UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Simetrías discretas en teoría cuántica de campos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTORA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

BRENDA CARBALLO PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS
Miguel Socolovsky
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL
Juan Carlos D' Olivo
Dany Pierre Page

MÉXICO D.F.
2010

Agradecimientos

Esta tesis nació del encuentro fortuito con Miguel Socolovsky en el ICIMAF, Cuba, justo cuando yo acababa de graduarme de la licenciatura. Yo siempre había anhelado trabajar en la frontera entre la Física y las Matemáticas y pude encontrar, con Miguel, la posibilidad de concretar mi sueño. Es por esto que mi primer agradecimiento es para él por enfrentarse a toda la burocracia que representaba la entrada a México de una estudiante cubana, por darme la oportunidad de trabajar en lo que me gusta, por respetar mis criterios de igual a igual y por haber sido durante todo este tiempo, más que un buen asesor, un gran amigo.

Asimismo, le agradezco a la UNAM y a este país la posibilidad que me dieron para realizar mi doctorado: a CONACyT por la beca de tiempo completo, a los Proyectos PAPIIT por el apoyo para congresos y estancias, al Programa de Movilidad Estudiantil de la UNAM por la estancia de investigación en Argentina en el 2008, al Instituto de Ciencias Nucleares, tanto por la infraestructura, como por el apoyo recibido por parte de su personal.

Agradezco además a los otros miembros de mi comité tutoral: Dany Pierre Page y Juan Carlos D' Olivo porque pude contar con su apoyo y recomendaciones siempre que los necesité.

Considero que soy muy afortunada por haber cursado este doctorado siendo Yanalté la secretaria del posgrado, ya que pocas personas tienen la habilidad e inteligencia para hacer menos dura y más eficiente a la burocracia. El Posgrado en Ciencias Físicas sin Yanalté no sería lo que es y le agradezco infinitamente a ella todo el apoyo que me dio durante este tiempo. Le agradezco también a Manuel Torres, coordinador del Posgrado, por haber tenido abiertas las puertas de su oficina para escuchar mis dudas o problemas y por haber tomado parte activa en resolverlos.

A los miembros del jurado: Miguel Ángel Pérez Angón, Santiago López de Medrano, José Antonio García Zenteno, Dany Pierre Page Rollinet y Erick Leonardo Patiño Jáidar, por sus críticas, sugerencias y preguntas constructivas, por el respeto y la profesionalidad con que evaluaron este trabajo de tesis; y a Luis Fernando Urrutia Ríos por haber encontrado un error en el capítulo 7.

A Trinidad Ramírez, por su amabilidad, confianza y disponibilidad para ayudarme con fotocopias, impresiones y todo lo que necesité durante mi estancia en el ICN.

A Edgar, por el diseño de la carátula.

A Heinrich, por traducir del alemán el artículo de Jost, por haber hecho todos mis trámites cada vez que no estuve en el país, por ser literalmente mi fuerza y mi mano derecha desde que se dañó mi costilla, por formar conmigo un verdadero equipo en la vida, por tanta admiración... Les agradezco también a sus padres y hermano por haberme aceptado como un miembro más de su familia.

A mi familia, porque se ocuparon todo este tiempo de mis asuntos en Cuba y enfrentaron, en mi ausencia, dificultades que no hubieran enfrentado para ellos mismos.

A los buenos amigos de siempre que también han estado en México conmigo: mi hermano, Edgar, Keila, Geyser. A los buenos amigos que hice en este país: Heinrich, Carlos Eduardo, Dennisse, Gustavo, Lalo ... A Graciela por haber sido como una madre aquí. A las personas que me recibieron en sus casas durante estos 4 años, brindándome además su cariño y amistad: Aurorita, Corina y Judith. A Italia García, por su ayuda para que un problema de salud no afectara mi doctorado. A Mago, por cada tarde que dediqué a estudiar gracias a su apoyo.

A todo el que de una forma u otra tuvo que ver con este trabajo de tesis, tanto a los que mencioné como a los que pude haber olvidado.

“El científico encuentra su recompensa en lo que Henri Poincaré llama el placer de la comprensión, y no en las posibilidades de aplicación que cualquier descubrimiento pueda conllevar”,

Albert Einstein

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría cuántica de campos es el contexto en el cual podemos formular teorías cuánticas consistentes para sistemas de muchas partículas, especialmente en situaciones donde estas últimas pueden ser creadas o destruidas. Se satisface además la necesidad de unir la mecánica cuántica y la relatividad, así como de tratar adecuadamente la estadística de los sistemas de muchas partículas.

Según el criterio de Steven Weinberg [1], por largo tiempo muchos físicos creyeron que el mundo consistía tanto de campos (como el campo electromagnético), como de partículas (tal cual los electrones). No fue hasta 1926 que apareció la idea de usar los campos cuánticos más allá del electromagnetismo. Actualmente se cree que los campos cuánticos son los ingredientes fundamentales del universo y que las partículas son los cuantos de energía y momento de estos campos.

Al procedimiento desarrollado en aquellos años se le llamó segunda cuantización (hoy conocido como cuantización canónica). Mediante el mismo los campos adquieren carácter de operadores que actúan sobre el espacio de Fock [1] y se establecen para ellos relaciones de conmutación o anticonmutación, en correspondencia con el teorema espín-estadística.

En el proceso de cuantización se definen los operadores de creación y aniquilación, los cuales, respectivamente, adicionan o sustraen partículas de los estados de muchas partículas. Estos operadores son muy similares a los definidos en el oscilador armónico cuántico, quienes adicionan o sustraen cuantos de energía.

En muchos casos el formalismo de la cuantización canónica resulta demasiado complicado para derivar las reglas de Feynman y es preferible usar un método de

[1] El espacio de Fock está compuesto por el espacio de Hilbert sin partículas (llamado estado de vacío), suma directa el espacio de Hilbert de una partícula, suma directa el espacio de Hilbert de dos partículas...

cálculo que vaya directamente del lagrangiano a las reglas de Feynman en su forma covariante, como el método de las integrales de camino. No obstante, para llevar a cabo los objetivos propuestos en esta tesis doctoral, resulta suficiente y adecuado el método de la cuantización canónica.

Dentro del contexto de las teorías cuánticas de campos, nos propusimos trabajar en particular con el campo electromagnético, el campo de Dirac, la electrodináminca cuántica (*QED*) y el campo de espín 3/2. En el capítulo 2 de este trabajo se ofrece un breve resumen de los elementos fundamentales de estas teorías.

Uno de los teoremas más importantes de la teoría de campos cuántica relativista es el teorema CPT. C simboliza la conjugación de carga: operación que intercambia partículas por antipartículas; P, la inversión espacial o paridad: transforma un sistema de referencia dextrógiro en otro levógiro y T, la inversión temporal: convierte, en una imagen clásica, un movimiento en su inverso. Este teorema, mostrado por varios autores durante el período 1954-1957 [2, 3, 4, 5], sostiene que toda teoría de campos cuántica relativista, es invariante bajo esas tres transformaciones tomadas simultáneamente.

En cuanto a las simetrías discretas nuestro interés fundamental se basa en el estudio de las estructuras de grupos CPT para los campos ya mencionados. No estudiamos aquí las operaciones C, P, T en relación a las interacciones débiles y fuertes. Entre los objetivos planteados nos propusimos establecer el límite no relativista para la operación de conjugación de carga en la electrodinámica cuántica y calcular el grupo CPT del campo de espín 3/2. Adicionalmente a esto desarrollamos otros dos trabajos en relación al grupo CPT del campo de Dirac.

El capítulo 3 de esta tesis está dedicado a las simetrías discretas, partiendo de su descripción en mecánica clásica, pasando por la cuántica y terminando con la teoría cuántica de campos. En especial, reportamos los correspondientes grupos CPT para el campo de Dirac y el electromagnético.

En el capítulo 4 demostramos que el grupo CPT del campo de Dirac puede ser obtenido a partir de grupos que sólo contienen a la paridad y a la inversión temporal.

El capítulo 5 abarca el cálculo de las representaciones irreducibles de los grupos CPT de la electrodinámica cuántica. Teniendo en cuenta que las propiedades de transformación ante C, P, T de los campos interactuantes son las mismas que para los campos libres, expresamos entonces el grupo completo CPT para la *QED*, como el producto directo de los grupos CPT del campo de Dirac y del electromagnético.

En el capítulo 6 estudiamos el límite no relativista de la operación de conjugación de carga, tanto en el contexto del campo de Dirac acoplado a un campo electromagnético externo clásico, como en el de la electrodinámica cuántica. La existencia de este límite galileano constituye actualmente un motivo de controversia. A pesar de que algunos autores [6] consideran que la transformación C carece de análoga en la teoría no relativista, otros [7] llegan a definir el operador $\hat{C}$ en la mecánica cuántica no relativista, aunque se limitan sólo a su definición y no dicen explícitamente de cuál operador se trata.

En el capítulo 7 encontramos el grupo CPT del campo de espín 3/2 y demostramos que el resultado es independiente de la masa.

Finalmente, ofrecemos las conclusiones generales de este trabajo en el capítulo 8.

Resumen

Esta tesis doctoral está dedicada al estudio de las simetrías discretas en teoría cuántica de campos.

En particular, demostramos que el grupo CPT de operadores para el campo de Dirac, el cual incluye a la operación de conjugación de carga, emerge de manera natural a partir de los subgrupos PT y P (o T) del grupo de Lorentz, es decir, a partir de matrices que actúan sobre el espacio-tiempo clásico de Minkowski.

Asimismo calculamos las representaciones irreducibles inequivalentes tanto del mencionado grupo operacional para el campo de espín 1/2, como del grupo CPT del campo electromagnético. Encontramos que, desde el punto de vista de la teoría de grupos, el campo del electrón-positrón ante las transformaciones C, P, T, es independiente del comportamiento del campo del fotón; por lo que el grupo CPT de la electrodinámica cuántica es el producto directo de los grupos CPT de Dirac y electromagnético. Por completitud, calculamos también las representaciones irreducibles del grupo CPT matricial de Dirac.

Adicionalmente estudiamos el límite no relativista de la operación de conjugación de carga en la electrodinámica cuántica y concluimos que no es posible establecerlo en este contexto. No obstante, fue posible determinar esta operación en el límite galileano del campo de Dirac en presencia de un campo electromagnético externo clásico.

Encontramos además que tanto el grupo CPT matricial como el de operadores para el campo de espín 3/2 (con y sin masa) coinciden con los obtenidos para el campo de Dirac.

Abstract

This Ph.D. thesis is dedicated to the study of discrete symmetries in quantum field theory.

Particularly, we showed that the operator CPT group of the Dirac field, which includes the charge conjugation operation, emerges naturally from the PT and P (or T) subgroups of the Lorentz group, i.e., from matrices acting on the classical Minkowski space-time.

We also calculated the inequivalent irreducible representations for both the above mentioned operator group of the spin-1/2 field and the CPT group of the electromagnetic field. We found out that, from the group theory point of view, the behavior of the electron-positron field under C, P, T transformations is independent of the behavior of the photon field. That is why the CPT group of quantum electrodynamics is the direct product of the Dirac and the electromagnetic CPT groups. For the sake of completeness, we constructed the irreducible representations of the Dirac matrix CPT group.

Additionally, we studied the non-relativistic limit of the charge conjugation operation in quantum electrodynamics and we concluded that it is not possible to establish this limit in this context. However, it was possible to establish this operation in the galilean limit of the Dirac field coupled to a classical external electromagnetic field.

Moreover, we found out that both the matrix and the operator CPT groups for the spin- 3/2 field (with or without mass) are exactly the same groups as for the Dirac field.

Capítulo 2

La electrodinámica cuántica y el campo de espín 3/2

2.1. La electrodinámica cuántica

La electrodinámica cuántica (*QED*) es la teoría para el campo de espín 1/2 (campo de Dirac), acoplado al campo de espín 1 sin masa (campo electromagnético). Involucra a electrones, positrones y fotones en conjunto y describe sus interacciones [8]. Es una de las teorías verificadas experimentalmente con mayor precisión en la física [9, 10].

En su densidad lagrangiana aparecen términos, tanto para los campos de Dirac (L_0^D) y electromagnético libres (L_0^{em}), como para la interacción entre ellos (L_I):

$$L(x) = L_0^D(x) + L_0^{em}(x) + L_I(x) \tag{2.1}$$

con:

$$L_0^D(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x), \tag{2.2}$$

$$L_0^{em}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \tag{2.3}$$

$$L_I(x) = -q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x); \tag{2.4}$$

donde: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético; γ^μ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$) son las matrices de Dirac; $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$ es el 4-potencial electromagnético; m y $q = -|e|$ son la masa y carga de la partícula fermiónica, respectivamente; y ψ es el espinor de Dirac. Se están considerando $c = \hbar = 1$.

Durante el proceso de cuantización canónica, ambos campos adquieren carácter de operadores y se postulan relaciones de anticonmutación para el de Dirac y de conmutación para el electromagnético.

Para obtener los estados de muchas partículas se aplican los operadores de creación sobre el vacío:

$$|p_1 s_1, ..., \widetilde{p_1}\widetilde{s_1}, ..., k_1\lambda_1, ...\rangle = \hat{b}^\dagger(p_1, s_1)...\hat{d}^\dagger(\widetilde{p_1}, \widetilde{s_1})...\hat{a}^\dagger(k_1, \lambda_1)...|0\rangle. \tag{2.5}$$

Análogamente se introducen los operadores de aniquilación:

$$\langle k_1'\lambda_1', ..., \widetilde{p_1}'\widetilde{s_1}', ..., p_1's_1', ...| = \langle 0|\hat{a}(k_1', \lambda_1')...\hat{d}(\widetilde{p_1}', \widetilde{s_1}')...\hat{b}(p_1', s_1'). \tag{2.6}$$

En las expresiones anteriores p_i, s_i $(\widetilde{p_i}, \widetilde{s_i})$ son el tetramomento y proyección del espín en la dirección del movimiento de cada electrón (positrón) y k_i, λ_i, el tetramomento y polarización de cada fotón.

Los operadores $\hat{b}$, $\hat{d}$, $\hat{a}$ aparecen al desarrollar en ondas planas los operadores de campo:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sum_{r=1}^{2}(\hat{b}(\mathbf{p}, r)u(\mathbf{p}, r)e^{-ip\cdot x} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, r)v(\mathbf{p}, r)e^{ip\cdot x}), \tag{2.7}$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sum_{r=1}^{2}(\hat{d}(\mathbf{p}, r)\bar{v}(\mathbf{p}, r)e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, r)\bar{u}(\mathbf{p}, r)e^{ip\cdot x}), \tag{2.8}$$

$$\hat{A}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\sum_{\lambda=0}^{3}(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik\cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\epsilon^{*\mu}(\mathbf{k}, \lambda)e^{ik\cdot x}); \tag{2.9}$$

de forma que: $\hat{b}^\dagger$ crea un electrón, $\hat{b}$ aniquila un electrón, $\hat{d}^\dagger$ crea un positrón, $\hat{d}$ aniquila un positrón, $\hat{a}^\dagger$ crea un fotón y $\hat{a}$ aniquila un fotón.

En las expresiones anteriores, los $\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)$ corresponden a los vectores de polarización de los fotones y x es el tetravector de posición, $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ y

$\omega_k = |\mathbf{k}|$; mientras que los espinores $u(\mathbf{p},r)$, $v(\mathbf{p},r)$, $\bar{u}(\mathbf{p},r)$ y $\bar{v}(\mathbf{p},r)$ satisfacen las siguientes versiones de la ecuación de Dirac en el espacio de los momentos:

$$(p^\mu\gamma_\mu - m)u(\mathbf{p},r) = 0, \qquad (p^\mu\gamma_\mu + m)v(\mathbf{p},r) = 0, \tag{2.10}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p},r)(p^\mu\gamma_\mu - m) = 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{p},r)(p^\mu\gamma_\mu + m) = 0; \tag{2.11}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{p},1) &= \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E_p+m} \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p},2) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E_p+m} \\ \frac{-p_z}{E_p+m} \end{pmatrix}, \\
\bar{u}(\mathbf{p},1) &= \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\left(1, \quad 0, \quad -\frac{p_z}{E_p+m}, \quad -\frac{p_x-ip_y}{E_p+m}\right), \\
\bar{u}(\mathbf{p},2) &= \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\left(0, \quad 1, \quad -\frac{p_x+ip_y}{E_p+m}, \quad \frac{p_z}{E_p+m}\right),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

para el electrón y

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{p},1) &= \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E_p+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E_p+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p},2) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E_p+m} \\ \frac{-p_z}{E_p+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\bar{v}(\mathbf{p},1) &= \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\left(\frac{p_z}{E_p+m}, \quad \frac{p_x-ip_y}{E_p+m}, \quad -1, \quad 0\right), \\
\bar{v}(\mathbf{p},2) &= \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\left(\frac{p_x+ip_y}{E_p+m}, \quad -\frac{p_z}{E_p+m}, \quad 0, \quad -1\right),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

para el positrón ([7], p. 43).

La solución con $r = 1$ contribuye a la proyección $s = \frac{1}{2}$ ($\widetilde{s} = -\frac{1}{2}$) para el electrón (positrón), mientras que $r = 2$ equivale a $s = -\frac{1}{2}$ ($\widetilde{s} = \frac{1}{2}$) para el electrón (positrón)[1].

2.2. El campo de espín 3/2

Siendo J_i (con $i = 1, 2, 3$) los generadores de las rotaciones y K_i los generadores de los *boosts* del grupo de Lorentz homogéneo $(SO(1, 3))$, podemos hacer el cambio de variables:

$$N_i := \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \qquad N_i^\dagger := \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \tag{2.14}$$

donde N_i y $N_i^\dagger$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left[N_i, N_j^\dagger\right] &= 0, & (2.15)\\ [N_i, N_j] &= i\varepsilon_{ijk}N_k, & (2.16)\\ \left[N_i^\dagger, N_j^\dagger\right] &= i\varepsilon_{ijk}N_k^\dagger. & (2.17) \end{aligned}$$

Es decir, N_i y $N_i^\dagger$ obedecen, cada uno, el álgebra de Lie de $SU(2)$. De aquí podemos plantear que:

$$Lie(SO(1, 3)) \cong Lie(SU(2)) \times Lie(SU(2)) \tag{2.18}$$

y es posible apelar entonces a la teoría de representaciones para $SU(2)$.

Tenemos así dos operadores de Casimir (operadores que conmutan con todos los generadores): N_iN_i con autovalores $n(n+1)$ y $N_i^\dagger N_i^\dagger$ con autovalores $m(m+1)$, donde $n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Podemos entonces etiquetar a las representaciones del grupo de Lorentz homogéneo a través de la pareja (n, m), mientras que los estados dentro de la representación serán distinguidos por los autovalores de N_3 y $N_3^\dagger$. Como $J_i = N_i + N_i^\dagger$, caracterizamos al espín de la representación por $J = n + m$.

Siguiendo este análisis podemos expresar a la representación de Dirac para el espín $J = \frac{1}{2}$ de la forma $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, donde $(\frac{1}{2}, 0)$ corresponde al espinor

[1]En lo adelante omitiremos la notación distintiva $(\widetilde{p_i}, \widetilde{s_i})$ para el positrón y se entenderá que los operadores $\hat{d}^\dagger$ y $\hat{d}$ actúan sobre el mismo.

izquierdo de Weyl y $(0, \frac{1}{2})$ al derecho; mientras que la representación vectorial para el espín $J = 1$ está dada por $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ [11].

Teniendo en cuenta el procedimiento para suma de momentos angulares ([12], p. 206-210), podemos formar estados con espín total $J_T = \frac{3}{2}$ a partir de estados con $J = \frac{1}{2}$ y $J = 1$ de la siguiente manera:

$$|1 - \frac{1}{2}| \leq J_T \leq 1 + \frac{1}{2}, \tag{2.19}$$

lo que nos da $J_T = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Esto es equivalente a generar la representación para el espín 3/2 haciendo el producto tensorial de la representación vectorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y la representación espinorial de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Entonces se obtiene el espinor vectorial ψ^μ, que se transforma de acuerdo con la representación del grupo de Lorentz homogéneo [11, 13, 14]:

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})] = (\frac{1}{2}, 1) \oplus (\frac{1}{2}, 0) \oplus (1, \frac{1}{2}) \oplus (0, \frac{1}{2}). \tag{2.20}$$

y satisface una ecuación tipo Dirac:

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m)\psi^\mu = 0. \tag{2.21}$$

Debido a que la cantidad $\gamma^\mu \psi_\mu$ se transforma como un campo ordinario de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, podemos aislar la representación $(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})$ requiriendo que:

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0. \tag{2.22}$$

A las condiciones (2.21) y (2.22) se les conoce como la ecuación de Rarita-Schwinger.

La ecuación de Rarita-Schwinger es la ecuación para el campo relativista fermiónico de espín 3/2. Fue introducida por William Rarita y Julian Schwinger en 1941 [15]. Es similar a la ecuación de Dirac para el campo de espín 1/2. Resulta útil para la descripción de objetos compuestos (si obviamos su estructura en una primera aproximación), como los constituyentes del decuplete bariónico para espín $3/2^+$ [16]: Δ^{++}, Δ^+, Δ^0, Δ^-, Σ^{*+}, Σ^{*0}, Σ^{*-}, Ξ^{*0}, Ξ^{*-}, Ω^-; o para campos elementales como el del gravitino. Sin embargo, ninguna partícula fundamental con espín 3/2 ha sido encontrada experimentalmente.

