Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
MANUEL FLORES GALICIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ

2010

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Flores
Galicia
Manuel
54 89 90 66
Universidad Nacional Autonóma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
303549572

2. Datos del tutor
Dr.
Octavio
Mendoza
Hernández

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Edith Corina
Sáenz
Valadez

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Christof
Geiss
Hahn

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Michael
Barot
Schlatter

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

7. Datos del trabajo escrito
Una Introducción a la Teoría de Representaciones de Álgebras
164 p.
2010

Agradecimientos

Gracias Dios...

Cuando era niño, mi papá me dijo que el hombre inventa las matemáticas, y es el hombre quien las domina; les doy las gracias a mis papás, por ser míos, por amarme y cuidarme, además de enseñarme a ser un hombre de bien. En especial, a mi hermana Fátima: siempre caminamos juntos.

Agradezco a mis maestros de matemáticas y de la vida, que son mis guías en este mundo; a mi asesor Octavio Mendoza, por sus consejos y toda su disponibilidad para enseñarme matemáticas. A Antonio Lascurain por sus enseñanzas desde el inicio de mi carrera.

A mis amigos, por su grata compañía y solidaridad, con ellos es más fácil mi andar y mi estar.

Finalmente, doy gracias a todas las personas que me han visto crecer, ya que su atención ha sido invaluable.

Índice general

Introducción

Simplificar y clasificar conceptos ha sido, y sigue siendo, un quehacer intrínseco en el desarrollo de cualquier ciencia; más aún en matemáticas. Por ejemplo, una transformación lineal en un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado, queda caracterizada por su forma canónica de Jordan, y ésta, a su vez actúa de alguna manera sobre el espacio vectorial. Pero, ¿qué sucede cuando se quiere dar un paso adelante, con miras en la generalidad, en el avance de la teoría?, es decir, analizar la acción simultánea de una infinidad de transformaciones lineales sobre un mismo espacio. Es aquí donde los métodos "simples" ya no son más del todo efectivos, casi siempre insuficientes, motivo por el que se recurre a técnicas más abstractas y complejas; que en lo que nos atañe, es la Teoría de Representaciones de Álgebras.

A *grosso modo*, la Teoría de Representaciones de Álgebras, es el estudio de módulos sobre álgebras; particularmente, la clasificación de los módulos inescindibles (del latín *scindere,* "separar, dividir"; cf. 2.7.4) sobre dicha álgebra y los morfismos entre ellos. Según varios autores (cf. [2], [3], [4]) el origen de esta rama del álgebra se sitúa en 1835, cuando William R. Hamilton asocia a cada número complejo $a + \sqrt{-1}\, b$ una pareja ordenada de números reales (a, b), que por los mismos años, Gauss utilizaría para el desarrollo de las operaciones suma y producto de los números complejos. Esta asociación se considera una de las primeras representaciones algebraicas. De Morgan es el primero en dar los bosquejos de la definición de un concepto sumamente importante: el de álgebra. Alrededor 1870, ya se habían clasificado las álgebras de dimensión menor a siete; y es hasta finales del siglo XIX, cuando se percibe una notable simpatía por la resolución de problemas por métodos puramente algebraicos. En la década de los 30's, Emmy Noether, en su trabajo sobre representaciones de álgebras de dimensión finita sobre los reales, da el gran paso para el estudio de la Teoría de Representaciones de hoy en día: ver a las representaciones como módulos. La razón de dicha idea es que la teoría de categorías y toda la herramienta del álgebra homológica son aplicables; más tarde, Kothe propone el uso de módulos sobre anillos artinianos, dada su gran utilidad enfocada a la generalización de resultados.

A mediados del siglo XX los métodos homológicos se introducen en la teoría de anillos, herramienta muy útil en la clasificación de representaciones, y es por esa misma época cuando se formulan las dos conjeturas de Brauer-Thrall (cf. [2] y[4]): Primero, para una K-álgebra de dimensión finita, se tiene que es de tipo de representación finita, o que las dimensiones de los módulos inescindibles no están acotadas; y segundo, para un álgebra de dimensión finita sobre un campo infinito K, se tiene que es de tipo de representación finita, o es de tipo de representación fuertemente no acotada, es decir, existe una sucesión infinita estrictamente creciente $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de números naturales, tal que para cada i, existe un número infinito de módulos inescindibles no isomorfos dos a dos, con K-dimensión n_i.

En los 70's, por un lado, Peter Gabriel (ver [6], [7] y[8]) hace otro gran avance en la teoría: reformula los problemas en términos de representaciones de carcajes, esto es, a un álgebra le asocia un carcaj. Demuestra que un carcaj es tipo de representación finita si y sólo si es unión disjunta de diagramas de Dynkin del tipo $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$. Por otro lado, Maurice Auslander e Idun Reiten introducen las sucesiones que casi se parten y los morfismos irreducibles, ya que son invariantes de módulos inescindibles que aparecen, ya sea explícitamente o implícitamente en los trabajos de invetigación más recientes de la materia. Las sucesiones mencionadas originan un carcaj asociado a la categoría de módulos del álgebra, llamado carcaj de Auslander-Reiten y son una herramienta básica de las representaciones; por ejemplo, también se utilizan para definir el grupo de Grothendieck y sirven de base al formular criterios para saber el tipo de representación de las álgebras.

Otra gran fuente de ideas es la escuela ucraniana, que utiliza ciertos métodos llamados problemas matriciales. Por ejemplo, el problema de clasificar carcajes de tipo de representación finita, se convierte en un problema de clasificación de matrices bajo ciertas operaciones en filas y columnas, ideas usadas por Nazarova y Roiter para hacer una prueba rigurosa de la segunda conjetura de Brauer-Thrall en el caso de campos perfectos.

La presente tesis se pensó, en primer lugar, como un texto que sirva al lector como guía teórico-práctica para introducirse al estudio de representaciones de álgebras, apoyándose con la resolución de ejercicios que se precisan a lo largo de cada capítulo, que sirven muchas veces como complemento teórico al mismo. Otro objetivo de esta tesis, es crear un compendio de la herramienta y los resultados necesarios para el inicio en el estudio de las representaciones, dado que hay poca bibliografía existente que tenga como objetivo lo primeramente mencionado.

El andar de la tesis se apega lo más fielmente posible al desarrollo histórico que hemos descrito brevemente, de lo que hoy conocemos como Teoría de Representaciones de Álgebras, y también en el buen orden de los fundamentos cognitivos (la contrucción de edificaciones se empieza en los cimientos, para terminar en los detalles de los interiores). Es así como se estudian con particularidad la categoría de módulos, los anillos artinianos a izquierda, las álgebras de artin, las álgebras de caminos, y se finalizan con representaciones de carcajes; herramientas esenciales que son base para el aprendizaje de la teoría introductoria a las Representaciones de Álgebras. Cabe mencionar que se trabaja con la idea de P. Gabriel acerca de hacer representaciones asociando un carcaj a un álgebra, esto se confirma en el Capítulo 5, donde se detalla rigurosamente este procedimiento, con el fin de aplicar toda la teoría desarrollada a lo largo de los cuatro primeros capítulos.

La tesis, en el Capítulo 1, comienza con definiciones y notación básica sobre anillos; la introducción del concepto de anillo opuesto es vital en esta parte, ya que, como se discutirá a lo largo de la tesis, nos proporciona dos maneras de multiplicar, ya sea en anillos de endomorfismos, K-álgebras y K-módulos; la definición y equivalencia de estos dos últimos conceptos se presenta en este primer capítulo, así como la definición de submódulo. También se discute la categoría de módulos $\mathrm{Mod}(R)$ y bimódulos sobre anillos; y se introduce la noción de idempotente, mostrando algunos resultados.

En el Capítulo 2 se definen y demuestran algunas equivalencias entre módulos de longitud finita, noetherianos y artinianos, así como los módulos simples, semisimples, proyectivos e inyectivos. Las sucesiones exactas que se esciden en $\mathrm{Mod}(R)$ se usan como una herramienta necesaria a partir de este capítulo y a lo largo de la tesis, además se estudia su aplicación en el grupo de Grothendieck. Se estudian los morfismos minimales, y sus versiones minimales a izquierda y derecha, se analiza su relación con split-monos y split-epis. En el aspecto categórico, se definen las categorías preaditivas y funtores preaditivos, precisando como ejemplo, el funtor Hom, y exhibiendo al radical, y su noción dual, el top, como funtores aditivos. Se prueba el Lema de Nakayama sobre anillos. También se definen anillos locales y módulos incescindibles; la noción de epi-esencial se introduce aquí, así como algunos términos homológicos, citando sin prueba resultados cruciales para la tesis. El capítulo acaba con la definición de anillo hereditario y algunas equivalencias.

En el Capítulo 3, se definen álgebra de artin, R-categoría y R-funtor. Se explica el proceso de proyectivización, que consiste en pasar cuestiones de módulos finitamente generados a cuestiones de módulos proyectivos. Se demuestra el Teorema de Krull-Remark-Schmidt y se define presentación proyectiva, así como mono-esencial. En módulos, se prueban resultados que involucran el soclo y los módulos irreducibles. También se prueba la existencia de dualidad en R-álgebras de artin. Se finaliza con el funtor $*$, que a su vez sirve para definir el funtor de Nakayama, el cual es de utilidad para mostrar la R-equivalencia de categorías entre los módulos proyectivos y los módulos inyectivos, simpre y cuando sean finitamente generados.

En el Capítulo 4, se empieza con las definiciones de carcaj y caminos, dando estructura al álgebra de caminos KQ, con la concatenación de caminos como operación. Se prueban equivalencias que involucran a un anillo conexo y una familia de idempotentes ortogonales primitivos de dicho anillo. También se muestra la propiedad universal del álgebra de caminos. Se muestran ejemplos concretos en álgebras de caminos, calculando su radical, top, módulos inyectivos y módulos proyectivos. Se da la noción de carcaj con relaciones y carcaj opuesto. Se explica el carcaj asociado a una K-álgebra de dimensión finita. El capítulo finaliza con la demostración del Teorema de P. Gabriel, que nos da condiciones suficientes para que un álgebra tenga presentación.

En el Capítulo 5 se aplica toda la teoría desarrollada a lo largo de la tesis, empieza con la definición de representación de un carcaj y los morfismos entre representaciones. Como resultado importante, se prueba la equivalencia de categorías entre la categoría de los K-funtores entre KQ y Vec_K y la clase de las representaciones del carcaj Q. Se dan ejemplos de representaciones de carcajes finitos. También se introducen los conceptos de representación simple representación proyectiva e inyectiva asociados a un vértice; así como la definición de radical, top y soclo de una representación de un carcaj con relaciones. El capítulo acaba con la definición de la matriz de Cartan y la característica de Euler, ambas, de un álgebra A; para finalmente terminar con la transformación de Coxeter.

El lector que haya realizado la mayoría de los ejercicios y haya comprendido el material de esta tesis, deberá tener una formación sólida en su iniciación a la Teoría de Representaciones de Álgebras. Con esta idea en mente se realizó el presente texto, que se espera, así sea.

Capítulo 1

Nociones básicas de anillos y módulos

En este primer capítulo introducimos conceptos y terminología fundamentales, para el estudio de esta tesis, como lo son la noción de anillo y álgebra. El objetivo principal es la definición de retícula de submódulos, así como la de categoría de módulos y bimódulos. Cabe resaltar, que dicha introducción en algunos aspectos, es meramente recordatoria y que no pretende ser exhaustiva. Para complementar algunas de las nociones que usaremos libremente en la presente tesis (como por ejemplo la noción de suma directa de módulos), se recomienda [1]. Finalmente, hacemos ver que en esta tesis $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ y $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$.

1.1. Notación básica

(a) A lo largo de esta tesis, *anillo* significa anillo asociativo con unidad. La unidad de un anillo R se denota por 1 ó 1_R. Decimos que R es anillo trivial si $1_R = 0_R$.

(b) Sean R y S anillos. Decimos que $\varphi : R \longrightarrow S$ es un *morfismo de anillos* si

  (i) $\forall\ a, b \in R, \quad \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ y $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,

  (ii) $\varphi(1_R) = 1_S$ y $\varphi(0_R) = 0_S$.

  Si además φ es una biyección, decimos que φ es un *isomorfismo*, o equivalentemente, que R y S son anillos isomorfos, se denota como $R \simeq S$.

(c) Sea R un anillo y $I \subseteq R,\ I \neq \emptyset$. Decimos que:

- I es un *subanillo* de R (*i.e.* $I \leqslant R$) si
  - (i) $\forall\ a, b \in I \quad a - b \in I$ y $a \cdot b \in I$,
  - (ii) $1_R \in I$.
- I es un *ideal izquierdo* de R (*i.e.* $I \trianglelefteq_i R$) si

  - (i) $\forall\, a, b \in I \quad a - b \in I$,
  - (ii) $\forall\, x \in R,\ \forall\, a \in I \quad xa \in I$.

- I es un *ideal derecho* de R (*i.e.* $I \trianglelefteq_d R$) si
  - (i) $\forall\, a, b \in I \quad a - b \in I$,
  - (ii) $\forall\, x \in R,\ \forall\, a \in I \quad ax \in I$.
- I es un *ideal* (bilateral) de R (*i.e.* $I \trianglelefteq R$) si $I \trianglelefteq_i R$ y $I \trianglelefteq_d R$.

(d) El *centro* de R es $\mathrm{C}(R) := \{r \in R \mid rx = xr,\ \forall x \in R\}$.

Ejercicio 1.1.1. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que

(a) $\mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(r) \mid r \in R\} \leqslant S$. A $\mathrm{Im}(\varphi)$ se le conoce como la imagen de φ.

(b) $\forall\, S' \leqslant S$ se tiene que $\varphi^{-1}(S') \leqslant R$.

(c) $\mathrm{Ker}(\varphi) := \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\} \trianglelefteq R$. A $\mathrm{Ker}(\varphi)$ se le conoce como el núcleo o kernel de φ.

(d) Sea $I \trianglelefteq R$. ¿Es cierto que $\varphi(I) \trianglelefteq S$?

1.2. El anillo opuesto

Sea R un anillo. El *anillo opuesto* R^{op} de R se define como sigue:

(i) Como conjunto $R = R^{op}$.

(ii) La estructura aditiva de R^{op} es la misma que la de R.

(iii) La estructura multiplicativa $*$ de R^{op} es la opuesta de R, *i.e.*

$$r_1 * r_2 := r_2 r_1 \quad \forall\, r_1, r_2 \in R.$$

Dado $r \in R$, algunas veces para evitar confusiones, conviene denotar por r^{op} al correspondiente elemento en $R^{op\cdot}$ De esta manera, se tiene que $r_1^{op} * r_2^{op} = r_2 r_1$.

Ejercicio 1.2.1. Sea R un anillo. Pruebe que se cumple lo siguiente.

(a) $\mathrm{C}(R)$ es un subanillo conmutativo de R.

(b) $\mathrm{C}(R^{op})$ $=$$\mathrm{C}(R)$.

(c) Las siguientes condiciones son equivalentes:

  - (i) $R = R^{op}$ como anillos,
  - (ii) $\mathrm{C}(R) = R$,
  - (iii) R es conmutativo.

(d) Si $R \simeq R^{op}$, ¿es cierto que R es conmutativo?

1.3. Anillos de endomorfismos

Sea $(A,+)$ un grupo abeliano.

(a) $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$:=$\{f : A \to A \mid f$ es un homomorfismo de grupos$\}$.

(b) $(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$,+) es un grupo abeliano con la suma

$$(f+g)(a) := f(a) + g(b) \quad \forall\ a \in A \quad \forall\ f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A).$$

Existen dos formas de "multiplicar" (composición de morfismos) en $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$: dadas $f : A \longrightarrow A,\ g : A \longrightarrow A$ se tiene

$$f \circ g : A \longrightarrow A \quad \text{y} \quad g \Box f : A \longrightarrow A.$$

Como operadores a la izquierda: $(f \circ g)(a) := f(g(a)) \quad \forall\ a \in A$.

Como operadores a la derecha: $(a)(g \Box f) := ((a)g)f \quad \forall\ a \in A$.

Con las multiplicaciones anteriores, se tienen 2 estructuras de anillo en $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$: $\mathrm{End}^{i}_{\mathbb{Z}}(A) := (\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A), +, \circ)$ y $\mathrm{End}^{d}_{\mathbb{Z}}(A) := (\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A), +, \Box)$. Es claro que $\mathrm{End}^{i}_{\mathbb{Z}}(A) = (\ \mathrm{End}^{d}_{\mathbb{Z}}(A)\ )^{op}$. Para simplificar, escribiremos frecuentemente $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ en vez de $\mathrm{End}^{i}_{\mathbb{Z}}(A)$.

1.4. Álgebras

Definición 1.4.1. Sea K un anillo conmutativo y R un anillo. La terna (R, K, φ), con $\varphi : K \to R$ un morfismo de anillos tal que $\varphi(K) \subseteq \mathrm{C}(R)$, es una K-*álgebra* (*i.e.* R es una K-álgebra vía el morfismo de anillos φ).

Ejercicio 1.4.2. Dada una K-álgebra (R, K, φ), tenemos una acción a la izquierda $K \times R \longrightarrow R \quad (k, r) \mapsto k \cdot r := \varphi(k)\, r$, que satisface:

(i) $\forall\ k \in K,\ \forall\ r_1, r_2 \in R \quad k \cdot (r_1 + r_2) = k \cdot r_1 + k \cdot r_2$.

(ii) $\forall\ k_1, k_2 \in K,\ \forall\ r \in R \quad (k_1 + k_2) \cdot r = k_1 \cdot r + k_2 \cdot r$.

(iii) $\forall\ k_1, k_2 \in K,\ \forall\ r \in R \quad k_1 \cdot (k_2 \cdot r) = (k_1 k_2) \cdot r$.

(iv) $\forall\ r \in R \quad 1_K \cdot r = r$.

(v) $\forall\ k \in K,\ \forall\ r_1, r_2 \in R \quad k \cdot (r_1 r_2) = (k \cdot r_1) r_2 = r_1 (k \cdot r_2)$.

Ejercicio 1.4.3. Sea R un anillo y K un anillo conmutativo. Dada una función $K \times R \longrightarrow R\ (k, r) \mapsto k \cdot r$ que satisface (i) hasta (v) del Ejercicio 1.4.2, pruebe que $\varphi : K \longrightarrow R$, con $\varphi(k) := k \cdot 1_R$, es un morfismo de anillos tal que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{C}(R)$.

Definición 1.4.4. Sean (R, K, φ) y (S, K, ϕ) K-álgebras. Decimos que una función $\alpha : R \to S$ es un *morfismo de álgebras* si satisface:

(i) $\alpha : R \to S$ es un morfismo de anillos,

(ii) $\alpha(\varphi(k) r) = \phi(k) \alpha(r) \quad \forall\ k \in K,\ \forall\ r \in R$.

1.5. Módulos

Definición 1.5.1. Sea $(M,+)$ un grupo abeliano y R un anillo.

(a) El par (M,λ), con $\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}^i_{\mathbb{Z}}(M)$ un morfismo de anillos, es un R-*módulo a izquierda* que denotamos también por ${}_RM$.

(b) El par (M,ρ), con $\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}^d_{\mathbb{Z}}(M)$ un morfismo de anillos, es un R-*módulo a derecha* que denotamos también por M_R.

Ejercicio 1.5.2.

(a) Dado un R-módulo izquierdo ${}_RM = (M,\lambda)$, el morfismo de anillos $\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}^i_R(M)$ induce una acción a la izquierda $R \times M \longrightarrow M$ definida por $(r,m) \mapsto r \cdot m := \lambda(r)(m)$ que satisface las siguientes propiedades.

(i) $\forall\ r \in R,\ \forall\ x,y \in M \quad r \cdot (x+y) = r \cdot x + r \cdot y.$

(ii) $\forall\ r_1, r_2 \in R,\ \forall\ x \in M \quad (r_1 + r_2) \cdot x = r_1 \cdot x + r_2 \cdot x.$

(iii) $\forall\ r_1, r_2 \in R,\ \forall\ x \in M \quad (r_1 r_2) \cdot x = r_1 \cdot (r_2 \cdot x).$

(iv) $\forall\ x \in M \quad 1_R \cdot x = x.$

Frecuentemente se escribirá rm en lugar de $r \cdot m$.

(b) Sea $(M,+)$ un grupo abeliano, R un anillo y $R \times M \longrightarrow M$ definida por $(r,m) \mapsto r \cdot m$ una acción a la izquierda que satisface (i) hasta (iv) del inciso anterior. Entonces cada $r \in R$, induce una función $\lambda_r : M \longrightarrow M$ donde $\lambda_r(m) := r \cdot m$. Pruebe que $\lambda_r \in \mathrm{End}^i_{\mathbb{Z}}(M)$ y que $\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}^i_{\mathbb{Z}}(M)$, con $r \mapsto \lambda_r$, es un morfismo de anillos.

Ejercicio 1.5.3.

(a) Dado un R-módulo derecho $M_R = (M,\rho)$, el morfismo de anillos $\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}^d_R(M)$ induce una acción a la derecha $M \times R \longrightarrow M$ definida por $(m,r) \mapsto m \cdot r := (m)\rho(r)$ que satisface las siguientes propiedades.

$(i)^{op}$ $\forall\ r \in R,\ \forall\ x,y \in M \quad (x+y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r.$

$(ii)^{op}$ $\forall\ r_1, r_2 \in R,\ \forall\ x \in M \quad x \cdot (r_1 + r_2) = x \cdot r_1 + x \cdot r_2.$

$(iii)^{op}$ $\forall\ r_1, r_2 \in R,\ \forall\ x \in M \quad x \cdot (r_1 r_2) = (x \cdot r_1) \cdot r_2.$

$(iv)^{op}$ $\forall\ x \in M \quad x \cdot 1_R = x.$

(b) Sea $(M,+)$ un grupo abeliano, R un anillo y $M \times R \longrightarrow M$ definida por $(m,r) \mapsto m \cdot r$ una acción derecha que satisface $(i)^{op}$ hasta $(iv)^{op}$ del inciso anterior. Entonces cada $r \in R$, induce una función $\rho_r : M \longrightarrow M$ donde $(m)\rho_r := m \cdot r$. Pruebe que $\rho_r \in \mathrm{End}^d_{\mathbb{Z}}(M)$ y que $\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}^d_{\mathbb{Z}}(M)$, donde $r \mapsto \rho_r$, es un morfismo de anillos.

Ejercicio 1.5.4. Sea R un anillo, $(M, +)$ un grupo abeliano y consideremos $\varphi : R \times M \longrightarrow M$ una acción. La acción opuesta $\varphi^{op} : M \times R^{op} \longrightarrow M$ se define como sigue: $\varphi^{op}(m, r) := \varphi(r, m)$. Pruebe que φ satisface (i) hasta (iv) del Ejercicio 1.5.2 (a) si y sólo si φ^{op} satisface $(i)^{op}$ hasta $(iv)^{op}$ del Ejercicio 1.5.3 (a).

En particular, la estructura de R-módulo a la izquierda ${}_RM$ induce una de R^{op}-módulo a la derecha $M_{R^{op}}$, y viceversa.

Definición 1.5.5. Dado un anillo R, el producto en el anillo induce estructuras de R-módulo a izquierda y a derecha en R.

(i) ${}_RR$ con la acción a izquierda $R \times R \longrightarrow R \quad (r, x) \mapsto rx$.

(ii) R_R con la acción a derecha $R \times R \longrightarrow R \quad (x, r) \mapsto xr$.

Definición 1.5.6. Decimos que $\alpha :{}_RM \longrightarrow{}_RN$ es un *morfismo de R- módulos* a izquierda (R-lineal) si α es un morfismo de grupos abelianos tal que $\forall\ r \in R,\ \forall\ m \in M\ \alpha(r{\cdot}m) = r{\cdot}\alpha(m)$. Análogamente, se define morfismo de R-módulos a derecha.

Ejercicio 1.5.7.

(a) Sea R un anillo y K un anillo conmutativo. Pruebe que, dar una estructura de K-álgebra en R es equivalente a dar una estructura de K-módulo a izquierda en R, vía una acción a izquierda $K \times R \longrightarrow R$ $(k, r) \mapsto k \cdot r$, tal que satisface:

$$\forall\ k \in K,\ \forall\ r_1, r_2 \in R \quad k \cdot (r_1r_2) = (k \cdot r_1)r_2 = r_1(k \cdot r_2).$$

(b) Sean R y S K-álgebras y $\alpha : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que α es un morfismo de K-álgebras si y sólo si $\alpha :{}_KR \longrightarrow{}_KS$ es un morfismo de K-módulos a izquierda, donde la estrucura de K-módulo en R y S es la dada en (a).

1.6. Cambio de anillos

Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos y ${}_SM$ un S-módulo a izquierda dado por el morfismo de anillos $\lambda : S \longrightarrow \mathrm{End}^i_{\mathbb{Z}}(M)$. La composición

$$R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}^i_{\mathbb{Z}}(M),$$

induce una estructura de R-módulo a izquierda ${}_RM := (M, \lambda \circ \varphi)$, obtenida mediante un "*cambio de anillos*".

Ejercicio 1.6.1. Escriba la estructura del R-módulo a izquierda ${}_RM = (M, \lambda \circ \varphi)$ en términos de la acción a izquierda $R \times M \longrightarrow M$.

1.7. Bimódulos

Definición 1.7.1. Sea M un grupo abeliano, R y S anillos. Decimos que:

(a) ${}_RM_S$ es un R-izquierdo S-derecho bimódulo si

(i) ${}_RM$ es un R-módulo a izquierda y M_S es un S-módulo a derecha,

(ii) $\forall\ r \in R, \quad \forall\ m \in M, \quad \forall\ s \in S \quad r(ms) = (rm)s.$

(b) ${}_{R-S}M$ es un R-izquierdo S-izquierdo bimódulo si

(i) ${}_RM$ es un R-módulo a izquierda y ${}_SM$ es un S-módulo a izquierda,

(ii) $\forall\ r \in R, \quad \forall\ m \in M, \quad \forall\ s \in S \quad r(sm) = s(rm).$

Ejercicio 1.7.2. Sean R, S anillos y M un grupo abeliano.

(a) Defina los R-derecha S-derecha bimódulos M_{R-S}.

(b) Suponga que tenemos las estructuras ${}_RM$ y ${}_SM$. Considere la estructura $M_{S^{op}}$ inducida por ${}_SM$ (cf. Ejercicio 1.5.4). Pruebe que: se tiene estructura de ${}_{R-S}M$ bimódulo si y sólo si se tiene estructura de ${}_RM_{S^{op}}$ bimódulo.

1.8. Retículas de submódulos

Aquí estudiamos las subestructuras de módulos, esto es, introducimos la definición de submódulo, así como los módulos finitamente generados y módulos simples, cuya utilidad es esencial en el estudio de representaciones de álgebras. En seguida damos algunas definiciones elementales.

Definición 1.8.1. Sea A un conjunto no vacío. Una *relación binaria* R, o simplemente una relación, en A es un subconjunto $R \subseteq A \times A$. Un par $(a, b) \in R$ de denota como $a\,R\,b$ ó como $a \sim b$.

Definición 1.8.2. Sea A un conjunto no vacío y R una relación en A. Decimos que:

(a) R es reflexiva si $\forall\ a \in A \;\ a\,R\,a$.

(b) R es antisimétrica si $\forall\ a, b \in A$ las condiciones $a\,R\,b$ y $b\,R\,a$ implican $a = b$.

(c) R es transitiva si $\forall\ a, b, c \in A$ las condiciones $a\,R\,b$ y $b\,R\,c$ implican $a\,R\,c$.

(d) El par (A, R) se dice que es un *poset* si R satisface (a), (b) y (c). En tal caso, la relación R se dice que es una relación de orden y se suele denotar por $\leqslant$.

Definición 1.8.3. Sea $(X, \leqslant)$ un poset y $S \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Se define el supremo de S $\sup(S)$ como la menor de las cotas superiores de S, *i.e.* si m es cota superior de S (esto es, $m \geqslant s \quad \forall\ s \in S$) entonces $\sup(S) \leqslant m$. Análogamente se define $\inf(S)$ (el ínfimo de S).

Definición 1.8.4. Sea $(X, \leqslant)$ un poset. Se dice que el par $(X, \leqslant)$ es:

(a) Una *retícula* si $\forall\ a, b \in X$ existen $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \inf\{a, b\}$.

(b) Una *retícula completa* si $\forall\ S \subseteq X$ no vacío existen $\sup(S)$ e $\inf(S)$.

Definición 1.8.5. Sean $(X, \leqslant)$ y $(Y, \leqslant')$ posets.

(a) $f : (X, \leqslant) \longrightarrow (Y, \leqslant')$ es un morfismo de posets si $f : X \longrightarrow Y$ es una función tal que $\forall\ x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \leqslant x_2$ se tiene $f(x_1) \leqslant' f(x_2)$.

(b) Un morfismo de posets $f : (X, \leqslant) \longrightarrow (Y, \leqslant')$ es un isomorfismo si existe un morfismo de posets $g : (Y, \leqslant') \longrightarrow (X, \leqslant)$ tal que $1_X = g \circ f$ y $1_Y = f \circ g$.

Definición 1.8.6. Sean $(\mathscr{L}, \leqslant)$ y $(\mathscr{L}', \leqslant')$ retículas.

(a) $f : (\mathscr{L}, \leqslant) \longrightarrow (\mathscr{L}', \leqslant')$ es un *morfismo de retículas* si $f : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}'$ es una función tal que $\forall\ x, y \in \mathscr{L}$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad \text{y} \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

(b) Un morfismo $f : (\mathscr{L}, \leqslant) \longrightarrow (\mathscr{L}', \leqslant')$ es un *isomorfismo de retículas* si existe un morfismo de retículas $g : (\mathscr{L}', \leqslant') \longrightarrow (\mathscr{L}, \leqslant)$ tal que $f \circ g = 1_{\mathscr{L}'}$ y $g \circ f = 1_{\mathscr{L}}$.

Ejercicio 1.8.7. Sea $f : (\mathscr{L}, \leqslant) \longrightarrow (\mathscr{L}', \leqslant')$ un morfismo de retículas. Pruebe que

(a) f es un morfismo de posets.

(b) f es un isomorfismo de retículas si y sólo si f lo es de posets.

Definición 1.8.8. Sea ${}_RM$ un R-módulo. Decimos que un subconjunto $X \subseteq M$ no vacío es un *R-submódulo* de M si para cada $r_1, r_2 \in R$ y $x_1, x_2 \in X$ se tiene que $r_1x_1 + r_2x_2 \in X$.

Ejercicio 1.8.9. Sean ${}_RM$ y ${}_RX$ R-módulos tales que $X \subseteq M$. Pruebe que ${}_RX$ es un R-submódulo de M si y sólo si la inclusión $i_X : X \longrightarrow M$ definida por $i_X(x) := x\ \forall\ x \in X$, es un morfismo de R-módulos.

Definición 1.8.10. Sean ${}_RM$ y $N \subseteq M$ un R-submódulo de M. El R-módulo cociente M/N es el cociente de grupos M/N, cuyo producto escalar de define como $r(m + N) := rm + N \ \ \forall\ r \in R,\ \forall\ m \in M$.

Definición 1.8.11. Sea ${}_RM$ un R-módulo y $\{{}_RM_i\}_{i\in I}$ una familia (no vacía) de R-submódulos de ${}_RM$. La suma de dicha familia, se define como sigue:

$$\sum_{i\in I} M_i := \{x = \sum_{k=1}^{n} m_{i_k} \mid m_{i_k} \in M_{i_k}, n \geqslant 1\}.$$

Ejercicio 1.8.12. Sea R un anillo, $x \in R$ y ${}_RM$ un R-módulo. Pruebe lo siguiente.

(a) $Rx := \{rx \mid r \in R\}$ es un R-submódulo de ${}_RR$.

(b) Para toda familia $\{{}_RM_i\}_{i\in I}$ de submódulos de ${}_RM$, se tiene que $\sum_{i\in I} M_i$ es un R-submódulo de ${}_RM$.

Definición 1.8.13. Sea ${}_RM$ un R-módulo. Definimos el conjunto

$$\mathscr{L}({}_RM) := \{X \subseteq M \mid X \text{ es un } R\text{-submódulo de } {}_RM\},$$

y una relación $\leqslant$ en $\mathscr{L}({}_RM)$ como sigue:

$$\forall\ X, Y \in \mathscr{L}({}_RM)\ X \leqslant Y \text{si y sólo si } X \text{ es un } R\text{-submódulo de } Y.$$

Resulta ser que $(\mathscr{L}({}_RM), \leqslant)$ es una retícula completa con la relación de orden en los submódulos de M dada anteriormente. Esto se comprueba en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.8.14. Pruebe que $(\mathscr{L}({}_RM), \leqslant)$ es una retícula completa.

Ejercicio 1.8.15. Sea ${}_RM$ un R-módulo y $N \in \mathscr{L}({}_RM)$. Definimos la clase $\mathscr{L}({}_RM)/N := \{X \in \mathscr{L}({}_RM) \mid N \leqslant X\}$. Pruebe que el epimorfismo canónico $\pi_N : M \longrightarrow M/N$, $\pi_N(m) = m + N$, induce un isomorfismo de retículas $\tilde{\pi}_N : \mathscr{L}({}_RM)/N \longrightarrow \mathscr{L}(M/N)$ $\tilde{\pi}_N(X) = X/N$ cuyo inverso está dado por $\tilde{\pi}_N^{-1}(Z) = \{x \in M \mid x + N \in Z\}$.

Definición 1.8.16. Sea $(A, \leqslant)$ un poset y $m \in A$. Decimos que m es maximal (minimal) en $(A, \leqslant)$ si $\forall\ x \in A$ tal que $m \leqslant x$ $(m \geqslant x)$ se tiene que $x = m$.

Definición 1.8.17. Sea ${}_RM$ un R-módulo y $X \in \mathscr{L}({}_RM)$. Decimos que:

(a) X es un *submódulo maximal* en M, si X es un elemento maximal en $(\mathscr{L}({}_RM) \setminus \{M\}, \leqslant)$.

(b) X es un *submódulo minimal* de M, si X es un elemento minimal en $(\mathscr{L}({}_RM) \setminus \{0\}, \leqslant)$.

(c) M es *simple* si $M \neq 0$ y $\mathscr{L}({}_RM) = \{0, M\}$.

Ejercicio 1.8.18. Sea ${}_RM$ un R-módulo. Pruebe que son equivalentes:

(a) M es simple.

(b) 0 es un submódulo maximal de M.

(c) M es un submódulo minimal de M.

(d) $M \neq 0$ y $\forall\ m \in M \setminus \{0\}$ $M = Rm := \{rm \mid r \in R\}$.

(e) $M \neq 0$ y $\forall\ f : {}_RM \longrightarrow {}_RX$ se tiene que $f = 0$ ó $\mathrm{Ker}(f) = 0$.

(f) $M \neq 0$ y $\forall\ f : {}_RX \longrightarrow {}_RM$ se tiene que $f = 0$ ó $\mathrm{Im}(f) = M$.

Ejercicio 1.8.19. Sea ${}_RM$ un R-módulo y $N \in \mathscr{L}({}_RM)$. Pruebe que N es un submódulo maximal de M si y sólo si M/N es simple.

Definición 1.8.20. Sea ${}_RM$ un R-módulo. Decimos que M es *finitamente generado* (como R-módulo) si existen elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ tales que $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$.

Ejercicio 1.8.21. Sea ${}_RM$ un R-módulo. Pruebe que ${}_RM$ es finitamente generado si y sólo si existe un epimorfismo $f : R^n \longrightarrow M$ de R-módulos con $n \in \mathbb{N}$, donde $R^n := {}_RR \oplus \cdots \oplus {}_RR$ n-veces con $n \geqslant 1$, y $R^0 := 0$.

Terminamos la teoría de esta sección con el Teorema 1.8.24, el cual requiere para su demostración del Lema de Zorn. Antes definimos conceptos de teoría de conjuntos que son básicos para el buen entendimiento de la prueba de 1.8.24.

Definición 1.8.22. Sea $(A, \leqslant)$ un poset y $C \subseteq A$. Decimos que:

(a) C es una *cadena* en A si $\forall\ x, y \in C$ $x \leqslant y$ ó $y \leqslant x$, *i.e.* $(C, \leqslant|_C)$ es un conjunto linealmente ordenado.

(b) $(A, \leqslant)$ es un *poset inductivo* si para toda cadena C en A, C tiene cota superior en A.

Teorema 1.8.23. (Lema de Zorn) *Sea $(A, \leqslant)$ un poset inductivo. Entonces existe un elemento $m \in A$ que es maximal en $(A, \leqslant)$.*

El Lema de Zorn es equivalente al Axioma de Elección y una prueba puede ser consultada en [11]. Ahora demostramos el siguiente teorema.

Teorema 1.8.24. *Sea ${}_RM$ un R-módulo no nulo y $M' \in \mathscr{L}({}_RM) - \{M\}$. Si M es finitamente generado entonces existe un submódulo maximal $\mathfrak{m}$ de M tal que $M' \leqslant \mathfrak{m}$.*

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathscr{A} := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in M \text{ con } M = M' + \sum_{i=1}^{n} Rx_i \right\}.$$

Es claro que $\mathscr{A} \neq \emptyset$, pues M es finitamente generado y $M = M' + M$.

Sean $n_0 := \min(\mathscr{A})$ y $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0} \in M$ tales que $M = M' + \sum_{i=1}^{n_0} Rx_i$.

Consideremos el siguiente R-módulo L, donde $L := M'$ si $n_0 = 1$, y $L := M' + \sum_{i=2}^{n_0} Rx_i$ si $n_0 \geqslant 2$.

Observe que $L \in \mathscr{L}({}_RM) - \{M\}$. Por lo tanto, la siguiente clase

$$\mathscr{X} := \{X \in \mathscr{L}(M) - \{M\} \mid L \leqslant X\},$$

es no vacía. El orden $\leqslant$ de $\mathscr{L}({}_RM)$, induce uno en $\mathscr{X}$, *i.e.* $(\mathscr{X}, \leqslant)$ es un poset. No es difícil ver que

$$\forall\ Y \in \mathscr{L}(M) \text{ tal que } L \leqslant Y, \text{ se tiene que} : Y \in \mathscr{X} \Longleftrightarrow x_1 \notin Y. \tag{1.1}$$

Veamos que $(\mathscr{X}, \leqslant)$ es un poset inductivo (*i.e.* toda cadena en $\mathscr{X}$ tiene cota superior). En efecto, sea $C = \{X_i\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathscr{X}$ y $X_C := \bigcup_{i\in I} X_i$. Dado que C es una cadena, es claro que $X_C \in \mathscr{L}(M)$. Por otro lado, se tiene que $x_1 \notin X_C$ ya que si no fuera el caso, tendríamos que $x_1 \in X_i$ para algún $i \in I$; y por lo tanto de (1.1) se tiene que $X_i \notin \mathscr{X}$ lo cual es una contradicción. Luego $x_1 \notin X_C$ y por (1.1) concluimos que $X_C \in \mathscr{X}$; probándose que X_C es una cota superior de C.

Puesto que $(\mathscr{X}, \leqslant)$ es un poset inductivo, por el Lema de Zorn, se tiene que existe un elemento maximal N en $(\mathscr{X}, \leqslant)$. Dado que $M' \leqslant N \lneq M$, veamos que N es un submódulo maximal de M. De otro modo, si N no es maximal, entonces existe $N' \in \mathscr{L}(M)$ tal que $L \leqslant N \lneq N' \lneq M$. Luego $N' \notin \mathscr{X}$ pues N es maximal en $(\mathscr{X}, \leqslant)$; y por (1.1), $x_1 \in N'$. Por lo tanto $M = L + Rx_1 \leqslant N' \lneq M$, lo cual es una contradicción; probándose que $\mathfrak{m} := N$ satisface las condiciones requeridas. □

Ejercicio 1.8.25. Pruebe que todo anillo R no trivial ($1_R \neq 0$) admite R-módulos simples.

1.9. Categorías de módulos y bimódulos

El enfoque dado, desde la teoría de categorías, a los módulos y bimódulos nos ayuda a simplificar y entender de una manera más general la teoría de representaciones de álgebras; por ello, introducimos las categorías de R-módulos izquierdos y derechos. Para una revisión más profunda de la teoría de categorías, véase [12].

Definición 1.9.1. Sea R un anillo. Denotamos por:

(a) ${}_R\mathrm{Mod}$ (resp. Mod_R) a la categoría de R-módulos a izquierda (resp. a derecha). Los objetos de ${}_R\mathrm{Mod}$ (resp. Mod_R) son los R-módulos izquierdos ${}_RM$ (resp. derechos M_R). Por otro lado, los morfismos en ${}_R\mathrm{Mod}$ son $\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN) := \{f : M \longrightarrow N \mid f$ R-lineal a izquierda (resp. a derecha)$\}$.

(b) ${}_R\mathrm{mod}$ (resp. mod_R) a la subcategoría plena de ${}_R\mathrm{Mod}$ (resp. Mod_R) cuyos objetos son los R-módulos finitamente generados.

Ejercicio 1.9.2. Sea R un anillo. Usando el Ejercicio 1.5.4, defina de manera canónica funtores $F : {}_R\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{R^{op}}$ y $G : {}_{R^{op}}\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$. Pruebe que dichos funtores son isomorfismos de categorías.

Notación: Tomando en cuenta la acción opuesta y el Ejercicio 1.5.4, haremos las siguientes identificaciones: ${}_R\mathrm{Mod} = \mathrm{Mod}_{R^{op}}$ y $\mathrm{Mod}_R = {}_{R^{op}}\mathrm{Mod}$. Por otro lado, para los R-módulos tenemos que $\mathrm{Mod}(R) := {}_R\mathrm{Mod}$ y $\mathrm{mod}(R) := {}_R\mathrm{mod}$. Análogamente $\mathrm{Mod}(R^{op}) := \mathrm{Mod}_R$ y $\mathrm{mod}(R^{op}) := \mathrm{mod}_R$.

Ejercicio 1.9.3. Sea R una K-álgebra. Defina de manera natural una estructura de K-módulo (a izquierda y a derecha) en $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ $\forall$ $M, N \in \mathrm{Mod}(R)$.

Definición 1.9.4. Sean R y S anillos. Denotaremos por:

(a) ${}_R\mathrm{Mod}_S$ a la categoría cuyos objetos ${}_RM_S$ son los R-izquierda, S-derecha bimódulos. Los morfismo en ${}_R\mathrm{Mod}_S$ son

$$\mathrm{Hom}({}_RM_S, {}_RN_S) := \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN) \cap \mathrm{Hom}_S(M_S, N_S).$$

(b) ${}_{R-S}\mathrm{Mod}$ a la categoría cuyos objetos ${}_{R-S}M$ son los R-izquierda, S-izquierda bimódulos. Los morfismos en ${}_{R-S}\mathrm{Mod}$ son

$$\mathrm{Hom}({}_{R-S}M, {}_{R-S}N) := \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN) \cap \mathrm{Hom}_S({}_SM, {}_SN).$$

Ejercicio 1.9.5. Sean R y S anillos.

(a) Defina a la categoría de bimódulos Mod_{R-S}.

(b) Usando los Ejercicios 1.5.4 y 1.7.2, defina de manera canónica los funtores ${}_R\mathrm{Mod}_S \longrightarrow \mathrm{Mod}_{R^{op}-S}$, ${}_R\mathrm{Mod}_S \longrightarrow_{R-S^{op}} \mathrm{Mod}$, ${}_{R-S}\mathrm{Mod} \longrightarrow_R \mathrm{Mod}_{S^{op}}$ y pruebe que son isomorfismos de categorías.

Ejercicio 1.9.6. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Sean $M, N \in \mathrm{Mod}(S)$. Pruebe que, con la estructura de R-módulos a izquierda inducida por el cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ en M y N, se tiene la siguiente relación de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$\mathrm{Hom}_S(M, N) \leqslant \mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_{\varphi(R)}(M, N) \leqslant \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N).$$

Ejercicio 1.9.7. Sea R un anillo y $I \trianglelefteq R$. Considere el epimorfismo canónico $\pi : R \longrightarrow R/I \quad \pi(r) = r + I$.

(a) Usando el cambio de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$, construya de manera canónica un funtor $F_\pi : \mathrm{Mod}(R/I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$ que sea fiel y pleno (*i.e.* $\forall\ X, Y \in \mathrm{Mod}(R/I)$ se tiene que $F_\pi : \mathrm{Hom}_{R/I}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_\pi(X), F_\pi(Y))$ es biyectivo).

(b) Sea $\mathscr{C}_I$ la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(R)$ cuyos objetos son los R-módulos ${}_RM$ que son aniquilados por I, *i.e.* $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R)$: $M \in \mathscr{C}_I$ si y sólo si $I \subseteq \mathrm{ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0\ \forall\ m \in M\}$. Pruebe que: $F_\pi(\mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(R/I)) = \mathscr{C}_I$ y que $F_\pi : \mathrm{Mod}(R/I) \longrightarrow \mathscr{C}_I$ es un isomorfismo de categorías.

Ejercicio 1.9.8. Sean R, S y T anillos. Pruebe lo siguiente.

(a) Para cualesquiera $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$ y $N \in {}_R\mathrm{Mod}_T$, se tiene que el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_R({}_R\mathrm{Mod}_S, {}_RN_T) \in {}_S\mathrm{Mod}_T$, vía la estructura $(s \cdot f)(x) := f(xs)$ y $(f \cdot t)(x) := f(x)t\ \forall\ f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $\forall\ s \in S$, $\forall\ t \in T$ y $\forall\ x \in M$.

(b) Para cualesquiera $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R$ y $N \in {}_T\mathrm{Mod}_R$, se tiene que el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_R({}_S\mathrm{Mod}_R, {}_TN_R) \in {}_T\mathrm{Mod}_S$, vía la estructura $(t \cdot f)(x) := tf(x)$ y $(f \cdot s)(x) := f(sx)\ \forall\ f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $\forall\ s \in S$, $\forall\ t \in T$ y $\forall\ x \in M$.

Ejercicio 1.9.9. Sean R y S anillos. Consideremos el bimódulo $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$.

(a) Pruebe que $\rho : {}_RM_S \longrightarrow \mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RM_S)$ $\quad \rho(m)(r) := rm\ \forall\ r \in R$, $\forall\ m \in M$ es un isomorfismo en ${}_R\mathrm{Mod}_S$.

(b) Pruebe que $\lambda : {}_RM_S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S({}_SS_S, {}_RM_S)$ $\quad \lambda(m)(s) := ms\ \forall\ s \in S$, $\forall\ m \in M$ es un isomorfismo en ${}_R\mathrm{Mod}_S$.

Definición 1.9.10. Sea R un anillo. Un elemento $e \in R$ se dice que es un *idempotente* si $e^2 = e$.

Los siguientes ejercicios tratan sobre idempotentes, volveremos a trabajar con ellos de una manera más precisa a partir de la sección 2.6.

Ejercicio 1.9.11. Sea R un anillo y $e \in R$ un idempotente.

(a) Pruebe que la estructura de anillo en R induce una estructura de anillo en eRe. ¿Es eRe un subanillo de R ?

(b) Para $M \in \mathrm{Mod}(R)$, pruebe que la acción izquierda $eRe \times eM \longrightarrow eM$ $(ere, em) \mapsto erem$ induce una estructura de eRe-módulo a izquierda en eM.

(c) Pruebe que la correspondencia $\mathcal{M}_e : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(eRe)$, dada por $\left({}_RM \xrightarrow{f} {}_RN\right) \xmapsto{\mathcal{M}_e} \left(eM \xrightarrow{f|_{\mathcal{M}_e}} eN\right)$, está bien definida y es funtorial.

Ejercicio 1.9.12. Consideremos los anillos R y S. Sean $e \in R$ y $\varepsilon \in S$ idempotentes. Si $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, $R' := eRe$ y $S' := \varepsilon S \varepsilon$, pruebe que:

(a) $Re \in {}_R\mathrm{Mod}_{R'}$, $\varepsilon S \in {}_{S'}\mathrm{Mod}_S$, $eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$ y $M\varepsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$.

(b) Las siguientes aplicaciones son isomorfismos de bimódulos:
$\rho : {}_{R'}eM_S \longrightarrow \mathrm{Hom}_R({}_RRe_{R'}, {}_RM_S)$, $\lambda : {}_RM\varepsilon_{S'} \longrightarrow \mathrm{Hom}_S({}_{S'}\varepsilon S_S, {}_RM_S)$, dadas por $\rho(em)(re) := rem$ y $\lambda(m\varepsilon)(\varepsilon s) := m\varepsilon s$.

1.10. Anillos de endomorfismos y bimódulos

Definición 1.10.1. Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$.

(i) $\mathrm{End}({}_RM) := \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RM)$.

(ii) $(\mathrm{End}({}_RM),+)$ es un grupo abeliano, con la suma

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \quad \forall\ m \in M.$$

(iii) Tenemos 2 anillos de endomorfismos:

$$\mathrm{End}^i({}_RM) = (\mathrm{End}({}_RM), +, \circ) \qquad \text{“operadores a la izquierda”},$$
$$\mathrm{End}^d({}_RM) = (\mathrm{End}({}_RM), +, \square) \qquad \text{“operadores a la derecha”},$$

donde $\forall\ a \in A$ y $\forall\ f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ se define $(f \circ g)(a) := f(g(a))$ y $(a)(g \Box f) := ((a)g)f$.

Note que $\mathrm{End}^d({}_RM) = (\mathrm{End}^i({}_RM))^{op}$. Para simplificar, escribimos $\mathrm{End}_R(M)$ en lugar de $\mathrm{End}^i({}_RM)$.

Ejercicio 1.10.2. Sea R un anillo. Pruebe lo siguiente.

(*a*) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R)$ se tiene que $M \in \mathrm{Mod}(\mathrm{End}_R(M))$, vía la acción izquierda $f \cdot m = f(m)\ \forall\ f \in \mathrm{End}_R(M),\ \forall\ m \in M$. Más aún, también pruebe que $M \in {}_{R-\mathrm{End}_R(M)}\mathrm{Mod}$.

(*b*) $\forall\ N \in \mathrm{Mod}(R^{op})$, se tiene que $N \in \mathrm{Mod}(\mathrm{End}(N_R))$, vía la acción izquierda $g \cdot n := g(n)\ \forall\ g \in \mathrm{End}(N_R),\ \forall\ n \in N$, y vea que $N \in {}_{\mathrm{End}(N_R)}\mathrm{Mod}_R$.

Proposición 1.10.3. *Sean R y S anillos. Si M es un objeto en ${}_R\mathrm{Mod} \cap \mathrm{Mod}_S$, vía los morfismos de anillos $\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ y $\rho : S \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)^{op}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$.

(*b*) $\mathrm{Im}(\lambda) \leqslant \mathrm{End}(M_S)$.

(*c*) $\mathrm{Im}(\rho) \leqslant \mathrm{End}({}_RM)^{op}$.

Demostración. Sean $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Veamos que $\lambda(r) \in \mathrm{End}(M_S)$: $\lambda(r)(ms) = r(ms) = (rm)s = (\lambda(r)(m))s$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) $r(ms) = \lambda(r)(ms) = (\lambda(r)(m))s = (r \cdot m)s$, lo cual muestra que $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$.

(*a*) $\Rightarrow$ (*c*) Veamos que $\rho(s) \in \mathrm{End}_R(M)^{op} : (rm)\rho(s) = (rm)s = r(ms) = r((m)\rho(s))$.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*) $(rm)s = (rm)\rho(s) = r((m)\rho(s)) = r(ms)$. □

Observación. Note que $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R)$, se tiene $\mathrm{End}({}_RM) \leqslant \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, y $\forall\ N \in \mathrm{Mod}(S^{op}),\ \mathrm{End}(N_S) \leqslant \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(N)$.

Corolario 1.10.4. *Sea R un anillo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *La multiplicación a izquierda en R, induce un isomorfismo de anillos*

$$\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}(R_R), \quad \lambda(r)(x) := rx.$$

(*b*) *La multiplicación a derecha en R, induce un isomorfismo de anillos*

$$\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}({}_RR)^{op}, \quad (x)\rho(r) := xr.$$

Demostración. Tenemos las estructuras ${}_RR = (R, \lambda)$ y $R_R = (R, \rho)$. Por ser R asociativo, ${}_RR_R$ es un bimódulo; y por 1.10.3, tenemos que $\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}(R_R)$ y $\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}({}_RR)^{op}$ son morfismos de anillos; no es difícil ver que λ y ρ son biyectivas. □

Proposición 1.10.5. *Sea $e \in R$ un idempotente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *La multiplicación a izquierda en eRe, induce un isomorfismo de anillos*

$$\lambda : eRe \longrightarrow \mathrm{End}(eR_R), \quad \lambda(ere)(ea) := erea.$$

(b) *La multiplicación a derecha en eRe, induce un isomorfismo de anillos*

$$\rho : eRe \longrightarrow \mathrm{End}({}_R Re)^{op}, \quad (ae)\rho(ere) := aere.$$

Demostración. (a) Tenemos que $eR \in {}_{eRe}\mathrm{Mod}_R$ y ${}_{eRe}eR = (eR, \lambda)$, donde

$$\lambda : eRe \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(eR), \quad \lambda(ere)(ea) := erea.$$

Por 1.10.3, $\lambda : eRe \longrightarrow \mathrm{End}(eR_R) := \mathrm{Hom}_R(eR_R, eR_R)$ es un morfismo de anillos. Por otro lado, la misma función λ es un isomorfismo de bimódulos,

$$\lambda :{}_{eRe} eRe_{eRe} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R({}_{eRe}eR_R \, , \, {}_{eRe}eR_R).$$

(b) Se prueba como en (a), usando que $Re \in {}_R\mathrm{Mod}_{eRe}$. □

Capítulo 2

Anillos artinianos a izquierda

La categoría de módulos finitamente generados es igual a la categoría de módulos de longitud finita sobre anillos artinianos. Esta igualdad será de gran utilidad para resultados en el capítulo siguientes. Mostraremos que solo hay un número finito de módulos simples y módulos proyecticos sobre anillos artinianos, salvo isomorfismo. Se enuncia y demuestra el Teorema de Wedderburn-Artin sobre anillos semisimples. También mostramos varias caracterizaciones del radical de un anillo, y analizamos características de anillos locales que involucran idempotentes y módulos inescindibles. Al final del capítulo enunciamos algunos resultados de álgebra homológica, que nos serán de utilidad para los capítulos siguientes. A continuación, empezamos la discusión sobre módulos de longitud finita.

2.1. Módulos de longitud finita

Sea R un anillo y $\mathscr{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{Mod}(R)$. La relación de isomorfismo $\simeq$ en los objetos de $\mathscr{C}$, es una relación de equivalencia. Para $A \in \mathscr{C}$ denotamos por $[A]$ a la clase de equivalencia en $\mathscr{C}$, *i.e.* $[A] := \{B \in \mathscr{C} \mid A \simeq B\}$. En tal caso, se dice también que $[A]$ es una *iso-clase* (o clase de isomorfismo) en $\mathscr{C}$.

Definición 2.1.1. Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$.

(a) Una *filtración* (finita) F de M es una cadena finita $F := \{F_i\}_{i=0}^n$ en $\mathscr{L}({}_RM)$ tal que

$$M = F_0 \geqslant F_1 \geqslant \cdots \geqslant F_n = 0.$$

Los factores de composición de F son los cocientes

$$F_i/F_{i+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

(b) Decimos que una filtración $F = \{F_i\}_{i=0}^n$ de M es una *serie generalizada de composición* si F_i/F_{i+1} es cero o simple $\forall\ i$. En caso que F_i/F_{i+1} sea simple $\forall\ i$, diremos que F es una *serie de composición* de M.

(c) Diremos que M es de *longitud finita*, si M admite al menos una serie generalizada de composición. Denotaremos por $f.l.(R)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(R)$ cuyos objetos son los R-módulos de longitud finita.

Definición 2.1.2. Sea R un anillo no trivial, $M \in f.l.(R)$, S un R-módulo simple y F una serie generalizada de composición de M.

(a) La *multiplicidad* de S en M, con respecto a F, es

$$\mathfrak{m}_S^F(M) := \mathrm{Card}\{i \in \mathbb{N} \mid F_i/F_{i+1} \simeq S\}.$$

(b) La *longitud* de M con respecto a F es

$$\ell_F(M) := \sum_{S \in \mathscr{S}} \mathfrak{m}_S^F(M),$$

donde $\mathscr{S}$ es una familia completa de representantes de iso-clases de los R-módulos simples, *i.e.* en $\mathscr{S}$ están todos los R-simples salvo isomorfismos.

Definición 2.1.3. Las *funciones multiplicidad* (para un R-módulo simple S) y *longitud* son: $\mathfrak{m}_S,\ \ell : \mathrm{Obj}(f.l.(R)) \longrightarrow \mathbb{N}$ y se definen como sigue.

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_S(M) &:= \min\{\mathfrak{m}_S^F(M) \mid F \text{ es una serie} \\ &\qquad\qquad \text{generalizada de composición de } M\}, \\ \ell(M) &:= \min\{\ell_F(M) \mid F \text{ es una serie} \\ &\qquad\qquad \text{generalizada de composición de } M\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.4. Sea $M \in f.l.(R)$. Pruebe que

(a) $\ell(M) = 0$ si y sólo si $M = 0$.

(b) $\ell(M) = 1$ si y sólo si M es simple.

Definición 2.1.5. Una *sucesión*, finita o infinita, ξ (de morfismos) en $\mathrm{Mod}(R)$ es de la forma:

$$\xi := \cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

Decimos que ξ es *exacta* en X_i si $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$. En caso que ξ sea exacta en $X_i\ \forall\ i$, decimos que ξ es exacta.

Ejercicio 2.1.6. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$. Entonces toda filtración $F = \{F_i\}_{i=1}^n$ en B, induce una filtración $f^{-1}(F) := \{f^{-1}(F_i)\}_{i=1}^n$ en A y otra $g(F) := \{g(F_i)\}_{i=1}^n$ en C.

Ejercicio 2.1.7. Sea R un anillo. Pruebe lo siguiente.

(a) Una sucesión $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(R)$ es exacta si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) = 0 = \mathrm{Coker}(g) := Z/\mathrm{Im}(g)$ y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. A $\mathrm{Coker}(g)$ se le conoce como el *conúcleo* o *cokernel* de g.

(b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas en $\mathrm{Mod}(R)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"'] & 0 \\
 & X'' \arrow[d] & Y'' \arrow[d] & Z'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Pruebe que existe un monomorfismo $f'' : X'' \longrightarrow Y''$ y un epimorfismo $g'' : Y'' \longrightarrow Z''$ (que son únicos) en $\mathrm{Mod}(R)$, tales que el diagrama anterior se completa a un diagrama conmutativo con filas y columas exactas.

(c) La sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathrm{Mod}(R)$ si y sólo si φ es un isomorfismo.

Ejercicio 2.1.8. (*Lema del Cinco*) Sea R un anillo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas en $\mathrm{Mod}(R)$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'.
\end{tikzcd}$$

Demuestre lo siguiente.

(a) Si α es un epimorfismo y β y δ son monomorfismos, entonces γ es un monomorfismo.

(b) Si ε es un monomorfismo y β y δ son epimorfismos, entonces γ es un epimorfismo.

(c) Si α, β, δ y ε son isomorfismos, entonces γ también lo es.

Ejercicio 2.1.9. (*Lema de la Serpiente*) Sea R un anillo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas en $\mathrm{Mod}(R)$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C'. & \end{tikzcd}$$

Pruebe que dicho diagrama induce la sucesión exacta larga

$$\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\overline{u'}} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{\overline{v'}} \mathrm{Coker}(h)$$

en $\mathrm{Mod}(R)$. Más aún, si u es un monomorfismo, entonces $\overline{u}$ también es un monomorfismo; y si v' es un epimorfismo, entonces $\overline{v'}$ también es un epimorfismo.

Lema 2.1.10. *Sea R un anillo, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$, y F una filtración de B. Si F es una serie generalizada de composición y S es un R-módulo simple, entonces*

(a) *$f^{-1}(F)$ y $g(F)$ son series generalizadas de composición,*

(b) $\mathfrak{m}_S^F(B) = \mathfrak{m}_S^{f^{-1}(F)}(A) + \mathfrak{m}_S^{g(F)}(C)$,

(c) $\ell_F(B) = \ell_{f^{-1}(F)}(A) + \ell_{g(F)}(C)$.

Demostración. Sea $F = \{F_i\}_{i=0}^n$ una serie generalizada de composición de B. Sean $A_i := f^{-1}(F_i)$, $f_i := f|_{A_i} : A_i \longrightarrow F_i$; y para $C_i := g(F_i)$, definimos $g_i := g|_{F_i} : F_i \longrightarrow C_i$. Luego $f^{-1}(F) = \{A_i\}_{i=0}^n$ y $g(F) = \{C_i\}_{i=0}^n$.

Para cada i, la sucesión

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{g_i} C_i \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathrm{Mod}(R)$. En efecto, $\mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Ker}(f|_{A_i}) = A_i \cap \mathrm{Ker}(F)$, y $\mathrm{Im}(f_i) = f_i(A_i) = f(f^{-1}(F_i)) = F_i \cap \mathrm{Im}(f) = F_i \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(g|_{F_i}) = \mathrm{Ker}(g_i)$.

Por el Ejercicio 2.1.7, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en Mod(R)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & F_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & F_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d] & C_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i/A_{i+1} \arrow[r, "\overline{f_i}"] \arrow[d] & F_i/F_{i+1} \arrow[r, "\overline{g_i}"] \arrow[d] & C_i/C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

del cual tenemos lo siguiente

(i) $F_i/F_{i+1} = 0 \Longleftrightarrow A_i/A_{i+1} = 0 = C_i/C_{i+1}$.

(ii) $A_i/A_{i+1} = 0 \Longleftrightarrow \tilde{g}_i : F_i/F_{i+1} \xrightarrow{\sim} C_i/C_{i+1}$.

(iii) $C_i/C_{i+1} = 0 \Longleftrightarrow \tilde{f}_i : A_i/A_{i+1} \xrightarrow{\sim} F_i/F_{i+1}$.

(iv) Supongamos que $F_i/F_{i+1} \simeq S$ con S simple. Entonces

(1) $A_i/A_{i+1} = 0 \Longrightarrow C_i/C_{i+1} \simeq S$ (es consecuencia de (ii)).

(2) $A_i/A_{i+1} \neq 0 \Longrightarrow A_i/A_{i+1} \simeq S$ y $C_i/C_{i+1} = 0$. En efecto, ya que si $\overline{f_i} \neq 0$, entonces F_i/F_{i+1} simple implica que $\overline{f_i}$ es isomorfismo.

Luego (a) y (b) son consecuencia de (i) y (iv). Por otro lado (b) implica (c). $\square$

Ejercicio 2.1.11. Sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en Mod(R). Pruebe que $B \in f.l.(R)$ si y sólo si $A, C \in f.l.(R)$.

Teorema 2.1.12. *Sea $B \in f.l.(R)$. Si F y G son series generalizadas de composición de B, entonces*

(a) $\mathfrak{m}_S^F(B) = \mathfrak{m}_S^G(B) = \mathfrak{m}_S(B), \quad \forall\ S$ *simple.*

(b) $\ell_F(B) = \ell_G(B) = \ell(B)$.

Demostración. Basta probar (a), pues (b) es consecuencia de (a). Sean F y G series generalizadas de composición de B. Procedemos por inducción sobre $\ell(B)$.

Si $\ell(B) \leqslant 1$ entonces $B = 0$ ó B es simple; lo cual implica que $F = G$, probándose (a). Supongamos que $\ell(B) > 1$. Como $\ell(B) \neq 0$, existe $A \in \mathscr{L}({}_R B)$

con la propiedad $0 \neq A \subsetneq B$. También consideremos la sucesión exacta canónica $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} B \xrightarrow{\pi} B/A \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(R)$. Por el Ejercicio 2.1.11, tenemos que A y B/A son elementos de $f.l.(R)$. Ahora veamos que

$$\ell(A) + \ell(B/A) \leqslant \ell(B). \tag{2.1}$$

Sea H una serie generalizada de composición de B tal que $\ell(B) = \ell_H(B)$. Por 2.1.10 (c), tenemos $\ell_H(B) = \ell_{i_A^{-1}(H)}(A) + \ell_{\pi(H)}(B/A)$; lo cual implica (2.1). De esto se sigue que $\ell(A) < \ell(B)$ y $\ell(B/A) < \ell(B)$. Por hipótesis de inducción $\mathfrak{m}_S^{i_A^{-1}(F)}(A) = \mathfrak{m}_S^{i_A^{-1}(G)}(A)$ y $\mathfrak{m}_S^{\pi(F)}(B/A) = \mathfrak{m}_S^{\pi(G)}(B/A)$. De 2.1.10 tenemos

$$\mathfrak{m}_S^F(B) = \mathfrak{m}_S^{i_A^{-1}(F)}(A) + \mathfrak{m}_S^{\pi(F)}(B/A) = \mathfrak{m}_S^{i_A^{-1}(G)}(A) + \mathfrak{m}_S^{\pi(G)}(B/A) = \mathfrak{m}_S^G(B).$$

$\square$

Corolario 2.1.13. *Sea R un anillo.*

(*a*) *Si $F : B = F_0 \geq F_1 \geq \cdots \geq F_n = 0$ es una serie de composición de B, entonces $\ell(B) = n$.*

(*b*) *Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$, con $B \in f.l.(R)$, entonces*

(b_1) $\mathfrak{m}_S(B) = \mathfrak{m}_S(A) + \mathfrak{m}_S(C)$ $\forall$ *S simple,*

(b_2) $\ell(B) = \ell(A) + \ell(C)$.

Demostración. (a) De F obtenemos n factores de composición, y por 2.1.12 $\ell(B) = \ell_F(B) = n$.

(b$_1$) Sea F una serie generalizada de composición de B y S un simple, por 2.1.12 y 2.1.10 tenemos

$$\mathfrak{m}_S(B) = \mathfrak{m}_S^F(B) = \mathfrak{m}_S^{f^{-1}(F)}(A) + \mathfrak{m}_S^{g(F)}(C) = \mathfrak{m}_S(A) + \mathfrak{m}_S(C).$$

(b$_2$) se sigue de (b$_1$). $\square$

Ejercicio 2.1.14. Consideremos un anillo R.

(*a*) Sea $M \in f.l.(R)$ y $N \in \mathscr{L}({}_RM)$. Pruebe que

$$M = N \iff \ell(M) = \ell(N) \iff \ell(M/N) = 0.$$

(*b*) Sea $M \in f.l.(R)$ y $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Pruebe que

$$f \text{ es biyectiva } \iff f \text{ es inyectiva } \iff f \text{ es suprayectiva.}$$

Definición 2.1.15. Sea R un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(R)$ y $C = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}({}_RM)$. Se dice que C es una cadena ascendente (descendente) en $(\mathscr{L}({}_RM), \leqslant)$ si se tiene que $M_i \leqslant M_{i+1}$ ($M_{i+1} \geqslant M_i$) $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Definición 2.1.16. Sea R un anillo y $M \in \text{Mod}(R)$.

(a) Se dice que M es *noetheriano* si para toda cadena ascendente $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $(\mathscr{L}({}_RM), \leqslant)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_i = M_n \ \forall\ i \geqslant n$.

(b) Se dice que M es *artiniano* si para toda cadena descendente $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $(\mathscr{L}({}_RM), \leqslant)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_i = N_n \ \forall\ i \geqslant n$.

Ejercicio 2.1.17. Sea $M \in \text{Mod}(R)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) M es noetheriano.

(b) $\mathscr{L}({}_RM) \subseteq \text{mod}(R)$.

(c) $\forall\ \mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}({}_RM)$ no vacío, existe un elemento maximal en $(\mathscr{S}, \leqslant)$.

Ejercicio 2.1.18. Sea $M \in \text{Mod}(R)$. Pruebe que M es artiniano si y sólo si $\forall\ \mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}({}_RM)$ no vacío, existe un elemento minimal en $(\mathscr{S}, \leqslant)$.

