3.74:* Una hipergráfica  $H$  es unimodular si, y sólo si, toda subhipergráfica inducida de  $L_H$  tiene una 2-coloración equitativa.

*Demostración:* La afirmación se sigue del Teorema 3.70 y la Proposición 3.71. ♦

Los Teoremas 3.72, 3.73 y 3.74 hacen más sencillo verificar si una hipergráfica dada es balanceada o unimodular.

*Teorema 3.75:* Una hipergráfica tal que toda arista tenga cuando mucho 3 niveles es unimodular si, y sólo si, es balanceada.

*Demostración:* Sea  $H$  una hipergráfica. Si  $H$  es unimodular, entonces es balanceada [7]. Supóngase ahora que  $H$  es balanceada y ninguna arista de  $H$  tiene más de tres niveles. Entonces  $L_H$  es balanceada de rango  $r \leq 3$ , así que por [7], Cáp. 5, Corolario al Teorema 7 se tiene que es unimodular. La Proposición 3.71 implica que  $H$  es unimodular. ♦

Como  $r \leq 3$  implica  $r' \leq 3$ , el Teorema 3.75 generaliza el resultado en el que se basa a una clase más amplia de hipergráficas.

### Número ciclomático e hipergráficas planas

El concepto de planaridad fue extendido a las hipergráficas por Zykov [60] y por Johnson y Pollak [40]. El concepto de número ciclomático fue extendido a las hipergráficas por Acharya [2]. Veremos ahora cómo se relacionan dichos conceptos con las hipergráficas de niveles:

*Definición:* Una inmersión plana  $M$  de una gráfica (plana)  $G$  con un conjunto de vértices finito  $V(G)$  genera una partición del plano en un conjunto finito de caras, todas delimitadas por un ciclo de vértices. Tal inmersión define una hipergráfica  $H_M$  con  $V(H_M) = V(G)$ , y tal que  $E \subset V(G)$  es una arista de  $H_M$  si, y sólo si, hay una cara de  $M$  delimitada por un ciclo  $C$  tal que  $V(C) = E$ . Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es *Zykov-plana* si, y sólo si, existe una multigráfica  $G$  con  $V(G) = V(H)$ , y una inmersión plana  $M$  de  $G$ , tal que  $H$  es isomorfa a  $H_M$ .

La siguiente caracterización, debida a Jones [41], permite relacionar la Zykov-planaridad con las hipergráficas de niveles:

Pueden representarse los vértices de una hipergráfica  $H$  como puntos en el plano, y las aristas de  $H$  como subconjuntos del plano homeomorfos a discos cerrados con sus vértices en la frontera. Lo anterior puede hacerse de manera que dos aristas se intersecten sólo en los vértices que pertenecen a ambas si, y sólo si,  $H$  es *Zykov-plana*.

*Proposición 3.76:* Sea  $H$  una hipergráfica Zykov-plana. Entonces  $L_H$  es Zykov-plana.

*Demostración:* La demostración es directa, pues para cualquier conjunto  $A$  de aristas en  $H$  se tiene que  $\bigcap_{E \in A} E' \subset \bigcap_{E \in A} E$ , donde  $E'$  es la arista de  $L_H$  inducida por  $E$ . ♦

El inverso no se cumple, como se muestra en la Figura 3.7 con  $k \geq 3$ .

La Proposición 3.76 puede demostrarse también utilizando un resultado de Walsh [59]:

Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es Zykov-plana si, y sólo si, la gráfica bipartita  $G_H$  es plana, donde  $V(G_H) = V(H) \cup \{E_1, \dots, E_m\}$  y  $\{x, E_i\}$  es una arista de  $G_H$  siempre que  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $x \in E_i$ .

El resultado se sigue entonces porque  $G_{L_H}$  es una subhipergráfica inducida de  $G_H$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , un *diagrama de Venn basado en aristas que representa a  $H$*  consiste en una gráfica plana  $G$ , una inmersión plana  $M$  de  $G$  y una función biyectiva  $g : H \rightarrow F$ , donde  $F =$

$\{F_1, \dots, F_m\}$  es el conjunto de caras de  $M$ , tal que  $g(E_i) = F_i$  y para todo  $V' \subset V(H)$ ,  $\bigcup_{E_i \supset V'} F_i$  es una región del plano cuyo interior es conexo. Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es *plana por aristas* si, y sólo si, existe un diagrama de Venn basado en aristas que representa a  $H$ .

*Proposición 3.77:* Una hipergráfica  $H$  es plana por aristas si, y sólo si,  $L_H$  es plana por aristas. Además, todo diagrama de Venn basado en aristas que represente a  $H$  representa también a  $L_H$  y viceversa.

*Demostración:* Considérese una hipergráfica plana por aristas  $H$  y un diagrama de Venn basado en aristas  $(G, M, g)$  que represente a  $H$ . Entonces para todo  $V' \subset V(H)$  y para todo  $P_j \in P$  tal que  $V' \cap P_j \neq \emptyset$ ,  $\bigcup_{E_i \supset V'} F_i$  es la misma región del plano que  $\bigcup_{E_i \supset (V' \cup P_j)} F_i$ , pues todos los vértices en  $P_j$  pertenecen exactamente a las mismas aristas. Por la misma razón,  $\bigcup_{E_i \supset V'} F_i$  es también la misma región del plano que  $\bigcup_{E_i \supset V''} F_i$ , donde  $V'' = (V' \setminus P_j) \cup \{x\}$ , y  $x \in V' \cap P_j$ . ♦

La Proposición 3.77 significa que todo problema referente a la planaridad por aristas puede resolverse usando hipergráficas de niveles, lo que puede reducir el tiempo de cómputo considerablemente en algunos casos.

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , un diagrama de Venn basado en vértices que representa a  $H$  consiste en una gráfica plana  $G$ , una inmersión plana  $M$  de  $G$  y una función biyectiva  $g : V(H) \rightarrow F$ , donde  $F = \{F_1, \dots, F_n\}$  es el conjunto de caras de  $M$ , tal que  $g(x_i) = F_i$  y para todo  $E_j \in H$ ,  $\bigcup_{x_i \in E_j} F_i$  es una región del plano cuyo interior es conexo. Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es *plana por vértices* si, y sólo si, existe un diagrama de Venn basado en vértices que represente a  $H$ .

*Proposición 3.78:* Sea  $H$  una hipergráfica. Si  $L_H$  es plana por vértices, entonces  $H$  es plana por vértices.

*Demostración:* Supóngase que  $L_H$  es plana por vértices, y sea  $(G, M, g)$  un diagrama de Venn basado en vértices que represente a  $L_H$ . Obtenemos un diagrama de Venn basado en vértices que representa a  $H$  dividiendo  $F_i$  en  $|P_i|$  caras, donde  $x_i$  es el representante de  $P_i$  y  $g(x_i) = F_i$ . ♦

A partir de una hipergráfica de niveles plana por vértices se llega a toda una familia de hipergráficas que son también planas por vértices.

*Conjetura:* Una hipergráfica  $H$  es plana por vértices si, y sólo si,  $L_H$  es plana por vértices.

Creo que para toda hipergráfica plana por vértices  $H$  existe un diagrama de Venn basado en vértices  $(G, M, g)$  que represente a  $H$  tal que para todo

nivel  $P_j \in P$ ,  $\bigcup_{x_i \in P_j} F_i$  es una región del plano cuyo interior es conexo. Si es el caso, sólo se necesita borrar las fronteras entre vértices de  $P_j$  (y las aristas correspondientes de  $G$ ) para llegar a un diagrama de Venn basado en vértices que represente a  $L_H$ .

*Definición:* Dada una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$ , su *multigráfica de intersección*  $G(H)$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de aristas de  $H$ , y entre dos vértices  $E_i$  y  $E_j$  hay una arista en  $G(H)$  por cada vértice de  $V(H)$  en  $E_i \cap E_j$ . Entonces cada vértice en  $V(H)$  induce una subgráfica completa de  $G(H)$ , aunque no siempre un clan (por ejemplo, si  $H = K_3$ ).

Dada una hipergráfica  $H$ , hay cuando menos una arista  $(E'_i, E'_j)$  en  $G(L_H)$  si, y sólo si, hay cuando menos una arista  $(E_i, E_j)$  en  $G(H)$ ; no obstante,  $G(L_H)$  puede tener menos aristas, pues los vértices de un nivel dado  $P_i$  de  $H$  inducen subgráficas completas idénticas en  $G(H)$ .

Un multibosque generador de una multigráfica  $M$  es un multibosque  $F$  tal que  $V(F) = V(M)$ . Dada una hipergráfica  $H$ ,  $T(H)$  denota la cantidad máxima de aristas en un multibosque generador de  $G(H)$ . Es claro que  $T(H) \geq T(L_H)$ .

*Definición:* El *número ciclomático* de una hipergráfica  $H$  es  $\mu(H) = \sum_{E \in H} |E| - |V(H)| - T(H)$ .

Los conceptos de multigráfica de intersección y número ciclomático no se relacionan fácilmente con las hipergráficas de niveles: dada una hipergráfica  $H$ , su multigráfica de intersección muestra qué vértices están en la intersección de cualquier conjunto de aristas, pero no hay manera de saber si dichos vértices pertenecen o no al mismo nivel. Esto significa que dos hipergráficas con hipergráficas de niveles diferentes pueden tener la misma multigráfica de intersección, como se muestra en la Figura 3.9. De cualquier forma, pueden obtenerse algunas relaciones básicas:

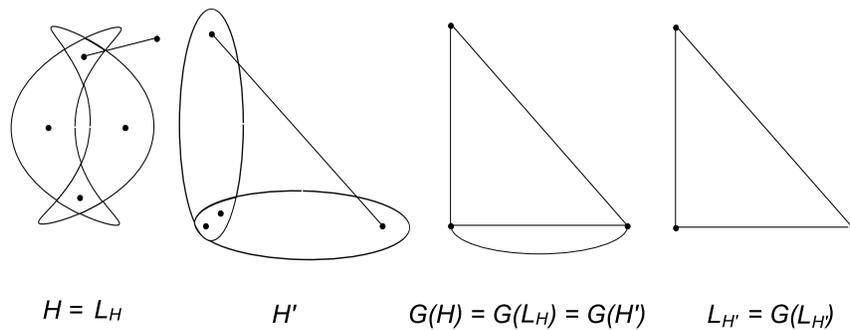


Figura 3.9

*Proposición 3.79:* Sea  $H$  una hipergráfica y sea  $H'$  una subhipergráfica inducida de  $H$ . Entonces  $\mu(H) \geq \mu(H')$ .