Para el espín 3/2 (y en general para todos los espines mayores que 1) el procedimiento de la cuantización canónica se vuelve complicado [17]. En particular, el espinor vectorial ψ^μ debe ser descompuesto en sus partes irreducibles de espín 1/2 y espín 3/2, tal como explicamos anteriormente; y como sólo la última parte nos interesa para someterla a la cuantización canónica, se suele evitar el procedimiento canónico en conjunto y se trabaja directamente con los operadores de creación y aniquilación.

El campo se expande entonces en términos del conjunto completo de soluciones para las ecuaciones de Rarita-Schwinger:

$$\hat{\psi}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sum_{\sigma=1}^{4}(\hat{b}(p,\sigma)u^\mu(p,\sigma)e^{-ip\cdot x} + \hat{d}^\dagger(p,\sigma)v^\mu(p,\sigma)e^{ip\cdot x}), \tag{2.23}$$

$$\hat{\bar{\psi}}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sum_{\sigma=1}^{4}(\hat{d}(p,\sigma)\bar{v}^\mu(p,\sigma)e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger(p,\sigma)\bar{u}^\mu(p,\sigma)e^{ip\cdot x}); \tag{2.24}$$

y, en concordancia con la conexión espín-estadística, se establecen relaciones de anticonmutación para los operadores de creación y aniquilación:

$$\{\hat{b}(p,\sigma), \hat{b}^\dagger(p^{'},\sigma^{'})\} = \{\hat{d}(p,\sigma), \hat{d}^\dagger(p^{'},\sigma^{'})\} = \delta_{pp'}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{2.25}$$

$$\{\hat{b}(p,\sigma), \hat{b}(p^{'},\sigma^{'})\} = \{\hat{d}(p,\sigma), \hat{d}(p^{'},\sigma^{'})\} = 0, \tag{2.26}$$

$$\{\hat{b}(p,\sigma), \hat{d}^\dagger(p^{'},\sigma^{'})\} = \{\hat{b}(p,\sigma), \hat{d}(p^{'},\sigma^{'})\} = 0; \tag{2.27}$$

en lugar de ser deducidas a partir de los anticonmutadores para el campo.

Este procedimiento se valida comprobando que la ecuación cuántica del movimiento:

$$\dot{\hat{\psi}}_\mu = \frac{1}{i}[\hat{\psi}_\mu, \hat{H}] \tag{2.28}$$

sea consistente con las ecuaciones (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) y (2.27).

Resulta interesante mencionar que al intentar acoplar el campo de Rarita-Schwinger al campo electromagnético aparecen serias dificultades, como la no causalidad [18, 19].

Capítulo 3

Simetrías discretas

Sea (a, ω) un elemento del grupo de Poincaré *P*, suma semidirecta de $\mathcal{T}$, las traslaciones, y $\mathcal{L}$, el grupo de Lorentz, del espacio-tiempo 4-dimensional de Minkowski. Si $u(x)$ es un operador de campo lineal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces bajo (a, ω), $u(x)$ se transforma como

$$u'(x') = \Lambda(\omega)u(x) \tag{3.1}$$

donde $\Lambda(\omega)$ es la representación matricial $n \times n$ de (a, ω) que actúa sobre las n componenentes de $u(x)$, y $x' = (a, \omega) \cdot x = \omega x + a$. Por otra parte, el vector de estado $\psi \in \mathcal{H}$ del sistema de campos, se transforma como

$$\psi' = U(a, \omega)\psi \tag{2}$$

donde $U(a, \omega)$ es el operador que representa a (a, ω) en el espacio de Hilbert. De esta manera, el valor medio de $u(x)$ en el estado ψ' está dado por:

$$\begin{aligned} (\psi', u(x)\psi') &= (U(a, \omega)\psi, u(x)U(a, \omega)\psi) \\ &= (\psi, U^\dagger(a, \omega)u(x)U(a, \omega)\psi) = (\psi, u'(x)\psi), \end{aligned} \tag{3.2}$$

con

$$u'(x) = U^\dagger(a, \omega)u(x)U(a, \omega), \; U^\dagger(a, \omega) = U^{-1}(a, \omega) \tag{3.3}$$

para U unitario, y

$$\begin{aligned}(\psi', u(x)\psi') &= (u^\dagger(x)V(a,\omega)\psi, V(a,\omega)\psi)\\ &= (V(a,\omega)V^\dagger(a,\omega)u^\dagger(x)V(a,\omega)\psi, V(a,\omega)\psi)\\ &= (\psi, V^\dagger(a,\omega)u^\dagger(x)V(a,\omega)\psi)\\ &= (\psi, (V^\dagger(a,\omega)u(x)V(a,\omega))^\dagger\psi) = (\psi, u'(x)\psi) \end{aligned} \tag{3.4}$$

con

$$u'(x) = V^\dagger(a,\omega)u^\dagger(x)V(a,\omega),\ V^\dagger(a,\omega) = V^{-1}(a,\omega) \tag{3.5}$$

para $U := V$ antiunitario.

El miembro izquierdo, tanto de (3.2) como de (3.4), es el análogo del valor esperado de un operador independiente del tiempo en la representación de Schrödinger de la mecánica cuántica no relativista, mientras que los respectivos miembros derechos corresponden a la representación de Heisenberg. Comparando (3.1) con (3.3) y (3.5) obtenemos las condiciones de compatibilidad [20]:

$$u'(x) = \Lambda(\omega)u((a,\omega)^{-1}\cdot x) = U^\dagger(a,\omega)u(x)U(a,\omega) \tag{3.6}$$

para U unitario, y

$$u'(x) = \Lambda(\omega)u((a,\omega)^{-1}\cdot x) = (V^\dagger(a,\omega)u(x)V(a,\omega))^\dagger \tag{3.7}$$

para V antiunitario.

A través de las matrices $\Lambda(\omega)$, (3.6) y (3.7) definen la acción de los operadores U y V sobre los operadores de campo cuánticos $u(x)$.

La transformación de paridad o inversión espacial, para la cual $(a,\omega) = (0,\Pi)$, se define como:

$$\Pi : x^\mu = (t,\mathbf{x}) \to x^\mu_\Pi = (t,-\mathbf{x}) = \omega^\mu_\nu x^\nu, \tag{3.8}$$

con $\omega^\mu_\nu = diag(1,-1,-1,-1)$; mientras que para la inversión temporal, donde $(a,\omega) = (0,\tau)$, tenemos:

$$\tau : x^\mu = (t,\mathbf{x}) \to x^\mu_\tau = (-t,\mathbf{x}) = \omega^\mu_\nu x^\nu, \tag{3.9}$$

con $\omega^\mu_\nu = diag(-1,1,1,1)$.

A las transformaciones de paridad e inversión temporal corresponden los operadores $U(0,\Pi) = \hat{P}$ (unitario) y $V(0,\tau) = \hat{T}$ (antiunitario), y las matrices $\Lambda(\Pi) = P$ y $\Lambda(\tau) = T$.

A la conjugación de carga (C), la cual no es una transformación del espacio-tiempo, es decir, $C \notin$ *P*, corresponde el operador unitario $U = \hat{C}$ y la matriz $\Lambda = C$. Es importante señalar que aunque la operación de conjugación de carga no pertenece al grupo de Lorentz, al menos a nivel de la ecuación de Dirac, la matriz C es un elemento del álgebra de Dirac ($\cong C(4)$), la cual es la complexificación de una de las dos álgebras de Clifford reales, no isomorfas entre sí, del espacio-tiempo de Minkowski: $H(2)$ (matrices cuaterniónicas 2×2 para la métrica $diag(1, -1, -1, -1)$) y $R(4)$ (matrices reales 4×4 para la métrica $diag(-1, 1, 1, 1)$) [21].

Por mucho tiempo se creyó que las tres simetrías discretas, C, P y T, no podían violarse en la naturaleza. Por los años 1956-1957 se descubrió que tanto la paridad [22] como la conjugación de carga [16] eran violadas en las interacciones débiles. Algunos años después, en 1964, Christenson, Cronin, Fitch y Turlay descubrieron la violación de CP por los mesones K_L en el laboratorio nacional de Brookhaven [23, 24, 25], lo cual, debido a la conservación de CPT, equivale a una violación de la inversión temporal. Esto estableció un nuevo paradigma respecto a que, incluso en el régimen microscópico, no puede asumirse que estas simetrías se mantengan a priori.

La invarianza de CPT parece estar firmemente establecida y cualquier violación de la misma traería enormes consecuencias para todas las teorías de campos existentes [26]. Este teorema se demuestra con base en primeros principios en la teoría cuántica de campos y establece que una amplia gama de estas teorías son invariantes bajo la aplicación, consecutiva y en cualquier orden, de las operaciones C, P y T [2, 3, 4, 5]. El mismo está estrechamente relacionado con la invarianza bajo el grupo de Lorentz propio [2].

Las consecuencias prácticas más importantes derivadas de este teorema relacionan propiedades de las partículas y sus antipartículas: como la igualdad de masas y vidas medias, y que sus cargas eléctricas y momentos dipolares magnéticos sean de igual valor absoluto pero de signo contrario [27].

Tal cual mencionamos en la introducción de este trabajo, nuestro interés fundamental respecto a las simetrías discretas se basa en el estudio de las estructuras de grupos CPT para ciertos campos en específico. Además nos interesa el límite no relativista de la conjugación de carga, el cual resulta ampliamente polémico en la actualidad.

3.1. C, P, T clásico

En la física clásica la trasformación de paridad (P) cambia el sistema coordenado $\mathbf{x}$ a $-\mathbf{x}$. Esto es equivalente a una reflexión, seguida por una rotación. El momento y el momento angular cambian, respectivamente, según:

$$\mathbf{p} \xmapsto{P} -\mathbf{p}, \qquad \mathbf{l} \xmapsto{P} \mathbf{l}. \tag{3.10}$$

En general, podemos distinguir entre:

- Vectores polares (cambian su signo bajo paridad): $\mathbf{V} \xmapsto{P} -\mathbf{V}$
- Vectores axiales (no cambian su signo bajo paridad): $\mathbf{A} \xmapsto{P} \mathbf{A}$
- Escalares (como $\mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}$): $S \xmapsto{P} S$
- Pseudoescalares (como $\mathbf{p} \cdot \mathbf{l}$): $P_s \xmapsto{P} -P_s$

La inversión temporal (T) convierte t en $-t$, dejando $\mathbf{x}$ invariable. Así:

$$\mathbf{p} \xmapsto{T} -\mathbf{p}, \qquad \mathbf{l} \xmapsto{T} -\mathbf{l}. \tag{3.11}$$

La conjugación de carga (C) transforma las partículas en sus antipartículas de igual masa, momento y espín; pero opuestos números cuánticos, como la carga eléctrica. Es considerado por algunos autores [7] que la noción de antipartícula es introducida de manera *ad hoc* tanto en la mecánica clásica, como en la cuántica no relativista.

En la electrodinámica clásica, gobernada por las ecuaciones de Maxwell, estas tres transformaciones de simetría se definen de la siguiente manera [7]:

- C: $\rho \xmapsto{C} -\rho, \quad \mathbf{j} \xmapsto{C} -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \xmapsto{C} -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \xmapsto{C} -\mathbf{B}.$
- P: $\rho \xmapsto{P} \rho, \quad \mathbf{j} \xmapsto{P} -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \xmapsto{P} -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \xmapsto{P} \mathbf{B}.$
- T: $\rho \xmapsto{T} \rho, \quad \mathbf{j} \xmapsto{T} -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \xmapsto{T} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \xmapsto{T} -\mathbf{B};$

donde ρ es la densidad de carga, $\mathbf{j}$ es la densidad de corriente, $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{B}$ es el campo magnético.

3.2. C, P, T cuántico

Buscar los criterios que deben satisfacer C, P y T para representar simetrías del espacio de Hilbert, resulta algo más complejo que en la física clásica [7]. En este caso, necesitamos que se cumplan dos condiciones simultáneamente:

1. que la dinámica obedezca la simetría,
2. que los estados iniciales sean invariantes ante ella.

Si ambas se satisfacen, entonces los posibles estados finales, serán simétricos también.

El operador de paridad ($\hat{P}$) cumple las siguientes propiedades:

$$\hat{P}^{-1}\mathbf{x}\hat{P} = -\mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{x}, \hat{P}\} = 0, \tag{3.12}$$
$$\hat{P}^{-1}\mathbf{p}\hat{P} = -\mathbf{p} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{p}, \hat{P}\} = 0, \tag{3.13}$$
$$\hat{P}^{-1}\mathbf{J}\hat{P} = \mathbf{J} \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{J}, \hat{P}] = 0; \tag{3.14}$$

donde por **J** se entiende un momento angular en general.

Mientras que para el de inversión temporal ($\hat{T}$) se satisfacen:

$$\hat{T}^{-1}\mathbf{x}\hat{T} = \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{x}, \hat{T}] = 0, \tag{3.15}$$
$$\hat{T}^{-1}\mathbf{p}\hat{T} = -\mathbf{p} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{p}, \hat{T}\} = 0, \tag{3.16}$$
$$\hat{T}^{-1}\mathbf{J}\hat{T} = -\mathbf{J} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{J}, \hat{T}\} = 0. \tag{3.17}$$

$\hat{T}$ es un operador antiunitario y puede ser escrito como $\hat{T} = \hat{U}K$, donde $\hat{U}$ es un operador unitario y K es la operación complejo conjugada ([12], p. 251-282).

Para que el operador hamiltoniano sea invariante ante la conjugación de carga ($\hat{C}\hat{H}\hat{C}^{-1} = \hat{H}$), en la mecánica cuántica relativista es necesario que, simultáneamente:

$$q \xmapsto{C} -q, \quad A_\mu \xmapsto{C} -A_\mu, \tag{3.18}$$

siendo $\hat{C}$ un operador lineal que además cumple:

$$\hat{C}^{-1}\mathbf{x}\hat{C} = \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{x}, \hat{C}] = 0, \tag{3.19}$$
$$\hat{C}^{-1}\mathbf{p}\hat{C} = \mathbf{p} \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{p}, \hat{C}] = 0, \tag{3.20}$$
$$\hat{C}^{-1}\mathbf{J}\hat{C} = \mathbf{J} \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{J}, \hat{C}] = 0. \tag{3.21}$$

3.3. C, P, T en teoría cuántica de campos

Por lo general las teorías de campos libres son invariantes bajo estas tres transformaciones, pero esto puede cambiar si las interacciones están presentes rompiendo la simetría.

En este caso, necesitamos verificar tres condiciones para decir que la teoría de campos es invariante bajo las transformaciones discretas:

1. que la dinámica obedezca la simetría, es decir que:
$$[\hat{P},\hat{H}]=[\hat{C},\hat{H}]=[\hat{T},\hat{H}]=0; \tag{3.22}$$
2. que el estado base o vacío permanezca invariante:
$$\hat{P}|0\rangle=|0\rangle, \qquad \hat{C}|0\rangle=|0\rangle, \qquad \hat{T}|0\rangle=|0\rangle; \tag{3.23}$$
3. que las condiciones de cuantización permanezcan invariantes.

3.3.1. C, P, T en el campo de Dirac

En búsqueda de la simplicidad, en algunos textos [7, 28], eligen factores de fase iguales a uno para el campo de Dirac, al transformarse bajo estas simetrías. En el 2004 se determinó la estructura matemática del grupo CPT de las tres transformaciones para el campo de Dirac [31], tomándose como punto de partida los estudios realizados en ([32], p. 46-52). Se escogieron los factores de fase de manera más adecuada y se demostró, en particular, que necesariamente el cuadrado de P para este campo es -1; lo que implica que para el sistema electrón-positrón, dos inversiones espaciales sucesivas equivalen a una rotación de 360 grados.

Se demostró que existen dos conjuntos de soluciones consistentes para las matrices de conjugación de carga (C), paridad (P) e inversión temporal (T), las cuales conducen, respectivamente, a transformaciones para los campos de la forma: $\hat{\psi}_C(\mathbf{x},t) = C\hat{\bar{\psi}}^T(\mathbf{x},t)$, $\hat{\psi}_P(\mathbf{x},t) = P\hat{\psi}(-\mathbf{x},t)$ y $\hat{\psi}_T(\mathbf{x},t) = T\hat{\psi}(\mathbf{x},-t)^*$. Estos conjuntos están dados por:

$$a)\; C=\pm\gamma^2\gamma^0, \qquad P=\pm i\gamma^0, \qquad T=\pm i\gamma^3\gamma^1; \tag{3.24}$$
$$b)\; C=\pm i\gamma^2\gamma^0, \qquad P=\pm i\gamma^0, \qquad T=\pm\gamma^3\gamma^1. \tag{3.25}$$

Cada uno de estos conjuntos genera un grupo no abeliano de 16 elementos, respectivamente, $G_\theta^{(1)}$ y $G_\theta^{(2)}$, los cuales están contenidos en el álgebra de Dirac, D^{16}, y son no isomorfos entre sí. El álgebra de Dirac, siendo un álgebra de Clifford, da una naturaleza geométrica a los generadores, en particular, a la conjugación de carga.

Se llegó a que: $G_\theta^{(1)} \cong DH_8 \times \mathbb{Z}_2 < S_6$ y $G_\theta^{(2)} \cong 16E < S_8$, donde por $<$ entenderemos subgrupo.

- DH_8 es el grupo dihédrico de 8 elementos: el grupo de las simetrías del cuadrado;
- $16E$ es una extensión no trivial de DH_8 por $\mathbb{Z}_2$, isomorfo al producto semi-directo de estos grupos;
- S_6 y S_8 son los grupos simétricos (de permutaciones) de 6 y 8 elementos, respectivamente.

En cambio, se demostró que los operadores $\hat{C}$, $\hat{P}$, $\hat{T}$, generan un único grupo $G_{\hat{\theta}}$, el cual podemos llamar el grupo CPT del campo de Dirac. Este grupo, sin embargo, es compatible sólo con la segunda de las dos soluciones para las matrices ($G_\theta^{(2)}$), el cual es llamado el grupo CPT matricial.

Se demostró además que $G_{\hat{\theta}} \cong DC_8 \times \mathbb{Z}_2 < S_{10}$.

- DC_8 es el grupo dicíclico de 8 elementos;
- S_{10} es el grupo simétrico de 10 elementos.

Debido a que $DC_8 \cong Q$, el grupo cuaterniónico y $\mathbb{Z}_2 \cong S^0$, la 0-esfera, entonces $G_{\hat{\theta}} \cong Q \times S^0$.

La tabla de multiplicación para $G_{\hat{\theta}}$ está dada por la tabla 3.1. La misma debe ser completada agregando a la primera fila y a la primera columna los negativos -1, $-\hat{C}$, $-\hat{P}$, ..., $-\hat{\theta}$, y haciendo los correspondientes productos.

Paridad

Partiendo de la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\hat{\psi}(x) = 0 \tag{3.26}$$

cambiando $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, multiplicando por la izquierda por P e insertando la unidad, se obtiene:

	$\hat{C}$	$\hat{P}$	$\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{\theta}$
$\hat{C}$	1	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{P}$	$\hat{T}$	$\hat{\theta}$	$\hat{P}*\hat{T}$
$\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{P}$	-1	$\hat{P}*\hat{T}$	$-\hat{C}$	$\hat{\theta}$	$-\hat{T}$	$-\hat{C}*\hat{T}$
$\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$-\hat{P}*\hat{T}$	-1	$-\hat{\theta}$	$-\hat{C}$	$\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{P}$
$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{P}$	$-\hat{C}$	$\hat{\theta}$	-1	$\hat{P}*\hat{T}$	$-\hat{C}*\hat{T}$	$-\hat{T}$
$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{T}$	$-\hat{\theta}$	$-\hat{C}$	$-\hat{P}*\hat{T}$	-1	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{P}$
$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{\theta}$	$\hat{T}$	$-\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$-\hat{C}*\hat{P}$	-1	$-\hat{C}$
$\hat{\theta}$	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$-\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{T}$	$-\hat{P}$	$-\hat{C}$	-1

Tabla 3.1: Tabla de multiplicación para el grupo CPT de operadores, $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$, del campo de Dirac.

$$(i(P\gamma^0P^{-1}\partial_0 - P\gamma^iP^{-1}\partial_i) - m)\hat{\psi}_\Pi(x) = 0, \tag{3.27}$$

donde $\hat{\psi}_\Pi(x) = P\hat{\psi}(x_\pi)$.

De aquí se deducen las restriciones para la matriz 4×4 invertible P:

$$P\gamma^0P^{-1} = \gamma^0, \qquad P\gamma^kP^{-1} = -\gamma^k, \tag{3.28}$$

que pueden expresarse de la forma:

$$P\gamma^\mu P^{-1} = \omega^\mu_\nu \gamma^\nu, \tag{3.29}$$

donde

$$\omega^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & para\ \mu = \nu = 0 \\ -1, & para\ \mu = \nu = i,\ con\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3.30}$$

Usando la forma estándar para las matrices γ:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

y siendo

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

las matrices de Pauli, se verifica que la única solución posible para (3.29) es:

$$P = z\gamma^0, \qquad z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}, \tag{3.33}$$

con $P \in D^{16}$.