Ejercicio 2.1.19. Sea $M \in \text{Mod}(R)$ y considere $H, K, L \in \mathscr{L}({}_RM)$. Pruebe que si $K \leqslant H$ entonces $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$.

Ejercicio 2.1.20. Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\text{Mod}(R)$. Pruebe que M es artiniano (noetheriano) si y sólo si K y N son artinianos (noetherianos).

Definición 2.1.21. Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría plena de $\text{Mod}(R)$. Decimos que $\mathscr{C}$ es una *subcategoría de Serre* en $\text{Mod}(R)$ si

(i) $0 \in \mathscr{C}$, y

(ii) para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ en $\text{Mod}(R)$, se tiene que: $E \in \mathscr{C} \iff M, N \in \mathscr{C}$.

Ejemplo. Los siguientes son ejemplos de subcategorías de Serre en $\text{Mod}(R)$.

1. $f.l.(R)$.

2. La subcategoría plena de todos los R-módulos artinianos (noetherianos).

Proposición 2.1.22. *Sea R un anillo y $M \in \text{Mod}(R)$. Entonces*

(a) *$M \in f.l.(R)$ si y sólo si M es artiniano y noetheriano.*

(b) *$f.l.(R)$ es la menor subcategoría de Serre en $\text{Mod}(R)$ que contiene a los R-módulos simples.*

Demostración. (a) Sea $M \in f.l.(R)$. Probaremos, por inducción sobre $\ell(M)$, que M es artiniano y noetheriano.

Si $\ell(M) \leqslant 1$ entonces $M = 0$ ó M es simple, y por consiguiente artiniano y noetheriano. Supongamos que $\ell(M) > 1$. Luego existe un simple $S \leqslant M$ tal que $\ell(M/S) = 1$. Consideremos la sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M/S \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Entonces $\ell(M/S) = \ell(M) - \ell(S) < \ell(M)$, y por hipótesis de inducción M/S es artiniano y noetheriano. Del Ejercicio 2.1.20 y de (2.2) concluimos que M es artiniano y noetheriano.

Recíprocamente, sea M artiniano y noetheriano. Podemos asumir que $M \neq 0$. Por el Ejercicio 2.1.17, existe $M_1 \in \mathscr{L}({}_RM)$ maximal en M. Si $M_1 = 0$, M es simple y $M \in f.l.(R)$. Si $M_1 \neq 0$, dado que M es noetheriano, por el Ejercicio 2.1.20, existe $M_2 \in \mathscr{L}(M_1)$ tal que M_2 es maximal en M_1. Repitiendo este procedimiento, y teniendo en cuenta que M es artiniano, se obtinene una cadena finita de M

$$F: \; M \gneqq M_1 \gneqq M_2 \gneqq \cdots \gneqq M_n = 0.$$

Dado que M_{i+1} es maximal en M_i $(M_0 = M)$, se tiene que F es una serie de composición de M, y por ende $M \in f.l.(R)$.
(b) Sabemos que $f.l.(R)$ es una subcategoría de Serre en $\mathrm{Mod}(R)$ (Ejercicio 2.1.11) y además el conjunto de los submódulos simples de $\mathrm{Mod}(R)$ está contenido en $f.l.(R)$. Sea $\mathscr{S}$ una subcategoría de Serre en $\mathrm{Mod}(R)$ que contiene a los simples. Veamos que $f.l.(R) \subseteq \mathscr{S}$. Sea $M \in f.l.(R)$. Por inducción sobre $\ell(M)$, demostraremos que $M \in \mathscr{S}$. En efecto si $\ell(M) \leqslant 1$, $M = 0$ o M es simple, y $M \in \mathscr{S}$. Si $\ell(M) > 1$, existe un simple $S \lneqq M$ tal que $\ell(M/S) > 1$. Considerando la sucesión exacta (2.2) tenemos $\ell(M/S) = \ell(M) - 1 < \ell(M)$; y por hipótesis de inducción $M/S \in \mathscr{S}$. Luego de (2.2), y dado que $\mathscr{S}$ es de Serre, concluimos que $M \in \mathscr{S}$. $\square$

Definición 2.1.23. Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Se dice que M es *semisimple* si existe una familia $\{S_i,\ i \in I\}$ de R-módulos simples tal que $M \simeq \bigoplus_{i \in I} S_i$. En el caso $I = \emptyset$, se tiene que $\bigoplus_{i \in I} S_i := 0$.

Ejercicio 2.1.24. Sean $M, N \in f.l.(R)$. Pruebe que $M \oplus N \in f.l(R)$ y que $\ell(M \oplus N) = \ell(M) + \ell(N)$.

Proposición 2.1.25. *Sea R un anillo y M un R-módulo semisimple. Entonces*

$$M \in f.l.(R) \Longleftrightarrow M \textit{ es noetheriano} \Longleftrightarrow M \textit{ es artiniano.}$$

Demostración. Por 2.1.22, tenemos que: si $M \in f.l.(R)$ entonces M es artiniano y noetheriano.

Sea $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, $I \neq \emptyset$ y M noetheriano. Veamos que $M \in f.l.(R)$, para lo cual, es suficiente probar (Ejercicio 2.1.24) que I es finito. Supongamos que I es infinito, entonces $\exists\ I' \subseteq I$ tal que $\mathrm{Card}(I') = \aleph_0$. Sea $I' = \{i_0, i_1, \ldots\}$; construimos la siguiente familia ascendente $M_0 \leqslant M_1 \leqslant \cdots \leqslant M_n \leqslant \cdots$ de submódulos de M, donde $M_n := S_{i_0} \oplus \cdots \oplus S_{i_n}$. Por construcción, la familia $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no se estabiliza; contradiciendo que M es noetheriano.

La prueba de que M artiniano implica que M es de longitud finita, es análoga a la anterior; construyendo por contradicción, una cadena descendente $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $N_n := \bigoplus_{i\in I\setminus\{i_0,\dots i_n\}} S_i$, que no se estabiliza. □

2.2. El grupo de Grothendieck

Recordamos que si Λ es un anillo y $\mathscr{C}$ es una clase de objetos en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, para cada $A \in \mathscr{C}$ denotamos por $[A]$ a la iso-clase de A en $\mathscr{C}$ módulo la relación de isomorfismo en $\mathscr{C}$, esto es, $[A] := \{B \in \mathscr{C} \mid A \simeq B\}$.

La siguiente definición es un caso particular del grupo de Gothendieck, y se usa en esta tesis para demostrar el Teorema 2.2.2.

Definición 2.2.1. Sea Λ un anillo. Denotamos por:

(a) $F(f.l.(\Lambda))$ al $\mathbb{Z}$-módulo libre con base las iso-clases $[A]$ con $A \in f.l.(\Lambda)$. Esto es
$$F(f.l.(\Lambda)) := \bigoplus_{[A]\,\in f.l.(\Lambda)/\simeq} \mathbb{Z}\cdot[A];$$

(b) $R(f.l.(\Lambda))$ al $\mathbb{Z}$-submódulo de $F(f.l.(\Lambda))$ generado por las expresiones $[A]+[C]-[B]$ cada vez que existe una sucesión exacta de R-módulos de longitud finita $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$.

El *grupo de Grothendieck* $K_0(\Lambda)$ asociado a Λ es el grupo abeliano
$$K_0(\Lambda) := F(f.l.(\Lambda)) \;/\; R(f.l.(\Lambda)).$$

En una definición más general del grupo de Gothendieck, se considera una categoría abeliana $\mathscr{C}$ en lugar de la subcategoría plena $f.l.(\Lambda)$.

Teorema 2.2.2. *Sea Λ un anillo y $\{[S_i]\ i \in I\}$ una familia completa de iso-clases de Λ-módulos simples. Consideremos el epimorfismo canónico*
$$\pi : F(f.l.(\Lambda)) \longrightarrow K_0(\Lambda), \quad \pi(X) := X + R(f.l.(\Lambda)).$$

Entonces

(a) $K_0(\Lambda)$ *es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $\{\pi([S_i])\ i \in I\}$.*

(b) $\forall\ A \in f.l.(\Lambda),\ \pi([A]) = \sum_{i\in I} \mathfrak{m}_{S_i}(A)\,\pi([S_i])$.

Demostración. (b) Sea $A \in f.l.(\Lambda)$. Usaremos inducción sobre la longitud $\ell(A)$. Podemos asumir $A \neq 0$. Si $\ell(A) = 1$, $[A] = [S_{i_0}]$ con $i_0 \in I$; y entonces $\pi([A]) = \pi([S_{i_0}]) = \sum_{i\in I} \mathfrak{m}_{S_i}(A)\,\pi([S_i])$.

Supongamos que $\ell(A) > 1$. Luego existe un simple $S_{i_0} \lneq A$. Consideremos la sucesión exacta
$$0 \longrightarrow S_{i_0} \longrightarrow A \longrightarrow A/S_{i_0} \longrightarrow 0. \tag{2.3}$$

Entonces $\ell(A/S_{i_0}) = \ell(A) - 1 < \ell(A)$, y por hipótesis de inducción, tenemos que $\pi([A/S_{i_0}]) = \sum_{i\in I} \mathfrak{m}_{S_i}(A/S_{i_0})\pi([S_i])$. Por definición del grupo de Grothendieck y de (2.3), tenemos que $\pi([A]) = \pi([S_{i_0}]) + \pi([A/S_{i_0}]) = \sum_{i\in I}(\mathfrak{m}_{S_i}(S_{i_0}) + \mathfrak{m}_{S_i}(A/S_{i_0}))\,\pi([S_i]) = \sum_{i\in I} \mathfrak{m}_{S_i}(A)\,\pi([S_i])$.
(a) Consideremos los siguientes morfismos en $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$:

$$F(f.l.(\Lambda)) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathscr{S} := \bigoplus\nolimits_{i\in I} \mathbb{Z}\cdot[S_i] \xrightarrow{\ \psi\ } F(f.l.(\Lambda)),$$
$$\varphi([A]) := \sum_{i\in I} \mathfrak{m}_{S_i}(A)\,[S_i], \qquad \psi = 1_{F(f.l.(\Lambda))}|_{\mathscr{S}}.$$

Veamos que φ y ψ cumplen lo siguiente.

(1) $\varphi\circ\psi = 1_{\mathscr{S}}$:

En efecto, $\varphi\circ\psi([S_i]) = \varphi([S_i]) = [S_i]$.

(2) $\psi\circ\varphi = \varphi$:

En efecto, $\psi\circ\varphi([A]) = \psi(\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_{S_i}(A)\,[S_i]) = \sum_{i\in I}\mathfrak{m}_{S_i}(A)\pi([S_i]) = \varphi([A])$.

(3) $\pi|_{\mathscr{S}}\circ\varphi = \pi$:

En efecto, $\pi|_{\mathscr{S}}\circ\varphi([A]) = \pi(\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_{S_i}(A)[S_i]) = \sum_{i\in I}\mathfrak{m}_{S_i}(A)\pi([S_i]) = \pi([A])$, donde la última igualdad se da por (b).

(4) $R(f.l.(\Lambda)) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$:

En efecto, sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $f.l.(\Lambda)$; entonces $\varphi([A]+[C]-[B]) = \varphi(A)+\varphi(C)-\varphi(B) = \sum_{i\in I}(\mathfrak{m}_{S_i}(A) + \mathfrak{m}_{S_i}(C) - \mathfrak{m}_{S_i}(B))[S_i] = 0$.

Ahora bien, por (4), existe $\overline{\varphi} : K_0(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{S}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd}
F(f.l.(\Lambda)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathscr{S} \arrow[l, bend right=60, "\psi"'] \\
K_0(\Lambda). \arrow[ur, "\overline{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\overline{\varphi}$ es un isomorfismo con inversa $\pi\psi$. En efecto, de las igualdades $\overline{\varphi}(\pi\psi) = (\overline{\varphi}\pi)\psi = \varphi\psi$ y de (1) se tiene que $\overline{\varphi}(\pi\psi) = 1|_{\mathscr{S}}$. También $(\pi\psi)\,\overline{\varphi}(\pi([A])) = \pi\psi(\overline{\varphi}\pi([A])) = \pi\psi\varphi[A] = \pi\psi([A]) = \pi[A]$, donde las últimas dos igualdades se tienen de (2) y (3) respectivamente, lo cual muestra que $(\pi\psi)\overline{\varphi} = 1_{K_0(\Lambda)}$; y por ende $K_0(\Lambda)$ es libre.

Dado que $\{[S_i]\ i\in I\}$ es una base de $\mathscr{S}$ y $\overline{\varphi}^{-1}([S_i]) = \pi\psi([S_i]) = \pi([S_i])$, concluimos que $\{[S_i]\ i\in I\}$ es una base de $K_0(\Lambda)$. $\square$

2.3. Morfismos minimales

Definición 2.3.1. Sea Λ un anillo. Para cada $C \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ se define la categoría $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$, cuyos objetos son los morfismos $f : B \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Los morfismos $\mathrm{Hom}(f, f')$ entre $f : B \longrightarrow C$ y $f' : B' \longrightarrow C$ se definen como $\mathrm{Hom}(f, f') := \{g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, B') \mid f'g = f\}$.

La composición de morfismos en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$ es la misma que en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Dados los morfismos $f \xrightarrow{g} f' \xrightarrow{g'} f''$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$, se tienen los siguientes diagramas conmutativos en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \\ B'' \arrow[ur, "f''"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[dd, "gg'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ & C \\ B''. \arrow[ur, "f''"'] & \end{tikzcd}$$

La identidad del objeto $f : B \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$ se define como $1_f := 1_B$. Esta definición es clara ya que el siguiente diagrama en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dd, "1_B"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & C \\ B. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 2.3.2. Sea $f : B \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Se dice que f es *minimal a derecha* si $\forall\ g \in \mathrm{Hom}(f, f),\ g$ es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$.

Ejercicio 2.3.3. Sea $f : B \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $g : B \longrightarrow B$ tal que $f = fg$, *i.e.* tal que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \\ B. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Pruebe que $g : f \longrightarrow f$ es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$ si y sólo si $g : B \longrightarrow B$ es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.

Ejercicio 2.3.4. Se define la siguiente relación $\sim$ en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(\Lambda)/C)$: $f \sim f'$ si y sólo si $\mathrm{Hom}(f, f') \neq \emptyset$ y $\mathrm{Hom}(f', f) \neq \emptyset$. Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(\Lambda)/C)$. La clase de equivalencia de f, se denota por $[f]$.

Ejercicio 2.3.5. Sea $f : B \longrightarrow C$ minimal a derecha. Pruebe que $\forall\ \psi : B \xrightarrow{\sim} B$ isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, se tiene que $f\psi : B \longrightarrow C$ es minimal a derecha.

Teorema 2.3.6. *Sea* $C \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ *y* $f \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(\Lambda)/C)$. *Si existe* $g : B \longrightarrow C$ *en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ *con* $B \in f.l.(\Lambda)$ *y* $g \in [f]$, *entonces existe* $f' : B' \longrightarrow C$ *minimal a derecha (único hasta isomorfismo en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$*) tal que* $f' \in [f]$.

Demostración. Sea $f' : B' \longrightarrow C$ en $[f]$ con $\ell(B')$ mínima. Veamos que f' es minimal a derecha. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
& B' \arrow[dl, "h'"'] \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "f'"] & \\
\mathrm{Im}(h) \arrow[dr, "h''=i"'] & & C \\
& B' \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $B' \xrightarrow{h'} \mathrm{Im}(h) \xrightarrow{h''} B'$ es la factorización de $h : B' \longrightarrow B'$ a través de su imagen. Veamos que $f'h'' : \mathrm{Im}(h) \longrightarrow C$ está en $[f]$. En efecto, $h' \in \mathrm{Hom}(f', f'h'')$ y $h'' \in \mathrm{Hom}(f'h'', f')$. Luego $f'h'' \sim f' \sim f$; lo cual implica que $f'h'' \sim f$.

Ahora bien, como $\mathrm{Im}(h) \leqslant B'$ y $B' \in f.l.(\Lambda)$, de la minimalidad de $\ell(B')$, se tiene que $\ell(\mathrm{Im}(h)) = \ell(B')$. Por lo que $\mathrm{Im}(h) = B'$, y $h : B' \longrightarrow B'$ es un epimorfismo. Finalmente como $B' \in f.l.(\Lambda)$, por el Ejercicio 2.1.14, tenemos que h es un isomorfismo; probándose que f' es minimal a derecha

Veamos ahora que f' es único hasta isomorfismos en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$. En efecto, sea $f'' : B'' \longrightarrow C$ minimal a derecha con $f'' \in [f]$. Como $f'' \sim f$ y $f' \sim f$, existen morfismos α y β que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] & \\
& C \\
B''. \arrow[ur, "f''"'] \arrow[uu, bend left, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

De donde tenemos que $f'' = f''\alpha\beta$ y $f' = f'\beta\alpha$. Como f'' y f' son minimales, $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ son isomorfismos. Luego $f' \simeq f''$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$. $\square$

Definición 2.3.7. Sea $f : B \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $B \in f.l.(\Lambda)$. Al morfismo $f' : B' \longrightarrow C$ de 2.3.6, se le conoce como la versión minimal a derecha de f.

Definición 2.3.8. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ morfismos en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Si $gf = 1_A$ decimos que g es un *split-epi* y f es un *split-mono*.

Ejercicio 2.3.9. Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ tales que $gf = 1_A$. Pruebe que g es un epimorfismo, f es un monomorfismo y $B = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 2.3.10. Sea $\eta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) La sucesión η se *escinde* (*i.e.* f es un split-mono y g es un split-epi).

(b) f es un split-mono.

(c) g es un split-epi.

(d) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ es un sumando directo de B.

Ejercicio 2.3.11. Sea $\eta : 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{g_2} M_2 \longrightarrow 0$ una sucesión en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) η es una sucesión exacta que se escinde.

(b) Existe una sucesión $0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M \xrightarrow{g_1} M_1 \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ tal que $g_1 f_1 = 1_{M_1},\ g_2 f_2 = 1_{M_2},\ g_2 f_1 = 0 = g_2 f_1$ y $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1_M$.

(c) Existe un isomorfismo $h : M_1 \times M_2 \xrightarrow{\sim} M$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & M_1 \times M_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h", "\wr"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \arrow[r, "g_2"] & M_2 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde $i_1(m_1) := (m_1, 0)$ y $\pi_2(m_1, m_2) := m_2$.

Teorema 2.3.12. *Sea $g : X \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $X \in f.l.(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe una descomposición $X = X' \oplus X''$ tal que $g = (0, g'') : X' \oplus X'' \longrightarrow C$ y $g'' : X'' \longrightarrow C$ es la versión minimal a derecha de g.*

(b) $\mathrm{Ker}(g) \simeq X' \oplus \mathrm{Ker}(g'')$.

(c) *Si g es un epimorfismo entonces g'' también lo es.*

Demostración. (a) y (b). Sea $f : B \longrightarrow C$ la versión minimal a derecha de g, que existe por 2.3.6, en particular $f \sim g$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \\ B. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De donde $f(ts) = f$, y como f es minimal a derecha, $ts : B \longrightarrow B$ es un isomorfismo, *i.e.* existe $\psi : B \xrightarrow{\sim} B$ tal que $ts\psi = 1_B$. En particular $t : X \longrightarrow B$ es split-epi, pues $t(s\psi) = 1_B$. Luego $X = X' \oplus X''$ donde $X' := \ker(t) \xrightarrow{i'} X$ con $i' := i_{X'}$ la inclusión, y $X'' := B \xrightarrow{i''} X$ con $i'' := s\psi$. Por lo tanto $g = (g', g'') : X' \oplus X'' \longrightarrow C$, donde $g' := gi'$ y $g'' := gi''$. Entonces $g' = gi' = (ft)i_{X'} = f(ti_{X'}) = 0$ pues $ti_{X'} = 0$, y también $g'' = gi' = (ft)s\psi = f(ts\psi) = f1_B = f$.

Finalmente $x = \binom{x'}{x''} \in \ker(g', g'') \Leftrightarrow g'(x') + g''(x'') = 0 \Leftrightarrow x'' \in \ker(g'')$; por lo tanto $\ker(g) \simeq \ker(g', g'') = X' \oplus \ker(g'')$.

(c) Sea g un epimorfismo. Entonces $(g', g'') : X' \oplus X'' \longrightarrow C$ es un epimorfismo, y $C = (g', g'')(X' \oplus X'') = g'(X') + g''(X'') = 0 + g''(X'') = \mathrm{Im}(g'')$. $\square$

Corolario 2.3.13. *Sea $f : B \longrightarrow C$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $B \in f.l.(\Lambda)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) f es minimal a derecha.

(b) Si $i' : B' \longrightarrow B$, con i' un monomorfismo, es un sumando directo de B tal que $f|_{B'} := fi' = 0$, entonces $B' = 0$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Sea $B = B' \oplus B''$ con $i' : B' \longrightarrow B$, $i'' : B'' \longrightarrow B$ las inclusiones naturales, $\pi' : B \longrightarrow B'$, $\pi'' : B \longrightarrow B''$ las proyecciones.

Sea $B = B' \oplus B'' \xrightarrow{f=(f',f'')} C$, con $f' := fi'$ y $f'' := fi''$. Dado que $1_B = i'\pi' + i''\pi''$, tenemos que $f = f'\pi' + f''\pi''$; pero $f' = 0$ implica $f = f''\pi''$. Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\pi''"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "i''"'] & C \\
B \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

de donde $f(i''\pi'') = f$, y por la minimalidad de f, $i''\pi''$ es un isomorfismo. Por lo tanto π'' es monomorfismo, lo cual implica que $B' = ker(\pi'') = 0$.

(b)$\Rightarrow$(a) Sabemos por 2.3.12 que existe una descomposición de $B = B' \oplus B''$ tal que $f = (f', f'') : B' \oplus B'' \longrightarrow C$, $f|_{B'} := f' = 0$ y $f'' : B'' \longrightarrow C$ es la versión minimal a derecha de f. Por hipótesis se tiene que $B' = 0$, lo cual implica que $\pi'' : B \longrightarrow B''$ es un isomorfismo, y como $f = f'\pi'' + f''\pi'' = f''\pi''$, se concluye que f es minimal a derecha. $\square$

Los siguientes resultados y definiciones son duales a los referidos en la categoría $\mathrm{Mod}(\Lambda)/C$ que se estudiaron al inicio de esta sección.

Definición 2.3.14. Para cada $A \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, se define la categoría $\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A$ cuyos objetos son los morfismos $f : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Los morfismos entre $f : A \longrightarrow B$ y $f' : A \longrightarrow B'$ son $\mathrm{Hom}(f, f') := \{g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, B') \mid gf = f'\}$. La composición de morfismos en $\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A$ es la misma que en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.

Definición 2.3.15. Decimos que $f : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ es *minimal a izquierda* si $\forall\ g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(f, f')$, g es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A$.

Ejercicio 2.3.16. Sea $f : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $g : B \longrightarrow B$ tal que $gf = f$. Pruebe que $g : f \longrightarrow f$ es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A$ si y sólo si $g : B \longrightarrow B$ es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.

Ejercicio 2.3.17. Se define la siguiente relación $\sim$ en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A)$: $f \sim f'$ si y sólo si $\mathrm{Hom}(f, f') \neq \emptyset$ y $\mathrm{Hom}(f', f) \neq \emptyset$. Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A)$. La clase de equivalencia de f, se denota por $[f]$.

Teorema 2.3.18. *Sea* $A \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ *y* $f \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A)$. *Si* $\exists\ g : A \longrightarrow B$ *con* $g \in [f]$ *y* $B \in f.l.(\Lambda)$, *entonces existe* $f' : A \longrightarrow B'$ *minimal a izquierda, único hasta isomorfismos en* $\mathrm{Mod}(\Lambda) \setminus A$, *tal que* $f' \in [f]$.

Definición 2.3.19. Sea $f : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $B \in f.l(\Lambda)$. Al morfismo $f' : A \longrightarrow B'$ de 2.3.18 se le conoce como la versión minimal a izquierda de f.

Ejercicio 2.3.20. Demuestre el Teorema 2.3.18.

Teorema 2.3.21. *Sea* $g : A \longrightarrow X$ *en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ *con* $X \in f.l.(\Lambda)$. *Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

(*a*) *Existe una descomposición* $X = X' \oplus X''$ *tal que* $g = \binom{g'}{0} : A \longrightarrow X' \oplus X''$ *y* $g' : A \longrightarrow X'$ *es la versión minimal a izquierda de* g.

(*b*) $\mathrm{Coker}(g) \simeq \mathrm{Coker}(g') \oplus X''$.

(*c*) *Si* g *es un monomorfismo, entonces* g' *es un monomorfismo.*

Demostración. (a) y (b) Sea $h : A \longrightarrow X'$ la versión minimal a izquierda de g (existe por 2.3.18). Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "\exists\, s"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "\exists\, t"] \\ & X'. \end{tikzcd}$$

Como $(ts)h = h$, por ser h la versión minimal a izquierda, $ts : X \longrightarrow X'$ es un isomorfismo; entonces existe un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ $\alpha : X' \longrightarrow X$ tal que $(\alpha t)s = 1_{X'}$, *i.e.* s es un split-mono. Escribiendo $X'' := \mathrm{Coker}(s)$ tenemos la siguiente sucesión split-exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "s"] & X \arrow[r, "q=\pi''"] \arrow[l, bend right, "\alpha t=\pi'"'] & X'' \arrow[r] \arrow[l, bend right, "i'"'] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Definimos $g : A \longrightarrow X' \oplus X''$ como sigue

$$\begin{tikzcd} & & X'' & \\ g = \binom{g'}{g''} : & A \arrow[ur, "g''"] \arrow[rr] \arrow[dr, "g'"'] & & X' \oplus X'' \arrow[ul, "\pi''"'] \arrow[dl, "\pi'"] \\ & & X' & \end{tikzcd}$$

donde $g' = \pi' g$ y $g'' = \pi'' g$. Ahora, $g' = \pi' g = \pi' sh = \alpha t s h = 1_{X'} h = h$, y $g'' = \pi'' g = qsh = (0)h = 0$. Finalmente $\mathrm{Coker}(g) \simeq \mathrm{Coker}\binom{g'}{0} = \dfrac{X' \oplus X''}{\mathrm{Im}\binom{g'}{0}}$
$= \dfrac{X' \oplus X''}{\mathrm{Im}(g') \oplus 0} \simeq \dfrac{X'}{\mathrm{Im}(g')} \oplus \dfrac{X''}{0} \simeq \mathrm{Coker}(g') \oplus X''$.

(c) Sea g un monomorfismo. Entonces $g = 1_X g = i'\pi' g + i''\pi'' g = i'g' + i''g'' = i'g' + 0$, *i.e.* $g = i'g'$; dado que g es un monomorfismo, g' también lo es. $\square$

Teorema 2.3.22. *Sean $g : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $B \in f.l.(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) *g es minimal a izquierda.*

(*b*) *Para todo split-epi $\alpha : B \longrightarrow C$, si $\alpha g = 0$ entonces $C = 0$.*

Demostración. (a)⇒(b) Sea $\alpha : B \longrightarrow C$ tal que existe $\beta : C \longrightarrow B$ con $\alpha\beta = 1_C$. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B' := \ker(\alpha) \xrightarrow{i' := i_{B'}} B \xrightarrow{\pi'' := \alpha} B'' := C \longrightarrow 0\,.$$

Sea $i'' := \beta$, luego $1_B = i'\pi' + i''\pi''$. Supongamos $\alpha g = 0$, *i.e.* $g'' = \pi'' g = 0$, por lo que $g = 1_B g = i'\pi' g + i''\pi'' g = i'\pi' g$, esto es $g = i'\pi' g$; como g es minimal a izquierda, $i'\pi'$ es un isomorfismo, lo cual implica que π' es un monomorfismo. Por lo tanto $C = \ker(\pi') = 0$.

(b)⇒(a) Por 2.3.21 existe $B = B' \oplus B''$ tal que $g = \binom{g'}{0} : A \longrightarrow B' \oplus B''$ y g' es la versión minimal a izquierda de g. Como $g'' = \pi'' g = 0$, donde $\pi'' : B \longrightarrow B''$ es la proyección canónica, se tiene por hipótesis que $B'' = 0$; lo cual muestra que la inclusión canónica $i' : B' \longrightarrow B$ es un isomorfismo. Por otro lado, de la sucesión exacta $0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i'} B \xrightarrow{\pi'} B'' \longrightarrow 0$, se obtiene que $g = 1_B g = i'g' + i''g'' = i'g'$, es decir $g = i'g'$; probándose que g es minimal a izquierda, ya que i' es un isomorfismo y g' es minimal a izquierda. □

Teorema 2.3.23. *Sean $\varphi_i : A_i \longrightarrow B_i$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $i = 1, 2$. Si φ_1, φ_2 son minimales a izquierda, entonces $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$ es minimal a izquierda.*

Demostración. Sea $p_i : B_i \longrightarrow B_1 \oplus B_2$ la inclusión canónica y $\pi_i : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_i$ la proyección canónica en $B_1 \oplus B_2$, para $i = 1, 2$. Consideremos $f : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$ y $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$ dadas por $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ respectivamente, donde $f_{ij} := \pi_i f p_j : B_j \longrightarrow B_i$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \oplus B_2 \arrow[d, "f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}"] \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[ur, "\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}"'] & \\
 & B_1 \oplus B_2.
\end{tikzcd}$$

Por lo cual, $\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}\varphi_1 & f_{12}\varphi_2 \\ f_{21}\varphi_1 & f_{22}\varphi_2 \end{pmatrix}$, de donde

$\varphi_1 = f_{11}\,\varphi_1$, $0 = f_{12}\,\varphi_2$ y $\varphi_2 = f_{22}\,\varphi_2$. Por ser φ_1 minimal a izquierda, se tiene que $f_{11} : B_1 \longrightarrow B_1$ es un isomorfismo. Veamos que f es un isomorfismo, para ello, sea $\psi := \begin{pmatrix} 1_{B_1} & 0 \\ -f_{21}\,f_{11}^{-1} & 1_{B_2} \end{pmatrix} : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$; de modo que $\psi f = \begin{pmatrix} 1_{B_1} & 0 \\ -f_{21}\,f_{11}^{-1} & 1_{B_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha := -f_{21}f_{11}^{-1}f_{12} + f_{22}$. Así pues, $\alpha\,\varphi_2 := -f_{21}\,f_{11}^{-1}\,f_{12}\,\varphi_2 + f_{22}\,\varphi_2 = \varphi_2$, y por ser φ_2 minimal a izquierda, α es un isomorfismo. Finalmente, como f_{11} y α son isomorfismos, se tiene que ψf también lo es, por lo que f es un isomorfismo. $\square$

Ejercicio 2.3.24. Sean $\varphi_i : A_i \longrightarrow B_i$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ para $i = 1, 2$. Pruebe que si φ_1 y φ_2 son minimales a derecha, entonces $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_1$ es minimal a derecha.

2.4. Categorías preaditivas y funtores preaditivos

Definición 2.4.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{A}$ es *preaditiva* si

(*a*) $\forall\ X, Y \in \mathscr{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ es un grupo abeliano; y

(*b*) la composición de morfismos en $\mathscr{A}$ es $\mathbb{Z}$-bilineal, esto es $g(f+h) = gf + gh$ y $(f+h)t = ft + ht$ donde tenga sentido.

Ejemplos

(1) $\mathscr{A} := \mathrm{Mod}(R)$, con R un anillo.

(2) $\mathscr{A} := \mathrm{mod}(R)$, con R un anillo.

Definición 2.4.2. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías preaditivas. Un funtor covariante (contravariante) $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ se dice que es *aditivo*, si $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y))$ ($F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(Y), F(X))$) es un morfismo de grupos abelianos $\forall\ X, Y \in \mathscr{A}$.

Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Si F es covariante y $X \in \mathscr{A}$, entonces $F : \mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(F(X))$ es un morfismo de anillos. Análogamente, si F es contravariante y $X \in \mathscr{A}$, entonces $F : \mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(F(X))^{op}$ es un morfismo de anillos.

Ejemplos Sea R un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(R)$.

(1) $F := \mathrm{Hom}_R({}_R M, -) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ es un funtor aditivo covariante dado por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & Y \arrow[d, mapsto, "F"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

con $F(X) = \mathrm{Hom}_R(M, X)$, $F(Y) = \mathrm{Hom}_R(M, Y)$ y $F(f) = \mathrm{Hom}_R({}_RM, f)$ está dado por $\mathrm{Hom}_R({}_RM, f)(\alpha) := f\alpha$.

(2) $G = \mathrm{Hom}_R(-, {}_RM) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ es un funtor aditivo contravariante dado por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "G"'] & \arrow[d, mapsto] & Y \arrow[d, mapsto, "G"] \\ G(X) & & G(Y) \arrow[ll, "G(f)"] \end{tikzcd}$$

con $G(Y) = \mathrm{Hom}_R(Y, M)$, $G(X) = \mathrm{Hom}_R(X, M)$ y $G(f) = \mathrm{Hom}_R(f, {}_RM)$ está dado por $\mathrm{Hom}_R(f, {}_RM)(\beta) := \beta f$.

2.5. Anillos semisimples

Lema 2.5.1. *Sea R un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(R)$ y $n \geqslant 1$. Consideremos los anillos $\Lambda = \mathrm{End}_R(M)$ y $\Lambda' = \mathrm{End}({}_RM^n)$. Entonces $\forall\ \omega \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, existe un elemento $\omega' \in \mathrm{End}_{\Lambda'}(M^n)$ tal que $\omega'(m_1, \ldots, m_n) = (\omega(m_1), \ldots, \omega(m_n))$ donde $m_i \in {}_\Lambda M$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demostración. Sea $\omega \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$. Definimos un morfismo $\omega' : M^n \longrightarrow M^n$ como $\omega'(m_1, \ldots, m_n) = (\omega(m_1), \ldots, \omega(m_n))$. Verificamos que es un morfismo de grupos: sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M^n$, entonces $\omega'(x + y) = (\omega(x_1+y_1), \ldots, \omega(x_n+y_n)) = (\omega(x_1)+\omega(y_1), \ldots, \omega(x_n)+\omega(y_n)) = \omega'(x)+\omega'(y)$, por lo tanto $\omega' \in \mathrm{End}_\mathbb{Z}(M^n)$.

Veamos ahora que $\omega'(\lambda' x) = \lambda'\omega'(x)\ \forall\ \lambda' \in \Lambda',\ \forall\ x \in M^n$. Dado que $\Lambda' = \mathrm{End}({}_RM^n)$ y $\Lambda = \mathrm{End}_R(M)$, podemos asumir que $\Lambda' = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Lambda)$.

Sea $\lambda' \in \Lambda' = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Lambda)$, $\lambda' = (\lambda_{ij})_{n\times n}$, $\lambda_{ij} \in \mathrm{End}({}_RM)$, para $x \in M^n$

$$\begin{aligned} \omega'(\lambda' x) &= \omega'(\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}x_j) = (\omega(\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}x_j), \ldots \omega(\sum_{j=1}^n \lambda_{nj}x_j)) \\ &= (\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}\omega(x_j), \ldots, \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}\omega(x_j)) = \lambda'\omega'(x). \end{aligned}$$

Lo cual muestra que $\omega' \in \mathrm{End}_{\Lambda'}(M^n)$. $\square$

Proposición 2.5.2. *Sea R un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(R)$ y $n \geqslant 1$. Consideremos los anillos $\Lambda = \mathrm{End}_R(M)$, $\Lambda' = \mathrm{End}({}_RM^n)$ y los morfismos de anillos inducidos por la multiplicación a izquierda (cf. 1.10.3) $\mu : R \longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(M)$ dada por $\mu(r)(m) = r \cdot m$ y $\mu' : R \longrightarrow \mathrm{End}_{\Lambda'}(M^n)$ con $\mu'(r)(m_1, \ldots, m_n) = (rm_1, \ldots, rm_n)$. Si μ' es inyectiva (suprayectiva), entonces μ también lo es.*

Demostración. Consideremos el isomorfismo $\Lambda' = \mathrm{End}({}_RM^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Lambda)$, dado por $f \longmapsto [f]_{n\times n}$, donde $[f]_{ij} := \pi_j f p_i : {}_RM \longrightarrow {}_RM$. Sea μ' suprayectiva, $\mu : R \longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(M)$ y sea $\omega \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$; entonces por 2.5.1, $\exists\ \omega' \in \mathrm{End}_{\Lambda'}(M^n)$ tal que $\omega'(x) = (\omega(x_1), \dots, \omega(x_n))$. Dado que $\mu' : R \longrightarrow \mathrm{End}_{\Lambda'}(M^n)$ es un epimorfismo, existe $r \in R$ tal que $\mu'(r) = \omega'$. Veamos que $\mu(r) = \omega$, para ello sea $m \in M$. Luego

$$\underbrace{(rm, \dots, rm)}_{n\ veces} = \mu'(r)(m, \dots, m) = \omega'(m, \dots, m) = (\omega(m), \dots, \omega(m)),$$

lo cual implica que $\mu(r)(m) = rm = \omega(m)$ y $\mu(r) = \omega$.

Si μ' es un monomorfismo, para $r \in \mathrm{Ker}(\mu)$, se tiene $rm = 0\ \forall\ m \in M$, por lo que $rx = 0\ \forall\ x \in M^n$, y $r = 0$, por lo tanto $\mathrm{Ker}(\mu) = 0$. $\square$

Corolario 2.5.3. *Sea R un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(R)$ y $\Lambda := \mathrm{End}_R(M)$. Si se tiene que ${}_RR \simeq {}_RM^n$, entonces*

(a) *$\mu : R \longrightarrow \Lambda$ con $\mu(r)(m) = rm$ es un isomorfismo de anillos;*

(b) *${}_\Lambda M \simeq {}_\Lambda\Lambda^n$, (i.e. ${}_\Lambda M$ es libre).*

Demostración. (a) $\Lambda' := \mathrm{End}({}_RM^n) \simeq \mathrm{End}({}_RR) \simeq R^{op}$, por lo que $\Lambda' \simeq R^{op}$. Podemos escribir $\mu' : R \longrightarrow \mathrm{End}_{\Lambda'}(M^n) = \mathrm{End}(M^n_{(\Lambda')^{op}}) \simeq \mathrm{End}({}_RR)$. Por 1.10.4 se tiene que μ' es un isomorfismo, y por 2.5.2 μ es un isomorfismo.

(b) ${}_\Lambda M \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RR, {}_RM_{\Lambda^{op}}) \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RM^n, {}_RM_{\Lambda^{op}}) \simeq (\mathrm{Hom}_R(M, M))^n$ $= {}_\Lambda\Lambda^n$. $\square$

Corolario 2.5.4. *Sea R un anillo, ${}_RS$ un R-módulo simple y $D := \mathrm{End}_R(S)$. Si ${}_RR \simeq {}_RS^n$ entonces $R \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D^{op})$ como anillos y $dim_D({}_DS) = n$.*

Demostración. $R \simeq {}_RS^n$, por 2.5.3 (b) ${}_DS \simeq {}_DD^n$, por lo que $\dim_D({}_DS) = n$.

Así mismo, por 2.5.3 (a), $R \simeq \mathrm{End}_D(S)$, y $\mathrm{End}_D(S) \simeq \mathrm{End}_D(D^n) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathrm{End}_D(D)) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D^{op})$. $\square$

Lema 2.5.5. *Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *M es semisimple si y sólo si todo monomorfismo $\alpha : M' \longrightarrow M$ en $\mathrm{Mod}(R)$ es un split-mono.*

(b) *Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(R)$ se tiene que si M es semisimple, entonces M' y M'' son semisimples.*

Demostración. Véase en [1] la Proposición 9.4 y el Teorema 9.6. $\square$

Teorema 2.5.6. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$R \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$ con D un anillo con división.*

(b) *${}_RR \simeq {}_RS^n$ con ${}_RS$ simple.*

(*c*) *Existe un simple* $S \in \mathrm{Mod}(R)$ *tal que* $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R),\ {}_RM \simeq \bigoplus_{i\in I}\ {}_RS_i$, *donde* ${}_RS_i \simeq {}_RS\ \forall\ i \in I$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $V_D := D_D^n$ y por hipótesis $R \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$. Entonces $\mathrm{End}(V_D) = \mathrm{End}(D_D^n) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathrm{End}(D_D)) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D) \simeq R$. Por lo que podemos asumir que $R = \mathrm{End}(V_D)$. En particular ${}_RV_D \in {}_R\mathrm{Mod}_D$. Para verificar que ${}_RV$ es simple, es suficiente probar que $R \cdot v = {}_RV\ \forall\ v \in V \setminus \{0\}$.

Sean $v, v' \in V \setminus \{0\}$, se extiende $\{v\}$ a una base de V_D, y para $\{v'\}$ también. De igual manera, se extiende la correspondencia $v \longmapsto v'$ a $f \in \mathrm{End}(V_D) = R$, *i.e.* $fv = v'$. Esto muestra que ${}_RV$ es simple. Veamos que ${}_RR \simeq {}_RS^n$ con ${}_RS := {}_RV$. En efecto, $R = \mathrm{End}(V_D) = \mathrm{Hom}_D(V_D, V_D) = \mathrm{Hom}_D(D_D^n, {}_RV_D) \simeq (\mathrm{Hom}_D(D_D, {}_RV_D))^n \simeq {}_RV^n$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Tenemos una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(R)$, $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{S}_M \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$, donde $\mathscr{S}_M = \bigoplus_{m\in M}\ {}_RR$, y $\varphi(\sum_{m\in M} r_m) = \sum_{m\in M} r_m \cdot m$ es un epimorfismo pues $\varphi(1_m) = 1 \cdot m = m$. Por hipótesis ${}_RR$ es semisimple, lo cual implica que $\mathscr{S}_M$ es semisimple. Luego, por 2.5.5, $M \simeq \bigoplus_{i\in I}\ {}_RS_i$ con ${}_RS_i$ simple $\forall\ i \in I$.

Veamos que ${}_RS_i \simeq {}_RS\ \forall\, i \in I$. Esto sucede pues $0 \neq_R S_i \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RS_i) \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RS, {}_RS_i)^n$, *i.e.* $\mathrm{Hom}_R({}_RS, {}_RS_i) \neq 0$, por lo que $\exists\ f \in \mathrm{Hom}_R({}_RS, {}_RS_i)$ con $f \neq 0$, el cual debe ser un isomorfismo.

(c) $\Rightarrow$ (a) ${}_RR \simeq \bigoplus_{i\in I}\ {}_RS_i$ con ${}_RS_i \simeq_R S\ \forall\ i$. Como $1 \in R$, $1 = \sum_{i=1}^n x_i$, donde $x_i \in {}_RS_i$; luego $\forall\ r \in R,\ r = r \cdot 1 = \sum_{i=1}^n rx_i$, de este modo se tiene que ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^n\ {}_RS_i \simeq {}_RS^n$. Al considerar $D := \mathrm{End}_R(S)^{op}$, tenemos por 2.5.4, que $R \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$. □

Definición 2.5.7. Sea R un anillo. Decimos que:

(*a*) R es *semisimple* a izquierda (derecha) si ${}_RR$ (R_R) es semisimple.

(*b*) R es *artiniano* a izquierda (derecha) si ${}_RR$ (R_R) es artiniano.

(*c*) R es *noetheriano* a izquierda (derecha) si ${}_RR$ (R_R) es noetheriano.

(*d*) R es *simple* si $R \neq 0$ y los únicos ideales (bilaterales) de R son 0 y R.

Ejercicio 2.5.8. Sea R un anillo y $\Lambda := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Entonces, la correspondencia $\{$ideales de $R\} \longrightarrow \{$ ideales de $\Lambda\}$ dada por $I \mapsto \mathrm{Mat}_{n\times n}(I)$, es biyectiva.

Proposición 2.5.9. *Sea D un anillo con división y $V \in \mathrm{Mod}(D)$. Entonces, el anillo $R := \mathrm{End}_D(V)$ tiene las siguientes propiedades.*

(*a*) *R es simple.*

(*b*) *R es semisimple a izquierda y a derecha.*

(*c*) *La intersección de todos los ideales maximales izquierdos de R es cero.*

(*d*) *R es artiniano y noetheriano (a izquierda y a derecha).*

Demostración. (a) Es consecuencia del Ejercicio 2.5.8, pues D es simple y $\mathrm{End}_D(V) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D^{op})$ con $n = \dim_D({}_DV)$.

(b) El funtor $* := \mathrm{Hom}_D(-, {}_DD_D) : \mathrm{mod}(D) \longrightarrow \mathrm{mod}(D^{op})$ es una dualidad de categorías. Como $R \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D^{op})$, por 2.5.6 ${}_RR$ es semisimple. Y por ser $*$ fiel, pleno y contravariante, se tiene que $\mathrm{End}_D(V) = R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_D(V^*)^{op}$. Por lo tanto $R^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_D(V^*)$. Como ${}_DV \simeq {}_DD^n$ ($\dim_D({}_DV) = n$), tenemos que ${}_DV^* \simeq D^n_D$ y $\mathrm{End}({}_DV^*) \simeq \mathrm{End}(D^n_D) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathrm{End}(D_D)) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$; y por 2.5.6, R^{op} es semisimple a izquierda, *i.e.* R_R es semisimple.

(c) Véase la definición de radical (sin prueba).

(d) En (b), vimos que $R \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D^{op})$ y $R^{op} \simeq \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$; los cuales implican, por 2.5.6 (b), que ${}_RR \simeq {}_RS^n$ y $R_R \simeq S^n_R$. De donde concluimos que ${}_RR$ y R_R son artinianos y noetherianos. $\square$

Definición 2.5.10. Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Se dice que

(a) M es *libre* si existe un conjunto de índices I (tal vez infinito) tal que $M = \sum_{i\in I} R_i$, donde $R_i = \langle b_i \rangle \simeq R$. Decimos que $B = \{b_i \mid i \in I\}$ es una base para M.

(b) M es *proyectivo* si $\forall\ \alpha : X \longrightarrow Y$ epimorfismo y $\forall\ \beta : M \longrightarrow Y$, existe $\gamma : M \longrightarrow X$ tal que $\beta = \alpha\gamma$; en diagramas se expresa como sigue

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\exists\ \gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y. \end{tikzcd}$$

En tal caso, se dice que β factoriza a través de α.

(c) M es *inyectivo* si $\forall\ \alpha : X \longrightarrow Y$ monomorfismo y $\forall\ \beta : X \longrightarrow M$, existe $\gamma : Y \longrightarrow M$ tal que $\beta = \gamma\alpha$; en diagramas se expresa como sigue

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[dl, "\exists\ \gamma"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Ejercicio 2.5.11. Para $M \in \mathrm{Mod}(R)$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) M es proyectivo.

(b) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(R)$ se escinde.

(c) M es sumando directo de un R-módulo libre.

(d) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(R)$ se tiene que $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{(M,f)} \mathrm{Hom}_R(M, Y) \xrightarrow{(M,g)} \mathrm{Hom}_R(M, Z) \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

Ejercicio 2.5.12. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de R-módulos. Pruebe que $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ es proyectivo si y sólo si M_α es proyectivo $\forall\ \alpha \in I$.

Ejercicio 2.5.13. Consideremos $P \in \mathrm{Mod}(R)$. Pruebe que ${}_RP$ es proyectivo y finitamente generado si y sólo si $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que ${}_RP$ es sumando directo de ${}_RR^n$.

Proposición 2.5.14. *Sea R un anillo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *R es semisimple a izquierda.*

(b) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R),\ M$ *es semisimple.*

(c) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R),\ M$ *es proyectivo.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Escribimos ${}_RR = \bigoplus_{i\in I}\ {}_RS_i$. Sea ${}_RM \in \mathrm{Mod}(R)$. Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{S}_M \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$, donde $\mathscr{S}_M := \bigoplus_{m\in M}\ {}_RR$, y $\varphi(\sum_{m\in M} r_m) := \sum_{m\in M} r_m \cdot m$. Dado que $\mathscr{S}_M$ es semisimple, por 2.5.5, ${}_RM$ es semisimple.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Consideremos una sucesión exacta $\eta : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Como Y es semisimple por hipótesis, de 2.5.5 obtenemos que η se escinde. Luego del Ejercicio 2.5.11 concluimos que ${}_RM$ es proyectivo.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $\alpha : M \longrightarrow {}_RR$ un monomorfismo. Usando 2.5.5 (a), es suficiente ver que α es split-mono; para ello, consideremos la sucesión exacta $\varepsilon : 0 \longrightarrow M \longrightarrow {}_RR \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow 0$. Como $\mathrm{Coker}(\alpha)$ es proyectivo por hipótesis, el Ejercicio 2.5.11 implica que η se escinde; y por lo tanto α es un split-mono. $\square$

Proposición 2.5.15. *Sea R un anillo. Consideremos ${}_RE := \bigoplus_{i=1}^t\ {}_RM_i^{n_i}$, con $\mathrm{Hom}_R({}_RM_i, {}_RM_j) = 0\ \forall\ i \neq j,\ \Lambda_j := \mathrm{End}({}_RM_j)$ y $\Lambda := \mathrm{End}({}_RE)$. Consideremos los morfismos de anillos inducidos por "multiplicación a izquierda" (cf. 1.10.3):*

$$\gamma_j : R \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\Lambda_j}M),\ \gamma_j(r)(m) := rm,$$

$$\gamma : R \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\Lambda_1}M_1 \times \cdots \times {}_{\Lambda_t}M_t),\ \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_t),$$

$$\gamma' : R \longrightarrow \mathrm{End}({}_\Lambda E),\ \gamma'(r)(x) := rx,\ x \in E.$$

Si γ' es inyectivo (suprayectivo), entonces γ también lo es.

Demostración. Escribimos $E = M_1^{n_1} \times \cdots \times M_t^{n_t}$ y tomamos $x \in E$, donde $x = (x_1, \ldots, x_t)$ con $x_i \in M_i^{n_i}$ y $x_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n_i)})$. Sean $\Lambda_i' := \mathrm{End}_R(M_i^{n_i}) \simeq \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(\Lambda_i)$. Entonces $\Lambda = \mathrm{End}_R(E) = \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^t\ {}_RM_i^{n_i}, \bigoplus_{j=1}^t\ {}_RM_j^{n_j}) \simeq \mathrm{Mat}_{t\times t}\begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(M_1^{n_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{End}_R(M_t^{n_t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_t' \end{pmatrix}$. Veamos que vale lo siguiente

$$\begin{aligned}\forall\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_t) \in \mathrm{End}_{\Lambda_1}(M_1) \times \cdots \times ({}_{\Lambda_t}M_t) \text{ existe } \omega'_i \in \mathrm{End}_{\Lambda'_i}(M_i^{n_i})\\ \text{para cada } i, \text{ tal que } \omega'_i(x) = (\omega_i x_i^{(1)}, \ldots, \omega_i x_i^{(n_i)}) \text{ y } \omega' : E \longrightarrow E\\ \text{con } \omega'(x) := (\omega'_1 x_1, \ldots, \omega'_t x_t) \text{ que satisface } \omega' \in \mathrm{End}_\Lambda(E). \qquad (2.4)\end{aligned}$$

En efecto, sea $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_t)$ como en (2.4); en virtud de 2.5.1, se tiene la existencia de los ω'_i con las propiedades de (2.4). Veamos que $\omega' : E \longrightarrow E$ con $\omega'(x) := (\omega'_1 x_1, \ldots, \omega'_t x_t)$ es un Λ-morfismo. En efecto, dado que $\omega'_i \in \mathrm{End}_{\Lambda'_i}(M_i^{n_i})$ y $\Lambda = \mathrm{Mat}_{t\times t}\begin{pmatrix}\Lambda'_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda'_t\end{pmatrix}$. Sea $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda'_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda'_t\end{pmatrix}$, donde $\lambda'_i \in \Lambda'_i = \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(\Lambda_i)$. Luego $\lambda x = \begin{pmatrix}\lambda'_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda'_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix} = (\lambda'_1 x_1, \ldots, \lambda'_t x_t)$.

Por lo que

$$\begin{aligned}\omega'(\lambda x) &= \omega'(\lambda'_1 x_1, \ldots, \lambda'_t x_t) = (\omega'_1(\lambda'_1 x_1), \ldots, \omega'_t(\lambda'_t x_t))\\ &= (\lambda_1 \omega'_1(x_1), \ldots, \lambda'_t \omega'_t(x_t)) = \lambda\omega'(x).\end{aligned}$$

Ahora, sea γ' suprayectiva y $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_t) \in \mathrm{End}_{\Lambda_1}(M_1) \times \cdots \times ({}_{\Lambda_t}M_t)$. Probaremos que $\exists\ r \in R$ tal que $\gamma(r) = \omega$.

Por (2.4), tenemos que $\exists\, \omega'_i \in \mathrm{End}_{\Lambda_i}(M^{n_i})$ tal que $\omega'(x) = (\omega'_1 x_1, \ldots, \omega'_t x_t)$ y $\omega' \in \mathrm{End}_\Lambda(E)$; por ser γ' suprayectiva $\exists\, r \in R$ tal que $\gamma'(r) = \omega'$, lo cual implica que $rx = \omega'(x)\ \forall\ x \in E$. Entonces $(rx_1, \ldots, rx_t) = (\omega'_1 x_1, \ldots, \omega'_t x_t)\ \forall\ x \in E$, si y sólo si $rx_i = \omega'_i x_i\ \forall\ i,\ \forall\ x_i \in M_i^{n_i}$. En particular, se tiene que $rm_i = \omega_i(m_i)\ \forall\ i,\ \forall\ m_i \in M_i$, y así $\gamma(r)(m_1, \ldots, m_t) = (\gamma_1(r)m_1, \ldots, \gamma_t(r)m_t) = (rm_{1,}, \ldots rm_t) = (\omega_1 m_1, \ldots, \omega_t m_t) = \omega(m_1, \ldots, m_t)$; probándose que $\gamma(r) = \omega$.

Sea γ' inyectivo y $r \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Luego $\gamma(r) = 0$ y por lo tanto $\gamma_i(r) = 0\ \forall\ i$; por lo que $rm_i = 0\ \forall\ i,\ \forall\ m_i \in M_i$. De donde $rx_i = 0\ \forall\ i\ \forall\ x_i \in M_i^{n_i}$, y así $rx = 0\ \forall\ x \in E$. Por lo que concluimos que $r \in \mathrm{Ker}(\gamma') = 0$, probándose que $\mathrm{Ker}(\gamma) = 0$. □

Teorema 2.5.16. (Wedderburn–Artin) *Sea R un anillo.*

(a) *Si R es semisimple a izquierda, entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

  (a_1) *Hasta isomorfismos, sólo hay un número finito de simples ${}_RS_1, \ldots, {}_RS_t$; y además ${}_RR \simeq \bigoplus_{i=1}^t {}_RS_i^{n_i}$.*

  (a_2) *Sea $D_i := \mathrm{End}_R(S_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant t$. Entonces, se tiene que*

  - $\dim_{D_i}({}_{D_i}S) = n_i \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, t;$
  - $R \simeq \bigtimes_{i=1}^t \mathrm{End}_{D_i}(S_i) \simeq \bigtimes_{i=1}^t \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(D_i^{op})$.

(b) *Si $R \simeq \mathrm{End}({}_{D_1}V_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_{D_t}(V_t)$, con ${}_{D_i}V_i \in \mathrm{mod}(D_i)$ y D_i es un anillo con división, entonces* (b$_1$) *hasta isomorfismos, sólo hay t simples* : ${}_RS_1, \ldots, {}_RS_t$; *y*

(b$_2$) ${}_RR \simeq \bigoplus_{i=1}^t {}_RS_i^{n_i}$, *donde* $n_i = \dim_{D_i}({}_{D_i}V)$.

Demostración. (a) Sea ${}_RR = \bigoplus_{i\in I} S_i$, con S_i simple $\forall\ i \in i$. Como $1 \in R$, se tiene que I es finito; luego ${}_RR \simeq \bigoplus_{i=1}^t {}_RS_i^{n_i}$ con ${}_RS_i \not\simeq_R S_j$ para $i \neq j$.

(a_1) Veamos que hasta isomorfismos ${}_RS_1, \ldots, {}_RS_t$ son todos los simples. En efecto, sea ${}_RS$ un simple, entonces

$$0 \neq {}_RS \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RR_R,\ {}_RS) \simeq \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^t {}_RS_i^{n_i},\ {}_RS) \simeq \bigoplus_{i=1}^t [\mathrm{Hom}_R({}_RS_i,\ {}_RS)]^{n_i}.$$

Por lo tanto, existe i_0 tal que $\mathrm{Hom}_R({}_RS_{i_0},\ {}_RS) \neq 0$, y por ser S_{i_0} y S R-módulos simples, ${}_RS_{i_0} \simeq {}_RS$.

Escribiendo ${}_RE := {}_RR \simeq \bigoplus_{i=1}^t {}_RS_i^{n_i}$, $\Lambda_j := D_j = \mathrm{End}_R(S_j)$ y $\Lambda = \mathrm{End}_R(E) = \mathrm{End}({}_RR) \simeq R^{op}$, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_R({}_RS_i,\ {}_RS_j) = 0 \text{ si } i \neq j \ \text{ y } \ \mathrm{End}_\Lambda(E) = \mathrm{End}(E_{\Lambda^{op}}) \simeq \mathrm{End}(R_R). \tag{2.5}$$

Luego $\gamma' : R \longrightarrow \mathrm{End}(R_R)$ es un isomorfismo, y por 2.5.15, la aplicación $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{D_1}(S_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_{D_t}(S_t)$ es un isomorfismo.

Ahora veamos que ${}_{D_i}S_i \simeq {}_{D_i}D_i^{n_i}$. En efecto, ${}_{D_i}S_i \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RR_R,\ {}_RS_{i_{D_i^{op}}}) \simeq \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j=1}^t {}_RS_j^{n_j},\ {}_RS_{i_{D_i^{op}}})$, y por (2.5), se tiene que

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j=1}^t {}_RS_j^{n_j},\ {}_RS_{i_{D_i^{op}}}\right) \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RS_i^{n_i},\ {}_RS_{i_{D_i^{op}}}) \simeq {}_{D_i}D_i^{n_i}.$$

Por lo tanto, $\dim_{D_i}({}_{D_i}S_i) = n_i\ \forall\ i$.

Finalmente, se tiene $\mathrm{End}_{D_i}(S_i) \simeq \mathrm{End}_{D_i}(D_i^{n_i}) \simeq \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(\mathrm{End}_{D_i}(D_i)) \simeq \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(D_i^{op})$.

(b) Sea $R = R_1 \times \cdots \times R_t$ donde $R_i := \mathrm{End}_{D_i}(V_i)$, con D_i un anillo con división y $\dim_{D_i}({}_{D_i}V_i) = n_i < \infty$.

Para cada i, ${}_RV_i$ es simple (se probó en 2.5.6 $(a) \Rightarrow (b)$). Haciendo cambio de anillos $\pi_i : R \longrightarrow R_i \quad \pi_i(r_1, \ldots, r_t) = r_i$, tenemos que $V_i \in \mathrm{Mod}(R)$, mediante la acción $R \times V_i \longrightarrow V_i \quad r \cdot v_i := \pi_i(r)v_i$. Ahora veremos que ${}_RV_i$ es simple. En efecto, sea $0 \neq v_i \in V_i$, entonces $R \cdot v_i = R_iv_i = V_i$, ya que ${}_{R_i}V_i$ es simple. Por lo tanto, ${}_RV_1, \ldots, {}_RV_t$ son R-módulos simples.

Veamos que: ${}_RV_1, \ldots, {}_RV_t$ no son isomorfos dos a dos. Para ello, consideremos $\varphi \in \mathrm{Hom}_R({}_RV_i\,,\ {}_RV_j)$ con $i \neq j$, y sea $r = (r_1, \ldots, r_t) \in R$ tal que $r_i = 1$ y $r_j = 0$. Para $v_i \in V_i\setminus\{0\}$, se tiene que $\varphi(v_i) = \varphi(r\cdot v_i) = r\cdot\varphi(v_i) = 0\cdot\varphi(v_i) = 0$. Por lo tanto, $0 \neq v_i \in \mathrm{Ker}(\varphi) \leqslant_R V_i$, y por ser ${}_RV_i$ simple, $\varphi = 0$, mostrando que $\mathrm{Hom}_R({}_RV_i\,,\ {}_RV_j) = 0$ para $i \neq j$.

Probemos ahora que ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^t {}_RV_i^{n_i}$. En efecto, por 2.5.6, ${}_{R_i}R_i \simeq {}_{R_i}V_i^{n_i}$. Haciendo cambio de anillos $\pi_i : R \longrightarrow R_i$, la descomposición como R_i-módulos ${}_{R_i}R_i \simeq {}_{R_i}V_i^{n_i}$ es también una de R-módulos ${}_RR_i \simeq {}_RV_i^{n_i}$; por lo que ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^t {}_RR_i \simeq \bigoplus_{i=1}^t {}_RV_i^{n_i}$.

Finalmente, veamos que si ${}_RS$ es un R-módulo simple, entonces existe i_0 tal que ${}_RS \simeq {}_RV_{i_0}$. Para ello, notemos que $0 \neq {}_RS \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RR, S) \simeq \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^t {}_RV_i^{n_i}, {}_RS) \simeq \bigoplus_{i=1}^t [\mathrm{Hom}_R({}_RV_i, {}_RS)]^{n_i}$, por lo cual existe i_0 tal que $\mathrm{Hom}_R(V_{i_0}, S) \neq 0$; y por ser ${}_RS$ simple ${}_RV_{i_0} \simeq {}_RS$. □

Corolario 2.5.17. *Sea R un anillo. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(a) *R es semisimple a izquierda si y sólo si R es semisimple a derecha.*

(b) *Si R es semisimple a izquierda, entonces R es artiniano y noetheriano (a izquierda y derecha).*

Demostración. (a) Veamos primero que:

$$R \text{ semisimple a izquierda } \Longrightarrow R^{op} \text{ semisimple a izquierda.} \tag{2.6}$$

En efecto, sea R semisimple a izquierda. Luego, $R = \times_{i=1}^t \mathrm{End}_{D_i}(V_i)$ con $V_i \in \mathrm{mod}(D_i)$ en virtud de 2.5.16; y así $R^{op} = \times_{i=1}^t \mathrm{End}_{D_i}(V_i)^{op}$. Por otro lado, usando la equivalencia $* := \mathrm{Hom}_D(-, {}_DD_D) : \mathrm{mod}(D) \longrightarrow \mathrm{mod}(D^{op})$, con D un anillo con división, se tiene que $\mathrm{End}_{D_i}(V_i)^{op} \simeq \mathrm{End}_{D_i}(V_i^*)$. Por lo tanto $R^{op} \simeq \times_{i=1}^t \mathrm{End}({}_{D_i}V_i^*)$ con $V_i^* \in \mathrm{mod}(D_i^{op})$; y así de 2.5.16 concluimos que R^{op} es semisimple a izquierda, probándose (2.6).

Por lo que si ${}_RR$ es simisimple, de (2.6) se tiene que R^{op} es semisimple a izquierda, que es lo mismo que decir que R es semisimple a derecha; y de nuevo por (2.6), $(R^{op})^{op} = R$ es semisimple a izquierda.

(b) En virtud del inciso (a), se tiene que ${}_RR$ y R_R son semisimples, y por 2.5.16, ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^t {}_RS_i^{n_i}$ y $R_R = \bigoplus_{j=1}^{t'} \overline{S}_{j_R}^{m_j}$. Mostrando que ${}_RR$ y R_R son artinianos y noetherianos. □

Ejercicio 2.5.18. Sea R un anillo (no trivial). Pruebe que R es semisimple y conmutativo si y sólo si $R \simeq \times_{i=1}^t K_i$, donde K_i es un campo $\forall\ i$.

Observación. Sea $R = \times_{i=1}^t \mathrm{End}_{D_i}(V_i)$ con $\dim_{D_i}({}_{D_i}V_i) = n_i < \infty$ y D_i un anillo con división.

En la prueba de 2.5.17, se verificó que $R^{op} = \times_{i=1}^t \mathrm{End}_{D_i}(V_i^*)$, donde ${}_{D_i}V_i^* = \mathrm{Hom}_{D_i}({}_{D_i}V_i, {}_{D_i}D_{i_{D_i}})$ y $\dim_{D_i^{op}}(V_i^*) = n_i$. Sea $R_i := \mathrm{End}_{D_i}(V_i)$ y $R_i^* := \mathrm{End}_{D_i}(V_i^*)$. También consideremos los epimorfismos de anillos canónicos $\pi_i : R \longrightarrow R_i$ y $\pi_i^* : R^{op} \longrightarrow R_i^*$. Aplicando la prueba de 2.5.16 (b) a R y R^{op} se tiene:

(a) ${}_RV_1, \ldots, {}_RV_t$, con la estructura del cambio de anillos $\pi_i : R \longrightarrow R_i$, es la lista completa (hasta isomorfismos) de los módulos simples en $\mathrm{Mod}(R)$, y ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^t {}_RV_i^{n_i}$.

(b) ${}_{R^{op}}V_1^*, \ldots, {}_{R^{op}}V_t^*$, con el cambio de anillos $\pi_i^{op} : R^{op} \longrightarrow R_i^*$, es la lista completa (hasta isomorfismos) de los módulos simples en $\mathrm{Mod}(R^{op})$, y ${}_{R^{op}}R^{op} = \bigoplus_{i=1}^t ({}_{R^{op}}V_i^*)^{n_i}$.

2.6. El radical

Definición 2.6.1. Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$ y $\mathscr{M}_M := \{X \leqslant M \mid X$ es maximal en $M\}$. El *radical* de M es

$$\mathrm{rad}(M) := \bigcap_{X \in \mathscr{M}_M} X.$$

Si $\mathscr{M}_M = \emptyset$, se define $\bigcap_{X \in \mathscr{M}_M} X := M$.

Lema 2.6.2. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}(R)$ *y* $\mathscr{S}$ *la clase de todos los simples en* $\mathrm{Mod}(R)$. *Entonces*

(a) $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(M)) = 0$.

(b) $\mathrm{rad}(M) = \bigcap\{\mathrm{Ker}(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, S)$ *con* $S \in \mathscr{S}\}$.

Demostración. (a) Si $\mathscr{M}_M = \emptyset$, entonces por definición $\mathrm{rad}(M) = M$ y $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(M)) = 0$.

Sea $\mathscr{M}_M \neq \emptyset$, luego $\mathrm{rad}(M) \leqslant X \lneq M \ \forall\ X \in \mathscr{M}_M$. Consideremos el isomorfismo de retículas (cf. 1.8.15)

$$\tilde{\pi} : \mathscr{L}({}_RM)/\mathrm{rad}(M) \longrightarrow \mathscr{L}(M/\mathrm{rad}(M)),$$

inducido por el epimorfismo canónico $\pi : M \longrightarrow M/\mathrm{rad}(M)$. Dado que $\mathrm{rad}(M) \leqslant X \ \forall\ X \in \mathscr{M}_M$, se tiene que $\tilde{\pi}$ induce, por restricción, una biyección $\mathscr{M}_M \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{\pi(M)}$. Se sigue entonces que

$$\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(M)) = \bigcap \mathscr{M}_{\pi(M)} = \bigcap_{X \in \mathscr{M}_M} \tilde{\pi}(X) = \tilde{\pi}(\bigcap_{X \in \mathscr{M}_M} X) = \tilde{\pi}(\mathrm{rad}(M)) = 0.$$

(b) Es suficiente ver que: $X \in \mathscr{M}_M$ si y sólo si existe $S \in \mathscr{S}$ y existe $\alpha : M \longrightarrow S$, con $\alpha \neq 0$, tal que $\mathrm{Ker}(\alpha) = X$. Pero esto se sigue del Ejercicio 1.8.19, haciendo $S := M/X$ y $\alpha := \pi : M \longrightarrow S$ el epimorfismo canónico. $\square$

Proposición 2.6.3. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo en* $\mathrm{Mod}(R)$. *Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

(a) $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$.

(b) *Si* $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{rad}(M)$ *y* f *es suprayectiva, se tiene que* $f(\mathrm{rad}(M)) = \mathrm{rad}(N)$.

