



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Inestabilidades del Vacío por
Campos Electromagnéticos en
Bajas Dimensiones

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)

PRESENTA:

EDWARD DANIEL REYES RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alfredo Raya Montaña

COMITÉ TUTORAL:

Dr. José Alejandro Ayala Mercado

Dr. Manuel Torres Labansat



posgrado en ciencias físicas
unam

México D.F.

Abril

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Al Dr. Alfredo Raya por compartir conmigo sus enseñanzas y brindarme su amistad; por guiarme y motivarme con su apasionada visión de la física, que ha influido de manera decisiva en mi formación académica y también por la paciencia, la dedicación y el entusiasmo a lo largo de estos años que hoy culminan con este trabajo.

A los Drs. Alejandro Ayala, Adnan Bashir, Gabriela Murguía y Ángel Sánchez por su amistad. Por sus comentarios, sugerencias y el todo el apoyo otorgado para la realización de esta tesis.

A los Drs. Matías Moreno y Sarira Sahu, por su disposición de revisar esta tesis en un período corto de tiempo, haciendo observaciones y correcciones de manera oportuna.

Al Dr. Manuel Torres, a Yanalte Herrero y a todos los miembros del Posgrado en Ciencias Físicas que me han atendido y ayudado en todo momento.

A la Facultad de Ciencias, al Instituto de Ciencias Nucleares y al Instituto de Física de la UNAM y al Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH por haber contribuido a mi formación y por las facilidades y atenciones prestadas para la elaboración de este trabajo.

A Estefania por el cariño, la comprensión y el apoyo que me has dado durante todo este tiempo.

A Citlalli, Zeus, Andrés, Guillermo y Carlitos por continuar con la amistad después de tantos años.

A Adrián, Nicolás, Alí, Erick P. y Erick A. por ser mis compañeros de

batalla durante la maestría.

A Fabiola, Ileana e Idrish por todo lo que pasamos juntos.

A la memoria de Juan, Erick y Edgard, que aunque ya no están aquí son parte de mí.

Y finalmente agradezco a todos aquellos que me han brindado su amistad y a quienes han ayudado directa o indirectamente a que esta tesis pudiera realizarse, a quienes no menciono no por falta de memoria, sino por falta de espacio

Prefacio

Es bien sabido que agentes externos como campos electromagnéticos modifican las propiedades del vacío de una teoría; lo desestabilizan. Para fermiones de Dirac, esto se refleja en fenómenos como la creación de pares partícula-antipartícula en el vacío por efectos de un campo eléctrico intenso, el llamado mecanismo de Schwinger; o el apareamiento de pares virtuales por efecto de un campo magnético. Este efecto se describe usualmente mediante el así llamado condensado fermiónico, que es el valor de expectación en el vacío del campo escalar compuesto $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle$ y que hace las veces de parámetro de orden cuando en su formación está involucrada la ruptura de la simetría quiral. Los ejemplos antes descritos se enlistan entre los nuevos fenómenos que son importantes en el contexto de la física de partículas en condiciones extremas.

Por otro lado, el estudio de los sistemas en bajas dimensiones es interesante porque los sistemas en una y dos dimensiones espaciales exhiben un comportamiento diferente al de los descritos por las teorías en tres dimensiones. Un campo magnético externo modifica el movimiento de partículas cargadas en el plano perpendicular al campo. Además, el movimiento puede ser restringido a este plano, es decir, podemos inducir reducción dimensional en la dinámica, dando lugar a nueva física. Por ejemplo, para la electrodinámica cuántica en el plano, QED₃, además de los términos usuales, en el Lagrangiano correspondiente se pueden agregar un término de Chern-Simons, que induce una masa topológica al fotón y un término de masa nuevo para los fermiones, llamado usualmente masa de Haldane, que no es invariante bajo inversión temporal y paridad, pero que respeta la simetría quiral. Adicionalmente, el Lagrangiano de Dirac en una dimensión espacial aparece naturalmente como la teoría efectiva a bajas energías de los electrones de conducción en metales. Estos electrones de conducción producen el dramático efecto de apantallar un campo electromagnético externo, lo que

se manifiesta como una ruptura de la simetría de norma, pues el campo electromagnético induce una masa. Desde un punto de vista práctico, las teorías en bajas dimensiones sirven para estudiar sistemas que son importantes, tecnológicamente hablando, como los semiconductores y recientemente en el estudio de nuevas estructuras como el grafeno, material que exhibe Efecto Hall Cuántico no convencional en presencia de campos magnéticos, entre otros fenómenos destacados. Bajo este panorama, resulta interesante investigar las propiedades de ciertas cantidades físicas asociadas con las inestabilidades del vacío de Dirac inducidas por campos electromagnéticos externos, como la densidad de corriente y el condensado fermiónico, al trabajar en $(n + 1)$ dimensiones espacio-temporales, n espaciales y una temporal. Dichas cantidades pueden estudiarse a partir de la estructura analítica del propagador fermiónico.

En la literatura, encontramos trabajos que incorporan los efectos de campos electromagnéticos externos en diferentes cantidades como acciones efectivas, funciones de onda y propagadores, aunque muchos de ellos se especializan al caso de campos constantes o con variaciones temporales suaves. En esta tesis, buscamos estudiar la estructura del propagador fermiónico en presencia de campos externos de perfil espacial no uniforme en bajas dimensiones, con la idea de que sirva de base para estudiar fenómenos no perturbativos en QCD y teorías afines mediante las ecuaciones de Schwinger-Dyson, que son las ecuaciones de campo formuladas en términos de las funciones de Green de una teoría dada. Esta es una técnica de gran alcance, pues la evolución de las funciones de onda está codificada en los propagadores o funciones de Green, que en palabras simples son los inversos de los operadores diferenciales de onda. Para las partículas libres, descritas por ondas planas, estos propagadores son diagonales en el espacio de momento, debido a la isotropía del espacio. Para fermiones, en la notación estándar de la física de partículas, el propagador es de la forma

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma \cdot p - m}.$$

Sin embargo, cuando se pierde la isotropía, las partículas no pueden ser descritas por ondas planas y sus propagadores correspondientes tienen una forma más complicado en la base de eigenestados de momento. Un ejemplo ampliamente estudiado de tales sistemas es un gas de electrones sometidos a un campo magnético intenso en una dirección fija. El problema cuántico no relativista para este sistema, conocido como el problema de Landau, reve-

las interesantes características de la dinámica de los electrones en el campo magnético externo. Por un lado, la fuerza de Lorentz hace una clara separación entre las componentes paralelas (libres) y transversales (dinámicas) de la trayectoria de los electrones con respecto a las líneas de campo. Por otra parte, en el plano transversal, las trayectorias están confinadas. En tal caso, los niveles de energía, llamados niveles de Landau, desarrollan un espectro discreto.

En este trabajo estudiamos la estructura del propagador del fermión y algunas cantidades relevantes como la corriente y el condensado fermiónicos, en presencia de campos eléctricos y magnéticos externos de perfil espacial arbitrario en los sistemas de $(2+1)$ y $(1+1)$ dimensiones espacio-temporales utilizando el método de eigenfunciones de Ritus, que originalmente ha sido usado para resolver problemas en campos externos constantes. La ventaja de este método es que, formalmente, el propagador adquiere su forma libre cuando se expresa en una base conveniente de funciones que representan los estados fermiónicos asintóticos en presencia de campos externos. En el caso de $(2+1)$ dimensiones, incluimos el término de masa de Haldane. Además, extendemos el formalismo para estudiar los efectos de campos eléctricos en el modelo masivo de Schwinger, es decir, electrodinámica cuántica en $(1+1)$ dimensiones.

Comenzamos este trabajo considerando aspectos generales de la teoría de propagadores en el **Capítulo 1**. En el **Capítulo 2**, estudiaremos el Lagrangiano fermiónico con particular interés en las representaciones para las matrices de Dirac en bajas dimensiones. En el **Capítulo 3** estudiaremos aspectos de la Supersimetría en Mecánica Cuántica (SUSY-QM), una técnica que nos facilitará encontrar los estados asintóticos de los electrones en presencia de campos externos. La forma para calcular estos estados se presenta en detalle en el **Capítulo 4**, donde además encontraremos la densidad de corriente y el condensado fermiónico inducidos por un campo magnético de perfil arbitrario en una dirección espacial en $(2+1)$ dimensiones en las diferentes representaciones de las matrices de Dirac. Con ayuda de esto, en el **Capítulo 5** encontraremos explícitamente estas cantidades en el caso de campos externos para los que existe solución analítica, donde a excepción de un campo uniforme, los efectos de otro perfil de campo difícilmente pueden ser encontrados por otros métodos. En el marco del método de Ritus, también puede ser estudiadas configuraciones de campos eléctricos. En el **Capítulos 6** analizaremos el propagador de los electrones en un campo eléctrico en el modelo masivo de Schwinger, es decir, en la electrodinámica cuántica en

(1+1) dimensiones (QED_2). Finalmente presentaremos las conclusiones en el **Capítulo 7**.

Cabe mencionar que presentar el estudio del propagador del electrón en (2+1) dimensiones, donde una dimensión espacial es suprimida, no es una mera simplificación teórica. Hace unos veinte años, se demostró que la teoría del grafeno, donde los electrones se mueven en un campo magnético perpendicular a su plano de movimiento, es una teoría de dos tipos de electrones de Dirac no masivos en un espacio-tiempo de Minkowski en (2+1) dimensiones, cada tipo en una representación irreducible diferente del álgebra de Clifford. El aislamiento de muestras de grafeno en 2004 y 2005, ha dado lugar a un nuevo interés en la materia condensada relativista y un nuevo impulso, tanto teórico como experimental, para los intereses comunes de las comunidades de física de altas energías y de materia condensada. Así, el límite no masivo de nuestros resultados es de relevancia directa en estos temas.

De la investigación conducida en esta tesis, se desprenden los artículos “The Electron Propagator in External Electromagnetic Fields in Lower Dimensions”, por Gabriela Murguía, Alfredo Raya, Ángel Sánchez y Edward Reyes, aceptado para su publicación en *American Journal of physics*. y “Fermion condensate and Vacuum Current Density Induced by Homogeneous and Inhomogeneous Magnetic Fields in (2+1)-Dimensions”, por Alfredo Raya y Edward Reyes, sometido para su publicación en *Physical Review D*.

México, D.F., Abril de 2010.
Fis. Edward Daniel Reyes Ramírez

Índice general

1. El Propagador del Fermión	2
2. Fermiones en Bajas Dimensiones	5
2.1. Lagrangiano de QED en (3+1) dimensiones	6
2.1.1. Lagrangiano de Dirac	6
2.1.2. Lagrangiano de Maxwell	9
2.1.3. Lagrangiano de QED	11
2.2. Lagrangiano de QED ₃	12
2.2.1. Lagrangiano de Dirac “Heredado”	13
2.2.2. Lagrangiano de Dirac “Extendido”	14
2.2.3. Lagrangiano de Dirac “Reducible”	16
2.2.4. Lagrangiano de Maxwell	17
2.2.5. Lagrangiano de Chern-Simons	17
2.2.6. Lagrangiano(s) de QED ₃	20
2.3. Modelo de Schwinger	21
3. Fermiones en Campos Externos y Mecánica Cuántica Super- simétrica	23
3.1. Factorización del Hamiltoniano	23
3.2. Partículas en Campos Electromagnéticos y Supersimetría	26
3.3. Electrones Relativistas y SUSY	29
4. Método de Ritus en Bajas Dimensiones	32
4.1. El Propagador de Dirac Libre	33
4.2. El Propagador de Dirac en Campos Externos	35
4.3. El Propagador del Electrón en Campos Magnéticos	37
4.4. Segunda Representación Irreducible	45
4.5. Representación Extendida	47

4.6. Representación Reducible	48
5. Perfiles de Campo con Solución Analítica	56
5.1. Campo Magnético Constante	56
5.2. Campo Magnético Exponencial	60
6. Campos Eléctricos en (1+1) Dimensiones	68
7. Conclusiones	74
A. Inversión Temporal	77
B. Términos de Masa y Paridad	79
B.1. Paridad	79
B.2. Término de Masa Usual	80
B.3. Término m_o	80
C. Espín en el plano	82

Capítulo 1

El Propagador del Fermión

Una partícula cargada en presencia de un campo magnético externo modifica su comportamiento respecto al de una partícula libre, debido a que el campo externo rompe la isotropía del espacio; el movimiento en la dirección a lo largo del campo es diferente al de la dirección transversal. Un efecto muy conocido, por medio del cual se estudia la presencia de campos magnéticos en el espacio exterior, consiste en la rotación de la polarización de fotones en presencia de dichos campos, conocido como efecto Faraday. Además, un campo externo modifica la estructura del vacío de una teoría. En QED₃, esto puede provocar un apareamiento entre fermiones y antifermiones en el vacío. Por un lado este apareamiento puede hacer que el sistema fermión-antifermión se comporte como un bosón, por lo que puede existir condensación de estos pares en el estado base. A esto se le llama condensado fermiónico. Por otra parte el mismo apareamiento provoca que se modifique la estructura del espacio donde se propagan los fermiones, haciendo que las partículas se propaguen en un medio que parece ser más denso. Por este hecho, las partículas se comportan como si tuvieran una masa efectiva mayor a la que tendrían en el vacío. Esto es conocido como generación dinámica de masas.

Estrictamente hablando, el condensado es el valor de expectación de un campo escalar en el vacío. En el modelo estándar, por ejemplo, el condensado de Higgs $\langle 0|\phi|0\rangle$ es responsable de generar la masa de las partículas elementales y en QCD se sabe que los hadrones adquieren masa por la interacción entre las partículas con el condensado quiral de los quarks $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$. Cabe mencionar que en este caso, el campo escalar no es fundamental. Nosotros nos enfocaremos en los campos escalares formados por el apareamiento de un

fermión y un antifermión $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, en presencia de un campo electromagnético, el cual está dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -Tr\{\langle T[\psi(z)\bar{\psi}(z)] \rangle\} = Tr\{iS(z, z)\},$$

donde $S(x, y)$ es el propagador del fermión entre los puntos x y y . Si los fermiones tienen masa desnuda igual a cero, el condensado es un parámetro de orden, cuyo valor finito corresponde a un rompimiento dinámico de la simetría quiral. Para fermiones masivos, el condensado tiene una parte no dinámica que será la que estudiaremos. Además de este tipo de condensados, existen también los formados por sistemas fermión-fermión, los cuales tienen propiedades diferentes ya que se comportan como sistemas con espín entero no nulo y quedarán fuera de este estudio. Cabe mencionar que el apareamiento por sí sólo no es condición suficiente para la formación de un condensado fermiónico, por ejemplo, la formación de pares de Cooper en el marco de la teoría BCS no necesariamente implica que todos estén agrupados en el mismo estado cuántico.

Existen varios métodos usados para estudiar la incorporación de los efectos del campo magnético en el propagador de una partícula cargada. Por ejemplo, tenemos el método de la cuantización canónica del campo de Dirac en un campo de fondo [1], que permite calcular observables físicas de primeros principios; el método de la integral de camino [2]; el método de tiempo propio de Fock-Schwinger [3, 4, 5], el cual fue desarrollado por Fock y Schwinger hacia el año de 1954 y acepta soluciones exactas en el caso de campos magnéticos constantes y variaciones suaves en el tiempo. Este método fue introducido para calcular Lagrangianos efectivos, funciones de Green y otras cantidades en la aproximación a 1-lazo para la electrodinámica cuántica (QED). Este método ha sido utilizado para el análisis de problemas de campo externo, por ejemplo para calcular el operador de polarización.

El otro método es el de las eigenfunciones de Ritus [6]. Desde un punto de vista práctico, el uso de estas funciones, que son los estados asintóticos de los fermiones en un campo de fondo, permite introducir una rotación entre el espacio de coordenadas y el de momentos, de modo que los propagadores son diagonales en el espacio de momentos e involucran sólo a los números cuánticos dinámicos. Este método ha sido ampliamente usado en trabajos de catálisis magnética [7, 8] y generación dinámica de masa [9].

En este trabajo, derivaremos el propagador de electrones masivos en campos electromagnéticos de fondo en bajas dimensiones espacio-temporales a

través del método de Ritus, el cual consiste en la diagonalización del operador de Dirac en la base de las eigenfunciones del operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$;

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p = p^2 \mathbb{E}_p,$$

donde $\Pi_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$ y A_μ es el potencial de electromagnético que define el campo externo y las funciones \mathbb{E}_p son llamadas eigenfunciones de Ritus. Una vez obtenidas estas funciones, se llevará a cabo el análogo a una transformada de Fourier de las funciones de Green de estas partículas [10]. En la representación \mathbb{E}_p , el propagador de Feynman para el fermión tiene la forma funcional de un propagador libre

$$S_F(z, z') = \int d^3p \left[\mathbb{E}_p(z) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{p} - m} \bar{\mathbb{E}}_p(z') \right],$$

donde $\bar{\mathbb{E}}_p = \gamma^0 \mathbb{E}_p^\dagger \gamma^0$, \mathbb{E}_p^\dagger es la matriz transpuesta conjugada y \bar{p} tiene por componentes los números cuánticos dinámicos asociados al movimiento de los electrones en el campo de fondo. De aquí se pueden calcular cantidades como el condensado fermiónico de la forma

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = Tr \{ i S_F(z, z) \},$$

o la densidad de corriente

$$j^\mu = -ie Tr \{ \gamma^\mu S_F(z, z) \}.$$

En los próximos capítulos, desarrollaremos en detalle este método en bajas dimensiones, estudiaremos las simetrías de estos sistemas y veremos que la simplicidad del método radica en que puede ser entendido en términos de mecánica cuántica supersimétrica.

Capítulo 2

Fermiones en Bajas Dimensiones

En este capítulo profundizaremos en las propiedades de transformación del Lagrangiano de QED en bajas dimensiones, bajo ciertas simetrías y en las diferentes representaciones y con los términos de masa que podemos escribir. Principalmente nos enfocaremos en (2+1) dimensiones ya que la imparidad de la dimension produce diferencias notables con respecto a (3+1) dimensiones. En física, las simetrías juegan un papel fundamental en la descripción de cualquier sistema. El marco idóneo para estudiar las simetrías de un sistema es el formalismo Lagrangiano. En este formalismo, las simetrías se ven como transformaciones que dejan el Lagrangiano o la acción correspondiente invariantes [11]. QED₃ ha sido una teoría muy útil en diferentes campos de la física, como la ruptura dinámica de simetría quiral [12, 13], la superconductividad de alta T_c [14] y el efecto Hall cuántico [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21].

Una de las diferencias más importantes que aparecen entre sistemas de tres y dos dimensiones espaciales, es que en estos últimos, el acoplamiento entre fotones y fermiones genera un término de Chern-Simons (TCS) en el Lagrangiano, que actúa como un término de masa para el fotón. La utilización del TCS en física es vasta. Abarca desde sistemas de materia condensada, como superconductividad de alta temperatura, anyones y efecto Hall cuántico fraccionario, hasta gravedad cuántica y teorías de cuerdas [22].

2.1. Lagrangiano de QED en (3+1) dimensiones

QED es la teoría que da cuenta de las interacciones a nivel cuántico entre las partículas cargadas y los campos electromagnéticos. Su Lagrangiano consta de 3 partes: materia, campo electromagnético e interacciones. A continuación describiremos cada una de estas partes en detalle, con énfasis especial en sus simetrías.

2.1.1. Lagrangiano de Dirac

Como en el caso de mecánica clásica y mecánica cuántica no relativista, en la electrodinámica cuántica podemos obtener las ecuaciones que rigen nuestros sistemas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0, \quad (2.1)$$

donde el Lagrangiano para el caso de la ecuación de Dirac, es

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi. \quad (2.2)$$

Enfatizamos que estamos trabajando en (3+1) dimensiones.

Simetrías del Lagrangiano de Dirac

Las soluciones a la ecuación de Dirac poseen ciertas propiedades bajo transformaciones globales (de fase y quirales) y discretas (Conjugación de Carga \mathcal{C} , Paridad \mathcal{P} e Inversión Temporal \mathcal{T}) que hacen que el Lagrangiano sea invariante bajo ellas. Revisaremos los pormenores de cada una de ellas:

- *Transformaciones Globales de Fase:* Es una observación obvia que si transformamos la función de onda como

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\chi}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\chi}, \quad (2.3)$$

con χ una constante, el Lagrangiano (2.2) es invariante. Esta aparente trivialidad tiene grandes consecuencias, pues de acuerdo al Teorema

de Noether, por cada simetría continua del Lagrangiano existe una corriente conservada. La corriente asociada con esta transformación es

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (2.4)$$

que es la densidad de corriente del electrón. En particular, esta simetría implica que la carga eléctrica

$$Q = \int d^3x j^0 = -e \int d^3x \psi^\dagger\psi, \quad (2.5)$$

es constante, debido a la constancia de la norma de ψ .

- *Simetría Quiral:* Existe otro tipo de transformaciones de fase que podemos aplicar a ψ :

$$\psi \rightarrow e^{i\chi\gamma^5}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\chi\gamma^5}. \quad (2.6)$$

Recordando las propiedades de la matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$,

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

en la representación de Pauli-Dirac, que es la que utilizaremos en esta discusión, podemos construir una corriente

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad (2.8)$$

que satisface

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad (2.9)$$

es decir, la transformación (2.6) es una simetría del Lagrangiano (2.2) solo cuando los fermiones *son no masivos*, $m = 0$. En este caso la corriente conservada se llama corriente vectorial axial. De esta manera, la existencia de la masa provoca el rompimiento de la simetría quiral.