Aplicar P dos veces, es decir, dos inversiones espaciales sucesivas, equivalen a una rotación de 2π para el espinor, quien cambia de signo. A su vez, una rotación en 4π (equivalente a una rotación en $0°$ grados) mantiene el signo del espinor y equivale a aplicar P cuatro veces.

Entonces, como

$$P^4\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) \;\Rightarrow\; P^4 = 1 \;\Rightarrow\; P^2 = \pm 1. \tag{3.34}$$

Cuando

$$P^2 = +1 \;\Rightarrow\; z = \pm 1 \tag{3.35}$$

y cuando

$$P^2 = -1 \;\Rightarrow\; z = \pm i. \tag{3.36}$$

Para el primer caso queda entonces:

$$P = \pm\gamma^0,\; P^\dagger = P = P^{-1} = P^T = P^*,\; det(P) = 1,\; tr(P) = 0. \tag{3.37}$$

y para el segundo:

$$P = \pm i\gamma^0,\; P^\dagger = -P = P^{-1} = -P^T = P^*,\; det(P) = 1,\; tr(P) = 0, \tag{3.38}$$

donde P^T es la matriz transpuesta.

Podemos encontrar la transformación de paridad para el espinor conjugado de Dirac partiendo de que $\hat{\psi}_\Pi(x_\Pi) = P\hat{\psi}(x)$. Tomando el adjunto y multiplicando por γ^0 a la derecha, tenemos

$$\hat{\psi}_\Pi(x_\Pi)^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}(x)^\dagger P^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}(x)^\dagger\gamma^0 P^{-1} = \hat{\bar{\psi}}(x)P^{-1}, \tag{3.39}$$

de cuyo miembro izquierdo se define $\hat{\bar{\psi}}_\Pi(x_\Pi)$:

$$\hat{\bar{\psi}}_\Pi(x_\Pi) = \hat{\bar{\psi}}(x)P^{-1}. \tag{3.40}$$

La fórmula (3.6) en este caso queda:

$$\hat{\psi}_\Pi(t,\mathbf{x}) = P\hat{\psi}(t,-\mathbf{x}) = \hat{P}^\dagger\hat{\psi}(t,\mathbf{x})\hat{P}, \tag{3.41}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}\hat{P}^\dagger(\hat{P}^\dagger\hat{\psi}(t,\mathbf{x})\hat{P})\hat{P} &= \hat{P}^{\dagger 2}\hat{\psi}(t,\mathbf{x})\hat{P}^2 = \hat{P}^\dagger(P\hat{\psi}(t,-\mathbf{x}))\hat{P} \\ &= P(P\hat{\psi}(t,\mathbf{x})) = P^2\hat{\psi}(t,\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Por lo tanto,

$$\hat{P}^{\dagger 2}\hat{\psi}(t,\mathbf{x})\hat{P}^2 = \pm\hat{\psi}(t,\mathbf{x}). \tag{3.43}$$

Conjugación de carga

La ecuación para el campo de Dirac con carga eléctrica $q = -|e|$ en un potencial electromagnético A_μ está dada por:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\hat{\psi}(x) = 0. \tag{3.44}$$

Tomando el complejo conjugado de esta ecuación, multiplicando por la izquierda por $C\gamma^0$, donde C es una matriz en $GL_4(\mathbb{C})$, e insertando la matriz unidad, se obtiene

$$((i\partial_\mu + qA_\mu)(C\gamma^0)\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1} + m)(C\gamma^0)\hat{\psi}^*(x) = 0. \tag{3.45}$$

Si entonces definimos el espinor de carga conjugado como

$$\hat{\psi}_C = C\gamma^0\hat{\psi}^* \tag{3.46}$$

e imponemos la restricción sobre C:

$$(C\gamma^0)\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu, \tag{3.47}$$

$\hat{\psi}_C$ obedece la ecuación

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)\hat{\psi}_C(x) = 0 \tag{3.48}$$

y describe a partículas con la misma masa pero con carga opuesta. Si queremos completar la operación de conjugación de carga, cambiando además $A_\mu \to -A_\mu$, entonces (3.48) se convierte en

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\hat{\psi}_C(x) = 0, \tag{3.49}$$

mostrándose la completa simetría de la electrodinámica cuántica bajo la operación de conjugación de carga.

Como $\gamma^0\gamma^{\mu *}\gamma^0 = \gamma^{\mu T}$, la restricción (3.47) es equivalente a

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu. \tag{3.50}$$

Además, el espinor conjugado de Dirac es $\hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^\dagger\gamma^0$ y por lo tanto $\hat{\bar{\psi}}^T = \gamma^{0T}\hat{\psi}^{\dagger T} = \gamma^0\hat{\psi}^*$; así para el espinor conjugado de carga tenemos

$$\hat{\psi}_C = C\hat{\bar{\psi}}^T. \tag{3.51}$$

Puede mostrarse entonces que la única matriz C que cumple con la anterior restricción, es de la forma

$$C = \eta\gamma^2\gamma^0 = \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in D^{16} \tag{3.52}$$

con $\eta \in \mathbb{C}^*$; en particular $C^2 = \eta^2 1,\ det(C) = \eta^4$ y $tr(C) = 0$.

Aplicando dos veces la transformación de conjugación de carga tenemos

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}_C)_C &= \hat{\psi}_{C^2} = C\hat{\bar{\psi}}_C^T = C(\hat{\psi}_C^\dagger\gamma^0)^T = C\gamma^0\hat{\psi}_C^* = C\gamma_0 C^*\gamma^0\hat{\psi} = -CC^*\hat{\psi} \\ &= -|\eta|^2\gamma^2\gamma^0\gamma^{2*}\gamma^0\hat{\psi} = -|\eta|^2(\gamma^2)^2(\gamma^0)^2\hat{\psi} = |\eta|^2\hat{\psi} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Como el efecto sobre $\hat{\psi}$ puede ser, como máximo, la multiplicación por una fase, entonces $\eta \in U(1)$ y C es unitario. Esto es:

$$CC^\dagger = \eta\gamma^2\gamma^0\bar{\eta}\gamma^0\gamma^{2\dagger} = |\eta|^2\gamma^2\gamma^{2\dagger} = -|\eta|^2(\gamma^2)^2 = |\eta|^2 1 = 1. \tag{3.54}$$

Por lo tanto,

$$\hat{\psi}_{C^2} = \hat{\psi}. \tag{3.55}$$

Por otra parte, para la transformación del espinor conjugado de Dirac, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\psi}}_C &= (\hat{\psi}^\dagger\gamma^0)_C = \hat{\psi}_C^\dagger\gamma^0 = (C\gamma^0\hat{\psi}^*)^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}^{*\dagger}\gamma^0 C^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}^T\gamma^0\bar{\eta}(\gamma^2\gamma^0)^\dagger\gamma^0 \\ &= -\bar{\eta}\hat{\psi}^T\gamma^2\gamma^0 = -\bar{\eta}^2\hat{\psi}^T\eta\gamma^2\gamma^0 = -\bar{\eta}^2\hat{\psi}^T C \end{aligned} \tag{3.56}$$

y entonces, teniendo en cuenta que $\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$ es el operador de densidad de carga,

$$\begin{aligned} (\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi})_C = \hat{\bar{\psi}}_C\hat{\psi}_C = -\bar{\eta}^2\hat{\psi}^T CC\hat{\bar{\psi}}^T = -\bar{\eta}^2 C^2(\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi})^T = -\bar{\eta}^2 C^2\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} \\ = -(\bar{\eta}\eta)^2\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = -|\eta|^4\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = -\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}; \end{aligned} \tag{3.57}$$

se obtiene que $|\eta|^4 = 1$.

Comparando (3.51) con (3.56), por consideraciones de simetría $-\bar{\eta}^2 = \pm 1$ y, por tanto, $\eta^2 = \pm 1$, lo cual implica que $\eta = \pm 1, \pm i$.

Finalmente existen las dos posibilidades:

$$a)\ \eta = \pm 1 \Rightarrow C^2 = 1, \quad C = \pm\gamma^2\gamma^0 = C^{-1} = C^\dagger = -C^T = -C^*, \tag{3.58}$$

$$\hat{\bar{\psi}}_C = -\hat{\psi}^T C; \tag{3.59}$$

$$b)\ \eta = \pm i \Rightarrow C^2 = -1, \quad C = \pm i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T = C^*, \tag{3.60}$$

$$\hat{\bar{\psi}}_C = \hat{\psi}^T C. \tag{3.61}$$

La fórmula (3.6) en este caso es:

$$\hat{\psi}_C(x) = C\hat{\bar{\psi}}^T(x) = \hat{C}^\dagger\hat{\psi}(x)\hat{C}, \tag{3.62}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\hat{C}^\dagger(\hat{C}^\dagger\hat{\psi}(x)\hat{C})\hat{C} &= \hat{C}^{\dagger 2}\hat{\psi}(x)\hat{C}^2 = \hat{C}^\dagger(C\bar{\hat{\bar{\psi}}}^T(x))\hat{C} = \hat{C}^\dagger(C\gamma^0\hat{\psi}^*(x))\hat{C} \\
&= (C\gamma^0\hat{\psi}^*(x))_C = C\gamma^0(C\gamma^0\hat{\psi}^*(x))^* = C\gamma^0C^*\gamma^0\hat{\psi}(x) \\
&= \gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^{2*}\gamma^0\gamma^0\hat{\psi}(x) = -(\gamma^2)^2\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x),
\end{aligned} \tag{3.63}$$

lo que equivale a

$$\hat{C}^{\dagger 2}\hat{\psi}(x)\hat{C}^2 = \hat{\psi}(x). \tag{3.64}$$

Inversión temporal

Comenzando de nuevo a partir de la ecuación libre de Dirac

$$(i(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k}) - m)\hat{\psi}(t,\mathbf{x}) = 0, \tag{3.65}$$

cambiando $t \to -t$ y tomando el complejo conjugado, se obtiene:

$$(i(\gamma^{0*}\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^{k*}\frac{\partial}{\partial x^k}) - m)\hat{\psi}(-t,\mathbf{x})^* = 0 \tag{3.66}$$

con $\gamma^{0*} = \gamma^0$, $\gamma^{k*} = \gamma^k$ para $k = 1, 3$ y $\gamma^{2*} = -\gamma^2$.

Multiplicando por la izquierda por T e insertando la unidad, se deduce que T es la matriz invertible 4×4 tal que:

$$T\gamma^0T^{-1} = \gamma^0,\ T\gamma^{k*}T^{-1} = -\gamma^k. \tag{3.67}$$

Entonces

$$\hat{\psi}_\tau(t,\mathbf{x}) = T\hat{\psi}(-t,\mathbf{x})^* \tag{3.68}$$

obedece la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\hat{\psi}_\tau(x) = 0. \tag{3.69}$$

La solución para (3.67) es:

$$T = w\gamma^3\gamma^1 = w \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; w \in \mathbb{C}^*. \tag{3.70}$$

Aquí $T \in D^{16}$, $det(T) = w^4$ y $tr(T) = 0$.

Si se aplica τ dos veces, se obtiene

$$\hat{\psi}(t, \mathbf{x}) \to \hat{\psi}_\tau(t, \mathbf{x}) = T\hat{\psi}(-t, \mathbf{x})^* \to T(T\hat{\psi}(t, \mathbf{x})^*)^* = TT^*\hat{\psi}(t, \mathbf{x}), \tag{3.71}$$

i.e.,

$$\hat{\psi}_{\tau^2} = TT^*\hat{\psi}. \tag{3.72}$$

Pero

$$TT^* = w\gamma^3\gamma^1 w^*\gamma^3\gamma^1 = -|w|^2(\gamma^3)^2(\gamma^1)^2 = -|w|^2 1, \tag{3.73}$$

y así $\hat{\psi}_{\tau^2} = -|w|^2\hat{\psi}$ y por lo tanto,

$$\hat{\psi}_{\tau^2} = -\hat{\psi}, \tag{3.74}$$

por un argumento similar al usado para C. De esta forma $TT^* = -1$, *i.e.*, $T^* = -T^{-1}$ y $w \in U(1)$. Entonces $T = e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1$ y $T^\dagger = -e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1$.

La fórmula (3.7) en este caso es:

$$\hat{\psi}_\tau(t, \mathbf{x}) = T\hat{\psi}(-t, \mathbf{x})^* = (\hat{T}^\dagger\hat{\psi}(t, \mathbf{x})\hat{T})^\dagger = \hat{T}^\dagger\hat{\psi}(t, \mathbf{x})^\dagger\hat{T}, \tag{3.75}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{T}^\dagger(\hat{T}^\dagger\hat{\psi}(t, \mathbf{x})^\dagger\hat{T})\hat{T} &= \hat{T}^{\dagger 2}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})^\dagger\hat{T}^2 = \hat{T}^\dagger(T\hat{\psi}(-t, \mathbf{x})^*)\hat{T} \\ &= (TT^*)^\dagger\hat{\psi}(t, \mathbf{x})^\dagger = -\hat{\psi}(t, \mathbf{x})^\dagger, \end{aligned} \tag{3.76}$$

o equivalentemente,

$$\hat{T}^{\dagger 2}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})\hat{T}^2 = -\hat{\psi}(t, \mathbf{x}). \tag{3.77}$$

Fijando el cuadrado de P

Siendo $(\hat{\psi}_C)_\Pi(x_\Pi)$ la transformación de paridad para el espinor conjugado de carga, de (3.40) y (3.51) se tiene:

$$\begin{aligned}(\hat{\psi}_C)_\Pi(x_\Pi) &= C\hat{\bar{\psi}}_\Pi(x_\Pi)^T = C(\hat{\bar{\psi}}(x)P^{-1})^T = C(P^{-1})^T\hat{\bar{\psi}}(x)^T \\ &= C(P^{-1})^T C^{-1}C\hat{\bar{\psi}}(x)^T = C(P^{-1})^T C^{-1}\hat{\psi}_C(x),\end{aligned} \quad (3.78)$$

la cual debe ser igual a $P\hat{\psi}_C(x)$; entonces C y P deben satisfacer:

$$C(P^{-1})^T C^{-1} = P. \quad (3.79)$$

Considerando las dos posibilidades para C y las dos posibilidades para P:

$$a)\, C(P^{-1})^T C^{-1} = \gamma^2\gamma^0(P^{-1})^T\gamma^2\gamma^0 = \begin{cases} \gamma^2\gamma^0(\pm\gamma^0)\gamma^2\gamma^0 = \mp\gamma^0 = -P \\ \gamma^2\gamma^0(\mp i\gamma^0)\gamma^2\gamma^0 = \pm i\gamma^0 = P, \end{cases} \quad (3.80)$$

lo que implica $P = \pm i\gamma^0$.

$$b)\, C(P^{-1})^T C^{-1} = (i\gamma^2\gamma^0)(P^{-1})^T(-i\gamma^2\gamma^0) = \begin{cases} \gamma^2\gamma^0(\pm\gamma^0)\gamma^2\gamma^0 = \mp\gamma^0 = -P \\ \gamma^2\gamma^0(\mp i\gamma^0)\gamma^2\gamma^0 = \pm i\gamma^0 = P, \end{cases} \quad (3.81)$$

lo que también implica $P = \pm i\gamma^0$.

De esta forma P y C son compatibles si y sólo si $P = \pm i\gamma^0$, lo que implica

$$P^2 = -1. \quad (3.82)$$

Entonces

$$\hat{\psi}_{\Pi^2} = -\hat{\psi} \quad (3.83)$$

y

$$\hat{P}^{\dagger 2}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})\hat{P}^2 = -\hat{\psi}(t, \mathbf{x}). \quad (3.84)$$

Compatibilidad entre C y T. CPT

Para la inversión temporal del espinor conjugado de Dirac tenemos (con $x = (t, \mathbf{x})$ y $x_\tau = (-t, \mathbf{x})$):

$$\hat{\bar{\psi}}_\tau(x) = \hat{\psi}_\tau(x)^\dagger\gamma^0 = (T\hat{\psi}(x_\tau)^*)^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}(x_\tau)^{*\dagger}T^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}(x_\tau)^T\gamma^0 T^\dagger = \hat{\bar{\psi}}(x_\tau)^* T^\dagger; \quad (3.85)$$

y la inversión temporal del espinor conjugado de carga es:

$$(\hat{\psi}_C)_\tau(x) = C\hat{\bar{\psi}}_\tau(x)^T = C(\hat{\psi}(x_\tau)^T\gamma_0 T^\dagger)^T = CT^{\dagger T}\gamma^0\hat{\psi}(x_\tau) = CT^*\gamma^0\hat{\psi}(x_\tau); \tag{3.86}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned}(\hat{\psi}_C)_\tau(x) &= T\hat{\psi}_C(x_\tau)^* = T(C\hat{\bar{\psi}}(x_\tau)^T)^* = T(C(\hat{\psi}(x_\tau)^\dagger\gamma^0)^T)^* \\ &= T(C\gamma^0\hat{\psi}(x_\tau)^*)^* = TC^*\gamma^0\hat{\psi}(x_\tau).\end{aligned} \tag{3.87}$$

Entonces C y T están relacionados mediante:

$$CT^* = TC^*. \tag{3.88}$$

Considerando de nuevo las dos soluciones para C:

$$\begin{aligned}a)\, C^* = -C, \Rightarrow\ CT^* = -TC \Longleftrightarrow \gamma^2\gamma_0 e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1 &= e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 \\ &= -e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0,\end{aligned} \tag{3.89}$$

lo que implica

$$e^{2i\lambda} = -1 \ \Rightarrow\ \lambda = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \tag{3.90}$$

con $k \in \mathbb{Z}$; entonces

$$e^{i\lambda} = (-1)^k i = \begin{cases} i, & para\ k\ par \\ -i, & para\ k\ impar. \end{cases} \tag{3.91}$$

Así,

$$T = \pm i\gamma^3\gamma^1 = T^\dagger = -T^* = T^{-1} = -T^T,\ T^2 = 1. \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}b)\, C^* = C, \Rightarrow\ CT^* = TC \Longleftrightarrow \gamma^2\gamma_0 e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1 &= e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 \\ &= e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0,\end{aligned} \tag{3.93}$$

lo que implica

$$e^{2i\lambda} = 1 \ \Rightarrow\ \lambda = k\pi, \tag{3.94}$$

con $k \in \mathbb{Z}$; entonces

$$e^{i\lambda} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & para\ k\ par \\ -1, & para\ k\ impar. \end{cases} \tag{3.95}$$

Así,

$$T = \pm\gamma^3\gamma^1 = -T^\dagger = T^* = -T^{-1} = -T^T,\ T^2 = -1. \qquad (3.96)$$

En resumen, existen sólo dos conjuntos de soluciones consistentes para las matrices C, P y T en el caso del campo de Dirac de espín 1/2 :

$$a)\, C = \pm\gamma^2\gamma^0,\ P = \pm i\gamma^0,\ T = \pm i\gamma^3\gamma^1, \qquad (3.97)$$

con

$$C^2 = 1,\ P^2 = -1,\ T^2 = 1; \qquad (3.98)$$

y

$$b)\, C = \pm i\gamma^2\gamma^0,\ P = \pm i\gamma^0,\ T = \pm\gamma^3\gamma^1, \qquad (3.99)$$

con

$$C^2 = P^2 = T^2 = -1. \qquad (3.100)$$

En correspondencia, van a existir dos grupos CPT de dieciséis elementos cada uno, subgrupos del álgebra de Dirac. La matriz producto $\theta = CPT$ es, sin embargo, la misma para los dos conjuntos y está dada por:

$$\begin{aligned} \theta &= (\pm\gamma^2\gamma^0)(\pm i\gamma^0)(\pm i\gamma^3\gamma^1) = (\pm i\gamma^2\gamma^0)(\pm i\gamma^0)(\pm\gamma^3\gamma^1) = \pm\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= \pm i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \pm i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (3.101)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \theta^2 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 = 1, \\ \theta^\dagger = \theta = \theta^{-1} = -\theta^T = -\theta^*, \\ det(\theta) = 1, \quad tr(\theta) = 0. \end{aligned} \qquad (3.102)$$

3.3.2. C, P, T en el campo electromagnético

Para el operador del campo electromagnético, la matriz Λ, mencionada al inicio de este capítulo, disminuye su importancia pues, a diferencia con el campo de Dirac, aquí $u(x)$ no es un espinor. Por tanto, en este caso las relaciones (3.6) y (3.7) se traducen en las siguientes propiedades de transformación ante C, P y T para el operador $\hat{A}^\mu(x)$:

- Inversión espacial:
$$\hat{P}^{\dagger}\hat{A}^{\mu}(t,\mathbf{x})\hat{P}=\hat{A}_{\mu}(t,-\mathbf{x}); \tag{3.103}$$

- Conjugación de carga:
$$\hat{C}^{\dagger}\hat{A}^{\mu}(x)\hat{C}=-\hat{A}^{\mu}(x); \tag{3.104}$$

- Inversión temporal:
$$\hat{T}^{\dagger}\hat{A}^{\mu}(t,\mathbf{x})\hat{T}=\hat{A}_{\mu}(-t,\mathbf{x}). \tag{3.105}$$

Se espera que el término de interacción, $j^{\mu}A_{\mu}$, de la electrodinámica cuántica sea invariante bajo las tres simetrías discretas. Es por esta razón que aparecen los signos negativos en las propiedades de transformación (3.103), (3.104) y (3.105). Así, el hamiltoniano de la electrodinámica cuántica resulta invariante bajo estas simetrías; es decir,

$$\hat{W}\hat{H}_{QED}\hat{W}^{-1}=\hat{H}_{QED}, \tag{3.106}$$

donde $\hat{W}$ corre por $\hat{C}$, $\hat{P}$ y $\hat{T}$.