Demostración. (a) Sean $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\beta} S$, con $S \in \mathscr{S}$. Por 2.6.2 (b) tenemos que $\mathrm{rad}(M) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta \circ f)$, por lo cual $\beta(f(\mathrm{rad}(M))) = 0 \ \forall\ \beta \in \mathrm{Hom}_R(N, S)$; y en virtud de 2.6.2 ($b$), $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$.

(b) Sea $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{rad}(M)$ con f un epimorfismo. Consideremos (cf. 1.8.15) el isomorfismo de retículas $\tilde{f} : \mathscr{L}({}_RM)/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}({}_RN)$ dado por $X \mapsto f(X)$, con inversa $\tilde{f}^{-1} : \mathscr{L}({}_RN) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}({}_RM)/\mathrm{Ker}(f)$ dada por $Z \mapsto f^{-1}(Z)$. Dado que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{rad}(M)$, se tiene que $\tilde{f}$ induce por restricción, una biyección $\mathscr{M}_M \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_N$. Por lo que $f(\mathrm{rad}(M)) = f(\bigcap_{X \in \mathscr{M}_M}) = \bigcap_{X \in \mathscr{M}_M} f(X) = \bigcap_{Z \in \mathscr{M}_M} Z = \mathrm{rad}(N)$. $\square$

Corolario 2.6.4. *La correspondencia* $\mathrm{rad}:\mathrm{Mod}(R)\longrightarrow\mathrm{Mod}(R)$ *dada por*

$$\left(X\xrightarrow{f}Y\right)\mapsto\left(\mathrm{rad}(X)\xrightarrow{\mathrm{rad}(f)}\mathrm{rad}(Y)\right),$$

donde $\mathrm{rad}(f):=f|_{\mathrm{rad}(X)}$, *es un funtor aditivo que conmuta con coproductos arbitrarios, i.e.*

$$\mathrm{rad}\left(\bigoplus_{i\in I}X_i\right)=\bigoplus_{i\in I}\mathrm{rad}(X_i).$$

Demostración. Por 2.6.3 (a), la correspondencia $\mathrm{rad}:\mathrm{Mod}(R)\longrightarrow\mathrm{Mod}(R)$ está bien definida, y es fácil verificar que es un funtor aditivo.

Ahora, sea $X=\bigoplus_{i\in I}X_i$ con $X_i\leqslant X\ \forall\ i\in I$. Como $X_i\leqslant X$, por 2.6.3 (a), $\mathrm{rad}(X_i)\leqslant(X)\ \forall\ i\in I$, por lo que $\bigoplus_{i\in I}\mathrm{rad}(X_i)\leqslant\mathrm{rad}(X)$. Sea $x\in\mathrm{rad}(X)$, entonces $x=\sum_i x_i$ donde $x_i\in X_i$. Usando la proyección $\pi_j:X\longrightarrow X_j$ dada por $\sum_i x_i\mapsto x_j$, se tiene de 2.6.3 (a) que $\pi_j(\mathrm{rad}(X))\leqslant\mathrm{rad}(X_j)$. Por lo que $x_j=\pi_j(x)\in\mathrm{rad}(X_j)$, luego $x=\sum_{i\in I}x_i\in\sum_{i\in I}\mathrm{rad}(X_i)\leqslant\bigoplus_{i\in I}\mathrm{rad}(X_i)$, *i.e.* $\mathrm{rad}(X)\leqslant\bigoplus_{i\in I}\mathrm{rad}(X_i)$. □

Definición 2.6.5. Sean R un anillo y $I\trianglelefteq_i R$. Definimos:

(*a*) El *radical de Jacobson* $J(R)$ de R, como $J(R)=\mathrm{rad}({}_RR)$.

(*b*) Para $M\in\mathrm{Mod}(R)$, se define $IM=\{\sum_{i=1}^n x_im_i\mid x_i\in I,\ m_i\in M,\ n\geqslant 1\}$.

Obsérvese que $IM\leqslant M$.

Lema 2.6.6. *Sea R un anillo. Entonces, las siguientes propiedades se satisfacen.*

(*a*) $J(R)\trianglelefteq R$.

(*b*) $\forall\ M\in\mathrm{Mod}(R)\ J(R)M\leqslant\mathrm{rad}(M)$.

Demostración. (a) Por 2.6.3 (a), para todo $\alpha:\ {}_RR\longrightarrow{}_RR$ se tiene que $\alpha(\mathrm{rad}({}_RR))\leqslant\mathrm{rad}({}_RR)$; luego

$$\mathrm{rad}({}_RR)\cdot\alpha^{op}\subseteq\mathrm{rad}({}_RR)\quad\forall\ \alpha^{op}\in\mathrm{End}_R(R)^{op}.\tag{2.7}$$

Por lo tanto, del isomorfismo de anillos $\rho:R\longrightarrow\mathrm{End}({}_RR)^{op}$ donde $(x)\rho(r):=xr$, y de (2.7), se tiene que $xr=(x)\rho(r)\in\mathrm{rad}({}_RR)\ \forall\ x\in\mathrm{rad}({}_RR)\ \forall\ r\in R$. Análogamente se tiene que $J(R)\trianglelefteq_i R$.

(b) Sea $\mathscr{S}$ la clase de todos los R-módulos simples. Veamos que se cumple la siguiente afirmación:

$$J(R)\cdot S=0\quad\forall\ S\in\mathscr{S}.$$

Sea $S\in\mathscr{S}$ y $x\in S\setminus\{0\}$. Es claro que $R\cdot x=S$. Luego $\beta_x:R\longrightarrow S$ definida como $\beta_x(r):=rx$, es un epimorfismo, y por 2.6.2 (b), $J(R)=\mathrm{rad}({}_RR)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta_x)$. Por lo tanto, $0=\beta_x(J(R))=J(R)\cdot x=(J(R)\cdot R)x=J(R)(R\cdot x)=J(R)\cdot S$, verificándose la afirmación.

Sea $M\in\mathrm{Mod}(R)$ y $\gamma:M\longrightarrow S$ en $\mathrm{Mod}(R)$ con $S\in\mathscr{S}$, luego $\gamma(J(R)\cdot M)=J(R)\gamma(M)\subseteq J(R)\cdot S=0$, y por 2.6.2 (b), $J(R)\cdot M\subseteq\mathrm{rad}(M)$. □

Lema 2.6.7. *Sea $M \in \mathrm{mod}(R)$ y $M' \in \mathscr{L}({}_RM)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) $M' \subseteq \mathrm{rad}(M)$.

(*b*) $\forall\ L \in \mathscr{L}({}_RM)$, *si* $M' + L = M$ *entonces* $L = M$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $L \leqslant M$ tal que $M' + L = M$. Supongamos que $L \neq M$. Por 1.8.24, $\exists\ \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_M$ tal que $L \subseteq \mathfrak{m}$. Dado que $M' \subseteq \mathrm{rad}(M)$ se tiene $M' \subseteq \mathfrak{m}$, por lo que $M = M' + L \subseteq \mathfrak{m} \subsetneq M$, lo cual no pasa. Por lo tanto $L = M$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Podemos suponer que $\mathscr{M}_M \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_M$, luego por (b) $M' + \mathfrak{m} \subsetneq M$, y entonces $M' \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_M} \mathfrak{m} = \mathrm{rad}(M)$. □

Proposición 2.6.8 (Nakayama)**.** *Sea R un anillo. Entonces $\forall\ I \in \mathscr{L}({}_RR)$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) $I \subseteq J(R)$.

(*b*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(R),\ \forall\ L \in \mathscr{L}({}_RM)$ *si* $L + IM = M$ *entonces* $M = L$.

(*c*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(R)$, *si* $IM = M$ *entonces* $M = 0$.

(*d*) $1 + I := \{1 + x \mid x \in I\} \subseteq U(R) := \{r \in R \mid r$ *es invertible*$\}$.

(*e*) $\forall\ x \in I$, $1 + x$ *es invertible a izquierda.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sean $I \subseteq J(R)$, $M \in \mathrm{mod}(R)$ y $L \leqslant M$ tales que $L + IM = M$. Por 2.6.6, se tiene que $IM \subseteq J(R) \cdot M \subseteq \mathrm{rad}(M)$; por lo tanto $IM \subseteq \mathrm{rad}(M)$, y de 2.6.7 concluimos que $L = M$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $M \in \mathrm{mod}(R)$ tal que $IM = M$. En particular se tiene que $IM + 0 = M$, y por (b) se obtiene que $M = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sean $M \in \mathrm{mod}(R)$ y $L \leqslant M$ tales que $L + IM = M$. Luego $I \cdot (M/L) = (IM + L)/L = M/L$; por lo que $I \cdot (M/L) = M/L$, y como ${}_RM$ es finitamente generado se tiene que M/L también lo es. Aplicando (c) se tiene que $M/L = 0$, *i.e.* $M = L$.

(b) $\Rightarrow$ (d) Sea $x \in I$ y $u := 1 + x$. De donde $R = Ru + IR$ pues $r = ur + x(-r)$; y como ${}_RR \in \mathrm{mod}(R)$ y $1 \in R$, de (b) concluimos que $R = Ru$. Por lo que existe $v \in R$ tal que $vu = 1$. En particular $1 = vu = v(1 + x) = v + vx$, y así $v = 1 + v(-x) \in 1 + I$. Por el mismo razonamiento $\exists\ w \in 1 + I$ tal que $wv = 1$. Rescribiendo, se tiene $w = w \cdot 1 = w(vu) = (wv)u = 1 \cdot u = u$; por lo tanto existe $u^{-1} \in 1 + I$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Es trivial.

(e) $\Rightarrow$ (a) Sea $I \in \mathscr{L}({}_RR)$ que satisfaga (e). Veamos que $\forall\ \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{{}_RR}$ se tiene que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Supongamos que existe $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{{}_RR}$ tal que $I \nsubseteq \mathfrak{m}$. Luego, como $\mathfrak{m}$ es maximal, $R = I + \mathfrak{m}$ implica que $1 = x + y \in I + \mathfrak{m}$, $y = 1 + (-x) \in 1 + I$, y por (e), $y \in \mathfrak{m}$ con y invertible a izquierda. Entonces $\mathfrak{m} = M$, lo cual no sucede. □

Corolario 2.6.9. *Para todo anillo R, se tiene que $J(R) = J(R^{op})$.*

Demostración. Sea R una anillo, veamos que

$$J(R^{op}) \subseteq J(R). \tag{2.8}$$

En efecto, por 2.6.6 (a), $J(R^{op}) \trianglelefteq R^{op}$, por lo tanto $J(R^{op}) \trianglelefteq R$. Aplicando 2.6.8 (d) a R^{op} se tiene $1 + J(R^{op}) \trianglelefteq U(R^{op}) = U(R)$. Luego por 2.6.8 (a) concluimos que $J(R^{op}) \subseteq J(R)$.

Finalmente, aplicando (2.8) se tiene la siguiente cadena de inclusiones

$$J(R) = J((R^{op})^{op}) \subseteq J(R^{op}) \subseteq J(R),$$

probándose que $J(R) = J(R^{op})$. □

Ejercicio 2.6.10. Sea Λ un anillo artiniano (noetheriano) a izquierda. Pruebe que $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, M es artiniano (noetheriano).

Lema 2.6.11. *Sean R un anillo y $I \trianglelefteq R$. Consideremos el epimorfismo canónico de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (a) *Sea S un grupo abeliano.*
  - (a_1) *Si $_RS$ es simple y $I \subseteq J(R)$, entonces la acción a izquierda en S $R/I \times S \longrightarrow S$, $(\overline{r}, s) \mapsto \overline{r} \cdot s := rs$, proporciona una estructura de R/I-módulo a S, y además $_{R/I}S$ es simple.*
  - (a_2) *Si $_{R/I}S$ es simple, entonces $_RS$, con la estructura de R-módulo inducida por el cambio de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$, es simple.*
- (b) *Si $I \subseteq J(R)$ entonces $J(R/I) = J(R)/I$.*
- (c) $J(R)/I \subseteq J(R/I)$.

Demostración. (a_1) Sea $_RS$ simple y $I \subseteq J(R)$. Por 2.6.6 (b), se tiene que $J(R) \cdot S = 0$, por lo que $I \subseteq \mathrm{ann}_R(_RS) := \{r \in R \mid r \cdot s = 0\ \forall\ s \in S\}$. En consecuencia, $(\overline{r}, s) \mapsto \overline{r} \cdot s := rs$ está bien definida y $S \in \mathrm{Mod}(R/I)$.

Veamos que $_{R/I}S$ es simple. Sea $0 \neq x \in S$; entonces $(R/I) \cdot x = R \cdot x = S$.

(a_2) Sea $_{R/I}S$ simple, y consideremos a $_RS$ como R-módulo vía el cambio de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$, esto es $r \cdot x := \pi(r)x\ \ \forall\ r \in R$ y $\forall\ x \in S$. Sea $0 \neq x \in S$, luego $R \cdot x = (R/I)x = S$ pues $_{R/I}S$ es simple, probándose que $_RS$ es simple.

(b) Verificamos primero que el cambio de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$ induce una biyección $\mathscr{M}_{_RR} \longrightarrow \mathscr{M}_{_{R/I}R/I}$, $_R\mathfrak{m} \mapsto \pi(\mathfrak{m})$, con inversa $\mathfrak{m}' \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{m}')$.

En efecto, sea $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{_RR}$, veamos que $\pi(\mathfrak{m}) \in \mathscr{M}_{_{R/I}R/I}$. Se tiene que $(R/I)\,/\,(\mathfrak{m}/I) \simeq R/\mathfrak{m}$ en $\mathrm{Mod}(R)$ y $R/\mathfrak{m}$ es simple en $\mathrm{Mod}(R)$; entonces por (a_1), $(R/I)\,/\,(\mathfrak{m}/I)$ es simple en $\mathrm{Mod}(R/I)$, por lo que $\pi(\mathfrak{m}) \in \mathscr{M}_{_{R/I}R/I}$.

Sea $\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{_{R/I}R/I}$, y consideremos a $\mathfrak{m}'$ como R-módulo vía el cambio de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$. Como π es un morfismo de R-módulos y además $_R\mathfrak{m}' \in \mathscr{L}(_RR/I)$, se tiene que $\exists\ !\ \mathfrak{m} \in \mathscr{L}(_RR)$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/I$. Veamos que $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{_RR}$. En efecto, $R/\mathfrak{m} \simeq (R/I)\,/\,(\mathfrak{m}/I) = (R/I)\,/\,\mathfrak{m}'$. Por (a_2), $(R/I)\,/\,\mathfrak{m}'$

es simple en $\mathrm{Mod}(R)$, luego $R/\mathfrak{m}$ es simple en $\mathrm{Mod}(R)$; por lo tanto $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{RR}$. Ahora, usando la biyección recién probada, tenemos

$$J(R/I) = \bigcap_{Z \in \mathscr{M}_{R/I}{}_{R/I}} Z = \bigcap_{X \in \mathscr{M}_{RR}} \pi(X) = \pi\left(\bigcap_{X \in \mathscr{M}_{RR}} X\right) = J(R)/I.$$

(c) Por 2.6.8 (e), aplicado a R, se tiene que $1 + x$ es invertible a izquierda $\forall\ x \in J(R)$. Entonces $\overline{1} + \overline{x}$ es invertible a izquierda $\forall\ \overline{x} \in J(R)/I$; y de 2.6.8 concluimos que $J(R)/I \subseteq J(R/I)$. □

Corolario 2.6.12. *Sean R un anillo y $I \trianglelefteq R$. Si $\exists\ n \in \mathbb{N}^+$ tal que $I^n = 0$, y además $J(R/I) = 0$, entonces $I = J(R)$.*

Demostración. Veamos que $I \subseteq J(R)$. Sea $x \in I$, luego $x^n \in I^n = 0$, de donde $(1 + x + \cdots + x^{n-1})(1 - x) = 1$; y por 2.6.8, $I \subseteq J(R)$.

Ahora, como $I \subseteq J(R)$, se tiene por 2.6.11 (b), que $J(R)/I = J(R/I) = 0$; lo cual muestra que $I = J(R)$. □

Proposición 2.6.13. *Sea R un anillo y $M \in \mathrm{mod}(R)$ artiniano. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

(a) *Existe una familia finita $\{\mathfrak{m}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{M}_{RM}$ tal que $\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{m}_i$.*

(b) *${}_RM$ es semisimple si y sólo si $\mathrm{rad}({}_RM) = 0$.*

(c) *$M/\mathrm{rad}(M)$ es semisimple.*

Demostración. (a) Sabemos que $\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{X \in \mathscr{M}_{RM}} X$. Podemos asumir que $\mathscr{M}_{RM} \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{m}_1 \in \mathscr{M}_{RM}$, luego $\mathrm{rad}(M) \subseteq \mathfrak{m}_1$.

Si $\mathrm{rad}(M) = \mathfrak{m}_1$, la familia buscada es $\{\mathfrak{m}_1\}$. Supongamos que $\mathrm{rad}(M) \subsetneq \mathfrak{m}_1$; entonces existe $\mathfrak{m}_2 \in \mathscr{M}_{RM}$ tal que $\mathrm{rad}(M) \subseteq \mathfrak{m}_1 \bigcap \mathfrak{m}_2 \subsetneq \mathfrak{m}_1$.

Si $\mathrm{rad}(M) = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$, la familia buscada es $\{\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_2\}$. Si no, entonces $\mathrm{rad}(M) \subsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \subsetneq \mathfrak{m}_1$; por lo tanto $\exists\ \mathfrak{m}_3 \in \mathscr{M}_{RM}$ tal que $\mathrm{rad}(M) \subseteq \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{m}_i$. Dado que ${}_RM$ es artiniano, el procedimiento anterior termina en un número finito n de pasos. Luego existe $\{\mathfrak{m}_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathscr{M}_{RM}$ tal que $\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$.

(b) Sea $M = \bigoplus_{i \in I}\ {}_RS_i$, donde ${}_RS_i$ es simple $\forall\ i$. Podemos asumir que $I \neq \emptyset$. Entonces, por 2.6.4, $\mathrm{rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{rad}({}_RS_i) = 0$.

Supongamos que $\mathrm{rad}(M) = 0$. Si $\mathscr{M}_{RM} = \emptyset$, entonces $M = \mathrm{rad}(M) = 0$, *i.e.* M es semisimple. Ahora suponemos que $\mathscr{M}_{RM} \neq \emptyset$. Por (a), existe una familia $\{\mathfrak{m}_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathscr{M}_{RM}$ tal que $\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$. Luego el morfismo $\varphi : M/\mathrm{rad}(M) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M/\mathfrak{m}_i,\ x + \mathrm{rad}(M) \mapsto (x + \mathfrak{m}_1, \ldots, x + \mathfrak{m}_n)$, es un monomorfismo de R-módulos pues $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{rad}(M)/\mathrm{rad}(M) = 0$.

Como $\bigoplus_{i=1}^n M/\mathfrak{m}_i$ es semisimple y φ es un monomorfismo, en virtud de 2.5.5 se tiene que $M/\mathrm{rad}(M)$ es semisimple; por lo que ${}_RM$ es semisimple, según la hipótesis.

(c) Como ${}_RM$ es artiniano, por el Ejercicio 2.1.20, ${}_RM/\mathrm{rad}(M)$ es artiniano. Por otro lado, de 2.6.2, $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(M)) = 0$; y $M/\mathrm{rad}(M)$ es semisimple, según (b). □

Teorema 2.6.14. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda y $\mathfrak{r} := J(\Lambda)$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.*

(*a*) $\mathfrak{r}$ *es nilpotente, i.e.* $\exists\ n \in \mathbb{N}^+$ *tal que* $\mathfrak{r}^n = 0$.

(*b*) $\Lambda/\mathfrak{r}$ *es un anillo semisimple artiniano a izquierda.*

(*c*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, M *es semisimple si y sólo si* $\mathfrak{r} \cdot M = 0$.

(*d*) $\mathrm{rk}(K_0(\Lambda)) = \mathrm{rk}(K_0(\Lambda/\mathfrak{r})) < \infty$ *(en particular, hay un número finito de* Λ*-simples hasta isomorfismos).*

(*e*) Λ *es noetheriano a izquierda.*

Demostración. (a) Dado que ${}_\Lambda\Lambda$ es artiniano, de la cadena descendente de ideales a izquierda ${}_\Lambda\Lambda \geqslant \mathfrak{r} \geqslant \mathfrak{r}^2 \geqslant \cdots \geqslant \mathfrak{r}^m \geqslant \cdots$, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $\mathfrak{r}^{n+1} = \mathfrak{r}^n$. Veamos que $\mathfrak{r}^n = 0$.

Supongamos que $\mathfrak{r}^n \neq 0$. Consideremos la clase

$$\mathscr{F} := \{I \in \mathscr{L}({}_\Lambda\Lambda) \mid \mathfrak{r}^n \cdot I \neq 0\}.$$

Tenemos que $\mathscr{F} \neq \emptyset$, pues $\mathfrak{r} \in \mathscr{F}$. Por ser ${}_\Lambda\Lambda$ artiniano y $\mathscr{F} \neq \emptyset$, por el Ejercicio 2.1.18, $(\mathscr{F}, \leqslant)$ contiene un elemento minimal que denotaremos por $\mathfrak{a}$. Veamos que $\mathfrak{a} \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

En efecto, sea $x \in \mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{r}^n x \neq 0$. Entonces $\mathfrak{r}^n(\Lambda x) \neq 0$, *i.e.* $\Lambda x \in \mathscr{F}$, y por la minimalidad de $\mathfrak{a}$, $\Lambda x = \mathfrak{a}$. Por lo tanto $\mathfrak{a} \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Por otro lado, $0 \neq\ \mathfrak{r}^n\mathfrak{a} = \mathfrak{r}^{n+1}\mathfrak{a} = \mathfrak{r}^n(\mathfrak{r}\mathfrak{a})$, *i.e.* $\mathfrak{r}\mathfrak{a} \in \mathscr{F}$; entonces $\mathfrak{r}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ y por el lema de Nakayama $\mathfrak{a} = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo que $\mathfrak{r}^n = 0$, esto es, $\mathfrak{r}$ es nilpotente.

(b) Consideremos el epimorfismo de anillos $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$. Verificaremos que $\Lambda/\mathfrak{r}$ es artiniano a izquierda. En efecto, dada una cadena $\{{}_{\Lambda/\mathfrak{r}}N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ descendente en $\mathscr{L}({}_{\Lambda/\mathfrak{r}}\Lambda/\mathfrak{r})$, por cambio de anillos $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$, se tiene una cadena descendente $\{{}_\Lambda N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{L}({}_\Lambda\Lambda)$, la cual se estabiliza pues ${}_\Lambda\Lambda$ es artiniano. En consecuencia $\{{}_{\Lambda/\mathfrak{r}}N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se estabiliza.

El hecho de que $\Lambda/\mathfrak{r}$ es semisimple a izquierda se sigue de 2.6.13 (c).

(c) Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por el Ejercicio 2.6.10, ${}_\Lambda M$ es artiniano. Supongamos que M es semisimple; entonces por 2.6.6 (a) $\mathfrak{r} \cdot M \subseteq \mathrm{rad}(M)$. Pero por 2.6.13 $\mathrm{rad}(M) = 0$, consecuentemente $\mathfrak{r} \cdot M = 0$. Ahora supongamos que $\mathfrak{r} \cdot M = 0$. Luego $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda/\mathfrak{r})$; y como $\Lambda/\mathfrak{r}$ es semisimple a izquierda, se tiene que ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}M$ es semisimple (cf. 2.5.14), esto es,

$${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}M = \bigoplus_{i\in I} {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_i,$$

donde ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_i$ es simple $\forall\ i$. Haciendo cambio de anillos $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$, se tiene de 2.6.11 (a) que ${}_\Lambda M = \bigoplus_{i\in I} {}_\Lambda S_i$ donde ${}_\Lambda S_i$ es simple $\forall\ i$, probándose (c).

(d) Como $\Lambda/\mathfrak{r}$ es semisimple a izquierda, de 2.5.16, se tiene que hasta isomorfismos solo hay un número finito t de $\Lambda/\mathfrak{r}$-simples: ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_1, {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_2, \ldots, {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_t$. Haciendo cambio de anillos $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$, veremos que hasta isomorfismo los

Λ-simples son ${}_\Lambda S_1, {}_\Lambda S_2, \ldots, {}_\Lambda S_t$. En efecto, por 2.6.11 (a_2) sabemos que ${}_\Lambda S_i$ es semisimple $\forall\ i$. Por otro lado, del Ejercicio 1.9.6, se tiene que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda S_i, {}_\Lambda S_j) = \mathrm{Hom}_{\Lambda/\mathfrak{r}}({}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_i\ ,\ {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Por lo tanto, $\{{}_\Lambda S_i\}_{i=1}^t$ no son isomorfos dos a dos. Sea ahora ${}_\Lambda S$ un simple. Por 2.6.11 (a_1) se tiene que ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S$ es simple, por lo que $\exists\ i_0$ tal que ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S \simeq {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_{i_0}$; y como $\mathrm{Hom}_{\Lambda/\mathfrak{r}}({}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S, {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_{i_0}) = \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda S, {}_\Lambda S_{i_0})$, se tiene que ${}_\Lambda S \simeq {}_\Lambda S_{i_0}$.

(e) Por (a), tenemos la siguiente filtración

$$\Lambda \supseteq \mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{r}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{r}^n = 0.$$

Veamos que $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es un Λ-módulo semisimple, finitamente generado y artiniano $\forall\ i$ con $0 \leqslant i \leqslant n-1$, donde $\mathfrak{r}^0 := \Lambda$. En efecto, consideremos para cada i, los siguientes epimorfismos canónicos

$${}_\Lambda\Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}^i \longrightarrow \mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}.$$

Dado que ${}_\Lambda\Lambda$ es artiniano y finitamente generado, del epimorfismo ${}_\Lambda\Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}^i$, se tiene que $\Lambda/\mathfrak{r}^i$ es artiniano a izquierda y finitamente generado; análogamente $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es artiniano y finitamente generado. Por otro lado $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}) = \mathfrak{r}^{i+1}/\mathfrak{r}^{i+1} = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es semisimple, en virtud de (c).

Ahora bien, de la afirmación anterior y de 2.1.25 se tiene que $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es un Λ-módulo noetheriano $\forall\ i$ tal que $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Finalmente, consideremos la siguiente familia de sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r}^2 \longrightarrow \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \longrightarrow 0,$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r}^{n-2} \longrightarrow \mathfrak{r}^{n-3} \longrightarrow \mathfrak{r}^{n-3}/\mathfrak{r}^{n-2} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{r}^{n-2} \longrightarrow \mathfrak{r}^{n-2}/\mathfrak{r}^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Dado que $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es noetheriano $\forall\ i$, aplicando el Ejercicio 2.1.20 a la familia anterior de sucesiones exactas, se obtiene que ${}_\Lambda\Lambda$ es noetheriano. $\square$

Corolario 2.6.15. *Sea Λ un anillo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{mod}(\Lambda) = f.l.(\Lambda)$.

(b) Λ *es artiniano a izquierda.*

(c) $\mathfrak{r} := J(\Lambda)$ *es nilpotente y* $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ *es un* Λ*-módulo finitamente generado y semisimple* $\forall\ i \geqslant 0$, *donde* $\mathfrak{r}^0 := \Lambda$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Si ${}_\Lambda\Lambda \in \mathrm{mod}(\Lambda) = f.l.(\Lambda)$, entonces por 2.1.22, ${}_\Lambda\Lambda$ es artiniano a izquierda.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por 2.1.22 y el Ejercicio 2.1.17, se tiene que $f.l.(\Lambda) \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por otro lado, ${}_\Lambda\Lambda$ es artiniano y noetheriano (por 2.6.14 (e)). Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo ${}_\Lambda\Lambda^n \longrightarrow M$. Por ser ${}_\Lambda\Lambda^n$ artiniano y noetheriano, obtenemos que M es artiniano y noetheriano; y por 2.1.22, se concluye que $M \in f.l.(\Lambda)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Por 2.6.14 (a) $\mathfrak{r}$ es nilpotente; y en 2.6.14 (e) se probó que $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es un Λ-módulo finitamente generado y semisimple $\forall\ i \geqslant 0$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $\mathfrak{r}^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}^+$ y que $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es finitamente generado y semisimple $\forall\ i$ con $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Veamos primero que si $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y M es semisimple, entonces ${}_\Lambda M$ es artiniano. En efecto, sea $M = \bigoplus_{i\in I} {}_\Lambda S_i$ y finitamente generado. Luego existen $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ tal que ${}_\Lambda M =< m_1, m_2, \dots, m_k >$. Para cada i, $\exists\ I_i \subseteq I$ finito tal que $m_i = \sum_{j\in I_i} x_{i\,j}$ donde $x_{i\,j} \in {}_\Lambda S_j$. Dado que para cada $m \in M$ se tiene que $m = \sum_{i=1}^k \lambda_i m_i$ con $\lambda_i \in \Lambda$. Concluimos que ${}_\Lambda M = \bigoplus_{i\in I'} {}_\Lambda S_i$ con $I' := \bigcup_{i=1}^k I_i$ finito; y como ${}_\Lambda S_i$ es artiniano, se tiene que ${}_\Lambda M$ es artiniano. Ahora bien, de la demostración de 2.6.14 (e), sabemos que $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ es artiniano $\forall\ i$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

La prueba se sigue como en la última parte de 2.6.14 (e), considerando la filtración

$$\Lambda \supseteq \mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{r}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{r}^n = 0.$$

□

Corolario 2.6.16. *Para un anillo Λ, se tiene que Λ es artiniano a izquierda y $J(\Lambda) = 0$ si y sólo si Λ es semisimple.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que Λ es artiniano a izquierda y que $J(\Lambda) = 0$. De 2.6.14 (b), sabemos que $\Lambda/J(\Lambda)$ es semisimple; y como $J(\Lambda) = 0$, Λ es semisimple.

($\Leftarrow$) Sea ${}_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i\in I} {}_\Lambda S_i$ donde ${}_\Lambda S_i$ es simple $\forall\ i \in I$. Entonces

$$J({}_\Lambda\Lambda) = \mathrm{rad}\left(\bigoplus_{i\in I} {}_\Lambda S_i\right) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{rad}({}_\Lambda S_i) = 0.$$

Finalmente, por 2.5.17 (b), concluimos que ${}_\Lambda\Lambda$ es artiniano a izquierda. □

Corolario 2.6.17. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ I \trianglelefteq \Lambda$, *$I$ es nilpotente y Λ/I es un anillo semisimple si y sólo si $J(\Lambda) = I$.*

(*b*) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda),\quad \mathrm{rad}(M) = J(\Lambda) \cdot M.$

Demostración. (a) Sea $I \trianglelefteq \Lambda$ nilpotente y Λ/I semisimple. Por 2.6.12 es suficiente ver que $J(\Lambda/I) = 0$. Pero esto último es consecuencia de 2.6.16.

La otra implicación sale de 2.6.14 (a) y (b).

(b) Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $\mathfrak{r} = J(\Lambda)$. Consideremos el epimorfismo canónico $\pi : M \longrightarrow M/\mathfrak{r}M$. Por 2.6.6 sabemos que $\mathfrak{r}M \subseteq \mathrm{rad}(M)$; luego

$$\frac{\mathrm{rad}(M)}{\mathfrak{r}M} = \pi(\mathrm{rad}(M)) = \mathrm{rad}(M/\mathfrak{r}M),$$

donde la última igualdad sucede por 2.6.3 (b). Por lo tanto es suficiente ver que $\mathrm{rad}({}_{\Lambda}M/\mathfrak{r}M) = 0$. De 2.6.14 (b) tenemos que $\Lambda/\mathfrak{r}$ es semisimple y $M/\mathfrak{r}M$ es un $\Lambda/\mathfrak{r}$-módulo. Entonces por 2.5.14, ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(M/\mathfrak{r}M) = \bigoplus_{i\in I} {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S_i$, y de 2.6.11 (a_2), se tiene que ${}_{\Lambda}(M/\mathfrak{r}M) = \bigoplus_{i\in I} {}_{\Lambda}S_i$. Por lo tanto , se concluye que $\mathrm{rad}({}_{\Lambda}(M/\mathfrak{r}M))$ $= \bigoplus_{i\in I} \mathrm{rad}({}_{\Lambda}S_i) = 0$. □

Ejercicio 2.6.18. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Pruebe que $\forall\ N \in \mathscr{L}({}_{\Lambda}M)$, si M/N es simple entonces $\mathrm{rad}(M) \subseteq N$.

Lema 2.6.19. *Sean R y S anillos y ${}_RM_S \in {}_R\mathrm{Mod}_S$. Entonces*

(*a*) *Si R es artiniano a izquierda (derecha), se tiene que* $\mathrm{End}(M_S)$ *también lo es.*

(*b*) *Si S es artiniano a izquierda (derecha), se tiene que* $\mathrm{End}_R(M)^{op}$ *también lo es.*

Demostración. (a) Sea R artiniano a izquierda. Consideremos el morfismo de anillos (cf. 1.10.3) $\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}(M_S) =: \Gamma$. Veamos que ${}_{\Gamma}\Gamma$ es artiniano. En efecto, dada una cadena $\{{}_{\Gamma}X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ descendente en $\mathscr{L}({}_{\Gamma}\Gamma)$, se tiene, por cambio de anillos $\Lambda : \Gamma \longrightarrow \Lambda$, una cadena $\{{}_RX_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ descendente en $\mathscr{L}({}_RR)$; y como ${}_RR$ es artiniano, dicha cadena se estabiliza.

(b) La demostración es análoga al caso (a), usando el cambio de anillos $\rho : S \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)^{op}$. □

Proposición 2.6.20. *Sea R un anillo conmutativo y artiniano. Entonces para todo $M \in \mathrm{Mod}(R)$, $\mathrm{End}_R(M)$ es artiniano a izquierda y a derecha.*

Demostración. Sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Dado que es R conmutativo, se tiene que ${}_RM_R \in {}_R\mathrm{Mod}_R$, donde $m \cdot r^{op} := rm$. Como R y R^{op} son artinianos a izquierda y $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{End}(M_{R^{op}})$, el resultado se sigue de 2.6.19. □

Ejercicio 2.6.21. Sea R un anillo (no trivial). Pruebe que si todo $x \in R \setminus \{0\}$ es invertible a izquierda, entonces R es un anillo con división.

2.7. Anillos locales

Teorema 2.7.1. *Sea Λ un anillo no trivial. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) *Λ tiene un único ideal a izquierda maximal.*

(*b*) *$J(\Lambda)$ es el único ideal a derecha maximal en Λ.*

(*c*) $J(\Lambda) = \Lambda \setminus U(\Lambda)$.

(*d*) $\Lambda \setminus U(\Lambda)$ *es cerrado bajo la suma en* Λ.

(*e*) $\forall\ \lambda \in \Lambda$, $\{\lambda, 1-\lambda\} \cap U(\Lambda) \neq \emptyset$.

(*f*) $\Lambda/J(\Lambda)$ *es un anillo con división.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (f) Sea $\mathscr{M}_{_\Lambda\Lambda} = \{\mathfrak{m}\}$. Luego $\mathfrak{m} = J(\Lambda) \trianglelefteq \Lambda$. Consideremos el anillo $\Gamma = \Lambda/\mathfrak{m}$. Por ser $\mathfrak{m}$ maximal, se tiene que el Λ-módulo $_\Lambda\Gamma$ es simple. Veamos que $\forall\ x \in \Gamma \setminus \{0\}$, x tiene inverso a izquierda. En efecto, sea $x \in \Gamma \setminus \{0\}$, luego $x = \overline{\lambda} := \lambda + \mathfrak{m}$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Como $_\Lambda\Gamma$ es simple, se tiene que $\Lambda x = \Gamma$; luego $\exists\ \mu \in \Lambda$ tal que $\mu x = \overline{1}$. Pero $\overline{1} = \mu x = \mu\lambda + \mathfrak{m} = \overline{\mu}\overline{\lambda} = \overline{\mu}x$. Por lo tanto, x tiene inverso a izquierda, y por el Ejercicio 2.6.21, Γ es un anillo con división.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\mathscr{M}_{_\Lambda\Lambda} = \{\mathfrak{m}\}$. Luego $\mathfrak{m} = J(\Lambda) \trianglelefteq \Lambda$, y como $J(\Lambda^{op}) = J(\Lambda) = \mathfrak{m}$, es suficiente probar que $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{\Lambda_\Lambda}$. Para esto hay que ver que $(\Lambda/\mathfrak{m})_\Lambda$ es simple. En efecto, por (f), sabemos que $\Lambda/\mathfrak{m}$ es un anillo con división y la estructura de Λ-módulo a derecha de $\overline{\mathfrak{m}}_\Lambda := (\Lambda/\mathfrak{m})_\Lambda$ está dada por $\overline{x} \cdot \lambda = \overline{x\lambda}\ \forall\ x \in \mathfrak{m}$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$. Sea $\overline{0} \neq \overline{x} \in \overline{\mathfrak{m}}_\Lambda$, luego $\exists\ \overline{y} \in \Lambda/\mathfrak{m}$ tal que $\overline{xy} = \overline{1}$. Entonces, para $\overline{v} \in \overline{\mathfrak{m}}_\Lambda$ se tiene que $\overline{x}(yv) = \overline{xyv} = \overline{xy} \cdot \overline{v} = \overline{v}$, y así $\overline{x} \cdot \Lambda = \overline{\mathfrak{m}}_\Lambda$. Por lo tanto $\overline{\mathfrak{m}}_\Lambda$ es simple, y por consiguiente $\mathfrak{m}_\Lambda$ es maximal.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\mathscr{M}_{\Lambda_\Lambda} = \{J(\Lambda)\}$. Entonces $\{J(\Lambda^{op})\} = \mathscr{M}_{_{\Lambda^{op}}\Lambda^{op}}$, y por la implicación (a) $\Rightarrow$ (b), con Λ^{op}, se tiene que $\{J(\Lambda^{op})\} = \mathscr{M}_{\Lambda^{op}_{\Lambda^{op}}} = \mathscr{M}_{_\Lambda\Lambda}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $J(\Lambda) = \Lambda \setminus U(\Lambda)$. Sea $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{_\Lambda\Lambda}$; entonces $\mathfrak{m} \subseteq \Lambda \setminus U(\Lambda) = J(\Lambda)$, por lo que $J(\Lambda) = \mathfrak{m}$.

(c) $\Rightarrow$ (d) es claro.

(d) $\Rightarrow$ (e) Sea $\lambda \in \Lambda$, si $\{\lambda, 1-\lambda\} \cap U(\Lambda) = \emptyset$, se tiene que $1 = \lambda + (1-\lambda)$ no es invertible, lo cual no pasa.

(e) $\Rightarrow$ (a) Sea $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{_\Lambda\Lambda}$. Dado que $\mathfrak{m} \cap U(\Lambda) = \emptyset$ (pues $_\Lambda\mathfrak{m}$ es maximal), se tiene que $1 + \mathfrak{m} \subseteq U(\Lambda)$; y por el Lema de Nakayama $\mathfrak{m} \subseteq J(\Lambda)$. Por lo tanto $\mathfrak{m} = J(\Lambda)$.

(f) $\Rightarrow$ (c) Sea $\Lambda/J(\Lambda)$ un anillo con división. Entonces $J(\Lambda) \subseteq \Lambda \setminus U(\Lambda)$ pues $\Lambda/J(\Lambda)$ es no trivial. Sea $x \in \Lambda \setminus U(\Lambda)$ y supongamos que $x \notin J(\Lambda)$; por lo tanto $\overline{0} \neq \overline{x} \in \Lambda \setminus J(\Lambda)$. Luego $\overline{x} \in U(\Lambda/J(\Lambda))$, y entonces $\Lambda x + J(\Lambda) = \Lambda$ y $x\Lambda + J(\Lambda) = \Lambda$. Por el Lema de Nakayama se tiene que $\Lambda x = \Lambda$ y $x\Lambda = \Lambda$; por lo que $x \in U(\Lambda)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Lambda \setminus U(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$. □

Definición 2.7.2. Un anillo Λ, se dice que es *local* si es no trivial (*i.e.* $\Lambda \neq 0$) y satisface alguna de las condiciones equivalentes de 2.7.1.

Ejercicio 2.7.3. Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Pruebe que:

(*a*) Si $e \in \mathrm{End}(_RM)$ es tal que $e^2 = e$, entonces $M = eM \oplus (1-e)M$ y $eM = \{m \in M \mid e(m) = m\}$.

(*b*) Si $_RM = {}_RM_1 \oplus {}_RM_2$ entonces $\exists\ e \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $e^2 = e$ y además $_RM_1 = eM$ y $_RM_2 = (1-e)M$.

Definición 2.7.4. Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Se dice que ${}_RM$ es *inescindible* (indescomponible) si satisface las siguientes condiciones:

(*a*) ${}_RM \neq 0$, y

(*b*) si ${}_RM = {}_RM_1 \oplus {}_RM_2$, entonces $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$.

Proposición 2.7.5. *Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) *${}_RM$ es inescindible.*

(*b*) *$\mathrm{End}_R(M)$ es no trivial y sus únicos idempotentes son los triviales, i.e. 1_M y 0.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como ${}_RM \neq 0$ se tiene $1_M \neq 0$. Por lo tanto $\mathrm{End}_R(M)$ es no trivial. Sea $e \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotente. Por el Ejercicio 2.7.3 (a), se tiene que $M = eM \oplus (1-e)M$; y por ser M inescindible, $eM = 0$ ó $(1-e)M = 0$; esto es $e = 0$ ó $1 - e = 0$, *i.e.* $e = 0$ ó $e = 1$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que ${}_RM = {}_RM_1 \oplus {}_RM_2$ (${}_RM \neq 0$, pues $1_M \neq 0$). Por el Ejercicio 2.7.3 (b), $\exists\ e \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $e^2 = e$ y $M_1 = eM$ y $M_2 = (1-e)M$, por lo que $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$. □

Proposición 2.7.6. *Sea R un anillo. Si R es local, entonces R es no trivial y los únicos idempotentes de R son los triviales.*

Demostración. Sea $e \in R$ tal que $e^2 = e$. Luego $e(1-e) = 0$, y como R es local, se tiene que $\{e, 1-e\} \cap U(R) \neq \emptyset$. Si $e \in U(R)$, entonces $1 - e = 0$, *i.e.* $e = 1$; y si $1 + e \in U(R)$, entonces $e = 0$. □

Corolario 2.7.7. *Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Si $\mathrm{End}_R(M)$ es local entonces ${}_RM$ es inescindible.*

Demostración. Es inmediato de 2.7.5 y 2.7.6. □

2.8. Estructura de los proyectivos

Definición 2.8.1. Un epimorfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, se dice que es un *epi-esencial* si satisface: $\forall\ g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, A)$ si $fg : X \longrightarrow B$ es un epimorfismo entonces g es un epimorfismo.

Proposición 2.8.2. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo en $\mathrm{Mod}(R)$.*

(*a*) *Sea $A \in \mathrm{mod}(R)$. Entonces, f es un epi-esencial si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.*

(*b*) *Sea $\overline{f} : A/\mathrm{rad}(A) \longrightarrow B/\mathrm{rad}(B)$ con $\overline{f}(a + \mathrm{rad}(A)) := f(a) + \mathrm{rad}(B)$. Entonces, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{rad}(A)$ si y sólo si $\overline{f}$ es un isomorfismo.*

Demostración. (a) Sabemos que A es finitamente generado.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es un epi-esencial. Sea $Z \in \mathscr{L}({}_\Lambda A)$ tal que satisface $\operatorname{Ker}(f) + Z = A$. Consideremos $Z \xrightarrow{i_Z} A \xrightarrow{f} B$, donde i_Z es la inclusión. Entonces $B = f(A) = f(\operatorname{Ker}(f) + Z) = f(Z) = \operatorname{Im}(fi_Z)$. Por lo tanto fi_Z es un epimorfismo; luego i_Z es un epimorfismo, entonces $A = Z$, lo cual implica por 2.6.7, que $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{rad}(A)$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{rad}(A)$. Sea $g : X \longrightarrow A$ tal que $fg : X \longrightarrow B$ es un epimorfismo. Veamos primero que $A = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(g)$. En efecto, para cualquier $a \in A$, $\exists\ x \in X$ tal que $fg(x) = f(a)$. Por lo tanto $a = (a - g(x)) + g(x)$, donde $a - g(x) \in \operatorname{Ker}(f)$ y $g(x) \in \operatorname{Im}(g)$; probándose que $A = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Aplicando 2.6.7 a la afirmación anterior, se tiene que $\operatorname{Im}(g) = A$.

(b) Veamos primero que $f : A \longrightarrow B$ induce el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\operatorname{Mod}(R)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f|_{\operatorname{rad}(A)}"] & A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "f"] & A/\operatorname{rad}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(B) \arrow[r] & B \arrow[r, "\pi_B"] & B/\operatorname{rad}(B) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En efecto, por 2.6.3 (a), se tiene que la restricción de f en $\operatorname{rad}(A)$ hace conmutar el cuadrado a la izquierda en el diagrama; y por lo tanto $\exists\ !\ \overline{f} : A/\operatorname{rad}(A) \longrightarrow B/\operatorname{rad}(B)$ que hace conmutar el segundo cuadrado. Observe que $\overline{f}$ es un epimorfismo, pues f lo es.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{rad}(A)$, entonces por 2.6.3, se tiene que $f(\operatorname{rad}(A)) = \operatorname{rad}(B)$. Ahora sea $a + \operatorname{rad}(A) \in \operatorname{Ker}(\overline{f})$, luego $f(a) + \operatorname{rad}(B) = \overline{0}$. Esto muestra que $f(a) \in \operatorname{rad}(B) = f(\operatorname{rad}(A))$, entonces $\exists\ a' \in \operatorname{rad}(A)$ tal que $f(a) = f(a')$, lo cual implica que $a - a' \in \operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{rad}(A)$. Por lo tanto $a \in \operatorname{rad}(A)$ y $\operatorname{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{0}\}$.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\operatorname{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{0}\}$. Si $a \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces $\overline{f}(a + \operatorname{rad}(a)) = f(a) + \operatorname{rad}(B)$, luego $a + \operatorname{rad}(A) \in \operatorname{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{0}\}$. Por lo tanto $a \in \operatorname{rad}(A)$. $\square$

Corolario 2.8.3. *Sea Λ un anillo y $A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces, el epimorfismo canónico $\pi : A \longrightarrow A/\operatorname{rad}(A)$ es un epi-esencial.*

Demostración. Es consecuencia de 2.8.2 (a). $\square$

Proposición 2.8.4. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo en $\operatorname{Mod}(\Lambda)$. Entonces*

(a) Si $A \in f.l.(\Lambda)$ y f es un epi-esencial, se tiene que f es minimal a derecha.

(b) Si A es proyectivo, entonces f es minimal a derecha si y sólo si f es un epi-esencial.

Demostración. (a) Sea $A \in f.l.(\Lambda)$. Por 2.3.12, existe una descomposición $A = A' \oplus A''$ de A tal que $f|_{A''} : A'' \longrightarrow B$ es minimal a derecha y un epimorfismo. Como $f|_{A''} = f\, i_{A''}$ y f es esencial, se tiene que $i_{A''} : A'' \longrightarrow A$ es un epimorfismo. Luego $A = A''$, y en consecuencia $f|_{A''} = f$, por lo que f es minimal a derecha.

(b) Supongamos que A es proyectivo.

($\Rightarrow$) Sea $g : X \longrightarrow A$ tal que $fg : X \longrightarrow B$ es un epimorfismo. Entonces $\exists\ h : A \longrightarrow X$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "g"'] & B \\ A. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Como $f(gh) = f$ y f es minimal a derecha, tenemos que gh es un isomorfismo; y por lo tanto g es un epimorfismo.

($\Leftarrow$) Ahora, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & B \\ A. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Dado que $fg = f$, f es esencial y A es proyectivo, se tiene que g es un split-epi, *i.e.* $\exists\ h : A \longrightarrow A$ tal que $gh = 1_A$ (en particular h es un monomorfismo). Por otro lado $fh = f(gh) = f$; luego h es un epimorfismo, y por lo tanto un isomorfismo. Finalmente como $gh = 1_A$, g es un isomorfismo. $\square$

Definición 2.8.5. Sea Λ un a anillo y $A \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Una *cubierta proyectiva* de A es un epi-esencial $P \longrightarrow A$ donde P es un proyectivo.

Ejercicio 2.8.6. Sea Λ un anillo y $A \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que si $f : P \longrightarrow A$ y $g : Q \longrightarrow A$ son cubiertas proyectivas de A, entonces existe un isomorfismo $m : P \longrightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dd, "m"] \arrow[dr, "f"] & \\ & A \\ Q. \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 2.8.7. Si $A \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ admite una cubierta proyectiva, se tiene por el Ejercicio 2.8.6 que esta es única hasta isomorfismos. Denotaremos por $\varepsilon_A : P_0(A) \longrightarrow A$ a la elección de una cubierta proyectiva de A.

Teorema 2.8.8. *Sea* Λ *un anillo artiniano a izquierda. Entonces* $\forall\ A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *existe* $\varepsilon_A : P_0(A) \longrightarrow A$ *con* $P_0(A) \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Por 2.6.15, se tiene que $\mathrm{mod}(\Lambda) = f.l.(\Lambda)$. Sea $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, luego $\exists\ n \geqslant 1$ y un epimorfismo $g : {}_\Lambda\Lambda^n \longrightarrow A$. Dado que ${}_\Lambda\Lambda^n \in \mathrm{mod}(\Lambda) = f.l.(\Lambda)$, por 2.3.12, existe una descomposición ${}_\Lambda\Lambda^n = P \oplus P'$ tal que $g|_P : P \longrightarrow A$ es suprayectivo y minimal a derecha, donde P es un proyectivo finitamente generado. Luego, por 2.8.4 (b), $g|_P : P \longrightarrow A$ es una cubierta proyectiva de A. □

Lema 2.8.9. *Sean* Λ *un anillo y* $f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C$ *dos epimorfismos en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. *Entonces,* gf *es un epi-esencial si y sólo si* f *y* g *lo son.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea gf un epi-esencial. Veamos que f es un epi-esencial. Sea $h : X \longrightarrow A$ tal que fh es un epimorfismo. Luego $g(fh)$ es un epimorfismo; y como gf es un epi-esencial, h es un epimorfismo.

Ahora veamos que g es un epi-esencial. Sea $h : Y \longrightarrow B$ tal que gh es un epimorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, donde E es el pull-back de f y h

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & Y \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C. \end{tikzcd}$$

Como f es un epimorfismo, se tiene que f' es un epimorfismo. Del diagrama $gf(h') = (gh)f'$, y por ser gh y f' dos epimorfismos, gfh' es un epimorfismo. Ahora bien, como gf es esencial, h' es un epimorfismo, lo cual implica que hf' es un epimorfismo; y por lo tanto h también lo es.

($\Leftarrow$) Es claro de la definición. □

Definición 2.8.10. Sea Λ un anillo. Para cada $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ se define el*top* de M como $\mathrm{top}(M) := M/\mathrm{rad}(M)$. Denotaremos por $\pi_M : M \longrightarrow \mathrm{top}(M)$ al epi-canónico, *i.e.* $\pi_M(m) := m + \mathrm{rad}(M)\ \forall\ \ m \in M$.

Lema 2.8.11. *Sea* Λ *un anillo. Entonces, la correspondencia*

$$\mathrm{top} : \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda) \quad (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (\mathrm{top}(X) \overset{\mathrm{top}(f)}{\longrightarrow} \mathrm{top}(Y)),$$

donde $\mathrm{top}(f) := \tilde{f}$ *está dado por* $\tilde{f}(x + \mathrm{rad}(X)) := f(x) + \mathrm{rad}(Y)$, *es un funtor aditivo que conmuta con coproductos arbitrarios y preserva epimorfismos.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Entonces $\tilde{f} : \mathrm{top}(X) \longrightarrow \mathrm{top}(Y)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{rad}(f)"] & X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{top}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(Y) \arrow[r] & Y \arrow[r, "\pi_Y"'] & \mathrm{top}(Y) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Para la unicidad de $\tilde{f}$, no es difícil ver que top : Mod(Λ) $\longrightarrow$ Mod(Λ) es un funtor aditivo. Veamos que preserva epimorfismos. En efecto, sea f un epimorfismo; luego $\tilde{f}\pi_X$ también lo es, y por lo tanto $\tilde{f}$ es un epimorfismo. Finalmente, veamos que preserva coproductos

$$\operatorname{top}\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right) = \frac{\bigoplus_{i\in I} X_i}{\operatorname{rad}\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right)} = \frac{\bigoplus_{i\in I} X_i}{\bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}(X_i)} \simeq \bigoplus_{i\in I}\operatorname{top}(X_i).$$

□

Proposición 2.8.12. *Sea Λ un anillo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *Para todo epimorfismo $f : P \longrightarrow A$ en* mod(Λ), *con P un proyectivo, se tiene que f es una cubierta proyectiva de A si y sólo si* $\operatorname{top}(f) : \operatorname{top}(P) \longrightarrow \operatorname{top}(A)$ *es un isomorfismo.*

(*b*) *Sea $\{f_i : P_i \longrightarrow A_i\}_{i=1}^n$ una familia de epimorfismos en* mod(Λ), *donde P_i es proyectivo $\forall$ i. Consideremos $P := \bigoplus_{i=1}^n P_i$, $A := \bigoplus_{i=1}^n A_i$ y el epimorfismo $f := \bigoplus_{i=1}^n f_i : P \longrightarrow A$. Entonces $\forall$ i, $f_i : P_i \longrightarrow A_i$ es cubierta proyectiva de A_i si y sólo si $f : P \longrightarrow A$ es cubierta proyectiva de A.*

Demostración. (a) Es consecuencia de 2.8.2.

(b) Dado que $f = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix} : P \longrightarrow A$, por 2.8.11 se tiene que

$$\operatorname{top}(f) = \begin{pmatrix} \operatorname{top}(f_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \operatorname{top}(f_n) \end{pmatrix}.$$

Entonces, por (a), $f : P \longrightarrow A$ es una cubierta proyectiva de $A \iff \operatorname{top}(f) : \operatorname{top}(P) \longrightarrow \operatorname{top}(A)$ es un isomorfismo $\iff \forall\ i,\ \operatorname{top}(f_i) : \operatorname{top}(P_i) \longrightarrow \operatorname{top}(A_i)$ es un isomorfismo $\iff \forall\ i, f_i : P_i \longrightarrow A_i$ es cubierta proyectiva de A_i. □

Proposición 2.8.13. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Entonces, la siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall$ $M \in$ mod(Λ), *el módulo* top(M) *es semisimple.*

(*b*) *Sea $M \in$ mod(Λ) y $\pi_M : M \longrightarrow \operatorname{top}(M)$ el epi-canónico. Entonces existe un isomorfismo $t : P_0(M) \longrightarrow P_0(\operatorname{top}(M))$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P_0(M) \arrow[r, "\varepsilon_M"] \arrow[d, "t"] & M \arrow[d, "\pi_M"] \\ P_0(\operatorname{top}(M)) \arrow[r, "\varepsilon_{\operatorname{top}(M)}"] & \operatorname{top}(M). \end{tikzcd}$$

(c) *Sea* $\{{}_\Lambda M_i\}_{i=1}^n$ *una familia de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$. *Entonces existe un isomorfismo* $h : P_0(M) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n P_0(M_i)$ *que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P_0(M) \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "\varepsilon_M"] & \\ & M. \\ \bigoplus_{i=1}^n P_0(M_i). \arrow[ur, "\bigoplus_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}"'] & \end{tikzcd}$$

(d) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *si* $P_0(M)$ *es inescindible entonces* $\mathrm{top}(M)$ *es simple.*

(e) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *con* $M \neq 0$, *se tiene que* M *es inescindible o bien* $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, *donde* M_i *es inescindible* $\forall\ i$.

Demostración. (a) Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por 2.6.15 (a) y 2.1.12 ${}_RM$ es artiniano, y de 2.6.13 (c) y 2.6.2 (a), concluimos que $\mathrm{top}(M)$ es semisimple.

(b) Por 2.8.3, $\pi_M : M \longrightarrow \mathrm{top}(M)$ es un epi-esencial. Entonces, por 2.8.9, se tiene que $\pi_M\varepsilon_M : P_0(M) \longrightarrow \mathrm{top}(M)$ es una cubierta proyectiva. Luego, (b) es consecuencia del Ejercicio 2.8.6.

(c) Se cumple en virtud de 2.8.12 (b) y del Ejercicio 2.8.6.

(d) Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $P_0(M)$ es inescindible. Dado que $\mathrm{top}(M)$ es semisimple, es suficiente probar que $\mathrm{top}(M)$ es inescindible. Supongamos que $\mathrm{top}(M) = M_1 \oplus M_2$. Entonces, usando (b) y (c) obtenemos

$$P_0(M) \simeq P_0(\mathrm{top}(M)) = P_0(M_1 \oplus M_2) \simeq P_0(M_1) \oplus P_0(M_2).$$

Por lo tanto $P_0(M_1) = 0$ ó $P_0(M_2) = 0$, de donde $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$.

(e) Sea $0 \neq M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Dado que $\mathrm{mod}(\Lambda) = f.l.(\Lambda)$ (cf. 2.6.3), usaremos inducción sobre $\ell(M)$. Si $\ell(M) = 1$, se tiene que M es simple y por lo tanto inescindible.

Sea $\ell(M) \geqslant 2$, y supongamos que M no es inescindible. Luego existen $M_1, M_2 \in \mathscr{L}(M) \setminus \{0\}$ tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Dado que $\ell(M_i) < \ell(M)$ para $i = 1, 2$, se tiene por hipótesis inductiva, que M_1 y M_2 satisfacen la condición (e); y por lo tanto la satisface M. □

Definición 2.8.14. Sea Λ un anillo. Denotaremos por $\mathscr{P}(\Lambda)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos proyectivos y finitamente generados.

Teorema 2.8.15. *Sea* Λ *un anillo artiniano a izquierda. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ P \in \mathscr{P}(\Lambda)$, *el epi-canónico* $\pi_P : P \longrightarrow \mathrm{top}(P)$ *es una cubierta proyectiva.*

(*b*) $\forall\ P, Q \in \mathscr{P}(\Lambda)$, *$P \simeq Q$ si y sólo si* $\operatorname{top}(P) \simeq \operatorname{top}(Q)$.

(*c*) $\forall\ P \in \mathscr{P}(\Lambda)$, *$P$ es inescindible si y sólo si* $\operatorname{top}(P)$ *es simple.*

(*d*) *Sea $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Si $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i = \bigoplus_{j=1}^{m} Q_j$, donde P_i y Q_j son inescindibles $\forall\ i, j$, entonces $n = m$ y $\exists\ \sigma \in S_n$ tal que $P_i \simeq Q_{\sigma(i)}$ $\forall\ i$.*

Demostración. (a) Es consecuencia de 2.8.3, 2.6.2 y 2.8.13 (c).

(b) Sean $P, Q \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Si $P \simeq Q$, entonces $\operatorname{top}(P) \simeq \operatorname{top}(Q)$ pues al ser $\operatorname{top} : \operatorname{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \operatorname{Mod}(\Lambda)$ un funtor, preserva isomorfismos. Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{top}(P) \simeq \operatorname{top}(Q)$; luego por 2.8.13 (b) se tiene que

$$P \simeq P_0(P) \simeq P_0(\operatorname{top}(P)) \simeq P_0(\operatorname{top}(Q)) \simeq P_0(Q) \simeq Q.$$

(c) Sea $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Supongamos que P es inescindible; luego como $P_0(P) \simeq P$ se tiene que $P_0(P)$ es inescindible; y por 2.8.13 (d), concluimos que $\operatorname{top}(P)$ es inescindible. Por 2.8.13 (a), $\operatorname{top}(P)$ es simple.

Ahora sea $\operatorname{top}(P)$ simple, y $P = P_1 \oplus P_2$. Luego $\operatorname{top}(P) = \operatorname{top}(P_1) \oplus \operatorname{top}(P_2)$, de donde $\operatorname{top}(P_1) = 0$ ó $\operatorname{top}(P_2) = 0$. Por 2.6.17, tenemos que $P_1 = J(\Lambda)P_1$ ó $P_2 = J(\Lambda)P_2$; y por el Lema de Nakayama $P_1 = 0$ ó $P_2 = 0$.

(d) Sea $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i = \bigoplus_{j=1}^{m} Q_j$, donde P_i y Q_j son inescindibles $\forall\ i, j$. Por 2.8.11, se tiene que $\operatorname{top}(P) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{top}(P_i) = \bigoplus_{j=1}^{m} \operatorname{top}(Q_j)$, donde $\operatorname{top}(P_i)$ y $\operatorname{top}(Q_j)$ son simples, según (c). Dado que $\ell({}_\Lambda S) = 1$ $\forall$ ${}_\Lambda S$ simple, concluimos que

$$n = \sum_{i=1}^{n} \ell(\operatorname{top}(P_i)) = \ell(\operatorname{top}(P)) = \sum_{j=1}^{m} \ell(\operatorname{top}(Q_j)) = m.$$

Por otro lado, como la multiplicidade de los simples está bien definida (ver 2.1.12) se tiene que $\exists\ \sigma \in S_n$ tal que $\operatorname{top}(P_i) \simeq \operatorname{top}(Q_{\sigma(i)})$. Luego aplicando (b), se tiene (d). □

Corolario 2.8.16. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda y ${}_\Lambda S_1, {}_\Lambda S_2, \ldots, {}_\Lambda S_n$ una lista completa de Λ-simples no isomorfos. Entonces*

(*a*) *$P_0({}_\Lambda S_1), P_0({}_\Lambda S_2), \ldots, P_0({}_\Lambda S_n)$ es una lista completa de Λ-módulos proyectivos inescindibles, finitamente generados y no isomorfos.*

(*b*) $\operatorname{top}({}_\Lambda\Lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} {}_\Lambda S_i^{m_i}$ *si y sólo si* ${}_\Lambda\Lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P_0({}_\Lambda S_i)^{m_i}$.

Demostración. (b) ($\Rightarrow$) Sea $\operatorname{top}({}_\Lambda\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^{n} {}_\Lambda S_i^{m_i}$. Sabemos por 2.8.12 (b), que $\bigoplus_{i=1}^{n} P_0({}_\Lambda S_i)^{m_i} \longrightarrow \operatorname{top}({}_\Lambda\Lambda)$ es cubierta proyectiva, y por 2.8.3 ${}_\Lambda\Lambda \longrightarrow \operatorname{top}({}_\Lambda\Lambda)$ es cubierta proyectiva. Por lo tanto ${}_\Lambda\Lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P_0({}_\Lambda S_i)^{m_i}$ (ver Ejercicio 2.8.6).

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que ${}_\Lambda\Lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P_0({}_\Lambda S_i)^{m_i}$. Luego por 2.8.11 y 2.8.12 (a), obtenemos que

$$\operatorname{top}({}_\Lambda\Lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{top}(P_0({}_\Lambda S_i))^{m_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} {}_\Lambda S_i^{m_i}.$$

(a) Dado que $\mathrm{top}(P_0({}_\Lambda S_i)) \simeq {}_\Lambda S_i$ (ver 2.8.12 (a)), concluimos de 2.8.12 (b) que $P_0({}_\Lambda S_1), P_0({}_\Lambda S_2), \ldots, P_0({}_\Lambda S_n)$ son no isomorfos dos a dos. Veamos que la lista es completa. Sea ${}_\Lambda P$ proyectivo, inescindible y finitamente generado. En particular, $\exists\ m \in \mathbb{N}^+$ y un epimorfismo ${}_\Lambda\Lambda^m \longrightarrow {}_\Lambda P$. Luego, por ser ${}_\Lambda P$ proyectivo, $\exists\ Q$ tal que $P \oplus Q = {}_\Lambda\Lambda^m \simeq \bigoplus_{i=1}^n P_0({}_\Lambda S_i)^{m \cdot m_i}$. Por lo tanto, de 2.8.15 (d), $\exists\ i_0$ tal que $P \simeq P_0({}_\Lambda S_{i_0})$. □

Ejercicio 2.8.17. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Pruebe que $\forall\ A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ se tiene que $\mathrm{top}(P_0(A)) \simeq \mathrm{top}(A)$.

Teorema 2.8.18. *Sea Λ un anillo (no trivial) artiniano a izquierda. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) Λ *es un anillo local.*

(*b*) *Los únicos idempotentes son los triviales.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Es consecuencia de 2.7.6.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que los únicos idempotentes de Λ son los triviales. Dado que $\Lambda \simeq \mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda)^{op}$, se tiene que $\mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda)$ sólo tiene idempotentes triviales, y por 2.7.5, ${}_\Lambda\Lambda$ es inescindible. En virtud de 2.8.16, $\mathrm{rk}(K_0(\Lambda)) = 1$, y de 2.6.14 (d), tenemos que $\mathrm{rk}(K_0(\Lambda/J(\Lambda))) = 1$. Luego, por 2.6.14 (b), $\Lambda/J(\Lambda)$ es simple como $\Lambda/J(\Lambda)-$ módulo; en particular es simple como Λ-módulo, por lo que $J(\Lambda)$ es un ideal a izquierda maximal en Λ, probándose que Λ es local. □

Corolario 2.8.19. *Sea R un anillo conmutativo y artiniano. Entonces* $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(R)$, $\mathrm{End}_R(M)$ *es local si y sólo si* ${}_R M$ *es inescindible.*

Demostración. La afirmación es resultado de aplicar 2.6.20, 2.8.18 y 2.7.5 (b). □

Corolario 2.8.20. *Sea Λ un anillo no trivial artiniano a izquierda y $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) P *es inescindible.*

(*b*) $\mathscr{M}_{{}_\Lambda P} = \{\mathrm{rad}(P)\}$, *i.e.* $\mathrm{rad}(P)$ *es el único submódulo maximal de* P.

(*c*) $\mathrm{End}_\Lambda(P)$ *es local.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea P inescindible. Por 2.8.15 (c), $\mathrm{top}(P)$ es simple, lo cual muestra (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\mathscr{M}_{{}_\Lambda P} = \{\mathrm{rad}(P)\}$. Para ver que $\mathrm{End}_\Lambda(P)$ es local, verificaremos 2.7.1 (d). Veamos primero que

$$\forall\ f \in \mathrm{End}_\Lambda(P),\ f \text{ no es un isomorfismo } \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P). \qquad (2.9)$$

En efecto, por el Ejercicio 2.1.14 (b), se tiene que f no es un isomorfismo si y sólo si f no es un epimorfismo; y por hipótesis, esto último es equivalente a que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P)$.

Ahora bien, sean $f, g \in \operatorname{End}_\Lambda(P)$ no invertibles. Luego, por (2.9) se tiene que $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{rad}(P)$; esto es, $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{rad}(P)$, y de nuevo, por (2.9), $f+g$ no es un isomorfismo.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sale de 2.7.7. $\square$

Definición 2.8.21. Sea Λ un anillo.

(a) Una familia $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de idempotentes en Λ se dice que es:

- (a_1) *Completa* si $1 = \sum_{i=1}^n e_i$,
- (a_2) *Ortogonal* si $e_i e_j = 0 \ \forall\ i \neq j$.

(b) Un idempotente $e \in \Lambda$ es *primitivo* si $e \neq 0$, y cada vez que $e = f + g$ con f, g idempotentes y $fg = 0$, se tiene que $f = 0$ ó $g = 0$.

Ejercicio 2.8.22. Sea Λ un anillo (no trivial) y $e \in \Lambda$ un idempotente no nulo. Pruebe que

(a) Si $\Lambda e = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ y $e_i \in P_i$ son tales que $e = \sum_{i=1}^n e_i$, entonces $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una familia de idempotentes en Λ ortogonales tal que $\Lambda e_i = P_i \ \forall\ i$.

(b) Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una familia de idempotentes ortogonales en Λ tal que $e = \sum_{i=1}^n e_i$, entonces $\Lambda e_i \in \mathscr{L}(\Lambda e)$ y $\Lambda e = \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i$.