- *Conjugación de Carga:* Esta simetría intercambia los papeles de los espinores de partícula y antipartícula. El efecto de esta transformación sobre la función de onda es

$$\psi(x) \rightarrow \psi_c(x) = \mathcal{C}\gamma^0\psi^*(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad (2.10)$$

donde T denota transposición matricial. Ambas, ψ y ψ_c , satisfacen la ecuación de Dirac en un campo electromagnético externo, pero con carga opuesta. La matriz de conjugación de carga se construye de modo que $\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = (\gamma^\mu)^T$. Es fácil ver que \mathcal{C} tiene las siguientes propiedades:

$$\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^T = -\mathcal{C}, \quad (2.11)$$

y en esta representación, $\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$. La operación de Conjugación de Carga cambia el signo del momento, momento angular orbital, espín y la energía.

- *Paridad*: También se llama inversión espacial y consiste en invertir precisamente las componentes espaciales del cuadrivector x^μ . Bajo esta transformación

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t, -\vec{x}) = \mathcal{P}\psi(t, \vec{x}) = \gamma^0\psi(t, \vec{x}). \quad (2.12)$$

La transformación de Paridad deja la ecuación de Dirac y todas las observables físicas sin cambios.

- *Inversión Temporal*: Esta es una transformación antiunitaria [Apéndice A] que consiste en la inversión del argumento temporal

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi_t(-t, \vec{x}) = \mathcal{T}\psi^*(t, \vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t, \vec{x}). \quad (2.13)$$

La operación deja formalmente invariante a la ecuación de Dirac. Tenemos que la matriz \mathcal{T} satisface las siguientes propiedades:

$$\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}. \quad (2.14)$$

El significado físico de la Inversión Temporal no es tan intuitivo como el de la Paridad o la Conjugación de Carga.

- *CPT*: El Lagrangiano de Dirac es invariante separadamente bajo \mathcal{C} , \mathcal{P} y \mathcal{T} y la simetría conjugada \mathcal{CPT} .

El cuadro 2.1 resume las propiedades de simetría de cada término de este Lagrangiano y la corriente asociada.

Simetría	$\bar{\psi}\psi$	$\psi\gamma^\mu\psi$	∂_μ
\mathcal{C}	+1	-1	+1
\mathcal{P}	+1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$
\mathcal{T}	+1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$
\mathcal{CPT}	+1	-1	-1

Cuadro 2.1: Simetrías de los elementos que se usan para construir el Lagrangiano de Dirac en (3+1) dimensiones.

2.1.2. Lagrangiano de Maxwell

Los fenómenos electromagnéticos en el vacío se describen por dos campos vectoriales, el campo eléctrico \vec{E} y el magnético \vec{B} , que satisfacen las ecuaciones de Maxwell, que en términos del tensor de campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

se pueden escribir como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0, \quad (2.16)$$

y en las que la corriente electromagnética es una cantidad conservada, es decir, $\partial_\mu j^\mu = 0$, con $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. Si introducimos el cuadripotencial $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, los campos \vec{E} y \vec{B} se pueden derivar a partir de las relaciones

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla A^0, \quad (2.17)$$

lo que nos permite escribir

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.18)$$

El Lagrangiano de Maxwell es

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Simetrías

El Lagrangiano de Maxwell posee simetrías muy relevantes para la física moderna. Posee la llamada simetría local de norma, por lo que la teoría de las interacciones electromagnéticas es el primer ejemplo de teorías de norma que se estudia en la física. El alcance, elegancia y poder de las teorías de norma es tan vasto, que se busca una descripción de las teorías que describen las interacciones fundamentales en términos de teorías de norma. Éste es el eje central de la construcción del celebrado Modelo Estándar de partículas elementales. El Lagrangiano de Maxwell también posee propiedades especiales bajo las transformaciones de las simetrías discretas, de las que daremos cuenta a continuación.

- *Simetría Local de Norma:* Es fácil convencerse que $F_{\mu\nu}$, y por lo tanto el Lagrangiano de Maxwell, son invariantes bajo la transformación

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) , \quad (2.20)$$

donde $\Lambda(x)$ es una función escalar arbitraria, llamada función de norma. Esta propiedad de invariancia de norma introduce complicaciones en el estudio cuántico del campo electromagnético. Para calcular cantidades de interés, uno obliga al potencial vectorial a satisfacer ciertas condiciones, es decir, uno *fija la norma* . Nosotros estamos interesados en el caso donde la norma se fije de manera covariante, considerando la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. En este caso, la ecuación de onda para el fotón se reduce a

$$\square A^\mu = j^\mu , \quad (2.21)$$

y el Lagrangiano de Maxwell se modifica como

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (2.22)$$

donde ξ es llamado el parámetro que fija la norma y puede tomar valores reales. Algunos casos particulares son $\xi = 0$, la llamada Norma de Landau y $\xi = 1$, llamada Norma de Feynman.

- *Conjugación de Carga:* Bajo Conjugación de Carga, las componentes del potencial vectorial se transforman como

$$A^\mu(x) \rightarrow -A^\mu(x), \quad (2.23)$$

por lo que el Lagrangiano de Maxwell es invariante bajo \mathcal{C} .

- *Paridad*: Bajo Paridad, A^μ se transforma como

$$A^0(t, \vec{x}) \rightarrow A^0(t, -\vec{x}) , \quad \vec{A}(t, \vec{x}) \rightarrow -\vec{A}(t, -\vec{x}) , \quad (2.24)$$

por lo que el Lagrangiano de Maxwell es invariante bajo \mathcal{C} .

- *Inversión Temporal*: Bajo la Inversión Temporal, las componentes de A^μ se transforman como

$$A^0(t, \vec{x}) \rightarrow A^0(-t, \vec{x}) , \quad \vec{A}(t, \vec{x}) \rightarrow -\vec{A}(-t, \vec{x}) , \quad (2.25)$$

por lo que el Lagrangiano de Maxwell es invariante bajo \mathcal{T} .

- \mathcal{CPT} : Siendo invariante separadamente bajo las transformaciones discretas, el Lagrangiano de Maxwell también lo es bajo la transformación conjunta \mathcal{CPT} .

Ya contamos con los Lagrangianos para electrones y fotones libres. Procedemos ahora a incluir interacciones y construir el Lagrangiano de QED.

2.1.3. Lagrangiano de QED

Las interacciones de los electrones con el campo electromagnético, en dimensiones arbitrarias del espacio-tiempo, se obtienen acoplando la densidad de corriente con el campo electromagnético:

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu . \quad (2.26)$$

Con estos ingredientes, el Lagrangiano de QED se construye de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \bar{\psi} (i(\not{\partial} + ieA) - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Los dos primeros términos en la última expresión son invariantes bajo las simetrías discretas y bajo las transformaciones de norma locales

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad \psi \rightarrow \psi \exp \{-ie\Lambda(x)\}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp \{ie\Lambda(x)\}, \quad (2.28)$$

mientras que el último término también es invariante bajo las simetrías discretas y fija la norma. La estructura de norma de QED es independiente del número de dimensiones espacio-temporales. Por lo tanto, en la construcción del Lagrangiano más general de QED₃ solo nos enfocaremos en las simetrías discretas de cada término.

2.2. Lagrangiano de QED₃

Ahora vamos a restringir la dinámica de electrones y fotones a un plano, QED₃. En este caso construiremos el Lagrangiano más general posible. Debemos enfatizar que la transformación de Paridad en el plano es distinta a la del espacio: Paridad en el plano corresponde a invertir sólo un eje espacial y no ambos, porque esto sería equivalente a una rotación del plano por un ángulo π (Figura 2.1). El resto de las simetrías discretas heredan su estructura del espacio al plano. Para satisfacer el álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ para

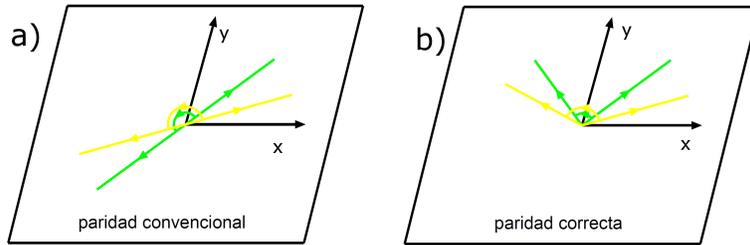


Figura 2.1: a) La paridad en el plano si heredamos la definición convencional de 3 dimensiones espaciales implica una rotación por un ángulo π . b) La definición correcta de paridad en el plano consiste en invertir únicamente un eje espacial.

n -dimensiones espacio-temporales, si $\mathbb{C}L(n)$ es el álgebra compleja generada por una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$e_i^2 = -1; \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j;$$

entonces la $\dim(\mathbb{C}L(n)) = 2^n$ y tenemos para n par e impar los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned} n = 2m &\Rightarrow \mathbb{C}L(n) \cong M_{2^m \times 2^m}(\mathbb{C}), \\ n = 2m + 1 &\Rightarrow \mathbb{C}L(n) \cong M_{2^m \times 2^m}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^m \times 2^m}(\mathbb{C}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde $\{M_{a \times b}(\mathbb{C})\}$ es el grupo de matrices $a \times b$ con entradas complejas. Así que en (2+1) dimensiones, la ecuación de Dirac puede ser construida con matrices de 2×2 , esto es, con $n = 2$ en (2.29), pero además tenemos dos representaciones irreducibles inequivalentes en las cuales podemos trabajar [23].

Entonces, las representaciones irreducibles pueden ser construidas utilizando las matrices de Pauli. Podemos escogerlas de las siguientes formas:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2, \quad (2.30)$$

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = -i\sigma_2. \quad (2.31)$$

Si dos matrices son equivalentes, significa que, físicamente, ambas tienen el mismo contenido. Esto es, ambas matrices nos darán la misma información del sistema, así que podemos usar cualquiera de las dos y obtendremos los mismos resultados. Cuando las representaciones son matemáticamente inequivalentes, no se puede obtener una a partir de transformaciones elementales de la otra. Físicamente esto quiere decir que la información que nos dan es diferente. Ahora debemos estudiar las dos representaciones matriciales y cada una nos dará diferente información del sistema. En materia condensada se sabe que el grafeno involucra a dos tipos de fermiones de Dirac no masivos, cada uno relacionado con una de estas representaciones.[24, 25]

2.2.1. Lagrangiano de Dirac “Heredado”

Supongamos que el Lagrangiano de QED₃ es funcionalmente idéntico a (2.2), i.e.,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi, \quad (2.32)$$

y consideremos la dimensionalidad más baja para las matrices γ^μ . En el plano la dimensionalidad más baja es 2×2 , por lo que las matrices de Pauli pueden representar a las matrices de Dirac. Existen dos representaciones irreducibles, dadas en (2.30) y (2.31). Elijamos solamente la primera representación (2.30), aunque la discusión es válida si elegimos cualquiera de ellas.

Simetrías

Consideremos ahora las simetrías de este Lagrangiano [23].

- *Simetría Quiral*: Se puede verificar que si heredamos la definición de $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = I$, no hay una definición en esta representación de la transformación quiral.
- *Conjugación de Carga*: Bajo esta transformación,

$$\psi^{\mathcal{C}} = e^{i\phi}\gamma^2\bar{\psi}^T,$$

por lo que el Lagrangiano es invariante bajo \mathcal{C} .

- *Paridad*: Bajo una transformación de paridad $(t, x, y)^{\mathcal{P}} \rightarrow (t, -x, y)$,

$$\bar{\psi}\psi^{\mathcal{P}} \rightarrow -\bar{\psi}\psi,$$

por lo que el término de masa, y consecuentemente el Lagrangiano, no son invariantes bajo \mathcal{P} .

- *Inversión Temporal*: Bajo una inversión temporal $(t, \vec{x})^{\mathcal{T}} \rightarrow (-t, \vec{x})$,

$$\bar{\psi}\psi^{\mathcal{T}} \rightarrow -\bar{\psi}\psi,$$

por lo que el término de masa, y consecuentemente el Lagrangiano, no son invariantes bajo \mathcal{T} , ver [26].

- *\mathcal{CPT}* : El término de masa, que viola \mathcal{P} y \mathcal{T} , es invariante bajo la transformación combinada \mathcal{PT} y por lo tanto \mathcal{CPT} .

Para restaurar las simetrías del Lagrangiano de Dirac en QED₃, es necesario considerar un campo fermiónico extra, como veremos enseguida.

2.2.2. Lagrangiano de Dirac “Extendido”

Existen en el plano dos representaciones irreducibles para las matrices de Dirac [23], como vimos antes. Podemos entonces considerar un segundo “tipo” de electrones, descritos en términos de la segunda representación (2.31). La diferencia entre las dos representaciones es sólo el signo de la matriz γ^2 , por lo que podemos tratar de escribir las dos representaciones solo en términos de una de ellas. Si llamamos ψ_A al campo fermiónico de la primera representación y ψ_B al de la segunda, la única diferencia que encontramos es el signo de las masas para los dos campos. Así, tenemos que el Lagrangiano extendido es

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}_A (i\partial - m) \psi_A + \bar{\psi}_B (i\partial + m) \psi_B, \quad (2.33)$$

cuyas simetrías veremos a continuación.

Simetrías

Las simetrías del Lagrangiano (2.33) son [23]:

- *Simetría Quiral:* Este Lagrangiano permite definir, en realidad, dos tipos de transformaciones quirales:

$$\begin{aligned} \psi_A &\rightarrow \psi_A + \alpha\psi_B \quad , \quad \psi_B \rightarrow \psi_B - \alpha\psi_A \quad \text{y} \\ \psi_A &\rightarrow \psi_A + i\alpha\psi_B \quad , \quad \psi_B \rightarrow \psi_B + i\alpha\psi_A \quad , \end{aligned}$$

donde α es un escalar. Estas transformaciones conducen, en el caso no masivo, a las siguientes corrientes quirales conservadas:

$$j_1^\mu = (\bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_B - \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_A) \quad \text{y} \quad j_2^\mu = (\bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_B + \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_A) . \quad (2.34)$$

- *Conjugación de Carga:* Bajo la operación de Conjugación de Carga,

$$(\psi_A)^C = e^{i\psi_1} \gamma^2 (\bar{\psi}_A)^T \quad \text{y} \quad (\psi_B)^C = e^{i\psi_2} \gamma^2 (\bar{\psi}_B)^T , \quad (2.35)$$

como era de esperarse. Este Lagrangiano es invariante bajo \mathcal{C} .

- *Paridad:* Bajo Paridad,

$$(\psi_A)^P \rightarrow -ie^{i\phi_1} \gamma^1 \psi_B \quad \text{y} \quad (\psi_B)^P \rightarrow -ie^{i\phi_2} \gamma^1 \psi_A , \quad (2.36)$$

es decir, esta transformación mezcla los espinores de ambas representaciones. Este Lagrangiano es invariante bajo \mathcal{P} .

- *Inversión Temporal:* Bajo Inversión Temporal,

$$(\psi_A)^C = e^{i\psi_1} \gamma^2 (\bar{\psi}_B)^T \quad \text{y} \quad (\psi_B)^C = e^{i\psi_2} \gamma^2 (\bar{\psi}_A)^T , \quad (2.37)$$

es decir, esta transformación mezcla los espinores de ambas representaciones. Este Lagrangiano es invariante bajo \mathcal{T} .

- *\mathcal{CPT} :* Siendo invariante bajo las simetrías discretas por separado, también lo es bajo \mathcal{CPT} .

La idea de extender el Lagrangiano de Dirac e incluir dos campos fermiónicos en la representación irreducible tiene la gran ventaja de hacerlo invariante bajo Paridad e Inversión Temporal, y además permite introducir dos tipos de transformaciones quirales que en el caso no masivo son simetrías del Lagrangiano. Sin embargo, uno puede hacer más compacta la notación considerando espinores de cuatro componentes con una representación reducible para las matrices de Dirac, como veremos enseguida.

2.2.3. Lagrangiano de Dirac “Reducible”

Podemos fusionar los espinores de dos componentes trabajando con una representación reducible, 4×4 , de las matrices de Dirac. En este caso, uno puede trabajar con las matrices del caso de (3+1) dimensiones y trabajar con el Lagrangiano (2.2). Sin embargo, debemos recordar que en el plano sólo 3 matrices de Dirac se necesitan para la dinámica. Es decir, “sobra” γ^3 . Esto implica que se pueden definir dos tipos de transformaciones quirales

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^3} \psi \quad \text{y} \quad \psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5} \psi, \quad (2.38)$$

lo que nos permite introducir dos tipos de masa para los fermiones

$$m_e \bar{\psi} \psi \quad \text{y} \quad m_o \bar{\psi} \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^5] \psi = m_o \bar{\psi} \tau \psi, \quad (2.39)$$

donde m_o es llamada masa de Haldane [27]. Esto quiere decir que el Lagrangiano de Dirac “reducible” más general es

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_e - m_o \tau) \psi. \quad (2.40)$$

Veamos las simetrías de este Lagrangiano, que son en esencia las de los términos de masa.

Simetrías

Para estudiar las simetrías de los términos de masa en (2.40), nos referiremos a ellos de la siguiente manera: al que acompaña a la bilineal $\bar{\psi} \psi$ lo llamaremos “usual” y al que va con $\bar{\psi} \tau \psi$ lo llamaremos “tau”.

- *Simetría(s) Quiral(es)*: El término usual no es invariante bajo las transformaciones Quirales (2.38), pero sí lo es el término tau.
- *Conjugación de Carga*: Hereda su estructura de (3+1) dimensiones. Ambos términos de masa son invariantes bajo \mathcal{C} .
- *Paridad*: El término usual es invariante bajo Paridad, mientras que el término tau viola esta simetría [Apéndice B].
- *Inversión Temporal*: El término usual es invariante bajo \mathcal{T} , pero no el término tau.

- *CPT*: El término de masa usual es invariante bajo \mathcal{C} , \mathcal{P} y \mathcal{T} separadamente, por lo que lo es también bajo \mathcal{CPT} . El término tau, por su parte, es invariante bajo la transformación conjunta \mathcal{PT} , y por lo tanto bajo \mathcal{CPT} .

Es importante señalar las simetrías de los términos de masa de los Lagrangianos de Dirac heredado (2.32), extendido (2.33) y reducible (2.40), ya que, particularmente los que violan Paridad e Inversión Temporal, inducen modificaciones al Lagrangiano de Maxwell, pues inducen el llamado término de Chern-Simons, y viceversa, como veremos a continuación.

2.2.4. Lagrangiano de Maxwell

El Lagrangiano de Maxwell posee las mismas simetrías y estructura que su contraparte en 4D. Sin embargo, como hemos visto, en (2+1)-dimensiones existen términos de masa fermiónicos que violan Paridad e Inversión Temporal, por lo que inducen en el Lagrangiano un término adicional, llamado de Chern-Simons. Por su estructura topológica, esta modificación amerita ser tratada independientemente, así que consideraremos que el Lagrangiano de Maxwell queda intacto y estudiaremos separadamente el Lagrangiano de Chern-Simons.

2.2.5. Lagrangiano de Chern-Simons

En (2+1), a diferencia de (3+1) dimensiones, las partículas pueden obedecer una estadística fraccionaria, debido a que el espín en (2+1) dimensiones difiere del espín en (3+1) dimensiones. Esto porque en (3+1) dimensiones, el espín debe satisfacer el álgebra del momento angular, que es no conmutativa:

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Aquí, la cuantización del momento angular nos da dos tipos de partículas, los bosones que tienen espín entero y que satisfacen la estadística de Bose-Einstein y los fermiones que tienen espín semi-entero y satisfacen la estadística de Fermi-Dirac. En (2+1) dimensiones, el momento angular satisface un álgebra conmutativa, ya que sólo tenemos un generador, por ejemplo S_3 , que obviamente conmuta con él mismo. Como resultado, no hay una cuantización

del momento angular, lo que inmediatamente sugiere que en (2+1) dimensiones puede haber partículas con estadística fraccionaria, cuya existencia se ha demostrado. Vamos a ver qué significa tener estadística fraccionaria.

Generalmente, el término estadística cuántica se refiere a la fase que adquiere una función de onda de muchas partículas, cuando dos de ellas son intercambiadas. Pero si las partículas son estrictamente idénticas, hacer una permutación no nos dice nada físicamente, ya que una configuración dada y la obtenida al intercambiar las partículas son sólo dos caminos para describir la misma configuración de las partículas. De hecho, el término estadística cuántica se refiere a la fase que surge cuando dos partículas son transportadas a las coordenadas de la otra adiabáticamente. En (3+1) dimensiones estas dos definiciones de estadística cuántica coinciden. Pero esto no sucede en (2+1) dimensiones, dando lugar a partículas que pueden generar cualquier fase al ser intercambiadas adiabáticamente. Estas partículas son llamadas aniones [28], [29] y tienen la particularidad de que violan las simetrías de paridad e inversión temporal.

En particular, cuando acoplamos electrones con fotones en el plano, debido a que existen términos de masa para los electrones que violan Paridad e Inversión Temporal, el Lagrangiano de Maxwell se modifica, generando un término de Chern-Simons (TCS) [30]

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\vartheta}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu F^{\nu\lambda}, \quad (2.41)$$

del cual especificaremos algunos aspectos relevantes y simetrías. Primeramente, consideremos electrodinámica pura en presencia del término de Chern-Simons en (2+1) dimensiones

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} A_\lambda.$$

La ecuación de campo que se obtiene de este Lagrangiano es

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.42)$$

la cual es invariante bajo transformaciones de norma $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Por otro lado el Lagrangiano de Chern-Simons cambia como

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{\vartheta}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \Lambda F^{\nu\lambda}, \quad (2.43)$$

por lo que no es el Lagrangiano sino la acción correspondiente la que es invariante bajo estas transformaciones. La siguiente observación es que el término ϑ tiene unidades de masa y la ecuación de campo (2.42) puede ser escrita como

$$\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{\vartheta} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha \right) {}^*F_\nu = 0,$$

donde ${}^*F_\nu = \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ es el tensor de intensidad de campo dual, el cual en (2+1) dimensiones es un vector. Aplicando el operador $\left(g_{\beta\eta} - \frac{1}{\mu} \epsilon_{\beta\eta\delta} \partial^\delta \right)$, obtenemos

$$(\square + \mu^2) {}^*F_\beta = 0,$$

por lo que cuando consideramos los fotones de Maxwell-Chern-Simons, i.e., fotones provenientes del Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{CS}$, éstos son masivos, de masa ϑ , de modo que el TCS actúa como un término de masa invariante de norma para el fotón [26].