Las relaciones (3.103), (3.104), (3.105) conllevan a la tabla de multiplicación (tabla 3.2) para el grupo CPT de operadores del campo electromagnético, $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_{\mu})$ [33].

	$\hat{C}$	$\hat{P}$	$\hat{T}$	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{\theta}$
$\hat{C}$	1	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{\theta}$	$\hat{P}$	$\hat{T}$	$\hat{P}*\hat{T}$
$\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{P}$	1	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{T}$	$\hat{C}$	$\hat{\theta}$	$\hat{C}*\hat{T}$
$\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{P}*\hat{T}$	1	$\hat{P}$	$\hat{\theta}$	$\hat{C}$	$\hat{C}*\hat{P}$
$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{\theta}$	$\hat{T}$	$\hat{P}$	1	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}$
$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{P}$	$\hat{C}$	$\hat{\theta}$	$\hat{C}*\hat{T}$	1	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{T}$
$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{T}$	$\hat{\theta}$	$\hat{C}$	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{P}*\hat{T}$	1	$\hat{P}$
$\hat{\theta}$	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}$	$\hat{T}$	$\hat{P}$	1

Tabla 3.2: Tabla de multiplicación para el grupo CPT de operadores, $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_{\mu})$, del campo electromagnético.

En contraste con $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ [31, 33, 34], $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_{\mu})$, es un grupo abeliano de 8 elementos y tres generadores. Por tanto, es isomorfo a $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_2^3$. Si e_i

y a_i (para $i = 1, 2, 3$) representan, respectivamente, la identidad y el menos uno de cada uno de los grups $\mathbb{Z}_2$, entonces, como puede ser fácilmente verificado, el isomorfismo

$$G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \tag{3.107}$$

está dado por:

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto (e_1, e_2, e_3) \\
\hat{C} &\mapsto (a_1, e_2, e_3) \\
\hat{P} &\mapsto (e_1, a_2, e_3) \\
\hat{T} &\mapsto (e_1, e_2, a_3) \\
\hat{P} * \hat{T} &\mapsto (e_1, a_2, a_3) \\
\hat{C} * \hat{P} &\mapsto (a_1, a_2, e_3) \\
\hat{C} * \hat{T} &\mapsto (a_1, e_2, a_3) \\
\hat{\theta} &\mapsto (a_1, a_2, a_3).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Geométricamente, $\mathbb{Z}_2^3$ es isomorfo al grupo D_{2h}, el grupo de simetrías del paralelepípedo.

Capítulo 4

Conjugación de carga a partir de inversión espacio-temporal en el campo de Dirac

4.1. Introducción

En un artículo reciente [31] se mostró que el grupo CPT, denotado por $G_{\hat{\theta}}$ ($\hat{\theta}$ para el producto $\hat{C} * \hat{P} * \hat{T}$ de los tres operadores), del campo cuántico de Dirac $\hat{\psi}$, es isomorfo al producto directo del grupo cuaterniónico Q y el grupo cíclico de dos elementos $\mathbb{Z}_2$:

$$G_{\hat{\theta}} \cong Q \times \mathbb{Z}_2. \tag{4.1}$$

El producto $\hat{A} * \hat{B}$, donde $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son algunos de los operadores $\hat{C}$, $\hat{P}$, $\hat{T}$, está dado por $(\hat{A} * \hat{B}) \cdot \hat{\psi} = (\hat{A}\hat{B})^\dagger \hat{\psi} (\hat{A}\hat{B})$.

El grupo Q consiste de los elementos 1, ι, γ, κ y sus negativos; siendo ι, γ, κ las tres unidades imaginarias que definen a los números cuaterniónicos. La tabla de multiplicación del grupo cuaterniónico está dada por la tabla 4.1.

$G_{\hat{\theta}}$ es uno de los 9 grupos no abelianos del total de 14 grupos con 16 elementos ([35], p. 86); sólo 3 de ellos tienen 3 generadores. En particular, $G_{\hat{\theta}} \cong DC_8 \times \mathbb{Z}_2$, donde DC_8 es el grupo dicíclico de 8 elementos con generadores x y y, $\mathbb{Z}_2$ es el grupo cíclico de 2 elementos con generador z; así los generadores de $DC_8 \times \mathbb{Z}_2$ son $(x, 1)$, $(y, 1)$ y $(1, z)$. El isomorfismo de DC_8 con Q está dado por la correspondencia $x \to \iota$ y $y \to \gamma$.

	ι	γ	κ	-1	$-\iota$	$-\gamma$	$-\kappa$
ι	-1	κ	$-\gamma$	$-\iota$	1	$-\kappa$	γ
γ	$-\kappa$	-1	ι	$-\gamma$	κ	1	$-\iota$
κ	γ	$-\iota$	-1	$-\kappa$	$-\gamma$	ι	1
-1	$-\iota$	$-\gamma$	$-\kappa$	1	ι	γ	κ
$-\iota$	1	κ	γ	ι	-1	κ	$-\gamma$
$-\gamma$	κ	1	$-\iota$	γ	$-\kappa$	-1	ι
$-\kappa$	$-\gamma$	ι	1	κ	γ	$-\iota$	-1

.

Tabla 4.1: Tabla de multiplicación para el grupo cuaterniónico.

La tabla de multiplicación para $G_{\hat{\theta}}$ está dada por la tabla 3.1. La misma debe ser completada agregando a la primera fila y a la primera columna los negativos -1, $-\hat{C}$, $-\hat{P}$,..., $-\hat{\theta}$, y haciendo los correspondientes productos.

El isomorfismo $G_{\hat{\theta}} \to Q \times \mathbb{Z}_2$ está dado por las relaciones (4.2), donde identificamos a $\mathbb{Z}_2$ con la 0-esfera $S^0 = \{1, -1\}$.

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto (1,1) & -1 &\mapsto (-1,1)\\
\hat{C} &\mapsto (1,-1) & -\hat{C} &\mapsto (-1,-1)\\
\hat{P} &\mapsto (\iota,1) & -\hat{P} &\mapsto (-\iota,1)\\
\hat{T} &\mapsto (\gamma,1) & -\hat{T} &\mapsto (-\gamma,1)\\
\hat{C}*\hat{P} &\mapsto (\iota,-1) & -\hat{C}*\hat{P} &\mapsto (-\iota,-1)\\
\hat{C}*\hat{T} &\mapsto (\gamma,-1) & -\hat{C}*\hat{T} &\mapsto (-\gamma,-1)\\
\hat{P}*\hat{T} &\mapsto (\kappa,1) & -\hat{P}*\hat{T} &\mapsto (-\kappa,1)\\
\hat{\theta} &\mapsto (\kappa,-1) & -\hat{\theta} &\mapsto (-\kappa,-1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2. Q como subgrupo de $\mathrm{SU}(2)$

Con la correspondencia indicada en (4.3):

$$
\begin{aligned}
1 \mapsto I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iota \mapsto \rho_1 &= -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma \mapsto \rho_2 &= -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\kappa \mapsto \rho_3 &= -i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

donde σ_k $(k = 1, 2, 3)$ son las matrices de Pauli, Q se vuelve isomorfo a un subgrupo H de $SU(2)$ [1]; teniendo en cuenta además que $\mathbb{Z}_2$ es isomorfo al centro de $SU(2)$: $\{I, -I\}$, entonces:

$$G_{\hat{\theta}} \cong H \times (centro\ \ de\ \ SU(2)). \qquad (4.4)$$

Como $SU(2)$ es la cubierta universal de $SO(3)$:

$$SU(2) \xrightarrow{\Phi} SO(3), \qquad (4.5)$$

con

$$\Phi \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re\, z^2 - Re\, w^2 & Im\, z^2 + Im\, w^2 & -2Re\, zw \\ Im\, z^2 - Im\, w^2 & Re\, z^2 + Re\, w^2 & 2Im\, zw \\ 2Re\, z\bar{w} & 2Im\, z\bar{w} & |z|^2 - |w|^2 \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

el número de subgrupos finitos de $SU(2)$ es el mismo que el de $SO(3)$; y si A es un subgrupo finito de $SO(3)$, entonces $\tilde{A} = \Phi^{-1}(A)$ tiene dos veces el número de elementos de A.

Los subgrupos finitos de $SO(3)$ son: los grupos cíclicos C_n, para $n = 1, 2, 3, ...$ $(C_2 = \mathbb{Z}_2)$; los grupos diédricos D_k (simetrías del rectángulo para $k = 2$ y de los polígonos regulares para $k \geq 3$) y los grupos de simetrías rotacionales (T del tetraedro, O del cubo y el octaedro, I del dodecaedro y el isocaedro) [36].

[1] Notar que $\rho_k^{\dagger} = \rho_k^{-1}$ y $det\rho_k = +1$. Además H no es un subgrupo invariante de $SU(2)$.

4.3. $\Phi(\mathrm{H})$ en $\mathrm{SO}(3)$

Teniendo en cuenta las propiedades de la cubierta universal, $\Phi(H)$ tiene 4 elementos y, de esta forma, los únicos candidatos son grupos isomorfos a C_4 y $D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, el grupo de Klein. Una simple aplicación de Φ sobre los elementos de H conlleva a:

$$\Phi(H) = \{I,\ R_x(\pi),\ R_y(\pi),\ R_z(\pi)\}, \tag{4.7}$$

siendo

$$R_x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_y(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

las rotaciones en π alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente, e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz unidad en $SO(3)$.

Se verifica inmediatamente entonces que la tabla de multiplicación para $\Phi(H) < SO(3)$ es la misma que para D_2 (tabla 4.2).

	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Tabla 4.2: Tabla de multiplicación para el grupo D_2.

Se cumple la correspondencia $a \mapsto R_x(\pi)$, $b \mapsto R_y(\pi)$ y $c \mapsto R_z(\pi)$. Entonces tenemos que:

$$G_{\hat{\theta}} \cong \Phi^{-1}(D_2) \times \mathbb{Z}_2. \tag{4.9}$$

4.4. Paridad e inversión temporal

Dentro del grupo $O(1,3)$, las transformaciones de paridad e inversión temporal están dadas por las matrices:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

respectivamente.

Estas transformaciones, conjuntamente con la matriz identidad E de 4×4 y el producto $\mathcal{PT}$, dan lugar a un subgrupo del grupo de Lorentz $O(1,3)$, denominado el grupo PT del grupo de Lorentz, al cual corresponde la tabla de multiplicación 4.3.

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{PT}$
$\mathcal{P}$	E	$\mathcal{PT}$	$\mathcal{T}$
$\mathcal{T}$	$\mathcal{PT}$	E	$\mathcal{P}$
$\mathcal{PT}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{P}$	E

Tabla 4.3: Tabla de multiplicación para el grupo PT.

Comparando la tabla 4.3 con la tabla 4.2, nos percatamos de que el grupo PT es isomorfo a D_2.

Por otra parte, tanto $\mathcal{P}$ como $\mathcal{T}$ por separado, conjuntamente con la matriz identidad E de 4×4, dan lugar al grupo $\mathbb{Z}_2$.

Entonces:

$$G_{\hat{\theta}} \cong \Phi^{-1}(< \{\mathcal{P}, \mathcal{T}\} >)\times < \{\mathcal{P}\} > \tag{4.11}$$

o

$$G_{\hat{\theta}} \cong \Phi^{-1}(< \{\mathcal{P}, \mathcal{T}\} >)\times < \{\mathcal{T}\} > . \tag{4.12}$$

Así, $G_{\hat{\theta}}$, quien en el actual contexto es un grupo que actúa a nivel del campo cuántico y que incluye a la operación de conjugación de carga para el campo del electrón $\hat{\psi}$, emerge de manera natural a partir del grupo PT y sus subgrupos P (o T). Es decir, lo hace a partir de matrices que actúan sobre el espacio-tiempo clásico de Minkowski.

Este resultado sugiere que la estructura del espacio-tiempo de Minkowski de la relatividad especial, en particular, la componente no conexa de su grupo de simetría, el grupo de Lorentz real $O(1,3)$, conlleva a la existencia del grupo CPT del campo de Dirac como un todo y, por tanto, a la transformación de conjugación de carga y, de este modo, a las antipartículas [34].

Esta conclusión (al menos a nivel del campo del electrón) está sustentada en las siguientes consideraciones:

- Aunque la operación de conjugación de carga no pertenece al grupo de Lorentz, a nivel de la ecuación de Dirac, la matriz $C = \pm i\gamma^2\gamma^0$ es un elemento del álgebra de Dirac ($\cong C(4)$), la cual es la complexificación de una de las dos álgebras de Clifford reales, no isomorfas entre sí, del espacio-tiempo de Minkowski: $H(2)$ (matrices cuaterniónicas 2×2 para la métrica $diag(1,-1,-1,-1)$) y $R(4)$ (matrices reales 4×4 para la métrica $diag(-1,1,1,1)$) [21].

- Existe algún tipo de analogía entre nuestro resultado y la demostración del teorema CPT dada por Jost [4], quien basó su demostración en la existencia de la transformación PT como un elemento de la componente conexa de la complexificación del grupo de Lorentz, además de argumentos de continuidad analítica en teoría de campos. Ver también a Greenberg [37].

Capítulo 5

Representaciones irreducibles de los grupos CPT en la electrodinámica cuántica

5.1. Introducción

Una representación lineal de un grupo G sobre un espacio vectorial V/k ($k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) es un homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi :\ G \to H, &\qquad H < GL(V) \\ g \mapsto \varphi(g) : &\qquad V \to V \\ &v \mapsto \varphi(g)(v) := g \cdot v, \end{aligned} \tag{5.1}$$

con $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ y

$$\begin{aligned} g \cdot (v_1 + v_2) &= g \cdot v_1 + g \cdot v_2, \\ g \cdot \lambda v &= \lambda g \cdot v; \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde g es un elemento de G, v es un elemento de V y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Una representación φ de G sobre V se dice irreducible si V no tiene ningún subespacio invariante propio.

En este capítulo vamos a calcular las representaciones irreducibles de los grupos CPT en la electrodinámica cuántica.

Las propiedades de transformación ante CPT de los campos interactuantes, $\hat{\psi}$ (campo de Dirac)-$\hat{A}_\mu$ (campo electromagnético), son las mismas que para los campos libres [26, 28, 29, 30], aunque para construir las expresiones de $\hat{C}$, $\hat{P}$ y $\hat{T}$ en término de los correspondientes operadores $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$, $\hat{d}$, $\hat{d}^\dagger$ y $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ a tiempos arbitrarios, debe ser usado el hamiltoniano total (parte libre más parte interactuante) [26, 38].

Se hace evidente entonces que el grupo completo CPT para la ***QED***, $G_{\hat{\theta}}(QED)$, es el producto directo de $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ y $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$, *i.e.*,

$$G_{\hat{\theta}}(QED) = G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi}) \times G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu), \tag{5.3}$$

el cual resulta ser un grupo de orden $|G_{\hat{\theta}}(QED)| = 16 \times 8 = 128$.

Así,

$$G_{\hat{\theta}}(QED) \cong (Q \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2^3. \tag{5.4}$$

Debido a que, como mostraremos más adelante, $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ tiene diez representaciones irreducibles inequivalentes (***IIR's***): ocho de ellas 1-dimensionales y dos de ellas 2-dimensionales, mientras que $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$ tiene sólo ocho ***IIR's*** 1-dimensionales, el número total de ***IIR's*** de $G_{\hat{\theta}}(QED)$ es ochenta $(10 \times 8 = 80)$: sesenta y cuatro de ellas son 1-dimensionales y dieciséis son 2-dimensionales. La suma de los cuadrados de las dimensiones de las ochenta ***IIR's*** es 128, como debe ser.

Resulta interesante comentar aquí sobre la interpretación geométrica de $G_{\hat{\theta}}(QED)$, la cual consiste en un conjunto de puntos sobre esferas. De hecho, cada factor $\mathbb{Z}_2$ es una 0-esfera S^0; mientras que Q, debido al isomorfismo $Q \to \varphi_5(Q) < SU(2)$ proveniente de su representación irreducible 2-dimensional φ_5 (ecuaciones (5.15) y (5.16)), puede ser entendido como un subconjunto de ocho puntos en la 3-esfera S^3. Así, topológicamente,

$$G_{\hat{\theta}}(QED) \subset S^3 \times (S^0)^4 \cong SU(2) \times (U(1))^4, \tag{5.5}$$

donde por $\subset$ entenderemos subconjunto.

5.2. Representaciones irreducibles del grupo cuaterniónico

La tabla de multiplicación del grupo cuaterniónico está dada por la tabla 4.1. Así, $\iota^{-1} = -\iota$, $\gamma^{-1} = -\gamma$, $\kappa^{-1} = -\kappa$ y $(-1)^{-1} = -1$.

Si G es un grupo cualquiera y $g \in G$, sus clases conjugadas son

$$[g] = \{hgh^{-1}\}_{h \in G}. \quad (5.6)$$

Por tanto, Q tiene cinco clases conjugadas:

$$[1] = \{1\},\ [-1] = \{-1\}, [\iota] = \{\iota, -\iota\}, [\gamma] = \{\gamma, -\gamma\}, [\kappa] = \{\kappa, -\kappa\}. \quad (5.7)$$

Debido a que $|Q| = 8 < \infty$, entonces Q tiene cinco ***IIR's***. Como Q es no abeliano, al menos una de sus representaciones irreducibles tiene dimensión $\mu \geqslant 2$.

Sean φ_α, con $\mu_\alpha = dim_{\mathbb{C}}\, \varphi_\alpha$ ($\alpha = 1, ..., 4$), estas representaciones irreducibles (***irrep's***). Sea φ_1 la representación trivial:

$$\varphi_1 : Q \to \mathbb{C}^*, \qquad g \mapsto \varphi_1(g) = 1, \quad (5.8)$$

donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = GL_1(\mathbb{C})$.

Ya que

$$\sum_{\alpha=1}^{5} \mu_\alpha^2 = 8 \quad (5.9)$$

la única posibilidad es que hayan tres ***irrep's*** 1-dimensionales: φ_2, φ_3 y φ_4 y una ***irrep*** 2-dimensional: φ_5.

Si R es una representación matricial arbitraria de dimensión finita del grupo G, y $g \in G$, los caracteres de R en g, $\chi_R(g)$, están dados por:

$$\chi_R(g) = tr\, R(g). \quad (5.10)$$

Entonces, en Q, $\varphi_\alpha = \chi_\alpha$ para $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Todos los elementos de Q son elementos unitarios en el álgebra cuaterniónica real 4-dimensional

$$\mathbb{H} = \{q = a1 + b\iota + c\gamma + d\kappa,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}, \quad (5.11)$$

con complejo conjugado $\bar{q} = a1 - b\iota - c\gamma - d\kappa$.

Si $q \in Q$, entonces $\bar{q}q = 1$ y así Q es un subconjunto de $\mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H},\ ||q||^2 = 1\}$. Pero $\mathbb{H}_1$ es un grupo isomorfo a $SU(2)$. De hecho,

$$q \in \mathbb{H}_1 = (a1 + b\iota) + (c1 + d\iota)\gamma \longleftrightarrow z + w\gamma, \quad (5.12)$$

con $z = a+bi$ y $w = c+di$, donde i es la unidad imaginaria de $\mathbb{C}$, $|z|^2+|w|^2 = 1$, y

$$(z, w) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU(2). \tag{5.13}$$

Entonces, para los elementos en Q tenemos la correspondencia

$$\begin{aligned}
1:\ a = 1,\ b = c = d = 0 &\Rightarrow z = \bar{z} = 1,\ w = \bar{w} = 0 \\
-1:\ a = -1,\ b = c = d = 0 &\Rightarrow z = \bar{z} = -1,\ w = \bar{w} = 0 \\
\iota:\ b = 1,\ a = c = d = 0 &\Rightarrow z = -\bar{z} = i,\ w = \bar{w} = 0 \\
-\iota:\ b = -1,\ a = c = d = 0 &\Rightarrow z = -\bar{z} = -i,\ w = \bar{w} = 0 \\
\gamma:\ c = 1,\ a = b = d = 0 &\Rightarrow z = \bar{z} = 0,\ w = \bar{w} = 1 \\
-\gamma:\ c = -1,\ a = b = d = 0 &\Rightarrow z = \bar{z} = 0,\ w = \bar{w} = -1 \\
\kappa:\ d = 1,\ a = b = c = 0 &\Rightarrow z = \bar{z} = 0,\ w = -\bar{w} = i \\
-\kappa:\ d = -1,\ a = b = c = 0 &\Rightarrow z = \bar{z} = 0,\ w = -\bar{w} = -i.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Por lo que φ_5 está naturalmente dada mediante la inclusión de Q en $SU(2)$:

$$\varphi_5 : Q \to SU(2) < GL_2(\mathbb{C}),\ q \mapsto \varphi_5(q) = M, \tag{5.15}$$

dada explícitamente por:

$$\begin{aligned}
1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{2\times2} \qquad & -1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_{2\times2} \\
\iota \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3 \qquad & -\iota \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3 \\
\gamma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \qquad & -\gamma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \\
\kappa \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1 \qquad & -\kappa \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

La representación es unitaria: $M^\dagger = M^{-1}$, con $detM = 1$, $\chi_5(1) = -\chi_5(-1) = 2$ y $\chi_5(\pm\iota) = \chi_5(\pm\gamma) = \chi_5(\pm\kappa) = 0$. φ_5 es fiel debido a que $Q \to \varphi_5(Q)$ es un isomorfismo de grupos.