Lema 2.8.23. *Sea Λ un anillo (no trivial) y $e \in \Lambda$ un idempotente. Entonces, e es primitivo si y sólo si Λe es un Λ-módulo proyectivo inescindible.*

Demostración. Sea $e^2 = e$ primitivo. Consideremos el idempotente $e' := 1 - e$. Luego $ee' = e'e$ y $e + e' = 1$; y por el Ejercicio 2.8.22, se tiene que ${}_\Lambda\Lambda = \Lambda e \bigoplus \Lambda e'$, de donde $\Lambda e \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Veamos que Λe es inescindible. Sea $\Lambda e = P_1 \oplus P_2$ y $e_i \in P_i,\ i = 1, 2$ tales que $e = e_1 + e_2$. Por el Ejercicio 2.8.22 (a), $\{e_1, e_2\}$ es una familia de idempotentes ortogonales de Λ tales que $\Lambda e_i = P_i$. Como e es primitivo, se tiene que $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$; lo cual muestra que $P_1 = 0$ ó $P_2 = 0$.

Sea Λe inescindible y $e = e_1 + e_2$ con $\{e_1, e_2\}$ una familia de idempotentes ortogonales de Λ. Por el Ejercicio 2.8.22 (b), $\Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 = \Lambda e$; de donde $\Lambda e_1 = 0$ ó $\Lambda e_2 = 0$ por ser Λe inescindible. Por consiguiente $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$. $\square$

Teorema 2.8.24. *Sea Λ un anillo (no trivial) artiniano a izquierda. Entonces existe una familia completa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonales y primitivos en Λ.*

Demostración. Por 2.8.16, tenemos ${}_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda P_i$ con ${}_\Lambda P_i$ inescindible $\forall\ i$. Sea $e_i \in P_i$ tal que $1 = \sum_{i=1}^n e_i$. Luego, por el Ejercicio 2.8.22 y 2.8.23, se tiene que la familia $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ satisface las condiciones requeridas. $\square$

Ejercicio 2.8.25. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda, $\mathfrak{r} := J(\Lambda)$ y $\{e, f\}$ una familia de idempotentes en Λ. Pruebe que el siguiente morfismo de grupos abelianos $\varphi : e\Lambda f \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda e, \Lambda f)$, dado por $\varphi(e\lambda f)(\lambda' e) := \lambda' e \lambda f$, es un isomorfismo, y que la restricción $\varphi|_{e\mathfrak{r}^m f} : e\mathfrak{r}^m f \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda e, \mathfrak{r}^m f)$ es un isomorfismo.

2.9. Dimensiones homológicas en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

Definición 2.9.1. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda.

(a) Una *resolución proyectiva* $P_\bullet$ de $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ es una sucesión exacta larga en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde $P_i \in \mathscr{P}(\Lambda)\ \forall\ i \in \mathbb{N}$.

Decimos que $P_\bullet$ tiene longitud finita si $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $P_n = 0\ \forall\ n > m$; en tal caso, $\ell(P_\bullet) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid P_n = 0\ \forall\ n > m\}$.

Decimos que $P_\bullet$ tiene longitud infinita, *i.e.* $\ell(P_\bullet) = \infty$, si $\forall\ m \in \mathbb{N}\ \exists\ n > m$ tal que $P_n \neq 0$.

(b) La *resolución proyectiva minimal* $P_\bullet(M)$ de $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ es una sucesión exacta larga en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ (única hasta isomorfismos)

$$P_\bullet(M) : \cdots \longrightarrow P_m(M) \xrightarrow{\varepsilon_M^{(m)}} P_{m-1}(M) \xrightarrow{\varepsilon_M^{(m-1)}} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_M^{(2)}} P_1(M) \xrightarrow{\varepsilon_M^{(1)}}$$

$$P_0(M) \xrightarrow{\varepsilon_M^{(0)}} M \longrightarrow 0,$$

tal que $\varepsilon_M^{(0)} := \varepsilon_M$ y $\varepsilon_M^{(i)} : P_i(M) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\varepsilon_M^{(i-1)})$ es cubierta proyectiva $\forall\ i \geqslant 1$.

(c) La *dimensión proyectiva* $\operatorname{pd} : \operatorname{Obj}(\operatorname{mod}(\Lambda)) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define como $\operatorname{pd}(M) := \min\{\ell(P_\bullet) \mid P_\bullet$ es una resolución proyectiva de $M\}$.

(d) La *dimensión global* $\operatorname{gldim}(\Lambda)$ de Λ es $\operatorname{gldim}(\Lambda) := \sup\{\operatorname{pd}(M) \mid M \in \operatorname{mod}(\Lambda)\}$.

$(a)^{op}$ Una *corresolución inyectiva* $I_\bullet$ de $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ es una sucesión exacta larga en $\operatorname{Mod}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \longrightarrow \cdots,$$

donde I_i es proyectivo $\forall\ i$.

Decimos que $I_\bullet$ tiene longitud finita si $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = 0\ \forall\ n > m$; en tal caso $\ell(I_\bullet) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid I_n = 0\ \forall\ n > m\}$. Decimos que $I_\bullet$ tiene longitud infinita, si $\forall\ m \in \mathbb{N}\ \exists\ n > m$ tal que $I_n \neq 0$.

$(c)^{op}$ La *dimensión inyectiva* $\operatorname{id} : \operatorname{Obj}(\operatorname{mod}(\Lambda)) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define como $\operatorname{id}(M) := \min\{\ell(I_\bullet) \mid I_\bullet$ es una corresolución inyectiva de $M\}$.

Ejercicio 2.9.2. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda y $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Pruebe que:

(a) ${}_\Lambda M$ es proyectivo $\Longleftrightarrow \operatorname{pd}({}_\Lambda M) = 0$.

$(a)^{op}$ ${}_\Lambda M$ es inyectivo $\iff \mathrm{id}({}_\Lambda M) = 0$.

En el siguiente Teorema, reunimos (sin dar una prueba) los resultados homológicos necesarios para el desarrollo de la presente tesis. El lector interesado en dichas pruebas puede consultar [10].

Teorema 2.9.3. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda),\ \mathrm{pd}(M) = \ell(P_\bullet(M))$.

(b) $\mathrm{gldim}(\Lambda) = \sup\{\mathrm{id}(M) \mid M \in \mathrm{mod}(\Lambda)\}$.

(c) *Sea* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces*

(c_1) $\mathrm{pd}(N) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(L)+1\}$, $\mathrm{id}(N) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(L)-1\}$.

(c_2) $\mathrm{pd}(M) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}(L), \mathrm{pd}(N)\}$, $\mathrm{id}(M) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{id}(L), \mathrm{id}(N)\}$.

(c_3) $\mathrm{pd}(L) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(N)-1\}$, $\mathrm{id}(L) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{id}(M), \mathrm{id}(N)+1\}$.

(d) $\forall\ \{M_i\}_{i=1}^n$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{pd}(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \mathrm{máx}_{1\leqslant i\leqslant n}\,\mathrm{pd}(M_i)$, *y también* $\mathrm{id}(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \mathrm{máx}_{1\leqslant i\leqslant n}\,\mathrm{id}(M_i)$.

(e) *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces* $\mathrm{pd}(M) \leqslant n$ *si y sólo si para toda sucesión exacta*

$$P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $P_i \in \mathscr{P}(\Lambda)\ \forall\ i$, *se tiene que* $\mathrm{Ker}(f_{n-1}) \in \mathscr{P}(\Lambda)$.

(f) *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces* $\mathrm{id}(M) \leqslant n$ *si y sólo si para toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} I_{n-1},$$

con I_i Λ*-inyectivo* $\forall\ i$, *se tiene que* $\mathrm{Coker}(f_{n-2})$ *es inyectivo.*

Teorema 2.9.4. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Entonces*

$$\mathrm{gldim}(\Lambda) = \mathrm{pd}(\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda)) = \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}({}_\Lambda S) \mid {}_\Lambda S \in \mathscr{S}\},$$

donde $\mathscr{S}$ es la clase de los Λ-módulos simples.

Demostración. Por 2.8.16 (b) tenemos que $\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i}$. Luego, por 2.9.3 (b), se tiene que

$$\mathrm{pd}(\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda)) = \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}({}_\Lambda S) \mid {}_\Lambda S \in \mathscr{S}\} \leqslant \mathrm{gldim}(\Lambda).$$

Podemos asumir que $n := \mathrm{pd}(\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda)) < \infty$. Veamos, por inducción sobre $\ell(M)$, que $\mathrm{pd}(M) \leqslant n\ \forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. En efecto, si $\ell(M) \leqslant 1$ entonces $M = 0$ ó M es simple, por lo que $\mathrm{pd}(M) \leqslant n$. Supongamos que $\ell(M) > 1$, luego existe un simple $S \in \mathscr{L}({}_\Lambda M)$ y una sucesión exacta $0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M/S \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\ell(M/S) = \ell(M) - 1$. Por hipótesis inductiva, tenemos $\mathrm{pd}(M/S) \leqslant n$. Aplicando ahora 2.9.3 (c$_2$), concluimos que $\mathrm{pd}(M) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}(S), \mathrm{pd}(M/S)\} \leqslant n$. Por lo tanto $\mathrm{gldim}(\Lambda) = \mathrm{pd}(\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda))$. $\square$

Definición 2.9.5. Sea Λ un anillo. Decimos que Λ es *hereditario a izquierda* si todos los ideales a izquierda de Λ son proyectivos.

Proposición 2.9.6. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) Λ *es hereditario a izquierda.*

(*b*) ${}_\Lambda J(\Lambda) \in \mathscr{P}(\Lambda)$.

(*c*) $\mathrm{pd}(\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda)) \leqslant 1$.

(*d*) $\mathrm{gldim}(\Lambda) \leqslant 1$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Es claro, pues $J(\Lambda) \trianglelefteq \Lambda$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow J(\Lambda) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathrm{top}(\Lambda) \longrightarrow 0$. Por 2.9.3 (c) y el Ejercicio 2.9.2 (a), se concluye que

$$\mathrm{pd}(\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda)) \leqslant \text{máx}\{\mathrm{pd}({}_\Lambda\Lambda), \mathrm{pd}(J(\Lambda)) + 1\} \leqslant 1.$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Es consecuencia de 2.9.4.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sea $I \in \mathscr{L}({}_\Lambda\Lambda)$, veamos que ${}_\Lambda I \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/I \longrightarrow 0$. Entonces $\mathrm{pd}(\Lambda/I) \leqslant \mathrm{gldim}(\Lambda)$, y por 2.9.3 (e), se tiene que ${}_\Lambda I \in \mathscr{P}(\Lambda)$. $\square$

Ejercicio 2.9.7. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Pruebe que Λ es semisimple si y sólo si $\mathrm{gldim}(\Lambda) = 0$.

Capítulo 3

Álgebras de Artin

En este capítulo definimos álgebras de artin. El objetivo principal para usar estas álgebras es que nos permiten demostrar la existencia de una dualidad entre los módulos izquierdos finitamente generados y los módulos derechos finitamente generados, dualidad dada por el funtor $*$; esto es, exhibir la existencia de anillos con dualidad. Al final del capítulo se estudia el funtor de Nakayama, el cual muestra la existencia de una dualidad entre módulos proyectivos e inyectivos finitamente generados sobre álgebras de artin. También utilizamos el proceso de proyectivización para dar una prueba del Teorema de Kull-Renark-Schmidt. Iniciamos con definiciones esenciales de este capítulo, para luego entrar de lleno a la teoría.

3.1. Nociones básicas

Definición 3.1.1. Decimos que Λ es una *R- álgebra de artin*, si satisface

(a) R es un anillo conmutativo y artiniano,

(b) Λ es una R-álgebra, vía un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$,

(c) ${}_R\Lambda \in \mathrm{mod}(R)$ con la estructura de R-módulo inducida por el cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$.

Ejercicio 3.1.2. Sea Λ una R-álgebra de artin, vía un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$. Pruebe que

(a) Λ es un anillo artiniano (a izquierda y a derecha).

(b) $C(\Lambda)$ es un anillo conmutativo y artiniano.

(c) Λ es una $C(\Lambda)$-álgebra de artin, vía la inclusión $C(\Lambda) \longrightarrow \Lambda$.

(d) Λ^{op} es una R-álgebra de artin, vía la siguiente composición de morfismos de anillos

$$R \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq C(\Lambda) = C(\Lambda^{op}) \longrightarrow \Lambda^{op}.$$

(*e*) Sea $M \in \text{Mod}(\Lambda)$. Por el cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, se tiene que $M \in {}_{\Lambda-R}\text{Mod} \cap {}_R\text{Mod}_R$ con $r \cdot m = \varphi(r)m = m \cdot r,\ \forall\, r \in R,\ \forall\, m \in M$.

En particular, por cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, se tiene que $\text{Mod}(\Lambda)$ es una subcategoría (no necesariamente plena) de $\text{Mod}(R)$, ya que $\text{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M, {}_\Lambda N) \leqslant \text{Hom}_R({}_R M, {}_R N)$ como $\mathbb{Z}$-módulos.

Lema 3.1.3. *Sea Λ una R-álgebra de artin, vía $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\, A, B \in \text{Mod}(\Lambda)$, $\text{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)$ *es un R-submódulo de* $\text{Hom}_R({}_R A, {}_R B)$.

(*b*) $\text{mod}(\Lambda)$ *es una subcategoría (no necesariamente plena) de* $\text{mod}(R)$.

Demostración. (a) Por el Ejercicio 3.1.2 (e), dados $A, B \in \text{Mod}(\Lambda)$, se tiene que todas las posibles estructuras de R-módulo inducidas por el Ejercicio 1.9.8 se reducen a una sola, a saber: para $\text{Hom}_R({}_R A, {}_R B)$ la única acción posible es

$$(r \cdot f)(a) = \varphi(r)f(a) \quad \forall\, r \in R,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, f \in\ \text{Hom}_R({}_R A, {}_R B).$$

En efecto, consideremos el bimódulo ${}_R A_R$, se tiene que $(r \cdot f)(a) = f(a \cdot r) = f(r \cdot a) = r \cdot f(a) = \varphi(r)f(a)$. Tomando ahora el bimódulo ${}_R B_R$, tenemos $(r \cdot f)(a) = f(a) \cdot r = r \cdot f(a) = \varphi(r)f(a)$. Análogamente, se puede usar que la única acción posible de R en $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ es $(r \cdot g)(a) = \varphi(r)g(a)\ \forall\, r \in R, \forall\, a \in A$.

Finalmente por el Ejercicio 1.9.6 $\text{Hom}_\Lambda(A, B) \leqslant \text{Hom}_R(A, B)$ como grupos, y la acción de R sobre cada uno de ellos es la misma. Lo cual muestra (a).

(b) Sea $A \in \text{mod}(\Lambda)$. Veamos que ${}_R A \in \text{mod}(R)$ con la estructura de R-módulo dada por el cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$. Como $A \in \text{mod}(\Lambda)$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ y un epimorfismo $g : {}_\Lambda\Lambda^n \longrightarrow {}_\Lambda A$. Pero por cambio de anillos, $g : {}_R\Lambda^n \longrightarrow {}_R A$ es un epimorfismo de R-módulos. Por otro lado existe $m \in \mathbb{N}^+$ y un epimorfismo $f : {}_R R^m \longrightarrow {}_R\Lambda$ de R-módulos pues ${}_R\Lambda \in \text{mod}(R)$. Luego, existe un epimorfismo ${}_R R^{mn} \longrightarrow {}_R A$ de R-módulos; probándose que ${}_R A \in \text{mod}(R)$. □

Lema 3.1.4. *Sea Λ una R-álgebra de artin, vía un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, y $A \in \text{Mod}(\Lambda)$. Entonces*

(*a*) $\Phi : R \longrightarrow \text{End}_\Lambda(A)$ *con* $\Phi(r)(a) := r \cdot a = \varphi(r)a$ *es un morfismo de anillos.*

(*b*) $\text{End}_\Lambda(A)$ *es una R-álgebra, vía* $\Phi : R \longrightarrow \text{End}_\Lambda(A)$. *También,* $\text{End}_R(A)$ *es una R-álgebra, vía* $R \xrightarrow{\Phi} \text{End}_\Lambda(A) \xrightarrow{i} \text{End}_R(A)$ *donde i es la inclusión.*

(*c*) $\text{End}_\Lambda(A)$ *es una R-subálgebra de* $\text{End}_R(A)$.

Demostración. (a) Por el Ejercicio 3.1.2 (e), tenemos los bimódulos ${}_\Lambda A_R$ y ${}_R A_R$ con $r \cdot a = \varphi(r)a = a \cdot r$. Luego, por 1.10.3, $\rho : R = R^{op} \longrightarrow \text{End}_\Lambda(A)^{op}$ dado por $(a)\rho(r) = a \cdot r = \varphi(r)a$ es un morfismo de anillos. Por lo tanto,

$\rho^{op} : R \longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(A)$ dado por $\rho^{op}(r)(a) := (a)\rho(r) = \varphi(r)a$ es un morfismo de anillos; de donde se sigue (a) pues $\rho^{op} = \Phi$.

(b) Es suficiente probar que $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq C(\mathrm{End}_R(A)) \cap \mathrm{End}_\Lambda(A) \subseteq C(\mathrm{End}_\Lambda(A))$. La última inclusión es trivial; por lo tanto basta probar la primera. Sean $g \in \mathrm{End}_R(A),\ r \in R$ y $a \in A$; veremos que $\Phi(r)g = g\Phi(r)$:

$$(\Phi(r)g)(a) = \Phi(r)(g(a)) = r \cdot g(a) = g(r \cdot a) = g(\varphi(r)a) = (g\Phi(r))(a).$$

(c) Tenemos que probar que la inclusión $i : \mathrm{End}_\Lambda(A) \longrightarrow \mathrm{End}_R(A)$ es un morfismo de R-álgebras. Esto es, veamos que $\forall\ r \in R,\ \forall\ f \in \mathrm{End}_\Lambda(A)$ se tiene que $i(\Phi(r)f) = (i\Phi)(r)i(f)$. Para esto, sea $a \in A$; luego

$$i(\Phi(r)f)(a) = \Phi(r)(f(a)) = \varphi(r)f(a) = (i\Phi(r))(f(a)) = ((i\Phi)(r)i(f))(a).$$

$\square$

Proposición 3.1.5. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ A, B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *se tiene que* $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ *y* $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ *son R-módulos finitamente generados.*

(*b*) $\forall\ A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *se tiene que* $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ *y* $\mathrm{End}_R(A)$, *con la estructura de R-álgebra dada en 3.1.4, son R-álgebras de artin.*

Demostración. (a) Sean $A, B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por 3.1.3 (b), se tiene que ${}_RA, {}_RB \in \mathrm{mod}(R)$. En particular, existe un epimorfismo $h : {}_RR^m \longrightarrow {}_RA$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(h, B) : \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R({}_RR^m, {}_RB)$ es un monomorfismo de R-módulos pues $\mathrm{Hom}_R(h, B)(\alpha) := \alpha h$ y h es un epimorfismo.

Por otro lado, $\mathrm{Hom}_R({}_RR^m, {}_RB) \simeq {}_RB^m$ como R-módulos y ${}_RB^m$ es noetheriano (véase 2.6.3). Luego $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ son R-módulos noetherianos, y por lo tanto, finitamente generados.

(b) Sale de (a) y de 3.1.4. $\square$

Ejercicio 3.1.6. Sea Λ una R-álgebra de artin y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ (resp. $\mathrm{mod}(\Lambda)$). Pruebe que $\forall\ X \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ (resp. $\mathrm{mod}(\Lambda)$), se tienen las siguientes sucesiones exactas en $\mathrm{Mod}(R)$ (resp. $\mathrm{mod}(\Lambda)$)

(*a*) $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(X,f)} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(X,g)} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)$ (*i.e.* el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, -)$ es exacto a izquierda).

(*b*) $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(g,X)} \mathrm{Hom}_\Lambda(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(f,X)} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)$ (*i.e.* el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, X)$ es exacto a izquierda).

Proposición 3.1.7. *Sea Λ una R-álgebra de artin, $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$ inescindible, ${}_\Lambda S := \mathrm{top}({}_\Lambda P)$, $\pi_P : P \longrightarrow S$ el epi-canónico y $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-módulos simples. Entonces*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi_P, {}_\Lambda S) : \mathrm{End}_\Lambda({}_\Lambda S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda P, {}_\Lambda S)$ *es un isomorfismo de R-módulos.*

(b) $\forall\ X \in \mathscr{S}$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, X) \neq 0$ *si y sólo si* ${}_\Lambda S \simeq X$.

(c) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\ell_R(\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda P, {}_\Lambda S)) = \mathfrak{m}_S(M)\ \ell_R(\mathrm{End}_\Lambda({}_\Lambda S))$.

Demostración. (a) Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathrm{rad}(P) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi_P} S \longrightarrow 0$. Por el Ejercicio 3.1.6 (b), se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(S) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi_P,S)} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, S) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(i,S)} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{rad}(P), S).$$

Basta ver que $\mathrm{Hom}_\Lambda(i, S) = 0$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, S)$, luego $\mathrm{Hom}_\Lambda(i, S)(f) = fi$. Podemos suponer que $f \neq 0$. Entonces $f : P \longrightarrow S$ es un epimorfismo, por lo que $\mathrm{Ker}(f) \in \mathscr{M}_{{}_\Lambda P}$; y por 2.8.20 (b), $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{rad}(P)$ de donde $fi = 0$.

(b) Sea $X \in \mathscr{S}$.

($\Rightarrow$) Sea $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, X) \neq 0$. Dado que X es simple, existe un epimorfismo $f : P \longrightarrow X$ con $f \neq 0$. En particular $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P)$ (cf. 2.8.20); y por 2.8.2 (b), se tiene que $S \simeq X$.

($\Leftarrow$) Sea $\theta : X \longrightarrow {}_\Lambda S$ un isomorfismo. Por ser P proyectivo, $\exists\ t : P \longrightarrow X$ tal que $\theta t = \pi_P$. Luego $0 \neq t \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, X)$ pues $\pi_P \neq 0$.

(c) Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Consideremos una filtración de M

$$0 = M_n \leqslant M_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M$$

tal que $M_i/M_{i+1} = S_i \in \mathscr{S}$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$, esta filtración induce una serie de sucesiones exactas cortas, donde $M_{n-1} = S_{n-1}$

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow S_{n-2} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-3} \longrightarrow S_{n-3} \longrightarrow 0, \\ \vdots \\ 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0. \end{gathered}$$

Como $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$, aplicamos el Ejercicio 2.5.11 y 2.8.2 (b) a cada una de la sucesiones anteriores. Luego, denotando a $\ell_R(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y))$ por $\ell_R(X, y)$ obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{gathered} \ell_R(P, M_{n-2}) = \ell_R(P, S_{n-1}) + \ell_R(P, S_{n-2}), \\ \ell_R(P, M_{n-3}) = \ell_R(P, M_{n-2}) + \ell_R(P, S_{n-3}), \\ \vdots \\ \ell_R(P, M) = \ell_R(P, M_1) + \ell_R(P, S_0). \end{gathered}$$

Por lo tanto, de (a) y (b), tenemos que

$$\ell_R(P, M) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_R(P, S_i) = \mathfrak{m}_S(M)\, \ell_R(P, S) = \mathfrak{m}_S(M)\ell_R(\mathrm{End}_\Lambda(S)).$$

□

Definición 3.1.8. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y R un anillo conmutativo.

(a) Decimos que $\mathscr{C}$ es una *R-categoría* si

(a_1) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \in \mathrm{Mod}(R) \ \ \forall\ A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$;

(a_2) la composición $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$ dada por $(g,f) \mapsto gf$ en $\mathscr{C}$ es R-bilineal, *i.e.*

(i) $\forall\ r \in R,\ \forall\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C),\ \forall\ f_1,f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ se tiene que $g(rf_1+f_2) = r(gf_1)+gf_2$.

(ii) $\forall\ r \in R,\ \forall\ g_1,g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C),\ \forall\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ se tiene que $(rg_1+g_2)f = r(g_1f)+g_2f$.

(b) Decimos que una R-categoría $\mathscr{C}$ es *Hom-finita* si $\forall\ A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \in \mathrm{mod}(R)$.

Ejercicio 3.1.9. Sea $\mathscr{C}$ una R-categoría con un sólo elemento $*$ y sea R un anillo conmutativo artiniano. Pruebe las siguientes equivalencias.

(a) $\mathscr{C}$ es una R-categoría $\Longleftrightarrow \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(*)$ es una $R-$álgebra.

(b) $\mathscr{C}$ es una R-categoría Hom-finita $\Longleftrightarrow \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(*)$ es una R-álgebra de artin.

Ejemplos: Sea Λ una R-álgebra de artin.

(1) $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ es una R-categoría.

(2) $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es una R-categoría Hom-finita.

(3) $\mathrm{mod}(R)$ es una R-categoría Hom-finita.

(4) $\forall\ A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{add}({}_\Lambda A)$ es una R-categoría Hom-finita, donde $\mathrm{add}({}_\Lambda A)$ es la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ para los cuales $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y $\exists\ Y \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tales que $X \oplus Y \simeq A^n$.

(5) $\mathscr{P}(\Lambda)$ es una R-categoría Hom-finita pues $\mathscr{P}(\Lambda) = \mathrm{add}({}_\Lambda\Lambda)$.

Definición 3.1.10. Un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ entre R-categorías se dice que es *R- lineal* (R-funtor) si $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ es un morfismo de R-módulos $\forall\ A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Ejemplos 3.1.11. Sea Λ una R-álgebra de artin vía un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$.

(1) El cambio de anillos $F_\varphi : \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$ dado por $({}_\Lambda M \xrightarrow{f} {}_\Lambda N) \mapsto ({}_R M \xrightarrow{f} {}_R N)$ es un R-funtor tal que $F_\varphi(\mathrm{mod}(\Lambda)) \subseteq \mathrm{mod}(R)$.

(2) Para cada $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, tenemos que $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(A)^{op}$ es una R-álgebra de artin (cf. 3.1.5 y el Ejercicio 3.1.2 (d)), y el funtor evaluación $e_A := \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A_\Gamma, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ es R-lineal. En efecto, veamos que $\forall\ X \in \mathrm{mod}(\Lambda), e_A(X) \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Sabemos que $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ es una R-álgebra

de artin vía $\Phi : R \longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(A)$ donde $\Phi(r)(a) := \varphi(r)a \; \forall \; a \in A, \; \forall \; r \in R$. Luego Γ es una R-álgebra de artin vía $\Phi^{op} : R \longrightarrow \Gamma$ donde $(a)\Phi^{op}(r) = \Phi(r)(a)$.

Sea $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, tenemos 2 estructuras de R-módulos en $e_A({}_\Lambda X) := \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A_\Gamma, {}_\Lambda X)$, a saber

$(r \cdot f)(a) := \varphi(r)f(a)$ dada por 3.1.3, y
$(r\Box f)(a) := \Phi^{op}(r)f(a)$ dada por el cambio de anillos $\Phi^{op} : R \longrightarrow \Gamma$.

Veamos que las 2 estructuras son iguales, en efecto,

$$(r\Box f)(a) = (\Phi^{op}(r)f)(a) = f((a)\Phi^{op}(r)) = f(\varphi(r)a) = \varphi(r)f(a).$$

Por 3.1.5 (a), se tiene que $e_A({}_\Lambda X) \in \mathrm{mod}(R)$, donde $e_A({}_\Lambda X)$ es un $R-$módulo por el cambio de anillos $\Phi^{op} : R \longrightarrow \Gamma$.

Dado que R es artiniano, se tiene que ${}_\Gamma e_A({}_\Lambda X)$ es noetheriano. En efecto, sea $\{{}_\Gamma N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cadena ascendente en $\mathscr{L}({}_\Gamma e_A({}_\Lambda X))$. Luego, por el cambio de anillos $\Phi^{op} : R \longrightarrow \Gamma$ se tiene que $\{{}_R N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cadena ascendente en $\mathscr{L}({}_R e_A({}_\Lambda X)$, la cual se estabiliza, pues ${}_R e_A({}_\Lambda X)$ es noetheriano, lo cual implica que $\{{}_\Gamma N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se estabiliza, probándose que ${}_\Gamma e_A({}_\Lambda X)$ es noetheriano; y por lo tanto $e_A({}_\Lambda X) \in \mathrm{mod}(\Gamma)$.

Definición 3.1.12. Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un R-funtor. Para $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, consideremos el R-morfismo $F_{A,B} := F : \mathrm{Hom}_\mathscr{C}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\mathscr{D}(F(A), F(B))$. Decimos que

(*a*) F es *fiel* si $F_{A,B}$ es un monomorfismo $\forall \; A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(*b*) F es *pleno* si $F_{A,B}$ es un epimorfismo $\forall \; A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(*c*) F es *denso* si $\forall \; Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D}) \; \exists \; X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tal que $F(X) \simeq Y$.

(*d*) F es una *R- equivalencia* si existe un R-funtor $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que $G \circ F \simeq 1_\mathscr{C}$ y $F \circ G \simeq 1_\mathscr{D}$.

Proposición 3.1.13. *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un R-funtor. Entonces F es una R-equivalencia si y sólo si F es fiel, pleno y denso.*

Demostración. Veáse el Teorema 1.2 del Capítulo II, de [3] $\Box$

Definición 3.1.14. Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un R-funtor contravariante. Para cada $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ consideramos el R-morfismo $F_{A,B} := F : \mathrm{Hom}_\mathscr{C}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\mathscr{D}(F(B), F(A))$. Decimos que

(*a*) F es fiel si $F_{A,B}$ es un monomorfismo $\forall \; A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(*b*) F es pleno si $F_{A,B}$ es un epimorfismo $\forall \; A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(*c*) F es denso si $\forall \; Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D}) \; \exists \; X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tal que $F(X) \simeq Y$.

(d) F es una R-dualidad si existe un R-funtor contravariante $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que $G \circ F \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G \simeq 1_{\mathscr{D}}$.

Proposición 3.1.15. *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un R-funtor contravariante. Entonces F es una R-dualidad si y sólo si F es fiel, pleno y denso.*

Demostración. Se obtiene al considerar la categoría dual de $\mathscr{D}$ y dualizar 3.1.13. □

3.2. El proceso de Proyectivización

Una característica importante de la teoría de álgebras de artin, a diferencia de la teoría de anillos artinianos a izquierda, es que los anillos de endomorfismos de módulos finitamente generados son también álgebras de artin. En principio, esto nos permite reducir problemas que envuelven un número finito de módulos sobre una álgebra de artin, a problemas sobre módulos proyectivos finitamente generados sobre alguna álgebra de artin. Esto es en esencia el proceso de proyectivización.

Teorema 3.2.1. *Sea Λ una R-álgebra de artin, $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(A)^{op}$ y $e_A := \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A_\Gamma, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ el R-funtor de evaluación (cf. 3.1.11 (2)). Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $e_A : \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(e_A(Z), e_A(X))$ *es un isomorfismo en* $\mathrm{mod}(R)$ $\forall\ Z \in \mathrm{add}({}_\Lambda A),\ \forall\ X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) $e_A|_{\mathrm{add}({}_\Lambda A)} : \mathrm{add}({}_\Lambda A) \longrightarrow \mathscr{P}(\Gamma)$ *es una R-equivalencia.*

Demostración. (a) Veamos primero que

$$e_A : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(e_A({}_\Lambda A), e_A(X)) \text{ es un isomorfismo.} \tag{3.1}$$

En efecto, $e_A({}_\Lambda A_\Gamma) = \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A_\Gamma, {}_\Lambda A_\Gamma) = {}_\Gamma\Gamma^{op}_\Gamma = {}_\Gamma\Gamma_\Gamma$. La última igualdad se prueba como sigue. Sean $f \in e_A(A) = \Gamma^{op}$ y $\gamma \in \Gamma$. Luego

$(\gamma f)(a) = f((a)\gamma) = f(\gamma^{op}(a))$ de donde $\gamma f = f\gamma^{op} = (f^{op})^{op}\gamma^{op} = \gamma f^{op}$ y así $\gamma f = \gamma f^{op}$; probándose que ${}_\Gamma\Gamma^{op} = {}_\Gamma\Gamma$. Análogamente, tenemos

$(f\gamma)(a) = f(a)\gamma = \gamma^{op}(f(a))$ por lo que $f\gamma = \gamma^{op} f = \gamma^{op}(f^{op})^{op} = f^{op}\gamma$ de donde $f\gamma = f^{op}\gamma$; probándose que $\Gamma^{op}_\Gamma = \Gamma_\Gamma$.

Ahora bien, dado que $e_A({}_\Lambda A_\Gamma) = {}_\Gamma\Gamma_\Gamma$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Gamma({}_\Gamma\Gamma_\Gamma, e_A(X)) \arrow[r, "\alpha"] & e_A(X) \arrow[d, equal] \\ & \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A, X) \arrow[ul, "e_A"] \end{tikzcd}$$

donde $\alpha(g) := g(1_a)$ y $e_A(f)(\gamma) := f\gamma$. Como $\alpha e_A = 1$ y α es un isomorfismo se tiene que e_A es un isomorfismo, probándose (3.1).

Luego, aplicando (3.1) y que $\mathrm{Hom}(-, M)$ conmuta con coproductos finitos, se tiene que $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$

$$e_A : \mathrm{Hom}_\Lambda(A^n, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(e_A(A^n), e_A(X)) \text{ es un isomorfismo.} \tag{3.2}$$

En efecto, del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(A^n, X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "e_A"] & (\mathrm{Hom}_\Lambda(A, X))^n \arrow[d, "e_A^n"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(e_A(A^n), e_A(X)) & (\mathrm{Hom}_\Lambda(e_A(A), e_A(X)))^n, \arrow[l, "\backsim"']
\end{tikzcd}$$

y del hecho de que e_A^n es un isomorfismo por (3.1); concluimos (3.2).

Ahora, sea $Z \in \mathrm{add}(A)$. Luego $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $Z \oplus Y = A^n$. Consideremos la sucesión exacta que se escinde $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i_Z} A^n \xrightarrow{\pi_Y} Y \longrightarrow 0$. Por ser e_A un R-funtor aditivo, $0 \longrightarrow e_A(Z) \xrightarrow{e_A(i_Z)} e_A(A^n) \xrightarrow{e_A(\pi_Y)} e_A(Y) \longrightarrow 0$ es split-exacta. Por lo tanto se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(R)$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d] & 0 \arrow[d] & K' \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(Y, X) \arrow[r] \arrow[d, "e_A"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A^n, X) \arrow[r] \arrow[d, "e_A"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, X) \arrow[d, "e_A"] \\
\mathrm{Hom}_\Gamma(e_A(Y), e_A(X)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Gamma(e_A(A^n), e_A(X)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Gamma(e_A(Z), e_A(X)) \arrow[d] \\
C & 0 & C',
\end{tikzcd}$$

por el Lema de la Serpiente, tenemos que

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow 0 \longrightarrow K' \longrightarrow C \longrightarrow 0 \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(R)$, por lo que $K = 0 = C'$.

Consideremos ahora la siguiente sucesión split-exacta

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_Y} A^n \xrightarrow{\pi_Z} Z \longrightarrow 0.$$

Repitiendo el procedimiento anterior, se obtiene la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(R)$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow 0 \longrightarrow K \longrightarrow C' \longrightarrow 0 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

de donde $K' = 0 = C$. Por lo tanto $e_A : \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(e_A(Z), e_A(X))$ es un isomorfismo en $\mathrm{mod}(R)$.

(b) Veamos primero que $e_A(\mathrm{add}(_\Lambda A)) \subseteq \mathscr{P}(\Gamma)$. Para ello, sea $X \in \mathrm{add}(_\Lambda A)$; luego $X \oplus Y = A^n$, por lo que $_\Gamma\Gamma^n = e_A(A^n) = e_A(X) \oplus e_A(Y)$, por lo tanto $e_A(X) \in \mathscr{P}(\Gamma)$.

Luego, de (a), se tiene que $e_A : \mathrm{add}(_\Lambda A) \longrightarrow \mathscr{P}(\Gamma)$ es fiel y pleno. Veamos que es denso. Sea $P \in \mathscr{P}(\Gamma)$. En particular $\exists\ m \in \mathbb{N}$ y $\exists\ Q \in \mathscr{P}(\Gamma)$ tales que $P \oplus Q = {}_\Gamma\Gamma^m$. Consideremos $e \in \mathrm{End}(_\Gamma\Gamma^m)$ donde $e := i_Q\pi_Q$, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{}_\Gamma\Gamma^m = P \oplus Q \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\pi_Q"'] & & {}_\Gamma\Gamma^m = P \oplus Q \\
& Q \arrow[ur, "i_Q"'] &
\end{tikzcd}$$

de donde $e^2 = i_Q\pi_Q i_Q\pi_Q = e,\ Q = \mathrm{Im}(\pi_Q) = \mathrm{Im}(e) = e \cdot {}_\Gamma\Gamma^m,\ P = \mathrm{Ker}(\pi_Q) = \mathrm{Ker}(e) = \mathrm{Im}(1-e) = (1-e)\cdot {}_\Gamma\Gamma^m$.

Por otro lado, de (a), se tiene que $e_A : \mathrm{End}_\Lambda(A^m) \longrightarrow \mathrm{End}_\Gamma(\Gamma^m)$ es un isomorfismo de anillos. Por lo tanto $\exists\ e \in \mathrm{End}_\Lambda(A^m)$ tal que $e_A(u) = e$, y como $e^2 = e$, se tiene que $u^2 = u$.

Consideremos el idempotente $v := 1 - u \in \mathrm{End}_\Lambda(A^m)$, luego $1 - e = e_A(v)$. Veamos que $P = \{vf \mid f \in e_A(_\Lambda A^m)\}$. En efecto, $P = (1-e)_\Gamma\Gamma^m = e_A(v)_\Gamma\Gamma^m = e_A(v)e_A(_\Lambda A^m) = \{vf \mid f \in e_A(_\Lambda A^m)\}$ pues $e_A(v)(f) = vf$.

Ahora bien, como v es un idempotente, se tiene que $_\Lambda A^m = u\cdot A^m \oplus v \cdot A^m$ y $\mathrm{Im}(v) = v\cdot A^m$. Luego, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & A^m \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, shift left, "v'"] & & A^m \\
& & v\cdot A^m \arrow[ul, shift left, "v''"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $v = iv'$ y $v'v'' = 1_{\mathrm{Im}(v)}$.

Como $P = \{vf \mid f \in e_A(A^m)\}$, definimos $\alpha : P \longrightarrow e_A(vA^m)$ y $\beta : e_A(vA^m) \longrightarrow P$ como sigue $\alpha(vf) := v'f$ y $\beta(g) := vv''g$.

Veamos que α está bien definida. Si $vf = vf'$, entonces $iv'f = iv'f'$, y por ser i un monomorfismo, se tiene que $v'f = v'f'$.

Veamos que α es un Γ-morfismo. En efecto, sea $\gamma \in \Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(A)^{op}$ y $f \in e_A(A^n) = \mathrm{Hom}_\Lambda(_\Lambda A_\Gamma, A^m)$, luego $(\gamma\cdot(vf))(a) = (vf)(a)\gamma = (vf)(\gamma^{op}(a))$, esto es $\gamma\cdot(vf) = vf\gamma^{op}$. También $\alpha(\gamma\cdot(vf)) = \alpha(vf\gamma^{op}) = v'(f\gamma^{op}) = (v'f)\gamma^{op} = \gamma\cdot\alpha(vf)$.

Checamos ahora que β es un Γ-morfismo. Sea $\gamma \in \Gamma$, $g \in e_A(vA^m) = \mathrm{Hom}_\Lambda(_\Lambda A_\Gamma, vA^m)$; entonces $\beta(\gamma\cdot g) = \beta(g\gamma^{op}) = vv''g\gamma^{op} = \gamma\cdot(vv''g) = \gamma\cdot\beta(g)$.

Finalmente, verificamos que $\alpha = \beta^{-1}$. En efecto, $(\beta\alpha)(vf) = \beta(v'f) = vv''v'f = iv'v''v'f = iv'f = vf$, de donde $\beta\alpha = 1$.

Por otro lado, $(\alpha\beta)(g) = \alpha(vv''g) = v'(v''g) = g$ y así $\alpha\beta = 1$. Por lo tanto, hemos probado que $P \simeq e_A(vA^m)$ y $vA^m \in \mathrm{add}(_\Lambda A)$. $\square$

Teorema 3.2.2 (Krull-Remark-Schmidt)**.** *Sea Λ un R-álgebra de artin. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ A *es inescindible si y sólo si* $\operatorname{End}_\Lambda(A)$ *es local.*

(*b*) $\forall\ A \in \operatorname{mod}(\Lambda)\ \exists\ {}_\Lambda A = \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda A_i$, *donde* A_i *es inescindible* $\forall\ i$.

(*c*) *Sean* $\{A_i\}_{i\in I}$ *y* $\{B_j\}_{j\in J}$ *dos familias finitas de Λ-módulos inescindibles finitamente generados. Si* $\bigoplus_{i\in I} {}_\Lambda A_i \simeq \bigoplus_{j\in J} {}_\Lambda B_j$, *entonces existe una biyección* $\sigma : I \longrightarrow J$ *tal que* ${}_\Lambda A_i \simeq {}_\Lambda B_{\sigma(i)}\ \forall\ i \in I$.

Demostración. (a) Sea $A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Una prueba es por 2.8.18 y 2.7.5, pues $\operatorname{End}_\Lambda(A)$ es artiniano a izquierda (cf. 3.1.5 (b)). Hacemos otra prueba usando 2.8.20 y la R-equivalencia de categorías (cf. 3.2.1) $e_A : \operatorname{add}({}_\Lambda A) \longrightarrow \mathscr{P}_\Gamma$, donde $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(A)^{op}$.

En efecto, ${}_\Lambda A$ es inescindible $\iff e_A({}_\Lambda A) \in \mathscr{P}(\Gamma)$ y es inescindible $\iff \operatorname{End}_\Gamma(e_A(A))$ es local $\iff \operatorname{End}_\Lambda(A)$ es local.

(b) Es consecuencia de 2.8.13 (e), pues Λ es en particular un anillo artiniano a izquierda.

(c) Sea $C := \bigoplus_{i\in I} {}_\Lambda A_i \simeq \bigoplus_{j\in J} {}_\Lambda B_j$. En particular $C \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ y $\forall\ i \in I$, $\forall\ j \in J$ $A_i, B_j \in \operatorname{add}(C)$. Consideremos $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(C)^{op}$ y la R-equivalencia $e_C : \operatorname{add}(C) \longrightarrow \mathscr{P}(\Gamma)$. Por lo tanto,

$$ {}_\Gamma\Gamma = e_C(C) = \bigoplus_{i\in I} {}_\Gamma e_C(A_i) \simeq \bigoplus_{j\in J} {}_\Gamma e_C(B_j), $$

donde ${}_\Gamma e_C(A_i)$ y ${}_\Gamma e_C(B_j)$ son inescindibles $\forall\ i \in I, \forall\ j \in J$.

Aplicando 2.8.15 (b), existe una biyección $\sigma : I \longrightarrow J$ con la cual se tiene que $e_C(A_i) \simeq e_C(B_{\sigma(i)})\ \forall\ i \in I$. Por lo que ${}_\Lambda A_i \simeq {}_\Lambda B_{\sigma(i)}\ \forall\ i \in I$, pues e_A es una R-equivalencia. □

Ejercicio 3.2.3. Sea Λ un anillo y $f : M \longrightarrow N$ en $\operatorname{Mod}(\Lambda)$. Consideremos la factorización de f a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & N \\ & \operatorname{Im}(f). \arrow[ur, "i"] & \end{tikzcd}$$

Pruebe que $f : M \longrightarrow N$ es minimal a derecha si y sólo si $\overline{f} : M \longrightarrow \operatorname{Im}(f)$ es minimal a derecha.

Proposición 3.2.4. *Sea Λ una R-álgebra de artin,* $A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, $f : X \longrightarrow Y$ *en* $\operatorname{add}(A)$ *y* $e_A = \operatorname{Hom}_\Lambda({}_\Lambda A)_\Gamma : \operatorname{mod}(\Lambda) \longrightarrow \operatorname{mod}(\Gamma)$ *el funtor evaluación, donde* $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(A)^{op}$. *Entonces* $f : X \longrightarrow Y$ *es minimal a derecha si y sólo si* $e_A(f) : e_A(X) \longrightarrow e_A(Y)$ *es una cubierta proyectiva de* $\operatorname{Im}(e_A(f))$.

Demostración. En efecto, por 3.2.1, el Ejercicio 3.2.3 y por 2.8.4 (b), se tienen las equivalencias: $f : X \longrightarrow Y$ es minimal a derecha $\iff e_A(f) : e_A(X) \longrightarrow e_A(Y)$ es minimal a derecha $\iff e_A(f) : e_A(X) \longrightarrow \mathrm{Im}(e_A(Y))$ es cubierta proyectiva. □

Proposición 3.2.5. *Sea Λ una R-álgebra de artin y $\{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i\in I}$ una familia finita de morfismos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\bigoplus_{i\in I} f_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i$ *es minimal a derecha si y sólo si $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ es minimal a derecha $\forall\ i \in I$.*

Demostración. Sea $C := A \oplus B$, donde $A := \bigoplus_{i\in I} A_i$ y $B := \bigoplus_{i\in I} B_i$. Luego $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $f := \bigoplus_{i\in I} f_i : A \longrightarrow B$ está en $\mathrm{add}(C)$. Usaremos que $e_C(f) = \bigoplus_{i\in I} e_C(f_i)$ y, por lo tanto que $\mathrm{Im}(e_C(f)) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Im}(f_i)$. Entonces, por 3.2.4, $f : A \longrightarrow B$ es minimal a derecha si y sólo si

$$e_C(f) = \bigoplus_{i\in I} e_C(f_i) : \bigoplus_{i\in I} e_C(A_i) = e_C(A) \longrightarrow e_C(B) = \bigoplus_{i\in I} e_C(B_i)$$

es una cubierta proyectiva de $\mathrm{Im}(e_C(f))$. Luego, por 2.8.12 (b), esto sucede si y sólo si $e_C(f_i) : e_C(A_i) \longrightarrow \mathrm{Im}(e_C(B_i))$ es cubierta proyectiva $\forall\ i \in I$, y por 3.2.4, esto pasa si y sólo si $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ es minimal a derecha $\forall\ i \in I$. □

Definición 3.2.6. Sea Λ un anillo.

(a) Una *presentación proyectiva* (resp. *minimal*) de $X \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ es una sucesión exacta $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} X \longrightarrow 0$, donde $P_1, P_0 \in \mathscr{P}(\Lambda)$ (resp. $f_0 : P_0 \longrightarrow X$ y $f_1 : P_1 \longrightarrow \mathrm{Im}(f_1)$ son cubiertas proyectivas).

(b) Sea ${}_\Lambda P$ un Λ-módulo proyectivo. Denotaremos por $\mathrm{mod}({}_\Lambda P)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ que admiten una presentación proyectiva en $\mathrm{add}({}_\Lambda P)$; *i.e.* existe una presentación proyectiva $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$, donde $P_1, P_0 \in \mathrm{add}({}_\Lambda P)$.

Ejercicio 3.2.7. Pruebe que para un anillo artiniano a izquierda Λ se tiene que $\mathrm{mod}({}_\Lambda\Lambda) = \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Ejercicio 3.2.8. Sea Λ una R-álgebra de artin. Dada una sucesión exacta $M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g}_0 M \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que $\forall\ N \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(g,N)} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_1,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(f,N)} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_0,N)$$

es exacta en $\mathrm{Mod}(R)$.

Ejercicio 3.2.9. Sea Λ una R-álgebra de artin, $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$ y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(P)^{op}$. Consideremos $e_P : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$. Pruebe que si $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva de X en $\mathrm{add}(P)$, entonces $e_P(P_0) \longrightarrow e_P(P_1) \longrightarrow e_P(X) \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva de $e_P(X)$.

Teorema 3.2.10. *Sea Λ una R-álgebra de artin, $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$ y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(P)^{op}$. Entonces, el funtor $e_P : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ induce, por restricción, una R-equivalencia de categorías $e_P|_{\mathrm{mod}(_\Lambda P)} : \mathrm{mod}(_\Lambda P) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$.*

Demostración. Veamos que $e_P|_{\mathrm{mod}(_\Lambda P)}$ es denso. En efecto, sea $X \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Consideremos una presentación proyectiva $Q_1 \xrightarrow{f} Q_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ de X. Dado que $e_P : \mathrm{add}(_\Lambda P) \longrightarrow \mathscr{P}(\Gamma)$ es una R-equivalencia (cf. 3.2.1), por el Lema del Cinco y el Ejercicio 3.2.9, existe $g : P_1 \longrightarrow P_0$ en $\mathrm{add}(P)$ que induce el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Gamma)$

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\exists\,\alpha"] & 0 \\
e_P(P_1) \arrow[r, "e_P(g)"'] & e_P(P_0) \arrow[r] & e_P(\mathrm{Coker}(g)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora que $e_P|_{\mathrm{mod}(_\Lambda P)}$ es fiel y pleno. En efecto, sean $A, B \in \mathrm{mod}(_\Lambda P)$. Consideramos la presentación proyectiva $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ de A en $\mathrm{add}(_\Lambda P)$. Luego por el Ejercicio 3.2.9, $e_P(P_0) \longrightarrow e_P(P_1) \longrightarrow e_P(A) \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva de $_\Gamma e_P(A)$. Aplicando el Ejercicio 3.2.8, con $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Gamma)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,B) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Gamma(e_P(A), e_P(B)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Gamma(e_P(P_1), e_P(B)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Gamma(e_P(P_0), e_P(B))
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos por 3.2.1 (a) y el Lema del Cinco. □

Definición 3.2.11. Sea Λ una R-álgebra de artin, $_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n {_\Lambda P_i^{m_i}}$ una descomposición de $_\Lambda\Lambda$ con $\{_\Lambda P_i\}_{i=1}^n$ proyectivos inescindibles no isomorfos dos a dos. Decimos que Λ es *básica* si en la descomposición anterior de $_\Lambda\Lambda$ se tiene que $m_i = 1\ \forall\, i$. Por 3.2.2, observe que dicha noción no depende de la descomposición de $_\Lambda\Lambda$ en proyectivos inescindibles.

Ejercicio 3.2.12. Sea Λ una R-álgebra de artin. Pruebe que $_\Lambda\Lambda$ es básica si y sólo si $\ell_\Lambda(\mathrm{top}(_\Lambda\Lambda)) = \mathrm{rk}(K_0(\Lambda))$.

Corolario 3.2.13. *Sea Λ una R-álgebra de artin, $\{_\Lambda P_i\}_{i=1}^n$ una familia completa de Λ-módulos proyectivos inescindibles no isomorfos dos a dos, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(P)^{op}$ y $_\Lambda P := \bigoplus_{i=1}^n {_\Lambda P_i}$. Entonces*

(a) *Γ es una R-álgebra de artin básica.*

(b) *$e_p := \mathrm{Hom}_\Lambda(_\Lambda P_\Gamma, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ es una R-equivalencia.*

Demostración. Dado que $\operatorname{add}({}_\Lambda P) = \mathscr{P}(\Lambda)$, se tiene que $\operatorname{mod}({}_\Lambda P) = \operatorname{mod}(\Lambda)$. Luego, por 3.2.10, $e_p : \operatorname{mod}(\Lambda) \longrightarrow \operatorname{mod}(\Gamma)$ es una R-equivalencia. Veamos que Γ es básica. En efecto,

$$_\Gamma\Gamma = e_P({}_\Lambda P) = e_P\left(\bigoplus_{i=1}^{n} {}_\Lambda P_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} e_P({}_\Lambda P_i).$$

Por otro lado, dado que, $e_P : \mathscr{P}(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{P}(\Gamma)$ es una R-equivalencia, ${}_\Lambda P_i$ es inescindible y ${}_\Lambda P_i \not\simeq {}_\Lambda P_j$ si $i \neq j$, se tiene que Γ es básica. □

Proposición 3.2.14. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Λ es básica.*

(b) *$\Lambda/J(\Lambda)$ es básica.*

(c) *$\Lambda/J(\Lambda) \simeq \prod_{i=1}^{n} D_i$, donde D_i es una R-álgebra de artin y un anillo con división $\forall\ i$.*

(d) *Λ^{op} es básica.*

Demostración. Por 2.6.14, $\Lambda/J(\Lambda)$ es semisimple. Sea $\{{}_{\Lambda/J(\Lambda)}S_i\}_{i=1}^{n}$ una familia completa de $\Lambda/J(\Lambda)$-módulos simples no isomorfos dos a dos (cf. 2.5.16). Por cambio de anillos $\Lambda \longrightarrow \Lambda/J(\Lambda)$, tenemos que $\{{}_\Lambda S_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia completa de Λ-módulos simples no isomorfos dos a dos (cf. prueba de 2.6.14 (d)). Por lo tanto, se tiene lo siguiente

(i) $\Lambda/J(\Lambda) \simeq \bigtimes_{i=1}^{n} \operatorname{Mat}_{n_i\times n_i}(D_i^{op})$, donde $D_i := \operatorname{End}_\Lambda(S_i)$ es una R-álgebra de artin (véase 3.1.5 y 2.5.16) y un anillo con división.

(ii) ${}_{\Lambda/J(\Lambda)}\Lambda/J(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^{n} {}_{\Lambda/J(\Lambda)}S_i^{n_i}$ (cf. 2.5.2).

(iii) ${}_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} {}_\Lambda P_i^{n_i}$, donde ${}_\Lambda P_i := P_0({}_\Lambda S_i)$ (cf. 2.8.16).

Luego, usando lo anterior, se obtienen las siguientes equivalencias.

$(a) \Leftrightarrow (b)$ Es consecuencia inmediata de (iii).

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Sale de (i).

$(c) \Leftrightarrow (d)$ Primeramente, es fácil ver que (c) es equivalente a que $\Lambda^{op}/J(\Lambda) \simeq \bigtimes_{i=1}^{n} D_i^{op}$; y aplicando la equivalencia de (a) con (c) para Λ^{op}, se concluye que Λ^{op} es básica.

□

3.3. Estructura de los inyectivos

Definición 3.3.1. Sea Λ un anillo y $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es un *mono-esencial* si $\forall\ g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, X)$ tal que gf es un monomorfismo, se tiene que g es un monomorfismo.

Ejercicio 3.3.2. Sea Λ un anillo y $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que $\forall\ Y \in \mathscr{L}({}_\Lambda B)$, se tiene que $f^{-1}(Y) \simeq \mathrm{Im}(f) \cap Y$.

Proposición 3.3.3. *Sea Λ un anillo y $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. *Entonces, f es un mono-esencial si y sólo si $\forall\ Y \in \mathscr{L}({}_\Lambda B)$ se tiene que $f^{-1}(Y) = 0$ implica que $Y = 0$.*

Demostración. Supongamos que f es un mono-esencial. Sea $Y \in \mathscr{L}({}_\Lambda B)$ tal que $f^{-1}(Y) = 0$. Consideremos $\pi : B \longrightarrow B/Y$ dado por $b \mapsto b + Y$. Luego, la composición $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/Y$ satisface que $\mathrm{Ker}(\pi \circ f) = f^{-1}(Y) = 0$; por lo que πf es un monomorfismo. De donde, por ser f un mono-esencial, se tiene que π es un monomorfismo. Por lo tanto $0 = \mathrm{Ker}(\pi) = Y$.

Ahora, sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X$ tal que gf es un monomorfismo. Dado que $\mathrm{Ker}(gf) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$, y gf es un monomorfismo, se tiene que $f^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) = 0$; y por hipótesis, $\mathrm{Ker}(g) = 0$. Por lo tanto, g es un monomorfismo. $\square$

Lema 3.3.4. *Sea $f : A \longrightarrow I$ un monomorfismo en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$*, donde I es inyectivo. Entonces, $f : A \longrightarrow I$ es un mono-esencial si y sólo si $f : A \longrightarrow I$ es minimal a izquierda.*

Demostración. Supongamos que f es un mono-esencial. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dd, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & I. \end{tikzcd}$$

Luego $gf = f$, y por ser f mono-esencial, g es un monomorfismo. De donde, usando que I es inyectivo, $\exists\ h : I \longrightarrow I$ tal que $hg = 1_I$. En particular, h es un epimorfismo. Ahora bien $hf = hgf = f$, por lo que h es un monomorfismo. Por lo tanto h es un isomorfismo, y como $hg = 1_I$, tenemos que g es un isomorfismo.

Supongamos que f es minimal a izquierda, y sea $A \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} X$ tal que gf es un monomorfismo. Por ser I inyectivo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "gf"'] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\exists\, h"] \\ & I; \end{tikzcd}$$

de donde $(hg)f = f$, por lo que hg es un isomorfismo. Por lo tanto, g es un monomorfismo. □

Ejercicio 3.3.5. Sea Λ una K-álgebra.

(*a*) Consideremos $I \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que ${}_\Lambda I$ es inyectivo si y sólo si para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(g,I)} \mathrm{Hom}_\Lambda(B, I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(f,I)} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, I) \longrightarrow 0$$

en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.

(*b*) Consideremos $\{I_i\}_{i=1}^n$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $I := \bigoplus_{i=1}^n I_i$. Pruebe que I es inyectivo si y sólo si I_i es inyectivo $\forall\ i$.

Proposición 3.3.6. *Sea Λ un anillo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dos monomorfismos en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. *Entonces, f y g son monos-esenciales si y sólo si gf es un mono-esencial.*

(*b*) *Sea $f : M \longrightarrow N$ un mono-esencial en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. *Si N es semisimple, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. (a) Es fácil probar la primera implicación. Mostramos la segunda. Sea $gf : A \longrightarrow C$ un mono-esencial. Veamos primero, que g es un mono-esencial. En efecto, sea $Y \in \mathscr{L}({}_\Lambda C)$ tal que $g^{-1}(Y) = 0$. Luego $(gf)^{-1}(Y) = f^{-1}(g^{-1}(Y)) = f^{-1}(0) = 0$ y de 3.3.3, por ser gf un mono-esencial, $Y = 0$. Luego g es un mono-esencial en virtud de 3.3.3.

Ahora, veamos que f es un mono-esencial. Sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{t} X$ tal que tf es un monomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "tf"] & \\ B \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "t'"] & E, \end{tikzcd}$$

donde E es el push-out de t y g. Luego, por ser g un monomorfismo, g' es un monomorfismo; de donde $t'gf$ también es un monomorfismo. Por lo tanto t' es un monomorfismo; y por ser g' un monomorfismo, $g't$ es un monomorfismo. De donde se tiene que t es un monomorfismo.

(b) Sea $f : M \longrightarrow N$ un mono-esencial, donde N es semisimple. Luego, por 2.5.5 (a), se tiene que $N = \mathrm{Im}(f) \oplus N'$. Por lo tanto $0 = \mathrm{Im}(f) \cap N' \simeq f^{-1}(N')$ y como f es un mono-esencial, se tiene que $N' = 0$. De donde $\mathrm{Im}(f) = N$ por lo que f es un isomorfismo. □

Definición 3.3.7. Sea Λ un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Una *envolvente inyectiva* de M es un mono-esencial $M \longrightarrow I$, donde ${}_\Lambda I$ es inyectivo. Denotaremos por $i_M : M \longrightarrow I_0(M)$ a la elección de una envolvente inyectiva de M.

Ejercicio 3.3.8. Sea Λ un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, $i_M : M \longrightarrow I_0(M)$ y $i'_M : M \longrightarrow I'_0(M)$ dos envolventes inyectivas de M. Pruebe que existe un isomorfismo $t : I_0(M) \longrightarrow I'_0(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & I_0(M) \arrow[dd, "t"] \\ M \arrow[ur, "i_M"] \arrow[dr, "i'_M"'] & \\ & I'_0(M). \end{tikzcd}$$

Enunciamos, sin prueba, el siguiente resultado fundamental para envolventes inyectivas.

Teorema 3.3.9. *Sea Λ un anillo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *$Q \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ es inyectivo si y sólo si $\forall\ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, M)$ con f un mono-esencial, se tiene que f es un isomorfismo.*

(b) *Todo $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ admite una envolvente inyectiva $i_M : M \longrightarrow I_0(M)$ de M.*

Proposición 3.3.10. *Sea Λ un anillo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Sea $\{M_i\}_{i=1}^n$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Entonces, existe un isomorfismo $h : I_0(M) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n I_0(M_i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "\bigoplus_{j=1}^n i_{M_j}"'] & I_0(M) \arrow[d, "h"] \\ & \bigoplus_{j=1}^n I_0(M_j). \end{tikzcd}$$

(*b*) *Si* $f : M \longrightarrow N$ *es un mono-esencial en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, *entonces existe un isomorfismo* $h : I_0(M) \longrightarrow I_0(N)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_M"] & N \arrow[d, "i_N"] \\ I_0(M) \arrow[r, "h"'] & I_0(N). \end{tikzcd}$$

(*c*) *Sea* $Q \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ *inyectivo y* $M \in \mathscr{L}({}_\Lambda Q)$. *Entonces, salvo isomorfismos, se puede elegir* $I_0(M)$ *tal que* $M \leqslant I_0(M) \leqslant Q$, *y la inclusión* $M \subseteq I_0(M)$ *es un mono-esencial.*

Demostración. (a) Por 3.3.4, sabemos que $i_{M_j} : M_j \longrightarrow I_0(M_j)$ es minimal a izquierda, y por 2.3.23, $\bigoplus_{j=1}^n i_{M_j} : M \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^n I_0(M_j)$ es minimal a izquierda y por lo tanto una envolvente inyectiva (por 3.3.4 y el Ejercicio 3.3.5 (b)). Luego, por el Ejercicio 3.3.8, se tiene el isomorfismo deseado.

(b) Sea $f : M \longrightarrow N$ un mono-esencial. Como $i_M : M \longrightarrow I_0(M)$ es un monomorfismo y $I_0(N)$ es inyectivo, $\exists\ h : I_0(M) \longrightarrow I_0(N)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "i_N f"'] & I_0(M) \arrow[dl, "h"] \\ I_0(N). \end{tikzcd}$$

Se tiene que hi_M es un mono-esencial pues $i_N f$ es un mono-esencial (cf. 3.3.6 (a)). Por lo tanto h es un mono-esencial. Luego, usando el Ejercicio 3.3.8, existe un isomorfismo $t : I_0(N) \longrightarrow I_0(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I_0(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1"'] & I_0(N) \arrow[dl, "t"] \\ I_0(M), \end{tikzcd}$$

de donde concluimos que h es un isomorfismo.

(c) Consideremos la inclusión $i : M \longrightarrow Q$ y una envolvente inyectiva $i_M : M \longrightarrow I_0(M)$. Por ser Q inyectivo, $\exists\ f : I_0(M) \longrightarrow Q$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "i"'] & I_0(M) \arrow[dl, "f"] \\ Q. \end{tikzcd}$$

Tenemos que f es un monomorfismo, pues fi_M es un monomorfismo y i_M es un mono-esencial. Por lo tanto $M \simeq \mathrm{Im}(i_M) \leqslant I_0(M) \simeq \mathrm{Im}(f) \leqslant Q$.

Veamos que la inclusión $\mathrm{Im}(i_M) \subseteq I_0(M)$ es un mono-esencial. En efecto, $\forall\, Y \in \mathscr{L}({}_\Lambda I_0(M))$ se tiene que $i_M^{-1}(Y) \simeq \mathrm{Im}(i_M) \cap Y$, por lo tanto, $\mathrm{Im}(i_M) \cap Y = 0$ implica que $i_M^{-1}(Y) = 0$, y por ser i_M esencial, concluimos que $Y = 0$. $\square$

Ejercicio 3.3.11. Sea $h : I_1 \longrightarrow I_2$ un mono-esencial en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ con I_1 y I_2 inyectivos. Pruebe que h es un isomorfismo (sin usar 3.3.9 (a)).

Definición 3.3.12. Sea Λ un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Denotaremos por $\mathscr{S}_M$ a la clase de todos los Λ-submódulos simples de M. El *soclo* (zócalo, socle) de M es $\mathrm{soc}(M) :=< \mathscr{S}_M >$, *i.e.* $\mathrm{soc}(M)$ es el Λ-submódulo de M generado por $\mathscr{S}_M$.

Observación. En el caso de que $\mathscr{S}_M = \emptyset$, se tiene que $\mathrm{soc}(M) := 0$. En particular, $\mathrm{soc}(M) = 0 \iff \mathscr{S}_M = \emptyset$.

Proposición 3.3.13. *Sea Λ un anillo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{soc}(M)$ *es semisimple* $\forall\, M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. *Más aún,* $\forall\, X \in \mathscr{L}({}_\Lambda M)$ *con* ${}_\Lambda X$ *semisimple, se tiene que* ${}_\Lambda X \leqslant \mathrm{soc}(M)$.

(b) *Si* $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, *entonces se tiene que* $f(\mathrm{soc}(M)) \leqslant \mathrm{soc}(N)$.

Demostración. (a) Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, podemos asumir que $\mathscr{S}_M \neq \emptyset$. Dado que $\forall\, S, S' \in \mathscr{S}_M$, si $S \neq S'$ entonces $S \cap S' = 0$; se tiene que

$$\mathrm{soc}(M) = \sum_{S \in \mathscr{S}_M} S = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}_M} S.$$

(b) Sea $f : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Podemos asumir que $\mathscr{S}_M \neq \emptyset$. Veamos primero que

$$\forall\, S \in \mathscr{S}_M \quad f(S) = 0 \quad \text{ó} \quad f(S) \in \mathscr{S}_N. \tag{3.3}$$

En efecto, sea $S \in \mathscr{S}_M$ tal que $f(S) \neq 0$. Consideremos $0 \neq X \in f(S)$ y $0 \neq s \in S$ tal que $x = f(s)$. Luego $\Lambda x = \Lambda f(s) = f(\Lambda \cdot s) = f(S)$. De donde $f(S) \in \mathscr{S}_N$ probándose (3.3).

Ahora bien, usando (3.3), concluimos que

$$f(\mathrm{soc}(M)) = f\left(\sum_{S \in \mathscr{S}_M} S\right) = \sum_{S \in \mathscr{S}_M} f(S) \leqslant \sum_{S' \in \mathscr{S}_N} = \mathrm{soc}(N).$$

$\square$

Ejercicio 3.3.14. Sea Λ un anillo. Pruebe que la correspondencia

$$\mathrm{soc} : \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda) \quad (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (\mathrm{soc}(X) \xrightarrow{\mathrm{soc}(f)} \mathrm{soc}(Y)),$$

donde $\mathrm{soc}(f) := f|_{\mathrm{soc}(X)}$, es un funtor aditivo, que conmuta con coproductos arbitrarios y preserva monomorfismos.

Definición 3.3.15. Sea Λ un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Se dice que M es *irreducible* si $M \neq 0$ y $\forall\ N \in \mathscr{L}({}_\Lambda M) \setminus \{0\}$ la inclusión $i : N \longrightarrow M$ es un mono-esencial.

Ejercicio 3.3.16. Sea Λ un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Pruebe que

(a) M simple $\Longrightarrow$ M irreducible $\Longrightarrow$ M inescindible.

(b) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es irreducible y no es simple.

(c) Si M es irreducible, entonces $\mathrm{soc}(M) = 0$ ó $\mathrm{soc}(M)$ es simple.

(d) M es semisimple si y sólo si $\mathrm{soc}(M) = M$.

(e) $\mathrm{soc}(M) = \mathrm{soc}(\mathrm{soc}(M))$.

Proposición 3.3.17. *Sea Λ un anillo, $Q \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $0 \neq Q$ un Λ-módulo inyectivo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Q es inescindible.*

(b) *Q es irreducible.*

(c) *$\forall\ M \in \mathscr{L}({}_\Lambda Q) \setminus \{0\}$ M es irreducible.*

(d) *$\exists\ M \in \mathscr{L}({}_\Lambda Q)$ tal que M es irreducible y la inclusión $M \subseteq Q$ es un mono-esencial.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $M \in \mathscr{L}({}_\Lambda Q) \setminus \{0\}$. Consideremos la inclusión $i : M \longrightarrow Q$. Por ser Q inyectivo, $\exists\ h : I_0(M) \longrightarrow Q$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "i"'] & I_0(M) \arrow[dl, "h"] \\ Q. & \end{tikzcd}$$

Como i_M es un mono-esencial, se tiene que h es un monomorfismo; y por ser $I_0(M)$ inyectivo, se obtiene que h es un split-mono. Luego h es un isomorfismo pues Q es inescindible. En particular, tenemos que h es un mono-esencial. Por lo tanto $i = hi_M$ es un mono-esencial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sean $M \in \mathscr{L}({}_\Lambda Q) \setminus \{0\}$ y $N \in \mathscr{L}({}_\Lambda M) \setminus \{0\}$. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & Q \\ & M. \arrow[ur, "i''"'] & \end{tikzcd}$$

Como i es un mono-esencial, por 3.3.6 (a), concluimos que i' también lo es.