Finalmente, uno de los aspectos más interesantes resulta de observar que la acción de Chern-Simons,

$$\mathcal{S}_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}, \quad (2.44)$$

donde

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon_{ij} E^i A^j + a B A^0,$$

es invariante bajo transformaciones de coordenadas generales. Dicho de otro modo, no depende de la “métrica”, por lo que la teoría resultante es una teoría de campos topológica. La invariancia de Lorentz de la acción se sigue automáticamente de la invariancia de norma. Para ver esto, notemos que la forma mas general del Lagrangiano de Maxwell invariante de norma en electrodinámica clásica en (3+1) dimensiones es

$$\mathcal{L} = \mathbf{E}^2 + a \mathbf{B}^2.$$

El pedir invariancia de Lorentz nos dice que $a = -1$. Por otro lado, en (2+1) dimensiones, el pedir invariancia de \mathcal{S}_{CS} bajo transformaciones de norma, fija a , lo cual también es automáticamente invariante de Lorentz.

Simetrías

El Lagrangiano de Chern-Simons (2.41) posee las siguientes propiedades de transformación bajo las simetrías discretas :

- *Conjugación de Carga:* Este término es invariante bajo \mathcal{C} .
- *Paridad:* El TCS viola \mathcal{P} .
- *Inversión Temporal:* El TCS viola \mathcal{T} .
- *\mathcal{CPT} :* Al igual que los términos de masa fermiónicos que violan \mathcal{P} y \mathcal{T} , el TCS es invariante bajo la transformación conjunta \mathcal{PT} y por lo tanto bajo \mathcal{CTP} .

Este TCS se genera dinámicamente bajo ciertas condiciones, las cuales estudiaremos ahora para construir el Lagrangiano más general de QED_3 .

2.2.6. Lagrangiano(s) de QED_3

Para escribir el Lagrangiano más general de QED_3 , debemos partir de su predecesor tetradimensional (2.27). Sin embargo, debemos notar que en el plano se genera un TCS cuando los fotones de Maxwell se acoplan con fermiones de Dirac con un término de masa que viole \mathcal{P} y \mathcal{T} , de acuerdo con el Teorema de Coleman-Hill [31]. El enunciado inverso también es cierto: Si consideramos fermiones inicialmente no masivos y los acoplamos con fotones de Maxwell-Chern-Simons, los fermiones adquirirán un término de masa que viola \mathcal{P} y \mathcal{T} , ver [32]. Este juego entre fermiones y fotones masivos se puede representar de la siguiente manera:

$$m^{\mathcal{P}, \mathcal{T}} \iff \vartheta^{\mathcal{P}, \mathcal{T}}. \quad (2.45)$$

Entonces, para escribir el Lagrangiano más general de QED_3 , ya que los Lagrangianos de Maxwell y de Interacciones son los mismo que en 4D, debemos considerar tres casos:

- *Caso I:* Para el Lagrangiano de Dirac Heredado tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}_3}^H &= \bar{\psi} (i(\not{\partial} + ie\not{A}) - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &\quad + \frac{\vartheta}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu F^{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

En este caso el término de masa y el TCS se inducen mutuamente.

- *Caso II:* Para el Lagrangiano de Dirac Extendido tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED_3}^E &= \bar{\psi}_A (i(\not{\partial} + ieA) - m) \psi_A + \bar{\psi}_B (i(\not{\partial} + ieA) + m) \psi_B \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 . \end{aligned} \quad (2.47)$$

En este caso no hay TCS, pues los signos de las masas cancelan entre sí cualquier contribución.

- *Caso III:* Para el Lagrangiano de Dirac Reducible tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED_3}^R &= \bar{\psi} (i(\not{\partial} + ieA) - m_e - m_o\tau) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &\quad + \frac{\vartheta}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu F^{\nu\lambda} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aquí m_o y el TCS se inducen mutuamente.

Observemos que estos tres Lagrangianos son invariantes ante \mathcal{CPT} , por lo tanto físicamente relevantes. Así que calcularemos el condensado y la corriente fermiónica tomando en cuenta cada Lagrangiano.

2.3. Modelo de Schwinger

El modelo de Schwinger es el modelo de la electrodinámica cuántica en (1+1) dimensiones. En este caso, dada la paridad de la dimensión, la estructura y simetrías del Lagrangiano son similares a las de QED₄. En (1+1) dimensiones, la dimensionalidad mínima para las matrices de Dirac es 2×2 como nos dice la ecuación (2.29). En esta parte, trabajaremos en un espacio de Minkowski (1+1) dimensional con métrica $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ en unidades naturales. Para construir la ecuación de Dirac en el llamado modelo masivo de Schwinger [4], sólo dos matrices γ están involucradas. Las definiremos también en términos de las matrices de Pauli de la siguiente forma

$$\gamma_0 = \sigma^1 \quad \gamma_1 = -i\sigma^2 \quad (2.49)$$

y se suele definir convenientemente la matriz

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 \equiv \sigma_{01}$$

En este espacio, sólo tenemos una componente independiente del tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$, correspondiente a un campo eléctrico en la dirección de la única dirección espacial. Entonces podemos construir a este campo, definiendo $A_\mu = (W(x), 0)$. Además, en este caso no tenemos una segunda representación inequivalente.

El modelo de Schwinger ha sido utilizado como modelo para polímeros tales como el poliacetileno. Además exhibe rompimiento espontáneo de simetría $U(1)$, debido al condensado quiral de los instantones. El fotón en este modelo se vuelve una partícula masiva a bajas temperaturas. Este modelo exhibe confinamiento de los fermiones y puede ser resuelto exactamente por lo que es usado como modelo de juguete para estudiar algunos aspectos otras teorías más complejas como cromodinámica cuántica (QCD). Un argumento para ver esto, es que clásicamente el potencial entre dos partículas cargadas en (1+1) dimensiones es lineal, mientras que en (3+1) dimensiones va como $1/r$. En el siguiente capítulo veremos como las soluciones a la ecuación de Dirac en la teorías estudiadas aquí en presencia de campos electromagnéticos externos, pueden ser entendidas en términos de mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM).

Capítulo 3

Fermiones en Campos Externos y Mecánica Cuántica Supersimétrica

3.1. Factorización del Hamiltoniano

En este capítulo veremos una forma de factorizar el Hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger en términos de ciertos operadores de creación y aniquilación A y A^\dagger , que utilizaremos más adelante para encontrar la relación entre las soluciones en campos externos a la ecuación de Dirac con diferente proyección de espín. Este método también es la base de mecánica cuántica supersimétrica no relativista. En este capítulo seguiremos muy de cerca el trabajo desarrollado en la Referencia [33].

Para empezar, comencemos con el Hamiltoniano de una partícula en presencia de un potencial $V_1(x)$,

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$$

en unidades de $\hbar = 2m = 1$. Es claro que las eigenfunciones para el potencial V_1 y $V_1' = V_1 + c$, con c una constante, son las mismas y que las eigenenergías cambiarán por el valor c , así que, sin pérdida de generalidad, podemos escoger la energía del estado base ψ_0 , igual a cero, $E_0 = 0$. Normalmente no aprecimos que si conocemos el estado base, entonces podemos reconstruir el potencial

salvo una constante

$$-\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V_1\psi_0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1(x) = \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}.$$

Es fácil factorizar el Hamiltoniano como $H = A^\dagger A$, como cuando se estudia el oscilador armónico en términos de operadores de creación y aniquilación. En el caso general,

$$A = \frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x).$$

Entonces,

$$V_1(x) = W^2(x) - W'(x), \quad (3.1)$$

que es una ecuación de Riccati. La cantidad $W(x)$ es conocida como el superpotencial en mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM) [33]. La condición $H_1\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 = 0$ se satisface automáticamente si imponemos $A\psi_0 = 0$, de donde

$$W(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}.$$

El razonamiento en sentido opuesto también vale, si conocemos $W(x)$, podemos encontrar el estado base

$$A\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \text{Nexp}\left(-\int W(y)dy\right).$$

Ahora, definimos un nuevo Hamiltoniano como

$$H_2 = AA^\dagger = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x),$$

con

$$V_2 = W^2(x) + W'(x) \quad (3.2)$$

los potenciales V_1 y V_2 son conocidos como los potenciales compañeros supersimétricos y las eigenenergías, las funciones de onda y las matrices de dispersión de V_1 y V_2 , están relacionadas. La ecuación de Schrödinger para H_1 es

$$H_1\psi_n^{(1)} = A^\dagger A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}, \quad (3.3)$$

que implica

$$H_2(A\psi_n^{(1)}) = AA^\dagger A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(A\psi_n^{(1)}). \quad (3.4)$$

Análogamente, para H_2 tenemos

$$H_2\psi_n^{(2)} = AA^\dagger\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)}, \quad (3.5)$$

que implica

$$H_1(A^\dagger\psi_n^{(1)}) = A^\dagger AA^\dagger\psi_n^{(1)} = E_n^{(2)}(A^\dagger\psi_n^{(1)}). \quad (3.6)$$

Entonces, salvo una constante de normalización, $(A\psi_n^{(1)})$ es eigenfunción de H_2 y $(A^\dagger\psi_n^{(2)})$ lo es de H_1 . Notemos que las eigenenergías son positivas definidas ($E_n^{(1,2)} \geq 0$), pues

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(1)} | A^\dagger A | \psi_n^{(1)} \rangle = \langle \psi_n^{(2)} | \psi_n^{(2)} \rangle \geq 0$$

y de manera similar $E_n^{(2)} \geq 0$. Ahora, de las ecuaciones (3.3)-(3.6) y del hecho que hicimos $E_0^{(1)} = 0$, las eigenfunciones de H_1 y H_2 normalizadas y las eigenenergías correspondientes, tiene las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= E_{n+1}^{(1)}, & E_0^{(1)} &= 0, \\ \psi_n^{(2)} &= [E_{n+1}^{(1)}]^{-1/2} A\psi_{n+1}^{(1)}, \\ \psi_{n+1}^{(1)} &= [E_n^{(2)}]^{-1/2} A^\dagger\psi_n^{(2)}, \end{aligned}$$

por lo que si conocemos las eigenfunciones de H_1 , podemos determinar las eigenfunciones de H_2 y viceversa. Además, el operador A no sólo convierte eigenfunciones de H_1 en eigenfunciones de H_2 con la misma energía, sino que también destruye un nodo extra en la eigenfunción. De la misma manera, el operador A^\dagger convierte eigenfunciones de H_2 en eigenfunciones de H_1 con la misma energía y crea un nodo extra en la eigenfunción. Estas propiedades son particularmente explotadas en el problema del oscilador armónico, donde $V_{osc}(x) \sim x^2$, de donde $W_{osc}(x) \sim x$, por lo que el mismo V_{osc} es su propio potencial asociado supersimétrico y entonces, los operadores A y A^\dagger destruyen y crean todos los eigenestados. Podemos entender la degeneración en el espectro de H_1 y H_2 de las propiedades del álgebra SUSY. Primero construyamos el Hamiltoniano SUSY como

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}.$$

Este Hamiltoniano matricial, es parte de un álgebra cerrada, la cual contiene operadores bosónicos y fermiónicos con relaciones de conmutación y anticonmutación. Si consideramos los operadores

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

las siguientes relaciones describen la superálgebra cerrada $sl(1/1)$

$$\begin{aligned} [H, Q] &= [H, Q^\dagger] = 0, \\ \{Q, Q^\dagger\} &= H, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \end{aligned}$$

El hecho de que las supercargas Q y Q^\dagger conmuten con H , es responsable de la degeneración del espectro de H_1 y H_2 . Los operadores Q y Q^\dagger pueden ser interpretados como operadores que cambian grados de libertad bosónicos en fermiónicos y viceversa. La forma más común de clasificar las álgebras SUSY-QM, es contando el número de anticonmutadores de los generadores Hermitianos $Q_i, i = 1, 2, \dots, N$. Un álgebra SUSY- N , es tal que

$$\{Q_i, Q_j\} = H\delta_{ij}; \quad Q_i = Q_i^\dagger, \quad [H, Q_i] = 0; \quad H = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^2.$$

Cuando $N = 2M$, podemos definir las supercargas

$$\tilde{Q}_i = \frac{Q_{2i-1} + iQ_{2i}}{\sqrt{2}}.$$

La SUSY usual es con $N = 2$, con

$$Q = \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{2}}.$$

Como veremos en la siguiente sección, las soluciones a la ecuación de Dirac con espín arriba y abajo, las obtendremos en términos de potenciales supersimétricos.

3.2. Partículas en Campos Electromagnéticos y Supersimetría

Para discutir supersimetría en campos electromagnéticos, es útil introducir los operadores de ascenso y descenso

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2).$$

Consideremos primero el caso de un electrón no relativista con representación de espín en términos de las matrices de Pauli $\vec{\sigma} = 2\vec{s}$ en un campo magnético \vec{B} de dirección arbitraria y con razón giromagnética $g = 2$. El Hamiltoniano de Pauli para este problema explícitamente es (en unidades $\hbar = c = 2m = 1$)

$$H = (\vec{p} + e\vec{A})^2 + e\vec{B} \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.7)$$

Este Hamiltoniano tiene una supersimetría simple $N = 1$ si introducimos una supercarga autoadjunta:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.8)$$

Con esta, podemos escribir el Hamiltoniano de Pauli (3.7) como

$$H = 2Q_1^2 = \{Q_1, Q_1\},$$

y claramente

$$[H, Q_1] = 0.$$

Cuando el campo magnético es perpendicular al movimiento de los electrones, podemos introducir una supersimetría con $N = 2$, lo cual relaciona este problema con el de SUSY-QM en una dimensión. La forma más simétrica de hacer esto, es introduciendo la supercarga compleja

$$Q = 2[(p_x + eA_x) - i(p_y + eA_y)]\sigma_+ \equiv A\sigma_+,$$

lo cual obedece el superálgebra

$$Q^2 = 0 \quad , \quad \{Q, Q^\dagger\} = H_P$$

donde H_P denota el Hamiltoniano de Pauli para el caso especial de un campo magnético $\vec{B} = B_3\hat{z}$ perpendicular al movimiento de los electrones, i.e.

$$H_P = \sum_{i=1}^2 (p_i + eA_i)^2 + eB_3\sigma_3. \quad (3.9)$$

La supersimetría entonces garantiza que todas las eigenenergías positivas de H_P están degeneradas por el espín. Estos eigenestados degenerados están conectados por los operadores Q y Q^\dagger . Los Hamiltonianos que actúan en los dos subespacios de espín arriba y abajo son AA^\dagger y $A^\dagger A$ respectivamente.

Existen otras formas de escribir esta superálgebra. Por ejemplo introduciendo las supercargas:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{i}{\sqrt{2}}(Q^1 + iQ^2), \\ Q^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-(p_y + eA_y)\sigma_1 + (p_x + eA_x)\sigma_2], \\ Q^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(p_x + eA_x)\sigma_1 + (p_y + eA_y)\sigma_2]. \end{aligned}$$

que satisfacen

$$\{Q^a, Q^b\} = H_P \delta^{ab}, \quad [H_P, Q^a] = 0, \quad a, b = 1, 2.$$

El Hamiltoniano (3.9) tiene una simetría $O(2) \times O(2)$ que vienen de σ_3 y una simetría $O(2)$ de rotación en el plano $A^1 - A^2$. Podemos resolver potenciales de manera más sencilla si escogemos alguna componente $A_i = 0$ y la otra como función de la variable opuesta, i.e.

$$A_x(x, y) = 0, \quad A_y(x, y) = W(y)$$

tal que

$$B_z = \frac{dW(x)}{dx}$$

Entonces la ecuación de Pauli se vuelve

$$H_P = (p_y + W(x))^2 + p_x^2 - W'(x)\sigma_3.$$

Ya que H_P no depende de y , podemos escribir las eigenfunciones $\tilde{\psi}$ como

$$\tilde{\psi}(x, y) = e^{iky}\psi(x),$$

donde k es el eigenvalor del operador p_y y la ecuación de Schrödinger para $\psi(x)$ toma la forma

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + (W(x) + k)^2 - W'(x)\sigma \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

donde $\sigma = \pm 1$ es el eigenvalor del operador σ_3 . Entonces, hemos reducido el problema al de SUSY en una dimensión con superpotencial $W(x) + k$.

Ahora consideremos el mismo problema en la norma simétrica. Escogemos

$$A_x = \omega_c y f(\rho), \quad A_y = -\omega_c x f(\rho),$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$ y ω_c es una constante. El correspondiente campo magnético B_z esta dado por

$$B_z(x, y) = \partial_x A_y - \partial_y A_x = -2\omega_c f(\rho) - \omega_c \rho f'(\rho).$$

En este caso, el Hamiltoniano de Pauli toma la forma

$$H = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + \omega_c^2 \rho^2 f^2 - 2\omega_c f L_z - (2\omega_c f + \omega_c \rho f') \sigma_3,$$

donde L_z es la componente z del operador de momento angular orbital. Claramente el correspondiente problema de Schrödinger puede ser resuelto en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ) . En este caso, la eigenfunción $\psi(\rho, \phi)$ puede ser construída como

$$\psi(\rho, \phi) = R(\rho) e^{im\phi} / \sqrt{\rho},$$

donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es el eigenvalor de L_z . En este caso, la ecuación de Schrödinger para $R(\rho)$ toma la forma

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \omega_c^2 \rho^2 f^2 - 2\omega_c f m - (2\omega_c f + \omega_c \rho f'(\rho)) \sigma + \frac{m^2 - 1/4}{\rho^2} \right] R(\rho) = ER(\rho).$$

3.3. Electrones Relativistas y SUSY

Ahora pasemos al caso de electrones relativistas en presencia de un campo externo. Para muchos campos externos, el Hamiltoniano de Dirac puede ser puesto en la forma

$$H_D = \begin{pmatrix} M_+ & Q^\dagger \\ Q & -M_- \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

con las relaciones

$$Q^\dagger M_- = M_+ Q^\dagger; \quad Q M_+ = M_- Q.$$

Cuando estas relaciones son válidas, el Hamiltoniano de Dirac al cuadrado puede ser diagonalizado en la forma

$$H_D^2 = \begin{pmatrix} Q^\dagger Q + M_+^2 & 0 \\ 0 & Q Q^\dagger + M_-^2 \end{pmatrix},$$

y el Hamiltoniano de Dirac puede ser diagonalizado en la forma

$$H_D = \begin{pmatrix} \sqrt{Q^\dagger Q + M_+^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{Q Q^\dagger + M_-^2} \end{pmatrix}.$$

Primero consideremos el problema de la ecuación de Dirac en (1+1) dimensiones, con un potencial escalar $\phi(x)$. Entonces el Hamiltoniano se obtiene por sustituir

$$m \rightarrow m + \phi(x) \equiv \Phi(x)$$

La ecuación de Dirac covariante se vuelve

$$i\gamma \cdot \partial\psi(x, t) - \Phi(x, y)\psi(x, t) = 0,$$

lo cual en forma no covariante corresponde a

$$i \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = H\psi(x, t),$$

con

$$H = \alpha \cdot p + \beta\Phi(x).$$

escogiendo una representación “supersimétrica” para las matrices α y β ,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

este Hamiltoniano puede ser puesto en la forma (3.10) con

$$Q = p \cdot \sigma + i\Phi; \quad M_+ = M_- = 0,$$

y ahora podemos obtener el espectro del Hamiltoniano del espectro de los operadores

$$\begin{aligned} Q^\dagger Q &= -\nabla^2 + \Phi^2 + \sigma \cdot \nabla\Phi, \\ Q Q^\dagger &= -\nabla^2 + \Phi^2 - \sigma \cdot \nabla\Phi. \end{aligned}$$

Entonces, si estamos en (1+1) dimensiones o tenemos un potencial que solo es función de una variable, el problema se reduce a resolver potenciales en mecánica cuántica en una dimensión.

Al tener un electrón en un campo electromagnético externo, tenemos un término de interacción en el Hamiltoniano $H_I = \bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$. En forma

no covariante, si tenemos un campo magnético puro ($A_0 = 0, \vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$), podemos escribir

$$H_D = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} + \vec{A}) + \beta m,$$

que podemos poner en la forma (3.10) si hacemos

$$Q = Q^\dagger = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{A}); \quad M_\pm = m$$

Esta carga Q (salvo un factor de $1/\sqrt{2}$) es la supercarga del Hamiltoniano de Pauli (ecuación (3.8)) y el Hamiltoniano al cuadrado tiene la forma

$$H_D^2 = \begin{pmatrix} Q^\dagger Q + m^2 & 0 \\ 0 & Q Q^\dagger + m^2 \end{pmatrix},$$

el cual, salvo un cambio en el valor de la energía debido a la masa m , tiene en la diagonal dos copias del Hamiltoniano de Pauli. Entonces cuando resolvemos el Hamiltoniano de Pauli en un campo magnético externo, también determinamos las soluciones al correspondiente problema de Dirac. En el siguiente capítulo, veremos explícitamente las soluciones a la ecuación de Dirac en bajas dimensiones en sus representaciones irreducibles.