*Demostración:* Sea  $H$  una hipergráfica y sea  $H_1 = H[V(H) - x]$ , la subhipergráfica de  $H$  inducida por  $V(H) - x$ , donde  $x \in V(H)$ . Sea  $c_x$  la cantidad de aristas a las que pertenece  $x$ . Entonces  $\sum_{E \in H_1} |E| = \sum_{E \in H} |E| - c_x$ ,  $|V(H_1)| = |V(H)| - 1$  y  $T(H_1) \geq T(H) - c_x + 1$ , ya que cualquier bosque con  $c_x$  vértices tiene cuando mucho  $c_x - 1$  aristas, así que  $x$  induce cuando mucho  $c_x - 1$  aristas en cualquier multibosque generador de  $G(H)$ . Esto implica que  $\mu(H) \geq \mu(H_1)$ .

Como  $V(H)$  es un conjunto finito, el resultado queda demostrado.  $\blacklozenge$

*Corolario 3.80:* Sea  $H$  una hipergráfica. Entonces  $\mu(H) \geq \mu(L_H)$ .

*Demostración:* Dada una hipergráfica  $H$ ,  $L_H$  es una subhipergráfica inducida de  $H$ .  $\blacklozenge$

El inverso no se cumple, como se muestra en la Figura 3.8.

*Proposición 3.81:* Sea  $H$  una hipergráfica. Entonces  $\mu(H) = 0$  si, y sólo si,  $\mu(L_H) = 0$ .

*Demostración:*  $\mu(H) = 0 \Rightarrow \mu(L_H) = 0$  es consecuencia de la Proposición 3.79. Para ver que  $\mu(H) = 0 \Leftarrow \mu(L_H) = 0$ , se procederá por inducción sobre la cantidad de vértices por quitarse, usando un resultado de Acharya y Las Vergnas [3]:

Para toda hipergráfica  $H$ ,  $\mu(H) = 0$  si, y sólo si, la 2-sección  $H_2$  de  $H$  es una gráfica triangulada y el conjunto de aristas maximales por contención de  $H$  es el conjunto de clanes de  $H_2$ .

Sea entonces  $H$  una hipergráfica y sea  $P_i$  un nivel de  $H$  tal que  $|P_i| \geq 2$ . Sean  $x \in P_i$  y  $H' = H[V \setminus \{x\}]$ . Veremos que si  $H'$  satisface las condiciones del teorema de Acharya y Las Vergnas, entonces  $H$  también las satisface. Supóngase que  $H'_2$  es una gráfica triangulada. ¿Cómo podría  $H_2$  tener un ciclo elemental no triangulado? Sea  $y \neq x$ ,  $y \in P_i$ . Como  $x$  y  $y$  pertenecen a las mismas aristas, se tiene que  $N(x) \setminus \{y\} = N(y) \setminus \{x\}$ , de manera que si  $x$  pertenece a un ciclo elemental  $C_x$  tal que  $y \notin V(C_x)$ , entonces puede tomarse  $y$  en lugar de  $x$ , obteniendo un ciclo elemental  $C_y$  con la misma estructura de aristas que  $C_x$  y tal que  $x \notin V(C_y)$ , así que  $C_x$  es no triangulado si, y sólo si,  $C_y$  es no triangulado. Como  $C_y$  es un ciclo de  $H'_2$ , sabemos que es triangulado, lo que implica que  $x$  sólo puede pertenecer a un ciclo elemental no triangulado  $C$  de  $H_2$  tal que  $|V(C) \cap P_i| \geq 2$ . Sea  $C$  un ciclo elemental de  $H_2$  tal que  $\{x, y\} \subset V(C) \cap P_i$ . Si  $x$  y  $y$  son adyacentes en  $C$  entonces  $C$  es triangulado, pues  $(x, z)$  es una arista de  $G(H)$  si, y sólo si,  $(y, z)$  es una arista de  $G(H)$ , así que para cualquier vértice  $z$  adyacente a  $x$  ó  $y$  en  $G(H)$  se tiene el triángulo  $(z, x, y)$ . Si  $x$  y  $y$  no son adyacentes en  $C = (y = x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j = x, x_{j+1}, \dots, x_k, y)$ , se tienen los ciclos  $C_1 = (y = x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, y)$  y  $C_2 = (y, x_{j+1}, \dots, x_k, y)$ , pues  $N(x) \setminus \{y\} = N(y) \setminus \{x\}$ . Dado que  $x \notin V(C_1) \cup V(C_2)$ , tanto  $C_1$  como  $C_2$  son ciclos de  $H'_2$ , así que son triangulados. Entonces los ciclos  $C_3 = (y = x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x, y)$  y  $C_4 = (y, x_{j+1}, \dots, x_k, x, y)$  son triangulados, pues  $x$  y  $y$  son adyacentes en ambos. Esto implica que  $C$  es triangulado.

Supóngase ahora que el conjunto de aristas de  $H'$  maximal por contención es el conjunto de clanes de  $H'_2$ . Sean  $y \neq x$ ,  $y \in P_i$  y  $E' \in H'$  tales que  $y \in E'$ . Como  $E'$  induce un clan en  $H'_2$ , y  $N(x) \setminus \{y\} = N(y) \setminus \{x\}$  en  $H_2$ , se sigue que  $E = E' \cup \{x\}$  induce un clan en  $H_2$ .

Queda entonces demostrada la Proposición 3.81.♦

### Hipergráficas con dos niveles

Se vio ya que una multigráfica es una hipergráfica de niveles si, y sólo si, no tiene componentes conexas isomorfas a  $K_2$  (con aristas múltiples). Esto permite la generalización de algunos resultados de multigráficas a hipergráficas  $H$  tales que  $L_H$  es una multigráfica, es decir, a hipergráficas tales que  $r' = 2$ . Algunos ejemplos a continuación:

*Teorema 3.82:* Sea  $H$  una hipergráfica con  $r' = 2$ . Si  $L_H$  no es un ciclo de longitud impar, hay una 2-coloración por aristas de  $H$  tal que todo vértice  $x$  con  $d_H(x) \geq 2$  tiene ambos colores.

*Demostración:* Si  $H$  satisface las hipótesis, entonces  $L_H$  es una multigráfica y no es un ciclo impar, así que existe tal 2-coloración por aristas  $S$  de  $L_H$  ([13], Lema 6.1.1), que es también una 2-coloración por aristas de  $H$ . Como todos los vértices en un nivel dado  $P_i$  tienen el mismo grado que su representante  $x_i$ ,  $S$  satisface la condición para  $H$ .♦

*Teorema 3.83:* Sea  $H$  una hipergráfica con  $r' = 2$ . Si  $L_H$  es bipartita, entonces  $q(H) = \Delta(H)$ .

*Demostración:* El resultado se sigue directamente de un teorema clásico relativo a gráficas ([13], Teorema 6.1).♦

*Teorema 3.84:* Sea  $H$  una hipergráfica simple con  $r' = 2$ . Entonces  $\Delta(H) \leq q(H) \leq \Delta(H) + 1$ .

*Demostración:* El resultado es consecuencia de un conocido teorema de Vizing y (independientemente) Gupta para gráficas simples ([13], Teorema 6.2). Obsérvese que las aristas con un solo nivel no contenidas en otras aristas no alteran el resultado.♦

*Teorema 3.85:* Sea  $H$  una hipergráfica simple tal que  $L_H$  es una gráfica bipartita. Entonces  $\tau(H) = \nu(H)$ .

*Demostración:* Como  $\tau(H) = \tau(L_H)$  y  $\nu(H) = \nu(L_H)$ , el resultado se sigue del Teorema de Hall ([13], Teorema 5.2). Las aristas con un solo nivel no contenidas en otras aristas no alteran el resultado.♦

*Teorema 3.86:* Sea  $H$  una hipergráfica tal que toda arista tiene exactamente dos niveles. Entonces  $\alpha + \tau = \nu + \rho = l$ . Si  $L_H$  es bipartita, se tiene además que  $\alpha = \rho$ .

*Demostración:* Directa, ya que las cinco invariantes son iguales para  $H$  y  $L_H$ . La segunda afirmación se sigue del Teorema 3.85.♦

*Teorema 3.87:* Sea  $H$  una hipergráfica con  $r' = 2$  tal que  $L_H$  no tiene ciclos de longitud impar. Entonces  $H$  tiene una transversal fuertemente independiente.

*Demostración:* En este caso,  $L_H$  es una multigráfica sin ciclos de longitud impar, que tiene una transversal fuertemente independiente. Esto implica que  $H$  tiene también una transversal fuertemente independiente.♦

*Teorema 3.88:* Para toda hipergráfica simple  $H$  con  $r' = 2$ ,  $\tau^*(H) = \frac{\nu_2(H)}{2} = \frac{\tau_2(H)}{2}$ . Además, existe un 2-apareamiento máximo de  $L_H$  cuyas componentes conexas son lazos, pares de aristas paralelas y ciclos impares.

*Demostración:* Como  $H$  es simple, toda arista con un solo nivel corresponde a un vértice aislado en  $L_H$ . Entonces el resultado se sigue de la Proposición 3.50 y [7], Cáp. 3, Teorema 2.♦

*Teorema 3.89:* Para toda hipergráfica simple  $H$  con  $r' = 2$ ,  $\tau^*(G) = \frac{1}{2}(\nu(G) + \tau(G))$ .