(c) $\Rightarrow$ (d) Basta tomar $M := Q$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sea $M \in \mathscr{L}({}_\Lambda Q)$ irreducible y $M \subseteq Q$ un mono-esencial. Supongamos que existe $Q = A \oplus B$ con $A, B \neq 0$. Si $M \subseteq Q$ es un mono-esencial, entonces $M \cap A \neq 0$ y $M \cap B \neq 0$. Luego $0 \neq (M \cap A) \cap (M \cap B) \subseteq A \cap B$, lo cual es una contradicción, pues $Q = A \oplus B$. $\square$

Definición 3.3.18. Se dice que $D \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ es *divisible* si $\forall\ d \in D$, $\forall\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ \exists\ x \in D$ tal que $nx = d$.

Ejemplos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$, K un campo con $\mathrm{char}(K) = 0$.

Proposición 3.3.19. *Si $D \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ es divisible, entonces ${}_\mathbb{Z}D$ es inyectivo.*

Ejercicio 3.3.20. Pruebe que

(*a*) ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ es inyectivo e inescindible.

(*b*) $\forall\ M \in \mathscr{L}({}_\mathbb{Z}\mathbb{Q}) \setminus \{0\} \quad I_0(M) = \mathbb{Q}$.

Ejercicio 3.3.21. Pruebe que

(*a*) $\mathrm{soc}({}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}) = 0 = \mathrm{soc}({}_\mathbb{Z}\mathbb{Q})$.

(*b*) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo simple si y sólo si m es primo.

(*c*) $\mathrm{soc}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\ \forall\ p$ primo y $n \geqslant 1$.

(*d*) $\mathrm{soc}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p_1 \cdots p_k\mathbb{Z}$, donde $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ es la descomposición en productos de primos con $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

Proposición 3.3.22. *Sea Λ una K-álgebra y $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-módulos simples. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ S \in \mathscr{S},\ I_0(S)$ *es insescindible.*

(*b*) $\forall\ Q \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ *inyectivo, inescindible, se tiene que* $\mathrm{soc}(Q) \in \mathscr{S} \cup \{0\}$.

(*c*) $\forall\ X \in \mathrm{Mod}(\Lambda),\ \forall\ S \in \mathscr{S}$ *se tiene que*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S, j_X) : \mathrm{Hom}_\Lambda(S, \mathrm{soc}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S, X)$$

es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(K)$*, donde* $j_X : \mathrm{soc}(X) \longrightarrow X$ *es la inclusión.*

Demostración. (a) Sea $S \in \mathscr{S}$, como S es irreducible y la inclusión ${}_\Lambda S \subseteq I_0(S)$ es un mono-esencial, se satisface 3.3.17 (d). Por lo tanto $I_0(S)$ es inescindible.

(b) Sea ${}_\Lambda Q$ inyectivo e inescindible. Por 3.3.17 (b), Q es irreducible, y en virtud del Ejercicio 3.3.14 (c), concluimos que $\mathrm{soc}(Q) \in \mathscr{S} \cup \{0\}$.

(c) Sean $X \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $S \in \mathscr{S}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, -)$ a la inclusión $j_X : \mathrm{soc}(X) \longrightarrow X$ se tiene que la aplicación

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S, j_X) : \mathrm{Hom}_\Lambda(S, \mathrm{soc}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S, X)$$

es un monomorfismo en $\mathrm{Mod}(K)$. Veamos que es suprayectivo. En efecto, como en la prueba de 3.3.13 (b), se tiene que $\forall\ \alpha : S \longrightarrow X$ la imagen $\mathrm{Im}(\alpha)$ es simple ó cero; por lo que $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{soc}(X)$. Luego, para tales α, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\exists\, \overline{\alpha}"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathrm{soc}(X) \arrow[r, "j_X"'] & X, \end{tikzcd}$$

por lo que $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, j_X)(\overline{\alpha}) = \alpha$; probándose (c). $\square$

Teorema 3.3.23. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, *la inclusión* $j_M : \mathrm{soc}(M) \longrightarrow M$ *es un mono-esencial.*

(*b*) *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un monomorfismo en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. *Entonces,* f *es un mono-esencial si y sólo si* $\mathrm{soc}(f) : \mathrm{soc}(M) \longrightarrow \mathrm{soc}(N)$ *es un isomorfismo.*

(*c*) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ *existe un isomorfismo* $t : I_0(\mathrm{soc}(M)) \longrightarrow I_0(M)$ *que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{soc}(M) \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "i_{\mathrm{soc}(M)}"'] & M \arrow[d, "i_M"] \\ I_0(\mathrm{soc}(M)) \arrow[r, "t"'] & I_0(M). \end{tikzcd}$$

(*d*) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, $\mathrm{soc}(i_M) : \mathrm{soc}(M) \longrightarrow \mathrm{soc}(I_0(M))$ *es un isomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{soc}(M) \arrow[r, "j_M"] \arrow[d, "\mathrm{soc}(i_M)"'] & M \arrow[d, "i_M"] \\ \mathrm{soc}(I_0(M)) \arrow[r, "j_{I_0(M)}"'] & I_0(M). \end{tikzcd}$$

Demostración. (a) Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $M \neq 0$. Supongamos la inclusión $j_M : \mathrm{soc}(M) \longrightarrow M$ no es un mono-esencial. Luego $\exists\ X \in \mathscr{L}({}_\Lambda M) \setminus \{0\}$ tal que $\mathrm{soc}(M) \cap X = 0$.

Sea $0 \neq x_0 \in X$. Entonces, por 2.6.15, $0 \neq \Lambda x_0$ es artiniano, y por el Ejercicio 2.1.18, Λx_0 contiene un submódulo simple S. Ahora bien, $S \cap \mathrm{soc}(M) \subseteq X \cap \mathrm{soc}(M) = 0$. Por lo que $\mathrm{soc}(M) \subsetneq S \oplus \mathrm{soc}(M)$, pero $S \oplus \mathrm{soc}(M)$ es semisimple, lo cual contradice 3.3.13 (a). Por lo tanto, j_M es un mono-esencial.

(b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ \mathrm{soc}(M) \arrow[u, "j_M"] \arrow[r, "\mathrm{soc}(f)"'] & \mathrm{soc}(N), \arrow[u, "j_N"'] \end{tikzcd}$$

donde las inclusiones j_M y j_N son monos-esenciales por (a). Por lo que f es un mono-esencial, y de 3.3.6 (a), $j_N\mathrm{soc}(f)$ es un mono-esencial; luego, por 3.3.6 (a), $\mathrm{soc}(f)$ es un mono-esencial. Finalmente, por 3.3.6 (b), se tiene que $\mathrm{soc}(f)$ es un isomorfismo pues $\mathrm{soc}(N)$ es semisimple.

Ahora, si $\mathrm{soc}(f)$ es un mono-esencial, de 3.3.6 (a), tenemos que fj_M es un mono-esencial; de donde f es un mono-esencial.

(c) Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Dado que $I_0(M)$ es inyectivo, existe $t : I_0(\mathrm{soc}(M)) \longrightarrow I_0(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{soc}(M) \arrow[r, "i_{\mathrm{soc}(M)}"] \arrow[d, "i_M j_M"'] & I_0(\mathrm{soc}(M)) \arrow[dl, "t"] \\ I_0(M). & \end{tikzcd}$$

Veamos que t es un isomorfismo. En efecto, por (a) sabemos que j_M es un mono-esencial; y por 3.3.6 (a) $i_M j_M$ también lo es. Luego $t\, i_{\mathrm{soc}(M)}$ es un mono-esencial, y por 3.3.6 (a), t es un mono-esencial. Del Ejercicio 3.3.11 concluimos que t es un isomorfismo.

(d) Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Es claro que $\mathrm{soc}(i_M) : \mathrm{soc}(M) \longrightarrow \mathrm{soc}(I_0(M))$ hace conmutar dicho diagrama. Veamos que $\mathrm{soc}(I_M)$ es un isomorfismo. En efecto, $i_M j_M$ es un mono-esencial (por (a) y 3.3.6 (a)); de donde $j_{I_0(M)}\mathrm{soc}(i_M)$ es un mono-esencial. Luego $\mathrm{soc}(i_M)$ es un mono-esencial, y por 3.3.6 (b), $\mathrm{soc}(i_M)$ es un isomorfismo pues $\mathrm{soc}(I_0(M))$ es semisimple. $\square$

Ejercicio 3.3.24. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Pruebe que $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ con $M \neq 0$, se tiene que $\mathrm{soc}(M) \neq 0$.

Corolario 3.3.25. *Sea Λ un anillo artiniano a izquierda y Q un Λ-módulo inyectivo. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(*a*) *Q es inescindible si y sólo si $\mathrm{soc}(Q)$ es simple.*

(*b*) *$\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, $Q \simeq I_0(M)$ si y sólo si $\mathrm{soc}(Q) \simeq \mathrm{soc}(M)$.*

Demostración. (a) Sea Q inescindible. En particular $Q \neq 0$, por lo tanto $\mathrm{soc}(Q) \neq 0$ según el Ejercicio 3.3.24. Luego de 3.3.22 (b), se tiene que $\mathrm{soc}(Q)$ es simple.

Ahora, si $\mathrm{soc}(Q)$ es simple, por el Ejercicio 3.3.16 (a), $\mathrm{soc}(Q)$ es irreducible. Luego como $\mathrm{soc}(Q) \subseteq Q$ es esencial, se satisface 3.3.17 (d) (con $M := \mathrm{soc}(Q)$). Por lo tanto Q es inescindible.

(b) Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$.

Si $Q \simeq I_0(M)$ entonces, de 3.3.23, se tiene que $\mathrm{soc}(Q) \simeq \mathrm{soc}(I_0(M)) \simeq \mathrm{soc}(M)$, esto es $\mathrm{soc}(Q) \simeq \mathrm{soc}(M)$.

Supongamos ahora que $\mathrm{soc}(Q) \simeq \mathrm{soc}(M)$. Luego $\mathrm{I}_0(\mathrm{soc}(Q)) \simeq I_0(\mathrm{soc}(M))$ y por 3.3.23 (c), se tiene que $I_0(Q) \simeq I_0(M)$. De donde $Q \simeq I_0(M)$ por ser Q inyectivo. $\square$

Ejercicio 3.3.26. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda. Pruebe los siguientes enunciados.

(a) Sea $\{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i=1}^n$ una familia de monomorfismos en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Entonces, $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n A_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n B_i$ es un mono-esencial si y sólo si $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ es un mono-esencial $\forall\ i$.

(b) $\forall\ Q, Q'$ Λ-módulos inyectivos, ${}_\Lambda Q \simeq {}_\Lambda Q'$ si y sólo si $\mathrm{soc}(Q) \simeq \mathrm{soc}(Q')$.

(c) Si $\{{}_\Lambda S_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de simples no isomorfos dos a dos, entonces $\{I_0({}_\Lambda S_i)\}_{i=1}^n$ es una lista completa de inyectivos inescindibles no isomorfos dos a dos.

Definición 3.3.27. Sea Λ un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$. El *anulador* de M en Λ es $\mathrm{ann}_\Lambda(M) := \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda m = 0\ \forall\ m \in M\}$. Decimos que ${}_\Lambda M$ es *fiel* si $\mathrm{ann}_\Lambda(M) = 0$.

Ejercicio 3.3.28. Sea Λ un anillo, $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $I = \mathrm{ann}_\Lambda(M)$. Pruebe que

(a) $I \trianglelefteq \Lambda$.

(b) M es un Λ/I-módulo fiel.

(c) $\forall\ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, M)$, $I \leqslant \mathrm{Ker}(f)$.

(d) $\forall\ N \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, si $M \simeq N$ entonces $\mathrm{ann}_\Lambda(M) \simeq \mathrm{ann}_\Lambda(N)$.

Ejercicio 3.3.29. Sea Λ un anillo, $I \trianglelefteq \Lambda$ y $\pi : A \longrightarrow \Lambda/I$ el epi-canónico, *i.e.* $\pi(\lambda) = \lambda + I$. Sea $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda/I)$ y considere $M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$ por cambio de anillos $\pi : A \longrightarrow \Lambda/I$. Pruebe que

(a) $\pi(\mathrm{ann}_\Lambda(M)) = \mathrm{ann}_{\Lambda/I}(M)$.

(b) ${}_{\Lambda/I}M$ es fiel si y sólo si $I = \mathrm{ann}_\Lambda(M)$.

Proposición 3.3.30. *Sea Λ una R-álgebra de artin y $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-módulos simples. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ *y un Λ-monomorfismo* $\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M) \longrightarrow {}_\Lambda M^n$.

(b) $\forall\ S \in \mathscr{S},\ \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S)$ *es una R-álgebra de artin simple.*

(c) $\forall\ S \in \mathscr{S}\ \exists\ m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda({}_\Lambda S) \simeq {}_\Lambda S^m$. *Más aún, si* Λ *es conmutativo, se tiene que* $m = 1$.

Demostración. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por 3.1.3 (b) $\exists\ x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que ${}_R M =< x_1, \ldots, x_n >$. Consideremos los morfismos $\varphi_{x_i} : {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow {}_\Lambda M\ \lambda \mapsto \lambda x_i$. Veamos que $\mathrm{ann}_\Lambda(M) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_{x_i})$.

En efecto, es claro que $\mathrm{ann}_\Lambda(M) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_{x_i})$. Sea $\lambda \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_{x_i})$, *i.e.* $\lambda x_i = 0\ \forall\ i$. Checamos que $\lambda x = 0\ \forall\ x \in M$. Dado que $x = \sum_{i=1}^n r_i x_i,\ r_i \in R$, se tiene que $\lambda x = \sum_{i=1}^n \lambda r_i x_i = \sum_{i=1}^n r_i \lambda x_i = 0$ pues $M \in_{\Lambda - R} \mathrm{Mod}$. Por lo tanto, se tienen los morfismos

$$\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^n \Lambda/\mathrm{Ker}(\varphi_{x_i}) \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^n \overline{\varphi_{x_i}}} {}_\Lambda M^n,$$

donde $\varphi(\lambda + \mathrm{ann}_\Lambda(M)) := (\lambda + \mathrm{Ker}(\varphi_{x_1}), \ldots, \lambda + \mathrm{Ker}(\varphi_{x_n}))$ es un monomorfismo (pues $\mathrm{ann}_\Lambda(M) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_{x_n})$) y $\overline{\varphi_{x_i}}$ es el morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[rr, "\varphi_{x_i}"] \arrow[dr] & & M \\
& \Lambda/\mathrm{Ker}(\varphi_{x_i}); \arrow[ur, swap, "\overline{\varphi_{x_i}}"] &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\bigoplus_{i=1}^n \overline{\varphi_{x_i}}$ es un monomorfismo pues cada $\overline{\varphi_{x_i}}$ lo es. De donde se sigue (a).

Supongamos ahora que $M = S \in \mathscr{S}$. Luego se tiene que φ_{x_i} es un epimorfismo $\forall\ i$, y por lo tanto $\overline{\varphi_{x_i}}$ es un isomorfismo $\forall\ i$. Por lo tanto tenemos

$$\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^n \Lambda/\mathrm{Ker}(\varphi_{x_i}) \xrightarrow{\sim} {}_\Lambda S^n;$$

y por 2.5.5 (a), φ es un split-mono, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S) \simeq {}_\Lambda S^m$. Ahora bien, sea $I := \mathrm{ann}_\Lambda(S)$. Por lo tanto ${}_{\Lambda/I}S$ es simple, y entonces $\Lambda/I \simeq {}_{\Lambda/I}S^m$, y por 2.5.6, se tiene que $\Lambda/I \simeq \mathrm{Mat}_{m\times m}(D)$. Pero si Λ es conmutativo, se tiene que Λ/I es conmutativo, por lo que $\mathrm{Mat}_{m\times m}(D)$ también lo es, y $m = 1$; probándose (c).

Por lo tanto, dado que $\Lambda/I \simeq \mathrm{Mat}_{m\times m}(D)$, del Ejercicio 2.5.8, se tiene que Λ/I es un anillo simple (pues D es un anillo con división simple).

Finalmente, la estructura de R-álgebra de artin de Λ/I está dada por la composición de morfismos de anillos $R \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda/I$, donde $R \longrightarrow \Lambda$ es el morfismo de anillos que induce la estructura de R-álgebra de artin en Λ. □

Ejercicio 3.3.31. Sea Λ una R-álgebra de artin (no trivial), $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-módulos simples. Pruebe que

(a) Λ es un anillo simple si y sólo si $\exists\ {}_\Lambda S \in \mathscr{S}$ que es fiel.

(b) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, si ${}_\Lambda M$ es fiel entonces $\mathfrak{m}_S(M) \neq 0\ \forall\ S \in \mathscr{S}$.

Observación. Sea Λ un anillo no trivial, *i.e.* $1 \neq 0$.

(a) $\forall\ I \trianglelefteq \Lambda,\ I$ es maximal si y sólo si Λ/I es un anillo simple.

(b) Si Λ es un anillo con división, entonces Λ es un anillo simple.

(c) La recíproca de (b) es falsa. Considere para ello $\Lambda = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.3.32. *Sea Λ una R-álgebra de artin, $\mathscr{A}$ el conjunto de clases de isomorfía de Λ-módulos simples y $\mathscr{B}$ la clase de ideales (biláteros) maximales de Λ. Entonces, la correspondencia $\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ dada por $[{}_\Lambda S] \mapsto \mathrm{ann}_\Lambda(S)$ está bien definida y es una biyección.*

Demostración. Sea ${}_\Lambda S$ un simple. Por 3.3.30 (b), se tiene que $\mathrm{ann}_\Lambda(S)$ es un ideal maximal de Λ. Luego, por el Ejercicio 3.3.28 (d), la correspondencia anterior está bien definida. Veamos que es suprayectiva. En efecto, sea $\mathfrak{m} \trianglelefteq \Lambda$ maximal. Luego $\Lambda/\mathfrak{m}$ es una R-álgebra de artin simple, y por el Ejercicio 3.3.31 (a), existe un $\Lambda/\mathfrak{m}$-módulo simple S tal que $\mathrm{ann}_{\Lambda/\mathfrak{m}}({}_{\Lambda/\mathfrak{m}}S) = 0$. Por cambio de anillos $\Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{m}$, se tiene que ${}_\Lambda S$ es simple, y por el Ejercicio 3.3.29 (b), $\mathrm{ann}_\Lambda(S) = \mathfrak{m}$.

Veamos que la correspondencia es inyetiva. Sean ${}_\Lambda S_1$ y ${}_\Lambda S_2$ dos módulos simples tales que $I := \mathrm{ann}_\Lambda({}_\Lambda S_1) = \mathrm{ann}_\Lambda({}_\Lambda S_2)$. Luego por 3.3.30 (c), existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que ${}_\Lambda S_1^m \simeq \Lambda/I \simeq {}_\Lambda S_2^n$, y de 3.2.2, se tiene ${}_\Lambda S_1 \simeq {}_\Lambda S_2$. $\square$

Proposición 3.3.33. *Sea Λ una R-álgebra de artin y $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-módulo simples. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, *el epi-canónico* $\pi : {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M)$ *induce un isomorfismo* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M), {}_\Lambda M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, M)$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$.

(b) *Si Λ es conmutativo entonces* $\mathrm{End}_\Lambda(S) \simeq {}_\Lambda S\ \forall\ S \in \mathscr{S}$.

Demostración. (a) Aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ a $\pi : {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M)$, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi, M) : \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, M)$ es un monomorfismo. Veamos que es un epimorfismo. En efecto, por el Ejercicio 3.3.28 (c), se tiene que $\mathrm{ann}_\Lambda(M) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ por lo que $\exists!\ \overline{f} : \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M) \longrightarrow {}_\Lambda M$ tal que $f = \overline{f}\pi = \mathrm{Hom}_\Lambda(\pi, M)(\overline{f})$. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\ & \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(M), \arrow[ur, "\exists\ \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

de donde concluimos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi, M)$ es un epimorfismo.

(b) Por 3.3.30 (c), sabemos que ${}_\Lambda(\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S))_\Lambda \simeq {}_\Lambda S_\Lambda$; y por (a), tenemos $\mathrm{End}_\Lambda(S) = \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda S_\Lambda, {}_\Lambda S) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S), S) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, S) \simeq {}_\Lambda S$. $\square$

Proposición 3.3.34. *Sea Λ una R-álgebra de artin y $\mathscr{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ una familia completa de $\Lambda-$módulos simples no isomorfos dos a dos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $Q \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es inyectivo, entonces* $Q \simeq I_0(\bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i})$*, con* $m_i \geqslant 0 \; \forall\, i$ *(recordamos que* $M^0 := 0$*).*

(b) *Si* Λ *es conmutativo y* $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es simple, entonces*

(b_1) $\mathrm{top}(\Lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i$.

(b_2) ${}_\Lambda N \simeq \mathrm{top}(\Lambda) \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S, I_0(N)) \simeq {}_\Lambda S \;\forall\; S \in \mathscr{S}$.

Demostración. (a) Sea $Q \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inyectivo. Dado que Λ es artiniano a izquierda, se tiene que $\mathrm{soc}(Q) \simeq \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i}$ con $m_i \geqslant 0$. Luego, por 3.3.23 (c), se tiene que

$$Q \simeq I_0(Q) \simeq I_0(\mathrm{soc}(Q)) \simeq I_0\left(\bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i}\right).$$

(b) Sea Λ conmutativo y $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ semisimple. Dado que Λ es conmutativo y $\Lambda/J(\Lambda)$ es simple (cf. 2.6.14), se obtiene de 2.5.16 que $\mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i$. Sea ${}_\Lambda N \simeq \bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i}$ con $m_i \geqslant 0$. Veamos primero que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\left(S_j, I_0\left(\bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i}\right)\right) \simeq {}_\Lambda S_j^{m_j} \quad \forall\; j. \tag{3.4}$$

En efecto, por 3.3.10 (a), 3.3.22 (c) y 3.3.23 (d), tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda\left(S_j, I_0\left(\bigoplus_{i=1}^n {}_\Lambda S_i^{m_i}\right)\right) &\simeq \mathrm{Hom}_\Lambda\left(S_j, \bigoplus_{i=1}^n I_0({}_\Lambda S_i)^{m_i}\right) \\ \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda\left(S_j, \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{soc}(I_0({}_\Lambda S_i))^{m_i}\right) &\simeq \mathrm{Hom}_\Lambda\left(S_j, \bigoplus_{i=1}^n S_i^{m_i}\right) \\ \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_\Lambda(S_j, S_i)^{m_i} \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(S_j, S_j)^{m_j} &\simeq {}_\Lambda S_j^{m_j},\end{aligned}$$

donde el último isomorfismo se debe a 3.3.33 (b).

Ahora bien, por 3.2.2, ${}_\Lambda N \simeq \mathrm{top}({}_\Lambda\Lambda) \Longleftrightarrow m_i = 1 \;\forall\; i$; y esto pasa, en virtud de (3.4) y 3.2.2, si y sólo si $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, I_0(M)) \simeq {}_\Lambda S \;\forall\; S \in \mathscr{S}$. $\square$

3.4. Anillos con dualidad

Definición 3.4.1. Decimos que Λ es un *anillo con dualidad* si Λ y Λ^{op} son anillos artinianos a izquierda, y existen funtores contravariantes aditivos $\mathrm{mod}(\Lambda) \xrightarrow{D_\Lambda} \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \xrightarrow{D_{\Lambda^{op}}} \mathrm{mod}(\Lambda)$ tales que $D_\Lambda \circ D_{\Lambda^{op}} \simeq 1_{\mathrm{mod}(\Lambda^{op})}$ y $D_{\Lambda^{op}} \circ D_\Lambda \simeq 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$. En tal caso, decimos que Λ es un anillo con dualidad D_Λ.

Obsérvese que si Λ es un anillo con dualidad D_Λ, entonces Λ^{op} es un anillo con dualidad $D_{\Lambda^{op}}$.

Lema 3.4.2. *Sea Λ un anillo con dualidad D_Λ y $h : X \longrightarrow Y$ en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe un isomorfismo $t : D_\Lambda(\mathrm{Ker}(h)) \longrightarrow \mathrm{Coker}(D_\Lambda(h))$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama en* $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$

$$\begin{tikzcd} D_\Lambda(Y) \arrow[r, "D_\Lambda(h)"] & D_\Lambda(X) \arrow[r, "D_\Lambda(i)"] \arrow[d] & D_\Lambda(\mathrm{Ker}(h)) \arrow[dl, "t"] \\ & \mathrm{Coker}(D_\Lambda(h)), & \end{tikzcd}$$

donde $i : \mathrm{Ker}(h) \longrightarrow X$ es la inclusión.

(b) *Existe un isomorfismo $t' : \mathrm{Ker}(D_\Lambda(h)) \longrightarrow D_\Lambda(\mathrm{Coker}(h))$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama en* $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(D_\Lambda(h)) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "t'"'] & D_\Lambda(Y) \arrow[r, "D_\Lambda(h)"] & D_\Lambda(X) \\ & D_\Lambda(\mathrm{Coker}(h)), \arrow[u, "D_\Lambda(\pi)"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\pi : Y \longrightarrow \mathrm{Coker}(h)$ es el epi-canónico y $j : \mathrm{Ker}(D_\Lambda(h)) \longrightarrow D_\Lambda(Y)$ es la inclusión.

(c) *h es un monomorfismo si y sólo si $D_\Lambda(h)$ es un epimorfismo.*

(d) *h es un epimorfismo si y sólo si $D_\Lambda(h)$ es un monomorfismo.*

Demostración. (a) Veamos que $D(i) : D(X) \longrightarrow D(\mathrm{Ker}(h))$ satisface la propiedad universal del cokernel. Para ello, usaremos el isomorfismo $\mu : 1_{\mathrm{mod}(\Lambda^{op})} \longrightarrow D_\Lambda \circ D_\Lambda^{op}$. En efecto, sea $g : D_\Lambda(X) \longrightarrow W$ en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ tal que $gD_\Lambda(h) = 0$, y $\mu_W : W \longrightarrow D_\Lambda(Z)$ el isomorfismo natural donde $Z := D_{\Lambda^{op}}(W)$.

Dado que $\mu_W g : D_\Lambda(X) \longrightarrow D_\Lambda(Z)$ y D_Λ es pleno, $\exists\ \beta : Z \longrightarrow X$ tal que $D_\Lambda(\beta) = \mu_W g$. Ahora bien $D_\Lambda(h\beta) = D_\Lambda(\beta)D_\Lambda(h) = \mu_W g D_\Lambda(h) = 0$; y como D_Λ es fiel, se tiene que $h\beta = 0$. Por lo que $\exists!\ \overline{\beta} : Z \longrightarrow \mathrm{Ker}(h)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\overline{\beta}"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ \mathrm{Ker}(h) \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, "h"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $D_\Lambda(\overline{\beta})D_\Lambda(i) = D_\Lambda(\beta) = \mu_W g$, y se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$

$$\begin{tikzcd} D_\Lambda(Y) \arrow[r, "D_\Lambda(h)"] & D_\Lambda(X) \arrow[r, "D_\Lambda(i)"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "D(\beta)"] & D_\Lambda(\mathrm{Ker}(h)) \arrow[d, "D(\overline{\beta})"] \\ & W \arrow[r, "\sim", "\mu_W"'] & D_\Lambda(Z), \end{tikzcd}$$

por lo que $g = g'D_\Lambda(i)$ con $g' := \mu_W^{-1}D_\Lambda(\overline{\beta})$, siendo este único por la unicidad de $\overline{\beta}$ tal que $i\overline{\beta} = \beta$.

(c) Tenemos que: h es un monomorfismo $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(h) = 0 \Longleftrightarrow D_\Lambda(\mathrm{Ker}(h)) = 0$; y por (a), esto último pasa si y sólo si $D_\Lambda(h)$ es un epimorfismo.

(b) y (d) se prueban de forma dual a los anteriores (cf. Ejercicio 3.4.3). $\square$

Ejercicio 3.4.3. Demuestre los incisos (b) y (d) del Lema 3.4.2.

Proposición 3.4.4. (Lema de Baer) *Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Entonces, ${}_RM$ es inyectivo en $\mathrm{Mod}(R)$ si y sólo si $\forall\ I \in \mathscr{L}({}_RR)$, $\forall\ g : {}_RI \longrightarrow {}_RM$ existe $h : {}_RR \longrightarrow {}_RM$ tal que $h|_I = g$.*

Demostración. Ver, por ejemplo, en [1]. $\square$

Ejercicio 3.4.5. Sea Λ un anillo artiniano a izquierda y $I \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Pruebe que las siguientes condiciones que son equivalentes.

(*a*) ${}_\Lambda I$ es inyectivo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.

(*b*) ${}_\Lambda I$ es inyectivo en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Sugerencia: Usar el Lema de Baer.

Proposición 3.4.6. *Sea Λ un anillo con dualidad D_Λ. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si* $0 \longrightarrow D_\Lambda(C) \xrightarrow{D_\Lambda(g)} D_\Lambda(B) \xrightarrow{D_\Lambda(f)} D_\Lambda(A) \longrightarrow 0$ *en exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

(*b*) *Para toda familia* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *se tiene que*

$$D_\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n A_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^n D_\Lambda(A_i).$$

(*c*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *se tiene que*

(c_1) *M es inescindible si y sólo si $D_\Lambda(M)$es inescindible.*

(c_2) *M es simple si y sólo si $D_\Lambda(M)$ es simple.*

(c_3) *M es proyectivo (inyectivo) si y sólo si $D_\Lambda(M)$es inyectivo (proyectivo).*

(d) f *es un mono-esencial (epi-esencial) si y sólo si* $D_\Lambda(f)$ *es un epi-esencial (mono-esencial).*

Demostración. (a) ($\Rightarrow$) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, por 3.4.2 (c) y (d), tenemos que $D_\Lambda(f)$ es un epimorfismo y $D_\Lambda(g)$ es un monomorfismo; y dado que $gf = 0$, entonces $0 = D_\Lambda(gf) = D_\Lambda(g)D_\Lambda(f)$. En consecuencia $\mathrm{Im}(D_\Lambda(g)) \subseteq \mathrm{Ker}(D_\Lambda(f))$. Por otro lado, de 3.4.2, tenemos

$$\mathrm{Im}(D_\Lambda(g)) = \mathrm{Ker} \circ \mathrm{Coker}(D_\Lambda(g)) \simeq \mathrm{Ker} \circ D_\Lambda(\mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{Ker} \circ D_\Lambda(\mathrm{Im}(f))$$

$$= \mathrm{Ker} \circ D_\Lambda(\mathrm{Ker} \circ \mathrm{Coker}(f)) \simeq \mathrm{Ker} \circ \mathrm{Coker} \circ \mathrm{Ker}(D_\Lambda(f)) \simeq \mathrm{Ker}(D_\Lambda(f)).$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}(D_\Lambda(g)) \simeq \mathrm{Ker}(D_\Lambda(f))$. Lo cual implica que $\ell_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Im}(D_\Lambda(g))) = \ell_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Ker}(D_\Lambda(f)))$, de donde se tiene que $\mathrm{Im}(D_\Lambda(g)) = \mathrm{Ker}(D_\Lambda(f))$.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $0 \longrightarrow D_\Lambda(C) \longrightarrow D_\Lambda(B) \longrightarrow D_\Lambda(A) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. Dado que Λ^{op} es un anillo con dualidad $D_{\Lambda^{op}}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
\eta: & 0 \arrow[r] & D_{\Lambda^{op}}D_\Lambda(A) \arrow[r] \arrow[d] & D_{\Lambda^{op}}D_\Lambda(B) \arrow[r] \arrow[d] & D_{\Lambda^{op}}D_\Lambda(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\varepsilon: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos. Luego, como η es exacta, concluimos que ε es exacta.

(b) Es consecuencia de que D_Λ es un funtor aditivo.

(c_1) Sea ${}_\Lambda M$ inescindible y $D_\Lambda(M) = X \oplus Y$. Entonces, por (b) tenemos

$$M \simeq D_{\Lambda^{op}}D_\Lambda(M) \simeq D_{\Lambda^{op}}(X) \oplus D_{\Lambda^{op}}(Y).$$

Como M es inescindible, $D_{\Lambda^{op}}(X) = 0$ ó $D_{\Lambda^{op}}(Y) = 0$. Por lo tanto $X = 0$ ó $Y = 0$ pues $D_{\Lambda^{op}}$ es fiel. La otra implicación es dual.

(c_2) Por el Ejercicio 1.8.18 y 3.4.2, se tienen las equivalencias: ${}_\Lambda M$ es simple $\Longleftrightarrow \forall\ X \in \mathrm{mod}(\Lambda),\ \forall\ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)\ f = 0$ ó f es un epimorfismo $\Longleftrightarrow$ $\forall\ X \in \mathrm{mod}(\Lambda),\ \forall\ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)\ D_\Lambda(f) = 0$ ó $D_\Lambda(f)$ es un monomorfismo $\Longleftrightarrow \forall\ Z \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op}),\ \forall\ g \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M), Z)\ g = 0$ ó g es un monomorfismo $\Longleftrightarrow D_\Lambda(M)$ es simple.

(c_3) Es consecuencia de 3.4.2 y del Ejercicio 3.4.5.

(d) Dado que $\mathrm{mod}(\Lambda) = f.l.(\Lambda)$, por 2.8.2 (a) y 3.3.3, es suficiente (en las definiciones de mono-esencial y epi-esencial) usar morfismos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Para luego aplicar 3.4.2. $\square$

Proposición 3.4.7. *Sea* Λ *un anillo con dualidad* D_Λ*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ X \in \mathrm{mod}(\Lambda)\ I_0(X) \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) *$\forall\ X \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ existen isomorfismos $t : D_\Lambda(P_0(X)) \longrightarrow I_0(D_\Lambda(X))$ y $t' : D_\Lambda(I_0(X)) \longrightarrow P_0(D_\Lambda(X))$, tales que hacen conmutar los siguientes diagramas en $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$*

$$\begin{tikzcd} D_\Lambda(X) \arrow[rr, "D_\Lambda(\varepsilon_X)"] \arrow[dr, "i_{D_\Lambda(X)}"'] & & D_\Lambda(P_0(X)) \arrow[dl, "t"] \\ & I_0(D_\Lambda(X)), & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} D_\Lambda(I_0(X)) \arrow[rr, "D_\Lambda(i_X)"] \arrow[dr, "t'"'] & & D_\Lambda(X) \arrow[dl, "\varepsilon_{D_\Lambda(X)}"] \\ & P_0(D_\Lambda(X)). & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $X \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Consideremos la cubierta proyectiva $\varepsilon_X : P_0(X) \longrightarrow X$ y la envolvente inyectiva $i_X : X \longrightarrow I_0(X)$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$. Por 3.4.6 ($c_3$) y (d), se tiene que $D_\Lambda(\varepsilon_X) : D_\Lambda(X) \longrightarrow D_\Lambda(P_0(X))$ es una envolvente inyectiva. Luego, por el Ejercicio 3.3.8 existe un isomorfismo $t : D_\Lambda(P_0(X)) \longrightarrow I_0(D_\Lambda(X))$ tal que $tD_\Lambda(\varepsilon_X) = i_{D_\Lambda(X)}$. En particular concluimos que

$$\forall\ X \in \operatorname{mod}(\Lambda) \quad I_0(D_\Lambda(X)) \in \operatorname{mod}(\Lambda^{op}). \tag{3.5}$$

Luego, usando que Λ^{op} es un anillo con dualidad $D_{\Lambda^{op}}$ y $(\Lambda^{op})^{op} = \Lambda$, se obtiene de (3.5), que

$$\forall\ Y \in \operatorname{mod}(\Lambda^{op}) \quad I_0(D_{\Lambda^{op}}(Y)) \in \operatorname{mod}(\Lambda). \tag{3.6}$$

Por otro lado, $D_\Lambda(X) \in \operatorname{mod}(\Lambda^{op})$ y $D_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(X)) \simeq X$; y por (3.6), se tiene que $I_0(X) \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ pues $I_0(X) \simeq I_0(D_{\Lambda^{op}}(Y))$, donde $Y := D_\Lambda(X)$. □

Ejercicio 3.4.8. Sea Λ un anillo con dualidad D_Λ. Pruebe que

(a) $\forall\ M \in \operatorname{mod}(\Lambda) \quad \ell_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) = \ell_\Lambda(M)$.

(b) Si ${}_\Lambda Q$ es inyectivo inescindible, entonces ${}_\Lambda Q$ es finitamente generado.

Proposición 3.4.9. *Sea Λ un anillo con dualidad D_Λ. Consideremos la sucesión exacta canónica $0 \longrightarrow \operatorname{rad}(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \operatorname{top}(M) \longrightarrow 0$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_\Lambda(\operatorname{top}(M)) \arrow[r, "D_\Lambda(\pi)"] \arrow[d] & D_\Lambda(M) \arrow[r, "D_\Lambda(i)"] \arrow[d, equal] & D_\Lambda(\operatorname{rad}(M)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{soc}(D_\Lambda(M)) \arrow[r, "j_{D_\Lambda(M)}"'] & D_\Lambda(M) \arrow[r] & \frac{D_\Lambda(M)}{\operatorname{soc}(D_\Lambda(M))} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos.

(*b*) *M contiene un único submódulo maximal si y sólo si $D_\Lambda(M)$ contiene un único simple.*

Demostración. (a) Por 2.8.3, $\pi : M \longrightarrow \mathrm{top}(M)$ es un epi-esencial, y de 3.4.6 (d), se tiene que $D_\Lambda(\pi) : D_\Lambda(\mathrm{top}(M)) \longrightarrow D_\Lambda(M)$ es un mono-esencial. Dado que $D_\Lambda(\mathrm{top}(M))$ es semisimple (cf. 3.4.6 (c)), por 3.3.13 (a), $\exists\ \alpha$ tal que el siguiente diagrama en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_\Lambda(\mathrm{top}(M)) \arrow[r, "D_\Lambda(\pi)"] \arrow[d, "\alpha"'] & D_\Lambda(M) \arrow[r, "D_\Lambda(i)"] \arrow[d, equal] & D_\Lambda(\mathrm{rad}(M)) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{soc}(D_\Lambda(M)) \arrow[r, "j_{D_\Lambda(M)}"'] & D_\Lambda(M) \arrow[r] & \frac{D_\Lambda(M)}{\mathrm{soc}(D_\Lambda(M))} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto α es un mono-esencial pues $D_\Lambda(\pi)$ lo es (cf. 3.3.6 (a)); y por 3.3.6 (b), α es un isomorfismo. Finalmente, por el Lema del Cinco, existe un isomorfismo $\beta : D_\Lambda(\mathrm{rad}(M)) \longrightarrow D_\Lambda(M)/\mathrm{soc}(D_\Lambda(M))$ que hace conmutar el diagrama anterior; probándose (a).

(b) Por (a), 3.4.6 (c_2) y 3.3.13 (a), se tienen las equivalencias: $\mathrm{Card}(\mathscr{M}_{_\Lambda M}) = 1 \iff \mathrm{rad}(M) \in \mathscr{M}_{_\Lambda M} \iff \mathrm{top}(M)$ es simple $\iff D_\Lambda(\mathrm{top}(M))$ es simple $\iff \mathrm{soc}(D_\Lambda(M))$ es simple $\iff D_\Lambda(M)$ contiene un único simple. □

Proposición 3.4.10. *Sea Λ un anillo con dualidad D_Λ y $0 \longrightarrow \mathrm{soc}(M) \xrightarrow{j_M} M \xrightarrow{\pi} M/\mathrm{soc}(M) \longrightarrow 0$ la sucesión exacta canónica en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *Se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(D_\Lambda(M)) \arrow[r] \arrow[d] & D_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{top}(D_\Lambda(M)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_\Lambda(M/\mathrm{soc}(M)) \arrow[r, "D_\Lambda(\pi)"'] & D_\Lambda(M) \arrow[r, "D_\Lambda(j_M)"'] & D_\Lambda(\mathrm{soc}(M)) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos.

(*b*) *M contiene un único simple si y sólo si $D_\Lambda(M)$ contiene un único submódulo maximal.*

Demostración. (a) Por 3.3.23 (a), la inclusión $j_M : \mathrm{soc}(M) \longrightarrow M$ es un mono-esencial; y de 3.4.6 (d), se obtiene que $D_\Lambda(j_M) : D_\Lambda(M) \longrightarrow D_\Lambda(\mathrm{soc}(M))$ es un epi-esencial con $D_\Lambda(\mathrm{soc}(M))$ semisimple (véase 3.4.6 (c)). Por lo que $\mathrm{rad}(D_\Lambda(\mathrm{soc}(M))) = 0$. Luego $\mathrm{top}(D(\mathrm{soc}(M))) = D_\Lambda(\mathrm{soc}(M))$; y por 2.8.2, existe un isomorfismo t que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$

$$\begin{tikzcd} D_\Lambda(M) \arrow[r, "D_\Lambda(j_M)"] \arrow[d] & D_\Lambda(\mathrm{soc}(M)) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{top}(D_\Lambda(M)) \arrow[r, "t"'] & D_\Lambda(\mathrm{soc}(M)). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, se tiene el segundo cuadrado conmutativo del diagrama en (a). Para obtener el primero, se procede como en la proposición anterior.

(b) La prueba es dual a 3.4.9 (b). □

3.5. Existencia de dualidad en álgebras de artin

Lema 3.5.1. *Sea R un anillo conmutativo artiniano, ${}_RI := I_0(\mathrm{top}({}_RR))$ y $X \in \mathrm{mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Hom}_R(X, I) \in \mathrm{mod}(R)$ *y* $\mathfrak{m}_S(\mathrm{Hom}_R(X, I)) = \mathfrak{m}_S(X)$ $\forall$ S *simple.*

(b) El R-morfismo $\Phi_X : X \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, I), I)$, con $\Phi_X(x)(f) := f(x)$, es un isomorfismo natural.

Demostración. (a) Procederemos por inducción sobre $\ell_R(X)$. Si $\ell_R(X) \leqslant 1$ entonces $X = 0$ ó X es simple; y por 3.3.34 (b_2), $\mathrm{Hom}_R(X, I) \simeq {}_RX$. Supongamos que $\ell_R(X) > 1$, luego existe un simple $S' \in \mathscr{L}({}_RX)$. Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow {}_RS' \longrightarrow {}_RX \longrightarrow {}_RX' \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(R)$. Por 3.3.34 (b_2), se tiene la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X', I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, I) \longrightarrow {}_RS' \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(R)$. Dado que $\ell_R(X') = \ell_R(X) - 1$, concluimos por inducción que $\mathrm{Hom}_R(X', I) \in \mathrm{mod}(R)$ y $\mathfrak{m}_S(\mathrm{Hom}_R(X', I)) = \mathfrak{m}_S(X')$; por lo que $\mathrm{Hom}_R(X, I) \in \mathrm{mod}(R)$, y además

$$\mathfrak{m}_S(\mathrm{Hom}_R(X, I)) = \mathfrak{m}_S(S') + \mathfrak{m}_S(\mathrm{Hom}_R(X', I)) = \mathfrak{m}_S(S') + \mathfrak{m}_S(X') = \mathfrak{m}_S(X).$$

(b) Veamos la naturalidad de $\Phi : 1_{\mathrm{mod}(R)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(-, I), I)$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathrm{mod}(R)$, luego tenemos los siguientes morfimos en $\mathrm{mod}(R)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(f, I) &: \mathrm{Hom}_R(Y, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, I), \\ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(f, I), I) &: \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, I), I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Y, I), I). \end{aligned}$$

Probaremos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_X"'] & Y \arrow[d, "\Phi_Y"] \\ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, I), I) \arrow[r, "\varphi(f)"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Y, I), I), \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(f) := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(f, I), I)$. En efecto, recordamos primeramente que $\forall$ $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(Y, I)$ se tiene $\mathrm{Hom}_R(f, I)(\alpha) := \alpha f$, y $\forall$ $x \in X$ $\varphi(f)(\Phi_X(x)) := \Phi_X(x) \circ \mathrm{Hom}_R(f, I)$. Entonces

$$(\varphi(f)(\Phi_X(x)))(\alpha) = (\Phi_X(x) \circ \mathrm{Hom}_R(f, I))(\alpha) = \Phi_X(x)(\mathrm{Hom}_R(f, I)(\alpha))$$

$$= \Phi_X(x)(\alpha \circ f) = (\alpha \circ f)(x) = \alpha(f(x)) = \Phi_Y(f(x))(\alpha) = ((\Phi_Y \circ f)(x))(\alpha).$$

Por lo tanto $\varphi(f)(\Phi_X(x)) = (\Phi_Y \circ f)(x)$ $\forall$ $x \in X$, y por consiguiente $\varphi(f) \circ \Phi_X = \Phi_Y \circ f$.

Ahora, veamos que Φ_X es un isomorfismo. Por (a), sabemos que

$$\ell_R(\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, I), I)) = \ell_R(X).$$

Por lo tanto, basta ver que Φ_X es un monomorfismo. Sea $x \in \mathrm{Ker}(\Phi_X)$, y supongamos que $x \neq 0$. Luego, $Rx \in \mathrm{mod}(R)$, y Rx es noetheriano (pues $\mathrm{mod}(R) = f.l.(R)$); por lo que $\exists\ {}_RN \leqslant Rx$ tal que Rx/N es simple. En virtud de 3.3.34 (b_1), Rx/N es un sumando directo de $\mathrm{top}({}_RR)$. Luego de 3.3.10, tenemos los monomorfismos $Rx/N \longrightarrow I_0(Rx/N) \longrightarrow I_0(\mathrm{top}({}_RR)) =: I$. Por lo tanto, existe un monomorfismo $h : Rx/N \longrightarrow I$.

Sea $g := h\pi : Rx \longrightarrow I$, donde $\pi : Rx \longrightarrow Rx/N$ es el epi-canónico. Veamos que $g(x) \neq 0$. En efecto, si $g(x) = 0$ entonces $h\pi(x) = 0$, por lo que $\pi(x) = 0$ y $x \in N$; lo cual es una contradicción pues $N \neq Rx$. Luego, por ser I inyectivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl, "\exists\ \overline{g}"] \\ I, & \end{tikzcd}$$

i.e. $\overline{g}|_{Rx} = g$. Pero $\Phi_X(x)(\overline{g}) = \overline{g}(x) = g(x) \neq 0$, por lo que $x \notin \mathrm{Ker}(\Phi_X)$, lo cual no pasa. Por lo tanto $x = 0$. $\square$

Proposición 3.5.2. *Sea R un anillo conmutativo artiniano y $I := I_0(\mathrm{top}({}_RR))$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *R es un anillo con dualidad $D_R := \mathrm{Hom}_R(-, {}_RI_R) : \mathrm{mod}(R) \longrightarrow \mathrm{mod}(R)$.*

(*b*) *$\forall\ {}_RS$ simple $\quad \mathfrak{m}_S({}_RR) = \mathfrak{m}_S({}_RI)$.*

(*c*) *$R \simeq \mathrm{End}_R(I)$.*

Demostración. (a) Por 3.5.1 (a), $D_R(X) \in \mathrm{mod}(R)\ \forall\ X \in \mathrm{mod}(R)$. Y por 3.5.1 (b) $\Phi : 1_{\mathrm{mod}(R)} \longrightarrow D_R^2$ es un isomorfismo.

(b) Sea ${}_RS$ simple. Luego, por 3.5.1 (a), $\mathfrak{m}_S({}_RR) = \mathfrak{m}_S(\mathrm{Hom}_R({}_RR, I)) = \mathfrak{m}_S({}_RI)$.

(c) $R \simeq \mathrm{End}({}_RR)^{op}$, y por (a), $\mathrm{End}({}_RR)^{op} \simeq \mathrm{End}(D_R({}_RR)) \simeq \mathrm{End}_R(I)$, donde el último isomorfismo se da ya que $D_R({}_RR) \simeq {}_RI$. $\square$

Teorema 3.5.3. *Toda R-álgebra de artin Λ es un anillo con dualidad D_Λ, donde $D_\Lambda({}_\Lambda X) := \mathrm{Hom}_R({}_\Lambda X_R, I_R)$ con $I := I_0(\mathrm{top}(R))$. Más aún, D_Λ es una R-equivalencia de categorías.*

Demostración. Veamos que

$$\forall\ X \in \mathrm{mod}(\Lambda) \quad D_\Lambda({}_\Lambda X) \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op}). \tag{3.7}$$

En efecto, sea Λ una R-álgebra de artin vía $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$. Luego Λ^{op}es una R-álgebra de artin vía $\varphi^{op} : R \longrightarrow \Lambda^{op}$, donde $\varphi^{op}(\lambda^{op}) := \varphi(\lambda)$. Por lo tanto, tenemos 2 estructuras de R-módulo en $D_\Lambda({}_\Lambda X)$:

- $(r \cdot f)(x) := f(rx)$, pues $X \in {}_R\mathrm{Mod}_R$, vía el cambio de anillos $\varphi^{op} : R \longrightarrow \Lambda^{op}$, y
- $r\Box f$, dada por el cambio de anillos $\varphi^{op} : R \longrightarrow \Lambda^{op}$, pues $D_\Lambda({}_\Lambda X)$ es un Λ^{op}-módulo.

Ambas estructuras de R-módulo coinciden, ya que

$$(r\Box f)(x) = (\varphi^{op}(r)f)(x) = (f\varphi(r))(x) = f(\varphi(r)x) = f(rx) = (r \cdot f)(x).$$

Por otro lado, $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y 3.1.3 (b) implican que ${}_RX \in \mathrm{mod}(R)$, y por 3.5.1 (a), $D_\Lambda({}_\Lambda X) \in \mathrm{mod}(R)$. Por lo tanto $D_\Lambda({}_\Lambda X)$ es un Λ^{op}-módulo que es noetheriano como R-módulo.

Consideremos $\{{}_{\Lambda^{op}}N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cadena ascendente en $\mathscr{L}({}_{\Lambda^{op}}D_\Lambda({}_\Lambda X))$. Por el cambio de anillos $\varphi^{op} : R \longrightarrow \Lambda^{op}$, $\{{}_RN_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cadena ascendente en $\mathscr{L}({}_RD_\Lambda({}_\Lambda X))$, la cual se estabiliza pues ${}_RD_\Lambda({}_\Lambda X)$ es noetheriano. Por lo tanto $D_\Lambda({}_\Lambda X) \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

Ahora checamos que si $f : X \longrightarrow Y$ está en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(f, I) : D_\Lambda(Y) \longrightarrow D_\Lambda(X)$ es un morfismo en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. En efecto, $\forall\ \alpha \in D_\Lambda(Y) = \mathrm{Hom}_R(Y, I)$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$ tenemos las igualdades

$$D_\Lambda(f)(\alpha\lambda)(x) = \mathrm{Hom}_R(f, I)(\alpha\lambda)(x) = ((\alpha\lambda) \circ f)(x) = (\alpha\lambda)(f(x))$$

$$= \alpha(\lambda f(x)) = \alpha(f(\lambda x)) = \mathrm{Hom}_R(f, I)(\alpha)(\lambda x) = (D_\Lambda(f)(\alpha))\lambda)(x).$$

Por lo tanto $D_\Lambda(f)(\lambda^{op}\alpha) = (D_\Lambda(f)(\alpha))\lambda = \lambda^{op}D_\Lambda(f)(\alpha)$.

Por lo anterior y por (3.7), tenemos que $D_\Lambda : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ con $D_\Lambda(X) = \mathrm{Hom}_R({}_\Lambda X_R, I_R)$ es un R-funtor. Análogamente (reemplazando a Λ por Λ^{op}), tenemos que $D_{\Lambda^{op}} : \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)$ con $D_{\Lambda^{op}}(Z_\Lambda) := \mathrm{Hom}_R({}_RZ_\Lambda, {}_RI)$ es un R-funtor. Ahora bien,

$$\Phi_X :\ {}_\Lambda X \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R({}_\Lambda X_R, I_R), I_R) = D_{\Lambda^{op}} \circ D_\Lambda(X)$$

con $\Phi_X(x)(f) := f(x)$ es un R-isomorfismo natural (por 3.5.1 (b)). Veamos que Φ_X es un Λ-morfismo (en particular, tendríamos que $\Phi : 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)} \longrightarrow D_{\Lambda^{op}} \circ D_\Lambda$ es un isomorfismo natural). En efecto, $\forall\ f \in \mathrm{Hom}_R(X, I)$ $\forall\ x \in X$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$, se tiene que

$$\Phi_X(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = (f\lambda)(x) = \Phi_X(x)(f\lambda) = (\lambda\Phi_X(x))(f).$$

Por lo tanto $\Phi_X(\lambda x) = \lambda\Phi_X(x)$.

Análogamente, el R-isomorfismo natural (cf. 3.5.1 (b))

$$\Phi_Z : Z_\Lambda \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R({}_RZ_\lambda, {}_RI), I_R) = D_\Lambda \circ D_{\Lambda^{op}}(Z),$$

con $\Phi_Z(z)(g) = g(z)$, es un Λ^{op}-isomorfismo natural. □

Observación 3.5.4. Sea Λ una R-álgebra de artin. Tenemos que

(*a*) $D_\Lambda(\Lambda) = \mathrm{Hom}_R(\Lambda, I) \in {}_\Lambda\mathrm{Mod}_\Lambda$ vía:

- ${}_{\Lambda}D(\Lambda) := \mathrm{Hom}_R({}_R\Lambda_\Lambda, {}_R I) = D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)$, y
- $D(\Lambda)_\Lambda := \mathrm{Hom}_R({}_\Lambda\Lambda_R, I_R) = D_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)$.

(*b*) $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda D(\Lambda)_\Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ es un R-funtor contravariante. En efecto, si ${}_\Lambda X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, por 3.1.5, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda X, {}_\Lambda D(\Lambda)) \in \mathrm{mod}(R)$. Luego, procediendo como en la prueba de 3.5.3, se demuestra que $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda X,\, {}_\Lambda D(\Lambda)_\Lambda) \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

Proposición 3.5.5. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, los R-funtores $D_\Lambda,\ \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda D(\Lambda)_\Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ son isomorfismos.*

Demostración. Usando la adjunción del Hom y el producto tensorial, tenemos los isomorfismos naturales

$$D_\Lambda(M) = \mathrm{Hom}_R(M, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R({}_R\Lambda_\Lambda \otimes_\Lambda {}_\Lambda M,\ {}_R I)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M,\ \mathrm{Hom}_R({}_R\Lambda_\Lambda,\ {}_R I)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,\ D(\Lambda)).$$

□

3.6. El funtor ∗ y el funtor de Nakayama

Lema 3.6.1. *Sea Λ-una R-álgebra de artin. Entonces,*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) & : & \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda^{op}) \\ \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) & : & \mathrm{Mod}(\Lambda^{op}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda) \end{array}$$

son R-funtores contravariantes.

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Verifiquemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \Lambda) : \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$ es un morfismo en $\mathrm{Mod}(\Lambda^{op})$. En efecto, $\forall\ a \in A,\ \forall\ g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \Lambda), \forall\ \lambda \in \Lambda$ se tiene que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \Lambda)(\lambda^{op} g)(a) = ((\lambda^{op} g) \circ f)(a) = (g\lambda)(f(a)) = g(f(a))\lambda$$

$$= (\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \Lambda)(g)(a))\lambda = (\lambda^{op}\mathrm{Hom}_\Lambda(f)(g))(a).$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \Lambda)(\lambda^{op} g) = \lambda^{op}\mathrm{Hom}_\Lambda(f)(g)$, por lo que $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$ es un R-funtor. Análogamente se tiene que $\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$ es un R-funtor pues ${}_{\Lambda^{op}}\Lambda^{op}_{\Lambda^{op}} = {}_\Lambda\Lambda^{op}_\Lambda = {}_\Lambda\Lambda_\Lambda$ (cf. prueba de 3.2.1 (a)). □

Definición 3.6.2. Definimos el *R- funtor* $* := \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) : \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda^{op})$. De la misma forma, denotaremos también por $*$ al R-funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) : \mathrm{Mod}(\Lambda^{op}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Del contexto, quedará claro de cuál de ellos se trata.

Proposición 3.6.3. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ A \in \mathrm{mod}(\Lambda)\ A^* \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

(b) $\forall\ A \in \mathrm{Mod}(\Lambda)\ \Phi_A : A \longrightarrow A^{**}$ *con* $\Phi_A(a)(f) := f(a)$ *es un* Λ*-morfismo natural.*

(c) $\nu : {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow (\Lambda_\Lambda)^*$ *con* $\nu(\lambda)(x) := \lambda x$ *es un* Λ*-isomorfismo.*

(d) $t : \Lambda_\Lambda \longrightarrow ({}_\Lambda\Lambda)^*$ *con* $t(\lambda)(x) := x\lambda$ *es un* Λ^{op}*-isomorfismo.*

(e) $\Phi_\Lambda : \Lambda \longrightarrow \Lambda^{**}$ *es un* Λ*-isomorfismo.*

Demostración. (a) Sea $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego por 3.1.5, $A^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda) \in \mathrm{mod}(R)$. Usando el cambio de anillos $R \longrightarrow \Lambda^{op}$ (la estructura de R-álgebra de artin de Λ^{op}), se tiene que $A^*\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ pues $A^* \in \mathrm{mod}(R)$.

(b) La prueba es similar a la de 3.5.1 (b).

(c) Sea $\mu : (\Lambda_\Lambda)^* := \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda$ dado por $\mu(f) := f(1)$. Es claro que μ es un Λ-morfismo pues $\mu(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda\mu(f)$. Consideremos la aplicación $\nu : {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow (\Lambda_\Lambda)^*$ dada por $\nu(\lambda)(x) := \lambda x$. Veamos que $\mu^{-1} = \nu$. Esto se sigue, ya que $(\mu \circ \nu)(\lambda) = \mu(\nu(\lambda)) = \nu(\lambda)(1) = \lambda \cdot 1 = \lambda$; por lo que $\mu \circ \nu = 1_{{}_\Lambda\Lambda}$. Por otra parte, se tiene que$(\nu \circ \mu)(f)(x) = \nu(\mu(f))(x) = \nu(f(1))(x) = f(1)x = f(1 \cdot x) = f(x)$. Por lo tanto, $\nu \circ \mu = 1_{(\Lambda_\Lambda)^*}$.

(d) Consideremos $\theta : (\Lambda_\Lambda)^* \longrightarrow \Lambda_\Lambda$ con $\theta(f) := f(1)$. Se prueba, como en (c), que $t^{-1} = \theta$.

(e) Veamos que el siguiente diagrama en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{**} \arrow[rr, "t^*"] & & (\Lambda_\Lambda)^* \\
& {}_\Lambda\Lambda, \arrow[ul, "\Phi_\Lambda"] \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\nu(\lambda)(x) := \lambda x$ y $t(\lambda)(x) := x\lambda$ son los isomorfismos de (c) y (d). Como $t : \Lambda_\Lambda \longrightarrow ({}_\Lambda\Lambda)^*$ es un Λ^{op}-isomorfismo, la aplicación

$$t^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(({}_\Lambda\Lambda)^*, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) : ({}_\Lambda\Lambda)^{**} \longrightarrow (\Lambda_\Lambda)^*$$

es un Λ-isomorfismo pues t es un $\Lambda^{op}-$isomorfismo. Luego

$$\begin{aligned}
(t^* \circ \Phi_\Lambda)(\lambda)(x) &= t^*(\Phi_\Lambda(\lambda))(x) = (\Phi_\Lambda(\lambda) \circ t)(x) \\
&= \Phi_\Lambda(\lambda)(t(x)) = t(x)(\lambda) = \lambda x = \nu(\lambda)(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $t^* \circ \Phi_\Lambda = \nu$. Luego, como ν y t^* son $\Lambda-$isomorfismos, se tiene que Φ_Λ es un Λ-isomorfismo. □

Proposición 3.6.4. *Sea* Λ *una* R*-álgebra de artin. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ P \in \mathscr{P}(\Lambda),\ P^* \in \mathscr{P}(\Lambda^{op})$.

(b) $\forall\ P \in \mathscr{P}(\Lambda),\ \Phi_P : P \longrightarrow P^{**}$ *es un* Λ*-isomorfismo.*

(c) *El R-funtor contravariante* $* = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) : \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda^{op})$, *se restringe a una dualidad de R-categorías*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)|_{\mathscr{P}(\Lambda)} : \mathscr{P}(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{P}(\Lambda^{op}).$$

Demostración. (a) y (b) Primero, tenemos que $({}_\Lambda\Lambda)^* \in \mathscr{P}(\Lambda^{op})$, ya que $t : ({}_\Lambda\Lambda)^* \longrightarrow \Lambda_\Lambda$ es un isomorfismo en $\mathscr{P}(\Lambda^{op})$ (cf. 3.6.3 (d)).

Sea $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$. En particular, $\exists\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ {}_\Lambda Q$ tales que $P \oplus Q = {}_\Lambda\Lambda^n$. Por lo tanto $P^* \oplus Q^* \simeq ({}_\Lambda\Lambda^n)^* \simeq (\Lambda_\Lambda)^n$, de donde $P^* \in \mathscr{P}(\Lambda^{op})$. Por otro lado, como $0 \longrightarrow P \longrightarrow ({}_\Lambda\Lambda)^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ es una sucesión split-exacta y $*$ es aditivo, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d] & 0 \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & {}_\Lambda\Lambda^n \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{\Lambda^n}"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_Q"] & 0 \\
 & P^{**} \arrow[r] \arrow[d] & ({}_\Lambda\Lambda^n)^{**} \arrow[r] \arrow[d] & Q^{**} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C & 0 & C'. &
\end{tikzcd}$$

Por el Lema de la Serpiente, se tiene que $0 \longrightarrow K \longrightarrow 0 \longrightarrow K' \longrightarrow C \longrightarrow 0 \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, por lo que $K = 0 = C'$. Considerando, ahora la sucesión exacta que se parte $0 \longrightarrow Q \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda^n \longrightarrow P \longrightarrow 0$; y repitiendo el procedimiento anterior, se obtiene la sucesión exacta $0 \longrightarrow K' \longrightarrow 0 \longrightarrow K \longrightarrow C' \longrightarrow 0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$, de donde se tiene que $K' = 0 = C$. Por lo tanto, $\Phi_P : P \longrightarrow P^{**}$ es un isomorfismo.

(c) Por (b), tenemos el siguiente Λ-isomorfismo

$$\Phi_P : {}_\Lambda P \longrightarrow P^{**} = \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda P, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Lambda_\Lambda).$$

Análogamente, intercambiando a Λ por Λ^{op}, se tiene el Λ-isomorfismo

$$\Phi_Q : Q_\Lambda \longrightarrow Q^{**} = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(Q_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Lambda_\Lambda).$$

Luego, por 3.6.3 (b), se tienen los siguientes isomorfismos inducidos por Φ

$$\begin{aligned} 1_{\mathscr{P}(\Lambda)} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)|_{\mathscr{P}(\Lambda)}, \\ 1_{\mathscr{P}(\Lambda^{op})} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)|_{\mathscr{P}(\Lambda^{op})}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.6.5. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ A, B \in \mathrm{Mod}(\Lambda),\ \forall\ \alpha : A_1 \longrightarrow A_2$ *y* $\forall\ \beta : B_1 \longrightarrow B_2$ *en* $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, *los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{tikzcd} A_2^* \otimes_\Lambda B \arrow[r, "\alpha^*\otimes 1_B"] \arrow[d, "\psi_{A_2,B}"'] & A_1^* \otimes_\Lambda B \arrow[d, "\psi_{A_1,B}"] \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(A_2,B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha,B)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A_1,B), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^* \otimes_\Lambda B_1 \arrow[r, "1_{A^*}\otimes\beta"] \arrow[d, "\psi_{A,B_1}"'] & A^* \otimes_\Lambda B_2 \arrow[d, "\psi_{A,B_2}"] \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B_1) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\beta)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B_2), \end{tikzcd}$$

donde $\psi_{A,B} : A^* \otimes_\Lambda B \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ *se define como* $\psi_{A,B}(f \otimes b)(a) := f(a)b$ *(i.e.* $\psi_{A,B}(f\otimes b) = f(-)b$*).*

(*b*) $\forall\ P \in \mathscr{P}(\Lambda), \forall\ B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *se tiene que* $\psi_{P,B} : P^* \otimes_\Lambda B \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P,B)$ *es un R-isomorfismo.*

Demostración. (a) Veamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha,B)\circ\psi_{A_2,B} = \psi_{A_1,B}\circ(\alpha^*\otimes 1_B)$. En efecto, sea $f \in A_2^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A_2,\Lambda),\ b \in B,\ a_1 \in A_1$ y $\alpha^* : A_2^* \longrightarrow A_1^*$. Entonces

$$\begin{aligned}(\psi_{A_1,B}\circ(\alpha^*\otimes 1_B))(f\otimes b)(a_1) &= \psi_{A_1,B}((\alpha^*\otimes 1_B)(f\otimes b))(a_1)\\ &= \psi_{A_1,B}(\alpha^*(f)\otimes b)(a_1) = \psi_{A_1,B}(f\circ\alpha\otimes b)(a_1)\\ &= (f\circ\alpha)(a_1)b = ((f\circ\alpha)(-)b)(a_1) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha,B)(f(-)b)(a_1)\\ &= (\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha,B)\circ\psi_{A_2,B})(f\otimes b)(a_1).\end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que $\psi_{A,B_2}\circ(1_{A^*}\otimes\beta) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\beta)\circ\psi_{A,B_1}$.

(b) Realizaremos la prueba en tres etapas.

(*i*) $P = {}_\Lambda\Lambda$. Consideremos los isomorfismos $\varepsilon_B : \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,B) \longrightarrow B$, dado por $\varepsilon_B(f) := f(1)$, y $\tau_B : \Lambda\otimes_\Lambda B \longrightarrow B$ dado por $\tau_B(\lambda\otimes b) := \lambda b$. En particular, $\varepsilon_B\otimes 1_B : ({}_\Lambda\Lambda)^*\otimes_\Lambda B \longrightarrow \Lambda_\Lambda\otimes_\Lambda B$ es un isomorfismo pues $\varepsilon_\Lambda : ({}_\Lambda\Lambda)^* \longrightarrow \Lambda_\Lambda$ lo es (véase la prueba de 3.6.3 (d)). Luego, para probar que $\psi_{\Lambda,B} : \Lambda^*\otimes_\Lambda B \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,B)$ es un isomorfismo, es suficiente ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Lambda^*\otimes_\Lambda B \arrow[r, "\psi_{\Lambda,B}"] \arrow[d, "\varepsilon_\Lambda\otimes 1_B"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,B) \arrow[ddl, "\varepsilon_B"] \\ \Lambda\otimes 1_B \arrow[d, "\tau_B"'] & \\ B, & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f\otimes b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(-)b \arrow[ddl, mapsto] \\ f(1)\otimes b \arrow[d, mapsto] & \\ f(1)b. & \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del primer diagrama se sigue fácilmente (ver el segundo diagrama). Ahora bien, dado que $\varepsilon_B\circ\psi_{\Lambda,B} = \tau_B\circ(\varepsilon_\Lambda\otimes 1_B)$, se sigue que $\psi_{\Lambda,B} = \varepsilon_B^{-1}\circ\tau_B\circ(\varepsilon_\Lambda\otimes 1_B)$ es un isomorfismo.

(*ii*) $P = {}_\Lambda\Lambda^n$. En este caso, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} ({}_\Lambda\Lambda^n)^* \otimes B & \xrightarrow{\psi_{\Lambda^n,B}} & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^n, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (({}_\Lambda\Lambda)^* \otimes B)^n & \xrightarrow[(\psi_{\Lambda,B})^n]{} & (\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, B))^n, \end{array}$$

donde las flechas verticales y $(\psi_{\Lambda,B})^n$ son isomorfismos por (*i*). Por lo tanto $\psi_{\Lambda^n,B}$ es un isomorfismo.