Capítulo 4

Método de Ritus en Bajas Dimensiones

En este capítulo y el siguiente, veremos como incorporar los efectos de un campo electromagnético externo de perfil espacial arbitrario en el propagador fermiónico por medio del método de Ritus. Nos enfocaremos a un campo magnético perpendicular al plano en (2+1) dimensiones. Aunque esto puede parecer una simplificación, en realidad, sólo existen tres componentes independientes del tensor de esfuerzos electromagnético. Estas corresponden a un campo magnético perpendicular al plano y dos campos eléctricos a lo largo de las dos direcciones del espacio. Para una configuración particular de campo eléctrico en una dirección, podemos rotar nuestros ejes para tener sólo una componente de campo eléctrico. De esta forma, es fácil probar que sólo existen dos casos diferentes, $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ y $|\vec{E}| < |\vec{B}|$. Para el primero, siempre existe un boost mediante el cual, la configuración es equivalente a tener sólo campo eléctrico. Se puede demostrar que un campo eléctrico no cataliza la formación del condensado fermiónico. Para la segunda configuración de campo, siempre existe un boost mediante el cual tendremos sólo campo magnético, el cual favorece la formación del condensado fermiónico. Nosotros consideraremos campos estáticos cuyos perfiles varían en una dirección espacial. Además de que una descripción de los fenómenos en presencia de campos externos arbitrarios es más completa, esperamos que este trabajo sirva para entender los efectos de campos que permean el espacio de manera no uniforme, por ejemplo, en la formación del condensado fermiónico en QCD, donde se ha propuesto que dicho condensado sólo se forma dentro del hadrón, y no en todo el espacio [34].

4.1. El Propagador de Dirac Libre

Empecemos con la ecuación de Dirac para electrones libres

$$(i\gamma \cdot \partial - m)\psi(x) = 0, \quad (4.1)$$

donde las matrices γ^μ satisfacen el álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, dependiendo del número d de dimensiones espacio-temporales consideradas. Con el fin de resolver esta ecuación, se introduce la función de Green o propagador de esta ecuación de onda. Los propagadores son importantes porque permiten tener una descripción visual de los procesos de interacción, de los cuales deseamos calcular varias cantidades dinámicas, como las tasas de decaimiento, las secciones transversales de dispersión, etcétera. En los problemas de dispersión, por ejemplo, se considera un paquete de ondas que en el pasado remoto representa una partícula que se aproxima a una potencial y nos preguntamos cómo la onda se verá en el futuro remoto, después de la interacción con el potencial. Supongamos que conocemos la función de onda $\psi(x, t)$ en un momento dado t . En este instante, cada punto del espacio x puede ser visto como una fuente de ondas esféricas propagándose hacia el exterior, de tal manera que la intensidad de la amplitud de la onda que llega a punto x' en un momento posterior t' será proporcional a la amplitud original de onda $\psi(x, t)$. Si denotamos la constante de proporcionalidad por $iG(x', t'; x, t)$, la onda total que llega en el punto x' en el tiempo t' será

$$\psi(x', t') = i \int d^3x G(x', t'; x, t)\psi(x, t).$$

Aquí, $G(x', t'; x, t)$ es precisamente la función de Green o propagador. Así, el conocimiento de la función de Green nos permite construir el estado físico que evoluciona en el tiempo a partir de cualquier estado inicial dado. En una teoría sin interacción, el propagador se conoce como el propagador libre, $G_f(x', t'; x, t)$. Sin embargo, si un potencial $V(x_1, t_1)$ se enciende en un instante t_1 en el punto x_1 , entonces la función de onda y el propagador serán modificados como

$$\begin{aligned} \psi(x', t') &= \psi_f(x', t') + \int d^3x_1 G_f(x', t'; x, t)V(x_1, t_1)\psi_f(x, t)\Delta t \\ G(x', t'; x, t) &= G_f(x', t'; x, t) + \end{aligned}$$

$$\int d^3x_1 G_f(x', t'; x_1, t_1) V(x_1, t_1) G_f(x_1, t_1; x, t) \Delta t, \quad (4.2)$$

donde el primer término en la última expresión representa la propagación de una partícula libre de (x, t) a (x', t') y en el segundo término representa la propagación libre de (x, t) a (x_1, t_1) , seguido por una dispersión en (x_1, t_1) , y la propagación libre de (x_1, t_1) , a (x', t') .

Con el fin de encontrar la función de Green $G_F(x, x')$ para la ecuación de Dirac (4.1), consideramos

$$(i\gamma \cdot \partial - m)G_F(x, x') = \delta(x - x').$$

Dado que la función de Green es invariante ante traslaciones, $G_F(x, x') = G_F(x - x')$, podemos encontrar su representación en el espacio de momentos a través de su transformada de Fourier, $S_F(p)$, definido como

$$G_F(x, x') = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} S_F(p) (e^{-ip \cdot x'})^*,$$

donde el asterisco denota conjugación compleja. Al actuar con el operador de Dirac sobre $G_F(x, x')$, tenemos que

$$\begin{aligned} (i\gamma \cdot \partial - m)G_F(x, x') &= (i\gamma \cdot \partial - m) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} S_F(p) (e^{-ip \cdot x'})^* \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} (\gamma \cdot p - m) S_F(p) (e^{-ip \cdot x'})^* \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} \delta(x - x')^*, \end{aligned}$$

donde en la última línea se ha usado la representación de la función δ en d -dimensiones en términos de ondas planas. Por lo tanto, vemos que

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma \cdot p - m}.$$

Este es el propagador de electrones libres en el espacio de momentos, adecuado para los cálculos en electrodinámica cuántica. Sin embargo, cuando se pierde la isotropía, las partículas dejan de ser descritas por ondas planas y sus propagadores correspondientes tienen una forma más complicada en la base de eigenestados de momento. Un ejemplo de tales sistemas es un gas de

electrones sometidos a un intenso campo magnético en una dirección fija. El problema cuántico para este sistema, conocido como el problema de Landau [35], revela interesantes características de la dinámica de los electrones en el campo magnético externo. Por un lado, la fuerza de Lorentz hace una clara separación entre las componentes paralelas (libres) y transversales (dinámicas) de las trayectorias de los electrones con respecto a las líneas de campo. Por otra parte, en el plano transversal, las trayectorias están confinadas. En tal caso, los niveles de energía, llamados niveles de Landau, desarrollan un espectro discreto. En la siguiente sección se considera el movimiento de los electrones en campos electromagnéticos y usaremos un método similar para al presentado aquí para encontrar el propagador en este caso.

4.2. El Propagador de Dirac en Campos Externos

A continuación emplearemos el método de Ritus para incorporar los efectos de campos electromagnéticos externos en las funciones de Green. La idea del método es encontrar las soluciones de la ecuación de Dirac en presencia de campos externos en términos de las eigenfunciones del operador

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p = p^2 \mathbb{E}_p,$$

donde \mathbb{E}_p son las eigenfunciones de Ritus. Consideremos un espacio de Minkowski (2+1) dimensional espacio-tiempo con métrica $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ y usaremos unidades naturales $\hbar = \tilde{c} = 1$, donde \tilde{c} es la “velocidad planar de la luz” (velocidad de Fermi). En el grafeno por ejemplo, que es unos dos ordenes de magnitud menor que c [36], [37].

En QED₃, en la representación irreducible, podemos elegir las matrices γ^μ como:

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = \pm i\sigma^2.$$

Tomaremos primero $\gamma^2 = i\sigma^2$. Es fácil corroborar que estas matrices satisfacen $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda$, con $\gamma_\lambda = g_{\mu\lambda} \gamma^\mu$.

En un campo electromagnético de fondo, la ecuación de Dirac toma la forma

$$(\gamma \cdot \Pi - m)\Psi = 0.$$

Consideremos, para claridad del método, un campo magnético que apunta perpendicularmente al plano de movimiento de los electrones, de tal manera

que, trabajando en una norma de tipo Landau, $A_\mu = (0, 0, W(x))$, donde $W(x)$ es una función tal que $W'(x) = \partial_x W(x)$ define el perfil del campo. Como antes, estamos interesados en la solución de la ecuación (4.2), a través de método de Green. En presencia de un campo electromagnético externo, la función de Green $G(x, x')$ satisface

$$((\gamma \cdot \Pi) - m)G(x, x') = \delta(x - x').$$

Ya que $(\gamma \cdot \Pi)$ no conmuta con el operador del momento, ni la función de onda, ni $G(x, x')$ pueden ser expandidos en ondas planas y esto no permite tener un propagador diagonal en el espacio de momentos. Para resolver este problema, el punto crucial es comprender que la función de Green debe ser una combinación de todas las estructuras escalares obtenidas mediante la contracción de las matrices γ^μ , el momento canónico Π_μ y el tensor de esfuerzos electromagnéticos $F_{\mu\nu} = [\Pi_\mu, \Pi_\nu]/e = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que son compatibles con la simetría de Lorentz, la invariancia de norma y la conjugación de carga de la electrodinámica cuántica. En nuestras convenciones, tenemos que

$$G(x, x') = G(\gamma_\mu \Pi^\mu, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, (\tilde{F}^\nu \Pi_\nu)^2),$$

donde $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ y $\tilde{F}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha} F^{\nu\alpha}$ es el tensor de esfuerzos dual, que en (2+1) dimensiones es simplemente un vector. La observación clave es que todas estas estructuras conmutan con $(\gamma \cdot \Pi)^2$, esto es

$$[(\gamma \cdot \Pi)^2, (\gamma \cdot \Pi)] = [(\gamma \cdot \Pi)^2, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = [(\gamma \cdot \Pi)^2, (\tilde{F}^\mu \Pi_\mu)^2] = 0,$$

relaciones que son fáciles de probar. Como consecuencia, tenemos que

$$[(\gamma \cdot \Pi)^2, G(x, x')] = 0.$$

Este es el punto principal en el método de Ritus, ya que sabemos que los operadores que conmutan tiene eigenfunciones simultáneas. Para nuestro problema particular, esto nos permite expandir la función de Green $G(x, x')$ en la base de las eigenfunciones de $(\gamma \cdot \Pi)^2$. Además, si hacemos una transformación de semejanza en la cual $(\gamma \cdot \Pi)^2$ adquiera una forma diagonal en el espacio de momentos, entonces la misma transformación hace que la función de Green sea diagonal. Esto es válido en general por lo que el método Ritus se puede aplicar para obtener el propagador de partículas cargadas escalares [38] y vectoriales [39] de manera similar.

La transformación de semejanza que hace $(\gamma \cdot \Pi)^2$ diagonal en el espacio de momentos es tal que

$$\mathbb{E}_p^{-1}(\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p = p^2 \mathbb{I}, \quad (4.3)$$

donde \mathbb{E}_p es la matriz de transformación, \mathbb{I} es la matriz unidad y p^2 es un número real. Por lo tanto, al aplicar las funciones \mathbb{E}_p al propagador, éste se volverá diagonal en el espacio de momentos.

4.3. El Propagador del Electrón en Campos Magnéticos

Es importante notar que para el caso fermiónico, el operador de espín se encuentra en términos de las matrices γ^μ y entonces las funciones \mathbb{E}_p heredan su forma de matricial, pero diferentes partículas cargadas, el operador de espín tiene diferente forma. Por ejemplo, para las partículas escalares, las funciones \mathbb{E}_p son simplemente escalares [38], mientras que en el caso de los bosones de norma cargados, la estructura del espín está inmersa en un tensor de Lorentz, y por lo tanto las funciones \mathbb{E}_p también satisfacen una estructura tensorial de Lorentz [39]. Nuestra tarea ahora es estudiar la estructura de las matrices \mathbb{E}_p para el caso de los fermiones de Dirac en (2+1)-dimensiones. Para esto tomamos un campo magnético de perfil espacial arbitrario en dirección \hat{z} . Entonces podemos escribir $A^\mu = (0, 0, W(x))$ y tenemos que $\vec{B} = W'(x)\hat{z}$. Empezaremos usando la primera representación irreducible de matrices γ^μ , Ec. (2.30). La transformación de semejanza (4.3) puede escribirse como

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p = p^2 \mathbb{E}_p,$$

que es una ecuación de eigenvalores para las eigenfunciones de Ritus \mathbb{E}_p . Explícitamente, tenemos que

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot \Pi)^2 &= \gamma^\mu \Pi_\mu \gamma^\nu \Pi_\nu = \frac{1}{4}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\})([\Pi_\mu, \Pi_\nu] + \{\Pi_\mu, \Pi_\nu\}) \\ &= \frac{1}{4}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + 2g^{\mu\nu})(ieF_{\mu\nu} + \{\Pi_\mu, \Pi_\nu\}) = \\ &= \Pi^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]ieF_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que resolver

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p = (\Pi^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})\mathbb{E}_p = p^2 \mathbb{E}_p.$$

Como en nuestro caso $A^\mu = (0, 0, W(x))$, la última ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p &= (\Pi^2 + e\sigma^{12} F_{12}) \mathbb{E}_p. \\ &= (\Pi_0^2 - \Pi_1^2 - \Pi_2^2 + e\sigma^3 W'(x)) \mathbb{E}_p. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora, definamos el operador de Pauli como:

$$\mathcal{H} \equiv -(\gamma \cdot \Pi)^2 + \Pi_0^2 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 - eW'(x)\sigma^3.$$

Es claro que se cumple:

$$\begin{aligned} [\gamma \cdot \Pi, i\partial_t] &= 0 \Rightarrow i\partial_t \mathbb{E}_p = p_0 \mathbb{E}_p, \\ [\gamma \cdot \Pi, -i\partial_y] &= 0 \Rightarrow -i\partial_y \mathbb{E}_p = p_2 \mathbb{E}_p, \\ [\gamma \cdot \Pi, \mathcal{H}] &= 0 \Rightarrow \mathcal{H} \mathbb{E}_p = k \mathbb{E}_p, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde p_0 , p_2 y k son los eigenvalores Π_0 , $-i\partial_y$ y \mathcal{H} respectivamente. Con estos eigenvalores etiquetaremos las soluciones de la ecuación de Dirac en un campo de fondo. Además, del último operador, obtenemos

$$\mathcal{H} \mathbb{E}_p = (-(\gamma \cdot \Pi)^2 + p_0^2) \mathbb{E}_p = k \mathbb{E}_p$$

de donde

$$(p_0^2 - k) = p^2,$$

relación que nos será útil posteriormente. Sustituyendo \mathcal{H} en la ecuación (4.4), obtenemos

$$(-\Pi_1^2 - \Pi_2^2 + e\sigma^3 F_{12}) \mathbb{E}_p = -k \mathbb{E}_p$$

o bien

$$(\partial_x^2 - (-i\partial_y - eW(x))^2 + e\sigma^3 W'(x)) \mathbb{E}_p = -k \mathbb{E}_p. \quad (4.6)$$

Los dos primeros términos del lado izquierdo de la ecuación actúan en los grados de libertad orbitales de las eigenfunciones \mathbb{E}_p , mientras que el último término actúa sólo en sus grados de libertad de espín [Apéndice C]. Entonces podemos construir las eigenfunciones de Ritus en término de los vectores columna

$$\mathbb{E}_{p,\sigma} = E_{p,\sigma}(z)\omega_\sigma, \quad (4.7)$$

donde ω_σ son las eigenfunciones de σ^3 , con eigenvalor $\sigma = \pm 1$, es decir

$$\mathbb{E}_p(z) = (\mathbb{E}_{p,1} \quad \mathbb{E}_{p,-1}) = \begin{pmatrix} E_{p,1}(z) & 0 \\ 0 & E_{p,-1}(z) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Aquí p representa a los eigenvalores (p_0, p_2, k) y z a las variables (t, x, y) . Introduciendo la dependencia en t y y dada por (4.5), tenemos que

$$E_{p,\sigma}(z) = N_\sigma e^{-i(p_0 t - i p_2 y)} F_{k,p_2,\sigma}(x), \quad (4.9)$$

con N_σ una constante de normalización. Sustituyendo el ansatz (4.7) y (4.9) en la ecuación (4.6), encontramos la ecuación para $F_{k,p_2,\sigma}(x)$, que contiene toda la dependencia en x :

$$[\partial_x^2 - (-p_2 + eW(x))^2 + e\sigma W'(x)] F_{k,p_2,\sigma}(x) = -k F_{k,p_2,\sigma}(x), \quad (4.10)$$

que es el Hamiltoniano de Pauli con masa $m = 1/2$ y factor giromagnético $g = 2$ y es supersimétrica en el sentido de mecánica cuántica (SUSY-QM) [33]. Aquí, $\bar{W}(x) = eW - p_2$ es el superpotencial de las ecuaciones (3.1) y (3.2). Siendo una base completa ortogonal, las funciones $\mathbb{E}_p(z)$ satisfacen

$$\begin{aligned} \int dz \bar{\mathbb{E}}_{p'}(z) \mathbb{E}_p(z) &= \delta(p - p'), \\ \int dp \mathbb{E}_p(z) \bar{\mathbb{E}}_p(z') &= \delta(z - z'), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\bar{\mathbb{E}}_p(z) = \gamma^0 \mathbb{E}_p^\dagger(z) \gamma^0$ e \mathbb{I} es la matriz identidad de 2×2 . Ahora, construyamos las soluciones a la ecuación de Dirac en presencia del campo magnético externo,

$$(\gamma \cdot \Pi - m)\Psi = 0.$$

Para esto, usaremos el tri-momento

$$\bar{p} = (p_0, 0, \sqrt{k}), \quad \bar{p}^2 = p_0^2 - k = p^2, \quad (4.12)$$

que desempeña un papel importante en el método que estamos usando. Su definición incluye los números cuánticos dinámicos p_0 y k , pero no p_2 , que fija el origen de la coordenada x . Esto significa que en el método Ritus, el propagador está escrito sólo en términos de los valores propios de los operadores dinámicos que conmutan con $(\gamma \cdot \Pi)$. Notemos que por la segunda expresión que satisface \bar{p} en (4.12), se define a través de la relación

$$(\gamma \cdot \Pi) \mathbb{E}_p(z) = \mathbb{E}_p(z) (\gamma \cdot \bar{p}) \quad (4.13)$$

Podemos probar esta relación escribiéndola en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} i\partial_t E_{p,1} & D_- E_{p,-1} \\ D_+ E_{p,1} & -i\partial_t E_{p,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 E_{p,1} & -\sqrt{k} E_{p,1} \\ \sqrt{k} E_{p,-1} & -p_0 E_{p,-1} \end{pmatrix},$$

con

$$D_{\pm} = -\partial_x \pm (-i\partial_y - eW). \quad (4.14)$$

De las propiedades de las funciones \mathbb{E}_p , Ec. (4.5), vemos que esto es cierto para las componentes de la diagonal; las componentes fuera de la diagonal nos lleva al sistema de ecuaciones

$$D_- E_{p,-1} = -\sqrt{k} E_{p,1}, \quad (4.15)$$

$$D_+ E_{p,1} = \sqrt{k} E_{p,-1}. \quad (4.16)$$

si aplicamos el operador del lado izquierdo de la ecuación (4.15) a la ecuación (4.16), obtenemos

$$\begin{aligned} D_- D_+ E_{p,1} &= D_- \sqrt{k} E_{p,-1} \\ [\partial_x^2 + e\partial_x W - eW\partial_x - (-i\partial_y - eW)^2] E_{p,1} &= -k E_{p,1} \\ [\partial_x^2 + eW' - (-i\partial_y - eW)^2] E_{p,1} &= -k E_{p,1} \end{aligned}$$

lo cual es la ecuación que satisface $E_{p,1}$, ecuación (4.10). Análogamente, si aplicamos el operador que esta del lado izquierdo en la ecuación (4.16) a la ecuación (4.15), obtenemos

$$[\partial_x^2 - eW' + (-i\partial_y - eW)^2] E_{p,-1} = -k E_{p,-1},$$

con lo cual queda demostrada la proposición (4.13). Con ayuda de esta relación, proponemos la solución a la ecuación de Dirac como $\Psi = \mathbb{E}_p(z) u_{\bar{p}}$, donde $u_{\bar{p}}$ satisface

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m) \mathbb{E}_p(z) u_{\bar{p}} = \mathbb{E}_p(z) (\gamma^\mu \bar{p}_\mu - m) u_{\bar{p}} = 0, \quad (4.17)$$

es decir una ecuación de Dirac libre. En la representación que estamos usando para las matrices γ 's, $u_{\bar{p}}$ satisface

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & -\sqrt{k} \\ \sqrt{k} & -(p_0 + m) \end{pmatrix} u_{\bar{p}}^{(A)} = 0,$$

donde el supraíndice A etiqueta a la representación utilizada. Sea $u_{\bar{p}}^T = (u_1, u_2)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}(p_0 - m)u_1 - \sqrt{k}u_2 &= 0 \\ \sqrt{k}u_1 - (p_0 + m)u_2 &= 0.\end{aligned}$$

Así que, salvo una constante de normalización, las soluciones son

$$u_{\bar{p}1}^{(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{k}}{p_0+m} \end{pmatrix}, \quad u_{\bar{p}2}^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{k}}{p_0-m} \\ 1 \end{pmatrix},$$

y las soluciones a la ecuación de Dirac son:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \mathbb{E}_p u_{\bar{p}1}^{(A)} = \begin{pmatrix} E_{p,1} \\ \frac{\sqrt{k}}{p_0+m} E_{p,-1} \end{pmatrix}, \\ \Psi_2 &= \mathbb{E}_p u_{\bar{p}2}^{(A)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{k}}{p_0-m} E_{p,1} \\ E_{p,-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Notemos que $u_{\bar{p}}$ es simplemente un espinor libre que describe a un electrón con momento \bar{p} (4.17) para las soluciones a la ecuación de Dirac. La información concerniente a la interacción con el campo magnético de fondo ha sido factorizada en las funciones \mathbb{E}_p .