*Demostración:* Es directa a partir de la Proposición 3.33, la Proposición 3.50 y un Teorema de Lovász ([43]).♦

*Teorema 3.90:* Para toda hipergráfica simple  $H$  con  $r' = 2$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1)  $\tau^*(H) = \tau(H)$
- 2)  $\nu(H) = \tau(H)$

*Demostración:* El resultado se sigue de la Proposición 3.33, la Proposición 3.50 y [7], Cáp. 3, Corolario al Teorema 3.♦

*Teorema 3.91:* Toda hipergráfica simple  $H$  con  $r' = 2$  satisface  $\tau^*(H) \leq \frac{3}{2}\nu(H)$ . Se da la igualdad si, y sólo si,  $L_H$  es la unión de triángulos ajenos dos a dos.

*Demostración:* Consecuencia de la Proposición 3.33, la Proposición 3.50 y un teorema de Lovász ([43]).♦

*Teorema 3.92:* Para una hipergráfica  $H$  con  $r' = 2$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $H$  es casi regularizable.
- 2)  $\tau^*(H) = \frac{l}{2}$ .
- 3) Hay una hipergráfica parcial (no trivial)  $\tilde{H}$  de  $L_H$  tal que las componentes conexas de  $\tilde{H}$  son vértices aislados y ciclos impares.

- 4)  $|N_{L_H}(S)| \geq |S|$  para todo conjunto fuertemente independiente  $S$  de  $H$ .

*Demostración:* 1)  $\Leftrightarrow$  2) se sigue del Teorema 3.51, pues aristas de un solo nivel no alteran el resultado.

1)  $\Leftrightarrow$  3): Como  $L_H$  es una gráfica, es consecuencia de [4], Cáp. 3, Teorema 8.

1)  $\Leftrightarrow$  4): Igual que el caso anterior, pues un conjunto  $S$  es fuertemente independiente en  $H$  si, y sólo si, es fuertemente independiente en  $L_H$  (tomando  $S \cap P_i$  como representante de  $P_i$  siempre que  $|S \cap P_i| \neq \emptyset$ ).  $\blacklozenge$

Notemos que  $|N_{L_H}(S)| \geq |S| \Rightarrow |N_H(S)| \geq |S|$  para todo conjunto fuertemente independiente  $S$  de  $H$ , pero el inverso no se cumple. Hay hipergráficas con  $r' = 2$ , y tales que  $|N_H(S)| \geq |S|$  para todo conjunto fuertemente independiente  $S$  de  $H$ , que no son casi regularizables, como se muestra en la Figura 3.10.

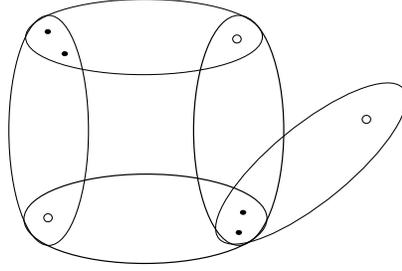


Figura 3.10

*Teorema 3.93:* Sea  $H$  una hipergráfica conexa con  $l$  par y  $r' = 2$ , tal que cualesquiera dos ciclos impares en  $L_H$  están unidos por una arista. Entonces  $H$  tiene un apareamiento perfecto si, y sólo si,  $|N_{L_H}S| \geq |S|$  para todo conjunto fuertemente independiente  $S$  de  $H$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de un teorema de Fulkerson, McAndrew, y Hoffman ([7], Cáp. 3, Teorema 9), pues  $L_H$  es una gráfica conexa y  $H$  tiene un apareamiento perfecto si, y sólo si,  $L_H$  tiene un apareamiento perfecto.  $\blacklozenge$

*Teorema 3.94:* Las siguientes condiciones son equivalentes para toda hipergráfica conexa  $H$  con  $r' = 2$ :

- 1)  $H$  es regularizable y  $L_H$  no es bipartita.
- 2)  $\tau^*(H) = \frac{l}{2}$ , y  $t(x) = 1$  para todo  $x \in V(L_H)$  es la única 2-transversal óptima de  $L_H$ .
- 3)  $|N_{L_H}S| > |S|$  para todo conjunto fuertemente independiente  $S$  de  $H$ .
- 4)  $|N_{L_H}A| > |A|$  para todo subconjunto propio no vacío  $A \subset V(L_H)$ .

*Demostración:* Como  $H$  es regularizable si, y sólo si,  $L_H$  es regularizable, el resultado es entonces consecuencia de la Proposición 3.50 y un Teorema de Berge ([8]).  $\blacklozenge$

*Teorema 3.95:* Sea  $H$  una hipergráfica conexa con  $r' = 2$ , y tal que  $K_{1,3}$  no es una subgráfica inducida de  $L_H$ . Entonces  $H$  es regularizable si, y sólo si, no tiene vértices de grado 1 y  $L_H$  no es isomorfa a una gráfica que consista en un ciclo par  $(x_0, \dots, x_{2p-1}, x_0)$  y un conjunto no vacío de diagonales de la forma  $(x_{2i}, x_{2i+2})$ .

*Demostración:* El resultado se sigue de un teorema de Jaeger y Payan ([40]).♦

*Teorema 3.96:* Toda hipergráfica simple  $H$  tal que  $r' = 2$  es  $k$ -Helly para  $k \geq 3$ .

*Demostración:* Si  $H$  satisface las hipótesis, entonces  $L_H$  es una gráfica simple salvo por lazos en vértices aislados. El resultado es consecuencia de la Observación 3.16 y [7], Cáp. 1, Ejercicio 13, pues los vértices aislados no afectan el ser  $k$ -Helly.♦

*Teorema 3.97:* Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica simple con  $r' = 2$  y tal que  $\alpha(H) = k$  y  $\alpha(H - E_i) = k + 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . entonces  $m \leq \binom{l - k + 1}{2}$ .

*Demostración:* Como  $m(H) = m(L_H)$  y  $\alpha(H) = \alpha(L_H)$ , la demostración se sigue de un teorema de Erdős, Hajnal, y Moore ([7], Cáp. 2, Corolario 2 al Teorema 6).♦

Como se dijo al principio de la sección, todos los resultados que aparecen en ella son generalizaciones de los teoremas en los que se basan.

### Conclusiones

Las hipergráficas de niveles son una herramienta que simplifica la investigación en varias ramas de la teoría de hipergráficas. Para muchas cuestiones referentes a una hipergráfica dada  $H$ , podemos restringirnos a su hipergráfica de niveles  $L_H$ , que en muchos casos es más sencilla y nunca es más compleja que  $H$ .

De hecho, muchos resultados clásicos de hipergráficas se obtuvieron pensando en hipergráficas de niveles. En particular, varias cotas clásicas son alcanzadas sólo por hipergráficas de niveles. Entonces el valor principal de este trabajo es mostrar que en muchos casos podemos considerar sólo las más sencillas hipergráficas de una clase dada al resolver un problema para toda la clase.

Así, el problema general consiste en caracterizar las propiedades de hipergráficas  $(P)$  para las cuales  $L_H \in (P) \Rightarrow H \in (P)$ , y aquéllas para las cuales  $H \in (P) \Rightarrow L_H \in (P)$ . Es claro que toda propiedad hereditaria  $(P)$  satisface la segunda afirmación.

Como caso particular del problema general, estudié una desigualdad planteada originalmente por Lovász [42]: Sea  $H = (E_1, \dots, E_m)$  una hipergráfica tal que  $|V(H)| = n$ ,  $|E_i \cap E_j| \leq k$  para todo  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, m\}$ , y  $H$  tiene  $p$  componentes conexas. ¿Cuándo se cumple que  $\sum_{i=1}^m (|E_i| - k) \leq n - pk$ ? En particular,

las hipergráficas totalmente balanceadas [42] y las hipergráficas con número ciclomático 0 [3] satisfacen la desigualdad de Lovász. Desafortunadamente, resultó no tener relación directa con las hipergráficas de niveles. La Figura 3.6 muestra un ejemplo donde  $H$  satisface la desigualdad de Lovász pero  $L_H$  no. La menor hipergráfica  $H$  que conozco tal que  $L_H$  satisface la desigualdad de Lovász pero  $H$  no tiene 18 vértices y diez aristas. Aparece en la Figura 3.11.

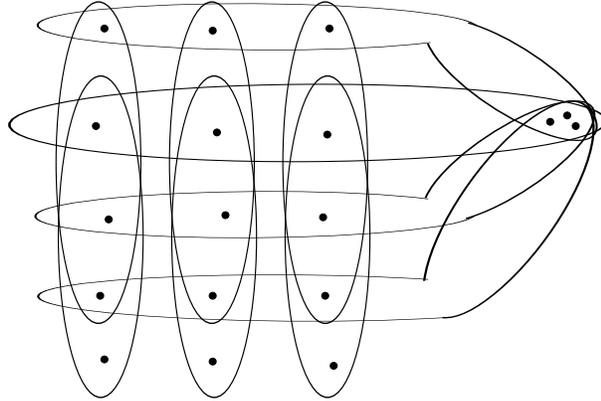


Figura 3.11

## CAPÍTULO 4: UNA VERSIÓN CORREGIDA DE LA CONJETURA DE MEYNIEL

El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgenstern en 1944 [49]. Tiene muchas aplicaciones en teoría de juegos, lógica, teoría de códigos y otras ramas de las matemáticas. Dichos autores demostraron que toda digráfica acíclica tiene núcleo único. Más tarde (1953) Richardson demostró que toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar es núcleo-perfecta [51]. En 1980 H. Meyniel planteó la conjetura de que si  $D$  es una digráfica tal que todo ciclo dirigido impar tiene cuando menos dos pseudodiagonales, entonces  $D$  tiene núcleo [17]. Dicha conjetura ha dado pie a varios resultados, aunque fue probada falsa por Galeana-Sánchez en 1982 [25].