La representación φ_5 es equivalente a la usada en [34], en la cual $\iota \to -i\sigma_1$, $\gamma \to -i\sigma_2$ y $\kappa \to -i\sigma_3$. La transformación de similaridad es $-i\sigma_1 = Ai\sigma_3A^{-1}$, $-i\sigma_2 = Ai\sigma_2A^{-1}$ y $-i\sigma_3 = Ai\sigma_1A^{-1}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Las restantes *IIR's* 1-dimensionales de Q son fácilmente obtenidas usando que Q es un grupo hamiltoniano [1] y el conocido teorema mediante el cual si H es un subgrupo invariante de G y $\varphi : G/H \to K < GL(V)$ es una representación de G/H sobre el espacio vectorial V, entonces $\varphi \circ p$ es una representación degenerada de G, donde $p : G \to G/H$ es la proyección canónica $p(g) =< g >= gH$ [39]. Así, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{K} & \\ \varphi \circ p \nearrow & & \nwarrow \varphi \\ \mathrm{G} & \underset{p}{\longrightarrow} & G/H \end{array} \quad . \tag{5.17}$$

Q tiene tres subgrupos cíclicos de cuatro elementos:

$$\begin{aligned} C_4(\iota) &= \{1, \iota, -1, -\iota\}, \\ C_4(\gamma) &= \{1, \gamma, -1, -\gamma\}, \\ C_4(\kappa) &= \{1, \kappa, -1, -\kappa\}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

con los correspondientes grupos cocientes, todos isomorfos a $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{Q}{C_4(\iota)} = \{E_\iota, A_\iota\}, \quad E_\iota &=& < 1 >=< -1 >=< \iota >=< -\iota >, \\ A_\iota &=& < \gamma >=< -\gamma >=< \kappa >=< -\kappa >; \\ \dfrac{Q}{C_4(\gamma)} = \{E_\gamma, A_\gamma\}, \quad E_\gamma &=& < 1 >=< -1 >=< \gamma >=< -\gamma >, \\ A_\gamma &=& < \iota >=< -\iota >=< \kappa >=< -\kappa >; \\ \dfrac{Q}{C_4(\kappa)} = \{E_\kappa, A_\kappa\}, \quad E_\kappa &=& < 1 >=< -1 >=< \kappa >=< -\kappa >, \\ A_\kappa &=& < \iota >=< -\iota >=< \gamma >=< -\gamma > . \end{array} \tag{5.19}$$

$\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ tiene dos *IIR's* 1-dimensionales (tabla 5.1): la representación trivial ψ_1 y la representación signo ψ_2.

Si en el diagrama (5.17) elegimos $\varphi = \psi_2$ y $K = \{1, -1\}$ [2], entonces las representaciones φ_2, φ_3 y φ_4 de Q, asociadas a los subgrupos $C_4(\iota)$, $C_4(\gamma)$ y

[1] Un grupo hamiltoniano es un grupo no-abeliano donde todos sus subgrupos son normales (invariantes) ([35], p. 72). Los grupos abelianos son trivialmente hamiltonianos. Por cierto, en este caso el que Q sea hamiltoniano implica que también $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ es hamiltoniano.

[2] La elección $\varphi = \psi_1$ daría tres copias de la representación trivial de Q.

IIR's $\mathbb{Z}_2$	e	a
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

Tabla 5.1: Tabla de *IIR's* de $\mathbb{Z}_2$.

$C_4(\kappa)$, respectivamente, están dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi_2(1) = \varphi_2(-1) = \varphi_2(\iota) = \varphi_2(-\iota) = \psi_2(E_\iota) = 1, \\ \varphi_2(\gamma) = \varphi_2(-\gamma) = \varphi_2(\kappa) = \varphi_2(-\kappa) = \psi_2(A_\iota) = -1; \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(1) = \varphi_3(-1) = \varphi_3(\gamma) = \varphi_3(-\gamma) = \psi_2(E_\gamma) = 1, \\ \varphi_3(\iota) = \varphi_3(-\iota) = \varphi_3(\kappa) = \varphi_3(-\kappa) = \psi_2(A_\gamma) = -1; \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(1) = \varphi_4(-1) = \varphi_4(\kappa) = \varphi_4(-\kappa) = \psi_2(E_\kappa) = 1, \\ \varphi_4(\iota) = \varphi_4(-\iota) = \varphi_4(\gamma) = \varphi_4(-\gamma) = \psi_2(A_\kappa) = -1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

En correspondencia, la tabla de caracteres de Q está dada por la tabla 5.2.

Car Q	$[1]$	$[-1]$	$2[\iota]$	$2[\gamma]$	$2[\kappa]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Tabla 5.2: Tabla de caracteres de Q.

Los grupos, Q y D_4, el grupo de simetría del cuadrado, tienen la misma tabla de caracteres. No obstante, Q no es isomorfo a D_4.

5.3. Representaciones irreducibles del grupo CPT de operadores del campo de Dirac

Las *irrep's* del producto directo de dos grupos, $G \times H$, son los productos tensoriales de las *irrep's* de cada uno de los factores, entiéndase el conjunto $\{r_G \otimes$

$r_H\}$ [3] para toda r_G, *irrep's* de G y toda r_H, *irrep's* de H ([36], p. 75). Entonces, $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ tiene diez *IIR's*:

$$\phi_\alpha = \varphi_\alpha \otimes \psi_1, \quad \phi_{\alpha+4} = \varphi_\alpha \otimes \psi_2, \quad \alpha = 1,2,3,4, \tag{5.23}$$
$$\phi_9 = \varphi_5 \otimes \psi_1, \quad \phi_{10} = \varphi_5 \otimes \psi_2. \tag{5.24}$$

$\phi_1, ..., \phi_8$ son 1-dimensionales, mientras que ϕ_9 y ϕ_{10} son 2-dimensionales.
Los caracteres correspondientes son las funciones:

$$\kappa_\alpha = \chi_\alpha\varphi_1 : Q \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}, \quad \kappa_\alpha(q,h) = \chi_\alpha(q)\varphi_1(h), \tag{5.25}$$
$$\kappa_{\alpha+4} = \chi_\alpha\varphi_2 : Q \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}, \quad \kappa_{\alpha+4}(q,h) = \chi_\alpha(q)\varphi_2(h), \tag{5.26}$$
$$\kappa_9 = \chi_5\varphi_1 : Q \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}, \quad \kappa_9(q,h) = \chi_5(q)\varphi_1(h), \tag{5.27}$$
$$\kappa_{10} = \chi_5\varphi_2 : Q \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}, \quad \kappa_{10}(q,h) = \chi_5(q)\varphi_2(h). \tag{5.28}$$

Si $\mu_\lambda = dim_{\mathbb{C}}\, \phi_\lambda$ para $\lambda = 1, ..., 10$, entonces

$$\sum_{\lambda=1}^{10} \mu_\lambda^2 = \sum_{\lambda=1}^{8} 1^2 + \sum_{\lambda=9}^{10} 2^2 = 8 + 8 = 16 = |Q \times \mathbb{Z}_2|. \tag{5.29}$$

Estas representaciones y caracteres (para las clases conjugadas) están explícitamente dadas mediante las tablas 5.3 y 5.4, respectivamente, donde $\lambda_i = tr\phi_i$; mientras que las clases conjugadas están dadas por las relaciones (5.30):

$$\begin{aligned}
[\hat{I}] &= [(1,e)] = \{(1,e)\},\\
[\hat{C}] &= [(1,a)] = \{(1,a)\},\\
[-\hat{I}] &= [(-1,e)] = \{(-1,e)\},\\
[-\hat{C}] &= [(-1,a)] = \{(-1,a)\},\\
[\hat{P}] &= [(\iota,e)] = \{(\iota,e),(-\iota,e)\},\\
[\hat{C}*\hat{P}] &= [(\iota,a)] = \{(\iota,a),(-\iota,a)\},\\
[\hat{T}] &= [(\gamma,e)] = \{(\gamma,e),(-\gamma,e)\},\\
[\hat{C}*\hat{T}] &= [(\gamma,a)] = \{(\gamma,a),(-\gamma,a)\},\\
[\hat{P}*\hat{T}] &= [(\kappa,e)] = \{(\kappa,e),(-\kappa,e)\},\\
[\hat{\theta}] &= [(\kappa,a)] = \{(\kappa,a),(-\kappa,a)\}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

La tabla de caracteres $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ es la misma que la tabla de caracteres del grupo D_{4h}, el grupo de simetría de un prisma de base cuadrada, aunque $Q \times \mathbb{Z}_2 \ncong D_{4h}$.

[3] $\otimes = \otimes_{\mathbb{C}}$ es el producto tensorial sobre los números complejos.

5.4. Representaciones irreducibles del grupo CPT del campo electromagnético

Debido a que $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \cong \mathbb{Z}_2^3$ es un grupo abeliano, todas sus *irrep's* son 1-dimensionales. Como $|G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)| = 8$, entonces $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$ tiene ocho *IIR's*, las cuales pueden ser identificadas con los correspondientes caracteres. Usando el isomorfismo entre $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$ y $\mathbb{Z}_2^3$ (ecuación (3.108)), y la tabla de caracteres de $\mathbb{Z}_2$ (tabla 5.1), obtenemos la tabla de representaciones (ϕ_{ijk}) o de caracteres (χ_{ijk}) para $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$, donde $\phi_{ijk} = \chi_{ijk} = \psi_i\psi_j\psi_k$. Ver tabla 5.5.

5.5. Representaciones regulares

La información contenida en las *IIR's* de los grupos CPT para el campo cuántico de Dirac y el potencial cuántico electromagnético puede ser resumida en sus respectivas representaciones regulares diagonalizadas:

$$\mathfrak{D}_{\hat{\psi}} : G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi}) \to K < \mathbb{C}_{16\times 16}, \tag{5.31}$$

$$\mathfrak{D}_{\hat{A}_\mu} : G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \to L < \mathbb{C}_{8\times 8}. \tag{5.32}$$

La representación regular $\mathfrak{D}$ de un grupo G, con $|G| = n$, es la representación de G sobre su grupo o álgebra de Frobenius $\mathbb{C}[G]$, definida como el espacio vectorial de sumas formales $\sum_{i=1}^n z_i g_i$ con $z_i \in \mathbb{C}$ y $g_i \in G$ y producto

$$\left(\sum_{i=1}^n z_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^n w_j g_j\right) = \sum_{i,j=1}^n z_i w_j (g_i g_j). \tag{5.33}$$

Entonces,

$$\mathfrak{D}(g)\left(\sum_{i=1}^n z_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n z_i (g g_i). \tag{5.34}$$

Si φ_α, $\alpha = 1, ..., s$ son las *IIR's* de G y $\mu_\alpha = dim_{\mathbb{C}}\varphi_\alpha$, entonces $\mathfrak{D}$ se descompone en la suma directa $\oplus_{\alpha=1}^s \mu_\alpha \varphi_\alpha$, i.e., cada *IIR* de G está contenida en $\mathfrak{D}$ un número de veces igual a su dimensión. Como $\sum_{\alpha=1}^s \mu_\alpha^2 = n$, $\mathfrak{D}(g)$ son matrices complejas invertibles $n \times n$, con $\mathfrak{D}(g)^{-1} = \mathfrak{D}(g^{-1})$.

Para el campo de Dirac:

$$\mathfrak{D}_{\hat{\psi}} = \oplus_{\alpha=1}^{10} \mu_\alpha \phi_\alpha = \oplus_{\alpha=1}^{8} \phi_\alpha \oplus 2\phi_9 \oplus 2\phi_{10}. \tag{5.35}$$

Entonces, tenemos dieciséis matrices de 16×16.

Se cumple que $tr(\mathfrak{D}_{\hat{\psi}}(g)) = 0$ para todo $g \neq I$. Para $\mathfrak{D}_{\hat{\psi}}(I)$, $tr(\mathfrak{D}_{\hat{\psi}}(I)) = 16$.

Para todo g en

$$G_{CT}(\hat{\psi}) = \{\hat{I}, \hat{C}, \hat{T}, \hat{C} * \hat{T}, -\hat{I}, -\hat{C}, -\hat{T} - \hat{C} * \hat{T}\}, \tag{5.36}$$

$\mathfrak{D}_{\hat{\psi}}(g) \in SO(16)$, con $dim_{\mathbb{R}}(SO(16)) = 120$; y para los

$$l \in G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi}) \setminus G_{CT}(\hat{\psi}) = \{\hat{P}, \hat{C} * \hat{P}, \hat{P} * \hat{T}, \hat{\theta}, -\hat{P}, -\hat{C} * \hat{P}, -\hat{P} * \hat{T}, -\hat{\theta}\}, \tag{5.37}$$

$\mathfrak{D}_{\hat{\psi}}(l) \notin SO(16)$, pero $\mathfrak{D}_{\hat{\psi}}(l) \in SU(16)$, con $dim_{\mathbb{R}}(SU(16)) = 255$. $G_{CT}(\hat{\psi})$, con $|G_{CT}(\hat{\psi})| = 8$, es un subgrupo invariante abeliano de $G_\theta(\hat{\psi})$. Claramente $G_\theta(\hat{\psi}) \setminus G_{CT}(\hat{\psi})$ no es un grupo.

Como $G_{CT}(\hat{\psi})$ tiene dos generadores, $\hat{C}$ y $\hat{T}$, $G_{CT}(\hat{\psi})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. Los otros dos grupos abelianos con ocho elementos son $\mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_8$, los cuales tienen tres y un generadores, respectivamente. Si $\mathbb{Z}_4$ está dado por la tabla 5.6, y $\mathbb{Z}_2$ está dado por la tabla 5.7, entonces el isomorfismo $G_{CT}(\hat{\psi}) \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ está dado mediante las relaciones (5.38).

$$\begin{aligned}
\hat{I} &\mapsto (\varepsilon, 1), & -\hat{I} &\mapsto (\beta, 1), \\
\hat{C} &\mapsto (\varepsilon, -1), & -\hat{C} &\mapsto (\beta, 1), \\
\hat{T} &\mapsto (\alpha, 1), & -\hat{T} &\mapsto (\gamma, 1), \\
\hat{C} * \hat{T} &\mapsto (\alpha, -1), & -\hat{C} * \hat{T} &\mapsto (\gamma, -1).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Para el potencial electromagnético:

$$\mathfrak{D}_{\hat{A_\mu}} = \oplus_{\alpha=1}^{8} \phi_\alpha, \tag{5.39}$$

ya que $dim_{\mathbb{C}}\, \phi_\alpha = 1$, con $\alpha = 1, ..., 8$.

Tenemos entonces ocho matrices 8×8. Para todo $g \in G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$, $\mathfrak{D}_{\hat{A_\mu}}(g) \in SO(8)$, con $dim_{\mathbb{R}}(SO(8)) = 28$; donde $tr(\mathfrak{D}_{\hat{A_\mu}}(I)) = 8$ y $tr(\mathfrak{D}_{\hat{A_\mu}}(g)) = 0$ para todo $g \neq I$.

5.6. Representaciones irreducibles del grupo CPT matricial de Dirac

En [31] fue mostrado que para el campo de Dirac existen dos grupos CPT matriciales, $G_\theta^{(1)}(\hat{\psi})$ y $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$, cuyos elementos están formados por productos de matrices γ de Dirac. Sólo $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$, el cual es isomorfo al producto semidirecto de $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$, donde $D_4 := DH_8$ es el grupo diédrico de ocho elementos (el grupo de las simetrías del cuadrado), es compatible con $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$. La tabla de multiplicación de $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$ está dada por la tabla 5.8. La misma debe ser completada agregando a la primera fila y a la primera columna los negativos -1, $-C$, $-P$, ..., $-\theta$, y haciendo los correspondientes productos.

Resulta entonces de interés construir las *IIR's* de $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$, tanto por completitud como para compararlas con las de $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$. Como en este caso no se trata del producto directo entre dos grupos, no es posible hacer uso del teorema empleado para el cálculo de las *IIR's* del grupo CPT de operadores.

La ley de composición en $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ es:

$$(g', h')(g, h) = (g'\lambda(h')(g), h'h), \tag{5.40}$$

donde g y g' son elementos de D_4, y h y h' son los elementos de $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. Al sustituir h y h' por sus valores:

$$(g', 1)(g, h) = (g'g, h), \tag{5.41}$$
$$(g', -1)(g, h) = (g'\lambda(-1)(g), -h); \tag{5.42}$$

siendo la inversa de (g, h):

$$(g, h)^{-1} = (\lambda(h)(g^{-1}), h). \tag{5.43}$$

La acción λ de $\mathbb{Z}_2$ sobre D_4, como subgrupo de S_4 (el grupo simétrico de 4 elementos), está dada mediante:

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{Z}_2 \to Aut(D_4), & & \\ 1 \mapsto \lambda(1) & = & Id_{D_4}, \\ \lambda(-1)(I) & = & I, \\ \lambda(-1)(1234) & = & (1234), \\ \lambda(-1)(24) & = & (13), \\ \lambda(-1)(13) & = & (24), \\ \lambda(-1)((12)(34)) & = & (14)(23), \\ \lambda(-1)((14)(23)) & = & (12)(34), \\ \lambda(-1)((13)(24)) & = & (13)(24), \\ \lambda(-1)(1432) & = & (1432). \end{array} \tag{5.44}$$

Aquí

$$D_4 = \{I; (1234), (1432); (13)(24); (12)(34), (14)(23); (24), (13)\}, \tag{5.45}$$

donde hemos separado por punto y coma las cinco clases conjugadas.

Siguiendo la ecuación (55) en [31], existe el isomorfismo

$$D_4 \to \{I, -I, P, -P, CT, -CT, \theta, -\theta\} \tag{5.46}$$

dado por:

$$\begin{array}{r} I \mapsto I, \\ (1234) \mapsto P, \\ (1432) \mapsto -P, \\ (13)(24) \mapsto -I, \\ (12)(34) \mapsto \theta, \\ (14)(23) \mapsto -\theta, \\ (24) \mapsto -CT, \\ (13) \mapsto CT. \end{array} \tag{5.47}$$

Entonces, como conjunto,

$$D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \{(I,1),(I,-1),(-I,1),(-I,-1),(P,1),(P,-1),(-P,1),\\ (-P,-1),(CT,1),(CT,-1),(-CT,1),(-CT,-1),(\theta,1),\\ (\theta,-1),(-\theta,1),(-\theta,-1)\}\,. \quad (5.48)$$

De la ecuación (60) en [31] y la ecuación (5.45), el isomorfismo entre $G_\theta^{(2)}$ y $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$,

$$G_\theta^{(2)} \rightarrow D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2, \quad (5.49)$$

está dado por:

$$\begin{aligned} I &\mapsto (I,1), & -I &\mapsto (-I,1),\\ C &\mapsto (-\theta,-1), & -C &\mapsto (\theta,-1),\\ P &\mapsto (P,1), & -P &\mapsto (-P,1),\\ T &\mapsto (P,-1), & -T &\mapsto (-P,-1),\\ CP &\mapsto (CT,-1), & -CP &\mapsto (-CT,-1),\\ CT &\mapsto (CT,1), & -CT &\mapsto (-CT,1),\\ PT &\mapsto (-I,-1), & -PT &\mapsto (I,-1),\\ \theta &\mapsto (\theta,1), & -\theta &\mapsto (-\theta,1). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Resulta fácil verificar que $G_\theta^{(2)}$ tiene diez clases conjugadas, que son:

$$\begin{aligned} [I] &= \; = \{I\},\\ [-I] &= \; = \{-I\},\\ [C] &= \; = \{C,-C\},\\ [T] &= \; = \{T\},\\ [-T] &= \; = \{-T\},\\ [P] &= \; = \{P,-P\},\\ [CP] &= \; = \{CP,-CP\},\\ [CT] &= \; = \{CT,-CT\},\\ [PT] &= \; = \{PT,-PT\},\\ [\theta] &= \; = \{\theta,-\theta\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Entonces, siendo un grupo finito, $G_\theta^{(2)}$ tiene tantas *IIR's* como clases de conjugación. Como la suma de los cuadrados de las dimensiones de estas representaciones debe ser 10, un simple cálculo conlleva a la existencia de ocho *irrep's* 1-dimensionales, φ_k, con $k = 1, ..., 8$, y dos *irrep's* 2-dimensionales, φ_9 y φ_{10}.