El vector \bar{p} , también nos sirve para encontrar el propagador del fermión en presencia del campo externo a través del método de Green, donde está contenida la información sobre la evolución espacio-temporal del fermión en presencia de un campo magnético. Para hallarlo, tenemos que resolver la ecuación de Dirac para la función de Green

$$(\gamma \cdot \Pi - m)G(z, z') = \delta(z - z'),$$

y sabemos que

$$\int d^3p \mathbb{E}_p(z) \bar{\mathbb{E}}_p(z') = \delta(z - z')$$

Entonces, si definimos

$$G(z, z') = \int d^3p \mathbb{E}_p(z) S(p) \bar{\mathbb{E}}_p(z'),$$

y aplicamos el operador de Dirac, obtenemos

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot \Pi - m) G(z, z') &= \int d^3p (\gamma \cdot \Pi - m) \mathbb{E}_p(z) S(p) \bar{\mathbb{E}}_p(z') \\ &= \int d^3p \mathbb{E}_p(x) (\gamma \cdot \bar{p} - m) S(p) \bar{\mathbb{E}}_p(y) = \delta(x - y) \end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente la ecuación (4.12). Así, vemos que

$$S(p) = \frac{1}{\gamma \cdot \bar{p} - m},$$

similar al propagador de partícula libre, pero el momento lleva los números cuánticos de la dinámica en presencia del campo externo. Vemos que físicamente, las funciones \mathbb{E}_p corresponden a los estados asintóticos de los electrones con momento \bar{p} en el campo externo de fondo considerado. En el espacio de configuración, escribimos al propagador como

$$\begin{aligned} S(z, z') &= \int d^3p \mathbb{E}_p(z) \left[\frac{1}{\gamma \cdot \bar{p} - m} \right] \bar{\mathbb{E}}_p(z') = \int d^3p \mathbb{E}_p(z) \left[\frac{\gamma \cdot \bar{p} + m}{p^2 - m^2} \right] \bar{\mathbb{E}}_p(z') \\ &= \int d^3p (\gamma \cdot \Pi + m) \mathbb{E}_p(z) \left[\frac{1}{p^2 - m^2} \right] \bar{\mathbb{E}}_p(z'). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Varias observables físicas relevantes se pueden calcular de inmediato, tales como la densidad de probabilidad, los coeficientes de transmisión y de reflexión y la densidad. Una cantidad física importante determinada por las funciones de Green causal es la corriente eléctrica del vacío $j^\mu = -ie Tr\{\gamma^\mu S(z, z)\}$ inducida por el campo de fondo. En un campo electromagnético uniforme y constante en QED₃₊₁, la corriente eléctrica del vacío es cero. Esto no es así en QED₂₊₁. A partir de la expresión (4.19), podemos encontrar el valor de la densidad de carga eléctrica del vacío j_e^0 inducida por el campo magnético de fondo.

Primero notemos que podemos escribir $\mathbb{E}_p = E_{p,1}P_+ + E_{p,-1}P_-$ y $\bar{\mathbb{E}}_p = E_{p,1}^*P_+ + E_{p,-1}^*P_-$, donde usamos los operadores de proyección $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^0)$, explícitamente

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

que satisfacen $P_\pm P_\pm = P_\pm$, $P_\pm P_\mp = 0$. Con estos calculamos

$$Tr\{\gamma^0 S(z, z)\} = Tr\left\{\gamma^0 \int d^3p \left[\frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2} \right] (|E_{p1}|^2 P_+ + |E_{p2}|^2 P_-) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} \left(p_\mu \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma^0 \gamma^\mu}{2} (|E_{p1}|^2 + |E_{p2}|^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0}{2} (|E_{p1}|^2 - |E_{p2}|^2) \right\} \right. \\
&\quad \left. + m \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma^0}{2} (|E_{p1}|^2 + |E_{p2}|^2) + \frac{\gamma^0 \gamma^0}{2} (|E_{p1}|^2 - |E_{p2}|^2) \right\} \right)
\end{aligned}$$

Ahora, nuestras matrices γ^μ están en términos de matrices de Pauli, para las cuales $\text{Tr}\{\sigma_a \sigma_b\} = \delta_{ab}$, con lo que:

$$\text{Tr}\{\gamma^0 S(z, z)\} = \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} \left(p_0 (|E_{p1}|^2 + |E_{p2}|^2) + \frac{m}{2} (|E_{p1}|^2 - |E_{p2}|^2) \right)$$

entonces

$$j^0 = -ie \text{Tr}\{\gamma^0 S(z, z)\} = -ie \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} [(p_0 + m) |E_{p,1}|^2 + (p_0 - m) |E_{p,-1}|^2].$$

Usando $p^2 = \bar{p}^2 = p_0^2 - k$ y que $p_0 \in (-\infty, \infty)$, tenemos

$$\begin{aligned}
j^0 &= -ie \int dk dp_2 \left[\int \frac{dp_0}{p_0^2 - k - m^2} p_0 (|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2) \right. \\
&\quad \left. + \int \frac{dp_0}{p_0^2 - k - m^2} m (|E_{p,1}|^2 - |E_{p,-1}|^2) \right] \\
&= -ie \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} m (|E_{p,1}|^2 - |E_{p,-1}|^2). \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Para las corrientes $j^l = -ie \text{Tr}\{\gamma^l S(z, z)\}$, con $l = 1, 2$, usamos la ecuación (4.19) en la forma

$$S(z, z') = \int d^3p \mathbb{E}_p(z) \left[\frac{\gamma^\mu \bar{p}_\mu + m}{p^2 - m^2} \right] \bar{\mathbb{E}}_p(z')$$

y entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\gamma^l S\} &= \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} [\bar{p}_\mu \text{Tr} \{ \gamma^l (E_{p,1} P_+ + E_{p,-1} P_-) \gamma^\mu \\
&\quad (E_{p,1}^* P_+ + E_{p,-1}^* P_-) \} + m \text{Tr} \{ \gamma^l (E_{p,1} P_+ + \\
&\quad E_{p,-1} P_-) (E_{p,1}^* P_+ + E_{p,-1}^* P_-) \}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} \left[\bar{p}_\mu Tr \left\{ \gamma^l \left[\frac{|E_{p,1}|^2}{4} (\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) + \right. \right. \right. \\
&\quad + \frac{E_{p,1} E_{p,-1}^*}{4} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^\mu - \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) + \\
&\quad + \frac{E_{p,-1} E_{p,1}^*}{4} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^\mu - \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) \\
&\quad \left. \left. + \frac{|E_{p,-1}|^2}{4} (\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) \right] \right\} + \\
&\quad + m Tr \left\{ \left(\frac{|E_{p,1}|^2}{2} + \frac{|E_{p,-1}|^2}{2} \right) \gamma^l + \left(\frac{|E_{p,1}|^2}{2} - \frac{|E_{p,-1}|^2}{2} \right) \gamma^l \gamma^0 \right\} \Big] \\
&= \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} \bar{p}_\mu \left[\frac{|E_{p,1}|^2}{4} (-2\delta^{l\mu} + 2\delta^{l\mu}) + \right. \\
&\quad + \frac{E_{p,1} E_{p,-1}^*}{4} (-2\delta^{l\mu} - 4i\epsilon^{0\mu l} - 2\delta^{l\mu}) + \\
&\quad + \frac{E_{p,-1} E_{p,1}^*}{4} (-2\delta^{l\mu} - 4i\epsilon^{0\mu l} - 2\delta^{l\mu}) + \\
&\quad \left. \frac{|E_{p,-1}|^2}{4} (-2\delta^{l\mu} + 2\delta^{l\mu}) \right],
\end{aligned}$$

donde $S = S(z, z)$ y en el último paso hemos usado que

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma^l \gamma^\mu\} &= -2\delta^{l\mu}, \\
Tr\{\gamma^l \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0\} &= Tr\{\gamma^l (2g^{\mu 0} - \gamma^\mu \gamma^0) \gamma^0\} = 2\delta^{l\mu}.
\end{aligned}$$

Ahora, $\bar{p} = (p_0, 0, \sqrt{k})$. Entonces tenemos para la traza asociada a cada componente de la corriente:

$$Tr\{\gamma^l S(z, z)\} = \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} \alpha^{(l)} [E_{p,1}^* E_{p,-1} + E_{p,1} E_{p,-1}^*],$$

donde $\alpha^{(l)} = i^l \sqrt{k}$ para $l = 1, 2$. Ahora, el índice p representa la dependencia en (p_0, p_2, k) , es decir

$$\int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} = \int \frac{dp_0 dp_2 dk}{p_0^2 - k - m^2},$$

pero por la condición (4.11), también tenemos ortonormalidad con el índice de sigma (± 1), de donde tenemos que $j^1 = j^2 = 0$.

Ahora, pasaremos a realizar el cálculo del condensado fermiónico. El condensado fermiónico se define como:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = Tr\{iS(z, z)\} = Tr\left\{(\gamma \cdot \Pi + m) \int d^3p \mathbb{E}_p(z) \left[\frac{1}{p^2 - m^2}\right] \mathbb{E}_p(z')\right\}.$$

Utilizando los mismos proyectores que en el caso de la corriente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= Tr\left\{i \int d^3p \left[\frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2}\right] (|E_{p,1}|^2 P_+ + |E_{p,-1}|^2 P_-)\right\} \quad (4.22) \\ &= i \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} \left[p_0 (|E_{p,1}|^2 - |E_{p,-1}|^2) + m (|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2)\right]. \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo argumento que en el caso de la corriente para las integrales que incluyen términos en p_0 , obtenemos:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = i \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} m [|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2]. \quad (4.23)$$

Las Ecs. (4.21) y (4.23) son la corriente y el condensado fermionico respectivamente en la primera representación irreducible de matrices de Dirac. A continuación veremos las diferencias que surgen en la segunda representación irreducible, la representación extendida y la representación reducible de matrices de Dirac.

4.4. Segunda Representación Irreducible

En la segunda representación inequivalente, las matrices γ^μ toman la siguiente forma:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = -i\sigma_2,$$

con lo que tenemos

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 = \Pi_0^2 - \Pi_1^2 - \Pi_2^2 - ie\sigma^3 F_{12},$$

y el operador \mathcal{H} , toma la forma:

$$\mathcal{H} = -(\gamma \cdot \Pi)^2 + \Pi_0 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + e\sigma^3 W'(x).$$

Haciendo lo mismo que en el caso anterior, el espinor (4.17), ahora satisface:

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & \sqrt{k} \\ -\sqrt{k} & -(p_0 + m) \end{pmatrix} u_{\bar{p}}^{(B)} = 0.$$

Sea $u_{\bar{p}}^{(B)T} = (u_1, u_2)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} (p_0 - m)u_1 + \sqrt{k}u_2 &= 0 \\ -\sqrt{k}u_1 - (p_0 + m)u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Así que, salvo una constante de normalización, las soluciones son

$$u_{\bar{p}1}^{(B)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{k}}{p_0 - m} \end{pmatrix}, \quad u_{\bar{p}2}^{(B)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{k}}{p_0 - m} \\ 1 \end{pmatrix},$$

y las soluciones a la ecuación de Dirac son

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \mathbb{E}_p u_{\bar{p}1}^{(B)} = \begin{pmatrix} E_{p,-1} \\ -\frac{\sqrt{k}}{p_0 - m} E_{p,1} \end{pmatrix}, \\ \Psi_2 &= \mathbb{E}_p u_{\bar{p}2}^{(B)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{k}}{p_0 - m} E_{p,-1} \\ E_{p,1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Entonces la ecuación $(\gamma \cdot \Pi)^2 \mathbb{E}_p = p^2 \mathbb{E}_p$ se vuelve

$$(-\Pi_z^2 - \Pi_2^2 - e\sigma^3 F_{12}) \mathbb{E}_p = -k \mathbb{E}_p,$$

de donde

$$[\partial_x^2 - (-p_2 + eW(x))^2 - e\sigma^3 W'(x)] \mathbb{E}_p = -k \mathbb{E}_p.$$

Si comparamos esta ecuación con la ecuación (4.10) y tomando en cuenta que σ toma los valores ± 1 , podemos observar que esto provoca el intercambio de las soluciones $E_{p,1} \leftrightarrow E_{p,-1}$, es decir, si en la primera representación teníamos las soluciones (4.9), ahora serán

$$\mathbb{E}_p(z) = \begin{pmatrix} E_{p,-1} & 0 \\ 0 & E_{p,1}(z) \end{pmatrix},$$

y el condensado y la corriente fermiónicos, pueden ser calculados de la misma forma que en la primera representación. Entonces la densidad de carga es

$$j_B^0 = -ie \int \frac{d^3 p}{p^2 - m^2} m \left[|E_{p,-1}|^2 - |E_{p,1}|^2 \right] = -j_A^0$$

donde el subíndice B indica que estamos en la segunda representación y el A denota a la primera representación irreducible. De la misma forma, el condensado es:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_B = i \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} m \left[|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2 \right] = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_A.$$

Analicemos las expresiones correspondientes a estas cantidades en el resto de las representaciones.

4.5. Representación Extendida

La representación irreducible A describe fermiones con espín arriba y antifermiones con espín abajo, mientras que la representación irreducible B describe a fermiones con espín abajo y antifermiones con espín arriba [23], así que una descripción que incluya las orientaciones de espín familiares en el espacio, debería incluir ambas representaciones. Usando la representación extendida, tenemos

$$j^0 = j_A^0 + j_B^0 = 0$$

para la corriente fermiónica y para el condensado:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_A + \langle \bar{\psi}\psi \rangle_B \\ &= 2i \int \frac{d^3p}{p^2 - m^2} m \left[|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2 \right]. \end{aligned}$$

El primero de estos resultados nos indica que, aunque la formación de pares crea una polarización del vacío, que produce una distribución de carga distinta de cero, la producción de pares con alineación de espín contraria produce una distribución de carga de signo opuesto y como ambas fluctuaciones del vacío son igualmente probables, la carga neta total es cero, lo cual físicamente es correcto, ya que necesitamos que haya conservación de carga. El segundo resultado en cambio, es un parámetro de la modificación de las propiedades del vacío, debido al campo magnético externo, en el cual intervienen ambos pares producidos.

Capítulo 5

Perfiles de Campo con Solución Analítica

5.1. Campo Magnético Constante

Aunque hemos hecho todos los cálculos anteriores pensando en un campo arbitrario, es importante corroborar lo obtenido con las soluciones de campo magnético constante que han sido encontrados por otros métodos [40]. Y ya que hemos puesto las soluciones de todas las representaciones en términos de las funciones (4.9), sólo calcularemos las soluciones para $(\gamma \cdot \Pi)^2$ en la primera representación irreducible y daremos los resultados para las otras representaciones. Para el caso de un campo magnético uniforme en dirección z , corresponde a escoger $A^\mu = (0, 0, W(x))$ con $W(x) = Bx$ y para simplificar los cálculos posteriores, redefiniremos el eigenvalor del operador \mathcal{H} de la siguiente forma

$$\mathcal{H}\mathbb{E}_p = [-(\gamma \cdot \Pi)^2 + \Pi_0] \mathbb{E}_p = 2|eB|k\mathbb{E}_p; ,$$

de modo que la ecuación de Pauli (4.10) se vuelve:

$$\left[\partial_x^2 - (-p_2 + eBx)^2 + \sigma eB \right] F_{k,p_2,\sigma}(x) = -2|eB|k F_{k,p_2,\sigma}(x) ,$$

con $\sigma = \pm 1$. Si hacemos $\eta = \sqrt{2|eB|}(x - \frac{p_2}{eB})$, y simplificamos, obtenemos

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k + \frac{\sigma}{2} \text{sgn}(eB) - \frac{\eta^2}{4} \right] F_{k,p_2,\sigma}(\eta) = 0 . \quad (5.1)$$

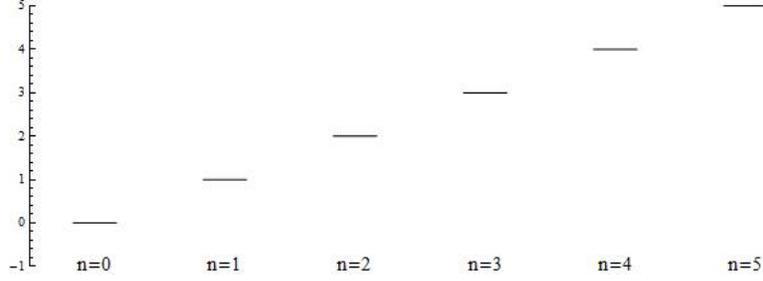


Figura 5.1: Niveles de energía para un campo magnético uniforme, en unidades $eB = 1$. El índice n nos da el nivel de Landau correspondiente.

Las soluciones a esta ecuación son las funciones parabólicas cilíndricas (FPC) $D_n(\eta)$ con $n = k + \frac{\sigma}{2} \text{sgn}(eB) - \frac{1}{2}$; que también pueden ser puestas en términos de los polinomios de Hermite [41]

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right).$$

El índice n esta restringido a ser entero positivo; así que observemos que si tenemos un campo tal que $\text{sgn}(eB) > 0$, para $\sigma = 1$ el índice n corre como k mientras que si $\sigma = -1$, el índice n corre como $k - 1$. Las FPC cumplen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_m(z) D_n(z) dz = (2\pi)^{1/2} m! \delta_{m,n}. \quad (5.2)$$

Entonces, las soluciones (4.9) para el caso de campo magnético constante normalizadas adquieren la forma

$$E_{p,1} = \frac{(\pi|eB|)^{1/4}}{2\pi^{3/2}(k!)^{1/2}} e^{-ip_0t + ip_2y} D_k(\eta)$$

$$E_{p,-1} = \frac{(\pi|eB|)^{1/4}}{2\pi^{3/2}(k-1)!^{1/2}} e^{-ip_0t + ip_2y} D_{k-1}(\eta)$$

Podemos notar por la ecuación (4.12), las energías vienen dadas por $\sqrt{p_0^2 - |eB|k}$. Así que a excepción del caso $n = 0, \sigma = 1$, los niveles con $n, \sigma = -1$ y aquellos con $n + 1, \sigma = 1$ tienen las mismas energías $\sqrt{p_0^2 - |eB|(n + 1)}$. Esto era de esperarse, por los argumentos de supersimetría dado en el capítulo 3. En la

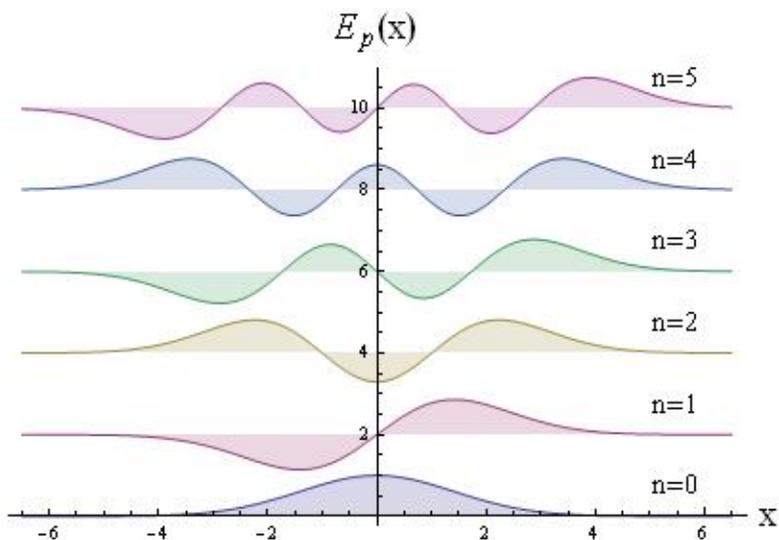


Figura 5.2: Las funciones \mathbb{E}_p para campo magnético constante, en unidades arbitrarias para varios niveles de Landau n . La escala esta dada por $eB = 1$ y $P_2 = 0$.