Desde entonces, la búsqueda de clases de digráficas con núcleo ha tendido a encontrar condiciones en las pseudodiagonales de los ciclos dirigidos impares. En 1980, Duchet demostró que si  $D$  es una digráfica tal que todo ciclo dirigido impar de  $D$  tiene cuando menos dos flechas simétricas, entonces  $D$  tiene núcleo [17]. Cuatro años después, Galeana-Sánchez y Neumann-Lara mostraron que si  $D$  es una digráfica tal que todo ciclo dirigido de longitud impar tiene cuando menos dos pseudodiagonales incidentes en vértices consecutivos, entonces  $D$  tiene núcleo [33]. En 1986, Galeana-Sánchez probó que si  $D$  es una digráfica sin triángulos tal que todo ciclo dirigido impar de  $D$  tiene cuando menos dos pseudodiagonales de la forma  $(x_i, x_{i+2})$ , entonces  $D$  tiene núcleo [26], y un año después Duchet demostró que la última afirmación se cumple con "tal que todo triángulo es simétrico" en lugar de "sin triángulos" [20]. También en 1986, Maffray mostró que la conjetura de Meyniel se cumple para digráficas  $i$ -trianguladas [45], y el mismo autor probó en 1992 que se cumple para todas las orientaciones de la gráfica de líneas de cualquier gráfica [46].

Aquí se relacionan ciertos conjuntos transversales de (multi)hipergráficas cuadradas con núcleos de digráficas, lo que nos permite obtener condiciones suficientes para la existencia de núcleos en digráficas. En particular, se cumple una modificación de la conjetura de Meyniel.

*Nota:* En algunos casos convendrá considerar una digráfica  $D = (V(D), A(D))$ , donde  $V(D)$  es el conjunto de vértices de  $D$  y  $A(D)$  es la familia de aristas de  $D$ . La diferencia con "una hipergráfica  $D$  en un conjunto  $V$ " es sólo de notación.

### Hipergráficas cuadradas y núcleos en digráficas

*Definición:* Si  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$ , una *pseudodiagonal* de  $C$  es un arco  $(x_i, x_j) \subset A(D) \setminus A(C)$  tal que  $\{i, j\} \subset \{0, \dots, n-1\}$ , y una *diagonal* de  $C$  es una pseudodiagonal  $(x_i, x_j)$  de  $C$  tal que  $(x_j, x_i) \notin A(C)$ .

*Definición:* Una hipergráfica  $H = (E_1, \dots, E_m)$  es *cuadrada* si  $|V(H)| = m$ . Una hipergráfica  $H$  tiene un *sistema de representantes* si, y sólo si,  $\forall E_i \in$

$H$ ,  $\exists x_i \in E_i$  tal que para toda  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $x_i \neq x_j$ . Una hipergráfica cuadrada con sistema de representantes es una hipergráfica  $H$  y una función biyectiva  $f : V(H) \rightarrow H$  tal que  $\forall x \in V(H)$ ,  $x \in f(x)$ .

Hay una correspondencia biyectiva entre digráficas e hipergráficas cuadradas con sistema de representantes (hijo): dada una digráfica  $D$  en  $V = V(D)$ , considérense  $f_D : V \rightarrow P(V)$  tal que  $f_D(x) = \{x\} \cup N^+(x)$  y  $H_D = (f_D(x) \mid x \in V)$ . Entonces  $H_D$  es una hipergráfica cuadrada con sistema de representantes  $f_D : V \rightarrow H_D$ . Nótese que puede tener aristas repetidas; por ejemplo, si  $D$  es completa, toda arista de  $H_D$  contiene a todos los vértices de  $V$ . A la inversa, dada una hipergráfica cuadrada  $H$  en  $V$  con sistema de representantes  $f : V \rightarrow H$ , sea  $D_{H,f}$  la digráfica con  $V(D_{H,f}) = V$  y  $A(D) = \{(x, y) \mid x \in V, y \in f(x) \setminus \{x\}\}$ .

*Lema 4.1:* Sea  $D$  una digráfica y  $H_D$  su hipergráfica correspondiente.  $U \subset V(D)$  es absorbente en  $D$  si, y sólo si,  $U$  es una transversal de  $H_D$ .

*Demostración:* Sea  $U$  un conjunto absorbente en  $D$ . Entonces para todo  $x \in V$  se tiene que  $x \in U$  o existe  $y \in U$  tal que  $(x, y) \in A(D)$ . Así que para toda  $x \in V$  se tiene que  $x \in U$  o existe  $y \in U$  tal que  $\{x, y\} \subset E$  para alguna  $E \in H_D$ , lo que implica que  $U$  es una transversal de  $H_D$ .

A la inversa, si  $U$  es una transversal de  $H_D$ , para toda  $E \in H$ ,  $U \cap E \neq \emptyset$ . Entonces para todo  $x \in V$  se tiene que  $x \in U$  ó  $f(x) \cap U \neq \emptyset$ , así que existe  $y \in U$  tal que  $(x, y) \in A(D)$ . Esto implica que  $U$  es absorbente en  $D$ . ♦

*Definición:* Dada una hipergráfica cuadrada  $H$  en un conjunto  $V$  con sistema de representantes  $f : V \rightarrow H$ , un conjunto  $U \subset V$  es *f-estable* en  $D$  si para toda  $\{x, y\} \subset U$ ,  $y \notin f(x)$ .

*Lema 4.2:* Sea  $D$  una digráfica y  $H_D$  su hipergráfica correspondiente.  $U \subset V(D)$  es independiente en  $D$  si, y sólo si,  $U$  es f-estable en  $H_D$ .

*Demostración:* Si  $U$  no es f-estable en  $H_D$ , existe  $\{x, y\} \subset U$  tal que  $y \in f(x)$ . Entonces  $(x, y) \in A(D)$  y  $U$  no es independiente en  $D$ .

A la inversa, si  $U$  no es independiente en  $D$ , para algún  $\{x, y\} \subset U$ ,  $(x, y) \in A(D)$ . Entonces  $y \in f(x)$  y  $U$  no es f-estable en  $H_D$ . ♦

*Teorema 4.3:* Sea  $D$  una digráfica y  $H_D$  su hipergráfica correspondiente.  $U \subset V(D)$  es núcleo de  $D$  si, y sólo si,  $U$  es una transversal f-estable de  $H_D$ .

*Demostración:* El resultado es consecuencia directa del Lema 4.1 y el Lema 4.2. ♦

*Teorema 4.4:* Sea  $D$  una digráfica y  $H_D$  su hipergráfica correspondiente. Si  $D$  tiene núcleo entonces  $H_D$  es 2-coloreable.

*Demostración:* Sea  $K$  un núcleo de  $D$ . El Teorema 4.3 afirma que  $K$  es una transversal f-estable de  $H_D$ , de manera que para toda  $E \in H_D$ ,  $K \cap E \neq \emptyset$ . Supóngase que  $K \cap E = E$  para alguna  $E \in H_D$ . Como  $K$  es f-estable y  $E \subset K$ , para toda  $\{x, y\} \subset E$ ,  $y \notin f(x)$ , lo que implica que  $E = \{x\}$ . Entonces  $H_D$  es 2-coloreable. ♦

El inverso no se cumple, como se muestra en la Figura 4.1. Entonces, ¿para qué hipergráficas 2-coloreables  $H_D$  resulta que  $D$  tiene núcleo? En este trabajo se da una respuesta parcial. Para presentar los resultados, se necesitan algunas definiciones:

Sea  $D$  una digráfica y  $C$  un ciclo (no necesariamente dirigido) de  $D$ . Una *obstrucción* de  $C$  es un vértice  $x \in V(C)$  tal que  $\delta_C^+(x) = 2$ . El conjunto de obstrucciones de  $C$  se denota  $\Omega(C)$ . Una  $\Omega$ -*pseudodiagonal* de  $C$  es un arco  $(u, v) \in A(D) \setminus A(C)$  tal que  $\delta_C^+(u) > 0$  y  $\delta_C^-(v) > 0$ ; una  $\Omega$ -*diagonal* de  $C$  es una  $\Omega$ -pseudodiagonal de  $C$  tal que  $(v, u) \notin A(C)$ . Un *arco  $\Omega$ -simétrico* de  $C$  es un arco  $(u, v) \in A(C)$  tal que  $u \notin \Omega(C)$  y  $(v, u) \in A(D)$ . La  $\Omega$ -*longitud* de  $C$  es  $l_\Omega(C) = |V(C)| - |\Omega(C)|$ ; un ciclo es  $\Omega$ -*impar* si  $l_\Omega(C)$  es impar.

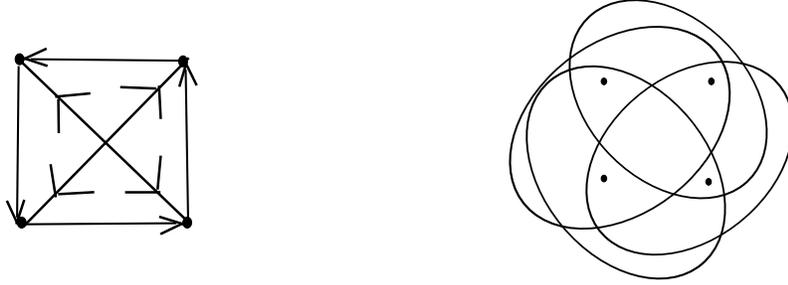


Figura 4.1

*Lema 4.5:* Sea  $D$  una digráfica y  $H_D$  su hipergráfica correspondiente.  $H_D$  es balanceada si, y sólo si, todo ciclo  $\Omega$ -impar de  $D$  tiene una  $\Omega$ -pseudodiagonal.