φ_1 es la representación trivial $g \mapsto 1$, para todo $g \in G_\theta^{(2)}$. Las tres *irrep's* 1-dimensionales, φ_2, φ_3 y φ_4, se obtienen teniendo en cuenta el diagrama (5.17) y el hecho de que D_4, $C_4 \times \mathbb{Z}_2$ y Q son subgrupos invariantes de $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$; con D_4 dado por la ecuación (5.46), $C_4 \cong< \{P\} >$ y $Q \cong< \{C, P\} >$; así

$$C_4 \times \mathbb{Z}_2 = \{(I,1), (I,-1), (-I,1), (-I,-1), (P,1), (P,-1), (-P,1), (-P,-1)\}\,, \tag{5.52}$$

y

$$Q = \{I, C, P, CP, -I - C, -P, -CP\}\,. \tag{5.53}$$

En el diagrama (5.17), se escogen nuevamente $\varphi = \psi_2$ (tabla 5.1) y $K = \{1, -1\}$; pero ahora elegimos $G = D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ y H es reemplazado por D_4, $C_4 \times \mathbb{Z}_2$ y Q, respectivamente. Entonces,

$$\frac{D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2}{H} \cong \mathbb{Z}_2 = \{e, a\}\,, \tag{5.54}$$

con

$$\begin{array}{rcl} e &=& D_4, \qquad a = \{C, T, CP, PT, -C, -T, -CP, -PT\}\,, \\ e &=& C_4 \times \mathbb{Z}_2, \qquad a = \{C, CP, CT, \theta, -C, -CP, -CT, -\theta\}\,, \\ e &=& Q, \qquad a = \{T, CT, PT, \theta, -T, -CT, -PT, -\theta\}\,, \end{array} \tag{5.55}$$

respectivamente. Los elementos en las e's están representados por el 1, mientras que los elementos en las a's están representados por el -1 (ver tabla 5.9). De esta manera se calculan tres de las *IIR's* unidimensionales de $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$.

Para encontrar las dos *IIR's* 2-dimensionales de este grupo, tomamos, como punto de partida en ambos casos, la *irrep* 2-dimensional de D_4. Como es bien conocido, D_4 tiene cinco *IIR's* (una 2-dimensional y cuatro 1-dimensionales). La *irrep* 2-dimensional está dada por:

$$
\begin{aligned}
I &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{2\times 2} := I \\
(13)(24) &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_{2\times 2} := -I \\
(1234) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 := P \\
(1432) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 := -P \\
(12)(34) &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_3 := \theta \\
(14)(23) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 := -\theta \\
(24) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 := -CT \\
(13) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1 := CT,
\end{aligned} \tag{5.56}
$$

donde en la última identificación fueron usadas las relaciones (5.47).

Con la elección $C = i\sigma_1$, obtenemos,

$$
T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = iI, \quad CP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3, \quad PT = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2, \tag{5.57}
$$

lo cual completa la *irrep* 2-dimensional φ_9 de $G_\theta^{(2)}$; mientras que con la elección $C = -i\sigma_1$, obtenemos,

$$
T = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -iI, \quad CP = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3, \quad PT = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2, \tag{5.58}
$$

lo cual completa la *irrep* 2-dimensional φ_{10} de $G_\theta^{(2)}$. Puede ser fácilmente verificado que φ_9 y φ_{10} son inequivalentes, *i.e.*, no existe una matriz S tal que $SMS^\dagger = M'$ (o $SMS^{-1} = M'$) para $M \in \varphi_9$ y $M' \in \varphi_{10}$.

Las restantes cuatro *IIR's* 1-dimensionales, φ_5, φ_6, φ_7 y φ_8, se obtienen de la ortogonalidad entre las columnas de la tabla de caracteres para las clases de conjugación (relación de completitud). Entonces, la ortogonalidad entre las filas de la tabla de caracteres completa puede ser verificada.

Las *IIR's* y caracteres para $G_{\theta}^{(2)}(\hat{\psi}) \cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ se resumen en las tablas 5.9 y 5.10, respectivamente. Al comparar con las tablas para $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$, podemos notar que las *irrep's* 1-dimensionales coinciden:

$$\begin{aligned} &\phi_1 = \varphi_1,\ \phi_2 = \varphi_3,\ \phi_3 = \varphi_4,\ \phi_4 = \varphi_2, \\ &\phi_5 = \varphi_8,\ \phi_6 = \varphi_6,\ \phi_7 = \varphi_7,\ \phi_8 = \varphi_5. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Sin embargo, ϕ_9 no es equivalente ni a φ_9 ni a φ_{10} y lo mismo se cumple para ϕ_{10}.

5.7. Comentarios finales

Resulta de interés preguntarse si, desde el punto de vista de la teoría de grupos, el comportamiento del fotón (campo $\hat{A}_\mu$) ante las transformaciones C, P, T es independiente del comportamiento del electrón-positrón (campo $\hat{\psi}$). La respuesta a esta pregunta es afirmativa. De hecho, en $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ hay sólo un subgrupo $\mathbb{Z}_2$, llámese el generado por $\hat{C} :\ \mathbb{Z}_2 \cong \{\hat{I}, \hat{C}\}$. Entonces, $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \cong \mathbb{Z}_2^3$ no es un subgrupo de $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$:

$$G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \not< G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi}). \tag{5.60}$$

Lo mismo ocurre en relación a $G_{\theta}^{(2)}(\hat{\psi})$, aunque en este grupo hay tres subgrupos $\mathbb{Z}_2$:

$$\mathbb{Z}_2^{(1)} = \{I, CT\},\ \mathbb{Z}_2^{(2)} = \{I, PT\},\ \mathbb{Z}_2^{(3)} = \{I, \theta\}. \tag{5.61}$$

Teniendo en cuenta esto, el isomorfismo $\mathbb{Z}_2^{(1)} \times \mathbb{Z}_2^{(2)} \times \mathbb{Z}_2^{(3)} \to G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$ está dado ahora por:

$$\begin{aligned} (I, I, I) &\mapsto I, \\ (CT, I, I) &\mapsto C, \\ (I, PT, I) &\mapsto P, \\ (I, I, \theta) &\mapsto T, \\ (I, PT, \theta) &\mapsto PT, \\ (CT, PT, I) &\mapsto CP, \\ (CT, I, \theta) &\mapsto CT, \\ (CT, PT, \theta) &\mapsto \theta. \end{aligned} \tag{5.62}$$

No obstante,

$$G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \not< G_\theta^{(2)}(\hat{\psi}). \tag{5.63}$$

Esto puede ser fácilmente verificado, al comprobar que la tabla de $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$ (tabla 3.2) tiene ocho identidades, mientras que la tabla de $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$ (tabla 5.8) tiene sólo siete.

El que hayamos demostrado que el comportamiento del fotón es independiente del comportamiento del electrón-positrón desde el punto de vista de la teoría de grupos, corrobora el hecho, planteado al inicio de este capítulo, de que las propiedades de transformación ante CPT de los campos interactuantes son las mismas que para los campos libres.

Finalmente, en relación con la posible relevancia de las estructuras de grupos CPT en otras áreas de la física, más allá de la teoría de campos, llamamos la atención sobre la relación encontrada recientementeentre entre los grupos $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi}) \cong Q \times \mathbb{Z}_2$, $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi}) \cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ y $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu) \cong \mathbb{Z}_2^3$, y teoremas fundamentales en el contexto de las paradojas cuánticas, como el teorema de Kochen-Specker [40, 41].

IIR's $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$	$\hat{I}$ $(1,e)$	$\hat{C}$ $(1,a)$	$-\hat{I}$ $(-1,e)$	$-\hat{C}$ $(-1,a)$	$\hat{P}$ (ι,e)	$\hat{C}*\hat{P}$ (ι,a)	$-\hat{P}$ $(-\iota,e)$	$-\hat{C}*\hat{P}$ $(-\iota,a)$
ϕ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
ϕ_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ϕ_3	1	1	1	1	1	1	1	1
ϕ_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ϕ_5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ϕ_6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ϕ_7	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ϕ_8	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ϕ_9	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$
ϕ_{10}	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$

IIR's $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$	$\hat{T}$ (γ,e)	$\hat{C}*\hat{T}$ (γ,a)	$-\hat{T}$ $(-\gamma,e)$	$-\hat{C}*\hat{T}$ $(-\gamma,a)$	$\hat{P}*\hat{T}$ (κ,e)	$\hat{\theta}$ (κ,a)	$-\hat{P}*\hat{T}$ $(-\kappa,e)$	$-\hat{\theta}$ $(-\kappa,a)$
ϕ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
ϕ_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ϕ_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
ϕ_4	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
ϕ_5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ϕ_6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ϕ_7	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
ϕ_8	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ϕ_9	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$
ϕ_{10}	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$

Tabla 5.3: Tabla de *IIR's* de $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ para el campo de Dirac.

Car $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$	$[(1,e)]$	$[(1,a)]$	$[(-1,e)]$	$[(-1,a)]$	$2[(\iota,e)]$	$2[(\iota,a)]$	$2[(\gamma,e)]$	$2[(\gamma,a)]$	$2[(\kappa,e)]$	$2[(\kappa,a)]$
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
λ_2	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
λ_3	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
λ_4	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
λ_5	1	1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1
λ_6	1	−1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
λ_7	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
λ_8	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1
λ_9	2	2	−2	−2	0	0	0	0	0	0
λ_{10}	2	−2	−2	2	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.4: Tabla de caracteres de $G_{\hat{\theta}}(\hat{\psi})$ para el campo de Dirac.

IIR's (Car)	$\hat{I}$	$\hat{C}$	$\hat{P}$	$\hat{T}$	$\hat{P}*\hat{T}$	$\hat{C}*\hat{P}$	$\hat{C}*\hat{T}$	$\hat{\theta}$
$G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$	(e_1,e_2,e_3)	(a_1,e_2,e_3)	(e_1,a_2,e_3)	(e_1,e_2,a_3)	(e_1,a_2,a_3)	(a_1,a_2,e_3)	(a_1,e_2,a_3)	(a_1,a_2,a_3)
$\phi_{111}=\Phi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{211}=\Phi_2$	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1
$\phi_{121}=\Phi_3$	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1
$\phi_{112}=\Phi_4$	1	1	1	−1	−1	1	−1	−1
$\phi_{221}=\Phi_5$	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
$\phi_{212}=\Phi_6$	1	−1	1	−1	−1	−1	1	1
$\phi_{122}=\Phi_7$	1	1	−1	−1	1	−1	−1	1
$\phi_{222}=\Phi_8$	1	−1	−1	−1	1	1	1	−1

Tabla 5.5: Tabla de *IIR's* (caracteres) de $G_{\hat{\theta}}(\hat{A}_\mu)$.

	α	β	γ
α	β	γ	ε
β	γ	ε	α
γ	ε	α	β

Tabla 5.6: Tabla de multiplicación para el grupo $\mathbb{Z}_4$.

	-1
-1	1

Tabla 5.7: Tabla de multiplicación para el grupo $\mathbb{Z}_2$.

	C	P	T	CP	CT	PT	θ
C	-1	CP	CT	$-P$	$-T$	θ	$-PT$
P	$-CP$	-1	PT	C	$-\theta$	$-T$	CT
T	CT	PT	-1	θ	$-C$	$-P$	$-CP$
CP	P	$-C$	θ	-1	PT	$-CT$	$-T$
CT	$-T$	θ	$-C$	$-PT$	1	$-CP$	P
PT	$-\theta$	$-T$	$-P$	CT	CP	1	$-C$
θ	PT	$-CT$	$-CP$	$-T$	$-P$	C	1

Tabla 5.8: Tabla de multiplicación para el grupo CPT matricial, $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$, del campo de Dirac.

IIR's $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$	I	C	$-I$	$-C$	P	CP	$-P$	$-CP$	T	CT	$-T$	$-CT$	PT	θ	$-PT$	$-\theta$
φ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
φ_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
φ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
φ_4	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
φ_5	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
φ_6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
φ_7	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
φ_8	1	$-$	1	$-$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
φ_9	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
φ_{10}	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

Tabla 5.9: Tabla de *IIR's* de $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$ para el campo de Dirac.

Car $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$	$[I]$	$[-I]$	$2[C]$	$[T]$	$[-T]$	$2[P]$	$2[CP]$	$2[CT]$	$2[PT]$	$2[\theta]$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
χ_5	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
χ_6	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
χ_7	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_8	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
χ_9	2	-2	0	$2i$	$-2i$	0	0	0	0	0
χ_{10}	2	-2	0	$-2i$	$2i$	0	0	0	0	0

Tabla 5.10: Tabla de caracteres de $G_\theta^{(2)}(\hat{\psi})$ para el campo de Dirac.

Capítulo 6

Límite no relativista de la conjugación de carga

6.1. Teoría $\lambda\Phi^4$ en el límite no relativista

En 1984 se buscó el límite no relativista de la teoría $\lambda\Phi^4$ en [42]. Aunque en este artículo no se estudió el comportamiento de ninguna de las simetrías discretas ante este límite, resulta de interés para nosotros pues se estableció una forma práctica para llevarlo a cabo en las teorías de campos: tomando el límite no relativista del hamiltoniano y luego calculando la matriz de dispersión.

Partiendo del lagrangiano:

$$L = \int d^3\mathbf{x}[\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2], \tag{6.1}$$

donde $\phi := \phi(\mathbf{x}, t)$ es el campo complejo de espín 0, la teoría $\lambda\Phi^4$ se redujo en el límite no relativista a una teoría de Schrödinger en segunda cuantización con fuerzas repulsivas entre dos cuerpos, siendo los potenciales funciones δ tridimensionales de la separación entre las partículas.

Con base en que dos partículas puntuales interactuando a través de un potencial δ repulsivo no tienen permitido percibirse entre sí, se demostró la trivialidad del límite no relativista en este caso.

6.2. La operación de conjugación de carga en el límite no relativista de la ecuación de Dirac acoplada a un campo electromagnético externo clásico

En trabajos recientes [43, 44], se mostró la existencia de la operación de conjugación de carga en el límite no relativista, es decir, en el contexto de la relatividad de Galileo. Este hecho contradice la idea de que C sólo existe en el marco de la física relativista [6], con el grupo de Lorentz-Poincaré como simetría del espacio tiempo. Generalmente se cree que el concepto de antipartículas sólo puede ser definido en el marco de la mecánica cuántica relativista, ya que es donde aparecen soluciones para partículas libres con energía negativa viajando hacia atrás en el tiempo, cuya ausencia es interpretada como partículas de momento, carga y energía opuestas, viajando hacia adelante en el tiempo: antipartículas. Como la operación de conjugación de carga es quien hace la transformación partícula-antipartícula, se piensa entonces que sólo existe en este régimen.

En [43] se consideró la ecuación de Dirac en interacción con un campo electromagnético exterior clásico. Para la búsqueda del límite no relativista de la ecuación correspondiente a la antipartícula y para definir la operación C en dicho contexto, se tuvieron en cuenta los siguientes hechos:

- C no pertenece al grupo de Lorentz $O(1,3)$.
- Se pueden dar definiciones *ad hoc* para C, no sólo en el contexto de la mecánica cuántica no relativista, sino también en las mecánicas galileana y lorentziana clásicas [7].
- En la teoría cuántica relativista existe una simetría entre las partículas y las antipartículas. Tanto la ecuación para las unas como para las otras, tienen un límite no relativista bien definido y no tenemos por qué esperar una contradicción entre ellos. Si tenemos electrones de bajas energías (electrones lentos, podemos esperar tener positrones de bajas energías (positrones lentos) [45], relacionados entre sí por la conjugación de carga.

Por consistencia, cualquier definición que se busque para C debe provenir de la teoría relativista, como un caso límite cuando la velocidad de la partícula es pequeña: $|\beta| \ll 1$.

En concreto, se partió de la ecuación de Dirac (electrón) acoplada a un campo electromagnético externo:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0, \tag{6.2}$$

donde $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, con $\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ y $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

Se construyó entonces el espinor conjugado: $\psi_C = C\bar{\psi}^T$, siendo C la matriz de conjugación de carga dada por:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

ψ_C describe a partículas con la misma masa, pero carga opuesta (positrones) y obedece la ecuación:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi_C = 0. \tag{6.4}$$

Se probó que la mencionada prescripción *ad hoc* para C puede ser obtenida a partir de primeros principios: la simetría de conjugación de carga de las ecuaciones de onda relativistas (6.2) y (6.4), conlleva en la aproximación no relativista, a las ecuaciones de Schrödinger-Pauli (en la notación recuperamos c) para el espinor de dos componentes, describiendo, respectivamente, a electrones (6.5) y positrones (6.6) de bajas energías:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}(-\nabla^2 + \frac{q^2}{c^2}\mathbf{A}^2 + \frac{iq}{c}\nabla\cdot\mathbf{A} + 2i\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\nabla - \frac{q}{c}\sigma\cdot\mathbf{B} + 2mq\phi)\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} -\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}(\nabla^2 - \frac{q^2}{c^2}\mathbf{A}^2 + \frac{iq}{c}\nabla\cdot\mathbf{A} + 2i\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\nabla - \frac{q}{c}\sigma\cdot\mathbf{B} - 2mq\phi)\begin{pmatrix} -\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^* \end{pmatrix}; \tag{6.6}$$

las cuales se relacionan entre sí a través de la matriz C_{nr}.

Es importante mencionar aquí que la ecuación de Schrödinger-Pauli para el positrón (ecuación 6.6) se obtuvo en [43] a partir de la ecuación de Dirac para el positrón (ecuación 6.4), haciendo la sustitución

$$\psi_C = e^{imt}\tilde{\psi}_C \tag{6.7}$$

y tomando el límite no relativista de la ecuación resultante.

Se encontró así una definición natural para la matriz de conjugación de carga en el límite no relativista:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C} \begin{pmatrix} -\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^* \end{pmatrix} := C_{nr} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

siendo:

$$C_{nr} = K \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

antilineal y cumpliendo: $C_{nr}^2 = -1,\ C_{nr}^{-1} = -C_{nr} = C_{nr}^T = -C_{nr}^* = C_{nr}^\dagger$.

Debemos percatarnos de que, en el límite no relativista, cambiar el espinor $\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}$ por el correspondiente espinor conjugado de carga $\begin{pmatrix} -\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^* \end{pmatrix}$ no equivale a cambiar q por $-q$, lo cual sí ocurre en el caso relativista.

Se mostró además que en el límite no relativista la conjugación de carga existe en el contexto del grupo galileano de transformaciones (relatividad de Galileo). Para esto en [43] se comprobó la invarianza de las ecuaciones (6.5) y (6.6), bajo una transformación galileana de sistemas de referencia inerciales, y en [44] se discutió en detalle que la transformación pertenece al grupo de Galileo, sin necesidad de apelar al proceso límite.

Para un estudio más completo aún, quedó pendiente verificar que las ecuaciones de Maxwell fueran invariantes ante las aproximaciones realizadas en estos artículos.

Para comprobar esto, partimos de las transformaciones para los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ a orden 1 de β [46], las cuales fueron usadas en [43]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{H}' \times \boldsymbol{\beta}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mathbf{E}' \times \boldsymbol{\beta}; \tag{6.10}$$

y las sustituimos primero en las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{6.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{6.12}$$

Tuvimos en cuenta que, en esta aproximación: $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{v} \cdot \nabla'$; así como las siguientes identidades vectoriales:

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}, \tag{6.13}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}), \tag{6.14}$$

donde $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son dos vectores cualesquiera.

Despreciando los términos superiores a orden 1 de β, así como los de orden β/c (lo cual corresponde a despreciar los términos proporcionales también a β/c en las ecuaciones (24 a) y (24 b) de [43]), se llegó a que las ecuaciones de Maxwell en el vacío permanecen invariantes.

Para la parte no homogénea de estas ecuaciones:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad , \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{6.15}$$

utilizamos la transformación para el tetravector $j = (c\rho, \mathbf{j})$ y nuevamente despreciamos los términos superiores a orden 1 de β y los de orden β/c; quedando así también invariantes las ecuaciones de Maxwell en presencia de cargas y corrientes.

Verificamos además que las transformaciones de Lorentz, en la aproximación a orden 1 de β, dadas por las matrices[1]:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(\beta), \tag{6.16}$$

forman un grupo.

Esto es:

[1] Por simplicidad, analizamos el caso cuando los sistemas de referencia se desplazan uno respecto a otro a lo largo del eje z.

- $$\begin{aligned} M_1 M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\beta_1+\beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\beta_1+\beta_2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\beta_1\beta_2). \end{aligned} \quad (6.17)$$

- Existe el elemento identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Existe $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tal que: $MM^{-1} = I + O(\beta^2)$.

- El producto de matrices es asociativo.

En resumen, en esta aproximación, $(\{M(\beta)\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, con $detM = 1 + O(\beta^2)$.

Si además despreciamos los términos de orden β/c, la acción del grupo sobre el espacio tiempo, dado por el 4-vector $(ct, \mathbf{x})$, equivale a una transformación de Galileo, dada por la matriz:

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

6.3. Sobre el límite no relativista de la operación de conjugación de carga en el contexto de la *QED*

Basándonos en la existencia de estudios anteriores sobre el límite no relativista en teorías de campos, como el límite no relativista de la teoría $\lambda\Phi^4$ [42], así como también en los trabajos realizados sobre la operación de conjugación de carga en el límite no relativista de la ecuación de Dirac acoplada a un campo electromagnético externo [43, 44], vamos a estudiar ahora el límite no relativista de esta operación acercándonos un poco más a la realidad, esto es, en el contexto de la electrodinámica cuántica [47].