Figura 5.1 podemos ver la forma de los niveles de energía para $\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_{p,1}$, los cuales crecen de manera lineal con el nivel de Landau correspondiente. En la Figura 5.2 podemos observar las soluciones $\mathbb{E}_{p,1}$ para algunos niveles de Landau n en unidades arbitrarias $eB = 1$ y $p_2 = 0$. De la definición de $\eta = \sqrt{2|eB|}(x - \frac{p_2}{eB})$ podemos observar que p_0 distinto a cero, sólo se traduce en un desplazamiento de las funciones en la dirección del eje x , por lo que graficar $\mathbb{E}_p(x)$ en $p_2 = 0$ es lo mismo que graficar $\mathbb{E}_p(\eta)$ Como mencionamos anteriormente, el superpotencial potencial esta dado por $\bar{W}(x) = eW(x) - p_2$. A partir de estos resueltos, es fácil encontrar observables físicos como la densidad de probabilidad que es una combinación lineal de $|\mathbb{E}_p|^2$. En las unidades utilizadas, estas funciones están graficadas en la Figura 5.3, donde la curva sólida que envuelve estas soluciones corresponde al potencial asociado supersimétrico

$$y = \bar{W}^2(x) - \bar{W}'(x) \quad (5.3)$$

que en este caso es simplemente $x^2 - 1$ Si separamos el nivel más bajo, la

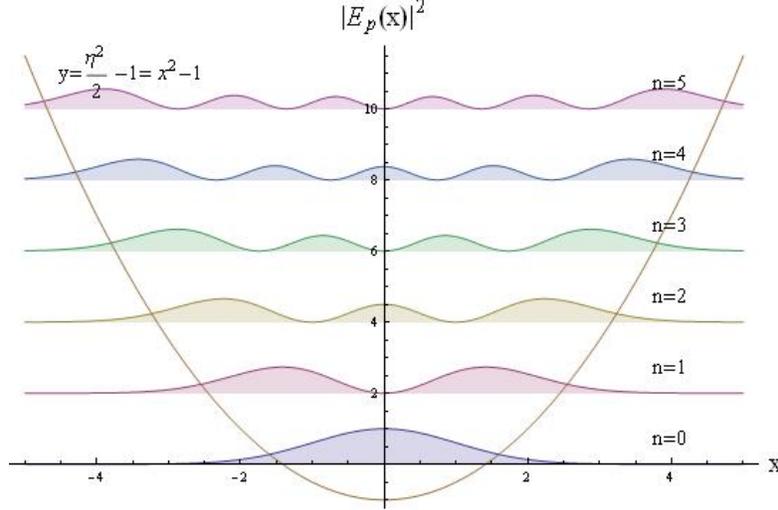


Figura 5.3: Las eigenfunciones $|\mathbb{E}|^2$ para campo magnético constante, en unidades arbitrarias para varios niveles de Landau n . La curva $y = x^2 - 1$ corresponde al potencial asociado supersimétrico 5.3.

densidad de carga (4.21) es

$$j^0 = -iem \frac{(\pi|eB|)^{1/2}}{2^2\pi^3} \left(\int \frac{dp_2 dp_0 D_0^2(\eta)}{p_0^2 - m^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp_2 dp_0}{p_0^2 - 2|eB|k - m^2} \left[\frac{D_k^2(\eta)}{k!} - \frac{D_{k-1}^2(\eta)}{(k-1)!} \right] \right)$$

De la definición de η , podemos ver que

$$dp_2 = -d\eta \left(\frac{eB}{2} \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

de donde podemos observar que para $k \neq 0$, el término en paréntesis en la última integral es cero al integrar en $d\eta$ por la condición de ortogonalidad (5.2); entonces

$$\begin{aligned} j^0 &= iem \frac{(\pi|eB|)^{1/2}}{2^2\pi^3} \frac{\sqrt{eB}}{\sqrt{2}} \int \frac{dp_0}{p_0^2 - m^2} d\eta D_0^2(\eta) \\ &= \frac{ie^2 B m}{4\pi^2} \int \frac{dp_0}{p_0^2 - m^2} \end{aligned}$$

Ahora, bajo una rotación de Wick

$$j^0 = -\frac{e^2 m B}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{p_0^2 + m^2} = -\frac{e^2 B}{4\pi} \text{sgn}(m)$$

donde hemos usado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{|a|}. \quad (5.5)$$

Ahora, para el condensado fermiónico (4.23)

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= im \frac{(\pi |eB|)^{1/2}}{2^2 \pi^3} \left(\int \frac{dp_2 dp_0 D_0^2(\eta)}{p_0^2 - m^2} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp_2 dp_0}{p_0^2 - 2|eB|k - m^2} \left[\frac{D_k^2(\eta)}{k!} + \frac{D_{k-1}^2(\eta)}{(k-1)!} \right] \right) \\ &= -i \frac{meB}{2^2 \pi^2} \left(\int \frac{dp_0}{p_0^2 - m^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp_0}{p_0^2 - (2|eB|k + m^2)} \right) \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos nuevamente (5.4) para integrar en $d\eta$ y usado la condición (5.2). Ahora bajo una rotación de Wick y usando nuevamente (5.5) tenemos

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{meB}{4\pi} \left(\frac{1}{|m|} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2|eB|k + m^2}} \right). \quad (5.6)$$

En el límite de campo intenso, esperamos que los cambios relevantes en la estructura del vacío se den en el nivel más bajo de Landau i.e. es el primer término de la expresión anterior, donde

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{n=0, \sigma=1} = \frac{eB}{4\pi} \text{sgn}(m).$$

Este es un resultado bien conocido en la literatura.

5.2. Campo Magnético Exponencial

La mayoría de los problemas reales, no están relacionados con partículas en campos magnéticos constantes, en particular con la posibilidad de confinar partículas o quasipartículas en barreras magnéticas [42]. Esto podría ser

factible de hacer en campos inhomogéneos espacialmente, pero constantes en el tiempo. Esto se ha considerado para ser utilizado en la electrónica y la aplicaciones de la “espintrónica”, como en los transistores de un único electrón [43], en los llamados estados de borde magnético [44], que puede desempeñar un papel importante en la corriente de polarización de espín a lo largo de las líneas magnéticas, y en los puntos y antipuntos cuánticos magnéticamente confinados. Por otra parte, en el grafeno, el Efecto Hall Cuántico se ha observado a temperatura ambiente [45], pruebas que confirman el gran potencial de grafeno como material para ser utilizado en dispositivos electrónicos a base de carbono, por lo que es interesante estudiar los efectos en campos no homogéneos. En particular existen muchos fenómenos en la naturaleza donde la intensidad de las interacciones disminuye de manera exponencial. Nosotros estudiamos un campo estático en el tiempo, pero que decae exponencialmente en una dirección espacial. Un decaimiento exponencial esta descrito por la función

$$W(x) = \frac{-B}{\alpha} \exp\{-\alpha x\},$$

con lo que la ecuación (4.10) para este caso se vuelve

$$\left[\partial_x^2 - \left(-p_2 - \frac{eB}{\alpha} \exp\{-\alpha x\} \right)^2 + e\sigma B \exp\{-\alpha x\} \right] F_{k,p_2,\sigma}(x) = -k F_{k,p_2,\sigma}(x). \quad (5.7)$$

Si hacemos $\varrho = (2eB/\alpha) \exp\{-\alpha x\}$ y $s = -p_2/\alpha$ y simplificamos, la expresión anterior se convierte en

$$\left[\varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} - \left(s - \frac{1}{2} \varrho \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \varrho + \frac{k}{\alpha^2} \right] F_{k,p_2,\sigma}(\varrho) = 0. \quad (5.8)$$

Las soluciones a esta ecuación son las funciones

$$F_{k,p_2,\sigma}(\varrho) = e^{-\varrho/2} \varrho^B L_n^{2B}(\varrho)$$

donde $n = \frac{1}{2}(\sigma - 1 + 2s - 2\sqrt{-\frac{k}{\alpha^2} + s^2})$, $B = \sqrt{-\frac{k}{\alpha^2} + s^2} = (s - n) + \sigma - 1$ y las funciones $L_n^{2((s-n)+\sigma-1)}$ son los polinomios asociados de Laguerre y cuyos índices están restringidos a ser enteros. n es el número cuántico principal y s es un centro de oscilación ponderado por el factor de amortiguamiento α . Para encontrar las energías dadas por la ecuación (4.12), tenemos que encontrar k . En términos de n , los eigenvalores de k están dados por $k =$

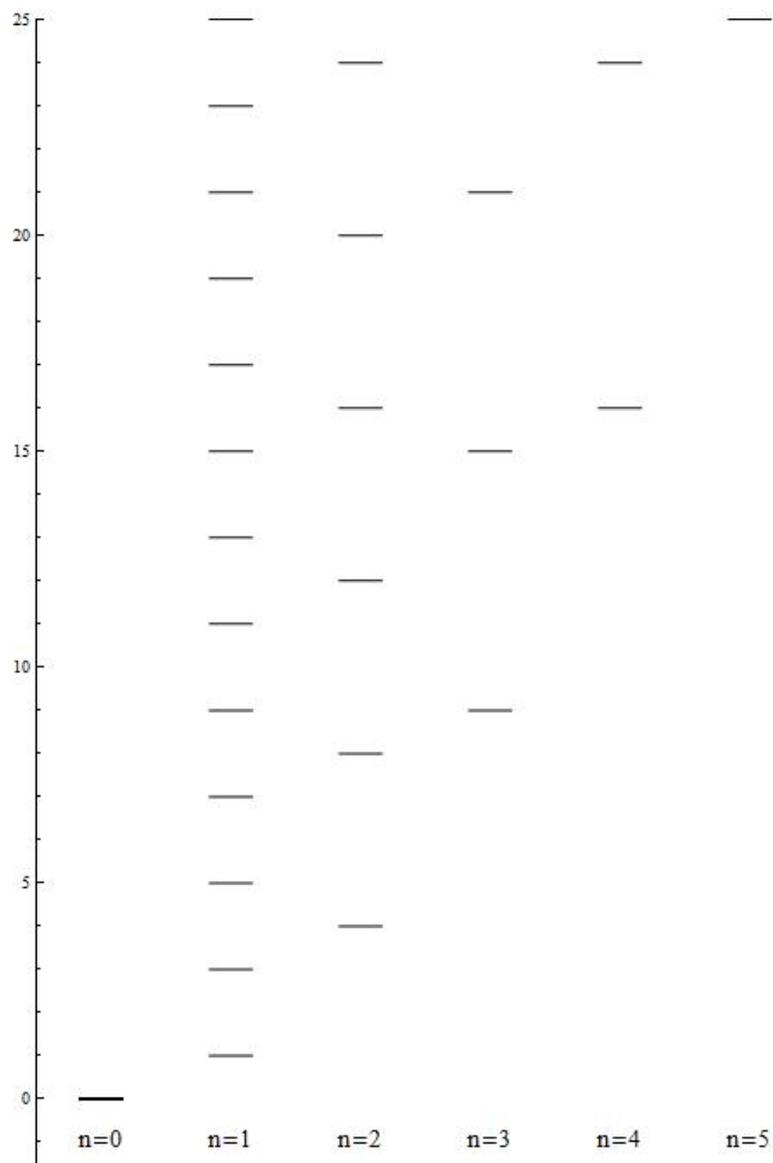


Figura 5.4: Niveles de energía para campo magnético exponencial en unidades $eB = \alpha = 1$. Aunque el número cuántico principal n nos da el nivel de Landau, hay creación de subniveles de energía que dependen del número cuántico s .

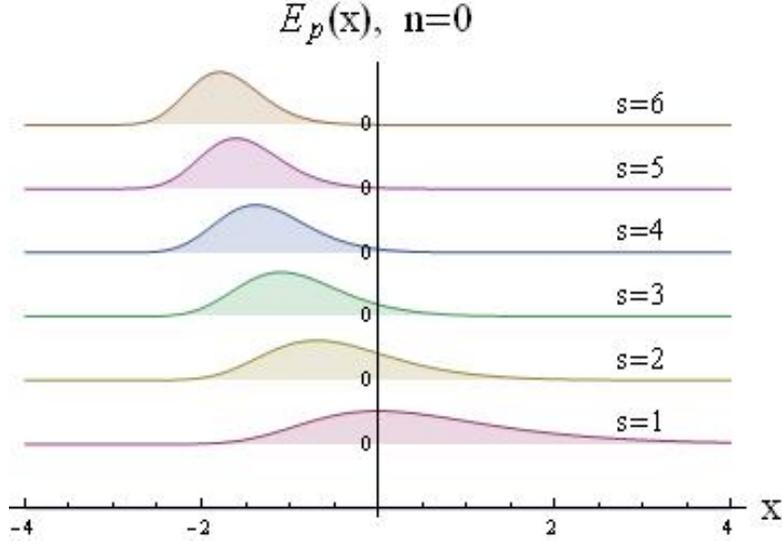


Figura 5.5: Gráficas de las soluciones $\mathbb{E}_{p,1}$ en unidades $eB = \alpha = 1$ para campo magnético exponencial. El número cuántico s provoca un desplazamiento de las soluciones en el eje x pero esta vez en forma cuantizada. Notemos que la energía en este nivel de Landau n es la misma para todas las soluciones.

$\alpha^2(s^2 - (s - n)^2)$ para $\sigma = 1$ y $k = \alpha^2(s^2 - (s - n - 1)^2)$ para $\sigma = -1$. De esto podemos observar explícitamente que a excepción del caso $n = 0$, $\sigma = 1$, los niveles con n , $\sigma = 1$ y $n - 1$, $\sigma = -1$ tiene las mismas energías $\sqrt{p_0^2 - \alpha^2(s^2 - (s - n)^2)} = \sqrt{p_0^2 - \alpha^2(2sn - n^2)}$ como nos dice SUSY-QM. Entonces, si cambiamos para $\sigma = -1$ el índice n , por $n - 1$, las soluciones (4.9) normalizadas para este caso son:

$$E_{p,1} = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{2n!(s-n)}{\Gamma(2s-n+1)} \right)^{1/2} e^{-ip_0t+ip_2y} e^{-\varrho/2} \varrho^{(s-n)} L_n^{2(s-n)}(\varrho),$$

$$E_{p,-1} = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{2(n-1)!(s-n)}{\Gamma(2s-n)} \right)^{1/2} e^{-ip_0t+ip_2y} e^{-\varrho/2} \varrho^{(s-n)} L_{n-1}^{2(s-n)}(\varrho).$$

En la Figura 5.4 podemos observar los niveles de energía donde a diferencia del caso de campo magnético uniforme, hay creación de subniveles de Landau, dada por el número cuántico s . Notemos que esto se da para todos los niveles, excepto el $n = 0$ y $\sigma = 1$ donde todas las energías son la misma para los diferentes valores de s aunque se ha cuantizado el momento p que tomaba

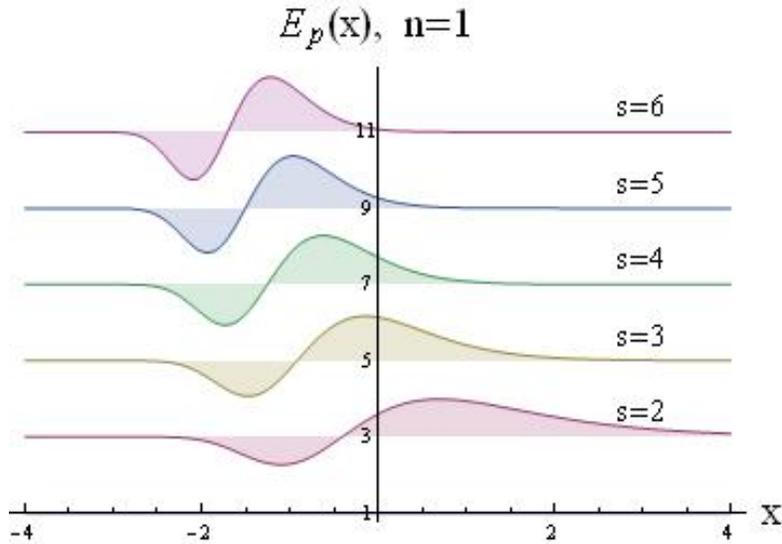


Figura 5.6: Gráficas de las soluciones $\mathbb{E}_{p,1}$ y $n = 1$ para el caso de campo magnético exponencial donde el nivel de energía nos da el número de nodos $l = n + 1$.

valores continuos en el caso de campo uniforme. Dada la definición de $s = -p_2/\alpha$, esta degeneración es provocada por al cuantización del momento p_2 , que en el caso anterior era un eigenvalor continuo mientras que aquí queda restringido a ser un número entero en unidades de $\alpha = 1$. En las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7 podemos observar las soluciones $\mathbb{E}_{p,1}$ para los niveles de Landau 0, 1 y 2 respectivamente, en unidades $eB = \alpha = 1$. En cada nuevo nivel las soluciones tienen un nodo extra como esperábamos pero que s está restringido a ser mayor a n . Al igual que en el caso anterior, en la Figura 5.8 graficamos las funciones $|\mathbb{E}_p|^2$ para ver la forma de la densidad de probabilidad. La Figura 5.3 fue hecha tomando a p_2 constante. Recordemos que en el caso de campo magnético uniforme, p_2 distinto a cero sólo hacía un corrimiento en el eje x , pero la gráfica tenía exactamente la misma forma. Así que para campo exponencial, graficamos $s = 8$ constante, es decir $p_2 = 8$ en unidades de α para los diferentes niveles de Landau n . También graficamos el potencial supersimétrico (5.3) que para este caso corresponde a $y = (8 - e^{-x})^2 + e^{-x}$. Con el propagador obtenido en este caso, la densidad de carga

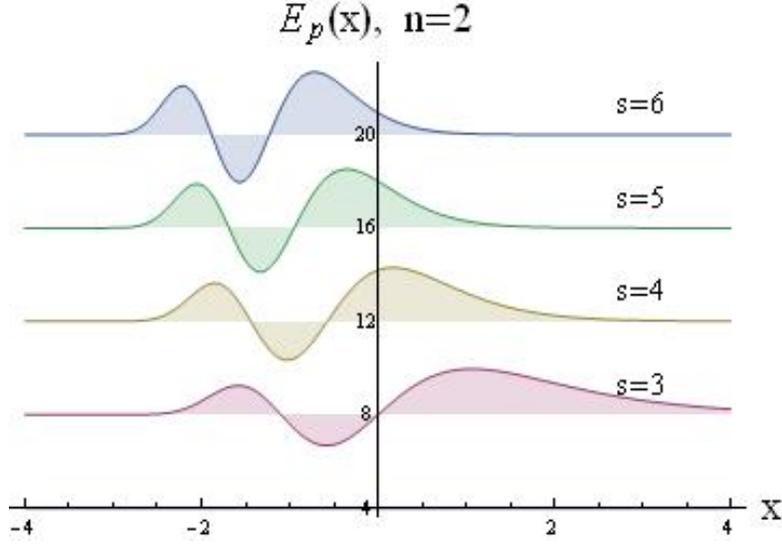


Figura 5.7: Gráficas de las soluciones $\mathbb{E}_{p,1}$ en el nivel de Landau $n = 2$ para campo magnético exponencial en unidades $eB = \alpha = 1$. Notemos que las energías en los casos de $n \neq 0$ dependen del número cuántico s .

(4.21) para este caso esta dada por

$$\begin{aligned}
 j^0 &= \frac{2iem\alpha^2}{(2\pi)^2} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \int \frac{dp_0}{p_0^2 - m^2} \left(\frac{s}{\Gamma(2s+1)} \right) e^{-\varrho} \varrho^{2s} [L_0^{2s}(\varrho)]^2 + \right. \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=n+1}^{\infty} \left(\int \frac{dp_0}{p_0^2 - \alpha^2(2sn - n^2)} e^{-\varrho} \varrho^{2(s-n)} \left(\frac{n!(s-n)}{\Gamma(2s - (n-1))} \right) \right. \\
 &\left. \left. [L_n^{2(s-n)}(\varrho)]^2 - \left(\frac{(n-1)!(s-n)}{\Gamma(2s-n)} \right) [L_{(n-1)}^{2(s-n)}(\varrho)]^2 \right) \right).
 \end{aligned}$$

donde nuevamente hemos separado el nivel más bajo de energía. Al igual que en el caso anterior, será el único en sobrevivir al hacer la suma sobre s . Entonces

$$\begin{aligned}
 j^0 &= \frac{2iem\alpha^2}{(2\pi)^2} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\int \frac{dp_0}{p_0^2 - m^2} \left(\frac{s}{\Gamma(2s+1)} \right) e^{-\varrho} \varrho^{2s} [L_0^{2s}(\varrho)]^2 \right) \\
 &= \frac{iem\alpha^2}{(2\pi)^2} \int \frac{dp_0}{p_0^2 - m^2} \varrho e^{-\varrho} \sinh(\varrho)
 \end{aligned}$$

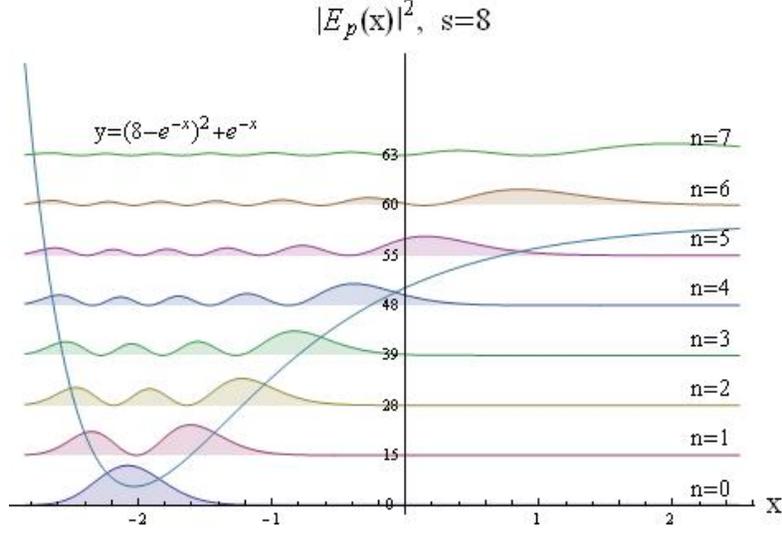


Figura 5.8: Gráficas de las funciones $|\mathbb{E}_p|^2$ para varios valores de n y $s = 8$ fijo. La curva $y = (8 - e^{-x})^2 + e^{-x}$ corresponde al potencial asociado supersimétrico 5.3.

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\epsilon m \alpha^2}{(2\pi)^2} \varrho e^{-\varrho} \sinh(\varrho) \frac{i\pi}{|m|} \\
&= -\frac{\epsilon \alpha^2}{4\pi} \varrho e^{-\varrho} \sinh(\varrho) \operatorname{sgn}(m),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde en la primera línea hemos usado que $L_0^l = 1$ para todo l y en la segunda línea hemos integrado usando una rotación de Wick como en el caso anterior. Ahora, para el condensado fermiónico (4.23), tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \frac{2m\alpha^2}{4\pi} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|m|} \left(\frac{s}{\Gamma(2s+1)} \right) e^{-\varrho} \varrho^{2s} [L_0^{2s}(\varrho)]^2 + \right. \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2(2sn - n^2) + m^2}} e^{-\varrho} \varrho^{2(s-n)} \left(\left(\frac{n!(s-n)}{\Gamma(2s - (n-1))} \right) \right. \\
&\left. \left. [L_n^{2(s-n)}(\varrho)]^2 + \left(\frac{(n-1)!(s-n)}{\Gamma(2s-n)} \right) [L_{(n-1)}^{2(s-n)}(\varrho)]^2 \right) \right),
\end{aligned} \tag{5.10}$$

donde hemos hecho la integral sobre p_0 con una rotación de Wick y el primer término de la expresión anterior corresponde al nivel más bajo de Landau.