*Demostración:* Asúmase que todo ciclo  $\Omega$ -impar de  $D$  tiene una  $\Omega$ -pseudodiagonal. Sea  $(x_0, E_0, \dots, x_k, E_k, x_0)$  un ciclo impar de  $H_D$ ,  $X = \{(x_1, \dots, x_k)\}$  y  $Y = \{f^{-1}(E_1), \dots, f^{-1}(E_k)\}$ . Considérese el ciclo  $C$ , con  $V(C) = X \cup Y$  y  $A(C) = \{(y_i, x_{i+1}), (y_i, x_i) \mid y_i \in Y \setminus X\} \cup \{(x_i, x_{i+1}) \mid x_i = y_i\} \cup \{(x_{i+1}, x_i) \mid x_{i+1} = y_i\}$ . Nótese que  $\Omega(C) = Y \setminus X$ , pues ningún vértice puede ser representante más que de una arista, de manera que  $l_\Omega(C) = |X|$  y  $C$  debe tener una  $\Omega$ -pseudodiagonal  $(u, v)$ . Obsérvese que  $f(u) = E_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$ , pues  $(u, v)$  es una  $\Omega$ -pseudodiagonal. Entonces  $f(u)$  tiene cuando menos tres vértices de  $(x_1 E_1 \dots x_k E_k x_1)$  y  $H_D$  es balanceada.

A la inversa, asúmase que  $H_D$  es balanceada y sea  $C$  un ciclo  $\Omega$ -impar en  $D$ . Entonces  $X = V(C) \setminus \Omega(C)$  es el conjunto de vértices de un ciclo impar  $\Gamma = (x_1 E_1 \dots x_k E_k x_1)$  en  $H_D$  tal que para toda subsucesión  $(x_i y x_{i+1})$  de  $C$  en la que  $y$  es una obstrucción se tiene que  $E_i = f(y)$ . Como  $H_D$  es balanceada, para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$  se tiene  $|E_i \cap X| \geq 3$ . Si  $f^{-1}(E_i) \in X$ , existe  $x \in X$  tal que  $|N^+(x) \cap X| \geq 2$ ; como sólo uno de dichos arcos está en  $C$  (ya que  $x \in X$ ), se sigue que  $C$  tiene una  $\Omega$ -pseudodiagonal. Si  $f^{-1}(E_i) \notin X$ , existe  $x \in \Omega(C)$  tal que  $|N^+(x) \cap X| \geq 3$ ; como sólo dos de dichos arcos están en  $C$ , se sigue que  $C$  tiene una  $\Omega$ -pseudodiagonal. ♦

*Lema 4.6:* Sea  $D$  una digráfica y  $H_D$  su hipergráfica correspondiente.  $H_D$

es fuertemente unimodular si, y sólo si, todo ciclo  $\Omega$ -impar de  $D$  tiene dos  $\Omega$ -pseudodiagonales.

*Demostración:* Asíumase que todo ciclo  $\Omega$ -impar de  $D$  tiene dos  $\Omega$ -pseudodiagonales.

Sea  $(x_0, E_0, \dots, x_k, E_k, x_0)$  un ciclo impar de  $H_D$ , y defínanse  $X, Y$  y  $C$  como en la demostración del Lema 4.5. Como  $C$  es  $\Omega$ -impar, tiene dos  $\Omega$ -pseudodiagonales  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$ . Si  $u_1 = u_2$ , entonces  $f(u_1)$  tiene cuatro vértices del ciclo  $(x_0, E_0, \dots, x_k, E_k, x_0)$ , siguiendo un razonamiento similar al de la demostración del Lema 4.5. Si  $u_1 \neq u_2$  se tiene que tanto  $f(u_1)$  como  $f(u_2)$  tienen tres vértices del ciclo  $(x_0, E_0, \dots, x_k, E_k, x_0)$ . Por lo tanto,  $H_D$  es fuertemente unimodular.

Inversamente, supóngase que  $H_D$  es fuertemente unimodular y sea  $C$  un ciclo  $\Omega$ -impar en  $D$ . Entonces  $X = V(C) \setminus \Omega(C)$  es el conjunto de vértices de un ciclo impar  $\Gamma = (x_0, E_0, \dots, x_k, E_k, x_0)$  en  $H_D$  tal que para toda subsección  $(x_i, y, x_{i+1})$  de  $C$  en la que  $y$  es una obstrucción se tiene que  $E_i = f(y)$ . Como  $H_D$  es fuertemente unimodular, se cumple una de las dos condiciones siguientes: 1) para algún  $\{i, j\} \subset \{0, \dots, k\}$ ,  $|E_i \cap V(\Gamma)| \geq 3$  y  $|E_j \cap V(\Gamma)| \geq 3$ ; 2) para algún  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $|E_i \cap V(\Gamma)| \geq 4$ . Si se cumple 1), hay una  $\Omega$ -pseudodiagonal incidente desde  $f^{-1}(E_i)$  y una  $\Omega$ -pseudodiagonal incidente desde  $f^{-1}(E_j)$ , como en la demostración del Lema 4.5. Si se cumple 2), hay dos  $\Omega$ -pseudodiagonales incidentes desde  $f^{-1}(E_i)$ , siguiendo el mismo razonamiento (es decir, si  $f^{-1}(E_i) \in X$ , existe  $x \in X$  tal que  $|N^+(x) \cap X| > 3$ , y si  $f^{-1}(E_i) \notin X$ , existe  $x \in \Omega(C)$  tal que  $|N^+(x) \cap X| > 4$ ).♦

*Teorema 4.7'* [2]: Una hipergráfica balanceada  $H$  tiene una coloración buena para toda  $k \geq 2$ .

*Teorema 4.7:* Sea  $D$  una digráfica con ex-grado regular  $k$  tal que todo ciclo  $\Omega$ -impar tiene una  $\Omega$ -pseudodiagonal. Entonces hay una partición de  $V(D)$  en  $k + 1$  núcleos.

*Demostración:* La hipergráfica  $H_D$  es  $k + 1$ -uniforme, y es balanceada por el Lema 4.5, así que el Teorema 4.7' afirma que  $H_D$  tiene una  $k + 1$ -coloración buena. Como cada color es una transversal fuertemente independiente de  $H_D$ , el Teorema 4.3 implica que cada color es un núcleo de  $D$ .

### Una modificación de la conjetura de Meyniel

Se demostrará ahora que toda digráfica  $D$  tal que todo 3-ciclo es simétrico y todo ciclo  $\Omega$ -impar tiene dos  $\Omega$ -diagonales es núcleo perfecta. Para lograrlo se necesitan algunos resultados preliminares y cierta notación:

Sea  $D$  una digráfica y sea  $C$  un ciclo (no dirigido) de  $D$  con  $\{z, w\} \subset V(C)$ . El símbolo  $(z, C, w)$  denota la  $zw$ -trayectoria en el sentido de las manecillas del reloj contenida en  $C$ , y escribimos  $P(C) = (i, j)$  siempre que  $l(C) \equiv i \pmod{2}$  y  $|\Omega(C)| \equiv j \pmod{2}$ .

Sean  $\Gamma$  y  $C$  ciclos de  $D$  tales que  $V(C) \subset V(\Gamma)$ . Escribimos  $P_\Gamma(C) = (i, j)$  si  $l(C) \equiv i \pmod{2}$  y la cantidad de obstrucciones de  $\Gamma$  contenidas en  $C$  es congruente con  $j \pmod{2}$ . Para  $x \in V(C)$ , el símbolo  $(x, \Omega, C)$  significa "puede

asumirse que  $x$  es una obstrucción de  $C$ ", y el símbolo  $(x, \neg\Omega, C)$  significa "puede asumirse que  $x$  no es una obstrucción de  $C$ ".

*Definición:* Una digráfica  $D$  es buena si todo ciclo  $\Omega$ -impar  $C \subset D$  tal que  $l(C) \geq 4$  satisface cuando menos una de las propiedades siguientes: (a)  $\exists x \in V(C)$  tal que  $\delta_{D[V(C)]}^+(x) \geq 3$ ; (b)  $\exists x \in V(C)$  tal que  $\delta_{D[V(C)]}^-(x) \geq 3$ ; (c)  $C$  tiene una diagonal simétrica.

*Teorema 4.8:* Sea  $D$  una digráfica que satisface las siguientes condiciones: 1) todo ciclo dirigido de longitud 3 es simétrico; 2) todo ciclo  $\Omega$ -impar tal que  $l(C) \geq 4$  tiene cuando menos dos  $\Omega$ -pseudodiagonales; 3) todo ciclo  $\Omega$ -impar tal que  $l(C) \geq 5$  tiene cuando menos dos  $\Omega$ -diagonales. Entonces  $D$  es buena.

*Demostración:* Sea  $D$  una digráfica que satisface 1), 2) y 3), y sea  $C$  un ciclo  $\Omega$ -impar de  $D$ . Se procederá por inducción sobre la longitud de  $C$ . Cuando  $l(C) = 4$  se tiene que  $C = (x_0, x_1, x_2, x_3) \cup (x_0, x_3)$ , donde  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  es una trayectoria dirigida. Nótese que ningún arco que incida a  $x_0$  o desde  $x_3$  es una  $\Omega$ -pseudodiagonal, así que las únicas posibilidades son  $(x_0, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$  y  $(x_2, x_1)$ . Si  $(x_0, x_2) \in A(D)$ ,  $\delta_{D[V(C)]}^+(x_0) = 3$ ; si  $(x_1, x_3) \in A(D)$ ,  $\delta_{D[V(C)]}^-(x_3) = 3$ . Entonces para todo ciclo  $\Omega$ -impar de longitud 4 se cumple (a) o se cumple (b).