De la densidad lagrangiana para la *QED*:

$$L_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x); \tag{6.19}$$

se deducen las ecuaciones para los campos de Dirac y electromagnético acoplados ([38], p. 84):

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu\hat{A}_\mu(x) - m)\hat{\psi}(x) = 0, \tag{6.20}$$

$$\frac{\partial\hat{F}^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = q\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}(x). \tag{6.21}$$

En las ecuaciones (6.20) y (6.21), $\hat{A}_\mu(x)$ no es considerado externo y forma parte de la dinámica del sistema. Si en estas ecuaciones hacemos $\hat{\psi}(x) \longrightarrow \hat{\psi}_C(x)$ (equivalente aquí a cambiar q por $-q$), entonces el cambio de $\hat{A}_\mu(x) \longrightarrow -\hat{A}_\mu(x)$ completa la operación de conjugación de carga, demostrándose la invarianza ante C de la electrodinámica cuántica.

Si pretendemos ahora tomar el límite no relativista de la *QED* como un todo, debemos establecer este límite tanto para $\hat{\psi}(x)$ como para $\hat{A}_\mu(x)$. El problema radica en que no se puede establecer un límite no relativista para $\hat{A}_\mu(x)$ porque la masa del fotón es cero.

De aquí queda descartado que, cuando consideramos a electrones, positrones y fotones en conjunto, tenga sentido hablar de la conjugación de carga en el límite no relativista. Como no podemos establecer el límite no relativista para la *QED*, nos olvidaremos en lo adelante de la ecuación (6.21) y asumiremos que el campo electromagnético en (6.20) ahora es un campo externo clásico y de valor perfectamente determinado $\hat{A}_\mu(x) = A_\mu$. Es decir, vamos a estudiar a la operación de conjugación de carga en el contexto del campo de Dirac acoplado a un campo electromagnético externo clásico.

Lo que se determinó en [43] y [44] fue la expresión para la matriz C en el límite no relativista de la ecuación de Dirac acoplada a un campo electromagnético externo clásico. Faltaría entonces encontrar ahora al operador $\hat{C}$, que representa a la transformación de conjugación de carga en el espacio de Hilbert y se relaciona con la matriz C a través de $C\hat{\bar{\psi}}^T(x) = \hat{C}^\dagger\hat{\psi}(x)\hat{C}$, en el contexto del límite no relativista del campo de Dirac acoplado igualmente a un campo electromagnético externo clásico.

Los desarrollos del campo de Dirac en términos de los operadores de creación y aniquilación están dados por las expresiones (2.7) y (2.8); satisfaciendo los correspondientes espinores las ecuaciones (2.10) y (2.11), cuyas soluciones son (2.12) y (2.13).

Invirtiendo las expresiones (2.7) y (2.8), obtenemos los operadores de creación y aniquilación en términos de los operadores de campo ([32], p. 115):

$$\hat{b}(\mathbf{p}, r) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}(\mathbf{p}, r)\hat{\psi}(x)e^{ip\cdot x}, \tag{6.22}$$

$$\hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, r) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{v}(\mathbf{p}, r)\hat{\psi}(x)e^{-ip\cdot x}, \tag{6.23}$$

$$\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, r) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \hat{\bar{\psi}}(x)u(\mathbf{p}, r)e^{-ip\cdot x}, \tag{6.24}$$

$$\hat{d}(\mathbf{p}, r) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \hat{\bar{\psi}}(x)v(\mathbf{p}, r)e^{ip\cdot x}. \tag{6.25}$$

A bajas velocidades ($\frac{|\mathbf{p}|}{c} \longrightarrow 0$) los operadores de creación y aniquilación ($\hat{b}^\dagger, \hat{d}^\dagger, \hat{b}, \hat{d}$) continuarán creando o aniquilando partículas, según sea el caso. De esta manera, en el límite no relativista se mantendrá la forma de las ecuaciones (6.22), (6.23), (6.24) y (6.25), con la diferencia de que en este caso el término $\sqrt{\frac{m}{E_p}}$ será igual a 1, $\hat{\psi}$ será solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli y los espinores se reducirán a:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, 1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{u}(\mathbf{p}, 1) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}, 2) = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p},1) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p},2) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \\ \bar{v}(\mathbf{p},1) &= \begin{pmatrix}-1, & 0\end{pmatrix}, \ \bar{v}(\mathbf{p},2) = \begin{pmatrix}0, & -1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

El operador $\hat{C}$ correspondiente al campo libre de Dirac, en función de los operadores de creación y aniquilación está dado por ([28], p. 314):

$$\begin{aligned} \hat{C}_0 = exp(i\frac{\pi}{2}\int d^3p \sum_{r=1}^{2}(\hat{d}^\dagger(\mathbf{p},r)\hat{b}(\mathbf{p},r) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p},r)\hat{d}(\mathbf{p},r) \\ -\hat{b}^\dagger(\mathbf{p},r)\hat{b}(\mathbf{p},r) - \hat{d}^\dagger(\mathbf{p},r)\hat{d}(\mathbf{p},r))); \end{aligned} \tag{6.28}$$

mientras que en presencia de interacciones, el operador de conjugación de carga a un tiempo t se convierte en ([38], p. 111):

$$\hat{C}(t) = e^{i\hat{H}_T t}\hat{C}_0 e^{-i\hat{H}_T t}, \tag{6.29}$$

donde $\hat{H}_T$ es el hamiltoniano total (en nuestro caso, el del campo de Dirac acoplado al campo electromagnético externo) y $\hat{C}_0$ satisface (6.28), quedando los operadores $\hat{b}^\dagger, \hat{d}^\dagger, \hat{b}, \hat{d}$ en la representación de Heisenberg.

Al tomar el límite no relativista, la forma del operador $\hat{C}(t)$, dada por (6.29), no cambia, pero entonces los operadores $\hat{b}^\dagger, \hat{d}^\dagger, \hat{b}, \hat{d}$ serán los correspondientes a bajas velocidades y $\hat{H}_T$, el hamiltoniano de Schrödinger-Pauli.

En resumen, la operación de conjugación de carga en el contexto relativista equivale a cambiar $\hat{\psi}(x) \longrightarrow \hat{\psi}_C(x)$ y $\hat{A}_\mu(x) \longrightarrow -\hat{A}_\mu(x)$, tanto para $\hat{A}_\mu(x)$ dinámico como para $\hat{A}_\mu(x) = A_\mu$ externo clásico. Esto es equivalente a decir que, en el contexto relativista, el electrón se mueve en un campo $\hat{A}_\mu(x)$ tal cual lo hace el positrón en un campo $-\hat{A}_\mu(x)$.

En el límite no relativista, la operación de conjugación de carga sólo tiene sentido para A_μ externo clásico y se limita nada más a cambiar $\hat{\psi}(x) \longrightarrow \hat{\psi}_C(x)$. En este caso hacer también el cambio $A_\mu \longrightarrow -A_\mu$ no convierte la ecuación de Schrödinger-Pauli para el positrón (ecuación 6.6) en la ecuación de Schrödinger-Pauli para el electrón (ecuación 6.5). Además, de las fuentes de A_μ externo puede pensarse que están en el infinito.

Se demostró explícitamente que no es posible establecer la operación de conjugación de carga en el límite no relativista de la electrodinámica cuántica como un todo, ya que, debido a que la masa del fotón es cero, no podemos tomar el mencionado límite al campo electromagnético. Sin embargo, sí podemos hablar del límite no relativista de la conjugación de carga en el contexto del campo de Dirac en presencia de un campo electromagnético externo clásico y dar las expresiones, tanto para la matriz C como para el operador $\hat{C}$, en ese caso.

En relación a si el proceso de renormalización podría alterar el análisis realizado anteriormente, debemos tener presente que no se están estudiando, en cada aproximación de teoría de perturbaciones, los elementos de la matriz de dispersión en el límite no relativista. En su lugar, se está hablando del límite no relativista del hamiltoniano, con el cual puede calcularse posteriormente la matriz de dispersión. De esta manera, la renormalización no puede afectar el proceso de toma del límite.

Capítulo 7

El grupo CPT del campo de espín 3/2

7.1. Introducción

En un trabajo anterior se determinó el grupo CPT para el campo de espín 1/2 [31]. En el mismo se encontraron dos conjuntos de soluciones consistentes para las matrices de conjugación de carga (C), paridad (P), e inversión temporal (T), las cuales conllevan a transformaciones para el campo de la forma: $\hat{\psi}_C(x) = C\hat{\bar{\psi}}^T(x)$, $\hat{\psi}_\Pi(x_\Pi) = P\hat{\psi}(x)$ y $\hat{\psi}_\tau(x_\tau) = T\hat{\psi}(x)^*$, donde $x_\Pi = (t, -\mathbf{x})$ y $x_\tau = (-t, \mathbf{x})$. Estos conjuntos están dados por:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } C_D = \pm\gamma^2\gamma^0, & P_D = \pm i\gamma^0, & T_D = \pm i\gamma^3\gamma^1, \\ \text{b) } C_D = \pm i\gamma^2\gamma^0, & P_D = \pm i\gamma^0, & T_D = \pm\gamma^3\gamma^1. \end{array}$$

Cada uno de estos conjuntos genera un grupo no abeliano de dieciséis elementos, respectivamente, $G_\theta^{(1)} \cong DH_8 \times \mathbb{Z}_2$ y $G_\theta^{(2)} \cong 16E$, donde $DH_8 \cong D_4$ y $16E$ es una extensión no trivial de DH_8 por $\mathbb{Z}_2$, isomorfa al producto semidirecto de estos grupos.

Por otra parte, el grupo de operadores cuánticos $\hat{C}$, $\hat{P}$, $\hat{T}$, que actúan sobre el espacio de Hilbert, genera un único grupo $G_{\hat{\theta}} \cong DC_8 \times \mathbb{Z}_2$, donde $DC_8 \cong Q$.

Teniendo esto en cuenta, decidimos estudiar el grupo CPT para el campo de espín 3/2 (campo de Rarita-Schwinger), tanto para el caso masivo como el sin masa [48].

Para describir a partículas de espín 3/2 resulta necesario el conjunto de ecuaciones:

$$(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m)\hat{\psi}^\mu(x) = 0, \tag{7.1}$$

$$\gamma^\mu\hat{\psi}_\mu(x) = 0, \tag{7.2}$$

donde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. A este conjunto de dos ecuaciones se le llama la ecuación de Rarita-Schwinger [15]. La primera de ellas es una ecuación tipo Dirac para cada componente del vector de espinores $\hat{\psi}^\mu$ y la segunda es conocida como la condición subsidiaria.

7.2. Paridad

Si queremos estudiar la invarianza ante paridad de la ecuación de Rarita-Schwinger, necesitamos recurrir al análisis hecho para la ecuación de Dirac en [31] y además considerar la invarianza ante paridad de la ecuación subsidiaria.

Multiplicando esta ecuación por la izquierda por P, cambiando $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ e insertando la unidad, se tiene:

$$\begin{aligned} P\gamma^0P^{-1}P\hat{\psi}_0(t,-\mathbf{x}) + P\gamma^1P^{-1}P\hat{\psi}_1(t,-\mathbf{x}) + P\gamma^2P^{-1}P\hat{\psi}_2(t,-\mathbf{x}) \\ +P\gamma^3P^{-1}P\hat{\psi}_3(t,-\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

pero debemos tener en cuenta que el vector de espinores cambia ante paridad de la siguiente manera:

$$\hat{\psi}_\mu(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_0(t,\mathbf{x}) \\ \hat{\psi}_1(t,\mathbf{x}) \\ \hat{\psi}_2(t,\mathbf{x}) \\ \psi_3(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{\psi}_{\mu\pi}(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P\hat{\psi}_0(t,-\mathbf{x}) \\ -P\hat{\psi}_1(t,-\mathbf{x}) \\ -P\hat{\psi}_2(t,-\mathbf{x}) \\ -P\psi_3(t,-\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \tag{7.4}$$

donde $\hat{\psi}_{\mu\pi}(t,\mathbf{x})$ puede escribirse como $\hat{\psi}_{\mu\pi}(t,\mathbf{x}) = \mathcal{P}P\hat{\psi}_\mu(t,-\mathbf{x})$, con $\mathcal{P} \in O(1,3)$ dado por:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

y $P \in D^{16}$, siendo D^{16} el álgebra de Dirac.

Sustituyendo entonces las componentes de $\hat{\psi}_{\mu\pi}(t,\mathbf{x})$ en (7.3) se obtiene:

$$P\gamma^0 P^{-1}\hat{\psi}_{0\pi}(t,\mathbf{x}) - P\gamma^k P^{-1}\hat{\psi}_{k\pi}(t,\mathbf{x}) = 0, \tag{7.6}$$

de donde podemos deducir las restricciones para P:

$$P\gamma^0 P^{-1} = \gamma^0, \quad P\gamma^k P^{-1} = -\gamma^k, \tag{7.7}$$

o

$$P\gamma^0 P^{-1} = -\gamma^0, \quad P\gamma^k P^{-1} = \gamma^k. \tag{7.8}$$

Las relaciones (7.7) coinciden con las que se obtienen de la ecuación de Dirac, cuya solución ya conocida es $P_D = \pm i\gamma^0$, mientras que de las (7.8) se obtiene $P = P^{'} = z\gamma^3\gamma^2\gamma^1$, con $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Haciendo el mismo análisis que en [31], tenemos dos posibilidades para cada P:

a) $P^2 = +1 \;\Rightarrow\; z = \pm 1 \;\Rightarrow P^{'} = \pm\gamma^3\gamma^2\gamma^1$;
b) $P^2 = -1 \;\Rightarrow\; z = \pm i \;\Rightarrow P^{'} = \pm i\gamma^3\gamma^2\gamma^1$.

En el primer caso:

$$a) P^{'\dagger} = P^{'} = P^{'-1} = -P^{'T} = -P^{'*}, \tag{7.9}$$

y en el segundo:

$$b) P^{'\dagger} = -P^{'} = P^{'-1} = P^{'T} = -P^{'*}. \tag{7.10}$$

7.3. Conjugación de carga

Para estudiar la invarianza ante conjugación de carga de la ecuación subsidiaria, debemos tomar el complejo conjugado de esta ecuación, multiplicarlo por la izquierda por $C\gamma^0$ e insertar la matriz unidad. Esto es:

$$(C\gamma^0)\gamma^{\mu*}(C\gamma^0)^{-1}\hat{\psi}_{\mu C}(x) = 0, \tag{7.11}$$

donde $\hat{\psi}_{\mu C}(x) = C\gamma^0\hat{\psi}^*_\mu(x)$.

En este caso, las restricciones sobre C son:

$$(C\gamma^0)\gamma^{\mu*}(C\gamma^0)^{-1} = \gamma^\mu, \tag{7.12}$$

o

$$(C\gamma^0)\gamma^{\mu*}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu. \tag{7.13}$$

Teniendo en cuenta que $\gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0 = \gamma^{\mu T}$, podemos encontrar las soluciones para las matrices C. La ecuación con el signo negativo es la misma que en el caso de Dirac y conlleva a $C = C_D = \eta\gamma^2\gamma^0$. Sin embargo, de (7.12) se llega a:

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = \gamma^\mu, \tag{7.14}$$

la cual conduce a la solución $C = C' = \eta\gamma^3\gamma^1$.

Una segunda aplicación de la transformación de conjugación de carga conlleva al mismo resultado que en [31] para C_D, mientras que para C' tenemos:

$$\begin{aligned}(\hat{\psi}_C)_C &= \hat{\psi}_{C^2} = C'\hat{\bar{\psi}}^T_C = C'(\hat{\psi}^\dagger_C\gamma^0)^T = C'\gamma^0\hat{\psi}^*_C = C'\gamma^0C'^*\gamma^0\hat{\psi} = -C'C'^*\hat{\psi} \\ &= -|\eta|^2\gamma^3\gamma^1\gamma^{3*}\gamma^{1*}\hat{\psi} = |\eta|^2(\gamma^3)^2(\gamma^1)^2\hat{\psi} = |\eta|^2\hat{\psi}. \end{aligned}\tag{7.15}$$

Como el efecto sobre $\hat{\psi}$ puede ser, como máximo, la multiplicación por una fase, entonces $\eta \in U(1)$ y C' es unitaria. Esto es:

$$C'C'^\dagger = \eta\gamma^3\gamma^1\bar{\eta}(\gamma^3\gamma^1)^\dagger = |\eta|^2\gamma^3\gamma^1\gamma^1\gamma^3 = |\eta|^2\gamma^3(\gamma^1)^2\gamma^3 = |\eta|^2 1 = 1. \tag{7.16}$$

De aquí que, para $C = C'$, también se cumpla que $\hat{\psi}_{C^2} = \hat{\psi}$.

Por otra parte, para la transformación del espinor conjugado de Dirac, teníamos:

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\psi}}_C &= (\hat{\psi}^\dagger\gamma^0)_C = \hat{\psi}^\dagger_C\gamma^0 = (C\gamma^0\hat{\psi}^*)^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}^{*\dagger}\gamma^0C^\dagger\gamma^0 = \hat{\psi}^T\gamma^0\bar{\eta}(\gamma^2\gamma^0)^\dagger\gamma^0 \\ &= -\bar{\eta}\hat{\psi}^T\gamma^2\gamma^0 = -\bar{\eta}^2\hat{\psi}^T\eta\gamma^2\gamma^0 = -\bar{\eta}^2\hat{\psi}^T C \end{aligned}\tag{7.17}$$

y teniendo en cuenta que $\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$ es el operador de densidad de carga, para $C = C'$, tenemos:

$$(\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi})_C = \hat{\bar{\psi}}_C\hat{\psi}_C = -\bar{\eta}^2\hat{\psi}^T C' C' \hat{\bar{\psi}}^T = -\bar{\eta}^2 C'^2 (\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi})^T = -\bar{\eta}^2 C'^2 \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$$
$$= (\bar{\eta}\eta)^2 \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = |\eta|^4 \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = -\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}; \quad (7.18)$$

de donde se obtiene en este caso que $|\eta|^4 = -1$.

Al igual que en [31], debido a consideraciones de simetría, $-\bar{\eta}^2 = \pm 1$ y por tanto, $\eta^2 = \mp 1$, lo que implica que $\eta = \pm 1, \pm i$.

Finalmente, para el campo de espín 3/2 existen dos posibilidades para cada C:

a) $C' = \pm\gamma^3\gamma^1, \qquad C_D = \pm\gamma^2\gamma^0;$
b) $C' = \pm i\gamma^3\gamma^1, \qquad C_D = \pm i\gamma^2\gamma^0.$

7.4. Inversión temporal

Comenzamos de nuevo con la ecuación subsidiaria, cambiamos ahora $t \to -t$, tomamos el complejo conjugado e insertamos la unidad:

$$T\gamma^{0*}T^{-1}T\hat{\psi}_0(-t,\mathbf{x})^* + T\gamma^{1*}T^{-1}T\hat{\psi}_1(-t,\mathbf{x})^* + T\gamma^{2*}T^{-1}T\hat{\psi}_2(-t,\mathbf{x})^*$$
$$+T\gamma^{3*}T^{-1}T\hat{\psi}_3(-t,\mathbf{x})^* = 0, \quad (7.19)$$

pero debemos tener en cuenta que el vector de espinores cambia ante inversión temporal de la siguiente manera:

$$\hat{\psi}_\mu(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_0(t,\mathbf{x}) \\ \hat{\psi}_1(t,\mathbf{x}) \\ \hat{\psi}_2(t,\mathbf{x}) \\ \psi_3(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{\psi}_{\mu\tau}(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -T\hat{\psi}_0(-t,\mathbf{x})^* \\ T\hat{\psi}_1(-t,\mathbf{x})^* \\ T\hat{\psi}_2(-t,\mathbf{x})^* \\ T\psi_3(-t,\mathbf{x})^* \end{pmatrix}; \quad (7.20)$$

donde $\hat{\psi}_{\mu\tau}(t,\mathbf{x})$ puede escribirse como $\hat{\psi}_{\mu\tau}(t,\mathbf{x}) = \mathcal{T}T\hat{\psi}_\mu(-t,\mathbf{x})^*$, con $\mathcal{T} \in O(1,3)$ dado por:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

y $T \in D^{16}$.

Sustituyendo entonces las componentes de $\hat{\psi}_{\mu\tau}(t,\mathbf{x})$ en (7.19) se obtiene:

$$-T\gamma^{0*}T^{-1}\hat{\psi}_{0\tau}(t,\mathbf{x})+T\gamma^{k*}T^{-1}\hat{\psi}_{k\tau}(t,\mathbf{x})=0, \tag{7.22}$$

de donde podemos deducir las restricciones para T:

$$T\gamma^0T^{-1}=\gamma^0, \quad T\gamma^{k*}T^{-1}=-\gamma^k, \tag{7.23}$$

o

$$T\gamma^0T^{-1}=-\gamma^0, \quad T\gamma^{k*}T^{-1}=\gamma^k. \tag{7.24}$$

Las relaciones (7.23) coinciden con las que se obtienen de la ecuación de Dirac, cuya solución ya conocida es $T_D=e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1$, mientras que de las (7.24) se obtiene $T=T^{'}=w\gamma^2\gamma^0$, con $w\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$.