(*iii*) Caso general. Sea $P \oplus Q = {}_\Lambda\Lambda^n$. Usaremos que $* = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) : \mathrm{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Lambda^{op})$ y $- \otimes_\Lambda B : \mathrm{Mod}(\Lambda^{op}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$ son R-funtores.

Dado que $0 \longrightarrow P \longrightarrow \Lambda^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ es split-exacta en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q^* \otimes_\Lambda B & \longrightarrow & (\Lambda^n)^* \otimes_\Lambda B & \longrightarrow & P_* \otimes_\Lambda B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{Q,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\Lambda^n,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{P,B}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^n, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde $\psi_{\Lambda^n,B}$ es un isomorfismo, por (*ii*). Y por el Lema de la Serpiente, concluimos que $\psi_{Q,B}$ es un monomorfismo y $\psi_{P,B}$ es un epimorfismo. Análogamente, usando la sucesión exacta $0 \longrightarrow Q \longrightarrow \Lambda^n \longrightarrow P \longrightarrow 0$ que es split-exacta, se tiene que $\psi_{P,B}$ es un monomorfismo y que $\psi_{Q,B}$ es un epimorfismo. Por lo tanto, $\psi_{P,B} : P^* \otimes_\Lambda B \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B)$ es un isomorfismo en $\mathrm{Mod}(R)$. □

Lema 3.6.6. *Sea Λ una R-álgebra de artin semisimple y $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-módulos simples. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *Λ es un anillo con dualidad* $* := \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

(*b*) $\forall\ S \in \mathscr{S}$, *$S^*$ es un Λ^{op}-módulo simple; y además, se tiene un isomorfismo de Λ^{op}-módulos* $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \pi) : S^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S, \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S))$, *donde* $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S)$ *es el epi-canónico.*

(*c*) $\forall\ S \in \mathscr{S}, \quad \mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(S^*) = \mathrm{ann}_\Lambda(S)$.

Demostración. (a) Como Λ es semisimple, tenemos por 2.5.14, que $\mathscr{P}(\Lambda) = \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathscr{P}(\Lambda^{op}) = \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ (Λ^{op} es semisimple por 2.5.17). Luego (a), es consecuencia de 3.6.4 (c).

(b) Por (a), tenemos que $* : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ es una R-dualidad. Luego, por 3.4.6 (c$_2$), se tiene que S^* es un Λ^{op}-simple. Ahora bien, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, -)$ al epi-canónico $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S)$, se obtiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \pi) : S^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S, \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S))$ es un Λ^{op}-epimorfismo, pues ${}_\Lambda S$ es proyectivo. Por otro lado, como S^* es un Λ^{op}-simple, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \pi)$

es cero o es un monomorfismo. Luego, es suficiente ver que $\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\pi) \neq 0$. En efecto, por 3.3.30 (c), $\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S) \simeq {}_\Lambda S^m$, por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(S, S^m) \simeq (\mathrm{End}_\Lambda(S))^m \neq 0.$$

Por lo que $\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S)) \neq 0$; y como $\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\pi)$ es un epimorfismo, concluimos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\pi) \neq 0$.

(c) Por (b) y el Ejercicio 3.3.28 (d), se tiene que

$$\mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(S^*) = \mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S))).$$

Veamos que $\mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S))) = \mathrm{ann}_\Lambda(S)$. En efecto, como Λ es semisimple, se tiene que $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \times \Lambda_n$, donde Λ_i es un anillo de matrices y por lo tanto un anillo simple. En la prueba de 2.5.16 (b), se vió que: si ${}_{\Lambda_i}S_i$ es el único simple (hasta isomorfismos) en $\mathrm{Mod}(\Lambda_i)$, entonces $\{{}_\Lambda S_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de Λ-simples no isomorfos, donde ${}_\Lambda S_i$ se obtiene de ${}_{\Lambda_i}S_i$ por cambio de anillos $\pi_i : \Lambda \longrightarrow \Lambda_i$, con π_i la proyección canónica. Como ${}_\Lambda S$ es simple, podemos asumir que ${}_\Lambda S = {}_\Lambda S_i$ para algún i. Dado que Λ_i es un anillo simple, $\mathfrak{m}_i := \mathrm{Ker}(\pi_i) \trianglelefteq \Lambda$ es maximal y $\mathrm{ann}_{\Lambda_i}(S_i) = 0$ (*i.e.* ${}_{\Lambda_i}S_i$ es fiel). Luego, por el Ejercicio 3.3.29 (b), se tiene que $\mathrm{ann}_\Lambda(S_i) = \mathfrak{m}_i$ pues $\Lambda_i = \Lambda/\mathrm{Ker}(\pi_i) = \Lambda/\mathfrak{m}_i$. De donde

$$\mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \Lambda/\mathrm{ann}_\Lambda(S))) = \mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_{\Lambda_i}(S_i, \Lambda_i));$$

por otro lado, $\mathrm{Hom}_{\Lambda_i}(S_i,\Lambda_i)$ es Λ_i^{op}-fiel pues es no nulo y $\Lambda_i^{op} = \Lambda^{op}/\mathfrak{m}_i$ es simple (ya que en un anillo simple todos los módulos no nulos son fieles). Luego, por el Ejercicio 3.3.29 (b), concluimos que $\mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Hom}_{\Lambda_i}(S_i,\Lambda_i)) = \mathfrak{m}_i$ pues $\Lambda^{op}/\mathfrak{m}_i = \Lambda_i^{op}$, probándose (c). □

Ejercicio 3.6.7. Sea Λ una R-álgebra de artin. Considere la dualidad usual $D_\Lambda := \mathrm{Hom}_R(-, I)$ donde $I := \mathrm{top}(R)$. Pruebe que

(*a*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \quad \mathrm{ann}_\Lambda(M) = \mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M))$.

(*b*) $\forall\ N \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \quad \mathrm{ann}_{\Lambda^{op}}(N) = \mathrm{ann}_\Lambda(D_{\Lambda^{op}}(N))$.

Lema 3.6.8. *Sea Λ una R-álgebra de artin y $\mathfrak{r} := J(\Lambda)$. Entonces, el epi-canónico $\pi : M \longrightarrow \mathrm{top}(M)$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ induce el siguiente isomorfismo en* $\mathrm{mod}((\Lambda/\mathfrak{r})^{op})$

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi, \Lambda/\mathfrak{r}) : \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{top}(M), \Lambda/\mathfrak{r}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda/\mathfrak{r}).$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi,\Lambda/\mathfrak{r})$ es un $(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}$-morfismo. En efecto, sea $f : \mathrm{top}(M) \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$ un Λ-morfismo y $\overline{\lambda} := \lambda + \mathfrak{r} \in \Lambda/\mathfrak{r}$. Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(\pi, \Lambda/\mathfrak{r})(\overline{\lambda}^{op} f)(m) &= (f\overline{\lambda}) \circ \pi(m) = f(\pi(m))\overline{\lambda} \\ &= \overline{\lambda}^{op}((f \circ \pi)(m)) = \overline{\lambda}^{op}\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi, \Lambda/\mathfrak{r})(f)(m). \end{aligned}$$

También se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi,\Lambda/\mathfrak{r})$ es un monomorfismo, pues $\pi : M \longrightarrow \mathrm{top}(M)$ es un epimorfismo. Ahora, checamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi,\Lambda/\mathfrak{r})$ es un epimorfismo. Para esto, veamos que $\mathrm{Im}(f)$ es semisimple. En efecto, $\mathrm{Im}(f) \leqslant \mathrm{top}(\Lambda)$ y

$\text{top}(\Lambda)$ es semisimple; y por 2.5.5, $\text{Im}(f)$ es semisimple. Ahora bien, por 2.6.17 (b), se tiene que

$$0 = \text{rad}(\text{Im}(f)) = \mathfrak{r}f(M) = f(\mathfrak{r}M) = f(\text{rad}(M)),$$

por lo tanto $\text{rad}(M) \leqslant \text{Ker}(f)$. Por lo que existe $\overline{f} : \text{top}(M) \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Lambda/\mathfrak{r} \\ & \text{top}(M), \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

de donde se tiene que $\text{Hom}_\Lambda(\pi, \Lambda/\mathfrak{r})$ es un epimorfismo. $\square$

Teorema 3.6.9. *Sea Λ una R-álgebra de artin, $D_\Lambda = \text{Hom}_R(-, I)$ la dualidad usual donde $I := \text{top}(R)$ y $\mathscr{S}$ la clase Λ-módulos simples. Entonces*

(*a*) $\forall\ S \in \mathscr{S} \quad D_{\Lambda^{op}}(\text{top}((P_0(S))^*)) \simeq {}_\Lambda S$.

(*b*) $\forall\ S \in \mathscr{S} \quad D_{\Lambda^{op}}((P_0(S))^*) \simeq I_0({}_\Lambda S)$.

Demostración. Sea $S \in \mathscr{S}$, $\mathfrak{r} := J(\Lambda) = J(\Lambda^{op})$ y $P := P_0(S) \longrightarrow S$ la cubierta proyectiva de S.

(a) Veamos primero que las siguientes dos condiciones se satisfacen. En primer lugar, veamos que

$$\text{top}(P^*) \simeq \text{Hom}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(P/\mathfrak{r}P, \Lambda/\mathfrak{r}) \text{ como } (\Lambda/\mathfrak{r})^{op} - \text{módulos}. \tag{3.8}$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{top}(P^*) &\simeq P^*/P^*\mathfrak{r} \simeq P^* \otimes_\Lambda \Lambda/\mathfrak{r} \simeq \text{Hom}_\Lambda(P, \Lambda/\mathfrak{r}) \\ &\simeq \text{Hom}_\Lambda(\text{top}(P), \Lambda/\mathfrak{r}) = \text{Hom}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(P/\mathfrak{r}P, \Lambda/\mathfrak{r}), \end{aligned}$$

donde el segundo isomorfismo se debe a 3.6.5 (b) y el último a 3.6.8; probándose (3.8).

Ahora, demostraremos que

$$\text{ann}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(D_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r})) = \text{ann}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(S). \tag{3.9}$$

En efecto, por el Ejercicio 3.6.7 (b), se tiene

$$\begin{aligned} &\text{ann}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(D_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r})) = \text{ann}_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r}) \\ &= \text{ann}_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(\text{Hom}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(P/\mathfrak{r}P, \Lambda/\mathfrak{r})) = \text{ann}_{\Lambda/\mathfrak{r}}(S), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene de (3.8), y la última a 3.6.6 ya que $\text{top}(P) \simeq S$; probándose (3.9).

Ahora bien, por 3.6.6 (b), se tienen los $\Lambda/\mathfrak{r}$-simples $D_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r})$ y ${}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S$, ambos con el mismo anulador, en virtud de (3.9); entonces, por 3.3.32,

$$\begin{aligned} D_{\Lambda^{op}}(\mathrm{top}(P^*)) &= \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r}, I) = \mathrm{Hom}_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r}, I) \\ &= D_{(\Lambda/\mathfrak{r})^{op}}(P^*/P^*\mathfrak{r}) \simeq {}_{\Lambda/\mathfrak{r}}S. \end{aligned}$$

Usando el cambio de anillos $\Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{r}$, el isomorfismo anterior induce un isomorfismo $D_{\Lambda^{op}}(\mathrm{top}(P^*)) \xrightarrow{\sim} {}_{\Lambda}S$.

(b) Tenemos que el epi-canónico $\pi : P^* \longrightarrow \mathrm{top}(P^*)$ es una cubierta proyectiva pues $P^* \in \mathscr{P}(\Lambda^{op})$ (por 3.6.4 y 2.8.3). Luego, de 3.4.7, se tiene que $D_{\Lambda^{op}}(\pi) : D_{\Lambda^{op}}(\mathrm{top}(P^*)) \longrightarrow D_{\Lambda^{op}}(P^*)$ es una envolvente inyectiva. Por (a), tenemos que $I_0({}_{\Lambda}S) \simeq D_{\Lambda^{op}}(P^*)$. □

Definición 3.6.10. Sea Λ una R-álgebra de artin. El *funtor de Nakayama* $\mathscr{N}$ es la composición de los siguientes R-funtores

$$\mathrm{mod}(\Lambda) \xrightarrow{*=\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-,\Lambda)} \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \xrightarrow{D_{\Lambda^{op}}=\mathrm{Hom}_R(-,I)} \mathrm{mod}(\Lambda),$$

donde $I := I_0(\mathrm{top}(R))$. Denotaremos por $\mathscr{I}(\Lambda)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos inyectivos finitamente generados.

Teorema 3.6.11. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, el funtor de Nakayama* $\mathscr{N} : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)$, *se restringe a una R-equivalencia de categorías* $\mathscr{N}|_{\mathscr{P}(\Lambda)} : \mathscr{P}(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{I}(\Lambda)$.

Demostración. Por 3.6.4 (c), sabemos que $* : \mathscr{P}(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{P}(\Lambda^{op})$ es una R-dualidad de categorías. Por otro lado, $D_{\Lambda^{op}} : \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)$ es una R-dualidad tal que $D_{\Lambda}(\mathscr{P}(\Lambda^{op})) = \mathscr{I}(\Lambda)$, véase 3.5.3 y 3.4.6 ($c_3$). □

Observación 3.6.12. Sea Λ una R-álgebra de artin y $\mathscr{S}$ la clase de los Λ-simples. Note que 3.6.9 (b) se puede reescribir como sigue: $\forall\ S \in \mathscr{S}$ se tiene que $\mathscr{N}(P_0(S)) \simeq I_0(S)$.

Ejercicio 3.6.13. Sea Λ una R-álgebra de artin, $P \in \mathscr{P}(\Lambda)$ inescindible, $I \in \mathscr{I}(\Lambda)$ inescindible y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Pruebe que

(*a*) $\ell_{\mathrm{End}_{\Lambda}(P)^{op}}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(P, M)) = \mathfrak{m}_{\mathrm{top}(P)}(M)$.

(*b*) $\ell_{\mathrm{End}_{\Lambda}(I)}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, I)) = \mathfrak{m}_{\mathrm{soc}(I)}(M)$.

Ejercicio 3.6.14. Sea Λ una R-álgebra de artin, ${}_{\Lambda}S$ simple y $e \in \Lambda$ un idempotente primitivo. Pruebe que

(*a*) $\Lambda e = P_0(S)$ si y sólo si $e \cdot S \neq 0$.

(*b*) $\varphi : \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda e, \Lambda) \longrightarrow e\Lambda$, con $\varphi(f) := f(e)$, es un Λ^{op}-isomorfismo.

(*c*) $\Lambda e = P_0(S)$ si y sólo si $e\Lambda = P_0(D_{\Lambda}(S))$.

Capítulo 4

Álgebras de Caminos

A lo largo de este capítulo, K denotará un campo. En el aspecto teórico, muchos de los resultados para idempotentes y K-álgebras de dimensión finita serán usados para el estudio de K-álgebras de caminos. Se define carcaj con relaciones, en particular de define el carcaj ordinario de una K-álgebra de dimensión finita. El capítulo acaba con el Teorema de Peter Gabriel, el cual afirma que toda K-álgebra básica de dimensión finita admite una presentación, si K es algebraicamente cerrado. Enseguida damos definiciones elementales sobre carcajes.

4.1. Carcajes de álgebras

Definición 4.1.1. Un *carcaj* Q es un triple (Q_0, Q_1, d), donde Q_0 es el conjunto de vértices de Q, Q_1 es el conjunto de flechas de Q y $d : Q_1 \longrightarrow Q_0 \times Q_0$ con $d(\alpha) = (\mathrm{o}(\alpha), \mathrm{t}(\alpha))$, donde $\mathrm{o}(\alpha)$ es el origen de α y $\mathrm{t}(\alpha)$ el término (final) de α, *i.e.* $\mathrm{o}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{t}(\alpha)$.

Ejemplos

(1) $Q = \; 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \;, \quad Q_0 = \{1, 2, 3\}, \quad Q_1 = \{\alpha, \beta\}.$

(2) $Q = \; 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2 \circlearrowleft^{\gamma} \;, \quad Q_0 = \{1, 2\}, \quad Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$

(3) $Q = 1, \quad Q_0 = \{1\}, \quad Q_1 = \emptyset.$

Definición 4.1.2. Sea Q un carcaj, decimos que

(*a*) Q es *finito* si $\mathrm{Card}(Q_0 \cup Q_1) < \infty$.

(*b*) Q es *conexo* si la gráfica (no orientada) subyacente $\overline{Q}$ de Q es conexa. Recordamos que $\overline{Q}$ se obtiene de Q, olvidando la orientación de las flechas.

(c) $Q' = (Q'_0, Q'_1, d')$ es un *subcarcaj* de $Q = (Q_0, Q_1, d)$ si $Q'_0 \subseteq Q_0,\ Q'_1 \subseteq Q_1$ y $d' = d|_{Q'_1}$.

(d) Q' es un *subcarcaj pleno* de Q, si Q' es un subcarcaj de Q tal que $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid \mathrm{o}(\alpha), \mathrm{t}(\alpha) \in Q'_0\}$.

Ejemplo

Sea $Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] & 3 \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$. El carcaj $Q' = \ 2 \xrightarrow{\gamma} 3$ es un subcarcaj de Q que no es pleno. Sin embargo, el carcaj $Q'' = \begin{tikzcd} 2 \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] & 3 \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$ sí es un subcarcaj pleno de Q.

Definición 4.1.3. Dado un carcaj Q, se tienen los siguientes tipos de caminos en Q

(a) Los *vértices* $i \in Q_0$, se les conoce también como caminos de longitud cero y se denotan por $\varepsilon_i = (i|\ |i)$ para cada $i \in Q_0$.

(b) Los *caminos* de longitud $n \geqslant 1$, son de la forma

$$\alpha :\ i \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{t}(\alpha_1) \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{t}(\alpha_2) \cdots \mathrm{o}(\alpha_n) \xrightarrow{\alpha_n} j.$$

Dicho camino se denota por $\alpha = (j \mid \alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1 \mid i)$, o bien $\alpha = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$.

Denotaremos por $Q_n,\ n \in \mathbb{N}$, al conjunto de todos los caminos en Q de longitud n. De esta forma, tenemos que Q_0 son los vértices o caminos de longitud 0, y Q_1 son las flechas o caminos de longitud 1

Definición 4.1.4. Sea Q un carcaj. Decimos que

(a) $\alpha \in Q_n$ es un *ciclo*, si $n \geqslant 1$ y $\mathrm{o}(\alpha) = \mathrm{t}(\alpha)$. Un *lazo* es un ciclo de longitud 1.

(b) Q es acíclico si Q no contiene ciclos orientados.

Ejemplos

(1) El carcaj

$$Q = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

es acíclico, $Q_0 = \{1,2,3,4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $Q_2 = \{\beta\alpha, \delta\gamma\}$ y $Q_n = \emptyset$ para $n \geqslant 3$.

(2) El carcaj

$$Q = 1 \circlearrowleft \alpha$$

tiene un lazo α, $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$ y $Q_n = \{\alpha^n\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

Definición 4.1.5. Sea Q un carcaj. Denotamos por

(a) KQ_n al K-espacio vectorial cuya base es Q_n.

(b) $KQ := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} KQ_n$, *i.e.* KQ es el K-espacio vectorial cuya base es $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$.

Ejemplos

(1) $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$, en este caso $KQ = K\varepsilon_1 \oplus K\varepsilon_2 \oplus K\alpha$.

(2) $Q = 1 \circlearrowleft \alpha$. Luego $KQ = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K\alpha^n$ donde $\alpha^0 := \varepsilon_1$.

Definición 4.1.6. Sea Q un carcaj. La *concatenación de caminos* en Q es una función $Q_n \times Q_m \longrightarrow Q_{n+m}$, definida para cada par $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, como sigue

$$(\alpha,\beta) \mapsto \beta\alpha := \begin{cases} (\mathrm{t}(\beta) \mid \beta, \alpha \mid \mathrm{o}(\alpha)) & \text{si } \mathrm{t}(\alpha) = \mathrm{o}(\beta), \\ 0 & \text{si } \mathrm{t}(\alpha) \neq \mathrm{o}(\beta). \end{cases}$$

La concatenación de caminos en Q, se extiende K-bilinealmente a un producto $KQ \times\ KQ \longrightarrow KQ$ como sigue

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i\,, \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j\right) \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j a_i \beta_j \alpha_i.$$

Dicho producto en KQ, se le conoce como el inducido por la concatenación de caminos.

Proposición 4.1.7. *Sea Q un carcaj. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *El K-espacio vectorial KQ, junto con el producto inducido por la concatenación de caminos, induce una estructura de K-álgebra (posiblemente sin unidad) en KQ.*

(b) *KQ tiene unidad si y sólo si* $\mathrm{Card}(Q_0) < \infty$. *En tal caso $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales en KQ.*

(c) $\dim_K(KQ) < \infty$ *si y sólo si Q es finito y acíclico.*

Demostración. (a) No es difícil ver que el producto $Q_n \times Q_m \longrightarrow KQ_{n+m}$ definido por $(\alpha,\beta) \mapsto \beta\alpha$ es asociativo; y que al extenderlo K-bilinealmente a $KQ \times KQ \longrightarrow KQ$ de la siguiente manera

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i, \sum_{i=1}^{m} b_j\beta_j\right) \mapsto \sum_{i,j} b_j a_i \beta_j \alpha_i,$$

se obtiene una estructura de K-álgebra en KQ, posiblemente sin unidad.

(b) Es claro que $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es una familia de idempotentes ortogonales en KQ. Además, si $\gamma \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, se tiene que

$$\gamma\varepsilon_i = \begin{cases} \gamma & \text{si } \mathrm{o}(\gamma) = i, \\ 0 & \text{si } \mathrm{o}(\gamma) \neq i. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_i\gamma = \begin{cases} \gamma & \text{si } \mathrm{t}(\gamma) = i, \\ 0 & \text{si } \mathrm{t}(\gamma) \neq i. \end{cases}$$

Supongamos que $\exists\, 1_{KQ}$. En particular $1_{KQ} = \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i$, donde $a_i \in K$, $\gamma_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Sea $Q_0' := \{\mathrm{o}(\gamma_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, que es un conjunto finito. Si $\mathrm{Card}(Q_0) = \infty$, entonces $\exists\, j \in Q_0 \backslash Q_0'$ tal que $1_{KQ} = 1_{KQ}\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{m} a_i\gamma_i\varepsilon_j = 0$; por lo que $KQ = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathrm{Card}(Q_0) < \infty$.

Sea $\mathrm{Card}(Q_0) < \infty$. Veamos que $1_{KQ} = \sum_{i\in Q_0} \varepsilon_i$. En efecto, dado un camino γ en Q, se tiene que

$$\gamma\left(\sum_{i\in Q_0} \varepsilon_i\right) = \sum_{i\in Q_0} \gamma\varepsilon_i = \gamma\varepsilon_{\mathrm{o}(\gamma)} = \gamma = \varepsilon_{\mathrm{t}(\gamma)}\gamma = \left(\sum_{i\in Q_0} \varepsilon_i\right)\gamma.$$

De donde se sigue que $1_{KQ} = \sum_{i\in Q_0} \varepsilon_i$.

(c) Sea $\dim_K(KQ) < \infty$. En particular se tiene que

$$\mathrm{Card}(Q_0 \cup Q_1) \leqslant \mathrm{Card}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\Big) = \dim_K(KQ) < \infty.$$

Por lo que Q es finito. Veamos que Q es acíclico. En efecto, supongamos que existe un ciclo $\gamma \in Q_n$. Luego $\gamma^m \in Q_{nm}\ \forall\, m \in \mathbb{N}$, en particular $\{\gamma^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ es infinito y linealmente independiente, contradiciendo que $\dim_K(KQ) < \infty$.

Ahora, supongamos que Q es finito y acíclico. Luego $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Q_n = \emptyset\ \forall\, n \geqslant n_0$. De donde se tiene que $\dim_K(KQ) = \mathrm{Card}(\bigcup_{0\leqslant n\leqslant n_0} Q_n) < \infty$. $\square$

Ejemplo Consideremos el carcaj $Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$. Es claro que $\varepsilon_1\alpha^n = \alpha^n$ y también que $\alpha^n\alpha^m = \alpha^{n+m}\ \forall\, n,m \in \mathbb{N}$. Además $1_{KQ} = \varepsilon_1$ y $\alpha^0 := 1_{KQ} = \varepsilon_1$. Entonces, se tiene un isomorfismo de K-álgebras $KQ = \bigoplus_{n\geqslant 0}(K\alpha^n) \longrightarrow K[x]$ donde $\varepsilon_1 \mapsto 1_K$ y $\alpha \mapsto x$.

Definición 4.1.8. Sea Λ un anillo. Decimos que Λ es *conexo* si $\{0,1\}$ son los únicos idempotentes centrales de Λ.

Ejercicio 4.1.9. Sea Λ un anillo. Pruebe que Λ es conexo si y sólo si Λ no se puede escribir como el producto de anillos $\Lambda = R \times S$, donde R y S son anillos no triviales.

Lema 4.1.10. *Sea Λ un anillo y $e \in \Lambda$ un idempotente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *La correspondencia $\rho : e\Lambda e \longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e)^{op}$, dada por $(\lambda' e)\rho(e\lambda e) = \lambda' e\lambda e$, es un isomorfismo de anillos.*

(*b*) *El idempotente e es primitivo si y sólo si $e\Lambda e \neq 0$ y $\forall\ \tau \in e\Lambda e$, con $\tau^2 = \tau$, se tiene que $\tau = e$ ó $\tau = 0$.*

Demostración. (a) Véase 1.10.5 (b).

(b) Según 2.8.23, e es primitivo si y sólo si ${}_\Lambda\Lambda e$ es inescindible, y esto último sucede si y sólo si $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e)^{op}$ es no trivial y los únicos idempotentes son los triviales (ver 2.7.5). Luego, basta aplicar (a). □

Lema 4.1.11. *Sean Λ un anillo y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales de Λ. Entonces, se tiene que Λ no es conexo si y sólo si existe una partición no trivial $\{1, 2, \ldots, n\} = I \uplus J$ tal que $e_i\Lambda e_j = 0 = e_j\Lambda e_i$ $\forall\ i \in I,\ \forall\ j \in J$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que Λ no es conexo. Luego $\exists\ c \in C(\Lambda)\backslash\{0, 1\}$ tal que $c^2 = c$. Sean $c_i := e_i c e_i \in e_i\Lambda e_i\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$. Consideremos $I := \{i \mid c_i = 0\}$ y $J := \{j \mid c_j = e_j\}$. Veamos que

$$c_i = e_i \quad \text{ó} \quad c_i = 0\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1}$$

En efecto, como e_i es primitivo y $c_i^2 = c_i \in e_i\Lambda e_i$, la afirmación (4.1) se sigue de 4.1.10 (b).

Por otro lado, la igualdad $\{1, 2, \ldots, n\} = I \uplus J$ se sigue de (4.1) y de que $e_i \neq 0$. Veamos que

$$\forall\ i \in I \quad e_i c = c e_i = 0 \quad \text{y} \quad \forall\ j \in J \quad e_j c = c e_j = e_j. \tag{4.2}$$

En efecto, $c = 1 \cdot c \cdot 1 = (\sum_{i=1}^n e_i)c(\sum_{j=1}^n e_j) = \sum_{i,j} e_i c e_j = \sum_{i=1}^n e_i c e_i = \sum_{i=1}^n c_i$. Luego $c = \sum_{i=1}^n c_i$. Ahora bien:

- $\forall\ i \in I$, se tiene que $e_i c = \sum_{t=1}^n e_i c_t = \sum_{t=1}^n e_i e_t c e_t = e_i c e_i = c_i = 0$. Análogamente, $c e_i = 0$.

- $\forall\ j \in J$, se tiene que $e_j c = \sum_{t=1}^n e_j c_t = \sum_{t=1}^n e_j e_t c e_t = e_j c e_j = c_j = e_j$. Análogamente, $c e_j = e_j$.

Sea $(i, j) \in I \times J$. Luego como $c \in C(\Lambda)$, de (4.2), se tiene $e_i\Lambda e_j = e_i\Lambda c e_j = e_i c\Lambda e_j = 0 = e_j\Lambda c e_i = e_j c\Lambda e_i = e_j\Lambda e_i$.

($\Leftarrow$) Ahora, sea $I \uplus J = \{1, 2, \ldots n\}$ una partición tal que $e_i\Lambda e_j = 0 = e_j\Lambda e_i\ \forall\ i \in I,\ \forall\ j \in J$. Consideremos $c := \sum_{j\in J} e_j$. Luego $1 = c + c'$, donde $c' := \sum_{i\in I} e_i$. Dado que $\{c, c'\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales de Λ, se tiene que $\Lambda = \Lambda c \oplus \Lambda c'$. Por lo tanto, dado que $I \uplus J = \{1, 2, \ldots n\}$, concluimos que $c \notin \{0,1\}$. Falta ver que $c \in C(\Lambda)$. Sea $\lambda \in \Lambda$. Por hipótesis $e_i\lambda e_j = 0 = e_j\lambda e_i$ $\forall\ i \in I,\ \forall\ j \in J$, luego

$$c\lambda = c\lambda \cdot 1 = \left(\sum_{j\in J} e_j\right)\lambda\left(\sum_{i\in I} e_i + \sum_{t\in J} e_j\right) = \sum_{t,j\in J} e_j\lambda e_t$$

$$= \left(\sum_{j\in J} e_j + \sum_{i\in I} e_i\right)\lambda\left(\sum_{t\in J} e_t\right) = 1\cdot\lambda c = \lambda c.$$

□

Teorema 4.1.12. *Sea Q un carcaj finito. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

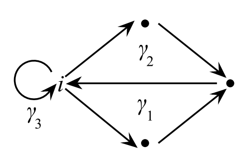
(*a*) $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$ *es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de KQ.*

(*b*) *La K-álgebra KQ es conexa si y sólo si Q es conexo.*

Demostración. (a) Por 4.1.7 (b), basta ver que ε_i es primitivo. Para ello, dado que $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i \neq 0$, es suficiente, por 4.1.10 (b), probar que los únicos idempotentes de $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i$ son ε_i y 0.

En efecto, en el caso en que Q no tenga ciclos que pasen por i, se tiene que $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i = \varepsilon_i(K)\varepsilon_i = K\varepsilon_i$; y como K es un campo, se sigue el resultado en este caso.

Supongamos que Q tiene ciclos que pasan por i. Luego, por ser Q finito, existen solamente $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ ciclos tales que $\mathrm{o}(\gamma_t) = i = \mathrm{t}(\gamma_t)$ $\forall\ t$, y los otros posibles vértices de dichos cicilos son diferentes del vértice i. En el siguiente dibujo, ilustramos tres de tales posibles ciclos.



Observe que $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i$ son todas las combinaciones K-lineales (finitas) de caminos en Q que empiezan y terminan en i.

Sea $K\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ la K-álgebra de polinomios no conmutativos en las variables $x_1, \ldots, x_r$. Dicha álgebra tiene como idempotentes sólo al 0 y al 1. Dado que la aplicación $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i \longrightarrow K\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ tal que $\gamma_j \mapsto x_j$ y $\varepsilon_i \mapsto 1$ es un isomorfismo de K-álgebras, se tienen que los únicos idempotentes de $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i$ son los triviales.

(b) ($\Rightarrow$) Supongamos que Q no es conexo. Sea Q' una componente conexa de Q y $Q'' := Q \setminus Q'$. Por (a), sabemos que $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de KQ. Por otro lado, $Q_0 = Q_0' \uplus Q_0''$ es una partición no trivial (por construcción).

Veamos que $\forall\ a \in Q_0',\ \forall\ b \in Q_0''$ se tiene que $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b = 0 = \varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a$. En efecto, sean $a \in Q_0',\ b \in Q_0''$ y γ un camino en Q. Como Q' es conexo, se tiene que γ está en Q' o bien en Q''. Si $\gamma \subseteq Q'$, usando que $\mathrm{t}(\gamma) \neq b$ y $\mathrm{o}(\gamma) \neq b$, se tiene que $\varepsilon_b\gamma\varepsilon_a = 0 = \varepsilon_a\gamma\varepsilon_b$. Análogamente, si $\gamma \in Q''$, usando que $\mathrm{o}(\gamma) \neq a$ y $\mathrm{t}(\gamma) \neq a$, tenemos que $\varepsilon_b\gamma\varepsilon_a = 0 = \varepsilon_a\gamma\varepsilon_b$; esto es, $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b = 0 = \varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a$. Luego, por 4.1.11, KQ no es conexo.

($\Leftarrow$) Sea Q un carcaj conexo, y supongamos que KQ no es conexo. Luego, por 4.1.11, existe una partición no trivial $Q_0 = Q_0' \uplus Q_0''$ tal que $\forall\ x \in Q_0', \forall\ y \in Q_0'$ sucede que $\varepsilon_x(KQ)\varepsilon_y = 0 = \varepsilon_y(KQ)\varepsilon_x$. Por otro lado, como Q es conexo, existe $\alpha \in Q_1$ que conecta un vértice de Q_0' con otro de Q_0''.

Podemos asumir que $a \xrightarrow{\alpha} b \in Q_1$ donde $a \in Q_0'$ y $b \in Q_0''$. Luego $\alpha = \varepsilon_b\alpha\varepsilon_a \in \varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a = 0$; lo cual es una contradicción pues los caminos en Q forman una base de KQ. $\square$

Teorema 4.1.13 (Propiedad universal de KQ)**.** *Sea Q un carcaj con un número finito de vértices y A una K-álgebra con unidad. Entonces, toda función $\varphi : Q_0 \cup Q_1 \longrightarrow A$ que satisface las siguientes condiciones, (a) y (b),*

(a) $\{e_i := \varphi(\varepsilon_i) \mid i \in Q_0\}$ *es una familia completa de idempotentes ortogonales en A,*

(b) $\forall\ \alpha \in Q_1 \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\varepsilon_{\mathrm{t}(\alpha)})\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)\varphi(\varepsilon_{\mathrm{o}(\alpha)})$;

se extiende de manera única a un morfismo de K-álgebras $\overline{\varphi} : KQ \longrightarrow A$; esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} KQ \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & A \\ Q_0 \cup Q_1 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\varphi = \overline{\varphi}|_{Q_0 \cup Q_1}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\varphi : Q_0 \cup Q_1 \longrightarrow A$ satisfaciendo (a) y (b). Vamos a construir un morfismo de K-álgebras $\overline{\varphi} : KQ \longrightarrow A$ tal que haga conmutar el diagrama del teorema.

Mostramos la existencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos un morfismo K-lineal $\varphi_n : KQ_n \longrightarrow A$ como sigue:

- $n = 0$, $\quad \varphi_0 : KQ_0 \longrightarrow A$ es la extensión K-lineal de $\varphi|_{Q_0} : Q_0 \longrightarrow A$.
- $n = 1$, $\quad \varphi_1 : KQ_0 \longrightarrow A$ es la extensión K-lineal de $\varphi|_{Q_1} : Q_1 \longrightarrow A$.
- $n \geqslant 2$, $\quad$ consideremos $\gamma = \gamma_n \cdots \gamma_1 \in Q_n$, con $\gamma_i \in Q_1\ \forall\ i$. Definimos $\varphi_n(\gamma) := \varphi(\gamma_n) \cdots \varphi(\gamma_1)$ y extendemos K-linealmente a KQ_n.

Veamos que vale lo siguiente:

$$\forall\ \delta \in Q_n,\ \forall\ \gamma \in Q_m \quad \varphi_{n+m}(\gamma\delta) = \varphi_m(\gamma)\varphi_n(\delta). \tag{4.3}$$

En efecto, las condiciones iniciales, (a) y (b), que satisface φ, nos permiten probar (4.3) para los casos $(n,m) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Supongamos que $n,m \geqslant 1$, y sean $\delta = \delta_n \cdots \delta_1$ y $\gamma = \gamma_m \cdots \gamma_1$, donde $\delta_i, \gamma_j \in Q_1 \ \forall\ i,j$.

Caso (1): $\mathrm{o}(\gamma) \neq \mathrm{t}(\delta)$. Luego $\gamma\delta = 0$, y entonces $\varphi_{n+m}(\gamma\delta) = 0$. Por otro lado, por (b), se tiene que

$$\varphi_m(\gamma)\,\varphi_n(\delta) = \varphi_m(\gamma)\,\varphi(\varepsilon_{\mathrm{o}(\gamma)})\,\varphi_n(\delta) = \varphi_m(\gamma)\,\varphi_n(\varepsilon_{\mathrm{o}(\gamma)}\delta) = 0.$$

Caso (2): $\mathrm{o}(\gamma) = \mathrm{t}(\delta)$. Luego $\gamma\delta = \gamma_m \cdots \gamma_1\delta_n \cdots \delta_1$. Por lo tanto,

$$\varphi_{n+m}(\delta) = \varphi(\gamma_m)\cdots\varphi(\gamma_1)\varphi(\delta_n)\cdots\varphi(\delta_1) = \varphi_m(\gamma)\,\varphi_n(\delta).$$

Finalmente, dado que $KQ = \bigoplus_{n\geqslant 0} KQ_n$, $\exists!\ \overline{\varphi} : KQ \longrightarrow A$ que es K-lineal y $\overline{\varphi}|_{KQ_n} = \varphi_n \ \forall\ n$. Más aún, $\overline{\varphi}(1_{KQ}) = \overline{\varphi}(\sum_{i\in Q_0}\varepsilon_i) = \sum_{i\in Q_0}\varphi(\varepsilon_i) = 1_A$; y además, usando (4.3), se tiene que $\overline{\varphi}$ preserva productos. Por lo tanto $\overline{\varphi} : KQ \longrightarrow A$ es un morfismo de K-álgebras que extiende a φ.

Mostramos la unicidad. Sea $\phi : KQ \longrightarrow Q$ un morfismo de K-álgebras tal que $\phi|_{Q_0\cup Q_1} = \varphi$. Veamos que $\phi|_{KQ_n} = \varphi_n \ \forall\ n$. Para $n = 0,1$, la afirmación se cumple por definición. Sea $\gamma = \gamma_n \cdots \gamma_1 \in Q_n,\ n \geqslant 2$. Luego,

$$\phi(\gamma) = \phi(\gamma_n)\cdots\phi(\gamma_1) = \varphi(\gamma_n)\cdots\varphi(\gamma_1) = \varphi_n(\gamma);$$

de donde se sigue que $\phi = \overline{\varphi}$. □

Definición 4.1.14. Dado un carcaj Q, denotaremos por $\mathscr{F}$ al ideal generado en KQ por Q_1.

Ejercicio 4.1.15. Sea Q un carcaj. Pruebe que $\forall\ m \geqslant 1$, $\mathscr{F}^m = \bigoplus_{n\geqslant m} KQ_n$ y $\mathscr{F}^m/\mathscr{F}^{m+1} \simeq KQ_m$ como K-módulos.

Lema 4.1.16. *Sea Q un carcaj finito y $K^{Q_0} := \underbrace{K\times\cdots\times K}_{\mathrm{Card}(Q_0)-veces}$ la K-álgebra semisimple asociada a Q. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $KQ/\mathscr{F} = \bigoplus_{i\in Q_0} K\cdot\overline{\varepsilon_i}$ como K-módulos, donde $\overline{\varepsilon_i} := \varepsilon_i + \mathscr{F}$.

(b) La aplicación $\varphi : KQ/\mathscr{F} \longrightarrow K^{Q_0}$, $\overline{\varepsilon_i} \mapsto (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ con 1 en el lugar i, es un isomorfismo de K-álgebras. En particular, $\{\overline{\varepsilon_i} \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos en $KQ/\mathscr{F}$.

Demostración. (a) $KQ/\mathscr{F} = \left(\bigoplus_{n\geqslant 0} KQ_n\right) / \left(\bigoplus_{n\geqslant 1} KQ_n\right) \simeq KQ_0$. Por lo tanto, $\dim_K(KQ/\mathscr{F}) = \mathrm{Card}(Q_0)$. Por otro lado,

$$\sum_{i\in Q_0} K\overline{\varepsilon_i} = \bigoplus_{i\in Q_0} K\overline{\varepsilon_i} \subseteq KQ/\mathscr{F} \quad \text{y} \quad \dim_K(\sum_{i\in Q_0} K\overline{\varepsilon_i}) = \mathrm{Card}(Q_0),$$

por lo tanto $\bigoplus_{i\in Q_0} K\overline{\varepsilon_i} = KQ/\mathscr{F}$.

(b) Sea $e_i := (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) \in K^{Q_0}$. Por (a), es claro que $\varphi : KQ/\mathscr{F} \longrightarrow K^{Q_0}$ es un isomorfismo K-lineal. Usando que $\{\overline{\varepsilon_i} \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales en $KQ/\mathscr{F}$, veremos que φ preserva productos. En efecto, sean $x = \sum_{i\in Q_0} x_i\overline{\varepsilon_i}$, $y = \sum_{i\in Q_0} y_i\overline{\varepsilon_i}$ en $KQ/\mathscr{F}$. Luego $xy = \sum_{i,j} x_i y_j \overline{\varepsilon_i}\,\overline{\varepsilon_j} = \sum_{i\in Q_0} x_i y_i \overline{\varepsilon_i}$. Por lo tanto, $\varphi(xy) = \sum_{i\in Q_0} x_i y_i \overline{e_i}$ y

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \left(\sum_{i\in Q_0} x_i e_i\right)\left(\sum_{j\in Q_0} y_j e_j\right) = \sum_{i\in Q_0} x_i y_i e_i = \varphi(xy).$$

Finalmente, e_i es primitivo pues $e_i K^{Q_0} e_i = 0\times\cdots\times K\times\cdots\times 0 \simeq K$; y por 4.1.10 (b), se tiene que e_i es primitivo, y por tanto $\overline{\varepsilon}_i$ también. $\square$

Teorema 4.1.17. *Si Q es un carcaj finito y acíclico, entonces KQ es una K-álgebra hereditaria, básica de dimensión finita y $J(KQ) = \mathscr{F}$.*

Demostración. Sea Q un carcaj finito y acíclico. Por 4.1.7, se tiene que KQ es una K-álgebra de dimensión finita. Por lo tanto, por 2.6.17, para ver que $\mathscr{F} = J(KQ)$ es suficiente probar que $KQ/\mathscr{F}$ es semisimple (lo cual es cierto por 4.1.16 (b)) y que $\mathscr{F}$ es nilpotente. Probaremos esto último. En efecto, como Q es finito y sin ciclos, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Q_n = \emptyset\ \forall\ n \geqslant n_0$. Por lo tanto, del Ejercicio 4.1.15, se tiene que $\mathscr{F}^{n_0} = \bigoplus_{n\geqslant n_0} KQ_n = 0$; probándose que $\mathscr{F} = J(KQ)$.

Veamos que KQ es hereditario, probando que $J(KQ) = \mathscr{F}$ es proyectivo, según 2.9.6. En efecto, dado que ${}_{KQ}\mathscr{F} = \bigoplus_{i\in Q_0} \mathscr{F}\varepsilon_i$ (pues $\{\varepsilon_i\}_{i\in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de KQ) es suficiente ver que ${}_{KQ}\mathscr{F}\varepsilon_i$ es proyectivo $\forall\ i \in Q_0$. Sea $i \in Q_0$, se tiene que $\mathscr{F}\varepsilon_i = (\bigoplus_{n\geqslant 1} KQ_n)\varepsilon_i = \langle\{$ caminos no triviales γ tales $\mathrm{o}(\gamma) = i\}\rangle_K$. Como Q es finito, existe solamente un número finito de flechas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t \in Q_1$ que salen de i. Entonces $\mathscr{F}\varepsilon_i = \bigoplus_{j=1}^{t} (KQ)\alpha_j$ como KQ-módulo, luego $(KQ)\varepsilon_{\mathrm{t}(\alpha_j)} \longrightarrow (KQ)\alpha_j$, $\delta \mapsto \delta\alpha_j$, es un isomorfismo de KQ-módulos.

Como $\varepsilon_{\mathrm{t}(\alpha_j)}$ es un idempotente, se tiene que $(KQ)\varepsilon_{\mathrm{t}(\alpha_j)}$ es proyectivo. Luego, $(KQ)\alpha_j$ es proyectivo. Por lo tanto $\mathscr{F}\varepsilon_i = \bigoplus_{j=1}^{t} (KQ)\alpha_j$ es proyectivo.

Finalmente mostramos que KQ es básica. Sabemos que $J(KQ) = \mathscr{F}$ y $KQ/\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} K^{Q_0}$. Luego, por 3.2.14 y que K es un campo, se tiene que KQ es básica. $\square$

Ejemplo Consideremos el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ Q = 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

Aplicando los resultados anteriores, la K-álgebra KQ satisface las siguientes propiedades:

- $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de KQ. Además KQ es una K-álgebra básica, conexa, hereditaria y de dimensión finita, ya que $KQ = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$ donde $P_i := (KQ)\varepsilon_i$.

- $\mathrm{rad}(KQ) = \mathscr{F} = K\alpha \oplus K\beta \oplus K\gamma \oplus K\delta \oplus K\beta\alpha \oplus K\delta\gamma$ como K-módulos y $\mathscr{F}^3 = 0$.
- $\mathrm{rad}(P_1) = \mathscr{F}P_1 = \mathscr{F}(K\varepsilon_1 \oplus K\alpha \oplus K\gamma \oplus K\beta\alpha \oplus K\delta\gamma) = K\alpha \oplus K\gamma \oplus K\beta\alpha \oplus K\delta\gamma$.
- $S_1 := \mathrm{top}(P_1) = P_1/\mathrm{rad}(P_1) = K\overline{\varepsilon_1}$, donde $\overline{\varepsilon_1} := \varepsilon_1 + \mathrm{rad}(P_1)$.
- $P_2 = (KQ)\varepsilon_2 = K\varepsilon_2 \oplus K\beta$, $\mathrm{rad}(P_2) = \mathscr{F}P_2 = K\beta$, $S_2 = P_2/\mathrm{rad}(P_2) = K\overline{\varepsilon_2}$, donde $\overline{\varepsilon_2} := \varepsilon_2 + \mathrm{rad}(P_2)$.
- $P_3 = (KQ)\varepsilon_3 = K\varepsilon_3 \oplus K\delta$, $\mathrm{rad}(P_3) = \mathscr{F}P_3 = K\delta$. Por lo tanto $S_3 = P_3/\mathrm{rad}(P_3) = K\overline{\varepsilon_3}$, donde $\overline{\varepsilon_3} := \varepsilon_3 + \mathrm{rad}(P_3)$.
- $P_4 = (KQ)\varepsilon_4 = K\varepsilon_4$, $\mathrm{rad}(P_4) = 0$ y $S_4 = P_4$.

4.2. Cocientes de álgebras de caminos

Definición 4.2.1. Sea Q un carcaj finito e $I \trianglelefteq KQ$. Decimos que I es *admisible* si $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F}^m \subseteq I \subseteq \mathscr{F}^2$ (*i.e.* $m \geqslant 2$). El par (Q, I) con I admisible, es llamado *carcaj con relaciones*.

Ejercicio 4.2.2. Sea Q un carcaj finito e $I \trianglelefteq KQ$ tal que $I \subseteq \mathscr{F}^2$. Pruebe que

(a) I es admisible si y sólo si para cada ciclo σ en Q, $\exists\ n \geqslant 1$ tal que $\sigma^n \in I$.

(b) $I = 0$ es admisible si y sólo si Q es acíclico.

Ejemplos

(1) Considere el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ Q = 1 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\delta"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso $\mathscr{F}^3 = 0$. Sean $I_1 := \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ y $I_2 := \langle \alpha\beta - \lambda \rangle$ ideales de KQ. Entonces, tenemos que

- I_1 es admisible, pues $I_1 \subseteq \mathscr{F}^2$ y $\mathscr{F}^3 = 0 \subseteq I_1$.
- I_2 no es admisible, pues $\alpha\beta - \lambda \in I_2$, pero $\alpha\beta - \lambda \notin \mathscr{F}^2$.

(2) Sea Q' el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ 1 \arrow[loop left, "\lambda"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso, $\mathscr{F}^n \neq 0 \ \forall \ n \geqslant 1$. Consideremos los ideales $I_1 := \langle \alpha\beta - \gamma\delta, \beta\lambda, \lambda^3 \rangle$ y $I_2 := \langle \beta\lambda, \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$. Luego tenemos que

- I_1 es admisible pues $\mathscr{F}^4 \subseteq I_1 \subseteq \mathscr{F}^2$. En efecto, se tiene que $Q_4 = \{\lambda^4, \beta\lambda^3, \delta\lambda^3, \alpha\beta\lambda^2, \gamma\delta\lambda^2\}$. Es claro que $Q_4 = \{\lambda^4, \beta\lambda^3, \delta\lambda^3\} \subseteq I_1$. Ahora

  $$\alpha\beta\lambda^2 = \alpha(\beta\lambda)\lambda \in I_1 \quad \text{y} \quad \gamma\delta\lambda^2 = (\gamma\delta - \alpha\beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda^2 \in I_1.$$

  Por lo tanto $Q_4 \subseteq I_1$, y por consiguiente $\mathscr{F}^4 \subseteq I_1$.

- I_2 no es admisible, pues $\lambda^n \notin I_2 \ \forall \ n \geqslant 1$.

Teorema 4.2.3. *Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *KQ/I es una K-álgebra básica de dimensión finita.*

(*b*) *$\{e_i := \varepsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de KQ/I.*

(*c*) *KQ/I es conexa si y sólo si Q es conexo.*

(*d*) *$J(KQ/I) = \mathscr{F}/I$.*

Demostración. Por ser I un ideal admisible, $\exists \ m \geqslant 2$ tal que $\mathscr{F}^m \subseteq I \subseteq \mathscr{F}^2$.

(d) Veamos que KQ/I es de dimensión finita. En efecto, como $\mathscr{F}^m \subseteq I$, existe un epimorfismo de K-álgebras $KQ/\mathscr{F}^m \longrightarrow KQ/I$. Por lo tanto es suficiente probar que $\dim_K(KQ/\mathscr{F}^m) < \infty$. Por el Ejercicio 4.1.15, se tiene que

$$\frac{KQ}{\mathscr{F}^m} = \frac{\bigoplus_{n \geqslant 0} KQ_n}{\bigoplus_{n \geqslant m} KQ_n} \simeq \bigoplus_{0 \leqslant n < m} KQ_n;$$

y como Q es finito, tenemos que $\dim_K(KQ/I) < \infty$. Luego, para probar (d), es suficiente por 2.6.17, ver que $KQ/I/\mathscr{F}/I$ es semisimple y que $\mathscr{F}/I$ es nilpotente. En efecto, se tienen los isomorfismos de K-álgebras

$$\frac{KQ/I}{\mathscr{F}/I} \xrightarrow{\sim} KQ/\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} K^{Q_0},$$

donde el último isomorfismo es por 4.1.16. Como K^{Q_0} es semisimple y $(\mathscr{F}/I)^m = 0$ (pues $\mathscr{F}^m \subseteq I$); se prueba (d).

(a) Sabemos que $\dim_K(KQ/I) < \infty$ y $J(KQ/I) = \mathscr{F}/I$. Luego, por 3.2.14, hay que ver que $KQ/I/\mathscr{F}/I$ es un producto de anillos con división, lo cual es cierto pues $KQ/I/\mathscr{F}/I \simeq \underbrace{K \times \cdots \times K}_{\mathrm{Card}(Q_0)-veces}$ (cf. 4.1.16).

(b) Consideremos el epi-canónico de K-álgebras $KQ \longrightarrow KQ/I$ dado por $x \mapsto x + I =: \overline{x}$. Luego, por 4.1.12, se tiene que $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales de KQ/I. Veamos que e_i es primitivo. En efecto, sea $e^2 = e \in e_i(KQ/I)e_i = \varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i/I$. Luego $e = \lambda\varepsilon_i + \omega + I$ con $\lambda \in K$ y

ω una combinación K-lineal de ciclos en Q de longitud $\geqslant 1$ que pasan por el vértice i. Usando ahora que $e^2 = e$ y $\mathscr{F}^m \subseteq I$, se tiene que

$$(\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_i + (2\lambda - 1)\omega + \omega^2 \in I \quad \text{y} \quad \overline{\omega}^m = \overline{0}. \tag{4.4}$$

Por otro lado, $I \subseteq \mathscr{F}^2$, y por lo (4.4), se tiene que $\lambda^2 - \lambda = 0$, esto es $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$. Si $\lambda = 0$, por (4.4), $-\overline{\omega} + \overline{\omega}^2 = \overline{0}$ *i.e.* $\overline{\omega}^2 = \overline{\omega}$, por lo que $e = \overline{\omega} = \overline{0}$. Ahora, si $\lambda = 1$, por (4.4), $\overline{\omega} + \overline{\omega}^2 = \overline{0}$ *i.e.* $-\overline{\omega}^2 = \overline{\omega}$, por lo que $\overline{\omega} = \overline{0}$, y en consecuencia $e = e_i$. Luego, el álgebra $e_i(KQ/I)e_i$ sólo tiene idempotentes triviales; y por 4.1.10 (b), concluimos que e_i es primitivo.

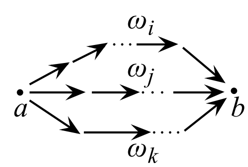
(c) La prueba es análoga a la de 4.1.12 (b), extendiéndose al caso KQ/I, y usando (b). $\square$

Definición 4.2.4. Sean Q un carcaj y $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i \in KQ$, donde $\lambda_i \in K$ y ω_i es un camino de Q $\forall\, i$.

(a) Decimos que ρ es una *relación* en Q (con coeficientes en K) si

 (a_1) $\forall\, i \quad \omega_i \in \bigcup_{n \geqslant 2} Q_n$, y

 (a_2) $\forall\, i \neq j \quad \mathrm{o}(\omega_i) = \mathrm{o}(\omega_j)$ y $\mathrm{t}(\omega_i) = \mathrm{t}(\omega_j)$. En el siguiente dibujo, ilustramos dicha condición



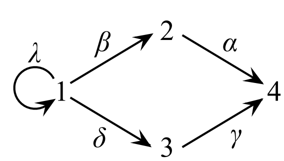
(b) Si ρ es una relación en Q, decimos que

 (b_1) ρ es una *relación cero o monomial* si $m = 1$.

 (b_2) ρ es una *relación de conmutatividad* si $\rho = \omega_1 - \omega_2$.

Definición 4.2.5. Sean Q un carcaj finito y $\{\rho_j \mid j \in J\}$ un conjunto de relaciones en Q. Si $I := \langle\{\rho_j \mid j \in J\}\rangle \trianglelefteq Q$ es admisible, diremos que el carcaj con relaciones (Q, I) está generado por $\{\rho_j \mid j \in J\}$ o bien por las relaciones $\rho_j = 0\ \forall\, j \in J$.

Ejemplo Consideremos el siguiente carcaj Q



con las relaciones $\rho_1 = \alpha\beta - \gamma\delta$ (relación de conmutatividad) y $\rho_2 = \beta\lambda,\ \rho_3 = \lambda^3$ (relaciones monomiales).

Dado que $I := \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3 \rangle \trianglelefteq Q$ es admisible, tenemos que KQ/I es la K-álgebra de caminos dada por Q y las relaciones: $\alpha\beta = \gamma\delta$ y $\beta\lambda = 0 = \lambda^3$.

Proposición 4.2.6. *Sea Q un carcaj finito y $I \trianglelefteq KQ$ un ideal admisible. Entonces existe un conjunto finito $\{\rho_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ de relaciones en Q, tal que $I = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F}^m \subseteq I \subseteq \mathscr{F}^2$. Veamos primero que $I \in \mathrm{mod}(KQ)$. En efecto, usando la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F}^m \longrightarrow I \longrightarrow I/\mathscr{F}^m \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(KQ)$, es suficiente probar que $\mathscr{F}^m, I/\mathscr{F}^m \in \mathrm{mod}(KQ)$. Para esto, sabemos que ${}_{KQ}\mathscr{F}^m$ es generado por Q_m que es finito, por lo que $\mathscr{F}^m \in \mathrm{mod}(KQ)$. Dado que $\mathscr{F}^m$ es un ideal en KQ y es admisible, por 4.2.3, $\dim_K(KQ/\mathscr{F}^m) < \infty$; y como $\mathscr{F}^m \subseteq I \subseteq KQ$, se tiene que $\dim_K(I/\mathscr{F}^m) < \infty$, por lo que $I/\mathscr{F}^m \in \mathrm{mod}(KQ)$. Por lo tanto, $I \in \mathrm{mod}(KQ)$. En particular existe un conjunto $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\}$ en KQ tal que $I = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_t \rangle \trianglelefteq KQ$. Por otro lado, dado que $I \subseteq \mathscr{F}^2$, se tiene que cada σ_i es una combinación K-lineal de caminos de longitud al menos 2, donde no necesariamente comparten el mismo origen y final. Por lo tanto, para cada par $(a, b) \in Q_0 \times Q_0$ se tiene que $\varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b$ es cero o bien una relación en Q.

Luego $I := \langle \varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b \mid 1 \leqslant i \leqslant t,\ (a, b) \in Q_0 \times Q_0 \rangle$, pues para cada $i \in Q_0$ $\sigma_i = \sum_{a,b \in Q_0} \varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b$. □

Ejercicio 4.2.7. Sea Q un carcaj. El *carcaj opuesto* Q^{op} de Q se define como sigue

(a) $(Q^{op})_0 := Q_0$, y

(b) $i \xrightarrow{\alpha^{op}} j \in Q_1^{op} \iff j \xrightarrow{\alpha} i \in Q_1$.

Pruebe que $(KQ)^{op} \simeq KQ^{op}$ como K-álgebras.

Ejercicio 4.2.8. Sea Q un carcaj finito. Pruebe que

(a) KQ es semisimple si y sólo si $Q_1 = \emptyset$.

(b) KQ es simple si y sólo si $|Q_0| = 1$ y $Q_1 = \emptyset$.

Ejercicio 4.2.9. Sea $Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] & 2 \arrow[l, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd}$. Pruebe que los siguientes ideales son admisibles: $I_1 = \langle \alpha^2 - \beta\gamma, \gamma\beta - \gamma\alpha\beta, \alpha^4 \rangle$ y $I_2 = \langle \alpha^2 - \beta\gamma, \gamma\beta, \alpha^4 \rangle$.

Ejercicio 4.2.10. Sea Q un carcaj finito y $I \trianglelefteq KQ$ admisible. Construya un ideal admisible I^{op} de KQ^{op}, de manera que $KQ^{op}/I^{op} \simeq (KQ/I)^{op}$ como K-álgebras.

4.3. Carcajes y el álgebra tensorial

Definición 4.3.1. Sea A una K-álgebra (con unidad) vía el morfismo de anillos $\varphi : K \longrightarrow A$, y ${}_AM_A \in {}_A\mathrm{Mod}_A$ con acción central en K (*i.e.* $\lambda m = m\lambda\ \forall\ \lambda \in K,\ \forall\ m \in M$) inducida por el cambio de anillos $\varphi : K \longrightarrow A$. Consideremos los siguientes bimódulos (*a*) $T_A^0 := {}_AA_A$, $T_A^1(M) := {}_AM_A$, y $T_A^n(M) := T_A^1(M) \otimes_A T_A^{n-1}(M) \in {}_A\mathrm{Mod}_A$ para $n \geqslant 2$.

(*b*) $T_A(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_A^i(M)$ como K-módulos.

Ejercicio 4.3.2. Pruebe que la multiplicación inducida en $T_A(M)$ por el producto $T_A^i(M) \times T_A^j(M) \longrightarrow T_A^{i+j}(M)$, $(x,y) \mapsto xy$, donde

(*a*) xy es el producto en A si $i = j = 0$,

(*b*) xy es la acción correspondiente de A-módulo (a izquierda o a derecha) cuando $i = 0$ ó $j = 0$, y

(*c*) $xy := x \otimes y$ cuando $i \geqslant 1$ y $j \geqslant 1$,

induce en $T_A(M)$ una estructura de K-álgebra (conocida como el álgebra tensorial inducida por el bimódulo ${}_AM_A$).

Teorema 4.3.3. *Sean A y B K-álgebras, ${}_AM_A$ un bimódulo con acción central en K y $\varphi : A \times M \longrightarrow B$ una función tal que*

(*a*) *$\varphi|_A : A \longrightarrow B$ es un morfismo de K-álgebras.*

(*b*) *$\varphi|_M : {}_AM_A \longrightarrow {}_AB_A$ es un morfismo de bimódulos, donde la estructura de ${}_AB_A$ está dada por la de ${}_BB_B$ vía el cambio de anillos $\varphi|_A : A \longrightarrow B$.*

Entonces, existe un único morfismo de K-álgebras $\overline{\varphi} : T_A(M) \longrightarrow B$ que extiende a φ, i.e. $\overline{\varphi}|_A = \varphi|_A$ y $\overline{\varphi}|_M = \varphi|_M$.

Demostración. Definimos $\varphi_0 := \varphi|_A : A \longrightarrow B$ y $\varphi_1 := \varphi|_M : M \longrightarrow B$. Veamos que: para $n \geqslant 2$ $\exists\,!$ $\varphi_n : T_A^n(M) \longrightarrow {}_AB_A$ morfismo de bimódulos tal que $\varphi_n(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \varphi_1(m_1)\varphi(m_2)\cdots\varphi_1(m_n)$. En efecto, consideremos $\phi_2 : M \times M \longrightarrow B$ con $\phi_2(m_1, m_2) := \varphi_1(m_1)\varphi_1(m_2)$. Tenemos, usando (b), que $\forall\ a \in A$, se tienen las igualdades

$$\phi_2(m_1 a, m_2) = \varphi_1(m_1 a)\varphi_1(m_2) = \varphi_1(m_1)\varphi(am_2) = \phi_2(m_1, am_2).$$

Luego ϕ_2 es A-balanceada, y por la propiedad universal de $\bigotimes_A$, se tiene que $\exists\,!$ $\varphi_2 : M \otimes_A M \longrightarrow B$ morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos tal que $\varphi_2(m_1 \otimes m_2) = \phi_2(m_1, m_2) = \varphi_1(m_1)\varphi_1(m_n)$. Es fácil ver, usando (*b*), que la correspondencia $\varphi_2 : M \otimes_A M \longrightarrow {}_AB_A$ es un morfismo de bimódulos. Por inducción, usando que $T_A^n(M) = M \otimes_A T_A^{n-1}(M)$, tenemos que existe un único morfismo de bimódulos $\varphi_n : T_A^n(M) \longrightarrow {}_AB_A$ tal que $\varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \varphi_1(m_1)\varphi(m_2)\cdots\varphi_1(m_n)$.

Ahora, usando los morfismos φ_n $\forall\ n \in \mathbb{N}$, definimos $\overline{\varphi} :_A (M) \longrightarrow B$ como $\overline{\varphi}(w) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(w_n)$, donde $w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \in T_A(M)$, con $w_n \in T_A^n(M)$. Por (a) y (b), tenemos que $\overline{\varphi}$ es un morfismo de K-módulos. Veamos que $\overline{\varphi}$ preserva productos. Para ello, veamos que $\forall\ x \in T_A^n(M)$, $\forall\ y \in T_A^m(M)$ se tiene que $\varphi_{n+m}(xy) = \varphi_n(x)\varphi_m(y)$; lo cual es fácil de ver por la construcción de φ_{n+m}. Sea $w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$, $v = \sum_{m=0}^{\infty} v_m$ donde $w_n \in T_A^n(M)$ y $v_m \in T_A^m(M)$. Luego

$$\overline{\varphi}(wv) = \overline{\varphi}\left(\sum_{n,m} w_n v_m\right) = \sum_{n,m} \varphi_{n+m}(w_n v_m) = \sum_{n,m} \varphi_n(w_n)\varphi_m(v_m)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(w_n)\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(v_m)\right) = \overline{\varphi}(w)\overline{\varphi}(v).$$

Finalmente, para mostrar la unicidad, sea $\tilde{\varphi} : T_A(M) \longrightarrow B$ un morfismo de K-álgebras tal que $\tilde{\varphi}|_A = \varphi|_A = \varphi_0$ y $\tilde{\varphi}|_M = \varphi|_M = \varphi_1$. Luego, por $n \geqslant 2$

$$\tilde{\varphi}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \tilde{\varphi}(m_1)\cdots\tilde{\varphi}(m_n) = \varphi_1(m_1)\cdots\varphi_1(m_n) = \varphi_n(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n).$$

Por lo tanto, $\tilde{\varphi}|_{T_A^n(M)} = \varphi_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$; por lo que $\tilde{\varphi} = \overline{\varphi}$. □

Ejercicio 4.3.4. Sea Q un carcaj finito. Pruebe que

(a) KQ_0 es una K-subálgebra de KQ.

(b) La multiplicación en KQ induce en KQ_1 una estructura de bimódulo ${}_{KQ_0}(KQ_1)_{KQ_0}$ con acción central en K.

(c) La inclusión $Q_0 \cup Q_1 \longrightarrow T_{KQ_0}(KQ_1)$, se extiende (de manera única) a un morfismo de K-álgebras $\psi : KQ \longrightarrow T_{KQ_0}(KQ_1)$. Sugerencia: Use 4.1.13.

(d) Considere el morfismo $\varphi : KQ_0 \times KQ_1 \longrightarrow KQ$, inducido por las inclusiones $\varphi|_{KQ_0} : KQ_0 \longrightarrow KQ$ y $\varphi|_{KQ_1} : KQ_1 \longrightarrow KQ$. Usando 4.3.3, pruebe que φ se extiende (de manera única) a un morfismo de K-álgebras $\overline{\varphi} : T_{KQ_0}(KQ_1) \longrightarrow KQ$.

(e) $\overline{\varphi} : T_{KQ_0}(KQ_1) \longrightarrow KQ$ es un isomorfismo de K-álgebras con inversa ψ.

4.4. El carcaj de una K-álgebra de dimensión finita

Definición 4.4.1. Sea A una K-álgebra de dimensión finita, $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A y $J := J(A)$ el radical de Jacobson de A. El *carcaj ordinario* Q_A de A se define como sigue:

(a) $(Q_A)_0 := \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) $\forall\ a, b \in (Q_A)_0$, $\mathrm{Card}(\varepsilon_b(Q_A)_1\varepsilon_a) := \dim_K(e_b(J/J^2)e_a)$, *i.e.* las flechas de a en b de Q_A están en correspondencia biyectiva con una K-base de $e_b(J/J^2)e_a$.

Ejemplo Consideremos la K-álgebra de matrices $A = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$. Las matrices elementales e_{ij} (cuyas entradas son todas 0, excepto la entrada ij donde hay un 1), satisfacen $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$. Tenemos que $\{e_{11}, e_{22}, e_{33}\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A. En efecto, para cada i, tenemos que $e_{ii}Ae_{ii} = Ke_{ii} \simeq K$, por lo que e_{ii} es primitivo, para $i = 1, 2, 3$.

Sea $I := \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \trianglelefteq A$. Veamos que $I = J(A)$. En efecto, dado que $J^3 = 0$ y $A/J \simeq K \times K \times K$, concluimos por 2.6.17 (a) que $I = J(A)$. Ahora bien,

$$J/J^2 = \frac{Ke_{12} \oplus Ke_{23} \oplus Ke_{13}}{Ke_{13}} = K\overline{e}_{12} \oplus K\overline{e}_{23},$$

donde $\overline{e}_{12} = e_{12} + J$ y $\overline{e}_{23} = e_{23} + J$. Entonces, los únicos productos por idempotentes que no son cero son: $e_{11}(J/J^2)e_{22} = K\overline{e}_{12},\ e_{22}(J/J^2)e_{33} = K\overline{e}_{23}$. Por lo que el carcaj asociado a A es $Q_A = \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$.