Supóngase ahora que todo ciclo  $\Omega$ -impar  $C'$  de  $D$  tal que  $l(C') < m$  satisface cuando menos una de las propiedades (a), (b) ó (c), y sea  $C$  un ciclo  $\Omega$ -impar de  $D$  tal que  $5 \leq l(C) = m$ . Por las hipótesis,  $C$  tiene dos  $\Omega$ -diagonales:  $f_1 = (u, v)$  y  $f_2 = (x, y)$ . Puede asumirse que ni  $f_1$  ni  $f_2$  son simétricas, y que ni  $u$  ni  $x$  son obstrucciones de  $C$ , pues si no se cumplirían (c) ó (a). Obsérvese también que  $\{v, y\} \cap \Omega(C) = \emptyset$ , por la definición de  $\Omega$ -pseudodiagonal.

Se considerarán varios casos, según la posición de las  $\Omega$ -diagonales  $f_1$  y  $f_2$ . El análisis de cada caso terminará cuando se encuentre un ciclo  $\Omega$ -impar  $C'$  de  $D$  tal que  $l(C') < l(C)$  y  $V(C') \subset V(C)$ :

**Caso 1:**  $f_1$  y  $f_2$  son paralelas y tienen la misma dirección. Sin pérdida de generalidad puede asumirse que  $\{u, v\} \subset (y, C, x)$  y que  $v$  aparece antes que  $u$  en  $(y, C, x)$ . Se definen los siguientes ciclos:  $C_1 = (x, C, y) \cup (x, y)$ ,  $C_2 = (y, C, v) \cup (u, v) \cup (u, C, x) \cup (x, y)$ ,  $C_3 = (v, C, u) \cup (u, v)$ . Nótese que como  $\{u, v, x, y\} \cap \Omega(C) = \emptyset$ , cada obstrucción de  $C$  se considera una sola vez al contar las obstrucciones de  $C$  que están en los ciclos  $C_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Obsérvese también que  $x$  es obstrucción de exactamente uno de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , y  $u$  es obstrucción de exactamente uno de los ciclos  $C_2$  y  $C_3$ .

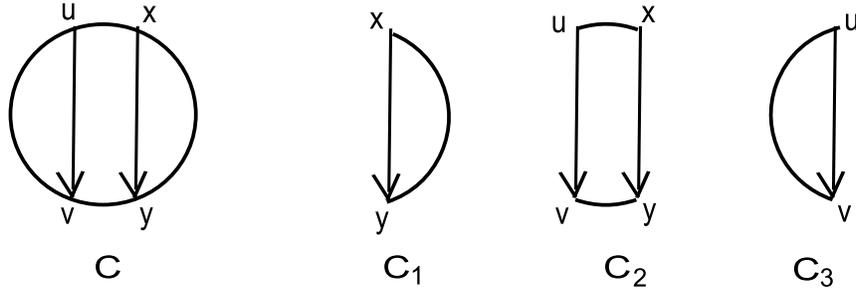


Figura 4.2: Ciclos para el Caso 1.

Analizaremos varias posibilidades. Obsérvese que  $C_1$  y  $C_3$  desempeñan papeles simétricos. Posibilidades simétricas se considerarán una sola vez.

**Caso 1.1:**  $l(C)$  es par y  $|\Omega(C)|$  es impar. Veremos las posibilidades para  $P_C(C_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , asumiendo que ni  $C_1$  ni  $C_2$  son  $\Omega$ -impares.

**1.1.1:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (0, 1)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (0, 1)$ .

**1.1.2:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (0, 0)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (0, 1)$ .

**1.1.3:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.1.4:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 0)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.1.5:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (0, 1)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (0, 1)$ .

**1.1.6:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 0)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.1.7:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.1.8:**  $P_C(C_1) = (1, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.1.9:**  $P_C(C_1) = (1, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 0)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.1.10:**  $P_C(C_1) = (1, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**Caso 1.2:**  $l(C)$  es impar y  $|\Omega(C)|$  es par. Analizaremos las posibilidades para  $P_C(C_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ :

**1.2.1:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 0)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.2.2:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.2.3:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (0, 0)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto

$P(C_3) = (0, 1)$ .

**1.2.4:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (0, 1)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (0, 1)$ .

**1.2.5:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.2.6:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 0)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.2.7:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (0, 1)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (0, 1)$ .

**1.2.8:**  $P_C(C_1) = (1, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 0)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \Omega, C_2)$ ,  $(u, \neg\Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**1.2.9:**  $P_C(C_1) = (1, 0)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 1)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \Omega, C_1)$ ,  $(x, \neg\Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

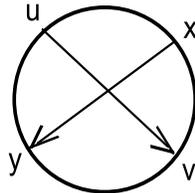
**1.2.10:**  $P_C(C_1) = (1, 1)$ ,  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_3) = (1, 1)$ . Luego  $(x, \neg\Omega, C_1)$ ,  $(x, \Omega, C_2)$ , lo que implica que  $(u, \neg\Omega, C_2)$ ,  $(u, \Omega, C_3)$ . Por lo tanto  $P(C_3) = (1, 0)$ .

**Caso 2:**  $f_1$  y  $f_2$  son paralelas y tienen direcciones opuestas.

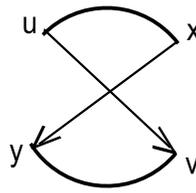
Se definen los ciclos  $C_1 = (x, C, y) \cup (x, y)$ ,  $C_2 = (y, C, u) \cup (u, v) \cup (v, C, x) \cup (x, y)$ , y  $C_3 = (u, C, v) \cup (u, v)$ . Como cada obstrucción de  $C$  se considera una sola vez al contar las obstrucciones de  $C$  que están en los ciclos  $C_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , y  $x$  es obstrucción de exactamente uno de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , y  $u$  es obstrucción de exactamente uno de los ciclos  $C_2$  y  $C_3$ , se procede de la misma manera que en el Caso 1.

**Caso 3:**  $f_1$  y  $f_2$  son arcos cruzados con  $u \in (y, C, x)$  y  $v \in (x, C, y)$ .

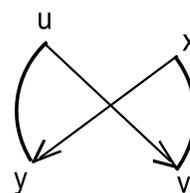
Se definen los ciclos siguientes:  $C_1 = (u, C, x) \cup (x, y) \cup (v, C, y) \cup (u, v)$ ,  $C_2 = (x, C, v) \cup (u, v) \cup (y, C, u) \cup (x, y)$ . Cada obstrucción de  $C$  se considera una sola vez al contar las obstrucciones de  $C$  que están en los ciclos  $C_i$  for  $i \in \{1, 2\}$ . Se tiene también que tanto  $x$  como  $u$  son obstrucciones de exactamente uno de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ . Obsérvese que  $C_1$  y  $C_2$  desempeñan papeles simétricos. Posibilidades simétricas se considerarán una sola vez.



**C**



**C<sub>1</sub>**



**C<sub>2</sub>**

Figura 4.3: Ciclos para el Caso 3.

**Caso 3.1:**  $l(C)$  es par y  $|\Omega(C)|$  es impar. Se analizarán las posibilidades para  $P_C(C_1)$ , asumiendo que  $C_1$  no es  $\Omega$ -impar.

**3.1.1:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ . Entonces  $P_C(C_2) = (0, 1)$ . O bien tanto  $x$  como  $u$  son obstrucciones de  $C_1$ , o ninguno lo es; lo mismo aplica a  $C_2$ , lo que implica que  $P(C_2) = (0, 1)$ .

**3.1.2:**  $P_C(C_1) = (1, 0)$ . Entonces  $P_C(C_2) = (1, 1)$ . Exactamente uno de los vértices  $x$  y  $u$  es obstrucción de  $C_1$ , y lo mismo aplica a  $C_2$ , lo que implica que  $P(C_2) = (1, 0)$ .

**Caso 3.2:**  $l(C)$  es impar y  $|\Omega(C)|$  es par. Se analizarán las posibilidades para  $P_C(C_1)$ , asumiendo que  $C_1$  no es  $\Omega$ -impar.

**3.2.1:**  $P_C(C_1) = (0, 0)$ . Entonces  $P_C(C_2) = (1, 0)$ . O bien tanto  $x$  como  $u$  son obstrucciones de  $C_1$ , o ninguno lo es; lo mismo aplica a  $C_2$ , lo que implica que  $P(C_2) = (1, 0)$ .

**3.2.2:**  $P_C(C_1) = (0, 1)$ . Entonces  $P_C(C_2) = (1, 1)$ . Exactamente uno de los vértices  $x$  y  $u$  es obstrucción de  $C_1$ , y lo mismo aplica a  $C_2$ , lo que implica que  $P(C_2) = (1, 0)$ .

**Caso 4:**  $f_1$  y  $f_2$  son arcos cruzados con  $u \in (x, C, y)$  y  $v \in (y, C, x)$ .

Se definen los ciclos siguientes:  $C_1 = (v, C, x) \cup (x, y) \cup (u, C, y) \cup (u, v)$ ,  $C_2 = (x, C, u) \cup (u, v) \cup (y, C, v) \cup (x, y)$ . Como cada obstrucción de  $C$  se considera una sola vez al contar las obstrucciones de  $C$  que están en los ciclos  $C_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ , y tanto  $x$  como  $u$  son obstrucciones de exactamente uno de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , la demostración es idéntica que la del Caso 3. Queda así demostrado el Teorema 4.8.♦

*Teorema 4.9:* Sea  $D$  una digráfica buena tal que todo 3-ciclo dirigido es simétrico. Entonces todo ciclo dirigido impar de longitud cuando menos 5 tiene una diagonal simétrica.

*Demostración:* Sea  $D$  una digráfica que satisface las hipótesis del teorema y  $\Gamma$  un ciclo dirigido impar de longitud cuando menos 5. Se procederá por inducción sobre la longitud  $l(\Gamma)$  de  $\Gamma$ .