Como en el caso de campo magnético constante, esperamos que la contribución más importante sea la aportada por este nivel. Entonces en $n = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{n=0,\sigma=1} &= \frac{2m\alpha^2}{4\pi|m|} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\Gamma(2s+1)} e^{-\varrho} \varrho^{2s} [L_0^{2s}(\varrho)]^2 \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi} \varrho e^{-\varrho} \sinh(\varrho) \operatorname{sgn}(m)\end{aligned}\quad (5.11)$$

Podemos notar que

$$\varrho e^{-\varrho} \sinh(\varrho) = \frac{\varrho}{2}(1 - e^{-2\varrho}) \rightarrow \frac{\varrho}{2}$$

Esto último cuando ϱ es muy grande, es decir, en el caso de campo magnético intenso, la densidad de carga y el condensado fermiónico toman la forma:

$$\begin{aligned}j^0 &\rightarrow -\frac{e\alpha^2}{4\pi} \frac{\varrho}{2} \operatorname{sgn}(m) = -\frac{e^2}{4\pi} B e^{-\alpha x} \operatorname{sgn}(m) \\ \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{n=0,\sigma=1} &\rightarrow \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{\varrho}{2} \operatorname{sgn}(m) = \frac{e}{4\pi} B e^{-\alpha x} \operatorname{sgn}(m)\end{aligned}$$

Esto está de acuerdo con lo reportado en [34], [46] y [47] donde se estudia el caso de campo magnético intenso y se encuentra que en este límite, la densidad de carga y el condensado fermiónico deben de tener un comportamiento similar al campo aplicado, aunque las ecuaciones (5.9) y (5.11) son válidas para todo régimen.

Capítulo 6

Campos Eléctricos en (1+1) Dimensiones

El formalismo encontrado anteriormente para resolver problemas de campos magnéticos externos en (2+1) dimensiones, puede ser traducido fácilmente al problema de campos eléctricos en el modelo masivo de Schwinger en (1+1) dimensiones. Recordemos que en este caso podemos escribir $A_\mu = (Z(x), 0)$ y entonces $\Pi^\mu = (i\partial_t - eZ, -i\partial_x)$ y es claro que

$$[i\partial_t, \gamma \cdot \Pi] = 0 \quad i\partial_t \mathbb{E}_p = p_0 \mathbb{E}_p$$

con lo que la ecuación (4.6) en este caso toma la forma

$$(\partial_x^2 - [-ip_0 + ieZ(x)]^2 + ie\sigma_i Z'(x)) F_{p^2, p_0, \sigma_i}(x) = p^2 F_{p^2, p_0, \sigma_i}(x). \quad (6.1)$$

Aquí la matriz γ_5 es la misma que la matriz σ para el caso de (2+1) dimensiones. Debido a esto, la ecuación anterior es la misma que la ecuación (4.10) si introducimos un campo $W(x) = iZ(x)$ y $\tilde{p}_2 = ip_0$ por lo que podemos aplicar el mismo método para el modelo de Schwinger con la única diferencia de que tendremos argumentos complejos. Además en este caso no existe p_2 por lo que las soluciones son

$$\mathbb{E}_{p, \sigma} = E_{p, \sigma}(z) \omega_\sigma ,$$

donde ω_σ son los eigenvectores de γ^5 con eigenvalores $\sigma = \pm 1$ y

$$E_{p, \sigma}(z) = N_\sigma e^{-ip_0 t} F_{p, \sigma}(x) ,$$

donde $z = (t, x)$. La razón de expresarlas de esta forma es que así las eigenfunciones \mathbb{E}_p toman la forma (4.8). Para resolver la ecuación de Dirac, el usamos el vector $\check{p} = (0, ip)$ que satisface:

$$\check{p}^2 = p^2, \quad (\gamma \cdot \Pi) \mathbb{E}_p(z) = \mathbb{E}_p(z) (\gamma \cdot \check{p}).$$

la última relación es fácil de probar probar, de manera similar a como probamos la relación (4.13). Entonces nuevamente proponemos las soluciones a al ecuación de Dirac como $\Psi = \mathbb{E}_p u_{\check{p}}$ con lo que

$$(\gamma \cdot \Pi - m) \mathbb{E}_p(z) u_{\check{p}} = \mathbb{E}_p(z) (\gamma \cdot \check{p} - m) u_{\check{p}} = 0$$

en este caso el espinor $u_{\check{p}}$ satisface

$$\begin{pmatrix} -m & ip \\ -ip & -m \end{pmatrix} u_{\check{p}} = 0,$$

Hagamos $u_{\check{p}}^T = (u_1, u_2)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} -mu_1 + ipu_2 &= 0 \\ -ipu_1 - mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Así que salvo una constante de normalización, las soluciones son

$$u_{\check{p}1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ip}{m} \end{pmatrix}, \quad u_{\check{p}2} = \begin{pmatrix} \frac{ip}{m} \\ 1 \end{pmatrix},$$

y entonces las soluciones a la ecuación de Dirac en (1+1) dimensiones son:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \mathbb{E}_p u_{\check{p}1} = \begin{pmatrix} E_{p,1} \\ \frac{-ip}{m} E_{p,-1} \end{pmatrix}, \\ \Psi_2 &= \mathbb{E}_p u_{\check{p}2} = \begin{pmatrix} \frac{ip}{m} E_{p,1} \\ E_{p,-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ahora, la forma en la que encontramos el propagador en la seccion (4.3) es valida para dimensiones arbitrarias, por lo que la ecuación (4.19) sigue siendo valida con el cambio $\bar{p} \rightarrow \check{p}$. Al igual que en los caso anteriores, vamos a calcular la corriente y el condensado fermiónicos haciendo uso de este propagador. Para esto, notemos que las eigenfunciones de Ritus se pueden escribir como $\mathbb{E}_p = E_{p1}P_+ + E_{p2}P_-$ y $\bar{\mathbb{E}}_p = E_{p1}^*P_+ + E_{p-1}^*P_-$, donde ahora los

operadores de proyección son $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, es decir, tiene la forma (4.20) y satisfacen $P_{\pm}P_{\pm} = P_{\pm}$. Calculemos la corriente fermiónica j^{μ} donde ahora $\mu = 1, 2$. A partir del propagador (4.19) y con ayuda del vector \check{p} , tenemos

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma^0 S\} &= \int \frac{d^2 p}{p^2 - m^2} \check{p}_{\mu} Tr \left\{ \left(\gamma^0 \frac{E_{p,1}}{2} P_+ + \gamma^0 \frac{E_{p,-1}}{2} P_- \right) \gamma^{\mu} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{E_{p,1}^*}{2} P_+ + \frac{E_{p,-1}^*}{2} P_- \right) + m \left(\frac{\gamma^0}{2} (|E_{p,1}|^2 P_+ + |E_{p,-1}|^2 P_-) \right) \right\} \\
&= \int \frac{d^2 p}{p^2 - m^2} \frac{\check{p}_1}{4} Tr \left\{ |\mathbb{E}_{p,1}|^2 \left(\gamma^0 \gamma^1 + (\gamma^0)^2 + \gamma^0 \gamma^5 \gamma^1 + \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \right) + \right. \\
&\quad |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 \left(\gamma^0 \gamma^1 - (\gamma^0)^2 - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^1 + \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \right) + \\
&\quad \mathbb{E}_{p,1} \mathbb{E}_{p,-1}^* \left(\gamma^0 \gamma^1 - (\gamma^0)^2 + \gamma^0 \gamma^5 \gamma^1 - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \right) + \\
&\quad \left. \mathbb{E}_{p,-1} \mathbb{E}_{p,1}^* \left(\gamma^0 \gamma^1 + (\gamma^0)^2 - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^1 - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \right) \right\} \\
&= \int \frac{d^2 p}{p^2 - m^2} \frac{\check{p}_1}{2} Tr \left\{ |\mathbb{E}_{p,1}|^2 - \mathbb{E}_{p,1} \mathbb{E}_{p,-1}^* - |\mathbb{E}_{p,1}|^2 - \mathbb{E}_{p,1} \mathbb{E}_{p,-1}^* + \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E}_{p,-1} \mathbb{E}_{p,1}^* - |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 + \mathbb{E}_{p,1}^* \mathbb{E}_{p,-1} + |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 \right\} = 0, \quad (6.3)
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que las funciones $\mathbb{E}_{p,1}$ y $\mathbb{E}_{p,-1}$ son ortogonales por lo que la densidad de corriente $j^0 = 0$. De manera similar podemos demostrar que la corriente j^1 también es cero.

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma^1 S\} &= \int \frac{d^2 p}{p^2 - m^2} \check{p}_{\mu} Tr \left\{ \left(\gamma^1 \frac{E_{p,1}}{2} P_+ + \gamma^1 \frac{E_{p,-1}}{2} P_- \right) \gamma^{\mu} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{E_{p,1}^*}{2} P_+ + \frac{E_{p,-1}^*}{2} P_- \right) + m \frac{\gamma^1}{2} \left(|E_{p,1}|^2 P_+ + |E_{p,-1}|^2 P_- \right) \right\} \\
&= \int \frac{d^2 p}{p^2 - m^2} \frac{\check{p}_1}{4} Tr \left\{ |\mathbb{E}_{p,1}|^2 \left((\gamma^1)^2 + \gamma^1 \gamma^0 + \gamma^1 \gamma^5 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^5 \gamma^0 \right) \right. \\
&\quad + |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 \left((\gamma^1)^2 - \gamma^1 \gamma^0 - \gamma^1 \gamma^5 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^5 \gamma^0 \right) + \\
&\quad \mathbb{E}_{p,1} \mathbb{E}_{p,-1}^* \left((\gamma^1)^2 - \gamma^1 \gamma^0 + \gamma^1 \gamma^5 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^5 \gamma^0 \right) + \\
&\quad \left. \mathbb{E}_{p,-1} \mathbb{E}_{p,1}^* \left((\gamma^1)^2 + \gamma^1 \gamma^0 - \gamma^1 \gamma^5 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^5 \gamma^0 \right) \right\} \\
&= \int \frac{d^2 p}{p^2 - m^2} \frac{\check{p}_1}{2} Tr \left\{ -|\mathbb{E}_{p,1}|^2 - \mathbb{E}_{p,1} \mathbb{E}_{p,-1}^* + |\mathbb{E}_{p,1}|^2 - \mathbb{E}_{p,1} \mathbb{E}_{p,-1}^* \right. \\
&\quad \left. + |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 - \mathbb{E}_{p,-1} \mathbb{E}_{p,1}^* + |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 - \mathbb{E}_{p,-1} \mathbb{E}_{p,1}^* \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$-\mathbb{E}_{p,-1}\mathbb{E}_{p,1}^* - |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 - \mathbb{E}_{p,1}^*\mathbb{E}_{p,-1} + |\mathbb{E}_{p,-1}|^2 \Big\} = 0. \quad (6.4)$$

Ahora, pasaremos a realizar el cálculo del condensado fermiónico. Utilizando los mismos proyectores que en el caso de la corriente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= Tr \left\{ i \int d^2p \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2} \left[|E_{p,1}|^2 P_+ + |E_{p,-1}|^2 P_- \right] \right\} \\ &= i \int \frac{d^2p}{p^2 - m^2} p_\mu Tr \left\{ \frac{\gamma^\mu}{2} \left(|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2 \right) + \frac{\gamma^\mu \gamma^5}{2} \left(|E_{p,1}|^2 - |E_{p,-1}|^2 \right) + m \left(\frac{\mathbb{I}}{2} \left(|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2 \right) + \frac{\gamma^5}{2} \left(|E_{p,1}|^2 - |E_{p,-1}|^2 \right) \right) \right\} \\ &= i \int \frac{d^2p}{p^2 - m^2} m \left[|E_{p,1}|^2 + |E_{p,-1}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Así que, aunque en (1+1) dimensiones no tenemos una densidad de corriente total, si existe un condensado fermiónico que tiene la misma forma funcional del condensado en (2+1) dimensiones, ver la Ec. (4.23).

Para clarificar las diferencias y similitudes con el caso de campo magnético en (2+1) dimensiones, tomaremos el caso de un campo eléctrico uniforme en (1+1) dimensiones. Entonces la ecuación (6.1) se convierte en

$$\left(-(-ip_0 + ieEx)^2 + \partial_x^2 + ie\gamma_5 E \right) F_{p_0,\sigma} = -2ieEp^2$$

donde hemos redefinido el eigenvalor de $p^2 \rightarrow -2ieEp^2$. Esta es la misma ecuación que (5.1) con los parámetros apropiados, es decir $\eta = \sqrt{2ieE}(x - p_0/eE)$, con las soluciones parabólico cilíndricas $D_n(\eta)$ con índice $n = p^2 + \sigma/2 - 1/2$. En este caso, p^2 toma los valores enteros; las funciones que forman las \mathbb{E}_p normalizadas son:

$$\begin{aligned} E_{p,1} &= \frac{2^{1/2}(ieE\pi)^{1/4}}{\sqrt{(p^2)!}} e^{-ip_0} D_{p^2}(\eta), & p^2 &= 0, 1, 2, \dots \\ E_{p,1} &= \frac{2^{1/2}(ieE\pi)^{1/4}}{\sqrt{(p^2)!}} e^{-ip_0} D_{p^2}(\eta), & p^2 &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

De estas expresiones podemos encontrar las soluciones a la ecuación de Dirac dadas en (6.2), cuyo perfil con los parámetros apropiados, tendrán la misma forma que las graficadas en el capítulo anterior. Además con los resultados del capítulo 4 podemos encontrar fácilmente la densidad de corriente y el

condensado fermiónico. En este ejemplo las corrientes son cero como dicen las ecuaciones (6.3) y (6.4), mientras que el condensado dado por la ecuación (6.5) se puede calcular inmediatamente, de la misma forma a como se calculó (5.6), es decir

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi}\psi \rangle &= 2im(ieE\pi)^{1/2} \left(\int \frac{dp_0}{-m^2} D_0^2(\eta) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{p^2=1}^{\infty} \int \frac{dp_0}{-2ieEp^2 - m^2} \left[\frac{D_{p^2}^2(\eta)}{(p^2)!} + \frac{D_{(p^2)-1}^2(\eta)}{((p^2)-1)!} \right] \right) \\
&= 2\pi iemE \left(\frac{1}{-m^2} + 2 \sum_{p^2=1}^{\infty} \frac{1}{-2ieEp^2 - m^2} \right),
\end{aligned}$$

donde hemos hecho la integral en dp_0 con ayuda de la definición de η . Finalmente el régimen de interés es el de mayor probabilidad de ocupación, esto es el nivel de energía más baja, es decir el primer término de la expresión anterior, donde

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{n=0, \sigma=1} = \frac{-2\pi i e E}{m}.$$

De la misma forma podemos resolver el caso de campo exponencial o algún otro que hayamos resuelto en (2+1) dimensiones.

Es prudente dar aquí una nota de precaución. Aunque llamamos condensado a la traza del propagador, en realidad dicha traza está relacionada directamente con la acción efectiva. Para ver esto, tomemos la derivada de la función generatriz,

$$Z = e^{iW} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \exp \left\{ -i \int d^d x \bar{\psi} [m - \gamma(i\partial + eA)] \psi \right\},$$

donde W es la acción efectiva,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln Z}{\partial m} &= \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial m} \\
&= \frac{-i}{Z} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \left(\int d^d x \bar{\psi}(x) \psi(x) \right) e^{-i \int d^d x \bar{\psi} \{m - \gamma(i\partial + eA)\} \psi} \\
&= -i \int d^d x \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Como $\ln Z = iW$,

$$-\frac{\partial W}{\partial m} = \int d^d x \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle$$

y tenemos

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{\partial \Gamma}{\partial m},$$

donde hemos introducido el Lagrangiano efectivo Γ , vía $W = \int d^d x \Gamma(x)$.

Por otro lado, se puede demostrar que el elemento de matriz de la matriz de dispersión al orden más bajo en una transición vacío-vacío (es decir, estabilidad del vacío), está dado por la función generatriz

$$\langle 0|S^0|0\rangle = e^{iW}.$$

El hecho de que tener un campo eléctrico en lugar de campo magnético, sea similar a hacer el reemplazo $B \rightarrow -iE$, permite tener una parte imaginaria en la acción, es decir

$$W = W_R + iW_I,$$

donde la parte real toma en cuenta todos los efectos dispersivos con el campo externo y la imaginaria los absorptivos. Entonces la probabilidad de transición vacío-vacío es

$$|\langle 0|S^0|0\rangle|^2 = |e^{-2W_I}|.$$

Así que sin calcular explícitamente la traza del propagador en presencia de un campo eléctrico, el hecho de que ésta desarrolle una parte imaginaria pequeña, nos indica una inestabilidad del vacío, que en este caso se debe a la producción de pares mediante el mecanismo de Schwinger.

De esta manera concluimos el estudio del propagador en campos electromagnéticos externos en bajas dimensiones.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo hemos revisado el propagador de electrones masivos en bajas dimensiones espacio-temporales. Hemos obtenido el propagador de electrones libres a través del método de funciones de Green en dimensiones arbitrarias, que tiene, como sabemos, una forma diagonal en el espacio de momentos, $S_F(p) = 1/(\gamma \cdot p - m)$. Este es obviamente el caso cuando el operador de Dirac libre conmuta operador de momento y entonces uno puede tomar simplemente una transformada de Fourier, es decir, podemos usar las eigenfunciones del operador momento para diagonalizar la función de Green.

Después, hemos considerado el propagador de electrones en (2+1) dimensiones en un campo magnético externo que apunta perpendicularmente al plano del movimiento de los electrones y cuya forma espacial considerada es descrita por una función arbitraria $W(x)$. Esto, hasta donde sabemos, no ha sido presentado anteriormente en la literatura. Hemos escogido trabajar dentro del marco del método de Ritus [6], construyendo de manera explícita las eigenfunciones \mathbb{E}_p del operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$ en el caso general. La idea básica detrás de este método es el siguiente: puesto que el operador de Dirac $(\gamma \cdot \Pi)$ no conmuta con el operador de momento, no podemos simplemente tomar la transformada de Fourier de la función de Green y obtener un propagador diagonal en el espacio de momento. Sin embargo, ya que $(\gamma \cdot \Pi)$ conmuta con $i\partial_t$, $-i\partial_x$ y más importante, con $(\gamma \cdot \Pi)^2$, podemos utilizar sus eigenfunciones comunes, \mathbb{E}_p , para diagonalizar el propagador, que resulta tener la forma de un propagador de libre con momento dependiente de los números cuánticos dinámicos. Además de esto, hemos visto que la simplicidad con la que incorporamos los efectos del campo en el propagador del electrón y resolvemos la ecuación de Dirac en presencia de campos electromagnéticos externos incluso

en el modelo masivo de Schwinger, puede ser entendida fácilmente en términos de una supersimetría de los sistemas escogidos. Esto reduce el problema de construir las componentes del operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$, a buscar las soluciones a la ecuación de Pauli de mecánica cuántica supersimétrica, donde las componentes $(\gamma \cdot \Pi)^2$ están relacionadas de tal forma que son las soluciones con potenciales supersimétricos asociados.

Hemos aplicado el método de Ritus a los casos específicos de campos magnéticos uniformes y con decaimiento exponencial en (2+1) dimensiones y de un campo eléctrico en (1+1). Para el primer caso, las funciones \mathbb{E}_p están descritas en términos de las funciones parabólicas cilíndricas. En el segundo ejemplo, las eigenfunciones de Ritus están escritas en términos de las funciones asociadas de Legendre. En los casos (2+1)-dimensionales, las versiones no masivas de los propagadores encontrados son de importancia directa por ejemplo en el grafeno. Además, de la ecuación (4.17) observamos que las soluciones a la ecuación de Dirac son proporcionales a las eigenfunciones de Ritus. Esto es bien sabido para el caso de campo constante y para el segundo caso, encontramos que las soluciones son proporcionales a los polinomios asociados de Legendre, lo cual está de acuerdo con lo reportado en [48], donde resuelven la ecuación de Dirac para el caso de un campo magnético exponencial.

En conclusión, el método de Ritus ofrece una alternativa para estudiar el propagador de electrones en la presencia de campos externos. Contrariamente al método de tiempo propio [3] [4], aquí el propagador adquiere una forma similar al propagador libre, y los efectos del campo se reflejan en las funciones propias del operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$, es decir \mathbb{E}_p . Así, el método funciona en el caso de partículas escalares [38] y de partículas vectoriales cargadas [39]. La idea detrás de esto es familiar en mecánica cuántica, donde la diagonalización de un operador determinado se lleva a cabo con la ayuda de las funciones propias de un segundo operador con el que conmuta. Eso hace que Ritus método adecuado para estudiar el propagador para configuraciones de los campos externos más complejas.

Con el propagador obtenido, estudiamos algunas inestabilidades del vacío de Dirac por efectos de campos magnéticos externos, como lo son la formación de corrientes y condensados quirales en el caso de (2+1) dimensiones. Hemos visto que en el régimen de campo intenso, dichas cantidades se forman siguiendo el perfil del campo aplicado. Una conclusión similar se deriva en el caso del modelo de Schwinger, sólo que en este caso el condensado se entiende más bien en términos de la acción efectiva, la cual desarrolla una parte imaginaria pura relacionada con la producción de pares mediante el

mecanismo de Schwinger.