Al aplicar τ dos veces se obtenía en [31]:

$$\hat{\psi}(t,\mathbf{x})\to\hat{\psi}_\tau(t,\mathbf{x})=T\hat{\psi}(-t,\mathbf{x})^*\to T(T\hat{\psi}(t,\mathbf{x})^*)^*=TT^*\hat{\psi}(t,\mathbf{x}). \tag{7.25}$$

Pero para $T=T^{'}$:

$$T^{'}T^{'*}=|w|^2\gamma^2\gamma^0(\gamma^2\gamma^0)^*=-|w|^2\gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^0=|w|^2\gamma^2\gamma^2\gamma^0\gamma^0=-|w|^2 1. \tag{7.26}$$

y por lo tanto,

$$\hat{\psi}_{\tau^2}=-\hat{\psi}, \tag{7.27}$$

por un argumento similar al usado para C. De esta forma $T^{'}T^{'*}=-1$, lo que implica $T^{'*}=-T^{'-1}$ y $w\in U(1)$. Entonces $T^{'}=e^{i\lambda}\gamma^2\gamma^0$ y $T^{'\dagger}=e^{-i\lambda}\gamma^2\gamma^0$.

7.5. Fijando el cuadrado de $\mathrm{P}^{'}$

Fue demostrado en [31] que C y P deben satisfacer la relación:

$$C(P^{-1})^TC^{-1}=P. \tag{7.28}$$

Considerando las dos posibilidades para $C^{'}$ y las dos posibilidades para $P^{'}$, tenemos:

$$a)\, C^{'}(P^{'-1})^TC^{'-1}=\gamma^3\gamma^1(P^{'-1})^T(-\gamma^3\gamma^1)=\begin{cases}\gamma^3\gamma^1(\pm\gamma^3\gamma^2\gamma^1)\gamma^3\gamma^1=-P^{'}\\ -\gamma^3\gamma^1(\pm i\gamma^3\gamma^2\gamma^1)\gamma^3\gamma^1=P^{'},\end{cases} \tag{7.29}$$

$$b)\, C^{'}(P^{'-1})^{T}C^{'-1} = (i\gamma^3\gamma^1)(P^{'-1})^{T}(i\gamma^3\gamma^1) = \begin{cases} \gamma^3\gamma^1(\pm\gamma^3\gamma^2\gamma^1)\gamma^3\gamma^1 = -P^{'} \\ -\gamma^3\gamma^1(\pm i\gamma^3\gamma^2\gamma^1)\gamma^3\gamma^1 = P^{'}; \end{cases} \quad (7.30)$$

lo cual implica $P^{'} = \pm i\gamma^3\gamma^2\gamma^1$ y $P^{'2} = -1$.

7.6. Compatibilidad entre C$^{'}$ y T$^{'}$

De [31] sabemos que C y T cumplen la relación:

$$CT^{*} = TC^{*}. \quad (7.31)$$

Considerando de nuevo las dos soluciones para $C = C^{'}$ y $T = T^{'}$:

$$a)\, C^{'*} = C^{'},\Rightarrow\ C^{'}T^{'*} = T^{'}C^{'} \iff$$

$$\begin{aligned} \gamma^3\gamma^1(-e^{-i\lambda}\gamma^2\gamma^0) &= e^{i\lambda}\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^1 \\ -e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 &= e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^2\gamma^0\gamma^1 \\ -e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 &= e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

lo que implica

$$e^{2i\lambda} = -1\ \Rightarrow\ \lambda = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad (7.33)$$

con $k \in \mathbb{Z}$; entonces

$$e^{i\lambda} = (-1)^k i = \begin{cases} i, & para\ k\ par \\ -i, & para\ k\ impar. \end{cases} \quad (7.34)$$

Así, $T^{'} = \pm i\gamma^2\gamma^0$.

$$b)\, C^{'*} = -C^{'},\Rightarrow\ C^{'}T^{'*} = -T^{'}C^{'} \iff$$

$$\begin{aligned} \gamma^3\gamma^1(-e^{-i\lambda}\gamma^2\gamma^0) &= -e^{i\lambda}\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^1 \\ -e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 &= -e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^2\gamma^0\gamma^1 \\ e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 &= e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

lo que implica

$$e^{2i\lambda} = 1\ \Rightarrow\ \lambda = k\pi, \quad (7.36)$$

con $k \in \mathbb{Z}$; entonces

$$e^{i\lambda} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & para\ k\ par \\ -1, & para\ k\ impar. \end{cases} \quad (7.37)$$

Así, $T^{'} = \pm\gamma^2\gamma^0$.

7.7. El grupo CPT del espín 3/2 con masa

En resumen, se tiene tanto el conjunto de matrices:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } C_D = \pm\gamma^2\gamma^0, & P_D = \pm i\gamma^0, & T_D = \pm i\gamma^3\gamma^1, \\ \text{b) } C_D = \pm i\gamma^2\gamma^0, & P_D = \pm i\gamma^0, & T_D = \pm\gamma^3\gamma^1; \end{array}$$

como el conjunto:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } C' = \pm\gamma^3\gamma^1, & P' = \pm i\gamma^3\gamma^2\gamma^1, & T' = \pm i\gamma^2\gamma^0, \\ \text{b) } C' = \pm i\gamma^3\gamma^1, & P' = \pm i\gamma^3\gamma^2\gamma^1, & T' = \pm\gamma^2\gamma^0; \end{array}$$

satisfaciendo la condición subsidiaria. Pero sólo las matrices C_D, P_D, T_D satisfacen además las ecuaciones tipo Dirac; por lo que son ellas quienes conforman al grupo CPT matricial del espín 3/2 con masa.

Para encontrar el grupo CPT de operadores se sigue el mismo procedimiento desarrollado en [31] para el caso del correspondiente grupo CPT de Dirac.

Siendo $\hat{A}$ y $\hat{B}$ alguno de los operadores $\hat{C}_D$, $\hat{P}_D$ y $\hat{T}_D$, y $\hat{\psi}$ cada componente del vector de espinores $\hat{\psi}^\mu(x)$, se definen:

$$\hat{A}\cdot\hat{\psi} = \hat{A}^\dagger\hat{\psi}\hat{A} \tag{7.38}$$

y

$$(\hat{A}*\hat{B})\cdot\hat{\psi} = (\hat{A}\hat{B})^\dagger\hat{\psi}(\hat{A}\hat{B}). \tag{7.39}$$

Haciendo uso de las anteriores expresiones y con apoyo en el grupo CPT matricial a través de las fórmulas que vinculan las partes matriciales con las de operadores:

$$\begin{aligned} P\hat{\psi}(t,-\mathbf{x}) &= \hat{P}^\dagger\hat{\psi}(t,\mathbf{x})\hat{P}, \\ C\hat{\bar{\psi}}^T(x) &= \hat{C}^\dagger\hat{\psi}(x)\hat{C}, \\ T\hat{\psi}(-t,\mathbf{x})^* &= \hat{T}^\dagger\hat{\psi}(t,\mathbf{x})^\dagger\hat{T}; \end{aligned} \tag{7.40}$$

se obtienen en [31] las relaciones:

$$\begin{gathered} \hat{P}_D*\hat{P}_D = -1, \quad \hat{C}_D*\hat{C}_D = 1, \quad \hat{T}_D*\hat{T}_D = -1, \\ \hat{T}_D*\hat{P}_D = -\hat{P}_D*\hat{T}_D,\ \hat{C}_D*\hat{P}_D = \hat{P}_D*\hat{C}_D,\ \hat{C}_D*\hat{T}_D = \hat{T}_D*\hat{C}_D; \end{gathered} \tag{7.41}$$

con las cuales se construye, usando además la propiedad de asociatividad, la tabla de multiplicación para el grupo CPT de operadores (tabla 3.1).

En [31] fue demostrado además que sólo la segunda de las dos soluciones para el grupo de matrices ($G_{\theta}^{(2)} \cong 16E \cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$), es compatible con el grupo de operadores ($G_{\hat{\theta}} \cong Q \times \mathbb{Z}_2$).

Entonces podemos resumir que para el espín 3/2 con masa, tanto el grupo CPT matricial como el de operadores coinciden con los obtenidos en el caso del campo de Dirac.

7.8. El grupo CPT del espín 3/2 sin masa

Si hacemos cero la masa en la ecuación tipo Dirac y analizamos en la ecuación que nos queda,

$$i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\hat{\psi}(x) = 0, \tag{7.42}$$

su comportamiento ante paridad, conjugación de carga e inversión temporal, tal cual lo hicimos para la condición subsidiaria, respectivamente, tenemos:

$$i(P\gamma^0 P^{-1}\partial_0 - P\gamma^i P^{-1}\partial_i)\hat{\psi}_{\Pi}(x) = 0, \tag{7.43}$$

$$(i\partial_{\mu} + qA_{\mu})(C\gamma^0)\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1}\hat{\psi}_C(x) = 0. \tag{7.44}$$

$$i(\gamma^{0*}\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^{k*}\frac{\partial}{\partial x^k})\hat{\psi}_{\tau}(x) = 0. \tag{7.45}$$

De las anteriores ecuaciones se pueden obtener entonces las correspondientes restricciones para las matrices C, P y T, siendo las mismas, respectivamente:

$$\begin{aligned} P\gamma^0 P^{-1} = \pm\gamma^0, \quad P\gamma^k P^{-1} &= \mp\gamma^k, \\ C\gamma^{\mu T} C^{-1} &= \pm\gamma^{\mu}, \\ T\gamma^0 T^{-1} = \pm\gamma^0, \quad T\gamma^{k*} T^{-1} &= \mp\gamma^k. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Estas relaciones generan los mismos conjuntos de matrices C_D, P_D, T_D y C', P', T' que arrojaba la condición subsidiaria. La diferencia radica en que en este caso no tenemos un criterio evidente para preferir uno de los conjuntos.

No obstante, sabemos que sólo existen tres grupos no abelianos con tres generadores de dieciséis elementos: $G_\theta^{(1)} \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$ (con cuatro menos unos en la diagonal de la tabla de multiplicación del grupo), $G_\theta^{(2)} \cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ (con ocho menos unos en la diagonal) y $G_{\hat{\theta}} \cong Q \times \mathbb{Z}_2$ (con doce menos unos en la diagonal). Entonces, los posibles grupos que se obtengan del conjunto de matrices $C^{'}, P^{'}, T^{'}$ sólo pueden ser algunos de esos tres.

Calculando los elementos de la diagonal, para el primer caso tenemos:

$$\begin{aligned} a)\; C^{'2} &= -1,\; P^{'2} = -1,\; T^{'2} = -1, \\ (C^{'}P^{'})^2 &= 1,\; (C^{'}T^{'})^2 = 1,\; (P^{'}T^{'})^2 = -1,\; \theta^{'} = 1; \end{aligned} \tag{7.47}$$

mientras que para el segundo:

$$\begin{aligned} b)\; C^{'2} &= 1,\; P^{'2} = -1,\; T^{'2} = 1, \\ (C^{'}P^{'})^2 &= -1,\; (C^{'}T^{'})^2 = 1,\; (P^{'}T^{'})^2 = 1,\; \theta^{'} = 1. \end{aligned} \tag{7.48}$$

De aquí podemos concluir que el caso $a)$ corresponde ahora al grupo $G_\theta^{(2)} \cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ (con $4 \times 2 = 8$ menos unos en la diagonal), mientras que el caso $b)$ es $G_\theta^{(1)} \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$ (con $2 \times 2 = 4$ menos unos en la diagonal). Entonces el conjunto de matrices C_D, P_D, T_D y el $C^{'}, P^{'}, T^{'}$ generan los dos mismos grupos CPT matriciales: $G_\theta^{(1)}$ y $G_\theta^{(2)}$.

De [31] se sabe que el grupo matricial correcto es el $G_\theta^{(2)}$ y al mismo corresponde el grupo de operadores $G_{\hat{\theta}}$.

7.9. Comentarios finales

Encontramos que para el campo de espín 3/2, tanto el grupo CPT matricial como el de operadores, coinciden con los obtenidos para el campo de Dirac.

Tanto en el caso masivo como en el sin masa, la ecuación subsidiaria arroja un nuevo conjunto de matrices $C^{'}, P^{'}, T^{'}$, además del conocido conjunto C_D, P_D, T_D que sale de las ecuaciones tipo Dirac. Cuando consideramos la masa es fácil descartar el conjunto primado pues no cumple con las ecuaciones tipo Dirac, pero al no contemplar la misma es necesario demostrar que los conjuntos C_D, P_D, T_D y $C^{'}, P^{'}, T^{'}$ conducen a los mismos grupos CPT que en el caso de Dirac.

Capítulo 8

Conclusiones generales

Nos habíamos propuesto como objetivos principales de esta tesis doctoral estudiar el límite no relativista de la operación de conjugación de carga en el contexto de la electrodinámica cuántica y determinar el grupo CPT para el campo de espín 3/2.

Al realizar la investigación correspondiente llegamos a la conclusión de que no es posible establecer el mencionado límite en el marco de la *QED*, por tener el fotón masa cero. No obstante, fue posible establecer el límite galileano de C para el campo de Dirac en presencia de un campo electromagnético externo clásico, dando explícitamente las expresiones tanto para la matriz C [43], como para el operador $\hat{C}$ y los operadores de creación y aniquilación de electrones y positrones [47], en este caso.

En cuanto al grupo CPT para el campo de espín 3/2 encontramos que tanto el grupo matricial ($G_{\theta}^{(2)} \cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$) como el de operadores ($G_{\hat{\theta}} \cong Q \times \mathbb{Z}_2$) coinciden con los obtenidos para el campo de Dirac. Analizamos también, como caso particular, al campo de espín 3/2 sin masa, debido a su importancia por tratarse posiblemente del campo del gravitino. Conluimos que nuestros resultados no dependen de si el campo posee o no masa. Como en ambos casos estamos tratando con espines semienteros, para el campo de espín 3/2 se obtuvo que $P^2 = -1$, al igual que para el campo de espín 1/2.

Adicionalmente a estos objetivos demostramos que el grupo CPT de operadores para el campo cuántico de Dirac, el cual incluye a la operación de conjugación de carga, emerge de manera natural a partir del grupo PT y sus subgrupos P (o T), es decir, a partir de matrices que actúan sobre el espacio-tiempo clásico de Minkowski.

Asimismo calculamos las representaciones irreducibles inequivalentes tanto del mencionado grupo operacional para el campo de espín 1/2 ($Q \times \mathbb{Z}_2$), como del grupo CPT del campo electromagnético ($\mathbb{Z}_2^3$). Encontramos que, desde el punto de vista de la teoría de grupos, el campo del fotón ante las transformaciones C, P, T, es independiente del comportamiento del campo del electrón-positrón. Por esta razón, el grupo CPT de la electrodinámica cuántica es el producto directo de los dos anteriores grupos ($(Q \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2^3 \cong Q \times \mathbb{Z}_2^4$).

En resumen, en este trabajo estudiamos principalmente las estructuras de grupos CPT para los campos libres de Dirac, electromagnético y de Rarita-Schwinger; así como también para el caso de la electrodinámica cuántica. Calculamos además las correspondientes representaciones irreducibles de estos grupos.

Bibliografía

[1] S. Weinberg, 1997, *What is quantum field theory, and what did we think it is?*, arXiv: hep-th/9702027.

[2] G. Luders, 1957, *Proof of the TCP theorem*, Annals of Physics, **2**, 1-15.

[3] W. Pauli, 1955, *Exclusion principle, Lorentz group and reflection of space-time and charge*, Niels Bohr and the Development of Physics, (McGraw-Hill, New York), 30-51.

[4] R. Jost, 1957, *Eine Bemerkung zum CTP-Theorem*, Helv. Phys. Acta **30**, 409-416.

[5] J. S. Bell, 1955, *Time reversal in field theory*, Proceedings Royal Society of London, A, **231**, 479-495.

[6] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, 1982 , *Quantum Electrodynamics, Vol. IV* (Pergamon Press, Oxford), 45.

[7] I. I. Bigi, A. I. Sanda , 2000 , *CP Violation* (Cambridg e University Press).

[8] W. Greiner, J. Reinhardt, 2003 , *Quantum Electrodynamics* (Springer).

[9] Lewis H. Ryder, 2001 , *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press), 1.

[10] R. P. Feynman, 1983 , *QED: The Strange Theory of Light and Matter* (Princeton University Press).

[11] P. Ramond, 1981, *Field Theory, a Modern Primer* (The Benjamin / Cummings Publishing Company, INC), 6-29.

[12] J. J. Sakurai , 1985 , *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc).

[13] S. Weinberg , 1995 , *The Quantum Theory of Fields, Volume I Foundations* (Cambridge University Press), 232.

[14] S. Weinberg , 2000 , *The Quantum Theory of Fields, Volume III Supersymetry* (Cambridge University Press), 333-337.

[15] W. Rarita y J. Schwinger , 1941, *On a theory of particles with half-integral spin*, Phys. Rev., **60**, 61.

[16] F. Riazuddin, 2000, *A Modern Introduction to Particle Physics, Second Edition* (World Scientific), 121-122.

[17] D. Lurié , 1968 , *Particles and Fields* (Interscience Publishers), 161-164.

[18] G. Velo y D. Zwanzinger, 1969, *Noncausality and other defects of interaction lagrangians for particles with spin one and higher*, Phys. Rev., **188**, No 5, 2218-2222.

[19] G. Velo y D. Zwanzinger, 1969, *Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential*, Phys. Rev., **186**, No 5, 1337-1341.

[20] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, 1980, *Introduction to the Theory of Quantized Fields, 3rd. edition*, (Wiley, New York), 87.

[21] H. B. Jr. Lawson and M. L. Michelsohn, 1989, *Spin Geometry*, (Princeton University Press, Princeton).

[22] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hopper y R. F. Hudson, 1957, *Experimental test of parity conservation in beta decay*, Phys. Rev., **105**, 1413-1415.

[23] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch y R. Turlay, 1964, *Evidence for the 2π decay of the K_2^0 meson*, Phys. Rev. Lett., **13**, 138-140.

[24] V. L. Fitch, 1981, *The discovery of charge-conjugation parity asymmetry*, Reviews of Modern Physics, **53**, No. 3, 367-371.

[25] G. Bayn, 1990, *Lectures on Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc), 38-45.

[26] J. A. de Azcárraga, 1975, *P, C, T, θ in Quantum Field Theory*, GIFT 7/75, 69.

[27] A. Ferrer, 2006 , *Física Nuclear y de partículas, Segunda Edición* (Publicado por Universidad de Valencia), 462.

[28] W. Greiner, J. Reinhardt, 1993 , *Field Quantization* (Springer), 301-320.

[29] K. H. Mariwalla , 1962, *Explicit representation of discrete-symmetry operators in Quantum Theory of free fields*, Reviews of Modern Physics, **34**, 215-226.

[30] P. G. Federbush and M. T. Grisaru , 1958, *Representation of symmetry operators*, Il Nuovo Cimento, **IX**, 890-894.

[31] M. Socolovsky, 2004, *The CPT group of the Dirac Field*, International Journal of Theoretical Physics, **43**, 1941-1967; arXiv: math-ph/0404038.

[32] Anton Z. Capri, 2002, *Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Quantum Field Theory* (World Scientific).

[33] B. Carballo Pérez y M. Socolovsky, 2010, *Irreducible representations of the CPT groups in QED*, aceptado en International Journal of Pure and Applied Mathematics; arXiv: math-ph/0906.2381v3.

[34] B. Carballo Pérez y M. Socolovsky, 2009, *Charge conjugation from spacetime inversion*, Int J Theor Phys, **48**, 1712-1716; arXiv: hep-th/0811.0842v1.

[35] D. Asche, 1989 , *An Introduction to Groups* (Hilger, Bristol).

[36] S. Sternberg, 1994 , *Group Theory and Physics* (Cambridge University Press).

[37] O. W. Greenberg, 2006, Why is CPT fundamental?, *Foundations of Physics* **36**, 1535-1553; arXiv: hep-ph/0309309 v1.

[38] J. D Bjorken and S. D. Drell, 1965, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York).

[39] Wu-Ki Tung, 2003, *Group Theory in Physics*, World Scientific, New Jersey, 31-32.

[40] M. Planat, 2009, *Three-qubit entanglement embeddings of CPT and Dirac groups within E_8 Weyl group*, arXiv: quant-ph/0906.1063 v1.

[41] N. D. Mermin, 1993, *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, Review of Modern Physics, **65**, 803-815.

[42] M. A. B. Bég, R. C. Furlong , 1985 , $\lambda\Phi^4$ *in the nonrelativistic limit*, Phys. Rev. D, **31**, No. 6, 1370-1373.

[43] A. Cabo, D.B. Cervantes, H. Pérez Rojas y M. Socolovsky, 2006, *Remark on charge conjugation in the non relativistic limit*, International Journal of Theoretical Physics, **45**, 1989-2000; arXiv: hep-th/ 0504223.

[44] M. Socolovsky, 2006, *Charge conjugation in the galilean limit*, Electromagnetic Phenomena, **6**, No. 10, 132-135 (2006); arXiv: hep-th/ 0603137.

[45] M. Amoretti et al., 2002, *Production and detection of cold antihydrogen atoms*, Nature **419**, 456-459.

[46] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, 1992, *Teoría Clásica de los Campos*, (Editorial Reverté, S. A.), 88.

[47] B. Carballo Pérez y M. Socolovsky, 2010, *On the non-relativistic limit of charge conjugation in QED*, arXiv: hep-th/1001.0757v2.

[48] B. Carballo Pérez y M. Socolovsky, 2010, *The CPT group of the spin-3/2 field*, arXiv: hep-th/1001.0751v1.

Índice de tablas