Sea  $\Gamma = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_0)$  un ciclo tal que  $l(\Gamma) = 5$ . Supóngase que  $\Gamma$  no satisface (c); entonces hay un vértice  $x_0$  tal que  $\delta_{D[V(C)]}^+(x_0) \geq 3$  ó  $\delta_{D[V(C)]}^-(x_0) \geq 3$ . Como las propiedades "ser buena" y "satisfacer (c)" se cumplen para una digráfica dada  $B$  si, y sólo si, se cumplen para  $B^{-1}$ , puede asumirse que  $\delta_{D[V(C)]}^+(x_0) \geq 3$ . Si  $(x_0, x_3) \in A(D)$  entonces  $(x_0, x_3, x_4, x_0)$  es un 3-ciclo dirigido, de forma que  $(x_0, x_3)$  es una diagonal simétrica. Si no es así,  $(x_0, x_2) \in A(D)$  y  $(x_0, x_4) \in A(D)$ , y se tiene un ciclo  $C = (x_0, x_2, x_3, x_4) \cup (x_0, x_4)$  de longitud 4 y con una obstrucción. Como  $C$  es  $\Omega$ -impar, satisface (a), (b) ó (c). En cualquier caso,  $C$  tiene una diagonal que no es  $(x_0, x_3)$ :

1)  $(x_3, x_0) \in A(D)$ ; entonces  $(x_0, x_2, x_3, x_0)$  es un 3-ciclo dirigido, de forma que  $(x_0, x_2)$  es una diagonal simétrica.

2)  $(x_2, x_4) \in A(D)$ ; entonces  $(x_0, x_2, x_4, x_0)$  es un 3-ciclo dirigido, de forma que  $(x_2, x_4)$  es una diagonal simétrica.

3)  $(x_4, x_2) \in A(D)$ ; entonces  $(x_4, x_2, x_3, x_4)$  es un 3-ciclo dirigido, de forma que  $(x_4, x_2)$  es una diagonal simétrica.

Por lo tanto  $\Gamma$  tiene una diagonal simétrica.

Ahora supóngase que todo ciclo dirigido  $\Gamma'$  de longitud impar menor que  $k$  tiene una diagonal simétrica, y sea  $\Gamma$  un ciclo impar tal que  $l(\Gamma) = k$ . Por las hipótesis,  $\Gamma$  satisface (a), (b) ó (c). Supóngase que  $\Gamma$  no satisface (c), y sean  $l = \min\{l(x, \Gamma, y) \mid \{x, y\} \subset V(\Gamma) \text{ y } \exists u \in V(\Gamma) \setminus V(x, \Gamma, y) \text{ tal que } \{(u, x), (u, y)\} \subset A(D) \text{ ó } \{(x, u), (y, u)\} \subset A(D)\}$ . Obsérvese que  $l < l(\Gamma) - 2$ . Sea  $\{z, w, v\}$  un conjunto de vértices para el que se alcanza el mínimo, es decir,  $l(z, \Gamma, w) = l$ ,  $v \in V(\Gamma) \setminus V(z, \Gamma, w)$ , y  $\{(v, z), (v, w)\} \subset A(D)$  ó  $\{(z, v), (w, v)\} \subset A(D)$ .

Si hay una diagonal  $(x, y)$  de  $\Gamma$  tal que  $l(y, \Gamma, x)$  es par, entonces  $(y, \Gamma, x) \cup (x, y)$  es un ciclo dirigido de longitud impar menor que  $k$ , que tiene una diagonal simétrica. Por lo tanto, puede asumirse que para toda diagonal  $(x, y)$ , la longitud  $l(y, \Gamma, x)$  es impar.

**Caso 1:**  $\{(v, z), (v, w)\} \subset A(D)$ : como  $l(v, \Gamma, z) \equiv l(v, \Gamma, w) \equiv 0 \pmod{2}$ , se tiene que  $C = (v, z) \cup (z, \Gamma, w) \cup (v, w)$  es un ciclo par con exactamente una obstrucción, que debe satisfacer (a), (b) ó (c), pues  $D$  es buena. Si  $C$  satisface (c), entonces  $\Gamma$  también satisface (c), así que puede asumirse que  $C$  satisface (a) ó (b).

**1.1:**  $C$  satisface (a). Tómese  $x \in V(C)$  tal que  $\delta_{D[V(C)]}^+(x) \geq 3$ . Nótese que  $x \neq v$ , pues de otra forma se tendría que  $l(z, \Gamma, w) > l$ . Si  $(x, v) \in A(D)$ , entonces  $l(z, \Gamma, x)$  es par, pues si no  $(v, z) \cup (z, \Gamma, x) \cup (x, v)$  es un ciclo dirigido de longitud impar menor que  $k$ , y habríamos terminado: si su longitud es 3, es simétrico, de forma que  $(v, z)$  es una diagonal simétrica de  $\Gamma$  y si su longitud es mayor, por hipótesis de inducción tiene una diagonal simétrica, que es también una diagonal simétrica de  $\Gamma$ . Entonces  $l(x, \Gamma, w)$  es par también, y  $l(w, \Gamma, v)$  es impar, pues  $(v, w)$  es una diagonal de  $\Gamma$ . Entonces  $l(x, \Gamma, v)$  es impar y  $(v, \Gamma, x) \cup (x, v)$  es un ciclo dirigido de longitud impar menor que  $k$ .

Si  $(x, v) \notin A(D)$ ,  $\exists \{x_0, x_1\} \subset V(z, \Gamma, w)$  tal que  $\{(x, x_0), (x, x_1)\} \subset A(D)$ . Si  $\{x_0, x_1\} \subset V(z, \Gamma, x)$  ó  $\{x_0, x_1\} \subset V(x, \Gamma, y)$ , se tiene que  $l(z, \Gamma, w) > l$ ; puede entonces asumirse que  $x_0 \in V(z, \Gamma, x)$  y  $x_1 \in V(x, \Gamma, y)$ . Como  $l(v, \Gamma, z) \equiv l(x, \Gamma, x_1) \equiv 0 \pmod{2}$ , pues  $(v, z)$  y  $(x, x_1)$  son diagonales de  $\Gamma$ , se sigue que  $\Gamma' = (v, z) \cup (z, \Gamma, x) \cup (x, x_1) \cup (x_1, \Gamma, v)$  es un ciclo dirigido de longitud impar menor que  $k$ , lo que implica que  $\Gamma$  tiene una diagonal simétrica.

**1.2:**  $C$  satisface (b). La demostración de este caso se sigue del anterior considerando  $D^{-1}$ .

**Caso 2:**  $\{(z, v), (w, v)\} \subset A(D)$ : este caso se sigue directamente del Caso 1 considerando  $D^{-1}$  en lugar de  $D$ . Entonces queda demostrado el Teorema 4.9.♦

*Definición:* Sea  $D$  una digráfica y  $C$  un ciclo dirigido impar. El conjunto de polos de  $C$  es  $p(C) = \{x \in V(C) \mid \exists w \in V(C) \text{ tal que } (w, x) \text{ es una pseudodiagonal de } C\}$ . Un vértice en  $p(C)$  es un polo de  $C$ . Una digráfica  $D$  satisface la propiedad de los polos si, y sólo si, para todo ciclo dirigido impar  $C = (x_0, \dots, x_{2k}, x_0)$  de  $D$  hay polos  $x_i, x_j, x_a, x_b$  tales que  $i < j \leq a < b$  y  $l(x_i, C, x_j) \equiv l(x_a, C, x_b) \equiv 1 \pmod{2}$ .

*Teorema 4.10 [31]:* Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  satisface la propiedad de los polos entonces es núcleo-perfecta.

*Teorema 4.11:* Sea  $D$  una digráfica tal que todo 3-ciclo es simétrico y todo ciclo dirigido impar de longitud cuando menos 5 tiene una diagonal simétrica. Entonces  $D$  satisface la propiedad de los polos.

*Demostración:* Se procederá por inducción sobre la longitud del ciclo impar  $C = (x_0, \dots, x_{2k}, x_0)$ . Para  $k = 1$  se tiene un 3-ciclo en el que todo vértice es un polo, de manera que se cumple la afirmación.

Supóngase que todo ciclo dirigido impar de longitud menor que  $2k + 1$  tiene polos como se pide, y sea  $C$  un ciclo dirigido impar  $C = (x_0, \dots, x_{2k}, x_0)$  con  $k > 1$ . Por las hipótesis,  $C$  tiene una diagonal simétrica  $(x_r, x_s)$ ; podemos asumir que  $1 \leq r < s$  y  $l(x_r, C, x_s) \equiv 1 \pmod{2}$ . Por lo tanto,  $C'' = (x_s, C, x_r) \cup (x_r, x_s)$  es un ciclo dirigido impar con  $l(C'') < 2k + 1$ . Por la hipótesis de inducción, hay polos  $x_i, x_j, x_a, x_b$  de  $C''$  tales que  $i < j \leq a < b$  y  $l(x_i, C'', x_j) \equiv l(x_a, C'', x_b) \equiv 1 \pmod{2}$ . Como  $l(x_r, C, x_s) \equiv 1 \pmod{2}$  se sigue que  $l(x_i, C, x_j) \equiv l(x_a, C, x_b) \equiv 1 \pmod{2}$ , y es claro que  $x_i, x_j, x_a, x_b$  son polos de  $C$ . Entonces la demostración del Teorema 4.11 está completa. ♦

*Teorema 4.12:* Sea  $D$  una digráfica tal que todo 3-ciclo es simétrico y todo ciclo dirigido impar de longitud cuando menos 5 tiene una diagonal simétrica. Entonces  $D$  es núcleo-perfecta.

*Demostración:* El resultado es consecuencia del Teorema 4.10 y el Teorema 4.11. ♦

El siguiente resultado es una modificación de la conjetura de Meyniel:

*Teorema 4.13:* Sea  $D$  una digráfica tal que todo 3-ciclo es simétrico, todo ciclo  $\Omega$ -impar de longitud 4 tiene cuando menos dos  $\Omega$ -pseudodiagonales y todo ciclo  $\Omega$ -impar de longitud mayor que 4 tiene cuando menos dos  $\Omega$ -diagonales. Entonces  $D$  es núcleo-perfecta.