Para el futuro pretendemos estudiar efectos no perturbativos inducidos por los campos externos resolviendo las ecuaciones de Schwinger-Dyson correspondientes en cada caso y estudiando efectos dinámicos en la formación de condensados quirales, momentos magnéticos anómalos y otras cantidades de interés.

Apéndice A

Inversión Temporal

En este apéndice veremos que la inversión temporal es una transformación antiunitaria. Dado un mapeo de los vectores de estado de un espacio de Hilbert en si mismo $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$, que conserve la probabilidad de transición entre dos estados

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = |\langle \psi' | \phi' \rangle|^2,$$

requerimos que U sea unitaria y lineal

$$\begin{aligned}\langle \psi U^\dagger | U \phi \rangle &= \langle \psi | \phi \rangle, \\ U | \xi \psi + \eta \phi \rangle &= \xi U | \psi \rangle + \eta U | \phi \rangle\end{aligned}$$

ó antiunitaria y antilineal

$$\begin{aligned}\langle \psi U^\dagger | U \phi \rangle &= \langle \psi | \phi \rangle^*, \\ U | \xi \psi + \eta \phi \rangle &= \xi^* U | \psi \rangle + \eta^* U | \phi \rangle.\end{aligned}$$

Ahora, si el desarrollo temporal del sistema esta dado por

$$\psi(t) = e^{-iHt} \psi(0),$$

la simetría de inversión temporal requiere que el estado revertido, $\Theta\psi(0)$, se transforme como

$$\Theta\psi(-t) = e^{-iHt} \Theta\psi(0),$$

de donde

$$e^{-iHt} \Theta = \Theta e^{iHt}. \tag{A.1}$$

Si Θ es unitaria, la condición (A.1) es equivalente a

$$\Theta H + H\Theta = 0.$$

Pero entonces para un estado ψ_E del sistema con energía $E > 0$, existe otro estado $\Theta\psi_E$ con energía $-E < 0$ (energía menor que la del vacío). Entonces Θ no puede ser unitaria. Si asumimos Θ antiunitaria, entonces (A.1) implica

$$\Theta H - H\Theta = 0.$$

Aunque el operador Θ conmuta con el Hamiltoniano no es una constante de movimiento, ya que esto solo es valido para operadores lineales.

Apéndice B

Términos de Masa y Paridad

En este apéndice veremos comportamiento ante paridad de los términos de masa que aparecen en el Lagrangiano de QED₃.

B.1. Paridad

Recordando las soluciones de la ecuación de Dirac:

$$\begin{aligned}\psi_A^P(x) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(p_y - ip_x)}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}, & \psi_A^N(x) &= N \begin{pmatrix} \frac{(p_y + ip_x)}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \\ \psi_B^P(x) &= N \begin{pmatrix} \frac{(p_y + ip_x)}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}, & \psi_B^N(x) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(p_y - ip_x)}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x},\end{aligned}$$

donde P y N indican que estas soluciones son de energía positiva y negativa respectivamente. Es fácil ver que bajo la transformación de paridad

$$p_x \rightarrow -p_x, \quad p_y \rightarrow p_y,$$

transforman como

$$\begin{aligned}\psi_A &\rightarrow \psi'_A = -i\gamma^1\psi_B, \\ \psi_B &\rightarrow \psi'_B = -i\gamma^1\psi_A.\end{aligned}$$

La transformación de paridad no mezcla partículas con antipartículas. Como consecuencia de estas transformaciones, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'_A \psi'_A &= -\bar{\psi}_B \psi_B, \\
\bar{\psi}'_B \psi'_B &= -\bar{\psi}_A \psi_A.
\end{aligned}
\tag{B.1}$$

B.2. Término de Masa Usual

El término usual de masa

$$m\bar{\psi}\psi$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned}
m\bar{\psi}\psi &= m\psi^\dagger \gamma^0 \psi = m \begin{pmatrix} \psi_A^\dagger & \psi_B^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & -\gamma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\
&= m (\bar{\psi}_A \psi_A - \bar{\psi}_B \psi_B),
\end{aligned}$$

donde hay que ser cuidadoso con la representación utilizada. La matriz γ^0 cuatridimensional que aparece en el segundo término, es diferente que la matriz γ^0 bidimensional del tercer término. Ahora, comparando con (B.1) es obvio que bajo la transformación de paridad, el término de masa

$$m\bar{\psi}\psi$$

es invariante.

B.3. Término m_o

El término m_o se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
m\bar{\psi} \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^5] \psi &= m\bar{\psi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi \\
&= m \begin{pmatrix} \psi_A^\dagger & \psi_B^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & -\gamma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\
&= m (\bar{\psi}_A \psi_A + \bar{\psi}_B \psi_B).
\end{aligned}$$

Si comparamos con (B.1), podemos observar que bajo la transformación de paridad, este término no es invariante y adquiere un signo negativo total.

De manera análoga, es fácil demostrar que el término de masa convencional es invariante ante inversión temporal pero no lo es ante transformaciones quirales, mientras que el término de masa m_o no es invariante ante inversión temporal, pero si lo es ante transformaciones quirales. En resumen, el término que rompe la simetría quiral preserva la simetría de paridad y el término que conserva la simetría quiral rompe la simetría de paridad.

Apéndice C

Espín en el plano

En este apéndice vamos a ver que el operador de espín en el plano, con la representación de matrices (2.30), corresponde a $\sigma_3/2$. Para esto veremos las propiedades bajo rotaciones de la ecuación de Dirac en forma no covariante,

$$H\psi = (\alpha^j p_j + \alpha_0 m)\psi, \quad (\text{C.1})$$

con

$$\alpha_0 = \gamma_0 = \sigma_3, \quad \alpha_1 = \alpha_0 \gamma_1 = i\sigma_2, \quad \alpha_2 = \alpha_0 \gamma_2 = -i\sigma_1,$$

cuyas soluciones son espinores de dos componentes $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. El operador de rotaciones U_R y el espinor rotado ψ' están relacionados por

$$\psi' = U_R(\phi)\psi$$

y dado que la densidad de probabilidad debe ser invariante, tenemos

$$\psi^\dagger \psi = \psi'^\dagger \psi' = \psi^\dagger U_R^\dagger(\phi) U_R(\phi) \psi,$$

de donde $U_R(\phi)$ debe ser un operador unitario,

$$U_R^\dagger(\phi) U_R(\phi) = \mathbb{I}.$$

El operador de rotaciones totales debe ser

$$U_R(\phi) = U_S(\phi) U_L(\phi),$$

donde $U_L(\phi) = \exp(-i\phi L_3)$ es la parte de momento angular orbital y U_S depende de las propiedades espinoriales. U_S debe ser un operador unitario ya

que U_R y U_L también lo son. Como sólo tenemos un tipo de rotaciones en el plano, hacemos el siguiente ansatz

$$U_S(\phi) = \exp\{-i\phi M_3\},$$

para un ángulo ϕ en el plano y con M_3 por determinar. De la ecuación de Dirac (C.1), requerimos que el vector $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ se transforme bajo rotaciones espaciales como un vector, es decir

$$\alpha'_i = U_S^\dagger(\phi)\alpha_i U_S(\phi) = R_{ji}\alpha_j,$$

lo cual se puede escribir como

$$R_{ji}U_S^\dagger\alpha_i U_S(\phi) = \alpha_j, \quad (\text{C.2})$$

recordando que i y j corren de 1 a 2. Ahora, bajo una rotación infinitesimal $\delta\phi$, tenemos

$$R_{ji} = \delta_{ji} + \epsilon_{i3j}\delta\phi_3,$$

donde el índice 3 indica que en el plano sólo hay un tipo de rotaciones y

$$U_S \approx \{\mathbb{I} - i\delta\phi M_3\}.$$

Usando estas dos últimas expresiones, escribimos a (C.2) como

$$\begin{aligned} \alpha_j &\simeq (\delta_{ji} + \epsilon_{i3j}\delta\phi) \{\mathbb{I} + i\delta\phi M_3\} \alpha_i \{\mathbb{I} - i\delta\phi M_3\} \\ &\simeq (\delta_{ji} + \epsilon_{i3j}\delta\phi) \{\alpha_i + i\delta\phi[M_3, \alpha_i]\} \\ &\simeq \alpha_j + \epsilon_{i3j}\delta\phi\alpha_i + i\delta\phi[M_3, \alpha_j] \end{aligned}$$

y ya que $\delta\phi$ es arbitrario, lo anterior implica

$$[M_3, \alpha_j] = i\epsilon_{3jk}\alpha_k.$$

Explícitamente tenemos que se satisfacen

$$\begin{aligned} [M_3, \alpha_1] &= i\alpha_2, & [M_3, \alpha_2] &= -i\alpha_1 \\ [M_3, \sigma_2] &= -i\sigma_1, & [M_3, \sigma_1] &= i\sigma_2, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde en el último paso hemos sustituido el valor de α_i 's en términos de las matrices de Pauli y simplificado. Entonces la expresión (C.3) se satisface si hacemos $M_3 = \sigma_3/2$. De la misma manera es fácil ver que el operador de espín para la representación (2.31) está dado por $-\sigma_3/2$.

Bibliografía

- [1] J. Suzuki, *Quantum Electrodynamics in a Uniform Magnetic Field*, arXiv:hep-th/0512329v1 (2005). Ford. *Magnetic QED*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 482001 (2008). A. Schakel. *Relativistic quantum Hall effect*, Phys. Rev. D **43**, 1428 (1991). Kramer, Freisbeck y Krüickl. *Landau level substructure and mixing in the relativistic quantum Hall effect*, arXiv:0811.4595v1 (2008)
- [2] K.-M. Poon y G. Muñoz, *Path integrals and propagators for quadratic lagrangians in three dimensions*, Am. J. of Phys. **67**, 547-551 (1999).
- [3] V.A. Fock, *Die Eigenzeit in der klassischen und in der Quantenmechanik*, Phys. Z. Sowjetunion **12**, 404-425 (1937).
- [4] J. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys Rev. **82**, 664 (1951).
- [5] C. Itzykson y J. Zuber, *Quantum field theory*, (McGraw-Hill Inc. 1980) pp. 100-104
- [6] V. I. Ritus, *Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties*, Ann. Phys. **69**, 555 (1972); V. I. Ritus, *On diagonality of the electron mass operator in the constant field*, Pisma Zh. E. T. F. **20**, 135-138 (1974) [in Russian]; V. I. Ritus, *The eigenfunction method and the mass operator in quantum electrodynamics of the constant field*, Zh. E. T. F. **75**, 1560-1583 (1978) [in Russian]
- [7] C. N. Leung y S. Wang, *Gauge independent approach to chiral symmetry breaking in a strong magnetic field*, Nucl. Phys. B **747**, 266 (2006).
- [8] E. Ferrer, *Nonperturbative effects of strong magnetic fields on neutrino selfenergy: A new approach*, Phys. Lett. B **481**, 287 (2000).

- [9] A. Ayala, A. Bashir A. Raya y E. Rojas, *Dynamical mass generation in strongly coupled quantum electrodynamics with weak magnetic fields*, Phys. Rev. D **73**, 10500 (2006).
- [10] V. R. Khalilov, *QED₂₊₁ Radiation effects in a strong magnetic field*, Theor. and Math. Phys. **121**, No. 3 (1999).
- [11] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press 3a ed. (1973).
- [12] K.-I. Kondo, *First and second order phase transitions in Maxwell-Chern-Simons theory coupled to fermions*, Int. J. Mod. Phys. **A11**, 777 (1996).
- [13] T. Appelquist, M.J. Bowick, D. Karabali y L.C.R. Wijewardhana, *Spontaneous chiral-symmetry breaking in three-dimensional QED*, Phys. Rev. **D33**, 3704 (1986); M.R. Pennington y D. Walsh, *Masses for nothing: A non perturbative study of QED₃*, Phys. Lett. **B253**, 246 (1991); C.J. Burden y C.D. Roberts, *Light-cone regular vertex in three-dimensional quenched QED*, Phys. Rev. **D44**, 540 (1991); D.C. Curtis, M.R. Pennington y D. Walsh, *Dynamical mass generation y QED in three dimensions and the 1/N expansion*, Phys. Lett. **B295**, 313 (1992); S.J. Hands, J.B. Kogut y C.G. Strouthos, *Non compact QED₃ with N_f greater than or equal to 2*, Nucl. Phys. **B645**, 321 (2002); A. Bashir, A. Huet y A. Raya, *Gauge dependence of mass and condensate in chirally asymmetric phase of quenched three-dimensional QED*, Phys. Rev. **D66**, 025029 (2002); V.P. Gusynin y M. Reenders, *Infrared cutoff dependence of the critical flavor number in three-dimensional QED*, Phys. Rev. **D68**, 025017 (2003); C.G. Strouthos, *The chiral limit of noncompact QED in three dimensions*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 974 (2003); S.J. Hands, J.B. Kogut, L. Scorzato y C.G. Strouthos, *Noncompact three-dimensional quantum electrodynamics with N_f = 1 and N_f = 4*, Phys. Rev. **B70**, 104501 (2004); C.S. Fischer, R. Alkofer, T. Dahm y P. Maris, *Dynamical chiral symmetry breaking in unquenched QED₃*, Phys. Rev. **D70**, 073007 (2004); Y. Hoshino, *Mass singularity and confining property in QED₃*, JHEP **0409**, 048 (2004); A. Bashir y A. Raya, *Dynamical fermion masses and constraints from gauge invariance in quenched QED₃*, Nucl. Phys. **B709**, 307 (2005); A. Bashir y A. Raya, *Truncated Schwinger-Dyson equations and gauge covariance in QED₃*, Few-Body Syst. **41** 185 (2007); A. Bashir y A. Raya, *Gauge symmetry and its implications for the Schwinger-Dyson*

- equations*, En “Trends in Boson Research”, editado por A.V. Ling, Nova Science Publishers, Inc. N.Y., (2006). ISBN 1-59454-521-9. Preprint hep-ph/0411310.
- [14] N. Dorey y N.E. Mavromatos, *QED₃ and two dimensional superconductivity without parity violation*, Nucl. Phys. **B386**, 614 (1992); K. Farakos y N.E. Mavromatos, *Dynamical gauge symmetry breaking and superconductivity in three dimensional systems*, Mod. Phys. Lett. **A13**, 1019 (1998); M. Franz y Z. Tesanovic, *Algebraic Fermi Liquid from Phase Fluctuations: “Topological” Fermions, Vortex “Berryons” and QED₃ Theory of Cuprate Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **87**, 257003 (2001); I.F. Herbut, *QED₃ theory of underdoped high-temperature superconductors*, Phys. Rev. **B66**, 094504 (2002); M. Sutherland, *Delocalized Fermions in Underdoped Cuprate Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **94**, 147004 (2005); M. Franz, Z. Tesanovic y O. Vafek, *QED₃ theory of pairing pseudogap in cuprates: From d-wave superconductor to antiferromagnet via an algebraic Fermi liquid*, Phys. Rev. **B66**, 054535 (2002).
- [15] J. Fröhlich y T. Kerler, *Universality in quantum Hall Systems*, Nucl. Phys. **B354**, 361 (1991); M. Leitner, *Zero-Field Hall Effect in (2+1)-dimensional QED*, Preprint cond-mat/0505428.
- [16] V.P. Gusynin y S.G. Sharapov, *Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene*, Phys. Rev. Lett. **95**, 146801 (2005); V.P. Gusynin y S.G. Sharapov, *Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities*, Phys. Rev. **B73**, 245411 (2006).
- [17] R. Acharya y P. Narayana Swamy, *Quantum Hall Effect in 2+1 Quantum Electrodynamics*, Il Nuovo Cim. **B107**, 351 (1992).
- [18] R. Acharya y P. Narayana Swamy, *Relativistic QED in (2+1)-dimensional Space: The Integer and Fractional Quantized Hall Effects* Int. Jour. Mod. Phys. **A6**, 861 (1994).
- [19] A. Jellal, *Quantum Hall Effect*, Int. Jour. Theo. Phys. **37**, 2187 (1998); A. Jellal, *Fractional Quantum Hall Effect and (2 + 1)-Dimensional Quantum Electrodynamics* Int. Jour. Theo. Phys. **37**, 2751 (1998).
- [20] P.A. Kurashvili, *Quantum Hall Effect and Dyson-Swinger Equations*, Preprint cond-mat/0504357 .

- [21] A. Raya y E. Reyes, *Massive Dirac fermions and the zero field quantum Hall effect*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 355401 (2008)
- [22] I. Affleck, J. Harvey y E. Witten, *Instanton and (super-) symmetry breaking in (2+1) dimensions*, Nucl. Phys. **B206**, 413 (1982).
- [23] K. Shimizu, *C, P and T transformation in Higher Dimensions* Prog. Theor. Phys. **74**, 610 (1985); Ma. de J. Anguiano y A. Bashir, *Fermions in Odd Space-Time Dimensions: Back to basics*, Few Body Systems **37**, 71 (2005).
- [24] G.W. Semenoff, *Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2499-2452 (1984); D. P. Di Vincenzo y E. J. Mele, *Self-consistent effective-mass theory for intralayer screening in graphite intercalation compounds*, Phys. Rev B **29**, 1685-1694 (1984).
- [25] C.G. Beneventano, P. Giacconi, E. M. Santangelo, y Roberto Soldati, *Planar QED at finite temperature and density: Hall conductivity, Berry's phases and minimal conductivity of Graphene*, J. Phys. A **42**, 275401, 1-25 (2009).
- [26] A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory* 2a Edición. World Scientific, (2005). ISBN 981-256-160-9.
- [27] F. D. M. Haldane, *Model of a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly"*. Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).
- [28] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific Publishing Co. Pt. Ltd. (1990).
- [29] A. Lerda, *Anyons*, Springer-Verlag (1992).
- [30] A. Khare, *Fractional Statics and Chern-Simons Field*, INSA Preprint hep-th/9908027.
- [31] S. Coleman y B. Hill, *No more corrections to the topological mass term in QED₃*, Phys. Lett. **B159**, 184 (1985).
- [32] R. Delbourgo y A. Waites, *Induced parity violation in odd dimensions*, Aust. J. Phys. **47**, 465 (1994).

- [33] F. Cooper, A. Khare y U. Sukhatme, *Supersymmetry and quantum mechanics*, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [34] S. J. Brodsky, *Maximum wavelength of confined quarks and gluon and propieties of quantum chromodynamics*, Phys. Lett. B **666**, 95 (2008).
- [35] L.D. Landau, *Paramagnetism of metals*, Z. Phys. **64**, 629-637 (1930)
- [36] A.K. Geim y K.S. Novoselov, *The rise of Graphene*, Nature Materials **6**, **183-191** (2007).
- [37] N. M. Peres, F. Guinea y A. H. Castro Neto, *Electronic properties of disordered twodimensional carbon*, Phys. Rev. B **73**, 125411, 1-23 (2006).
- [38] V.L. Ginzburg (Editor), *Quantum electrodynamics with unstable vacuum*, 1a. Edicion (Nova Science Publishers, Inc. 1995) pp. 155-161.
- [39] E. Elizalde, E. Ferrer, y V. de la Incera, *Neutrino self-energy and index of refraction in strong magnetic field: A new approach*, Ann. Phys. **295**, 33-49 (2002).
- [40] M. Anguiano-Galicia, A. Bashir y A. Raya, *$\bar{\psi}\psi$ condensate in constant magnetic fields*, Phys. Rev. D **76**, 127702 (2007).
- [41] E. T. Whittaker y G. N. Watson. Read, *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition, Cambridge University Press.
- [42] A. De Martino, L. Dell' Anna, y R. Egger, *Magnetic confinement of massless Dirac fermions in Graphene*, Phys. Rev. Lett. **98**, 066802, 1-4 (2007); M. Ramezani Masir, A. Matulis, y F. M. Peeters, *Quasibound states of Schrödinger and Dirac electrons in a magnetic quantum dot*, Phys. Rev. B **79**, 155451, 1-8 (2009).
- [43] L. A. Ponomarenko, F. Schedin, M. I. Katsnelson, R. Yang, E. W. Hill, K. S. Novoselov y A. K. Geim, *Chaotic Dirac Billiard in Graphene Quantum Dots*, Science **320**, 356 - 358 (2008); X. Wu, M. Sprinkle, X. Li, F. Ming, C. Berger y W. A. de Heer, *Epitaxial- Graphene/Graphene-Oxide Junction: An Essential Step towards Epitaxial Graphene Electronics*, Phys. Rev. Lett. **101**, 026801, 1-4 (2008).
- [44] S. Park y H.-S. Sim, *Magnetic edge states in graphene in nonuniform magnetic fields*, Phys. Rev. B **77**, 075433, 1-8, (2008).

- [45] K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. V. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. C. Maan, G. S. Boebinger, P. Kim y A. K. Geim, *Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene*, Science **315**, 1379-1379, (2007).
- [46] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos y A.A. Firsov, *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in Graphene*, Nature (London) **438**, 197-200 (2005); Y, Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer y P. Kim, *Experimental observation of quantum Hall effect and Berry's phase in Graphene*, Nature **438**, 201-204 (2005).
- [47] G. Dunne y T. Hall, *Inhomogeneous condensate in planar QED*, Phys. Rev. D **53**, 2220 (1996).
- [48] K. Handrich, *Quantum mechanical magnetic-field-gradient drift velocity: An analytically solvable model*, Phys. Rev. B **72**, 161308 (2005); Tarun Kanti Ghosh, *Exact solutions for a Dirac electron in an exponentially decaying magnetic field*, J. Phys.: Condens matter **21**, 045505 (2009).