Proposición 4.4.2. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *El carcaj Q_A asociado a A, no depende (esencialmente) de la elección de una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A.*

(*b*) *Para cada par e_a, e_b de idempotentes ortogonales y primitivos de A la correspondencia*

$$\psi : \frac{e_b J(A) e_a}{e_b J(A)^2 e_a} \longrightarrow e_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e_a$$

dada por $\psi(e_b x e_a + e_b J(A)^2 e_a) := e_b(x + J(A)^2)e_a$ es un isomorfismo de K-espacios vectoriales.

Demostración. Sean $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ y $\{e'_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}$ dos familias completas de idempotentes ortogonales primitivos de A. Dado que ${}_AA = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i = \bigoplus_{j=1}^m Ae'_j$, y como Ae_i y Ae'_j son inescindibles, por 3.2.2, se tiene que $n = m$ y reordenando los sumandos directos de ${}_AA$, podemos suponer que $Ae_i \simeq Ae'_i \ \forall\ i$.

Para probar (a), es suficiente ver que $\dim_K \left(e_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e_a\right) = \dim_K \left(e'_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e'_a\right)$ para cada par (a, b), con $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En efecto, el epimorfismo $\varphi : J(A)e_a \longrightarrow \frac{J(A)}{J(A)^2} e_a$, dado por $\varphi(xe_a) := (x + J(A)^2)e_a$, satisface que $\mathrm{Ker}(\varphi) = J(A)^2 e_a$; por lo que tenemos el isomorfismo de A-módulos

$$\frac{J(A)}{J(A)^2} e_a \simeq \frac{J(A)e_a}{\mathrm{Ker}(\varphi)} = \frac{J(A)e_a}{J(A)^2 e_a} = \frac{J(A)Ae_a}{J(A)^2 Ae_a} = \frac{\mathrm{rad}(Ae_a)}{\mathrm{rad}^2(Ae_a)}.$$

Luego, se obtienen los isomorfismos de K-módulos:

$$e_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e_a \simeq e_b \frac{\mathrm{rad}(Ae_a)}{\mathrm{rad}^2(Ae_a)} \simeq \mathrm{Hom}_A\left(Ae_b, \frac{\mathrm{rad}(Ae_a)}{\mathrm{rad}^2(Ae_a)}\right)$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_A\left(Ae'_b, \frac{\mathrm{rad}(Ae'_a)}{\mathrm{rad}^2(Ae'_a)}\right) \simeq e'_b \frac{\mathrm{rad}(Ae'_a)}{\mathrm{rad}^2(Ae'_a)} \simeq e'_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e'_a.$$

(b) El morfismo K-lineal $\lambda : e_b J(A) e_a \longrightarrow e_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e_a$ dado por $\lambda(e_b x e_a) := e_b(x + J(A)^2)e_a$, satisface que $\mathrm{Ker}(\lambda) = e_b J(A)^2 e_a$. Por lo tanto $\overline{\lambda} = \psi$ es un isomorfismo K-lineal. □

Definición 4.4.3. Sea A una K-álgebra de dimensión finita, $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A y Q_A el carcaj asociado a A. Definimos la función $\varphi : (Q_A)_0 \cup (Q_A)_1 \longrightarrow A$ como sigue:

(*a*) $\forall\, a \in (Q_A)_0 \quad \varphi(\varepsilon_a) := \varphi_{\varepsilon_a} = e_a$.

(*b*) Para cada par $(a,b) \in (Q_A)_0 \times (Q_A)_0$, con $\varepsilon_b((Q_A)_1)\varepsilon_a \neq \emptyset$, y cada $\alpha : a \longrightarrow b \in (Q_A)_1$, elegimos $\varphi(\alpha) := \varphi_\alpha \in e_b J(A) e_a$, tal que $\{\varphi_a + J(A)^2 \mid \alpha \in \varepsilon_b (Q_A)_1 \varepsilon_a\}$ es una K-base de $e_b \frac{J(A)}{J(A)^2} e_a$.

Observación 4.4.4.

(*a*) La función $\varphi : (Q_A)_0 \cup (Q_A)_1 \longrightarrow A$ definida anteriormente, satisface las "condiciones iniciales" de 4.1.13, por lo que se extiende a un morfismo de K-álgebras $\Phi : KQ_A \longrightarrow A$.

(*b*) Siguiendo la prueba de 4.1.13, se tiene que $\forall\, \gamma = \gamma_m \cdots \gamma_1 \in Q_m$ $\Phi(\gamma) = \varphi_{\gamma_m}\varphi_{\gamma_{m-1}} \cdots \varphi_{\gamma_1}$. En particular $\Phi(\mathscr{F}) \subseteq J(A)$ donde $\mathscr{F}$ es el ideal de KQ_A generado por $(Q_A)_1$.

Proposición 4.4.5. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Consideremos una familia completa $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de idempotentes ortogonales primitivos de A, y $\Phi : KQ_A \longrightarrow Q_A$ el morfismo de K-álgebras construido en la observación anterior. Entonces*

(*a*) $\Phi(\mathscr{F}) = J(A)$.

(*b*) *Si A es conexa, entonces Q_A es conexo.*

(*c*) $\forall\, \alpha \in (Q_A)_1$, *existe un único morfismo* $\overline{\varphi}_\alpha \in \mathrm{Hom}_A(Ae_{\mathrm{t}(\alpha)}, Ae_{\mathrm{o}(\alpha)})$ *tal que* $\overline{\varphi}_\alpha(e_{\mathrm{t}(\alpha)}) = \varphi_\alpha$. *Más aún,* $\mathrm{Im}(\overline{\varphi}_\alpha) \subseteq J(A)e_{\mathrm{o}(\alpha)}$ *y* $\mathrm{Im}(\overline{\varphi}_\alpha) \nsubseteq J(A)^2 e_{\mathrm{o}(\alpha)}$.

Demostración. (a) Sea $B := \Phi(\mathscr{F}) \subseteq J(A)$. Veamos primero que

$$\forall\, x_m \in J(A)^m,\ m \geqslant 1,\ \exists\, y_{m+1} \in J(A)^{m+1} \quad \text{y} \quad \exists\, b \in B^m \subseteq B$$
$$\text{tal que } x_m = y_{m+1} + b. \tag{4.5}$$

En efecto, probaremos (4.5) por inducción sobre m. Para $m = 1$, consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow J(A)^2 \longrightarrow J(A) \xrightarrow{\pi} J(A)/J(A)^2 \longrightarrow 0$ en $\mathrm{Mod}(A)$ con $\pi(x) := x + J(A)^2$. En particular, dicha sucesión es exacta en $\mathrm{Mod}(K)$, y por lo tanto se escinde. Luego, existe un morfismo de K-módulos $g : J(A)/J(A)^2 \longrightarrow J(A)$ tal que $g(\varphi_\alpha + J(A)^2) = \varphi_\alpha\ \forall\, \alpha \in (Q_A)_1$, por lo que $J(A) = J(A)^2 \oplus \mathrm{Im}(g)$ como K-módulos y $\mathrm{Im}(g) = \langle \varphi_\alpha : \alpha \in (Q_A)_1 \rangle_K \subseteq \Phi(\mathscr{F}) = B$. Lo cual prueba (4.5) para $m = 1$.

Sea $m > 1$ y $x_m \in J(A)^m$. Podemos asumir que $x_m = c_1 c_2 \cdots c_m$ donde $c_i \in J(A)\ \forall\, i$. Consideremos $x'_{m+1} := c_1 c_2 \cdots c_{m-1} \in J(A)^{m-1}$. Luego, por hipótesis inductiva, $\exists\, y'_m \in J(A)^m$ y $\exists\, b' \in B^{m-1}$ tales que $x'_{m+1} = y'_m + b'$, y también $\exists\, y'' \in J(A)^2$ y $\exists\, b'' \in B$ tales que $c_m = y'' + b''$. Por lo tanto

$$x_m = x'_{m-1} c_m = (y'_m + b')(y'' + b'') = y'_m y'' + y'_m b'' + b' y'' + b' b''.$$

Haciendo $y_m := y'_m y'' + y'_m b'' \in J(A)^{m+1}$ y $b := b'y'' + b'b'' \in B^m$, se tiene que $x_m = y_m + b$; probándose (4.5).

Veamos, finalmente, que $J(A) \subseteq B$. Sea $x \in J(A)$, por (4.5), $x = y_2 + b_2$ donde $y_2 \in J(A)^2$, $b_2 \in B$. Aplicando reiteradamente (4.5) a $y_2, y_3, y_4, \ldots$, se obtiene que $\forall\ n \geqslant 2\ \exists\ y_n \in J(A)^n$ y $\exists\ b_n \in B$ tales que $x = y_n + b_n$, y por ser $J(A)$ nilpotente, $x \in B = \Phi(\mathscr{F})$. Por lo que $J(A) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$.

(b) Sea A conexa, y supongamos que Q_A no es conexa. Entonces existe una partición no trivial de $(Q_A)_0 = Q'_0 \uplus Q''_0$, tal que no hay caminos en Q_A que conecten vértices de Q'_0 y Q''_0. Luego, para ver que A es no conexa, es suficiente ver que $\forall\ i \in Q'_0,\ \forall\ j \in Q''_0\ e_iAe_j = 0 = e_jAe_i$. En efecto, por el Ejercicio 2.8.25 y por 2.8.20 (b), se tiene lo siguiente:

$$e_iAe_j \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_i, Ae_j) \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_i, \mathrm{rad}(Ae_j)) \simeq$$
$$\simeq e_i\mathrm{rad}(Ae_j) = e_iJ(A)Ae_j = e_iJ(A)e_j = \Phi(\varepsilon_i\mathscr{F}\varepsilon_j) = 0$$

pues $\varepsilon_i\mathscr{F}\varepsilon_j = 0$ (recuerde que no hay caminos en Q_A de i a j). Análogamente, se prueba que $e_jAe_i = 0$.

(c) Sea $\alpha : i \longrightarrow j$ en $(Q_A)_1$. Por el Ejercicio 2.8.25, se tiene el isomorfismo de K-módulos $\rho : e_jJ(A)e_i \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Ae_j, J(A)e_i)$ dado por $\rho(e_jxe_i)(ae_j) = ae_jxe_i$.

Definimos $\overline{\varphi}_\alpha := \rho(\varphi_\alpha)$, luego $\overline{\varphi}_\alpha(e_j) = \rho(\varphi_\alpha)(e_j) = e_j\varphi_\alpha e_i = \varphi_\alpha \notin J(A)^2e_i$ pues φ_α forma parte de la base de $J(A)/J(A)^2$. Por lo tanto, $\overline{\varphi}_\alpha(e_j) = \varphi_\alpha$ y $\mathrm{Im}(\overline{\varphi}_\alpha) \nsubseteq J(A)^2e_i$; y además $\overline{\varphi}_\alpha(ae_j) = \rho(\varphi_\alpha)(ae_j) = ae_j\varphi_\alpha e_i \in J(A)e_i$. $\square$

Proposición 4.4.6. *Si (Q, I) es un carcaj con relaciones y $A = KQ/I$, entonces $Q_A = Q$.*

Demostración. Sabemos (cf. 4.2.3) que A es una K-álgebra de dimensión finita y que $\{e_i := \varepsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A. Por lo tanto $(Q_A)_0 = Q_0$. Por otro lado $J(A) = \mathscr{F}/I$. Luego

$$e_j\frac{J(A)}{J(A)^2}e_i = e_j\frac{\mathscr{F}/I}{\mathscr{F}^2/I}e_i \simeq \varepsilon_j\frac{\mathscr{F}}{\mathscr{F}^2}\varepsilon_i \simeq \varepsilon_j(KQ_1)\varepsilon_i.$$

En consecuencia, $\dim_K\left(e_j\frac{J(A)}{J(A)^2}e_i\right) = \mathrm{Card}(\varepsilon_jQ_1\varepsilon_i)$, y por lo tanto $Q_A = Q$. $\square$

4.5. El teorema de P. Gabriel

Definición 4.5.1. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Decimos que A es *elemental* si $\exists\ n \in \mathbb{N}^+$ tal que $A/J(A) \simeq K \times \cdots \times K = K^n$.

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra de dimensión finita; y además es elemental, pues $A/J(A) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 4.5.2. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Pruebe que

(a) Si A es elemental, entonces A es básica.

(b) Si A es un anillo con división y K es algebraicamente cerrado, entonces $A \simeq K$.

Lema 4.5.3. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Si A es básica y K es algebraicamente cerrado, entonces A es elemental.*

Demostración. Si A es básica, por 3.2.14, $A/J(A) \simeq D_1 \times \cdots \times D_n$, donde D_i es un anillo con división y una K-álgebra de dimensión finita $\forall\ i$. Luego, por el Ejercicio 4.5.2, concluimos que $A/J(A) \simeq K^n$. □

Teorema 4.5.4. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita y consideremos el morfismo de $K-$álgebras $\Phi : KQ_A \longrightarrow A$ de 4.4.4. Entonces*

(a) $(Q_A, \mathrm{Ker}(\Phi))$ *es un carcaj con relaciones.*

(b) $\mathrm{Im}(\Phi) = A$ *si A es elemental.*

Demostración. Sea $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A, con la cual se construye el morfismo de álgebras $\Phi : KQ_A \longrightarrow A$.

(a) Por 2.6.14, $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $J(A)^m = 0$. Luego, de 4.4.5 se tiene que $0 = J(A)^m = (\Phi(\mathscr{F}))^m = \Phi(\mathscr{F}^m)$, de donde $\mathscr{F}^m \subseteq \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Veamos ahora que $\mathrm{Ker}(\Phi) \subseteq \mathscr{F}^2$. Sea $x \in \mathrm{Ker}(\Phi) \subseteq KQ_A$, entonces podemos escribir $x = \sum_{a\in(Q_A)_0} \lambda_a \varepsilon_a + \sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha \cdot \alpha + y$ donde $\lambda_a, \mu_\alpha \in K$ y $y \in \mathscr{F}^2$. Luego

$$0 = \Phi(x) = \sum_{a\in(Q_A)_0} \lambda_a e_a + \sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha \varphi_\alpha + \Phi(y);$$

y como $\sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha\varphi_\alpha + \Phi(y) \in \Phi(\mathscr{F}) = J(A)$, se tiene que $b := \sum_{a\in(Q_A)_0} \lambda_a e_a \in J(A)$. Dado que $J(A)^m = 0$, se tiene que $0 = b^m = \sum_{a\in(Q_A)_0} \lambda_a^m e_a$, lo cual implica que $\lambda_a^m = 0\ \forall\ a$, esto es $\lambda_a = 0\ \forall\ a$. En consecuencia

$$\sum_{\alpha\in(Q_A)_1} \mu_\alpha\varphi_\alpha = -\Phi(y) \in \Phi(\mathscr{F}^2) = J(A)^2.$$

Por construcción, sabemos que $\{\varphi_\alpha + J(A)^2 \mid \alpha \in (Q_A)_1\}$ es una K-base de $J(A)/J(A)^2$; por lo que $\mu_\alpha = 0\ \forall\ \alpha \in (Q_A)_1$, y por ende $x = y \in \mathscr{F}^2$.

(b) Supongamos que A es elemental. Por lo tanto $A/J(A) \simeq K^n$, y la aplicación $K^n \longrightarrow K(Q_A)_0$ dada por $(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0) \mapsto \varepsilon_i$, es un isomorfismo de K-álgebras. Luego, como K-módulos, se tiene que $A = J(A) \oplus \Phi(K(Q_A)_0) = \Phi(\mathscr{F}) \oplus \Phi(K(Q_A)_0) = \Phi(\mathscr{F} \oplus K(Q_A)_0) = \Phi(KQ_A)$. □

Definición 4.5.5. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Una *presentación* de A es un carcaj con relaciones (Q, I) tal que $A \simeq KQ/I$.

Corolario 4.5.6 (Teorema de P. Gabriel)**.** *Toda K-álgebra básica A de dimensión finita, con K algebraicamente cerrado, admite una presentación (Q, I).*

Demostración. Por 4.5.3, sabemos que A es una K-álgebra elemental; y por 4.5.4, $(Q_A, \mathrm{Ker}(\Phi))$ es una presentación de A. □

Observación. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Supongamos que A admite una presentación (Q, I). Tenemos que

(1) El carcaj Q es único, de hecho $Q = Q_A$ (cf. 4.4.2 y 4.4.6).

(2) El ideal I no tiene por qué ser único. De hecho el ideal $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$ depende de las posibles elecciones de $\varphi_\alpha \in J(A)$, tales que $\{\varphi_\alpha + J(A)^2 : \alpha \in Q_1\}$ sea una K-base de $J(A)/J(A)^2$.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$. Vimos que $J := J(A) = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Además $A/J(A) \simeq K \times K \times K = K3$, *i.e.* A es elemental. También tenemos que $Q_A = 1 \xleftarrow[\alpha]{} 2 \xleftarrow[\beta]{} 3$ y $\{e_{11}, e_{22}, e_{33}\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A. Como ya vimos, los únicos productos $e_{ij}(J/J^2)e_{kl}$ que no son cero son: $e_{11}(J/J^2)e_{22} = K\overline{e}_{12}$ y $e_{22}(J/J^2)e_{33} = K\overline{e}_{23}$.

Consideremos la elección $\varphi : (Q_A)_0 \cup (Q_A)_1 \longrightarrow A$ como sigue:

$$\varphi_{\varepsilon_1} = e_{11}, \quad \varphi_{\varepsilon_2} = e_{22}, \quad \varphi_{\varepsilon_3} = e_{33}, \quad \varphi_\alpha = e_{12}, \quad \varphi_\beta = e_{23}.$$

Luego $\Phi(\alpha\beta) = \varphi_\alpha\varphi_\beta = e_{12}e_{23} = e_{13}$; y como $\Phi(\bigcup_{i=0}^{2}(Q_A)_i) = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{23}, e_{13}\}$, se tiene que $\mathrm{Ker}(\Phi) = 0$. Por lo tanto, obtenemos el isomorfismo de K-álgebras

$$\Phi : K\left(1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \right) \xrightarrow{\sim} A.$$

Ejercicio 4.5.7. Sea Q un carcaj finito y acíclico. Pruebe que KQ es conexa si y sólo si $KQ/\mathscr{F}^2$ es conexa.

Ejercicio 4.5.8. Sea A una K-álgebra de dimensión finita tal que $J(A)^2 = 0$, $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A. Pruebe que para $i \neq j$, se tiene que $0 \neq e_jAe_i$ si y sólo si existe una flecha $i \longrightarrow j$ en Q_A.

Ejercicio 4.5.9. Consideremos el siguiente carcaj

$$Q = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ 1 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

y los ideales $I_1 = \langle \alpha\beta + \gamma\delta \rangle$ y $I_2 = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ de KQ. Pruebe que

(a) Los ideales I_1 y I_2 son admisibles.

(b) Si $\mathrm{char}(K) \neq 2$, entonces $KQ/I_1 \simeq KQ/I_2$ como K-álgebras.

Ejercicio 4.5.10. Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita con K algebraicamente cerrado. Pruebe que si A es conmutativo, entonces $A \simeq B_1 \times \cdots \times B_n$, con B_i una K-álgebra conmutativa local (*i.e.* B_i es un anillo local). Sugerencia: Por el Teorema de P. Gabriel existe una presentación (Q, I) de A. Identifique A con KQ/I, y pruebe que $e_iAe_j = 0 = e_jAe_i \ \forall \ i \neq j$, donde $\{e_i = \varepsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$. Luego $A \simeq \bigtimes_{i=1}^{n} B_i$ con $B_i := e_iAe_i \simeq \mathrm{End}({}_AAe_i)$ que es local.

Capítulo 5

Representaciones de carcajes

En esta sección, K denota un campo y Vec_K a una de las siguientes categorías: $\mathrm{Mod}(K)$ ó $\mathrm{mod}(K)$. En el capítulo pasado se estudió la manera en como los carcajes proveen una forma de visualizar álgebras de dimensión finita. Ahora usaremos carcajes para visualizar módulos, esto mediante representaciones de carcajes. El resultado central de este último capítulo asegura que si (Q, I) es un carcaj con relaciones y $A = KQ/I$, entonces $\mathrm{Mod}(A)$ y la categoría de representaciones de Q sobre Vec_K son categorías K-equivalentes.

5.1. Representaciones de Vec_K

Definición 5.1.1. Sea Q un carcaj. Una *representación* D de Q sobre Vec_K, es una función $D : Q \longrightarrow \mathrm{Vec}_K$, *i.e.*

- $\forall\ i \in Q_0 \quad D_i \in \mathrm{Vec}_K$, y
- $\forall\ \alpha \in Q_1,\ \alpha : i \longrightarrow j, \quad D_\alpha : D_i \longrightarrow D_j$ es un morfismo en Vec_K.

Denotamos por $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ a la clase de todas las representaciones D de Q sobre la categoría Vec_K. En concreto, $\mathrm{Rep}_K(Q) := \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Mod}(K))$ y $\mathrm{rep}_K(Q) := \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{mod}(K))$.

Ejemplo

(1) Sea $Q = \ 1 \xrightarrow{\ \alpha\ } 2$, entonces $D = K^2 \xrightarrow{D_\alpha} K^3$, donde $D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una representación de Q sobre $\mathrm{mod}(K)$.

(2) Sea $Q' = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\beta"] \end{tikzcd}$, entonces $D = \begin{tikzcd} K^2 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$, donde $D_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una representación de Q' sobre $\mathrm{mod}(K)$.

Definición 5.1.2. Sea Q un carcaj.

(a) Un *morfismo* $f : D \longrightarrow D'$ en $\operatorname{Rep}_Q(\operatorname{Vec}_K)$ es una familia de morfismos $f = \{f_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i \in Q_0}$ en Vec_K, tal que $\forall\ i \longrightarrow j \in Q_1$, el siguiente diagrama en Vec_K conmuta

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "D_\alpha"] \arrow[d, "f_i"'] & D_j \arrow[d, "f_j"] \\ D'_i \arrow[r, "D'_\alpha"'] & D'_j . \end{tikzcd}$$

(b) La composición de morfismos $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} D''$ en $\operatorname{Rep}_Q(\operatorname{Vec}_K)$ es la familia $gf := \{g_i f_i : D_i \longrightarrow D''_i\}_{i \in Q_0}$.

(c) Dados $f, g : D \longrightarrow D'$ en $\operatorname{Rep}_Q(\operatorname{Vec}_K)$ se define:

- $f + g := \{f_i + g_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i \in Q_0}$.
- $\lambda f := \{\lambda f_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i \in Q_0} \quad \forall\ \lambda \in K$.

Ejercicio 5.1.3. Sea Q un carcaj finito. Usando la definición anterior, pruebe que $\operatorname{Rep}_Q(\operatorname{Vec}_K)$ es una K-categoría y $\operatorname{rep}_K(Q)$ es Hom-finita.

Ejercicio 5.1.4. Sea Q un carcaj. Pruebe que

(a) La K-álgebra de caminos KQ se puede ver como una K-categoría como sigue:

- $\operatorname{Obj}(KQ) := \{\varepsilon_i\}_{i \in Q_0}$.
- $\operatorname{Hom}_{KQ}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) := \varepsilon_j (KQ) \varepsilon_i$.
- La composición de morfismos en KQ es la multiplicación en la K-álgebra KQ.

(b) Si Q es finito y acíclico, entonces KQ es una K-categoría Hom-finita.

Definición 5.1.5. Sea Q un carcaj. Denotaremos por $\operatorname{Fun}(KQ, \operatorname{Vec}_K)$ a la categoría de funtores K-lineales de KQ en Vec_K.

Ejercicio 5.1.6. Sea Q un carcaj. Dado que $Q \subseteq KQ$, definimos la restricción $\operatorname{res} : \operatorname{Fun}(KQ, \operatorname{Vec}_K) \longrightarrow \operatorname{Rep}_Q(\operatorname{Vec}_K)$ como sigue:

- En objetos: $F : KQ \longrightarrow \operatorname{Vec}_K, \quad \forall\ i \in Q_0\ (\operatorname{res}(F))_i := F(\varepsilon_i)$ y para toda $\alpha : i \longrightarrow j$ en Q_1 $(\operatorname{res}(F))_\alpha := F(\alpha)$.
- En morfismos: $\mu : F \longrightarrow G$, $\operatorname{res}(\mu) := \{\mu_{\varepsilon_i} : F(\varepsilon_i) \longrightarrow G(\varepsilon_i)\}_{i \in Q_0}$.

Pruebe que la restricción es un funtor K-lineal.

Proposición 5.1.7. *Sea Q un carcaj. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) *Toda $D \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ se puede extender de una única manera a un funtor K-lineal $[D] : KQ \longrightarrow \mathrm{Vec}_K$, tal que*

$$\begin{aligned} \forall\ i \in Q_0 \qquad & [D](\varepsilon_i \xrightarrow{1_{\varepsilon_i}} \varepsilon_i) = D_i \xrightarrow{1_{D_i}} D_i, \\ \forall\ i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1 \quad & [D](\varepsilon_i \xrightarrow{\alpha} \varepsilon_j) = D_i \xrightarrow{D_\alpha} D_j. \end{aligned}$$

(*b*) *La correspondencia $[-] : \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K) \longrightarrow \mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K)$ definida por $\left(D \xrightarrow{f} D'\right) \mapsto \left([D] \xrightarrow{[f]} [D']\right)$ con $[f] := f$, es un funtor K-lineal.*

Demostración. (a) Dada $D \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$, definimos $[D]$ como sigue: en $Q_0 \cup Q_1$ se define como en la proposición, y se extiende K-linealmente a $\varepsilon_i(KQ_0)\varepsilon_i$ y $\varepsilon_j(KQ_1)\varepsilon_i$. Dado $\gamma = \gamma_n \cdots \gamma_1 \in \varepsilon_j(Q_n)\varepsilon_i,\ n \geqslant 2$, definimos $[D](\varepsilon_i \xrightarrow{\gamma} \varepsilon_j) = D_i \xrightarrow{D_\alpha(\gamma)} D_j$ donde $[D](\gamma) := D_{\gamma_n} \cdots D_{\gamma_1}$. Luego se extiende K-linealmente a $\varepsilon_j(KQ_n)\varepsilon_i$.

Por construcción $[D]$ es único y además es un funtor K-lineal.

(b) Sea $D \xrightarrow{f} D'$ en $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$, veamos que $[D] \xrightarrow{[f]} [D']$, con $[f] = f$, es un morfismo en $\mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K)$. En efecto, es suficiente probarlo para caminos de la forma $\varepsilon_i \xrightarrow{\gamma} \varepsilon_j$ con $\gamma = \gamma_n \cdots \gamma_1 \in \varepsilon_j(Q_n)\varepsilon_i$. Esto es, veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "{[D](\gamma)}"] \arrow[d, "f_i"'] & D_j \arrow[d, "f_j"] \\
D'_i \arrow[r, "{[D'](\gamma)}"'] & D'_j.
\end{tikzcd}$$

Para ello, usamos que $\gamma = \xrightarrow{\gamma_1}\xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n}$ donde $\gamma_i \in Q_1$, por lo cual tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "D\gamma_1"] \arrow[d, "f_i"] \arrow[rrrrr, bend left, "{[D](\gamma)}"] & D_{\mathrm{t}(\gamma_1)} \arrow[r, "D\gamma_2"] \arrow[d, "f_{\mathrm{t}(\gamma_1)}"] & {} \arrow[d, "f_{\mathrm{t}(\gamma_2)}"] & \cdots \arrow[r] & {} \arrow[r, "D\gamma_n"] \arrow[d, "f_{\mathrm{o}(\gamma_n)}"] & D_j \arrow[d, "f_j"] \\
D'_i \arrow[r, "D'\gamma_1"'] \arrow[rrrrr, bend right, "{[D'](\gamma)}"'] & D'_{\mathrm{t}(\gamma_1)} \arrow[r, "D'\gamma_2"'] & {} & \cdots \arrow[r] & {} \arrow[r, "D'\gamma_n"'] & D'_j,
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue (b). $\square$

Teorema 5.1.8. *Sea Q un carcaj. Entonces, el funtor de restricción* $\mathrm{res} : \mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K) \longrightarrow \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ *es un isomorfismo K-lineal, cuyo inverso es el funtor de extensión* $[-] : \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K) \longrightarrow \mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K)$.

Demostración. Por el Ejercicio 5.1.6 y 5.1.7, sabemos que la restricción y la extensión son funtores K-lineales. Veamos que $[-] \circ \mathrm{res}(-) = 1_{\mathrm{Fun}(KQ,\mathrm{Vec}_K)}$. Sea $\mu : F \longrightarrow G$ un morfismo en $\mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K)$, checaremos la igualdad $[\mathrm{res}(F)] \xrightarrow{[\mathrm{res}(\mu)]} [\mathrm{res}(G)] = F \xrightarrow{\mu} G$. En efecto, se tiene (por definición) que $[\mathrm{res}(\mu)] = \mu$. Luego basta ver que $[\mathrm{res}(F)] = F$, lo cual sucede, pues:

- $\forall\ i \in Q_0 \quad [\mathrm{res}(F)](\varepsilon_i) = (\mathrm{res}(F))_i = F(\varepsilon_i)$, y
- $\forall\ \alpha \in Q_1 \quad [\mathrm{res}(F)](\alpha) = (\mathrm{res}(F))_\alpha = F(\alpha)$.

Por lo tanto, $[\mathrm{res}(F)] = F$.

Ahora verificamos que $\mathrm{res}[-] \circ [-] = 1_{\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)}$. Como en el caso anterior basta ver que $\mathrm{res}([D]) = D\ \forall\ D \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$. En efecto,

- $\forall\ i \in Q_0 \quad (\mathrm{res}([D]))_i = [D](\varepsilon_i) = D_i$, y
- $\forall\ \alpha \in Q_1 \quad (\mathrm{res}([D]))_\alpha = [D](\alpha) = D_\alpha$.

Por lo que $\mathrm{res}([D]) = D$. □

Observación 5.1.9. Dado que Vec_K es una categoría abeliana (pues $\mathrm{Mod}(K)$ y $\mathrm{mod}(K)$ son abelianas) se tiene que $\mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K)$ es abeliana, y por lo tanto, por 5.1.8, $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ es abeliana.

En la categoría $\mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K)$ las nociones categóricas de: suma directa, producto, kernel, cokernel,... se definen objeto a objeto. Dichas nociones se trasladan a las representaciones usando la restricción $\mathrm{res} : \mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Vec}_K) \longrightarrow \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$.

Ejemplo Veamos los siguientes conceptos categóricos en $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$.

(a) La suma directa. Sean $D, D' \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$, la suma directa $D \oplus D'$ es la representación:

- $\forall\ i \in Q_0 \quad (D \oplus D')_i := D_i \oplus D'_i$.
- $\forall\ \alpha : i \longrightarrow j \quad (D \oplus D')_\alpha := \begin{pmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D'_\alpha \end{pmatrix} : D_i \oplus D'_i \longrightarrow D_j \oplus D'_j$.

(b) Sea $f : D \longrightarrow D'$ un morfismo de representaciones en $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$.

(b_1) El subobjeto Kernel $\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ está dado por:

- ∘ $\forall\ i \in Q_0 \quad (\mathrm{Ker}(f))_i := \mathrm{Ker}(f_i)$.

- $\forall\ \alpha : i \longrightarrow j \in Q_1,\ \exists !\ K_\alpha : \mathrm{Ker}(f_i) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_j)$ que hace conmutar el siguiente diagrama en Vec_K

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ker}(f))_i := \mathrm{Ker}(f_i) \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "K_\alpha"'] & D_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "D_\alpha"] & D'_i \arrow[d, "D'_\alpha"] \\
(\mathrm{Ker}(f))_j := \mathrm{Ker}(f_j) \arrow[r, "\mu_j"'] & D_j \arrow[r, "f_j"'] & D'_j,
\end{tikzcd}$$

donde μ_i y μ_j son inclusiones. Luego, se define

$$(\mathrm{Ker}(f))_\alpha := K_\alpha \quad \text{y} \quad \mu := \{\mu_i : \mathrm{Ker}(f_i) \longrightarrow D_i\}_{i \in Q_0}.$$

(b_2) El objeto cociente Cokernel $\pi : D' \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$ en $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$, se define como sigue:

- $\forall\ i \in Q_0 \quad (\mathrm{Coker}(f))_i := \mathrm{Coker}(f_i)$.
- $\forall\ \alpha : i \longrightarrow j \in Q_1,\ \exists !\ C_\alpha : \mathrm{Coker}(f_i) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f_j)$ que hace conmutar el siguiente diagrama en Vec_K

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "D_\alpha"] & D'_i \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "D'_\alpha"] & (\mathrm{Coker}(f))_i := \mathrm{Coker}(f_i) \arrow[d, "C_\alpha"] \\
D_j \arrow[r, "f_j"'] & D'_j \arrow[r, "\pi_j"'] & (\mathrm{Coker}(f))_j := \mathrm{Coker}(f_j),
\end{tikzcd}$$

donde π_i y π_j son los epi-canónicos. Luego, se define

$$(\mathrm{Coker}(f))_\alpha := C_\alpha \quad \text{y} \quad \pi := \{\pi_i : D'_i \longrightarrow \mathrm{Coker}(f_i)\}_{i \in Q_0}.$$

Ejercicio 5.1.10. (a) Sea $f : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$. Considere también $\mu : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow D$ de la definición anterior. Pruebe que μ satisface la "propiedad universal del Kernel". Esto es

- $f\mu = 0$, y
- $\forall\ h : D'' \longrightarrow D$ tal que $fh = 0,\ \exists !\ \overline{h} : D'' \longrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ tal que $\mu\overline{h} = h$.

(b) Pruebe que las definiciones de suma directa y Cokernel dadas, anteriormente, satisfacen su correspondiente propiedad universal.

5.2. Representaciones de carcajes finitos con relaciones

Definición 5.2.1. Sea Q un carcaj finito e $I \trianglelefteq KQ$ admisible. Las representaciones $\mathrm{Rep}_{(Q,I)}(\mathrm{Vec}_K)$ del carcaj con relaciones (Q, I) sobre Vec_K son la subcategoría plena de $\mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ cuyos objetos son las representaciones $D \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$ tales que la extensión $[D] : KQ \longrightarrow \mathrm{Vec}_K$ se anula en I, esto es,

$$\mathrm{Rep}_{(Q,I)}(\mathrm{Vec}_K) := \{D \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K) \mid [D](\rho) = 0 \ \forall \text{ relación } \rho \in I\}.$$

Observación. Dada $D \in \mathrm{Rep}_Q(\mathrm{Vec}_K)$, para ver que $[D]$ se anula en I, basta ver que $[D](\rho_i) = 0$ $1 \leqslant i \leqslant n$, para un conjunto finito de relaciones $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ que generen al ideal admisible I.

A partir de aquí, por simplicidad, usaremos la siguiente notación: se define $\mathrm{Rep}_K(Q,I) := \mathrm{Rep}_{(Q,I)}(\mathrm{Mod}(K))$ y $\mathrm{rep}_K(Q,I) := \mathrm{Rep}_{(Q,I)}(\mathrm{mod}(K))$.

Ejemplo Consideremos el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
Q = 1 \arrow[r, "\lambda"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & 5 \\
 & & 4 \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

y $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle \trianglelefteq KQ$. Las siguientes son representaciones en $\mathrm{rep}_K(Q)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & K^2 \arrow[dr, "\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}"] & \\
D = K \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}"] & K^2 \arrow[ur, "\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}"] \arrow[dr, "(1\ 1)"'] & & K^2 \\
 & & K \arrow[ur, "\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "1"] & \\
D' = K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & K \\
 & & K \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & \\
D'' = K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ur] \arrow[dr, "1"'] & & K \\
 & & K \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que $D \in \mathrm{rep}_K(Q,I)$ pues

$$D_\alpha D_\beta - D_\gamma D_\delta = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = 0;$$

$D' \in \mathrm{rep}_K(Q,I)$, pues $D'_\alpha D'_\beta - D'_\gamma D'_\delta = 0$, y la representación $D'' \notin \mathrm{rep}_K(Q,I)$ ya que $D''_\alpha D''_\beta - D''_\gamma D''_\delta = -1 \neq 0$.

Teorema 5.2.2. *Sea (Q,I) un carcaj con relaciones y $A := KQ/I$. Entonces existe una K-equivalencia $F : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ que se restringe a una K-equivalencia $F|_{\mathrm{mod}(A)} : \mathrm{mod}(A) \longrightarrow \mathrm{rep}_K(Q,I)$.*

Demostración. $\forall\, x \in KQ$ definimos $\overline{x} := x + I$. Luego $\{e_a := \overline{\varepsilon}_a\}_{a \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A (cf. 4.2.3).

La prueba de este teorema, se hará en 3 etapas; y a su vez, cada etapa, comprende cierto número de pasos.

Etapa 1: Construcción del funtor $F : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q, I)$:

(a) Para cada $M \in \mathrm{Mod}(A)$, definimos $F(M) \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$ como sigue: $\forall\, a \in Q_0 \quad F(M)_a := e_aM$, y $\forall\, \alpha : a \longrightarrow b \in Q_1 \quad F(M)_\alpha : e_aM \longrightarrow e_bM$ está dado por $F(M)_\alpha(e_am) := \overline{\alpha}m$.

(b) Para cada $M \in \mathrm{Mod}(A)$, la extensión $[F(M)] : KQ \longrightarrow \mathrm{Mod}(K)$ satisface: $\forall\, \gamma \in \varepsilon_j(Q_n)\varepsilon_i \quad [F(M)](\varepsilon_i \xrightarrow{\gamma} \varepsilon_j) = e_iM \xrightarrow{[F(M)](\gamma)} e_jM$ donde $[F(M)](\gamma)(e_im) := \overline{\gamma}m$.

En efecto, sea $\gamma = \; i \xrightarrow{\gamma_1} \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} j$ en Q. Luego, por (a), se tiene que

$$\begin{aligned} [F(M)](\gamma)(e_im) &= F(M)_{\gamma_n} \cdot F(M)_{\gamma_{n-1}} \cdots F(M)_{\gamma_1}(e_im) \\ &= \overline{\gamma}_n\overline{\gamma}_{n-1} \cdots \overline{\gamma}_1 m = \overline{\gamma}m; \end{aligned}$$

probándose (b).

(c) Para cada $M \in \mathrm{Mod}(A)$, $\quad F(M) \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$.

En efecto, sea $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i\omega_i \in I$ una relación en Q que va del vértice x al y en Q. Entonces, por (b), se tiene $\forall\, m \in M$

$$[F(M)](\rho)(e_xm) = \sum_{i=1}^n \lambda_i[F(M)](\omega_i)(e_xm) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{\omega}_i m = \overline{\rho}m = 0.$$

(d) $\forall\, M \in \mathrm{Mod}(A)$ se tiene que $M \in \mathrm{mod}(A) \Longleftrightarrow \forall\, a \in Q_0,\ e_aM \in \mathrm{mod}(K)$. En efecto, sabemos que

- (i) $M = \bigoplus_{a \in Q_0} e_aM$ como K-módulo,
- (ii) $\dim_k(A) < \infty$, y
- (iii) $M \in \mathrm{mod}(A) \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ y existe un epimorfismo ${}_AA^n \longrightarrow M$.

Luego, usando $(i), (ii)$ y (iii), no es difícil obtener la equivalencia en (d).

(e) $\forall\, f : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{Mod}(A)$, $\quad F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$, donde $F(f) := \{f_a := f|_{e_aM} : e_aM \longrightarrow e_aN\}_{a \in Q_0}$.

En efecto, sea $a \xrightarrow{\alpha} b \in Q_1$, veamos que $f_a : e_aM \longrightarrow e_aN$ está bien definida y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} e_aM \arrow[r, "f_a"] \arrow[d, "F(M)_\alpha"'] & e_aN \arrow[d, "F(N)_\alpha"] \\ e_bM \arrow[r, "f_b"'] & e_bN. \end{tikzcd}$$

En efecto, $f_a(e_a m) = f(e_a m) = e_a f(m) \in e_a N$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}(F(N)_\alpha \circ f_\alpha)(e_a m) &= F(N)_\alpha(f_\alpha(e_a m)) = \overline{\alpha} f(e_a m) = f(\overline{\alpha} e_a m) \\ &= f(e_b \overline{\alpha} m) = f_b(\overline{\alpha} m) = f_b \circ F(M)_\alpha(e_a m),\end{aligned}$$

por lo que el diagrama anterior conmuta. Es fácil ver que el funtor es K-lineal y preserva composiciones.

Etapa 2: Construcción de un funtor K-lineal $G : \mathrm{Rep}_K(Q, I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$:

(f) Para cada $D \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$, se define:

- El K-espacio vectorial $G(D) := \bigoplus_{a \in Q_0} D_a$.
- La acción $KQ \times G(D) \longrightarrow G(D)$ como $(x, d) \mapsto x \cdot d := (x \cdot d)_{a \in Q_0}$, donde $(x \cdot d)_{a \in Q_0} := \sum_{b \in Q_0} [D](\varepsilon_a x \varepsilon_b)(d_b)$, nos da una estructura de K-módulo en $G(D)$ tal que $I \subseteq \mathrm{ann}_{KQ}({}_{KQ}G(D))$.

  En efecto, probaremos sólo la asociatividad de la acción: sea $x, y \in KQ$ y consideremos $d = (d_a)_{a \in Q_0} \in G(D) = \bigoplus_{a \in Q_0} D_a$, entonces

$$\begin{aligned}(y \cdot (x \cdot d))_t &= \sum_{j \in Q_0} [D](\varepsilon_t y \varepsilon_j)((x \cdot d))_j \\ &= \sum_{j \in Q_0} [D](\varepsilon_t y \varepsilon_j) \left(\sum_{r \in Q_0} [D](\varepsilon_j x \varepsilon_r)(d_r) \right) \\ &= \sum_{j,r} [D](\varepsilon_t y \varepsilon_j x \varepsilon_r)(d_r) = \sum_{r \in Q_0} [D] \left(\varepsilon_t y \left(\sum_j \varepsilon_j x \right) \varepsilon_r \right) (d_r) \\ &= \sum_{r \in Q_0} [D](\varepsilon_t y x \varepsilon_r)(d_r) = ((yx) \cdot d)_t.\end{aligned}$$

  Por otro lado sea $\rho \in I$ una relación en Q tal que $\varepsilon_j \rho \varepsilon_i = \rho$; entonces para $d \in G(D)$, tenemos

$$(p \cdot d)_a = \sum_{b \in Q_0} [D](\varepsilon_a \rho \varepsilon_b)(d_a) = [D](\rho) d_j = 0,$$

  donde la última igualdad se da, ya que $\rho \in I$ y D satisface ideal de relaciones. Por lo tanto, $p \cdot d = 0$, y en consecuencia $I \subseteq \mathrm{ann}_{KQ}(G(D))$. Esto es, $\forall\, x \in KQ$, $\forall\, d \in D(G)$ $\overline{x} \cdot d := x \cdot d$ está bien definida, y nos da una estructura de A-módulo en $G(D)$.

(g) $\forall\, f : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$, se tiene que $G(f) : G(D) = \bigoplus_{a \in Q_0} D_a \longrightarrow G(D') = \bigoplus_{a \in Q_0} D'_a$, con $G(f) := \bigoplus_{a \in Q_0} f_a = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & f_a & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ una matriz diagonal, es un morfismo en $\mathrm{Mod}(A)$.

En efecto, dado $f : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_K(Q, I) \subseteq \mathrm{Rep}_K(Q)$, tenemos (cf. 5.1.7) un morfismo $[f] = f : [D] \longrightarrow [D']$ en $\mathrm{Fun}(KQ, \mathrm{Mod}(K))$.

Luego, para $x \in KQ$ tenemos que $\varepsilon_a x \varepsilon_b \in \mathrm{Hom}_{KQ}(\varepsilon_b, \varepsilon_a)$ y el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D_b \arrow[r, "f_b"] \arrow[d, "{[D](\varepsilon_a x\varepsilon_b)}"'] & D'_b \arrow[d, "{[D'](\varepsilon_a x\varepsilon_b)}"] \\ D_a \arrow[r, "f_a"'] & D'_a \end{tikzcd}$$

i.e. $[D'](\varepsilon_a x\varepsilon_b) \circ f_b = f_a \circ [D](\varepsilon_a x\varepsilon_b)$.

Sea $d = (d_a)_{a\in Q_0} \in G(D)$. Veamos que $G(f)(\overline{x} \cdot d) = \overline{x} \cdot G(f)(d)$. En efecto, como $\overline{x} \cdot d = x \cdot d$ y $G(f)$ es una matriz diagonal, se tiene que

$$\begin{aligned}
(G(f)(\overline{x} \cdot d))_a &= f_a((\overline{x} \cdot d)_a) = f_a\left(\sum_{b\in Q_0} [D](\varepsilon_a x\varepsilon_b)(d_b)\right) \\
&= \sum_{b\in Q_0} f_a \circ [D](\varepsilon_a x\varepsilon_b)(d_b) = \sum_{b\in Q_0} [D'](\varepsilon_a x\varepsilon_b) \circ f_b)(d_b) \\
&= \sum_{b\in Q_0} [D'](\varepsilon_a x\varepsilon_b)(G(f)(d))_b = (x \cdot G(f)(d))_a = (\overline{x} \cdot G(f)(d))_a
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se da por (b). Por lo tanto, $G(f)(\overline{x} \cdot d) = \overline{x} \cdot G(f)(d)$.

(*h*) $F(\mathrm{mod}(A)) \subseteq \mathrm{rep}_K(Q, I)$ y $G(\mathrm{rep}_K(Q, I)) \subseteq \mathrm{mod}(A)$.

En efecto, esto es consecuencia de (d), y las definiciones de F y G.

Etapa 3: $G \circ F \simeq 1_{\mathrm{Mod}(A)}$ y $F \circ G \simeq 1_{\mathrm{Rep}_K(Q,I)}$.

(*i*) Veamos que $G \circ F \simeq 1_{\mathrm{Mod}(A)}$.

En efecto, para cada $M \in \mathrm{Mod}(A)$ se tiene que $GF(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} F(M)_a = \bigoplus_{a\in Q_0} e_a M$. Consideremos $\lambda_M : GF(M) \longrightarrow M$ con $\lambda_M((m_a)_{a\in Q_0}) := \sum_{a\in Q_0} m_a$. Veamos que λ_M es un isomorfismo de A-módulos (es claro que λ_M es biyectiva). Para ello, usaremos que la estructura de A-módulo en $GF(M)$, la cual es la siguiente: sea $x \in KQ$, $d = (d_a)_{a\in Q_0} \in GF(M)$; luego por (f) y (g), se tiene que

$$\begin{aligned}
(\overline{x} \cdot d)_a &= \sum_{b\in Q_0} [F(M)](\varepsilon_a x\varepsilon_b)(d_b) = \sum_{b\in Q_0} e_a \overline{x} e_b d_b \\
&= e_a \overline{x} \left(\sum_{b\in Q_0} d_b\right) = e_a \overline{x} \lambda_M(d).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall\ a \in Q_0 \quad (\overline{x} \cdot d)_a = e_a \overline{x} \lambda_M(d)$. Luego

$$\begin{aligned}
\lambda_M(\overline{x} \cdot d) &= \sum_{a \in Q_0} (\overline{x} \cdot d)_a = \sum_{a \in Q_0} e_a \overline{x} \lambda_M(d) \\
&= \left(\sum_{a \in Q_0} e_a \right) (\overline{x} \lambda_M(d)) = \overline{x} \lambda_M(d).
\end{aligned}$$

Ahora, verificamos que $\lambda : G \circ F \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}(A)}$ es un isomorfismo natural. Sea $f : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{Mod}(A)$, veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
GF(M) \arrow[r, "GF(f)"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & GF(N) \arrow[d, "\lambda_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Como $F(f) = \{f_a : e_a M \longrightarrow e_a N\}_{a \in Q_0}$, tenemos $GF(f) = \bigoplus_{a \in Q_0} f_a : \bigoplus_{a \in Q_0} e_a M \longrightarrow \bigoplus_{a \in Q_0} e_a N$.
Para $d = (d_a)_{a \in Q_0} \in GF(M)$, se tiene que $f_a(d_a) = (GF(f)(d))_a$. Luego,

$$\begin{aligned}
f \circ \lambda_M(d) &= f\left(\sum_{a \in Q_0} d_a \right) = \sum_{a \in Q_0} f_a(d_a) = \sum_{a \in Q_0} (GF(f)(d))_a \\
&= \lambda_N(GF(f)(d)) = \lambda_N \circ GF(f)(d);
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\lambda : GF \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}(A)}$ es un isomorfismo.

(j) $F \circ G \simeq 1_{\mathrm{Rep}_K(Q,I)}$.

En efecto, sea $D \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$, $G(D) = \bigoplus_{a \in Q_0} D_a$; definimos $FG(D)_a := e_a \cdot G(D) = (0, \ldots, D_a, \ldots, 0)$ y sea $d \in G(D)$; entonces, por (f), se tiene que

$$(e_a \cdot d)_t = \sum_{b \in Q_0} [D](\varepsilon_t \varepsilon_a \varepsilon_b)(d_b) = [D](\varepsilon_t \varepsilon_a)(d_a) = e_t e_a d_a.$$

Por lo que $e_a \cdot d = (0, \ldots, d_a, \ldots, 0)$; de donde $e_a \cdot G(D) = (0, \ldots, D_a, \ldots, 0)$.

Definimos $\forall\ a \in Q_0$ el morfismo $FG(D)_a = (0, \ldots, D_a, \ldots, 0) \xrightarrow{(\rho_D)_a} D_a$ como $(\rho_D)_a(0, \ldots, d_a, \ldots, 0) := d_a$. Es claro que $\rho_D = \{(\rho_D)_a : FG(D) \longrightarrow D\}_{a \in Q_0}$ es un isomorfismo en $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$.

Sea $f : D \longrightarrow D'$ un morfismo en $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$. Tenemos que $FG(f) = \{(FG(f))_a : e_a \cdot G(D) \longrightarrow e_a \cdot G(D')\}_{a \in Q_0}$. Luego como

$$(FG(f))_a := FG(f)|_{e_a \cdot G(D)} = (\bigoplus_{b \in Q_0} f_b)|_{e_a \cdot G(D)},$$

se tiene que $(FG(f))_a(0,\dots,d_a,\dots,0) = (\bigoplus_{b\in Q_0})(0,\dots,d_a,\dots,0) = f_a(d_a)$. Por lo tanto, $(FG(f))_a(0,\dots,d_a,\dots,0) = f_a(d_a)$.

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} e_a \cdot G(D) \arrow[r, "(FG(f))_a"] \arrow[d, "(\rho_D)_a"'] & e_a \cdot G(D') \arrow[d, "(\rho_{D'})_a"] \\ D_a \arrow[r, "f_a"'] & D'_a. \end{tikzcd}$$

En efecto,

$$f_a \circ (\rho_D)_a(0,\dots,d_a,\dots,0) = f_a(d_a) = (\rho_{D'})_a(0,\dots,f_a(d_a),\dots,0)$$

$$= (\rho_{D'})_a \circ (FG(f))_a(0,\dots,d_a,\dots,0).$$

(k) Usando (h), tenemos que las equivalencia de (i) y (j) se restringen a $\mathrm{mod}(A)$ y $\mathrm{rep}_K(Q,I)$.

□

Corolario 5.2.3. *Sea Q un carcaj finito y sin ciclos. Entonces, existen equivalencias de K-categorías* $\mathrm{Mod}(KQ) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q)$ *y* $\mathrm{mod}(KQ) \longrightarrow \mathrm{rep}_K(Q)$.

Demostración. Si Q es finito y sin ciclos, entonces $I = 0$ es admisible, por lo que de 5.2.2, concluimos el corolario. □

5.3. Representaciones especiales

En esta sección, utilizaremos las K-equivalencias $F : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ y $G : \mathrm{Rep}_K(Q,I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$, construidas en 5.2.2.

Definición 5.3.1. Sea Q un carcaj con relaciones. Para toda $a \in Q_0$, se define la *representación simple* $\mathrm{S}(a) \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ asociada al vértice a como sigue:

- $\forall\ b \in Q_0$ $\mathrm{S}(a)_b := 0$ si $b \neq a$, y $\mathrm{S}(a)_b := K$ si $b = a$.
- $\forall\ \alpha \in Q_1$ $\mathrm{S}(a)_\alpha := 0$.

Proposición 5.3.2. *Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, $A := KQ/I$, $\{e_a := \overline{\varepsilon}_a \mid a \in Q_0\}$ y $G : \mathrm{Rep}_K(Q,I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$ la equivalencia construida en 5.2.2. Entonces:*

(a) $\forall\ a \in Q_0 \quad \mathrm{top}(Ae_a) \simeq G(\mathrm{S}(a))$ *como A-módulos.*

(b) $\{G(\mathrm{S}(a))\}_{a\in Q_0}$ *es una familia completa de representantes de iso-clases de A-módulos simples.*

Demostración. (a) Sea $a \in Q_0$, luego

$$G(\mathrm{S}(a)) = \bigoplus_{b \in Q_0} \mathrm{S}(a)_b = (0, \dots, 0, K, 0, \dots, 0) \longrightarrow K, \quad (0, \dots, x, \dots 0) \mapsto x,$$

es un isomorfismo. Por lo tanto $\dim_K(G(\mathrm{S}(a))) = 1$, y en consecuencia, $G(\mathrm{S}(a))$ es un A-módulo simple. Por otro lado $\mathrm{Hom}_A(Ae_a, G(\mathrm{S}(a)) \neq 0$, ya que, por el Ejercicio 1.9.12, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(Ae_a, G(\mathrm{S}(a))) \simeq e_a \cdot G(\mathrm{S}(a)) \simeq \mathrm{S}(a)_a = K \neq 0$, donde el último isomorfismo de debe a la prueba de 5.2.2 (j). Por lo tanto existe un epi-esencial $f : Ae_a \longrightarrow G(\mathrm{S}(a))$, pues $G(\mathrm{S}(a))$ es simple y Ae_a es proyectivo inescindible. En consecuencia $\mathrm{top}(Ae_a) \simeq G(\mathrm{S}(a))$ como A-módulos.

(b) Es consecuencia de (a), ya que $\{Ae_a\}_{a \in Q_0}$ es una familia completa de representantes de iso-clases de A-módulos proyectivos inescindibles. □

Definición 5.3.3. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Definimos, para cada $D \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$, el *soclo* $\mathrm{soc}(D) \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$ como sigue:

- $\forall\ a \in Q_0 \quad \mathrm{soc}(D)_a := \begin{cases} D_a & \text{si } a \text{ es un pozo,} \\ \bigcap\limits_{\alpha : a \to b} \mathrm{Ker}(D_\alpha) & \text{si } a \text{ no es un pozo.} \end{cases}$
- $\forall\ \alpha \in Q_1 \quad \mathrm{soc}(D)_\alpha := 0.$

Decimos que un vértice $a \in Q_0$ es un pozo, si no existen flechas $\alpha \in Q_1$ tales que $\mathrm{o}(\alpha) = a$.

Definición 5.3.4. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones y $D, D' \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$.

(a) Decimos que D' es una *subrepresentación* de D, esto es, $D' \subseteq D$, si $i_{D'} : D' \longrightarrow D$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$, donde $i_{D'} := \{(i_{D'})_a : D'_a \longrightarrow D_a\}_{a \in Q_0}$ con $(i_{D'})_a := i_{D'_a}$ la inclusión $D'_a \subseteq D_a$.

(b) Sea $D' \subseteq D$. Definimos la representación cociente D/D' y el epi-canónico $\pi_{D'} : D \longrightarrow D/D'$ como sigue:

- $\forall\ a \in Q_0 \quad (D/D')_a := D_a/D'_a$ y $(\pi_{D'})_a : D_a \longrightarrow D_a/D'_a$ es el epi-canónico $\pi_{D'_a}$.
- $\forall\ \alpha : a \longrightarrow b \in Q_1, \quad (D/D')_\alpha$ es el único morfismo en $\mathrm{Mod}(K)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D'_a \arrow[r, "i_{D'_a}"] \arrow[d, "D'_\alpha"'] & D_a \arrow[r, "\pi_{D'_a}"] \arrow[d, "D_\alpha"] & D_a/D'_a \arrow[d, "(D/D')_\alpha"] \\ D'_b \arrow[r, "i_{D'_b}"'] & D_b \arrow[r, "\pi_{D'_b}"'] & D_b/D'_b. \end{tikzcd}$$

Ejercicio 5.3.5. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones y $A = KQ/I$. Consideremos las K-equivalencias $F : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q, I)$ y $G : \mathrm{Rep}_K(Q, I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$ construidas en 5.2.2. Pruebe que

(a) $\forall\ D \in \mathrm{Rep}_K(Q,I), \quad \mathrm{soc}(D) \subseteq D$.

(b) Sean $D, D' \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ tales que $D' \subseteq D$. Entonces el epi-canónico $\pi_{D'} : D' \longrightarrow D$ definido anteriormente, es en efecto, un morfismo en $\mathrm{Rep}_K(Q,I)$. Más aún, dicho morfismo $\pi_{D'}$ es un epimofismo.

(c) $\forall\ D, D' \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ tal que $D' \subseteq D$, se tiene que ${}_AG(D')$ es un submódulo de ${}_AG(D)$.

(d) $\forall\ N, M \in \mathrm{Mod}(A)$ tales que $N \leqslant M$, se tiene que $F(N) \subseteq F(M)$.

Proposición 5.3.6. *Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$ y $D \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *$G(D)$ es semisimple si y sólo si $D_\alpha = 0\ \ \forall\ \alpha \in Q_1$.*

(b) $G(\mathrm{soc}(D)) = \mathrm{soc}(G(D))$.

Demostración. (a) $\forall\ \alpha \in Q_1\ D_\alpha = 0 \iff D \simeq \bigoplus_{a\in Q_0} \mathrm{S}(a)^{\dim_K(D_a)} \iff G(D) \simeq \bigoplus_{a\in Q_0} G(\mathrm{S}(a))^{\dim_K(D_a)}$; y esto sucede, por 5.3.2, si y sólo si $G(D)$ es semisimple.

(b) Por el Ejercicio 5.3.5 (a) y (c), tenemos que $G(\mathrm{soc}(D)) \leqslant G(D)$. Sea ${}_AS$ un submódulo simple de $G(D)$. Por 5.3.2, podemos asumir que $G(\mathrm{S}(a)) = {}_AS$ para algún $a \in Q_0$. Luego, ${}_AS = G(S(a)) \leqslant G(D)$, y como G es fiel y pleno, usando el Ejercicio 5.3.5 (c), se tiene que $\mathrm{S}(a) \subseteq D$. Para ver que $G(\mathrm{S}(a)) \leqslant G(\mathrm{soc}(D))$, es suficiente ver que $\mathrm{S}(a) \subseteq \mathrm{soc}(D)$. Veamos esto último.

Sea $\alpha : a \longrightarrow b$ en Q_1, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{S}(a)_a \arrow[r, "0"] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d] & \mathrm{S}(a)_b = 0 \arrow[d, "0"] \\
\mathrm{Ker}(D_\alpha) \arrow[r] & D_a \arrow[r, "D_\alpha"'] & D_b,
\end{tikzcd}$$

lo cual implica que $\mathrm{S}(a)_a \subseteq \bigcap_{\alpha:a\longrightarrow b} \mathrm{Ker}(D_\alpha) = \mathrm{soc}(D)_a$. Por lo tanto, $\mathrm{S}(a) \subseteq \mathrm{soc}(D)$.

Por lo que para todo simple $S \leqslant G(D)$, vale que $S \leqslant G(\mathrm{soc}(D))$. Luego $\mathrm{soc}(G(D)) = G(\mathrm{soc}(D))$. □

Definición 5.3.7. Sea (Q,I) un carcaj con relaciones. Para $D \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$, definimos el *radical* $\mathrm{rad}(D) \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ como sigue:

- $\forall\ a \in Q_0 \quad \mathrm{rad}(D)_a := \begin{cases} \sum\limits_{\alpha:b\to a} \mathrm{Im}(D_\alpha) & \text{si } a \text{ no es fuente,} \\ 0 & \text{si } a \text{ es fuente.} \end{cases}$

- $\forall\ \alpha \in Q_1 \quad \mathrm{rad}(D)_\alpha := D_\alpha|_{\mathrm{rad}(D)_{\mathrm{o}(\alpha)}}$.

Decimos que un vértice $a \in Q_0$ es una fuente, si no existen flechas $\alpha \in Q_1$ tales que $\mathrm{t}(\alpha) = a$.

Proposición 5.3.8. *Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$ y sea $G : \mathrm{Rep}_K(Q,I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$ la K-equivalencia construida en 5.2.2. Entonces, $\forall\ D \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$ $G(\mathrm{rad}(D)) \simeq \mathrm{rad}(G(D))$ como A-módulos.*

Demostración. Por ser $I \trianglelefteq Q$ admisible, tenemos que $\exists\ m \geqslant 2$ tal que $\mathscr{F}^m \subseteq I \subseteq \mathscr{F}^2$, $\mathrm{rad}(A) = \mathscr{F}/I$ (véase 4.2.3) y que $\mathrm{rad}(G(D)) = J(A) \cdot G(D)$. Por lo tanto:

$$\mathrm{rad}(G(D)) = \mathscr{F}/I \cdot G(D) = \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\gamma \in Q_l} \overline{\gamma} \cdot G(D).$$

Veamos como es la acción: $\overline{\gamma} \cdot G(D)$ para $\gamma \in Q_l$. Sea $d = (d_b)_{b\in Q_0} \in G(D) = \bigoplus_{b\in Q_0} D_b$ (suma directa externa de K-módulos). Sea $i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1$. Veamos que $\overline{\alpha} \cdot G(D) = (0, \ldots, \underset{\text{lugar } j}{D_\alpha(D_i)}, \ldots 0)$.

En efecto, $(\overline{\alpha} \cdot d)_a = \sum_{b\in Q_0} [D](\varepsilon_a \alpha \varepsilon_b)(d_b) = [D](\varepsilon_a \varepsilon_j \alpha)(d_i) = \delta_{aj} D_\alpha(d_i)$. Sea $t \xrightarrow{\beta} i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_2$. Veamos que $\overline{\alpha\beta} \cdot G(D) = (0, \ldots, \underset{\text{lugar } j}{D_\alpha D_\beta(D_t)}, \ldots, 0)$. En efecto,

$$(\overline{\alpha\beta} \cdot d)_a = \sum_{b\in Q_0} [D](\varepsilon_a \alpha\beta \varepsilon_b)(d_b) = [D](\varepsilon_a \varepsilon_j \alpha\beta\varepsilon_t)(d_t) = \delta_{aj} D_\alpha D_\beta(d_t).$$

Dado que $D_\alpha D_\beta(D_t) \subseteq D_\alpha(D_i)$, continuando de esta forma, se tiene que

$$\sum_{x\in(Q_n)\varepsilon_j,\ n\geqslant 1} \overline{x} \cdot G(D) = \sum_{\alpha\in(Q_1)\varepsilon_j} \overline{\alpha} \cdot G(D).$$

Por lo que vale la siguiente igualdad

$$\mathrm{rad}(G(D)) = \sum_{\alpha\in Q_1} \overline{\alpha} \cdot G(D). \tag{5.1}$$

Ahora bien, $F(\mathrm{rad}(G(D)))_a = \sum_{\alpha\in Q_1} e_a \cdot \overline{\alpha} \cdot G(D) = \sum_{\alpha\in Q_1} \overline{\varepsilon_a \alpha} \cdot G(D)$. Si a es fuente, se tiene que $\varepsilon_a \alpha = 0$, por lo que $F(\mathrm{rad}(G(D)))_a = (0, 0 \ldots, 0)$. Supongamos que a no es fuente. Entonces

$$F(\mathrm{rad}(G(D)))_a = \sum_{\alpha : b\to a} \overline{\alpha} \cdot G(D) = (0, \ldots, \overset{\text{lugar ``}a\text{''}}{\sum_{\alpha : b \to a} \mathrm{Im}(D_\alpha)}, 0, \ldots, 0);$$

por lo tanto, la proyección $\pi_a : F(\mathrm{rad}(G(D)))_a \longrightarrow \mathrm{rad}(D)_a$ en la "coordenada" a es un ismorfismo, y $\pi : F(\mathrm{rad}(G(D))) \longrightarrow \mathrm{rad}(D)$ es un isomorfismo en $\mathrm{Rep}_K(Q,I)$. Luego, como $GF \simeq 1$ (cf. 5.2.2 (i)), se tiene que $\mathrm{rad}(G(D)) \simeq G(\mathrm{rad}(D))$ como A-módulos. $\square$

Ejercicio 5.3.9. Sea (Q,I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$ y $D \in \mathrm{Rep}_K(Q,I)$.

(a) Pruebe que $\mathrm{rad}(D) \subseteq D$.

(*b*) Defina la representación cociente como $\mathrm{top}(D) := D/\mathrm{rad}(D)$. Pruebe que $\mathrm{top}(G(D)) \simeq G(\mathrm{top}(D))$ como A-módulos.

Ejemplo

Sea $Q = \; 1 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 3$, $I = \langle \beta\alpha, \delta\gamma \rangle$. Consideremos la representación

$D = \; K \underset{(0\;\;0\;\;1)}{\overset{(0\;\;1\;\;0)}{\leftleftarrows}} K^3 \underset{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\leftleftarrows}} K$. Entonces $D \in \mathrm{rep}_K(Q, I)$, pues $D_\beta D_\alpha = 0 = D_\delta D_\gamma$. En lo que sigue, calculamos $\mathrm{soc}(D), \mathrm{rad}(D), \mathrm{top}(D)$ y $\mathrm{End}(D)$.

- $\mathrm{soc}(D) \;=\; K \underset{0}{\overset{0}{\leftleftarrows}} K \underset{0}{\overset{0}{\leftleftarrows}} 0 \;=\mathrm{S}(1) \oplus \mathrm{S}(2)$. En efecto, 1 es el único pozo en Q, por lo tanto $\mathrm{soc}(D)_1 = D_1 = K$. Para $a \neq 1$, se tiene que $\mathrm{soc}(D)_a = \bigcap\limits_{x: a \longrightarrow b} \mathrm{Ker}(D_x)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathrm{soc}(D)_2 &= \mathrm{Ker}(D_\beta) \cap \mathrm{Ker}(D_\delta) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 : \; x_2 = 0 = x_3 \right\} \\
&= K \times 0 \times 0 \simeq K. \\
\mathrm{soc}(D)_3 &= \mathrm{Ker}(D_\alpha) \cap \mathrm{Ker}(D_\gamma) = \left\{ t \in K : \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- $\mathrm{rad}(D) \;=\; K \underset{(0\;0)}{\overset{(0\;1)}{\leftleftarrows}} K^2 \leftleftarrows 0 \;= \mathrm{S}(2) \oplus \left(K \underset{0}{\overset{1}{\leftleftarrows}} K \leftleftarrows 0 \right)$. En efecto, 3 es la única fuente en Q, por lo tanto $\mathrm{rad}(D)_3 = 0$. Dado que $\mathrm{rad}(D)_a = \sum\limits_{x: b \to a} \mathrm{Im}(D_x)$ y $\mathrm{rad}(D)_x = D_x|_{\mathrm{rad}(D)_{o(x)}}$ para $a \neq 3$, se tiene para dichos vértices:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rad}(D)_2 &= \mathrm{Im}(D_\alpha) + \mathrm{Im}(D_\gamma) = K \times K \times 0, \\
\mathrm{rad}(D)_\beta &= D_\beta|_{K \times K \times 0} = (0\;1), \\
\mathrm{rad}(D)_1 &= \mathrm{Im}(D_\beta) + \mathrm{Im}(D_\delta) = K, \\
\mathrm{rad}(D)_\delta &= D_\delta|_{K \times K \times 0} = (0\;0).
\end{aligned}$$

- $\mathrm{top}(D) = D/\mathrm{rad}(D) = \; 0 \leftleftarrows K \underset{0}{\overset{0}{\leftleftarrows}} K \; = \mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{S}(3)$.