*Demostración:* El resultado se sigue de los otros teoremas de esta sección. ♦

### Conclusiones

El presente trabajo es un ejemplo del uso de hipergráficas para obtener resultados en digráficas. La relación es interesante debido a que ambos conceptos pueden considerarse como una generalización del de gráfica, pero de maneras muy distintas: en uno se le da una dirección a las aristas y en el otro se aumenta la cantidad de vértices por arista.

Así, además de su valor concreto al exhibir una familia de digráficas núcleo-perfectas, puede incitar la búsqueda de otras formas de relacionar dichos conceptos para obtener resultados referentes a uno a partir de investigación en el otro.

## CONCLUSIONES

Las tres líneas de investigación exploradas me han permitido acercarme a las hipergráficas desde distintas direcciones y profundizar en sus relaciones con otras áreas de la teoría de gráficas.

Así, un aspecto importante de mi trabajo doctoral es el conocimiento general que he adquirido en el área de hipergráficas. Además, se obtuvieron resultados interesantes en aspectos diversos de la teoría de hipergráficas y se definieron dos herramientas que pueden ser útiles para investigaciones posteriores: las hipergráficas dirigidas y las hipergráficas de niveles. Ambas, aunque en particular la segunda, parecen tener aún mucho por explorar.

## BIBLIOGRAFÍA

Para conceptos generales sobre gráficas (resp. digráficas; hipergráficas) se recomiendan [6], [13] y [16] (resp. [4] y [16]; [7]).

- [1] B. D. Acharya, Representing hypergraphs by families of sets with given properties, *Indian Journal of Mathematics*, en prensa.
- [2] B. D. Acharya, On the cyclomatic number of a hypergraph, *Discrete Math.* **27** (1979), p. 111-116.
- [3] B. D. Acharya y M. Las Vergnas, Hypergraphs with cyclomatic number zero, triangulated graphs, and an inequality, *J. Combin. Th. Ser. B* **33** (1982), p. 52-56.
- [4] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag London. Londres, 2001.
- [5] Z. Baranyai, On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Infinite and Finite Sets* (A. Hajnal, R. Rado, V. T. Sós, eds.), North Holland. Amsterdam, 1975, p. 91-108.
- [6] C. Berge, *The Theory of Graphs*. Dover Publications. Nueva York, 2001.
- [7] C. Berge, *Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets*. Elsevier Science Publishers. Amsterdam, 1989.
- [8] C. Berge, Regularizable Graphs, *Advances in Graph Theory* (Bollobás, ed.), *Annals of Discrete Math.* **3** (1978), p. 11-20.
- [9] C. Berge y P. Duchet, Une généralisation du théorème de Gilmore, *Cahier du C.E.R.O.* **17** (1975), p. 111-124.
- [10] C. Berge y M. Las Vergnas, Sur un théoreme du type König pour hypergraphes, *Annals N.Y. Acad. Sc.* **175**, New York Academy of Sciences (1970), p. 32-40.
- [11] B. Bollobás y P. Duchet, Helly Families of Maximal Size, *J. Comb. Theory A* **26** (1979), p. 197-200.
- [12] B. Bollobás y P. Duchet, On Helly Families of Maximal Size, *J. Comb. Theory B* **35** (1983), p. 290-296.
- [13] J.A. Bondy y U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. MacMillan Press. Londres, 1976.
- [14] G. Boros, Perfect Graphs, Kernels and Cores of Cooperative Games, *Discrete Math.* **306** (2006), p. 2336-2354. Special Issue: *Creation and Recreation: A Tribute to the Memory of Claude Berge*.
- [15] M. Borowiecki, *Connected Bijection Method in Hypergraph Theory and Some Results Concerning the Structure of Graphs and Hypergraphs*. Wydawnictwo Uczelniane. Zielona Góra, 1979.
- [16] G. Chartrand y L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*. Wadsworth Inc. Belmont, 1986.
- [17] P. Duchet, Graphes noyau-parfaites, *Annals of Discrete Math.* **9** (1980), p. 93-101.
- [18] P. Duchet y H. Meyniel, A note on kernel-critical graphs, *Discrete Math.* **33** (1981), p. 103-105.

- [20] P. Duchet, A Sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect, *Journal of Graph Theory*, **Vol. VII, No. 1** (1987), p. 81-85.
- [21] P. Erdős, Cha-Ko y R. Rado, Intersection theorems for systems of finite size, *Quart. J. Math. Oxford* **12** (1961), p. 313-318.
- [22] P. Erdős, A. Hajnal y J. W. Moon, Mathematical Notes, *Amer. Math. Monthly* **71** (1964), p. 1107-1110.
- [23] Fraenkel. *Combinatoric Games: Selected Bibliography with a Succint Gourmet Introduction*. <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/fraenkel>
- [24] Z. Füredi, Maximum degrees and fractional matchings in uniform hypergraphs, *Combinatorica* **1** (1981), p. 155-162.
- [25] H. Galeana-Sánchez, A counterexample to a conjecture of Meyniel on kernel-perfect digraphs, *Discrete Math.* **41** (1982), p. 105-107.
- [26] H. Galeana-Sánchez, A theorem about a conjecture of Meyniel on kernel-perfect critical digraphs, *Discrete Math.* **59** (1986), 35-41.
- [27] H. Galeana-Sánchez y M. Manrique, Directed hypergraphs: A tool for researching digraphs and hypergraphs, *Discussiones Mathematicae: Graph Theory* **29** (2009), p. 313-335.
- [28] H. Galeana-Sánchez y M. Manrique, Level Hypergraphs, *AKCE Journal of Graph Theory* **6** (2009), p. 409-427.
- [29] H. Galeana-Sánchez y M. Manrique, Level Hypergraphs II, submitted.
- [30] H. Galeana-Sánchez y M. Manrique, A corrected version of a conjecture by Meyniel, submitted.
- [31] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, On kernels and semikernels of digraphs. *Discrete Math.* **48** (1984), p. 67-76.
- [32] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, On kernel-imperfect critical digraphs. *Discrete Math.* **59** (1986), p. 257-265.
- [33] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara. Extending kernel-perfect digraphs to kernel-imperfect critical digraphs, *Discrete Math.* **94** (1991), 181-187.
- [34] C. Greene, G. O. H. Katona y D. J. Kleitman, Extensions to the Erdős-Ko-Rado theorem, *Recent Advances in Graph Theory*, Academia Praha. Praga, 1975, p. 223-231.
- [35] T. Haynes, S. Hedetniemi y P. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc. New York, 1998.
- [36] T. Haynes, S. Hedetniemi y P. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker Inc. New York, 1998.
- [37] P. Hansen y M. Loréa, Deux conditions de colorabilité des hypergraphes, *Coll. Math. Discrete*, Bruselas, 1978, *Cahiers du C. E. R. O.* **20** (1978), p. 3-4, 405-410.
- [38] J. Henderson y R. A. Dean, The 1-width of (0,1)-matrices having constant sum three, *J. Comb. Theory A* **16** (1974), p. 355-370.
- [39] F. Jaeger y C. Payan, Détermination du nombre d'arêtes d'une hypergraphe  $\tau$ -critique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **271** (1961), p. 221-223.
- [40] D. S. Johnson y H. O. Pollak, Hypergraph planarity and the complexity of drawing Venn diagrams, *Journal of Graph Theory* **11** (1987), p. 309-325.
- [41] R. P. Jones, *Colorings of hypergraphs*, Doctoral Thesis, Univ. of London. Londres, 1976.

- [42] L. Lovász, Graphs and set-systems, en "*Beiträge zur Graphentheorie*" (H. Sachs, H. S. Voss, y H. Walther eds.), p. 99-106, Teubner, Leipzig, 1968.
- [43] L. Lovász, 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Math. Ac. Sci. Hungar* **16** (1975), p. 50-57.
- [44] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, Problem 13.2, North-Holland. Amsterdam, 1979.
- [45] F. Maffray, On kernels of  $i$ -triangulated graphs, *Discrete Math.* **61** (1986), p. 247-251.
- [46] F. Maffray, Kernels on perfect line-graphs, *J. Combin. Theory (Ser. B)* **55** (1992), p. 1-8.
- [47] J. C. Meyer, Ensembles stables maximaux dans les hypergraphes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **274** (1975), p. 144-147.
- [48] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*. An. Inst. Mat. UNAM, II, p. 67-76. México, 1984.
- [49] Von Neumann y Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press. Princeton, 1944.
- [50] C. Payan, Coverings by minimal transversals, *Discrete Math.* **23** (1978), p. 273-277.
- [51] M. Richardson, Solutions of irreflexive relations, *Ann. Math.* **58-2** (1953), p. 573-580.
- [52] M. Richardson, Extension theorems for solutions of irreflexive relations. *Proc. Math. Acad. Sci.* **39** (1953), p. 649.
- [53] H. Ryser, New types of combinatorial designs, *Actes Congrès International des mathématiciens*, Niza 1970, **3**, p. 235-239.
- [54] J. Schönheim, On a problem of Daykin concerning intersecting families of sets, *Combinatorics*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 13, Cambridge Univ. Press 1974, p. 139-140.
- [55] P. D. Seymour, Packing nearly disjoint sets, *Combinatorica* **2** (1982), p. 91-97.
- [56] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27**, 1928, p. 544-548.
- [57] F. Sterboul, Sur le nombre transversal des hypergraphes uniformes, *Discrete Math.* **22** (1978), p. 91-96.
- [58] Z. Tuza, Helly-type hypergraphs and Sperner families, *Europ. J. Combinatorics* **5** (1984), p. 185-187.
- [59] T.R.S. Walsh, Hypermaps versus bipartite maps, *J. Combin. Theory* **18** (1975), p. 155-163.
- [60] A. A. Zykov, Hypergraphs, *Uspeki Mat. Nauk* **6** (1974), p. 89-154.