- $\mathrm{End}(D) \simeq K[x]/\langle x^2 \rangle$ como K-álgebras. En efecto, $\mathrm{End}(D) = \{ f = (f_1, f_2, f_3) :$

$D \longrightarrow D$ en $\operatorname{rep}_K(Q)\}$, entonces f hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
D: & K \arrow[d, "f_1"'] & K^3 \arrow[l, shift right, "\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}"] \arrow[d, "f_2"'] & K \arrow[l, shift right, "\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}"] \arrow[d, "f_3"'] \\
D: & K & K^3 \arrow[l, shift right, "\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}"] & K. \arrow[l, shift right, "\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}
$$

De donde tenemos que $f_1 = a,\ f_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, f_3 = b$. Luego

- $f_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} f_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$, por lo cual $y_1 = 0 = y_3 \quad \text{y} \quad y_2 = a$.
- $f_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$, por lo cual $z_1 = 0 = z_2 \quad \text{y} \quad z_3 = a$.
- $f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo cual $y_1 = 0 = z_1 \quad \text{y} \quad x_1 = a$.
- $f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} f_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo cual $x_2 = 0 = z_2 \quad \text{y} \quad y_2 = b$.

De lo anterior, concluimos que $a = b = z_3 = y_2 = x_1$ y $y_1 = y_3 = z_1 = x_2 = z_2 = 0$.

Por lo tanto $f = (f_1, f_2, f_3) = \left(a, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & x_3 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \right)$ es invertible si y sólo si $a \in K \backslash \{0\}$. Por lo que $\operatorname{End}(D) = \left\{ \left(a, \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a \right) : a, b \in K \right\}$, y los morfismos no invertibles en $\operatorname{End}(D)$ es el conjunto

$$
\mathscr{N} = \left\{ \left(0, \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 0 \right) : b \in K \right\} \trianglelefteq \operatorname{End}(D).
$$

Luego, por 2.7.1, $\operatorname{End}(D)$ es local y $J(\operatorname{End}(D)) = \mathscr{N}$.

En particular, D es una representación inescindible. En efecto, puesto que $\mathrm{End}(D) \simeq \mathrm{End}(G(D))$, obtenemos que $\mathrm{End}(G(D))$ es local, y por 2.7.7, ${}_AG(D)$ es inescindible; por lo tanto, D es inescindible. Además, $\mathrm{End}(D)$ tiene sólo 2 idempotentes (cf. 2.8.18): el cero y $e := 1_{\mathrm{End}(D)} = (1, \mathbb{I}_{3\times 3}, 1)$. Dado que $\mathrm{End}(D)/J(\mathrm{End}(D)) \simeq K \cdot e \simeq K$, se tiene que $\mathrm{End}(D)$ es elemental de orden 1. Y como $J(\mathrm{End}(D))^2 = 0$ y $\dim_k(eJ(A)e) = \dim_k(J(A)) = 1$, tenemos que

$$Q_{\mathrm{End}(D)} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \mathrm{Ker}(\Phi) = \langle \alpha^2 \rangle$$

pues $J(\mathrm{End}(D))^2 = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{End}(D) \simeq \frac{KQ_{\mathrm{End}(D)}}{\langle \alpha^2 \rangle} \simeq \frac{K[x]}{\langle x^2 \rangle}$.

Definición 5.3.10. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. La *representación proyectiva* $\mathrm{P}(a) \in \mathrm{Rep}_K(Q, I)$ asociada al vértice $a \in Q_0$, se define como sigue:

- $\forall\ b \in Q_0 \quad \mathrm{P}(a)_b := \frac{\varepsilon_b (KQ) \varepsilon_a}{\varepsilon_b I \varepsilon_a}$,
- $\forall\ \alpha : i \longrightarrow j \in Q_1 \quad \mathrm{P}(a)_\alpha : \mathrm{P}(a)_i \longrightarrow \mathrm{P}(a)_j$ está dado por $\mathrm{P}(a)_\alpha := \overline{\alpha} \cdot ?$, esto es, $\mathrm{P}(a)_\alpha(x) := \overline{\alpha}x$ con el producto en KQ/I.

Proposición 5.3.11. *Sea (Q, I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$, $\{e_a = \overline{\varepsilon}_a\}_{a \in Q_0}$ y $G : \mathrm{Rep}_K(Q, I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$ la equivalencia de 5.2.2. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(*a*) $\forall\ a \in Q_0 \quad G(\mathrm{P}(a)) \simeq Ae_a$ *como A-módulos.*

(*b*) $\forall\ a \in Q_0 \quad \mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))$, *se calcula como sigue:*

- $\forall\ b \in Q_0 \quad \mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))_b = \begin{cases} \mathrm{P}(a)_b & \text{si } b \neq a, \\ \langle \mathrm{P}(a)_a \setminus \{K \cdot e_a\} \rangle_K & \text{si } b = a. \end{cases}$
- $\forall\ \alpha \in Q_1 \quad \mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))_\alpha(x) = \overline{\alpha}x$ *con el producto en A.*

Demostración. (a) Consideremos la equivalencia $F : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q, I)$ de 5.2.2. Luego tenemos que

$$F(Ae_a)_b = e_b A e_a = \frac{\varepsilon_b (KQ) \varepsilon_a}{\varepsilon_b I \varepsilon_a} \quad \text{y} \quad F(Ae_a)_\alpha(x) = \overline{\alpha}x,$$

lo cual implica que $F(Ae_a) = \mathrm{P}(a)$, por lo que $G(\mathrm{P}(a)) \simeq Ae_a$.

(b) Sea $a \in Q_0$. Para $b \in Q_0$, si b es fuente, entonces $\mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))_b = 0 = \mathrm{P}(a)_b$. Podemos asumir que b no es fuente. Luego $\mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))_b = \sum\limits_{\alpha : x \to b} \mathrm{Im}(\mathrm{P}(a)_\alpha)$. Si $b \neq a$, tenemos en el carcaj un camino $a \rightsquigarrow x \xrightarrow{\alpha} b$ y $\overline{\alpha} \cdot ? : \mathrm{P}(a)_x \longrightarrow \mathrm{P}(a)_b$; luego

$$\mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))_b = \sum_{\alpha : x \to b} \mathrm{Im}(\mathrm{P}(a)_\alpha) = \sum_{\alpha : x \to b} \overline{\alpha} \cdot \mathrm{P}(a)_x = \mathrm{P}(a)_b.$$

Si $b = a$, en el carcaj Q se tiene un camino de la forma $x \xrightarrow{\alpha} a \overset{\delta}{\rightsquigarrow} x$ con $\delta \in \mathrm{P}(a)_x$; por lo que

$$\mathrm{rad}(\mathrm{P}(a))_a = \sum_{\alpha : x \to b} \mathrm{Im}(\mathrm{P}(a)_\alpha) = \sum_{\alpha : x \to b} \overline{\alpha} \cdot \mathrm{P}(a)_x = \langle \mathrm{P}(a)_a \setminus \{K e_a\} \rangle_K.$$

Finalmente, $\operatorname{rad}(\mathrm{P}(a))_\alpha = \mathrm{P}(a)_\alpha|_{\operatorname{rad}(\mathrm{P}(a))_{o(\alpha)}} = \overline{\alpha}\cdot ?$. $\square$

Ejemplos

(1) Sea
$$Q = \begin{tikzcd} & 1 & \\ 2 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd},$$
$I = 0$ y $A = KQ$. Entonces, se tiene lo siguiente

$$\mathrm{P}(1) = \begin{tikzcd} & K\varepsilon_1 & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \mathrm{S}(1) = \begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{P}(2) = \begin{tikzcd} & \mathrm{P}(2)_1 = K\cdot\alpha & \\ \mathrm{P}(2)_2 = K\cdot\varepsilon_2 \arrow[ur, "\alpha\cdot ?"] & & \mathrm{P}(2)_3 = 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & K & \\ K \arrow[ur, "1"] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{rad}(\mathrm{P}(2)) \simeq \begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(1)$$

$$\operatorname{top}(\mathrm{P}(2)) \simeq \begin{tikzcd} & 0 & \\ K \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(2)$$

$$\mathrm{P}(3) = \begin{tikzcd} & \mathrm{P}(3)_1 = K\cdot\beta & \\ \mathrm{P}(3)_2 = 0 \arrow[ur] & & \mathrm{P}(3)_3 = K\cdot\varepsilon_3 \arrow[ul, "\beta\cdot ?"'] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[ur] & & K \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{rad}(\mathrm{P}(3)) \simeq \begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(1)$$

$$\operatorname{top}(\mathrm{P}(3)) \simeq \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & & K \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(3)$$

También se suele escribir $\mathrm{P}(1) = 1,\ \mathrm{P}(2) = \begin{matrix} 2 \\ \downarrow^{\alpha} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix},\ \mathrm{P}(3) = \begin{matrix} 3 \\ \downarrow^{\beta} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$.

(2) Consideremos $Q = 1 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 3$, $I = \langle \beta\alpha, \delta\gamma \rangle$, $A = KQ/I$. Definimos $e_i := \varepsilon_i + I$ para $i = 1, 2, 3$. $\overline{x} := x + I \ \ \forall\, x \in KQ$. Entonces, tenemos lo siguiente

- $\mathrm{P}(1) = \; K\varepsilon_1 \leftleftarrows 0 \leftleftarrows 0 \; \simeq \mathrm{S}(1) = \; K \leftleftarrows 0 \leftleftarrows 0 \,.$

- P(2) $\qquad \mathrm{P}(2)_1 = \; K\overline{\beta} \oplus K\overline{\delta} \underset{\overline{\delta}\cdot ?}{\overset{\overline{\beta}\cdot ?}{\leftleftarrows}} \mathrm{P}(2)_2 = Ke_2 \leftleftarrows \mathrm{P}(2)_3 = 0$

  $$\simeq \quad K^2 \underset{\binom{0}{1}}{\overset{\binom{1}{0}}{\leftleftarrows}} K \leftleftarrows 0 \,,$$ donde el cambio de bases está dado como sigue: $\mathscr{B} := \{\overline{\beta}, \overline{\delta}\}$ es una base de $\mathrm{P}(2)_1$ y $\mathscr{B}' := \{e_2\}$ es una base de $\mathrm{P}(2)_2$. Por lo tanto $[\overline{\beta}\cdot ?]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $[\overline{\delta}\cdot ?]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  $\mathrm{rad}(\mathrm{P}(2)) \simeq \; K^2 \leftleftarrows 0 \leftleftarrows 0 \; = \mathrm{S}(1)^2 = \mathrm{soc}(\mathrm{P}(2)).$

  $$\mathrm{P}(2) = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & {}^{\beta}\swarrow\;\searrow^{\delta} & \\ 1 & & 1 \end{array} = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 1 \end{array} .$$

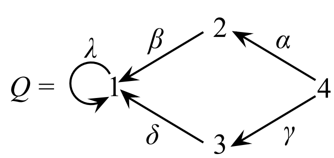
- P(3) $\qquad \mathrm{P}(3)_1 = \; 0 \leftleftarrows \mathrm{P}(3)_2 = K\overline{\alpha} \oplus K\overline{\gamma} \underset{\overline{\gamma}\cdot ?}{\overset{\overline{\alpha}\cdot ?}{\leftleftarrows}} \mathrm{P}(3)_3 = Ke_3$

  $$\simeq \; 0 \leftleftarrows K^2 \underset{\binom{0}{1}}{\overset{\binom{1}{0}}{\leftleftarrows}} K \,,$$

  $\mathrm{rad}(\mathrm{P}(3)) \simeq \; 0 \leftleftarrows K^2 \leftleftarrows 0 \; = \mathrm{S}(2)^2 = \mathrm{soc}(\mathrm{P}(3)).$

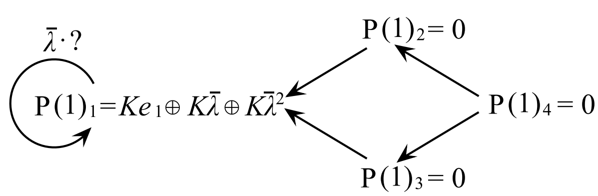
  $$\mathrm{P}(3) = \begin{array}{ccc} & 3 & \\ & {}^{\alpha}\swarrow\;\searrow^{\gamma} & \\ 2 & & 2 \end{array} = \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 2 & & 2 \end{array} .$$

(3) Sea



y consideremos $I = \langle \beta\alpha - \gamma\delta, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$. Entonces, tenemos lo siguiente

- P(1)



$$\simeq \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K^3 \arrow[loop left, "\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{P}(1) = \begin{array}{c} 1 \\ \mid\lambda \\ 1 \\ \mid\lambda \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}.$$

rad(P(1)) es como sigue

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K\bar{\lambda} \oplus K\bar{\lambda}^2 \arrow[loop left, "\bar{\lambda}\cdot ?"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K^2 \arrow[loop left, "\begin{pmatrix} 0&0\\ 1&0 \end{pmatrix}"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rad}(\mathrm{P}(1)) = \begin{array}{c} 1 \\ \mid\lambda \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}.$$

$\mathrm{rad}^2(\mathrm{P}(1))$ es como sigue

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K\bar{\lambda}^2 \arrow[loop left, "\bar{\lambda}\cdot ?"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K \arrow[loop left, "0"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} = \mathrm{S}(1)$$

- P(2) y rad(P(2)) son como sigue

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}(2)_2 = Ke_2 \arrow[dl, "\bar{\beta}\cdot ?"'] & \\ \mathrm{P}(2)_1 = K\bar{\beta} \arrow[loop left, "\bar{\lambda}\cdot ?"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "1"'] & \\ K \arrow[loop left, "0"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K\bar{\beta} \arrow[loop left, "\bar{\lambda}\cdot ?"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ K \arrow[loop left, "0"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} = \mathrm{S}(1)$$

$$\mathrm{P}(2) = \begin{array}{c} 2 \\ |\beta \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \text{ y } \mathrm{rad}(\mathrm{P}(2)) = \mathrm{S}(1).$$

- P(3)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P}(3)_2 = 0 \arrow[dl] & \\
\mathrm{P}(3)_1 = K\bar\delta \oplus K\bar\lambda\bar\delta \oplus K\bar\lambda^2\bar\delta \arrow[loop left, "\bar\lambda\cdot ?"] & & \mathrm{P}(3)_4 = 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \mathrm{P}(3)_3 = Ke_3 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

$$\simeq \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K^3 \arrow[loop left, "\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & K \arrow[ul, "\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}"] &
\end{tikzcd}$$

rad(P(3))

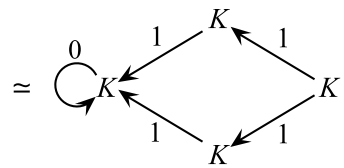
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K\bar\delta \oplus K\bar\lambda\bar\delta \oplus K\bar\lambda^2\bar\delta \arrow[loop left, "\bar\lambda\cdot ?"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

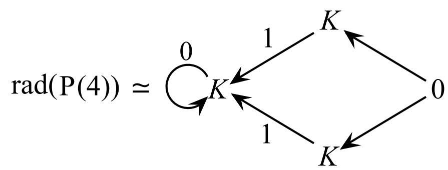
$$\simeq \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K^3 \arrow[loop left, "\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd} \simeq \mathrm{P}(1)$$

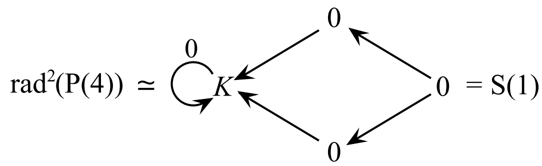
$$\mathrm{P}(3) = \begin{array}{c} 3 \\ |\delta \\ 1 \\ |\lambda \\ 1 \\ |\lambda \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}, \ \mathrm{rad}(\mathrm{P}(3)) = \begin{array}{c} 1 \\ |\lambda \\ 1 \\ |\lambda \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} = \mathrm{P}(1).$$

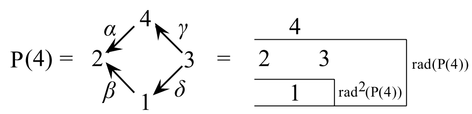
- P(4)

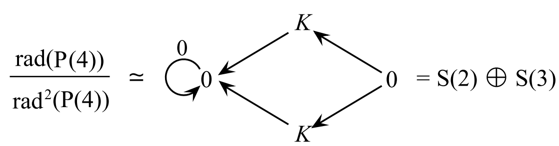
$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P}(4)_2 = K\bar\alpha \arrow[dl, "\bar\beta\cdot ?"'] & \\
\mathrm{P}(4)_1 = K\bar\beta\bar\alpha = K\bar\gamma\bar\delta \arrow[loop left, "\bar\lambda\cdot ?"] & & \mathrm{P}(4)_4 = Ke_4 \arrow[ul, "\bar\alpha\cdot ?"'] \arrow[dl, "\bar\gamma\cdot ?"] \\
 & \mathrm{P}(4)_3 = K\bar\gamma \arrow[ul, "\bar\delta\cdot ?"] &
\end{tikzcd}$$











Lema 5.3.12. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita, $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A. Consideremos el funtor de Nakayama $\mathscr{N} : \operatorname{mod}(A) \longrightarrow \operatorname{mod}(A)$, el cual es la composición de los K-funtores* $\operatorname{mod}(A) \xrightarrow{*:=\operatorname{Hom}_A(-,A)} \operatorname{mod}(A^{op}) \xrightarrow{D_{A^{op}}=\operatorname{Hom}_A(-,K)} \operatorname{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\ i \quad \mathscr{N}(Ae_i) \simeq D_{A^{op}}(e_iA) \simeq I_0(\operatorname{top}(Ae_i))$ *como A-módulos.*

(b) $\forall\ i, j \quad \Phi_j : e_jD_{A^{op}}(e_iA) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(e_iAe_j, K)$ *es un isomorfismo de K-módulos, donde* $\Phi_j(e_jf)(e_iae_j) := (e_jf)(e_ia) = f(e_iae_j)\ \forall\ a \in A, \forall\ f \in D_{A^{op}}(e_i)$.

(c) $\mathscr{N}$ *es isomorfo al funtor* ${}_AD(A)_A \otimes_A - : \operatorname{mod}(A) \longrightarrow \operatorname{mod}(A)$.

Demostración. (a) Se tiene, en virtud del Ejercicio 1.9.12, que $(Ae_i)^* := \operatorname{Hom}_A(Ae_i, A) \simeq e_iA$ como A^{op}-módulos. Luego, como $Ae_i \simeq P_0(\operatorname{top}(Ae_i))$, tenemos por 3.6.9 que

$$I_0(\operatorname{top}(Ae_i)) \simeq D_{A^{op}}((Ae_i)^*) \simeq D_{A^{op}}(e_iA),$$

donde $\mathscr{N}(Ae_i) := D_{A^{op}}((Ae_i)^*)$.

(b) Sean $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego se tiene el isomorfismo de K-módulos: $t : e_iAe_j \longrightarrow e_iAe \otimes_A Ae_j$ dado por $t(e_iae_j) := e_ia \otimes e_j$ (cuyo inverso está dado por $e_iA \otimes_A Ae_j \longrightarrow e_iAe_j \quad e_ia \otimes a'e_j \mapsto e_iaa'e_j$). Luego, se tienen los siguientes isomorfismos de K-módulos

$$e_jD_{A^{op}}(e_iA) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_A(Ae_j, D_{A^{op}}(e_iA)) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_K(e_iA \otimes_A Ae_j, K)$$

$$\mathrm{Hom}_K(e_iA \otimes_A Ae_j, K) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_K(t,K)} \mathrm{Hom}_K(e_iAe_j, K)$$

dados por: $e_jf \overset{\rho}{\mapsto} \rho(e_jf)(ae_j) = ae_jf,\ g \overset{\theta}{\mapsto} \theta(g)(e_ia \otimes a'e_j) = g(a'e_j)(e_ia)$.

Veamos que $\Phi_j = \mathrm{Hom}_K(t, K) \circ \theta \circ \rho$. En efecto,

$$(\mathrm{Hom}_K(t, K) \circ \theta \circ \rho)(e_jf)(e_iae_j) = \theta \circ \rho(e_jf)(t(e_iae_j)) = \theta(\rho(e_jf))(e_ia \otimes e_j)$$

$$= \rho(e_jf)(e_j)(e_ia) = e_jf(e_ia) = \Phi_j(e_jf)(e_iae_j),$$

probándose (b).

(c) Para $M \in \mathrm{mod}(A)$, se tienen los siguientes isomorfismos naturales

$$D_A({}_AD(A)_A \otimes_A M) = \mathrm{Hom}_K(D(A) \otimes_A M, K)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_K(D(A), K)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, A).$$

Por lo tanto, $D_A(D(A) \otimes_A M) \simeq M^*$, por lo que que $\mathscr{N}(M) \simeq D_{A^{op}}D_A(D(A) \otimes M) \simeq D(A) \otimes M$. $\square$

Definición 5.3.13. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Para cada $a \in Q_0$, la *representación inyectiva* $\mathrm{I}(a)$ asociada al vértice a, se define como sigue:

(*a*) $\forall\ b \in Q_0 \quad \mathrm{I}(a)_b := \mathrm{Hom}_K(\mathrm{P}(b)_a, K)$,

(*b*) $\forall\ \alpha : x \longrightarrow y \in Q_1$ se define $\mathrm{I}(a)_\alpha : \mathrm{I}(a)_x \longrightarrow \mathrm{I}(a)_y$, donde $\forall\ f \in \mathrm{I}(a)_x = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{P}(x)_a, K)$, $\forall\ z \in \mathrm{P}(y)_a$ $\mathrm{I}(a)_\alpha(f)(z) := f(z\overline{\alpha})$, esto es, $\mathrm{I}(a)_\alpha = \mathrm{Hom}_K(? \cdot \overline{\alpha}, K)$, donde $? \cdot \overline{\alpha} : \mathrm{P}(y)_a \longrightarrow \mathrm{P}(x)_a$ es la multiplicación a izquierda de $\overline{\alpha}$.

Proposición 5.3.14. *Sea (Q, I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$, $\{e_a = \overline{\varepsilon}_a\}_{a \in Q_0}$ y $G : \mathrm{Rep}_K(Q, I) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$ la K-equivalencia de 5.2.2. Entonces $\forall\ a \in Q_0$ $G(\mathrm{I}(a)) \simeq I_0(\mathrm{top}(Ae_a))$ como A-módulos.*

Demostración. $\forall\ a, b \in Q_0$, es fácil ver que $\mathrm{P}(b)_a = e_aAe_b$. Consideremos la K-equivalencia $F : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q, I)$ de 5.2.2. Por 5.3.12, tenemos que $D_{A^{op}}(e_aA) \simeq I_0(\mathrm{top}(Ae_a))$. Luego, es suficiente probar que $F(D_{A^{op}}(e_aA)) \simeq \mathrm{I}(a)$. En efecto, por 5.3.12 (b), tenemos $\forall\ \alpha : x \longrightarrow y \in Q_1$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
e_xD_{A^{op}}(e_aA) \arrow[r, "\overline{\alpha}\cdot ?"] \arrow[d, "\Phi_x"'] & e_yD_{A^{op}}(e_aA) \arrow[d, "\Phi_y"] \\
\mathrm{I}(a)_x = \mathrm{Hom}_K(e_aAe_x, K) \arrow[r, "\mathrm{I}(a)_\alpha"'] & \mathrm{Hom}_K(e_aAe_y, K) = \mathrm{I}(a)_y,
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos. Por lo tanto, es suficiente ver que el diagrama anterior conmuta. Para ello, sea $z \in e_a A e_y$, $f \in D_{A^{op}}(e_a A) = \mathrm{Hom}_K(e_a A, K)$, luego

$$\mathrm{I}(a)_\alpha \circ \Phi_x(e_x f)(z) = \mathrm{I}(a)_\alpha(\Phi_x(e_x f))(z) = \Phi_x(e_x f)(z\overline{\alpha}) = f(z\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha} f)(z)$$

$$= \Phi_y(e_y(\overline{\alpha} f))(z) = \Phi_y((\overline{\alpha} e_x) f)(z) = \Phi_y \circ (\overline{\alpha} \cdot ?)(e_x f)(z).$$

Por lo que $\mathrm{I}(a)_\alpha \circ \Phi_x = \Phi_y \circ (\overline{\alpha} \cdot ?)$. $\square$

Ejercicio 5.3.15. Sea $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una K-base de un K-espacio vectorial V. Consideremos $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ y $\mathscr{B}^* = \{f_{x_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, con $f_{x_i} : V \longrightarrow K$ tal que $f_{x_i}(x_j) := \delta_{ij}$. Pruebe que $\mathscr{B}^*$ es una K-base de V^* ($\mathscr{B}^*$ es llamada la "base dual" de $\mathscr{B}$).

Ejercicio 5.3.16. Sea $T : V \longrightarrow V'$ en $\mathrm{mod}(K)$, $\mathscr{B}$ una base de V y $\mathscr{B}'$ una base de V'. Consideremos $T^* := \mathrm{Hom}_K(T, K) : (V')^* \longrightarrow V^*$ y a las matrices asociadas de T y T^* en las respectivas bases, *i.e.*, $B := [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ y $A := [T^*]_{(\mathscr{B}')^*}^{\mathscr{B}^*}$. Pruebe que $A = B^t$, donde la matriz transpuesta de B es B^t.

Definición 5.3.17. Sea Q un carcaj. Introducimos la correspondencia $* := \mathrm{Hom}(-, K) : \mathrm{Rep}_K(Q^{op}) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q)$: para cada $D \in \mathrm{Rep}_K(Q^{op})$, $D^* \in \mathrm{Rep}_K(Q)$ se define como sigue:

- $\forall\, a \in Q_0 \quad (D^*)_a := (D_a)^* = \mathrm{Hom}_K(D_a, K)$.
- $\forall\, \alpha : x \longrightarrow y \in Q_1 \quad (D^*)_\alpha := \mathrm{Hom}_K(D_{\alpha^{op}}, K) : (D_x)^* \longrightarrow (D_y)^*$.

Dado el morfismo $f : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_K(Q^{op})$, definimos $f^* : (D')^* \longrightarrow D^*$ en $\mathrm{Rep}_K(Q)$ como $f^* := \{(f_x)^* = \mathrm{Hom}_K(f_x, K) : (D'_x)^* \longrightarrow (D_x)^*\}_{x \in Q_0}$.

Ejercicio 5.3.18. Sea Q un carcaj. Pruebe que $* : \mathrm{Rep}_K(Q^{op}) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K(Q)$ es un funtor K-lineal.

Definición 5.3.19. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Para cada $a \in Q_0$, la *representación proyectiva opuesta* $\mathrm{P}^{op}(a) \in \mathrm{Rep}_K(Q^{op})$ asociada al vértice a, se define como sigue:

- $\forall\, b \in Q_0 \quad \mathrm{P}^{op}(a)_b := \mathrm{P}(b)_a$,
- $\forall\, \alpha : x \longrightarrow y \in Q_1 \quad \mathrm{P}^{op}(a)_{\alpha^{op}} := ? \cdot \overline{\alpha} : \mathrm{P}^{op}(a)_y \longrightarrow \mathrm{P}^{op}(a)_x$.

Ejercicio 5.3.20. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Pruebe que para toda $a \in Q_0$, se tiene que $\mathrm{I}(a) = (\mathrm{P}^{op}(a))^*$.

Observación. El cálculo de $\mathrm{I}(a)$, se hace usando los Ejercicios 5.3.20 y 5.3.16.
Ejemplos

(1) Sea

$$Q = \begin{tikzcd} & 1 & \\ 2 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

$I = 0,\ A := KQ$.

- I(1)

$$\mathrm{P}^{op}(1) \;=\; \begin{tikzcd} & \mathrm{P}^{op}(1)_1{=}Ke_1 \arrow[dl, "?\cdot\overline{\alpha}"'] \arrow[dr] & \\ \mathrm{P}^{op}(1)_2{=}K\overline{\alpha} & & \mathrm{P}^{op}(1)_3{=}K\overline{\beta} \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ K & & K \end{tikzcd}$$

$$\therefore\ \mathrm{I}(1) = (\mathrm{P}^{op}(1))^* \simeq \begin{tikzcd} & K & \\ K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{I}(1) = \begin{matrix} 2 & & 3 \\ & {}_{\alpha}\!\diagdown\!\diagup_{\beta} & \\ & 1 & \end{matrix} \;=\; \begin{matrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \end{matrix}.$$

$$\mathrm{rad}(\mathrm{I}(1)) \simeq \mathrm{rad}\left(\begin{tikzcd} & K & \\ K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd} \right) = \begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(1)$$

$$\mathrm{top}(\mathrm{I}(1)) \simeq \begin{tikzcd} & 0 & \\ K \arrow[ur] & & K \arrow[ul] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & 0 & \\ K \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} & 0 & \\ 0 \arrow[ur] & & K \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{S}(3)$$

- $I(2)$

$$\mathrm{P}^{op}(2) = \begin{tikzcd} & \mathrm{P}^{op}(2)_1{=}0 \arrow[dl, "?\cdot\overline{\alpha}"'] \arrow[dr] & \\ \mathrm{P}^{op}(2)_2{=}Ke_2 & & \mathrm{P}^{op}(2)_3{=}0 \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ K & & 0 \end{tikzcd}$$

$$\therefore\ \mathrm{I}(2) \simeq \begin{tikzcd} & 0 & \\ K \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} = \mathrm{S}(2)$$

- Análogamente, $I(3) \simeq \mathrm{S}(3)$.

(2) Sea $Q = 1 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 3$, $I = \langle \beta\alpha, \delta\gamma \rangle$. Entonces, tenemos lo siguiente:

- $I(2)$

$$P^{op}(2):\ P^{op}(2)_1 = 0 \overset{?\cdot\overline{\beta}}{\underset{?\cdot\overline{\delta}}{\rightrightarrows}} P^{op}(2)_2 = Ke_2 \overset{?\cdot\overline{\alpha}}{\underset{?\cdot\overline{\gamma}}{\rightrightarrows}} P^{op}(2)_3 = K\overline{\alpha}\oplus K\overline{\gamma}$$

$$\simeq\ 0 \rightrightarrows K \overset{\binom{1}{0}}{\underset{\binom{0}{1}}{\rightrightarrows}} K^2$$

$$\therefore\quad \mathrm{I}(2) = (P^{op}(2))^* \simeq\ 0 \leftleftarrows K \overset{(1\ 0)}{\underset{(0\ 1)}{\leftleftarrows}} K^2\ ,$$

$$i.e.\quad \mathrm{I}(2) = \begin{tikzcd} 3 \arrow[dr, dash, "\alpha"'] & & 3 \arrow[dl, dash, "\gamma"] \\ & 2 & \end{tikzcd} = \begin{array}{ccc} 3 & & 3 \\ & 2 & \end{array}.$$

$$\mathrm{rad}(\mathrm{I}(2)) \simeq \mathrm{rad}\left(0 \leftleftarrows K \overset{(1\ 0)}{\underset{(0\ 1)}{\leftleftarrows}} K^2\right) =\ 0 \leftleftarrows K \leftleftarrows 0 = \mathrm{S}(2)\ .$$

$$\begin{aligned} \mathrm{top}(\mathrm{I}(2)) &\simeq\ 0 \leftleftarrows 0 \leftleftarrows K^2 \\ &=\ 0 \leftleftarrows 0 \leftleftarrows K \oplus\ 0 \leftleftarrows 0 \leftleftarrows K\ = \mathrm{S}(3)^2. \end{aligned}$$

- I(1)

$P^{op}(1)$:

$$P^{op}(1)_1 = Ke_1 \overset{?\cdot\overline{\beta}}{\underset{?\cdot\overline{\delta}}{\rightrightarrows}} P^{op}(1)_2 = K\overline{\beta}\oplus K\overline{\delta} \overset{?\cdot\overline{\alpha}}{\underset{?\cdot\overline{\gamma}}{\rightrightarrows}} P^{op}(1)_3 = K\overline{\delta}\overline{\alpha}\oplus K\overline{\beta}\overline{\gamma}$$

$$\therefore\quad P^{op}(1) \simeq\ K \overset{\binom{1}{0}}{\underset{\binom{0}{1}}{\rightrightarrows}} K^2 \overset{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} K^2\ ,$$

$$\text{y } \mathrm{I}(1) = (P^{op}(1))^* \simeq\ K \overset{\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2 \overset{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2$$

$$\mathrm{I}(1) = \begin{tikzcd} 3 \arrow[dr, dash] & & & & 3 \arrow[dl, dash] \\ & 2 \arrow[dr, dash] & & 2 \arrow[dl, dash] & \\ & & 1 & & \end{tikzcd} = \begin{array}{ccccc} 3 & & & & 3 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$\mathrm{rad}(\mathrm{I}(1)) \simeq\ K \overset{\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2 \leftleftarrows K^2\ = \begin{tikzcd} 2 \arrow[dr, dash, "\beta"'] & & 2 \arrow[dl, dash, "\delta"] \\ & 1 & \end{tikzcd} = \begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{array}.$$

$$\mathrm{top}(\mathrm{I}(1)) \simeq\ 0 \leftleftarrows 0 \leftleftarrows K^2\ = \mathrm{S}(3)\oplus\mathrm{S}(3).$$

$$\operatorname{rad}^2(\mathrm{I}(1)) \simeq \; K \leftleftarrows 0 \leftleftarrows 0 \;\; = \; \mathrm{S}(1).$$

$$\operatorname{top}(\operatorname{rad}(\mathrm{I}(1))) \simeq \; 0 \leftleftarrows K^2 \leftleftarrows 0 \; = \mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{S}(2).$$

(3) $Q = \; 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \;, \; I = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle, \; A := KQ/I.$

- I(1)

$$P^{op}(1): \qquad P^{op}(1)_1 = Ke_1 \underset{?\cdot\overline{\beta}}{\overset{?\cdot\overline{\alpha}}{\leftrightarrows}} P^{op}(1)_2 = K\overline{\beta} \; \simeq \; K \underset{1}{\overset{0}{\leftrightarrows}} K \;.$$

$$\therefore \; \mathrm{I}(1) = (P^{op}(1))^* \simeq \; K \underset{1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} K \; \simeq \mathrm{P}(2), \; i.e. \; \mathrm{I}(1) = \begin{array}{c} 2 \\ |\beta \\ 1 \end{array} \; = \; \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \;.$$

- I(2)

$$P^{op}(2): \qquad P^{op}(2)_1 = K\overline{\alpha} \underset{?\cdot\overline{\beta}}{\overset{?\cdot\overline{\alpha}}{\leftrightarrows}} P^{op}(2)_2 = Ke_2 \; \simeq \; K \underset{0}{\overset{1}{\leftrightarrows}} K \;.$$

Por lo tanto, $\mathrm{I}(2) = (P^{op}(2))^* \simeq \; K \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} K \; \simeq \mathrm{P}(1), \; i.e. \; \mathrm{I}(1) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \;.$

(4) Consideremos $A = KQ/I$, donde

$$Q = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 \arrow[loop left, "\lambda"] & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

y $I = \langle \beta\alpha - \gamma\delta, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$. Luego tenemos lo siguiente: $\mathrm{I}(1) \simeq \mathrm{S}(4)$,

$$\mathrm{I}(2) \simeq \begin{tikzcd} & K \arrow[dl] & \\ 0 \arrow[loop left] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul] & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 4 \\ |\alpha \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} ,$$

$$\mathrm{I}(3) \simeq \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] & \\ 0 \arrow[loop left] & & K \arrow[ul] \arrow[dl, "1"] \\ & K \arrow[ul] & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 4 \\ |\gamma \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} .$$

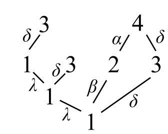
I(1):

$$
\mathrm{P}^{\mathrm{op}}(1):\quad
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P}^{\mathrm{op}}(1)_2 = K\bar\beta \arrow[dr, "?\cdot\bar\alpha"] & \\
\mathrm{P}^{\mathrm{op}}(1)_1 = Ke_1 \oplus K\bar\lambda \oplus K\bar\lambda^2 \arrow[loop left, "?\cdot\bar\lambda"] \arrow[ur, "?\cdot\bar\beta"] \arrow[dr, "?\cdot\bar\delta"'] & & \mathrm{P}^{\mathrm{op}}(1)_4 = K\bar\beta\bar\alpha = K\bar\delta\bar\gamma \\
 & \mathrm{P}^{\mathrm{op}}(1)_3 = K\bar\delta \oplus K\bar\lambda\bar\delta \oplus K\bar\lambda^2\bar\delta \arrow[ur, "?\cdot\bar\gamma"'] &
\end{tikzcd},
$$

$$
\simeq\quad
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dr, "1"] & \\
K^3 \arrow[loop left, "\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[ur, "(1\,0\,0)"] \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)"'] & & K \\
 & K^3 \arrow[ur, "(1\,0\,0)"'] &
\end{tikzcd}.
$$

Por lo tanto, tenemos

$$
\mathrm{I}(1) = (\mathrm{P}^{op}(1))^* \simeq
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)"'] & \\
K^3 \arrow[loop left, "\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)"] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)"] \\
 & K^3 \arrow[ul, "\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)"] &
\end{tikzcd},
\qquad \mathrm{I}(1) =
$$



.

$$
\mathrm{rad}(\mathrm{I}(1)) \simeq
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)"'] & \\
K^3 \arrow[loop left, "\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & K\times 0\times 0 \arrow[ul, "\left.\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\right|"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)"'] & \\
K^3 \arrow[loop left, "\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & K \arrow[ul, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)"] &
\end{tikzcd}.
$$

$$
\mathrm{rad}^2(\mathrm{I}(1)) \simeq
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K\times K\times 0 \arrow[loop left, "\left.\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\right|"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K^2 \arrow[loop left, "\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}.
$$

$$
\mathrm{rad}^3(\mathrm{I}(1)) \simeq
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K\times 0 \arrow[loop left, "\left.\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right|"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] & \\
K \arrow[loop left, "0"] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
= \mathrm{S}(1).
$$

De donde $\mathrm{top}(I(1)) = \mathrm{S}(4) \oplus \mathrm{S}(3)^2$, $\mathrm{top}(\mathrm{rad}(\mathrm{I}(1))) = \mathrm{S}(1) \oplus \mathrm{S}(2) \oplus \mathrm{S}(3)$, $\mathrm{top}(\mathrm{rad}^2(\mathrm{I}(1))) = \mathrm{S}(1)$ y $\mathrm{rad}^3(\mathrm{I}(1)) = \mathrm{S}(1)$.

Proposición 5.3.21. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Consideremos una familia completa $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de idempotentes ortogonales primitivos* *de A, $P_i := Ae_i$, $S_i := \mathrm{top}(P_i)$, $I_i := I_0(S_i)$ y $D_A : \mathrm{mod}(A) \longrightarrow \mathrm{mod}(A^{op})$ la dualidad usual (cf. 3.5.3). Entonces*

(*a*) $\forall\ i \quad \mathrm{Hom}_A({}_AD(A)_A, {}_AI_i) \simeq {}_AP_i$.

(*b*) *Para cada i, se tienen los siguientes isomorfismos de K-módulos*

$$\mathrm{Hom}_A(P_i, M) \simeq e_iM \simeq \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_A(M, I_i).$$

Demostración. (a) En virtud de 5.3.12 (a), se tiene que $\mathrm{Hom}_A(D(A), I_i) \simeq \mathrm{Hom}_A(D(A), D_{A^{op}}(e_iA)) \simeq \mathrm{Hom}_{A^{op}}(e_iA, A) \simeq Ae_i = {}_AP_i$.

(b) Tenemos que $\mathrm{Hom}_A(P_i, M) = \mathrm{Hom}_A(Ae_i, M) \simeq e_iM$. También de 5.3.12 (a), concluimos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_A(M, I_i), K) &\simeq \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_A(M, D_{A^{op}}(e_iA)), K) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(e_iA, D_A(M)), K) \simeq \mathrm{Hom}_K(D_A(M)e_i, K).\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta probar lo siguiente: $\forall\ N \in \mathrm{mod}(A^{op})$ $\mathrm{Hom}_K(Ne_i, K) \simeq e_iD_{A^{op}}$ como K-módulos.

En efecto, sea $N \in \mathrm{mod}(A^{op})$. Luego, por 3.6.5 y Ejercicio 1.9.12, se tiene

$$e_iD_{A^{op}}(N) \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_i, D_{A^{op}}(N)) \simeq (Ae_i)^* \otimes_A D_{A^{op}}(N) \simeq e_iA \otimes_A D_{A^{op}}(N).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K(e_iD_{A^{op}}(N), K) &\simeq \mathrm{Hom}_K(e_iA \otimes_A D_{A^{op}}(N), K) \\ \simeq \mathrm{Hom}_{A^{op}}(e_iA, \mathrm{Hom}_K(D_{A^{op}}(N), K)) &= \mathrm{Hom}_{A^{op}}(e_iA, D_AD_{A^{op}}(N)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{A^{op}}(e_iA, N) \simeq Ne_i.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{Hom}_K(Ne_i, K) \simeq \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(e_iD_{A^{op}}(N), K), K) \simeq e_iD_{A^{op}}(N). \qquad \square$$

Ejercicio 5.3.22. Sea Λ una K-álgebra. Pruebe que $\forall\ M \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, $\forall\ {}_\Lambda S$ simple, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, S) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{top}(M), S)$ como K-módulos.

Teorema 5.3.23. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita, $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A, $P_i := Ae_i$ y $S_i := \mathrm{top}(P_i)$ $\forall\ i$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ j$, $\forall\ M \in \mathrm{mod}(A) \quad \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P_j, M)) = \dim_K(\mathrm{End}_A(S_j))\mathfrak{m}_{s_j}(M)$ *y* $\dim_{\mathrm{End}_A(S_j)}(S_j) = \mathfrak{m}_{s_j}(\mathrm{top}({}_AA))$.

(*b*) *Si A es básica, entonces $\forall\ i, j$ se tienen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}\dim_K(\mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j)) &= \dim_K\left(e_j\frac{J(A)}{J(A)^2}e_i\right) \\ &= \dim_K(\mathrm{End}_A(S_j))\mathfrak{m}_{s_j}\left(\frac{\mathrm{rad}(P_i)}{\mathrm{rad}^2(P_i)}\right).\end{aligned}$$

Demostración. (a) Sea $M \in \mathrm{mod}(A)$. La primera igualdad se deriva de 3.1.7 (c). Por otro lado, por 2.5.2, definiendo $B := A/J(A)$ se tiene que ${}_B B = \bigoplus_{j=1}^{n} {}_B S_j^{m_j}$, $\mathrm{End}_A(S_i) \simeq \mathrm{End}_B(S_i) =: D_i$, que es una K-álgebra de división con dimensión finita. Luego, $\dim_{\mathrm{End}_A(S_j)}(S_j) = \dim_{D_j}({}_{D_j}S_j) = m_j = \mathfrak{m}_{S_j}(\mathrm{top}(A))$.

(b) Sea $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Veamos primero que vale

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad}(P_i), S_j) \simeq \mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j) \text{ como } K\text{-módulos.} \tag{5.2}$$

En efecto, aplicando a la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathrm{rad}(P_i) \longrightarrow P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$, el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, S_j)$, se tiene la sucesión exacta de K-módulos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(S_i, S_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_i, S_j) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad}(P_i), S_j) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $h(f) = f|_{\mathrm{rad}(P_i)}$. Es suficiente ver que $h = 0$. Sea $f : P_i \longrightarrow S_j$ no nulo, entonces f es un epimorfismo, por lo que $P_i/\mathrm{Ker}(f) \simeq S_j$, lo cual implica que $\mathrm{Ker}(f)$ es maximal; y por 2.8.20, se tiene que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{rad}(P_i)$, y $h(f) = f|_{\mathrm{rad}(P_i)} = 0$. Por lo tanto $h = 0$, probándose 5.2.

Ahora bien, tenemos los siguientes isomorfismos de K-módulos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j) &\simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad}(P_i), S_j) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{top}(\mathrm{rad}(P_i), S_j) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_A(S_j, \mathrm{top}(\mathrm{rad}(P_i))) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_j, \mathrm{top}(\mathrm{rad}(P_i))), \end{aligned}$$

dichos isomorfismo se obtienen en virtud de (5.2), el Ejercicio 5.3.22 y de que $\mathrm{Hom}_A(S_p, S_q) = 0$ $p \neq q$ (por ser A básica). Por lo tanto, se tiene que

$$\mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j) \simeq \mathrm{Hom}_A\left(P_j, \frac{\mathrm{rad}(P_i)}{\mathrm{rad}^2(P_i)}\right) \text{ como } K\text{-módulos.} \tag{5.3}$$

Aplicando (a) al isomorfismo (5.3), obtenemos que

$$\dim_K(\mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j)) = \dim_K\left(\mathrm{Hom}_A\left(P_j, \frac{\mathrm{rad}(P_i)}{\mathrm{rad}^2(P_i)}\right)\right)$$

ˆ

$$= \dim_K(\mathrm{End}_A(S_j))\mathfrak{m}_{S_j}\left(\frac{\mathrm{rad}(P_i)}{\mathrm{rad}^2(P_i)}\right).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A\left(P_j, \frac{\mathrm{rad}(P_i)}{\mathrm{rad}^2(P_i)}\right) &= \mathrm{Hom}_A\left(Ae_j, \frac{J(A)e_i}{J(A)^2e_i}\right) \\ &\simeq e_j\left(\frac{J(A)e_i}{J(A)^2e_i}\right) \simeq e_j\frac{J(A)}{J(A)^2}e_i. \end{aligned}$$

Finalmente, por (5.3) concluimos que $\dim_K(\mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j)) = \dim_K(e_j\frac{J(A)}{J(A)^2}e_i)$. □

Corolario 5.3.24. *Sea (Q, I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$, $\{e_a = \varepsilon_a + I\}_{a \in Q_0}$, $P_a := Ae_a$, $S_a := \mathrm{top}(P_a)$ y $I_a := I_0(S_a)$ $\forall\ a \in Q_0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(*a*) $\forall\ a \in Q_0$, $\forall\ M \in \mathrm{mod}(A)$ *se tiene* $\mathfrak{m}_{S_a}(M) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P_a, M)) = \dim_K(e_a M) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, I_a))$.

(*b*) $\forall\ a, b \in Q_0 \quad \dim_K(\mathrm{Ext}^1_A(S_a, S_b)) = \mathrm{Card}(\varepsilon_b(Q_1)\varepsilon_a) = \mathfrak{m}_{S_b}\left(\frac{\mathrm{rad}(P_a)}{\mathrm{rad}^2(P_a)}\right)$.

(*c*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(A) \quad \ell(M) = \sum_{a \in Q_0} \dim_K(e_a M) = \dim_K(M)$.

Demostración. Por 5.3.2, tenemos que $\forall\ a \in Q_0$ $\mathrm{End}_A(S_a) \simeq K$. Por otro lado, A es básica (cf. 4.2.3), luego (a) es consecuencia de 5.3.21 (b) y 5.3.23 (a). Así mismo, (b) sale de 5.3.23 (b). Finalmente, como $\ell(M) = \sum_{a \in Q_0} \mathfrak{m}_{S_a}(M)$, se tiene que (c) es consecuencia de (a). $\square$

Ejercicio 5.3.25. Los siguientes ejercicios fueron tomados de [4].

(*a*) En cada uno de los siguientes ejemplos, describa los módulos simples, los proyectivos inescindibles y sus radicales; y los inyectivos inescindibles y sus cocientes por su soclo.

(*i*)

$$Q = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad I = 0.$$

(*ii*)

$$Q = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[r, "\alpha"] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha = 0.$$

(*iii*) $$Q = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad I = \mathrm{rad}^2(KQ).$$

(*iv*)

$$Q = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[d, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, "\delta"] \\ \bullet \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & \bullet \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd} \qquad \varepsilon\gamma = 0 = \varepsilon\delta.$$

(*v*)

$$Q = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "\beta"'] & & \bullet \arrow[dl, "\lambda"'] \\ \bullet & & \bullet \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\ & \bullet \arrow[ul, "\delta"] & & \bullet \arrow[ul, "\mu"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \alpha\mu = 0, \quad \gamma\mu = 0, \\ \alpha\lambda = 0, \quad \beta\alpha = \delta\gamma. \end{array}$$

(*b*) Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 3 \\ 1 \arrow[ur] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

y M la representación

$$\begin{tikzcd} & K \\ K \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"'] & K^2 \arrow[u, "(0\ \ 1)"'] \end{tikzcd}$$

de Q. Calcule $\operatorname{top}(M)$, $\operatorname{soc}(M)$ y $\operatorname{rad}(M)$. Muestre que el álgebra $\operatorname{End}(M)$ no es un campo, pero M es inescindible.

(*c*) Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, "\delta"'] \\ \bullet \arrow[u, "\beta"] & \bullet \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

donde $\beta\alpha = 0$. Muestre que la siguiente representación es inescindible:

$$\begin{tikzcd} K & K \arrow[l, "1"'] \\ K^2 \arrow[u, "(1\ \ 0)"] & K. \arrow[l, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[u, "1"'] \end{tikzcd}$$

(*d*) Sea $a \in Q_0$ donde $Q = (Q_0, Q_1)$ es un carcaj finito. Demuestre lo siguiente.

(*i*) El proyectivo $P(a)$ es un KQ-módulo simple si y sólo si a es un pozo.

(*ii*) El inyectivo $I(a)$ es un KQ-módulo simple si y sólo si a es una fuente.

(*iii*) Caracterice a los vértices $a \in Q_0$ tales que $\operatorname{rad}(P(a))$ es simple.

(*iv*) Caracterice a los vértices $a \in Q_0$ tales que $I(A)/S(a)$ es simple.

5.4. La característica de Euler

Sea A es una K-álgebra de dimensión finita. En esta última sección le asociamos a cada A-módulo finitamente generado un vector con entradas en los enteros. Esto con el fin de utilizar métodos del álgebra lineal en el estudio de A-módulos.

Definición 5.4.1. Sea A una K-álgebra de dimensión finita y $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ una familia completa de representantes de iso-clases de A-módulos simples. La *función vector dimensión* $\underline{\dim} : \mathrm{Obj}(\mathrm{mod}(A)) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$, se define como:

$$\underline{\dim}(M) := \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^t,$$

donde $m_i := \mathfrak{m}_{S_i}(M) \in \mathbb{Z}$.

Observación 5.4.2. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Consideremos $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A, $P_i := Ae_i,\ S_i := \mathrm{top}(P_i)$ y $I_i := I_0(S_i)$.

(a) Por 5.3.21 y 5.3.23 (a), tenemos las siguientes igualdades $\forall\ M \in \mathrm{mod}(A)$:

- $\dim_K(\mathrm{End}_A(S_j))\mathfrak{m}_{S_j}(M) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P_j, M)) = \dim_K(e_j M) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, I_j))$.
- $\dim_K(M) = \sum_{j=1}^n \dim_K(\mathrm{End}_A(S_j))\mathfrak{m}_{S_j}(M)$.

(b) En la prueba de 2.2.2, se obtuvo el siguiente diagrama conmutativo de grupos abelianos:

$$\begin{tikzcd} F(\mathrm{mod}(A)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\cdot[S_i] \\ K_0(A) \arrow[ur, "\sim", "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\pi(x) = x + R(\mathrm{mod}(A))$ y $\varphi([M]) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}_{S_i}(M)[S_i]\ \forall\ M \in \mathrm{mod}(A)$.

Por otro lado, usando el $\mathbb{Z}$-isomorfismo $\nu : \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\cdot[S_i] \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ dado por $[S_i] \mapsto (0, \dots, \underset{lugar\ i}{1}, \dots 0)^t$, tenemos el $\mathbb{Z}$-isomorfismo $\nu \circ \overline{\varphi} : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$. Dado que $\forall\ M \in \mathrm{mod}(A)$

$$(\nu \circ \overline{\varphi})(\pi([M])) = \nu(\varphi[M]) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{m}_{S_i}(M)\nu([S_i]) = \underline{\dim}(M),$$

denotaremos frecuentemente a $\nu \circ \overline{\varphi}$ por $\underline{\dim} : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$.

Definición 5.4.3. Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita, $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A, $P_i := Ae_i$ y $S_i := \mathrm{top}(P_i)\ \forall\ i$. La *matriz de Cartan* $C_A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ asociada al álgebra A, tiene como entradas i, j a $[C_A]_{i\,j} := \mathfrak{m}_{S_i}(P_j)$. Denotaremos por $[C_A]^j$ a la columna "j" de C_A, y por $[C_A]_i$ a la fila "i" de C_A. Observe que $[C_A]^j = \underline{\dim}(P_j)$.

Observación 5.4.4. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones, $A = KQ/I$ y $\{e_a := \overline{\varepsilon}_a\}_{a\in Q_0}$.

(*a*) $\forall\ M \in \mathrm{mod}(A)\quad \underline{\dim}(M) = (\dim_K(e_aM))^t_{a\in Q_0}$. En efecto, por 5.3.24, sabemos que $\mathfrak{m}_{S_a}(M) = \dim_K(e_aM)$.

(*b*) Dado que $F : \mathrm{mod}(A) \longrightarrow \mathrm{rep}_K(Q, I)$ es una K-equivalencia con “inversa” $G : \mathrm{rep}_K(Q, I) \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ (véase 5.2.2), y que $\forall\ D \in \mathrm{rep}_K(Q, I)$ y $\forall\ a \in Q_0\ e_aG(D) \simeq D_a$ como K-módulos (cf. 5.2.2 (k)), concluimos que $\forall\ D \in \mathrm{rep}_K(Q, I)\quad \underline{\dim}(D) = (\dim_K(D_a))^t_{a\in Q_0}$.

Ejemplos

(1) Consideremos $Q = \ 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3\ $, $A = KQ$. Entonces, $\mathrm{P}(1) = \mathrm{S}(1)$, por lo tanto $\underline{\dim}(\mathrm{P}(1)) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\mathrm{P}(2) = \ K \xrightarrow{1} K \longleftarrow 0\ $, por lo que $\underline{\dim}(\mathrm{P}(2)) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. $\mathrm{P}(3) = \ 0 \longrightarrow K \xleftarrow{1} K\ $, por lo que $\underline{\dim}(\mathrm{P}(3)) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la matriz de Cartan asociada a A es $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) Sea $Q = \ 1 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 3\ $, consideremos $I = \langle \beta\gamma, \delta\gamma\rangle$, y $A = KQ/I$, $\mathrm{P}(1) = \mathrm{S}(1)$, $\mathrm{P}(2) = \ K^2 \underset{\binom{0}{1}}{\overset{\binom{1}{0}}{\leftleftarrows}} K \leftleftarrows 0\ $ y $\mathrm{P}(3) = \ 0 \leftleftarrows K^2 \underset{\binom{0}{1}}{\overset{\binom{1}{0}}{\leftleftarrows}} K\ $. Por lo tanto, $C_A = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Teorema 5.4.5. *Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita. Consideremos una familia completa $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de idempotentes ortogonales primitivos de A, $P_i := Ae_i$, $S_i := \mathrm{top}(Ae_i)$ y $I_i := I_0(S_i)\ \forall\ i$. Entonces, para la matriz diagonal $D := \begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}$ con $d_i := \dim_K(\mathrm{End}_A(S_i))$, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(*a*) $[C_A]^j = D\cdot\underline{\dim}(P_j)$ *y* $[C_A]_i = (D\cdot\underline{\dim}(I_i))^t$.

(*b*) $D^{-1}C_A\,\underline{\dim}(S_i) = \underline{\dim}(P_i)$, $D^{-1}C_A^t\,\underline{\dim}(S_i) = \underline{\dim}(I_i)$. *En particular,* $D^{-1}C_A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$.

(*c*) *Si* $\mathrm{gldim}(A) < \infty$, *entonces* $\{\pi[P_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *es una* $\mathbb{Z}$*-base de* $K_0(A)$ *y* $\det(D^{-1}C_A) = \pm 1$.

Demostración. (a) Por 5.4.2 (a), tenemos las siguientes igualdades: $d_i\mathfrak{m}_{S_i}(P_j) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P_i, P_j)) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P_j, I_i)) = d_j\mathfrak{m}_{S_j}(I_i)$. Por lo tanto, $\forall\ i, j$ se tiene $d_i\mathfrak{m}_{S_i}(P_j) = d_j\mathfrak{m}_{S_j}(I_i)$, de donde se obtiene (a).

(b) Es consecuencia de (a), ya que $[C_A]^j = C_A\,\underline{\dim}(S_j)$ y $(\underline{S_i})^t C_A = [C_A]_i$.

(c) Supongamos que $\mathrm{gldim}(A) < \infty$. Luego $\mathrm{pd}(S_i) < \infty\ \forall\ i$; y en particular, cada S_i, admite una resolución proyectiva finita

$$0 \longrightarrow P_{m_i,i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{1,i} \longrightarrow P_{0,i} \longrightarrow S_i \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto $\underline{\dim}(S_i) = \sum_{j=0}^{m_i}(-1)^j\underline{\dim}(P_{m_j,i})$. Por lo que $\langle\pi([P_i])_{i=1}^n\rangle_{\mathbb{Z}} = K_0(A)$; y como $\mathrm{rk}(K_0(A)) = n$, concluimos que $\pi([P_i])_{i=1}^n$ es una $\mathbb{Z}$-base de $K_0(A)$.

Por otro lado, dado que $D^{-1}C_A\,\underline{\dim}(S_i) = \underline{P_i}$ (*i.e.* manda base en base), se tiene que $D^{-1}C_A$ es invertible en $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$. Sea $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ tal que $(D^{-1}C_A)B = 1_{n\times n}$. Luego $\det(D^{-1}C_A)\det(B) = 1$, obteniendo que $\det(D^{-1}C_A) = \pm 1$. $\square$

Corolario 5.4.6. *Sea* (Q, I) *un carcaj con relaciones,* $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\{e_i = \overline{\varepsilon}_i\}_{i=1}^n$, $A = KQ/I$, $P_i := Ae_i$, $S_i := \mathrm{top}(P_i)$ *y* $I_i := I_0(S_i)\ \forall\ i \in Q_0$. *Entonces*

(*a*) $\forall\ i, j \quad [C_A]^j = \underline{\dim}(P_j)$ *y* $[C_A]_i = (\underline{\dim}(I_i))^t$.

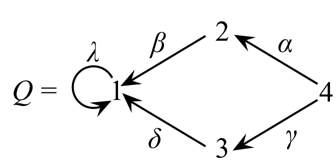
(*b*) $C_A\,\underline{\dim}(S_i) = \underline{\dim}(P_i)$ *y* $C_A^t\,\underline{\dim}(S_i) = \underline{\dim}(I_i)\ \forall\ i \in Q_0$.

(*c*) *Si* $\mathrm{gldim}(A) < \infty$ *entonces* $\det(C_A) = \pm 1$.

Demostración. Sabemos que A es una K-álgebra básica de dimensión finita y además $\mathrm{End}_A(S_i) \simeq K$ (cf. 5.3.2). Luego $d_i := \dim_K(\mathrm{End}(C_AS_i)) = 1$, lo cual implica que $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = 1_{n\times n}$. Por lo tanto, el corolario sale de 5.4.5. $\square$

Ejemplo

Sea $A = KQ/I$ donde



y $I = \langle\beta\alpha - \gamma\delta, \lambda\beta, \lambda^3\rangle$. Entonces $C_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det(C_A) = 3$; por lo tanto $\mathrm{gldim}(A) = \infty$.

Definición 5.4.7. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones tal que $A = KQ/I$ es de dimensión global finita (*i.e.* $\mathrm{gldim}(A) < \infty$). Sea $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) La *característica de Euler* de A es la forma $\mathbb{Z}$-bilineal $\langle -, - \rangle_A : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por $\langle x, y \rangle_A := x^t (C_A^{-1})^t y$.

(b) La *forma cuadrática de Euler* de A, es la forma cuadrática $q_A : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$ donde $q_A(x) := \langle x, x \rangle_A$.

(c) La *transformación de Coxeter* $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ está definida por $\Phi_A(x) := -C_A^t C_A^{-1} \cdot x$.

Ejemplo

(1) Sea $Q = \ 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$, $A = KQ$. Es claro que $\mathrm{gldim}(A) = 1$ (cf. 4.1.17).

Luego $C_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(C_A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que $\Phi_A = -C_A^t C_A^{-1}$ $= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\langle x, y \rangle_A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_1$ y $q_A(x) = \langle x, x \rangle_A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - x_1 x_2 - x_1 x_3$.

(2) Sea $Q = \ 1 \leftleftarrows 2$, $A = KQ$. Entonces $\mathrm{gldim}(A) = 1$ y se tiene que $\mathrm{P}(1) = \mathrm{S}(1)$, $\mathrm{P}(2) = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$. Por lo tanto, $C_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(C_A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_A \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Luego $\langle x, y \rangle_A = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 - 2 x_1 y_2$ y $q_A(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2$

Ejercicio 5.4.8. Sea $0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow 0$ una sucesión exacta larga en $\mathrm{mod}(K)$. Pruebe que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K(X_i) = 0$.

Teorema 5.4.9. *Sea (Q, I) un carcaj con relaciones y $A = KQ/I$, con* $\mathrm{gldim}(A) < \infty$. *Entonces, $\forall\ M, N \in \mathrm{mod}(A)$ se tiene que*

$$\langle \underline{\dim}(M), \underline{\dim}(N) \rangle_A = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_K(\mathrm{Ext}_A^j(M, N)).$$

Demostración. Sea $N \in \mathrm{mod}(A)$ fijo. Usaremos inducción sobre $d := \mathrm{pd}(M)$ para $M \in \mathrm{mod}(A)$.

Sea $d = 0$. Podemos asumir que $M = P_i := Ae_i$. Entonces, por 5.3.6 (b), tenemos lo siguiente

$$\langle \underline{\dim}(P_i), \underline{\dim}(N) \rangle_A = (\underline{\dim}(P_i))^t (C_A^{-1})^t \, \underline{\dim}(N)$$

$$= (\underline{(S_i)})^t\, \underline{\dim}(N) = \mathfrak{m}_{S_i}(N) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P_i, N)),$$

donde la última igualdad se debe a 5.3.24 (a). Como $\mathrm{Ext}^j_A(P_i, N) = 0\ \forall\ j \geqslant 1$, se obtiene la igualdad en este caso.

Sea $d \geqslant 1$. Supongamos que el teorema es válido $\forall\ M' \in \mathrm{mod}(A)$ con $\mathrm{pd}(M') < d$. Como $d \geqslant 1$, tenemos por 2.9.3 (e) una sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(A)$, con P_0 proyectivo y $\mathrm{pd}(M') \leqslant d-1$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ a la sucesión anterior, se obtiene la sucesión exacta larga en $\mathrm{mod}(K)$, donde ${}^j(X,Y) := \mathrm{Ext}^j_A(X,Y)\ \forall\ j \geqslant 0$, con $\mathrm{Ext}^0_A = \mathrm{Hom}_A(X,Y)$

$$0 \longrightarrow (M,N) \longrightarrow (P_0,N) \longrightarrow (M',N) \longrightarrow {}^1(M,N) \longrightarrow {}^1(P_0,N) \longrightarrow {}^1(M',N)$$
$$\longrightarrow {}^2(M,N) \longrightarrow {}^2(P_0,N) \longrightarrow {}^2(M',N) \longrightarrow \cdots .$$

Aplicando el Ejercicio 5.4.8 a la sucesión exacta larga anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \dim_K(\mathrm{Ext}^j_A(M,N)) \\
= &\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \dim_K(\mathrm{Ext}^j_A(P_0,N)) - \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \dim_K(\mathrm{Ext}^j_A(M',N)) \\
= &\langle \underline{\dim}(P_0), \underline{\dim}(N)\rangle_A - \langle \underline{\dim}(M'), \underline{\dim}(N)\rangle_A \\
= &\langle \underline{\dim}(P_0) - \underline{\dim}(M'), \underline{\dim}(N)\rangle_A = \langle \underline{\dim}(M), \underline{\dim}(N)\rangle_A,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de la igualdad $\underline{\dim}(P_0) - \underline{\dim}(M') = \underline{\dim}(M)$, la cual a su vez se obtiene de la sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. $\square$

Proposición 5.4.10. *Sea* (Q, I) *un carcaj con relaciones,* $A = KQ/I$ *con* $\mathrm{gldim}(A) < \infty$, $Q_0 = \{1, 2, \ldots n\}$, $\{e_i = \varepsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$, $P_i := Ae_i$ *y* $I_i := I_0(\mathrm{top}(P_i))\ \forall\ i \in Q_0$. *Entonces*

(*a*) $\forall\ i \in Q_0 \quad \Phi_A\, \underline{\dim}(P_i) = -\underline{\dim}(I_i)$.

(*b*) $\forall\ x, y \in \mathbb{Z}^n \quad \langle x, y\rangle_A = -\langle y, \Phi_A x\rangle = \langle \Phi_A x, \Phi_A y\rangle_A$.

Demostración.
(a) $\Phi_A\, \underline{\dim}(P_i) = -C_A^t C_A^{-1}\, \underline{\dim}(P_i) = -C_A^t\, \dim(S_i) = -\underline{\dim}(I_i)$, donde las últimas igualdades se dan por 5.4.6 (b).

(b) $\langle x, y\rangle_A = x^t (C_A^{-1})^t y = y^t C_A^{-1} x = y^t (C_A^{-1})^t C_A^t C_A^{-1} x = -\langle y, \Phi_A x\rangle$. Esto es, $\langle x, y\rangle_A = -\langle y, \Phi_A x\rangle$, lo cual implica que $-\langle y, \Phi_A x\rangle = -(-\langle \Phi_A x, \Phi_A y\rangle) = \langle \Phi_A x, \Phi_A y\rangle$. $\square$

Ejercicio 5.4.11. Sea K un campo.

(*a*) Sea $Q = 1 \leftleftarrows 2$ el carcaj de Kronecker. Definimos la representación H_λ de Q como $H_\lambda = K \underset{\lambda}{\overset{1}{\leftleftarrows}} K$, para cada $\lambda \in K$. Muestre que $\forall\ \lambda \in K$ se tiene que H_λ es inescindible; y que $H_\lambda \simeq H_\mu$ si y sólo si $\lambda = \mu$.

(*b*) Calcule la dimensión global y la matriz de Cartan de cada álgebra del Ejercicio 5.3.25 (a).

(*c*) Sea $A = KQ$ donde $Q = \ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2$. Demuestre las siguientes afirmaciones.

(*i*) Los A-módulos $S(1) = \ S \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0$, $S(2) = \ 0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} K$ y $S(1,2)_\lambda =$ $K \underset{\lambda}{\overset{1}{\rightleftarrows}} K$, con $\lambda \in K$, son simples; y $S(1,2)_\lambda \not\simeq S(1,2)_\mu$ si $\lambda \neq \mu$.

(*ii*) Si M es un A-m ódulo simple de dimesi ón finita, entonces M es isomorfo a $S(1), S(2)$ ó bien a $S(1,2)_\lambda$, donde $\lambda \in K$.

(*d*) Determine la matriz de Coxeter de las siguientes K- álgebras:

$$\begin{pmatrix} K & K^2 \\ 0 & K \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & K & 0 \\ K & K & K & K & K \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K & K \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K & K \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, K.R. Fuller. *Ring and Categories of Modules*. Springer-Verlag, 1974.

[2] M. Auslander, E. Lluis. *Representations of Algebras. Proceedings (Workshop), Puebla, Mexico 1980*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[3] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalo. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995.

[4] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras I*. London Mathematical Society, Student Text 65, 2006.

[5] D. J. Benson. *Representations and Cohomology I* . Cambridge studies in advanced mathematics 30, 1995.

[6] I. N. Berstein, I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev.*Coxeter Functors and Gabriel's Theorem*. Uspiehi Math. Nauk 28, 1973, 19-33 (In rusian), English translation in Russian Math. Surveys 28, 1973, 17-32.

[7] C. Cibils, F. Larrion, L. Salmeron. *Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones*. Monografía 11 del Instituto de Matemáticas, UNAM, 1982.

[8] P. Gabriel, A. V. Roiter. *Representation of Finite-Dimensional Algebras*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[9] F. Larrion, G. Raggi, L. Salmerón. *Rudimentos de Mansedumbre y Salvajismo en Teoría de Representaciones*. Sociedad Matemática Mexicana, 5, 1995.

[10] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, 1979.

[11] R. R. Stoll *Set Theory and Logic*. Dover Publications, Inc., 1979

[12] V. Santiago. *Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos.* Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2007.

Índice alfabético